1ª Parte

1. Relativamente a cada uma das proposições seguintes, indique se é verdadeira ou falsa, justificando adequadamente:

1.a) A equação diferencial $y'=e^{x/y}$ é uma equação diferencial homogénea?

R: ***Uma equação diferencial da forma $y' = f(x;y)$ diz-se homogénea se a função $f(x;y)$ é homogénea de grau zero, isto é:*** $f(tx;ty)=t^0 \cdot f(x;y) \Leftrightarrow f(tx;ty)= f(x;y)$

Assim sendo: $f(x;y)=e^{\frac{x}{y}} \Rightarrow f(tx;ty)=e^{\frac{tx}{ty}} \Leftrightarrow f(tx;ty)=e^{\frac{x}{y}} = f(x;y)$

Conforme se pode verificar $f(tx;ty)= f(x;y)$, logo a função é homogénea.

Considere-se a equação diferencial $y''+xy=q(x)$, onde $q(x)$ é uma função contínua.

1.b) Sabe-se que a função x é uma solução desta equação. Nestas condições tem-se: $q(x)=x^2$?

R: Se x é uma solução desta equação então: $y=x \Rightarrow y'=x'_x =1 \Rightarrow y''=1'=0$

Logo teremos por substituição na equação diferencial dada que:

$y''+xy=q(x) \Leftrightarrow 0+x \cdot x = q(x) \Leftrightarrow q(x)=x^2$ → Está verificada a veracidade da afirmação.

1.c) A aplicação do teorema da Convolução permite que $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+6s+8}\right\}=\frac{e^{-4t}-e^{-2t}}{-6}$ **?**

R: Sabendo que o ***Teorema da Convolução*** é dado por:

$$L^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\}=f(t)*g(t) \text{ onde: } f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)\cdot g(t-x)dx$$

Então teremos que: $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+6s+8}\right\}=^{1} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)\cdot(s+2)}\right\}=L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{(s+4)}}_{F(s)}\cdot\underbrace{\frac{1}{(s+2)}}_{G(s)}\right\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}L^{-1}\{F(s)\}=f(t)\\ L^{-1}\{G(s)\}=g(t)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}=f(t)\\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=g(t)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-4)}\right\}=f(t)\\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-2)}\right\}=g(t)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(t)=e^{-4t}\\ g(t)=e^{-2t}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(x)=e^{-4x}\\ g(t-x)=e^{-2(t-x)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=e^{-4x}\\ g(t-x)=e^{2x-2t}\end{cases}$$

Assim sendo teremos por substituição na formula do *teorema da convolução* que:

$$\int_0^t f(x)\cdot g(t-x)\,dx=\int_0^t e^{-4x}\cdot e^{2x-2t}\,dx=\int_0^t e^{-4x+2x-2t}\,dx=\int_0^t e^{-2x-2t}\,dx=\int_0^t e^{-2x}\cdot e^{-2t}\,dx=$$

$$=e^{-2t}\cdot\int_0^t e^{-2x}\,dx=e^{-2t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\int_0^t\underbrace{-2}_{u'}\cdot\underbrace{e^{-2x}}_{e^u}\,dx=e^{-2t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[e^{-2x}\right]_0^t=e^{-2t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[e^{-2t}-e^{0}\right]=$$

$$=-\frac{e^{-2t}\cdot e^{-2t}}{2}+\frac{e^{-2t}}{2}=\frac{e^{-2t}-e^{-4t}}{2}$$

Conclusão: A igualdade apresentada no enunciado não é verdadeira.

---

[1] $s^2+6s+8=0\Leftrightarrow s=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}\Leftrightarrow s=\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2}\Leftrightarrow s=\frac{-6\pm2}{2}\Leftrightarrow s=-4\vee s=-2$

1.d) **Considere-se o PVF** $y''+6y'+\lambda y=0,\ 0<x<1;\ y(0)=y(1)=0$. **Nestas condições** 9 **é um valor próprio do problema?**

R: Vamos começar por determinar as raízes associadas à equação diferencial dada:

$$y''+6y'+\lambda y=0 \Leftrightarrow m^2+6\cdot m+\lambda=0 \Leftrightarrow m=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot\lambda}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow m=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\lambda}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{-6\pm\sqrt{4\cdot(9-\lambda)}}{2} \Leftrightarrow m=\frac{-6\pm 2\sqrt{9-\lambda}}{2} \Leftrightarrow m=\frac{-6}{2}\pm\frac{2\sqrt{9-\lambda}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=-3\pm\sqrt{9-\lambda}$$

Conforme é afirmado no enunciado, vamos verificar se $\lambda=9$ é um valor próprio da equação diferencial dada.

Assim teremos que: $\lambda=9 \Rightarrow m=-3\pm\sqrt{9-9} \Leftrightarrow m_1=-3 \wedge m_2=-3 \rightarrow$ Uma raiz real de multiplicidade 2.

