3.º Teste de Complementos de Análise Matemática

MIETI, MIEMAT, MIETEX

Duração: 1h30m

---

1. Considere o PVF
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad 0 < x < \pi,$$
$$y(\pi) = y'(0) = 0.$$
Para $\lambda \geq 0$, mostre que as funções próprias e valores próprios deste problema são, respectivamente, $\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$ e $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, com $n = 0, 1, 2, ...$

2. Determine a solução do seguinte PVF usando o método de separação de variáveis:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0,$$
$$u(x,0) = \sin(x) - \sin(5x), \qquad 0 < x < \pi$$
sabendo que o PVF
$$\frac{d^2y}{dx^2} - \lambda y = 0, \qquad 0 < x < \pi,$$
$$y(0) = y(\pi) = 0$$
só tem solução não trivial se $\lambda = -n^2$, $n = 1, 2, ...$ e neste caso $y(x) = \sin(nx)$.
Solução: Admitindo que a solução $u(x,t)$ se pode escrever na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ resulta para $u_{xx} - u_t = 0$:
$$X''(x)T(t) - X(x)T'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$
Assim, deverá-se ter-se
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda,$$
Portanto, as funções $X(x)$ e $T(t)$ devem obedecer a
$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad T'(t) - \lambda T(t) = 0,$$
tendo-se ainda as condições de fronteira
$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0,$$
isto é,
$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0,$$

Ora, o PVF $X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X(0) = 0,\ X(\pi) = 0$, só tem solução não trivial se $\lambda = -n^2$, $n = 1, 2, ...$ e neste caso $X(x) = \sin(nx)$.
Por outro lado, a equação $T'(t) - \lambda T(t) = 0$ conduz a $T(t) = e^{\lambda t}$, ou seja, $T(t) = e^{-n^2 t}$
Assim,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

Como se impõe que $u(x,0) = \sin(x) - \sin(5x)\,,\quad 0 < x < \pi$,
deverá-se ter

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \sin(nx) = \sin(x) - \sin(5x)$$

pelo que

$$c_1 = 1, \quad c_5 = -1 \text{ e } \quad c_k = 0, \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 5\}.$$

Portanto a solução do PVF dado é

$$u(x,t) = \sin(x)e^{-t} - \sin(5x)e^{-25t}.$$

3. Use a transformada de Laplcae para determinar a solução do seguinte problema de valores iniciais:

$$y''(t) + 16y(t) = \cos(4t) + 1;\ \ y(0) = 0;\ \ y'(0) = 1.$$

Solução:

$$y(t) = \frac{1}{8} t \sin 4t + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\cos 4t + \frac{1}{4}\sin 4t$$

4. Considere a função f de período $2L = 8$ definida no intervalo $[-4, 4]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -4 \le x \le -2 \ \ ou\ \ 2 \le x \le 4, \\ 0, & -2 < x < 2. \end{cases}$$

Calcule a sua série de Fourier no intervalo $[-4, 4]$.
Solução: $1/2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin(\frac{n\pi}{2}) \cos(\frac{n\pi}{4})$.

5. Determine a solução do seguinte PVF, $u(x,t)$, usando o método de separação de variáveis:

$$\begin{cases} t(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}) = u, & x, t > 0 \\ u(0,t) = 5te^{3t} - 2t, & t > 0. \end{cases}$$

(Nota: A ED linear $T'(t) + P(t)T(t) = 0$ tem solução $T(t) = \frac{1}{\mu(t)}$ com $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$)
Solução: Admitindo que a solução $u(x,t)$ se pode escrever na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ resulta para $t(u_t + u_x) = u$:

$$x\left(X(x)T'(t) + X'(x)T(t)\right) = X(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{1}{t} - \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Assim, deverá-se ter

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda, \quad , \frac{1}{t} - \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

A equação $\frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda$ conduz a $X(x) = e^{\lambda x}$ e, por outro lado a equação $\frac{1}{t} - \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{1}{t} - \lambda$ conduz a $\ln(T(t)) = \ln(t) - \lambda t \Leftrightarrow T(t) = te^{-\lambda t}$.
Assim,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n t e^{-\lambda_n t} e^{\lambda_n x}$$

Como se impõe que $u(0,t) = 5te^{3t} - 2t$ tem-se

$$\sum_{n=1}^{N} c_n t e^{-\lambda_n t} = 5te^{3t} - 2t.$$

Assim, $c_1 = 5$, $\lambda_1 = -3$, $c_2 = -2$, $\lambda_2 = 0$ e $c_n = 0, n > 2$.

Logo

$$u(x,t) = 5te^{3t-3x} - 2t.$$

Questão	1.	2.	3.	4.	5.
Cotação	3.5	4.5	4.5	3.5	4