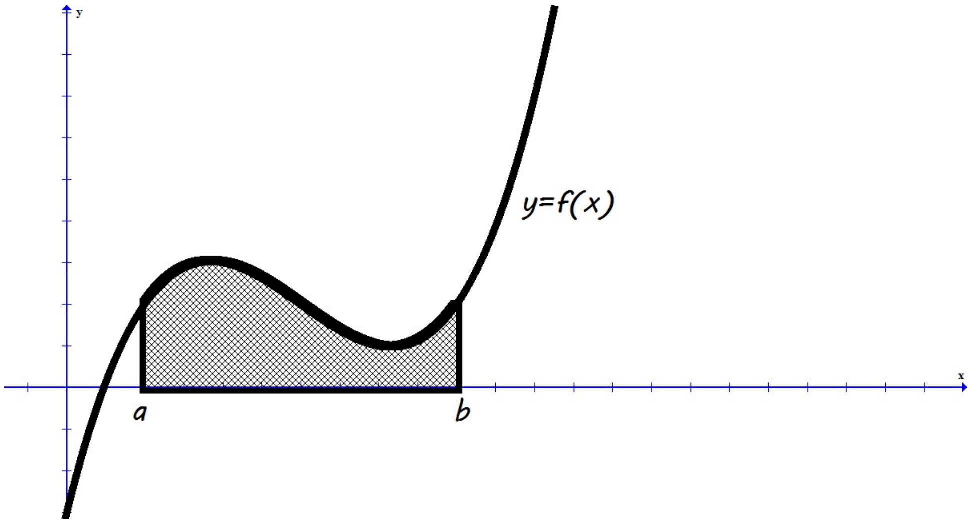
Integrais múltiplos

Será feita uma definição intuitiva, não formal, de integrais duplos. Facilmente, se generaliza para a definição de integrais triplos e de ordem superior. E vamos restringirmo-nos ao estudo de integrais de funções contínuas em determinados tipos de domínios.

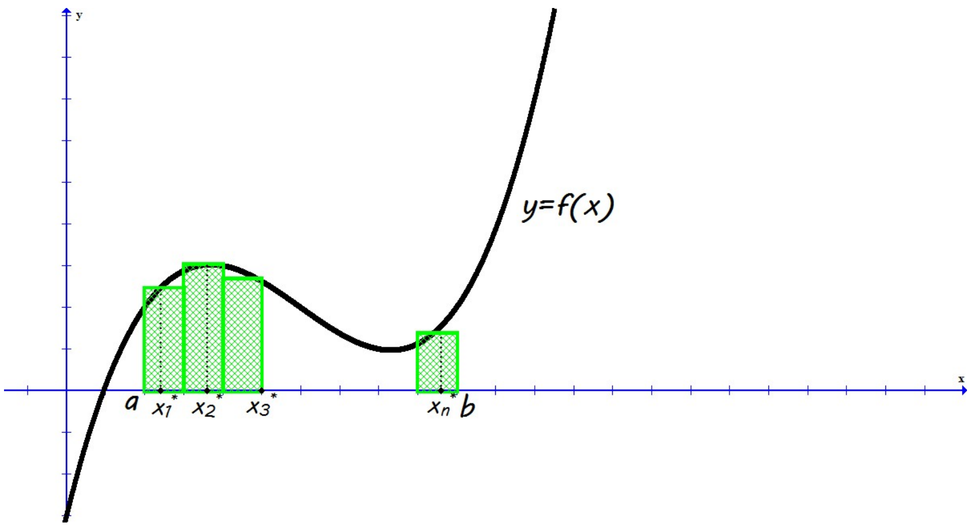
É útil relembrar o modo como foi definido o integral de uma função f real de variável real definida num intervalo limitado $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Para definir o integral indicado, a motivação foi determinar a área A da região plana limitada pelo eixo OX, pela curva $y = f(x)$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$.



Para fazer isso, começámos por dividir o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos de largura Δx e escolhemos um ponto x_i^* em cada sub-intervalo, como mostra a figura abaixo.



Para cada sub-intervalo, construímos um retângulo de altura $f(x_i^*)$ e calculámos a soma das áreas de todos os retângulos:

$$f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \ldots + f(x_n^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

A área da região que pretendemos calcular é aproximadamente a soma anterior:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Para obter um valor exato de A, consideramos o limite da soma anterior quando a largura de cada sub-intervalo Δx tende para zero:

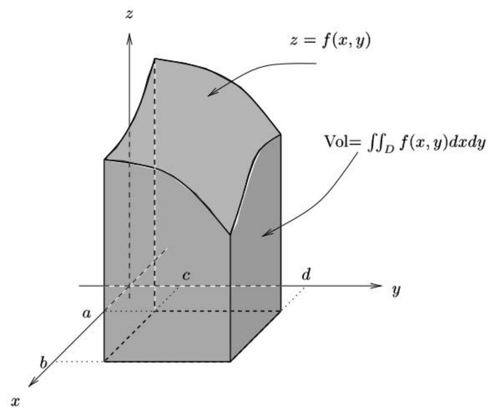
$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Definição de Integral duplo

Para definir um integral duplo de uma função contínua f real de duas variáveis definida numa região plana R,

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy,$$

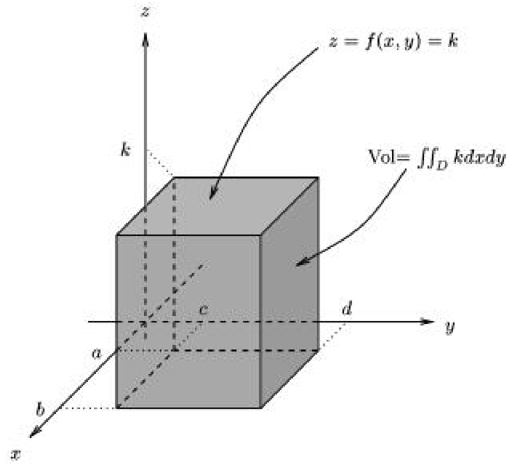
a motivação é calcular o volume de um sólido limitado inferiormente pelo plano XOY, superiormente pela superfície $z = f(x,y)$ (considerando $f(x,y) > 0$) e lateralmente pelo cilindro gerado por uma reta vertical que "anda" sobre a fronteira da região R. Para cada ponto (x,y) da região R, a altura z da superfície pode não ser sempre a mesma, é dada pelo valor de $f(x,y)$.



Inicialmente, consideremos a região R um retângulo $[a,b] \times [c,d]$, isto é, $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$.
Temos então um sólido cuja base é a região R do plano XOY.

Consideremos os exemplos:

1. O volume de um sólido limitado superiormente pelo plano $f(x,y) = k$, definida no retângulo $[a,b] \times [c,d]$

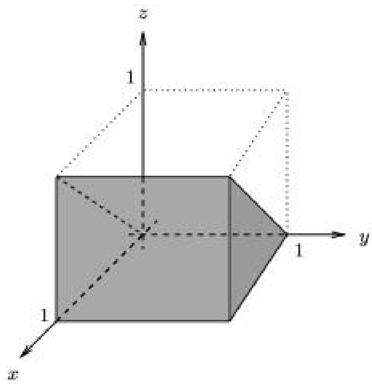


é dado por $= \int\int_R f(x,y)\, dxdy = \int\int_R k\, dxdy$ e tem o valor

$$V = k(b-a)(d-c).$$

Nota: Se $k = 1$, o valor do volume coincide com o valor da área do retângulo R.

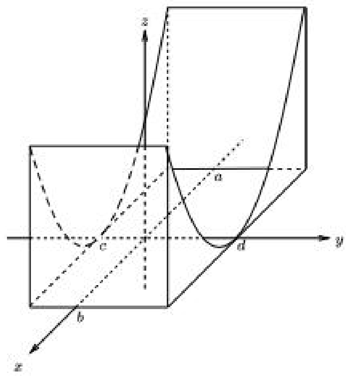
2. O volume do sólido limitado superiormente pelo gráfico da função $f(x,y) = x$ na região $R = [0,1] \times [0,1]$



é dado por $V = \int\int_R f(x,y)\, dxdy = \int\int_R x\, dxdy = \int_0^1\int_0^1 x\, dxdy$ e é metade do valor do volume do cubo de aresta 1.

$$V = 1/2$$

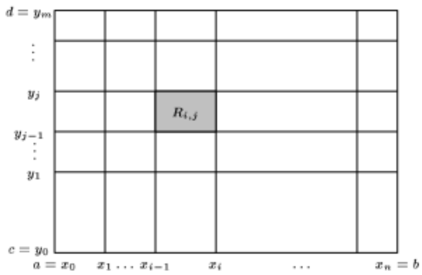
3. O volume do sólido limitado superiormente pelo gráfico da função $f(x,y) = x^2$ definida na região $R = [a,b] \times [c,d]$



é dado por $V = \int\int_R f(x,y)\,dxdy = \int\int_R x^2\,dxdy = (d-c)\int_a^b x^2\,dx$.

Consideremos agora uma função limitada f definida no retângulo R.

- Construímos uma partição $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ do intervalo $[a,b]$ da forma $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ e analogamente uma partição $\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ do intervalo $[c,d]$.
- Dividimos a região R em retângulos $R_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$. Cada retângulo com lados $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ e com área $\Delta A_{i,j} = \Delta x_i . \Delta y_j$.



Cada retângulo tem um diâmetro

$$\text{diam } R_{i,j} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}.$$

Associamos à partição $\mathcal{P}$ do retângulo R o maior dos diâmetros dos sub-retângulos:

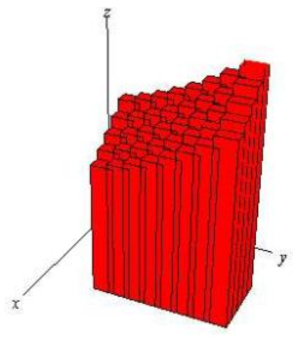
$$Diam(\mathcal{P}) = \max_{i,j} \text{ diam } R_{i,j}.$$

- Escolhe-se em cada retângulo $R_{i,j}$ um ponto (x_i^*, y_j^*).
- Constrói-se um paralelípipedo de base $\Delta A_{i,j} = \Delta x_i . \Delta y_j$ e de altura $z_{i,j} = f(x_i^*, y_j^*)$. Cada paralelípipedo tem um volume

$$V_{i,j} = f(x_i^*, y_j^*).\Delta A_{i,j}$$

- A soma dos volumes de todos os paralelípipedos é

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} V_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*).\Delta A_{i,j}$$



Esta soma é designada por *soma de Riemann* da função f relativamente à partição $\mathcal{P}$ e à escolha dos pontos (x_i^*, y_j^*).

O volume do sólido V é aproximadamente a soma anterior. Para obter o valor exato do volume, determina-se o limite da soma $S_{\mathcal{P}}$ quando o diâmetro da partição tende para zero.

$$\lim_{\text{diam}(\mathcal{P})\to 0} S_{\mathcal{P}} = \lim_{\text{diam}(\mathcal{P})\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*).\Delta A_{i,j}.$$

Se este valor existe, diz-se que f *é integrável à Riemann* e calcula-se $\int\int_R f(x,y)\,dA$ pela definição da forma

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \lim_{\text{diam}(\mathcal{P})\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*).\Delta A_{i,j}.$$

Nota: Este limite é independente da partição feita e da escolha dos pontos em cada sub-retângulo.

Cálculo de integrais duplos

Para calcular integrais duplos, na maior parte dos casos, é muito difícil usar a definição. O cálculo do integral vai reduzir-se ao cálculo de dois integrais simples - integrais iterados.
A possibilidade de transformar o cálculo de integrais duplos no cálculo de integrais iterados, podendo trocar a ordem, deve-se ao Teorema de Fubini.

Teorema de Fubini - Seja f uma função real contínua no retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$. Então f é integrável em R e

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$$

Exemplo: Calcular o integral iterado

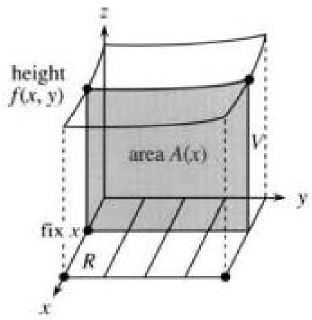
$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} (1+x^2+y^2)\,dy\,dx$$

que corresponde a calcular o volume do sólido de base $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ com altura dada por $z = 1+x^2+y^2$.

1. Primeiro, calcula-se

$$\int_{y=0}^{y=2} (1+x^2+y^2)\,dy$$

que corresponde a fixar a variável x. Geometricamente, corresponde a fazer um corte ao sólido paralelo a YOZ



a calcular a área $A(x)$ desse corte

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=2} (1 + x^2 + y^2)\, dy = \left[y + x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} =$$

$$= 2 + 2x^2 + \frac{8}{3}.$$

Nota: note que a primitiva de $x^2\, dy$ com x constante é $x^2 y$.

2. Depois, calcula-se

$$\int_{x=0}^{x=1} \left(2 + 2x^2 + \frac{8}{3} \right) dx$$

que corresponde a somar as áreas de todos os cortes feitos paralelamente ao plano YOZ.

$$\int_{x=0}^{x=1} \left(2 + 2x^2 + \frac{8}{3} \right) dx = \left[2x + \frac{2x^2}{3} + \frac{8x}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{16}{3}.$$

Pelo Teorema de Fubini, trocando a ordem de integração, o valor do integral é o mesmo:

$$\int_{y=0}^{y=2} \left(\int_{x=0}^{x=1} (1 + x^2 + y^2)\, dx \right) dy =$$

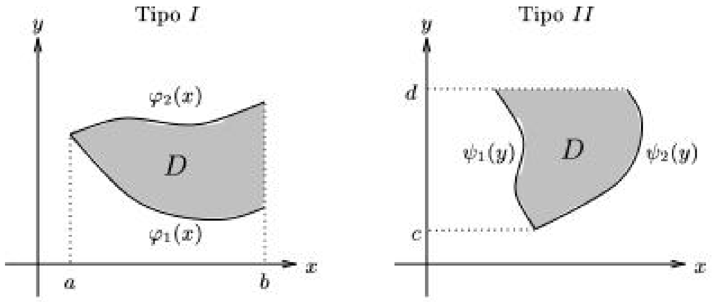
$$= \int_{y=0}^{y=2} \left[x + \frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=0}^{x=1} dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \left(\frac{4}{3} + y^2 \right) dy =$$

$$= \left[\frac{4y}{3} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{16}{3}.$$

Podemos generalizar a definição de integral e o Teorema de Fubini a outros tipos de regiões planas limitadas e fechadas.

Consideremos uma função f definida num domínio D do tipo dos da figura abaixo. A esses domínios chamam-se domínios elementares. Um domínio D diz-se elementar se uma das variáveis pertence a um intervalo limitado e fechado e a outra variável está limitada entre o gráfico de duas funções contínuas, isto é, da forma:



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

com ϕ_1, ϕ_2 contínuas no intervalo $[a,b]$ e $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$, ou da forma

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \wedge \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

com ψ_1, ψ_2 contínuas no intervalo $[c,d]$ e $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$.

Nestes casos, o Teorema de Fubini permite dizer que:
Se f é contínua num domínio elementar D então f é integrável em D e

$$\int\int_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \right) dx$$

se D for do primeiro tipo indicado. Ou

$$\int\int_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \right) dy$$

se D for do segundo tipo indicado.
D pode ser simultaneamente dos dois tipos e, nesse caso, podemos trocar a ordem de integração:

$$\int\int_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \right) dy$$

Podemos estender a definição a domínios D que sejam a união de domínios elementares $D_1, D_2, \ldots, D_n$ e cuja interseção seja apenas a fronteira antre eles.

$$\int\int_D f(x,y)\,dA = \int\int_{D_1} f(x,y)\,dA + \int\int_{D_2} f(x,y)\,dA + \ldots + \int\int_{D_n} f(x,y)\,dA$$

Propriedades

É importante referir as propriedades dos integrais duplos que se podem derivar da sua definição:
Sejam f, g funções integráveis numa área plana D. Então

1. Se D tem área nula então
$$\int\int_D f\,dA = 0$$

2.
$$\int\int_D 1\,dA = \text{área da região plana } D$$

3. Se $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in D$ então
$$\int\int_D f\, dA$$
representa o volume de um sólido cuja base é a região D e cujo topo seja a superfície $z = f(x,y)$.

4. Para qualquer α e β números reais, tem-se
$$\int\int_D (\alpha f + \beta g)\, dA = \alpha \int\int_D f\, dA + \beta \int\int_D g\, dA$$

5. Se $f(x,y) \geq g(x,y)$ em D, tem-se
$$\int\int_D f\, dA \geq \int\int_D g\, dA$$

6. Se $D = D_1 \cup D_2$, tem-se
$$\int\int_D f\, dA = \int\int_{D_1} f\, dA + \int\int_{D_2} f\, dA$$

7. Se $m \geq f(x,y) \geq M$ para todo $(x,y) \in D$ então
$$m.A(D) \geq \int\int_D f\, dA \geq M.A(D)$$
onde $A(D)$ representa a área de D.

8. O valor médio de f no conjunto D é dado por
$$\tilde{f} = \frac{1}{A(D)} \int\int_D f\, dA$$

Integrais triplos

Estender a noção de integral duplo para triplo ou grau superior é análogo ao que foi feito para definir integrais duplos.

Considere-se uma função $f(x,y,z)$ limitada e definida num paralelípipedo $R = [a,b] \times [c,d] \times [u,v]$. Define-se o integral triplo de f em R,
$$\iiint_R f\, dV$$
como o limite de somas de Riemann correspondentes a partições do paralelípipedo R em paralelípipedos menores a partir de cortes paralelos aos três eixos coordenados.

Também o Teorema de Fubini é válido para os integrais triplos. Considere-se R o paralelípipedo $R = [a,b] \times [c,d] \times [u,v]$ e f uma função contínua em R. Tem-se

$$
\begin{aligned}
\iiint_R f\,dV &= \int_a^b \int_c^d \int_u^v f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_c^d \int_a^b \int_u^v f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy \\
&= \int_u^v \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_c^d \int_u^v \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy \\
&= \int_a^b \int_u^v \int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx \\
&= \int_u^v \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz
\end{aligned}
$$

Os integrais triplos definidos em regiões limitadas de $\mathbb{R}^3$ são definidos estendendo a definição de integral triplo dos paralelípipedos para essas regiões.

Todas as propriedades dos integrais duplos podem ser generalizadas aos integrais triplos com o correspondente significado numa dimensão superior. Em particular, uma função contínua é integrável num domínio fechado e limitado.
E

$$\iiint_R 1\,dV = \text{volume do sólido } R$$