Para este tipo de raízes temos que:

$$y=c_1\cdot x^{1-1}\cdot e^{m_1\cdot x}+c_2\cdot x^{2-1}\cdot e^{m_2\cdot x} \Leftrightarrow y=c_1\cdot e^{-3x}+c_2\cdot x\cdot e^{-3x} \Leftrightarrow ☼$$

Aplicando agora as condições iniciais teremos:

$$\begin{cases} y(0)=0 \Rightarrow c_1\cdot e^{-3\cdot 0}+c_2\cdot 0\cdot e^{-3\cdot 0}=0 \\ y(1)=0 \Rightarrow c_1\cdot e^{-3\cdot 1}+c_2\cdot 1\cdot e^{-3\cdot 1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_1\cdot e^{-3}+c_2\cdot e^{-3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ (c_1+c_2)\cdot e^{-3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_1+c_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_2=0 \end{cases}$$

Substituindo agora o valor das constantes na expressão ☼, teremos:

$☼ \Leftrightarrow y=0\cdot e^{-3x}+0\cdot x\cdot e^{-3x} \Leftrightarrow y=0 \rightarrow$ Então 9 não é valor próprio porque $y=0$.

2ª Parte

2. Relativamente à equação diferencial $\left(y^2 \cdot \cos(x)\right)dx + \left(4 + 5y \cdot sen(x)\right)dy = 0$ **:**

2.a) Mostre que y^3 **é um factor integrante desta equação diferencial.**

R: Aqui é pedido para se mostrar que: $\underbrace{\mu(x;y)\cdot f(x;y)}_{M(x;y)} + \underbrace{\mu(x;y)\cdot g(x;y)}_{N(x;y)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Então teremos que:

$$\mu(x;y) = y^3 \Rightarrow \begin{Bmatrix} M(x;y) = y^3 \cdot \left(y^2 \cdot \cos(x)\right) \\ N(x;y) = y^3 \cdot \left(4 + 5y \cdot sen(x)\right) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} M(x;y) = y^5 \cdot \cos(x) \\ N(x;y) = 4y^3 + 5y^4 \cdot sen(x) \end{Bmatrix}$$

Procedendo agora à verificação, teremos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^5 \cdot \cos(x)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^5\right) \cdot \cos(x) = 5y^4 \cdot \cos(x)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4y^3 + 5y^4 \cdot sen(x)\right) = 5y^4 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(sen(x)\right) = 5y^4 \cdot \cos(x)$$

Conclusão: Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, então $\mu(x;y) = y^3$ é um factor integrante desta equação.

2.b) Determine uma família de soluções da equação diferencial dada.

R: Conforme já foi visto na alínea anterior, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, logo estamos perante uma *equação diferencial exacta*, pelo que recorrendo ao método de resolução aplicado a este tipo de equações diferenciais teremos para a *determinação da família de soluções* que:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = M \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = y^5 \cdot \cos(x) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3 + 5y^4 \cdot sen(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = y^5 \cdot \cos(x) \\ F(x;y) = P_y\left[4y^3 + 5y^4 \cdot sen(x)\right] \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = y^5 \cdot \cos(x) \\ F(x;y) = P_y\left[4y^3\right] + P_y\left[5y^4 \cdot sen(x)\right] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = y^5 \cdot \cos(x) \\ F(x;y) = 4 \cdot P_y\left[y^3\right] + 5 \cdot sen(x) \cdot P_y\left[y^4\right] \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = y^5 \cdot \cos(x) \\ F(x;y) = 4 \cdot \frac{y^{3+1}}{3+1} + 5 \cdot sen(x) \cdot \frac{y^{4+1}}{4+1} + \phi(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = y^5 \cdot \cos(x) \\ F(x;y) = y^4 + sen(x) \cdot y^5 + \phi(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}\left[y^4 + sen(x) \cdot y^5 + \phi(x)\right] = y^5 \cdot \cos(x) \\ F(x;y) = y^4 + sen(x) \cdot y^5 + \phi(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^5 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[sen(x)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(x)\right] = y^5 \cdot \cos(x) \\ F(x;y) = y^4 + sen(x) \cdot y^5 + \phi(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^5 \cdot \cos(x) + \phi'(x) = y^5 \cdot \cos(x) \\ F(x;y) = y^4 + sen(x) \cdot y^5 + \phi(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \phi'(x) = 0 \\ F(x;y) = y^4 + sen(x) \cdot y^5 + \phi(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \phi(x) = P_x[0] \\ F(x;y) = y^4 + sen(x) \cdot y^5 + \phi(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \phi(x) = k \\ F(x;y) = y^4 + sen(x) \cdot y^5 + \phi(x) \end{array}\right\}$$

Assim sendo teremos que:

$$F(x;y) = y^4 + sen(x) \cdot y^5 + \phi(x) \Leftrightarrow F(x;y) = y^4 + sen(x) \cdot y^5 + k, \quad k = 0$$

