1. Considere um processo ruído branco x[n] estacionário de média nula e variância σ_x^2 e a estimativa da sequência de autocorrelação dada por:

$$C_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n).x^*(n+m)$$

a) Sabendo que quando N>>|m| a variância deste estimador é dada por

$$\text{var}[C_{xx}(m)] \approx \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left[\phi_{xx}^2(r) + \phi_{xx}(r-m) + \phi_{xx}(r+m)\right]$$

como o classifica relativamente à consistência? Justifique.

Um estimador é consistente se quer a sua polarização quer a sua variância tenderem para zero quando se vai tendo mais conhecimento sobre o processo ($N \to +\infty$).

No caso concreto a variância é proporcional a $\frac{1}{N}$ logo $\lim\limits_{N\to+\infty} var\{C_{xx}[m]\} = 0$, o que significa que à medida que se vai aumentando o nº de dados a variância vai diminuindo. É preciso que se verifique o mesmo com a polarização para que o estimador $C_{xx}[m]$ seja consistente.

$B_{Cxx} = \phi_{xx}[m] - E\{C_{xx}[m]\}$

$E\{C_{xx}[m]\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E\{x[n].x[n+m]\} = \frac{N-|m|}{N} - \phi_{xx}[m]$

$B_{Cxx} = \phi_{xx}[m] - \frac{N-|m|}{N} . \phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[m].(1 - \frac{N-|m|}{N}) = \frac{|m|}{N} . \phi_{xx}[m]$

$\lim\limits_{N\to+\infty} B_{Cxx} = 0$ => O estimador $C_{xx}[m]$ é consistente.

b) Mostre que o valor médio do periodograma é a DTFT da sequência de autocorrelação passada por uma janela triangular, ou seja é dado por:

$$E[I_N(\Omega)] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}(m) e^{-j\Omega m}$$

O periodograma é a T.F da estimativa de autocorrelação ($C_{xx}[m]$).

$E\{I_N(\Omega)\} = ?$

$I_N(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{xx}[m].e^{-j\Omega m}$ (Definição de DTFT)

$E\{I_N(\Omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\{C_{xx}[m]\}.e^{-j\Omega m}$

$E\{C_{xx}[m]\} = \frac{N-|m|}{N} . \phi_{xx}[m]$ (da alínea anterior)

Então $E\{I_N(\Omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}[m].e^{-j\Omega m}$

Nos métodos clássicos $\phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[-m]$ e $\phi_{xx}[m] = 0$ sendo m > N - 1

Então $E\{ I_N(\Omega) \} = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}[m].e^{-j\Omega m}$ (Como se quer demonstrar)

c) Mostre que o valor médio do periodograma está relacionado com a densidade espectral de potência por

$$E[I_N(\Omega)] = P_{xx}(\Omega) * \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\left(\Omega\frac{N}{2}\right)}{\sin\frac{\Omega}{2}}\right)^2$$

A propriedade da convolução da T.F. diz que

x[n]<--------------------------->X(Ω)

x[n].y[n]<--------------------->X(Ω)*Y(Ω)

Como $E\{ I_N(\Omega) \} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{N-|m|}{N}\ \phi_{xx}[m].e^{-j\Omega m}}_{DTFT\{x[m\}.y[m]\ \}}$

Então pela propriedade da convolução:

$E\{I_N(\Omega)\} = X(\Omega)*Y(\Omega) = P_{xx}[m] * \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\Omega\right)}{\sin\frac{\Omega}{2}}\right)^2$ --->DTFT da janela triangular

d) Enuncie e justifique o método de Bartlett para a estimação da densidade espectral de potência. Mostre que este método diminui a resolução espectral. Proponha uma alteração ao método que não apresente esta desvantagem. Em sua opinião este aumento de resolução espectral é efetivo? Justifique.

O método de Barlett surge da necessidade de diminuir a variância do periodograma.

De facto esperava-se que o periodograma, por ser a T.F. da estimativa (Cxx[m]) da sequência de autocorrelação, fosse um estimador consistente por ser a T.F. por ser a T.F. de um estimador também ele consistente. Mas de facto não é isso que acontece e a variância do periodograma não desce com o aumento da amostra.

Sabe-se da estatística que a soma de K variáveis aleatórias independentes e idênticas distribuídas, gera uma variável aleatória cuja variância é (1/k) * (a variância de cada uma das variáveis aleatórias somadas). Por esta razão Barlett sugeriu a média do periodograma como uma forma de diminuição da variância do periodograma. O método consiste então em dividir os dados(N) em K segmentos de M dados, fazer o periodograma de cada segmento e a média dos K periodogramas.

O método reduz a resolução espectral de K=N/M, uma vez que o periodograma de N pontos tem também N pontos na frequência, logo cada periodograma de M pontos terá M=N/K pontos na frequência. No entanto como o periodograma pode ser calculado via FFT por $I_N(\Omega)=(|X(\Omega)^2| / N)$, podemos calcular uma FFT de N pontos para um sinal de M pontos mantendo assim a resolução espectral. Isto é conseguido juntando N – M zeros aos M pontos do sinal.

A inclusão de zeros não traz mais informação e por isso o aumento de resolução espectral por esta via não é efectiva, ou seja não melhora o conhecimento do sinal.

e) Considere a DFT de x[n]. Determine a variância de X(k). Justifique.

x[n] tem média nula e variância $б_x^2$

var{ X(k) } = E{ |X(k)|^2 } – E^2{ X(k) } (por definição)

X(k) = $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\frac{jkn2\pi}{N}} \Rightarrow E\{\,X(k)\,\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{E\{\,x[n]\}}_{=0}\, e^{-j\Omega n} = 0$

Então var{ X(k) } = E{|X(k)|^2} = E{ X(k). X*(k) } =

E{$\frac{1}{N}\sum_{n1=0}^{N-1} x[n1]e^{-\frac{jk2\pi}{N}n1} . \frac{1}{N}\sum_{n2=0}^{N-1} x[n2]e^{-\frac{jk2\pi}{N}n2}\} = \frac{1}{N^2}\sum_{n1}\sum_{n2} \underbrace{E\{x[n1]x[n2]\}}_{бx^2 - \delta[n1-n2]} e^{-\frac{jk2\pi}{N}(n1-n2)}$

var{X(k)} = $\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1} бx^2 e^{-\frac{jk2\pi}{N}\underbrace{(n1-n2)}_{0}} = \frac{бx^2}{N}$

f) Com base no resultado da alínea anterior e na definição de PSD verifique que a potência obtida no domínio temporal coincide com a potência obtida no domínio espectral. Justifique.

Para um sinal de média nula, a sua potência será E{x^2[n] = $б_x^2 + m_x^2 = б_x^2$}

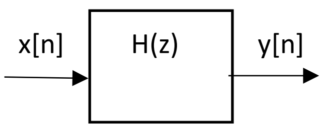
No domínio das frequências temos que a densidade espetral é |X(Ω)^2|. A potência será a densidade espetral somada em todas as k componentes ou seja

$$P = \sum_k E\{|X(k)|^2\} = N.\frac{бx^2}{N} = бx^2 \rightarrow \text{É } \textit{igual ao calculado no domínio dos tempos}$$

g) Considere que o sinal x[n] é aplicado ao sistema LTI cuja Transformada-z da resposta impulsional é dada por

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Determine a sequência de autocorrelação do sinal de saída. Justifique.



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{K=1}^{N} ak\,.\,z^{-k}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(z)\left[1 - \sum_{K=1}^{N} a_k\,.\,z^{-k}\right] = X(z)$$

Aplicando a T.Z. inversa a ambos os membros da equação temos

$$y[n]=\sum_{K=1}^{N} a_k y[n-k] + \underbrace{x[n]}_{\text{ruído branco}}$$

ou seja,

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

$$y[n]y[n-m] = \sum_{k=1}^{N} a_k \underbrace{y[n-k]\ y[n-m]}_{\text{n - m - (n - k) => k – m = m – k}}$$

Logo,

$$\phi_{xx}[-m] = \phi_{xx}[m] = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[m-k]$$

Causal

h) Considere que dispõe de 4 amostras do sinal de saída do sistema apresentado na alínea anterior. Escreva um conjunto de equações que lhe permitam calcular os coeficientes a_k que minimizam o erro do preditor. Apresente uma expressão que lhe permita calcular esse erro. Justifique.

Com 4 amostras podemos calcular (4-1)*2+1=7

Cxx[-3], Cxx[-2], Cxx[-1], Cxx[0], Cxx[1], Cxx[2], Cxx[3]

Usando a equação obtida na alínea anterior:

$$\phi_{yy}[m] = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[m-k]$$

Podemos escrever um sistema de 3 equações a 3 incógnitas (equação Yulle-Walker)

$$\begin{bmatrix} \phi_{yy}[0] & \phi_{yy}[1] & \phi_{yy}[2] \\ \phi_{yy}[1] & \phi_{yy}[0] & \phi_{yy}[1] \\ \phi_{yy}[2] & \phi_{yy}[1] & \phi_{yy}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{yy}[1] \\ \phi_{yy}[2] \\ \phi_{yy}[3] \end{bmatrix}$$

Os ak's determinados pela solução deste sistema são os que minimizam o erro quadrático médio, ou seja:

$$MMSE = E\{(X_n - \hat{X}_n)^2\} = E\{(X_n - \hat{X}_n).(X_n - \hat{X}_n)\} =$$

$$= E\{(X_n - \hat{X}_n)\} - E\{(\underbrace{X_n}_{\text{Dados}} - \underbrace{\hat{X}_n}_{\text{Erro}})\}$$

Como o erro é ortogonal aos dados então

$$MMSE = E\{X_n X_n - X_n \hat{X_n}\} = E\{X_n X_n - X_n . \sum_{k=1} a_k X_{n-k}\} =$$

$$= E\{X_n^2\} - \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{xx}(k) = \phi_{xx}[0] - \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{xx}(k)$$

