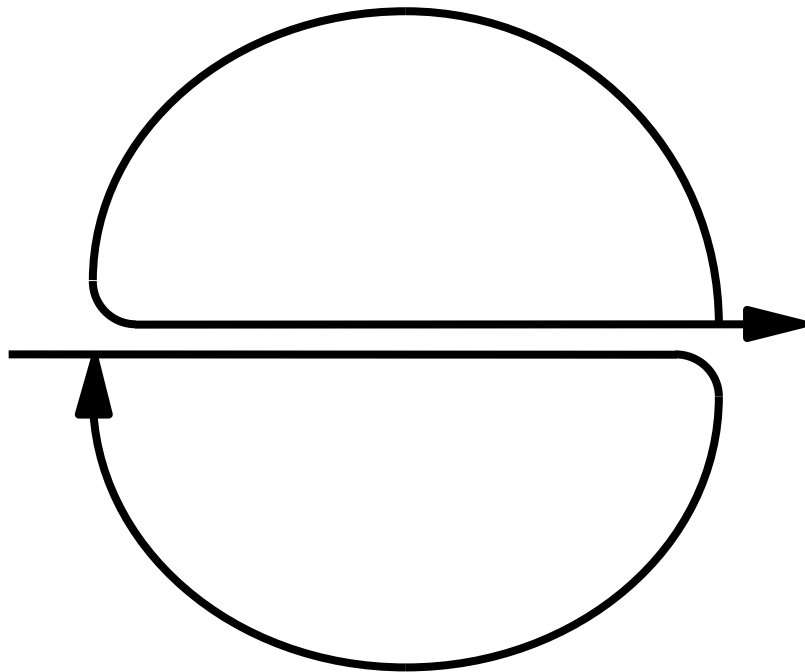


# Elementos de Teoria dos Sistemas



PAULO GARRIDO

Escola de Engenharia da Universidade do Minho

Elementos de Teoria dos Sistemas  
Paulo Garrido

**Informação de direitos de autor.**

Licença Creative Commons Attribution Share Alike 2010

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/pt/>

# Índice

<b>1</b>	<b>SISTEMAS .....</b>	<b>1</b>
	O que se entende por um sistema?.....	2
	Sistemas criados pela acção humana .....	3
	Pode uma entidade de um sistema ser por sua vez um sistema? .....	4
	*Podem as entidades de um sistema ser enumeradas? .....	4
	*O que é um sistema enumerável? .....	4
	Componentes de um sistema.....	5
	Um subconjunto de entidades de um sistema pode formar um sistema? .....	5
	Como se definem subsistemas e supersistemas? .....	5
	O que são a fronteira e o interior de um sistema? .....	5
	Exercícios .....	5
<b>2</b>	<b>MODELOS DE SISTEMAS .....</b>	<b>7</b>
	O que é um modelo de sistema? .....	7
	O que é um modelo estrutural de um sistema? .....	8
	O que é um modelo comportamental de um sistema? .....	8
	O que são variáveis de um sistema? .....	8
	Como se representa a evolução ao longo do tempo de uma variável? .....	10
	Como se obtém a função $f(t)$ que descreve uma evolução possível de uma variável $y(t)$ ? .....	11
	Como é que um modelo relaciona variáveis? .....	11
	Exercícios .....	13
	*É obrigatório fazer-se um modelo por análise teórica do sistema? .....	14
	Como é que a partir de um modelo, se obtém a função $f(t)$ que descreve uma certa evolução de uma variável que se pretende prever? .....	15
	Exercícios .....	18
<b>3</b>	<b>UTILIZAÇÃO DE MODELOS .....</b>	<b>21</b>
<b>3.1</b>	<b>Previsão de valores numéricos .....</b>	<b>21</b>
	Limites à previsão de valores numéricos .....	22
	Exercícios .....	25
<b>3.2</b>	<b>Influência dos valores dos parâmetros no comportamento .....</b>	<b>25</b>
	Exercícios .....	26

<b>3.3</b>	<b>Simulação</b>	<b>27</b>
	Exercícios .....	29
<b>3.4</b>	<b>Validade de modelos</b>	<b>29</b>
	Validação de um modelo comportamental.....	30
	Exercícios .....	31
<b>4</b>	<b>TIPOS DE MODELOS.....</b>	<b>33</b>
	Modelos externos ou de entrada-saída .....	34
	Modelos internos ou de estado .....	34
	Exercícios .....	36
	O que é um modelo contínuo no tempo?.....	36
	O que é um modelo discreto no tempo?.....	37
	Exercícios .....	43
	Modelos estáticos e modelos dinâmicos .....	45
	Quando é que um sistema <i>admite</i> um modelo estático? .....	46
	Quando é que um sistema <i>requer</i> um modelo dinâmico?.....	47
	Submodelos estáticos .....	47
	Modelos causais e modelos não-causais .....	48
	Modelos lineares e não-lineares.....	49
	Modelos invariantes e variantes no tempo .....	52
	*Modelos de parâmetros concentrados e de parâmetros distribuídos .....	53
	Exercícios .....	53
<b>5</b>	<b>PREVISÃO DO COMPORTAMENTO DE MODELOS LIT NO DOMÍNIO S .....</b>	<b>55</b>
<b>5.1</b>	<b>Previsão do comportamento</b>	<b>56</b>
<b>5.1.1</b>	<b>Transformada de Laplace.....</b>	<b>56</b>
	Determinação da transformada de Laplace de uma função $f(t)$ .....	57
	Pólos e zeros de uma função $F(s)$ .....	63
	Exercícios .....	64
<b>5.1.2</b>	<b>Resposta livre e resposta forçada .....</b>	<b>66</b>
	Exercícios .....	68
	Função de transferência e determinação da resposta forçada .....	68
	Determinação da transformada inversa de uma função $F(s)$ .....	71
	Caso 1: as raízes $s_i$ de $D(s)$ são todas diferentes.....	71
	*Caso 2: algumas das raízes de $D(s)$ são repetidas (múltiplas).....	74
	Exercícios .....	76

5.1.3 Impedância no domínio $s$ e modelos de circuitos eléctricos .....	76
Exercícios .....	79
<b>5.2 Diagramas de blocos no domínio de Laplace .....</b>	<b>80</b>
Equivalência de pontos de soma.....	80
Equivalência série .....	81
Equivalência paralelo .....	81
Equivalência de um anel .....	82
Deslocamento de um ponto de soma algébrica.....	83
Exercícios .....	85
 <b>6 MODELOS LIT E INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS.....</b>	<b>86</b>
6.1.1 Resposta impulsional ou resposta ao impulso de Dirac .....	86
Resposta ao Dirac como uma soma de modos .....	88
Exercícios .....	91
6.1.2 Estabilidade de modelos LIT .....	92
Critério fundamental de estabilidade .....	92
6.1.3 Regime transitório e regime permanente da resposta forçada .....	92
Ganho ao degrau unitário em regime permanente .....	93
Ganho à sinusóide em regime permanente .....	94
Exercícios .....	95
 <b>APÊNDICE A FUNÇÕES .....</b>	<b>A1</b>
Exercícios .....	8
 <b>APÊNDICE B NÚMEROS E FUNÇÕES COMPLEXAS.....</b>	<b>B1</b>
Exercícios .....	12
Bibliografia .....	14

# Índice de exemplos

Exemplo 1-1 Circuito eléctrico .....	2
Exemplo 1-2 Sistema solar .....	3
Exemplo 1-3 Sistema de produção e distribuição de energia eléctrica .....	3
Exemplo 1-4 Sistema de controlo industrial .....	3
Exemplo 1-5 Sistema político português.....	3
Exemplo 1-6 Método científico.....	3
Exemplo 2-1 Modelo estrutural de circuito eléctrico .....	8
Exemplo 2-2 Propriedades mensuráveis de um circuito eléctrico.....	9
Exemplo 2-3 Variáveis e parâmetros do um circuito eléctrico LRC.....	10
Exemplo 2-4 Funções úteis e simples para especificar evoluções de variáveis .....	10
Exemplo 2-5 Modelo comportamental para um circuito eléctrico LRC .....	12
Exemplo 2-6 Modelo de entrada-saída de um circuito RC passa-baixo .....	15
Exemplo 2-7 Previsão da resposta a um degrau de tensão de um circuito RC passa-baixo.....	16
Exemplo 2-8 Previsão da resposta livre de um circuito RC passa-baixo .....	17
Exemplo 3-1 Influência dos valores iniciais na resposta livre de um circuito RC.....	23
Exemplo 3-2 Influência dos valores iniciais na evolução de uma variável descrita pela equação logística discreta .....	23
Exemplo 3-3 Influência da constante de tempo na “velocidade” de resposta de um circuito RC .....	25
Exemplo 3-4 Influência do valor de $c$ na evolução da variável da equação logística discreta .....	26
Exemplo 3-5 Programação do modelo do circuito RC passa-baixo em ScicosLab .....	27
Exemplo 3-6 Desvio entre previsão e valores medidos devido a valores dos parâmetros .....	30
Exemplo 4-1 Modelos de entrada-saída e de estado para o circuito RLC.....	35
*Exemplo 4-2 Modelo discreto de circuito RC com conversores D/A e A/D .....	38
Exemplo 4-3 Corrente e tensão numa resistência.....	45
Exemplo 4-3 Modelo de entrada-saída do circuito RC .....	46
Exemplo 4-4 Circuito divisor de tensão com duas resistências .....	47
Exemplo 4-5 Circuito com resistência e condensador .....	47
Exemplo 4-6 Submodelo estático de um circuito RC .....	47
Exemplo 4-7 Modelo dinâmico sem submodelo estático.....	48
Exemplo 4-8 Submodelo estático implícito .....	48

Exemplo 4-9 Modelo discreto não causal .....	48
Exemplo 4-10 Determinação da linearidade do modelo $y(t) = u'(t)$ .....	50
Exemplo 4-11 Determinação da linearidade do modelo $y(t) = u^2(t)$ .....	51
*Exemplo 4-12 Modelos não-linear e linear de um pêndulo sem atrito.....	52
Exemplo 5-1 Transformada do degrau unitário.....	57
Exemplo 5-2 Transformada da resposta de um circuito RC passa-baixo.....	60
Exemplo 5-3 Transformada da resposta de um oscilador harmónico .....	61
*Exemplo 5-4 Onda triangular .....	62
Exemplo 5-5 Pólos e zeros de funções $F(s)$ .....	63
Exemplo 5-6 Modelo de circuito LRC .....	66
Exemplo 5-7 Determinação da resposta forçada $V_o(s)$ do circuito LRC série a um degrau de tensão.....	70
Exemplo 5-8 Determinação da resposta forçada $v_o(t)$ do circuito LRC série a um degrau de tensão.....	72
Exemplo 5-9 A antitransformada é uma soma de exponenciais reais .....	73
Exemplo 5-10 A antitransformada contém um impulso de Dirac .....	74
Exemplo 5-11 Função de transferência $V_o(s)/V_i(s)$ do circuito LRC a partir das impedâncias em $s$ .....	77
Exemplo 5-12 Função de transferência $V_o(s)/V_i(s)$ do circuito RC passa-alto .....	78
Exemplo 5-13 Função de transferência do amplificador operacional com realimentação negativa .....	79
Exemplo 5-14 Redução do diagrama de blocos do modelo diferencial de primeira ordem .....	84
Exemplo 6-1 Resposta ao Dirac de funções de transferência com um só pólo real.....	87
Exemplo 6-2 Resposta ao Dirac de funções de transferência com um só par de pólos complexos conjugados.....	87

# Índice de figuras

<b>Figura 1-1</b> Circuito LRC.....	2
<b>Figura 1-2</b> Representação gráfica de duas formas de distinguir ou conceber um sistema. ....	4
<b>Figura 2-1</b> Diagrama eléctrico de um circuito LRC.....	8
<b>Figura 2-2</b> Circuito RC passa-baixo.....	15
<b>Figura 3-1</b> Previsão dos valores numéricos da tensão de saída de um circuito RC com uma entrada em degrau. ....	22
<b>Figura 3-2</b> Previsão dos valores numéricos da tensão de saída de um circuito RC em resposta livre. ..	22
<b>Figura 3-3</b> Evolução da tensão de saída de um circuito RC em resposta livre para diferentes valores de condições iniciais. ....	23
<b>Figura 3-4</b> Exemplo de evolução de variável dada pela equação logística. ....	24
<b>Figura 3-5</b> Exemplo de evoluções de variáveis dadas pela equação logística, com diferença de 0.001 nas condições iniciais. ....	24
<b>Figura 3-6</b> Respostas forçadas de circuito RC correspondentes a constantes de tempo de 0.5 ms, 1 ms e 2 ms. ....	26
<b>Figura 3-7</b> Evoluções da variável da equação logística discreta com $c = 3.75$ e $c = 3$ . ....	26
<b>Figura 3-8</b> Programação do modelo do circuito RC passa-baixo usando ícones ou blocos gráficos no ambiente ScicosLab sem blocos de entrada ou de saída.....	28
<b>Figura 3-9</b> Programação do modelo do circuito RC passa-baixo usando ícones ou blocos gráficos no ambiente ScicosLab com blocos de entrada ou de saída. ....	29
<b>Figura 3-10</b> Exemplo de registo do resultado de uma experiência. ....	31
<b>Figura 4-1</b> Um modelo contínuo define a função representando a evolução de qualquer variável do modelo em qualquer instante de tempo no intervalo $[t_0, t_f]$ em que o modelo se aplica. .	37
<b>Figura 4-2</b> Um modelo discreto define a função representando a evolução de qualquer variável do modelo apenas numa sequência de instantes de tempo. ....	37
<b>Figura 4-3</b> Usualmente os modelos discretos são estabelecidos supondo um intervalo de tempo constante entre os instantes em que as variáveis estão definidas. A variável independente tempo é então expressa como $kh$ . ....	38
<b>Figura 4-4</b> Circuito RC com conversores D/A e A/D.....	39
<b>Figura 4-5</b> Exemplo de evolução de variável só definida para uma sequência de instantes $kh$ .....	39
<b>Figura 4-6</b> Exemplo de evolução de variável em degraus.....	40
<b>Figura 4-7</b> Entrada em degraus e correspondente saída em tempo contínuo. ....	41



<b>Figura 4-8</b> Entrada e saída em tempo discreto. ....	43
<b>Figura 5-1</b> Representação gráfica do impulso de Dirac .....	57
<b>Figura 5-2</b> Registo da tensão de saída de um circuito RC passa-baixo.....	60
<b>Figura 5-3</b> Registo da resposta de um oscilador a um degrau.....	61
<b>Figura 5-3</b> Onda triangular de período $T$ .....	62
<b>Figura 5-4</b> Exemplos de diagramas zero-polares. ....	64
<b>Figura 5-5</b> Resposta a um degrau de tensão de um circuito LRC. ....	72
<b>Figura 5-6 a)</b> Diagrama de blocos temporal do integrador realimentado. <b>b)</b> Diagrama de blocos no domínio de Laplace do integrador realimentado. A função de transferência de um produto por constante é igual à constante. A função de transferência do integrador puro é igual a $1/s$ . ....	80
<b>Figura 5-7</b> Exemplo de equivalência de pontos de soma dada a associatividade da adição. O diagrama em <b>b)</b> é equivalente ao diagrama em <b>a)</b> .....	81
<b>Figura 5-8</b> Equivalência de dois blocos em série. A função de transferência do bloco equivalente em <b>b)</b> iguala o produto das funções de transferência de cada um dos blocos em <b>a)</b> .....	81
<b>Figura 5-9</b> Equivalência de dois blocos em paralelo. A função de transferência do bloco equivalente em <b>b)</b> iguala a soma das funções de transferência de cada um dos blocos em <b>a)</b> . ....	82
<b>Figura 5-10</b> Redução de um anel de realimentação. A realimentação pode ser positiva (sinal +) ou negativa (sinal -). ....	83
<b>Figura 5-11</b> Redução de um anel de realimentação negativa. O denominador da função de transferência equivalente iguala 1 mais o produto das funções de transferência no anel.....	83
<b>Figura 5-12</b> Redução de um anel de realimentação negativa em que a realimentação é unitária.....	83
<b>Figura 5-13</b> Deslocamento de um ponto de soma algébrica da saída de um bloco para a sua entrada. .	84
<b>Figura B-1</b> Representação de números complexos no plano com um referencial cartesiano. É também usual referir esta representação como representação no plano de Argand ou no plano complexo. Em Electrotecnia diz-se também plano $s$ e designa-se o eixo das abcissas por $\sigma$ e o eixo das ordenadas por $j\omega$ .....	3
<b>Figura B-2</b> Representação polar de números complexos. Nos exemplos representados tem-se $r_1 = \sqrt{3^2 + 2^2}$ , $\theta_1 = \text{atan}(2/3)$ , $r_2 = \sqrt{3^2 + 1^2}$ , $\theta_2 = \text{atan}(-1/-3)$ . ....	5
<b>Figura B.3</b> Curvas descritas por $e^{(\sigma + j\omega)t}$ quando $t$ varia.....	8
<b>Figura B.4</b> Cálculo de funções do tipo co-seno usando a fórmula de Euler.....	9
<b>Figura B.5</b> Gráfico em perspectiva do módulo da função $z(s) = s$ . ....	12
<b>Figura B.6</b> Gráfico em perspectiva do argumento da função $z(s) = s$ . ....	12



# 1

## SISTEMAS

**Objectivos** *Noção e conceito de sistema; componentes; subsistemas e supersistemas; fronteira, interior e exterior de um sistema.*

A noção de *sistema* é hoje de uso comum. Diz-se, por exemplo:

- “... sistema de equações ...”
- “... sistema solar ...”
- “... sistema de produção de energia eléctrica ...”
- “... sistema político português ...”
- “... sistema de ideias ...”

Esta utilização reflecte a sua importância na Ciência. Físicos, químicos, biólogos, psicólogos, sociólogos vêem muitas das entidades que investigam como sistemas. Tal também acontece na Engenharia, onde a engenharia dos sistemas é uma especialidade reconhecida com grande influência em outras áreas.

Engenheiros e cientistas necessitam de noções e conceitos, para exercer a sua actividade no mundo. Há uma diferença entre noção e conceito que importa compreender. Seguramente, eu tenho a noção do que é uma cadeira. Consigo reconhecer uma cadeira quando vejo uma e sei utilizá-la. Mas tenho também o conceito do que é uma cadeira? Por outras palavras: se me perguntarem o que é uma cadeira, consigo dar uma resposta satisfatória? Para mim, pelo menos? Posso tentar, dizendo: “uma cadeira é um conjunto formado por duas superfícies em que um ser humano se pode sentar apoiando as costas”. Este conceito de cadeira é único e o melhor? Não é único e é discutível, com certeza. Mas funciona.

As noções são necessárias, porque, sem a noção de algo, não é possível conhecer

verdadeiramente esse algo. De nada servirá a alguém que não possua a noção do que é uma cadeira, tentar compreender um possível conceito de cadeira. Por sua vez, os conceitos são necessários, porque sem eles não podemos falar uns com os outros das noções que temos e não as podemos aperfeiçoar, tornando-as mais explícitas, úteis e operacionais.

As noções ganham-se, experimentando, e os conceitos constroem-se, reflectindo. Ao construir-se um conceito para uma noção diz-se que se conceptualiza a noção. O facto de ser possível obter diferentes conceitos para a mesma noção, não deverá preocupar-nos. É pelo confronto de conceitos diferentes para uma noção que melhor a compreendemos e mais partido dela podemos tirar.

Vamos explorar a conceptualização da noção de sistema, colocando-nos a pergunta:

### O que se entende por um sistema?

Podem dar-se diversas respostas a esta questão. A seguinte será chamada de forma A:

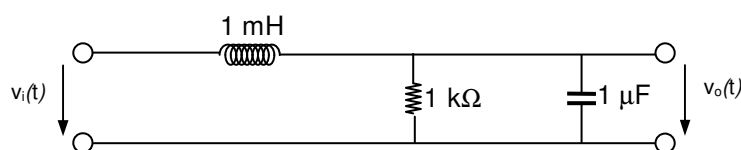
- Um sistema é um domínio de duas ou mais entidades relacionadas entre si e com o exterior do domínio, que nós distinguimos como um todo.

Para que algo seja um sistema, necessariamente inclui mais do que uma entidade. É conveniente ver as entidades como formando um domínio, noção mais alargada que a de conjunto no sentido matemático, porque nem sempre nos é possível indicar as entidades do sistema como um conjunto. As entidades devem estar relacionadas entre si, porque se não for esse o caso, não faz sentido falar num sistema. E, finalmente, se não distinguirmos ou concebermos as entidades como *um* todo, não estaremos sequer a falar de *um* algo, logo não poderemos falar de um sistema.

Examinemos alguns exemplos.

#### Exemplo 1-1 Circuito eléctrico

Considere-se o circuito eléctrico representado na Figura 1-1. Este circuito pode ser visto como um *sistema* em que as entidades são a bobina com uma indutância de valor 1 mH, a resistência de valor 1 k $\Omega$ , o condensador de capacidade 1  $\mu$ F, os terminais e as suas conexões. As relações entre as entidades são indicadas pelas conexões entre elas. As relações entre as entidades e o exterior do sistemas são indicadas pela definição de que tensões são de entrada,  $v_i$ , ou de saída,  $v_o$ .



**Figura 1-1** Circuito LRC.

Neste caso as entidades formam um conjunto no sentido matemático, visto que as podemos indicar todas. Por exemplo, seja  $C$  o conjunto de entidades,  $C = \{\text{bobina, resistência, capacidade,}$

{conexões}}.

### **Exemplo 1-2 Sistema solar**

A enumeração de todas as entidades relacionadas não faz sentido, dado o seu grande número e o desconhecimento de muitas delas. Uma enumeração corrente incluirá o Sol, os planetas e seus satélites, os asteróides e os cometas. Uma alternativa à enumeração de entidades é a indicação de uma propriedade que as entidades do sistema possuam. Pode experimentar-se definir as entidades do sistema como “o Sol e todos os corpos que influencia gravitacionalmente mais do que qualquer outra estrela”. Mas o que é um corpo? Uma molécula? Uma pedra? Um gás?

### **Exemplo 1-3 Sistema de produção e distribuição de energia eléctrica**

Uma descrição sumária das entidades pode ser: centrais de produção de energia eléctrica, linhas de transmissão, subestações de abaixamento para média tensão, linhas de distribuição em média tensão, transformadores de abaixamento para baixa tensão, linhas de distribuição em baixa tensão.

### **Exemplo 1-4 Sistema de controlo industrial**

No mundo da indústria, o controlo de algo pode ter muitos objectivos diferentes. Os sistemas de controlo ditos de *variáveis contínuas*, têm por objectivo controlar grandezas dos processos produtivos, como a posição de peças, velocidade de deslocamento de ferramentas, temperatura de estufas, caudal de líquidos, densidade de massa, etc. Os componentes de um sistema de controlo podem ser divididos em 3 grandes classes: sensores, controladores e actuadores.

### **Exemplo 1-5 Sistema político português**

Quantas pessoas participam no sistema político português? Virtualmente, toda a pessoa com cidadania portuguesa. Assuma-se um conceito mais restrito e considere-se como entidades relacionadas do sistema os órgãos de soberania implicados no processo de elaboração e aplicação das leis. Tem-se então o conjunto: Presidente, Assembleia e Governo da República.

### **Exemplo 1-6 Método científico**

O método científico de obtenção de conhecimento exemplifica um sistema de ideias. Uma descrição sumária destas pode ser a seguinte. Para conhecer a realidade: a) observar b) gerar hipóteses c) extrair das hipóteses consequências que possam ser experimentadas d) experimentar e) publicar os resultados se estes forem de interesse.

## **Sistemas criados pela acção humana**

O Exemplo 1-2 tem uma qualidade fundamentalmente diversa de todos os outros. Na sua génese não parece ter intervindo a actividade de seres humanos. Quando um sistema resulta da actividade de seres humanos é natural associar-lhe um objectivo, como a realização de uma ou mais funções. Considerando isto, a pergunta “O que se entende por um sistema?” pode ter

uma resposta diferente da anterior (forma B):

- Um sistema é um todo que se concebe como um domínio de entidades relacionadas entre si e com o exterior e que realiza ou se pretende que venha a realizar um certo conjunto de funções.

É claro que esta definição se aplica a sistemas criados pela acção humana, em particular, a *sistemas técnicos* ou *tecnológicos*.

Deve notar-se também uma diferença importante entre a definição de sistemas em geral (forma A) e a definição de sistemas resultantes da acção humana (forma B). A primeira representa uma forma de pensar em que se parte das entidades para o sistema como um todo. A segunda representa uma forma de pensar em que se parte de um sistema como um todo para as suas entidades constituintes. Veja-se a Figura 1-2. Ambas estas formas de conceber ou distinguir sistemas são importantes em engenharia, mas deve ter-se noção que a segunda é absolutamente necessária quando se projecta um sistema.



**Figura 1-2** Representação gráfica de duas formas de distinguir ou conceber um sistema.

Das entidades para o todo (esquerda) e do todo para as entidades (direita).

### **Pode uma entidade de um sistema ser por sua vez um sistema?**

Nada parece obstar a tal. Uma entidade de um sistema pode ser entendida como *uma* só entidade, atómica, indivisível. Ou pode ser entendida como um sistema se puder ser distinguida como tendo pelo menos duas entidades constituintes que se relacionam entre si. Tudo depende do nível de descrição do sistema que se utiliza.

#### **\*Podem as entidades de um sistema ser enumeradas?**

Às vezes sim, às vezes não. Mesmo quando a resposta é não, pode fazer sentido enumerar o que se vê. Surge então o conceito de *sistema enumerável*.

#### **\*O que é um sistema enumerável?**

Tecnicamente é um sistema para o qual se dispõe de uma função bijectiva de  $\mathbb{N}_0$ , o conjunto dos números naturais incluindo o 0, para as entidades do sistema. Por exemplo, uma tabela. O contradomínio da função é um conjunto de entidades a que poderemos chamar o *conjunto de entidades do sistema*.

## Componentes de um sistema

Em engenharia é usual designar o conjunto de entidades como o *conjunto de componentes* do sistema. Por exemplo, para a produção de um computador usa-se uma *listagem* dos seus componentes.

Noutros contextos, a palavra componentes deve ser usada com cuidado. Por exemplo, dizer que os alunos e os docentes são componentes de um sistema “escola” pode ser indelicado – as pessoas são muito diferentes de componentes de engenharia.

Se existe um conjunto de entidades (ou componentes) então existem subconjuntos de entidades. É natural perguntar:

### Um subconjunto de entidades de um sistema pode formar um sistema?

Sob certas condições, (por exemplo, ter mais do que 1 elemento), pode. Fala-se então em *subsistemas* e *supersistemas*.

### Como se definem subsistemas e supersistemas?

Um *subsistema* é um subconjunto das entidades do sistema que é também um sistema.

Suponha-se que um sistema  $S$  tem um certo conjunto de entidades  $E(S)$ , e que um sistema  $T$  tem um conjunto de entidades  $E(T)$ .  $T$  será um subsistema de  $S$  se  $E(T) \subset E(S)$ . Note-se que um subconjunto  $X$  de entidades de  $S$ ,  $X \subset E(S)$  não define necessariamente um subsistema de  $S$ : as entidades presentes em  $X$  podem não formar um sistema.

Suponha-se agora que um sistema  $S$  é subsistema de um sistema  $R$  mais vasto:  $E(S) \subset E(R)$ . Diz-se então que  $R$  é um *supersistema* de  $S$ .

O conceito de subconjunto de entidades permite definir o que são a *fronteira* e o *interior* de um sistema.

### O que são a fronteira e o interior de um sistema?

Pode entender-se a *fronteira* de um sistema como o subconjunto das suas entidades que interagem com entidades exteriores ao sistema.

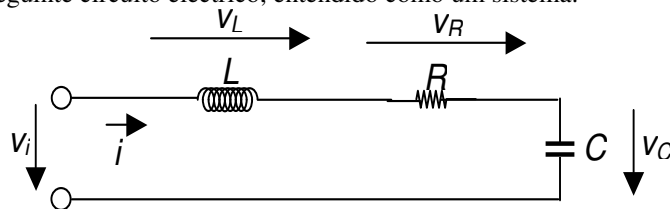
O subconjunto de entidades de um sistema que só interagem com outras entidades do sistema pode ser entendido como o *interior* do sistema.

É claro que os mesmos conceitos podem ser enunciados em termos de componentes. Componentes são um caso particular de entidades.

## Exercícios

- 1.1 Apresente 4 exemplos de sistemas não referidos neste capítulo. Para cada um, diga quais são as entidades do sistema e se estas podem ser indicadas como um conjunto no sentido matemático. Diga também se usou a forma A ou a forma B para distinguir ou conceber cada um dos exemplos.
- 1.2 Qual a definição apresentada para um sistema em geral?

- 1.3** Qual a definição apresentada para um sistema que resulta da acção humana, em particular, um sistema técnico ou tecnológico?
- 1.4** Porque é que nas definições apresentadas de sistema se fala em *domínio* (de entidades) e não em *conjunto*?
- 1.5** Idem 1.2 relativamente às palavras *entidades* e *componentes*.
- 1.6** Um sistema  $S$  tem o seguinte conjunto de componentes:  $C(S) = \{a, b, c, d\}$ . Nenhum dos componentes de  $S$  é entendido como um sistema.
- Indique os subconjuntos de  $C(S)$  que podem ser conjuntos de componentes de subsistemas de  $S$ .
  - $S$  tem os seus componentes conectados ou relacionados pela seguinte série:  $a - b - c - d$ . Indique os subsistemas de  $S$ .
- 1.7** Considere o seguinte circuito eléctrico, entendido como um sistema:



- Quais são os componentes deste sistema?
  - Que subsistemas consegue distinguir neste sistema?
- 1.8** Considere um corpo humano entendido como um sistema. Indique “componentes” deste sistema pertencendo à *fronteira* e componentes pertencendo ao *interior* do sistema.



## 2

# MODELOS DE SISTEMAS

**Objectivo** *Modelos de sistemas. Modelos estruturais e comportamentais. Variáveis e parâmetros de um sistema. Evoluções de variáveis como funções do tempo. Relações entre variáveis e estabelecimento de modelos. Previsão da evolução de uma variável a partir de um modelo.*

Uma definição ou conceptualização da noção de sistema guia a sua utilização em engenharia, quer na análise (compreender um sistema), quer na síntese (conceber, projectar, implementar um sistema). Em qualquer uma destas actividades é necessário criar e usar *descrições* do sistema que se está a analisar ou a sintetizar. É preciso descrever a outras pessoas as ideias que cada pessoa tem ou encontra sobre o sistema. Para tal usam-se *modelos de sistemas*.

### O que é um modelo de sistema?

Podem dar-se diferentes definições. A que se usa aqui parte do princípio que qualquer descrição é incompleta e/ou imprecisa e dirigida:

- Um modelo de sistema é uma descrição parcial e/ou aproximada de um sistema, contendo informação relevante para um certo objectivo.

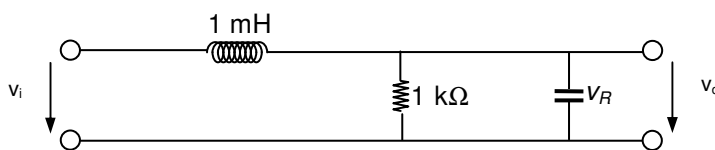
Os modelos de sistemas utilizam-se com finalidades diferentes. Podemos distinguir modelos de *estrutura* ou *estruturais* e modelos de *processo* ou *comportamentais* de sistemas. Como todas as distinções, esta distinção não deve ser considerada absoluta, porque há casos em que um modelo estrutural pode ter características de um modelo comportamental e vice-versa.

## O que é um modelo estrutural de um sistema?

Um modelo estrutural de um sistema descreve o sistema em termos de entidades (componentes) e de conexões entre entidades (componentes).

Por exemplo, podemos descrever um sistema electrónico indicando os seus componentes e a forma como eles devem ser conectados entre si e com o exterior – é o caso do circuito eléctrico da Figura 1-1 que se reproduz no Exemplo 2-1. Modelos deste tipo são necessários para se construir, modificar ou analisar um sistema.

### Exemplo 2-1 Modelo estrutural de circuito eléctrico



**Figura 2-1** Diagrama eléctrico de um circuito LRC.

Considere-se o diagrama na Figura 2-1 de um circuito eléctrico, circuito esse que entendemos como um sistema.

Este diagrama é um modelo estrutural do circuito. Repare-se que é uma descrição parcial: não especifica o tipo, potência e dimensões do indutor, da resistência e do condensador, nem tão pouco como se realizam as conexões entre eles (se por fio, se por circuito impresso).

Os modelos estruturais ou de estrutura de um sistema têm uma utilidade específica, mas não são os únicos possíveis. Na análise e síntese de sistemas são necessários *modelos comportamentais*.

## O que é um modelo comportamental de um sistema?

Um modelo comportamental de um sistema é um modelo que descreve relações entre algumas *variáveis* de um sistema, de uma forma que permite prever ou explicar a *evolução ao longo do tempo* das variáveis em causa.

## O que são variáveis de um sistema?

Para se entender o que são variáveis de um sistema, é preciso observar que num sistema podemos distinguir *propriedades* que podem tomar valores, os quais é possível medir em princípio. Estas propriedades podem caracterizar o sistema de acordo com determinados objectivos. Dizemos então que um sistema tem *propriedades mensuráveis*. Dizemos que as propriedades são mensuráveis porque podemos medir os seus valores ou porque, mesmo não os medindo, podemos assumir que estas propriedades tomam valores – diferentes ao longo do tempo ou de sistema para sistema.

### Exemplo 2-2 Propriedades mensuráveis de um circuito eléctrico

Consideremos de novo o circuito eléctrico LRC da Figura 2-1, mas, desta vez, admitamos que os valores de

indutância, resistência e capacidade podem ser quaisquer. Que propriedades mensuráveis podemos encontrar? Podemos com certeza medir a *indutância* da bobina, o *valor ómico* da resistência e a *capacidade* do condensador. Além disso, também podemos medir as *correntes* e *tensões* no circuito.

Encontramos então as seguintes propriedades mensuráveis:

$$L, R, C, i_L, i_R, i_C, v_i, v_L, v_o.$$

Pode observar-se que as propriedades mensuráveis no Exemplo 2-2 não têm todas a mesma natureza. As correntes e tensões podem variar ao longo do tempo, lenta ou rapidamente, tomando muitos valores, nos quais se inclui o 0. A indutância, a resistência e a capacidade podem variar ao longo do tempo, como resultado de aquecimento ou envelhecimento dos respectivos componentes, mas tomarão sempre valores em torno do *valor nominal* do componente. Observe-se também que os valores da indutância, da resistência e da capacidade não podem ser 0, ou então o circuito eléctrico seria outro: estaríamos perante um outro sistema, resultante de uma alteração de estrutura.

Mais ainda podemos observar que se alterarmos os valores da indutância, da resistência ou da capacidade, os valores de algumas (ou de todas) as correntes e tensões serão alterados por essa razão. Mas o contrário já não é verdade. A alteração ao longo do tempo dos valores de correntes e tensões não altera os valores de indutância, resistência ou capacidade.

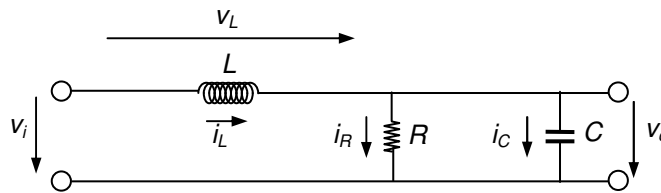
As razões expostas acima levam-nos a distinguir as propriedades mensuráveis de um sistema em duas classes. Às propriedades mensuráveis cujos valores se considera que podem mudar “rapidamente” ao longo do tempo, tomando uma gama alargada de valores, chamamos *variáveis* do sistema. Às propriedades mensuráveis cujos valores não mudam ao longo do tempo ou, se mudam, fazem-no muito mais “lentamente” e nunca como resultado da mudança do valor das variáveis, chamamos *parâmetros* do sistema.

Em resumo:

Propriedades mensuráveis podem ser  $\begin{cases} \text{Variáveis} \\ \text{Parâmetros} \end{cases}$

Vamos ver que os parâmetros têm um papel definidor do comportamento de um sistema.

### Exemplo 2-3 Variáveis e parâmetros do um circuito eléctrico LRC



Da lista a que se chegou de propriedades mensuráveis  $L, R, C, i_L, i_R, i_C, v_i, v_L, v_o$ , será fácil identificar  $L, R, C$ , como os parâmetros e  $i_L, i_R, i_C, v_i, v_L, v_o$ , como as variáveis.

### Como se representa a evolução ao longo do tempo de uma variável?

A maneira mais simples de descrever a evolução de uma variável qualquer de um sistema  $x$  ao longo do tempo é imaginar os valores que  $x$  pode tomar ao longo do intervalo de tempo em que a evolução decorre, como sendo uma função da variável tempo,  $t$ . Seja uma variável  $x$ . Escrevemos  $x(t)$  para designar uma qualquer sua evolução possível num intervalo de tempo  $[t_0, t_f]$ , cujos extremos são muitas vezes deixados indefinidos. Intervalos comuns na análise abstracta são  $[0, \infty[$ , ou  $]-\infty, \infty[$ . Escrevemos  $f(t)$  como uma qualquer função que atribui a cada instante de tempo um e um só dos valores possíveis para  $x$ , sendo que para cada  $t$  o processo de atribuição de valor  $x(t)$  só depende de  $t$ . (O valor de  $f$  é apenas função de  $t$ ).

Então uma evolução de  $x$ , *explícita em função do tempo*, é especificada pela equação:

$$x(t) = f(t). \quad (2.1)$$

### Exemplo 2-4 Funções úteis e simples para especificar evoluções de variáveis

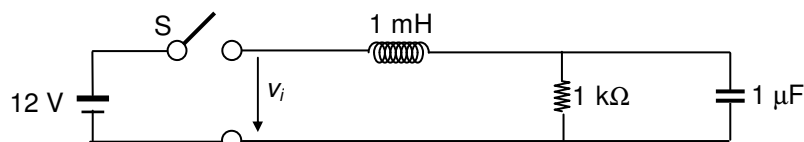
A função *degrau unitário* ou *impulso de Heaviside*, abreviadamente  $h(t)$ , define-se por:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \leftarrow t \geq 0 \\ 0 & \leftarrow t < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

A partir de  $h(t)$  podemos definir uma qualquer função *degrau de “altura”* ou *amplitude*  $A$ , sendo  $A$  positiva ou negativa, por

$$A h(t) = \begin{cases} A & \leftarrow t \geq 0 \\ 0 & \leftarrow t < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Funções degrau são muito usadas em Electricidade e Electrónica para descrever evoluções de tensão provocadas pelo fecho ou abertura de interruptores mecânicos ou electrónicos. Imagine-se o circuito eléctrico:



Para representar a evolução de  $v_i(t)$ , quando se fecha o interruptor S no instante  $t = 0$ , supondo que  $v_i(t) = 0$  para  $t < 0$ , usamos uma função degrau:

$$v_i(t) = 12 \cdot h(t)$$

Outra função simples e útil é a função rampa unitária  $v(t)$ :

$$v(t) = \begin{cases} t, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Em Electrotecnia e Electrónica graças aos chamados geradores de sinal, é fácil impor às variáveis de entrada de circuitos, evoluções ao longo do tempo descritas por uma certa função.

### Como se obtém a função $f(t)$ que descreve uma evolução possível de uma variável $y(t)$ ?

Há várias situações possíveis. Em princípio se podemos *medir* uma variável, podemos *registar* a sua evolução num gráfico e, a partir do gráfico e dos valores encontrados, tentar encontrar a expressão de uma função  $f(t)$  que se ajuste bem ao gráfico e aos valores encontrados.

Se podemos *impor* a evolução de uma variável, podemos dispor as coisas de tal forma que uma certa função  $f(t)$  seja a que define a evolução da variável.

Mas se podemos apenas impor ou registar evoluções de variáveis, o nosso conhecimento do sistema será sempre de natureza limitada. Podemos impor a evolução de certas variáveis e registar experimentalmente a evolução de outras, comparando as evoluções. Mas isto não nos dá um método sistemático para saber como é que a evolução de certas variáveis influencia outras, como é que as evoluções se relacionam, que influência têm os parâmetros do sistema no comportamento do mesmo, que evolução é provocada numa certa variável  $y$  por uma evolução de outra variável  $u$  (sem fazermos a experiência).

Para relacionarmos as variáveis entre si, precisamos de usar ou estabelecer um modelo comportamental que faça essa relação. Então, podemos usar o modelo para as diferentes finalidades referidas atrás, incluindo prever ou explicar a evolução de variáveis em função da evolução de outras.

### Como é que um modelo relaciona variáveis?

Ao fazer-se um modelo tem-se um objectivo em mente que é relacionar ou estudar o comportamento de um *certo* conjunto de variáveis do sistema. Podemos dizer que o modelo será um modelo comportamental do sistema para *este conjunto* escolhido de variáveis.

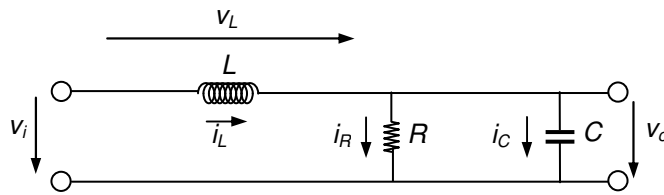
Muitas vezes estamos interessados em estudar a relação de apenas duas variáveis. Uma é dita variável de entrada e a outra variável de saída. Então, o objectivo que se tem ao estabelecer o modelo é prever qual a evolução da variável de saída para uma certa evolução da variável de entrada. Ou como é que a variável de saída “reage” a mudanças na variável de

entrada.

Se se dispõe de conhecimento sobre as relações entre variáveis e parâmetros de um sistema, a forma mais imediata para estabelecer um modelo é fazer uma análise teórica, escrevendo as relações que se conhecem e transformá-las de forma a obter um ou mais modelos adequados.

### Exemplo 2-5 Modelo comportamental para um circuito eléctrico LRC

Considere-se o circuito eléctrico do Exemplo 2-3:



Suponhamos que pretendemos obter um modelo que relacione a evolução  $v_i(t)$  com a evolução  $v_o(t)$ .

Podemos dizer também que estamos interessados no comportamento entrada-saída do circuito em termos de tensões. Já vimos que os parâmetros e variáveis neste circuito são respectivamente  $L$ ,  $R$ ,  $C$  e  $i_L, i_R, i_C, v_i, v_L, v_o$ .

As variáveis são correntes ou tensões eléctricas. As suas evoluções podem ser relacionadas entre si através do seguinte *sistema* de 5 equações:

$$\begin{cases} i_C(t) + i_R(t) = i_L(t) \\ v_L(t) + v_o(t) = v_i(t) \\ i_C(t) = C \frac{dv_o(t)}{dt} \\ i_R(t) = \frac{1}{R} v_o(t) \\ v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \end{cases} \quad (2.5)$$

Este sistema de cinco equações é um modelo para o circuito acima. As duas primeiras equações resultam da aplicação das relações de Kirchhoff para as correntes e tensões (nó e malha). As três últimas relacionam correntes com tensões (ou suas derivadas) em cada um dos componentes. Este modelo “reúne” o nosso conhecimento sobre as relações entre as variáveis. Não é muito cómodo para ser analisado, pelo que iremos tentar compactá-lo. Se nas duas primeiras equações do sistema (2.5) substituirmos  $i_R(t)$ ,  $i_C(t)$  e  $v_L(t)$  pelas suas expressões dadas nas três últimas, obtemos o sistema de duas equações:

$$\begin{cases} C \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{R} v_o(t) = i_L(t) \\ L \frac{di_L(t)}{dt} + v_o(t) = v_i(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

Este modelo foi obtido *transformando* o sistema (2.5) através de uma operação de substituição de

variáveis e eliminação de equações. O resultado foi um modelo – dito *modelo de estado* – com menos equações, mas com a mesma informação do sistema original no que respeita às relações entre  $v_o$ ,  $i_L$  e  $v_i$  do circuito LRC. Uma outra transformação, que consiste em dividir cada uma das equações pelo coeficiente da derivada que nela aparece, permite-nos obter o *modelo de estado* na forma *normal*:

$$\begin{cases} \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_o(t) = \frac{1}{C} i_L(t) \\ \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{L} v_o(t) = \frac{1}{L} v_i(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

Este sistema tem exactamente a mesma informação do original (2.6) e a desvantagem de ser de leitura menos imediata. Devido à existência de regras bem conhecidas para o resolver, tem a vantagem de ser mais fácil calcular as suas soluções. Este exemplo mostra que dois modelos podem ser diferentes e equivalentes no que diz respeito a um certo objectivo. Neste caso, o objectivo é descrever as relações entre as variáveis  $v_o$ ,  $i_L$  e  $v_i$  do circuito LRC.

Se pretendermos um modelo em que *só* figurem as variáveis  $v_i(t)$  e  $v_o(t)$ , podemos observar que a variável  $i_L$  tem por expressão, dada pela primeira equação:

$$i_L(t) = C \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{R} v_o(t)$$

Substituindo, na segunda equação  $i_L$  por esta expressão e normalizando, obtém-se a equação diferencial:

$$\frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_o(t) = \frac{1}{LC} v_i(t). \quad (2.8)$$

Esta equação contém a mesma informação que os sistemas (2.5)(2.6)(2.7) sobre as variáveis  $v_i$  e  $v_o$ .

## Exercícios

- 2.1 Enunciar uma definição do conceito de *modelo de um sistema*.
- 2.2 Qual a diferença entre modelos *estruturais* e modelos *comportamentais*?
- 2.3 Um carrinho com um pêndulo invertido, que a imagem mostra esquematicamente, é muito usado em demonstrações e investigação de sistemas realimentados. As seguintes *propriedades mensuráveis* são usadas para estabelecer um modelo comportamental:

$F$  é a força que impulsiona o carrinho;

$g$  é a aceleração da gravidade;

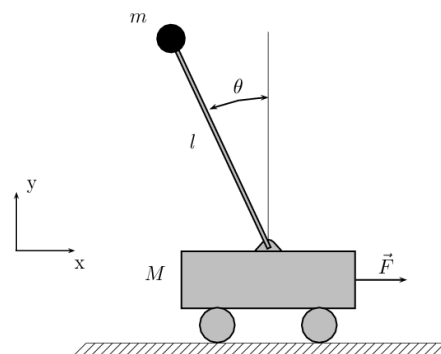
$l$  é o comprimento da haste do pêndulo;

$m$  é a massa do pêndulo;

$M$  é a massa do carrinho;

$\theta$  é o ângulo que o pêndulo faz com a vertical;

$x$  é o deslocamento do carrinho;



$v$  é a velocidade do carrinho;

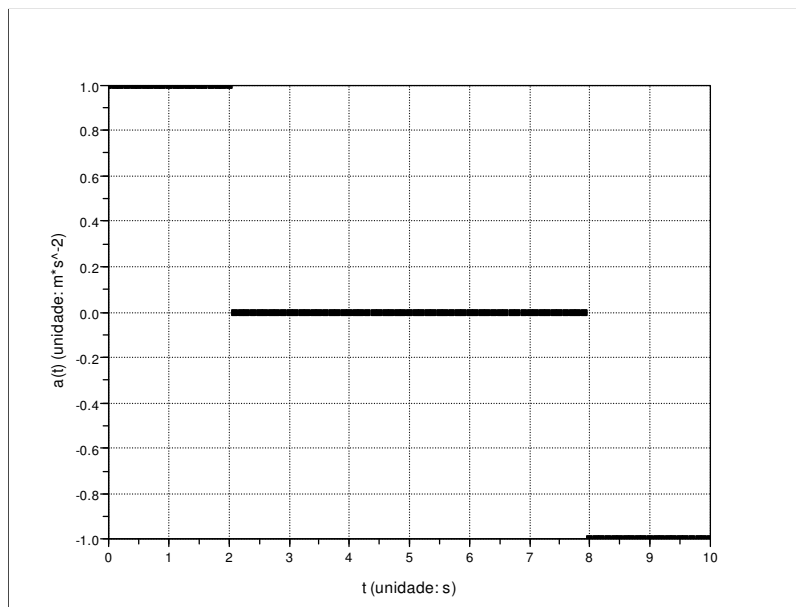
$\omega$  é a velocidade angular do pêndulo;

Distinguir na lista acima as *variáveis* dos *parâmetros* (em sentido estrito).

- 2.4 O seguinte programa em Scilab é usado para obter uma representação *em tabela* da *aceleração nominal* a impor a um elevador numa subida entre 2 pisos:

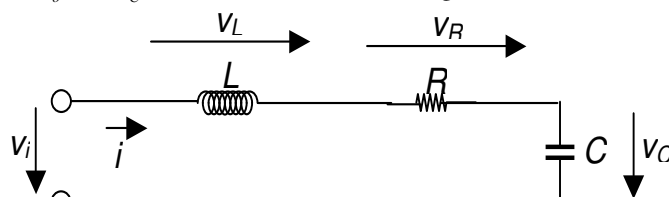
```
clear
t=0:0.1:10;
a(1,1:21)=1;
a(1,22:80)=0;
a(1,81:101)=-1;
plot(t,a)
```

A execução do programa em Scilab produz o seguinte gráfico (após alguma edição):



Realizar um programa que faça o traçado do gráfico da velocidade nominal do elevador correspondente à aceleração nominal indicada.

- 2.5 No texto são indicados três procedimentos para se “chegar” à função  $f(t)$  que descreve uma possível evolução temporal de uma variável de um sistema. Identifique-os.
- 2.6 Estabelecer um modelo para o seguinte circuito eléctrico, que relacione a tensão de entrada  $v_i(t)$  com a tensão de saída  $v_o(t) = v_C(t)$ . No modelo só devem figurar as variáveis  $v_i$  e  $v_o$ .



**\*É obrigatório fazer-se um modelo por análise teórica do sistema?**

Não exactamente. Imagine-se um sistema em que as relações entre variáveis são mal conhecidas ou ignoradas. Neste caso, pode seguir-se uma via *experimental*. Fazem-se várias

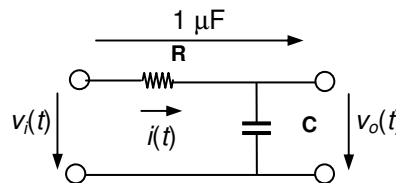


experiências no sistema, registam-se as evoluções das variáveis e tenta-se deduzir dos valores registados as relações que constituem o modelo. Neste caso, diz-se que se usa um procedimento de *identificação do modelo*.

**Como é que a partir de um modelo, se obtém a função  $f(t)$  que descreve uma certa evolução de uma variável que se pretende prever?**

A resposta depende do tipo de modelo. Os modelos do circuito LRC apresentados anteriormente envolvem *equações diferenciais em ordem ao tempo*. Para este tipo de modelos, obter a função  $f(t)$  que descreve a , implica “resolver” a equação diferencial. Vamos ver como isto se pode fazer com um circuito eléctrico mais simples do que o circuito LRC. Começa-se por estabelecer o seu modelo.

**Exemplo 2-6 Modelo de entrada-saída de um circuito RC passa-baixo**



**Figura 2-2** Circuito RC passa-baixo.

Na Figura 2- representa-se um circuito eléctrico, dito RC passa-baixo. Olhemos para ele como um sistema. Que propriedades mensuráveis podemos distinguir no circuito?

A resistência  $R$ , a capacidade  $C$ , a tensão  $v_i(t)$ , a tensão  $v_o(t)$ , a tensão  $v_R(t)$  e a corrente  $i(t)$  são “coisas” ou propriedades a que podemos atribuir números, por exemplo, medindo os seus valores através de instrumentos de medida adequados. São portanto propriedades mensuráveis.

Quais das propriedades mensuráveis do circuito devemos considerar como variáveis e quais devemos considerar como parâmetros?

Um raciocínio idêntico ao anterior, diz-nos que as *variáveis* serão a tensão  $v_i(t)$ , a tensão  $v_o(t)$ , a tensão  $v_R(t)$  e a corrente  $i(t)$ .

Por sua vez, os *parâmetros* serão a resistência  $R$  e a capacidade  $C$ .

Suponha-se que estamos interessados em estudar a relação entre a variável  $v_i$  e a variável  $v_o$  do circuito RC passa-baixo. Ou por outras palavras, estamos interessados em saber como “reage” a tensão  $v_o$  a um “estímulo” em  $v_i$ ? Mais exactamente, como evolui  $v_o(t)$ , quando, por sua vez, impomos externamente que  $v_i(t)$  evolua de uma certa forma?

Visto que estamos interessados na relação entre  $v_i$  e  $v_o$ , o nosso objectivo será obter um modelo em que figurem apenas estas variáveis. Claro que nada nos impede de, ao *estabelecer* o modelo, recorrermos às outras variáveis.

Vejamos agora como podemos estabelecer o modelo. O circuito da figura é constituído por uma só malha. Pela relação de Kirchhoff para as malhas – o somatório das quedas de tensão numa malha deve ser nulo – tem-se que:

$$v_i(t) = v_R(t) + v_o(t) . \quad (2.9)$$

Pela relação de Ohm para tensão e corrente numa resistência, podemos transformar (2.9) para

$$v_i(t) = Ri(t) + v_o(t) . \quad (2.10)$$

A corrente  $i(t)$  flui no condensador. Como se relaciona  $i(t)$  com  $v_o(t)$ ? A carga  $q(t)$  de um condensador iguala o produto da sua capacidade  $C$  pela tensão aos seus terminais  $v_C(t)$ . Porque  $v_C(t) = v_o(t)$  tem-se que:

$$q(t) = Cv_o(t) . \quad (2.11)$$

Num condensador a corrente  $i$  iguala a derivada da carga  $q$  em ordem ao tempo. Segue-se que se derivarmos (2.11) obtemos

$$i(t) = C \frac{dv_o(t)}{dt} .$$

O que leva a que (2.10) possa ser reescrita como uma equação diferencial que relaciona as tensões  $v_i(t)$ ,  $v_o(t)$  e a derivada desta última:

$$RC \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = v_i(t) . \quad (2.12)$$

A equação (2.12) pode equivalentemente escrever-se:

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_o(t) = \frac{1}{RC} v_i(t) \quad (2.13)$$

Uma vez obtido o modelo vejamos como pô-lo a funcionar para prever a evolução da variável de saída.

#### Exemplo 2-7 Previsão da resposta a um degrau de tensão de um circuito RC passa-baixo

Um modelo só nos permite prever a evolução de uma ou mais variáveis de um sistema se nós soubermos especificar exactamente para que situação do sistema se pretende realizar a previsão. Suponhamos que pretendemos saber (ou prever) como evolui ou responde  $v_o$  a um estímulo em  $v_i$ , que consiste na aplicação de um degrau de tensão unitário na entrada (através de um gerador de sinal), estando o condensador descarregado. Esta situação traduz-se matematicamente escrevendo:

$$v_i(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \leftarrow t \geq 0 \\ 0 & \leftarrow t < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$v_o(0) = 0 . \quad (2.15)$$

O uso da função (2.14) para descrever a evolução  $v_i(t)$ , pressupõe que o instante em que  $v_i$  “passa” de 0 para 1 é tomado como  $t = 0$ .

A pergunta é: nesta situação, qual é a função do tempo que representa a evolução de  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ ? Repare-se que não nos interessa saber a evolução de  $v_o(t)$  para  $t < 0$  – supomos que o condensador está descarregado. Interessa-nos, sim, saber como a variável de saída,  $v_o(t)$ , vai “reagir” ao estímulo

que significa aplicar um degrau de tensão unitário em  $v_i(t)$  ou, dito de outra maneira, ao estímulo que resulta de forçar  $v_i(t)$  a evoluir como (2.14).

