

✱

Breves notas sobre filtros analógicos

✱

- **Justificação para o processamento digital de sinais**
 - **Precisão e reprodutibilidade**
O resultado de uma operação aritmética não depende da temperatura ou da idade do processador
 - **Capacidade em efectuar operações mais complexas**
 - **Flexibilidade**
Alterações no processamento não implicam modificações do hardware
 - **Fiabilidade**
Sistemas complexos com pequeno número de componentes e ligações
- **Desvantagem**
 - **Conversão A/D e D/A**
Custo e velocidade limitada

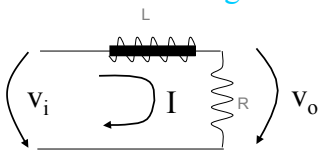
7
21/02/17
Processamento Digital de Sinal
Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

✱

Breves notas sobre filtros analógicos

✱

- **Filtros analógicos**



$$H(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega L}{R}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}} = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2} \\ \arg H(j\omega) = -\arctan \frac{\omega L}{R} \end{array} \right.$$

- **Traçado assintótico do módulo**

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega L \ll R \Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} = -20 \log(1) = 0dB \\ \omega L \gg R \Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} = -20 \log\left(\frac{\omega L}{R}\right) \Leftrightarrow -20dB / \text{déc} \\ \omega L = R \Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} = -20 \log(\sqrt{2}) = -3dB \end{array} \right.$$

- 1- Localizar no eixo das frequências o pólo ($\omega=R/L$), também designado por frequência de corte.
- 2- À esquerda do pólo traçar uma recta horizontal a passar nos 0 dB. À direita do pólo traçar uma recta com decaimento de 20 db/déc

- **Traçado assintótico da fase**

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega L \ll R \Rightarrow \text{Fase}H(j\omega) = -\arctg \frac{\omega L}{R} = 0 \\ \omega L \gg R \Rightarrow \text{Fase}H(j\omega) = -\frac{\pi}{2} \\ \omega L = R \Rightarrow \text{Fase}H(j\omega) = -\frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

- 1- Localizar no eixo das frequências o pólo ($\omega=R/L$), a freq. dez vezes inferior e a freq. dez vezes superior
- 2- À esquerda da freq. dez vezes inferior traçar uma recta horizontal a passar nos 0 radianos. À direita da freq. dez vezes superior traçar uma recta horizontal a passar nos $-\pi/2$ radianos. Unir as extremidades mais próximas destes 2 segmentos de recta com um outro segmento de recta com decaimento de $-\pi/4$ radianos por década.

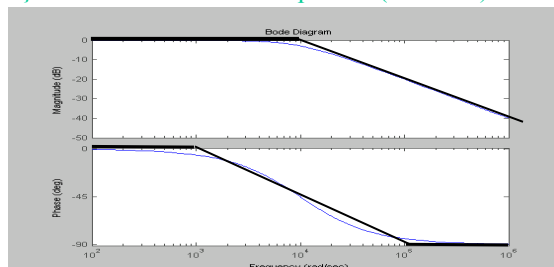
8
21/02/17
Processamento Digital de Sinal
Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)



Breves notas sobre filtros analógicos



- Traçado de Bode real e assintótico ($R/L=10^4$)



- Sistemas de ordem mais elevada (teoria dos sistemas)
 - overshoot

9

21/02/17

Processamento Digital de Sinal

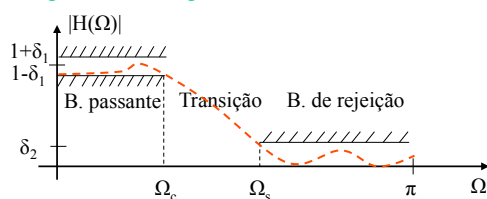
Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)



Breves notas sobre filtros analógicos



- Resposta em frequência de filtros reais

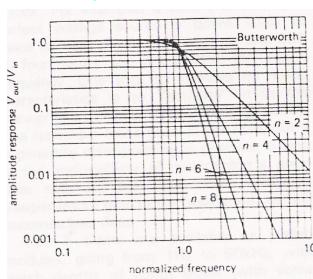


- Filtros de Butterworth (Aplanamento máximo)

$$|H_c(w)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{jw}{jw_c}\right)^{2N}}$$

$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{jw_c}\right)^{2N}}$$

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (jw_c) = w_c e^{\frac{j\pi(2k+N-1)}{2N}}; k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$$



10

21/02/17

Processamento Digital de Sinal

Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)



Breves notas sobre filtros analógicos



- Filtros de Chebyshev (resposta “equiripple” na banda passante ou na banda de rejeição)

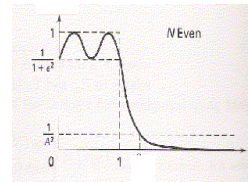
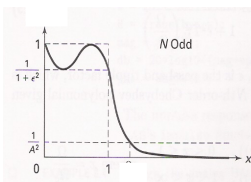
$$|H_c(w)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{jw}{jw_c}\right)}$$

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)) & 0 \leq x \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)) & 1 \leq x \leq \infty \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k &= aw_c \cos\left[\frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{2N}\pi\right] \\ w_k &= bw_c \sin\left[\frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{2N}\pi\right] \end{aligned} \right\} k = 0, \dots, N-1$$

$$a = \frac{1}{2} \left(\sqrt[N]{\alpha} - \sqrt[N]{1/\alpha} \right)$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\sqrt[N]{\alpha} + \sqrt[N]{1/\alpha} \right) \quad \alpha = \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}}$$



11

21/02/17

Processamento Digital de Sinal

Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)



Breves notas sobre filtros analógicos



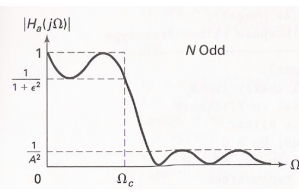
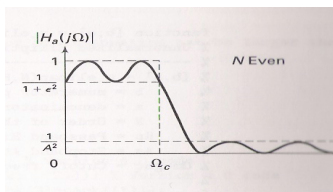
- Filtros Elípticos (resposta “equiripple” em ambas as bandas)
 - Função elíptica Jacobiana substitui os polinómios de Chebyshev

$$|H_c(w)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2\left(\frac{jw}{jw_c}\right)}$$

$$N = \frac{K(k)K\left(\sqrt{1-k_1^2}\right)}{K(k_1)K\left(\sqrt{1-k^2}\right)}$$

$$k = \frac{\Omega_c}{\Omega_s} \quad k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}$$

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}}$$




12


21/02/17

Processamento Digital de Sinal

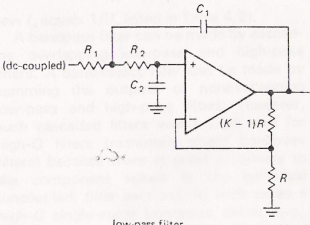
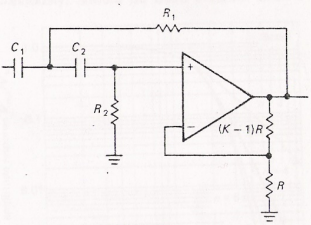
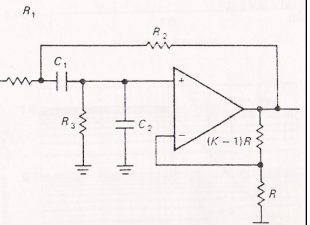
Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)



Breves notas sobre filtros analógicos




- Implementação prática padrão (Butt. e Cheb.)






Poles	Butterworth		Bessel		Chebyshev (0.5dB)		Chebyshev (2.0dB)	
	ϵ	K	ϵ_c	K	ϵ_c	K	ϵ_c	K
2	1.556	1.274	1.268	1.231	1.842	0.907	2.114	
4	1.152	1.432	1.084	0.597	1.582	0.471	1.924	
	2.235	1.606	1.759	1.031	2.660	0.964	2.782	
6	1.068	1.607	1.040	0.396	1.537	0.316	1.891	
	1.556	1.652	1.364	0.768	2.448	0.730	2.648	
	2.453	1.908	2.023	1.011	2.846	0.983	2.904	
8	1.038	1.751	1.024	0.297	1.522	0.238	1.879	
	1.337	1.835	1.213	0.599	2.379	0.572	2.605	
	1.889	1.956	1.593	0.861	2.711	0.842	2.821	
	2.610	2.152	2.184	1.006	2.913	0.990	2.946	

13
21/02/17
Processamento Digital de Sinal
Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)



Breves notas sobre filtros analógicos



- Filtros de ordem elevada – implementação em cascata (Butt. e Cheb.)
 - Butterworth**
 - Cascata com RC igual em todos os andares $RC = \frac{1}{2\pi f_c}$
 - HP=LP com posições de condensadores e resistências trocados
 - BP pode obter-se pela cascata de um LP e um HP com sobreposição de banda
 - Chebyshev**
 - Cascata com RC: $R_1 = R_2 = R$ $C_1 = C_2 = C$ $RC = \frac{1}{2\pi f_n f_c}$

TPC

Para cada um dos circuitos da pág. 13:

- Determine a resposta em frequência do sistema
- Faça um traçado assintótico de módulo e fase
- Mostre que um filtro de Butterworth de 4ª ordem feito com uma cascata de 2 módulos de 2ª ordem tem 2 pares de polos complexos conjugados.

14
21/02/17
Processamento Digital de Sinal
Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)