Análise Matemática EE - Ficha nº 7

1ºano, 2ºsemestre

Integrais duplos em coordenadas retangulares

1. Calcule o valor de cada um dos seguintes integrais iterados:

   a) $\displaystyle\int_0^1\int_{-1}^2 (2y^2-3x)dx\,dy$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}(u\sin t + t\sin u)\,dt\,du$

   c) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{x^2} 2x^2y\,dy\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^u \sqrt{u^2+4}\,dv\,du$

2. Escreva cada integral duplo sobre a região R dada como um integral iterado, usando a ordem de integração dada. Em alguns casos, pode ser necessário dividir o integral em dois. Esboce a região R em primeiro lugar.

   (a) R é o triângulo com vértices na origem, em $(0,2)$ e $(-2,2)$.
   Escreva como um integral iterado: i) $\displaystyle\iint_R dx\,dy$. ii) $\displaystyle\iint_R dy\,dx$.

   (b) R é o setor no 1º quadrante do círculo centrado na origem e raio 2, entre o eixo OX e a reta $y=x$.
   Escreva como um integral iterado: i) $\displaystyle\iint_R dx\,dy$. ii) $\displaystyle\iint_R dy\,dx$.

   (c) R é a região limitada pela parábola $y^2=x$ e a reta que passa em $(2,0)$ com declive 1.
   Escreva como um integral iterado: i) $\displaystyle\iint_R dy\,dx$. ii) $\displaystyle\iint_R dx\,dy$.

3. Calcule cada um dos seguintes integrais duplos. Escolha a ordem de integração que facilita o seu cálculo, dada a função integranda e a região R.

   (a) $\displaystyle\iint_R x\,dA$ onde R é a região plana limitada pelos eixos e pela reta $2y+x=2$.

   (b) $\displaystyle\iint_R (2x+y^2)\,dA$ onde R é a região plana do 1ºquadrante, limitada pelos eixos e pela parábola $y^2=1-x$. ($dx\,dy$ é mais fácil).

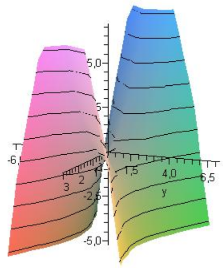
   (c) $\displaystyle\iint_R y\,dA$ onde R é o triângulo com vértices $(-1,0),(1,0),(0,1)$.

4. Determina o volume dos sólidos dados, usando integrais duplos:

   (a) O sólido limitado superiormente pelo gráfico da função $z=\sin^2 x$ e inferiormente pela região R do plano XOY. A região R é limitada pelo eixo OX e pelo arco central da função $y=\cos x$.

   (b) O sólido limitado superiormente pelo gráfico da função $z=xy$ e inferiormente pela região R do plano XOY. A região R é a região plana do 1ºquadrante limitada pelos gráficos de $y=x$ e $y=x^2$.

   (c) O sólido limitado superiormente pelo gráfico da função $z=x^2-y^2$, inferiormente pelo plano XOY e limitado pelos planos $x=0$ e $x=1$.



5. Calcula o valor dos seguintes integrais, mudando primeiro a ordem de integração. (Sug: Primeiro, esboça a região de integração no plano.)

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 \exp(-y^2)\, dy\, dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{1/4} \int_{\sqrt{t}}^{1/2} \frac{e^u}{u}\, du\, dt.$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^{1/3}}^1 \frac{1}{1+u^4}\, du\, dx.$

6. Cada um dos integrais seguintes é definido na região R que é o círculo centrado na origem e raio 1. Sem os calcular e usando as simetrias da região R e a função integranda:

   (i) identifica aqueles cujo valor é zero;

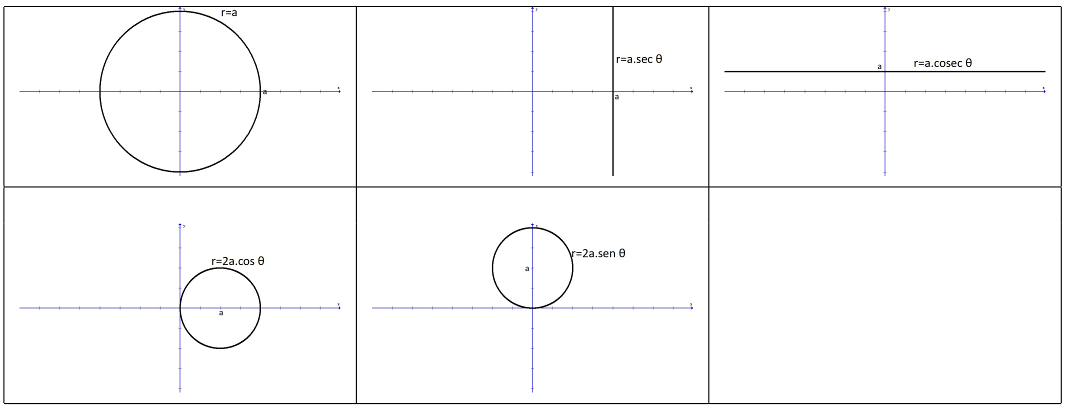
   (ii) para os que são diferente de zero, escreve um integral duplo equivalente (com o mesmo valor) com uma função integranda mais simples e/ou sobre a parte do círculo no 1ºquadrante ou no semi-plano (se possível).

   $\iint_R x\; dA$; $\iint_R e^x\; dA$; $\iint_R x^2\; dA$; $\iint_R x^2 y\; dA$; $\iint_R (x^2+y)\; dA$ $\iint_R xy\; dA$

7. Sabendo que se $f \leq g$ na região R, então $\displaystyle\iint_R f\, dA \leq \iint_R g\, dA$, justifica as seguintes desigualdades:

   a) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{1+x^4+y^4} \leq$ área de R; b) $\displaystyle\iint_R \frac{x}{1+x^2+y^2} \leq \frac{\ln 2}{2}$ onde $R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Integrais duplos em coordenadas polares



1. Escreva o integral duplo sobre a região R dada como um integral iterado em coordenadas polares. Em alguns casos, pode ser necessário dividir o integral em dois. Esboce a região R em primeiro lugar.

(a) R é o círculo centrado na origem e raio 2.

(b) R é o setor do círculo centrado na origem e raio 3, que fica no 2^oquadrante.

(c) R é o anel entre os círculos centrados na origem e raio 1 e 2, entre as retas $y = x$ e $y = -x$, limitado ao 1^o e 2^o quadrantes.

(d) R é o círculo centrado em $(1, 0)$ e raio 1.

(e) R é a região que se encontra no exterior do círculo centrado em $(a, 0)$, $a > 0$ e raio a, limitada pelo eixo OY, pela reta $y = a$.

(f) R é a região que se encontra no interior do círculo centrado na origem e raio 2, que fica à esquerda da reta $x = -1$.

2. Determine o valor dos seguintes integrais na região R dada, usando coordenadas polares.

   (a) $\iint_R x\,dx\,dy$ onde R é a metade do lado esquerdo do círculo centrado na origem e raio 1.

   (b) $\iint_R \tan^2\theta dA$ onde R é o triângulo de vértices na origem, em $(1, 0)$ e $(1, 1)$

   (c) $\iint_R \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy$ onde R é a metade do lado direito do círculo centrado em $(0, \frac{1}{2})$ e raio $\frac{1}{2}$.

3. Determine o volume dos sólidos indicados, usando integrais duplos em coordenadas polares.

   (a) A semi-esfera de raio a. (sug: considere que a sua base fica sobre a circunferência $x^2 + y^2 = a$).

   (b) O sólido limitado superiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e inferiormente pela região R que fica no plano XOY. A região R é o círculo de raio 1 centrada em $(0, 1)$.

Mudança de variáveis em integrais duplos

1. Calcule o integral $\iint_R \frac{x - 3y}{2x + y}\,dx\,dy$ onde R é o paralelogramo limitado lateralmente pelas retas $y = -2x + 4$ e $y = -2x + 1$ e superiormente e inferiormente pelas retas $y = \frac{x}{3}$ e $y = \frac{x-7}{3}$. Utilize a mudança de variáveis $u = x - 3y$ e $v = 2x + y$.

2. Calcule o integral $\iint_R \cos\frac{x - y}{x + y}\,dx\,dy$ onde R é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(1, 1)$. Utilize a mudança de variáveis $u = x + y$ e $v = x - y$.

3. Determine o volume do sólido limitado superiormente pelo gráfico de $z = 16 - x^2 - 4y^2$ e inferiormente pelo plano XOY. Utilize a mudança devariável $u = x$ e $v = 2y$.

4. Calcule o integral $\iint_R (2x - 3y)^2(x + y)^2\,dx\,dy$ onde R é o triângulo limitado pela parte positiva do eixo OX, pela parte negativa do eixo OY e pela reta $2x - 3y = 4$. Utilize a mudança de variáveis $u = x + y$ e $v = 2x - 3y$.