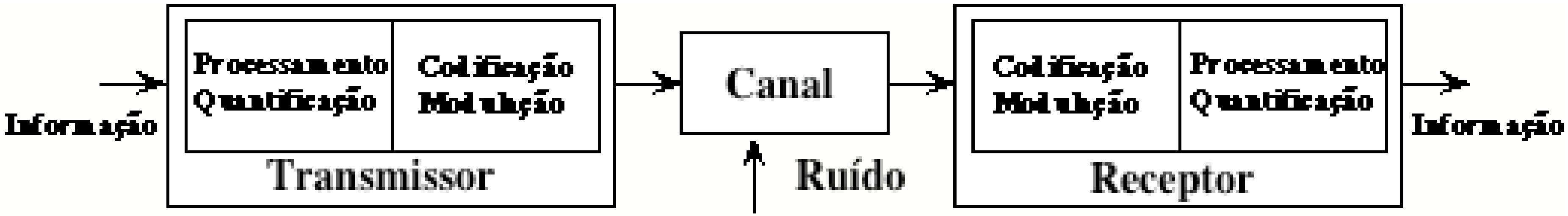
Codificação e Transmissão

Conceitos Básicos e Fundamentais

Componentes de um Sistema de Transmissão



Efeito do Ruído

Sistemas Analógicos

Relação Sinal-Ruído na Recepção

Sistemas Digitais

Erros na Informação

Variações no relógio

Codificação e Transmissão

Conceitos Básicos e Fundamentais

Modulações analógicas e digitais

Para quê?

Para adaptar o sinal ao meio (Canal) de transmissão!

Para reduzir efeitos indesejáveis ... *Distorção,* ***Interferência,*** *Ruído!*

Como?

