Teoria dos Circuitos e Fundamentos de Electrónica

Análise de Circuitos em Regime Forçado Sinusoidal

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Teresa Mendes de Almeida

TeresaMAlmeida@ist.utl.pt

DEEC
Área Científica de Electrónica

Abril de 2008

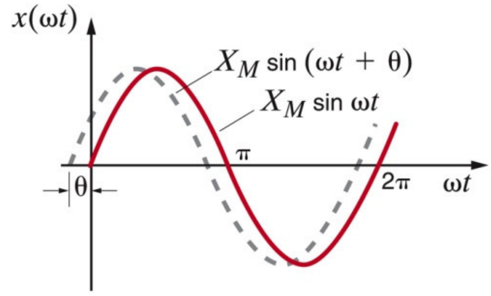
Matéria

- **Grandezas sinusoidais**
  - características
  - posição relativa
  - diagrama temporal
- **Regime forçado sinusoidal**
- **Representação complexa**
  - amplitude complexa
  - diagrama vectorial
  - aplicação aos componentes
    - gerador de tensão e corrente
    - resistência
    - bobine
    - condensador
- **Impedância e Admitância**
- **Generalização de Leis e Teoremas**
  - Lei de Ohm, KVL, KCL
  - Divisores de tensão e corrente
  - Teorema da Sobreposição
  - Eq. Thévenin e Norton
  - Método dos Nós
  - Associação de impedâncias
- **Potência Média**
- **Resposta em frequência**
- **Filtros passivos**
  - passa-baixo e passa-alto
  - passa-banda e rejeita-banda
- **Exemplos de aplicação**

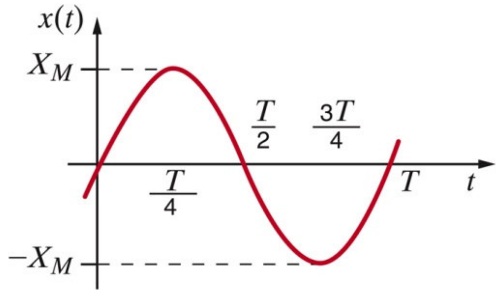
Grandeza sinusoidal

- **Sinal sinusoidal (tensão ou corrente)**
  - caracterizado por 3 parâmetros
    - amplitude → X_M [V] ou [A]
    - frequência
      - angular → ω [rad / s]
      - linear → f [Hz]

      $\boxed{\omega = 2\pi f}$
    - fase na origem dos tempos → θ [rad]



- **Gráfico temporal**
  - representação gráfica em função do tempo
  - escala horizontal
    - tempo → t [s]
    - fase → ωt [rad]



- **Notação (encontrada nos livros)**

$$i(t) = 7\cos(10t + 45^\circ) \quad \rightarrow \quad i(t) = 7\cos\left(10t + 45^\circ \frac{\pi}{180^\circ}\right) = 7\cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) = 7\cos(10t + 0{,}785)$$

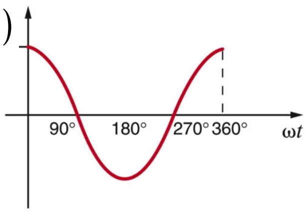
Desfasagem

- **Desfasagem (posição relativa entre 2 sinais)**
  - 2 sinais com mesma frequência e escritos da mesma forma (sin() ou cos())

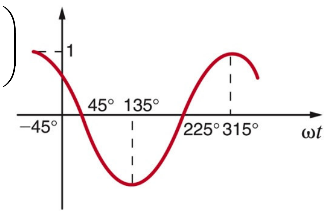
$$x_1(t) = X_{M1}\cos(\omega t + \theta_1) \qquad x_2(t) = X_{M2}\cos(\omega t + \theta_2)$$

  - $x_1(t)$ está em avanço relativamente a $x_2(t)$: $\Delta\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$
  - $x_2(t)$ está em avanço relativamente a $x_1(t)$: $\Delta\theta_{21} = \theta_2 - \theta_1$

$x_1(t) = \cos(\omega t)$



$x_2(t) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

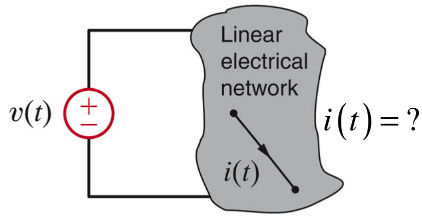


  - $x_1(t)$ está em avanço -45º ⇔ $x_1(t)$ está em atraso +45º
  - $x_2(t)$ está em avanço +45º ⇔ $x_2(t)$ está em atraso -45º
- **Sinais em**
  - fase: $\Delta\theta_{12} = 0^\circ$ quadratura: $\Delta\theta_{12} = \pm 90^\circ$
  - oposição de fase: $\Delta\theta_{12} = \pm 180^\circ$

Regime forçado sinusoidal

- **Num circuito linear, se sinal do gerador é sinusoidal, como vão ser os sinais (tensões ou correntes) no circuito?**
  - vai existir transitório quando gerador é ligado
    - extingue-se passado pouco tempo
  - permanece apenas influência do sinal sinusoidal

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta_v)$$



- **Se *i(t)* for a corrente numa resistência, bobine ou num condensador, como é a sua forma de onda?**
- **Resistência** $v_R(t) = R \times i_R(t)$
- **Bobine** $v_L(t) = L \times \dfrac{di_L(t)}{dt}$
- **Condensador** $i_C(t) = C \times \dfrac{dv_C(t)}{dt}$

$i(t) = I_M \cos(\omega t + \theta_I)$

→ sinusoidal

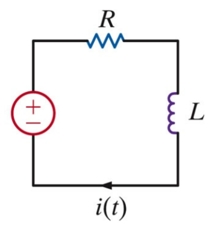
→ mesma frequência

$I_M = ?$ $\theta_I = ?$

Regime forçado sinusoidal

- **Como calcular a corrente *i(t)* do circuito?**
  - KVL
  - Lei Ohm
  - relação entre $v_L(t)$ e $i_L(t)$

$v(t) = V_M \cos(\omega t)$



$$-v(t) + R \times i(t) + L\frac{di(t)}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L\frac{di(t)}{dt} + R \times i(t) = V_M \cos(\omega t)$$

  - resolvendo a equação diferencial obtém-se a solução

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \quad [A]$$

  - para analisar um circuito simples (só 1 malha!) é preciso resolver uma equação diferencial?!...
  - comparar com a análise de circuito resistivo semelhante (2 resistências)...
- **Como analisar o circuito sem ser necessário resolver equações diferenciais/integrais?**
  - utilizar o conceito de <u>amplitude complexa</u> → resolver <u>equações algébricas</u>

Amplitude complexa (*phasor*)

- **Representação complexa correspondente a sinal sinusoidal**
  - baseia-se na equação de Euler $e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$
  - para um sinal sinusoidal real $x(t) = X_M \cos(\omega t + \theta)$
  - pode obter-se uma equivalência directa

$$X_M e^{j(\omega t+\theta)} = \underbrace{X_M \cos(\omega t + \theta)}_{x(t)} + jX_M \sin(\omega t + \theta) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \mathrm{Re}\left[X_M e^{j(\omega t+\theta)}\right]$$

  - em regime forçado sinusoidal todos sinais têm mesma frequência (ω)
    - não se considera a informação da frequência
    - apenas se considera a informação da amplitude (X_M) e da fase na origem dos tempos (θ)

$$\boxed{x(t) = X_M \cos(\omega t + \theta) \quad \leftrightarrow \quad \overline{X} = X_M e^{j\theta} = X_M \angle\theta = X_M \cos(\theta) + jX_M \sin(\theta)}$$

  - atenção à forma como é feita descrição do sinal no domínio do tempo!
    $X_M>0$ cos( )
  - e se estiver escrito de outra forma?

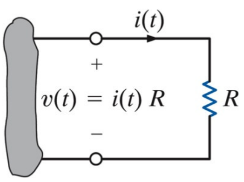
$$v(t) = 2\sin(200t + \pi/3) \quad \rightarrow \quad v(t) = 2\cos(200t + \pi/3 - \pi/2) = 2\cos(200t - \pi/6)$$

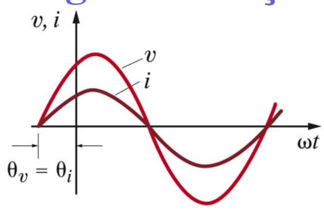
Exemplos de aplicação

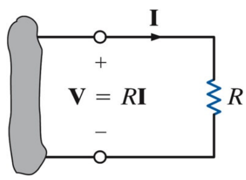
- **Determinar a frequência e a desfasagem entre as tensões**
  - v1(t) = 12sin(100t+60º) V
  - v2(t) = -6cos(1000t+30º)
- **Determinar as amplitudes complexas V1 e V2**
  - v1(t) = 12cos(377t-425º) V
  - v2(t) = 18sin(2513t+4,2º) V
- **Converter fasores para domínio do tempo**
  - V1=10∠20º V
  - V2=12 ∠-60º V
- **Calcular fasores e desfasagem entre as várias correntes**
  - i1(t)=2sin(377t+45º) A i2(t)=0,5cos(377t+10º) A
  - i3(t)=-0,25sin(377t+60º) A i4(t)=sin(377t) A

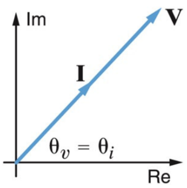
Analisar circuitos com amplitudes complexas

- **Analisar circuitos usando amplitudes complexas**
  - transformar sinais do domínio do tempo para amplitudes complexas
  - analisar circuito resolvendo equações algébricas (com números complexos)
  - transformar amplitude complexa do resultado para o domínio do tempo
- **Gerador de Tensão** $v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta_v) \leftrightarrow \overline{V} = V_M \angle \theta_v$
- **Gerador de Corrente** $i(t) = I_M \cos(\omega t + \theta_i) \leftrightarrow \overline{I} = I_M \angle \theta_i$
- **Resistência $\rightarrow$ generalização da Lei de Ohm**









$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta_v)$$
$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$\boxed{\theta_v = \theta_i \qquad \overline{V} = R \times \overline{I}}$$

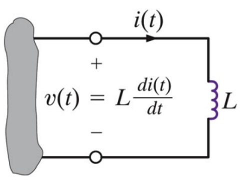
$$R = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{V_M}{I_M} e^{j(\theta_v - \theta_i)} = \frac{V_M}{I_M}$$

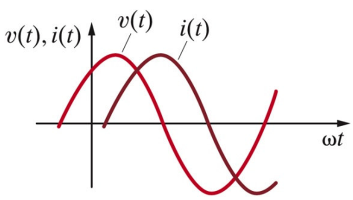
Analisar circuitos com amplitudes complexas

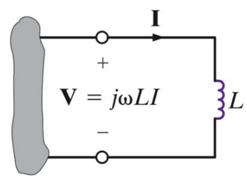
- **Propriedades** $x(t) = X_M \cos(\omega t + \theta) \leftrightarrow \overline{X} = X_M \angle \theta$

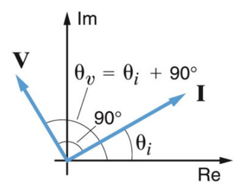
$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 \overline{X}_1 + a_2 \overline{X}_2 \qquad \frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j\omega \times \overline{X}$$

- **Bobine**





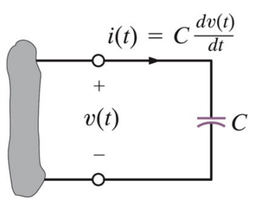


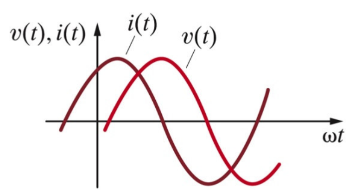


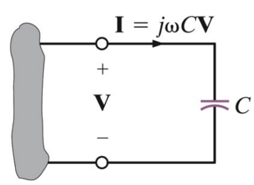
  - tensão está em avanço

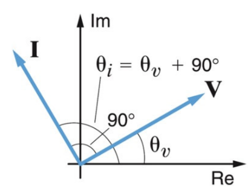
$$\boxed{\theta_v - \theta_i = 90^o \qquad \overline{V} = j\omega L \times \overline{I}}$$

- **Condensador**









  - corrente está em avanço

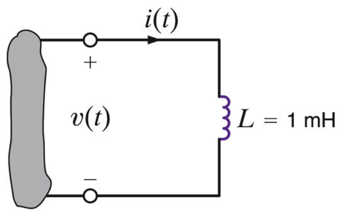
$$\boxed{\theta_i - \theta_v = 90^o \qquad \overline{I} = j\omega C \times \overline{V}}$$

Exemplos de aplicação

- **A corrente numa resistência de 4Ω é I=12∠60º A. Se a frequência da corrente é 4kHz, como é a tensão aos terminais da resistência, v(t)?**

- **A corrente numa bobine (L=0,05H) é I=4 ∠-30º A. Se a frequência da corrente é 50Hz, como é a tensão aos terminais da bobine , v(t)?**

- **Calcular a corrente na bobine (i(t) e I) quando a tensão aos seus terminais é:**
  - v1(t)=10cos(314t+45º) V
  - V2=-j5 V f=50Hz



Impedância e Admitância

- **Impedância – Z**
  - quociente entre amplitudes complexas da tensão e da corrente $\boxed{Z = \frac{\overline{V}}{\overline{I}}}$
  - definida como anteriormente foi definida a resistência [Ω]

    $\boxed{Z = R + jX}$
  - R – componente resistiva (resistência)
  - X – componente reactiva (reactância)
    - X>0 reactância do tipo indutivo
    - X<0 reactância do tipo capacitivo
  - X=0 → Z=R impedância é óhmica pura
  - R=0 → Z=jX impedância é reactiva pura

$$Z = \frac{V_M \angle \theta_v}{I_M \angle \theta_i} = \frac{V_M}{I_M} \angle (\theta_v - \theta_i)$$

- **Admitância – Y**
  - inverso da impedância $\boxed{Y = \frac{1}{Z}}$ $\boxed{Y = G + jB}$
  - G – condutância
  - B – susceptância

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

Generalização de Leis e Teoremas

- **Lei de Ohm pode ser generalizada**
  - Resistência $Z_R = R$
  - Bobine $Z_L = j\omega L$
  - Condensador $Z_C = 1/(j\omega C) = - j/(\omega C)$

$$\boxed{\overline{V} = Z \times \overline{I}}$$

- **Generalização das Leis e Teoremas**
  - leis e teoremas usados na análise de circuitos resistivos lineares com fontes DC podem ser generalizados
    - Leis de Kirchhoff (KCL e KVL)
    - Divisores de tensão e corrente
    - Método dos Nós
    - Equivalente de Thévenin
    - Equivalente de Norton
    - Teorema da Sobreposição
    - …

$$\sum_e \overline{I_e} = \sum_s \overline{I_s} \qquad \sum_k \overline{V_k} = 0$$

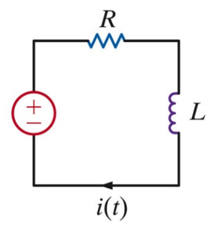
$$Z_{Th} \quad \overline{V_{Th}} = \overline{V_{OC}}$$

$$Z_{Th} \quad \overline{I_N} = \overline{I_{SC}}$$

Exemplo de aplicação

- **Como calcular a corrente *i(t)* do circuito?**

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$



- calcular a amplitude complexa do gerador de tensão
  - passar a informação para domínio da frequência

$$v(t) = V_M \cos(\omega t) \quad \to \quad \overline{V} = V_M \angle 0^\circ = V_M \qquad \overline{I} = ?$$

- KVL no sentido horário

$$-\overline{V} + Z_R \overline{I} + Z_L \overline{I} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{I} = \frac{\overline{V}}{Z_R + Z_L} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{I} = \frac{V_M}{R + j\omega L} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{I} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \angle \left[-\tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right]$$

- passar resultado para o domínio do tempo

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right)$$

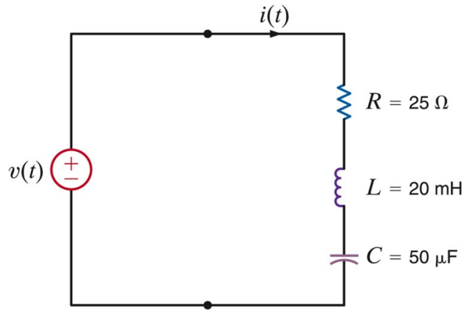
Resolução de equação algébrica em vez de equação diferencial

Associação de Impedâncias

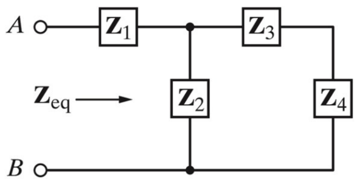
- **Impedâncias associam-se como as resistências**
- **Associação em série**
  - impedâncias em série somam-se $Z_S = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_N$
- **Associação em paralelo**
  - admitâncias em paralelo somam-se $\frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_N}$

$$Y_P = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$$

- **Exemplos**



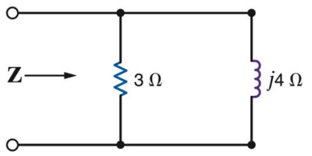
$$f = 50\ Hz$$
$$Z_R = R = 25\ \Omega$$
$$Z_L = j\omega L = 6,28\ \Omega$$
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j63,66\ \Omega$$
$$Z_S = Z_R + Z_L + Z_C$$
$$Z_S = 25 - j57,38\ \Omega$$

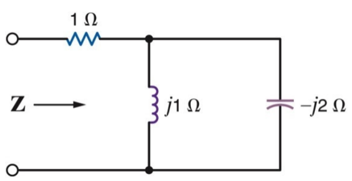


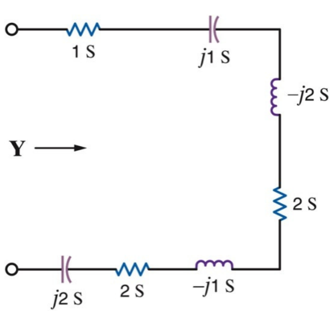
$$Z_{eq} = Z_1 + \left[Z_2 // \left(Z_3 + Z_4\right)\right]$$

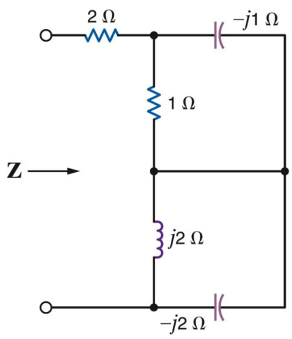
Exemplos de aplicação

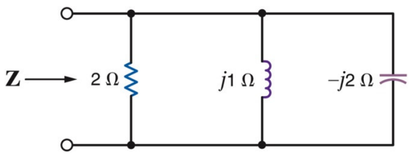
- **Calcular a impedância/admitância equivalente**



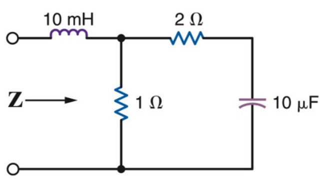




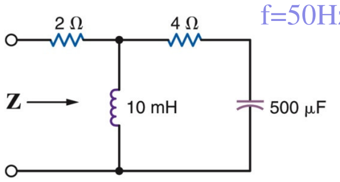




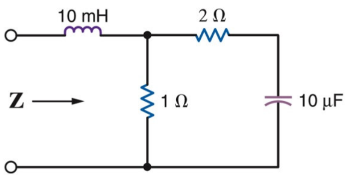
f=50Hz



f=50Hz

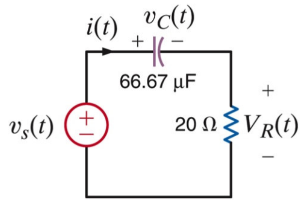


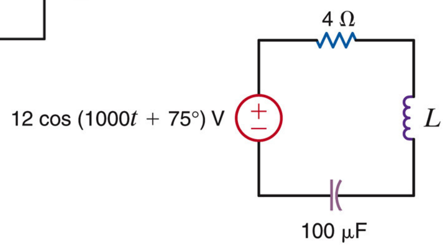
f=400Hz



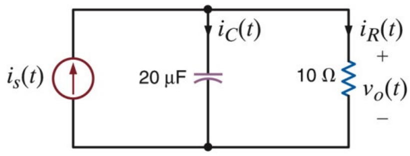
Exemplos de aplicação

- **Calcular i(t), vR(t) e vC(t)**
  - vs(t)=2cos(100t) V

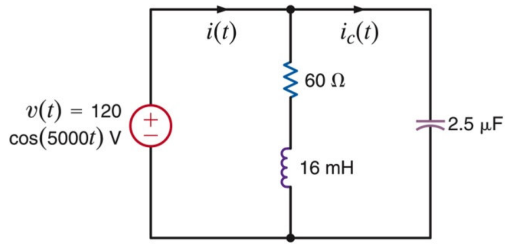




- **Calcular quanto vale L para que corrente esteja em fase com o sinal do gerador de tensão**



- **Calcular iC(t), iR(t) e vo(t)**
  - f=50Hz IS=1A



- **Calcular i(t), iC(t) e vR(t)**
- **Verificar KCL no nó superior**

Potência Média

- **Potência instantânea**

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \theta_i)$$
$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta_v)$$

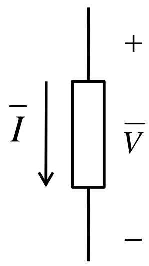
$$p(t) = v(t) \times i(t) = \frac{V_M I_M}{2}\left[\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\right]$$

- **Potência média (potência activa)**

$$P = \frac{1}{T}\int_T p(t)\,dt = \frac{V_M I_M}{2}\cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$\boxed{P = \frac{V_M I_M}{2}\cos(\theta_v - \theta_i)}$$

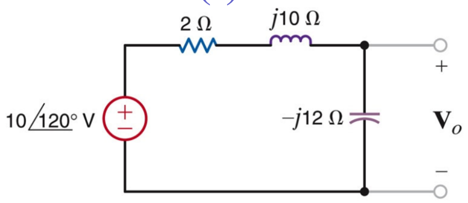
$$\boxed{P = V_{ef} I_{ef} \cos(\theta_v - \theta_i)}$$

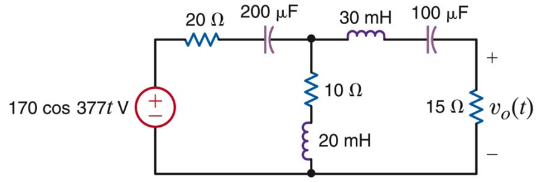


- **Resistência**
  - dissipa energia $\quad \theta_v = \theta_i \quad \Rightarrow \quad P_R = \frac{V_M I_M}{2} = V_{ef} I_{ef} = R I_{ef}^2 = \frac{V_{ef}^2}{R}$
- **Bobine ou Condensador**
  - potência média é nula $\quad \theta_v - \theta_i = \pm 90° \quad \Rightarrow \quad P_C = P_L = 0$
  - em parte do período armazena energia e no restante tempo liberta energia
  - não há dissipação de energia

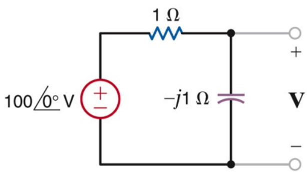
Exemplos de aplicação

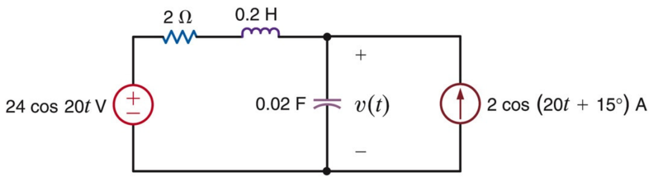
- **Calcular vo(t) e VO**



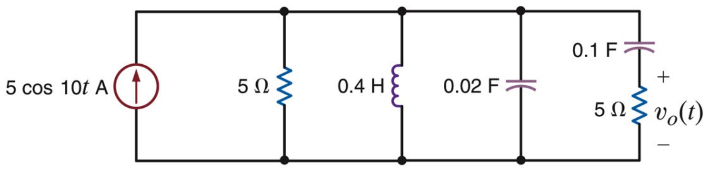


- **Calcular v(t) e V**



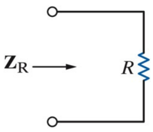


- **Calcular vo(t)**
- **Qual a potência dissipada nas resistências?**

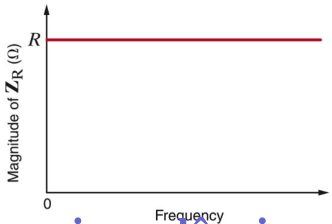


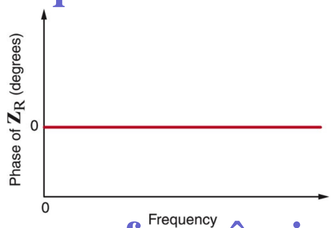
Variação da impedância com a frequência

- **Resistência – a impedância não varia com a frequência**

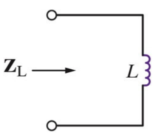


$Z_R = R\angle 0^o = R$



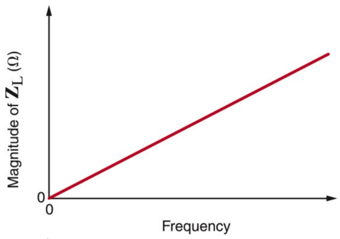


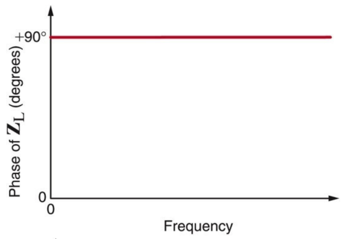
- **Bobine e Condensador – a impedância varia com a frequência**

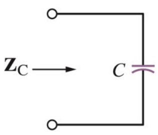


$Z_L = j\omega L$

$Z_L = \omega L\angle 90^o$

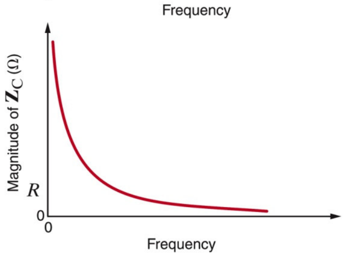


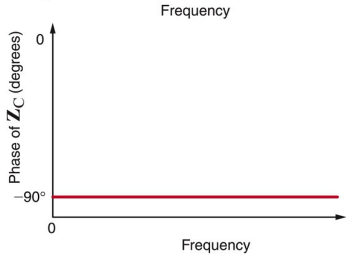




$Z_C = 1/(j\omega C)$

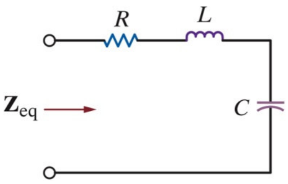
$Z_C = 1/(\omega C)\ \angle{-90^o}$





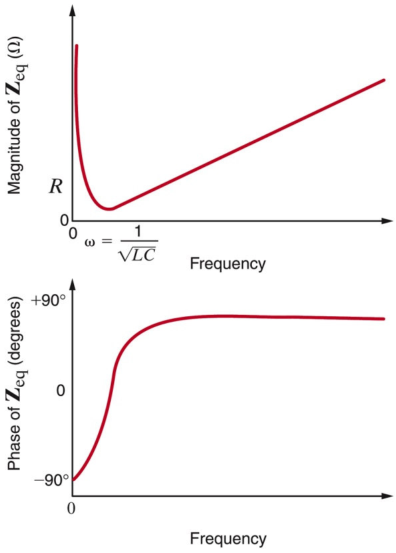
Variação da impedância com a frequência

- **Como varia *Zeq* em função da frequência?**



$$Z_{eq} = Z_R + Z_L + Z_C$$

$$Z_{eq} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



$$\left|Z_{eq}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1-\omega^2 LC}{\omega C}\right)^2}$$

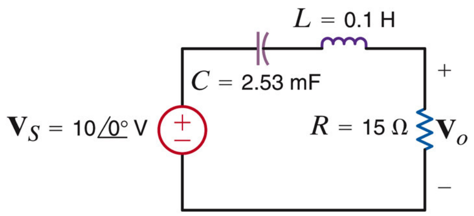
$$\angle\left(Z_{eq}\right) = -\tan^{-1}\frac{1-\omega^2 LC}{\omega RC}$$

$$\omega_{\min} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- **Os parâmetros do circuito reactivo variam com a frequência do sinal sinusoidal do gerador**
- **A resposta do circuito vai depender da frequência do sinal**
- **É preciso estudar a <u>resposta em frequência</u> do circuito**

Resposta em frequência

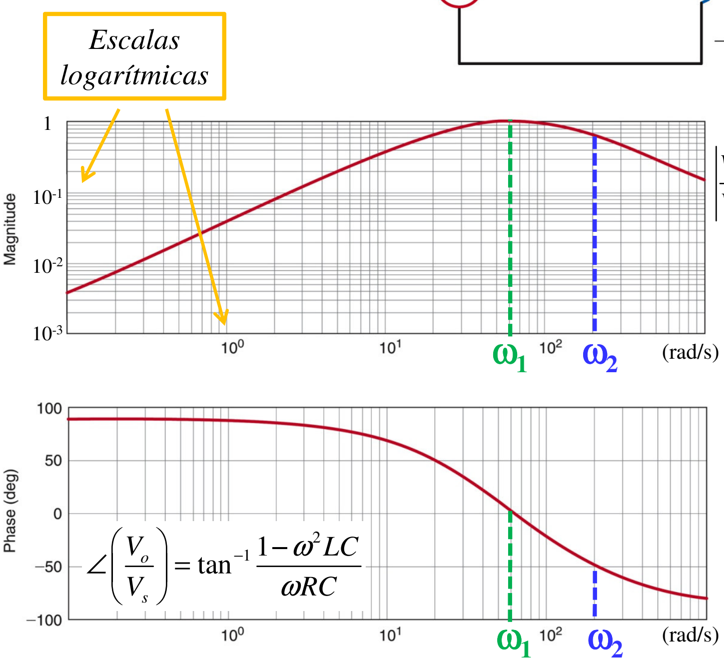
- **Exemplo**



$$V_o = \frac{Z_R}{Z_R + \left(Z_C + Z_L\right)} V_s$$

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{Z_R}{Z_R + \left(Z_C + Z_L\right)}$$

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$



$$\left|\frac{V_o}{V_s}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1-\omega^2 LC}{\omega RC}\right)^2}}$$

$$\angle\left(\frac{V_o}{V_s}\right) = \tan^{-1}\frac{1-\omega^2 LC}{\omega RC}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_s(t) &= 10\cos\left(\omega_1 t + 0^\circ\right) \quad V \\ v_o(t) &= 10\cos\left(\omega_1 t + 0^\circ\right) \quad V \end{aligned}}$$

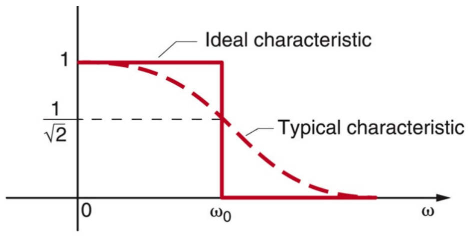
$$\boxed{\begin{aligned} v_s(t) &= 10\cos\left(\omega_2 t + 0^\circ\right) \quad V \\ v_o(t) &= 7\cos\left(\omega_2 t - 50^\circ \frac{\pi}{180^\circ}\right) \quad V \end{aligned}}$$

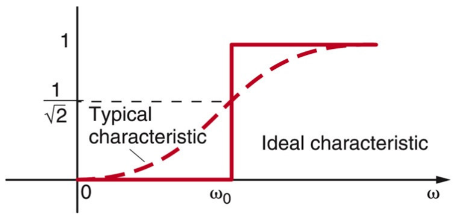
Filtros Passa-baixo e Passa-alto

- **Usar a dependência da frequência para filtrar sinais de acordo com um determinado critério**
- **Filtro passa-baixo**
  - deixa passar sinais de baixa frequência
  - atenua (elimina) sinais de alta frequência
- **Filtro passa-alto**
  - deixa passar sinais de alta frequência
  - atenua (elimina) sinais de baixa frequência
- **Medição do módulo em dB**
  - dB = deciBel
  - 1/10 Bel

$$\left|\frac{V_o}{V_i}\right|_{dB} = 20\log\frac{|V_o|}{|V_i|}$$

$\lvert\ \rvert$	0.01	0.1	1/2	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100
$\lvert\ \rvert_{dB}$	−40	−20	−6	−3	0	3	6	20	40





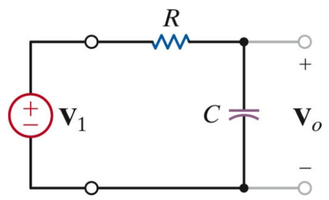
ω_0 – frequência de corte a -3dB

$$-3dB \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$$

(½ potência)

Filtros Passa-baixo e Passa-alto

- **Filtro Passa-baixo**

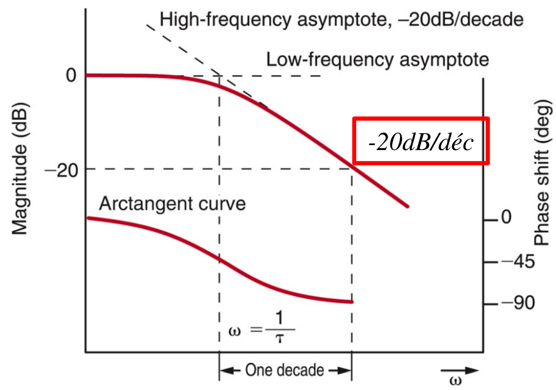


$$Z_R = R$$

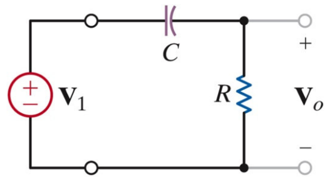
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\tau = RC$$

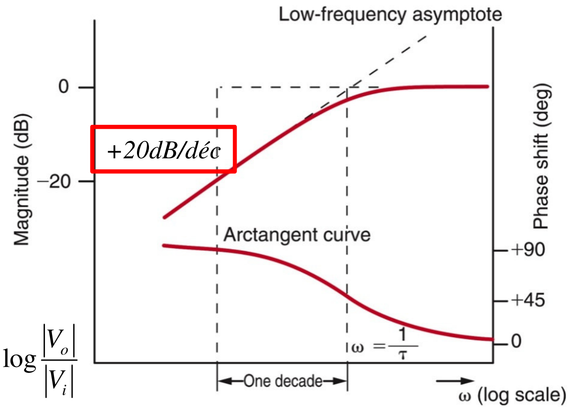
$$\frac{V_o}{V_1} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$



- **Filtro Passa-alto**



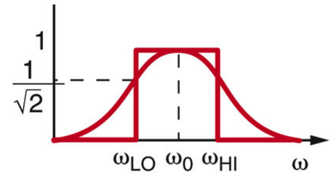
$$\frac{V_o}{V_1} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

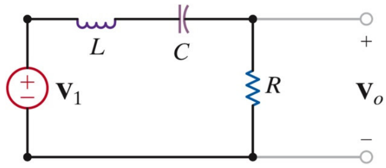


$$\left|\frac{V_o}{V_i}\right|_{dB} = 20\log\frac{|V_o|}{|V_i|}$$

Filtros Passa-banda e Rejeita-banda

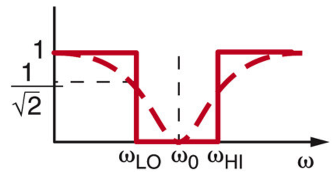
- **Filtro Passa-banda**
  - deixa passar uma banda de frequências
  - ω_0 – frequência central
  - ω_{LO}, ω_{HI} – limites da banda de passagem (ω_{HI} -ω_{LO})

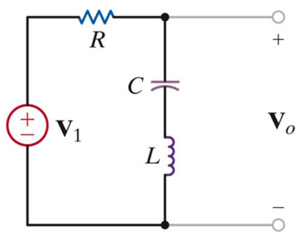




$$\frac{V_o}{V_1}=\frac{Z_R}{Z_R+\left(Z_L+Z_C\right)}=\frac{R}{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

- **Filtro Rejeita-banda**
  - rejeita uma banda de frequência (ω_{HI} -ω_{LO})

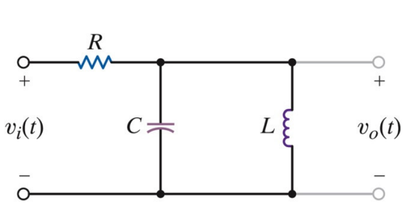


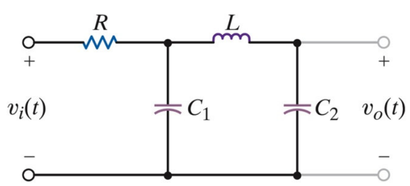


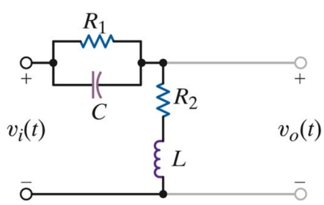
$$\frac{V_o}{V_1}=\frac{Z_L+Z_C}{Z_R+\left(Z_L+Z_C\right)}=\frac{j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

Exemplos de aplicação

- **Qual a impedância equivalente de Thévenin vista pelo gerador de entrada?**
- **Qual a resposta em frequência (módulo e fase)?**
- **Qual o tipo de filtragem realizada pelo circuito?**







- **Ajuda para simplificar os cálculos**
  - quando circuitos são mais complexos
  - considerar variável $s = j\omega$ $\rightarrow$ $Z_L=sL$ $Z_C=1/(sC)$
  - fazer cálculos com variável s
  - no fim substituir s por $j\omega$