（又称|简称|记|简记）

（！）不重不漏

（？）不重

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 命题：能判断真假的陈述句。 | | | |
| ┣ | 判断为正确的命题的真值（或值）为真。判断为错误的命题的真值（或值）为假。 | | |
| ┗ | 分类 | | |
|  | ┗ | 按能否分解成更简单的句子（？） | |
|  |  | ┣ | 简单命题（原子命题、命题长项、命题常元）：不能分解成更简单的句子的命题。 |
|  |  | ┗ | 复合命题：由简单命题用联结词联结而成的命题。 |
| 命题变项（命题变元）：真值可以变化的简单陈述句。 | | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 真值联结词（逻辑联结词） | | |
| ┣ | 否定联结词（||）  （的）否定式（否||）：复合命题“非”（或“的否定”）。 | |
| ┣ | 合取联结词（||）  （与的）合取式（合取||）：复合命题“并且”（或“和”）。 | |
| ┣ | 析取联结词（||）  （与的）析取式（析取||）：复合命题“或”。 | |
| ┣ | 蕴含联结词（||）  （与的）蕴涵式（蕴涵||）：复合命题“如果，则”。 | |
| ┃ | ┣ | （蕴涵式的）前件：。 |
| ┃ | ┗ | （蕴涵式的）后件：。 |
| ┗ | 等价联结词（||）  （与的）等价式（等价于||）：复合命题“当且仅当”。 | |

优先级按从高到低：。

结合性：从左向右。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 命题公式（|公式）：  （1）单个命题常项或变项及，是命题公式。  （2）如果是命题公式，则也是命题公式。  （3）如果、是命题公式，则、、、也是命题公式。  （4）只有有限次地应用（1）～（3）组成的符号串才是命题公式。 | | | | |
| ┣ | 命题公式层次：  （1）若是单个命题常项或命题变项，则是层公式。  （2）是（）层公式：  ①，是层公式。  ②，、分别是层和层公式，。  ③，、分别是层和层公式，。  ④，、分别是层和层公式，。  ⑤，、分别是层和层公式，。 | | | |
| ┣ | （是命题公式的）子公式：是命题公式的一部分，本身也是一个命题公式。 | | | |
| ┣ | （对的一个）赋值（解释）：为一命题公式，为出现在中的所有的命题变项。给指定一组真值。 | | | |
| ┃ | ┣ | （的）成真赋值：指定的一组值使的值为真，这组值。 | | |
| ┃ | ┗ | （的）成假赋值：指定的一组值使的值为假，这组值。 | | |
| ┣ | （的）真值表：将命题公式在所有赋值之下取值的情况列成表。  同一真值函数所对应的所有命题公式具有相同的真值表。 | | | |
| ┣ | 分类 | | | |
| ┃ | ┗ | 按所有赋值下的取值（！） | | |
| ┃ |  | ┣ | （是）可满足式：至少存在一组成真赋值。 | |
| ┃ |  | ┃ | ┗ | （是）重言式（永真式）：在所有赋值下取值均为真。 |
| ┃ |  | ┗ | （是）矛盾式（永假式）：在所有赋值下取值均为假。 | |
| ┗ | 关系 | | | |
|  | ┣ | （与是）等值的（恒等于、逻辑恒等式||）：、为两命题公式，等价式是重言式。  等值演算：根据已知的等值式，推演出与给定的公式等值的公式的过程。 | | |
|  | ┗ | 推出结论的推理正确（||、）：为重言式。 | | |
|  |  | ┣ | （的）逻辑结论（有效结论）：。 | |
|  |  | ┗ | （推出结论的推理的）形式结构：。 | |

一个含有命题变项的命题公式的真值是不确定的，只有对它的每个命题变项用指定的命题常项代替后，命题公式才变成命题，其真值也就唯一确定了。

置换定理：设是含命题公式的命题公式，是用命题公式置换了中的之后得到的命题公式。如果，则。

常见等值式

|  |  |
| --- | --- |
| **双重否定律** |  |
| **等幂率** |  |
| **交换律** |  |
| **结合律** |  |
| **分配律** |  |
| **德·摩根律** |  |
| 吸收律（同一律，分配律，零律，同一律） |  |
| 零律（排中律、矛盾律，结合律，等幂率，排中律、矛盾律） |  |
| **同一律**（排中律、矛盾律，吸收律） |  |
| **排中律** |  |
| **矛盾律** |  |
| **蕴涵等值式** |  |
| **等价等值式** |  |
| 假言易位（蕴涵等值式，双重否定律，交换律，蕴涵等值式） |  |
| 等价否定等值式（等价等值式，假言易位，交换律，等价等值式） |  |
| 归谬论（蕴涵等值式，分配律，矛盾律，同一律） |  |

