Exame de Complementos de Análise Matemática

Duração: 2h

Exame de Recurso: PARTE I e PARTE II (exceto as questões 4.(c) e 8.). Peso na nota final: 100%.

Recurso 3ºteste: PARTE II (exceto questão 5). Peso na nota final: 33%.

PARTE I

1. Relativamente a cada uma das proposições seguintes indique, **justificando**, se é verdadeira ou falsa:

   (a) A equação diferencial $(x^2 + y)dx - xdy = 0$ é linear se x for considerada a variável independente.
   Reposta: Verdadeira porque pode ser escrita da forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, com $P(x) = -\frac{1}{x}$ e $Q(x) = x$.

   (b) A função $\mu(x, y) = e^{xy}$ é um fator integrante da equação diferencial $(3xe^{-xy} + y)\, dx + (x + 4e^{-xy} \cos y)$.
   Reposta: Verdadeira, $\frac{\partial(3x+ye^{xy})}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} = \frac{\partial(xe^{xy}+4\cos y)}{\partial x}$

2. (a) Mostre que a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{2}{3}e^{-\frac{y}{x}}$$

   é homógenea.
   Reposta: Como $f(tx, ty) = t^0 f(x, y)$ a função f é homogénea de grau 0, e portanto a equação diferencial dada é homogénea de primeira ordem.

   (b) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{2}{3}e^{-\frac{y}{x}}, \quad y(1) = 0.$$

   Solução: Usando a mudança de variável $y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ resulta:
   $v + x\frac{dv}{dx} = v + \frac{2}{3}e^{-v}$
   $\Leftrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{2}{3}e^{-v}$
   $\Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{v}dv = \frac{1}{x}dx$
   $\Leftrightarrow \frac{3}{2}\int e^{v}dv = \int \frac{1}{x}dx$
   $\Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{v} = \ln|x| + c$
   onde c é uma constante arbitrária.

   Substituindo $v = \frac{y}{x}$, a família de soluções da equação diferencial dada é:

$$\frac{3}{2}e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + c$$

Dado que $y(1) = 0$ vem que $c = \frac{3}{2}e^0 - \ln(1) = \frac{3}{2}$. Logo o solução do PVI dado é

$$\frac{3}{2}e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + \frac{3}{2}$$

3. Mostre que e^x e e^{-x} são soluções linearmente independentes da equação diferencial

$$y'' - y = 0.$$

Solução: $y = e^x$ temos $y'' = e^x$ e $y = e^{-x}$ temos $y'' = e^{-x}$, logo são soluções.

$$W\left(e^x, e^{-x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^0 - e^0 = -2 \neq 0$$

Logo, as soluções são linearmente independentes.

PARTE II

4. Relativamente a cada uma das proposições seguintes indique, **justificando**, se é verdadeira ou falsa:

(a) Da aplicação do Teorema de Convolução resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)(s-5)}\right\} = \int_0^t \sin(2x)e^{5(t-x)}dx.$$

Reposta: Falsa. Definindo $F(s) = \frac{1}{s^2+4}$ e $G(s) = \frac{1}{s-5}$ tem-se $f(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$ e $g(t) = e^{5t}$. Assim, aplicando o teorema da Convolução temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)(s-5)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\sin(2x)e^{5(t-x)}dx.$$

(b) A série de Fourier em senos da função $f(x) = 4$, no intervalo $0 < x < 2$, é dada por

$$\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right).$$

Solução: Verdadeira.

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^2 4\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \\ &= \frac{8}{n\pi}\left[-\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 \\ &= \frac{8}{n\pi}\left(-\cos(n\pi) + \cos(0)\right) \\ &= \frac{8}{n\pi}\left(-(-1)^n + 1\right) \end{aligned}$$

Para n par $b_n = 0$ e para n ímpar $b_n = \frac{16}{n\pi}$. Logo

$$f(x) = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right).$$

(c) As funções $f(x,y) = -e^{-x-6y}$ e $g(x,y) = \cos\left(\frac{x}{2}+3y\right)$ são soluções da equação diferencial parcial

$$3\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Reposta: Verdadeira. Considerando $u = f(x,y)$ temos $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x-6y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = 6e^{-x-6y}$. Fazendo a substituição vem $3e^{-x-6y} - \frac{6}{2}e^{-x-6y} = 0$. Logo $f(x,y)$ é solução da EDP.

Considerando $u = g(x,y)$ temos $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+3y\right)$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -3\sin\left(\frac{x}{2}+3y\right)$. Fazendo a substituição vem $-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+3y\right) + \frac{3}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+3y\right) = 0$. Logo $g(x,y)$ é solução da EDP.

5. Recorrendo ao método dos coeficientes indeterminados, determine a solução geral da equação diferencial

$$y'' - y = 2e^{-x} - x,$$

sabendo que as funções e^x, e^{-x} são soluções da equação homogénea associada.

