Sinais e Sistemas

Séries de *Fourier* – Exercícios

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Séries de *Fourier* – Exercícios

- Recordar:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)\, e^{jn2\pi f_0 t}$$ (equação de síntese)

$$c(nf_0) = C_n = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t).e^{-jn2\pi f_0 t} dt$$ (equação de análise)

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx$$ ------- Sinal par

$$c_n = -j\frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n t}{L}\right) dt$$ ------- Sinal ímpar

Séries de *Fourier* – Exercícios

- 1. Determinar na forma de série exponencial de *Fourier* a função definida por:
- $f(t) = e^{2t}$
- No intervalo: $-1 < t < 1$ e $T_0 = 2$

- Solução:

$$c_n = \frac{1}{2}\left\{\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{2t}\ \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi n t}{2}}\,\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{2t-j\pi n t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{t(2-j\pi n)}}{2-j\pi n}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{(2-j\pi n)}-\mathrm{e}^{-(2-j\pi n)}}{2-j\pi n}\right]$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{j\frac{2\pi n t}{L}} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{(2-j\pi n)}-\mathrm{e}^{-(2-j\pi n)}}{2-j\pi n}\right)\mathrm{e}^{j\pi n t}$$

Séries de *Fourier* – Exercícios

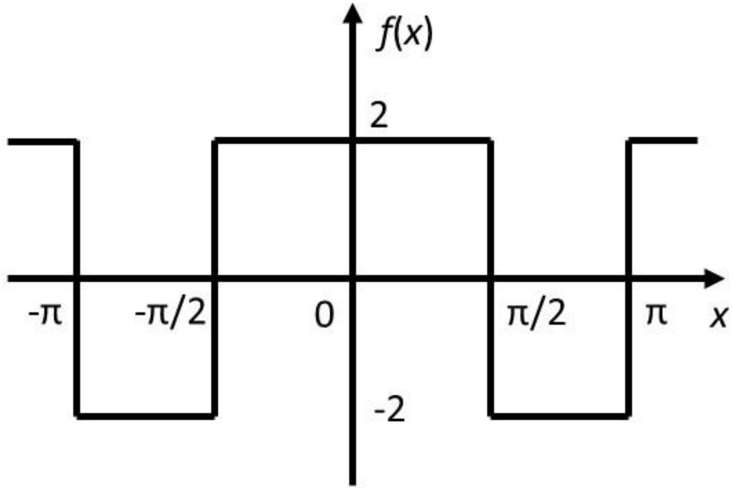
- 2. Determinar na forma de série exponencial de *Fourier* a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi \leq x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ 2, & -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq +\dfrac{\pi}{2} \\ -2, & +\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq +\pi \end{cases}$$

- $T_0 = 2\pi$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- Solução:
- A forma de onda é:



- Notar que o sinal é periódico e par -> a série não irá ter termos em seno –> $b_n = 0$
- Entre: $-\pi < x < \pi$, o valor médio é 0 -> $a_0 = 0$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- Solução:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\mathrm{d}\,x = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{2\pi}\right)\mathrm{d}\,x \qquad L = 2\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} 2\cos nx\,\mathrm{d}\,x + \int_{\pi/2}^{\pi} -2\cos nx\,\mathrm{d}\,x\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{2\sin nx}{n}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{2\sin nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\}$$

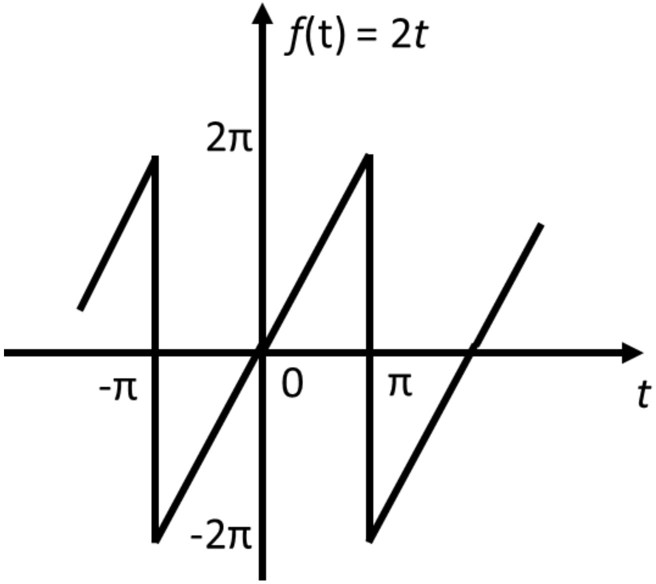
$$= \frac{1}{\pi n}\left[\left(2\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right) - \left(2\sin n\pi - 2\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \frac{4}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

- Logo:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{j\frac{2\pi n x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\mathrm{e}^{jnx}$$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- 3. Determinar na forma de série exponencial de *Fourier* a função definida por:
- $f(t) = 2t$ no intervalo: $-\pi < t < +\pi$
- $T_0 = 2\pi$



Séries de *Fourier* – Exercícios

- Solução:

$$c_n = -j\frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(t)\,\sin\left(\frac{2\pi nt}{L}\right)\mathrm{d}\,t$$

$$= -j\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} 2t\,\sin\left(\frac{2\pi nt}{2\pi}\right)\mathrm{d}\,t = -j\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt\,\mathrm{d}\,t$$

$$= -j\frac{2}{\pi}\left[\frac{-t\cos nt}{n}+\frac{\sin nt}{n^2}\right]_0^{\pi} = -j\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{-\pi\cos n\pi}{n}+\frac{\sin n\pi}{n^2}\right)-(0+0)\right]$$

- Logo:

$$c_n = j\frac{2}{n}\cos n\pi \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{j\frac{2\pi nt}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{j2}{n}\cos n\pi\right)\mathrm{e}^{jnt}$$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- 4. Mostre que a série do problema anterior é equivalente a:

$$f(t) = 4\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \ldots\right)$$

- Solução:

$$c_n = j\frac{2}{n}\cos n\pi$$

$$c_1 = j\frac{2}{(1)}\cos\pi = j\frac{2}{(1)}(-1) = -\frac{j2}{1}$$

$$c_2 = j\frac{2}{2}\cos 2\pi = j\frac{2}{2}$$

$$c_3 = j\frac{2}{3}\cos 3\pi = j\frac{2}{3}(-1) = -\frac{j2}{3}$$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- Solução:

$$c_{-1} = j\frac{2}{(-1)}\cos(-\pi) = +j\frac{2}{(-1)}(-1) = \frac{j2}{1}$$

$$c_{-2} = j\frac{2}{(-2)}\cos(-2\pi) = j\frac{2}{(-2)}(1) = -\frac{j2}{2}$$

- Como o sinal é ímpar: $c_0 = a_0 = 0$

$$f(t) = -\frac{j2}{1}\mathrm{e}^{jt} + \frac{j2}{2}\mathrm{e}^{j2t} - \frac{j2}{3}\mathrm{e}^{j3t} + \frac{j2}{4}\mathrm{e}^{j4t} - \ldots + \frac{j2}{1}\mathrm{e}^{-jt} - \frac{j2}{2}\mathrm{e}^{-j2t} + \frac{j2}{3}\mathrm{e}^{-j3t} - \frac{j2}{4}\mathrm{e}^{-j4t} + \ldots$$

$$= \left(-\frac{j2}{1}\mathrm{e}^{jt} + \frac{j2}{1}\mathrm{e}^{-jt}\right) + \left(\frac{j2}{2}\mathrm{e}^{j2t} - \frac{j2}{2}\mathrm{e}^{-j2t}\right) + \left(-\frac{j2}{3}\mathrm{e}^{j3t} + \frac{j2}{3}\mathrm{e}^{-j3t}\right) + \ \ldots$$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- Solução:

$$f(t) = -j4\left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2}\right)+\frac{j4}{2}\left(\frac{e^{j2t}-e^{-j2t}}{2}\right)-\frac{j4}{3}\left(\frac{e^{j3t}-e^{-j3t}}{2}\right)+\ \ldots$$

$$= -j^2 4\left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right)+\frac{j^2 4}{2}\left(\frac{e^{j2t}-e^{-j2t}}{2j}\right)-\frac{j^2 4}{3}\left(\frac{e^{j3t}-e^{-j3t}}{2j}\right)+\ \ldots$$

$$= 4\sin t-\frac{4}{2}\sin 2t+\frac{4}{3}\sin 3t+\ldots$$

$$f(t) = 4\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t-\frac{1}{4}\sin 4t+\ldots\right)$$

Séries de *Fourier* – Exercícios

- 5. Determinar na forma de série exponencial de *Fourier* a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & 0 < x < 4 \\ x - 6 & 4 < x < 8 \end{cases}$$

- $T_0 = 8$

- Solução:

$$\frac{16}{\pi^2}\left\{\cos\frac{\pi x}{4} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{4} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{4} + \cdots\right\}$$