Soluções da Ficha 10B

1. **Estudo de séries através da análise da sucessão geradora**.

   (a) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{5}+\dfrac{2}{6}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2}$.

   A sucessão geradora é $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$, $n\in\mathbb{N}$.

   Como $\lim\limits_n u_n=0$, nada se pode concluir sobre a natureza da série dada.

   Mais adiante, não será difícil concluir que se trata de uma série divergente.

   (b) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{9}{7}+\dfrac{16}{9}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2n+1}$.

   A sucessão geradora é $u_n=\dfrac{n^2}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

   Como $\lim\limits_n u_n=+\infty$, conclui-se que a série dada é divergente.

   (c) $1\,\mathrm{sen}\,1+2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{2}+3\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{3}+4\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{4}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{n}$.

   A sucessão geradora é $u_n=n\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$.

   Mas $\lim\limits_n u_n=\lim\limits_n\dfrac{\mathrm{sen}(1/n)}{1/n}\overset{(*)}{=}1$, uma vez que se $n\to+\infty$ então $\dfrac{1}{n}\to 0$.
   Logo a série dada é divergente.

   (*) Este limite é um caso particular (porque $n\in\mathbb{N}$) de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x}=1$.

   (d) $\left(\dfrac{1}{2}+1\right)+\left(\dfrac{1}{4}+1\right)+\left(\dfrac{1}{8}+1\right)+\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+1\right)$.

   A sucessão geradora é $u_n=\dfrac{1}{2^n}+1$, $n\in\mathbb{N}$.

   Como $\lim\limits_n\dfrac{1}{2^n}=0$, vem $\lim\limits_n u_n=1$, pelo que a série dada é divergente.

2. **Estudo de séries de termos não negativos, recorrendo a critérios**.

   Vamos representar u_n, $n \in \mathbb{N}$ o termo geral de cada série.

   (a) Convergente. Critério da razão ($\ell = 2/e$).

   (b) Divergente. Comparar com $\sum \frac{1}{n}$, através do primeiro ou do segundo critério.

   (c) Convergente. Critério da razão ($\ell = 1/4$).

   (d) Convergente. Critério da razão ($\ell = 1/1001$).

   (e) Convergente. Critério da razão $\left(\ell = \lim_n \frac{2n+3}{3n+6} = \frac{2}{3}\right)$.

   (f) Divergente. Comparar com $\sum \frac{1}{n}$, através do segundo critério.

   (g) Convergente. Comparar com $\sum \frac{1}{n^{4/3}}$, através do segundo critério (notar que $\frac{4}{3} = \frac{7}{3} - 1$).

   (h) Divergente. Comparar com $\sum \frac{1}{n}$, através do segundo critério.

   (i) Congente. Comparar com $\sum \frac{1}{n^2}$, através do segundo critério. Notar que

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{n^2 \ln n}{2n^3 - 1} = \lim_n \frac{n^2 \ln n}{n^2(2n - \frac{1}{n^2})} = \lim_n \frac{\ln n}{2n - \frac{1}{n^2}} = 0.$$

   (j) Convergente. Critério da razão ($\ell = 1/3$).

   (k) Congente. Comparar com $\sum \frac{1}{n^2}$, através do segundo critério. Notar que

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n n^2 \ln\left(1 + \frac{4}{n^2}\right) = \lim_n \ln\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^{n^2} = \ln e^4 = 4.$$