Logo a solução será: $F(x;y) = C \Leftrightarrow y^4 + sen(x) \cdot y^5 = C$

Verificação formal:

$$\frac{d}{dx}\left[y^4+sen(x)\cdot y^5\right]=\frac{d}{dx}[C]\Leftrightarrow \underbrace{\frac{d}{dx}\left[y^4\right]}_{\left(u^n\right)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'}+\frac{d}{dx}\left[sen(x)\cdot y^5\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot y^{4-1}\cdot\frac{dy}{dx}+\left[\frac{d}{dx}[sen(x)]\cdot y^5+sen(x)\cdot\underbrace{\frac{d}{dx}\left[y^5\right]}_{\left(u^n\right)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'}\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot y^3\cdot\frac{dy}{dx}+\left[\cos(x)\cdot y^5+sen(x)\cdot 5\cdot y^4\cdot\frac{dy}{dx}\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[4y^3+5y^4\cdot sen(x)\right]\cdot\frac{dy}{dx}+y^5\cdot\cos(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[y^5\cdot\cos(x)\right]dx+\left[4y^3+5y^4\cdot sen(x)\right]dy=0\rightarrow$$ Está verificado formalmente.

3. **Considere a seguinte equação diferencial:** $y''-x^{-1}\cdot y'+x^{-2}\cdot y=0,\quad x>0$

3.a) **Mostre que as funções** $h(x)=x\cdot\ln(x)$ **e** $g(x)=x$ **são soluções linearmente independentes da equação diferencial dada.**

R: Antes de mais vamos começar por verificar se as funções dadas são soluções da equação diferencial apresentada:

- **Para:** $y=h(x)=x\cdot\ln(x)$

$$y=x\cdot\ln(x)\Rightarrow y'=(x\cdot\ln(x))'\Leftrightarrow y'=(x)'\cdot\ln(x)+x\cdot(\ln(x))'\Leftrightarrow y'=\ln(x)+x\cdot\frac{(x)'}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'=\ln(x)+1\Rightarrow y''=(\ln(x)+1)'\Leftrightarrow y''=\frac{(x)'}{x}\Leftrightarrow y''=\frac{1}{x}$$

Substituindo estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$$y''-x^{-1}\cdot y'+x^{-2}\cdot y=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}-x^{-1}\cdot(\ln(x)+1)+x^{-2}\cdot(x\cdot\ln(x))=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x}-\frac{(\ln(x)+1)}{x}+\frac{x\cdot\ln(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}=0\Leftrightarrow 0=0\rightarrow h(x)\text{ é solução.}$$

- **Para:** $y=g(x)=x$

$$y=x\Rightarrow y'=(x)'\Leftrightarrow y'=1\Rightarrow y''=(1)'\Leftrightarrow y''=0$$

Substituindo estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$$y''-x^{-1}\cdot y'+x^{-2}\cdot y=0\Leftrightarrow 0-x^{-1}\cdot(1)+x^{-2}\cdot(x)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2}=0\Leftrightarrow-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0=0\rightarrow g(x)\text{ é solução.}$$

Posto isto, vamos agora verificar se estas soluções são linearmente independentes, recorrendo para tal ao **Wronskiano**, *tendo em atenção que uma vez que a equação diferencial é de segunda ordem, as derivadas que compõem a matriz serão até à ordem* $n-1$*, ou seja até à ordem 1*:

$$W(x\cdot\ln(x);x)=\begin{vmatrix} x\cdot\ln(x) & x \\ (x\cdot\ln(x))' & (x)' \end{vmatrix} \Leftrightarrow W(x\cdot\ln(x);x)=\begin{vmatrix} \overbrace{x\cdot\ln(x)}^{+} & \overset{-}{x} \\ \ln(x)+1 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W(x\cdot\ln(x);x)=[(x\cdot\ln(x))\cdot 1]-[(\ln(x)+1)\cdot x] \Leftrightarrow W(x\cdot\ln(x);x)=x\cdot\ln(x)-x\cdot\ln(x)-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W(x\cdot\ln(x);x)=-x$$

Como: $W(x\cdot\ln(x);x)=-x\neq 0$, então as soluções são linearmente independentes.

3.b) Resolva o seguinte problema de valor inicial: $\begin{cases} y''-x^{-1}\cdot y'+x^{-2}\cdot y=x^2, & x>0 \\ y(1)=y'(1)=0 \end{cases}$

R: Conforme se sabe: $y''-x^{-1}\cdot y'+x^{-2}\cdot y=x^2 \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2}-x^{-1}\cdot\frac{dy}{dx}+x^{-2}\cdot y=x^2$

Recorrendo então ao ***Método de Variação das Constantes***, já que a equação diferencial dada se enquadra na forma geral: $a_0(x)\cdot\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\cdot\frac{dy}{dx}+a_n(x)\cdot y=F(x)$, onde a ***equação homogénea associada é***: $\frac{d^2y}{dx^2}-x^{-1}\cdot\frac{dy}{dx}+x^{-2}\cdot y=0$

Conforme já se verificou na alínea anterior $h(x)=x\cdot\ln(x)=f_1$ e $g(x)=x=f_2$ são *soluções linearmente independentes* da equação homogénea associada, ou seja formam um conjunto fundamental de soluções dado na sua forma geral por $y_C=c_1\cdot f_1+c_2\cdot f_2$, sendo que neste caso teremos: $y_C=c_1\cdot x\cdot\ln(x)+c_2\cdot x$

