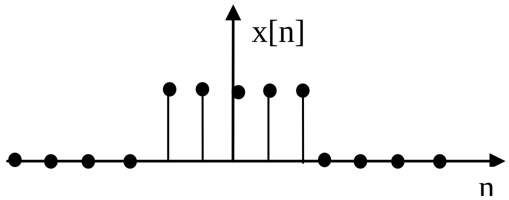
Processamento Digital de Sinal

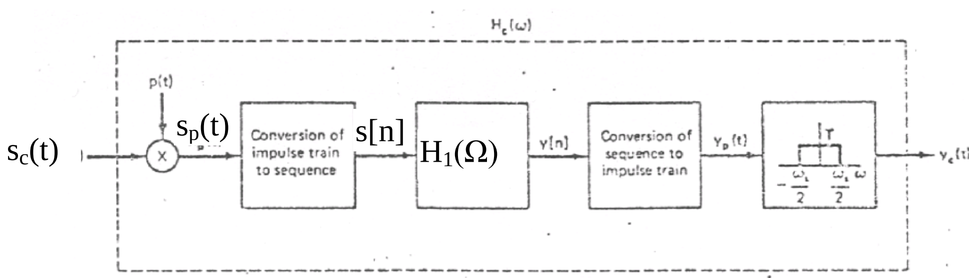
Miniteste1 2012/2013

1. Considere o sinal y[n]=x[n-5] onde x[n] está representado na figura seguinte:



a) Represente graficamente y[n] bem como o módulo e a fase de Y(Ω). Justifique.
c) Diga o que entende por DFT e explicite as motivações do seu aparecimento. Represente a DFT de 9 pontos do sinal y[n]. Justifique.
d) Diga o que entende por FFT e represente a FFT de mais de 9 pontos do sinal y[n]. Justifique.

2. Considere o sistema de processamento discreto de sinais contínuous mostrado na figura seguinte com o qual se pretende recuperar o sinal x(t) que se apresenta à entrada do sistema degradado da forma $s_c(t) = x(t - T_0) + x(t + T_0)$;



a) Considere $x(t) = 1 + 2\delta(t) + \cos(w_1 t)$. O sinal sc(t) pode ser, em sua opinião, directamente aplicado à entrada do sistema? Se a sua resposta for negativa represente em termos de diagrama de blocos um sistema que permita a adaptação de sc(t) ao sistema de processamento digital de sinais contínuos.
b) Determine o período de amostragem máximo para o qual x(t) ou uma sua versão modificada possa ser completamente recuperado á saída do sistema. Justifique.
c) Considere o sinal sc(t) amostrado à frequência de Nyquist e determine o atraso do eco para o qual s[n]=x[n-1]+x[n+1].
d) Represente os espectros dos sinais sc(t), p(t), sp(t) e s[n]. Justifique convenientemente os cálculos que efectuar e comente adequadamente as suas representações gráficas.
e) Projecte o filtro H1(Ω) que permita recuperar a versão mais aproximada possível de x(t) a menos da fase. Pretende-se que yc(t)=x(t-4T_0).

f) Imagine que na situação da alínea c) fazia uma decimação por um factor de 2 em s[n]. Na sua opinião perdia alguma informação do sinal. Se sim como procederia para minimizar ou anular essa perda. Justifique convenientemente a sua resposta.

3. Considere o sistema LTI digital caracterizado pela seguinte equação de diferenças y[n]= 0.25y[n-1] + x[n] +0.5x[n-1]. Utilize a Transformada-Z e:

a) Determine a resposta impulsional do sistema.

b) Determine a resposta do sistema à entrada

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

c) Determine a entrada do sistema cuja saída é

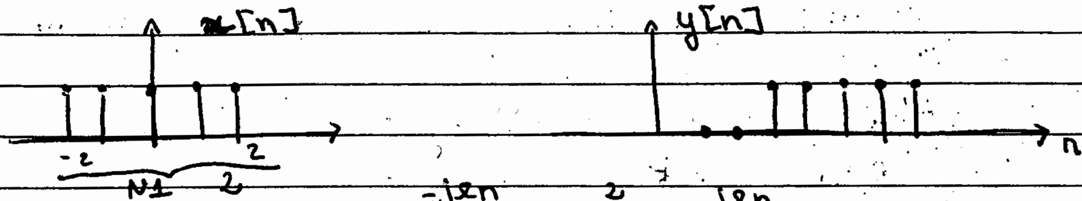
$$y[n] = n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Setas

Processamento Digital de Sinal
Mini-teste 1 (2013)

1. Pelas propriedades da DTFT

$$y[n] = x[n-5] \xleftrightarrow{DTFT} Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot e^{-5j\Omega}$$



$$Y(\Omega) = \sum_{n=-2}^{2} x[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-2}^{2} e^{-j\Omega n}$$

Para transformar numa progressão geométrica, n deve igual a zero.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Omega^N = \frac{1-\Omega^N}{1-\Omega}$$

* continuando o somatório:

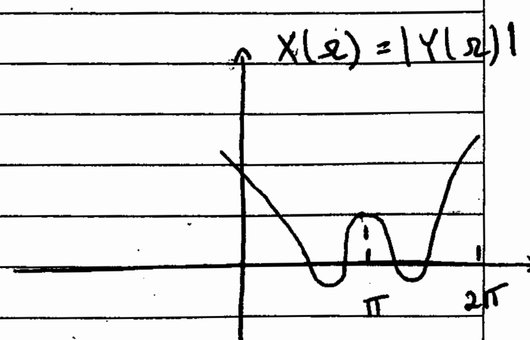
1) Fazer mudança de variável: $n \to m = n+2$

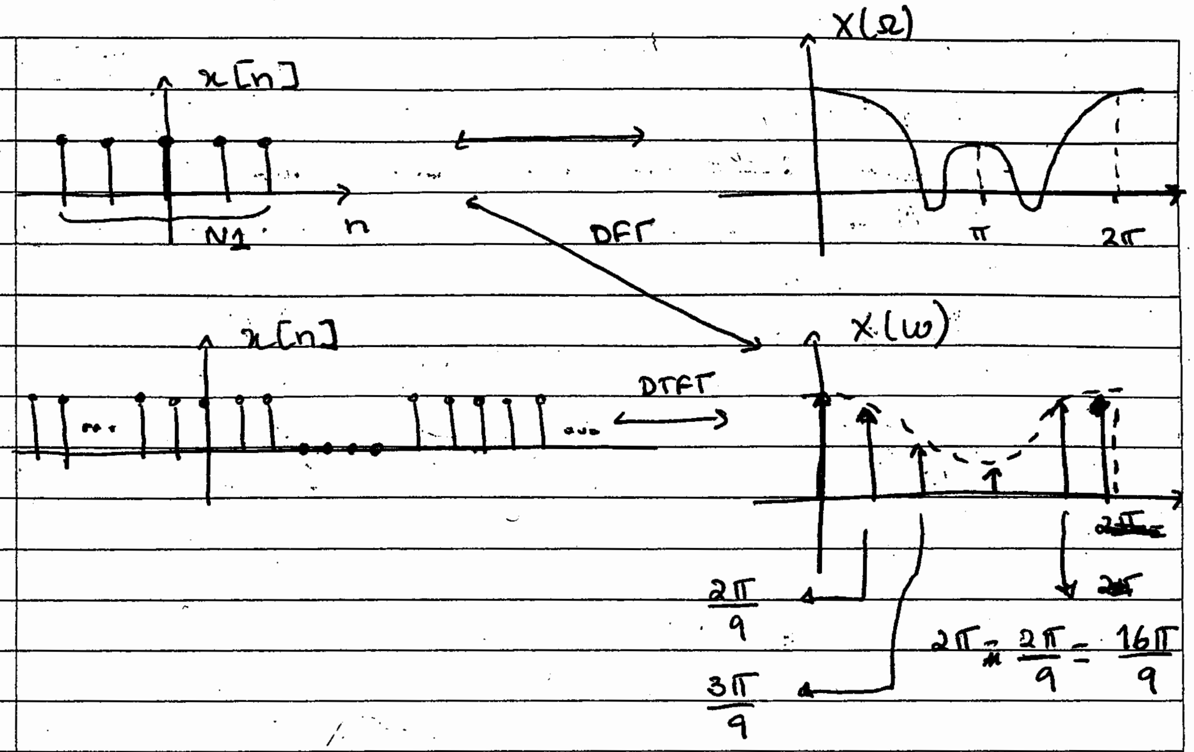
$$\sum_{m=0}^{4} e^{-j\Omega(m-2)} = e^{2j\Omega} \sum_{m=0}^{4} \left(e^{-j\Omega}\right)^m =$$

$$= e^{2j\Omega} \frac{1-\left(e^{-j\Omega}\right)^5}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{e^{-j\frac{\Omega}{2}}\left(e^{j\frac{5\Omega}{2}} - e^{-j\frac{5\Omega}{2}}\right)}{e^{j\Omega/2}\left(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right)} =$$

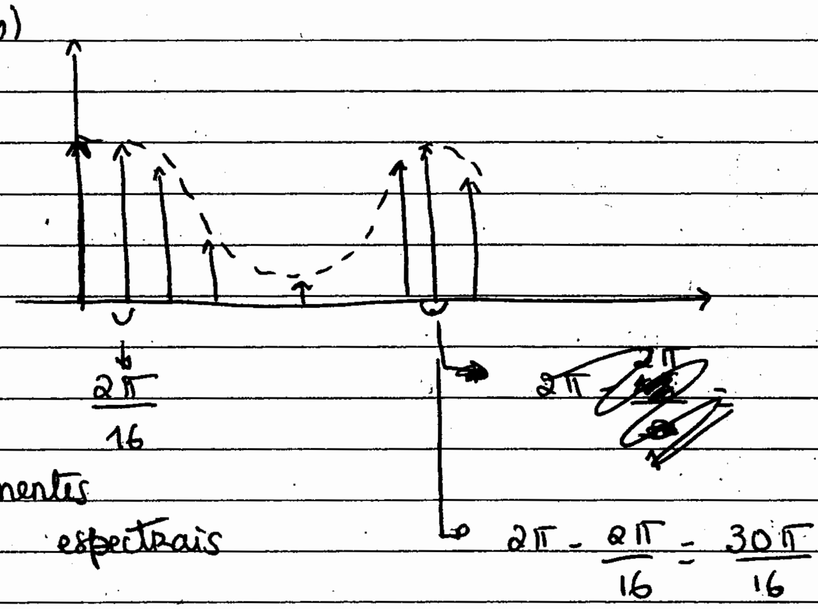
$$= \frac{2j\,\text{sen}(5\Omega/2)}{2j\,\text{sen}(\Omega/2)}$$

$$X(\Omega) = \frac{\text{sen}\left((\Omega/2)N1\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \longrightarrow$$





d) A FFT é uma forma mais rapida de calcular a DTFT tirando partido da simetrias da exponencial complexa.



16 componentes espectrais

(2)

a) $x(t) = 1 + 2\,\delta(t) + \cos(\omega_1 t)$

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) = ?$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K\, j(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$1 = \frac{1}{2\pi} K \Rightarrow K = 2\pi$$

Transformadas

$x(t) = 1 \longleftrightarrow X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$

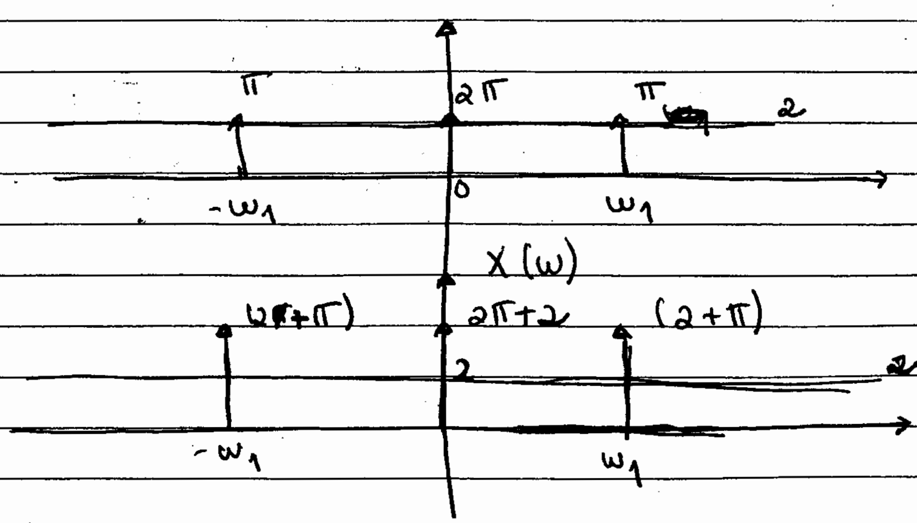
$\delta(t) \longleftrightarrow 1$

$A\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi\,[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$

$x(t) = 1 + 2\,\delta(t) + \cos(\omega_1 t)$

Pela propriedade da linearidade,

$X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega) + 2 + \pi\,(\delta(\omega-\omega_1) + \delta(\omega+\omega_2))$



② a) $x(t) = 1 + 2\,\delta(t) + \cos(\omega_1 t)$

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) = ?$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k\, j(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$1 = \frac{1}{2\pi} K \Rightarrow K = 2\pi$$

<u>Transformadas</u>

$x(t) = 1 \longleftrightarrow X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$

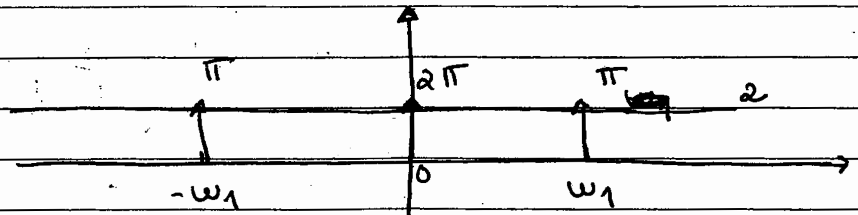
$\delta(t) \longleftrightarrow 1$

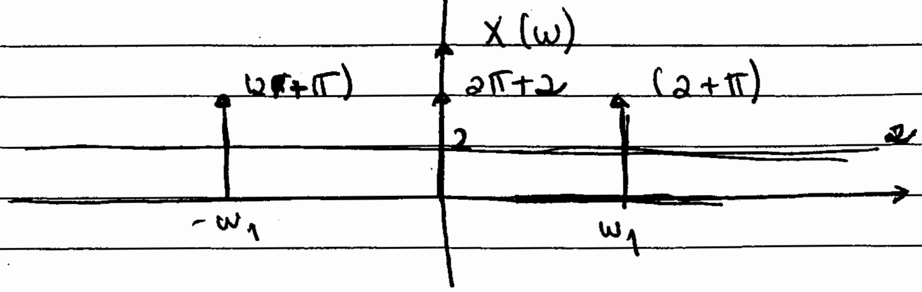
$A\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi\,[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$

$x(t) = 1 + 2\,\delta(t) + \cos(\omega_1 t)$

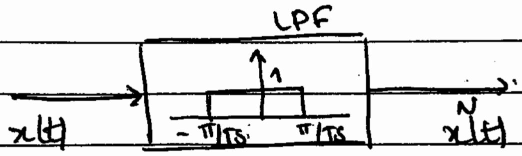
Pela propriedade da linearidade,

$X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega) + 2 + \pi\,(\delta(\omega-\omega_1) + \delta(\omega+\omega_2))$





X(ω) não é de banda limitada, logo não pode ser directamente ~~amostra~~ amostrado

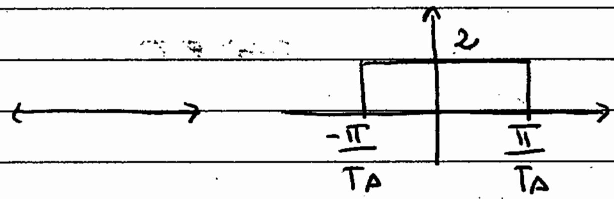


$\tilde{x}(t) \longrightarrow 1 + \frac{2\pi}{10}\operatorname{sinc}\left(t\frac{\pi}{T_0}\right) + \cos(\omega_1 t)$

$\frac{\pi}{T_s} > \omega_1$

Continua a haver erro mas o menor possível. Para corrigir o erro deveria ser utilizado um ADC

?



Teorema de Nyquist $\omega_s > 2\omega_M$

$\frac{\cancel{2}\pi}{T_M} > \cancel{2}\omega_M \rightarrow \boxed{T_s < \frac{\pi}{\omega_M}}$

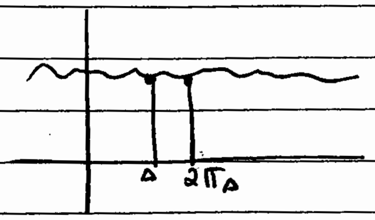
c) $s_c(t) = x(t-T_0) + x(t+T_0)$

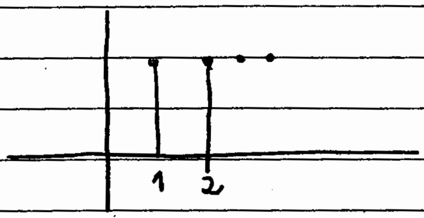
$s[n] = s_c(nT) = x(nT_s - T_s) + x(nT_s + T_s)$

$$s[n] = x\left[\frac{nT_s - T_s}{T_s}\right] + x\left[\frac{nT_s + T_s}{T_s}\right]$$

$$= x\left[n - \frac{T_s}{T_s}\right] + x\left[n + \frac{T_0}{T_s}\right]$$

$\Rightarrow T_s = T_0$



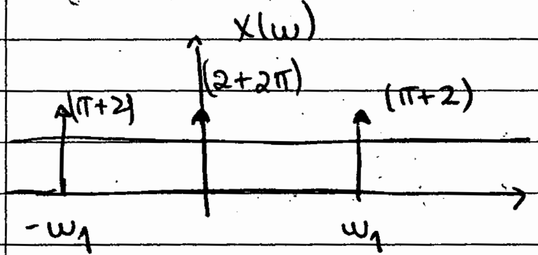


$$x[n] = x_c(nT_s)$$

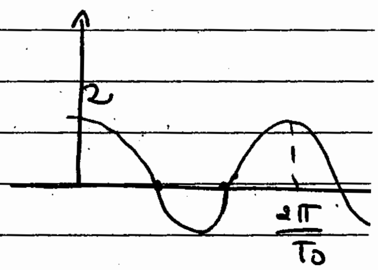
d) $s_c(t) = x(t-T_0) + x(t+T_0)$

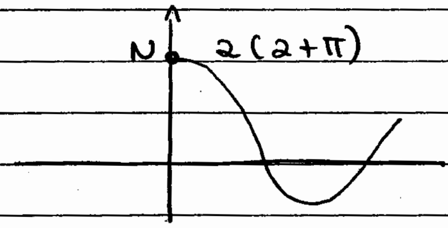
$S_c(\omega) = X(\omega)\, e^{-j\omega T_0} + X(\omega)\, e^{j\omega T_0}$

$= X(\omega)\left[2\cos(\omega T_0)\right]$

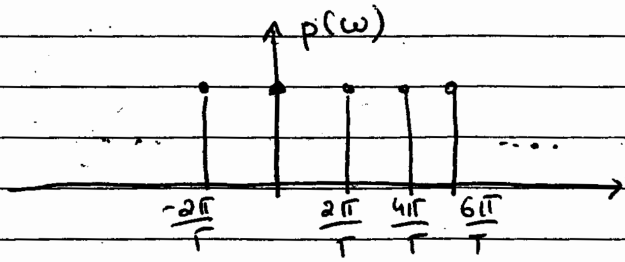


$\times$

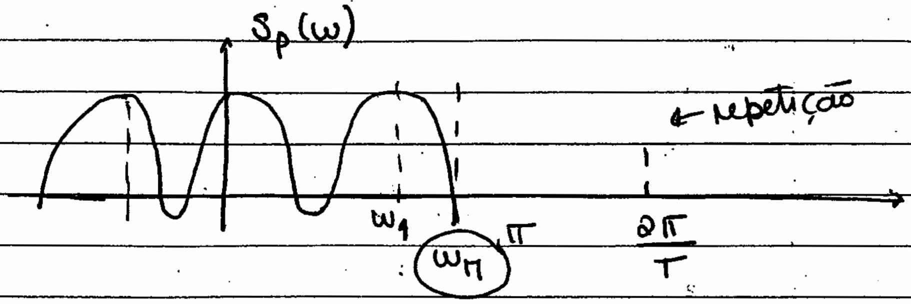




$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{T_s} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right)$$



$$S_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{K=0}^{+\infty} S_c\left(\omega - K\frac{2\pi}{T}\right)$$



e)

$$s_c(t) \longrightarrow s[n] \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow y[n] : y(t) = x(t - 4T_0)$$

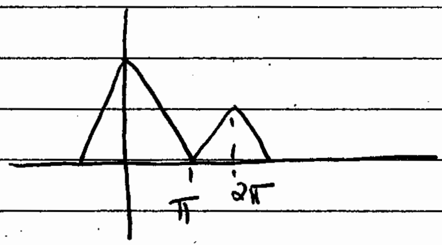
$T_0 = T_s$

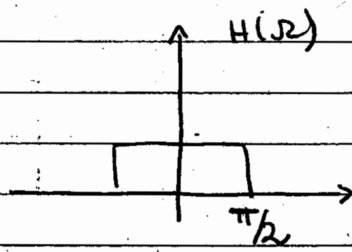
$s[n] = x[n-1] + x[n+1]$

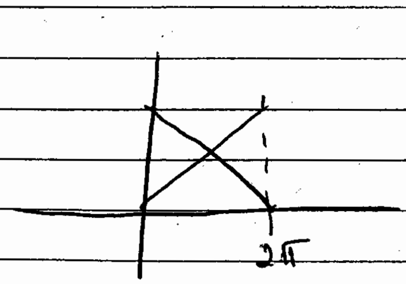
$y[n] = x[nT_0 - 4T_0]$
$= x(n-4)$

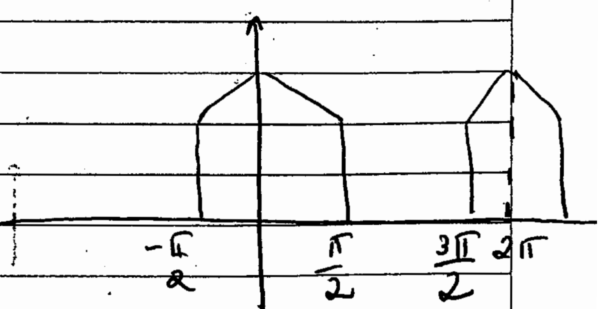
$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{S(\Omega)} = \frac{X(\Omega)\, e^{-4j\Omega}}{X(\Omega)\, 2\cos(\Omega)}$$

$S(\Omega) = S_p(\omega T)$









d) $y[n] = 0{,}25\, y[n-1] + x[n] + 0{,}5\, x[n-1]$

$$Y(z) = 0{,}25\, Y(z)\, z^{-1} + X(z) + 0{,}5\, X(z)\, z^{-1}$$

$$Y(z)\,[1 - 0{,}25\, z^{-1}] = X(z)\,[1 + n\top\, z^{-1}]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 0{,}5 z^{-1}}{1 - 0{,}25 z^{-1}} = \left(\frac{1}{1 - 0{,}25 z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0{,}25 z^{-1}}\right) \times 0{,}5 z^{-1}$$

$$h[n] = (0{,}25)^n\, u[n] + 0{,}5 \times (0{,}25)^{n-1}\, u[n-1]$$

b) $y[n] = x[n] * h[n] =$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x[n]\, h[n-K] =$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^K u[K] \times \Big[(0{,}25)^{n-K}\, u(n-K) +$$

$$0{,}5 \times (0{,}25)^{n-K-1}\, u[n-K-1]\Big]$$

Transformada

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\;z\;} \frac{1}{1 - a z^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

b) Determinar $Y(z)$: $Y(z) = X(z) \cdot H(z)$

$$Y(z) = \frac{1 + 0{,}5 z^{-1}}{1 - 0{,}25 z^{-1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{A}{1 - 0{,}25 z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$A = \left.\frac{1 + 0{,}5 z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}\right|_{z^{-1}=4} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$B = \frac{1+0{,}5\,z^{-1}}{1-0{,}25\,z^{-1}}\bigg|_{z^{-1}=2} = \frac{2}{1/2} = 4$$

c) ~~$y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$~~

~~$Y(z)$~~

$$y[n] = -3\,(0{,}25)^n\,u[n] + 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$y[n] = n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$Y(z) = \frac{(1/4)\,z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}z^{-1} + \left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$$

$$X(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} \times \frac{\left(1-0{,}25\,z^{-1}\right)}{1+0{,}5\,z^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+0{,}5\,z^{-1}\right)}$$

$$X(z) = \frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1+0{,}5\,z^{-1}} \quad (1)$$

$$A = \frac{1}{1+0{,}5\,z^{-1}}\bigg|_{z^{-1}=4} = \frac{1}{3}$$

$$B = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} \Bigg|_{z^{-1} = -2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

* (1) $x[n] = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{2}{3} (-0{,}5)^n u[n]$

Transformada de z

$$n a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

* Pode sair matlab (Falar com Marta Rocha)

Pedir última aula matlab

Podemos levar formulário!