Radiação *(Antenas)*

Multiplexagem *(Atribuição de frequências, Partilha de Banda)*

Analise espectral dos Sinais

Sinais periódicos e não periódicos

Transformadas de Laplace e de Fourier

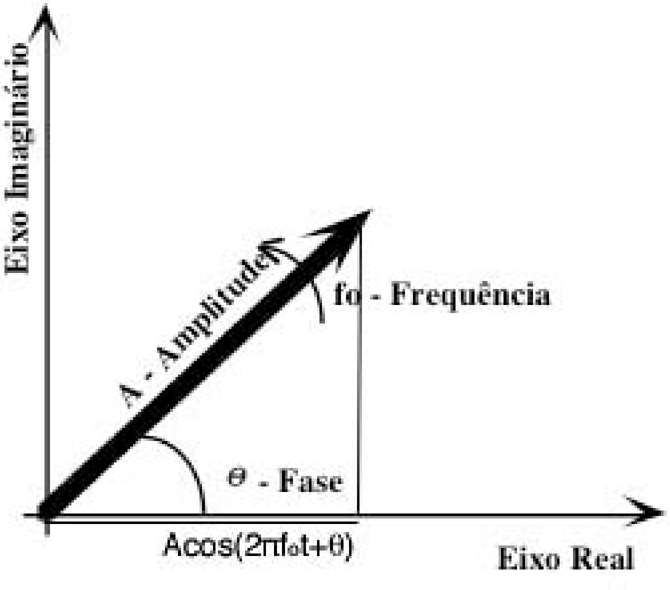
Convolução e Correlação de sinais

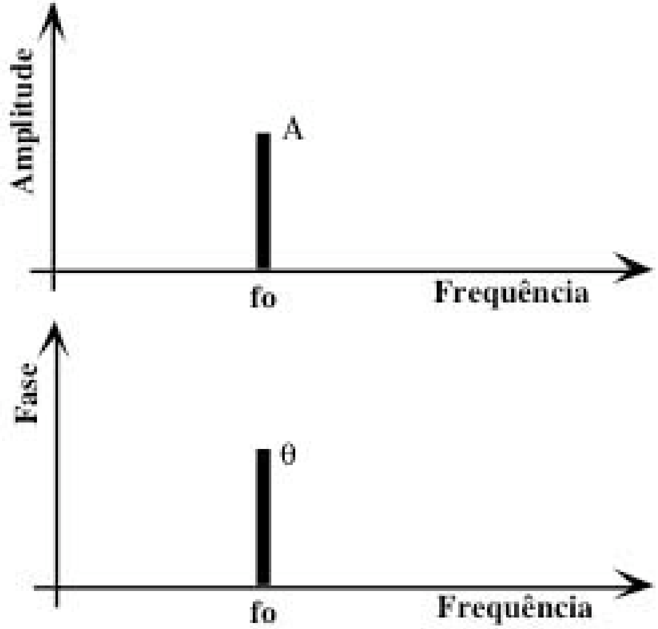
Sinais aleatórios e Ruído

Conceitos Básicos e Fundamentais

Analise espectral dos Sinais

$$v(t)=A\cos(w_o t+\theta)$$

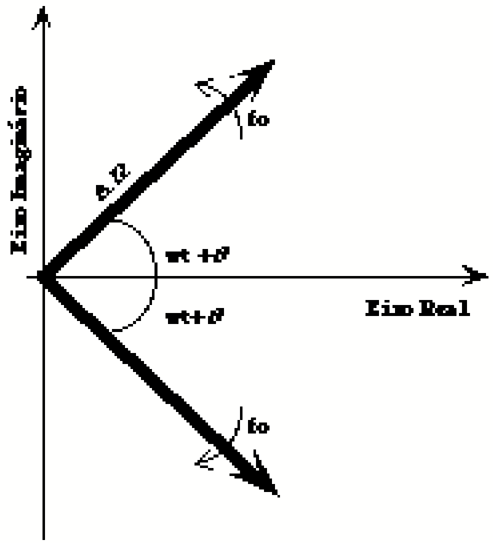


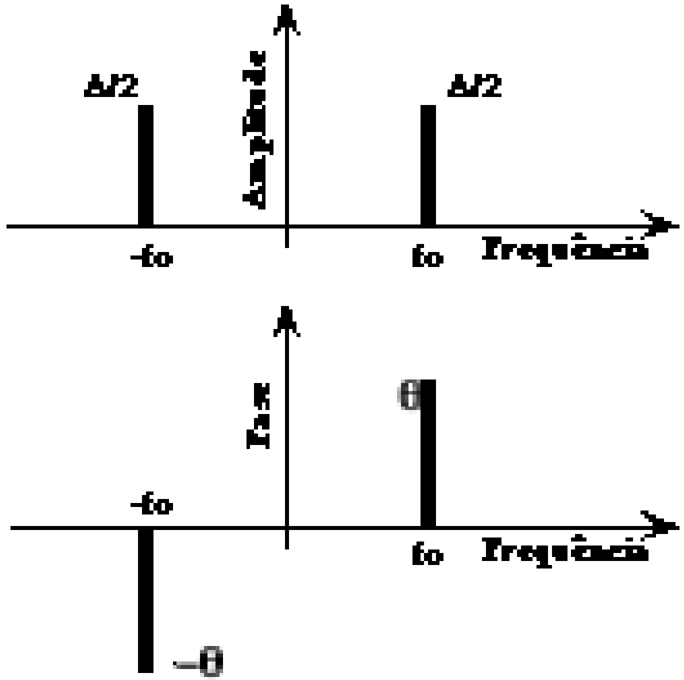


Conceitos Básicos e Fundamentais

Analise espectral dos Sinais

$$v(t)=A\cos(wt+\theta)=A/2(e^{j\theta}\,e^{jwt}+e^{-j\theta}\,e^{-jwt})$$





Conceitos Básicos e Fundamentais

Sinais periódicos e não periódicos

Um Sinal $v(t)$ é periódico se $v(t \pm mT_0) = v(t)$

Valor Médio : $< v(t) > = 1/T_0 \int_{T0} v(t)\, dt$

Potência Média: $P = < |v(t)|^2 > = 1/T_0 \int_{T0} |v(t)|^2\, dt$

Se $v(t) = A\cos(wt + \theta)$, com $w = 2\pi / T_0$, então:

$$< v(t) > = 0$$

$$< |v(t)|^2 > = A^2 / 2$$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Transformadas de Fourier

Se v(t) for periódico, *então:*

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)\, e^{j2\pi nf_0 t}, \text{ com } c(nf_0) = 1/T_0 \int_{T_0} v(t)\, e^{-j2\pi nf_0 t} dt$$

Quando $n=0$, $c(0) = 1/T_0 \int_{T_0} v(t)dt = \langle v(t) \rangle$

Se v(t) for real, *então:* $c(nf_0) = |c(nf_0)|\, e^{j\arg[c(nf_0)]}$ e $c(-nf_0) = c^*(nf_0)$.

se **v(t) tiver simetria par v(-t) = v(t),**

então $\arg[c(nf_0)] = 0$ ou $\pm\pi$;

se **v(t) tiver simetria impar v(-t) = -v(t),**

então $\arg[c(nf_0)] = \pm\pi/2$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Transformadas de Fourier

Se v(t) for periódico e real, *então:*

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)\, e^{j2\pi nf0t}$$

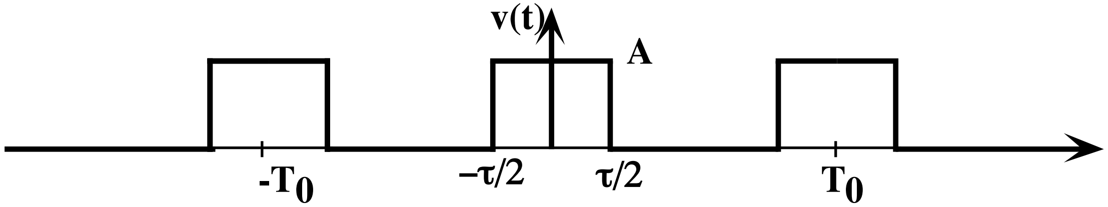
Como $c(nf_0)\, e^{j2\pi nf0t} + c^*(nf_0)\, e^{-j2\pi nf0t} = 2|c(nf_0)|\cos(2\pi nf_0 t + \arg[c(nf_0)])$

então:

$$v(t) = c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} |2c(nf_0)|\cos(2\pi nf_0 t + \arg[c(nf_0)])$$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Transformadas de Fourier



Exemplo

$$v(t) = A, \text{ se } |t \pm nT_0| < \tau/2$$

$$v(t) = 0, \text{ se } |t \pm nT_0| > \tau/2$$

$$c(nf_0) = 1/T_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\, e^{-j2\pi nf0t}\, dt$$

$$c(nf_0) = A/(-j2\pi nf_0T_0)\, (\, e^{-j\pi nf0\tau} - e^{j\pi nf0\tau}\,)$$

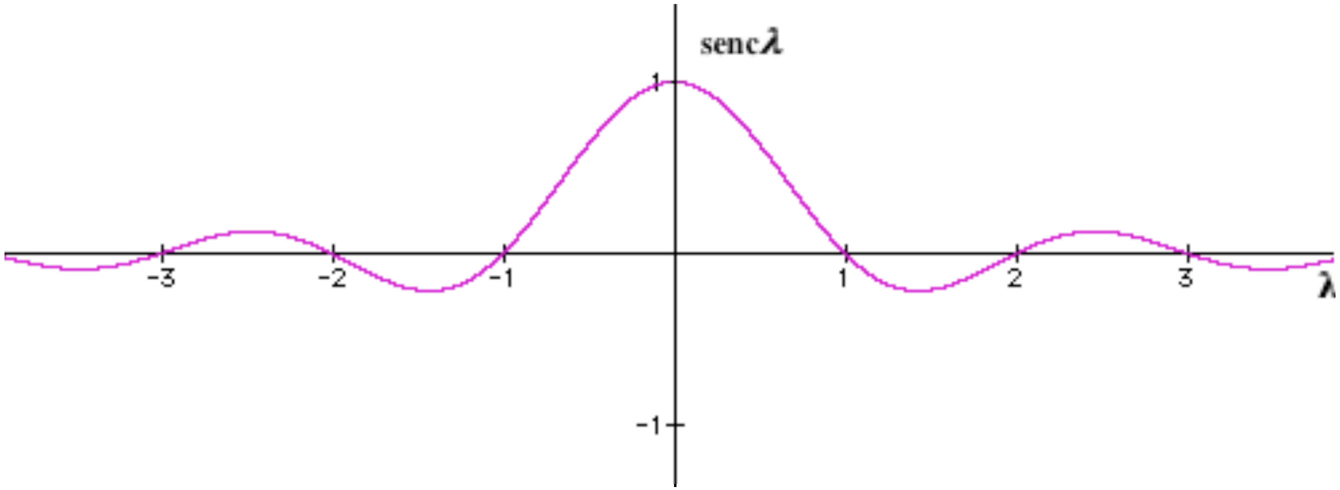
$$c(nf_0) = A/(\pi n)\ \text{sen}\ (\pi nf_0\tau\,) = (Af_0\tau\,)\ \text{senc}\ (nf_0\tau\,)$$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Transformadas de Fourier

Função Seno Cardinal

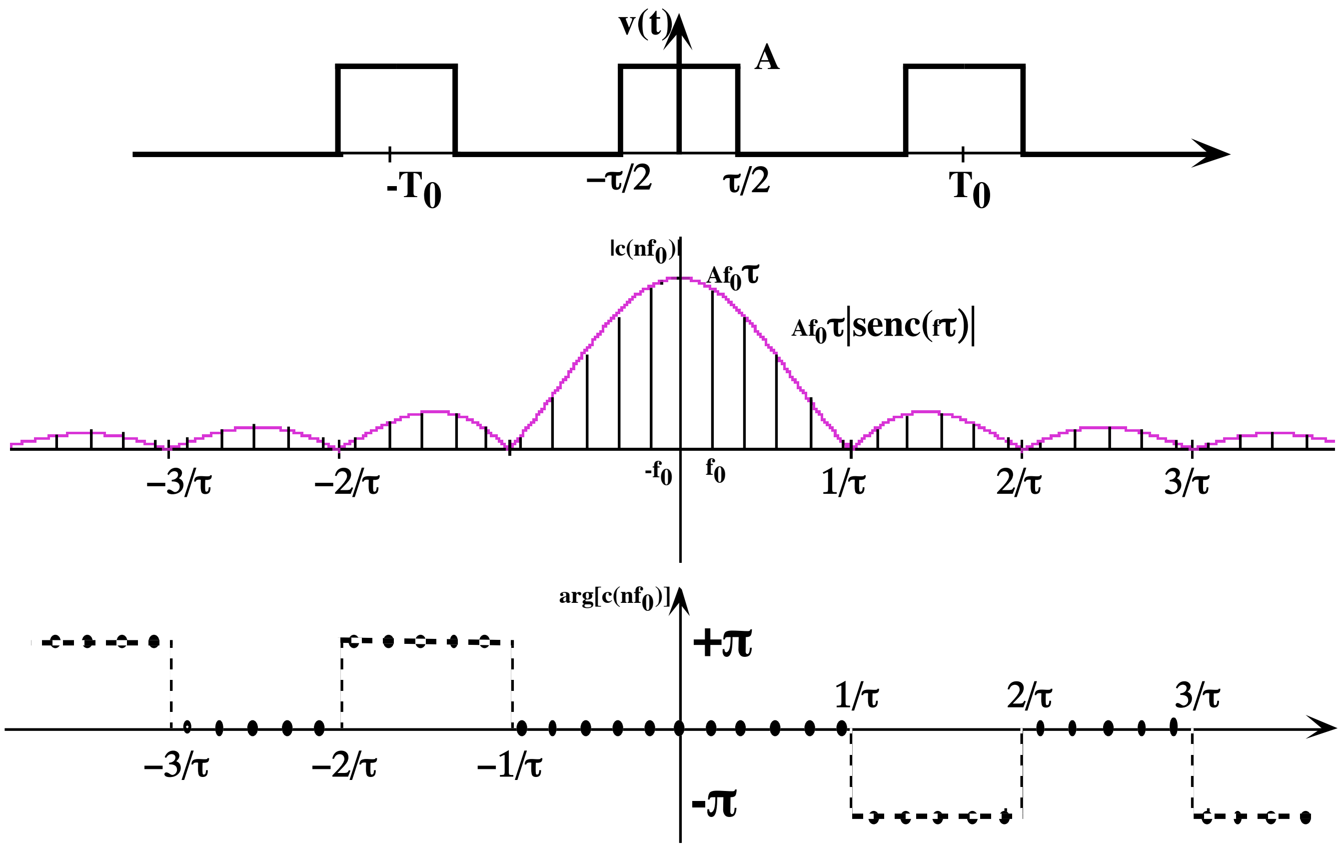
Senc $\lambda = (1/\pi\lambda)$ sen $\pi\lambda$



sen $\lambda = 1$, se $\lambda = 0$ e 0, se $\lambda = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Transformadas de Fourier



