1. Determine a transformada inversa de Laplace:

a) $F(s)=\dfrac{3}{s^3+4s^2+3s}$

R:

$$F(s)=\frac{3}{s^3+4s^2+3s} \Leftrightarrow F(s)=\frac{3}{s\cdot\left(s^2+4s+3\right)}$$

Cálculos Auxiliares

Vamos começar por determinar as raízes do polinómio de 2º grau existente no denominador:

$$s^2+4s+3=0 \Leftrightarrow s=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1} \Leftrightarrow s=\frac{-4\pm2}{2} \Leftrightarrow s=-3 \vee s=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{3}{s\cdot\left(s^2+4s+3\right)} \Leftrightarrow F(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s+1} \Leftrightarrow ☼$$

Assim sendo teremos que proceder à decomposição da fracção em factores:

$$\frac{3}{s\cdot(s+3)\cdot(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s+1} \Leftrightarrow 3=A\cdot(s+3)\cdot(s+1)+B\cdot s\cdot(s+1)+C\cdot s\cdot(s+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3=A\cdot\left(s^2+4s+3\right)+B\cdot\left(s^2+s\right)+C\cdot\left(s^2+3s\right) \Leftrightarrow 3=(A+B+C)\cdot s^2+(B+3C+4A)\cdot s+3A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0=A+B+C \\ 0=B+3C+4A \\ 3=3A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1-C \\ 0=(-1-C)+3C+4\cdot1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1-(-3/2) \\ C=-3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1/2 \\ C=-3/2 \end{cases}$$

Substituindo agora estes valores em ☼ teremos que:

$$☼ \Leftrightarrow F(s)=\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{2}}{s+3}+\frac{-\frac{3}{2}}{s+1} \Leftrightarrow F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{2}\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}-\frac{3}{2}\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \Leftrightarrow$$ [1]

$$\Leftrightarrow L^{-1}\{F(s)\}=1+\frac{1}{2}\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-3)}\right\}-\frac{3}{2}\cdot sen(t) \Leftrightarrow L^{-1}\{F(s)\}=1+\frac{1}{2}\cdot e^{-3t}-\frac{3}{2}\cdot sen(t)$$

[1] Consultando o formulário obtêm-se estes valores

b) $F(s)=\dfrac{2s+2}{s^2+4}$

R:

$$F(s)=\frac{2s+2}{s^2+4}\Leftrightarrow F(s)=\frac{2s}{s^2+2^2}+\frac{2}{s^2+2^2}\Rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+2^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}\Leftrightarrow$$ [2]

$$\Leftrightarrow L^{-1}\{F(s)\}=2\cdot L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}\Leftrightarrow L^{-1}\{F(s)\}=2\cdot\cos(2t)+sen(2t)$$

c) $F(s)=\dfrac{1}{s\cdot(s^2+1)}$

R:

$$F(s)=\frac{1}{s\cdot(s^2+1)}\Leftrightarrow F(s)=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}\Leftrightarrow ☼$$

Cálculos Auxiliares
Assim sendo teremos que proceder à decomposição da fracção em factores: $\frac{1}{s\cdot(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}\Leftrightarrow 1=A\cdot(s^2+1)+(Bs+C)\cdot s\Leftrightarrow 1=(A+B)\cdot s^2+C\cdot s+A\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}0=A+B\\0=C\\1=A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=0\end{cases}$

Substituindo agora estes valores em ☼ teremos que:

$$☼\Leftrightarrow F(s)=\frac{1}{s}+\frac{-1\cdot s+0}{s^2+1}\Leftrightarrow F(s)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\Rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}\Leftrightarrow$$ [3]

$$\Leftrightarrow L^{-1}\{F(s)\}=1-\cos(t)$$

[2] Consultando o formulário obtêm-se estes valores
[3] Consultando o formulário obtêm-se estes valores

d) $F(s)=\dfrac{5s}{s^2+4s+4}$

R:

$$F(s)=\frac{5s}{s^2+4s+4}$$

Cálculos Auxiliares
Vamos começar por determinar as raízes do polinómio de 2º grau existente no denominador:
$s^2+4s+4=0 \Leftrightarrow s=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow s=\dfrac{-4\pm 0}{2} \Leftrightarrow s=-2 \Rightarrow$
$\Rightarrow F(s)=\dfrac{5s}{s^2+4s+4} \Leftrightarrow F(s)=\dfrac{A}{s+2}+\dfrac{B}{(s+2)^2} \Leftrightarrow$ ☼
Assim sendo teremos que proceder à decomposição da fracção em factores:
$\dfrac{5s}{s^2+4s+4}=\dfrac{A}{s+2}+\dfrac{B}{(s+2)^2} \Leftrightarrow 5s=A\cdot(s+2)+B \Leftrightarrow 5s=A\cdot s+2A+B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 5=A \\ 0=2A+B \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A=5 \\ B=-10 \end{Bmatrix}$

Substituindo agora estes valores em ☼ teremos que:

$$☼ \Leftrightarrow F(s)=\frac{5}{s+2}+\frac{-10}{(s+2)^2} \Leftrightarrow F(s)=5\cdot\frac{1}{s+2}-10\cdot\frac{1}{(s+2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=5\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-2)}\right\}-10\cdot L^{-1}\left\{\frac{1!}{(s-(-2))^{1+1}}\right\} \Leftrightarrow$$ [4]

$$\Leftrightarrow L^{-1}\{F(s)\}=5\cdot e^{-2t}-10\cdot t^1\cdot e^{-2t} \Leftrightarrow L^{-1}\{F(s)\}=5\cdot e^{-2t}-10\cdot t\cdot e^{-2t} \Leftrightarrow L^{-1}\{F(s)\}=(5-10\cdot t)\cdot e^{-2t}$$

