INTEGRAIS IMPRÓPRIOS

Até agora referimo-nos a integrais da forma

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Onde f representa uma função contínua em $[a,b]$ (fechado e finito). Deste modo, a referida função é limitada, obtendo-se um valor finito para I. Dizemos nestes casos que o integral é próprio.

Vamos em seguida considerar os casos em que:

(i) $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ ou ambos.

(ii) f não é limitada quando $x \to a$ ou $x \to b$ (ou ambos); ou quando $x \to c$ com $c \in [a,b]$

Tais integrais dizem-se impróprios.

1. INTEGRAIS IMPROPRIOS DA 1ª ESPÉCIE.

Definição 1:

I) Seja f uma função contínua e integrável no intervalo $[a,+\infty[$, o integral impróprio de f nesse intervalo é dado por:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

II) Seja f uma função contínua e integrável no intervalo $]-\infty,b]$, o integral impróprio de f nesse intervalo é dado por:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{M \to -\infty} \int_M^b f(x)\,dx$$

Em ambos os casos o integral diz-se:

Convergente se o limite existir (e se for, portanto um valor finito)

Divergente se o limite não existir ou se for um valor infinito

Se o integral impróprio tem os dois limites de integração infinito:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

O integral impróprio será convergente se e só se ambos os integrais convergirem. Caso contrário diz-se que o integral impróprio é divergente.

EXEMPLOS:

1. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{4}{x^2}dx$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ (c) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$ (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1}dx$

2. Esboce a região limitada pelas condições seguintes e determine a sua área.

(a) $y \le \frac{1}{x^2}$, $y \ge 0$ e $x \le -2$

(b) $y \le e^{-x}$, $y \ge 0$ e $x \ge -2$

2. INTEGRAIS IMPROPRIOS DA 2ª ESPÉCIE.

Definição 2:

III) Seja f uma função contínua e integrável no intervalo $]a,b]$, o integral impróprio de f nesse intervalo é dado por:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{y\to a^+}\int_{y}^{b} f(x)\,dx$$

IV) Seja f uma função contínua e integrável no intervalo $[a,b[$, o integral impróprio de f nesse intervalo é dado por:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{y\to b^-}\int_{a}^{y} f(x)\,dx$$

Em ambos os casos o integral diz-se:

Convergente se o limite existir (e se for, portanto um valor finito).

Divergente se o limite não existir ou se for um valor infinito.

Definição 3:

Seja f uma função contínua e integrável no intervalo $[a,b]$. Suponhamos que existe um ponto $c \in [a,b]$ onde a função é descontínua. Então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Onde

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{y \to c^-} \int_a^y f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^c f(x)\,dx = \lim_{y \to c^+} \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

O integral impróprio será convergente se e só se ambos os integrais convergirem. Caso contrário diz-se que o integral impróprio é divergente.

EXEMPLOS:

3. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\int_{-1}^{0} \frac{4}{x}dx$ (b) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx$ (c) $\int_0^e \ln x \; dx$ (d) $\int_0^\pi \frac{\text{sen}x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$ (e) $\int_0^\pi \frac{\text{sen}(\ln x)}{x}dx$

4. Esboce a região limitada pelas condições seguintes e determine a sua área.

$y \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $y \geq 0$ e $x \geq -3$