Cálculo Integral

Integral de Riemann

Definição, Propriedades

Teorema fundamental do cálculo

Métodos de integração

Aplicações geométricas do integral

Integral impróprio

Na primeira parte deste capítulo vamos apresentar a noção de integral segundo Riemann, estudar algumas das suas propriedades e referir algumas das suas aplicações. Na segunda parte estudaremos os integrais impróprios.

1 Introdução e motivação

Classicamente, o conceito de integral aparece associado à noção intuitiva de área de uma região plana. Nós vamos seguir a via clássica para motivar a nossa exposição.

Considere-se uma função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e sejam

$$m = \max_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{e} \qquad M = \min_{x\in[a,b]} f(x). \tag{67}$$

Suponhamos que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, e consideremos a região plana (*cf.* a Figura 1)

$$\mathcal{D} = \big\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b \ \wedge\ 0 \leq y \leq f(x)\big\} \tag{68}$$

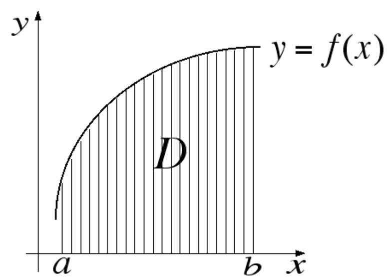


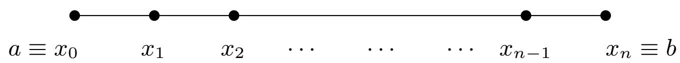
Figura 1: Região $\mathcal{D}$ limitada pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

Suponhamos que pretendemos determinar o valor da área da região $\mathcal{D}$. Em geral, a forma geométrica de $\mathcal{D}$ é pouro "regular", pelo que as fórmulas da geometria elementar não são aplicáveis. Podemos pensar então em aproximar a área de $\mathcal{D}$ pela área de figuras simples, compostas por regiões rectangulares justapostas.

Estratégia

1. Começamos por decompor o intervalo $[a, b]$ num número finito de subintervalos, determinados pelos pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$



A uma tal decomposição iremos chamar *partição* $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$.

2. Em cada subintervalo genérico, $J_i = [x_{i-1}, x_i]$, fixamos arbitrariamente um ponto, digamos

$$y_1 \in [x_0, x_1]\,, \quad y_2 \in [x_1, x_2],\,, \quad y_{n-1} \in [x_{n-2}, x_{n-1}]\,, \quad y_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

e consideramos o correspondente valor de f,

$$f(y_1),\ \ f(y_2),\ \ \ldots\ ,\ \ f(y_{n-1}),\ \ f(y_n).$$

3. Aproximamos a área da porção $\mathcal{D}_k$ da região $\mathcal{D}$ que assenta no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, Figura 2, à esquerda, pela área da região rectangular $\mathcal{R}_k$ de base $x_k - x_{k-1}$ e altura $f(y_k)$, Figura 2, à direita,

$$\text{área}\,\mathcal{D}_k \simeq f(y_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

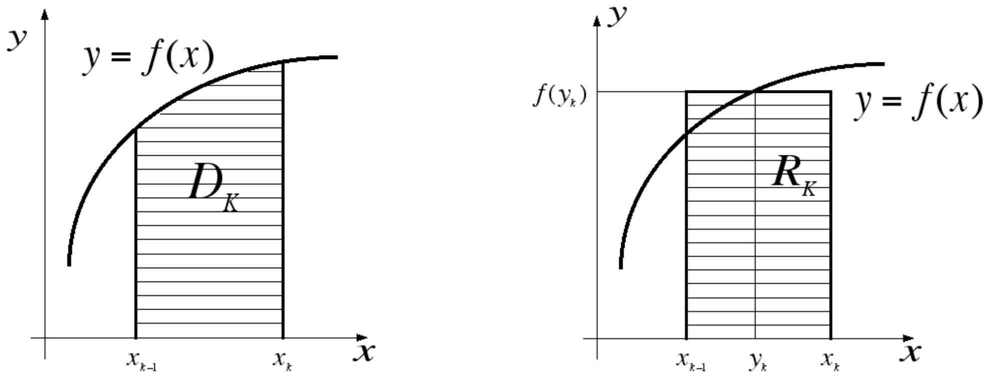


Figura 2: Aproximação da área de $\mathcal{D}_k$ pela área de uma região rectangular.

Para a região completa $\mathcal{D}$ tomamos a aproximação (Figura 3)

$$\begin{aligned} \text{área}\,\mathcal{D} &\simeq \text{área}\,\mathcal{R}_1 + \text{área}\,\mathcal{R}_2 + \cdots + \text{área}\,\mathcal{R}_n \\ &\simeq f(y_1)(x_1 - x_0) + f(y_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(y_n)(x_n - x_{n-1}), \end{aligned}$$

ou seja, abreviando a notação,

$$\text{área}\,\mathcal{D} \simeq \sum_{k=1}^{n} f(y_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{69}$$

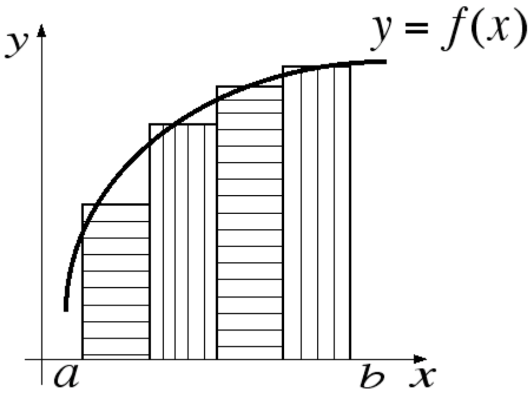


Figura 3: Aproximação da área de $\mathcal{D}$ pela área de uma região poligonal

4. É intuitivo que:

   (a) a aproximação obtida na expressão (69) será tanto melhor quanto maior for o número de pontos considerados para a decomposição do intervalo $[a, b]$;

   (b) a aproximação *óptima* seria obtida com um número infinitamente grande de pontos, ou seja, com subintervalos de amplitude infinitamente pequena.

5. Obtemos então uma definição para a área de $\mathcal{D}$ através da passagem ao limite na na expressão (69), tomando

$$\text{área}\, \mathcal{D} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(y_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{70}$$

Vamos passar agora à exposição rigorosa deste assunto, formalizando adequadamente as ideias intuitivas que acabamos de expor. A área da região $\mathcal{D}$ vai dar lugar ao *integral de f em* $[a, b]$ e cada quantidade introduzida na expressão (69) para aproximar a área de $\mathcal{D}$ vai dar lugar a uma *soma de Riemann.*

2 Definição de integral

Nesta secção apresentaremos a definição de integral segundo Riemann, para uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, limitada, não necessariamente contínua nem necessariamente positiva.

Dada uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$, chamamos *amplitude* de $\mathcal{P}$ à maior das amplitudes dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$,

$$||\mathcal{P}|| = \max \{x_k - x_{k-1} : \quad k = 1, 2, \ldots, n\},$$

pelo que, considerar o número de subintervalos a tender para $+\infty$, equivale a considerar $||\mathcal{P}||$ a tender para 0.

Fixando arbitrariamente pontos $y_k \in [x_{k-1}, x_k]$, definimos uma soma de Riemann da função f em $[a, b]$, para a partição $\mathcal{P}$ considerada, por

$$S(f; \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(y_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{71}$$

Dizemos que a função f é integrável em $[a, b]$ e que o correspondente integral é igual a $\mathcal{I}$ quando, independentemente da partição $\mathcal{P}$ e da escolha dos pontos y_k, se tiver

$$\mathcal{I} = \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(y_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{72}$$

Ao número $\mathcal{I}$ chamamos o *integral de* f *em* $[a, b]$ e representámo-lo por

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

onde f é a *função integranda*, a é o *limite inferior do integral*, b é o *limite superior do integral*, $[a, b]$ é o *intervalo de integração* e x é a *variável de integração.* O símbolo dx representa uma partícula formal que fixa a variável de integração.

Exemplo 1

Seja $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, com c uma constante e x em certo intervalo $[a, b]$.

Dada uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ em subintervalos J_1, J_2, $\ldots$, J_n teremos, independentemente da escolha dos pontos y_k,

$$f(y_k) = c\,, \quad \text{para todo } k = 1, 2, \ldots, n,$$

pelo que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f(y_k)(x_k - x_{k-1}) &= c(x_1 - x_0) + c(x_2 - x_1) + \cdots + c(x_n - x_{n-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(c_n - x_0) = c(b - a) \end{aligned}$$

Então f é integrável em $[a, b]$, tendo-se $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = c(b - a)$. ■

Exemplo 2

Seja $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \end{cases}$ para todo x em certo intervalo $[a, b]$.

Independentemente da partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$, podemos escolher cada um dos pontos y_k em $\mathbb{Q}$ ou em $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, uma vez que todo o intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$ contém racionais e irracionais. Se os escolhermos todos em $\mathbb{Q}$, resulta

$$g(y_k) = 1\,, \quad \text{para todo } k = 1, 2, \ldots, n,$$

e pelo que vimos no Exemplo 1, vem

$$\sum_{k=1}^{n} g(y_k)(x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

De modo perfeitamente análogo, se escolhermos todos os y_k em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, resulta

$$g(y_k) = 0\,, \quad \text{para todo} \;\; k = 1, 2, \ldots, n,$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} g(y_k)(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Consequentemente, não existe o limite das somas de Riemann para esta função, no sentido exposto anteriormente, e g não é integrável em intervalo algum. ■

Observação 1
Só se define integral de uma função limitada, mas nem toda a função limitada é integrável. Veja-se o Exemplo 2. Mais adiante, identificaremos algumas classes de funções limitadas que são integráveis. ■

A definição que apresentámos anteriormente para função integrável e para integral de uma função, e que usámos nos Exemplos 1 e 2, é muito complexa para a generalidade das funções, por ser difícil estudar a existência do limite das somas de Riemann para uma partição qualquer do intervalo e para uma escolha arbitrária de pontos y_k. O nosso objectivo será agora o de enunciar resultados que nos ajudem a decidir sobre a integrabilidade de uma função e o de apresentar processos eficazes para o cálculo do integral. Comecemos com as principais propriedades do integral.

3 Propriedades do integral

Nesta secção vamos apresentar, sem demonstrar, algumas propriedades do integral que se revelarão extremamente úteis.

Propriedade 1 [Aditividade do integral a respeito do intervalo de integração]
Sejam f limitada em $[a,b]$ e $c \in\,]a,b[\,$. Então f é integrável em $[a,b]$ se e só se f integrável separadamente em $[a,c]$ e $[c,b]$, tendo-se

$$\int_a^b f(x)\,dx \;= \int_a^c f(x)\,dx \;+ \int_c^b f(x)\,dx. \tag{73}$$

■

No sentido de estender a Propriedade 1 a todos os reais a, b, c, adoptamos as seguintes convenções clássicas

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad \text{para todo} \;\; a \in \mathbb{R}, \tag{74a}$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,, \quad \text{para todos} \;\; a, b \in \mathbb{R}. \tag{74b}$$

Propriedade 2 [Linearidade do integral]
Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$. Então:

(a) a soma $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,; \tag{75}$$

(b) o produto fg é integrável em $[a,b]$; em particular, se α é uma constante real arbitrária, o produto αf é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx. \tag{76}$$

■

Propriedade 3
Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$. Se $|g(x)| \geq k > 0$, $\forall x \in [a,b]$, então a função $1/g$ é limitada e o quociente f/g é integrável. ■

Propriedade 4 [Monotonia do integral]
Se f e g são integráveis em $[a,b]$ e $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx; \tag{77}$$

em particular, se $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Propriedade 5
Se f é integrável em $[a,b]$ então a função $|f|$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \;\geq\; \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|. \tag{78}$$

Propriedade 6

(a) Se f é limitada em $[a,b]$, anulando-se em todos os pontos de $[a,b]$ excepto, eventualmente, num número finito de pontos de $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0; \tag{79a}$$

(b) se f é integrável em $[a,b]$ e g é uma função que difere de f apenas num número finito de pontos $[a,b]$, então

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{79b}$$

4 Caracterização das funções integráveis

Vamos agora enunciar, sem demonstrar, alguns resultados que estabelecem condições suficientes para a integrabilidade de uma função num intervalo, a partir dos quais identificaremos três classes de funções integráveis (Teoremas 1, 2 e 3).

Teorema 1 [Integrabilidade das funções contínuas]
Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é integrável em $[a,b]$. ■

Exemplo 3
As funções

$$x^k,\ x \in \mathbb{R}, \qquad e^x,\ x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sen} x,\ x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R},$$

são integráveis em qualquer intervalo $[a,b]$ por serem funções contínuas. ■

Observação 2
O Teorema 1 estabelece que a continuidade de uma função garante a sua integrabilidade. No entanto, é conveniente reter, desde já, que existem funções descontínuas que são integráveis. ■

Teorema 2 [Integrabilidade das funções monótonas]
Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona então f é integrável em $[a,b]$. ■

Exemplo 4
A função $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{n} & \text{se } \dfrac{1}{n+1} < x \leq \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$ definida em $[0,1]$, possui um número infinito de descontinuidades - todos os pontos da forma $\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, são pontos de descontinuidade de f. No entanto, f é integrável por ser monótona. ■

Observação 3
Do Teorema 2, podemos concluir que, ainda que uma função não seja contínua, se for monótona, então ela é também integrável. Mais uma vez, chama-se a atenção para o faco de existirem funções que não são monótonas (nem contínuas) e, mesmo assim, são integráveis. ■

Teorema 3 [Integrabilidade das funções com um número finito de descontinuidades]
Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada possuindo um número finito de descontinuidades então f é integrável em $[a,b]$. ■

Exemplo 5
A função
$$g(x) = \begin{cases} 5 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \\ 3 & \text{se} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$$
é integrável em $[0,4]$ porque possui apenas duas descontinuidades, em $x = 1$ e em $x = 2$.

Também a função
$$h(x) = \begin{cases} e^{\operatorname{sen} x} & \text{se} \quad x \neq \pi \\ -1 & \text{se} \quad x = \pi \end{cases}$$
é integrável em $[0,9]$ porque possui apenas uma descontinuidade em $x = \pi$. ■

Observação 4
Mostra-se ainda que, se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada e o conjunto dos pontos de descontinuidade de f constitui um conjunto numerável[1] então f é integrável em $[a,b]$. ■

5 O Teorema fundamental do cálculo

Um dos resultados mais notáveis do Cálculo está patente no teorema que agora iremos apresentar. Nele estabelece-se uma ligação crucial entre os conceitos de derivada e de integral, a partir da qual é possível obter um processo extremamente eficaz para o cálculo do integral, dispensando o recurso à definição apresentada na Secção 2.

Consideremos uma função contínua, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, logo integrável. Para cada $x \in [a,b]$, f é integrável em $[a,x]$, pelo que podemos definir uma nova função, $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, por passagem ao integral, pondo
$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a,b]. \tag{80}$$
A função F acabada de definir possui uma característica importante, relacionada com a função inicial f.

Teorema 4 [Teorema Fundamental do Cálculo, parte I]
A função $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão (80) é derivável em $[a,b]$, tendo-se
$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]. \tag{81}$$
■

A partir da expressão (81), podemos concluir que a função f é uma primitiva de F, pelo que vale o seguinte resultado.

[1]Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ diz-se numerável se existir uma bijecção $\psi : A \longrightarrow \mathbb{N}$, significando que *A possui tantos elementos como o conjunto* $\mathbb{N}$. Alguns exemplos de conjuntos numeráveis são $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ e de conjuntos não numeráveis são $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Corolario 1

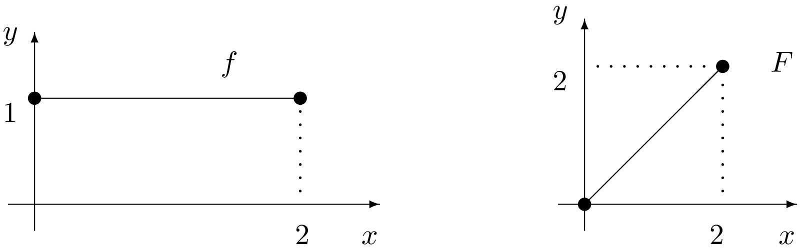
Toda a função contínua $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ possui primitiva em $[a,b]$. ■

De facto, basta pensar na correspondente função F obtida como em (80), por integração da função f desde a até x.

Observação 5

Quando f não é contínua, mantendo-se integrável, podemos definir uma função F como em (80). Acontece, porém, que F pode não ser derivável, ou então, até ser derivável mas a sua derivada não coincidir com f nos pontos de descontinuidade de f (Exemplos 6, 7 e 8).

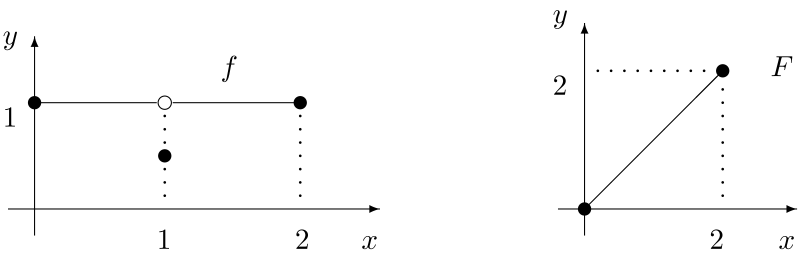
Exemplo 6



f é contínua, logo integrável (Teorema 1) e primitivável (Teorema 4).
Define-se a função F, que é derivável. Além disso,

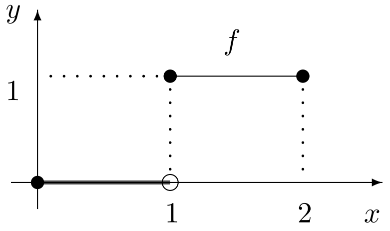
$$f(x) = 1 \implies F(x) = \int_0^x 1\, dt = x, \ \forall x \in [0,2].$$ ■

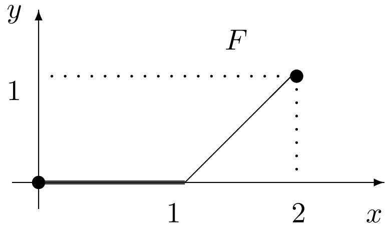
Exemplo 7



f é limitada com uma descontinuidade em 1, logo é integrável (Teorema 3). No entanto, f não é primitivável (isto é, f não é a derivada de função alguma em $[0,2]$. Mesmo assim, a integrabilidade de f em $[0,2]$ é suficiente para que se possa definir a função F, como em (80). Como a função f deste Exemplo 7 difere da função f do Exemplo 6 apenas no ponto 1, os integrais das duas são iguais (Propriedade 6), pelo que $F(x) = x, \ \forall x \in [0,2]$. Além disso, F é obviamente derivável, com $F'(x) = 1, \ \forall x \in [0,2]$. Acontece, porém, que a derivada de F em 1 difere de $f(1)$. ■

Exemplo 8





f é limitada e possui uma descontinuidade no ponto 1. Logo f é integrável (Teorema 3) mas não é primitivável. Define-se novamente a função F, como em (80), e vem

$$x \in [0,1[\implies f(x)=0 \implies F(x)=\int_0^x 0\,dt = 0,$$

$$x \in [1,2] \implies f(x)=1 \implies F(x)=\int_1^x 1\,dt = x-1.$$

A função f é contínua mas não é derivável em 1. ■

Do ponto de vista do cálculo do integral de uma função, a consequência mais relevante que se extrai do Teorema 4 é a que se apresenta a seguir.

Teorema 5 [Teorema Fundamental do Cálculo, Fórmula de Barrow]
Sejam $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e G uma primitiva de f em $[a,b]$. Então

$$\int_a^b f(t)\;dt = G(b) - G(a). \tag{82}$$

■

Demonstração
Pondo $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$, tem-se $F(b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
Atendendo a que F e G são duas primitivas de f em $[a,b]$, tem-se

$$G(x) = F(x) + \mathcal{C}, \quad x \in [a,b], \quad \mathcal{C} \text{ constante.}$$

Em particular, para $x = a$, vem

$$G(a) = F(a) + \mathcal{C} \implies \mathcal{C} = G(a),$$

pelo que

$$G(x) = F(x) + G(a), \quad x \in [a,b].$$

Para $x = b$, vem

$$G(b) = F(b) + G(a) \implies F(b) = G(b) - G(a)$$

ficando, assim, justificada a igualdade (82). ■

Notação
Para traduzir a identidade (82), usamos a notação $\displaystyle\int_a^b f(t)\;dt = \Big[G(x)\Big]_a^b$.

O Teorema 5 fornece um processo extremamaente útil para o cálculo do integral de uma função contínua num intervalo. Quando a função integranda não é contínua, conjugamos o Teorema 5 com as propriedades enunciadas na Secção 3, para calcular o integral por intermédio de uma primitiva da função integranda em cada intervalo de continuidade.

Exemplo 9

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2\,.$

(b) $\displaystyle\int_{-5}^3 |x|\, dx = \int_{-5}^0 (-x)\, dx + \int_0^3 x\, dx \; = -\frac{1}{2}\Big[x^2\Big]_{-5}^0 + \frac{1}{2}\Big[x^2\Big]_0^3 = \frac{25}{2} + \frac{9}{2} = 7\,.$

(c) $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\Big[\log(x^2+1)\Big]_0^5 = \frac{1}{2}(\log 26 - \log 1) \; = \; \log\sqrt{26}\,.$

(d) Se $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 3 & \text{se } x \in\,]1,2] \end{cases}$ então $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx \overset{\text{Prop. } 6(b)}{=} \int_0^1 1\, dx + \int_1^2 3\, dx$

$\displaystyle = \Big[x\Big]_0^1 + \Big[3x\Big]_1^2 = (1-0) + (6-3) = 4\,.$

(e) Se $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \le 3 \\ x-3 & \text{se } 3 < x \le 6 \end{cases}$ então, novamente pela Propriedade 6 (b), vem

$$\begin{aligned}
\int_0^6 f(x)\, dx &= \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^3 2\, dx + \int_3^6 (x-3)\, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \Big[2x\Big]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^6 = \frac{1}{3} + (6-2) + \left(0 + \frac{9}{2}\right) = \frac{53}{6}\,.
\end{aligned}$$

6 Resultados clássicos do cálculo do integral

Do teorema fundamental do cálculo, Teorema 4, saem algumas consequências que passamos a apresentar.

A - Derivação sob o sinal de integral

Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a função F definida como em (80) é derivável e será também derivável a composta $F \circ \varphi$, com $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ uma função derivável qualquer. Por um lado, pela regra de derivação de funções compostas, vem

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\, \varphi'(x)\,,$$

e pelo teorema fundamental do cálculo, Teorema 4, sai que

$$(F \circ \varphi)'(x) = f(\varphi(x))\, \varphi'(x). \tag{83a}$$

Por outro lado, da definição (80) para F, sai também que

$$(F \circ \varphi)(x) = F(\varphi(x)) = \int_0^{\varphi(x)} f(t)\, dt,$$

pelo que

$$(F \circ \varphi)'(x) = \left(\int_0^{\varphi(x)} f(t)\, dt \right)'. \tag{83b}$$

Das expressões (83a-b), resulta

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt \right)' = f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\,, \tag{84}$$

que dá uma fórmula para a derivação do integral com limite superior que é função da variável. Mais em geral, sendo $\varphi, \psi \colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ funções deriváveis, partindo de

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt = \int_a^{\psi(x)} f(t)\, dt - \int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt$$

e usando o resultado da fórmula (84), vem

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt \right)' = f(\psi(x))\, \psi'(x) - f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\,. \tag{85}$$

que dá uma fórmula para a derivação do integral com os dois limites de integração que são função da variável.

Exemplo 10
Estudemos a monotonia da função definida por

$$H(x) = x^2 \int_0^{x^3} e^{-t^2}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Temos

$$H'(x) = 2x \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt + 3x^4 e^{-x^6}, \quad x \in \mathbb{R},$$

que se anula apenas para $x = 0$, já que $3x^4 e^{-x^6} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e que

$$x > 0 \implies 2x > 0 \ \wedge \ \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt > 0 \implies H'(x) > 0,$$
$$x < 0 \implies 2x < 0 \ \wedge \ \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt < 0 \implies H'(x) > 0.$$

Logo H é monótona crescente. ■

B - Fórmula do valor médio para integrais

Novamente, dada $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua, podemos definir

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{e} \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

e por ser

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a,b],$$

da monotonia do integral, sai que

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx,$$

ou seja,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Consequentemente, ter-se-á

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha(b-a), \qquad \text{com} \quad \alpha \in [m,M].$$

Sendo contínua em $[a,b]$, a função f toma todos os valores desde m até M, existindo $c \in [a.b]$ tal que $f(c) = \alpha$, valendo o seguinte resultado.

Teorema 6 [do valor médio para integrais]
Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)\,. \tag{86}$$

■

Com base no Teorema 6, define-se ususalmente o *valor médio* da função f por

$$\widetilde{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{87}$$

Exemplo 11
O valor médio da função $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0,\pi/2]$ é dado por

$$\widetilde{f} = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[\operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\,.$$

■

C - Integração por partes

Consideremos agora $f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ com f contínua, F uma sua primitiva e g possuindo derivada contínua. Então fg é integrável e conjugando a fórmula de Barrow expressa pelo teorema fundamental do cálculo, Teorema 5, com o método de primitivação por partes, sai que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[F(x)g(x) - P\Big(F(x)g'(x)\Big)\Big]_a^b$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx\,. \tag{88}$$

Exemplo 12

(a) $\displaystyle\int_0^2 xe^x\,dx = \Big[e^x x\Big]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - \Big[e^x\Big]_0^2 = e^2 + 1\,.$

(b) $\displaystyle\int_1^e \log\sqrt{x}\,dx = \Big[x\log\sqrt{x}\Big]_1^e - \int_1^e x\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{e}{2} - \int_1^e \frac{1}{2}\,dx = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}\Big[x\Big]_1^e = \frac{1}{2}\,.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x^2\,dx = \Big[\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x^2\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,\frac{2x}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\Big[\ln(1+x^4)\Big]_0^1$

$\displaystyle\qquad = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$ ■

C - Integração por por substituição

Para calcular o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ de uma função contínua $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos conjugar a fórmula de Barrow, Teorema 5, com o método de primitivação por substituição, passando da variável x a uma nova variável, digamos t, através da mudança de variável $x = g(t)$. Já sabemos como uma tal mudança altera a função a primitivar, que passará de $f(x)$ para $f(g(t))\,g'(t)$. Mas é de esperar que o intervalo de integração tenha que ser adaptado à nova variável t. Para isso, devemos procurar saber em que intervalo irá variar t, se temos x a variar em $[a,b]$ e fazemos $x = g(t)$. Ou seja, devemos procurar pontos α e β tais que

$$a = g(\alpha) \qquad \text{e} \qquad b = g(\beta)\,.$$

Para uma função $f : [\boldsymbol{a}, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua, e para uma substituição definida através de uma função $g : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ possuindo derivada contínua e tal que $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$, o resultado é o seguinte

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt\,. \tag{89}$$

A expressão (89) dá a fórmula de substituição no integral, para uma mudança de variável definida por $x = g(t)$.

Observação 6

No integral do segundo membro da expressão (89), os limites de integração α e β são quaisquer números reais tais que $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, ainda que haja várias escolhas possíveis. *Cf.* o Exemplo 13. ■

Exemplo 13

(a) Calculemos $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, efectuando a mudança de variável $x = \operatorname{sen} t$.

Pondo $g(t) = \operatorname{sen} t$, vem $g'(t) = \cos t$. Quanto aos limites de integração, temos

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ x = 0 \end{cases} \implies \operatorname{sen} t = 0 \implies t = t_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ x = 1 \end{cases} \implies \operatorname{sen} t = 1 \implies t = t_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

A escolha mais simples parece ser $t_1 = 0$ e $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$, resultando

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\ \cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

A título de ilustração, faça-se outra escolha, por exemplo, $t_1 = 2\pi$ e $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Viria

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\ \cos t\,dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t}\ \cos t\,dt$$

Mas $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$ e $\cos t$ não tem sinal constante em $\left[\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, pelo que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t\,dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2 t\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

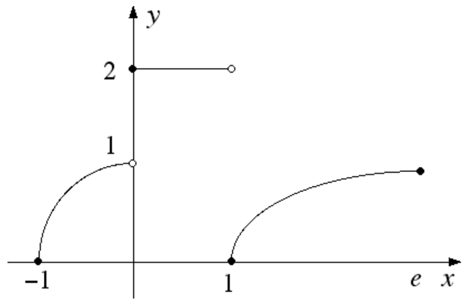
(b) Calculemos agora $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$, efectuando a mudança de variável $x - 1 = t^2$.

Pondo $g(t) = t^2 + 1$, vem $g'(t) = 2t$. Atendendo a que $g(0) = 1$ e $g(1) = 2$, resulta

$$\begin{aligned} \int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx &= \int_0^1 (1+t^2)\sqrt{t^2}\,2t\,dt = 2\int_0^1 \left(t^2 + t^4\right)\,dt \\ &= \frac{2}{3}\left[t^3\right]_0^1 + \frac{2}{5}\left[t^5\right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

(c) Calculemos $\displaystyle\int_{-1}^{\mathrm{e}} f(x)\,dx$ para

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{se } -1\le x<0,\\ 2 & \text{se } 0\le x<1,\\ \log x & \text{se } 1\le x\le \mathrm{e}\,.\end{cases}$$



Recorrendo à Propriedade 6 (b), vem

$$\int_{-1}^{\mathrm{e}} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_0^1 2\,dx+\int_1^{\mathrm{e}}\log x\,dx,$$

onde o primeiro integral se calcula por substituição fazendo, por exemplo, $x=\operatorname{sen} t$, o segundo é imediato e o terceiro calcula-se por partes. Resulta $\displaystyle\int_{-1}^{\mathrm{e}} f(x)\,dx=\frac{\pi}{4}+2+1\,.$

■

Exemplo 14

Sejam $a\in\mathbb{R}^+$ e f: $[-a,a]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua. Vejamos que:

(a) se f é par então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$;

(b) se f é ímpar então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

(a) Sendo f par, tem-se $f(x)=f(-x)$, $\forall x\in[-a,a]$, e então

$$\int_{-a}^{a} f(x)\;,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=\underbrace{\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx}_{J}+\int_0^a f(x)\,dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x=-t$ no integral J, vem

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_a^0 f(t)(-1)\,dt+\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(t)\,dt+\int_0^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx.$$

(b) Sendo f ímpar, tem-se $f(x)=-f(-x)$, $\forall x\in[-a,a]$, e então

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=-\underbrace{\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx}_{J}+\int_0^a f(x)\,dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x=-t$ no integral J, vem

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=-\int_a^0 f(t)(-1)\,dt+\int_0^a f(x)\,dx=-\int_0^a f(t)\,dt+\int_0^a f(x)\,dx=0.$$

■

7 Aplicações do integral

Algumas aplicações geométricas do integral estão relacionadas com a área de um domínio plano limitado, o comprimentos de um arco de curva entre dois pontos, o volume de um sólido de revolução, e a área de uma superfície de revolução.

7.1 Área de um domiínio plano

Vamos retomar o problema que serviu de motivação à definição de integral (Secção 1). No caso em que $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$, dissemos que a área do domínio limitado pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$, representado na Figura 1 da Secção 1, é dada por

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Daqui extraem-se as seguintes consequências.

(a) Se $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a,b]$, então, por simetria em relação a OX, a área da região plana

$$\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b \ \wedge\ f(x) \leq y \leq 0\big\}$$

coincide com a área de um novo domínio plano, digamos $\mathcal{D}^*$, obtido de $\mathcal{D}$ por simetria em relação ao eixo OX, ou seja

$$\mathcal{D}^* = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b \ \wedge\ 0 \leq y \leq -f(x)\big\}$$

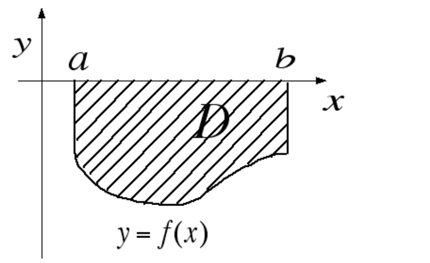


Figura 4: Região limitada pelo gráfico de uma função negativa, pelo eixo OX e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

donde

$$\text{área}(\mathcal{D}) = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{90}$$

(b) Se $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e tais que $0 \leq g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$, então, a área da região

$$\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b \ \wedge\ g(x) \leq y \leq f(x)\big\}$$

pode ser dada por área$(\mathcal{D})$ =área$(\mathcal{D}_1)-$área$(\mathcal{D}_2)$, onde $\mathcal{D}_1$ é a região plana sob o gráfico de f e $\mathcal{D}_2$ é a região plana sob o gráfico de g. Então

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

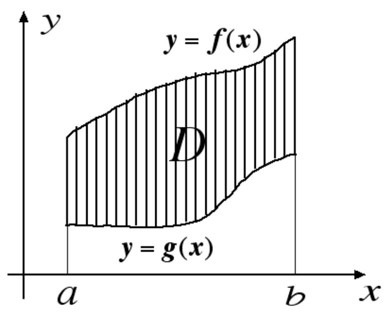


Figura 5: Região limitada pelos gráficos de duas funções positivas e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

ou seja

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b \Big[f(x) - g(x)\Big]\,dx. \tag{91}$$

(c) Consideremos agora uma região plana

$$\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a \le x \le b\ \wedge\ g(x) \le y \le f(x)\}$$

onde f e g são duas funções contínuas, não necessariamente positivas, tais que $g(x) \le f(x)$, $\forall x\in[a,b]$. Por translacção segundo um vector vertical orientado no sentido positivo de OY, a região $\mathcal{D}$ seria transportada para o semiplano superior (positivo), obtendo-se uma região $\mathcal{D}^*$ geometricamente igual a $\mathcal{D}$, limitada por $y=f(x)+k$, $y=g(x)+k$, com k uma constante positiva tal que $k > |\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)|$.

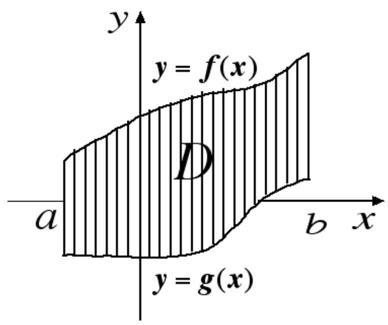


Figura 6: Região limitada pelos gráficos de duas funções quaisquer, e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

A área da região $\mathcal{D}$ seria então dada por

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \text{área}(\mathcal{D}^*) = \int_a^b \Big[f(x) + k - \Big(g(x) + k\Big)\Big]\, dx,$$

ou seja novamente por

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b \Big[f(x) - g(x)\Big]\, dx.$$

(d) Mais em geral, se os gráficos das funções f e g se intersectam num ponto de abcissa c e invertem a posição relativa, a área da região $\mathcal{D}$ limitada pelos gráficos de f e de g e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ pode ser calculada como a soma de duas áreas, a da região entre $x = a$ e $x = c$ e a da região entre $x = c$ e $x = b$. Pelo que vimos em (b), resulta

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^c \Big[f(x) - g(x)\Big]\, dx + \int_c^b \Big[g(x) - f(x)\Big]\, dx. \qquad (92)$$

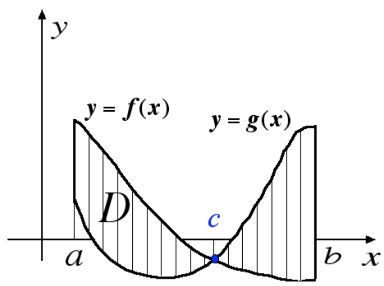
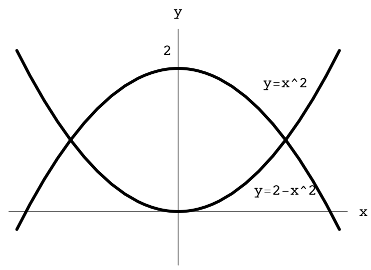


Figura 7: Região limitada pelos gráficos de f e de g, quando estes se intersectam, e ainda pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

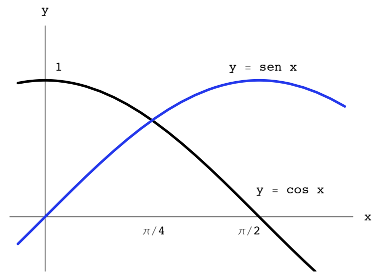
Exemplo 15

(a) A área da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$, que se intersectam para $x = -1$ e $x = 1$, é dada por (caso (b))

$$\int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)\, dx = \Big[2x - \frac{2}{3}x^3\Big]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$



(b) A área da região limitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \pi/2$ é dada por (caso (d))

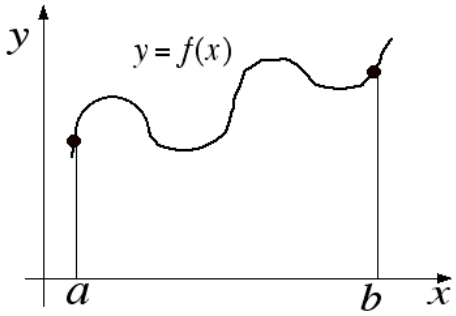


$$\begin{aligned}
\text{área}\,\mathcal{D} &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx \\
&= \Big[\operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} \;=\; 2\sqrt{2} - 2.
\end{aligned}$$

■

7.2 Comprimento de um arco de curva

Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função possuindo derivada contínua. Designemos por $\mathcal{C}$ o arco de curva $y = f(x)$, com $x \in [a,b]$, representado na Figura 8, imagem da esquerda. Vamos atribuir significado ao comprimento do arco $\mathcal{C}$, recorrendo à definição de integral em termos das somas de Riemann. Para tal, vamos considerar uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ definida por pontos $x_0 = a,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b$. Sejam $P_0, P_1, \ldots, P_n$ os pontos correspondentes sobre a curva $\mathcal{C}$ e consideremos a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ representada à direita na Figura 8, definida pelos segmentos de recta $P_{i-1}P_i$, com $i = 1, 2, \ldots, n$.



