Sinais e Sistemas

Representação de Sinais periódicos em Séries de *Fourier* – 1ª parte

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Introdução

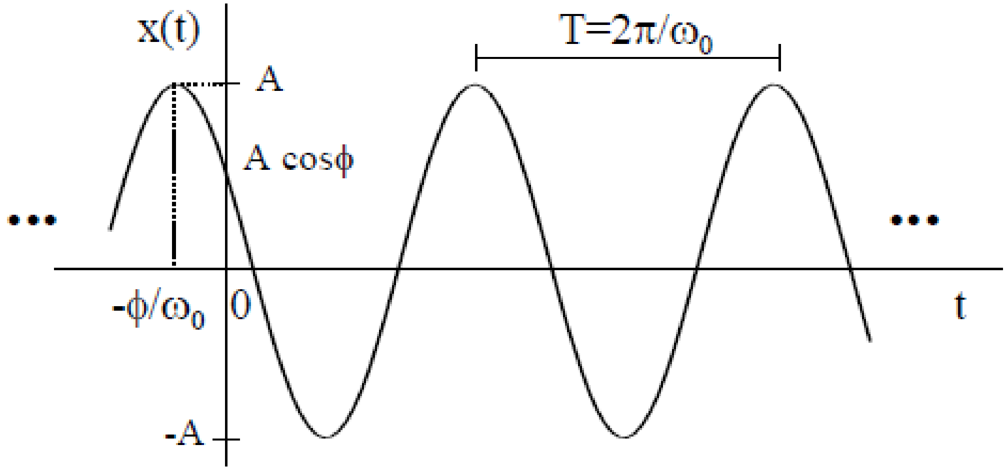
- Um dos principais objectivos de se analisarem sinais é o de determinar o seu conteúdo de frequências ou a sua largura de banda
- Isto é de extrema importância em diversos campos de aplicação
  - Em telecomunicações, os sinais transmitidos por estações AM são limitados na banda de 535 kHz a 1650 kHz e sinais de estações FM ocupam a banda de frequências entre 88 MHz a 108 MHz

Introdução

- Jean-Baptiste Joseph Fourier foi um matemático e físico francês
- Ficou célebre por iniciar a investigação sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes chamadas séries de *Fourier* e a sua aplicação aos problemas da condução do calor

Conceitos preliminares

- Fasores girantes
  - Se $x(t)$ for um sinal sinusoidal, então:
    - $x(t) = A.\cos(\omega_0 t + \phi)$
    - A é o valor de pico ou amplitude, ω_0 é a frequência angular e ϕ é o ângulo de fase



Conceitos preliminares

- Fasores girantes
  - A representação espectral do sinal sinusoidal pode ser obtida em termos de fasores girantes, deduzidos a partir do teorema de Euler:

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j.\mathrm{sen}\,\theta$$

  - Onde ϕ é um ângulo arbitrário. Por outro lado:

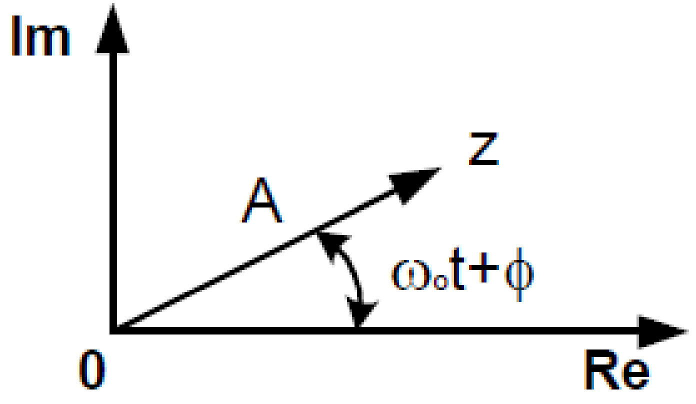
$$A.\cos(\omega_0 t + \phi) = \mathrm{Re}\,[A.e^{j\phi}.e^{j\omega 0 t}]$$

  - O termo entre [ ] pode ser interpretado como um vetor girando no plano complexo, *z*
  - Assim, define-se o fasor girante associado a *v*(*t*) como sendo o número complexo (na forma polar)

Conceitos preliminares

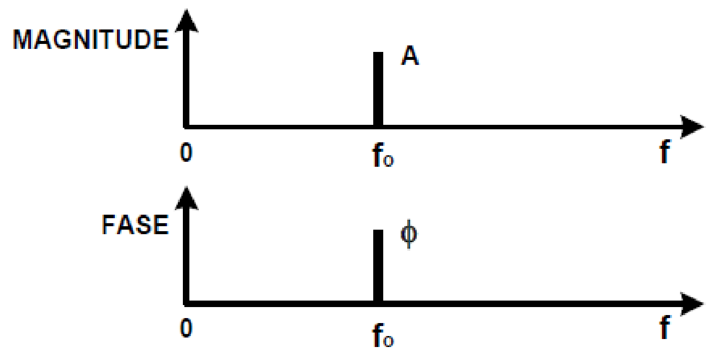
- Fasores girantes
  - O fasor girante tem magnitude *A*, gira no sentido anti-horário numa taxa de f_0 ciclos por segundo (ou Hertz) e em $t = 0$ forma um ângulo ϕ com o eixo real positivo. A projeção do fasor sobre o eixo real permite recuperar $x(t)$

$$z = z(t) = A.e^{j\phi}.e^{j\omega_0 t}$$



Conceitos preliminares

- Fasores girantes
  - Uma representação equivalente para o fasor complexo $z(t)$, no domínio da frequência, consiste no espectro unilateral



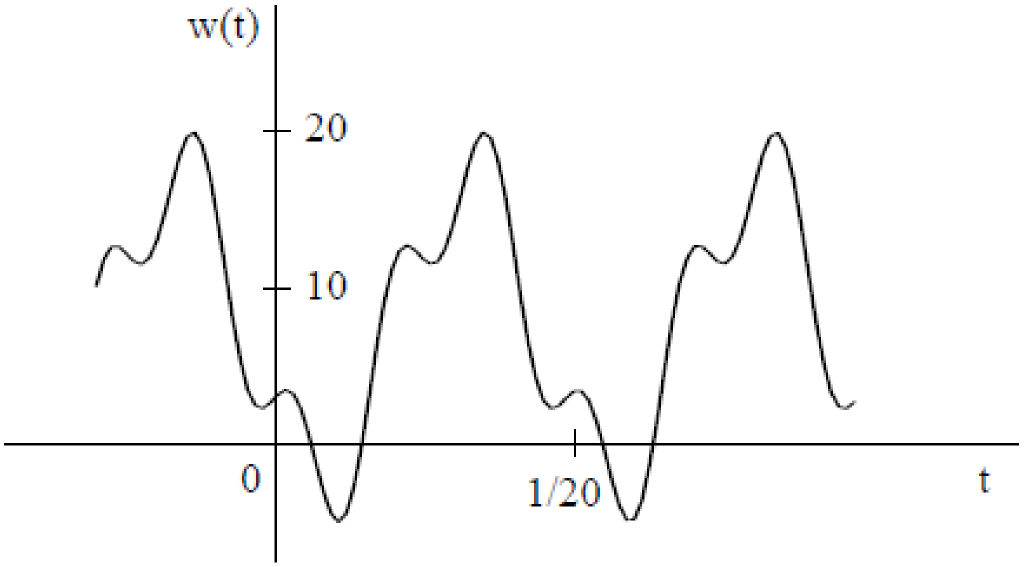
  - Este diagrama mostra que na frequência de oscilação f_0, o fasor girante tem a amplitude A, representado através de uma linha no espectro de amplitudes, e fase ϕ, representado por uma linha no espectro de fases

Conceitos preliminares

- Fasores girantes
  - A fim de padronizar a representação espectral dos sinais, torna-se adequado estabelecer as seguintes convenções:
    - A variável independente que representa o espectro é a frequência linear $\boldsymbol{f}$ (não a frequência angular $\boldsymbol{\omega}$). Um valor particular de $\boldsymbol{f}$ é identificado por um subscrito - $\boldsymbol{f_0}$
    - Os ângulos de fase são medidos em relação à função co-seno. Sinais em seno precisam ser convertidos para co-senos, através da identidade: sen $\phi = \cos(\phi - 90^0)$
    - Considera-se que a amplitude é sempre uma grandeza positiva. Quando sinais negativos estão presentes, utiliza-se a identidade: $-A.\cos\phi = A.\cos(\phi \pm 180^0)$

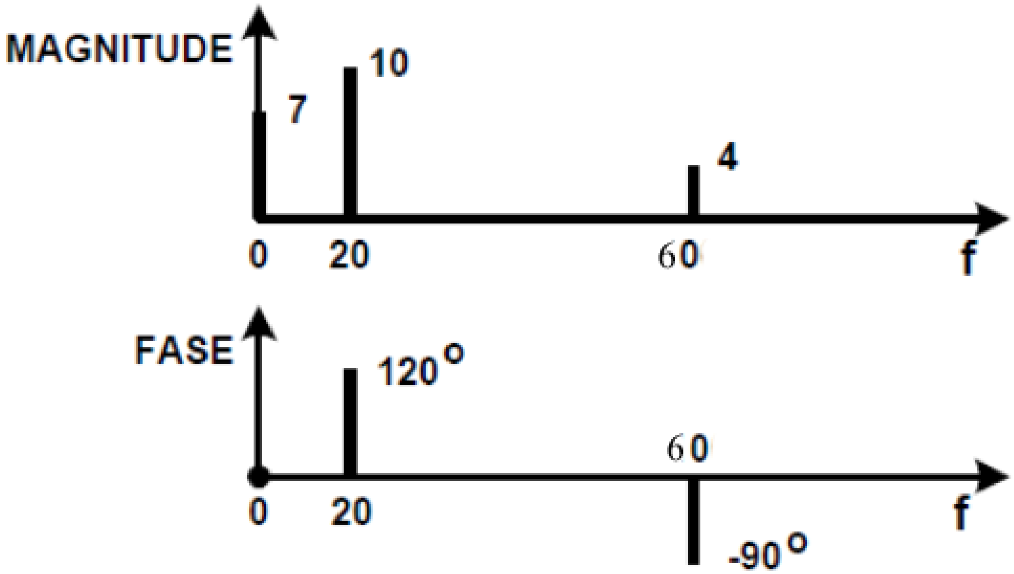
Conceitos preliminares

- Fasores girantes (Exemplo)
  - Esboçar o espectro unilateral do sinal
    - $\omega(t) = 7 - 10.\cos(40\pi t - 60^0) + 4.\mathrm{sen}(120\pi t)$



Conceitos preliminares

- Fasores girantes (Exemplo)
  - Solução: O espectro unilateral de $\omega(t)$ pode ser obtido observando-se que:
    - $\omega(t) = 7.\cos(2\pi 0t) + 10.\cos(2\pi 20t + 120^0) + 4.\cos(2\pi 60t - 90^0)$



Conceitos preliminares

- Fasores girantes
  - O exemplo anterior evidencia que:
    - A sobreposição de sinusóides com diferentes frequências e fases pode dar origem a uma forma de onda não-sinosoidal, embora ainda periódica
  - Outra forma de onda arbitrária (porém periódica) como um dente-de-serra, por exemplo, poderá ser sintetizada a partir da sobreposição de sinusóides?
  - Mais à frente iremos confirmar este conceito através do estudo da série de *Fourier*

Conceitos preliminares

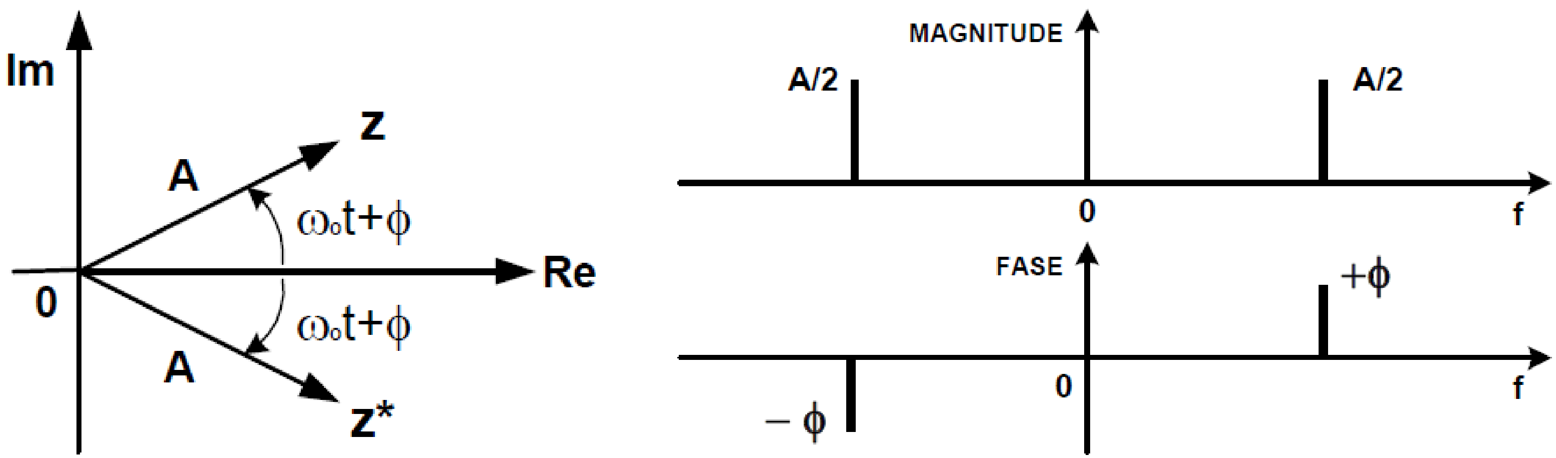
- Fasores girantes (Espectro bilateral)
  - As representações espectrais unilaterais podem não ser tão genéricas em relação à representação denominada de espectro bilateral, que envolve frequências positivas e negativas
  - Usando a propriedade dos números complexos:

$$\mathrm{Re}[z] = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

$$x(t) = A.\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}$$

Conceitos preliminares

- Fasores girantes (Espectro bilateral)
  - O par de fasores conjugados, desenhado no plano complexo, e o espectro bilateral:

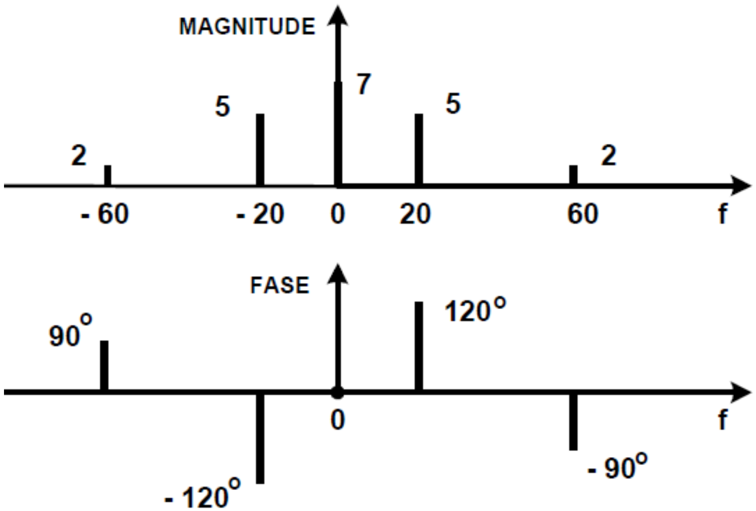


  - o espectro de magnitudes possui simetria par, enquanto o espectro de fases tem simetria ímpar

Conceitos preliminares

- Fasores girantes (Exemplo)
  - Esboçar o espectro bilateral do exemplo anterior
  - **Solução**: O sinal $\omega(t)$ pode ser rescrito como:

$$w(t) = 7e^{j0} + 10\frac{e^{j120^0}e^{j2\pi 20t} + e^{-j120^0}e^{-j2\pi 20t}}{2} + 4\frac{e^{-j90^0}e^{j2\pi 60t} + e^{j90^0}e^{-j2\pi 60t}}{2}$$



Conceitos preliminares

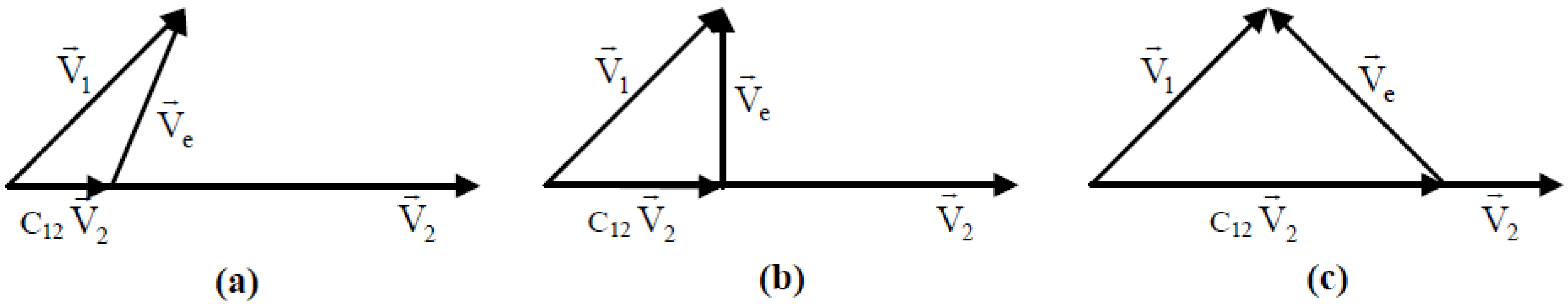
- Produto Escalar – Semelhança entre Sinais
  - Didaticamente, a analogia com o comportamento de vetores no espaço físico pode ser bastante útil na análise de sinais variáveis no tempo
  - Considerar dois vetores $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ e seja $\vec{V}_e$ um vector de erro tal que:

$$\vec{V}_1 = C_{12}\vec{V}_2 + \vec{V}_e$$

  - Onde C_{12} é uma constante com valor entre 0 e 1

Conceitos preliminares

- Produto Escalar – Semelhança entre Sinais



  - o menor valor do vetor de erro ocorre no caso **(b)**, quando $C_{12}\vec{V}_2$ corresponde à projeção ortogonal de $\vec{V}_1$ na direção de $\vec{V}_2$
  - Costuma dizer-se que $C_{12}\vec{V}_2$ corresponde à componente de $\vec{V}_1$ na direção de $\vec{V}_2$

Conceitos preliminares

- Produto Escalar – Semelhança entre Sinais
  - Em situações de projeção ortogonal, como no caso anterior, observa-se que quanto maior a componente de um vetor na direção do outro, mais "semelhante" serão esses vetores e menor será o vetor de erro
  - C_{12} pode ser interpretado como uma medida da "semelhança" entre $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$
  - Se $C_{12} = 0$, então, $\vec{V}_1$ não tem componente na direção de $\vec{V}_2$ sendo os vetores perpendiculares entre si - vetores ortogonais
    - Neste caso, não existe qualquer relação de dependência entre os vetores - vetores independentes.

Conceitos preliminares

- Produto Escalar – Semelhança entre Sinais
  - Recorrendo à álgebra vetorial, pode especificar-se o fator constante C_{12} aplicando-se a definição de produto escalar:

$$C_{12} = \frac{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2}{\left\|\vec{V}_2\right\|^2}$$

  - C_{12} é o único número real tal que $\vec{V}_e = \vec{V}_1 - C_{12}\vec{V}_2$ é ortogonal a $\vec{V}_2$
  - se $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ são ortogonais, então $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$ e $C_{12}=0$
  - C_{12} é chamado o coeficiente de *Fourier*

Conceitos preliminares

- Semelhança entre Sinais
  - Consideram-se agora $f_1(t)$ e $f_2(t)$ dois sinais sobre os quais se deseja estabelecer o grau de similaridade (ou semelhança) através de um fator C_{12}, ou seja, pretende-se estabelecer a aproximação:

$$f_1(t) \cong C_{12} . f_2(t)$$

  - Para isso, C_{12} deve ser tal que minimize a função erro $f_e(t)$:

$$f_e(t) = f_1(t) - C_{12} . f_2(t)$$

Conceitos preliminares

- Semelhança entre Sinais
  - Um critério bastante usado para minimizar $f_e(t)$ consiste em minimizar o erro quadrático médio Є ou seja:

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f_e^2(t).dt$$

    - onde $(t_2 - t_1)$ é um intervalo de observação dentro do qual se deseja efetuar a comparação dos sinais
  - Assim, torna-se necessário determinar qual o valor de C_{12} que satisfaça a condição: $$\frac{d\varepsilon}{dC_{12}} = 0$$

Conceitos preliminares

- Semelhança entre Sinais
  - Fazendo a substituição fica:

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{df_1^2(t)}{dC_{12}}.dt - 2\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t).dt + 2C_{12}\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t).dt\right] = 0$$

  - Como $f_1(t)$ não depende de C_{12}, o primeiro integral é nulo e, portanto, obtém-se que:

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t).f_2(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)dt}$$

Conceitos preliminares

- Semelhança entre Sinais
  - Observa-se a semelhança entre as expressões para sinais e para vetores

$$C_{12} = \frac{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2}{\left\|\vec{V}_2\right\|^2} \qquad C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t).f_2(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)dt}$$

  - Usando a analogia com vetores, $C_{12}f_2(t)$ representa a componente de $f_1(t)$ sobre o sinal $f_2(t)$

Conceitos preliminares

- Semelhança entre Sinais
  - Define-se o <u>produto escalar</u> entre as funções: $<f_1(t).f_2(t)>$ num intervalo (t_1,t_2) por:

$$\langle f_1(t).f_2(t)\rangle = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f_1(t).f_2(t).dt\,,\quad t_1 \le t \le t_2$$

  - Deste modo:

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t).f_2(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)dt} \qquad\qquad C_{12} = \frac{\langle f_1(t).f_2(t)\rangle}{\langle f_2^2(t)\rangle}$$

  - Se $C_{12}=0$, o sinal $f_1(t)$ não contém nenhuma componente do sinal $f_2(t)$ - as funções são ortogonais no intervalo (t_1, t_2)

Conceitos preliminares

- Exercício:
  - Mostrar que $f_1(t)$=sen($n\omega_0 t$) e $f_2(t)$=sen($m\omega_0 t$) são ortogonais em qualquer intervalo (t_0, $t_0+2\pi/\omega_0$), para valores de m e n inteiros, $m \neq n$

  - **Solução:** Deve ser mostrado que:

$$I = \langle f_1(t).f_2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi/\omega_0} \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} \mathrm{sen}(n\omega_0 t).\mathrm{sen}(m\omega_0 t).dt$$

  - é igual a zero

Conceitos preliminares

- Exercício (cont.):
  - Desenvolvendo a expressão anterior fica:

$$I = \frac{1}{2\pi/\omega_0}\int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0}\frac{1}{2}[\cos(n-m)\omega_0 t - \cos(n+m)\omega_0 t].dt$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{n-m}\operatorname{sen}(n-m)\omega_0 t - \frac{1}{n+m}\operatorname{sen}(n+m)\omega_0 t\right]_{t_o}^{t_0+2\pi/\omega_0}$$

  - Uma vez que *n* e *m* são inteiros, (*n* - *m*) e (*n* + *m*) também o são, e assim, *I* = 0
  - TPC: comprovar isto

Conceitos preliminares

- Exercício:
  - Aproximar a função retangular $f_1(t)$ dada por:

$$f_1(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-\pi/2}{\pi}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t-3\pi/2}{\pi}\right)$$

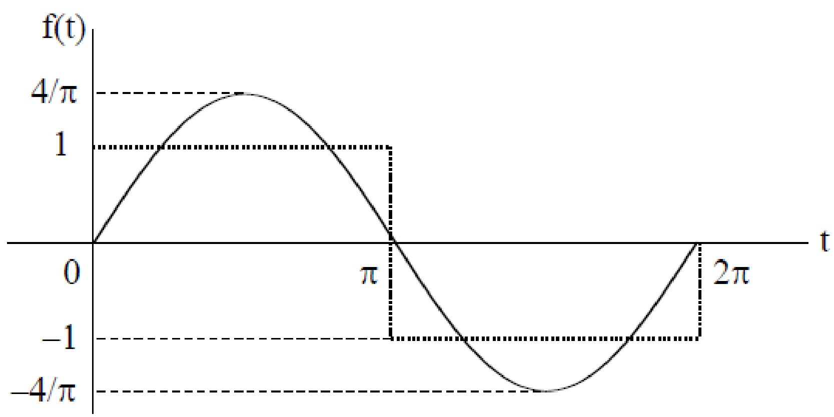
  - pela função $f_2(t)$ dada por:

$$f_2(t) = \mathrm{sen}\, t$$

  - no intervalo $(0,2\pi)$, de forma que o erro quadrático médio seja mínimo

Conceitos preliminares

- Exercício (cont.):
  - **Solução**: Deseja-se aproximar $f_1(t) \cong C_{12}.f_2(t)$, tal que C_{12} conduza ao erro mínimo

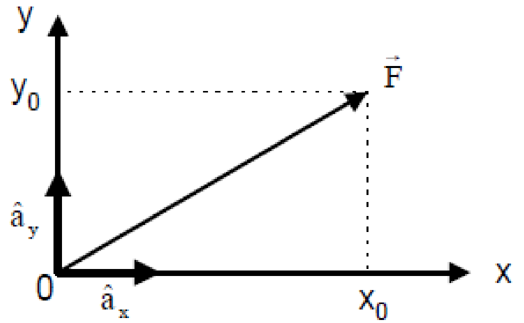


$$C_{12} = \frac{\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t.dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \operatorname{sen} t.dt}{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t).dt} = \frac{4}{\pi}$$

$$f_1(t) \cong \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} t \, , \; 0 \le t \le 2\pi$$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - Considere-se, novamente, o caso dos vetores num plano xy, e cujos vetores unitários são $\hat{a}_x$ e $\hat{a}_y$



  - Um vetor $\overrightarrow{F}$, com componentes x_0 e y_0 nas direções x e y, respectivamente, pode ser expresso como:

$$\vec{F} = x_0\hat{a}_x + y_0\hat{a}_y$$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - Qualquer vetor nesse plano pode ser expresso em termos de $\hat{a}_x$ e $\hat{a}_y$, vetores unitários que satisfazem:

$$\hat{a}_m \bullet \hat{a}_n = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

  - *m e n* correspondem, respectivamente a *x* e *y*
  - Assim, os vetores unitários são ortogonais entre si
  - observa-se que este sistema de coordenadas bidimensional é inadequado para expressar um vetor espacial $\vec{F}$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - Para expressar um vetor $\vec{F}$ tridimensional é necessário que o sistema de coordenadas seja completo. O eixo adicional é o eixo *z*, cujo vetor unitário é $\hat{a}_z$
  - um vetor no espaço tridimensional será representado por:

$$\vec{F} = x_0\hat{a}_x + y_0\hat{a}_y + z_0\hat{a}_z$$

  - onde $\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$ e $\hat{a}_z$ são ortogonais entre si

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - No caso *n*-dimensional, o conjunto completo de vetores unitários deve possuir "*n*" componentes ortogonais designadas por: $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$..., $\hat{a}_n$
  - um vetor geral $\vec{F}$ tem componentes C_1 , C_2, ..., C_n, tais que:
  - $\vec{F} = C_1 . \hat{a}_1 + C_2 . \hat{a}_2 + \ldots + C_n . \hat{a}_n$
  - A condição de ortogonalidade implica que:

$$\hat{a}_m \bullet \hat{a}_n = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - O conjunto ($\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$,..., $\hat{a}_n$) constitui um espaço vetorial ortogonal, onde $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$,..., $\hat{a}_n$ são vetores de base
  - Em geral, contudo, o produto $\hat{a}_m.\hat{a}_n$ pode ser qualquer constante k_m ao invés da unidade
  - Quando k_m é igual à unidade o conjunto é chamado espaço ortogonal normalizado, ou espaço vetorial ortonormal

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - Os valores dos componentes C_r podem ser obtidos a partir do produto escalar:
  - $\vec{F} \bullet \hat{a}_r = C_1 . \hat{a}_1 \bullet \hat{a}_r + C_2 . \hat{a}_2 \bullet \hat{a}_r + \ldots + C_r . \hat{a}_r \bullet \hat{a}_r + \ldots$
  - Como: $\hat{a}_m \bullet \hat{a}_n = 0$, para $m \neq n$, fica:
  - $\vec{F} \bullet \hat{a}_r = C_r . k_r$
  - $C_r = (\vec{F} \bullet \hat{a}_r) / (\hat{a}_r \bullet \hat{a}_r) = (\vec{F} \bullet \hat{a}_r) / k_r$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - Extrapolando os conceitos anteriores para o caso de sinais, consideram-se agora um conjunto de "*n*" funções $g_1(t)$, $g_2(t)$, ..., $g_n(t)$ ortogonais entre si, num intervalo t_1 a t_2, ou seja:

$$\int_{t_1}^{t_2} g_j(t).g_k(t).dt = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ k_j, & j = k \end{cases}$$

  - Uma função arbitrária $f(t)$ pode ser aproximada num intervalo (t_1, t_2) pela combinação linear dessas *n* funções ortogonais

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - Assim:

$$f(t) \cong C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \ldots + C_n g_n(t)$$
$$\cong \sum_{r=1}^{n} C_r g_r(t), \quad t_1 \le t \le t_2$$

  - A melhor aproximação corresponde àquela onde C_1, C_2, ..., C_n são tais que minimizam o erro quadrático médio de $f_e(t)$, tal que:

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_e^2(t).dt \qquad f_e(t) = f(t) - \sum_{r=1}^{n} C_r g_r(t)$$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - Para tal, é necessário impor que:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_1} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_2} = \ldots = \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_r} = \ldots = \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_n} = 0$$

  - Procedendo aos cálculos algébricos, é possível mostrar que o erro mínimo acontecerá quando:

$$C_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t).g_r(t).dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t).dt} = \frac{1}{k_r}\int_{t_1}^{t_2} f(t).g_r(t).dt$$

  - Novamente, é interessante comparar esta expressão com a sua correspondene vectorial

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - Usando a definição de produto escalar, o erro quadrático médio será dado por:

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t).dt + \sum_{r=1}^{n} C_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t).dt - 2\sum_{r=1}^{n} C_r \int_{t_1}^{t_2} f(t).g_r(t).dt\right]$$

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t).dt + \sum_{r=1}^{n} C_r^2 k_r^2 - 2\sum_{r=1}^{n} C_r^2 k_r\right]$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t).dt - \sum_{r=1}^{n} C_r^2 k_r\right]$$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - O erro quadrático médio diminui à medida que se aumenta o valor de *n*, ou seja, quando *f*(*t*) é aproximada por um número maior de funções ortogonais.
  - No limite, quando *n*->∞, o erro tende para zero e *f*(*t*) converge para a soma infinita:

$$f(t) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r g_r(t)\,,\ t_1 \leq t \leq t_2$$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - **Exercício**: Considere-se novamente a função retangular $f_1(t)$ estudada no exemplo anterior, que foi aproximada por uma única função sen(t)
  - Discutir como a aproximação melhora quando se usa um número grande de funções ortogonais sen($n\omega_0 t$) e sen($m\omega_0 t$), para m e n inteiros

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - **Solução**: a função retangular $f_1(t)$ será aproximada por:

$$f_1(t) = C_1 \operatorname{sen} t + C_2 \operatorname{sen} 2t + \ldots + C_n \operatorname{sen} nt \ , \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

  - onde:

$$C_r = \frac{\int_0^{2\pi} f_1(t).\operatorname{sen} rt.dt}{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 rt.dt}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen} rt.dt - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} rt.dt\right]$$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - Logo:

$$C_r = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi r}, & \text{r ímpar} \\ 0, & \text{r par} \end{cases}$$

  - e assim:

$$f_1(t) = \frac{4}{\pi}[\text{sen}\, t + \frac{1}{3}\text{sen}\, 3t + \frac{1}{5}\text{sen}\, 5t + \ldots],\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

  - O erro de aproximação é dado por:

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t).dt - C_1^2 k_1 - C_2^2 k_2 - \ldots\right]$$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais
  - Também:

t_2-t_1=2π e $\int_0^{2\pi} f_1^2(t).dt = 2\pi$. Também, $k_r = \int_0^{2\pi} f_1^2(t).dt = \int_0^{2\pi} \text{sen}^2\, rt(t).dt = \pi$.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \pi\right] = 0{,}19$$

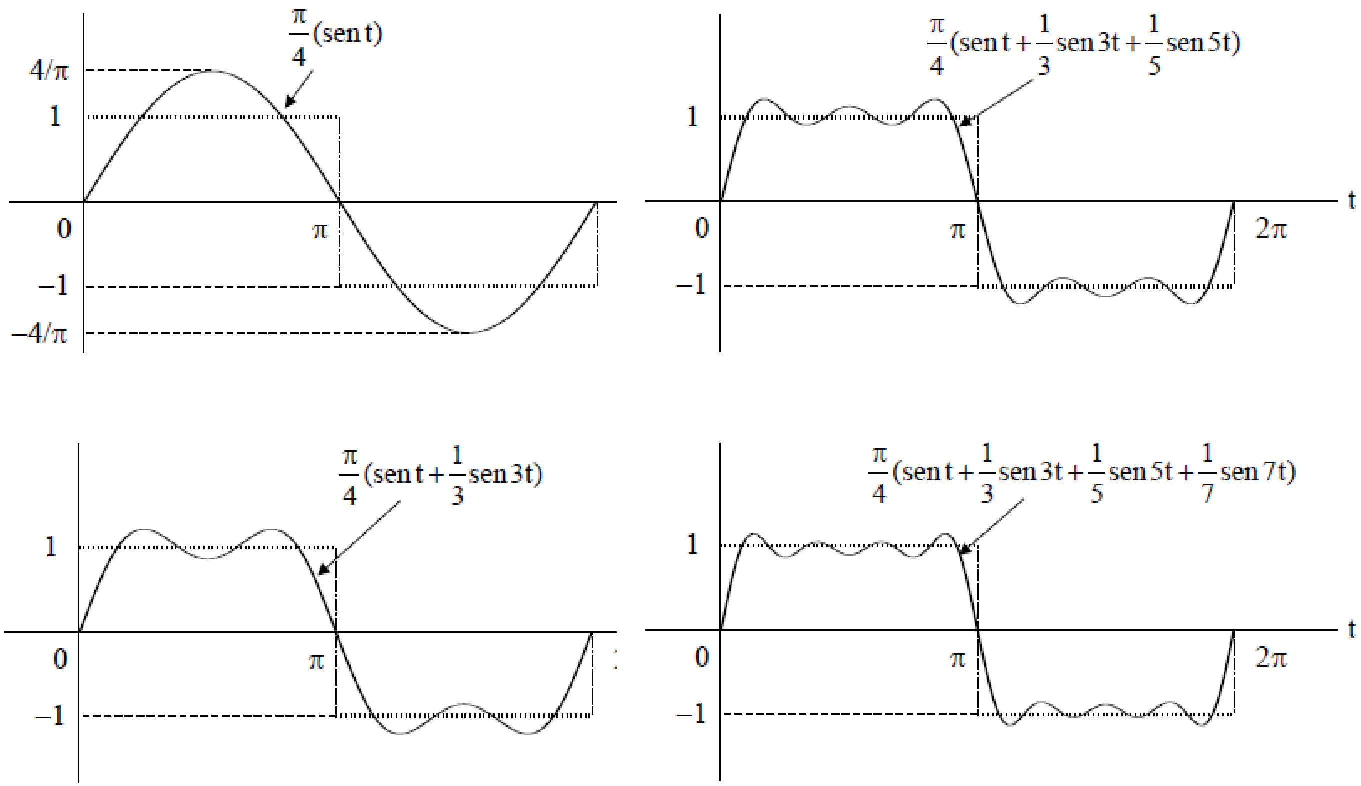
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \pi - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \pi\right] = 0{,}1$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \pi - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \pi - \left(\frac{4}{5\pi}\right)^2 \pi\right] = 0{,}0675$$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \pi - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \pi - \left(\frac{4}{5\pi}\right)^2 \pi - \left(\frac{4}{7\pi}\right)^2 \pi\right] = 0{,}051$$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções reais



Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções complexas
  - Nas exemplos anteriores, consideraram-se apenas funções reais de variável real
  - Se $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são funções complexas da variável t, é possível mostrar que $f_1(t)$ ainda pode ser representada por $C_{12}.f_2(t)$ no intervalo (t_1, t_2):

$$f_1(t) \cong C_{12}.f_2(t)$$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções complexas
  - No entanto, o valor ótimo de C_{12} que minimiza o erro quadrático médio é:

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t).f_2^*(t).dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t).f_2^*(t).dt}$$

  - onde * indica complexo conjugado. Por outro lado, mostra-se que *f*(*t*) pode ser expressa como:

$$f(t) = C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \ldots + C_r g_r(t) + \ldots..$$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções complexas
  - O conjunto de funções $g_r(t)$ são um conjunto de funções ortogonais entre si, isto é:

$$\int_{t_1}^{t_2} g_m(t).g_n^*(t).dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ k_n, & m = n \end{cases}$$

  - desde que:

$$C_r = \frac{1}{k_r} \int_{t_1}^{t_2} f(t).g_r^*(t).dt$$

  - de forma a minimizar o erro quadrático médio

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções complexas
  - **Exercício**: Mostrar que as exponenciais complexas $\Phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
  - constituem um conjunto de funções ortogonais

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções complexas
  - **Solução**: Para cada valor inteiro de n, a função $\Phi_n(t)$ é uma função periódica com frequência angular fundamental $n\omega_0$ e período $T_n = 2\pi/n\omega_0$
  - como $T_0 = 2\pi/\omega_0$ então $T_0 = n.T_n$ e cada intervalo de duração T_0 contém n ciclos completos de $e^{jn\omega_0 t}$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções complexas
  - O integral:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jn\omega_0 t}\,dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} (\cos n\omega_0 t + j\sin n\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} T_0 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}$$

  - pois se $n = 0$, $e^{jn\omega_0 t} = 1$ e o integral equivale ao período de integração T_0
  - Com $n \neq 0$, o intervalo de integração possui um número de ciclos completos de seno e coseno, cujo integral se anula

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções complexas
  - Se se tomar o complexo conjugado da função $e^{jn\omega_0 t}$, tem-se:

$$\phi^*_n(t) = \left(e^{jn\omega_0 t}\right)^* = (\cos n\omega_0 t + j\sin n\omega_0 t)^* = (\cos n\omega_0 t - j\sin n\omega_0 t) = e^{-jn\omega_0 t}$$

  - Assim, será necessário avaliar o integral:

$$I = \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} (e^{jn\omega_0 t}).(e^{jm\omega_0 t})^* dt$$

  - Se *n* = *m*, resulta:

$$I = \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} dt = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Conceitos preliminares

- Ortogonalidade de funções complexas
  - Se $n \neq m$, resulta:

$$I = \frac{1}{j(n-m)\omega_0}\left[e^{j(n-m)\omega_0 t}\right]_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0}$$

$$= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t}\left[e^{j2\pi(n-m)} - 1\right]$$

  - Como (n - m) é um inteiro, resulta I = 0 e portanto:

$$\int_{<T_0>} \phi_m(t)\phi_n{}^*(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T_0 & , m = n \\ 0 & , m \neq n \end{cases}$$

  - Esta é a propriedade de ortogonalidade do conjunto de exponenciais complexas $\Phi_n(t)$

Bibliografia

- Oppenheim, A.V. , Willsky, A.S. and Young, I.T., Signals and Systems, Prentice- Hall Signal Processing Series, 1983