Álgebra Linear

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 2 - $\boxed{\text{A}}$

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

7 janeiro 2017 Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ Número: ________

I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) *ou falsa* (F), *assinalando a opção conveniente.*

As respostas incorretamente assinaladas têm cotação negativa.

Questão 1.

	V	F
a) O subespaço $\mathcal{S} = \langle (1,0,-1,0),(2,0,-1,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)\rangle$ tem dimensão 2.	○	○
b) $\langle (1,1,1),(1,2,0)\rangle = \langle (0,1,-1),(2,1,0),(2,3,1)\rangle$.	○	○
c) As coordenadas do vetor $(1,-1,3)$ na base $((1,1,1),(0,-1,1))$ são $(1,2)$.	○	○
d) O vetor $x^2-x+5 \in \mathcal{P}_2$ é combinação linear dos vetores x^2+x+1 e $x-2$.	○	○
e) $((1,0,0,0),(0,1,0,0))$ é uma base do subespaço $\mathcal{S} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : t=0\}$.	○	○

Questão 2. Seja f uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1,-2) = (1,1,0) \quad \text{e} \quad f(-1,1) = (1,0,-1).$$

	V	F
a) $f(1,0) = (-3,-1,2)$.	○	○
b) $f(0,0) = (1,-1,1)$.	○	○
c) A matriz da aplicação f é de ordem 3×2.	○	○
d) f é uma aplicação sobrejetiva.	○	○
e) $\dim \operatorname{Nuc} f \leq 1$.	○	○

Questão 3. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

	V	F
a) O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(2-\lambda)$.	○	○
b) A matriz A é diagonalizável.	○	○
c) A matriz A^2-4I é invertível.	○	○
d) O sistema $(A-3I)x=b$ é um sistema de Cramer.	○	○
e) $(-2,1,1)$ é um vetor próprio de A.	○	○

(continua)

Questão 4. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

	V	F
a) A matriz adj A tem duas linhas nulas.	○	○
b) $(1,0,1) \in \mathcal{C}(A)$.	○	○
c) A matriz A é a matriz da aplicação linear $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 4x+5y+6z, 0)$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.	○	○
d) As colunas de A são vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$.	○	○
e) $\mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^2$.	○	○

II

Responda às questões deste grupo numa folha de teste.

Questão 1. Considere as matrizes

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ k & 1+k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; k \in \mathbb{R}.$$

a) Discuta, em função de k, a dimensão de $\mathcal{C}(A_k)$ e indique uma base de $\mathcal{C}(A_{-1})$ e $\mathcal{L}(A_{-1})$.

b) Determine os valores próprios de A_0 e o subespaço próprio associado ao menor valor próprio desta matriz.

c) Diga, justificando, se existe algum número real α para o qual a matriz A_0 é semelhante à matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Considere, para cada k, a aplicação linear ϕ_k definida pela matriz A_k.

i. Determine $\text{Nuc}(\phi_{-1})$.

ii. Diga, justificando, se $(1,2,3) \in \text{Im}(\phi_2)$;

iii. Existe algum valor de k para o qual ϕ_k é bijetiva? Justifique.

Questão 2. Para cada uma das alíneas seguintes, diga, **justificando**, se a afirmação é verdadeira ou falsa.

a) O conjunto das matrizes reais simétricas de ordem 2 com traço nulo não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Se P é uma matriz invertível de ordem n, a aplicação $\phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $\phi(A) = P^{-1}AP$ é uma aplicação linear.

c) Seja A uma matriz diagonalizável cujos valores próprios são 0 e 1. A matriz A é uma matriz idempotente, isto é, $A^2 = A$.

Cotação: I - 10 valores; **II** - 1) 7 valores; 2) 3 valores.