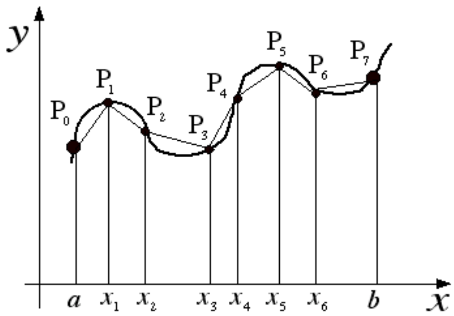


Figura 8: Arco de curva $\mathcal{C}$ (à esquerda) e linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ (à direita).

Quando os pontos P_i são considerados cada vez mais próximos uns dos outros, ou seja, quando a amplitude $||\mathcal{P}||$ da partição tende para zero, a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com o arco $\mathcal{C}$. Então, por definição, pomos

$$\operatorname{comp}\mathcal{C} = \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} \operatorname{comp} L_{\mathcal{P}}. \tag{93}$$

Mas o comprimento da linha poligonal é a soma dos comprimentos dos vários segmentos de recta que a constituem, ou seja

$$\operatorname{comp} L_{\mathcal{P}} = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n},$$

sendo o comprimento de cada segmento $P_{i-1}P_i$ dado pela distância entre $P_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1})$ e $P_i = (x_i, y_i)$, ou seja por

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{\big(x_i - x_{i-1}\big)^2 + \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^2},$$

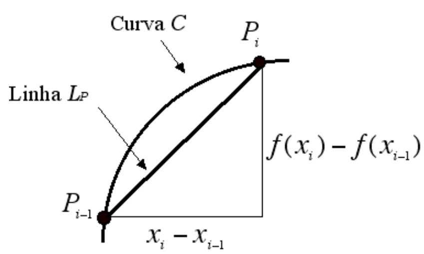


Figura 9: Ampliação de uma porção do arco $\mathcal{C}$ e da linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$.

ou ainda por

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \big(x_i - x_{i-1}\big)\sqrt{1+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right)^2}.$$

O quociente que figura no radical do segundo membro dá o declive do segmento de recta $P_{i-1}P_i$ e, portanto, dá também o declive de uma recta r paralela ao segmento e tangente à curva $\mathcal{C}$. Como f é derivável (teorema do valor médio de Lagrange), tal declive pode ser expresso como a derivada de f em algum ponto $y_i \in\,]x_{i-1}, x_i[$, e vem

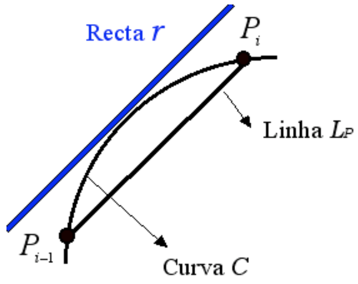


Figura 10: Recta r tangente a $\mathcal{C}$ e paralela ao segmento $P_{i-1}P_i$.

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{1+\big(f'(y_i)\big)^2}\,\big(x_i - x_{i-1}\big)\,.$$

Consequentemente, o comprimento da linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ é dado por

$$\mathrm{comp}(L_{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\big(f'(y_i)\big)^2}\,\big(x_i - x_{i-1}\big), \tag{94}$$

onde, no segundo membro, mais não temos do que uma soma de Riemann para a função integrável $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$. Tomando o limite quando $||\mathcal{P}|| \to 0$ na equação (94), vem (*cf.* as equações (71) e (72))

$$\lim_{||\mathcal{P}||\to 0} \mathrm{comp}(L_{\mathcal{P}}) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \tag{95}$$

e tendo em conta a definição (93), sai

$$\mathrm{comp}(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\;dx\,. \tag{96}$$

Exemplo 16

(a) O comprimento do arco de curva $y = \mathrm{ch}\,x$, entre os pontos de abcissa $x = -1$ e $x = 2$ é dado por

$$\mathrm{comp}(C) = \int_{-1}^{2}\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\,x}\;dx = \int_{-1}^{2}\mathrm{ch}\,x\,dx = \Big[\mathrm{sh}\,x\Big]_{-1}^{2} = \mathrm{sh}\,2 + \mathrm{sh}\,1\,.$$

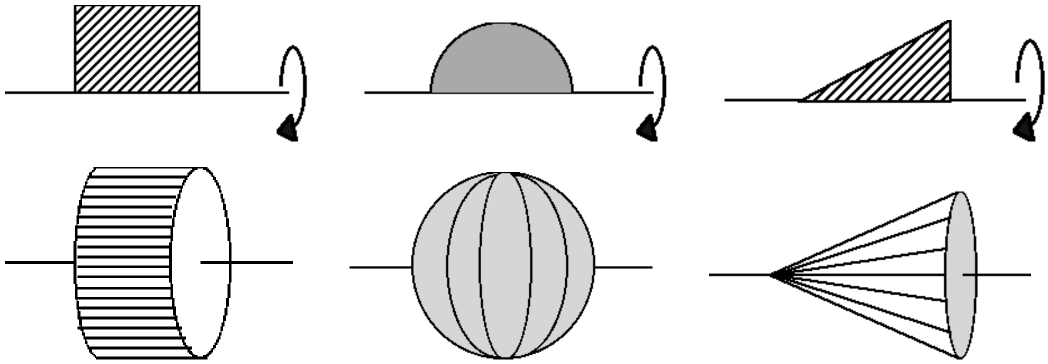
(b) O comprimento do arco de curva $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, entre os pontos de abcissa $x = 1$ e $x = 8$ é dado por

$$\mathrm{comp}(C) = \int_1^8\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\;dx = \int_1^8\sqrt{1+x}\;dx = \frac{2}{3}\Big[(1+x)^{3/2}\Big]_1^8 = 18 - \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

■

7.3 Volume de um sólido de revolução

Quando uma região plana roda em torno de uma recta r do mesmo plano, obtém-se um sólido dito de revolução. Assim, um cilindro pode ser obtido pela rotação de uma região rectangular, uma esfera pode ser obtida pela rotação de um semi-círculo, e um cone pode ser obtido pela rotação de uma região triangular.



Nesta secção, estamos interessados nos sólidos de revolução $\mathcal{S}$ gerados pela rotação em torno do eixo OX de uma região plana $\mathcal{D}$ limitada pelo gráfico de uma função contínua, pelo eixo OX e por dua rectas verticais, $x = a$ e $x = b$. Mais concretamente vamos obter uma expressão para o cálculo do volume do sólido $\mathcal{S}$, recorrendo novamente à definição de integral em termos das somas de Riemann. Para tal, consideramos uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ definida por pontos x_0, x_1, $\ldots$, x_n. Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ fixamos arbitrariamente um ponto c_i.

Tomamos a região poligonal $\mathcal{R}_\mathcal{P}$ definida pelas n regiões rectangulares de altura $f(c_i)$ que se erguem sobre os vários subintervalos. Observamos que, quando a amplitude $||\mathcal{P}||$ da partição tende para zero, a região poligonal $\mathcal{R}_\mathcal{P}$ tende a confundir-se com o domínio $\mathcal{D}$ e o sólido $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ gerado por $\mathcal{R}_\mathcal{P}$, à direita na Figura 11, tende a confundir-se com o sólido $\mathcal{S}$ gerado por $\mathcal{D}$, à esquerda na Figura 11. Então, por definição, pomos

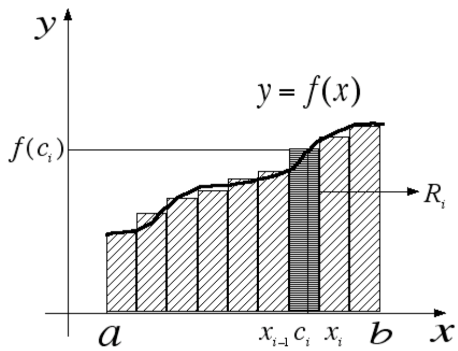


Figura 11: Soma de Riemann para o volume de um sólido de rotação.

$$\operatorname{vol} \mathcal{S} = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \operatorname{vol} \mathcal{S}_\mathcal{P}. \tag{97}$$

Reparando (Figura 10) que cada rectângulo elementar R_i gera um cilindro "achatado" S_i (Figura 11, à direita) com volume

$$\operatorname{vol}(S_i) = \pi \Big(f(c_i)\Big)^2 (x_i - x_{i-1}),$$

obtemos

$$\operatorname{vol}(\mathcal{S}_\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \pi \Big(f(c_i)\Big)^2 (x_i - x_{i-1}). \tag{98}$$

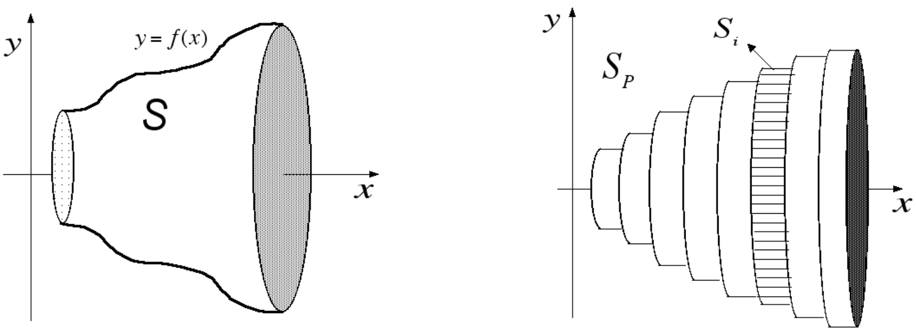


Figura 12: Sólido $\mathcal{S}$ de volume a definir e sólido $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ cujo volume aproxima o de $\mathcal{S}$.

No segundo membro da equação (98) temos novamente uma soma de Riemann, desta vez para a função $h\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \pi\big(f(x)\big)^2$, que é integrável. Logo, tomando o limite quando $||\mathcal{P}|| \to 0$ na equação (98), vem

$$\lim_{||\mathcal{P}||\to 0} \operatorname{vol}(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}) = \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2\,dx, \tag{99}$$

e da definição (97), sai

$$\operatorname{vol}(\mathcal{S}) = \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2\,dx. \tag{100}$$

Exemplo 17

O volume do sólido $\mathcal{S}$ gerado pela rotação em torno de OX da região

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ -1 \le x \le 1 \ \wedge\ 0 \le y \le x^2+1\right\}$$

é dado por

$$\operatorname{vol}\mathcal{S} = \int_{-1}^{1} \pi(x^2+1)^2\,dx = \pi\Big[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\Big]_{-1}^{1} = 2\pi\Big(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\Big).$$

■

Exemplo 18

A fórmula para o volume de uma esfera $\mathcal{S}$ de raio r pode ser obtida pensando na esfera como o sólido gerado pela rotação em torno de OX do semi-círculo superior

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le r^2 \ \wedge\ y \ge 0\right\}.$$

Atendendo à simetria da esfera, podemos considerar apenas a rotação do quarto de círculo situado no primeiro quadrante. Vem

$$\operatorname{vol}\mathcal{S} = 2\int_0^r \pi\Big(\sqrt{r^2-x^2}\Big)^2\,dx = 2\pi\int_0^r \big(r^2-x^2\big)\,dx = 2\pi r^2\big[x\big]_0^r - \frac{2\pi}{3}\big[x^3\big]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

■

À semelhança do que fizemos na Subsecção 7.1 em relação ao conceito de área, podemos obter fórmulas mais gerais para o cálculo do volume de sólidos de revolução. Por exemplo, no caso em que $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e $0 \le g(x) \le f(x)$, $\forall x \in [a,b]$, o volume do sólido $\mathcal{S}$ gerado pela rotação em torno de OX da região plana

$$\mathcal{D} = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ a \le x \le b \wedge g(x) \le y \le f(x)\big\}$$

é dado por

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\mathcal{S}) &= \int_a^b \pi f^2(x)\,dx - \int_a^b \pi g^2(x)\,dx \\ &= \int_a^b \pi\big[f^2(x) - g^2(x)\big]\,dx.\end{aligned}$$

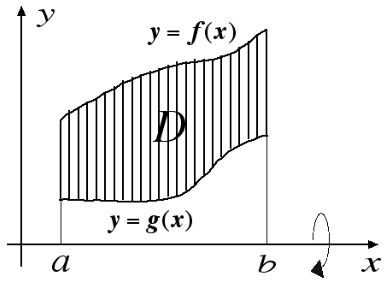


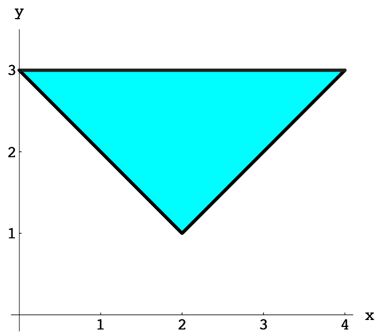
Figura 13: Sólido gerado pela rotação em torno de OX da região $\mathcal{D}$.