Conceitos Básicos e Fundamentais

Teorema de Parseval

Potência Média

$$P = \langle |v(t)|^2 \rangle = 1/T_0 \int_{T0} |v(t)|^2 \, dt$$

$$P = 1/T_0 \int_{T0} v(t).v^*(t) \, dt$$

$$P = 1/T_0 \int_{T0} v(t) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c^*(nf_0) \, e^{-j2\pi nf0t} \right) dt$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1/T_0 \int_{T0} v(t) \, e^{-j2\pi nf0t} dt \right) . \; c^*(nf_0)$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0) \, . \, c^*(nf_0)$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c(nf_0)|^2$$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Transformadas de Fourier

Se v(t) não for periódico, *então:*

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)\, e^{j2\pi ft}\, dt, \text{ sendo } V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$V(o) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, dt = \langle v(t) \rangle$$

Se v(t) for real, *então:* $V(-f) = V^{*}(f).$

se **v(t) tiver simetria par** $v(-t) = v(t)$,

então $arg[V(f)] = 0$ *ou* $\pm\pi$;

se **v(t) tiver simetria impar** $v(-t) = -v(t)$,

então $arg[V(f)] = \pm\pi/2$

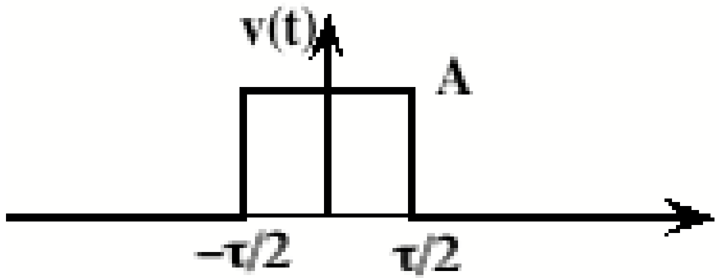
Conceitos Básicos e Fundamentais

Transformadas de Fourier

Exemplo

$v(t) = A, \text{ se } |t| < \tau/2$

$v(t) = 0, \text{ se } |t| > \tau/2$



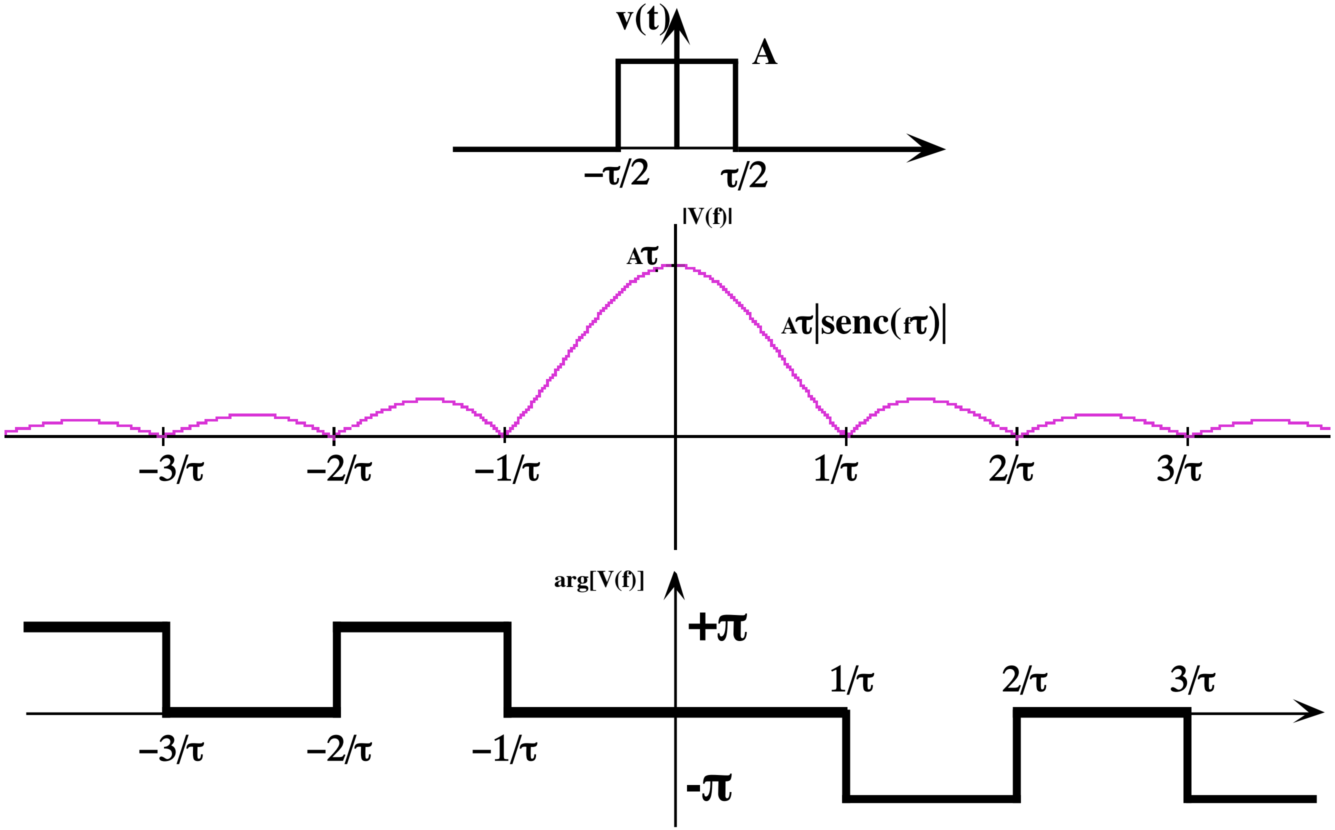
$$V(f) = 2 \int_0^{\tau/2} A \cos(2\pi f t)\, dt$$

$$V(f) = 2A/(2\pi f) \text{ sen } (\pi f \tau)$$

$$V(f) = (A\tau) \text{ senc } (f\tau)$$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Transformadas de Fourier



Conceitos Básicos e Fundamentais

Teorema de Rayleigh

Energia do sinal

Uma vez que

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t).w^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} V(f).W^*(f)\, df$$

e

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} v(t).v^*(t)\, dt$$

então:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)\,.V^*(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2\, df$$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Transformadas de Fourier

Propriedades

Linearidade: $\alpha\, v(t) + \beta\, v(t) \Leftrightarrow \alpha\, V(f) + \beta\, V(f)$

Atraso Temporal: $v(t-t_a) \Leftrightarrow V(f)\, e^{-jwta}$

Translação de Frequência: $v(t)\; e^{jwct} \Leftrightarrow V(f-f_c)$

Escala: $v(at) \Leftrightarrow (1/|a|)\, V(f/a)$

Dualidade: se $v(t) \Leftrightarrow V(f)$ então a TF de $V(t) \Leftrightarrow v(-f)$

Diferenciação: $d^{v(t)}/dt \Leftrightarrow j2\pi f V(f)$

Integração: $\int^{\infty}_{-\infty} v(t)\, dt \Leftrightarrow (1/ j2\pi f)V(f)$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Convolução e Correlação

Convolução

$$v(t)*w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda).w^{*}(t-\lambda)\, d\lambda$$

Propriedades

$$v(t)*w(t) \Leftrightarrow V(f)W(f)$$

$$v(t)w(t) \Leftrightarrow V(f)*W(f)$$

Correlação

$$R_{vw}(\tau) = <v(t),w(t-\tau)> = \int_{-\infty}^{\infty} v(t).w^{*}(t-\tau)\, dt$$

$$R_{vw}(\tau) = <v(t),w(t-\tau)> = \lim_{T\to\infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} v(t).w^{*}(t-\tau)\, dt$$

$$R_{vw}(\tau) = <v(t),w(t-\tau)> = 1/T_0 \int_{T0} v(t).w^{*}(t-\tau)\, dt$$

A Função de autocorrelação $R_v(\tau) = R_{vv}(\tau)$ representa a variação no tempo de v(t).

Conceitos Básicos e Fundamentais

Função de densidade espectral

$$G_v(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_v(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$R_v(\tau) \Leftrightarrow G_v(f)$ (Teorema de Wiener-Kinchine)

$$G_v(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_v(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \Leftrightarrow R_v(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df$$

- Se v(t) for real, então $G_v(f)$ é real e par, uma vez que $R_v(\tau)$ é real e par.
- $R_v(0)$ representa a potência ou a energia do v(t).

$$R_v(0) = \langle v(t), v(t) \rangle$$

$$|R_v(\tau)| \leq R_v(0)$$

$$R_v(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)\, df$$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Função de densidade espectral

Se *v(t) for um sinal periódico de potência.*

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x(nf_0)\, e^{j2\pi nf0t}$$

$$R_v(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_y(nf_0)|^2\, e^{j2\pi nf0\tau}$$

$$G_v(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_y(nf_0)|^2\, \delta\,(f-nf_0)$$

A densidade de potência de um sinal periódico é impulsiva e localizada nas frequências $f=nf_0$.

Conceitos Básicos e Fundamentais

Resposta em Frequência

Um sistema, cujas *entradas x(t) e saídas y(t)* são descritas por uma *equação diferencial linear* com coeficientes constantes, do tipo:

$$a_n(d^n y/dt^n)+ \ldots +a_1(dy/dt)+a_0 y(t) = b_m(d^m x/dt^m)+ \ldots +b_1(dx/dt)+a_0 x(t),$$

tem como *Função de Transferência*, $H(f) = |H(f)|\, e^{j\arg[H(f)]} = Y(f)/X(f)$

$$H(f) = \frac{b_m(j2\pi f)^m + \ldots + b_1(j2\pi f) + b_0}{a_n(j2\pi f)^n + \ldots + a_1(j2\pi f) + a_0}$$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Resposta em Frequência

Resposta em regime estacionário

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x(nf_0)\, e^{j2\pi nf0t}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_y(nf_0)\, e^{j2\pi nf0t}$$

$$c_y(nf_0) = H(nf_0)\, c_x(nf_0)$$

$$|c_y(nf_0)| = |H(nf_0)|.|c_x(nf_0)|$$

$$\arg[c_y(nf_0)] = \arg[H(nf_0)] + \arg[c_x(nf_0)]$$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Resposta em Frequência

Resposta em regime estacionário

Se x(t) for periódico…

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_y(nf_0)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(nf_0)|^2 \, |c_x(nf_0)|^2$$

Se x(t) não for periódico…

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 \, |X(f)|^2$$

$$G_Y(f) = |H(f)|^2 \, G_X(f)$$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Resposta em Frequência

Densidade espectral

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda).x(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$R_y(\tau) = \langle y(t), y(t-\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y(t).y^*(t-\tau)\, dt$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda).x(t-\lambda)\, d\lambda \, . \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\theta).x^*(t-\tau-\theta)\, d\theta\, dt$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda).\, h^*(\theta).\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda).x^*(t-\tau-\theta)\, d\lambda\, d\theta\, dt$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda).\, h^*(\theta).\, R_x(\tau-\lambda+\theta)\, d\lambda\, d\theta$$

$$G_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda).e^{-j2\pi f\lambda}\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\theta).\, e^{-j2\pi f\theta}\, d\theta \, .\, G_x(f)$$

$$\|y\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2.G_x(f)\, df$$

Conceitos Básicos e Fundamentais

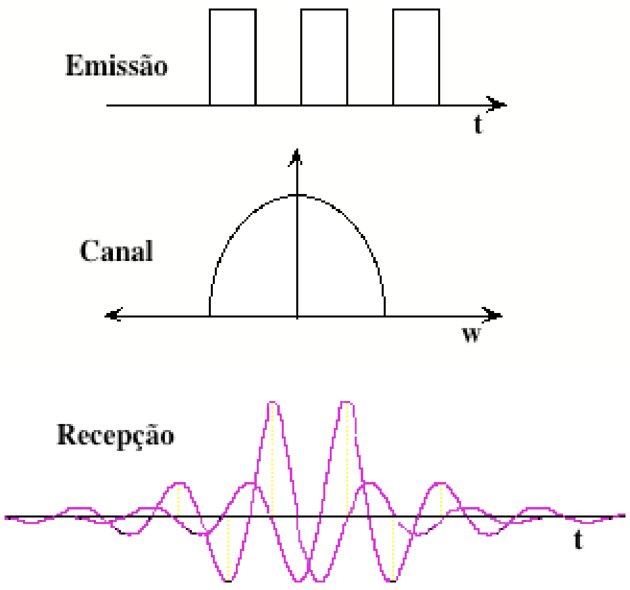
Resposta em Frequência

Linearidade [$\alpha\, v(t) + \beta\, v(t) \Leftrightarrow \alpha\, V(f) + \beta\, V(f)$]

Limitações da Largura de Banda ***[Banda Finita]***

Ruído ***[Térmico, Branco]***

Filtros **[Passa Baixo, Alto, Banda]**



Conceitos Básicos e Fundamentais

Sinais aleatórios e Ruído

Variáveis aleatórias

Contínuas

Discretas

Funções de Distribuição

Cumulativa: $F(x) = P\,(X < x\,) = \int^{x}_{-\infty} p\,(\lambda)\, d\lambda$

Frequência: $F(x_i\ ) = P\,(X = x_i\ )$

Densidade de probabilidade: $p\,(x) = dF(x)/dx$

Exemplos

Binomial; Uniforme; Gaussiana.

Conceitos Básicos e Fundamentais

Sinais aleatórios e Ruído

Médias e Momentos Estatísticos

$E[g(x)] = \int^{\infty}_{-\infty} g(x)\, p(x)\, dx$, *com* $g(x) = X^n$, *e* $n = 1, 2, \ldots$

$n = 1$, $E[g(x)]$ – ***primeiro momento ou média***

$n = 2$, $E[g(x)]$ – ***segundo momento ou valor médio quadrático.***

Variância

$E[(X - E[X])^2]$

Desvio padrão: - ***Raiz quadrada da Variância***

Variáveis aleatórias Múltiplas

$E[g(x,y)] = \int^{\infty}_{-\infty} \int^{\infty}_{-\infty} g(x,y)\, p(x,y)\, dxdy$

Correlação $R_{vw}(\tau) = \langle v(t), w(t-\tau) \rangle = E[v(t).w^*(t-\tau)]$

Se $R_{vw}(\tau) = R_{wv}(\tau) = 0$ *v(t) e w(t) são ortogonais ou estatisticamente independentes.*

Conceitos Básicos e Fundamentais

Sinais aleatórios e Ruído

Densidade espectral

Transformada de Fourier de $R_v(\tau)$

$$G_v(f) = \int_{-\infty}^{\infty} E[\, v(t).v^*(t-\tau\,)]\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

Com $G_v(f) = G_v(-f)$ e $\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)\, df = R_v(0) = E[\, v^2]$

Exemplo

$$v(t) = A\cos(w_0 t + \theta),$$

com θ uniformemente distribuída no intervalo $-\pi < \theta < +\pi$.

$$R_y(\tau) = E[\, v(t).v^*(t-\tau)] = A^2/2.(E[\cos w_0\tau] + E[\cos 2w_0\tau - w_0\tau + 2\theta])$$

$$R_y(\tau) = A^2/2 \cos w_0\tau$$

$$G_v(f) = A^2/4\ \delta\,(f-f_0) + A^2/4\ \delta\,(f+f_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)\, df = A^2/2$$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Sinais aleatórios e Ruído

