6.1. Introdução

Trabalho

- **Vida quotidiana**
  - Sentido muito geral.
  - Qualquer forma de actividade que exija esforço
- **Física**
  - Sentido muito restrito.
  - É definido a partir de força e deslocamento.

O conceito de trabalho está associado ao de energia: quando um sistema realiza trabalho sobre outro, há uma transferência de energia de um para outro sistema.

O que é a Energia ?

É costume associar-se a palavra "energia" a algo indispensável para que certas tarefas possam ser realizadas.

Descartes (1596-1650),

Tenta avaliar os efeitos das forças exercidas por um corpo sobre outro quando chocam e identificar os factores que determinam esses efeitos.

Atribuía-se, então, aos corpos "*uma força própria dos corpos em movimento*" que lhes permitia actuar sobre outros corpos, pondo-os também em movimento, se estavam em repouso, ou desviando-os das suas trajectórias, se já se moviam, ou deformando-os, etc.

Descartes admitiu que essa força dependia da **massa do corpo** e da **velocidade** no momento do embate.

Leibniz (1646-1716)

Em 1686 propõe que a medida dessa força a que chamou *força viva*, fosse dada pelo produto de mv^2.

Leibniz fundamentou a sua proposta em experiências que consistiram em deixar cair esferas livremente, de várias alturas, sobre superfícies moles de argila, entendendo que as ***forças vivas*** que animam os corpos, em queda livre, seriam tanto mais intensas quanto mais profundas fossem as marcas deixadas por eles na argila.

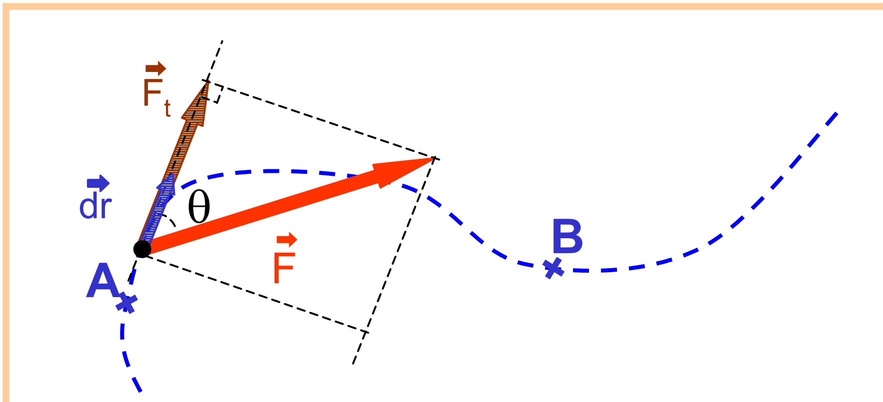
Young (1773-1829)

A palavra **energia** é utilizada pela primeira vez em 1807 pelo físico inglês Young traduzindo o conceito de ***força viva*** (associado à "capacidade de realizar esforços")

Em Física diz-se que uma partícula ou um sistema de partículas que tem a capacidade de realizar trabalho possui energia. Esta grandeza física pode ter várias formas, como iremos ver.

6.2. Trabalho realizado por uma força

Uma partícula move-se ao longo de uma trajectória sob a acção de uma força $\vec{F}$.
Num intervalo de tempo muito curto, Δt, a partícula efectua um deslocamento $\Delta\vec{r}$.



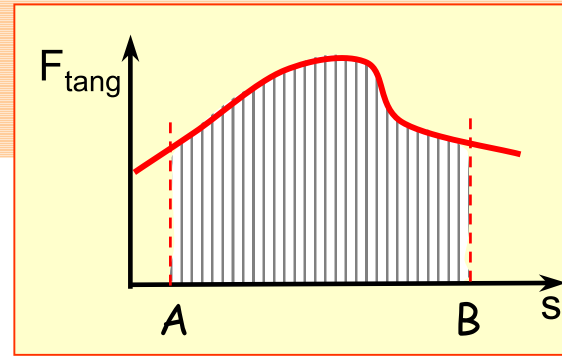
O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ quando o seu ponto de aplicação efectua um deslocamento $d\vec{r}$ é definido pelo produto escalar:

$$\boxed{dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F.ds.cos\theta = F_t.ds}$$

O **trabalho total** realizado sobre a partícula no trajecto AB, é a soma de todos os trabalhos infinitesimais realizados durante os sucessivos deslocamentos infinitesimais:

$$= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F_t \cdot ds$$

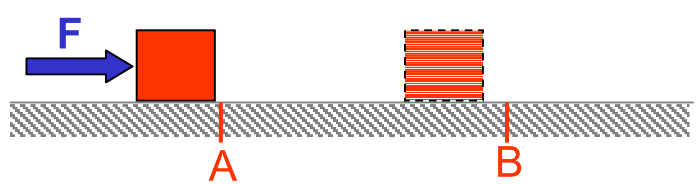
$\Leftrightarrow$



Unidade SI de trabalho: newton × metro = joule (J)

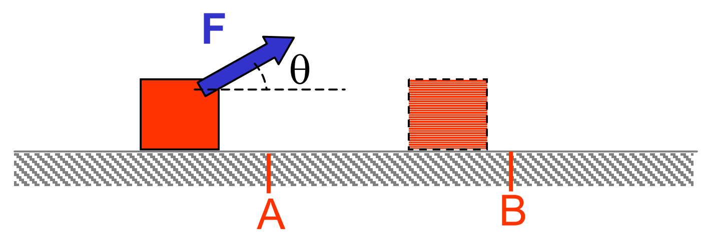
6.2.1. A força é constante e actua na direcção do deslocamento

Se a força que actua num corpo é constante em direcção e sentido, o movimento do corpo é rectilíneo.



