Complementos de Análise Matemática B/C

Teste 1 – Algumas notas sobre a resolução

Duração: 40 minutos

---

1. Determine uma solução do PVI $\left(5x\ln x - y/x^2\right)dx + \left(1/x + 3\,\mathrm{tg}\,y\right)dy = 0,\quad y(1)=0.$ (1.75)

A equação é exacta. Logo admite uma família de soluções que se pode escrever na forma $F(x,y)=c$, onde

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= 5x\ln x - y/x^2\\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= 1/x + 3\,\mathrm{tg}\,y\end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned}F(x,y) &= \frac{5}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + y/x + \phi(y)\\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= 1/x + 3\,\mathrm{tg}\,y\end{aligned} \longrightarrow$$

$$\begin{aligned}F(x,y) &= \frac{5}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + y/x + \phi(y)\\ 1/x + \frac{d\phi(y)}{dy} &= 1/x + 3\,\mathrm{tg}\,y\end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned}F(x,y) &= \frac{5}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + y/x + \phi(y)\\ \phi(y) &= -3\ln(\cos y) + k\end{aligned} \longrightarrow$$

$$F(x,y) = \frac{5}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + y/x - 3\ln(\cos y) + k$$

A família de soluções escreve-se, tomando $k=0$, $F(x,y)=c \Leftrightarrow \frac{5}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + y/x - 3\ln(\cos y) = c$

Como $y(1)=0$, resulta $c=-\frac{5}{4}$, sendo a solução do PVI: $\frac{5}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + y/x - 3\ln(\cos y) = -\frac{5}{4}$

Confirmação:

$$\left.\frac{5}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + y/x - 3\ln(\cos y)\right|_{x=1,\,y=0} = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$d\left[\frac{5}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + y/x - 3\ln(\cos y)\right] = d\left(-\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow \left(5x\ln x - y/x^2\right)dx + \left(1/x + 3\,\mathrm{tg}\,y\right)dy = 0$$

Complementos de Análise Matemática B/C

Teste 1 – Algumas notas sobre a resolução

Duração: 40 minutos

---

2. Determine uma família de soluções de $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-xy-x^2}{xy}$. (1.75)

A EDO é homogénea:

(i) $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\ f(x,y)=\dfrac{y^2-xy-x^2}{xy}=\dfrac{(y/x)^2-y/x-1}{y/x}$. A função f é homogénea de grau zero.

(ii) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-xy-x^2}{xy}\Leftrightarrow M(x,y)\ dx+N(x,y)\ dy=0,$ onde

$M(x,y)=y^2-xy-x^2$ e $N(x,y)=-xy,$ são funções homogéneas de grau 2

Fazemos então $y=vx$ resultando:

$\dfrac{d(vx)}{dx}=\dfrac{v^2-v-1}{v}\Leftrightarrow v+x\dfrac{dv}{dx}=v-\dfrac{v+1}{v}\Leftrightarrow xv\ dv+(v+1)\,dx=0.$ (*) $\longrightarrow$ EDO de variáveis separáveis

Assumindo que $x\neq 0,\ v(x)\neq -1,$ resulta:

$\dfrac{1}{x}\ dx+\dfrac{v}{v+1}\ dv=0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{x}\ dx+\left(-1+\dfrac{1}{v+1}\right)\ dv=0\Leftrightarrow -\ln|x|-v+\ln|v+1|=c_1.$ Exponenciando,

$\dfrac{|v+1|}{|x|}e^{-v}=e^{c_1}\Leftrightarrow \dfrac{v+1}{x}e^{-v}=c_2,\ c_2\neq 0.$

Mas $v(x)=-1$ também é solução da EDO (*), pelo que uma família de soluções é

$\dfrac{v+1}{x}e^{-v}=c\Leftrightarrow \dfrac{y/x+1}{x}e^{-y/x}=c\Leftrightarrow \dfrac{y}{x}+1=cxe^{y/x},$ onde $c\in\mathbb{R}.$

---

3. Mostre que a mudança de variável $w=2x+3y-1$ converte $\dfrac{dy}{dx}=2e^{2x+3y-1}$ numa equação de variáveis separáveis nas variáveis w e x. (0.50)

$w=2x+3y-1\Rightarrow \dfrac{dw}{dx}=2+3\dfrac{dy}{dx}\Leftrightarrow \dfrac{dw}{dx}=2+6e^{w},$ obtendo-se assim uma EDO de variáveis separáveis.