

# Complementos de Análise Matemática B

Departamento de Matemática e Aplicações

2011/2012

## Folha de Exercícios 2

Introdução às equações diferenciais

Eng<sup>a</sup>. de Comunicações, Eng<sup>a</sup>. Electrónica Industrial e Computadores, Eng<sup>a</sup>. de Materiais

### Classificação de equações diferenciais

1. Classificar cada uma das seguintes equações diferenciais ordinárias quanto à ordem e (eventual) linearidade. Nota: No caso das equações de primeira ordem averiguar a linearidade para cada uma das duas escolhas possíveis para a variável (in)dependente.

a)  $\frac{dy}{dx} + x^2y = xe^x$

b)  $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = \operatorname{sen}x$

c)  $3y\frac{dy}{dx} + 5y = \operatorname{sen}x$

d)  $\frac{du}{dt} + t^2 = u$

e)  $\frac{dv}{dt} + v^2 = t$

f)  $\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + v = xe^x$

g)  $\frac{dy}{dx} + y\operatorname{sen}x = 0$

h)  $x\frac{dy}{dx} + y\operatorname{sen}x = 0$

i)  $\frac{dy}{dx} + x\operatorname{sen}y = 0$

j)  $x^2dy + y^2dx = 0$

### Soluções explícitas de equações diferenciais

2. Verificar se as seguintes funções são solução das equações diferenciais dadas.

(a)  $f(x) = \frac{g}{24m}x^4$ ,  $m\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}gx^2$  qualquer que seja o intervalo real considerado.

(b)  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $y\frac{dy}{dx} + x = 0$  no intervalo  $I = ]-1, 1[$ .

(c)  $h(x) = (x^3 + c)e^{-3x}$ ,  $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2e^{-3x}$  no intervalo  $I = \mathbb{R}$ , onde  $c$  é uma constante arbitrária.

(d)  $m(x) = c_1e^x - c_2e^{-x}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$  no intervalo  $I = \mathbb{R}$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias.

3. A função  $f(x) = \frac{x^2}{2}$  é uma solução da equação diferencial  $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = 1$ ? Em que intervalo da recta real?

4. A função  $g(x) = x \ln x$  é uma solução da equação diferencial  $\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$ ? Em que intervalo da recta real?
5. Determinar o valor da constante  $\beta$  de modo que a função  $\varphi(x) = x^\beta$  seja solução da equação  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 4y = 0$  no intervalo  $I = ]0, +\infty[$ .
6. Mostrar que  $y = x \ln x$  verifica formalmente a equação diferencial

$$x \frac{dy}{dx} = x + y,$$

mas não é uma solução explícita desta equação diferencial no intervalo  $] -1, 1[$ .

### Soluções implícitas de equações diferenciais

7. Mostrar que  $y^2 + x = 1$  não é uma solução implícita da equação diferencial

$$y \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2},$$

no intervalo  $]0, 2[$ , apesar de a verificar formalmente.

8. A relação  $y^2 - x = 0$  é uma solução implícita da equação diferencial  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$ ? Em que intervalo da recta real?
9. Mostrar que a função  $x^2 + 2xy = 0$  é uma solução implícita da equação diferencial  $x \frac{dy}{dx} + x + y = 0$  em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
10. Mostrar que a função  $x^2y^2 + x^2 - 9 = 0$  é uma solução implícita da equação diferencial  $yx \frac{dy}{dx} + y^2 + 1 = 0$  no intervalo  $] -3, 3[ \setminus \{0\}$ .

### Problemas de valores iniciais

11. Mostrar que  $h(x) = e^x - e^{-x}$  é uma solução do problema de valores iniciais  $d^2y/dx^2 - y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ . Averiguar se  $g(x) = e^x + e^{-x}$  é uma solução do mesmo problema.
12. Sabendo que toda a solução da equação diferencial  $d^2y/dx^2 - y = 0$  pode ser escrita na forma  $f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias, determinar qual deverá ser o valor de  $c_1$  e  $c_2$  por forma a que  $f(x)$  seja uma solução do problema de valores iniciais  $d^2y/dx^2 - y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ .

### Problemas de valores de fronteira

13. Mostrar que  $y = 2xe^{x-1}$  é uma solução do problema de valores de fronteira  $d^2y/dx^2 - 2dy/dx + y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 2$ .
14. Mostrar que  $v(x) = \cos x + \sin x$  é uma solução do problema de valores de fronteira  $d^2y/dx^2 + y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(\pi) = -1$ . Averigúe se  $u(x) = -\cos x - \sin x$  é uma solução do mesmo problema.

15. Sabendo que toda a solução da equação diferencial  $d^2y/dx^2 + y = 0$  pode ser escrita na forma  $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias, determinar qual deverá ser o valor de  $c_1$  e  $c_2$  por forma a que  $u(x)$  seja uma solução do problema de valores de fronteira  $d^2y/dx^2 + y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(\pi) = -1$ .

16. Sabendo que toda a solução da equação diferencial  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$  pode ser escrita na forma  $y = c_1 + c_2 x^2$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias, mostrar que o problema de valores de fronteira

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(-1) = 1,$$

não tem solução única.

17. Sabendo que toda a solução da equação diferencial  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$  pode ser escrita na forma  $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias, mostrar que o problema de valores de fronteira

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 5,$$

não tem solução.

## Soluções da folha de exercícios 2

1. (a) equação diferencial de 1ª ordem, linear (se  $y$  for a variável dependente)  
(b) equação diferencial de 4ª ordem, linear (se  $y$  for a variável dependente)  
(c) equação diferencial de 1ª ordem, não-linear  
(d) equação diferencial de 1ª ordem, linear (se  $u$  for a variável dependente)  
(e) equação diferencial de 1ª ordem, não-linear  
(f) equação diferencial de 2ª ordem, não-linear  
(g) equação diferencial de 1ª ordem, linear (se  $y$  for a variável dependente)  
(h) equação diferencial de 1ª ordem, linear (se  $y$  for a variável dependente)  
(i) equação diferencial de 1ª ordem, não-linear  
(j) equação diferencial de 1ª ordem, não-linear
2. (a) verdade; (b) verdade; (c) verdade; (d) verdade
3.  $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
4.  $I = ]0, +\infty[$
5.  $\beta = 1$  ou  $\beta = 4$
8.  $I = ]0, +\infty[$
12.  $c_1 = 3/2, \quad c_2 = -1/2$
15.  $c_1 = 0, \quad c_2 = 1$