

Análise Matemática B

Folha 5

Gradiente e Derivadas direccionais

1. Determine o campo vectorial gradiente ($\text{grad } f = \vec{\nabla} f$) da função $f(x, y) = xy$.
2. Determine o gradiente ($\text{grad } f = \vec{\nabla} f$) da função $f(x, y) = x^2 + y^2(1 + \sin x)$ no ponto $(a, b) = (\pi, 2)$.
3. Calcule a derivada dirigida da função $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ no ponto $(1, 1, 1)$ na direcção do vector $\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$.
4. Seja $f(x, y, z) = \sin\left(\frac{xz}{x^2 + y^2}\right)$.
 - (a) Determine a função vectorial $\vec{\nabla} f$.
 - (b) Calcule $\vec{\nabla} f(2, 1, 0)$.
 - (c) Qual a taxa de variação de f no ponto $(2, 1, 0)$ segundo o vector $(1, 1, 1)$?
5. Sabendo que $D_{\vec{u}}f(a, b) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f(a, b) = \|\vec{\nabla} f(a, b)\| \cos \phi$ onde ϕ é o ângulo entre os vectores \vec{u} e $\vec{\nabla} f(a, b)$:
 - (a) qual a direcção segundo a qual f tem maior taxa de crescimento? Nessa direcção, qual a taxa de variação?
 - (b) qual a direcção segundo a qual f tem menor taxa de decrescimento? Nessa direcção, qual a taxa de variação?
 - (c) qual a direcção segundo a qual f tem taxa de variação nula?
6. Determine o gradiente ($\text{grad } f = \vec{\nabla} f$) da função $f(x, y, z) = (x^2 + \cos z) \exp(-x + y)$ no ponto $(a, b, c) = (1, 1, \pi)$.
7. Seja $f(x, y) = \ln \|\vec{r}\|$, onde $\vec{r} = (x, y)$. Mostre que $\vec{\nabla} f = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^2}$.
8. Calcule as derivadas dirigidas
 - (a) da função $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ no ponto $(2, 1, 3)$ na direcção que vai deste para o ponto $M = (5, 5, 15)$.
 - (b) da função $f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$ no ponto $(1, 2)$ na direcção que faz com o eixo \overrightarrow{OX} um ângulo de 60° .
9. Sabendo que $D_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})}f(a, b) = 3\sqrt{2}$ e $D_{(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})}f(a, b) = 5$, determine $\vec{\nabla} f(a, b)$.
10. Em que direcção a partir do ponto $(2, 0)$ a função $f(x, y) = xy$ tem taxa de variação -1?
11. Em que direcção a partir do ponto (a, b, c) a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ aumenta metade da sua taxa de variação máxima nesse ponto?