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F_t \cdot ds = F \times (s_A - s_B) \quad \Leftrightarrow \quad W_{AB} = F \times \Delta s$$

6.2.2. A força é constante, mas não actua na direcção do deslocamento



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F_t \cdot ds = F \times \cos\theta \times \Delta s \iff \boxed{W_{AB} = F \times \cos\theta \times \Delta s}$$

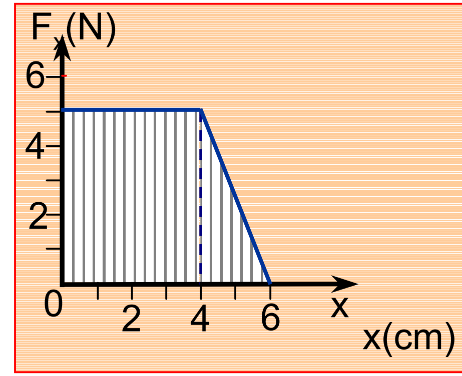
Se em vez de uma só força a actuar, várias forças (F_1, F_2..., F_n) estiverem a actuar o trabalho total é a soma dos trabalhos parciais:

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots\dots\dots \vec{F}_n$$

$$W_{\text{total}} = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} + \ldots + \int_A^B \vec{F}_n \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}_{\text{resultante}} \cdot d\vec{s}$$

6.2.3. Trabalho realizado por uma força variável

Exemplo:
Uma força F_x varia com a posição como se mostra na figura. Calcule o trabalho realizado pela força sobre uma partícula quando esta se move desde x = 0 até x = 6 cm.



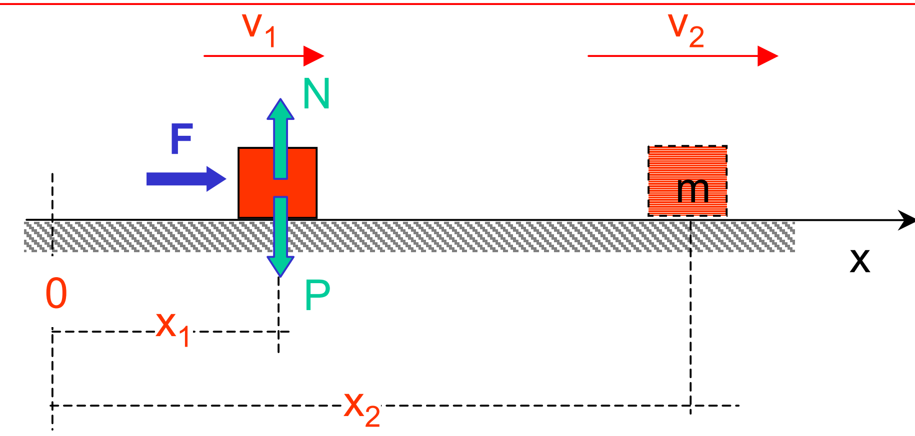
A força, $\vec{F}$, é dada por:

$$\begin{cases} 0 < x < 4 \Rightarrow F = 5 \ (N) \\ 4 < x < 6 \Rightarrow F = 15 - 2.5x \ (N) \end{cases}$$

O trabalho é então:

$$\begin{cases} W_{0\to 4} = \int_0^4 5dx = 5 \times 4 = 20 \ (J) \\ W_{4\to 6} = \int_4^6 (15 - 2.5x)dx = \left[15x - 1.25x^2\right]_4^6 = 5 \ (J) \end{cases} \Rightarrow W_{Total} = W_{0\to 6} = 25 \ (J)$$

6.3. Energia cinética. Teorema da Energia cinética



A figura mostra um objecto que se move sem atrito numa superfície horizontal, sob a acção de uma força **F**.

Se a força **F** actua no objecto, este vai adquirir aceleração (2ªlei de Newton), ou seja a sua velocidade vai ser alterada.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F = ma \\ N - P = 0 \end{cases}$$

Trabalho total realizado entre x_1 e x_2:

$$W_{1\to 2} = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = m\int_{x_1}^{x_2} a\,dx = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv$$

$$= m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2}_{\text{Energia cinética (2)}} - \underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2}_{\text{Energia cinética (1)}}$$

Teorema da energia cinética:

O trabalho total exercido sobre um objecto é igual à variação de energia cinética do objecto.

