Universidade do Minho MIECOM
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise Matemática B

— folha 6 — Integrais de Superfície ———————— 2011'12 ———

1. Identifique as superfícies S com as seguintes parametrizações:
   (a) $s(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, com $(u,v) \in [0,2\pi[\times[0,2]$;
   (b) $s(u,v) = (u, v, 1-u-v)$, com $(u,v) \in [0,1]\times[0,1]$;
   (c) $s(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$, com $(u,v) \in \mathbb{R}^2$;
   (d) $s(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, u^2)$, com $(u,v) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[$;
   (e) $s(u,v) = (\cos u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$, com $(u,v) \in [0,2\pi[\times[0,\pi]$.

2. Encontre uma parametrização para cada uma das seguintes superfícies:
   (a) Cone de vértice em (0,0,0) e eixo de rotação Oz^+;
   (b) Plano de equação cartesiana $2x - y + z = 2$;
   (c) Cone de vértice em (0,0,0) e eixo de rotação Oy^+.

3. Determine as áreas das superfícies (a), (b) e (e) do exercício 1.

4. Seja S a semi-esfera $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$ e $f(x,y,z)=x$. Calcule o valor do integral de superfície $\displaystyle\int\int_S f\,dS$, utilizando
   (a) a parametrização apresentada no exercício 1.(e);
   (b) a parametrização $s(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$ com $(u,v) \in \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1\}$.

5. Determine o centro de massa da superfície da semi-esfera homogénea(densidade de massa constante) $x^2+y^2+z^2=4$.

6. Calcule a área da porção do paraboloide $x^2+z^2=2y$ cortado pelo plano $y=1$.

7. Em cada uma das alíneas seguintes, use o teorema de Stokes para provar que os integrais de linha Têm os valores apresentados. Explique qual qual o sentido em que a curva C deve ser percorrida.
   (a) $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F}\,d\overrightarrow{r} = \pi\sqrt{3}$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y,z,x)$ e C a curva de intersecção da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ e o plano $x+y+z=0$;

(b) $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = 0$, onde $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$ e C a curva de intersecção do cilíndro $x^2 + y^2 = 2y$ e o plano $y = z$;

(c) $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = 0$, onde $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$ e C a curva de intersecção do cilíndro $x^2 + y^2 = 2y$ e o plano $y = z$.