Se conjugarmos as condições (2.14) e (2.15) – que especificam a situação que nos interessa – com o modelo (2.13) obtemos

$$\begin{cases} \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_o(t) = \frac{1}{RC} & \leftarrow t \geq 0 \\ v_o(0) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Segue-se então que o modelo nos está dizer que  $v_o(t)$  deve ser a *solução* para  $t > 0$  da equação diferencial  $\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_o(t) = \frac{1}{RC}$ , sujeita à condição (inicial)  $v_o(0) = 0$ .

Utilizando um método disponível para resolver equações diferenciais, encontrar-se-á que a solução, isto é, a função do tempo  $t$  que descreve a evolução de  $v_o$ , é:

$$v_o(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \quad \leftarrow t \geq 0. \quad (2.17)$$

Será mesmo? Uma forma de testar se uma função é solução de uma equação diferencial é substituí-la na equação. Se resultar uma identidade, a função é uma solução da equação.

Uma consequência de (2.17) é

$$\frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Então, fazendo as adequadas substituições em (2.16), tem-se:

$$\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC} - \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{RC} \Leftrightarrow 1 = 1.$$

Logo, (2.17) é uma solução da equação.

Defina-se a *constante de tempo*  $T$ , por  $T = RC$ . Então

$$v_o(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad \leftarrow t \geq 0. \quad (2.18)$$

A tabela seguinte apresenta os valores previstos para  $v_o$  nos instantes  $t = 0$  a  $t = 8T$ , até às centésimas de volt:

$t$	0	$1T$	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$	$6T$	$7T$	$8T$	s
$v_o$	0.00	0.63	0.86	0.95	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	volt

O valor da função (2.18) tende para 1 quando  $t \rightarrow \infty$ . Determinado até às centésimas de volt, o valor de  $v_o$  será igual a 1 V ao fim de um tempo  $t = 6T$ . O intervalo de tempo necessário para atingir 95% do valor final é  $3T$ .

### Exemplo 2-8 Previsão da resposta livre de um circuito RC passa-baixo

Consideremos agora outra situação. O condensador está carregado a 1 V e  $v_i$  é feito igual a 0 (por exemplo, colocando os terminais de entrada em curto-circuito).

Interessa-nos agora saber como vai ser a evolução  $v_o(t)$ , a partir do instante  $t=0$  em que  $v_i$  é feito igual a 0. Matematicamente a situação descreve-se por

$$v_i(t) = 0 \quad \leftarrow t \geq 0 \quad (2.19)$$

$$v_o(0) = 1. \quad (2.20)$$

Conjugando as condições (2.19) e (2.20) com o modelo (2.13) obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_o(t) = 0 & \leftarrow t \geq 0 \\ v_o(0) = 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Segue-se então que o modelo nos está dizer que  $v_o(t)$  deve ser a *solução* para  $t > 0$  da equação diferencial  $\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_o(t) = 0$ , sujeita à condição (inicial)  $v_o(0) = 1$ .

Utilizando um método disponível para resolver equações diferenciais, encontrar-se-á que a solução, a função do tempo  $t$  que descreve a evolução de  $v_o$ , é:

$$v_o(t) = v(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = 1 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad \leftarrow t \geq 0. \quad (2.22)$$

Em termos de constante de tempo  $T = RC$ , vem

$$v_o(t) = 1 \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad \leftarrow t \geq 0. \quad (2.23)$$

A tabela seguinte apresenta os valores previstos para  $v_o$  nos instantes  $t = 0$  a  $t = 8T$ , até às centésimas de volt:

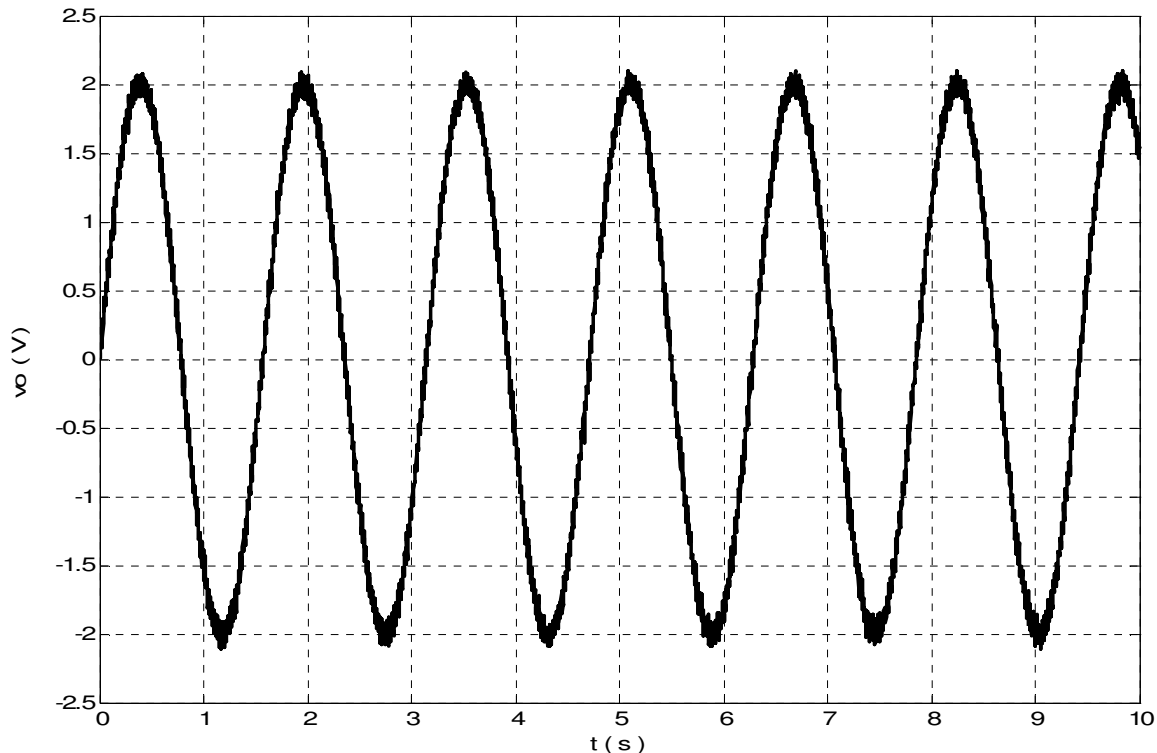
$t$	0	$1T$	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$	$6T$	$7T$	$8T$
$v_o$	1.00	0.37	0.14	0.05	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00

O valor da função (2.23) tende para 0 quando  $t \rightarrow \infty$ . Determinado até às centésimas de volt, o valor de  $v_o$  será igual a 0 V ao fim de um tempo  $t = 6T$ . O intervalo de tempo necessário para atingir 5% do valor inicial é  $3T$ .

## Exercícios

**2.7** Este é um exemplo muito simples de obtenção de um modelo apenas por via experimental.

A imagem seguinte é uma cópia de um registo da evolução da tensão de saída,  $v_o$ , de um circuito oscilador electrónico, obtido durante um intervalo de observação de 10 segundos. O início da observação é sincronizado com uma passagem por 0 (“para cima”) da tensão. O registo evidencia a existência de “ruído eléctrico” adicionado ao sinal observado.



- Estabelecer uma expressão analítica que presumivelmente possa representar a função  $v_o(t)$  sem ruído. (Nota: visto que a evolução é periódica, começar por atribuir um valor ao período.)
- Determinar a expressão da segunda derivada,  $v_o''(t)$ , de  $v_o(t)$  a partir da expressão encontrada para  $v_o(t)$  em a).
- Determinar uma equação diferencial que tenha por solução  $v_o(t)$ . Notar que um oscilador é um tipo particular de circuito para o qual se pode considerar que  $\forall t, v_i(t) = 0$ .

**2.8** Podemos ver o processo de realização de uma previsão da evolução da variável de um sistema a partir de uma equação diferencial como comportando os seguintes passos:

- Representar em gráfico a função que é solução da equação diferencial ou calcular valores dela para instantes de tempo determinados.
- Definir a situação (evolução da variável de entrada e condições iniciais) para a qual se pretende realizar a previsão.
- Conjuguar a definição da situação com a equação diferencial e resolver a equação resultante para as condições dadas.

*Reescrever os passos indicados acima pela ordem correcta de realização.*

**2.9** Utilizando um ambiente de ‘software’ adequado, representar em gráfico as soluções da equação diferencial do circuito RC passa-baixo encontradas nas situações estudadas nos Exemplos 2-7 e 2-8, supondo que a constante de tempo é  $T = 1$  ms. Usar um incremento de 0.1 ms para obter curvas “suaves”.

**2.10** O modelo de um circuito electrónico é dado como uma equação diferencial:

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + 1000v_o(t) = 2000v_i(t)$$

Determinar quais dos seguintes pares de funções satisfazem o modelo e podem assim representar comportamentos do circuito descrito pelo modelo. Nota: as funções  $v_o(t)$  e  $v_i(t)$  são iguais a 0 para  $t < 0$ .

- |    |                  |                                    |                      |
|----|------------------|------------------------------------|----------------------|
| a) | $v_i(t) = 10$    | $v_o(t) = 10(1 - e^{-t/0.001})$    |                      |
| b) | $v_i(t) = 2.5$   | $v_o(t) = 5 - 5e^{-t/0.002}$       |                      |
| c) | $v_i(t) = 5$     | $v_o(t) = 10 - 5e^{-t/0.001}$      |                      |
| d) | $v_i(t) = 1000t$ | $v_o(t) = 2000t - 2e^{-1000t}$     | $0 \leq t \leq 0.01$ |
| e) | $v_i(t) = 1000t$ | $v_o(t) = 2000t - 2 + 2e^{-1000t}$ | $0 \leq t \leq 0.01$ |
| f) | $v_i(t) = 500t$  | $v_o(t) = 1000t - 2 + 2e^{-500t}$  | $0 \leq t \leq 0.01$ |

# 3

## UTILIZAÇÃO DE MODELOS

**Objectivo** *Utilização de modelos comportamentais em previsão, análise da influência dos parâmetros e simulação. Validade de modelos.*

No capítulo anterior definiu-se um modelo comportamental como “um modelo que descreve relações entre algumas *variáveis* de um sistema, de uma forma que permite prever ou explicar a *evolução ao longo do tempo* das variáveis em causa”. Neste capítulo vamos aprofundar o conceito de modelo comportamental, apresentando três formas de os utilizar ou três finalidades com que se faz a sua utilização, a saber:

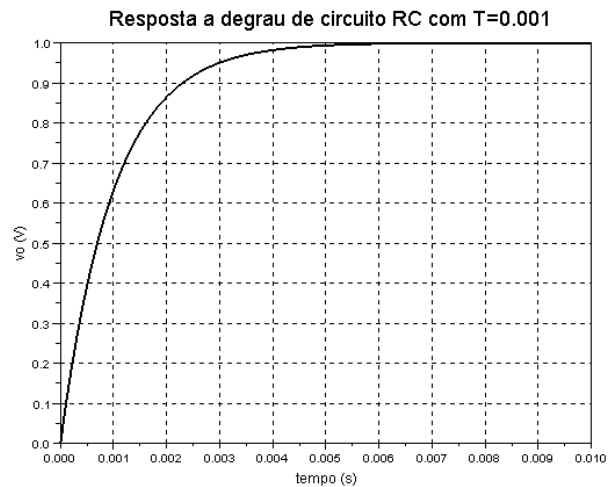
- Previsão de valores numéricos das variáveis ao longo do tempo;
- Análise da influência de variações do valor dos parâmetros no comportamento do sistema;
- Descrição ou construção de modelos de simulação de um sistema.

Vamos também referir a questão da validade dos modelos.

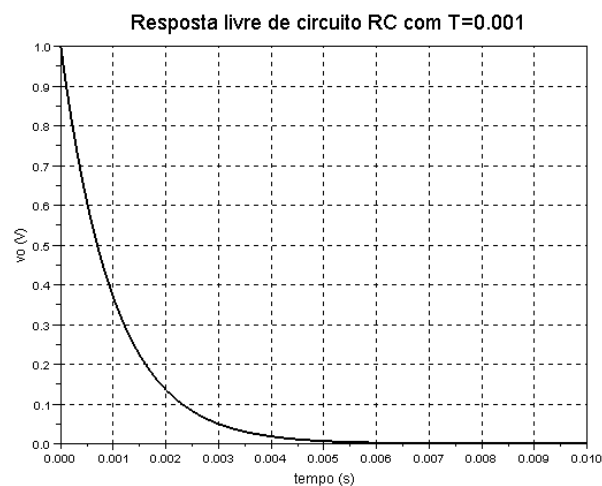
### 3.1 Previsão de valores numéricos

A previsão do comportamento de um sistema indicando os valores numéricos das variáveis ao longo do tempo é necessária em muitas situações. Por exemplo, quando se está a projectar um sistema, o sistema não existe e não é viável produzir um protótipo para experimentação. O comportamento do sistema não pode sequer ser observado. Os Exemplos 2-7 e 2-8 são casos desta utilização de modelos. Com o valor do parâmetro  $T = 0.1$  ms a previsão dos valores numéricos (Exercício 2-9) pode ser representada como nas Figuras 3-1 e 3-2.

**Figura 3-1** Previsão dos valores numéricos da tensão de saída de um circuito RC com uma entrada em degrau.



**Figura 3-2** Previsão dos valores numéricos da tensão de saída de um circuito RC em resposta livre.



### Limites à previsão de valores numéricos

A previsão de valores numéricos da evolução de uma variável está sujeita a erros. Mesmo admitindo que o modelo está correcto e traduz fielmente as relações entre variáveis no sistema que descreve, existe sempre uma possível fonte de erro nos valores das condições iniciais. Na prática, as condições iniciais que se supõem para realizar uma previsão podem não ser exactamente as que existem no sistema a que a previsão se aplica, por exemplo, devido a limitações dos instrumentos de medida.

Consoante os modelos, esta fonte de erros pode afectar pouco ou muito o intervalo de tempo de previsão em que os valores numéricos previstos fazem sentido. Em modelos ditos *simples* os erros tendem a desaparecer com o tempo. Em modelos que exibam *sensibilidade às condições iniciais*, os erros tendem a ser amplificados com a passagem do tempo. Isto acontece, por exemplo, com os modelos usados em Meteorologia para prever o estado do tempo. Vamos apresentar dois exemplos.



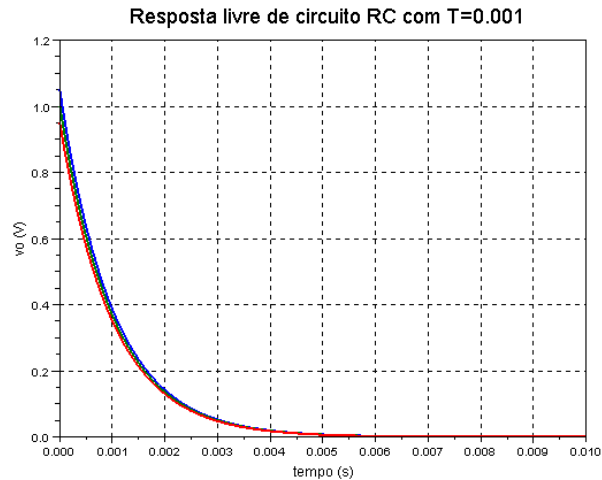
### Exemplo 3-1 Influência dos valores iniciais na resposta livre de um circuito RC

Consideremos a expressão da resposta livre de um circuito RC passa-baixo encontrada no Exemplo

2-8:  $v(t) = v(0)e^{-t/T}$ . Programemos

em Scilab a representação das respostas livres correspondentes a  $v(0) = 1.05$ ,  $v(0) = 1.00$ ,  $v(0) = 0.95$ . Obtém-se o gráfico mostrado na Figura 3-3.

**Figura 3-3** Evolução da tensão de saída de um circuito RC em resposta livre para diferentes valores de condições iniciais.



Suponha-se agora que se tinha feito a previsão com o valor inicial  $v(0) = 1.00$ . Observa-se que, se na situação real os valores iniciais forem diferentes, neste caso estiverem compreendidos entre 0.95 e 1.05, o erro de previsão *diminui* à medida que o tempo passa. Neste sentido, o intervalo de tempo em que as previsões fazem sentido é fundamentalmente ilimitado.

### Exemplo 3-2 Influência dos valores iniciais na evolução de uma variável descrita pela equação logística discreta

A equação logística discreta é o exemplo típico de um modelo que exhibe sensibilidade às condições iniciais. Ela escreve-se:

$$x(k) = c \cdot x(k-1) \cdot [1 - x(k-1)] \quad (2.24)$$

Diferentemente do modelo do circuito RC, que é um modelo em *tempo contínuo*, este modelo é dito um modelo em *tempo discreto*. Significa isto que o modelo só fornece valores de variáveis para uma sequência de instantes de tempo: ..., 0, 1, 2, ..., k, ... Os valores das variáveis não podem ser previstos ou estabelecidos pelo modelo para instantes de tempo fora desta sequência.

Realizamos um programa em Scilab para determinar a evolução da variável  $x$ , num intervalo de tempo entre  $k = 0$  e  $k = 80$ , sendo  $x(0) = 0.5$  e  $c = 3.75$ . O programa pode tomar a forma:

```
//Equação logística discreta
clear;clf
t=0:1:80;
c=3.75;
x(1)=0.5;
for i=2:1:81
    x(i)=c*x(i-1)*(1-x(i-1));
end
plot(t,x)
a=gca();
```

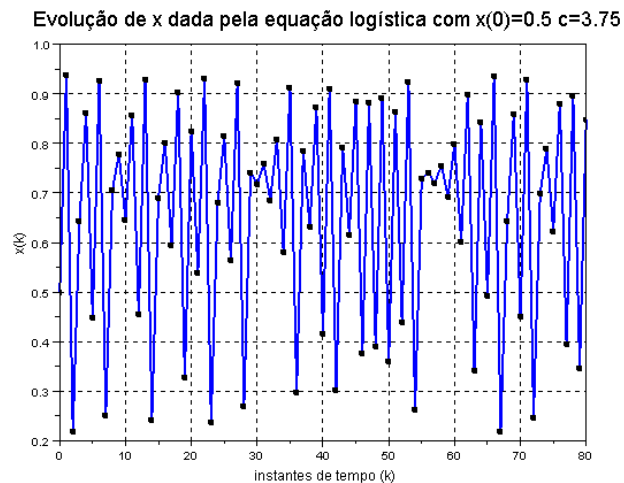
```

title(a,'Evolução de x dada pela equação logística com x(0)=0.5
c='+string(c),'fontsize',4)
a.grid=[0,0];
a.x_label.text='instantes de tempo (k)';
a.x_label.font_size=2;
a.children.children.thickness=2;
a.children.children.mark_mode='on';
a.children.children.mark_style=11;
a.children.children.mark_size=3;
a.children.children.mark_foreground=0;
a.children.children.mark_background=0;
a.y_label.text='x(k)';a.y_label.font_size=2;

```

A execução do programa gera o gráfico mostrado na Figura 3-4. Este é um exemplo de um comportamento considerado como caótico.

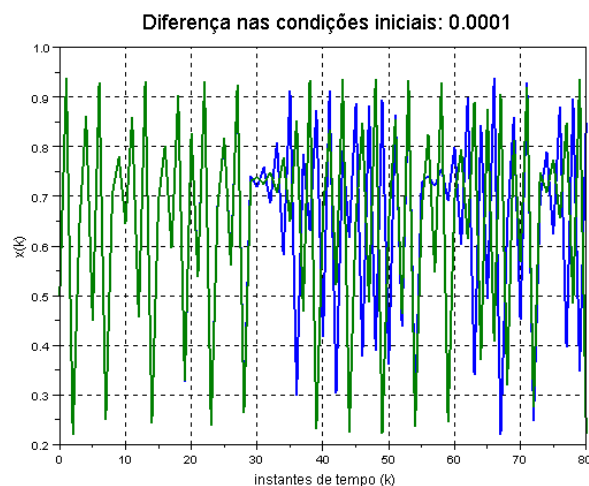
**Figura 3-4** Exemplo de evolução de variável dada pela equação logística. Os valores calculados pelo modelo apresentam-se como pequenos quadrados negros. As linhas de interpolação a azul são apresentadas para facilitar a visualização da série.



Modifiquemos agora o programa para gerar um gráfico que mostre duas evoluções. A anterior e outra cuja condição inicial seja  $x(0) = 0.5001$ . A diferença entre as duas condições iniciais é de 0.0001.

O resultado, apresentado na Figura 3-5 mostra que as duas evoluções coincidem para os primeiros 28 instantes de tempo, mas, a partir daí, divergem de forma imprevisível. Se se imaginar agora que este modelo seria usado para realizar previsão de valores numéricos, deverá ser fácil compreender como um pequeno erro na medida das condições iniciais compromete a previsão ao fim de um intervalo de tempo.

**Figura 3-5** Exemplo de evoluções de variáveis dadas pela equação logística, com diferença de 0.001 nas condições iniciais.



## Exercícios

- 3.1** Enunciar as 3 finalidades de um modelo comportamental indicadas no texto.
- 3.2** Utilizando um programa em Scilab, determinar a evolução com o tempo das *diferenças* entre as respostas ao degrau do circuito RC apresentadas na Figura 3-3.
- 3.3** a) Escrever um programa em Scilab para gerar um gráfico como o da Figura 3-5.  
b) Repetir para este caso o Exercício 3-2.  
c) Alterar a diferença entre as condições iniciais e verificar como esta diferença modifica o intervalo de tempo em que as previsões coincidem.

## 3.2 Influência dos valores dos parâmetros no comportamento

Uma utilização dos modelos que utiliza a previsão dos valores numéricos, mas tem um objectivo mais amplo é a análise da influência dos parâmetros no comportamento do sistema. A análise mostra-nos como a variação do valor dos parâmetros se traduz na modificação da evolução das variáveis. Vejamos dois exemplos.

### Exemplo 3-3 Influência da constante de tempo na “velocidade” de resposta de um circuito RC

Vamos refazer o Exercício 2-9, ampliando-o. Suponha-se que no circuito RC passa-baixo do Exemplo 2-7 os valores de  $R$  e  $C$  são  $R = 1 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ . Então a constante de tempo  $T = 1 \text{ ms}$ . Para este valor de  $T$ ,  $v_o(t) = 1 - e^{-t/0.001}$ , e os valores de  $v_o$  determinados no Exemplo 2-7 corresponderiam aos seguintes instantes de tempo:

$t$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	s
$v_o$	0.00	0.63	0.86	0.95	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	volt

Mas suponhamos agora que substituíamos a resistência por uma de valor  $R = 2 \text{ k}\Omega$ . Neste caso,  $T = 2 \text{ ms}$ ,  $v_o(t) = 1 - e^{-t/0.002}$ , e os valores de  $v_o$  determinados no Exemplo 2-7 passariam a corresponder aos instantes de tempo:

$t$	0.000	0.002	0.004	0.006	0.008	0.010	0.012	0.014	0.016	s
$v_o$	0.00	0.63	0.86	0.95	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	volt

A forma geral da resposta é idêntica, mas ela é mas “lenta”.

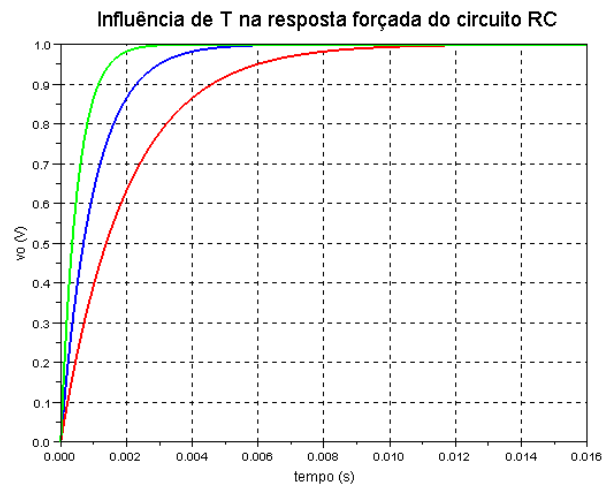
Similarmente, se a constante de tempo for mais pequena, por exemplo,  $R = 1 \text{ k}\Omega$  e  $C = 0,5 \text{ }\mu\text{F}$  e  $T = 0.5 \text{ ms}$ ,  $v_o(t) = 1 - e^{-t/0.0005}$ , teríamos:

$t$	0.000	0.0005	0.001	0.0015	0.002	0.0025	0.003	0.0035	0.004	s
$v_o$	0.00	0.63	0.86	0.95	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	volt

A forma geral da resposta é também idêntica, mas ela é mas “rápida”.

Na Figura 3-6 apresenta-se o gráfico conjunto destas três evoluções, realizado em Scilab. Pode

apreciar-se facilmente como a velocidade de resposta do circuito varia com o valor do parâmetro  $T$ .

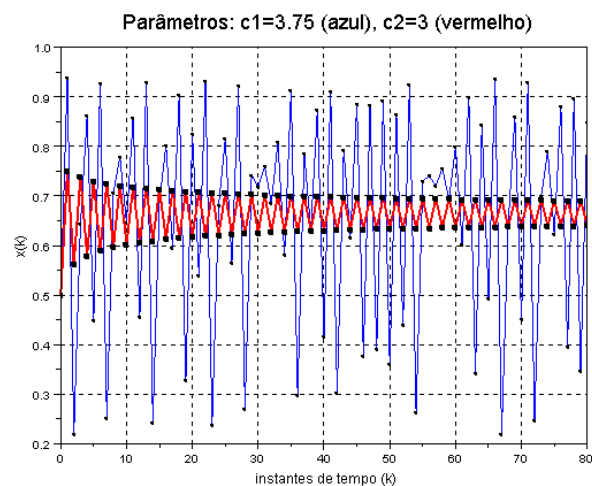


**Figura 3-6** Respostas forçadas de circuito RC correspondentes a constantes de tempo de 0.5 ms, 1 ms e 2 ms.

#### Exemplo 3-4 Influência do valor de $c$ na evolução da variável da equação logística discreta

Utilizando o programa desenvolvido no Exemplo 3-2, vamos agora determinar duas evoluções,  $x_1(k)$  e  $x_2(k)$ , da variável  $x$ , com a mesma condição inicial  $x(0) = 0.5$ , mas com valores diferentes do parâmetro  $c$ :  $c_1 = 3.75$  e  $c_2 = 3$ .

O resultado apresenta-se na Figura 3-7. Verifica-se que a alteração do valor do parâmetro modificou radicalmente o carácter da evolução de  $x$ . Com o valor de  $c = 3$ , a evolução de  $x$  não apresenta mais um carácter caótico: a evolução é oscilante e a amplitude das oscilações tende aparentemente a diminuir.



**Figura 3-7** Evoluções da variável da equação logística discreta com  $c = 3.75$  e  $c = 3$ .

## Exercícios

- 3.4 Ampliar o programa desenvolvido no Exercício 2-9 para obter o gráfico na Figura 3-6.
- 3.5 a) Comparar as evoluções da variável  $x$  da equação logística para os valores de  $c$  no conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ .  
b) Verificar se para  $c = 3$  também existe sensibilidade às condições iniciais.

### 3.3 Simulação

A simulação pode ser entendida como uma forma de gerar automaticamente os valores (numéricos ou outros) de evoluções das variáveis de um modelo, recorrendo a computadores. A simulação realiza-se para previsão de valores numéricos, análise da influência dos parâmetros e para outras finalidades como aprendizagem e treino.

Realizar a simulação de um sistema implica três passos:

- Escolha do modelo a usar para descrever o sistema.
- Tradução do modelo escolhido num *modelo programado* próprio para ser executado num computador.
- Execução do modelo programado no computador ou simulação propriamente dita.

A simulação pode realizar-se com vantagem utilizando sistemas ou ambientes de simulação. Um sistema ou ambiente de simulação é uma aplicação de *software*, constituída por diferentes programas a que o utilizador tem acesso através de uma interface única e cujo objectivo é facilitar a realização de simulações. O “facilitar a realização de simulações” estende-se da “facilidade em traduzir o modelo escolhido no modelo programado” à facilidade em “realizar modificações no modelo programado, registar, organizar e comparar resultados de simulação”.

A tradução do modelo escolhido num modelo programado pode realizar-se de diferentes formas. Na que é, talvez, a mais simples de todas pode usar-se uma folha de cálculo. Esta forma é muito instrutiva e fácil de realizar para simulações com poucas variáveis e poucos valores de variáveis a calcular. No entanto, em geral, será melhor recorrer a uma linguagem de programação. Foi o que fizemos nos Exemplos 3-2 e 3-4, para simular a evolução da variável  $x$  da equação logística. Uma alternativa à utilização de uma linguagem de programação é a utilização de ambientes de programação ou de tradução de modelos por ícones gráficos. O próximo exemplo mostra vários aspectos desta possibilidade, utilizando o ambiente ScicosLab, que é uma variante do Scilab.

#### Exemplo 3-5 Programação do modelo do circuito RC passa-baixo em ScicosLab

Se um modelo é dado por uma equação diferencial (ou por um sistema de equações diferenciais), programar o modelo por ícones gráficos num ambiente como o ScicosLab envolve, primeiro, transformar a equação diferencial de forma a fazer desaparecer as derivadas.

Relembremos que o modelo do circuito RC passa-baixo é dado por:

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_o(t) = \frac{1}{RC} v_i(t) \quad (2.25)$$

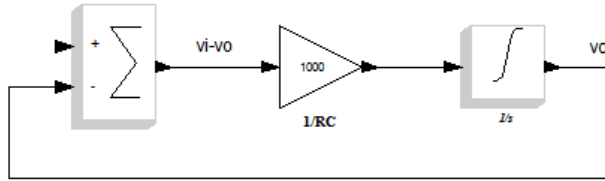
Realizamos as seguintes transformações:

$$\frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{1}{RC} v_i(t) - \frac{1}{RC} v_o(t) \quad (2.26)$$

$$\frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{1}{RC} [v_i(t) - v_o(t)] \quad (2.27)$$

$$v_o(t) = \int_0^t (1/RC) [v_i(\tau) - v_o(\tau)] d\tau + v(0) \quad (2.28)$$

A partir da última equação podemos construir o modelo programado do circuito RC passa-baixo no ambiente ScicosLab usando blocos pré-definidos. A Figura 3-8 mostra o modelo.



**Figura 3-8** Programação do modelo do circuito RC passa-baixo usando ícones ou blocos gráficos no ambiente ScicosLab sem blocos de entrada ou de saída.

Num modelo programado através de ícones gráficos como este, as variáveis são representadas por setas e as operações sobre variáveis são representadas por blocos. O modelo foi construído seleccionando blocos da *palette* ‘Linear’ e ligando-os conforme indicado.

O bloco mais à direita é um integrador. Ele realiza a integração da variável de entrada e adiciona-lhe um valor constante, designado por condição inicial (do integrador). Seja, em geral,  $y$  a sua saída,  $u$  a sua entrada e  $c$  o valor constante ou a sua condição inicial. Então:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau + c \quad (2.29)$$

$$y(0) = \int_0^0 u(\tau) d\tau + c = 0 + c = c$$

Neste caso, interpretamos  $y(t)$  como  $v_o(t)$ , tensão de saída do circuito RC passa-baixo. Também,  $u(\tau) = (1/RC) [v_i(\tau) - v_o(\tau)]$ .

O bloco triangular é um bloco de ganho que multiplica a variável de entrada por um factor constante. Ele representa o factor  $1/RC$  na equação (2.28). Para simular um circuito com  $RC = 1$  ms, o valor do factor deve ser 1000. “Abrindo” o bloco é possível definir este valor (que por defeito é 1). Alterando a sua ‘Identification’ para a *string*  $1/RC$  força-se a visualização por baixo do bloco da mesma.

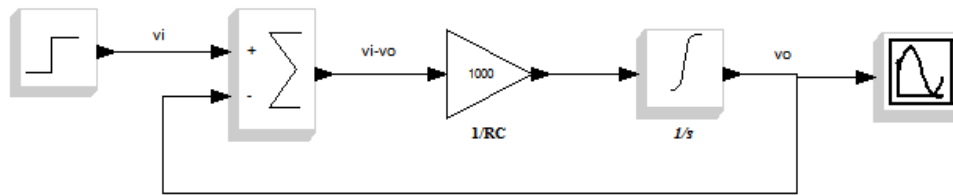
O bloco com o símbolo de somatório realiza a soma algébrica dos sinais nas suas entradas.

Utilizando o bloco ‘Text’, disponível na *palette* ‘Other’ podemos indicar o nome das variáveis representadas pelas setas, no caso, ‘ $v_i - v_o$ ’ e ‘ $v_o$ ’.

O modelo programado em ScicosLab na Figura 3-8 representa (2.28), mas não pode funcionar porque a variável de entrada  $v_i$  não está definida. Mesmo que estivesse, não poderíamos visualizar a evolução de  $v_o$ .

Portanto, adicionamos mais dois blocos. Assumindo que pretendemos simular a resposta um degrau de tensão em  $v_i$ , adicionamos um bloco ‘degrau’, disponível na *palette* ‘Sources’. Adicionamos também um bloco osciloscópio, disponível na *palette* ‘Sinks’. Resulta o modelo representado na

Figura 3-9.



**Figura 3-9** Programação do modelo do circuito RC passa-baixo usando ícones ou blocos gráficos no ambiente ScicosLab com blocos de entrada ou de saída.

Podemos agora simular a resposta do modelo a um degrau. Para obtermos um gráfico similar ao da Figura 3-1, devemos ajustar os seguintes parâmetros dos blocos:

- No bloco ‘degrau’ devemos colocar o valor 0 em ‘Step time’.
- No bloco ‘osciloscópio’ devemos colocar o valor 0 em ‘Ymin’, o valor 1.05 em ‘Ymax’ e o valor 0.01 em ‘Refresh period’.

No menu ‘Simulate / Setup’ devemos colocar o valor 0.01 em ‘Final integration time’.

## Exercícios

**3.6** Quais são os passos implicados pela simulação de um sistema?

**3.7** Usando o ambiente ScicosLab, construir o modelo do circuito RC passa-baixo como na Figura 3-9.

**3.8** No modelo programado anterior:

- a) Realizar as parametrizações indicadas no Exemplo 3-5. Simular e editar o gráfico produzido. Deverá obter-se a resposta ao degrau do circuito, tal como na Figura 3-1.
- b) Parametrizar o bloco ‘degrau’ para não gerar qualquer impulso (amplitude 0); parametrizar o bloco integrador para a sua condição inicial ser 1. Simular e editar o gráfico produzido. Deverá obter-se a resposta livre do circuito, tal como na Figura 3-2.

## 3.4 Validade de modelos

Um modelo é uma descrição. A validade de um modelo como descrição de um sistema depende do modelo, do sistema a que o modelo se aplica e do que se entende por válido. A validade de um modelo estabelece-se comparando as suas previsões para uma ou mais experiências com os resultados experimentais dessas experiências.

Assim, dizemos que um modelo é válido para um sistema e uma situação comportamental desse sistema, se as previsões que o modelo faz para a evolução das variáveis do sistema nessa situação, coincidirem com as medidas que se obtêm quando o sistema está nessa situação, de acordo com um critério de precisão que estabelecemos à partida.

Se previsões e medidas (suficientemente precisas) não coincidirem, tal não significa necessariamente que o modelo esteja completamente incorrecto. Pode aceitar-se que os erros

de previsão do modelo não têm importância prática, efectivamente aumentando a tolerância do critério. Ou pode haver erro no valor assumido para os parâmetros do modelo.

### Exemplo 3-6 Desvio entre previsão e valores medidos devido a valores dos parâmetros

Um circuito eléctrico real é construído com componentes cujos valores apresentam tolerâncias mais ou menos elevadas em relação ao chamado valor nominal. Os valores nominais de  $R$  e  $C$  no circuito eléctrico considerado no primeiro caso do Exemplo 1-15 são  $R = 1 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ . Resistências e condensadores de média qualidade poderão ter tolerâncias de 5% e 10%, respectivamente. Isto significa que se assumirmos no modelo os valores nominais e os componentes tiverem desvios máximos positivos, poderíamos estar a aplicar um modelo que supõe  $T = 1 \text{ ms}$  a um circuito que teria  $T = 1.155 \text{ ms}$ . Para este último valor de  $T$  os valores de  $v_o$  medidos nos mesmos instantes de tempo da situação considerada seriam:

$t$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	s
$v_o$	0.00	0.58	0.82	0.93	0.97	0.99	1.00	1.00	1.00	volt

Enquanto que os valores previstos com  $T = 1 \text{ ms}$  seriam (como acima):

$t$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	s
$v_o$	0.00	0.63	0.86	0.95	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	volt

As diferenças não se devem a o modelo não ter validade, mas sim a assumirmos valores para os parâmetros que não são exactos.

## Validação de um modelo comportamental

Há modelos que já foram usados e verificados tantas vezes que ninguém colocará em questão a sua validade para os sistemas que constituem o seu domínio de aplicação usual. É o caso do modelo do circuito RC passa-baixo. Na aplicação destes modelos, os problemas que podemos encontrar de discrepâncias entre os valores previstos e os valores medidos terão origem em desvios dos valores reais dos parâmetros em relação aos assumidos.

Mas sempre que se projecta<sup>1</sup> um sistema novo, será necessário validar o modelo ou modelos comportamentais que forem *necessários* usar para o projecto. A validação de um modelo comportamental segue genericamente os seguintes passos.

Considera-se ou escolhe-se uma situação em que o sistema terá um determinado comportamento. Poderemos também dizer que se considera ou escolhe uma *experiência* a realizar com o sistema. Para essa experiência, usa-se o modelo para prever como será a evolução das variáveis do sistema. Realiza-se a experiência e registam-se as evoluções das

---

<sup>1</sup> Ou investiga.



variáveis do sistema. Comparam-se os registos experimentais com as previsões. O modelo será considerado válido se as suas previsões e os resultados experimentais concordarem dentro da precisão que se considera aceitável.

Note-se que *uma só* situação ou experiência pode não ser suficiente para validar um modelo. Um modelo pode dar bons resultados numa experiência e noutra não. Neste caso, o processo de validação deve incluir diferentes situações ou experiências.

## Exercícios

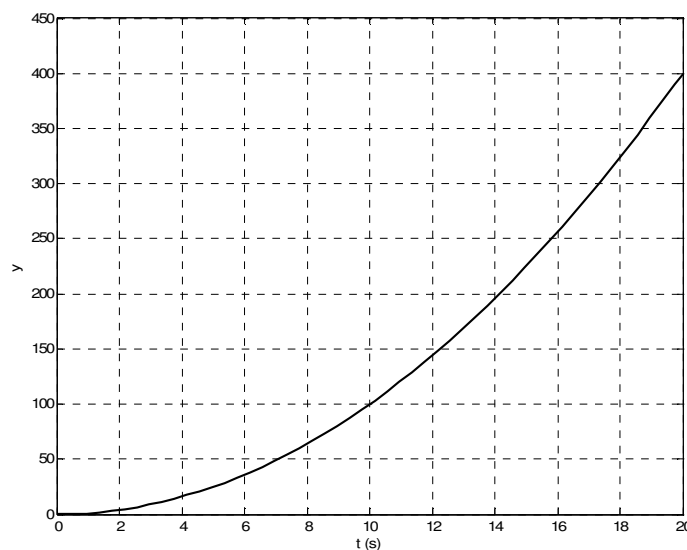
**3.9** Podemos ver o processo de validação de um modelo comportamental para uma situação específica como comportando os seguintes passos:

- Aferir da validade do modelo com base na comparação e num critério pré-definido de concordância de previsões com resultados.
- A partir do modelo, obter previsões do comportamento do sistema para a situação considerada.
- Comparar as previsões do modelo com os registos do comportamento obtidos.
- Realizar a experiência, isto é, registar a evolução das variáveis do sistema na situação considerada.

*Reescrever os passos indicados acima pela ordem correcta de realização.*

**3.10** Pretende-se testar a validade do modelo  $y''(t) = 1.5u(t)$  para um sistema. Para tal, realiza-se a seguinte experiência: impõe-se que a variável de entrada  $u$  do sistema tenha um valor constante de 1 unidade, isto é,  $u(t) = 1$  para  $t \geq 0$ . Realiza-se a experiência, registando-se a evolução da variável de saída  $y$  do sistema, que é apresentada na Figura 3-10.

a) Discuta se o resultado da experiência permite considerar o modelo válido para a situação considerada.



**Figura 3-10** Exemplo de registo do resultado de uma experiência.

b) Se encontrar que o modelo não é válido, discuta se tal se deve à forma do modelo ou ao valor do parâmetro assumido no mesmo: 1.5.

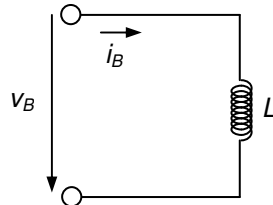
### 3.11 (Exercício “avançado” ou com grau de dificuldade 2).

Os modelos *ideais* de muitos componentes electrónicos consideram que o seu comportamento eléctrico é definido por um só parâmetro. Por exemplo, considera-se que bobines, resistências e condensadores “têm apenas” indutância ( $L$ ), resistência ( $R$ ), e capacidade ( $C$ ).

Na realidade, isto não é assim. Não se consegue construir uma bobine que tenha apenas indutância. Inevitavelmente, ela apresenta também resistência (própria do fio) e capacidade (devido às espiras estarem muito próximas).

Este facto é irrelevante em muitas aplicações (os modelos ideais são OK), mas noutras não. Em circuitos electrónicos que devem funcionar a altas frequências – tais como circuitos para sistemas de comunicações – os efeitos dos parâmetros que “estão lá”, mas “não deviam estar”, modificam o comportamento do componente de tal forma, que esses parâmetros têm que ser levados em consideração.

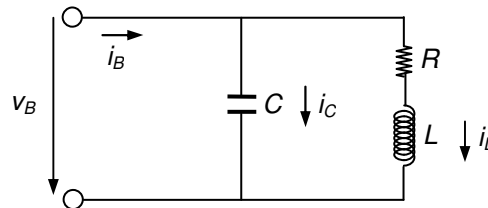
O modelo estrutural ideal para uma bobina é:



E o seu modelo comportamental ideal é:

$$v_B = L \frac{di_B}{dt} \quad (2.30)$$

Mas se se considerar o efeito da resistência e capacidade (ditas parasitas) então o seu modelo estrutural real é:



Determinar o modelo comportamental correspondente ao modelo estrutural real acima, na forma de uma equação que relaciona apenas a tensão  $v_B$  com a corrente  $i_B$ . Partir do seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} i_B = i_C + i_L \\ i_C = C \frac{dv_B}{dt} \\ v_B = Ri_L + L \frac{di_L}{dt} \end{cases} .$$

Comparar o modelo ideal (2.30) com o modelo obtido.

# 4

## TIPOS DE MODELOS

**Objectivo** *Distinguir classes de modelos: de entrada-saída, de estado, contínuos, discretos, dinâmicos, estáticos, lineares, não-lineares, de parâmetros variantes ou invariantes.*

Os modelos comportamentais podem classificar-se de acordo com diversos critérios não necessariamente exclusivos. Quanto à natureza, os modelos podem ser físicos, matemáticos ou computacionais. Os modelos matemáticos podem ainda dividir-se em experimentais e teóricos.

Um modelo *físico* de um sistema poderá ser exactamente um modelo *reduzido* do mesmo, reproduzindo em pequena escala algumas das suas características, ou um modelo *analógico* em que algumas das variáveis se comportam, exacta ou aproximadamente, como variáveis do sistema original. Assim, um circuito eléctrico composto de resistências e condensadores pode comportar-se, em termos de relação de tensões de entrada e saída, do mesmo modo que um sistema pneumático composto de válvulas e tubagens se comporta, em termos de pressões de alimentação e entrega. Diz-se então que o circuito eléctrico é um modelo analógico do sistema pneumático.

Um modelo *matemático teórico* de um sistema consistirá, no caso geral, numa equação ou num sistema de equações algébricas, diferenciais ou às diferenças em que se expressam as relações entre as variáveis do sistema. A relação entre fluxo e velocidade média de um fluído num tubo, por exemplo, é modelada por uma simples equação algébrica. A relação entre força e posição num sistema mecânico contendo inércia, atrito e elasticidade pode ser descrita por uma equação diferencial linear de segunda ordem de coeficientes constantes. Num

turbocompressor, no entanto, as relações entre volume de sucção e entrega e respectivas temperaturas necessitam de um sistema com cerca de 20 relações matemáticas mais ou menos complicadas, como equações diferenciais parciais não-lineares. Modelos matemáticos de sistemas constituídos por equações às diferenças aparecem naturalmente se a variável tempo for tomada como assumindo valores discretos no intervalo de interesse.

Um modelo *matemático experimental* consistirá, por exemplo, em registos simultâneos da evolução das variáveis de entrada e de saída de um sistema. Consideram-se tais registos um modelo matemático porque um modelo teórico deverá permitir explicar e prever a sua forma. Num sentido, um modelo matemático teórico e um modelo matemático experimental do mesmo sistema são equivalentes, pois, se o modelo matemático teórico for correcto, deve poder passar-se de um para o outro.

Um modelo *computacional* consistirá na realização em computador de um modelo matemático de um sistema. Usualmente, um modelo computacional será usado para *simular* o comportamento do sistema.

Os modelos matemáticos teóricos (e os seus parceiros computacionais) podem classificar-se de diferentes formas. Aqui abordaremos as seguintes classes: modelos externos (de entrada-saída) ou internos (de estado), contínuos ou discretos no tempo, estáticos ou dinâmicos, causais ou não causais, lineares ou não-lineares, invariantes ou variantes no tempo, de parâmetros concentrados ou distribuídos.

### **Modelos externos ou de entrada-saída**

Os modelos externos ou de entrada-saída relacionam a evolução de variáveis de entrada de um sistema com a evolução de variáveis de saída do mesmo.

Por *variável de entrada* entende-se uma variável cuja evolução é completamente determinada por causas exteriores ao sistema.

Uma *variável de saída* pode entender-se:

- Em *sentido lato* como qualquer variável que não é variável de entrada e que pode ser observada.
- Em *sentido estrito* como uma variável que não é variável de entrada e que afecta outros sistemas.

São usuais as seguintes classificações, com origem na língua inglesa:

SISO – modelo com 1 entrada e 1 saída (também dito monovariável ou escalar);

SIMO – modelo com 1 entrada e múltiplas saídas;

MISO – modelo com múltiplas entradas e 1 saída;

MIMO – modelo com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

### **Modelos internos ou de estado**

Um modelo interno ou de estado baseia-se na escolha de um conjunto de variáveis do

sistema a que se chamam *variáveis de estado*. O objectivo desta escolha é caracterizar completamente as possíveis situações em que o sistema se possa encontrar com recurso aos valores que as variáveis de estado assumem.

Num modelo de estado, a evolução das variáveis de estado é determinada por elas próprias e pelas variáveis de entrada.

As variáveis de saída de um modelo de estado são definidas a partir das variáveis de estado (podendo ser idênticas a estas) e das variáveis de entrada (se for necessário).

#### Exemplo 4-1 Modelos de entrada-saída e de estado para o circuito RLC

Veja-se o circuito na Figura 1-1. Considera-se  $v_i$  como variável de entrada e  $v_o$  como variável de saída. Então um modelo de entrada-saída é dado pela equação diferencial (2.8) que se rescreve aqui por comodidade:

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{LC} v_o = \frac{1}{LC} v_i. \quad (4.1)$$

Um modelo de estado para o mesmo circuito pode ser escrito considerando como variáveis de estado  $i_L$  e  $v_C$ , corrente na bobina e tensão no condensador, respectivamente. Porque  $v_C = v_o$ , então podemos escrever a partir de (2.7) as chamadas *equações de estado*:

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} v_C + \frac{1}{L} v_i \\ \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L - \frac{1}{RC} v_C \end{cases}. \quad (4.2)$$

Repare-se que este sistema de equações define as *derivadas em ordem ao tempo* das variáveis de estado, à custa das variáveis de estado e da variável de entrada.

Se considerarmos como variável de saída a tensão  $v_C$ , então a *equação de saída* escrever-se-á:

$$v_o = v_C. \quad (4.3)$$

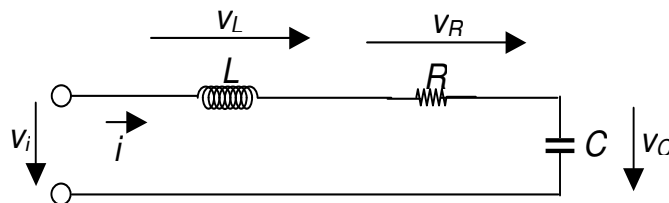
Poderíamos considerar como variável de saída não  $v_C$ , mas sim  $i_L$ . Ou poderíamos considerar ambas. Neste último caso teríamos um modelo SIMO.

Pode transformar-se um modelo de estado num modelo equivalente de entrada-saída. O modelo de estado definido pelas equações (4.2) e (4.3) pode ser transformado no modelo de entrada-saída (4.1). Transformações de modelos de entrada-saída em modelos de estado também são possíveis, mas não são únicas porque um modelo de entrada-saída pode ser transformado em mais do que um modelo de estado equivalente.

Tome-se em atenção que um modelo de entrada-saída do tipo SISO *não* é obrigatoriamente uma equação diferencial.

## Exercícios

- 4.1 O que é um modelo computacional de um sistema?
- 4.2 Como se entende uma variável de entrada de um sistema?
- 4.3 Como se pode entender uma variável de saída de um sistema?
- 4.4 Qual a diferença entre modelos internos e modelos externos?
- 4.5 Considere como sistema um automóvel (excluindo o condutor). Discuta se as seguintes duas variáveis do sistema, podem ser consideradas como variáveis de entrada à luz da definição dada para variável de entrada no texto:
- O ângulo de rotação do volante;
  - O ângulo de rotação do acelerador.
- 4.6 Que tipos de equações figuram num modelo de estado?
- 4.7 Considere o seguinte circuito eléctrico, entendido como um sistema:



Estabelecer um modelo de espaço de estados para este sistema nas seguintes condições:

- Considerar como variáveis de estado, a figurar nas *equações de estado*,  $i$  e  $v_C$ .
- Considerar 3 variáveis de saída:  $v_{o1} = v_C$ ;  $v_{o2} = v_R$ ;  $v_{o3} = v_L$ .
- As 3 equações de saída devem definir as variáveis de saída como funções de uma variável de estado ( $v_{o1}$  e  $v_{o2}$ ) ou das duas variáveis de estado e da variável de entrada ( $v_{o3}$ ).

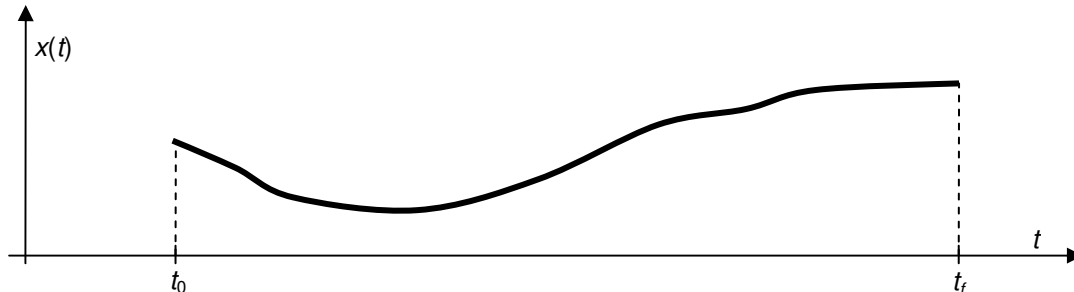
$$\begin{cases} \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} (-Ri - v_C + v_i) = -\frac{R}{L} i - \frac{1}{L} v_C + \frac{1}{L} v_i \end{cases}$$

- 4.8 A partir do modelo de espaço de estados simular o funcionamento do circuito em ScicosLab. Supor  $L = 1$  mH;  $R = 0.1$   $\Omega$ ;  $C = 1$   $\mu$ F. Visualizar as respostas  $i$  e  $v_C$  para uma entrada em degrau e para entradas em sinusóide com frequência compreendida entre 25000 e 35000 rad/s.

## O que é um modelo contínuo no tempo?

Um modelo é dito *contínuo no tempo*, ou simplesmente contínuo, se os valores das

variáveis do modelo estão definidos para qualquer<sup>1</sup> instante de tempo  $t$  num intervalo  $[t_0, t_f] \subseteq \mathbb{R}$ . Intuitivamente: se desenharmos o gráfico da evolução ao longo do intervalo de tempo de uma variável de um modelo contínuo, então não levantamos a caneta do papel.

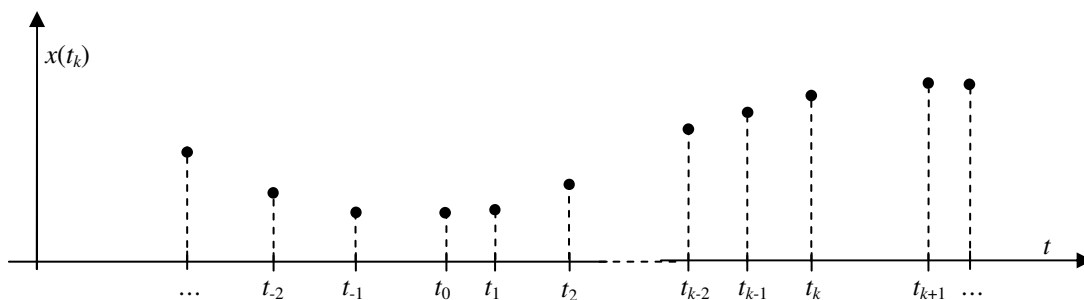


**Figura 4-1** Um modelo contínuo define a função representando a evolução de qualquer variável do modelo em qualquer instante de tempo no intervalo  $[t_0, t_f]$  em que o modelo se aplica.

Um modelo contínuo de um sistema é psicologicamente “natural”, porque usualmente *percebemos* a passagem do tempo como contínua. Os modelos contínuos são úteis e cómodos de aplicar para muitos sistemas. Todos os exemplos de modelos apresentados até agora são contínuos. Mas há que ter em atenção que há sistemas que são mais facilmente – ou mesmo necessariamente – descritos por modelos discretos.

### O que é um modelo discreto no tempo?

Um modelo discreto no tempo define os valores das variáveis do modelo apenas para uma sequência de instantes de tempo  $t_k = t_0, t_1, t_2, \dots$ . Em geral, considera-se que o índice  $k$  dos instantes de tempo pertence ao conjunto dos inteiros, ou seja  $k \in \mathbb{Z}$ .



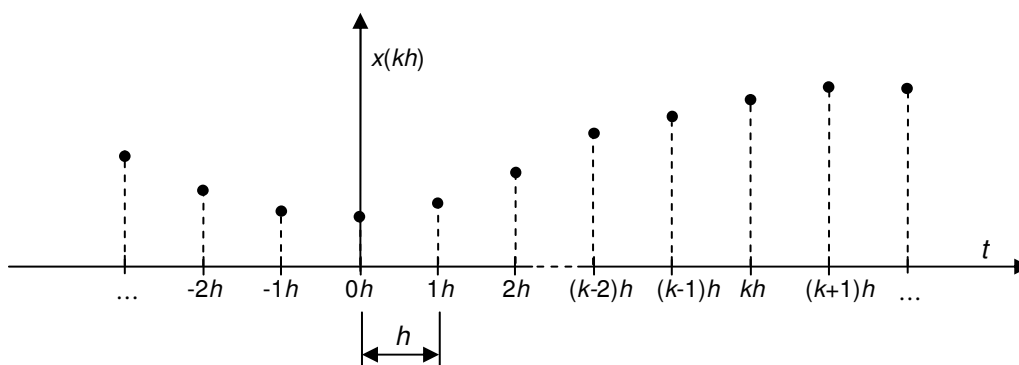
**Figura 4-2** Um modelo discreto define a função representando a evolução de qualquer variável do modelo apenas numa sequência de instantes de tempo.

<sup>1</sup> Tecnicamente: *para quase todos* os instantes de tempo.

Os modelos discretos de sistemas são usualmente estabelecidos supondo que o intervalo  $h$  entre dois instantes de tempo sucessivos é constante:

$$\forall k, t_{k+1} - t_k = h . \quad (4.4)$$

O valor de  $h$  e o seu inverso  $f_a = 1/h$  são chamados *período* e *frequência de amostragem*, respectivamente. A relação entre  $t_k$  e  $k$  vem dada por  $t_k = kh$ .



**Figura 4-3** Usualmente os modelos discretos são estabelecidos supondo um intervalo de tempo constante entre os instantes em que as variáveis estão definidas. A variável independente tempo é então expressa como  $kh$ .

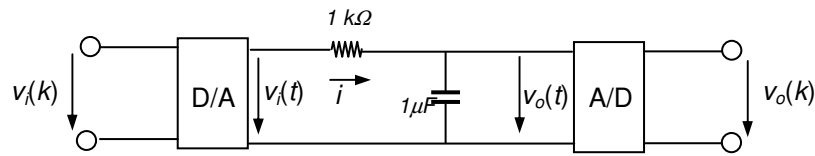
Nos modelos discretos no tempo, pode usar-se como variável independente o índice  $k$  dos instantes de tempo. Escreve-se então uma variável como  $x(k)$  em vez de escrever  $x(t_k)$ . Se os instantes de tempo estiverem espaçados de um intervalo de tempo  $h$ , então  $t_k - t_0 = kh$  e poderá haver também interesse em escrever  $x(kh)$  em vez de  $x(k)$ .

Os modelos discretos são de utilização natural para descrever o comportamento de sistemas digitais – como os sistemas computadorizados – ou sistemas que têm um princípio de operação pulsante. Um processo digital de medida de uma grandeza implica para a sua realização um tempo não-nulo. Logo num dado intervalo de tempo só se poderá dispor de um número finito de medidas, espaçadas entre si de um certo intervalo de tempo. Em tais situações, um modelo discreto é mais fácil de usar e compreender do que seria um modelo contínuo.

#### \*Exemplo 4-2 Modelo discreto de circuito RC com conversores D/A e A/D

Suponha-se que a partir do circuito RC do Exemplo 2-6 construíamos um circuito em que a tensão  $v_i$  seria imposta por uma fonte de tensão conversor digital-analógico (D/A) e a tensão  $v_o$  seria medida por um conversor A/D. Veja-se a Figura 4-4. As variáveis  $v_i(k)$  e  $v_o(k)$  são codificações digitais dos valores de tensão  $v_i$  a impor e  $v_o$  a medir, respectivamente.





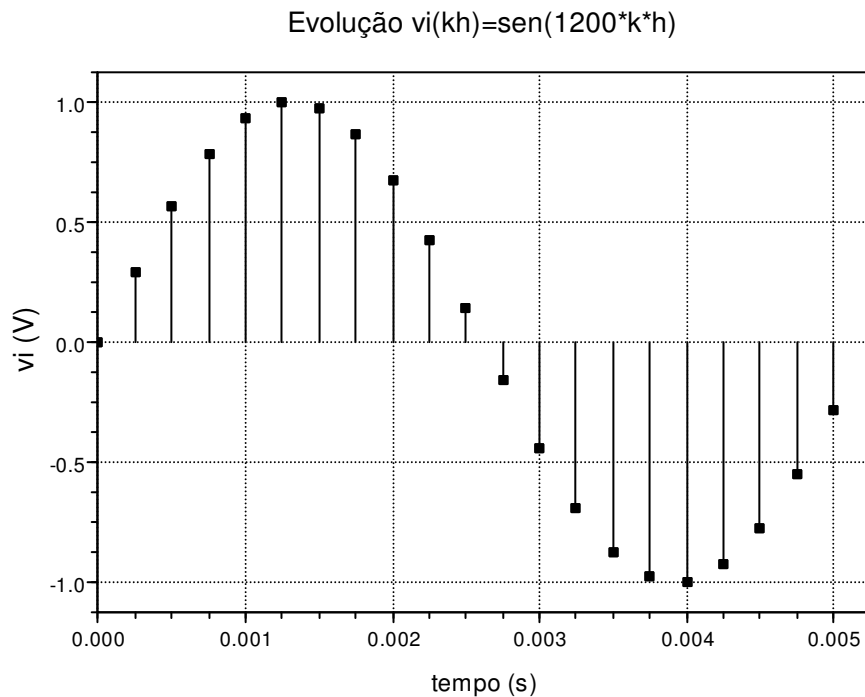
**Figura 4-4** Circuito RC com conversores D/A e A/D

O conversor D/A é actuado por um computador ou sistema digital (não representado na Figura 4-4). Nos instantes de tempo  $kh$  (e só nestes instantes) o computador envia para o conversor os valores  $v_i$  a impor (codificados digitalmente). Esta sequência de envios pode ser interpretada como o computador gerando uma evolução da variável  $v_i$  que só está definida para os instantes  $kh$ .

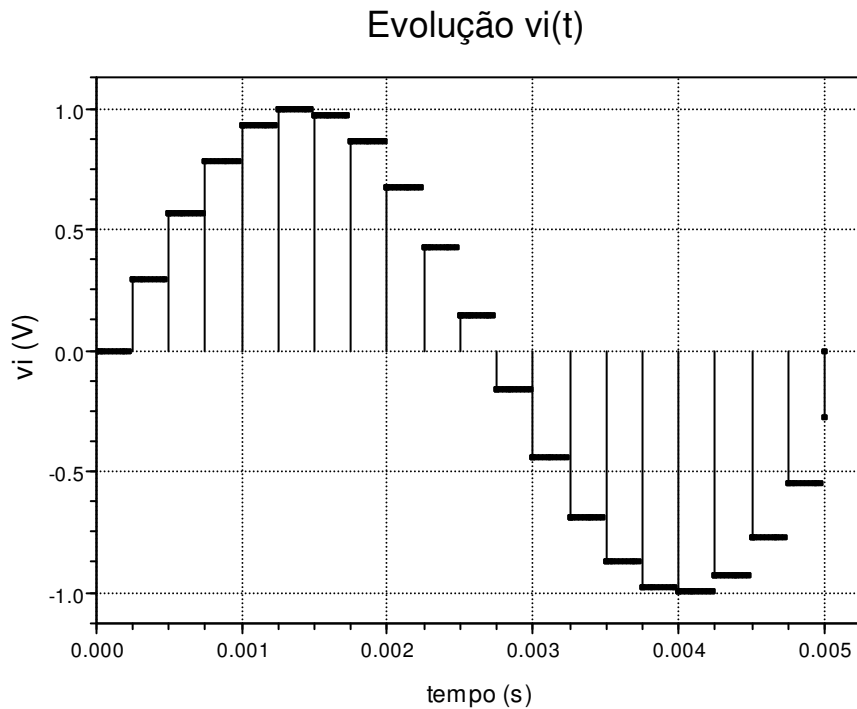
Suponhamos que  $0 \leq k \leq 20$ , que  $h = 0.00025$  e que  $v_i(kh) = \text{sen}(1200kh)$ . Então se representarmos  $v_i(kh)$  em gráfico, obtemos a evolução representada na Figura 4-5.

A operação do conversor D/A pode ser descrita idealmente da seguinte forma. No instante  $kh$  o conversor coloca na sua saída um valor analógico correspondente ao valor codificado digitalmente recebido na entrada. E mantém este valor no intervalo  $[kh, kh + h[$ . (Notar que o intervalo é aberto à direita.)

Então a evolução da variável  $v_i(t)$  pode ser descrita como uma “sequência de degraus”, o degrau que começa no instante  $kh$ , tendo “altura”  $v_i(kh)$ . O gráfico de  $v_i(t)$  correspondente ao  $v_i(kh)$  mostrado na figura acima representa-se na Figura 4-6.



**Figura 4-5** Exemplo de evolução de variável só definida para uma sequência de instantes  $kh$ .



**Figura 4-6** Exemplo de evolução de variável em degraus.

Consideremos agora a evolução de  $v_o(t)$  num qualquer intervalo  $[kh, kh+h]$ . Ela pode ser determinada considerando a origem do tempo no instante  $t = kh$ , isto é, substituindo o referencial de tempos  $t$  pelo referencial  $t' = t - kh$ . Então a evolução de  $v_o(t')$  no intervalo é a solução do modelo:

$$\frac{dv_o(t')}{dt} + \frac{1}{T} v_o(t') = \frac{1}{T} v_i(t') \quad (4.5)$$

Nesta equação é  $T = RC$ . Quando a entrada  $v_i(t')$  é constante e de valor  $v_{i0}$  e a condição inicial  $v_o(0) \neq 0$ . A solução tem por expressão geral:

$$v_o(t') = v_o(0)e^{-t'/T} + v_{i0}(1 - e^{-t'/T}) \quad (4.6)$$

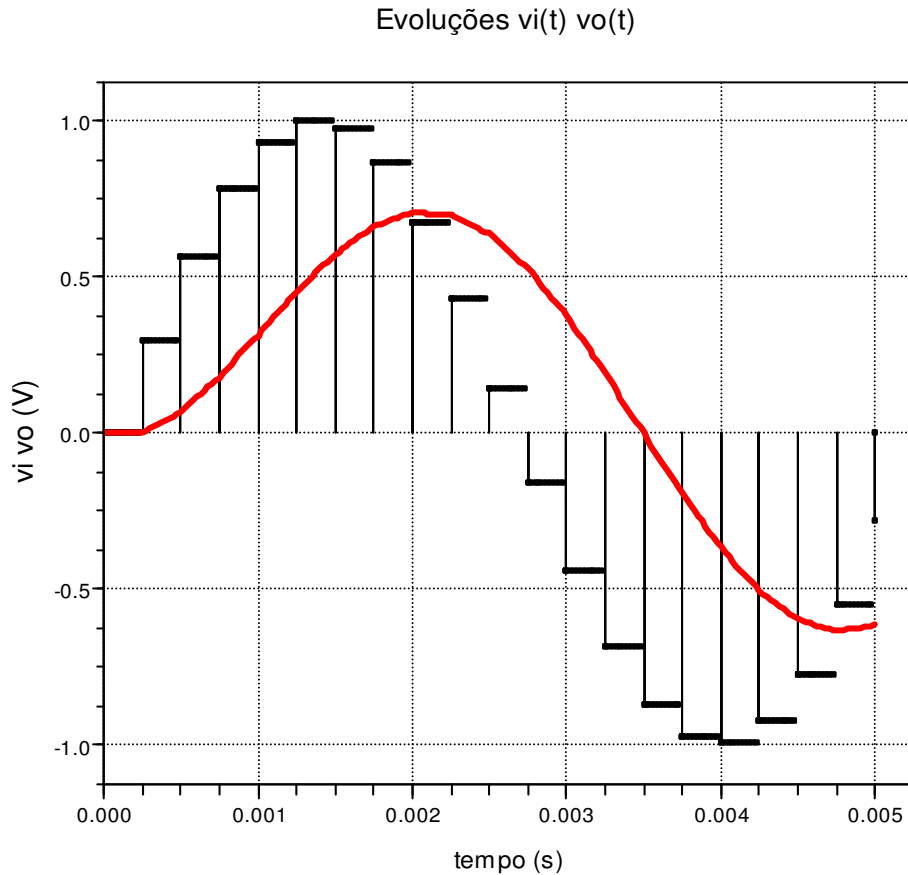
A mudança de referencial satisfaz  $v_o(0)_{\text{no referencial } t'} = v_o(kh)_{\text{no referencial } t}$  e  $v_{i0} = v_i(kh)$ . A consequência é que no referencial  $t$  se tem,  $t = kh + t'$ :

$$v_o(t) = v_o(kh + t') = v_o(kh)e^{-t'/T} + v_i(kh)(1 - e^{-t'/T}) \quad (4.7)$$

Exemplo: qual o valor de  $v_o$  para o instante 1.125 ms?

$$v_o(1.125) = v_o(1 + 0.125) = v_o(1)e^{-0.125/1} + v_i(1)(1 - e^{-0.125/1}) \quad (4.8)$$

Utilizando uma equação deste tipo pode determinar-se um número suficiente de instantes de tempo para se obter o traçado de  $v_o$  na Figura 4-7.



**Figura 4-7** Entrada em degraus e correspondente saída em tempo contínuo.

Esta equação reserva-nos uma surpresa para  $t' = h$ . Façamos esta substituição em (4.7). Vem:

$$v_o(kh+h) = v_o(kh)e^{-h/T} + v_i(kh)(1-e^{-h/T}) \quad (4.9)$$

É importante notar que  $e^{-h/T}$  e  $1-e^{-h/T}$  são as *constantes* correspondentes ao intervalo  $h$  entre amostras! No exemplo acima, têm os valores (a 4 decimais):

$$e^{-0,00025/0,001} = e^{-0,25} = 0.7788$$

$$1 - e^{-0,25} = 0.2212$$

Então, o que a equação (4.9) nos está a dizer é que em qualquer instante  $kh+h$ , os valores  $v_o$  a ler à saída do conversor A/D devem satisfazer a equação:

$$v_o(kh+h) = 0.7788 \cdot v_o(kh) + 0.2212 \cdot v_i(kh) \quad (4.10)$$

!!

A equação (4.10) é um modelo porque ela relaciona a sequência de valores  $v_i(kh)$  aplicada à entrada do conversor D/A, com a sequência de valores  $v_o(kh)$  lida à saída do conversor A/D, para um período de amostragem de  $h = 0.00025$  s, ou  $h = 0.25$  ms.

Um modelo discreto, pode, como um contínuo escrever-se de várias formas. Por exemplo, omitindo  $h$  e escrevendo os termos em  $v_o$  no membro esquerdo da equação podemos reescrever (4.10) na chamada forma canónica:

$$v_o(k+1) - 0.7788v_o(k) = 0.2212v_i(k) . \quad (4.11)$$

A equação (4.10) permite calcular os valores de  $v_o$  como um preditor do valor no próximo instante. Ela é equivalente à seguinte forma em que é gerado o valor para o instante presente:

$$v_o(k) = 0.7788 \cdot v_o(k-1) + 0.2212 \cdot v_i(k-1) . \quad (4.12)$$

O cálculo de previsões numéricas pode fazer-se usando quer (4.12), quer (4.10). Suponhamos a aplicação do sinal  $v_i(k)$  como na Figura 1-7, estando o condensador descarregado, logo  $v_o(0) = 0$ .

A previsão ou predição de  $v_o(k)$  para  $kh > 0$  pode ser determinada utilizando recursivamente a equação (4.12), da forma que a seguir se mostra de  $k = 1$  até  $k = 6$ .

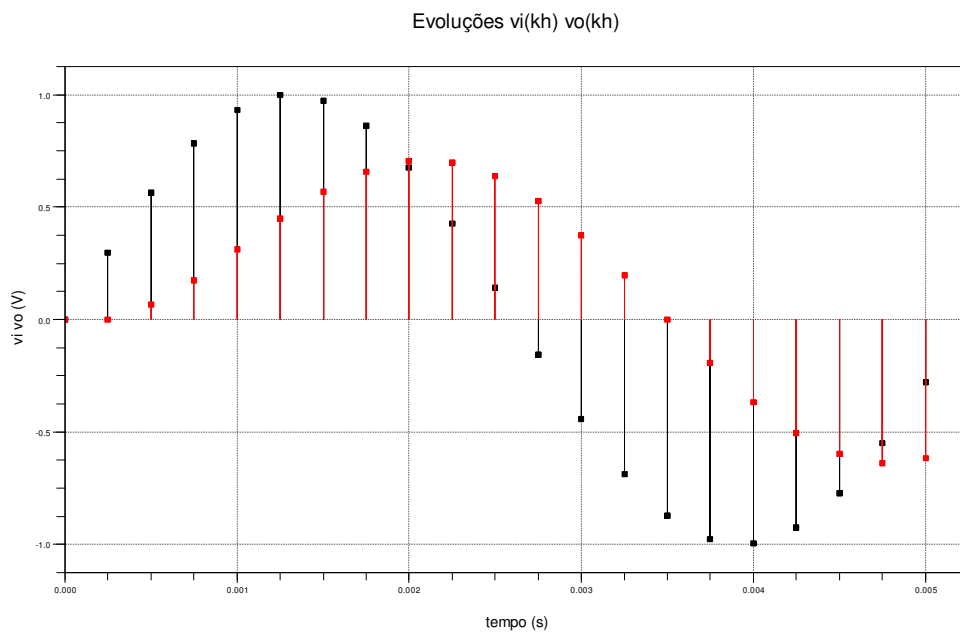
$t = kh \text{ (ms)}$	$k$	$v_i(k)$	$v_o(k) = 0.2212v_i(k-1) + 0.7788v_o(k-1) =$	$v_o(kh)$
0	0	0		0
0.25	1	0.2955	$v_o(1) = 0.2212v_i(0) + 0.7788v_o(0)$	0
0.5	2	0.5646	$v_o(2) = 0.2212v_i(1) + 0.7788v_o(1)$	0.07
0.75	3	0.7833	$v_o(3) = 0.2212v_i(2) + 0.7788v_o(2)$	0.18
1	4	0.9320	$v_o(4) = 0.2212v_i(3) + 0.7788v_o(3)$	0.31
1.25	5	0.9974	$v_o(5) = 0.2212v_i(4) + 0.7788v_o(4)$	0.45
1.5	6	0.9738	$v_o(6) = 0.2212v_i(5) + 0.7788v_o(5)$	0.57

A previsão de  $v_o(k)$  para  $kh > 0$  também poderia ser determinada de forma idêntica de  $k = 1$  até  $k = 6$ , como segue.

$t = kh \text{ (ms)}$	$k$	$v_i(k)$	$v_o(k+1) = 0.2212v_i(k) + 0.7788v_o(k) =$	$v_o(kh)$
0	0	0	$v_o(1) = 0.2212v_i(0) + 0.7788v_o(0)$	0
0.25	1	0.2955	$v_o(2) = 0.2212v_i(1) + 0.7788v_o(1)$	0
0.5	2	0.5646	$v_o(3) = 0.2212v_i(2) + 0.7788v_o(2)$	0.07
0.75	3	0.7833	$v_o(4) = 0.2212v_i(3) + 0.7788v_o(3)$	0.18

1	4	0.9320	$v_o(5) = 0.2212v_i(4) + 0.7788v_o(4)$	0.31
1.25	5	0.9974	$v_o(6) = 0.2212v_i(5) + 0.7788v_o(5)$	0.45
1.5	6	0.9738		0.57

O cálculo pode ser facilmente programado num computador digital de forma a gerar automaticamente a sequência  $v_o(k)$ . As evoluções em gráfico das sequências  $v_i(k)$  e  $v_o(k)$  apresentam-se na figura seguinte.



