Complementos de Análise Matemática B/C

Departamento de Matemática e Aplicações

2011/2012

Folha de Exercícios 1

Pré-Requisitos

Eng^a. de Comunicações, Eng^a. Eletrónica Industrial e Computadores, Eng^a. de Materiais

1. Sabendo que $(u\,v)' = u\,v' + u'\,v \quad \Rightarrow \quad P(u\,v') = u\,v - P(u'\,v)$, determinar:

   a) $\displaystyle\int_0^1 te^t\,dt$ *b)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2e^t\cos t\,dt$ *c)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(x+1)t}\,dt.$

2. Calcular os seguintes determinantes:

   a) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} & 2e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} & 4e^{2x} \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} x & x^3 & x^2 \\ 1 & 3x^2 & 2x \\ 0 & 6x & 2 \end{vmatrix}.$

3. Fatorizar os seguintes polinómios usando, se necessário, a "regra de Rufini":

   a) $x^3 - 2x^2 + x$ *b)* $x^3 - x^2 - x + 1$ *c)* $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ *d)* $x^4 - 2x^2 + 1.$

4. Decompor as seguintes funções racionais:

   a) $\dfrac{s}{(s-1)\,(s+1)}$ *c)* $\dfrac{s+1}{(s-1)\,(s^2+4)}$ *e)* $\dfrac{4}{s^3+s-2}$

   b) $\dfrac{1}{s\,(s+1)^2}$ *d)* $\dfrac{25\,(s^2-1)}{(s-1)^3\,(s^2+4)}$ *f)* $\dfrac{s^5-1}{s^4-s^3+s^2-s}.$

5. Mostrar que a mudança de variável $y(x) = x\,v(x)$ implica

$$\frac{dy(x)}{dx} = x\,\frac{dv(x)}{dx} + v(x), \qquad \frac{d^2y(x)}{dx^2} = x\frac{d^2v(x)}{dx^2} + 2\frac{dv(x)}{dx}.$$

6. Recordando que se $F(x,y)$ é uma função real de classe $\mathcal{C}^1$, então

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy,$$

   determinar o diferencial total das seguintes funções:

   a) $f(x,y) = y - x^2 - c$ *c)* $h(x,y) = ye^x + xe^y$

   b) $g(x,y) = y^2x + 4x^2y - c^2$ *d)* $m(x,y) = \cos xy.$

7. Para cada uma das seguintes relações implícitas determinar dy/dx:

   $a)\quad x^2+y^2=3 \qquad b)\quad yx+y^2=k \qquad c)\quad ye^{xy}=1 \qquad d)\, \operatorname{sen} xy = y.$

8. Determinar as funções mais gerais que verificam:

$$a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = ye^{xy}, \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = xe^{xy}+2y, \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G(x,y)}{\partial x} = e^x\left(\cos xy - y \operatorname{sen} xy\right), \\ \dfrac{\partial G(x,y)}{\partial y} = -xe^x \operatorname{sen} xy. \end{cases}$$

9. Sabendo que se um sistema linear de ordem n, nas n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, for equivalente à equação matricial $DX = B$, e se $|D| \neq 0$, então as suas soluções são ("regra de Cramer")

$$x_1 = \frac{|D_{x_1}|}{|D|}, \quad x_2 = \frac{|D_{x_2}|}{|D|}, \; ..., \quad x_n = \frac{|D_{x_n}|}{|D|},$$

   onde D_{x_i} é a matriz que se obtém substituindo a i-ésima coluna de D pelo vector B, mostrar que a "regra de Cramer" para $n = 2$ se escreve

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & d_{12} \\ b_2 & d_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} d_{11} & b_1 \\ d_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}},$$

   e determinar as soluções de:

$$a)\quad \begin{cases} x+3y=63, \\ 2x-y=7, \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} f(x)+2g(x)=x, \\ 2f(x)-g(x)=1, \end{cases} \qquad c)\quad \begin{cases} f(x)-xg(x)=e^x-1, \\ xf(x)+x^2g(x)=x(e^x+1). \end{cases}$$

Complementos de Análise Matemática B/C

Soluções da Folha de Exercícios 1

1. *a*) 1 *b*) $e^{\pi/2} - 1$ *c*) $\dfrac{1}{1+x}, \quad x > -1.$

2. *a*) x^2 *b*) $e^x e^{2x}$ *c*) 0 *d*) $-2x^3.$

3. *a*) $x\,(x-1)^2\,,$

b) $(x+1)\,(x-1)^2\,,$

c) $(x+1)^3\,,$

d) $(x-1)^2\,(x+1)^2\,.$

4. *a*) $\dfrac{1}{2\,(s-1)} + \dfrac{1}{2\,(s+1)}$ *c*) $\dfrac{2}{5\,(s-1)} + \dfrac{3-2s}{5\,(s^2+4)}$ *e*) $\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{s+2}{s^2+s+2}$

b) $\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{(s+1)^2} - \dfrac{1}{s+1}$ *d*) $\dfrac{10}{(s-1)^2} + \dfrac{1}{(s-1)} - \dfrac{11+s}{s^2+4}$ *f*) $s+1+\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}.$

6. *a*) $df(x,y) = -2x\,dx + dy,$

b) $dg(x,y) = (y^2+8xy)\,dx + (2yx+4x^2)\,dy,$

c) $dh(x,y) = (ye^x + e^y)\,dx + (e^x + xe^y)\,dy,$

d) $dm(x,y) = -y \operatorname{sen} xy\,dx - x \operatorname{sen} xy\,dy.$

7. *a*) $y' = -x/y,$

b) $y' = -y/(x+2y),$

c) $y' = -y^2/(1+xy),\,,$

d) $y' = (y\cos xy)/(1 - x\cos xy).$

8. *a*) $F(x,y) = e^{xy} + y^2 + k,$

b) $G(x,y) = e^x \cos xy.$

9. *a*) $x = 12, \quad y = 17,$

b) $f(x) = (x+2)/5, \quad g(x) = (2x-1)/5,$

b) $f(x) = e^x, \quad g(x) = 1/x.$