Ruído Térmico

$$E[v] = 0,$$

$$E[v^2] = 1{,}9\ 10^{-12}\ T^2 R = 2(\pi\, k\, T)^2 R/3h \quad (V^2)$$

Onde,

$k = 1{,}37\ 10^{-23}$ *J/º – C. Boltzmann;*

$h = 6{,}62\ 10^{-34}$ *J/s – C. Planck;*

T – Temperatura em graus Kelvin;

R – Resistência.

$$G(f) = 2Rh\,|f|\,/\,(e^{h|f|kT} - 1)\ (V^2/Hz)$$

$$G(f) \approx 2RkT\ (V^2/Hz)\quad \text{(Modelo de Thévenin)}$$

Modelo de Norton $G_i(f) = G_v(f) / R^2 = 2kT/R\ (I^2/Hz)$

Carga adaptada $G_a(f) = G_v(f) / 4R = kT/2\ (W/Hz)$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Sinais aleatórios e Ruído

Ruído Branco

$$G(f) = \eta / 2$$

$$R_v(\tau) = \int^{\infty}_{-\infty} G_v(f)\, e^{j2\pi ft}\, df = \int^{\infty}_{-\infty} \eta /2\, e^{j2\pi ft}\, df$$

$$R_v(\tau) = \eta /2 \delta (\tau)$$

Relação com o Ruído Térmico

$$\eta_a = KT;\ \eta_i = 4kT/R;\ \eta_v = 4RkT$$

Filtragem

$$G_Y(f) = |H(f)|^2\, G_X(f)$$

$$R_y(\tau) = \int^{\infty}_{-\infty} |H(f)|^2\, G_x(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$$

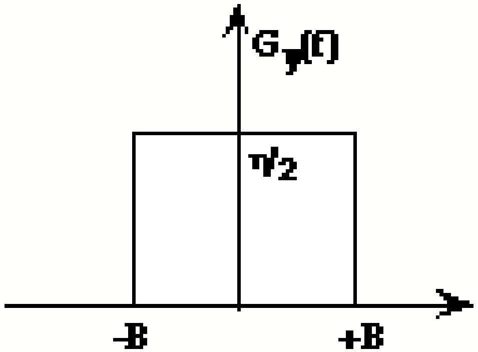
$$E[y^2] = R_y(0) = \int^{\infty}_{-\infty} |H(f)|^2\, G_x(f)\, df$$

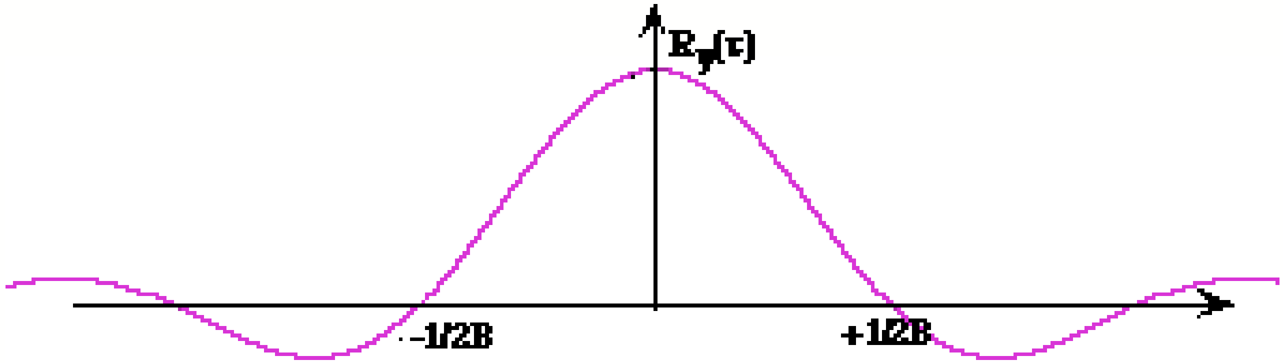
Conceitos Básicos e Fundamentais

Ruído Branco

Filtragem

$G_x(f) = \eta /2$





$G_y(f) = \eta /2 \Pi (f / 2B)$

$R_y(\tau) = \eta B \text{ senc } 2B\eta$

Banda Finita

$E[y^2] = \eta B$

Correlação no tempo em intervalos de 1/2B

Conceitos Básicos e Fundamentais

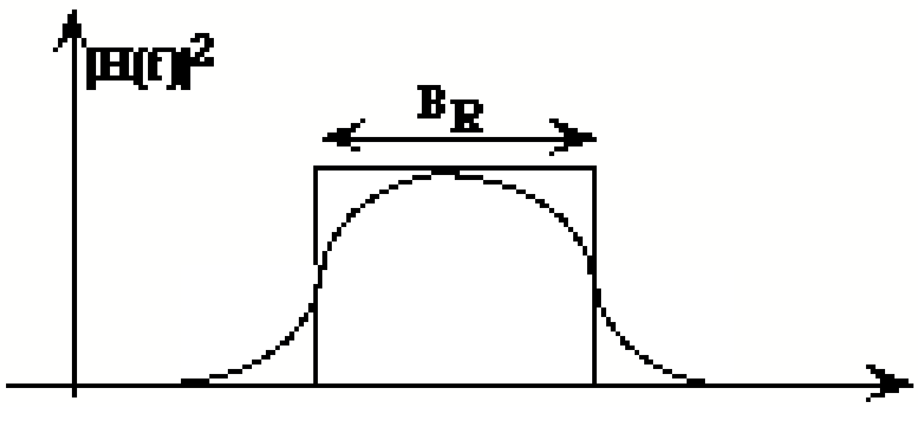
Ruído Branco

Banda Equivalente

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \, \eta/2 \, df = \eta \int_0^{\infty} |H(f)|^2 \, df$$

$$B_R = 1/|H(f)|^2_{max} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 \, df$$

$$E[y^2] = \eta \, |H(f)|^2_{max} \, B_R$$

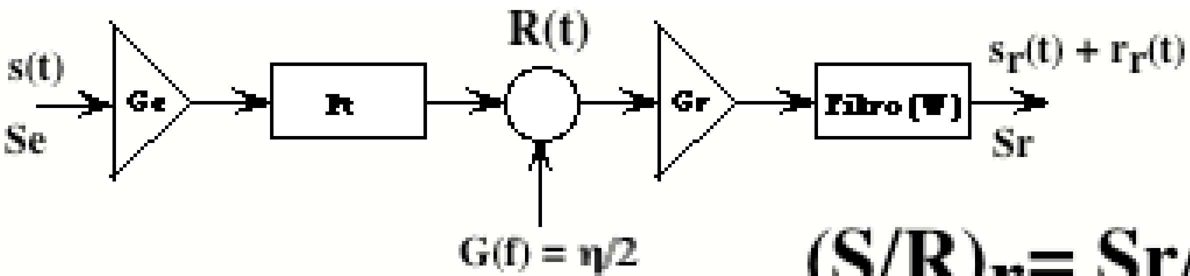


Conceitos Básicos e Fundamentais

Relação Sinal Ruído

Capacidade de Transmissão

$C = Bt \log(1+S/R)$



$$(S/R)_r = Sr/\eta\omega$$

$$(S/R)_r = SeGe/Pt\eta\omega$$

Com ***m*** repetidores, com perdas iguais (Pt_1) ...

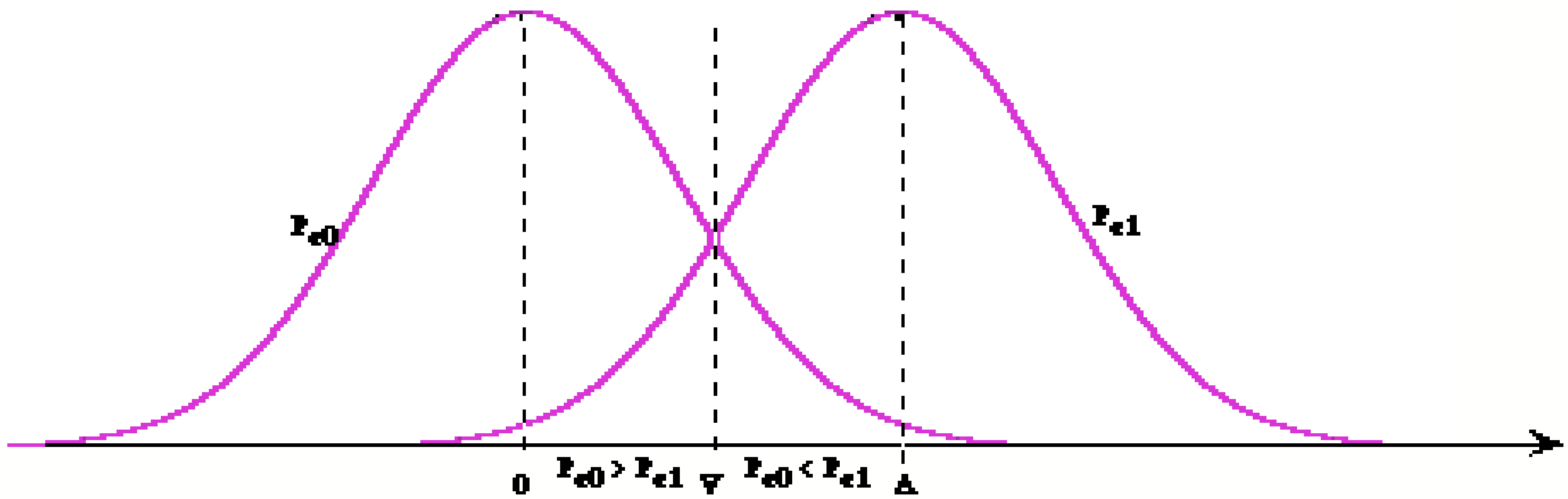
$$\mathbf{(S/R)_r = 1/m(S/R)_1 = (Pt/mPt_1)SeGe/Pt\eta w}$$

Conceitos Básicos e Fundamentais

Relação do Ruído com a Probabilidade de Erro

Ruído Gaussiano

0 -> 0; 1 -> A



Conceitos Básicos e Fundamentais

Probabilidade de Erro

$$Pe = P_0 P_{e0} + P_1 P_{e1}$$

$$P_{e0} = 1/(2\pi)^{1/2} \int_{V}^{\infty} 1/(\sigma)\ e^{-1/2(y/\sigma)2}\, dy = Q(V/\sigma)$$

$$P_{e1} = 1/(2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{V} 1/(\sigma)\ e^{-1/2((y-A)/\sigma)2}\, dy = Q((A-V)/\sigma)$$

Se $P_o = P_1$, então

$$P_e = 1/2\ (P_{e0} + P_{e1}) = Q(A/2\sigma)$$

Unipolar (0 -> 0; 1 -> A) $Sr = A^2/4$

$$(A/2\sigma)^2 = A^2/4N_r = (S/N)_r$$

Bipolar (0 -> -A; 1 -> A) $Sr = A^2/2$

$$(A/2\sigma)^2 = A^2/4N_r = 1/2\ (S/N)_r$$