$$\boxed{W_{A\rightarrow B}^{total}} = E_B^{cinética} - E_A^{cinética}$$

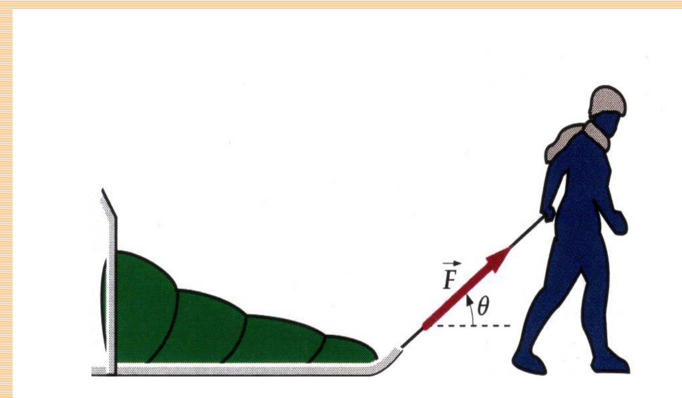
Trabalho realizado pela **resultante** das forças que actuam no corpo.

Exemplo

Um esquimó puxa um trenó de massa 80 Kg com uma força de 180 N, numa direcção de 20° com a horizontal.

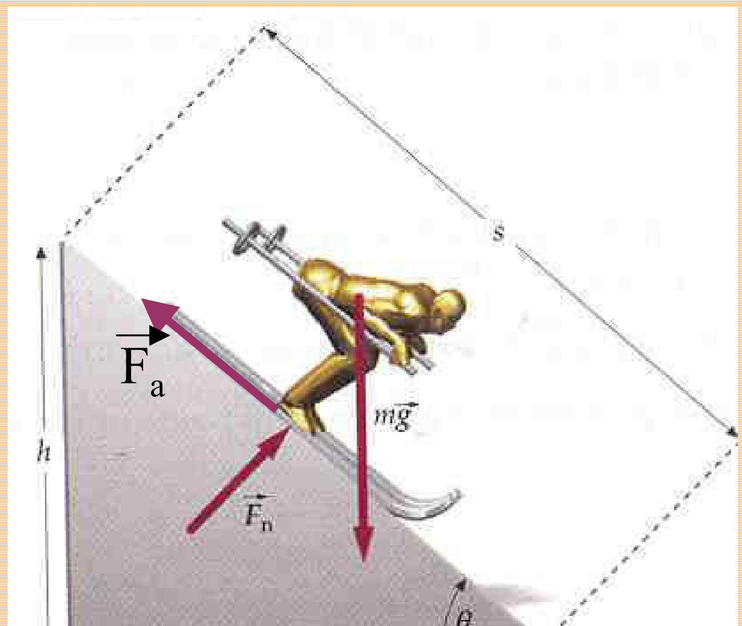
a) Qual o trabalho realizado pelo esquimó.

b) Qual a velocidade que o trenó terá ao fim de se deslocar 5 m a partir do repouso.



Exemplo

Uma esquiadora com massa de 58 Kg desce uma pista de ski (inclinação 25°). Uma força de atrito cinético com o módulo de 70 N opõe-se ao seu movimento. No cimo da pista a velocidade da esquiadora é 3.6 î(m/s). Desprezando a resistência do ar, calcule a velocidade da esquiadora depois de percorrer 57 m.



6.4. Potência e rendimento

A potência traduz o trabalho que é realizado por unidade de tempo.

- Se a quantidade de trabalho, **W**, é realizado no intervalo de tempo, Δ**t**, a potência média, $\overline{P}$, é definida como:

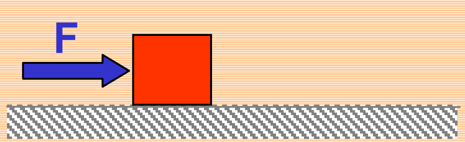
$$\overline{P} = \frac{W}{\Delta t}$$

- Se o trabalho **W** é expresso como função do tempo, a potência instantânea, P, desenvolvida em qualquer instante é definida como:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Unidade SI de potência: joules/s = watt (W)

Se o trabalho for realizado por uma força constante:



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \Longrightarrow \boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Exemplo:

Um Cadillac acelera de 0 a 96 km/h em 6.5 s.

a) Qual é a potência do Cadillac ?

b) Quanto tempo demorará a acelerar desde 80 km/h até 112 km/h ?

96 *km/h* = 26.67 *m/s*; 80 *km/h* = 22.22 *m/s*; 112 *km/h* = 31.11 *m/s*

a) $$W = E_c^{final} - E_c^{inicial} = \frac{1}{2} \times 1500 \times \left(26.67^2 - 0\right) = 5.33 \times 10^5 \ J$$

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{5.33 \times 10^5 \ J}{6.5 \ s} \Leftrightarrow P = 82.1 \ kW = 110 \ CV$$

b) $$P = \frac{E_c^{final} - E_c^{inicial}}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{1/2 \times 1500 \times \left(31.11^2 - 22.22^2\right)}{82.1 \times 10^3} = 4.33 \ s$$

• Eficiência mecânica ou rendimento

Chama-se eficiência ou rendimento (η) à razão entre o trabalho realizado por uma máquina e a energia que é necessário fornecer à máquina para que ela realize esse trabalho.

$$\eta = \frac{\textit{Trabalho realizado pela máquina}}{\textit{Energia fornecida à máquina}}$$

$\boxed{\eta < 1}$, porque no funcionamento da máquina há sempre dissipação de energia. As forças de atrito realizam trabalho que é dissipado sob a forma de calor.

• Energia Potencial

Vimos que o trabalho total realizado sobre uma partícula é igual à variação da energia cinética da partícula.

Mas muitas vezes estamos interessados, não numa partícula, mas no que sucede quando se realiza trabalho sobre um sistema de partículas.

Por vezes o trabalho realizado pelas forças sobre um sistema não aumenta a energia cinética do sistema, mas a energia fornecida é armazenada na forma de **energia potencial.**

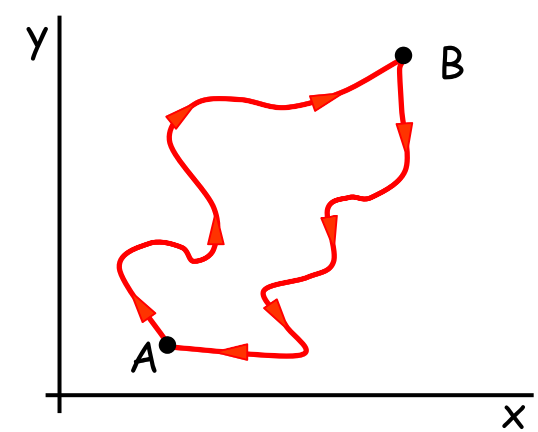
A energia potencial de um sistema representa a capacidade de esse sistema realizar trabalho por causa da sua configuração.

Forças conservativas

Se o trabalho realizado por uma força para mover um objecto entre duas posições é independente da trajectória do movimento, a força é chamada conservativa.

exemplos:

- força gravítica,
- força elástica



Se a força é conservativa: $$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{E_p(A)}^{E_p(B)} dE_p = E_p(A) - E_p(B)$$

Então: $\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p$ mas $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

Temos assim: $F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$

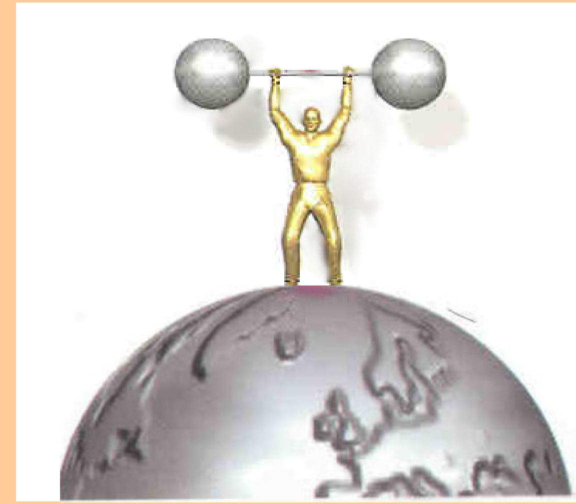
Concluímos assim que, para uma **força conservativa**, temos:

$$dE_p = -\vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\dfrac{dE_p}{dx} \\ F_y = -\dfrac{dE_p}{dy} \\ F_z = -\dfrac{dE_p}{dz} \end{cases}$$

• Energia Potencial Gravítica

Exemplo:

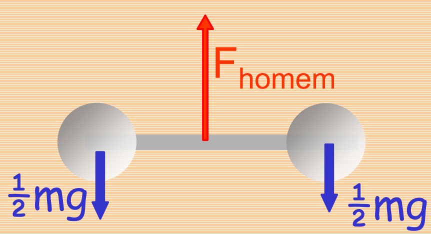
Um homem levanta um haltere, mantendo a velocidade constante, durante o levantamento.



Observação:

O homem realiza trabalho, mas a energia cinética do haltere não aumenta. Mas se o homem sair o haltere vai "ganhar" energia cinética.

• Considerando apenas as forças aplicadas no haltere:



$$\text{Se } V = c^{te} \Rightarrow \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{homem}} + \vec{P}_{\text{haltere}} = 0,$$

$$\text{Se } \sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow W_{total} = 0 \Rightarrow \Delta E_{Cinética} = 0$$

.....está tudo bem!

• Considerando o sistema Terra - haltere:

O homem realiza trabalho sobre o sistema, então o trabalho realizado pelo homem tem que ser igual à variação de energia do sistema. Neste caso o sistema não "ganha" energia cinética "ganha" energia potencial.

$$\Delta E_{\text{sistema}} = W_{\text{forças exteriores}}$$

$$\Delta E_{\text{sistema}} = F_{\text{homem}} \times \Delta s$$

mas como $\vec{a}_{\text{haltere}} = 0, \sum \vec{F}_{\text{haltere}} = 0 \Rightarrow -mg + F_{\text{homem}} = 0$

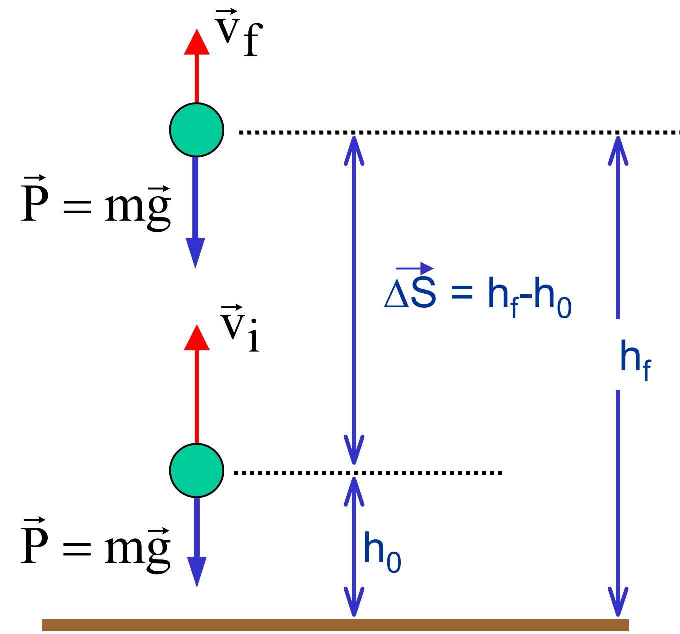
$$\begin{cases} F_{\text{homem}} = mg \\ \Delta s = h \end{cases} \Rightarrow \Delta E_{\text{sistema}} = \boxed{mgh}$$

Energia potencial ⇔ Energia "armazenada" no sistema

A **energia potencial gravítica** de uma partícula com massa **m** é a energia que o objecto possui devido à sua posição em relação à Terra. A definição de energia potencial gravítica implica que se escolha um posição de referência para a qual a energia potencial é nula.

Exemplo:

Consideremos o movimento de um objecto de massa m muito próximo da superfície terrestre, onde a aceleração gravítica, g, é aproximadamente constante. Qual será o trabalho realizado pela força gravítica quando o objecto sobe ?



$$W_{\text{peso}} = \int_{s_o}^{s_f} \vec{F}_g . d\vec{s} \Leftrightarrow \int_{h_o}^{h_f} -(mg)\,dy \Leftrightarrow -m\,g\,(h_f - h_o)$$

$$W_{\text{peso}} = -mg \times \Delta h \Leftrightarrow W_{\text{peso}} = -\Delta E_{\text{potencial}}$$

Quando o corpo sobe:

⇒ A força gravítica realiza um trabalho negativo

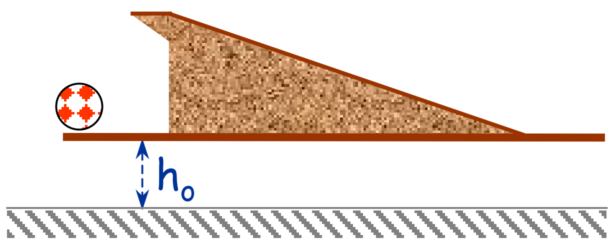
⇒ O sistema "ganha" energia potencial

⇒ para que o sistema ganhe energia, tem que haver uma força exterior a realizar trabalho sobre o sistema

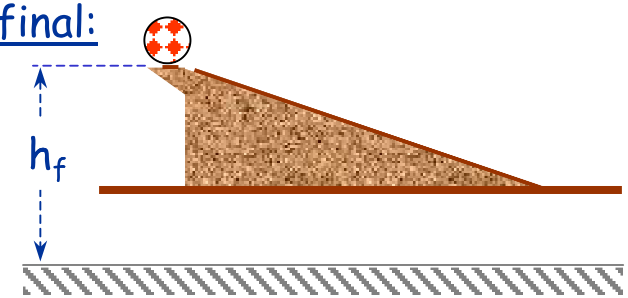
Exemplo

Consideremos o movimento de um objecto de massa m que se move ao longo de diferentes trajectórias. Qual será o trabalho realizado pela força gravítica nos diferentes casos ?

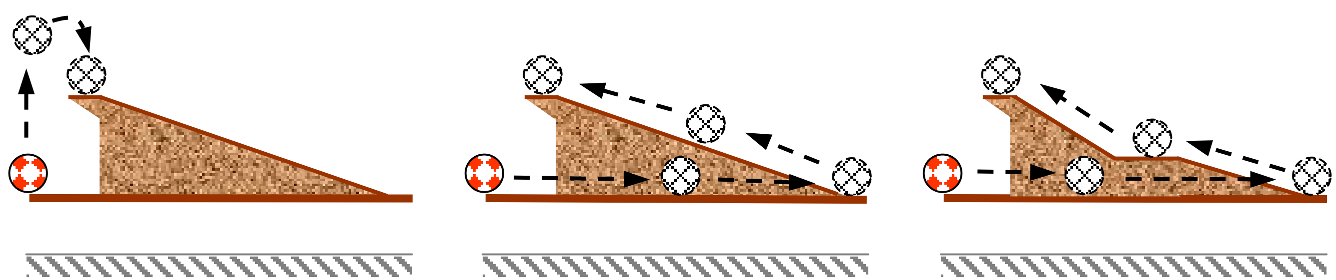
Situação inicial:



Situação final:



Três percursos diferentes:



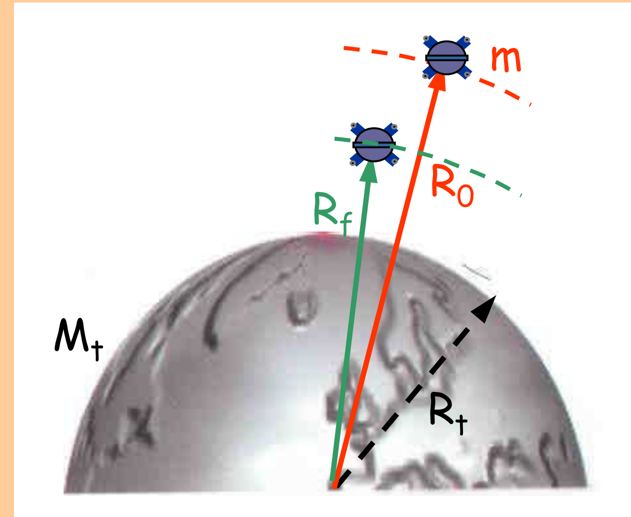
(1) (2) (3)

Em todos os trajectos o trabalho realizado pela força gravítica é igual.

O trabalho realizado pela força gravítica é independente do percurso.

Exemplo

Consideremos agora um corpo de massa $\underline{m}$ bastante afastado da da terra, que se aproxima da terra:



$$W_{peso} = \int_{r_0}^{r_f} \vec{F}_{grav} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{peso} = \int_{r_0}^{r_f} G\frac{M_T m}{r^2} \cdot dr$$

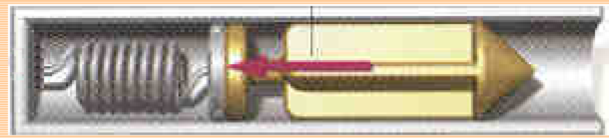
$$W_{peso} = GM_T m \times \left[-\frac{1}{x}\right]_{r_0}^{r_f}$$

$$W_{peso} = GM_T m \times \left(-\frac{1}{r_f} + \frac{1}{r_0}\right) = GM_T m\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_f}\right)$$

Também neste caso o trabalho realizado pela força gravítica é independente do percurso.

Energia Potencial Elástica

A figura mostra um sistema que consiste numa pistola de dardos e um dardo:



A mola é comprimida quando o dardo é empurrado para dentro do cano da pistola. O trabalho realizado pelo utilizador na deformação de uma mola é transformado em energia potencial elástica. Quando a mola é libertada e regressa á sua posição de equilíbrio, tem a capacidade de realizar trabalho.

Geralmente as molas obedecem à lei de Hooke

$$\vec{F} = k\Delta\vec{x}$$

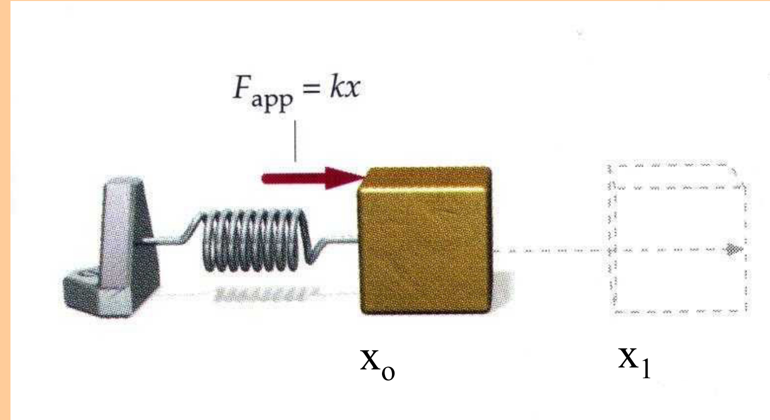
$\vec{F}$: força que dá origem á deformação

k: constante da mola

$\Delta\vec{x}$: deslocamento da mola em relação à sua posição de equilíbrio

Exemplo:

Qual o trabalho realizado pela mola quando faz deslocar o bloco da posição de equilíbrio x_0 para a posição x_1?



O trabalho da força elástica será igual a:

$$W_{mola} = \int_{x_o}^{x_1} \vec{F}_{mola} \cdot dx = \int_{x_o}^{x_1} -k \cdot x\, dx \Leftrightarrow$$

$$W_{mola} = -k\left[\frac{1}{2} k\, x^2\right]_{x_o}^{x_1}$$

$$W_{mola} = \frac{1}{2} k\, x_0^2 - \frac{1}{2} k x_1^2$$

$\frac{1}{2}kx_o^2=0$

Energia Potencial Elástica

A energia potencial elástica de uma mola é igual ao trabalho que essa mola realizaria regressando à sua posição de equilíbrio:

$$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2}$$

onde k é a constante da mola e x a sua deformação.

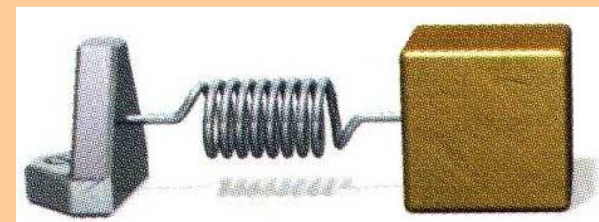
Forças não conservativas

Uma força é não conservativa quando o trabalho realizado depende trajectória do movimento.

Exemplo: força de atrito cinético

Energia potencial e equilíbrio a uma dimensão

A figura representa um sistema constituído por uma mola de constante *k* ligada a um bloco. Como varia a energia potencial com a posição ?



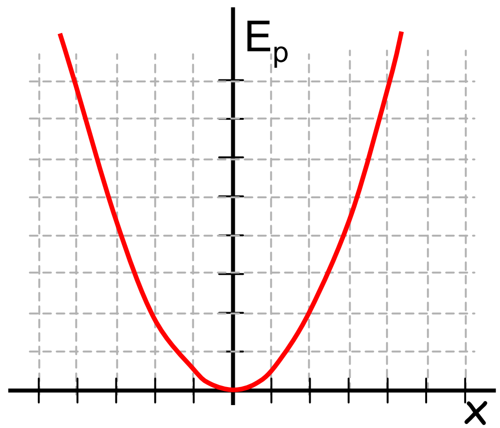
Aplicando a relação anterior, entre a força e a energia potencial associada:

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} \Leftrightarrow -kx = -\frac{dE_p}{dx} \Leftrightarrow dE_p = kxdx$$

Integrando entre a posição de equilíbrio, ***x = 0***, e uma posição ***x*** arbitrária, obtemos:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

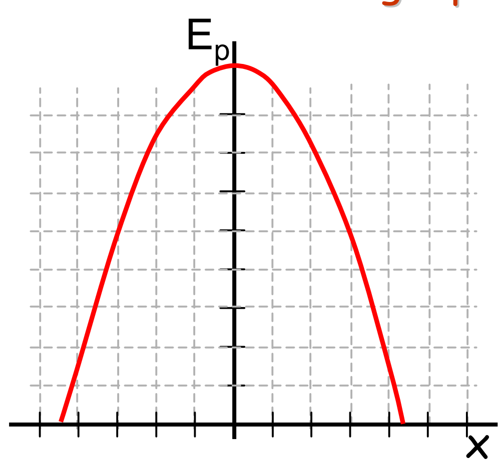
Podemos representar esta função graficamente:



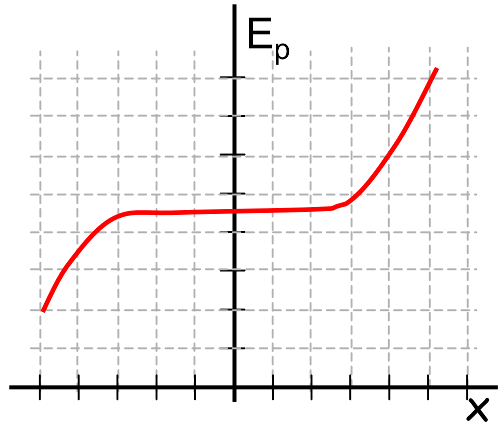
Na posição de equilíbrio a força que actua na partícula é nula, porque quando $x = 0$ (posição de equilíbrio), a derivada da energia potencial é nula.

O equilíbrio é **estável** porque um ligeiro afastamento da partícula da posição de equilíbrio tem como resultado uma força que tende a restabelecer o equilíbrio.

Outras curvas de energia potencial:



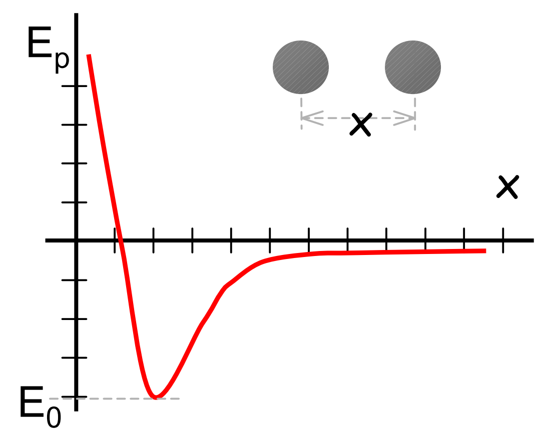
Equilíbrio instável:
qualquer pequeno deslocamento tem com resultado uma força que acelera a partícula para fora do equilíbrio.



Equilíbrio neutro:
Se o deslocamento for pequeno a força que actua na partícula é nula.

Energia potencial numa molécula diatómica:

$$E_p = E_0\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{x}\right)^{6}\right]$$



• Conservação de Energia Mecânica

Se num sistema, estiver uma partícula e sobre ela actuar só uma força conservativa:

- variação da $(E_{potencial})_{sistema}$ ⇔ trabalho realizado por uma força conservativa interna

(pela definição de $E_{potencial}$)

(T. trabalho/energia cinética) ⇕

variação da $(E_{cinética})_{sistema}$

$$\begin{cases} W_{f_{conservativa}} = -\Delta E_{potencial} \\ W_{f_{conservativa}} = \Delta E_{cinética} \end{cases} \Rightarrow -\Delta E_p = \Delta E_c$$

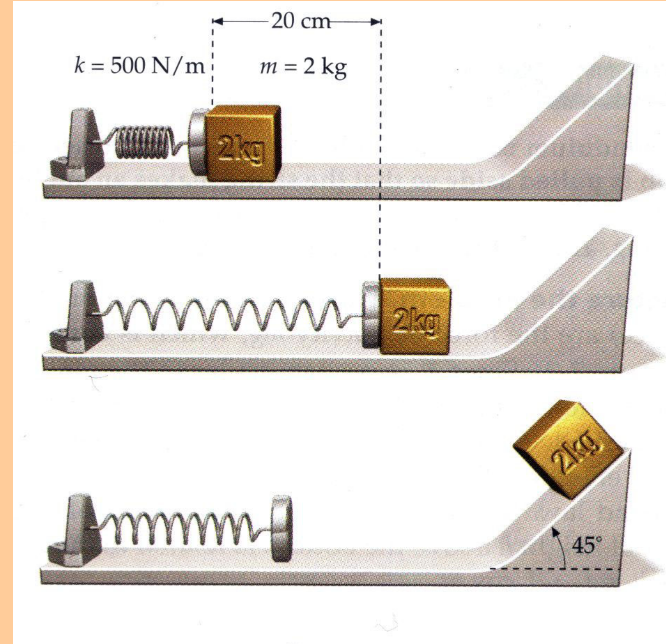
$$\Delta E_p + \Delta E_c = 0 \Leftrightarrow \Delta\left(E_p + E_c\right) = 0$$

$$\Delta E_{mecânica} = 0 \;\Rightarrow\; E_{mecânica} = \text{constante}$$

Exemplo:

O sistema da figura é utilizado para lançar blocos ao longo de um superfície com atrito.

Relacione o trabalho realizado pelo atrito com a variação da energia mecânica.



Neste exemplos temos três tipos de forças: elástica, gravítica, atrito

O trabalho realizado será:

$$W_{total} = W_{fg} + W_{fe} + W_{fa} = \left(mgh_i - mgh_f\right) + \left(\frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2\right) + W_{fa}$$

Usando o teorema da energia cinética podemos escrever:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = mg\left(h_i - h_f\right) + \frac{1}{2}k\left(x_i^2 - x_f^2\right) + W_{fa}$$

Ou seja: $$W_{fa} = \left(E_c^f + E_{pg}^f + E_{pe}^f\right) - \left(E_c^i + E_{pg}^i + E_{pe}^i\right) = E_{mecânica}^f - E_{mecânica}^i$$

Se não existirem outro tipo de forças para além da gravítica e da elástica, teremos que:

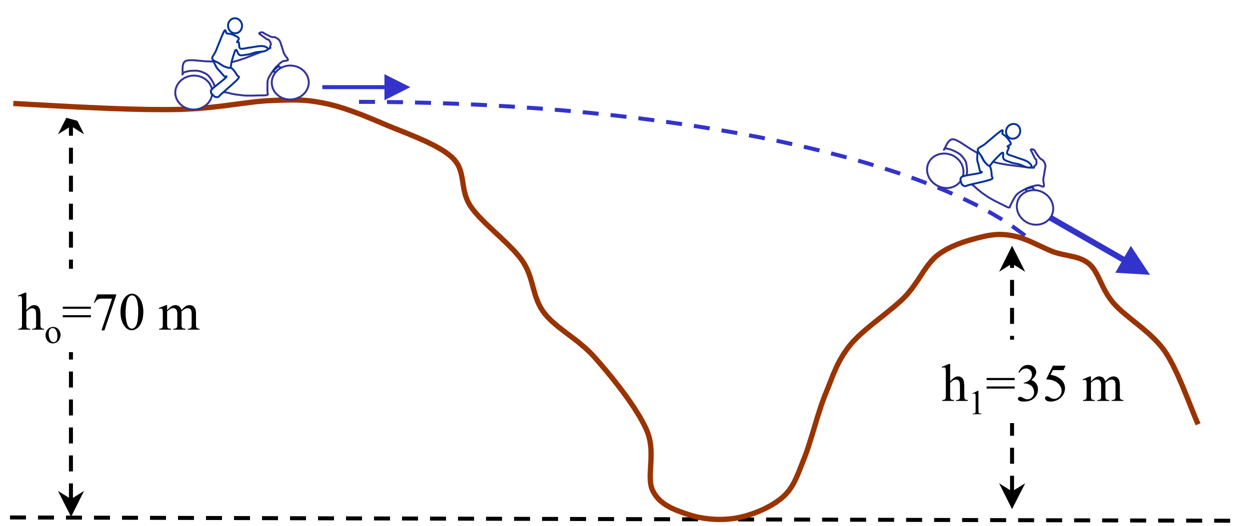
$$\Delta E = 0 \Rightarrow E = \text{constante}$$

Princípio da conservação da energia mecânica:

Quando um objecto se desloca a sua energia mecânica total permanece constante desde que não haja trabalho realizado pelas outras forças que actuam no objecto, para além das forças gravítica e elástica.

Exemplo:

um motociclista salta um vale descrevendo a trajectória mostrada. Desprezando a resistência do ar, calcule o módulo da velocidade da moto quando esta atinge o solo.



Transformação de energia

<u>A energia total do universo é constante.</u> A energia pode ser convertida de uma forma noutra, transmitida de uma região para outra, mas nunca poder ser destruída ou criada.