Soluções da Ficha 7B - Derivação sob o sinal de integral, áreas de regiões planas

1. Derivando em ordem a x ambos os membros da equação dada, obtém-se
$$f(x^2) = \frac{3}{2}xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x - 2x^2, \quad \text{para todo o } x \neq 0,$$
donde
$$f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}xe^{\sqrt{x}} - 2x, \quad \text{para todo o } x \neq 0.$$
Como a função f é contínua, tem-se também $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$, pelo que
$$f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}xe^{\sqrt{x}} - 2x, \quad \text{para todo o } x \in \mathbb{R}.$$

2. Derivando em ordem a x ambos os membros da equação dada, vem
$$f(x) = 6x + 2\cos 2x - \operatorname{sen} 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{donde} \quad f(\pi/2) = 3\pi - 2,$$
$$f'(x) = 6 - 4\operatorname{sen} 2x - 2\cos 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{donde} \quad f'(\pi/2) = 8.$$

3. Por um lado, da equação dada sai $f(0) = 0$ e, derivando duas vezes em ordem a x ambos os membros desta equação, vem ainda
$$f'(x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{2 + x^2}, \quad f''(x) = \frac{\cos x(2 + x^2) - 2x(1 + \operatorname{sen} x)}{(2 + x^2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
pelo que $f'(0) = f''(0) = \frac{1}{2}$. Por outro lado, sendo $\mathcal{P}$ um polinómio de grau 2, tem-se $\mathcal{P}(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c constantes a determinar, donde $\mathcal{P}(0) = c$, $\mathcal{P}'(0) = b$ e $\mathcal{P}''(0) = 2a$. Consequentemente, $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 0$ e $\mathcal{P}(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$.

4. Áreas.

Neste exercício, há alguns cursos que têm uma versão desta folha com uma alínea (b) que já aparecia na Folha 7A. Omitindo-a do enunciado, as soluções são as seguintes.

(a) $\text{área}(\mathcal{A}) = 2\int_0^2 \left(2 - \sqrt{4 - x^2}\right) dx = 8 - 2\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = 8 - 2\pi.$ $\quad (x = 2\operatorname{sen} t)$

(b) $\text{área}(\mathcal{A}) = \int_{-1}^0 (|x| - 2x)\, dx + \int_0^1 (2x - |x|)\, dx = -3\int_{-1}^0 x\, dx + \int_0^1 x\, dx = 2.$

(c) $\text{área}(\mathcal{A}) = \int_0^2 (-4x^2 + 4x + x^3)\, dx = \frac{4}{3}.$ As curvas intersectam-se para $x = 0$ e $x = 2$.

(d) $\text{área}(\mathcal{A}) = 2\int_0^{3/2} \left[\left(-x^2 + \frac{7}{2}\right) - \left(x^2 - 1\right)\right] dx = 8.$ As curvas intersectam-se para $x = \pm\frac{3}{2}$.

5. Áreas (apenas estabelecer o integral ou a soma de integrais).

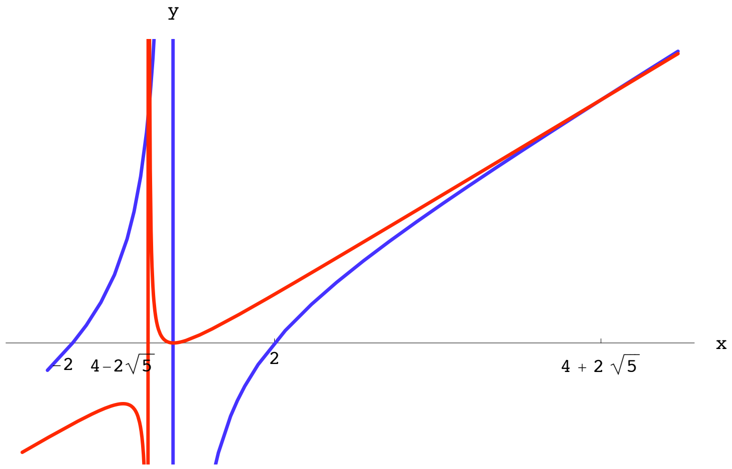
(a) área $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} \big[(x+1) - (x^2-1)\big]\, dx.$

(b) área $B = \displaystyle\int_{-1}^{0} e^x\, dx + \int_{0}^{2} e^{-x}\, dx.$

(c) O contorno da região C é definido pelo eixo OX e pelas hipérboles (*cf.* a figura)

$$y = \frac{x^2-4}{2x} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{x^2}{1+2x},$$

que se intersectam nos pontos de abcissas $x = 4-2\sqrt{5}$ e $x = 4+2\sqrt{5}$.



Notar que

$$y \leq x^2 - 2xy \Longleftrightarrow y\,(1+2x) \leq x^2,$$

donde

$$y \leq \frac{x^2}{1+2x} \quad \text{se} \quad x > -\frac{1}{2},$$

e que

$$x^2 - 2xy \leq 4 \Longleftrightarrow 2xy \geq x^2 - 4,$$

donde

$$y \geq \frac{x^2-4}{2x} \quad \text{se} \quad x > 0 \qquad \text{e} \qquad y \leq \frac{x^2-4}{2x} \quad \text{se} \quad x < 0.$$

Significa então que a região C é limitada inferiormente pelo eixo OX e pelo ramo da hipérbole $y = \dfrac{x^2-4}{2x}$ correspondente a $x > 0$, e superiormente pelo ramo da hipérbole $y = \dfrac{x^2-4}{2x}$ correspondente a $x < 0$ e ainda pelo ramo da hipérbole $y = \dfrac{x^2}{1+2x}$ correspondente a $x > -\dfrac{1}{2}$. Assim,

$$\text{área}\, C = \int_{-2}^{4-2\sqrt{5}} \frac{x^2-4}{2x}\, dx \;+\; \int_{4-2\sqrt{5}}^{2} \frac{x^2}{1+2x}\, dx \;+\; \int_{2}^{42\sqrt{5}} \left(\frac{x^2}{1+2x} - \frac{x^2-4}{2x}\right) dx.$$

6. Centros de massa.

   Considerar que a densidade de massa é dada, em cada ponto, por $\rho(x,y) = kx$.

   Sejam m a massa da placa e (X,Y) as coordenadas do centro de massa.

   (a) $m = \dfrac{1}{2}a^2bk, \quad X = \dfrac{1}{3m}a^3bk, \quad Y = \dfrac{1}{4m}a^2b^2k.$

   (b) $m = 12k, \quad X = 0, \quad Y = \dfrac{8}{9}.$

7. O tempo pedido é $t_{(v=5)} = \displaystyle\int_{10}^{5} \frac{10}{-u\sqrt{u}}\, du = 2\left(2\sqrt{5} - \sqrt{10}\right).$

8. A capacidade cardíaca é dada por $\dfrac{8}{\displaystyle\int_0^{12} \frac{1}{4}t(12-t)\, dt} = \dfrac{1}{9}.$