推理：从前提推出结论的思维过程。

前提：已知的命题公式。

结论：从前提出发应用推理规则推出的命题公式

常见推理定律（重言蕴涵式）

|  |  |
| --- | --- |
| 附加 |  |
| 化简 |  |
| 假言推理 |  |
| 拒取式 |  |
| 析取三段论 |  |
| 假言三段论 |  |
| 等价三段论 |  |
| 构造性二难 |  |
| 构造性二难（特殊形式） |  |

证明：一个描述推理过程的命题公式序列，其中每个命题公式或者是已知的前提，或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论。

常用推理规则：⊧

|  |  |
| --- | --- |
| 前提引入规则 | 在证明的任何一步，都可以引入前提。 |
| 结论引入规则 | 在证明的任何一步，前面已经证明的结论都可以作为后续证明的前提。 |
| 置换规则 | 在证明的任何步骤上，命题公式中的任何子命题公式都可以用与之等值的命题公式置换。 |
| 假言推理规则 |  |
| 附加规则 |  |
| 化简规则 |  |
| 拒取式规则 |  |
| 假言三段论规则 |  |
| 析取三段论规则 |  |
| 构造性二难规则 |  |
| 破坏性二难规则 |  |
| 合取引入规则 |  |

附加前提证明法：要证明的结论以蕴涵式的形式出现，将结论中的前件作为前提证明后件是有效结论的证明法。

（是）相容的：是可满足式。

（是）不相容的：是矛盾式。

归谬法：将作为附加前提推出矛盾的证明方法。

命题公式的标准型：主析取范式和主合取范式。

同一真值函数所对应的所有命题公式具有相同的标准型。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 简单析取式：仅由有限个命题变项或其否定构成的析取式。 | | |
| ┣ | 极大项：设有个命题变项，在简单析取式中每个命题变项与其否定有且仅有一个出现一次，这样的简单析取式。 | |
| ┗ | 合取范式：仅由有限个简单析取式构成的合取式。 | |
|  | ┗ | （的）主合取范式：公式的合取范式中的简单析取式全是极大项，该合取范式。 |
| 简单合取式：仅由有限个命题变项或其否定构成的合取式。 | | |
| ┣ | 极小项：设有个命题变项，在简单合取式中每个命题变项与其否定有且仅有一个出现一次，这样的简单合取式。 | |
| ┗ | 析取范式：仅由有限个简单合取式构成的析取式。 | |
|  | ┗ | （的）主析取范式：公式的析取范式中的简单合取式全是极小项，该析取范式。 |

范式存在定理：任一命题公式都存在与之等值的析取范式和合取范式

任何命题公式都有唯一的主析取范式。

任一命题公式都有唯一的主合取范式。

最简展开式：包含运算最少的公式。

元真值函数（||）：一个（）阶笛卡儿积到的函数。

全功能集：设是一个联结词集合，任一真值函数都可以用仅含中的联结词的命题公式表示，。

|  |  |
| --- | --- |
| 个体词：可以独立存在的客体。 | |
| ┣ | 个体常项：表示具体的或特定的个体的词。 |
| ┗ | 个体变项：表示抽象的，或泛指的个体的词。 |
| 个体域（论域）：个体变项的取值范围。 | |
| ┗ | 全总个体域：当无特殊声明时，个体域由宇宙间的一切事物组成。 |
| 谓词：用来刻画个体词的性质或个体词之间关系的词。  也把个体变项和谓词的联合体称为谓词。 | |
| ┣ | 谓词常项：表示具体性质或关系的谓词。 |
| ┣ | 谓词变项：表示抽象的或泛指的谓词。 |
| ┣ | 元数：谓词中包含的个体词数。 |
| ┣ | 元谓词：含（）个个体词的谓词。 |
| ┗ | 元谓词：不带个体变项的谓词。  简单命题相当于元谓词常项。 |
| 量词：表示数量的词。 | |
| ┣ | 全称量词（||） |
| ┗ | 存在量词（||） |

特性谓词

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 项：  （1）个体常项和变项是项。  （2）若是任意元函数，是项，则也是项。  （3）只有有限次地使用（1）、（2）生成的符号串才是项。 | | | | |
| 原子公式：设是任意的元谓词，是项，。 | | | | |
| 谓词公式（|公式）：  （1）原子公式是谓词公式。  （2）若是谓词公式，则也是谓词公式。  （3）若、是谓词公式，则、、、也是谓词公式。  （4）若是谓词公式，则、也是谓词公式。  （5）只有有限次地应用（1）～（4）组成的符号串才是谓词公式。 | | | | |
| ┣ | （量词的）辖域：在谓词公式和中，。 | | | |
| ┣ | 指导变项：在谓词公式和中，。 | | | |
| ┃ | ┣ | 约束出现：在辖域中，的所有出现。 | | |
| ┃ | ┗ | 自由出现：不是约束出现的变项的出现。  用表示是自由出现的任意的公式，用表示、是自由出现的公式。 | | |
| ┣ | 解释：  （1）非空个体域。  （2）给论及的每一个个体常项符号指定一个中的元素。  （3）给论及的每一个函数变项符号指定一个上的函数。  （4）给论及的每一个谓词变项符号指定一个上的谓词。 | | | |
| ┃ | ┗ | （在解释下的）赋值：给定解释，对公式中每个自由出现的个体变项指定个体域中的一个元素。 | | |
| ┣ | （的）代换实例：设是含命题变项的命题公式，是个谓词公式，用处处代换（），所得公式。 | | | |
| ┣ | 分类 | | | |
| ┃ | ┣ | 按所有赋值和解释下的取值（！） | | |
| ┃ | ┃ | ┣ | 可满足式：至少存在一个解释和该解释下的一个赋值使为真，。 | |
| ┃ | ┃ | ┃ | ┗ | 逻辑有效式（永真式）：在任何解释和该解释下的任何赋值下都为真，。 |
| ┃ | ┃ | ┗ | 矛盾式（永假式）：在任何解释和该解释下的任何赋值下都为假，。 | |
| ┃ | ┗ | 按自由出现的个体变项数量（？） | | |
| ┃ |  | ┗ | 封闭的谓词公式（|闭式）：若公式中无自由出现的个体变项，。 | |
| ┗ | 关系 | | | |
|  | ┗ | （与是）等值的（等值式||）：设、是一阶逻辑中的两公式，为逻辑有效式。 | | |

换名规则：将一个指导变项及其在辖域中所有约束出现替换成公式中没有出现的个体变项符号。

使用换名规则所得公式与原来的公式是等值的。

对闭式来说，由于每个个体变项都受量词的约束，因而在任何解释下总表达一个意义确定的语句，即是一个命题。对于非闭式的公式，如果进一步给每个自由出现的个体变项指定个体域中的一个元素，那么它也成为命题。在给定的解释和赋值下，任何公式都是命题。

命题公式中的重言式的代换实例都是永真式，命题公式中的矛盾式的代换实例都是矛盾式。

常见等值式

|  |  |
| --- | --- |
| 量词否定等值式 |  |
| 量词辖域收缩与扩张等值式 |  |
| 量词分配等值式 |  |
|  |  |

前束范式（谓词公式的规范形式）：设为一谓词公式，如果具有如下形式：（其中每个（）为或，为不含量词的谓词公式），。

（的）前束范式：在一阶逻辑中，任何谓词公式都存在与其等值的前束范式，这样的前束范式。

公式的前束范式是不唯一的。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 集合（：一些可确定的、可分辨的事物构成的整体。） | | | | | |
| ┣ | （集合的）元素：对于给定的集合和事物，应该可以断定这个特定的事物是否属于这个集合。如果属于，就称它为这个集合的元素。  在集合论中，人们还规定元素之间是彼此相异的，并且是没有次序关系的。 | | | | |
| ┣ | 关系：   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  | |  | | （，） | （，） | |  |  |  | | （） | | | |  | | | |  | | |  | | | |  | | | （） | | |  |  |  | | （，） | | （，） | |  | |  | | | | | | | | |
| ┃ | ┣ | （为的）子集合（被包含、包含|子集|）：设、为集合，中的每个元素都是中的元素。 | | | |
| ┃ | ┣ | 不被包含（||） | | | |
| ┃ | ┣ | （与）相等（||）：设、为集合，且。 | | | |
| ┃ | ┣ | （和）不相等（||） | | | |
| ┃ | ┣ | （是的）真子集（||）：设、为集合，且。 | | | |
| ┃ | ┣ | （不是的）真子集（||） | | | |
| ┃ | ┗ | 当两个集合的交集是空集时，称它们是不交的。 | | | |
| ┣ | 运算 | | | | |
| ┃ | ┣ | （的）幂集（||、P、）：设为集合，的全体子集构成的集合。 | | | |
| ┃ | ┣ | （与的）并集（||）：。 | | | |
| ┃ | ┣ | （与的）交集（||）：。 | | | |
| ┃ | ┣ | （对的）相对补集（||）：。 | | | |
| ┃ | ┃ | ┗ | （的）绝对补集（||、）：设为全集，，对的相对补集，即。 | | |
| ┃ | ┣ | （与的）对称差（||）：。 | | | |
| ┃ | ┗ | 基数（||、）：集合含有的元素的个数。 | | | |
| ┣ | 分类 | | | | |
| ┃ | ┣ | 按元素个数（？） | | | |
| ┃ | ┃ | ┗ | （为）有穷集：设为集合，存在自然数，使得。 | | |
| ┃ | ┃ |  | ┗ | 元集：含有个元素的集合。  （它的）元子集：它的含有（）个元素的子集。 | |
| ┃ | ┃ |  |  | ┗ | 空集（||）：不含任何元素的集合。 |
| ┃ | ┃ |  | （为）无穷集：否则。 | | |
| ┃ | ┗ | 按和其它集合的关系（？） | | | |
| ┃ |  | ┗ | 全集（||、）：在一个具体问题中，所涉及的集合都是某个集合的子集。 | | |
| ┗ | 性质 | | | | |
|  | ┣ | 空集 | | | |
|  | ┃ | ┗ | 空集是一切集合的子集。 | | |
|  | ┃ |  | ┗ | （空集是一切集合的子集。）空集是唯一的。 | |
|  | ┗ | 交运算，并运算，基数：包含排斥原理：中不具有性质的元素数是。  中至少具有一条性质的元素数是。 | | | |

常见运算律

|  |  |
| --- | --- |
| 幂等律 |  |
| 结合律 |  |
| 交换律 |  |
| 分配律 |  |
| 同一律 |  |
| 零律 |  |
| 排中律 |  |
| 矛盾律 |  |
| 吸收律 |  |
| 德·摩根律 |  |
| 双重否定律 |  |
|  |  |
|  |  |
| 消去律 |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 有序对（序偶||、）：由两个元素和按一定的顺序排列成的二元组。 | | | |
| ┣ | （它的）第一元素：。 | | |
| ┣ | （它的）第二元素：。 | | |
| ┣ | 关系 | | |
| ┃ | ┗ |  | |
| ┣ | 有序元组（）（||）：一个有序对，其中第一个元素是一个有序元组。  形式上也可以把看成有序元组。 | | |
| ┣ | 运算 | | |
| ┃ | ┗ | （和的）笛卡儿积（||）：设、为集合，用中元素为第一元素，中元素为第二元素，构成有序对。所有这样的有序对组成的集合。 | |
| ┃ |  | ┗ | （的）阶笛卡儿积（|||（当时））：设是集合（）。 |
| ┗ | 性质 | | |
|  | ┣ | 笛卡儿积： | |
|  | ┣ | 笛卡儿积，交运算： | |
|  | ┗ | 笛卡儿积，并运算： | |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 多元关系 | | | | | |
| 二元关系（||）：一个集合为空集或它的元素都是有序对，这个集合。 | | | | | |
| ┣ | （||） | | | | |
| ┗ | （||） | | | | |
| 从到的二元关系（（当时）上的二元关系）：设、为集合，的任何子集所定义的二元关系。 | | | | | |
| ┣ | （的）关系矩阵：，，，。设，是上的关系，令，。 | | | | |
| ┣ | （的）关系图：是顶点的集合，是有向边的集合，，，。 | | | | |
| ┣ | 分类 | | | | |
| ┃ | ┗ | 按、的关系（？） | | | |
| ┃ |  | ┗ | 上的关系：。 | | |
| ┃ |  |  | ┣ | 空关系：。 | |
| ┃ |  |  | ┣ | 全域关系（||）：。 | |
| ┃ |  |  | ┣ | 恒等关系（||）：。 | |
| ┃ |  |  | ┣ | 自反性：。 | |
| ┃ |  |  | ┣ | 反自反性：。 | |
| ┃ |  |  | ┣ | 对称性：。 | |
| ┃ |  |  | ┣ | 反对称性：。、 | |
| ┃ |  |  | ┗ | 传递性：。 | |
| ┣ | 运算 | | | | |
| ┃ | ┣ | （关系的）定义域（||）：。 | | | |
| ┃ | ┣ | （关系的）值域（||）：。 | | | |
| ┃ | ┣ | （关系的）域（||）：。 | | | |
| ┃ | ┣ | （关系的）逆（||）：。 | | | |
| ┃ | ┣ | （与的）合成（||）：左复合，右复合。  关系矩阵相乘时使用的逻辑加：。 | | | |
| ┃ | ┃ | ┗ | （的）次幂：设为上的关系，为自然数，（1），（2）。 | | |
| ┃ | ┣ | （在上的）限制（||〡）：。 | | | |
| ┃ | ┣ | （在下的）像（||）：〡。 | | | |
| ┃ | ┣ | （的）自反闭包（||）：设是非空集合上的关系，上的关系，满足：  （1）是自反的。  （2）。  （3）是上的包含的自反关系。 | | | |
| ┃ | ┣ | （的）对称闭包（||）：设是非空集合上的关系，上的关系，满足：  （1）是对称的。  （2）。  （3）是上的包含的对称关系。 | | | |
| ┃ | ┗ | （的）传递闭包（||）：设是非空集合上的关系，上的关系，满足：  （1）是传递的。  （2）。  （3）是上的包含的传递关系。 | | | |
| ┣ | 性质 | | | | |
| ┃ | ┣ | 运算逆： | | | |
| ┃ | ┣ | 定义域，值域，运算逆： | | | |
| ┃ | ┣ | 运算合成：      　　　　　对于有穷集和上的关系，的不同的幂只有有限个。 | | | |
| ┃ | ┣ | 运算交，运算合成： | | | |
| ┃ | ┣ | 运算并，运算合成： | | | |
| ┃ | ┣ | 运算逆，运算合成： | | | |
| ┃ | ┣ | 自反闭包： | | | |
| ┃ | ┣ | 对称闭包： | | | |
| ┃ | ┗ | 传递闭包： | | | |
| ┣ | 的一个划分：设是非空集合，存在，满足：  （1）。  （2）。  （3）。 | | | | |
| ┃ | ┗ | 划分块：中的元素。 | | | |
| ┣ | 分类 | | | | |
| ┃ | ┗ | 按、的关系（？） | | | |
| ┃ |  | ┗ | 上的关系：。 | | |
| ┃ |  |  | ┣ | （上的）等价关系：设为非空集合上的关系，是自反的、对称的和传递的，。 | |
| ┃ |  |  | ┃ | ┗ | 等价关系（||） |
| ┃ |  |  | ┗ | （上的）偏序关系（|偏序|）：设为非空集合上的关系，是自反的、反对称的和传递的，。 | |
| ┃ |  |  |  | ┣ | （“小于等于”||）  （||） |
| ┃ |  |  |  | ┣ | 偏序集（||）：一个集合与上的偏序关系一起。 |
| ┃ |  |  |  | ┣ | 与是可比的：设为偏序集，。 |
| ┃ |  |  |  | ┣ | 盖住：。 |
| ┃ |  |  |  | ┣ | 哈斯图：简化的关系图，用于描述有限的偏序集。结点位置按它们在偏序中的次序从底向上排列。如果盖住，则在和之间连一条线。 |
| ┃ |  |  |  | ┗ | （上的）全序关系（为全序集（线序集））：设为偏序集，与是可比的，。  全序集的哈斯图是一条线。 |
| ┣ | 运算 | | | | |
| ┃ | ┣ | 关于的等价类（|的等价类||）：设是非空集合上的等价关系，对任意的，令。 | | | |
| ┃ | ┗ | ┗ | 在下的商集（||）：设为非空集合上的等价关系，以的不交的等价类为元素的集合。 | | |
| ┃ | ┣ | 由所诱导的划分：商集。 | | | |
| ┃ | ┣ | 由划分所诱导的等价关系：如下定义上的二元关系，。 | | | |
| ┃ | ┣ | 的最小元：为偏序集，，，。在哈斯图中，从出发只向上移动可以到达所有元素。 | | | |
| ┃ | ┣ | 的最大元：为偏序集，，，。在哈斯图中，从出发只向下移动可以到达所有元素。 | | | |
| ┃ | ┣ | 的极小元：为偏序集，，，。在哈斯图中，从出发无法向下移动。 | | | |
| ┃ | ┣ | 的极大元：为偏序集，，，。在哈斯图中，从出发无法向上移动。 | | | |
| ┃ | ┣ | 的上界：为偏序集，，，。 | | | |
| ┃ | ┣ | 的下界：为偏序集，，，。 | | | |
| ┃ | ┣ | 的最小上界（上确界）：为偏序集，，为的上界的最小元。 | | | |
| ┃ | ┗ | 的最大下界（上确界）：为偏序集，，为的下界的最大元。 | | | |
| ┗ | 性质 | | | | |
|  | ┣ | 运算等价类：    　　　　　　集合上的等价关系与集合的划分是一一对应的。 | | | |
|  | ┣ | 最小上界：如果最小上界存在，一定是唯一的。 | | | |
|  | ┗ | 最大下界：如果最大上界存在，一定是唯一的。 | | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 运算交 | 自反性 |  |
| 反自反性 |  |
| 对称性 |  |
| 反对称性 |  |
| 传递性 |  |
| 运算并 | 自反性 |  |
| 反自反性 |  |
| 对称性 |  |
| 反对称性 |  |
| 传递性 |  |
| 运算相对补 | 自反性 |  |
| 反自反性 |  |
| 对称性 |  |
| 反对称性 |  |
| 传递性 |  |
| 运算逆 | 自反性 |  |
| 反自反性 |  |
| 对称性 |  |
| 反对称性 |  |
| 传递性 |  |
| 运算合成 | 自反性 |  |
| 反自反性 | / |
| 对称性 | / |
| 反对称性 | / |
| 传递性 | / |

┣

┃

┗

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 函数：为二元关系，对任意的都存在唯一的使得成立，。 | | | | | | |
| ┣ | 函数（是在的函数值||） | | | | | |
| ┗ | 关系 | | | | | |
|  | ┗ | 相等：。 | | | | |
| 从到的函数（||）：设、是集合，，。 | | | | | | |
| ┣ | （上||）：设、为集合，。 | | | | | |
| ┣ | （在下的）像（（当时）函数的像||）：设，，。 | | | | | |
| ┣ | 分类 | | | | | |
| ┃ | ┣ | 按中是否含有对应中个元素的元素（？） | | | | |
| ┃ | ┃ | ┗ | （是）满射的（到上的）：。 | | ┓ |  |
| ┃ | ┣ | 按中是否含有对应中个元素的元素（？） | | | ┃ |  |
| ┃ | ┃ | ┗ | （是）单射的（一对一的）：。 | | ┫ |  |
| ┃ | ┃ |  | | （是）双射的（一一到上的）：既是满射的又是双射的。 | | |
| ┃ | ┣ | 常函数：设，，。 | | | | |
| ┃ | ┣ | （为）单调递增的：设，。 | | | | |
| ┃ | ┃ | ┗ | （为）严格单调递增的：设，。 | | | |
| ┃ | ┗ | （为）单调递减的：设，。 | | | | |
| ┃ |  | ┗ | （为）严格单调递减的：设，。 | | | |
| ┣ | （上的）恒等函数：上的恒等关系。 | | | | | |
| ┣ | （的）特征函数（||）：设为集合，对于任意的，，，。 | | | | | |
| ┣ | （从到商集的）自然映射：设是上的等价关系，，，。 | | | | | |
| ┣ | 运算 | | | | | |
| ┃ | ┗ | （的）反函数：对于双射函数，。 | | | | |
| ┗ | 性质 | | | | | |
|  | ┣ | 运算逆：设是双射的，则是函数，并且是从到的双射函数 | | | | |
|  | ┣ | 运算合成：设、为函数，则也是函数，且满足条件：  　　　　　（1）。  　　　　　（2）。  设，，则。  　　　　　设，，  　　　　　（1）、是满射的是满射的。  　　　　　（2）、是单射的是单射的。  　　　　　（3）、是双射的是双射的。 | | | | |
|  | ┗ | 运算逆，运算合成：对任何双射函数和它的反函数，，。 | | | | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |