$\boxed{F.2}$

① a) $f(x) = \cos^2 x$

Como $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

fazemos em $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots$

x substituído por $2x$ para obtermos o desenvolvimento em série de potências de x da função $\cos 2x$.

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \cdots$$

donde

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \cdots$$

b) $g(x) = \sin^2 x$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ ou $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right) = \frac{1}{2}\left(1-\left(1-2x^2+\frac{2x^4}{3}-\cdots\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \cdots\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + \cdots$$

ou

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$= 1 - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \cdots\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + \cdots$$

c) $h(x) = \sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$

vem que:

$$\sin^3 x = \frac{3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) - \left(3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \dots\right)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \dots$$

(2) a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(x^3 - \frac{(x^3)^3}{3!} + \frac{(x^3)^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(x - \frac{x^7}{3!} + \frac{x^{13}}{5!} - \dots\right) = 0$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right) - x}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)} = -1$$

(3) a) e^x em potências de $(x-2)$:

$$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + f''(2)\frac{(x-2)^2}{2!} + \dots$$

$f(x) = e^x \xrightarrow{x=2} e^2$

$f'(x) = e^x \xrightarrow{x=2} e^2$

$\vdots \qquad \vdots$

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + e^2\frac{(x-2)^2}{2!} + e^2\frac{(x-2)^3}{3!} + \dots$$

(3)

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7$; potências de $(x-1)$

$$f(x) = f(1) + f'(1)\frac{(x-1)}{1!} + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!} + f'''(1)\frac{(x-1)^3}{3!} + \cdots$$

Para $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7 \xrightarrow[x=1]{} -3$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{x=1} 4$

$f''(x) = 6x - 4 \longrightarrow 2$

$f'''(x) = 6 \longrightarrow 6$

$f^{(IV)}(x) = 0$

$$f(x) = -3 + 4\frac{(x-1)}{1!} + 2\frac{(x-1)^2}{2!} + 6\frac{(x-1)^3}{3!}$$

$$= -3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 \text{ //}$$

c) $f(x) = x^2 \ln x^2$ como potências de $(x-1)$

Podemos fazer o produto de dois desenvolvimentos de potências de $(x-1)$:

Consideremos $h(x) = x^2$ e $g(x) = \ln(x^2)$

$$h(x) = 1 + \frac{2(x-1)}{1!} + 2\frac{(x-1)^2}{2!} = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$$

$$g(x) = 2(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!}(-2) + \frac{(x-1)^3}{3!} \times 4 + \cdots$$

$$x^2 \ln x^2 = h(x) \times g(x) = (\ \dots\ )$$

④ $(1+x)^r = 1 + r x + \frac{r(r-1)}{2!} x^2 + \dots \qquad |x|<1,\ r\in\mathbb{R}$

a) Desenvolvimento em série de potências de $\sqrt[3]{1+x}$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3 - \dots$$

b) $$\sqrt[3]{1+x^4} = 1 + \frac{1}{3}(x^4) - \frac{(x^4)^2}{9} + \dots$$

c) $$\int_0^{0.3} \sqrt[3]{1+x^4}\,dx = \int_0^{0.3} \left(1 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^8}{9} + \dots\right) dx =$$

$$\approx 0.3 + 0.000162 - 0.000000243 + \dots$$

$$\approx 0.300162$$

com um erro inferior ao valor absoluto do 1º termo da série desprezado (0.000000243).

⑤ a) $\ln(1.1) = \ln(1+0.1)$ no desenvolvimento de $\ln(1+x)$ substituímos x por 0.1 e obtemos,

$$\ln(1.1) = \ln(1+0.1) = 0.1 - \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.1^3}{3} - \frac{0.1^4}{4} + \frac{0.1^5}{5} - \dots$$

$\ln(1.1) \approx 0.09531$ (usando os 4 primeiros termos)

o erro da aproximação é inferior $\left|\frac{0.1^5}{5}\right| = 0.000002$.

(5) Como $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{x^2}{9} + \cdots$, $|x|<1$

b) $\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{1/3}$

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}} \approx 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1.035665$$

$$\sqrt[3]{30} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}} \approx 3 \times 1.035665 = 3.106995$$

o erro obtido c/ esta aproximação é inferior

a 0.000254.

(o valor real é: 3.1072325)

(6) Usa o desenvolvimento de MacLaurin.

a) $\sin 10° = ?$

$10° = \frac{\pi}{18}$

Como $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$

$$\sin\frac{\pi}{18} = \sin 10° = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \cdots$$

$\sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3$ usando os 2 primeiros termos.

≈ 0.173647

c/ um erro inferior 0.000004.

b) $\sin 1° \approx 0.0175$