ANÁLISE MATEMÁTICA B

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica
1º ano

Séries de Taylor e MacLaurin

Série de Taylor

Uma série infinita do tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ com um raio de convergência R não nulo define uma função f por $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$. Dada uma função f que pode ser expandida como uma série de potências, então (pela propriedade III do tópico anterior), f é diferenciável no intervalo aberto $]a-R, a+R[$ e temos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \quad \text{para} \quad a-R < x < a+R.$$

Reparemos que f não é apenas diferenciável, mas a sua derivada f' pode ser expandida como uma série de potências. Assim, podemos aplicar a propriedade III sucessivamente e vamos obtendo a expansão em série de potências para as diferentes derivadas da função f.

Série de Taylor

Para $a - R < x < a + R$,

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x-a)^{n-2},$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3},$$

$$f^{(4)}(x) = \sum_{n=4}^{+\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)a_n(x-a)^{n-4}.$$

Podemos escrever a expressão geral da derivada de ordem k da função f, em $a - R < x < a + R$ como:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}.$$

Série de Taylor

Consideremos $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ no intervalo $]a-R, a+R[$.

Vejamos que relação existe entre a função f e os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \cdots$ da série de potências:

calculemos para $x = a$ a derivada de ordem n da função f,

$$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n = (n!)a_n$$

donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \forall n \in \mathbb{N},$$

é a expressão dos coeficientes da série de potências da função f.

Série de Taylor

Substituindo a expressão dos coeficientes na série de potências, obtemos a expressão de f como uma série de potências em a do tipo,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Então a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

é designada por série de Taylor da função f em torno do ponto $x = a$ ou série de Taylor da função f em potências de $x - a$.

Série de Taylor

Exemplo 1: Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função $f(x) = e^x$ em torno do ponto $x = a$ e indique o seu intervalo de convergência.
Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)} = e^x, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, a série de Taylor para e^x em torno do ponto $x = a$ é dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^a}{n!}(x-a)^n = e^a + e^a(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Determinemos o intervalo de validade do desenvolvimento em série de taylor

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{e^a(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^a(x-a)^n} \right| = |x-a| \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Concluímos que o raio de convergência é $R = +\infty$ e a série é convergente para qualquer número real x. Podemos escrever

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^a}{n!}(x-a)^n, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Série de Taylor

Exemplo 2: Determine a série de Taylor para $f(x) = \sin x$ com $a = \pi/4$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(\tfrac{\pi}{4}) &= \sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
f'(x) &= \cos x, & f'(\tfrac{\pi}{4}) &= \cos(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
f''(x) &= -\sin x, & f''(\tfrac{\pi}{4}) &= -\sin(\tfrac{\pi}{4}) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(\tfrac{\pi}{4}) &= -\cos(\tfrac{\pi}{4}) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(\tfrac{\pi}{4}) &= \sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

e assim podemos observar que os coeficientes da série de Taylor são:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\pi/4)}{n!} = \frac{\pm\sqrt{2}/2}{n!} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot n!},$$

onde os sinais mais e menos são alternados em pares.

Série de Taylor

A série de Taylor $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\frac{\pi}{4})^n$ para $\sin x$ com $a=\pi/4$ é dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2!}(x-\frac{\pi}{4})^2 \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3!}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 4!}(x-\frac{\pi}{4})^4 + \cdots . \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + (x-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2 + \cdots\right].$$

Série de MacLaurin

Ao caso particular da série de Taylor para $a = 0$, dá-se o nome de série de MacLaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

As séries de MacLaurin também se designam por séries de potências de x.

Série de MacLaurin

Exemplo 3: Determine a série de MacLaurin para $f(x) = e^x$.
A série de MacLaurin para e^x é apenas a série de Taylor para e^x com $a = 0$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^x, & f(0) &= e^0 = 1,\\
f'(x) &= e^x, & f'(0) &= e^0 = 1,\\
f''(x) &= e^x, & f''(0) &= e^0 = 1,\\
f'''(x) &= e^x, & f'''(0) &= e^0 = 1,
\end{aligned}
$$

Os coeficientes da série de MacLaurin são dados por $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!}$.

Assim, a série de MacLaurin $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ para e^x é dada por

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Série de MacLaurin

Alguns exemplos de expansões em séries de potências de x:

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots, \forall x.$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots, \forall x.$

Observemos que:

$$\begin{aligned}
\cos x &= D_x \sin x = D_x \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right) \\
&= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots .
\end{aligned}$$

Exemplo 4: Determine um desenvolvimento em série de potências para $\dfrac{1-\cos x}{x}, \quad x \neq 0.$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \ ,$$

assim

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots \ , \forall x.$$

Temos então para $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos x}{x} &= \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots\right) \\ &= \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} - \frac{x^7}{8!} + \cdots \ . \end{aligned}$$

Exemplo 5: Desenvolver em séries de potências de x, as seguintes funções:

a) $f(x) = \log(1+x)$;

b) $g(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$;

c) $h(x) = e^{2x} \log(1+x)$.

Soluções:

a) $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots$;

b) $g(x) = 2(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots)$;

c) $h(x) = x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + \cdots$.

Exemplo 6: Considere o desenvolvimento em série de potências dado por:

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad |x| < 1, r \in R.$$

Use os primeiros três termos da série para aproximar $\sqrt[3]{28}$. Dê um limite para o erro cometido.

Vamos transformar $\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27+1} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{1}{27}\right)} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}}$, fazendo $x = 1/27$, obtemos

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}} \approx 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{27}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{27}\right)^2 = \frac{6641}{6561}$$

Série de MacLaurin

Nota: Se $\sum(-1)^n a_n$ é uma série alternada, tal que $a_{k+1} < a_k, \quad \forall k$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então o erro cometido ao aproximarmos a soma S da série pela soma parcial de ordem n, S_n é numericamente inferior a $|a_{n+1}|$. Assim,

$$\sqrt[3]{28} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}} \approx 3\left(\frac{6641}{6561}\right) = 3,036579\cdots .$$

Ao usarmos esta aproximação estamos a cometer um erro inferior a

$$|a_{n+1}| = 3\cdot\frac{5}{81}\left(\frac{1}{27}\right)^3 < 0.0000095.$$

O valor real de $\sqrt[3]{28}$ é 3,03658897.