Solução: A solução particular é da forma

$$y_p = A + Bx + Cxe^{-x},$$

pelo que

$$y_p' = B + Ce^{-x}(1-x)$$
$$y_p'' = Ce^{-x}(x-2)$$

Dado que y_p deve verificar

$$y'' - y = 2e^{-x} - x$$

para todo x real, tem-se

$$Ce^{-x}(x-2) - A - Bx - Cxe^{-x} = 2e^{-x} - x$$
$$\Leftrightarrow -2Ce^{-x} - A + Bx = 2e^{-x} - x$$
$$\Leftrightarrow -2C = 2 \wedge -B = -1 \wedge A = 0$$
$$\Leftrightarrow C = -1 \wedge B = 1 \wedge A = 0$$

pelo que a solução particular é

$$y_p = x - xe^{-x}.$$

Portanto a solução geral é

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{-x} + x - xe^{-x}.$$

6. (a) Determine a transformada de Laplace da função $h(t) = \begin{cases} 0 & se \ \ 0<t<2 \\ t & se \ \ 2<t<4 \\ 0 & se \ \ \ \ \ t>4 \end{cases}$.

Solução:

Tem-se

$$h(t) = \begin{cases} 0 & se \ \ 0<t<2 \\ t & se \ \ t<2 \end{cases} + \begin{cases} 0 & se \ \ 0<t<4 \\ -t & se \ \ t<4 \end{cases} = tu_2(t) - tu_4(t).$$

Considerando $f(t-2) = t$ e $g(t-4) = t$, temos $f(u) = u+2$ (fazendo a mudança de variável $u = t-2$) e $g(u) = u+4$ (fazendo a mudança de variável $u = t-4$). Portanto,

$$F(s) = \mathcal{L}(f(u)) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} \text{ e } G(s) = \mathcal{L}(g(u)) = \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}(h(t)) = \mathcal{L}(f(t-2)u_2(t)) - \mathcal{L}(g(t-4)u_4(t)) =$$

$$= e^{-2s}F(s) - e^{-4s}G(s) = e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right) - e^{-4s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{4}{s}\right).$$

6. (b) Determine, aplicando a transformada de Laplace, a solução do PVI

$$y'' + y = u_1(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Soluçlão: $y(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$.

$$y(t) = u_1(t)\left(1 - \cos(t-1)\right) + \sin(t).$$

7. (a) Para $\lambda > 0$, determine os valores próprios e as funções próprias do PVF:

$$y'' + 4\lambda y = 0, \ 0 < x < 1, \ \ y(0) = y(1) = 0.$$

Solução: O PVF tem solução não trivial $y(x) = c_2 \sin(n\pi x)$ para $\lambda_n = \frac{(n\pi)^2}{4}, n \in N$. Logo, para os valores próprios $\lambda_n = \frac{(n\pi)^2}{4}, n = 1, 2, ...$ as funções próprias o PVF são

$$y_n(x) = \sin(n\pi x).$$

(b) Determine a solução do seguinte PVF, $u(x,t)$, usando o método de separação de variáveis:

$$\begin{cases} u_t + xu_x = 2u, & x,t > 0 \\ u(x,0) = x - 3x^4, & x > 0. \end{cases}$$

Solução: Admitindo que a solução $u(x,t)$ se pode escrever na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ resulta para $u_t + xu_x = 2u$:

$$X(x)T'(t) + xX'(x)T(t) = 2X(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = 2 - x\frac{X'(x)}{X(x)}.$$

Assim, deverá-se ter

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda, \quad , 2 - x\frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda$$

A equação $\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$ conduz a $T(t) = e^{\lambda t}$ e, por outro lado a equação $2 - x\frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{2-\lambda}{x}$ conduz a $\ln(X(x)) = (2-\lambda)\ln(x) \Leftrightarrow X(x) = x^{2-\lambda}$.
Assim,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n x^{2-\lambda_n} e^{\lambda_n t}$$

Como se impõe que $u(x,0) = x - 3x^4$ tem-se

$$\sum_{n=1}^{N} c_n x^{2-\lambda_n} = x - 3x^4.$$

Assim, $c_1 = 1$, $\lambda_1 = 1$, $c_2 = -3$, $\lambda_2 = -2$ e $c_n = 0, n > 2$.
Logo

$$u(x,t) = xe^t - 3x^4 e^{-2t}.$$

8. Determine, aplicando a transformada de Laplace, a solução do PVI

$$\begin{cases} y' + x &= 1 \\ x' + y &= 2e^t \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$$

onde t é a variável independente.
Solução:

$$\begin{cases} X &= \frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{(s-1)^2} \\ Y &= -\frac{1}{(s-1)^2} \end{cases}$$

Assim, pela tabela, $x(t) = 1 + e^t + te^t$ e $y(t) = -te^t$.

Questão	1a)	1b)	2a)	2b)	3.	4a)	4b)	4c)	5.	6a)	6b)	7a)	7b)	8.
Exame	1	1	1	3	1	1	1	–	2	1.5	2.5	2.5	2.5	–
Parte II	–	–	–	–	–	1.5	1.5	1.5	-	2.5	3.5	3	3	3.5