

Análise Matemática B

— folha 1 — Séries de Potências ————— 2011'12 ————

1. Para cada uma das seguintes séries de potências, determine o raio de convergência e o intervalo de convergência.

$$i) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2};$$

$$ii) \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$$

$$iii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$$

$$iv) \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n$$

$$v) \sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$$

$$vi) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{2n}$$

$$vii) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$viii) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$ix) \sum_{n=0}^{+\infty} n5^n x^n$$

$$x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^n}{10^n}$$

$$xi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} (2x-1)^n$$

$$xii) \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} (3x+2)^n$$

$$xiii) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{n+3}$$

$$xiv) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\log n}$$

$$xv) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+2)}$$

$$xvi) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{n^3}$$

2. Suponha que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge para $x = -4$ e diverge para $x = 6$.

O que pode dizer sobre a convergência de cada uma das seguintes séries numéricas?

$$i) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n;$$

$$ii) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n 8^n$$

$$iii) \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (-3)^n$$

$$iv) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n c_n 9^n$$

3. Determine a série de Maclaurin de cada uma das seguintes funções e identifique o raio de convergência:

$$i) f(x) = e^x;$$

$$ii) f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$iii) f(x) = \sin x$$

$$iv) f(x) = \cos x$$

$$v) f(x) = e^{x^2}$$

$$vi) f(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$vii) f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$viii) f(x) = \sqrt{x}$$

$$ix) f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x) f(x) = \arctan(x)$$

4. Determine a série de Taylor de cada uma das funções que se segue em torno do ponto a :

$$i) f(x) = \sin x, \quad a = \frac{\pi}{3};$$

$$ii) f(x) = e^x, \quad a = 3$$

$$iii) f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 1$$

$$iv) f(x) = \log x, \quad a = 2$$

$$v) f(x) = \cos, \quad a = -\frac{\pi}{4}$$

$$vi) f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad a = -3$$

5. Considere a função $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Determine o polinómio de Taylor de f de ordem 2 em torno de $\frac{\pi}{3}$.

(b) Calcule $\cos 61^\circ$ utilizando o polinómio de Taylor da alínea anterior e calcule um majorante do valor absoluto do erro cometido.

6. Utilizando um polinómio de Taylor, calcule \sqrt{e} com erro inferior a 10^{-3} .