Assim sendo, teremos o seguinte: $y_C = c_1 \cdot x \cdot \ln(x) + c_2 \cdot x \Rightarrow y_P = v_1 \cdot x \cdot \ln(x) + v_2 \cdot x$

Tendo esta solução particular, vamos agora determinar as derivadas até à ordem 2 para posteriormente se substituírem na equação diferencial dada no enunciado:

- $y_P = v_1 \cdot x \cdot \ln(x) + v_2 \cdot x \Rightarrow y'_P = (v_1 \cdot x \cdot \ln(x))' + (v_2 \cdot x)' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y'_P = \left[v'_1 \cdot (x \cdot \ln(x)) + v_1 \cdot (x \cdot \ln(x))'\right] + \left[v'_2 \cdot (x) + v_2 \cdot (x)'\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'_P = \left[v'_1 \cdot (x \cdot \ln(x)) + v_1 \cdot \left(x' \cdot \ln(x) + x \cdot (\ln(x))'\right)\right] + \left[v'_2 \cdot (x) + v_2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'_P = \left[v'_1 \cdot (x \cdot \ln(x)) + v_1 \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{(x)'}{x}\right)\right] + \left[v'_2 \cdot (x) + v_2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'_P = \left[v'_1 \cdot (x \cdot \ln(x)) + v_1 \cdot (\ln(x) + 1)\right] + \left[v'_2 \cdot (x) + v_2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'_P = \underbrace{\left[v'_1 \cdot (x \cdot \ln(x)) + v'_2 \cdot (x)\right]}_{\substack{\text{O método manda impor que este termo} \\ \text{seja} = 0}} + \left[v_1 \cdot (\ln(x) + 1) + v_2\right] \Rightarrow y'_P = v_1 \cdot (\ln(x) + 1) + v_2$$

- $y'_P = v_1 \cdot (\ln(x) + 1) + v_2 \Rightarrow y''_P = \left[v'_1 \cdot (\ln(x) + 1) + v_1 \cdot (\ln(x) + 1)'\right] + v'_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y''_P = \left[v'_1 \cdot (\ln(x) + 1) + v_1 \cdot \frac{(x)'}{x}\right] + v'_2 \Leftrightarrow y''_P = v'_1 \cdot (\ln(x) + 1) + v_1 \cdot \frac{1}{x} + v'_2$$

Substituindo então os valores obtidos na equação diferencial dada teremos que:

$$y'' - x^{-1} \cdot y' + x^{-2} \cdot y = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[v'_1 \cdot (\ln(x) + 1) + v_1 \cdot \frac{1}{x} + v'_2\right] - x^{-1} \cdot \left[v_1 \cdot (\ln(x) + 1) + v_2\right] + x^{-2} \cdot \left[v_1 \cdot x \cdot \ln(x) + v_2 \cdot x\right] = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[v'_1 \cdot (\ln(x) + 1) + \frac{v_1}{x} + v'_2\right] - \left[\frac{v_1}{x} \cdot (\ln(x) + 1) + \frac{v_2}{x}\right] + \left[\frac{v_1}{x^2} \cdot x \cdot \ln(x) + \frac{v_2}{x^2} \cdot x\right] = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[v'_1 \cdot (\ln(x) + 1) + \frac{v_1}{x} + v'_2\right] - \left[\frac{v_1}{x} \cdot \ln(x) + \frac{v_1}{x} + \frac{v_2}{x}\right] + \left[\frac{v_1}{x} \cdot \ln(x) + \frac{v_2}{x}\right] = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[v'_1 \cdot (\ln(x)+1) + \frac{v_1}{x} + v'_2\right] + \left[-\frac{v_1}{x}\cdot \ln(x) - \frac{v_1}{x} - \frac{v_2}{x} + \frac{v_1}{x}\cdot \ln(x) + \frac{v_2}{x}\right] = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v'_1 \cdot (\ln(x)+1) + \frac{v_1}{x} + v'_2 - \frac{v_1}{x} = x^2 \Leftrightarrow v'_1 \cdot (\ln(x)+1) + v'_2 = x^2$$

→ *Recorrendo agora à condição imposta na primeira derivada que se efectuou e a este último resultado obtido, construímos o seguinte sistema de equações*:

$$\left.\begin{cases} v'_1 \cdot (x\cdot \ln(x)) + v'_2 \cdot (x) = 0 \\ v'_1 \cdot (\ln(x)+1) + v'_2 = x^2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x\cdot \ln(x) & x \\ \ln(x)+1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

→ *Recorrendo agora à “**regra de Cramer**” para resolver esta matriz teremos que:*

- $$v'_1 = \frac{\begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{x} \\ x^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overbrace{x\cdot \ln(x)}^{+} & \overset{-}{x} \\ \ln(x)+1 & 1 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow v'_1 = \frac{0\times 1 - x^2 \times x}{(x\cdot \ln(x))\times 1 - (\ln(x)+1)\times x} \Leftrightarrow v'_1 = \frac{-x^3}{(x\cdot \ln(x)) - (x\cdot \ln(x) + x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v'_1 = \frac{-x^3}{x\cdot \ln(x) - x\cdot \ln(x) - x} \Leftrightarrow v'_1 = x^2$$

- $$v'_2 = \frac{\begin{vmatrix} \overbrace{x\cdot \ln(x)}^{+} & \overset{-}{0} \\ \ln(x)+1 & x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overbrace{x\cdot \ln(x)}^{+} & \overset{-}{x} \\ \ln(x)+1 & 1 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow v'_2 = \frac{(x\cdot \ln(x))\times x^2 - (\ln(x)+1)\times 0}{(x\cdot \ln(x))\times 1 - (\ln(x)+1)\times x} \Leftrightarrow v'_2 = \frac{x^3 \cdot \ln(x)}{(x\cdot \ln(x)) - (x\cdot \ln(x) + x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v'_2 = \frac{x^3 \cdot \ln(x)}{x\cdot \ln(x) - x\cdot \ln(x) - x} \Leftrightarrow v'_2 = -x^2 \cdot \ln(x)$$

→ *Primitivando agora cada uma das funções obtidas teremos que:*

- $v'_1 = x^2 \Rightarrow v_1 = \int x^2 \, dx \Leftrightarrow v_1 = \frac{x^3}{3} + c_3$

- $v'_2 = -x^2 \cdot \ln(x) \Rightarrow v_2 = \int -x^2 \cdot \ln(x) \, dx$ [2] $\Leftrightarrow v_2 = \frac{x^3}{9} - \frac{x^3 \cdot \ln(x)}{3} + c_4$

Logo a solução geral será:

$$y_{Geral} = y_C + y_P \Leftrightarrow y = [c_1 \cdot x \cdot \ln(x) + c_2 \cdot x] + [v_1 \cdot x \cdot \ln(x) + v_2 \cdot x] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = [c_1 \cdot x \cdot \ln(x) + c_2 \cdot x] + \left[\frac{x^3}{3} \cdot x \cdot \ln(x) + \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^3 \cdot \ln(x)}{3}\right) \cdot x\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = [c_1 \cdot x \cdot \ln(x) + c_2 \cdot x] + \left[\frac{x^4 \cdot \ln(x)}{3} + \frac{x^4}{9} - \frac{x^4 \cdot \ln(x)}{3}\right] \Leftrightarrow y = c_1 \cdot x \cdot \ln(x) + c_2 \cdot x + \frac{x^4}{9}$$

Agora teremos que derivar esta expressão da solução geral por forma a poder aplicar posteriormente os valores iniciais dados:

$$y = c_1 \cdot x \cdot \ln(x) + c_2 \cdot x + \frac{x^4}{9} \Rightarrow y' = c_1 \cdot (x \cdot \ln(x))' + c_2 \cdot (x)' + \frac{1}{9} \cdot (x^4)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' = c_1 \cdot \left(x' \cdot \ln(x) + x \cdot \underbrace{(\ln(x))'}_{=1/x} \right) + c_2 \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot 4x^3 \Leftrightarrow y' = c_1 \cdot (\ln(x) + 1) + c_2 + \frac{4}{9} \cdot x^3$$

---

[2] $\int \underbrace{-x^2}_{v'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u} dx \to \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x) \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = -x^2 \Rightarrow v = \int -x^2 dx = -\frac{x^3}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \int \underbrace{-x^2}_{v'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u} dx = \ln(x) \cdot \left(-\frac{x^3}{3}\right) - \int \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{x^3}{3}\right) dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int \underbrace{-x^2}_{v'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u} dx = -\frac{x^3 \cdot \ln(x)}{3} + \frac{1}{3} \cdot \int x^2 \, dx \Leftrightarrow \int \underbrace{-x^2}_{v'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u} dx = \frac{x^3}{9} - \frac{x^3 \cdot \ln(x)}{3}$

Aplicando agora os valores iniciais: $\begin{cases} y(1)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cdot 1 \cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} + c_2 \cdot 1 + \dfrac{1^4}{9} = 0 \\ c_1 \cdot \left(\underbrace{\ln(1)}_{=0} + 1 \right) + c_2 + \dfrac{4}{9} \cdot 1^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_2 + \dfrac{1}{9} = 0 \\ c_1 + c_2 + \dfrac{4}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -\dfrac{1}{9} \\ c_1 - \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\dfrac{3}{9} \\ c_2 = -\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

Conclusão: A solução final após a aplicação dos valores iniciais será:

$$y = -\frac{3}{9} \cdot x \cdot \ln(x) - \frac{1}{9} \cdot x + \frac{x^4}{9} \Leftrightarrow y = \frac{x^4 - x - 3 \cdot x \cdot \ln(x)}{9} \Leftrightarrow y = \frac{x \cdot \left(x^3 - 1 - 3 \cdot \ln(x) \right)}{9}$$

4. Determine, usando a transformada de Laplace, a solução do problema de valor inicial: $y''-3\cdot y'+2\cdot y=f(t),\quad onde: f(t)=\begin{cases}2, & 0<t<4\\ 0, & t>4\end{cases}\qquad y(0)=y'(0)=0$ **:**

R: Antes de mais vamos reescrever a equação diferencial dada por forma a conter a função $f(t)$, sendo que esta será dada por:

$$f(t)=\begin{cases}2 & se \quad 0<t<4\\ 0 & se \quad t>4\end{cases} \Leftrightarrow f(t)=2-\begin{cases}0 & se \quad 0<t<4\\ 2 & se \quad t>4\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(t)=2-2\times\underbrace{\begin{cases}0 & se \quad 0<t<4\\ 1 & se \quad t>4\end{cases}}_{u_4(t)} \Leftrightarrow f(t)=2-2\cdot u_4(t)$$

Posto isto teremos por substituição na equação diferencial dada que:

$$y''-3\cdot y'+2\cdot y=f(t) \Leftrightarrow y''-3\cdot y'+2\cdot y=2-2\cdot u_4(t)$$

Aplicando agora a transformada de Laplace a ambos os membros teremos:

$$L\{y''-3y'+2y\}=L\{2-2\cdot u_4(t)\} \Leftrightarrow L\{y''\}-3\cdot L\{y'\}+2\cdot L\{y\}=2\cdot L\{1\}-2\cdot L\{u_4(t)\} \Leftrightarrow ☼$$

Pelo formulário temos: $L\left\{\underbrace{f^{(n)}(t)}_{y^{(n)}}\right\}=s^n\cdot L\{f(t)\}-s^{n-1}\cdot f(0)-s^{n-2}\cdot f'(0)-\ldots-s^0\cdot f^{n-1}(0)$

<u>Cálculos Auxiliares</u>

- $L\{y''\}=L\{y^{(2)}(t)\}=s^2\cdot \underbrace{L\{y(t)\}}_{Y(s)}-\underbrace{s^{2-1}}_{=s}\cdot\underbrace{y(0)}_{=0}-\underbrace{s^{2-2}}_{=s^0=1}\cdot\underbrace{y'(0)}_{=0} \Leftrightarrow L\{y^{(2)}(t)\}=s^2\cdot Y(s)$;

- $L\{y'\}=L\{y^{(1)}(t)\}=s^1\cdot \underbrace{L\{y(t)\}}_{Y(s)}-\underbrace{s^{1-1}}_{=s}\cdot\underbrace{y(0)}_{=0} \Leftrightarrow L\{y^{(1)}(t)\}=s\cdot Y(s)$;

- $L\{y\}=L\{y^{(0)}(t)\}=s^0\cdot \underbrace{L\{y(t)\}}_{Y(s)}=Y(s)$; $\qquad L\{u_4(t)\}=\dfrac{e^{-4s}}{s}$; $\qquad L\{1\}=\dfrac{1}{s}$

Substituindo os valores obtidos na expressão ☼, teremos que:

$$☼ \Leftrightarrow \left[s^2 \cdot Y(s)\right] - 3 \cdot \left[s \cdot Y(s)\right] + 2 \cdot Y(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot \frac{e^{-4s}}{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(s^2 - 3s + 2\right) \cdot Y(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot \frac{e^{-4s}}{s} \Leftrightarrow^{3} \left[(s-1)\cdot(s-2)\right] \cdot Y(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot \frac{e^{-4s}}{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{Y(s)}_{L\{y(t)\}} = 2 \cdot \frac{1}{s \cdot \left[(s-1)\cdot(s-2)\right]} - 2 \cdot \frac{e^{-4s}}{s \cdot \left[(s-1)\cdot(s-2)\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{L^{-1}\{Y(s)\}}_{L^{-1}\{L\{y(t)\}\} = y(t)} = 2 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s \cdot \left[(s-1)\cdot(s-2)\right]}\right\} - 2 \cdot L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s \cdot \left[(s-1)\cdot(s-2)\right]}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \underbrace{2 \cdot L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{s \cdot \left[(s-1)\cdot(s-2)\right]}}_{F(s)}\right\}}_{=f(t)} - \underbrace{2 \cdot L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{s \cdot \left[(s-1)\cdot(s-2)\right]}}_{F(s)} \cdot \underbrace{e^{-4s}}_{e^{-as}}\right\}}_{=u_a(t)\cdot f(t-a)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(t) = 2 \cdot f(t) - 2 \cdot u_4(t) \cdot f(t-4) \Leftrightarrow \lozenge$$

Cálculos Auxiliares

- $$F(s) = \frac{1}{s \cdot \left[(s-1)\cdot(s-2)\right]} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = A \cdot s^2 - 3A \cdot s + 2A + B \cdot s^2 - 2B \cdot s + C \cdot s^2 - C \cdot s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = (A+B+C) \cdot s^2 + (-3A - 2B - C) \cdot s + 2A \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 = A+B+C \\ 0 = -3A-2B-C \\ 1 = 2A \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A = \frac{1}{2} \\ B = -1 \\ C = \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

---

[3] $s^2 - 3s + 2 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow s = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow s = 1 \vee s = 2$

$$\Rightarrow f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{B}{s-1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{C}{s-2}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(t) = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{-1}{s-1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s-2}\right\} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2}\cdot \underbrace{L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}}_{=1} - \underbrace{L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}}_{=e^{1t}} + \frac{1}{2}\cdot \underbrace{L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}}_{=e^{2t}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2} - e^{t} + \frac{1}{2}\cdot e^{2t} \Rightarrow f(t-4) = \frac{1}{2} - e^{t-4} + \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot(t-4)} \Leftrightarrow f(t-4) = \frac{1}{2} - e^{t-4} + \frac{1}{2}\cdot e^{2t-8}$$

Substituindo agora os valores determinados em ◊ teremos a *solução final*:

$$\lozenge \Leftrightarrow y(t) = 2\cdot\left[\frac{1}{2} - e^{t} + \frac{1}{2}\cdot e^{2t}\right] - 2\cdot u_4(t)\cdot\left[\frac{1}{2} - e^{t-4} + \frac{1}{2}\cdot e^{2t-8}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \left(1 - 2e^{t} + e^{2t}\right) - u_4(t)\cdot\left(1 - 2e^{t-4} + e^{2t-8}\right)$$

5.

Determine a solução do seguinte PVF usando o método de separação de variáveis:

5.a)
$$\begin{cases} u_t + u_x = u, & x,t > 0 \\ u(x;0) = 3 \cdot e^{-2x} - 7 \cdot e^{-5x}, & x > 0 \end{cases}$$

R: O método da separação de variáveis supõe que a solução poderá ser escrita na forma que a seguir se apresenta: $u(x;t) = X(x) \cdot T(t)$.

É com base neste pressuposto que se determinam as respectivas derivadas de primeira e também de segunda ordem para este caso em particular, para posteriormente serem substituídas na equação dada no enunciado. Assim sendo teremos que:

$$u_t = (u(x;t))_t' = X(x) \cdot T'(t) \;\; ; \;\; u_x = (u(x;t))_x' = X'(x) \cdot T(t)$$

Recorrendo agora à expressão dada no enunciado $u_t + u_x = u$, teremos por substituição que:

$$u_t + u_x = u \Leftrightarrow X(x) \cdot T'(t) + X'(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot T(t) \Leftrightarrow X(x) \cdot T'(t) = X(x) \cdot T(t) - X'(x) \cdot T(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X(x) \cdot T'(t) = [X(x) - X'(x)] \cdot T(t) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X(x) - X'(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \\ \dfrac{X(x) - X'(x)}{X(x)} = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T'(t) = -\lambda \cdot T(t) \\ X(x) - X'(x) = -\lambda \cdot X(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T'(t) + \lambda \cdot T(t) = 0 \\ X(x) - X'(x) + \lambda \cdot X(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T'(t) + \lambda \cdot T(t) = 0 \\ (1+\lambda) \cdot X(x) - X'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + \lambda = 0 \\ (1+\lambda) - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\lambda \\ m = 1 + \lambda \end{cases} \rightarrow \text{ raízes reais e distintas.}$$

Como é sabido, para este tipo de raízes temos a seguinte solução na forma geral:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + \ldots + c_n \cdot e^{m_n \cdot x} \Rightarrow y(t) = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot t} + \ldots + c_n \cdot e^{m_n \cdot t}$$

Logo, neste caso teremos:

$$\begin{Bmatrix} m=-\lambda \\ m=1+\lambda \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} T_n(t)=e^{-\lambda_n \cdot t} \\ X_n(x)=e^{(1+\lambda_n)\cdot x} \end{Bmatrix}$$

Encontrados os valores de $X_n(x)$ e de $T_n(t)$, vamos agora substitui-los na seguinte expressão:

$$u_n(x;t)=X_n(x)\cdot T_n(t) \Leftrightarrow u_n(x;t)=e^{(1+\lambda_n)\cdot x}\cdot e^{-\lambda_n \cdot t} \Leftrightarrow u_n(x;t)=e^{x+x\cdot\lambda_n}\cdot e^{-\lambda_n\cdot t} \Leftrightarrow u_n(x;t)=e^{x+x\cdot\lambda_n-\lambda_n\cdot t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n(x;t)=e^{x+(x-t)\cdot\lambda_n} \Rightarrow u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot e^{x+(x-t)\cdot\lambda_n} \Rightarrow u(x;0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot e^{x+(x-0)\cdot\lambda_n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(x;0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot e^{x+(x\cdot\lambda_n)}$$

Igualando agora este $u(x;0)$ que se acabou de determinar com o $u(x;0)$ dado no enunciado teremos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot e^{x+(x\cdot\lambda_n)} = 3\cdot e^{-2x}-7\cdot e^{-5x} \Rightarrow \begin{Bmatrix} c_1\cdot e^{x+x\cdot\lambda_1}=3\cdot e^{-2x} \\ c_2\cdot e^{x+x\cdot\lambda_2}=-7\cdot e^{-5x} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1=3\wedge x+x\cdot\lambda_1=-2x \\ c_2=-7\wedge x+x\cdot\lambda_2=-5x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1=3\wedge x\cdot\lambda_1=-2x-x \\ c_2=-7\wedge x\cdot\lambda_2=-5x-x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1=3\wedge\lambda_1=-\dfrac{3x}{x} \\ c_2=-7\wedge\lambda_2=-\dfrac{6x}{x} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1=3\wedge\lambda_1=-3 \\ c_2=-7\wedge\lambda_2=-6 \end{Bmatrix}$$

Substituindo estes valores na expressão que se determinou para $u(x;t)$, teremos que:

$$u(x;t)=c_1\cdot e^{x+(x-t)\cdot\lambda_1}+c_2\cdot e^{x+(x-t)\cdot\lambda_2} \Leftrightarrow u(x;t)=3\cdot e^{x+(x-t)\cdot(-3)}+(-7)\cdot e^{x+(x-t)(-6)}$$

5.b) Determine a solução do problema: $x=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \cos(n\pi x), \quad 0<x<1$

R: Do problema exposto no enunciado temos que: $f(x)=x$ e que: $0<x<1 \Rightarrow l=1$, logo pela aplicação da série de Fourier de co-senos a este caso especifico teremos pelo formulário que: $f(x)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$; $c_n=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$

Assim sendo teremos:

- $c_n=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \Rightarrow c_0=\frac{2}{1}\cdot\int_0^1 x\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{0\cdot\pi x}{1}\right)}_{=1}dx \Leftrightarrow c_0=2\cdot\int_0^1 x\,dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow c_0=2\cdot\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right]_0^1 \Leftrightarrow c_0=\left[x^2\right]_0^1 \Leftrightarrow c_0=\left[1^2-0^2\right] \Leftrightarrow c_0=1$$

- $c_n=\frac{2}{1}\cdot\int_0^1 x\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx \Leftrightarrow c_n=2\cdot\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\cos(n\pi x)}_{v'}dx \Leftrightarrow$

$$[4]\Leftrightarrow c_n=2\cdot\left[\left[x\cdot\frac{1}{n\pi}\cdot sen(n\pi x)\right]_0^1-\int_0^1 1\cdot\frac{1}{n\pi}\cdot sen(n\pi x)\,dx\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_n=2\cdot\left[\left[x\cdot\frac{1}{n\pi}\cdot sen(n\pi x)\right]_0^1-\frac{1}{n\pi}\cdot\left(-\frac{1}{n\pi}\right)\cdot\underbrace{\int_0^1 \underbrace{-n\pi}_{u'}\cdot\underbrace{sen(n\pi x)}_{sen(u)}dx}_{\cos(u)}\right]\Leftrightarrow$$

---

[4] $$\begin{cases} u=x\Rightarrow u'=1 \\ v'=\cos(n\pi x)\Rightarrow v=\int\cos(n\pi x)dx=\frac{1}{n\pi}\cdot\underbrace{\int\underbrace{n\pi}_{u'}\cdot\underbrace{\cos(n\pi x)}_{\cos(u)}dx}_{sen(u)}=\frac{1}{n\pi}\cdot sen(n\pi x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c_n = 2\cdot\left[\left[x\cdot\frac{1}{n\pi}\cdot sen(n\pi x)\right]_0^1 + \left[\frac{1}{n^2\pi^2}\cdot\cos(n\pi x)\right]_0^1\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_n = 2\cdot\left[\begin{array}{l}\left[1\cdot\frac{1}{n\pi}\cdot sen(n\pi\cdot 1) - 0\cdot\frac{1}{n\pi}\cdot sen(n\pi\cdot 0)\right]+\\ +\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\cdot\cos(n\pi\cdot 1) - \frac{1}{n^2\pi^2}\cdot\cos(n\pi\cdot 0)\right]\end{array}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_n = 2\cdot\left[\left[\frac{1}{n\pi}\cdot\underbrace{sen(n\pi)}_{=0}\right]+\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\cdot\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} - \frac{1}{n^2\pi^2}\cdot\underbrace{\cos(0)}_{=1}\right]\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_n = 2\cdot\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\cdot(-1)^n - \frac{1}{n^2\pi^2}\right]\Leftrightarrow c_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\cdot\left[(-1)^n - 1\right]$$

→ ***Se n é par:*** $c_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\cdot[+1-1]\Leftrightarrow c_n = 0$

→ ***Se n é impar:*** $c_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\cdot[-1-1]\Leftrightarrow c_n = -\frac{4}{n^2\pi^2}\Rightarrow \text{Termos Impares} = 2n-1,\ n = 1,2,3$

Logo a solução para os termos impares será:

$$x = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cdot\cos((2n-1)\pi x)\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\cos((2n-1)\pi x)$$