Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações MIECOM

Análise Matemática B

— folha 3 — Funções Escalares — 2011'12 —

1. Para cada uma das eguintes funções:

$$f(x,y,z) = x+y+\operatorname{sen}(xy^2), \quad g(x,y,z) = e^{xy}+4z, \quad h(x,y,z) = \operatorname{sen} x+3\operatorname{sen} y+z,$$

   (a) justifique que são diferenciáveis na origem;

   (b) determine a derivada direcional na origem segundo a direção $\vec{v} = \vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.

2. Considere a função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{yx}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

   (a) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$;

   (b) Mostre que f é diferenciável em $(-1,2)$;

   (c) Determine $f'(-1,2)$.

3. Determine $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial v}$ quando:

   (a) $f(x,y) = 2xy$, com $x = u^2+v$, $y = \dfrac{u}{v}$ e $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$;

   (b) $f(x,y) = xe^{-y} + ye^{-x}$, com $x = u\operatorname{sen} v$, $y = v\cos u$ e $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$;

   (c) $f(x,y) = xe^y$, com $x = \ln u$, $y = v$ e $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$;

   (d) $f(x,y) = xe^y$, com $x = u^2+v^2$, $y = u^2-v^2$ e $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

4. Seja $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla G(2,3,0) = (-1,2,3)$. Determine:

   (a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2)$, sendo $g(x,y) = G\left(yx, x+y, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$;

   (b) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,-1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,-1)$, sendo $g(x,y) = G\left(-2ye^x, -3y+y^3x^2, x\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$.

5. Considere a seguinte equação

$$xyz^3 + x^2yz^2 - x + 2y + z = 0.$$

   (a) Mostre que a equação apresentada define implicitamente z como função de (x, y) para pontos "próximos" de $(1, 1, -1)$.

   (b) Determine $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$.

6. Considere a seguinte equação de três variáveis reais

$$xz^2 + xy^2z = yz^2 + 5.$$

   (a) Mostre que a equação apresentada define z como função de (x, y) para pontos "próximos" de $(3, 1, 1)$;

   (b) Determine $z'(3, 1)$;

   (c) Para $z(x, y)$, definida na alínea (a), determine $H'(3, 1)$, onde $H(x, y) = G(x, y, z(x, y))$ para (x, y) "próximo" de $(3, 1)$, com $G(x, y, z) = e^{xy} + xyz$.

7. Seja $z = \varphi(x, y)$ uma função definida implicitamente, para (x, y, z) "próximo" de $(1, 1, 0)$, pela equação $xe^{yz} + z \log y = 1$. Determine $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$.

8. Escreva o polinómio de Taylor de ordem 2 para as funções apresentadas a seguir, em torno dos pontos indicados:

   (a) $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$, ponto $(1, \pi)$;

   (b) $f(x, y) = \cos(xy)$, ponto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

   (c) $f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$, ponto $(0, 0)$;

   (d) $f(x, y) = (x + y)^2$, ponto $(0, -2)$.

9. Determine os pontos críticos de cada uma das funções apresentadas. Averigue se algum deles é maximizante local, minimizante local ou ponto de sela.

   (a) $f(x, y) = x^6 + y^6$;

   (b) $f(x, y) = x^4 + y^3$;

   (c) $f(x, y) = x^2y^2$;

   (d) $f(x, y) = 2 - x - y^2$.

10. Determine os máximos e mínimos locais de cada uma das seguintes funções:

    (a) $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$;
    (b) $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$;
    (c) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$;
    (d) $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;
    (e) $f(x, y) = x^2y + xy^2 + xy - 1$;
    (f) $f(x, y) = x^3 + e^{-y^2}$.

11. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 1$ que se encontra mais próximo da origem. Qual a distância desse ponto à origem?

12. Qual a menor distância entre a superfície $xy + 3x + z^2 = 9$ e a origem.

13. Determine os extremos das funções f definidas a seguir, vinculados pelas seguintes condições:

    (a) $f(x, y) = \ln(xy)$ e $2x + 3y = 5$;
    (b) $f(x, y) = x + y$ e $x^2 + y^2 = 1$;
    (c) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ e $x^2 - y^2 = 1$;
    (d) $f(x, y) = xy$ e $x^2 + y^2 = 18$
    (e) $f(x, y) = x + 2y$ e $x^2 + y^2 = 5$

14. Determine o ponto de cota mais alta da intersecção do paraboloide $x^2 + y^2 = 5 - z$ com o plano $x + y + z = 1$.

15. De entre todos os triângulos rectângulos com hipotenusa de comprimento 4, determine o de área máxima.