Sumários Alargados de Análise Matemática II
Séries Numéricas, Séries de Potências, Séries de Fourier

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra

2010-2011

3.1 Sucessões de números reais

Definição 3.1. Chama-se **sucessão de números reais** a qualquer função $u : A \to \mathbb{R}$, onde A é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}_0$. A expressão $u(n)$ diz-se **termo geral** da sucessão u.

A sucessão u também se denota por $\{u(n)\}_{n\in A}$ ou $\{u_n\}_{n\in A}$.

Exemplos 3.2. 1. Sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$:

$$\begin{array}{rcl} u:\mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \to & \frac{1}{n} \end{array} \quad \text{ou} \quad 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\dots,\ \tfrac{1}{n},\dots \quad \text{ou} \quad \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}.$$

2. Sucessão de Fibonacci: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(1) = 1, \qquad f(2) = 1, \qquad f(n) = f(n-1) + f(n-2),$$

ou $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\dots$.

3. Sucessão de termo geral $u_n = \sqrt{n-3}$:

$$\{\sqrt{n-3}\}_{n\geq 3} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} u:\{n\in\mathbb{N}: n\geq 3\} & \to & \mathbb{R} \\ n & \to & \sqrt{n-3} \end{array}.$$

Definição 3.3 (Sucessão limitada, sucessão monótona)**.** Uma sucessão $\{u_n\}_{n\in A}$ diz-se

- **limitada superiormente** se existe $S \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \leq S$, para todo o $n \in A$;
- **limitada inferiormente** se existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq u_n$, para todo o $n \in A$;
- **limitada** se $\{u_n\}$ é limitada superior e inferiormente;
- **monótona crescente** se $u_n \leq u_{n'}$ sempre que $n, n' \in A$ e $n \leq n'$;
- **monótona decrescente** se $u_n \geq u_{n'}$ sempre que $n, n' \in A$ e $n \leq n'$.

Exemplos 3.4. 1. A sucessão $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_n$ é monótona decrescente e limitada.

2. A sucessão $\left\{-n^2\right\}_n$ é monótona decrescente e ilimitada inferiormente.

3. A sucessão $\{e^n\}_n$ é monótona crescente e ilimitada superiormente.

4. A sucessão $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_n$ é monótona crescente e limitada.

Definição 3.5 (Limite de uma sucessão)**.** Seja $u : A \to \mathbb{R}$ uma sucessão de números reais. Diz-se que

- a sucessão u tem **limite** $\lambda \in \mathbb{R}$, e escreve-se $\lim\limits_{n\in A} u_n = \lambda$, se dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_n - \lambda| < \varepsilon \text{ para todo o } n \in A \text{ e } n \geq p.$$

- a sucessão u tem **limite** $+\infty$, e escreve-se $\lim_{n\in A} u_n = +\infty$, se dado $M > 0$ qualquer, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_n > M \text{ para todo o } n \in A \text{ e } n \geq p.$$

- a sucessão u tem **limite** $-\infty$, e escreve-se $\lim_{n\in A} u_n = -\infty$, se dado $M > 0$ qualquer, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_n < -M \text{ para todo o } n \in A \text{ e } n \geq p.$$

Uma sucessão diz-se **convergente** se converge para $\lambda \in \mathbb{R}$; caso contrário diz-se **divergente**.

Exemplos 3.6. 1. A sucessão $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}_n$ converge para 0.

2. A sucessão $\{e^n\}_n$ é divergente, pois $\lim_n e^n = +\infty$.

Definição 3.7 (Subsucessão de uma sucessão)**.** Chamamos **subsucessão** da sucessão $\{u_n\}_{n\in A}$ a toda a sucessão

$$\{v_n\}_{n\in B}$$

tal que $B \subseteq A$ e $v_n = u_n$, para todo o $n \in B$.

Exemplos 3.8. 1. As sucessões

$$1,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots,\ 1, \ldots \qquad \text{e} \qquad -1,\ -1,\ -1,\ -1, \ldots,\ -1, \ldots$$

são subsucessões da sucessão $\{(-1)^n\}_n$.

2. A sucessão $\{2^n\}_{n\geq 100}$ é uma subsucessão da sucessão $\{2^n\}_n$.

Proposição 3.9 (Propriedades)**.** 1. Se uma sucessão $\{a_n\}_{n\in A}$ é convergente então também é limitada.

2. Seja $\{a_n\}_{n\in A}$ uma sucessão tal que $\lim_{n\in A} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Se $\{a_n\}_{n\in B}$ é uma subsucessão de $\{a_n\}_{n\in A}$ então $\lim_{n\in B} a_n = L$.

3. Se $\{a_n\}_{n\in B}$ é uma subsucessão da sucessão $\{a_n\}_{n\in A}$ e $\{a_n\}_{n\in B}$ é divergente então a sucessão $\{a_n\}_{n\in A}$ também é divergente.

4. Se $\{a_n\}_{n\in B}$ e $\{a_n\}_{n\in C}$ são subsucessões da sucessão $\{a_n\}_{n\in A}$ tais que

$$\lim_{n\in B} a_n = L, \qquad \lim_{n\in C} a_n = M,$$

com $L \neq M$, então $\{a_n\}_{n\in A}$ é divergente.

Exemplos 3.10. 1. A sucessão $\left\{n \sin \frac{1}{n}\right\}_n$ é limitada pois é convergente:

$$\lim_n n \sin \frac{1}{n} = \lim_n \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

2. A sucessão $\{(-1)^n\}_n$ é limitada , mas é divergente.

   De facto, a subsucessão dos termos de ordem par converge para 1:

$$\lim_{n \text{ par}} (-1)^n = 1,$$

   e a subsucessão dos termos de ordem ímpar converge para -1:

$$\lim_{n \text{ ímpar}} (-1)^n = -1.$$

3. A sucessão de termo geral

$$u_n = \begin{cases} -n, & \text{se } n \text{ é par} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

   é divergente pois $\lim\limits_{n \text{ par}} u_n = -\infty$. Portanto a sucessão $\{(-1)^n\}_n$ é divergente.

Proposição 3.11. Se $\{a_n\}_{n\in B}$ e $\{a_n\}_{n\in C}$ são subsucessões da sucessão $\{a_n\}_{n\in A}$ tais que

$$\lim_{n\in B} a_n = L = \lim_{n\in C} a_n$$

e $A = B \cup C$, então $\lim\limits_{n\in A} a_n = L$.

Exemplo 3.12. A sucessão de termo geral $v_n = \begin{cases} e^{-n}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ converge para 0, pois $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}\}$, e

$$\lim_{n \text{ par}} v_n = \lim_{n \text{ par}} e^{-n} = 0 \ , \qquad \lim_{n \text{ ímpar}} v_n = \lim_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Proposição 3.13. Uma sucessão monótona (crescente ou decrescente) e limitada é convergente.

Exemplo 3.14. A sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é monótona crescente e limitada, portanto é convergente. O seu limite é o número e:

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(Ver, por exemplo `http://www.mathcs.org/analysis/reals/numseq/s_euler.html`).

Proposição 3.15. Sejam $\{a_n\}_{n\in A}$ e $\{b_n\}_{n\in A}$ sucessões que convergem para L e M, respectivamente. Então

1. a sucessão $\{a_n + b_n\}_{n\in A}$ converge para $L + M$;

2. a sucessão $\{a_n b_n\}_{n\in A}$ converge para LM;

3. se $M \neq 0$ então a sucessão $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n\in A}$ converge para L/M.

Exemplos 3.16. 1. $\lim_n \left(e^{\frac{1}{n}} + \dfrac{en}{n+100}\right) = 1 + e$,

2. $\lim_n \left(\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^n\right) = e^2$,

3. $\lim_n \dfrac{n^2+2}{3n^2-n} = \dfrac{1}{3}$.

Proposição 3.17. Sejam

$$\{a_n\}_{n\in A}, \qquad \{b_n\}_{n\in A}, \qquad \{c_n\}_{n\in A}$$

sucessões tais que para todo o $n \in A$,

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \qquad \lim_{n\in A} a_n = L, \qquad \lim_{n\in A} c_n = M.$$

1. Se $L = M$ então $\lim_{n\in A} b_n = L$.

2. Se $M = -\infty$ então $\lim_{n\in A} b_n = -\infty$.

3. Se $L = +\infty$ então $\lim_{n\in A} b_n = +\infty$.

Exemplo 3.18. Como, para todo o n,

$$-\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{\cos n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

e $\lim_n \dfrac{1}{n^2+1} = 0$, tem-se que $\lim_n \dfrac{\cos n}{n^2+1} = 0$.

Proposição 3.19. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real. Se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

então $\lim_{n\in\mathbb{N}} f(n) = L$.

Exemplo 3.20. Como $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, também

$$\lim_n n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_n \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1.$$

3.2 Séries Numéricas

Nesta secção definiremos "somas infinitas" através de limites. Por exemplo,

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}+\cdots$$

exprime o limite $\lim_n \left(\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)$. Verifica-se que

$$\lim_n\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)=1$$

(isto é, dado $\varepsilon>0$ existe uma ordem p tal que se $n>p$ então $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}$ difere de 1 por menos de ε), e escrevemos

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}+\cdots=1$$

À soma com um número infinito de parcelas chamamos série numérica. Note-se que nem sempre uma série representa um número, uma série é um limite de uma sucessão e esse limite pode não existir.

Definição 3.21. Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sucessão de números reais. Chama-se **série numérica** de **termo geral** a_n a uma expressão da forma

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Exemplos 3.22. 1. **Série harmónica**: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ ou $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

2. **Série geométrica** de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo 1:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. **Série geométrica** de razão r e primeiro termo $a\neq 0$:

$$a+ar+ar^2\cdots+ar^n+\cdots \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} ar^n.$$

4. **Série telescópica** ou de **Mengoli**:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+p}),$$

onde $\{a_n\}_n$ é uma sucessão de números reais e p é um número inteiro positivo fixo.

Definição 3.23 (Sucessão das somas parciais da série)**.** Dada uma série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, chama-se **sucessão associada** ou **sucessão das somas parciais** da série à sucessão $\{S_n\}_{n\geq 1}$, onde

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Exemplos 3.24. 1. A sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} n$ tem termo geral

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{(1+n)n}{2}.$$

2. A sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ tem termo geral

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ -1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

3. A sucessão das somas parciais da série geométrica de razão $r \neq 1$ e primeiro termo a, $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ tem termo geral

$$S_n = a + ar + ar^2 \cdots + ar^n = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Definição 3.25 (Natureza de uma série)**.** Se $\{S_n\}_{n\geq 1}$ for convergente, isto é, se $\lim_n S_n = s \in \mathbb{R}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **convergente** e s diz-se **soma da série**. Escreve-se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Se $\{S_n\}_{n\geq 1}$ diverge, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **divergente**.

Determinar a **natureza** de uma série consiste em averiguar se a série é convergente ou divergente.

Exemplos 3.26. 1. A série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ é convergente:

Seja $\{S_n\}$ a sucessão das somas parciais da série. Então

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}, \qquad S_2 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3},$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Como $\lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$, a série é convergente e a sua soma é 1.

2. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ é divergente:

   Seja $\{S_n\}$ a sucessão das somas parciais desta série. Então

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ -1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

   Como $\lim_n S_n$ não existe, a série é divergente.

3. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n$ é divergente:

   Seja $\{S_n\}$ a sucessão das somas parciais desta série. Então

$$S_n = \frac{n(n+1)}{n}.$$

   Como $\lim_n S_n = +\infty$, a série de termo geral n é divergente.

4. A série harmónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente:

   Seja $\{S_n\}$ a sucessão das somas parciais de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Então $S_2 = 1 + \dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} S_{2^2} = S_4 &= S_2 + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > S_2 + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = S_2 + \tfrac{1}{2} = 1 + 2\tfrac{1}{2}, \\ S_{2^3} = S_8 &= S_4 + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) > S_4 + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= S_4 + \tfrac{1}{2} > 1 + 3\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

   Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se $S_{2^n} > 1 + n\dfrac{1}{2}$. Portanto $\{S_n\}$ não é uma sucessão limitada, logo $\{S_n\}$ não é convergente.

5. A série geométrica de razão r e primeiro termo r^p, $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} r^n$, é convergente se e só se $|r| < 1$. Nesse caso, a sua soma é $s = \dfrac{r^p}{1-r}$:

   Note-se que o termo geral da sucessão das somas parciais da série é

$$S_n = r^p + r^{p+1} + r^{p+2} \cdots + r^n, \quad n \geq p.$$

   Assim, $S_n = \begin{cases} \frac{r^p - r^{n+1}}{1-r}, & \text{se } r \neq 1 \\ n - p + 1, & \text{se } r = 1 \end{cases}.$

Se $r=1$ então $\lim_n S_n = \lim_n (n-p+1) = +\infty$. Se $r \neq 1$, tem-se

$$\lim_n r^n = \begin{cases} 0, \ \text{se } |r|<1 \\ \\ +\infty, \ \text{se } r>1 \\ \\ \text{não existe }, \ \text{se } r \leq -1 \end{cases}.$$

Logo $\lim_n S_n = \begin{cases} \frac{r^p}{1-r}, \ \text{se } |r|<1 \\ \\ +\infty, \ \text{se } r>1 \\ \\ \text{não existe }, \ \text{se } r \leq -1 \end{cases}.$

Então $\{S_n\}$ converge se e só se $|r|<1$ e, nesse caso, $\lim_n S_n = \dfrac{r^p}{1-r}$.

Exemplos 3.27. 1. A série geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^n}$ converge, pois tem razão $r = -\dfrac{1}{7}$ (e $|r| = \dfrac{1}{7} < 1$). A sua soma é $\dfrac{7}{8}$.

2. A série geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 7^n$ diverge, pois tem razão $r=7$ (e $|r| = 7 > 1$).

Exemplo 3.28. Usando séries geométricas podemos escrever o número decimal $1,45454545\ldots$ na forma de fracção:

Notemos que

$$\begin{aligned} 1,45454545\ldots &= 1 + 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + \cdots \\ &= 1 + 45 \cdot 10^{-2} + 45 \cdot 10^{-4} + 45 \cdot 10^{-6} + \cdots . \end{aligned}$$

A série $45 \cdot 10^{-2} + 45 \cdot 10^{-4} + 45 \cdot 10^{-6} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 45 \cdot (10^{-2})^n$ é uma série geométrica de razão $r = 10^{-2}$. Portanto a série é convergente e a sua soma é

$$s = 45 \cdot \frac{10^{-2}}{1-10^{-2}} = \frac{5}{11}.$$

Então $1,45454545\ldots = 1 + \dfrac{5}{11} = \dfrac{16}{11}$.

Proposição 3.29. Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries numéricas.

1. Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é convergente e a sua soma é $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é divergente.

3. Se $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ têm a mesma natureza.

   Se $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ é convergente, então a sua soma é $\lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. As séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n\geq p}^{\infty} a_n$ têm a mesma natureza.

Proposição 3.30 (Condição necessária de convergência)**.** Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente então $\lim_n a_n = 0$.

O corolário que se segue é equivalente à condição necessária de convergência.

Corolário 3.31 (Critério de Divergência)**.** Se $\lim_n a_n$ não existe ou $\lim_n a_n \neq 0$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplos 3.32. Atendendo ao Critério de Divergência, as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{\pi}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)$$

são divergentes (em cada caso, o limite do termo geral da série não existe ou é diferente de 0).

Observação 3.33. Note-se que se $\lim_n a_n = 0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode ser divergente. Por exemplo, $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ e a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Proposição 3.34 (Critério do Integral)**.** Se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função contínua, decrescente e não-negativa em $[a, +\infty[$, então o integral impróprio e a série numérica seguintes

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{e} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}, n\geq a}^{\infty} f(n)$$

têm a mesma natureza.

Exemplo 3.35. Seja α um parâmetro real. Mostremos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ é convergente se e só se $\alpha > 1$.

Primeiro, recordemos que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ é convergente se e só se $\alpha > 1$.

- Se $\alpha > 0$, a função $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $x \in [1, +\infty[$, é contínua, decrescente e positiva. Pelo Critério do Integral, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e só se $\alpha > 1$.

- Se $\alpha \leq 0$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ é divergente, pois $\displaystyle\lim_n \frac{1}{n^\alpha}$ não é zero.

Definição 3.36 (Séries de Riemann ou Dirichlet)**.** Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$. As séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

dizem-se **séries de Riemann** ou **séries de Dirichlet**.

Proposição 3.37. Uma série de Riemman $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e só se $\alpha > 1$.

Exemplo 3.38. As séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ são convergentes. As séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{8}{9}}}$$

são divergentes.

Proposição 3.39 (Primeiro Critério de Comparação)**.** Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries de termos não-negativos e, para todo o n, $a_n \leq b_n$, então

(a) se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

(b) se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Exemplos 3.40. Usando o 1º Critério de Comparação, podemos determinar a natureza das séries numéricas seguintes.

1. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10} + n^2 + 7}$ é convergente: basta comparar com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}}$;

2. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é divergente: comparar com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;

3. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{3^n}$ é convergente: comparar com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$;

4. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$ é convergente: comparar com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$.

Proposição 3.41 (Segundo Critério de Comparação)**.** Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries de termos positivos e $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ então

(a) se $L \in \mathbb{R}^+$ ambas as séries têm a mesma natureza;

(b) se $L = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

(c) se $L = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemplos 3.42. Usando o 2º Critério de Comparação, podemos determinar a natureza das séries numéricas seguintes.

1. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n}$ é divergente: comparar com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;
2. A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^3-1}$ é convergente: comparar com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;
3. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n3^n}$ é convergente: comparar com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.

Definição 3.43 (Séries absolutamente convergentes e simplesmente convergentes)**.**

1. Uma série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **absolutamente convergente** se a série dos módulos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente.
2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, mas $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **simplesmente convergente**.

Exemplos 3.44. As séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n3^n}$$

são absolutamente convergentes. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ não é absolutamente convergente.

Proposição 3.45. Se uma série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente então também é convergente.

Proposição 3.46 (Critério da Razão ou de D'Alembert)**.** Se $a_n \neq 0$, para todo o n, e

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

então

(a) se $0 \leq L < 1$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente;

(b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente;

(c) se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

Exemplos 3.47. Usando o Critério da Razão ou de D'Alembert, podemos determinar a natureza das séries numéricas seguintes.

1. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ é absolutamente convergente, pois

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \lim_n \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

2. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\pi^n}{n!}$ é absolutamente convergente, pois

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{\pi^{n+1}n!}{\pi^n(n+1)!} = \lim_n \frac{\pi}{n+1} = 0 < 1.$$

3. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n3^n}$ é absolutamente convergente, pois

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{(n+2)n3^n}{(n+1)3^{n+1}(n+1)} = \lim_n \frac{(n+2)n}{(n+1)^2 3} = \frac{1}{3} < 1.$$

.

Proposição 3.48 (Critério da Raiz ou de Cauchy)**.** Se

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

então

(a) se $0 \leq L < 1$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é converge absolutamente;

(b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente;

(c) se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

Exemplos 3.49. Usando o Critério da Raiz ou de Cauchy, podemos determinar a natureza das séries numéricas seguintes.

1. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+4)}\right)^n$ é absolutamente convergente pois

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{1}{\ln(n+4)} = 0 < 1.$$

2. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^n}$ é absolutamente convergente pois

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{\pi}{n} = 0 < 1.$$

3. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2+n+1}$ é divergente, pois é convergente pois

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1+\frac{1}{n}} = e^2 > 1.$$

Definição 3.50 (Séries alternadas)**.** Chama-se **série alternada** a uma série numérica do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n,$$

com $a_n \geq 0$ para todo o n.

Proposição 3.51 (Critério de Leibnitz)**.** Se $a_n \geq 0$, para todo o n, $\{a_n\}$ é decrescente e $\lim_n a_n = 0$, então as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

são convergentes.

Exemplos 3.52. Usando o Critério de Leibnitz, mostra-se que as séries alternadas $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ são convergentes.

Proposição 3.53 (Cálculo aproximado da soma de uma série)**.** Se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é uma sucessão de números reais não-negativos, monótona decrescente com $\lim_n a_n = 0$, então as séries alternadas

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

são convergentes com somas s e t, respectivamente, tais que

(a) $-a_1 \leq s \leq 0,\ |s - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k| \leq a_{n+1}$;

(b) $0 \leq t \leq a_1,\ |t - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} a_k| \leq a_{n+1}$.

Exemplo 3.54. Determinemos um valor aproximado para a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ com um erro inferior a $0,1$:

A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ é alternada com $a_n = \frac{1}{n}$.

Ora, $a_n \geq 0$, para todo o n, $\{a_n\}$ é decrescente e tem limite 0. Tem-se que a série converge e a sua soma s verifica $0 \leq s \leq 1 = a_1$. Suponhamos que S_k é a soma dos k primeiros termos da série. Então

$$|s - S_k| \leq a_{k+1}.$$

Se $a_{k+1} < 0,1$ então S_k é um valor aproximado de s com um erro inferior a $0,1$. Ora,

$$a_{k+1} = \tfrac{1}{k+1} < 0,1 = \tfrac{1}{10} \Leftrightarrow k+1 > 10 \Leftrightarrow k > 9.$$

Um valor aproximado para s com erro inferior a $0,1$ será $S_{10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$.

Proposição 3.55. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série simplesmente convergente.

1. Dado $L \in \mathbb{R}$, existe uma reordenação dos termos da série dada tal que a nova série é convergente e a sua soma é L.
2. Existe uma reordenação dos termos da série dada tal que a nova série é divergente e a sua soma (=limite da sucessão das somas parciais) é $+\infty$.
3. Existe uma reordenação dos termos da série dada tal que a nova série é divergente e a sua soma é $-\infty$.
4. Existe uma reordenação dos termos da série dada tal que a nova série é divergente e a sua soma não é $+\infty$ ou $-\infty$.

Proposição 3.56. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente e seja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ uma série que se obtém da anterior reordenando os termos desta. Então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é absolutamente convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.