[4] Consultando o formulário obtêm-se estes valores

e) $F(s)=\frac{5s+6}{s^2+9}\cdot e^{-\pi\cdot s}$

R:

$$F(s)=\frac{5s+6}{s^2+9}\cdot e^{-\pi\cdot s}\Leftrightarrow F(s)=\left(\frac{5s}{s^2+9}+\frac{6}{s^2+9}\right)\cdot e^{-\pi\cdot s}\Leftrightarrow F(s)=5\cdot\frac{s}{s^2+3^2}\cdot e^{-\pi\cdot s}+6\cdot\frac{1}{s^2+3^2}\cdot e^{-\pi\cdot s}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=5\cdot L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{s}{s^2+3^2}}_{F(s)}\cdot\underbrace{e^{-\pi\cdot s}}_{e^{-a\cdot s}}\right\}+2\cdot L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{3}{s^2+3^2}}_{F(s)}\cdot\underbrace{e^{-\pi\cdot s}}_{e^{-a\cdot s}}\right\}\Leftrightarrow^{5}$$

$$\Leftrightarrow L^{-1}\{F(s)\}=5\cdot u_\pi(t)\cdot f(t-\pi)+2\cdot u_\pi(t)\cdot f(t-\pi)$$

f) $F(s)=\frac{s+1}{s^2}\cdot e^{-2\cdot s}$

R:

$$F(s)=\frac{s+1}{s^2}\cdot e^{-2\cdot s}\Leftrightarrow F(s)=\left(\frac{s}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-2\cdot s}\Leftrightarrow F(s)=\frac{1}{s}\cdot e^{-2\cdot s}+\frac{1}{s^2}\cdot e^{-2\cdot s}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=\underbrace{L^{-1}\left\{\frac{e^{-2\cdot s}}{s}\right\}}_{u_2(t)}+L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{s^2}}_{F(s)}\cdot\underbrace{e^{-2\cdot s}}_{e^{-a\cdot s}}\right\}\Leftrightarrow^{6} L^{-1}\{F(s)\}=u_2(t)+u_2(t)\cdot f(t-2)$$

g) $F(s)=\frac{1-e^{-\pi\cdot s}}{(s^2+1)\cdot s^2}$

R:

$$F(s)=\frac{1-e^{-\pi\cdot s}}{(s^2+1)\cdot s^2}\Leftrightarrow F(s)=\frac{1}{(s^2+1)\cdot s^2}-\frac{1}{(s^2+1)\cdot s^2}\cdot e^{-\pi\cdot s}\Leftrightarrow$$

[5] Consultando o formulário obtêm-se estes valores
[6] Consultando o formulário obtêm-se estes valores

h) $F(s)=\frac{1}{s^3}\cdot e^{-s}+\frac{s+3}{s^2+s}$

R:

i) $F(s)=\frac{s+3}{s^2+2s+2}$

R:

j) $F(s)=\frac{6s-4}{s^2-4s+20}$

R:

2. Utilize a convolução para determinar a transformada inversa de cada uma das seguintes funções:

a) $H(s)=\dfrac{1}{s^2-7s+10}$

R:

Sabendo que o teorema da convolução é dado por:

$$L^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\}=f(t)*g(t) \text{ onde: } f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)\cdot g(t-x)dx$$

Cálculos Auxiliares
Vamos começar por determinar as raízes do polinómio de 2º grau existente no denominador:
$s^2-7s+10=0 \Leftrightarrow s=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow s=\dfrac{7\pm 3}{2} \Leftrightarrow s=5 \vee s=2$

Posto isto teremos que:

$$H(s)=\frac{1}{(s-2)\cdot(s-5)} \Leftrightarrow H(s)=\frac{1}{(s-2)}\cdot\frac{1}{(s-5)} \Rightarrow L^{-1}\{H(s)\}=L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{(s-2)}}_{F(s)}\cdot\underbrace{\frac{1}{(s-5)}}_{G(s)}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L^{-1}\{F(s)\}=f(t) \\ L^{-1}\{G(s)\}=g(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\}=f(t) \\ L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-5}\right\}=g(t) \end{cases} \overset{[7]}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(t)=e^{2t} \\ g(t)=e^{5t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=e^{2x} \\ g(t-x)=e^{5(t-x)} \end{cases}$$

Assim sendo e sabendo que: $f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)\cdot g(t-x)dx$, teremos que:

$$\int_0^t f(x)\cdot g(t-x)dx=\int_0^t e^{2x}\cdot e^{5(t-x)}dx=\int_0^t e^{2x}\cdot e^{5t-5x}dx=\int_0^t e^{2x}\cdot e^{5t}\cdot e^{-5x}dx=e^{5t}\cdot\int_0^t e^{2x}\cdot e^{-5x}dx=$$

[7] Consultando o formulário obtêm-se estes valores

$$= e^{5t} \cdot \int_0^t e^{2x-5x} dx = e^{5t} \cdot \int_0^t e^{-3x} dx = e^{5t} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \int_0^t \underbrace{-3}_{u'} \cdot \underbrace{e^{-3x}}_{e^u} dx = e^{5t} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left[e^{-3x}\right]_0^t =$$

$$= -\frac{e^{5t}}{3} \cdot \left[e^{-3 \cdot t} - e^{-3 \cdot 0}\right] = \frac{-e^{5t} \cdot e^{-3 \cdot t} + e^{5t}}{3} = \frac{-e^{5t-3t} + e^{5t}}{3} = \frac{e^{5t} - e^{2t}}{3}$$

b) $H(s) = \frac{1}{s^2 \cdot (s+3)}$

R:

c) $H(s) = \frac{s}{(s^2+9) \cdot s}$

R:

d) $H(s) = \frac{1}{s^2 \cdot (s^2+1)}$

R: