Análise Matemática EE - Ficha nº 1

1ºano, 2ºsemestre

Funções vetoriais

1. Considere a função vetorial $\vec{f}(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Determine $\vec{f}(0)$ e $\vec{f}(-1)$.
   (b) Determine o $D_{\vec{f}}$.
2. Considere a função vetorial $\vec{f}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Determine $\vec{f}(0)$ e $\vec{f}(\pi)$.
   (b) Determine o $D_{\vec{f}}$.
3. Considere a função vetorial $\vec{f}(t) = (\frac{1}{t}, \ln t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Determine $\vec{f}(1)$ e $\vec{f}(2)$.
   (b) Determine o $D_{\vec{f}}$.
4. Determine os seguintes limites, se existirem:
   (a) $\lim_{t\to 1}(t^2+1, \frac{1}{t})$
   (b) $\lim_{t\to 0}(2t+1, \ln t)$
5. Determine as derivadas das seguintes funções vetoriais, nos seus domínios:
   (a) $\vec{r}(t) = (\frac{1}{t+1}, \cos t, t^3)$
   (b) $\vec{r}(t) = (\exp(t^2), \ln(t+1))$
6. Determine o integral $\int_0^1 \vec{F}(t)dt$ onde $\vec{F}(t) = (t^2, \exp(2t))$.
7. A função $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, t)$ é contínua em $\frac{\pi}{4}$?
8. Estude a continuidade da função $\vec{r}(t) = \begin{cases} (1,0,1) \ se \ t = 0 \\ (\frac{\sin t}{t}, \frac{1-\cos t}{t}, t+1) \ se \ t \neq 0 \end{cases}$
9. Considere a função vetorial de variável real definida por $\vec{f}(t) = (\frac{\cos t}{t}, \ln t, \sqrt{t+1})$.
   (a) Determine $\vec{f}(\pi)$.
   (b) Determine o domínio da função $\vec{f}(t)$
   (c) Determine, se existir, $\lim_{t\to 1}\vec{f}(t)$ e $\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)$.
   (d) Estude a continuidade da função no seu domínio.
10. Considere a função vetorial de variável real definida por $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\cos t + \overrightarrow{w}\sin t$, $t \in \mathbb{R}$, onde $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.
    (a) Escreva a função $\overrightarrow{r}(t)$ à custa das suas funções componentes.
    (b) Calcule $\overrightarrow{r}'(t)$
    (c) Calcule $\overrightarrow{r}''(t)$.
11. Seja $\overrightarrow{r}(t), t \in \mathbb{R}$ uma função vetorial de variável real tal que $\overrightarrow{r}(0) = \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{r}'(0) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{r}''(t) = -\overrightarrow{e_3}$. Determine t_0 de modo que $\overrightarrow{r}(t_0)$ seja um vetor director do plano xoy.

12. Considere a função vetorial de variável real definida por $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$, $t \in \mathbb{R}$, onde $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$ e $\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{e_1} + m\overrightarrow{e_2} + n\overrightarrow{e_3}$, com $a, b, c, l, m, n \in \mathbb{R}$ e fixos.

    (a) Determine as funções componentes de $\overrightarrow{r}$.

    (b) Verifique que $\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt}(t) = \overrightarrow{v}$.

13. Represente geometricamente os gráficos das seguintes funções vetoriais:

    (a) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$, $t \in [0, 1]$.

    (b) $\vec{F}(t) = 2\cos t\vec{e}_1 + 2\sin t\vec{e}_2$, $t \in [0, 2\pi]$

    (c) $\vec{F}(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

    (d) $\vec{F}(t) = (1 + t)\vec{e}_1 + (t)\vec{e}_2 + (2 + 3t)\vec{e}_3$, $t \in \mathbb{R}$

    (e) $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + t^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

14. Considere as equações paramétricas da curva $\mathcal{C}$: $\vec{r}(\theta) = \begin{cases} x = \cos(2\theta) \\ y = \cos\theta \end{cases}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

    (a) Determine e represente geometricamente $\vec{r}(0)$, $\vec{r}(\frac{\pi}{2})$, $\vec{r}(\pi)$, $\vec{r}(2\pi)$.

    (b) Escreva a equação cartesiana, considerando a relação trigonométrica $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$.

    (c) Represente geometricamente a curva representada na alínea anterior.

    (d) A curva representada geometricamente por $\vec{r}(\theta)$ e pela equação cartesiana, coincidem totalmente? Justifique.

15. Determine o vector velocidade das curvas descritas:

    (a) $\vec{r}(t) = 6t\vec{e}_1 - t^3\vec{e}_2 + 3t^2\vec{e}_3$

    (b) $\vec{r}(t) = (\frac{1}{t}, \exp t^2, \ln(2t))$, $t > 0$

16. Determine o vetor tangente às curvas descritas:

    (a) $\vec{r}(t) = \cos t\vec{e}_1 - e^2\vec{e}_2 + (\frac{1}{t+1})\vec{e}_3$

    (b) $\vec{r}(t) = (\frac{1}{t}, \exp t^2, \ln(2t))$, $t > 0$

17. Calcule o vetor tangente à curva $\mathcal{C}$ representada vetorialmente por $\vec{c}(t) = (t, t^2, \exp t)$ em $t = 0$.

18. Considere a curva $\mathcal{C}$ de equação vetorial $\overrightarrow{r}(t) = \cos t\overrightarrow{e_1} + \sin t\overrightarrow{e_2} + t\overrightarrow{e_3}$.

    (a) Determine $\overrightarrow{r}(\frac{\pi}{4})$ e $\overrightarrow{r'}(\frac{\pi}{4})$.

    (b) Determine uma equação da recta s, tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto onde $t = \frac{\pi}{4}$.

19. Determine o vetor velocidade $\vec{v}(t)$ e a aceleração $\vec{a}(t)$ de uma partícula que descreve a trajetória $\vec{r}(t) = (2t, 8 - 3t^2, 3t + 4)$.

20. Seja uma partícula que segue a trajetória descrita por $\vec{r}(t) = (vt - r\sin(wt), r - r\cos(wt)$, r, w, v constantes reais. Faça $r = 2, w = 1, v = rw = 2$.

    (a) Determine a posição, velocidade e aceleração no instante $t = 0$seg. e $t = \frac{3\pi}{2}$seg.

    (b) Determine a equação da reta tangente à curva de equação $\vec{r}(t)$ no instante $t = \frac{3\pi}{2}$.

21. Considere a curva plana de equações paramétricas $x(t) = t^2 - 1; y(t) = t^3 - t$, $t \in \mathbb{R}$.

    (a) Determine os pontos da curva onde a reta tangente à curva é horizontal.

    (b) Determine os pontos da curva onde a reta tangente à curva é vertical.

22. Seja $\overrightarrow{r}$ uma função vetorial de variável real. Mostre que se para todo $t \in \mathbb{R}$, $\|\overrightarrow{r}(t)\| = k$, com $k \in \mathbb{R}^+$ fixo, então $\overrightarrow{r}'(t).\overrightarrow{r}(t) = 0$ e interprete geometricamente este resultado.

23. Considere uma curva $\mathcal{C}$ no espaço que no instante $t = 0$ passa no ponto $(3, 6, 5)$ e cujo vetor tangente à curva nesse mesmo ponto tem componentes $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$. Determine a equação da reta tangente à curva $\mathcal{C}$ quando $t = 0$.

24. Suponha que uma partícula segue a a trajetória C de equações $r(t) = (\exp t, \exp(-t), \cos t)$. De repente, no instante $t = 1$, ela segue a tangente à curva. Onde é que ela está no instante $t = 3$?

25. Uma partícula move-se no espaço e no instante $t = 1$, está na posição associada ao vetor $\overrightarrow{r}(1) = e\overrightarrow{e_3}$. Nesse mesmo instante, o vetor velocidade é dado por $\overrightarrow{r}'(1) = 3\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2} + e\overrightarrow{e_3}$.

    Sabendo que o vetor aceleração é, em cada instante t, dado por $\overrightarrow{a}(t) = t\overrightarrow{e_1} + t^2\overrightarrow{e_2} + e^t\overrightarrow{e_3}$, **determine** a posição inicial ($t = 0$) da partícula e a função vetorial $\overrightarrow{r}(t)$ associada à sua trajetória.