函数

|  |
| --- |
| 定义 |
| 运算  （当时的）左极限  （当时的）右极限  （某变化过程中的）极限  和  差  积  商  复合  反  （在点处的）左导数  （在点处的）右导数  （在点处的）导数  （在开区间内的）导函数  （在区间上的1个）原函数  （在区间上的）不定积分  （在区间上的）定积分（|积分） |
| 分类  按（某变化过程中的）极限（？）   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | （某变化过程中的）无穷小：  按与另一个无穷小的商（？）   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | （关于α的）k阶无穷小：   |  | | --- | | （比α）高阶的无穷小（||）： | | （与α是）同阶无穷小：   |  | | --- | | （与α是）等价无穷小（||）： | | | （比α）低阶的无穷小： | | | … | | | （某变化过程中的）无穷大： | | … | |
| 性质（数列）   |  |  | | --- | --- | | 数列极限 | ①收敛数列定理1 极限的唯一性  ②收敛数列定理2 收敛数列的整体有界性  ③收敛数列定理3 收敛数列的局部保号性  收敛数列定理3推论：  ④收敛数列定理4 收敛数列与其子数列间的关系  ⑤极限存在准则1 迫敛性准则（夹逼准则）  ⑥极限存在准则2：单调有界数列必有极限。  ⑦柯西极限存在准则  ⑧ | | 数列极限，函数和 | 极限运算定理4： | | 数列极限，函数差 | 极限运算定理4： | | 数列极限，函数积 | 极限运算定理4： | | 数列极限，函数商 | 极限运算定理4： | | 数列极限，函数复合 | 函数极限定理4 函数极限与数列极限的关系 | |
| 性质（函数）   |  |  | | --- | --- | | 极限 | ①函数极限定理1 函数极限的唯一性  ②函数极限定理2 函数极限的局部有界性  ③函数极限定理3 函数极限的局部保号性  函数极限定理3推论：  ④函数极限定理3'（极限③）：  ⑤无穷小与无穷大定理1：  ⑥无穷小与无穷大定理2：  ⑦极限运算定理5（（极限，函数差）①，极限③）：  ⑧  ⑨  ⑩  ⑪ | | 极限，函数和 | ①极限运算定理1：  有限个无穷小之和是无穷小。  ②极限运算定理3（（极限，函数和）①，极限⑤）：  ③连续函数定理1 连续函数的和的连续性 | | 极限，函数差 | ①极限运算定理3（（极限，函数和）①，极限⑤）：  ②连续函数定理1 连续函数的差的连续性 | | 极限，函数积 | ①极限运算定理2：有界函数与无穷小的乘积是无穷小。  极限运算定理2推论1：常数与无穷小的乘积是无穷小。  极限运算定理2推论2：有限个无穷小的乘积是无穷小。  ②极限运算定理3（（极限，函数积）①，（极限，函数和）①，极限⑤）：  定理3推论1：  定理3推论2：  ③连续函数定理1 连续函数的积的连续性 | | 极限，函数商 | ①极限运算定理3（（极限，函数积）①，（极限，函数和）①，极限④，极限⑤）：  ②连续函数定理1 连续函数的商的连续性 | | 极限，函数复合 | ①极限运算定理6 复合函数的极限运算法则  ②连续函数定理3：  ③连续函数定理4（（极限，函数复合）②）： | | 等价无穷小 | ①自反性：  ②对称性：  ③传递性：  ④无穷小的比较定理1：  ⑤无穷小的比较定理2： | | 极限，函数反 | 连续函数定理2 连续函数的反函数的连续性 | | 极限，函数幂 |  | | 函数在闭区间上连续 | ①闭区间上连续函数定理1 有界性与最大值最小值定理（有限覆盖定理）  ②闭区间上连续函数定理2 零点定理  ③闭区间上连续函数定理3 介值定理  闭区间上连续函数定理3推论：在闭区间上连续的函数的值域为闭区间。  ④闭区间上连续函数定理4 一致连续性定理  ⑤在有界。 | | 导数 | ①（极限⑨）  ②（极限⑤，（极限，函数积）①）  ③费马引理（极限③）  ④罗尔定理（函数在闭区间上连续①，函数在闭区间上连续②，导数③）  ⑤拉格朗日中值定理（导数④）  微分中值定理定理1：如果函数在区间上连续，内可导且导数恒为零，那么在区间上是一个常数。  ⑥柯西中值定理（罗尔定理）  ⑦洛必达法则（导数⑥）  ⑧泰勒中值定理1（导数⑦）  ⑨泰勒中值定理2（导数⑧，导数⑥）  ⑩函数单调性凹凸性定理1（导数⑤）：函数在上连续，在内可导。如果在内且等号仅在有限多个点处成立，那么函数在上单调增加；如果在内且等号仅在有限多个点处成立，那么函数在上单调减少。  为任一无穷区间，函数在区间上连续，内可导。如果在的任一有限的子区间上（或）且等号仅在有限多个点处成立，那么在区间上单调增加（或单调减少）。  ⑪函数单调性凹凸性定理2：在在上连续，在内具有一阶和二阶导数。若在内，则在上的图形是凹的；若在内，则在上的图形是凸的；  ⑫在处有阶导数且。  当为奇数时，在处不取得极值；  当为偶数时，在处取得极值，当时，为极大值，当时，为极小值。  ⑬在处有阶导数且。  当为奇数时，点是曲线的拐点，当时，曲线在左侧凹，右侧凸，当时，曲线在左侧凸，右侧凹；  当为偶数时，点不是曲线的拐点。 | | 函数和，导数 | ①函数求导定理1： | | 函数差，导数 | ①函数求导定理1： | | 函数积，导数 | ①函数求导定理1：  ② | | 函数商，导数 | ①函数求导定理1： | | 函数反，导数 | ①函数求导定理2：反函数的导数等于直接函数的导数的倒数。 | | 函数复合，导数 | ①函数求导定理3（极限⑤，（极限，函数商）①，（极限，函数复合）③，（极限，函数积）②）： | | 微分 | ①微分形式不变性 | | 不定积分 | ①原函数存在定理 | | 函数和，不定积分 | ①不定积分性质1（（函数和，导数）①）：  ②（（函数和，导数）①） | | 函数差，不定积分 | ①（导数⑤） | | 函数积，不定积分 | ①不定积分性质2（（函数积，导数）①）：  ②分部积分法（（函数积，导数）①） | | 导数，不定积分 | ①  ②第一类换元法  ③第二类换元法 | | 定积分 | ①定积分定理1（函数在闭区间上连续①）：在区间上连续，则在上可积。  ②定积分定理2：在区间上有界且只有有限个间断点，则在上可积。  ③（导数②，定积分①）在区间上可导，则在上可积。  ④  ⑤  ⑥定积分性质2（定积分⑤）：  ⑦定积分性质3：  ⑧定积分性质4：  定积分性质4推论1：  定积分性质4推论2：  ⑨（极限⑪，定积分⑧，定积分⑥）      ⑩定积分性质5（定积分⑧，（定积分，函数和，函数积）①，定积分⑦）：  ⑪定积分性质6（定积分中值定理）（定积分⑩，函数在闭区间上连续③）  ⑫积分第一中值定理（函数在闭区间上连续③）：在区间上连续，在区间上连续且不变号。至少存在一点，使成立。  ⑬积分第二中值定理（定积分⑫，（不定积分，定积分）②）：在区间上可积，在区间上单调。存在，使。 | | 函数和，函数积，定积分 | ①定积分性质1：定积分的线性性质 | | 导数，定积分 | ①积分上限的函数定理1（定积分⑪）：如果函数在区间上连续，那么积分上限的函数在上可导且。  ②定积分换元法定理1（定积分的换元公式）  ③定积分的分部积分法 | | 不定积分，定积分 | ①积分上限的函数定理2（定积分①）：如果函数在区间上连续，那么函数就是在上的一个原函数。  ②积分上限的函数定理3（微积分基本定理）（（不定积分，定积分）①，（函数差，不定积分）①，定积分④，定积分⑤） | | 无穷限反常积分 | ①反常积分定理1（数列极限⑥）：函数在区间上连续，且。若函数在上有上界，则反常积分收敛。  ②反常积分定理2（比较审敛原理）（无穷限反常积分①）：函数，在区间上连续。如果，并且收敛，那么收敛；如果，并且发散，那么发散。  ③反常积分定理3（比较审敛法1）（无穷限反常积分②）：函数在区间上连续，且。如果存在常数及，使得，那么反常积分收敛；如果存在常数，使得，那么反常积分发散。  ④反常积分定理4（极限审敛法1）（无穷限反常积分③）：函数在区间上连续，且。如果存在常数，使得，那么反常积分收敛；如果（或），那么反常积分发散。  ⑤反常积分定理5（无穷限反常积分②）函数在区间上连续。如果反常积分收敛，那么反常积分收敛。 | | 无界函数的反常积分 | ①反常积分定理6（比较审敛法2）：函数在区间上连续，且，为的瑕点。如果存在常数及，使得，那么反常积分收敛；如果存在常数，，那么反常积分发散。  ②反常积分定理7（极限审敛法2）（无界函数的反常积分①）：函数在区间上连续，且，为的瑕点。如果存在常数，使得存在，那么反常积分收敛；如果（或），那么反常积分发散。 | |
| 性质（级数）   |  |  | | --- | --- | | 所有常数项级数 | ①常数项级数性质1（数列极限，函数积）：如果级数收敛于和，那么级数也收敛，且其和为。  级数的每一项同乘一个不为零的常数后，它的收敛性不会改变。  ②常数项级数性质2（（数列极限，函数和），（数列极限，函数差））：如果级数与分别收敛于和与，那么级数也收敛，且其和为。（两个收敛级数可以逐项相加与逐项相减。）  如果级数收敛，级数发散，那么级数发散。  ③常数项级数性质3（数列极限，函数差）：在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性。  ④常数项级数性质4（数列极限④）：如果级数收敛，那么对这级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变。  常数项级数性质4推论：如果加括号后所形成的级数发散，那么原来的级数也发散。  ⑤常数项级数性质5（级数收敛的必要条件）（数列极限，函数差）：如果级数收敛，那么它的一般项趋于零，即。  ⑥常数项级数定理1（柯西审敛原理）（数列极限⑦）：级数收敛的充分必要条件为：对于任意给定的正数，总存在正整数，使得当时，对于任意的正整数，都有成立。 | | 正项级数 | 正项级数定理1（数列极限⑥）：正项级数收敛的充分必要条件是：它的部分和数列有界。  正项级数定理2（比较审敛法）（正项级数①）：和都是正项级数，且。若级数收敛，则级数收敛；反之，若级数发散，则级数发散。 | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 一元数量函数 | 多元数量函数 | 一元向量值函数 |
| 定义区间 | 定义区域 |  |
| 自然定义域 | 自然定义域 |  |
| 左极限、右极限 |  |  |
| ├在1点左连续、在1点右连续 |  |  |
| │└在1点左导数、在1点右导数 | 在1点沿1方向的方向导数 |  |
| └极限 |  | 极限 |
| └在1点连续、在1点不连续-间断点 |  | └在1点连续 |
| ├在1区间上连续（可含端点） |  | └在1区间上连续 |
| └在1点可导 |  | │ |
| ├在1点的导数 | 在1点对1自变量的偏导数 | ├在1点的导数（导向量） |
| │└在1点的切线 | │├在1点的切平面（广义） | │└在1点的切线-切向量 |
| │　└在1点的法线 | ││└在1点的法线-法向量 | │　└在1点的法平面（广义） |
| │ | │└在1点的梯度 | │ |
| │ | │　└梯度场 | │ |
| └在1开区间内可导、在1闭区间上可导 | │ | └在1区间上可导 |
| └导函数 | └对1自变量的偏导函数 |  |
|  | 全导数（偏导数是特殊的全导数） |  |
|  | 多重极限 |  |
|  | └在1点连续、在1点不连续-间断点 |  |
|  | └在1区域上连续 |  |
| 增量 | 对1自变量的偏增量 |  |
| └在1点可微 | │ |  |
| └在1点的微分 | │ |  |
| └在任意点的微分 | └对1自变量的偏微分 |  |
|  | 在1点对应所有自变量增量的全增量 |  |
|  | └在1点可微分 |  |
|  | ├在1区域内可微分 |  |
|  | └在1点的全微分 |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |