Teoria de apoio à resolução deste tipo de exercícios

Uma EDP é dada na sua forma mais geral por:

$$a(x;y)\cdot u_{xx} + b(x;y)\cdot u_{xy} + c(x;y)\cdot u_{yy} + d(x;y)\cdot u_x + e(x;y)\cdot u_y + f(x;y)\cdot u = g(x;y)$$

Sendo classificada da seguinte forma:

$4\times a\times c - b^2 > 0 \quad \Rightarrow$ EDP Elíptica.

$4\times a\times c - b^2 < 0 \quad \Rightarrow$ EDP Hiperbólica.

$4\times a\times c - b^2 = 0 \quad \Rightarrow$ EDP Parabólica.

Onde: $u_{xx} = \frac{d^2x}{dx^2}$; $u_{xy} = \frac{d^2y}{dx^2}$; $u_{yy} = \frac{d^2y}{dy^2}$; $u_x = \frac{dx}{dx}$; $u_y = \frac{dy}{dy}$

1. **Escrever a forma geral de uma EDP (Equação Diferencial Parcial) de primeira ordem linear em três variáveis. Quantas funções são necessárias para especificar esta EDP?**

R:

2. **Considere o operador L dado por $Lu(x;y) = a(x;y)\cdot u_{xx} + b(x;y)\cdot u_{xy} + c(x;y)\cdot u_{yy}$. Mostre que L é um operador linear.**

R:

3. **Supondo que L_1 e L_2 são operadores lineares. Mostre que o operador $L_1 + L_2$ também é um operador diferencial linear.**

R:

4. Classifique cada uma das EDP's de segunda ordem como elíptica, parabólica ou hiperbólica:

a) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y = 0$

R:

Sabendo que uma EDP é dada na sua forma mais geral por:

$$a(x;y)\cdot u_{xx} + b(x;y)\cdot u_{xy} + c(x;y)\cdot u_{yy} + d(x;y)\cdot u_x + e(x;y)\cdot u_y + f(x;y)\cdot u = g(x;y)$$

Então recorrendo ao enunciado teremos: $\underbrace{1}_{a}\cdot u_{xx} + \underbrace{3}_{b}\cdot u_{xy} + \underbrace{1}_{c}\cdot u_{yy} + \underbrace{2}_{d}\cdot u_x - \underbrace{1}_{e}\cdot u_y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\times a\times c - b^2 = 4\times 1\times 1 - 3^2 = -5 < 0 \Rightarrow$ EDP Hiperbólica.

b) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y = 0$

R:

Sabendo que uma EDP é dada na sua forma mais geral por:

$$a(x;y)\cdot u_{xx} + b(x;y)\cdot u_{xy} + c(x;y)\cdot u_{yy} + d(x;y)\cdot u_x + e(x;y)\cdot u_y + f(x;y)\cdot u = g(x;y)$$

Então recorrendo ao enunciado teremos: $\underbrace{1}_{a}\cdot u_{xx} - \underbrace{2}_{b}\cdot u_{xy} + \underbrace{1}_{c}\cdot u_{yy} + \underbrace{2}_{d}\cdot u_x - \underbrace{1}_{e}\cdot u_y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\times a\times c - b^2 = 4\times 1\times 1 - (-2)^2 = 0 \Rightarrow$ EDP Parabólica.

c) $u_{xx} + x \cdot u_{yy} = 0$

R:

Sabendo que uma EDP é dada na sua forma mais geral por:

$$a(x;y) \cdot u_{xx} + b(x;y) \cdot u_{xy} + c(x;y) \cdot u_{yy} + d(x;y) \cdot u_x + e(x;y) \cdot u_y + f(x;y) \cdot u = g(x;y)$$

Então recorrendo ao enunciado teremos: $\underbrace{1}_{a} \cdot u_{xx} + \underbrace{0}_{b} \cdot u_{xy} + \underbrace{x}_{c} \cdot u_{yy} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4 \times a \times c - b^2 = 4 \times 1 \times x - 0^2 = 4x \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} se: x > 0 \Rightarrow \text{EDP Elíptica} \\ se: x < 0 \Rightarrow \text{EDP Hiperbólica} \\ se: x = 0 \Rightarrow \text{EDP Parabólica} \end{array} \right\}$$

d) $u_{xx} + 2 \cdot e^{xy} \cdot u_{xy} + e^{2xy} \cdot u_{yy} = 0$

R:

Sabendo que uma EDP é dada na sua forma mais geral por:

$$a(x;y) \cdot u_{xx} + b(x;y) \cdot u_{xy} + c(x;y) \cdot u_{yy} + d(x;y) \cdot u_x + e(x;y) \cdot u_y + f(x;y) \cdot u = g(x;y)$$

Então recorrendo ao enunciado teremos: $\underbrace{1}_{a} \cdot u_{xx} + \underbrace{2 \cdot e^{xy}}_{b} \cdot u_{xy} + \underbrace{e^{2xy}}_{c} \cdot u_{yy} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4 \times a \times c - b^2 = 4 \times 1 \times e^{2xy} - \left(2 \cdot e^{xy}\right)^2 = 4e^{2xy} - 4 \cdot \left(e^{xy}\right)^2 = 4e^{2xy} - 4e^{(xy)^2} =$$

$$= 4e^{2xy} - 4e^{2xy} = 0 \Rightarrow$$ EDP Parabólica.

e) $e^{y}\cdot u_{xx}+e^{x}\cdot u_{yy}=0$

R:

Sabendo que uma EDP é dada na sua forma mais geral por:

$$a(x;y)\cdot u_{xx}+b(x;y)\cdot u_{xy}+c(x;y)\cdot u_{yy}+d(x;y)\cdot u_{x}+e(x;y)\cdot u_{y}+f(x;y)\cdot u=g(x;y)$$

Então recorrendo ao enunciado teremos: $\underbrace{e^{y}}_{a}\cdot u_{xx}+\underbrace{0}_{b}\cdot u_{xy}+\underbrace{e^{x}}_{c}\cdot u_{yy}=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\times a\times c-b^{2}=4\times e^{y}\times e^{x}-0^{2}=4e^{y+x}\rightarrow\left\{\begin{array}{l} se: x>0\Rightarrow \text{EDP Elíptica}\\ se: x<0\Rightarrow \text{EDP Hiperbólica}\\ se: x=0\Rightarrow \text{EDP Parabólica}\end{array}\right\}$$

f) $u_{xx}+2\cdot\cos(x)\cdot u_{yy}=0,\quad x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

R:

Sabendo que uma EDP é dada na sua forma mais geral por:

$$a(x;y)\cdot u_{xx}+b(x;y)\cdot u_{xy}+c(x;y)\cdot u_{yy}+d(x;y)\cdot u_{x}+e(x;y)\cdot u_{y}+f(x;y)\cdot u=g(x;y)$$

Então recorrendo ao enunciado teremos: $\underbrace{1}_{a}\cdot u_{xx}+\underbrace{0}_{b}\cdot u_{xy}+\underbrace{2\cdot\cos(x)}_{c}\cdot u_{yy}=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\times a\times c-b^{2}=4\times 1\times 2\cdot\cos(x)-0^{2}=8\cdot\cos(x)$$

Sabe-se que para $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ o coseno é positivo, logo: $8\cdot\underbrace{\cos(x)}_{>0}>0\Rightarrow$ EDP Elíptica.

5. Mostre que a função $u(x;y)=e^{k\cdot x}\cdot\cos(k\cdot y)$ é uma solução da equação de Laplace , qualquer que seja o valor da constante k .

R:

Para se mostrar o que é pedido no enunciado temos que determinar as derivadas u_{xx} e u_{yy} da função $u(x;y)=e^{k\cdot x}\cdot\cos(k\cdot y)$, logo:

- $u_x=\left(e^{k\cdot x}\cdot\cos(k\cdot y)\right)'_x=\left(e^{k\cdot x}\right)'_x\cdot\cos(k\cdot y)=(k\cdot x)'_x\cdot e^{k\cdot x}\cdot\cos(k\cdot y)=k\cdot e^{k\cdot x}\cdot\cos(k\cdot y)$

  $u_{xx}=\left(k\cdot e^{k\cdot x}\cdot\cos(k\cdot y)\right)'_x=\left(e^{k\cdot x}\right)'_x\cdot k\cdot\cos(k\cdot y)=(k\cdot x)'_x\cdot e^{k\cdot x}\cdot k\cdot\cos(k\cdot y)=$

  $=k^2\cdot e^{k\cdot x}\cdot\cos(k\cdot y)$

- $u_y=\left(e^{k\cdot x}\cdot\cos(k\cdot y)\right)'_y=e^{k\cdot x}\cdot\left(\cos(k\cdot y)\right)'_y=e^{k\cdot x}\cdot\left(-sen(k\cdot y)\right)\cdot(k\cdot y)'_y=-k\cdot e^{k\cdot x}\cdot sen(k\cdot y)$

  $u_{yy}=\left(-k\cdot e^{k\cdot x}\cdot sen(k\cdot y)\right)'_y=-k\cdot e^{k\cdot x}\cdot\left(sen(k\cdot y)\right)'_y=-k\cdot e^{k\cdot x}\cdot\cos(k\cdot y)\cdot(k\cdot y)'_y=$

  $-k^2\cdot e^{k\cdot x}\cdot\cos(k\cdot y)$

Substituindo agora os resultados das duas derivadas u_{xx} e u_{yy} na equação de Laplace $u_{xx}+u_{yy}=0$, teremos que:

$u_{xx}+u_{yy}=0\Leftrightarrow\left(k^2\cdot e^{k\cdot x}\cdot\cos(k\cdot y)\right)+\left(-k^2\cdot e^{k\cdot x}\cdot\cos(k\cdot y)\right)=0\Leftrightarrow 0=0\rightarrow$ Está mostrado o que é pedido no enunciado.

6. Mostre que a função $u(x;t) = e^{k\cdot x}\cdot e^{-k^2\cdot t}$ é uma solução da equação de calor $u_{xx} + u_t = 0$, qualquer que seja o valor da constante k.

R:

Para se mostrar o que é pedido no enunciado temos que determinar as derivadas u_{xx} e u_t da função $u(x;t) = e^{k\cdot x}\cdot e^{-k^2\cdot t}$, logo:

- $u_x = \left(e^{k\cdot x}\cdot e^{-k^2\cdot t}\right)'_x = \left(e^{k\cdot x}\right)'_x \cdot e^{-k^2\cdot t} = (k\cdot x)'_x \cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k^2\cdot t} = k\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k^2\cdot t}$

  $u_{xx} = \left(k\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k^2\cdot t}\right)'_x = \left(e^{k\cdot x}\right)'_x \cdot k\cdot e^{-k^2\cdot t} = (k\cdot x)'_x \cdot e^{k\cdot x}\cdot k\cdot e^{-k^2\cdot t} = k^2\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k^2\cdot t}$

- $u_t = \left(e^{k\cdot x}\cdot e^{-k^2\cdot t}\right)'_t = e^{k\cdot x}\cdot \left(e^{-k^2\cdot t}\right)'_t = e^{k\cdot x}\cdot e^{-k^2\cdot t}\cdot \left(-k^2\cdot t\right)'_t = -k^2\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k^2\cdot t}$

Substituindo agora os resultados das duas derivadas u_{xx} e u_t na equação de calor $u_{xx} + u_t = 0$, teremos que:

$u_{xx} + u_t = 0 \Leftrightarrow \left(k^2\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k^2\cdot t}\right) + \left(-k^2\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k^2\cdot t}\right) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Está mostrado o que é pedido no enunciado.

7. Mostre que a função $u(x;y)=e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}$ é uma solução da equação de onda $u_{xx}-u_{yy}=0$, qualquer que seja o valor da constante k.

R:

Para se mostrar o que é pedido no enunciado temos que determinar as derivadas u_{xx} e u_{yy} da função $u(x;y)=e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}$, logo:

- $u_x=\left(e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}\right)'_x=\left(e^{k\cdot x}\right)'_x\cdot e^{-k\cdot y}=(k\cdot x)'_x\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}=k\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}$

  $u_{xx}=\left(k\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}\right)'_x=\left(e^{k\cdot x}\right)'_x\cdot k\cdot e^{-k\cdot y}=(k\cdot x)'_x\cdot e^{k\cdot x}\cdot k\cdot e^{-k\cdot y}=k^2\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}$

- $u_y=\left(e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}\right)'_y=e^{k\cdot x}\cdot\left(e^{-k\cdot y}\right)'_y=e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}\cdot(-k\cdot y)'_y=-k\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}$

  $u_{yy}=\left(-k\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}\right)'_y=-k\cdot e^{k\cdot x}\cdot\left(e^{-k\cdot y}\right)'_y=-k\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}\cdot(-k\cdot y)'_y=k^2\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}$

Substituindo agora os resultados das duas derivadas u_{xx} e u_t na equação de onda $u_{xx}-u_{yy}=0$, teremos que:

$u_{xx}-u_{yy}=0\Leftrightarrow\left(k^2\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}\right)-\left(k^2\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{-k\cdot y}\right)=0\Leftrightarrow 0=0\rightarrow$ Está mostrado o que é pedido no enunciado.

8. Mostre que a função $u(x;y)=\frac{k\cdot x^2}{2}+\frac{(1-k)\cdot y^2}{2}$ **é uma solução da equação de Poisson** $u_{xx}+u_{yy}=1$**, qualquer que seja o valor da constante** k **.**

R:

Para se mostrar o que é pedido no enunciado temos que determinar as derivadas u_{xx} e u_{yy} da função $u(x;y)=\frac{k\cdot x^2}{2}+\frac{(1-k)\cdot y^2}{2}$, logo:

- $u_x=\left(\frac{k\cdot x^2}{2}+\frac{(1-k)\cdot y^2}{2}\right)_x^{'}=\frac{k}{2}\cdot\left(x^2\right)_x^{'}=\frac{k}{2}\cdot 2x=k\cdot x$

  $u_{xx}=(k\cdot x)_x^{'}=k\cdot(x)_x^{'}=k$

- $u_y=\left(\frac{k\cdot x^2}{2}+\frac{(1-k)\cdot y^2}{2}\right)_y^{'}=\frac{(1-k)}{2}\cdot\left(y^2\right)_y^{'}=\frac{(1-k)}{2}\cdot 2y=(1-k)\cdot y$

  $u_{yy}=((1-k)\cdot y)_y^{'}=(1-k)\cdot(y)_y^{'}=1-k$

Substituindo agora os resultados das duas derivadas u_{xx} e u_{yy} na equação de Poisson $u_{xx}+u_{yy}=1$, teremos que:

$u_{xx}+u_{yy}=1\Leftrightarrow(k)+(1-k)=1\Leftrightarrow 1=1\rightarrow$ Está mostrado o que é pedido no enunciado.