Exemplo 19
O volume do sólido $\mathcal{S}$ gerado pela rotação em torno de OX da região plana

$$B = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x-2|+1 \le y \le 3\big\}$$

é dado por (tendo em conta a simetria)

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}\mathcal{S} &= 2\int_0^2 \pi\Big(3^2 - (-x+3)^2\Big)\,dx \\ &= 2\pi\int_0^2 \big(-x^2+6x\big)\,dx = \frac{56\pi}{3}.\end{aligned}$$

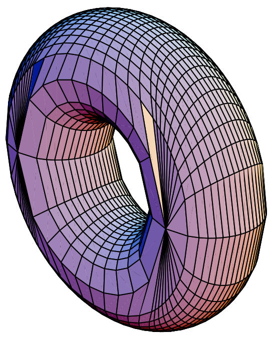


Exemplo 20 [Volume de um toro]

O volume do sólido $\mathcal{S}$ gerado pela rotação em torno de OX da região plana

$$C = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x-4)^2 + (y-4)^2 \le 1\big\}$$

é dado por (tendo em conta a simetria em relação à recta $x=4$)



$$\begin{aligned}vol\,\mathcal{S} &= 2\pi\int_4^5 \Big[\big(4+\sqrt{1-(x-4)^2}\big)^2 - \big(4-\sqrt{1-(x-4)^2}\big)^2\Big]\,dx \\ &= 32\pi\int_4^5 \sqrt{1-(x-4)^2}\,dx \qquad \text{[substituição } x-4=\operatorname{sen} t\text{]} \\ &= 32\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\operatorname{sen} t^2}\,\cos t\,dt = 32\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 16\pi\int_0^{\pi/2}\big(1+\cos 2t\big)\,dt \\ &= 16\pi\Big(\big[t\big]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\big[\operatorname{sen} 2t\big]_0^{\pi/2}\Big) = 8\pi^2.\end{aligned}$$

7.4 Área de uma superfície de revolução

Quando um arco de curva $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, roda em torno do eixo OX, obtém-se uma superfície de revolução. Vamos recorrer à definição de integral em termos das somas de Riemann para obter uma fórmula para o cálculo da área de tal superfície.

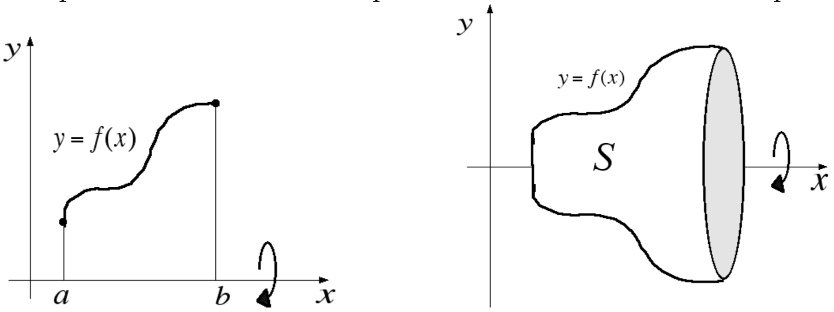


Figura 14: Arco de curva $\mathcal{C}$ (à esquerda) e superfície S de revolução (à direita).

Para tal, consideramos uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ definida por pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Sejam $P_0, P_1, \ldots, P_n$ os correspondentes pontos sobre a curva $\mathcal{C}$ e consideremos a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ representada na Figura 15, definida pelos segmentos de recta $P_{i-1}P_i$, com $i = 1, 2, \ldots, n$. Quando os pontos P_i são considerados cada vez mais próximos uns dos outros, ou seja quando a amplitude $||\mathcal{P}||$ da partição tende para zero, a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com a curva $\mathcal{C}$ e a superfície $S_{\mathcal{P}}$ gerada por $L_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com a superfície S gerada por $\mathcal{C}$. Então pomos

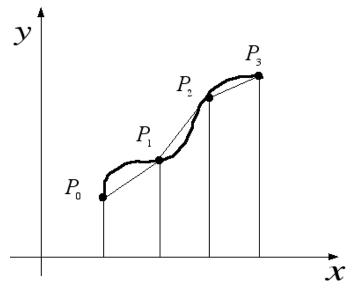


Figura 15: Partição do intervalo $[a, b]$ e linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$.

$$\text{área}\,\mathcal{S} = \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} \text{área}\,\mathcal{S}_{\mathcal{P}}. \tag{101}$$

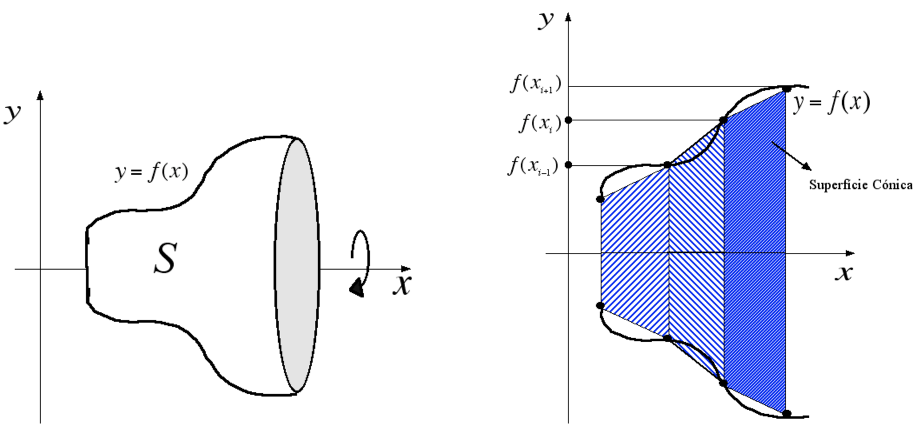
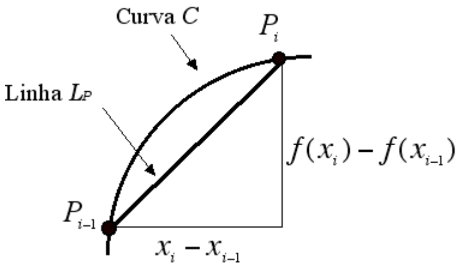


Figura 16: Superfície S gerada por $\mathcal{C}$ e superfície $S_{\mathcal{P}}$ gerada por L_P.

Mas cada segmento de recta “inclinado” gera um tronco de superfície cónica C_i (Figura 16, à direita), com área lateral

$$\text{área}(C_i) = 2\pi\, \overline{P_{i-1}P_i}\, \frac{f(x_i-1)+f(x_i)}{2}\ ,$$

uma vez que a área da superfície lateral de um tronco de cone (Figura 17, direita) é dada por $2\pi\, g(r+R)/2$.



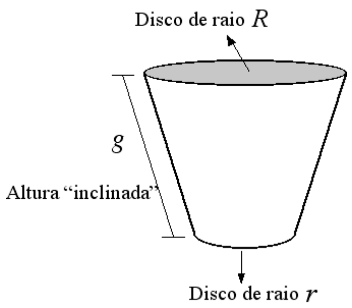


Figura 17: Tronco de cone (à direita) e pormenor da curva que gera a superfície S (à esquerda).

Mas (Figura 17, esquerda)

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

e como vimos na subsecção 7.3, podemos escrever

$$\overline{P_iP_{i+1}} = \sqrt{1+\big(f'(y_i)\big)^2}\,\big(x_i - x_{i-1}\big),$$

para algum $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Se agora aproximarmos $\frac{f(x_i-1)+f(x_i)}{2}$ por $f(y_i)$ vem então

$$\text{área}(C_i) = 2\pi\, f(y_i)\, \sqrt{1+\big(f'(y_i)\big)^2}\,\big(x_i - x_{i-1}\big).$$

Consequentemente, a área da superfície de revolução $S_{\mathcal{P}}$ é dada por

$$\text{área}(S_{\mathcal{P}}) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\, \sqrt{1+\big(f'(y_i)\big)^2}\,\big(x_i - x_{i-1}\big). \tag{102}$$

O segundo membro da expressão (102) não é mais do que uma soma de Riemann para a função $k\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $k(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$. Como a função k é integrável, tomando o limite quando $||\mathcal{P}|| \to 0$ na equação (102) vem então

$$\text{área}(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx. \tag{103}$$

Nos casos mais gerais em que a função f muda de sinal entre a e b, resulta

$$\text{área}(S) = 2\pi \int_a^b |f(x)|\, \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx. \tag{104}$$

Exemplo 21
A área da superfície de revolução S gerada pela rotação em torno de OX do arco de parábola $x = y^2$, para $y \geq 0$ e $0 \leq x \leq 1$, é dada por

$$\begin{aligned} \text{área}(S) &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\,\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx \;=\; \pi \int_0^1 \sqrt{1+4x}\,dx \\ &= \frac{\pi}{6}\left[\sqrt{(1+4x)^3}\right]_0^1 \;=\; \frac{\pi\big(5\sqrt{5}-1\big)}{6}. \end{aligned}$$

■

8 Coordenadas polares

Habitualmente identificamos a posição de um ponto P do plano através das suas coordenadas cartesianas, (x, y), definidas em relação a um referencial ortonormado XOY constituído por uma origem O e por dois eixos ortonormados, OX e OY. Em muitas situações revela-se mais útil introduzir um novo referencial e identificar a posição de um ponto do plano através de um novo sistema de coordenadas. Vamos agora introduzir as chamadas *coordenadas polares.*

8.1 Definição

Consideremos em $\mathbb{R}^2$ um ponto O, a que chamamos *pólo*, e uma semirecta OX, a que chamamos *eixo polar.* A posição de um ponto P de $\mathbb{R}^2$ pode ser identificada pela distância de P ao pólo e pelo ângulo entre a direcção de P e o eixo polar. Definimos assim as *coordenadas polares* de $P \neq O$ pelo par (ρ, θ), com $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi[$, onde

$$\rho = dist(O, P), \quad \theta = \sphericalangle(OX, \overrightarrow{\mathrm{OP}}), \tag{105}$$

a que chamamos *raio vector* e *ângulo polar*, respectivamente.

O ângulo é medido no sentido positivo, ou anti-horário, a partir do eixo polar. Para cada ponto $P \neq O$, o par (ρ, θ) assim definido é único e escrevemos $P = (\rho, \theta)$. Por outro lado, o ponto O é identificado por qualquer par $(0, \theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi[$, pelo que as suas coordenadas polares não são únicas.

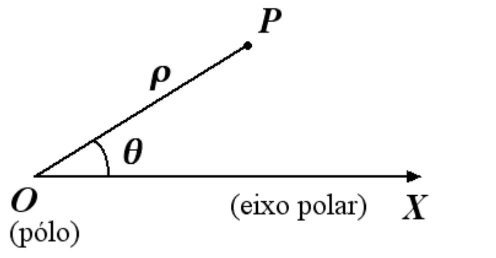


Figura 17: Sistema de coordenadas polares.

Em vez do habitual sistema de eixos graduados, usamos um referencial polar graduado (*cf.* a Figura 18) com uma escala para a distância ρ e outra para o ângulo θ. Assim, em relação aos pontos A, B, C e D representados na Figura 18, teremos

$$A = (3,0), \qquad B = \left(1, \tfrac{\pi}{3}\right),$$

$$C = \left(3, \tfrac{5\pi}{6}\right), \quad D = \left(2, -\tfrac{3\pi}{2}\right).$$

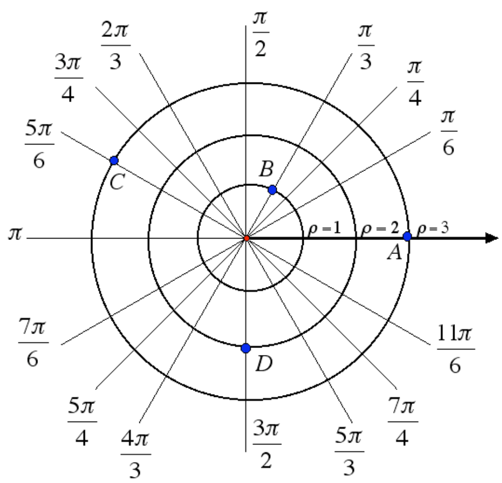


Figura 18: Referencial polar "graduado".

8.2 Relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares

Para relacionarmos os dois tipos de coordenadas, consideremos um referencial cartesiano ortonormado, XOY, e um referencial polar com pólo coincidente com O e eixo polar sobre OX^+.

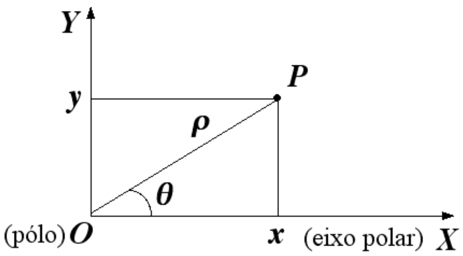


Figura 19: Coordenadas cartesianas e polares.

Dado um ponto P, qualquer, de coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (ρ, θ), da Figura 19, é fácil reconhecer que se tem

$$x = \rho \cos\theta \quad \text{e} \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta, \tag{106}$$

donde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{107a}$$

Por outro lado, se $x \neq 0$, tem-se também

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}, \tag{107b}$$

e, se $x = 0$, então P está sobre OX, podendo ser

$$(\theta = \pi/2 \ \text{ se } \ y > 0) \ \vee \ (\theta = 3\pi/2 \ \text{ se } \ y < 0) \ \vee \ (\theta \in [0, 2\pi[\ \text{ se } \ y = 0). \tag{107c}$$

Assim, usaremos as expressões (106) para passar de coordenadas polares a cartesianas, e as expressões (107a) e (107b-c), juntamente com os sinais de x e de y, para passar de coordenads cartesianas a polares.

Exemplo 22

1. Se as coordenadas cartesianas de certos pontos são dadas por

$$A = (1,1), \ B = (-4,-4), \ C = (0,2), \ E = \left(0, -\frac{1}{2}\right), \ F = \left(-\sqrt{3}, -3\right),$$

então as correspondentes coordenadas polares são

$$A = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right), \ B = \left(4\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right), \ C = \left(2, \frac{\pi}{2}\right), \ E = \left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \ F = \left(2\sqrt{3}, \frac{4\pi}{3}\right).$$

2. Reciprocamente, se as coordenadas polares de certos pontos são dadas por

$$A = \left(1, \frac{\pi}{4}\right), \ B = \left(3, \frac{11\pi}{6}\right), \ C = (0, \pi), \ E = \left(\sqrt{3}, 0\right), \ F = (1, 5).$$

então as correspondentes coordenadas cartesianas são

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \ B = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right), \ C = (0, 0), \ E = \left(\sqrt{3}, 0\right), \ F = (\cos 5, \operatorname{sen} 5).$$

■

8.3 Representação polar de curvas

Analisemos agora o problema da representação geométrica de curvas, dadas pelas suas equações polares. Comecemos com os casos mais simples.

A) $\rho = r$, com r uma constante positiva.

Trata-se da circunferência de centro O e raio r, tal como decorre da definição (105). *Cf.* a Figura 20.

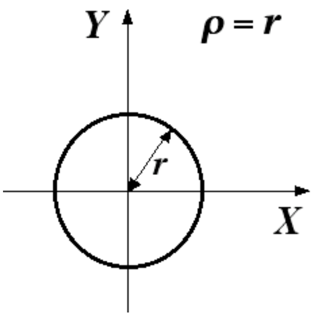


Figura 20: Curva de equação $\rho = r$.

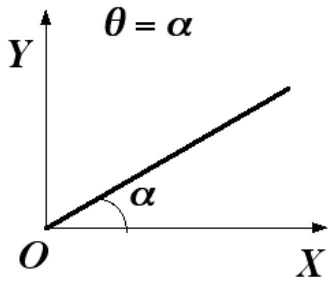


Figura 21: Curva de equação $\theta = \alpha$.

B) $\theta = \alpha$, com α uma constante em $[0, 2\pi[$.

Trata-se da semi-recta de origem em O que faz com OX um ângulo de α radianos, tal como decorre também da definição (105). *Cf.* a Figura 21.

C1) $\rho = \theta$, considerando $\theta \in \mathbb{R}_0^+$.

Neste caso, a curva passa pelo pólo e ρ cresce linearmente com θ. Obtém-se a curva representada na Figura 22, que é conhecida por *espiral de Arquimedes*.

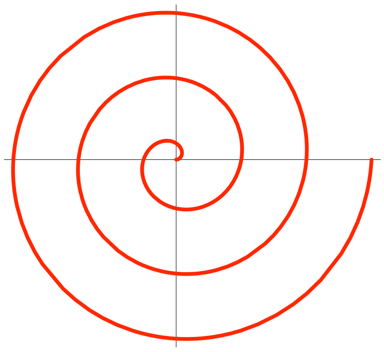


Figura 22: Espiral de Arquimedes, $\rho = \theta$.

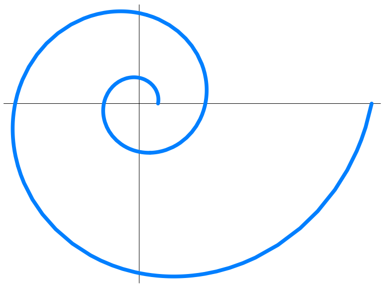


Figura 23: Espiral exponencial, $\rho = e^{\theta}$.

C2) $\rho = e^{\theta}$, considerando $\theta \in \mathbb{R}_0^+$.

A curva não passa pelo pólo, pois para $\theta = 0$ vem $\rho = 1$. Além disso, ρ cresce exponencialmente com θ e obtém-se a curva representada na Figura 23, que começa de dentro para fora. Esta curva é conhecida por *espiral exponencial.*

C3) $\rho = e^{-\theta}$, considerando $\theta \in \mathbb{R}_0^+$.

A curva não passa pelo pólo, pois para $\theta = 0$ vem $\rho = 1$. Desta vez, ρ decresce exponencialmente com θ e obtém-se a curva representada na Figura 24, que começa de fora para dentro. Esta curva é conhecida por *espiral logarítmica.*

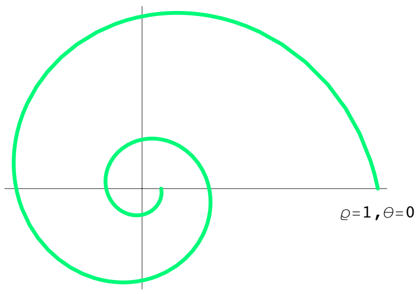


Figura 24: Espiral logarítmica, $\rho = e^{-\theta}$.

D1) $\rho = 1 - \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Como $\cos\theta$ varia entre -1 e 1, ρ vai variar entre $\rho_{\text{min}} = 0$ (para $\theta = 0$) e $\rho_{\text{max}} = 2$ (para $\theta = \pi$). Obtém-se a curva da Figura 25, conhecida por *cardeóide.*

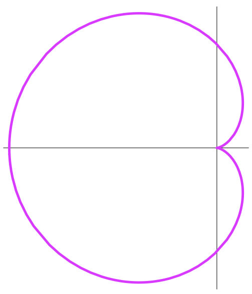


Figura 25: Cardeóide $\rho = 1 - \cos\theta$.

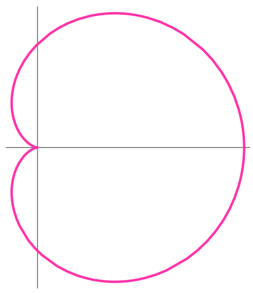


Figura 26: Cardeóide $\rho = 1 + \cos\theta$.

D2) $\rho = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Com uma análise breve, semelhante à efectuada em F1), btém-se o *cardeóide* da Figura 26.

D3) $\rho = 1 - \operatorname{sen}\theta,\ \theta \in [0, 2\pi[$.

Também agora, com uma análise semelhante à efectuada em F1), btém-se o *cardeóide* da Figura 27.

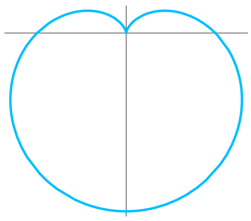


Figura 27: Cardeóide $\rho = 1 - \operatorname{sen}\theta$.

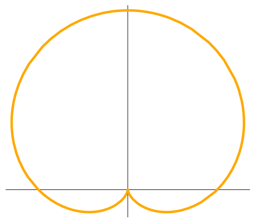


Figura 28: Cardeóide $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

D4) $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta,\ \theta \in [0, 2\pi[$.

Mais uma vez, de maneira semelhante, btém-se o *cardeóide* da Figura 28.

E1) $\rho^2 = \cos 2\theta,\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

Observe-se que o intervalo de variação de θ é aquele onde se tem $\cos 2\theta \geq 0$. Neste caso, ρ é máximo quando $\theta = 0$ e quando $\theta = \pi$, caso em que $\rho = 1$. Analisando a monotonia de ρ como função de θ, obtém-se a curva da Figura 29, a que se chama *lemniscata*.

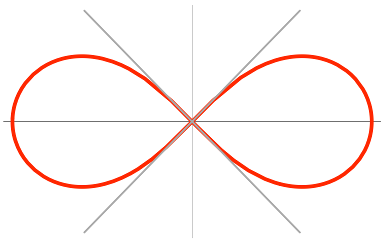


Figura 29: Lemniscata $\rho^2 = \cos 2\theta$.

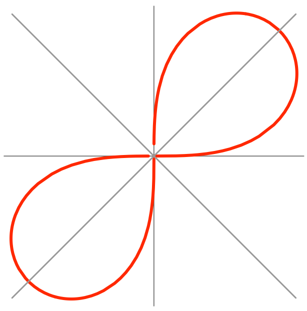


Figura 30: Lemniscata $\rho^2 = \operatorname{sen} 2\theta$.

E2) $\rho^2 = \operatorname{sen} 2\theta,\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

O intervalo de variação de θ é aquele onde se tem $\operatorname{sen} 2\theta \geq 0$. A curva é a lemniscata representada na Figura 30, tendo-se $\rho = 1$ para $\theta = \frac{\pi}{4}$ e para $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

F1) $\rho = |\cos 2\theta|,\ \theta \in \big[0, 2\pi\big[$.

Agora, ρ será máximo e igual a 1 quando $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$. A curva está representada na Figura 31 e chama-se *rosa de quatro pétalas*.

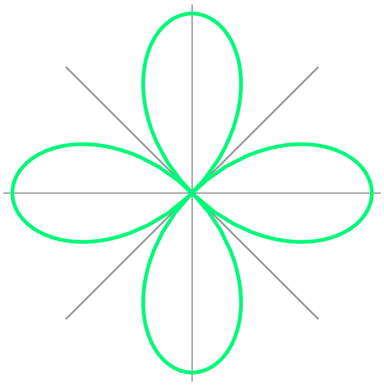


Figura 31: Rosa de 4 pétalas, $\rho = |\cos 2\theta|$.

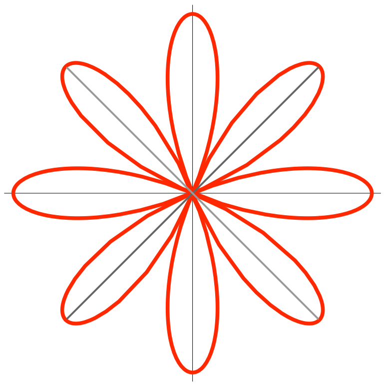


Figura 32: Rosa de 8 pétalas, $\rho = |\cos 4\theta|$.

F2) $\rho = |\cos 4\theta|$, $\theta \in \left[0, 2\pi\right[$.

Desta vez, ρ será máximo e igual a 1 quando $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{5\pi}{4}$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$ e $\theta = \frac{7\pi}{4}$. A curva está representada na Figura 31 e chama-se *rosa de quatro pétalas*.

G1) $\rho = |\operatorname{sen} 3\theta|$, $\theta \in \left[0, 2\pi\right[$.

A curva está representada na Figura 33 e chama-se *rosa de três pétalas*.

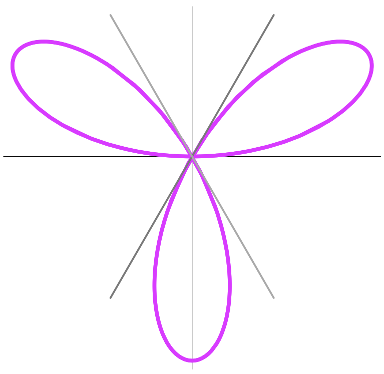


Figura 33: Rosa de 4 pétalas, $\rho = |\operatorname{sen} 3\theta|$.

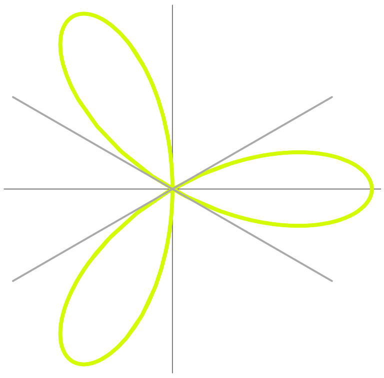


Figura 34: Rosa de 8 pétalas, $\rho = |\cos 3\theta|$.

G2) $\rho = |\cos 3\theta|$, $\theta \in \left[0, 2\pi\right[$.

A curva está representada na Figura 34 e também é uma *rosa de três pétalas*.

H) Se agora a curva for dada em coordenadas cartesianas, podemos obter a correspondente equação polar, atendendo às expressões (105).

H1) Circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 1$, de centro $C = (1, 0)$ e raio 1.

Tem-se $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$, donde $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Em coordenadas polares, fica $\rho^2 - 2\rho\cos\theta = 0$, donde se conclui que $\rho = 2\cos\theta$ é a equação polar da circunferência dada, já que $\rho = 0$ define apenas o pólo. Como $\rho \geq 0$, tem-se $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$. A circunferência está representada na Figura 35.

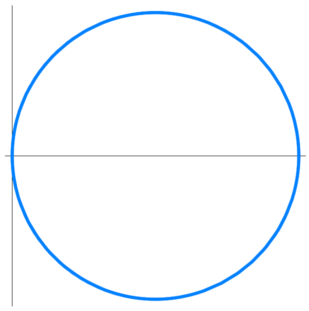


Figura 35: Circunferência passando por O com diâmetro sobre OX, $\rho = 2\cos\theta$.

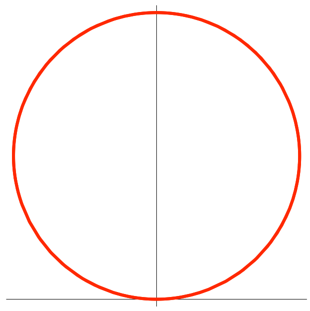


Figura 36: Circunferência passando por O com diâmetro sobre OY, $\rho = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$.

H2) Circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$, de centro $C = (0,1)$ e raio 1.
A correspondente equação polar é $\rho = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$, com $\theta \in [0,\pi]$. A circunferência está representada na Figura 36.

8.4 Áreas planas em coordenadas polares

Em muitas situações, torna-se mais simples trabalhar em $\mathbb{R}^2$ com coordenadas polares. Esta situação ocorre frequentemente no cálculo de áreas de regiões planas, quando a primitiva da função integranda é complicada. Vamos agora estabelecer uma fórmula para o cálculo de uma tal área, através de um integral em coordenadas polares.

Suponhamos que pretendemos determinar a área da região plana $\mathcal{A}$, que é limitada pela curva de equação $\rho = f(\theta)$, com f contínua, e pelas semi-rectas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ (*cf.* a Figura 37). Então, adoptando uma estratégia semelhante à que utilizámos para determinar a área em coordenadas cartesianas:

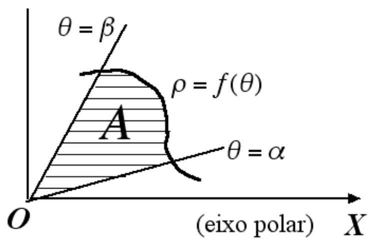


Figura 37: Região plana $\mathcal{A}$.

(i) Consideramos uma partição $\mathcal{P}$ de $[\alpha,\beta]$ em n subintervalos $[\theta_{i-1},\theta_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$.

(ii) A região $\mathcal{A}$ fica dividida em n fatias, cada uma de amplitude $\theta_i - \theta_{i-1}$ (Figura 38).

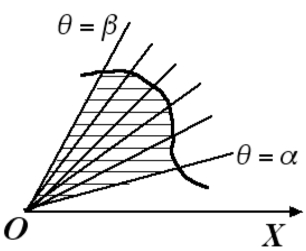


Figura 38: Região plana $\mathcal{A}$.

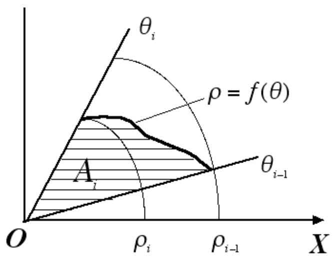


Figura 39: Fatia elementar $\mathcal{A}_i$.

(iii) Aproximamos a área de cada fatia elementar pela área de um sector circular, começando por observar que (Figura 39)

$$\frac{1}{2}\,\rho_i^2\,(\theta_i-\theta_{i-1}) \le \text{area}(\mathcal{A}_i) \le \frac{1}{2}\,\rho_{i-1}^2\,(\theta_i-\theta_{i-1}).$$

Mas $\rho_i = f(\theta_i)$ e $\rho_{i-1} = f(\theta_{i-1})$, donde

$$\frac{1}{2}\,f^2(\theta_i)\,(\theta_i-\theta_{i-1}) \le \text{area}(\mathcal{A}_i) \le \frac{1}{2}\,\,f^2(\theta_{i-1})\,(\theta_i-\theta_{i-1}).$$

Como f é contínua, resulta que

$$\text{área}(\mathcal{A}_i) = \frac{1}{2}\,\,f^2(c_i)\,(\theta_i-\theta_{i-1}).$$

para algum $c_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$.

(iv) Fazendo a soma para $i = 1, \ldots, n$ e tomando o limite quando a amplitude $||\mathcal{P}||$ tende para zero, obtemos

$$\text{área}\,\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta.$$

Exemplo 23

A área do círculo de raio r pode ser obtida com um integral em coordenadas polares, bastando atender a que, se a circunferência estiver centrada na origem, a sua equação polar é $\rho = r$, pelo que

$$\text{área}\,\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\,r^2\,\Big[\theta\Big]_0^{2\pi} = \pi\,r^2.$$

Exemplo 24

A área da região plana $\mathcal{A} = \{(\rho,\theta): \ \ 0 \le \rho \le \theta \ \ \wedge \ \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$, limitada pela espiral de Arquimedes (Figura 22), é dada por

$$\text{área}\,\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \theta^2\,d\theta = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\Big[\theta^3\Big]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\,\pi^3.$$

Exemplo 25

A área da região plana $\mathcal{A} = \{(\rho,\theta): \ \ 0 \le \rho \le 1+\cos\theta \ \ \wedge \ \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$, limitada pelo cardeóide $\rho = 1+\cos\theta$ (Figura 25), é dada por

$$\begin{aligned}
\text{área}\,\mathcal{A} &= \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2\,d\theta \ = \ \int_0^{\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta \\
&= \Big[\,\theta\,\Big]_0^{\pi} + 2\Big[\,\text{sen}\,\theta\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \pi + \frac{1}{2}\Big(\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\Big[\,\text{sen}\,\theta\Big]_0^{\pi}\Big) \ = \ \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

■

9 Integral Impróprio

Na secção 2 deste capítulo apresentámos a definição de integral segundo Riemann, para uma função limitada que está definida num intervalo limitado. A extensão desta definição aos casos em que o intervalo de integração é não limitado, ou em que a função integranda se torna não limitada nas vizinhanças de um ponto do intervalo de integração, conduz à noção de *integral impróprio*. Assim, diremos que os integrais

$$\int_0^{+\infty} x^2\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

são todos impróprios. Para estender a definição de Riemann a estes casos, iremos recorrer à noção de limite.

9.1 Intervalo de integração ilimitado

Neste caso, o integral impróprio diz-se de *primeira espécie* ou de *tipo I*. Comecemos com o caso em que o intervalo de integração é do tipo $[a, +\infty[$ e, a título de motivação, consideremos os integrais

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{e} \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx. \tag{108}$$

Do ponto de vista geométrico, os integrais I e J estão relacionados com a medida da área das regiões não limitadas situadas à direita da recta $x = 1$, acima do eixo OX, sob o gráfico de cada uma das curvas representadas na Figura 40. Porém, tratando-se de regiões com "largura" infinita e "altura" que se torna infinitamente pequena, poderá ser possível atribuir uma medida à área em causa.

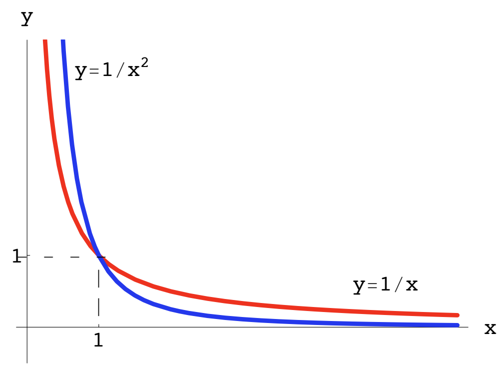


Figura 40: Regiões associadas aos integrais I e J.

Para decidir se esta possibilidade se verifica, estudamos os limites

$$\mathcal{L}(I) = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}(J) = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx, \tag{109}$$

para os quais vem, respectivamente,

$$\mathcal{L}(I) = \lim_{b\to+\infty} \Big[\ln x\Big]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \big(\ln b - \ln 1\big) = +\infty,$$

$$\mathcal{L}(J) = \lim_{b\to+\infty} \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \Big(-\frac{1}{b} + 1\Big) = 1,$$

donde se depreende que apenas fará sentido atribuir significado à área da região relacionada com o integral J, podendo dizer-se que a medida dessa área é igual a 1.

Passemos agora a expor a teoria geral.

Caso A. Comecemos por considerar uma função $f\colon [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, que é integrável em todo o intervalo limitado $[a,x]$ tal que $[a,x]\subset[a,+\infty[$.

Dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se existir o correspondente limite,

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

caso em que escrevemos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \;=\; \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

No caso contrário, em que aquele limite não exite (em $\mathbb{R}$), dizemos que o integral impróprio é *divergente* ou que a função f *não é integrável em sentido impróprio.*

Propriedade 7 [Linearidade]
Sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Se f e g são integráveis em sentido impróprio em $[a,+\infty[$ então $\alpha f+\beta g$ é integrável em sentido impróprio em $[a,+\infty[$ e

$$\int_a^{+\infty}[\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dx=\alpha\int_a^{+\infty} f(x)\,dx+\beta\int_a^{+\infty} g(x)\,dx. \tag{110}$$

Propriedade 8 [Aditividade]
Sejam $a,b\in\mathbb{R}$. Se f é integrável em sentido impróprio em $[a,+\infty[$ então f é integrável em sentido impróprio em $[b,+\infty[$ e

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\int_a^{b} f(x)\,dx+\int_b^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{111}$$

Exemplo 26

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^x\,dx$ é divergente.

   De facto, estudando o correspondente limite (*cf.* a Figura 41), vem

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b e^x\,dx=\lim_{b\to+\infty}\,[e^x]_0^b=\lim_{b\to+\infty}(e^b-1)=+\infty.$$

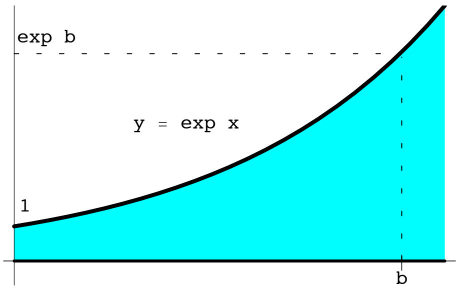


Figura 41: Exemplo 26.1

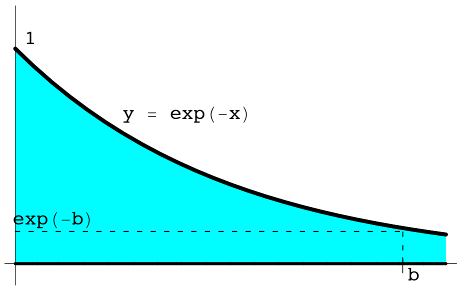


Figura 42: Exemplo 26.1

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ é convergente e igual a 1.

Para o correspondente limite (*cf.* a Figura 42), vem

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}+1) = 1.$$

■

Exemplo 27

Estudemos agora o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^k}\,dx$, com k uma constante real.

- Para $k=1$, vem

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}[\ln x]_1^b = \lim_{b\to+\infty}[\ln b - \ln 1]_1^b = +\infty.$$

- Já para $k\neq 1$, vem

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-k}-1}{1-k}\right),$$

  e como

$$\lim_{b\to+\infty} b^{1-k} = 0,\quad \text{se}\quad 1-k<0,\qquad\qquad \lim_{b\to+\infty} b^{1-k} = +\infty,\quad \text{se}\quad 1-k>0,$$

  resulta

$$\begin{aligned}
&\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^k}\,dx = \frac{1}{1-k},\quad \text{se}\quad k>1,\\
&\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^k}\,dx = +\infty,\quad \text{se}\quad k<1.
\end{aligned}\tag{112}$$

Consequentemente, o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^k}\,dx$ diverge se $k\leq 1$ e converge se $k>1$, caso em que

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^k}\,dx = \frac{1}{1-k}\,.$$

■

Caso B. O estudo do integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$, quando $f:]-\infty,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ é integrável em todo o intervalo limitado $[x,b]$ com $[x,b]\subset]-\infty,b]$, é semelhante, baseando-se no

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Para este caso, valem resultados semelhantes aos das Propriedades 7 e 8, com as adaptações necessárias.

Exemplo 28

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \cos x \, dx$ é divergente.

De facto, estudando o limite correspondente, vemos que

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \cos x \, dx = \lim_{a\to-\infty} \Big[\operatorname{sen} x\Big]_a^0 = -\lim_{a\to-\infty} \operatorname{sen} a,$$

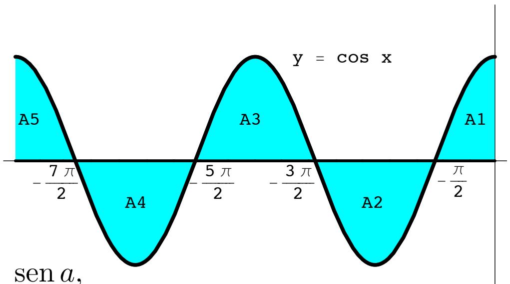


Figura 43: Exemplo 28

que não existe porque, sendo a função seno periódica, podemos exibir duas restrições do seno com limites diferentes. Por exemplo, pondo

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}^-\right\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \; x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}^-\right\},$$

tem-se $x \in A \Longrightarrow \operatorname{sen} x = 1$ e $x \in B \Longrightarrow \operatorname{sen} x = -1$, pelo que

$$\lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\in A}} \operatorname{sen} x = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\in B}} \operatorname{sen} x = -1.$$

Não seria difícil antecipar esta conclusão a partir da Figura 43. Por um lado, se cada A_i representar a área de uma parte da região (*cf.* a Figura 43), então

$$A_1 = A_5 = 1 \qquad \text{e} \qquad A_2 = A_3 = A_4 = 2.$$

Por outro lado, como a área de cada região A_i se pode exprimir como um integral de $\cos x$ ou de $-\cos x$, consoante estiver em causa um intervalo onde o cosseno seja positivo ou negativo, temos por exemplo

$$\int_{-4\pi}^{0} \cos x \, dx = A_5 - A_4 + A_3 - A_2 + A_1 = 0,$$
$$\int_{-7\pi/2}^{0} \cos x \, dx = -A_4 + A_3 - A_2 + A_1 = -1,$$
$$\int_{-5\pi/2}^{0} \cos x \, dx = A_3 - A_2 + A_1 = 1,$$

o que, de imediato, nos leva a intuir que não será possível atribuir um valor ao integral apresentado. ■

Caso C. Para analisar o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$, quando $f\colon]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável em todo o intervalo limitado $[x, y]$, escolhe-se arbitrariamente um ponto $c \in \mathbb{R}$ (em geral, considera-se $c = 0$) e estuda-se separadamente cada um dos integrais

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_{c}^{+\infty} f(x)\, dx, \tag{113}$$

como descrito anteriormente. Pela aditividade do integral impróprio (Propriedade 8 e correspondente adaptação ao caso B), a convergência destes integrais não depende da escolha do ponto c. Assim, dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se e só se os integrais indicados em (113) são convergentes. Escrevemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{114}$$

Por outro lado, se algum dos integrais de (113) é divergente, então dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ também é *divergente*.

Para este caso, valem também resultados semelhantes aos das Propriedades 7 e 8, com as adaptações necessárias.

Exemplo 29

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx$ é divergente.

   Basta atender à definição apresentada e ao que vimos no Exemplo 26.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente e igual a π.

   De facto, por um lado,

   $$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

   e, por outro lado, t

   $$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

   Atendendo ao gráfico da função integranda, e à sua simetria em relação ao eixo OY (Figura 44), bastaria ter estudado o integral impróprio estendido a um dos intervalos $[0,+\infty[$ ou $]-\infty,0]$.

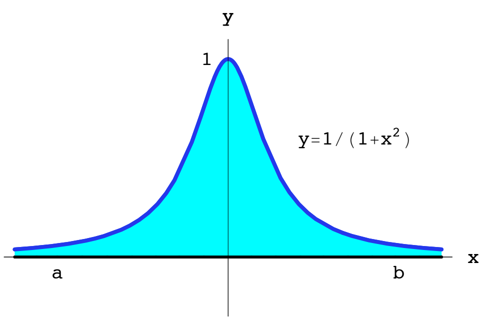


Figura 44: Exemplo 29.2.

9.2 Função integranda ilimitada

No caso em que a função integranda se torna ilimitada numa vizinhança de algum ponto do intervalo de integração – um extremo ou um ponto interior – o integral impróprio diz-se de *segunda espécie* ou de *tipo II*.

Caso A. Consideremos uma função $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que é ilimitada, mantendo-se integrável em qualquer intervalo $[c,b]$ com $[c,b] \subset]a,b]$

Dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se existir o limite

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx,$$

caso em que escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Quando este limite não exite (em $\mathbb{R}$), dizemos que o integral impróprio é *divergente* ou que a função f *não é integrável em sentido impróprio.*

Também para este tipo de integral impróprio valem resultados semelhantes aos das Propriedades 7 e 8, com as adaptações necessárias.

Exemplo 30

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ é divergente (Figura 45).

   A função integranda torna-se ilimitada à direita da origem. Calculamos

$$\mathcal{L} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \Big[-\frac{1}{x}\Big]_c^1 = \lim_{c\to 0^+} \Big(-1+\frac{1}{c}\Big) = +\infty,$$

   donde se conclui que o integral impróprio apresentado diverge para $+\infty$.

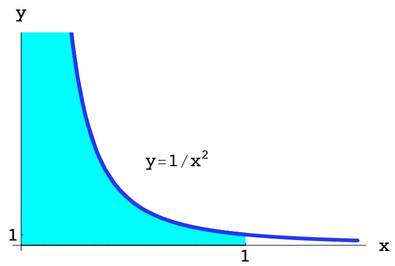


Figura 45: Exemplo 30.1.

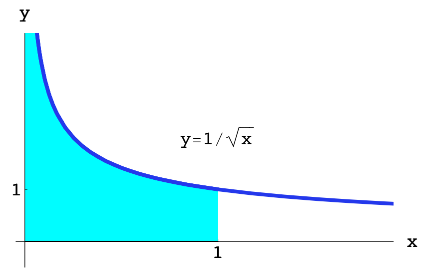


Figura 46: Exemplo 30.2.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ é convergente (Figura 46).

A função integranda torna-se ilimitada à direita da origem. Calculamos

$$\mathcal{L} = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \Big[2\sqrt{x} \Big]_c^1 = \lim_{c \to 0^+} \Big(2 - 2\sqrt{c} \Big) = 2,$$

pelo que o integral converge, tendo-se $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2.$

3. Estudemos, mais em geral, o integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^k}\, dx$, com k uma constante real.

   - Para $k = 1$, vem

   $$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \Big[\ln x \Big]_c^1 = \lim_{c \to 0^+} (-\ln c) = +\infty.$$

   - Para $k \neq 1$, vem

   $$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^k}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \left[\frac{x^{1-k}}{1-k} \right]_c^1 = \lim_{c \to 0^+} \left(\frac{1 - c^{1-k}}{1-k} \right)$$

   e como

   $$\lim_{c \to 0^+} c^{1-k} = 0, \quad \text{se} \quad 1 - k > 0, \qquad\qquad \lim_{c \to 0^+} c^{1-k} = +\infty, \quad \text{se} \quad 1 - k < 0,$$

   resulta

   $$\begin{aligned} \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^k}\, dx &= \frac{1}{1-k}, \quad \text{se} \quad k < 1, \\ \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^k}\, dx &= +\infty, \quad \text{se} \quad k > 1. \end{aligned} \tag{115}$$

Consequentemente, o integral impróprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^k}\, dx$ diverge se $k \geq 1$ e converge se $k < 1$, caso em que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k}\, dx = \frac{1}{1-k}\ .$$

Caso B. O estudo do integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$, quando $f\colon [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada, mantendo-se integrável em todo o intervalo $[a, c]$, com $[a, c] \subset [a, b[$, é perfeitamente análogo, baseando-se no estudo do

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx.$$

Valem novamente resultados semelhantes aos das Propriedades 7 e 8, com as adaptações necessárias.

Caso C. O caso em que $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada, mantendo-se integrável em todo o intervalo $[x, y]$, com $[x, y] \subset]a, b[$, reduz-se aos casos anteriores, escolhendo arbitrariamente um ponto $c \in]a, b[$ e estudando separadamente os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x)\, dx \quad \text{e} \quad \int_a^c f(x)\, dx, \tag{116}$$

como descrito anteriormente (casos A e B). Dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\, dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se e só se os integrais indicados em (116) são convergentes. Escrevemos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \tag{117}$$

Por outro lado, se algum dos integrais de (116) é divergente, então dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\, dx$ também é *divergente*.

Caso D. Consideremos agora $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que $a < c < b$, e seja f: $[a, c[\cup]c, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função ilimitada em pelo menos um dos intervalos $[a, c[$ ou $]c, b]$, que se mantém integrável em qualquer intervalo $[a, x]$ com $[a, x] \subset [a, c[$ e em qualquer intervalo $[y, b]$ com $[y, b] \subset]c, b]$. Neste caso, estudamos separadamente os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x)\, dx \quad \text{e} \quad \int_a^c f(x)\, dx,$$

como descrito anteriormente. Dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\, dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se e só se estes dois integrais são convergentes, caso em que escrevemos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \tag{118}$$

Por outro lado, se algum daqueles integrais é divergente, então dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\, dx$ também é *divergente*.

Exemplo 31

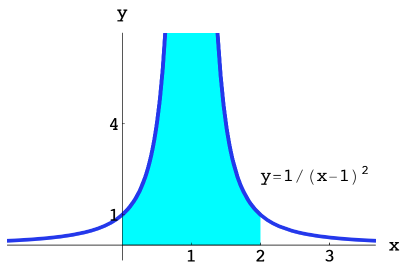


Figura 47: Exemplo 31.1.

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$ é divergente.

   A função integranda torna-se ilimitada em torno do ponto $x = 1$. Estudamos separadamente os integrais

   $$I = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx \quad \text{e} \quad J = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx\,.$$

   Para o primeiro, calculamos

   $$\mathcal{L}(I) = \lim_{c \to 1^-} \int_0^c \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \lim_{c \to 1^-} \left(-\left[\frac{1}{x-1} \right]_0^c \right) = \lim_{c \to 1^-} \left(-\frac{1}{c-1} - 1 \right) = +\infty,$$

donde se conclui que o integral proposto é divergente (independentemente da natureza do integral J).

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx$ é convergente.

A função integranda torna-se ilimitada em torno do ponto $x = 0$. Então estudamos separadamente os integrais

$$I = \int_{-1}^{0} \ln|x|\,dx = \int_{-1}^{0} \ln(-x)\,dx \qquad \text{e} \qquad J = \int_{0}^{1} \ln|x|\,dx = \int_{0}^{1} \ln x\,dx\,,$$

que possuem a mesma natureza, tendo em conta a simetria da figura a respeito do eixo OY. Estudamos então o integral J, começando por primitivar por partes,

$$\mathrm{P}(\ln x) = x\,\ln x - x + \mathcal{C},$$

e calculando depois o limite

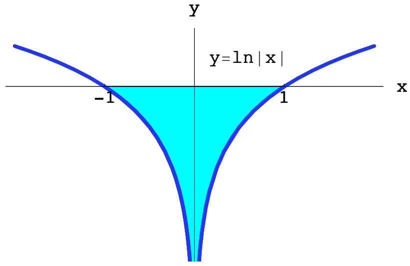


Figura 48: Exemplo 31.2.

$$\mathcal{L}(J) = \lim_{c\to 0^+} \int_{c}^{1} \ln x\,dx = \lim_{c\to 0^+} \Big[x\,\ln x - x\Big]_{c}^{1} = \lim_{c\to 0^+} \Big(-1 - \underbrace{c\ln c}_{(*)} + c\Big) = -1.$$

Concluimos que o integral J converge, tendo-se $J = -1$. O mesmo se passa com o integral I, tendo-se também $I = -1$. Consequentemente, o integral proposto converge e

$$\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx = -2.$$

(*) Este limite é igual a 0 porque a *velocidade* com que c tende para 0 é exponencialmente superior à *velocidade* com que $\ln c$ tende para $-\infty$.