2. Considere um sinal s[n] de média m_s e desvio padrão σ_s corrompido de modo aditivo por um sinal ruído branco e[n] de média m_e e desvio padrão σ_e.

   a) Considere que s[n] é um sinal sinusoidal com fase aleatória e uniformemente distribuída em]0, 2π[ou seja $s[n]=A\cos(w_0 n+\varphi)$. Determine em que circunstâncias a sequência de autocorrelação do sinal observado é dada por:

$$\Phi_{xx}[m] = \frac{A^2}{2}\cos w_0 m + \sigma_e^2 \delta[m] + m_e^2$$

$$s[n] \rightarrow ms, бs^2$$

$$e[n] \rightarrow me, бe^2$$

$$x[n] = s\,[n] + e[n]$$

$$\phi_{xx}[m] = E\{x[n]x[n+m]\} = E\{\,(s[n]+e[n])\,(s[n+m]+e[n+m])\,\} =$$
$$= E\{s[n]s[n+m] + s[n]e[n+m] + e[n]s[n+m] + e[n]e[n+m]\}$$

$$\phi_{xx}[m] = \phi_{ss}[m] + 2\phi_{se}[m] + \phi_{ee}[m]$$

Se $s[n] = A\cos(w_0 n + \varphi)$ *então* ms=0

$$\phi_{ss[m]} = \Upsilon_{ss}[m] = E\{s[n]s[n+m]\} = A^2 E\{\cos(w_0 n + \varphi)\,.\cos\,(w_0(n+m)+\varphi)\}$$

CA: $\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a\,. sinb$

$\cos(a-b) = \cos a\,. cos\, b + \sin a . \sin b$

$$2cosa.cosb = \cos(a+b) + \cos(a-b) => cosa.cosb = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$$

$$\phi_{ss}[m] = \frac{A^2}{2} E\{\cos(2w_0 n + w_0 m + 2\varphi\} + \cos(w_0 m)\}^2$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos\,(w_0 m)$$

Substituindo vem,

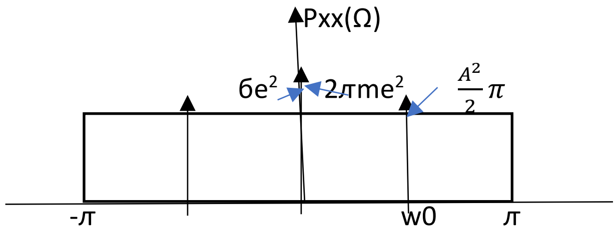
$$\phi_{xx}[m] = \frac{A^2}{2}\cos(w_0 m) + 2\overset{0}{m_s} m_e + б_e^2 \delta[m] + m_e^2\} =$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(w_0 m) + б_e^2 \delta[m] + m_e^2 \rightarrow Tal\ como\ se\ queria\ demonstrar$$

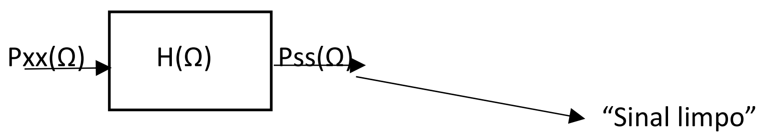
b) Determine e esboce justificando, no contexto da alínea a) a densidade espectral de potência do processo x[n].

$$P_{xx}(\Omega) = DTFT\{\Phi_{xx}(m)\}$$

$$= \frac{A^2\pi}{2}(\delta(\Omega - w_0) + \delta(\Omega + w_0)) + 6_e^2 + 2\pi m_e^2\delta(\Omega)$$



c) Considere estacionaridade na realização dos processos s[n] e e[n] e determine a DTFT do filtro de wiener que permite atenuar o ruído no sinal. Justifique. Determine ainda a resposta impulsional do filtro de wiener. Justifique.



$$H(\Omega) = \frac{P_{ss}(\Omega)}{P_{ss}(\Omega) + P_{ee}(\Omega)} = \frac{6s^2}{6s^2 + 6e^2 + me^2}$$

Estacionaridade

h[m] = IDTFT { H(Ω) }= $\frac{6s^2}{6s^2+6e^2+me^2} . \delta[m]$

d) Estabeleça a equação de filtragem no domínio temporal para este filtro de wiener. Justifique. Diga com poderia numa situação prática estimar os parâmetros que fazem parte da equação do filtro (média e variância do sinal limpo s[n]).

$$s[n] = m_x + (x[n] - m_x) * h[n] =$$

$$= m_x + (x[n] - m_x)\frac{6s^2}{6s^2 + 6e^2 + m_e^2}$$

Como mx=ms+me e ms=0 temos

$$s[n] = m_e + (x[n] - m_e)\frac{6s^2}{6s^2 + 6e^2 + m_e^2}$$

É preciso estimar me e 6s^2

me e бs² podem ser estimados no início do áudio quando ainda só há ruído.

$$бs^2 = бx^2 - бe^2 \text{ e pode ser estimado online pela variância do sinal observado } (бx^2) \text{ e } бe^2 \text{ estimado antes.}$$