Processos Estocásticos

- Definições. Descrições por probabilidades
  - Um P. E. é uma família de v. a. indexadas ..., X_{-1}, X_0, X_1,...
    - Uma v.a. Xn é descrita pela sua função de distribuição de probabilidade
  - Um P. E. é descrito pelas funções de dist. de prob. das v. a. que o compõem e ainda por todas as funções de dist. conjunta de probabilidade que se possam definir.
    - A função de dist. de prob. de uma v. a. X_n é F_{Xn}:

$$F_{X_n}(x_n) = \Pr ob[X_n \leq x_n]$$

Valor particular de

- A função densidade de prob. de uma v. a. X_n é f_{Xn}:

$$f_{X_n}(x_n) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr ob[x_n < X_n < x_n + \Delta x]}{\Delta x} = \frac{dF_{X_n}(x_n)}{dx_n} \qquad F_{X_n}(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_n}(v)dv$$

Quando esta derivada não existe, como no caso das v. que tomam valores de um conjunto contável (variáveis quantizáveis) usa-se a função massa de probabilidade que não distinguimos em termos de simbologia da f. d. p.

$$f_{X_n}(x_n) = \Pr ob[X_n = x_n] \qquad F_{X_n}(x_n) = \sum_{x < x_n} f_{X_n}(x)$$

- Interdependência de v. a.s
  - Função de distribuição de probabilidade conjunta de 2 v. a. X_n e X_m

$$F_{X_n,X_m}(x_n,x_m)=\Pr ob\left[X_n \le x_n \quad \underline{\underline{e}} \quad X_m \le x_m\right]$$

  - Função densidade de probabilidade conjunta de 2 v. a. X_n e X_m

$$f_{X_n,X_m}(x_n,x_m)=\lim_{\substack{\Delta x_n\to 0\\ \Delta x_m\to 0}}\frac{\Pr ob\left[x_n<X_n<x_n+\Delta x_n \quad e \quad x_m<X_m<x_m+\Delta x_m\right]}{\Delta x_n \Delta x_m}=\frac{d^2F_{X_n,X_m}(x_n,x_m)}{dx_n dx_m}$$

  - Se as duas v. a. são quantizáveis a sua função massa de probabilidade conjunta é

$$f_{X_n,X_m}(x_n,x_m)=\Pr ob\left[X_n = x_n \quad \underline{\underline{e}} \quad X_m = x_m\right]$$

– 2 v. a. X_n e X_m são estatisticamente independentes se

$$f_{X_n,X_m}(x_n,x_m)=f_{X_n}(x_n).f_{X_m}(x_m)$$

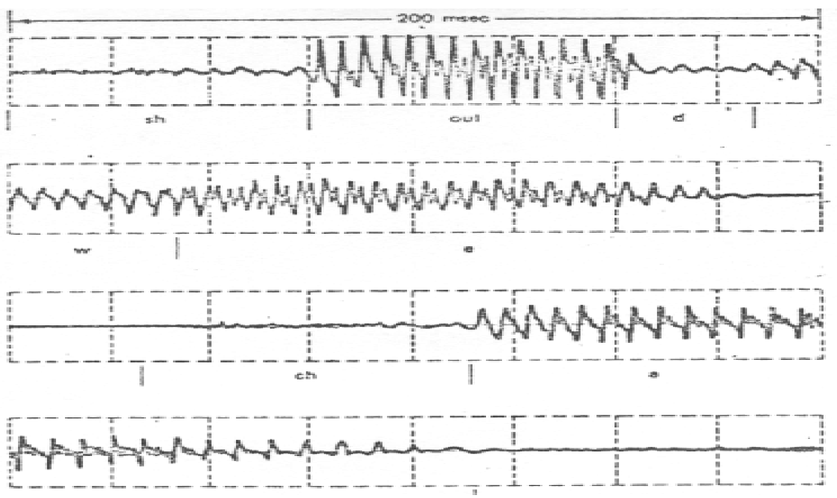
- Estacionaridade em PE

  – Um P.E. é estacionário se todas as funções de probabilidade forem independentes de uma translacção da origem dos tempos, ou seja

$$f_{X_n}(x_n) = f_{X_m}(x_m)$$ ← Distribuições de 1ª ordem

$$f_{X_n,X_m}(x_n,x_m) = f_{X_j,X_k}(x_j,x_k) \quad se \qquad m-n=k-j$$ ← Distribuições de 2ª ordem

← Distribuições de qq. ordem



Processos Estocásticos

- Descrições aproximadas (por médias ou momentos)
  - Médias de conjunto
    - A descrição probabilistica das v.a.s que constituem um P. E. é muitas vezes feita por médias ou momentos estatísticos (média, variância, covariância, étc.) em vez de funções de probabilidade. Esta descrição é incompleta mas na maior parte dos casos conveniente e suficiente.
  - Média do P. E. $m_x(n) = E[X_n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_n}(x)dx$
  - Média quadrática (potência média) $ms_x(n) = E[X_n^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X_n}(x)dx$
  - Variância $\sigma_x^2(n) = E\left[(X_n - m_x(n))^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x(n))^2 f_{X_n}(x)dx$
  - Sequência de autocorrelação $\phi_{xx}(n,m) = E[X_n.X_m^*] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y^* f_{X_n,X_m}(x,y)dxdy$
  - Sequência de autocovariância

$$\gamma_{xx}(n,m) = E\left[(X_n - m_x(n)).(X_m - m_x(m))^*\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x(n)).(y - m_x(m))^* f_{X_n,X_m}(x,y)dxdy$$

Processos Estocásticos

- Para 2 P. E. $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ definem-se também:
  - Sequência de correlação cruzada

$$\phi_{xy}(n,m) = E\left[X_n . Y_m^*\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y^* f_{X_n,Y_m}(x,y)dxdy$$

  - Sequência de covariância cruzada

$$\gamma_{xy}(n,m) = E\left[(X_n - m_x(n)).(Y_m - m_y(m))^*\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x(n)).(y - m_y(m))^* f_{X_n,Y_m}(x,y)dxdy$$

    - A autocorrelação é uma medida de depenência entre valores do PE em diferentes instantes. Descreve por isso a variação temporal do sinal aleatório.
    - A correlação cruzada é uma medida da dependência entre 2 sinais diferentes.

- Estacionaridade em PE (descrição por momentos)
  - No caso geral
    - $m_x(n)$, $ms_x(n)$, $\sigma_x^2(n)$ são sequências a 1 dimensão
    - $\varphi_{xx}(m,n)$, $\gamma_{xx}(m,n)$ são sequências a 2 dimensões
  - Se existe estacionaridade
    - m_x, ms_x, σ_x^2 são constantes
    - $\varphi_{xx}(k)$, $\gamma_{xx}(k)$ são sequências a uma dimensão (k=n-m)

- Exemplo
  - Consideremos o processo de Bernoulli (média → 0 à medida que o nº de experiências → ∞) que consiste em atirar uma moeda ao ar e tomar como x[n]=1 se o resultado for corôa e x[n]=-1 se for o contrário. O processo é estacionário pois p=P(x[n]=1) é independente do tempo e assumimos também as v. a. X_n estatisticamente independentes. A média do processo será

$$m_x = E[X_n] = \sum_x x_i f_{X_i}(x_i) = (+1).\underbrace{P(x[n]=1)}_{=p} + (-1).P(x[n]=-1) = 2p-1$$

  - E a média quadrática

$$ms_x = E[X_n^2] = \sum_x x_i^2 f_{X_i}(x_i) = (+1)^2.P(x[n]=1) + (-1)^2.P(x[n]=-1) = 1$$

  - E a variância $\sigma_x^2 = 1-(2p-1)^2 = 4p(1-p)$
  - A seq. de autocorrelação

$$\phi_{xx}(m) = \begin{cases} E[X_n^2]=1, & m=0 \\ E[X_n]E[X_{n+m}] = m_x^2, & m \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Se } p=1/2 \text{ então } m_x=0 \text{ e } \varphi_{xx}(m)=\delta(m)}$$

    - A sequência de autocorrelação impulsional obtém-se sempre que todas as v. a. de 1 PE são não-correladas ou linearmente independentes. Este processo é chamado de ruído branco.

Processos Estocásticos

- Médias temporais
  - Defina-se uma v. a. <X> dada por $\langle X\rangle = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} X_n$
  - Defina-se ainda <X_m> como $\langle X_m\rangle = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} X_n X_{n+m}^*$
  - Se o PE é estacionário e tem média finita os limites indicados existem
  - Se o PE é ergódico então aqueles limites são constantes e verifica-se:

$$\langle X\rangle = m_x \qquad\qquad \langle X_m\rangle = \phi_{xx}(m)$$

  - Para processos ergódicos temos:

$$m_x = \langle X\rangle = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} X_n = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x(n) = \langle x(n)\rangle$$

$$\phi_{xx}(m) = \langle X_m\rangle = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} X_n . X_{n+m}^* = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x(n).x^*(n+m) = \langle x(n).x^*(n+m)\rangle$$

  - No processamento digital de sinais aleatórios ou de energia infinita admitimos que o sinal, ou parte dele, que queremos tratar é uma sequência amostra ou realização de um PE ergódico cuja média e autocorrelação estão definidas em cima. x(n) é uma realização ou sequência amostra do PE.

- Propriedades da correlação e covariância
  - Sejam $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ 2 PE reais, estacionários de médias m_x e m_y. Então:

$$\begin{cases} \gamma_{xx}(m) = \phi_{xx}(m) - m_x^2 \\ \gamma_{xy}(m) = \phi_{xy}(m) - m_x m_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_{xx}(0) = E\left[X_n^2\right] = ms_x \\ \gamma_{xx}(0) = \sigma_x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_{xx}(m) = \phi_{xx}(-m) \\ \phi_{xy}(m) = \phi_{yx}(-m) \end{cases}$$

Idem para γ

$$\begin{cases} \phi_{xy}(m) \leq \left[\phi_{xx}(0).\phi_{yy}(0)\right]^{1/2} \\ \left|\phi_{xx}(m)\right| \leq \phi_{xx}(0) \end{cases}$$

Idem para γ

$$\begin{cases} \lim_{m\to\infty} \phi_{xx}(m) \to m_x^2 \\ \lim_{m\to\infty} \gamma_{xx}(m) \to 0 \\ \lim_{m\to\infty} \phi_{xy}(m) \to m_x m_y \\ \lim_{m\to\infty} \gamma_{xy}(m) \to 0 \end{cases}$$

- Densidade espectral de potência ou espectro de potência

  – Para o caso de sinais determinísticos de energia finita associa-se o conceito de espectro de energia à T. F. através da relação de Parseval. A energia de tal sinal é dada por

$$E=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^2[n]=\ldots=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\Omega)|^2\,d\Omega$$

  – Para sinais aleatórios X(Ω) não existe. Poderá sim existir uma potência finita do sinal

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N}x[n]x[n+0]=ms_X=\phi_{xx}(0)\underset{\boxed{m_x=0}}{=}\gamma_{xx}(0)=\sigma_x^2$$

  – Seja {Xn} um PE de média nula (φ=γ) cuja T. F. de $\varphi_{xx}(m)$ é

$$P_{xx}(\Omega)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\phi_{xx}(m)e^{-j\Omega m}\quad\xleftrightarrow{\text{T. F.}}\quad\phi_{xx}(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{xx}(\Omega)e^{j\Omega m}\,d\Omega$$

$$P=\phi_{xx}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{xx}(\Omega)\,d\Omega$$

  – Conclui-se que a T. F. da seq. de autocorrelação de um sinal estocástico representa a potência do sinal por unidade de frequência ou seja é uma densidade espectral de potência

- Resposta de sistemas LTI a sinais estocásticos

  – Considere-se uma sequência de entrada x[n] como a realização de um PE real e estacionário de média m_X e autocorrelação $\varphi_{xx}(m)$. A saída do sistema LTI com resposta impulsional h[n] será também uma realização de um PE relacionada com a entrada através da soma de convolução.

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

$$m_y = E[Y_n]=E[y[n]]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]E[x[n-k]]=m_x\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]=m_x H(0)$$

  – E para a autocorrelação do processo de saída

$$\phi_{yy}(m)=E[y[n]y[n+m]]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l]E\{x[n-k]x[n+m-l]\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l]\phi_{xx}(m+k-l)$$

$\boxed{\text{r=l-k}}$

$\boxed{\text{v[r]=autocorrelação de h[n]}}$

$$\phi_{yy}(m)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\phi_{xx}(m-r)\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]h[k+r]}=\sum_{r=-\infty}^{+\infty} v[r]\phi_{xx}(m-r)$$

$\updownarrow$ **T. F.**

$$P_{yy}(\Omega)=V(\Omega).P_{xx}(\Omega)$$

$\boxed{\text{Se h[n] é real}}$

$$v[n]=h[n]*h[-n] \xleftrightarrow{\textbf{T. F.}} V(\Omega)=H(\Omega).H(-\Omega)=|H(\Omega)|^2$$

$$P_{yy}(\Omega)=|H(\Omega)|^2.P_{xx}(\Omega)$$

- Exercícios

1- Considere x[n] e y[n] 2 sinais aleatórios não-correlados. Mostre que a média da soma é igual à soma das médias e que o memso acontece com as variâncias.

2- Seja e[n] uma sequência ruído branco e s[n] uma sequência não-correlada com e[n]. Mostre que y[n]=s[n]e[n] é ainda uma sequência ruído branco ou seja

$$E\left[y[n].y[n+m]\right] = A\delta(m)$$

Onde A é constante.

3- Prove as propriedades da correlação e da covariância enunciadas na transparência 53. Use a seguinte desigualdade

$$0 \leq E\left[\left(\frac{x_n}{\left(E\left[x_n^2\right]\right)^{1/2}} - \frac{y_{n+m}}{\left(E\left[y_{n+m}^2\right]\right)^{1/2}}\right)^2\right]$$

4- Considere o caso da amostragem de sinais aleatórios onde um PE contínuo {Xa(t)} cuja PSD é um pulso rectangular limitado a w_M. Suponha que um PE discreto é obtido por amostragem do PE contínuo {x[n]=x_a(nT)}.

a) Determine a seq. de autocovariância do PE discreto.

b) Qual o valor de T para o qual o PE discreto seja um processo ruído branco.

c) Repita a alínea anterior para o caso em que a PSD do PE analógico é um pulso triangular.

5- Use a função *rand* do Matlab para gerar um sinal aleatório (mais de 10.000 pontos) para o caso da distribuição uniforme e normal (gaussiana).Compare os valores teóricos com os valores estimados (médias e variâncias). Use as funções *hist, mean e std.* Repita o processo e verifique que os valores estimados variam.

6- Faça os exercícios 1, 2, 3, e 5 do capítulo 6 do livro de exercícios com Matlab.