1. Sabendo que: $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v \Rightarrow P(u \cdot v') = u \cdot v - P(u' \cdot v)$[1]**, determine:**

a) $\int_0^1 t \cdot e^t dt$

R:

Cálculos Auxiliares:

$\int_0^1 \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{e^t}_{v'} dt$	$\begin{Bmatrix} u = t \\ v' = e^t \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u' = (t)' \\ v = P(e^t) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u' = 1 \\ v = e^t \end{Bmatrix}$

Por equivalência directa com a expressão dada para a primitivação, teremos então:

$$\int (u \cdot v') = u \cdot v - \int (u' \cdot v) \Leftrightarrow \int_0^1 \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{e^t}_{v'} dt = \left[t \cdot e^t\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^t dt \Leftrightarrow \int_0^1 \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{e^t}_{v'} dt = \left[t \cdot e^t\right]_0^1 - \left[e^t\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{e^t}_{v'} dt = \left[1 \cdot e^1 - 0 \cdot \underbrace{e^0}_{=1}\right] - \left[e^1 - \underbrace{e^0}_{=1}\right] \Leftrightarrow \int_0^1 \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{e^t}_{v'} dt = e - 0 - e + 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{e^t}_{v'} dt = 1$$

b) $\int_0^{\pi/2} 2e^t \cdot \cos(t) dt$

R:

Cálculos Auxiliares:

$\int_0^{\pi/2} \underbrace{2e^t}_{u} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{v'} dt$	$\begin{Bmatrix} u = 2e^t \\ v' = \cos(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u' = (2e^t)' \\ v = P(\cos(t)) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u' = 2 \cdot (t)' \cdot e^t \\ v = -sen(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u' = 2e^t \\ v = -sen(t) \end{Bmatrix}$

Por equivalência directa com a expressão dada para a primitivação, teremos então:

$$\int (u \cdot v') = u \cdot v - \int (u' \cdot v) \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} \underbrace{2e^t}_{u} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{v'} dt = \left[2e^t \cdot (-sen(t))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} 2e^t \cdot (-sen(t)) dt \Leftrightarrow$$

[1] A regra da primitivação por partes diz que se deve primitivar sempre o factor que menos se simplifica por derivação, sendo que em regra geral teremos:

Funções	u	v'
$f(x) \cdot e^x$	$f(x)$	e^x
$f(x) \cdot sen(x)$ $f(x) \cdot \cos(x)$	$f(x)$	$sen(x)$ $\cos(x)$

Funções	u	v'
$f(x) \cdot \ln(x)$	$\ln(x)$	$f(x)$
$f(x) \cdot arctg(x)$	$arctg(x)$	$f(x)$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} 2e^t \cdot \cos(t)dt = \left[\left(2\cdot e^{\frac{\pi}{2}} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(2\cdot e^0 \cdot sen(0)\right)\right] + 2\cdot \int_0^{\pi/2} e^t \cdot sen(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} 2e^t \cdot \cos(t)dt = \left[\left(2\cdot e^{\frac{\pi}{2}} \cdot 1\right) - (2\cdot 1\cdot 0)\right] + 2\cdot \int_0^{\pi/2} e^t \cdot sen(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} 2e^t \cdot \cos(t)dt = 2\cdot e^{\frac{\pi}{2}} + 2\cdot \int_0^{\pi/2} e^t \cdot sen(t)dt \Leftrightarrow ☼$$

Terá que se aplicar novamente a integração, para o segundo membro da soma, logo teremos:

Cálculos Auxiliares:

$\int_0^{\pi/2} \underbrace{e^t}_{u} \cdot \underbrace{sen(t)dt}_{v'}$	$\begin{Bmatrix} u = e^t \\ v' = sen(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u' = (e^t)' \\ v = P(sen(t)) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u' = (t)' \cdot e^t \\ v = \cos(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u' = e^t \\ v = \cos(t) \end{Bmatrix}$

Por equivalência directa com a expressão dada para a primitivação, teremos então:

$$\int (u\cdot v') = u\cdot v - \int (u'\cdot v) \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^t}_{u} \cdot \underbrace{sen(t)dt}_{v'} = \left[e^t \cdot \cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} e^t \cdot \cos(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} e^t \cdot sen(t)dt = \left[e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{e^0}_{=1} \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1}\right] - \int_0^{\pi/2} e^t \cdot \cos(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} e^t \cdot sen(t)dt = -1 - \int_0^{\pi/2} e^t \cdot \cos(t)dt$$

Substituindo agora este resultado na expressão anterior assinalada como ☼, teremos que:

$$☼ \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} 2e^t \cdot \cos(t)dt = 2\cdot e^{\frac{\pi}{2}} + 2\cdot \left[-1 - \int_0^{\pi/2} e^t \cdot \cos(t)dt\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} 2e^t \cdot \cos(t)dt = 2\cdot e^{\frac{\pi}{2}} - 2 - 2\cdot \int_0^{\pi/2} e^t \cdot \cos(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} 2e^t \cdot \cos(t)dt + 2\cdot \int_0^{\pi/2} e^t \cdot \cos(t)dt = 2\cdot e^{\frac{\pi}{2}} - 2 \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} 2e^t \cdot \cos(t)dt + \int_0^{\pi/2} 2e^t \cdot \cos(t)dt = 2\cdot e^{\frac{\pi}{2}} - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot \int_0^{\pi/2} 2e^t \cdot \cos(t)dt = 2\cdot e^{\frac{\pi}{2}} - 2 \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} 2e^t \cdot \cos(t)dt = \frac{2\cdot e^{\frac{\pi}{2}} - 2}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} 2e^t \cdot \cos(t)dt = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

c) $\int_0^{+\infty} e^{-(x+1)\cdot t}dt$

R:

Uma vez que o integral não está limitado superiormente, então teremos que proceder ao seguinte re-arranjo: $\int_0^{+\infty} e^{-(x+1)\cdot t}dt = \lim_{a\to+\infty} \int_0^{a} e^{-(x+1)\cdot t}dt =$ ☼

Assim sendo teremos então que:

$$\int_0^{a} e^{-(x+1)\cdot t}dt \overset{2}{=} \frac{1}{-(x+1)} \cdot \underbrace{\int_0^{a} \underbrace{e^{-(x+1)\cdot t}}_{e^u} \cdot \underbrace{[-(x+1)]}_{u'}dt}_{e^u} = \frac{1}{-(x+1)} \cdot \left(e^{-(x+1)\cdot t}\right)_0^a = \frac{1}{-(x+1)} \cdot \left[e^{-(x+1)\cdot a} - \underbrace{e^{-(x+1)\cdot 0}}_{=1}\right] =$$

$$= \frac{e^{-(x+1)\cdot a} - 1}{-(x+1)}$$

Substituindo agora este resultado na expressão ☼, teremos que:

$$☼ = \lim_{a\to+\infty} \int_0^{a} e^{-(x+1)\cdot t}dt = \lim_{a\to+\infty} \frac{e^{-(x+1)\cdot a} - 1}{-(x+1)} = \lim_{a\to+\infty} \frac{e^{-(x+1)\cdot a}}{-(x+1)} + \frac{1}{(x+1)}$$

Para: $x \neq -1$, teremos que: $\left\{ \begin{array}{l} x > -1 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1} \\ x < -1 \Rightarrow \infty \\ x = -1 \Rightarrow \text{impossivel} \end{array} \right\}$

[2] Para aplicar a fórmula: $\int e^u \cdot u' = e^u$, considerando: $u = -(x+1)\cdot t \Rightarrow u' = -(x+1)$, teremos que re-arranjar o integral, multiplicando por $u' = -(x+1)$ e dividindo pelo mesmo valor para não alterar o valor inicial do integral.

2. Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}$

R:

$$\det\begin{vmatrix} \overbrace{x}^{+} & \overbrace{x^2}^{-} \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = \left[(x\cdot 2x)-(1\cdot x^2)\right] = 2x^2 - x^2 = x^2$$

b) $\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}$

R:

$$\det\begin{vmatrix} \overbrace{e^x}^{+} & \overbrace{e^{2x}}^{-} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = \left[(e^x\cdot 2e^{2x})-(e^x\cdot e^{2x})\right] = e^x\cdot e^{2x}$$

c) $\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} & 2e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} & 4e^{2x} \end{vmatrix}$

R:

$$\det\begin{vmatrix} \overbrace{e^x}^{+} & \overbrace{e^{2x}}^{-} & \overbrace{e^{2x}}^{+} \\ e^x & 2e^{2x} & 2e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x\cdot\det\underbrace{\begin{vmatrix} \overbrace{2e^{2x}}^{+} & \overbrace{2e^{2x}}^{-} \\ 4e^{2x} & 4e^{2x} \end{vmatrix}}_{=(2e^{2x}\cdot 4e^{2x})-(4e^{2x}\cdot 2e^{2x})=0} \underbrace{-e^{2x}\cdot\det\begin{vmatrix} \overbrace{e^x}^{+} & \overbrace{2e^{2x}}^{-} \\ e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} + e^{2x}\cdot\det\begin{vmatrix} \overbrace{e^x}^{+} & \overbrace{2e^{2x}}^{-} \\ e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix}}_{=0} = 0$$

d) $\begin{vmatrix} x & x^3 & x^2 \\ 1 & 3x^2 & 2x \\ 0 & 6x & 2 \end{vmatrix}$

R:

$$\det\begin{vmatrix} \overbrace{x}^{+} & \overbrace{x^3}^{-} & \overbrace{x^2}^{+} \\ 1 & 3x^2 & 2x \\ 0 & 6x & 2 \end{vmatrix} = x\cdot\det\begin{vmatrix} \overbrace{3x^2}^{+} & \overbrace{2x}^{-} \\ 6x & 2 \end{vmatrix} - x^3\cdot\det\begin{vmatrix} \overbrace{1}^{+} & \overbrace{2x}^{-} \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + x^2\cdot\det\begin{vmatrix} \overbrace{1}^{+} & \overbrace{3x^2}^{-} \\ 0 & 6x \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot \left[\left(3x^2 \cdot 2 \right) - \left(6x \cdot 2x \right) \right] - x^3 \cdot \left[\left(1 \cdot 2 \right) - \underbrace{\left(0 \cdot 2x \right)}_{=0} \right] + x^2 \cdot \left[\left(1 \cdot 6x \right) - \underbrace{\left(0 \cdot 3x^2 \right)}_{=0} \right] =$$

$$= x \cdot \left(6x^2 - 12x^2 \right) - 2x^3 + 6x^3 = x \cdot \left(-6x^2 \right) + 4x^3 = -6x^3 + 4x^3 = -2x^3$$

3. Factorize os seguintes polinómios usando, se necessário, a "regra de Rufini":

a) $x^3 - 2x^2 + x$

R:

$$x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(x^2 - 2x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ [3]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{2+0}{2} = 1 \\ x = \dfrac{2-0}{2} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-1)^2 = 0$$

b) $x^3 - x^2 - x + 1$

R:

Aqui terá que ser aplicada a regra de Rufini, mas antes disso temos que encontrar – aleatoriamente – uma das raízes do polinómio[4], pelo que:

Para: $x = 1 \Rightarrow 1^3 - 1^2 - 1 + 1 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow 1$ é uma das raízes do polinómio.

Sendo assim, a regra de Rufini será dada pelo seguinte:

	x^3	x^2	x	ind.
	1	-1	-1	1
	$\downarrow$	$+\downarrow$	$+\downarrow$	$+\downarrow$
1	$\downarrow$	1	0	-1
└ ×	1	0	-1	0
$(x-1)\times$	$\rightarrow x^2 + 0x - 1 = x^2 - 1$			

Uma vez que a regra de Rufini "baixa" um grau na função em cada vez que é aplicada, então teremos agora que:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot \left(x^2 - 1\right) = 0 \text{ [5]} \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot (x-1)^2 = 0$$

---

[3] A fórmula resolvente para uma equação do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$ é dada por: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

[4] Por norma devem escolher-se sempre o **-1**, **0** ou o **1**, como valores de partida para a determinação iterativa de uma das raízes do polinómio.

[5] $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \Rightarrow (x+1) \cdot (x-1) = 0$

c) x^3+3x^2+3x+1

R:

Aqui terá que ser aplicada a regra de Rufini, mas antes disso temos que encontrar – aleatoriamente – uma das raízes do polinómio, pelo que:

Para: $x=-1 \Rightarrow (-1)^3+3\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+1=-1+3-3+1=0 \Rightarrow$ -1 é uma das raízes do polinómio.

Sendo assim, a regra de Rufini será dada pelo seguinte:

	x^3	x^2	x	ind.
	1	3	3	1
	↓	+↓	+↓	+↓
-1	↓	-1	-2	-1
└ ×	1	2	1	0
$(x+1)\times$	$\rightarrow x^2+2x+1$			

Uma vez que a regra de Rufini "baixa" um grau na função em cada vez que é aplicada, então teremos agora que:

$$x^3+3x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot(x^2+2x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee \left\{\begin{matrix} x=\frac{-2+0}{2}=-1 \\ x=\frac{-2-0}{2}=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3=0$$

d) x^4-2x^2+1

R:

Aqui terá que ser aplicada a regra de Rufini, mas antes disso temos que encontrar – aleatoriamente – uma das raízes do polinómio, pelo que:

Para: $x=1 \Rightarrow 1^4-2\cdot1^2+1=0 \Rightarrow 1$ é uma das raízes do polinómio.

Sendo assim, a regra de Rufini será dada pelo seguinte:

	x^4	x^3	x^2	x	ind.
	1	0	-2	0	1
	$\downarrow$	$+\downarrow$	$+\downarrow$	$+\downarrow$	$+\downarrow$
1	$\downarrow$	1	1	-1	-1
$\llcorner \times$	1	1	-1	-1	0
$(x-1)\times$	$\rightarrow\ x^3+x^2-x-1$				

Uma vez que a regra de Rufini "baixa" um grau na função em cada vez que é aplicada, então teremos agora que: $x^4-2x^2+1=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(x^3+x^2-x-1\right)=0$

Aplicando novamente a regra de Rufini, teremos:

Para: $x=1 \Rightarrow 1^3+1^2-1-1=0 \Rightarrow 1$ é uma das raízes do polinómio.

	x^3	x^2	x	ind.
	1	1	-1	-1
	$\downarrow$	$+\downarrow$	$+\downarrow$	$+\downarrow$
1	$\downarrow$	1	2	1
$\llcorner \times$	1	2	1	0
$(x-1)\times$	$\rightarrow\ x^2+2x+1$			

Uma vez que a regra de Rufini "baixa" um grau na função em cada vez que é aplicada, então teremos agora que:

$$(x-1)\cdot\left(x^3+x^2-x-1\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[(x-1)\cdot\left(x^2+2x+1\right)\right]=0 \Leftrightarrow (x-1)^2\cdot\left(x^2+2x+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=-1 \vee x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=-1 \vee x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=-1 \vee \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-2+0}{2}=-1 \\ x=\dfrac{-2-0}{2}=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x-1)^2\cdot(x+1)\cdot(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2\cdot(x+1)^2=0$$

4. Decomponha as seguintes funções racionais:

a) $\dfrac{s}{(s-1)\cdot(s+1)}$

R:

$$\frac{s}{(s-1)\cdot(s+1)}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{(s+1)} \Leftrightarrow \frac{s}{(s-1)\cdot(s+1)}=\frac{A\cdot(s+1)+B\cdot(s-1)}{(s-1)\cdot(s+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s=A\cdot(s+1)+B\cdot(s-1) \Leftrightarrow s=A\cdot s+A+B\cdot s-B \Leftrightarrow s=(A+B)\cdot s+A-B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s+0=(A+B)\cdot s+A-B \Leftrightarrow \begin{cases} s=(A+B)\cdot s \\ 0=A-B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=A+B \\ 0=A-B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=A+A \\ B=A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Assim sendo teremos então que: $\dfrac{s}{(s-1)\cdot(s+1)}=\dfrac{1/2}{(s-1)}+\dfrac{1/2}{(s+1)}$

b) $\dfrac{1}{s\cdot(s+1)^2}$

R:

$$\frac{1}{s\cdot(s+1)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+1)}+\frac{C}{(s+1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{s\cdot(s+1)^2}=\frac{A\cdot(s+1)^2+B\cdot s\cdot(s+1)+C\cdot s}{s\cdot(s+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=A\cdot(s^2+2s+1)+B\cdot(s^2+s)+C\cdot s \Leftrightarrow 1=A\cdot s^2+2A\cdot s+A+B\cdot s^2+B\cdot s+C\cdot s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=(A+B)\cdot s^2+(2A+B+C)\cdot s+A \Leftrightarrow 0\cdot s^2+0\cdot s+1=(A+B)\cdot s^2+(2A+B+C)\cdot s+A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0=(A+B)\cdot s^2 \\ 0=(2A+B+C)\cdot s \\ 1=A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ 0=1+B \\ 0=2\cdot 1+B+C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ 0=2-1+C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$$

Assim sendo teremos então que: $\dfrac{1}{s\cdot(s+1)^2}=\dfrac{1}{s}+\dfrac{(-1)}{(s+1)}+\dfrac{(-1)}{(s+1)^2}$

c) $\dfrac{s+1}{(s-1)\cdot(s^2+4)}$

R:

$$\frac{s+1}{(s-1)\cdot(s^2+4)}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B\cdot s+C}{(s^2+4)}\Leftrightarrow\frac{s+1}{(s-1)\cdot(s^2+4)}=\frac{A\cdot(s^2+4)+(B\cdot s+C)\cdot(s-1)}{(s-1)\cdot(s^2+4)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s+1=A\cdot s^2+4A+B\cdot s^2-B\cdot s+C\cdot s-C\Leftrightarrow s+1=(A+B)\cdot s^2+(C-B)\cdot s+4A-C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0\cdot s^2+s+1=(A+B)\cdot s^2+(C-B)\cdot s+4A-C\Leftrightarrow\begin{cases}0=(A+B)\cdot s^2\\ s=(C-B)\cdot s\\ 1=4A-C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=A+B\\ 1=C-B\\ 1=4A-C\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A=-B\\ B+1=C\\ 1=4\cdot(-B)-(B+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-B\\ B+1=C\\ 1=-4B-B-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-B\\ B+1=C\\ 2=-5B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{2}{5}\\ B=-\frac{2}{5}\\ C=\frac{3}{5}\end{cases}$$

Assim sendo teremos então que: $\dfrac{s+1}{(s-1)\cdot(s^2+4)}=\dfrac{\frac{2}{5}}{(s-1)}+\dfrac{\frac{-2}{5}\cdot s+\frac{3}{5}}{(s^2+4)}$

d) $\dfrac{25\cdot(s^2-1)}{(s-1)^3\cdot(s^2+4)}$

R:

Antes de mais vamos começar por simplificar a função, para que a sua posterior decomposição seja mais simples:

$$\frac{25\cdot(s^2-1)}{(s-1)^3\cdot(s^2+4)}=\frac{25\cdot[(s-1)\cdot(s+1)]}{(s-1)^3\cdot(s^2+4)}=\frac{25\cdot(s+1)}{(s-1)^2\cdot(s^2+4)}=\frac{25\cdot s+25}{(s-1)^2\cdot(s^2+4)}$$

Agora já podemos decompor a função:

$$\frac{25\cdot s+25}{(s-1)^2\cdot(s^2+4)}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{C\cdot s+D}{(s^2-4)}\text{[6]}\Leftrightarrow$$

[6] Esta decomposição adopta esta forma porque um dos membros do denominador, mais especificamente o segundo, não tem raízes reais, isto é resulta em $\sqrt{-n}$. Para além disso temos ainda no primeiro termo um elemento ao quadrado, logo o desenvolvimento é o que se apresenta.

$$\Leftrightarrow \frac{25\cdot s+25}{(s-1)^2\cdot(s^2+4)}=\frac{A\cdot(s-1)\cdot(s^2+4)+B\cdot(s^2+4)+(C\cdot s+D)\cdot(s-1)^2}{(s-1)^2\cdot(s^2+4)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\cdot s+25=A\cdot(s^3+4s-s^2-4)+B\cdot(s^2+4)+(C\cdot s+D)\cdot(s^2-2s+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\cdot s+25=(A+C)\cdot s^3+(B-A-2C+D)\cdot s^2+(4A+C-2D)\cdot s+(-4A+4B+D)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0=(A+C)\cdot s^3\\0=(B-A-2C+D)\cdot s^2\\25\cdot s=(4A+C-2D)\cdot s\\25=-4A+4B+D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=A+C\\0=B-A-2C+D\\25=4A+C-2D\\25=-4A+4B+D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-C\\0=B-(-C)-2C+D\\25=4\cdot(-C)+C-2D\\25=-4\cdot(-C)+4B+D\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}----------\\0=B-C+D\\25=-3C-2D\\25=4C+4B+D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}----------\\B=C-D\\25=-3C-2D\\25=4C+4\cdot(C-D)+D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-------\\-------\\25=-3C-2D\\25=8C-3D\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}----------\\----------\\C=\dfrac{-25-2D}{3}\\25=8\cdot\left(\dfrac{-25-2D}{3}\right)-3D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}----------\\----------\\----------\\25=\dfrac{8\cdot(-25-2D)-9D}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}----------\\----------\\----------\\75=-200-16D-9D\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-------\\-------\\-------\\275=-25D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=10\\C=-1\\D=-11\end{cases}$$

Assim sendo teremos então que: $\dfrac{25\cdot s+25}{(s-1)^2\cdot(s^2+4)}=\dfrac{1}{(s-1)}+\dfrac{10}{(s-1)^2}+\dfrac{(-1)\cdot s+(-11)}{(s^2-4)}$

e) $\dfrac{4}{s^3+s-2}$

R:

Pela regra de Rufini teremos para: $s=1 \Rightarrow 1^3+1-2=0 \Rightarrow 1$ é uma das raízes do polinómio.

Sendo assim, a regra de Rufini será dada pelo seguinte:

	s^3	s^2	s	ind.
	1	0	1	-2
	$\downarrow$	$+\downarrow$	$+\downarrow$	$+\downarrow$
1	$\downarrow$	1	1	2
└ $\times$	1	1	2	0
$(s-1)\times$	$\rightarrow s^2+s+2$			

Uma vez que a regra de Rufini "baixa" um grau na função em cada vez que é aplicada, então teremos agora que:

$$s^3+s-2=0 \Leftrightarrow (s-1)\cdot\left(s^2+s+2\right)=0 \Leftrightarrow s=1 \vee s=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{não se pode} \\ \text{prosseguir pq} \\ \text{não existe } \sqrt{\text{-n}} \end{Bmatrix}$$

Então, teremos agora que:

$$\frac{4}{s^3+s-2}=\frac{4}{(s-1)\cdot\left(s^2+s+2\right)} \Rightarrow \frac{4}{(s-1)\cdot\left(s^2+s+2\right)}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B\cdot s+C}{\left(s^2+s+2\right)}\,[7] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{(s-1)\cdot\left(s^2+s+2\right)}=\frac{A\cdot\left(s^2+s+2\right)+(B\cdot s+C)\cdot(s-1)}{(s-1)\cdot\left(s^2+s+2\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4=(A+B)\cdot s^2+(A-B+C)\cdot s+(2A-C) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0=(A+B)\cdot s^2 \\ 0=(A-B+C)\cdot s \\ 4=2A-C \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0=A+B \\ 0=A-B+C \\ 4=2A-C \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

[7] Esta decomposição adopta esta forma porque um dos membros do denominador, mais especificamente o segundo, não tem raízes reais, isto é resulta em $\sqrt{-n}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 0=-B-B+C \\ 4=2\cdot(-B)-C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ B=\dfrac{C}{2} \\ 4=2\cdot\left(-\dfrac{C}{2}\right)-C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-2 \end{cases}$$

Assim sendo teremos então que: $\dfrac{4}{(s-1)\cdot(s^2+s+2)}=\dfrac{1}{(s-1)}+\dfrac{(-1)\cdot s+(-2)}{(s^2+s+2)}$

f) $\dfrac{s^5-1}{s^4-s^3+s^2-s}$

R:

Uma vez que o numerador é superior, em grau, ao denominador então teremos que proceder à sua divisão como forma de transformar esta situação numa nova situação em que o numerador apresente um grau inferior ao do denominador. Assim teremos que:

$$\begin{array}{cccccc|cccc} s^5 & +0\cdot s^4 & +0\cdot s^3 & +0\cdot s^2 & +0\cdot s & -1 & s^4 & -s^3 & +s^2 & -s \\ \cline{7-10} -s^5 & +s^4 & -s^3 & +s^2 & & & s & +1 & & \\ \cline{1-5} 0 & +s^4 & -s^3 & +s^2 & +0\cdot s & & & & & \\ & -s^4 & +s^3 & -s^2 & +s & & & & & \\ \cline{2-6} & 0 & 0 & 0 & s & -1 & & & & \end{array}$$

Daqui se conclui que:

$$\frac{s^5-1}{s^4-s^3+s^2-s}=(s+1)+\frac{s-1}{s^4-s^3+s^2-s}=(s+1)+\frac{s-1}{(s+0)\cdot(s^3-s^2+s-1)}$$

Recorrendo agora à regra de Rufini para baixar o grau do denominador teremos para:

$s=1 \Rightarrow 1^3-1^2+1-1=0 \Rightarrow 1$ é uma das raízes do polinómio.

Sendo assim, a regra de Rufini será dada pelo seguinte:

	s^3	s^2	s	ind.
	1	-1	1	-1
	$\downarrow$	$+\downarrow$	$+\downarrow$	$+\downarrow$
1	$\downarrow$	1	0	1
$\llcorner \times$	1	0	1	0
$(s-1)\times$	$\to s^2+0\cdot s+1=s^2+1$			

Uma vez que a regra de Rufini "baixa" um grau na função em cada vez que é aplicada, então teremos agora que:

$$s^3-s^2+s-1=0 \Leftrightarrow (s-1)\cdot(s^2+1)=0 \Leftrightarrow s=1 \vee s=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{não se pode} \\ \text{prosseguir pq} \\ \text{não existe } \sqrt{\text{- n}} \end{Bmatrix}$$

Então, teremos agora que:

$$\frac{s^5-1}{s^4-s^3+s^2-s}=(s+1)+\frac{s-1}{s\cdot(s^3-s^2+s-1)}=(s+1)+\frac{s-1}{s\cdot(s-1)\cdot(s^2+1)}=(s+1)+\frac{1}{s\cdot(s^2+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s\cdot(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B\cdot s+C}{(s^2+1)}\text{[8]}\Leftrightarrow \frac{1}{s\cdot(s^2+1)}=\frac{A\cdot(s^2+1)+(B\cdot s+C)\cdot s}{s\cdot(s^2+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=(A+B)\cdot s^2+C\cdot s+A \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0=(A+B)\cdot s^2 \\ 0=C\cdot s \\ 1=A \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A=1 \\ 0=A+B \\ 0=C \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{Bmatrix}$$

Assim sendo teremos então que: $(s+1)+\dfrac{1}{s\cdot(s^2+1)}=(s+1)+\dfrac{1}{s}+\dfrac{(-1)\cdot s}{(s^2+1)}$

[8] Esta decomposição adopta esta forma porque um dos membros do denominador, mais especificamente o segundo, não tem raízes reais, isto é resulta em $\sqrt{-n}$

5. Mostre que a mudança de variável: $y(x) = x \cdot v(x)$, implica:

a) $\dfrac{dy(x)}{dx} = x\dfrac{dv(x)}{dx} + v(x)$

R:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{d[x \cdot v(x)]}{dx} = \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} \cdot [v(x)] + x \cdot \frac{d[v(x)]}{dx} = v(x) + x \cdot \frac{d[v(x)]}{dx}$$

b) $\dfrac{d^2 y(x)}{dx^2} = x\dfrac{d^2 v(x)}{dx^2} + 2\dfrac{dv(x)}{dx}$

R:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy(x)}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[v(x) + x \cdot \frac{d[v(x)]}{dx}\right] = \frac{d[v(x)]}{dx} + \frac{d}{dx}\left[x \cdot \frac{d[v(x)]}{dx}\right] =$$

$$= \frac{d[v(x)]}{dx} + \left[\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} \cdot \left[\frac{d[v(x)]}{dx}\right] + x \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{d[v(x)]}{dx}\right]\right] = \frac{d[v(x)]}{dx} + \frac{d[v(x)]}{dx} + x \cdot \frac{d^2[v(x)]}{dx^2} =$$

$$= 2\frac{d[v(x)]}{dx} + x \cdot \frac{d^2[v(x)]}{dx^2}$$

6. Recordando que se $F(x;y)$ é uma função real de classe C^1, então:

$$dF(x;y) = \frac{\partial F(x;y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x;y)}{\partial y}dy$$

Determine o diferencial total das seguintes funções:

a) $f(x;y) = y - x^2 - c$

R:

Atendendo ao que se encontra descrito no enunciado, teremos que:

- $$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - x^2 - c\right) = \frac{\partial(y)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(c)}{\partial x} = 0 - 2x - 0 = -2x$$

- $$\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y - x^2 - c\right) = \frac{\partial(y)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(c)}{\partial y} = 1 - 0 - 0 = 1$$

Logo: $df(x;y) = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dy \Leftrightarrow df(x;y) = (-2x)dx + (1)dy$

b) $g(x;y) = y^2x + 4x^2y - c^2$

R:

Atendendo ao que se encontra descrito no enunciado, teremos que:

- $$\frac{\partial g(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2x + 4x^2y - c^2\right) = \frac{\partial(y^2x)}{\partial x} + 4\frac{\partial(x^2y)}{\partial x} - \frac{\partial(c^2)}{\partial x} =$$

$$= \left(\underbrace{\frac{\partial(y^2)}{\partial x}}_{=0} \cdot x + y^2 \cdot \underbrace{\frac{\partial(x)}{\partial x}}_{=1}\right) + 4 \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial(x^2)}{\partial x}}_{=2x} \cdot y + x^2 \cdot \underbrace{\frac{\partial(y)}{\partial x}}_{=0}\right) - \underbrace{\frac{\partial(c^2)}{\partial x}}_{=0} = y^2 + 4 \cdot (2xy) = y^2 + 8xy$$

- $$\frac{\partial g(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2x + 4x^2y - c^2\right) = \frac{\partial(y^2x)}{\partial y} + 4\frac{\partial(x^2y)}{\partial y} - \frac{\partial(c^2)}{\partial y} =$$

$$= \left(\underbrace{\frac{\partial(y^2)}{\partial y}}_{=2y} \cdot x + y^2 \cdot \underbrace{\frac{\partial(x)}{\partial y}}_{=0}\right) + 4 \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial(x^2)}{\partial y}}_{=0} \cdot y + x^2 \cdot \underbrace{\frac{\partial(y)}{\partial y}}_{=1}\right) - \underbrace{\frac{\partial(c^2)}{\partial y}}_{=0} = 2y + 4x^2$$

Logo: $dg(x;y)=\frac{\partial g(x;y)}{\partial x}dx+\frac{\partial g(x;y)}{\partial y}dy \Leftrightarrow dg(x;y)=\left(y^2+8xy\right)dx+\left(2y+4x^2\right)dy$

c) $h(x;y)=y\cdot e^x+x\cdot e^y$

R:

Atendendo ao que se encontra descrito no enunciado, teremos que:

- $\frac{\partial h(x;y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\cdot e^x+x\cdot e^y\right)=\frac{\partial\left(y\cdot e^x\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(x\cdot e^y\right)}{\partial x}=$

$$=\left(\underbrace{\frac{\partial(y)}{\partial x}}_{=0}\cdot e^x+y\cdot\underbrace{\frac{\partial\left(e^x\right)}{\partial x}}_{=e^x}\right)+\left(\underbrace{\frac{\partial(x)}{\partial x}}_{=1}\cdot e^y+x\cdot\underbrace{\frac{\partial\left(e^y\right)}{\partial x}}_{=0}\right)=y\cdot e^x+e^y$$

- $\frac{\partial h(x;y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(y\cdot e^x+x\cdot e^y\right)=\frac{\partial\left(y\cdot e^x\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(x\cdot e^y\right)}{\partial y}=$

$$=\left(\underbrace{\frac{\partial(y)}{\partial y}}_{=1}\cdot e^x+y\cdot\underbrace{\frac{\partial\left(e^x\right)}{\partial y}}_{=0}\right)+\left(\underbrace{\frac{\partial(x)}{\partial y}}_{=0}\cdot e^y+x\cdot\underbrace{\frac{\partial\left(e^y\right)}{\partial y}}_{=e^y}\right)=e^x+x\cdot e^y$$

Logo: $dh(x;y)=\frac{\partial h(x;y)}{\partial x}dx+\frac{\partial h(x;y)}{\partial y}dy \Leftrightarrow dh(x;y)=\left(y\cdot e^x+e^y\right)dx+\left(e^x+x\cdot e^y\right)dy$

d) $m(x;y)=\cos(xy)$

R:

Atendendo ao que se encontra descrito no enunciado, teremos que:

- $\frac{\partial m(x;y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(xy)\right)=-sen(xy)\cdot\frac{\partial(xy)}{\partial x}=-sen(xy)\cdot\left[\underbrace{\frac{\partial(x)}{\partial x}}_{=1}\cdot y+x\cdot\underbrace{\frac{\partial(y)}{\partial x}}_{=0}\right]=-y\cdot sen(xy)$

- $\frac{\partial m(x;y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(xy)\right)=-sen(xy)\cdot\frac{\partial(xy)}{\partial y}=-sen(xy)\cdot\left[\underbrace{\frac{\partial(x)}{\partial y}}_{=0}\cdot y+x\cdot\underbrace{\frac{\partial(y)}{\partial y}}_{=1}\right]=-x\cdot sen(xy)$

Logo: $dm(x;y) = \frac{\partial m(x;y)}{\partial x}dx + \frac{\partial m(x;y)}{\partial y}dy \Leftrightarrow dm(x;y) = [-y \cdot sen(xy)]dx + [-x \cdot sen(xy)]dy$

7. Para cada uma das seguintes relações implícitas determine dy/dx:

a) $x^2 + y^2 = 3$

R:

$$x^2 + y^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} - \frac{d(3)}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2 \cdot x^{2-1} \cdot \underbrace{\frac{d(x)}{dx}}_{=1}\right) + \left(2 \cdot y^{2-1} \cdot \frac{d(y)}{dx}\right) - 0 = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot x) + \left(2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cdot x}{2 \cdot y} = -\frac{x}{y}$$

b) $yx + y^2 = k$

R:

$$yx + y^2 = k \Leftrightarrow yx + y^2 - k = 0 \Leftrightarrow \frac{d(yx)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} - \frac{d(k)}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d(y)}{dx} \cdot x + y \cdot \underbrace{\frac{d(x)}{dx}}_{=1}\right] + \left[2 \cdot y^{2-1} \cdot \frac{d(y)}{dx}\right] - \underbrace{\frac{d(k)}{dx}}_{=0} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{dy}{dx} \cdot x + y\right] + \left[2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{dy}{dx} \cdot (x + 2y)\right] + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + 2y}$$

c) $y \cdot e^{xy} = 1$

R:

$$y \cdot e^{xy} = 1 \Leftrightarrow y \cdot e^{xy} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{d(y \cdot e^{xy})}{dx} - \frac{d(1)}{dx} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{d(y)}{dx} \cdot e^{xy} + y \cdot \frac{d(e^{xy})}{dx}\right] - \underbrace{\frac{d(1)}{dx}}_{=0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d(y)}{dx} \cdot e^{xy} + y \cdot \left[e^{xy} \cdot \frac{d(xy)}{dx}\right]\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{d(y)}{dx} \cdot e^{xy} + y \cdot \left[e^{xy} \cdot \left(\underbrace{\frac{d(x)}{dx}}_{=1} \cdot y + x \cdot \frac{d(y)}{dx}\right)\right]\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{dy}{dx} \cdot e^{xy} + y \cdot \left(e^{xy} \cdot y + e^{xy} \cdot x \cdot \frac{dy}{dx}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{dy}{dx} \cdot e^{xy} + y^2 \cdot e^{xy} + y \cdot e^{xy} \cdot x \cdot \frac{dy}{dx}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{dy}{dx} \cdot \left(e^{xy} + y \cdot e^{xy} \cdot x \right) + y^2 \cdot e^{xy} \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 \cdot e^{xy}}{e^{xy} + y \cdot x \cdot e^{xy}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 \cdot e^{xy}}{e^{xy} \cdot (1 + y \cdot x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{1 + y \cdot x}$$

d) $sen(xy) = y$

R:

$$sen(xy) = y \Leftrightarrow sen(xy) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{d(sen(xy))}{dx} - \frac{d(y)}{dx} = 0 \Leftrightarrow \cos(xy) \cdot \frac{d(xy)}{dx} - \frac{d(y)}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(xy) \cdot \left[\underbrace{\frac{d(x)}{dx}}_{=1} \cdot y + x \cdot \frac{d(y)}{dx} \right] - \frac{d(y)}{dx} = 0 \Leftrightarrow y \cdot \cos(xy) + x \cdot \cos(xy) \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \cdot \cos(xy) - 1) \cdot \frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos(xy) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y \cdot \cos(xy)}{x \cdot \cos(xy) - 1} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot \cos(xy)}{1 - x \cdot \cos(xy)}$$

8. Determine as funções mais gerais que verificam:

a) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(x;y)}{\partial x} = y \cdot e^{xy} \\ \dfrac{\partial F(x;y)}{\partial y} = x \cdot e^{xy} + 2y \end{array}\right\}$$

R:

Entre as duas expressões apresentadas no sistema, a que parece ser mais simples de primitivar é a primeira, logo vamos começar por primitivar em ordem a x a seguinte função:

$$\frac{\partial F(x;y)}{\partial x} = y \cdot e^{xy} \Rightarrow P_x\left(\underbrace{y}_{u'} \cdot \underbrace{e^{xy}}_{e^u}\right) = e^{xy} + \varphi(y) \Rightarrow F(x;y) = e^{xy} + \varphi(y)$$

Agora vamos determinar a derivada da função obtida em ordem a y, para posteriormente se substituir na segunda expressão do sistema, pelo que:

$$\frac{\partial F(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy} + \varphi(y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\right) + \varphi'(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\right) + \varphi'(y) = e^{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \varphi'(y) =$$

$$= e^{xy} \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial x}{\partial y} \cdot y + x \cdot \frac{\partial y}{\partial y}}_{u'.v+u.v'}\right) + \varphi'(y) = e^{xy} \cdot x + \varphi'(y) \Rightarrow \frac{\partial F(x;y)}{\partial y} = e^{xy} \cdot x + \varphi'(y)$$

Substituindo então este resultado na segunda expressão teremos:

$$\frac{\partial F(x;y)}{\partial y} = x \cdot e^{xy} + 2y \Leftrightarrow e^{xy} \cdot x + \varphi'(y) = x \cdot e^{xy} + 2y \Leftrightarrow \varphi'(y) = 2y$$

Assim sendo: $\varphi'(y) = 2y \Rightarrow \varphi(y) = P_y(2y) \Leftrightarrow \varphi(y) = y^2 + C$

Logo: $F(x;y) = e^{xy} + \varphi(y) \Leftrightarrow F(x;y) = e^{xy} + y^2 + C$

b) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial G(x;y)}{\partial x} = e^x \cdot [\cos(xy) - y \cdot sen(xy)] \\ \dfrac{\partial G(x;y)}{\partial y} = -x \cdot e^x \cdot sen(xy) \end{array}\right\}$$

R:

Entre as duas expressões apresentadas no sistema, a que parece ser mais simples de primitivar é a segunda, logo vamos começar por primitivar em ordem a y a seguinte função:

$$\frac{\partial G(x;y)}{\partial y} = -x \cdot e^x \cdot sen(xy) \Rightarrow P_y\left[-x \cdot e^x \cdot sen(xy)\right] =^{9} x \cdot e^x \cdot P_y\left[-sen(xy)\right] =^{10}$$

$$= e^x \cdot \underbrace{P_y\left[\underbrace{-sen(xy)}_{sen(u)} \cdot \underbrace{x}_{\frac{du}{dy}}\right]}_{=\cos(xy)} = e^x \cdot \cos(xy) + \phi(x) \Rightarrow G(x;y) = e^x \cdot \cos(xy) + \phi(x)$$

Agora vamos determinar a derivada da função obtida em ordem a x, para posteriormente se substituir na primeira expressão do sistema, pelo que:

$$\frac{\partial G(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cdot \cos(xy) + \phi(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cdot \cos(xy)\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi(x)) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\right) \cdot \cos(xy) + \left(e^x\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\cos(xy)\right) + \phi'(x) = \left(e^x \cdot \cos(xy) + e^x \cdot (-sen(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy)\right) + \phi'(x) =$$

$$= e^x \cdot \cos(xy) - y \cdot e^x \cdot sen(xy) + \phi'(x) \Rightarrow \frac{\partial G(x;y)}{\partial x} = e^x \cdot \cos(xy) - y \cdot e^x \cdot sen(xy) + \phi'(x)$$

[9] Como a primitação vai ser feita em ordem a y, então, todo e qualquer termo que não seja composto por y deverá ser tratado como constante.

[10] Agora teremos que proceder ao re-arranjo desta primitiva por forma a poder aplicar a seguinte primitiva genérica: $P - sen(u)\dfrac{du}{dx}$

Substituindo então este resultado na primeira expressão teremos:

$$\frac{\partial G(x;y)}{\partial x} = e^x \cdot [\cos(xy) - y \cdot sen(xy)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x \cdot \cos(xy) - y \cdot e^x \cdot sen(xy) + \phi'(x) = e^x \cdot [\cos(xy) - y \cdot sen(xy)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x \cdot \cos(xy) - y \cdot e^x \cdot sen(xy) + \phi'(x) = e^x \cdot \cos(xy) - y \cdot e^x \cdot sen(xy) \Leftrightarrow \phi'(x) = 0$$

Assim sendo: $\phi'(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = P_x(C) \Leftrightarrow \phi(x) = C$

Logo: $G(x;y) = e^x \cdot \cos(xy) + \phi(x) \Leftrightarrow G(x;y) = e^x \cdot \cos(xy) + C$

9. Sabendo que se um sistema linear de ordem n, nas n variáveis $x_1; x_2; ...; x_n$, for equivalente à equação matricial: $D \cdot X = B$, e se $|D| \neq 0$, então as suas soluções segundo a "regra de Cramer" são:

$$x_1 = \frac{|D_{x_1}|}{|D|};\ \ x_2 = \frac{|D_{x_2}|}{|D|}; ...; x_n = \frac{|D_{x_n}|}{|D|},$$

onde D_{x_i} é a matriz que se obtém substituindo a i-ésima coluna de D pelo vector B, mostre que a "regra de Cramer" para $n = 2$ se escreve:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & d_{12} \\ b_2 & d_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}};\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} d_{11} & b_1 \\ d_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}}$$

a) $\begin{cases} x + 3y = 63 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

R:

$\begin{Bmatrix} x + 3y = 63 \\ 2x - y = 7 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Pela aplicação da "regra de Cramer", teremos então que:

- $$x = \frac{\det \begin{vmatrix} \overbrace{63}^{+} & \overset{-}{3} \\ 7 & -1 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow x = \frac{[63 \cdot (-1)] - (7 \cdot 3)}{[1 \cdot (-1)] - (2 \cdot 3)} \Leftrightarrow x = \frac{-63 - 21}{-1 - 6} \Leftrightarrow x = \frac{-84}{-7} \Leftrightarrow x = 12$$

- $$y = \frac{\det \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overbrace{63}^{-} \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow y = \frac{(1 \cdot 7) - (2 \cdot 63)}{[1 \cdot (-1)] - (2 \cdot 3)} \Leftrightarrow y = \frac{7 - 126}{-1 - 6} \Leftrightarrow y = \frac{-119}{-7} \Leftrightarrow y = 17$$

b) $\begin{cases} f(x)+2g(x)=x \\ 2f(x)-g(x)=1 \end{cases}$

R:

$\begin{cases} f(x)+2g(x)=x \\ 2f(x)-g(x)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Pela aplicação da "regra de Cramer", teremos então que:

- $$f(x)=\frac{\det\begin{vmatrix} \overbrace{x}^{+} & \overbrace{2}^{-} \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} \overbrace{1}^{+} & \overbrace{2}^{-} \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow f(x)=\frac{[x\cdot(-1)]-(1\cdot 2)}{[1\cdot(-1)]-(2\cdot 2)} \Leftrightarrow f(x)=\frac{-x-2}{-1-4} \Leftrightarrow f(x)=\frac{-(x+2)}{-5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{x+2}{5}$$

- $$g(x)=\frac{\det\begin{vmatrix} \overbrace{1}^{+} & \overbrace{x}^{-} \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} \overbrace{1}^{+} & \overbrace{2}^{-} \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow g(x)=\frac{(1\cdot 1)-(2\cdot x)}{[1\cdot(-1)]-(2\cdot 2)} \Leftrightarrow g(x)=\frac{1-2x}{-1-4} \Leftrightarrow g(x)=\frac{-(-1+2x)}{-5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)=\frac{2x-1}{5}$$

c) $\begin{cases} f(x)-x\cdot g(x)=e^x-1 \\ x\cdot f(x)+x^2\cdot g(x)=x\cdot(e^x+1) \end{cases}$

R:

$\begin{cases} f(x)-x\cdot g(x)=e^x-1 \\ x\cdot f(x)+x^2\cdot g(x)=x\cdot(e^x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x-1 \\ x\cdot(e^x+1) \end{pmatrix} \Rightarrow$ Pela aplicação da "regra de Cramer", teremos então que:

- $$f(x)=\frac{\det\begin{vmatrix} \overbrace{e^x-1}^{+} & \overbrace{-x}^{-} \\ x\cdot(e^x+1) & x^2 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} \overbrace{1}^{+} & \overbrace{-x}^{-} \\ x & x^2 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow f(x)=\frac{[(e^x-1)\cdot x^2]-[x\cdot(e^x+1)\cdot(-x)]}{[1\cdot x^2]-[x\cdot(-x)]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{\left[\left(e^x-1\right)\cdot x^2\right]+\left[x^2\cdot\left(e^x+1\right)\right]}{x^2+x^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2\cdot\left(e^x-1+e^x+1\right)}{2x^2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2\cdot 2\cdot e^x}{2x^2}\Leftrightarrow f(x)=e^x$$

- $$g(x)=\frac{\det\begin{vmatrix}\overset{+}{1} & \overbrace{e^x-1}^{-}\\ x & x\cdot\left(e^x+1\right)\end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix}\overset{+}{1} & \overbrace{-x}^{-}\\ x & x^2\end{vmatrix}}\Leftrightarrow g(x)=\frac{\left[1\cdot x\cdot\left(e^x+1\right)\right]-\left[x\cdot\left(e^x-1\right)\right]}{\left[1\cdot x^2\right]-\left[x\cdot(-x)\right]}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)=\frac{\left[x\cdot\left(e^x+1\right)\right]-\left[x\cdot\left(e^x-1\right)\right]}{x^2+x^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)=\frac{x\cdot\left(e^x+1-e^x+1\right)}{2x^2}\Leftrightarrow g(x)=\frac{2x}{2x^2}\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{x}$$