**Figura 4-8** Entrada e saída em tempo discreto.

Um sistema terá que ser descrito por modelos discretos *diferentes*, se  $h$  variar. Um modelo contínuo não depende de amostragem e nesse sentido é único. Ele é simultaneamente origem e limite de sequências de modelos discretos.

## Exercícios

**4.9** Realizar um programa para produzir o gráfico da Figura 4-5.

**4.10** Um tanque de água é deixado a esvaziar. A função que descreve a evolução do volume de água no

tanque é  $V(t) = V(0)e^{-\frac{t}{6400}} \leftarrow t \geq 0$  (volume em  $m^3$ , tempo em s). Determinar o período de amostragem que dá o seguinte modelo do esvaziamento, ou resposta livre, do tanque:

$$V(k+1) = 0.5V(k)$$

**4.11** Um depósito a prazo rende a taxa de juro  $r$  ao fim do período de tempo  $h$ . Os juros são incorporados

no capital e o depósito é renovado pelo novo valor. Determinar a evolução de  $x(k)$ , valor do capital em depósito em  $kh$ . Tem-se

$$x(k+1) = x(k) + rx(k) = (1+r)x(k)$$

Com  $x(0) = x_0$  a equação produz a solução  $x(k) = x_0(1+r)^k$ . Qual o tempo necessário para duplicar o capital  $x(0)$  à taxa de 0.05?

**4.12** Qual a evolução do número de peças  $y$  de um certo item em armazém? Para qualquer  $y(k)$  se tem que

$$y(k) = y(k-1) + u(k)$$

em que  $u(k)$  iguala a diferença entre as peças do item que entraram e as que saíram no período de  $k-1$  a  $k$ .

Representar em gráfico os valores de  $y(k)$  nas seguintes condições:

$$\begin{cases} y(0) = 0; \\ k \in [0, 6] \rightarrow u(k) = k. \end{cases}$$

**4.13** Um sistema é descrito pelo seguinte modelo:

$$y(k) - 0.5y(k-1) = u(k) - u(k-1).$$

Represente em gráfico a evolução de  $y(0)$  a  $y(5)$  nas seguintes condições:

$$\begin{cases} u(-1) = 0 \wedge y(0) = 0; \\ k \in [0, 4] \rightarrow u(k) = 1. \end{cases}$$

**4.14** Após nascer, um par de coelhos reproduz-se ao fim do período  $2h$ . A partir daí reproduz-se sempre ao fim do período  $h$ . Os coelhos são imortais. Determinar a evolução de  $y(k)$ , número de pares no instante  $kh$ , sendo que no instante 0 existe 1 par.

No instante  $k$  somar-se-ão aos pares existentes no instante  $k-1$ , um número de pares igual aos existentes em  $k-2$ . Portanto:

$$y(k) = y(k-1) + y(k-2)$$

Ou

$$y(k+2) - y(k+1) - y(k) = 0$$

A solução é conhecida como a série de Fibonacci.

Determinar os 8 primeiros valores da série.

**4.15** Para a simulação de modelos em tempo discreto utiliza-se um bloco que realiza a seguinte operação no tempo (atraso unitário em tempo discreto):

$$y(kh) = q^{-1}[u(kh)] = u(kh-h) \quad (4.13)$$

A saída é igual à entrada, mas atrasada de um período de amostragem  $h$ . O bloco é usualmente designado por  $z^{-1}$  ou  $1/z$  nos ambientes de simulação gráfica.

Simular em ScicosLab:

- a) O filtro ‘passa-baixo digital da equação (4.10)
- b) Os “coelhos imortais”
- c) A equação logística

**4.16** \*Suponha-se que se pretende aproximar com um sistema discreto a derivada de uma variável  $u(t)$  num instante  $kh$ . Supondo que a derivada de  $u(t)$  existe em todo o intervalo  $[kh-h, kh+h]$ , a sua derivada para  $t = kh$  pode definir-se por:

$$\frac{du(kh)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(kh+h) - u(kh-h)}{2h}.$$

Há várias possibilidades para realizar a aproximação. Um modelo causal aproximará por

$$\frac{du(kh)}{dt} \approx y(kh) = \frac{u(kh) - u(kh-h)}{h}.$$

Escrever as equações para o cálculo de  $y(k)$  e de  $y(k+1)$ .

**4.17** \*Um modelo não-causal do derivador pode ser mais sofisticado:

$$\frac{du(kh)}{dt} \approx y(kh) = \frac{\frac{1}{h}(u(kh+h) - u(kh)) + \frac{1}{h}(u(kh) - u(kh-h))}{2}.$$

Escrever o modelo na forma de cálculo de  $y(k)$ .

**4.18** \*Suponha-se que se pretende aproximar com um modelo discreto o integral de uma variável  $u(t)$  num intervalo  $[0, kh]$ . Também se pode fazer de diversas formas. Por exemplo a chamada aproximação de Tustin:

$$\int_0^{kh} u(t) dt \approx \sum_{i=1}^k \frac{u(i) + u(i-1)}{2} h = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^k [u(i) + u(i-1)],$$

Escrever o modelo discreto do integrador na forma recursiva de cálculo de  $y(k)$  e na forma canónica.

## Modelos estáticos e modelos dinâmicos

Num *modelo ou relação estática*, o valor da variável (considerada) de saída num instante  $t$  é expresso como uma função do valor da variável de entrada *no mesmo instante*<sup>2</sup>:

$$y(t) = f(u(t)) \quad (4.14)$$

### Exemplo 4-3 Corrente e tensão numa resistência.

A relação entre corrente  $i$  e tensão  $v$  numa resistência de valor  $R$  dada pela lei de Ohm é  $v = Ri$ . Este

---

<sup>2</sup> Por esta razão, um modelo estático também é dito “sem memória”.

modelo é um caso particular de (4.14).

Note-se que num modelo estático, para cada valor da variável de entrada, a variável de saída só pode apresentar um (e só um) valor.

Num *modelo ou relação dinâmica*, o valor da variável (considerada) de saída num instante  $t$  depende de valores da variável de entrada ou dela própria *em outros instantes de tempo (passados ou futuros)*.

#### Exemplo 4-3 Modelo de entrada-saída do circuito RC

O modelo de circuito RC do Exemplo 2-6 é um modelo dinâmico. Com efeito podemos reescrever a equação (2.12)

$$RC \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = v_i(t)$$

na forma

$$\frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{1}{RC} (v_i(t) - v_o(t)).$$

Se integrarmos ambos os membros da equação entre o instante 0 e o instante  $t$ , obtém-se<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dv_o(\tau)}{d\tau} d\tau &= \int_0^t \frac{1}{RC} (v_i(\tau) - v_o(\tau)) d\tau \\ v_o(t) - v_o(0) &= \frac{1}{RC} \int_0^t (v_i(\tau) - v_o(\tau)) d\tau \\ v_o(t) &= \frac{1}{RC} \int_0^t (v_i(\tau) - v_o(\tau)) d\tau + v_o(0) \end{aligned}$$

A última equação mostra que o valor de  $v_o$  no instante  $t$  dependerá dos valores de  $v_i$  no intervalo de tempo  $[0, t]$  – bem como do valor inicial de  $v_o$ .

Note-se que num modelo dinâmico, a variável de saída pode apresentar mais do que um valor para cada valor da variável de entrada. Esta observação permite responder à pergunta seguinte.

#### Quando é que um sistema *admite* um modelo estático?

Um sistema admite um modelo estático, se *nas condições de observação de interesse* apresentar um valor constante da variável de saída para cada valor constante da variável de entrada.

---

<sup>3</sup> Como a variável  $t$  designa o instante *final* do intervalo de integração, necessitamos de usar outra variável para referir os instantes do intervalo –  $[0, t]$  – e usaremos  $\tau$  para tal.

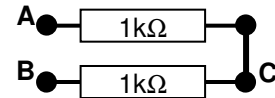


### Quando é que um sistema *requer* um modelo dinâmico?

Um sistema requer um modelo dinâmico, se *nas condições de observação de interesse* apresentar valores diferentes da variável de saída para cada valor constante da variável de entrada.

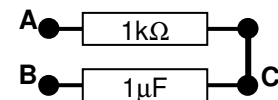
#### Exemplo 4-4 Circuito divisor de tensão com duas resistências

Considere-se um circuito divisor de tensão representado esquematicamente na figura. Considerando a tensão  $v_{CB}$  como de saída e  $v_{AB}$  como de entrada, escreveremos  $v_{CB} = 0,5 v_{AB}$ . Conseguir-se imaginar uma situação em que este modelo estático não esteja de acordo com as observações e deva ser substituído por um modelo dinâmico? Sim, se o circuito estiver submetido a sinais de frequência suficientemente elevada para que a indutância parasita dos componentes resistivos seja significativa!



#### Exemplo 4-5 Circuito com resistência e condensador

A relação entre as tensões  $v_{CB}$  e  $v_{AB}$  num circuito com uma resistência e um condensador como representado na figura, é expressa por um modelo dinâmico como se mostrou no Exemplo 2-6.



Suponha-se que se aplica a este circuito em  $v_{AB}$  uma onda rectangular de frequência 1 Hz. Do Exemplo 2-7 e do Exemplo 2-8, pode deduzir-se que o tempo necessário para a tensão no condensador,  $v_{CB}$ , se tornar igual, a menos de 2%, à tensão de entrada (quando esta muda de valor) é de 4 ms.

Porque a frequência da tensão de entrada é de 1 Hz, o seu período é de 1 s. Então, em cada segundo, a tensão de entrada muda de valor 2 vezes, mantendo-se constante em cada valor durante 500 ms.

Segue-se que, em cada período, a tensão no condensador é igual à tensão de entrada durante  $1000 - (2 \cdot 4) = 992$  ms, ou seja mais de 99 % do tempo. Nestas condições, fará sentido usar o modelo estático:  $v_{CB} = v_{AB}$  !

### Submodelos estáticos

Modelos estáticos e modelos dinâmicos têm definições exclusivas. Um modelo ou é estático ou é dinâmico, mas não os dois. No entanto, certos modelos dinâmicos apresentam um subconjunto estático de componentes. Outros não.

#### Exemplo 4-6 Submodelo estático de um circuito RC

O modelo de circuito RC

$$RC \frac{dv_o}{dt} + v_o = v_i$$

tem por submodelo estático

$$v_o = v_i .$$

Este modelo é válido se

$$\frac{dv_o}{dt} = 0.$$

Um submodelo estático informa-nos sobre o comportamento do sistema quando as derivadas da saída são 0.

#### Exemplo 4-7 Modelo dinâmico sem submodelo estático

O modelo de um integrador

$$\frac{dy}{dt} = u$$

não tem submodelo estático. Quando

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

a saída  $y$  pode ser qualquer. A partir de  $u$  nada se pode dizer sobre o valor da saída.

#### Exemplo 4-8 Submodelo estático implícito

Um derivador ideal tem por modelo

$$y = \frac{du}{dt}.$$

Quando

$$\frac{du}{dt} = 0$$

a saída  $y$  é 0, qualquer que seja o valor de  $u$ . Podemos então escrever

$$y = 0 \cdot u$$

o que constitui um submodelo estático implícito.

### Modelos causais e modelos não-causais

Num *modelo causal*, a saída depende apenas do valor presente ou de valores passados da entrada. Num *modelo não-causal* a saída depende de valores futuros da entrada.

#### Exemplo 4-9 Modelo discreto não causal

A seguinte equação configura um modelo não-causal:

$$y(k) = u(k) + u(k+1) - y(k-1). \quad (4.15)$$

A saída  $y$  no instante  $k$  depende do valor da entrada  $u$  no instante futuro  $k+1$ .

A questão de um modelo ser ou não causal é importante, porque num modelo não-causal o valor da variável de saída depende de valores futuros da variável de entrada (e

eventualmente de si própria). Ninguém sabe como construir sistemas dos quais se possa dizer que o valor de uma variável no instante presente depende do valor futuro de outra variável, se não se conhecer no presente quais os valores futuros dessa outra variável. Por tal pensa-se usualmente em modelos causais para a realização de sistemas.

Este facto não torna os modelos não-causais desinteressantes. Muitos modelos não-causais podem ser aproximados por um modelo causal. Se a aproximação for aceitável, a utilização de modelos não-causais pode muitas vezes simplificar a análise e síntese. É o caso do circuito derivador. Modelos não-causais também são conceptualmente úteis em sistemas de processamento *off-line*, em que se conhecem os valores futuros<sup>4</sup> de variáveis, como na reprodução ou processamento de música ou imagens.

### Modelos lineares e não-lineares

Nos modelos lineares são válidos os chamados *princípios da sobreposição* e da *homogeneidade*.

Para se compreender o princípio da sobreposição vamos considerar a seguinte experiência imaginária, a realizar com um modelo SISO com entrada  $u$  e saída  $y$  seguindo os seguintes passos.

- a) Imagina-se que  $u$  evolui de uma certa forma ao longo do tempo. Descreveremos a evolução de  $u$  como uma função  $u_1(t)$ . Determina-se a previsão da evolução da saída  $y$  dada pelo modelo e observa-se que esta é descrita por uma função  $y_1(t)$ .
- b) Em seguida, imagina-se que  $u$  evolui de uma outra forma ao longo do tempo que descreveremos como uma função  $u_2(t)$ . Determina-se a previsão da evolução da saída  $y$  dada pelo modelo e observa-se que esta é descrita por uma função  $y_2(t)$ .
- c) Por fim, imagina-se que  $u$  evolui de uma forma ao longo do tempo que seja descrita pela função  $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$ . Determina-se a previsão da evolução da saída  $y$  dada pelo modelo e observa-se que esta é descrita por uma função  $y_3(t)$ .

Então se  $y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$ , o princípio da sobreposição não é válido no sistema.

Por outro lado se  $y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$ , *quaisquer que sejam*  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ , então o princípio da sobreposição é válido. Isto significa que a resposta do sistema a uma evolução da entrada é a soma das respostas a cada parcela em que a evolução da entrada se pode decompor.

O princípio da sobreposição tem grande importância prática porque se um sistema aceita um modelo linear, então a resposta do sistema  $y(t)$  a uma qualquer evolução da entrada  $u(t)$  é

---

<sup>4</sup> Conhecem-se os valores futuros no sentido de que são valores posteriores aos que estão a ser processados num certo instante (foram registados depois). Não no sentido de que se consegue “adivinhar” com absoluta certeza quais vão ser esses valores.

a soma das respostas  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  a qualquer conjunto de evoluções de entradas  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  que constitua uma decomposição em parcelas de  $u(t)$ .

O princípio da homogeneidade enuncia-se mais facilmente. Suponha-se que para uma evolução da entrada (ou sinal de entrada)  $u_1(t)$  o modelo prevê uma evolução da saída (ou sinal de saída)  $y_1(t)$ . Se o princípio da homogeneidade for válido no sistema, então a sua resposta a um sinal de entrada  $u_3(t) = \lambda_1 u_1(t)$ , em que  $\lambda_1$  é uma constante, será  $y_3(t) = \lambda_1 y_1(t)$ , qualquer que seja a constante  $\lambda_1$ .

O princípio da homogeneidade tem grande importância prática porque ele significa que se um sistema aceita um modelo linear, então reage a variações da amplitude dos sinais de entrada, variando na mesma proporção a amplitude dos sinais de saída.

A linearidade de um modelo SISO pode definir-se combinando os princípios de sobreposição e homogeneidade.

**Definição 4.1** Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  constantes. Suponha-se que num modelo se tem que a evolução entrada  $u_1(t)$  provoca a saída  $y_1(t)$  e a evolução da entrada  $u_2(t)$  provoca a saída  $y_2(t)$ .

O modelo será *linear* se e só se:

$\forall u_1 \forall u_2 \forall \lambda_1 \forall \lambda_2$  a entrada  $u_3(t) = \lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t)$  provoca a saída  $y_3(t) = \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$ .

Um modelo será não-linear se não for linear.

Os modelos lineares são de grande importância porque podem ser caracterizados matematicamente de uma forma simples e poderosa e porque são aplicáveis na descrição de muitos sistemas.

O processo geral de determinação da linearidade de modelos ilustra-se a seguir com 2 exemplos.

**Exemplo 4-10 Determinação da linearidade do modelo  $y(t) = u'(t)$**

Suponha-se o modelo

$$y(t) = \frac{du(t)}{dt}.$$

Este modelo diz-nos simplesmente que a evolução da variável de saída é a derivada da evolução da variável de entrada. O modelo é linear ou não?

Suponhamos que a evolução da variável de entrada é uma certa função  $u_1(t)$ . Então a saída é:

$$y_1(t) = \frac{du_1(t)}{dt}$$

Suponhamos agora que a evolução da variável de entrada é uma outra função  $u_2(t)$ . Então a saída é:

$$y_2(t) = \frac{du_2(t)}{dt}$$

Para uma entrada  $u_3(t) = \lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t)$  a saída será:

$$y_3(t) = \frac{du_3(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[\lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t)]$$

Investiguemos agora se o modelo é linear ou não. Porque a derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas das parcelas, tem-se que:

$$y_3(t) = \frac{d}{dt}[\lambda_1 u_1(t)] + \frac{d}{dt}[\lambda_2 u_2(t)]$$

Também porque a derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função, tem-se que:

$$y_3(t) = \lambda_1 \frac{du_1(t)}{dt} + \lambda_2 \frac{du_2(t)}{dt}$$

Ou seja:

$$y_3(t) = \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$$

Donde se conclui que o modelo é linear.

#### Exemplo 4-11 Determinação da linearidade do modelo $y(t) = u^2(t)$

Suponha-se o modelo

$$y(t) = u^2(t) .$$

Este modelo diz-nos simplesmente que, em cada instante<sup>5</sup>, a variável de saída é igual ao quadrado do valor da variável de entrada. O modelo é linear ou não?

Suponhamos que a evolução da variável de entrada é uma certa função  $u_1(t)$ . Então a saída é:

$$y_1(t) = u_1^2(t)$$

Suponhamos agora que a evolução da variável de entrada é uma outra função  $u_2(t)$ . Então a saída é:

$$y_2(t) = u_2^2(t)$$

Para uma entrada  $u_3(t) = \lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t)$  a saída será:

$$y_3(t) = u_3^2(t) = [\lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t)]^2$$

Investiguemos agora se o modelo é linear ou não. Desenvolvendo a expressão quadrática, obtém-se:

$$y_3(t) = [\lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t)]^2 = \lambda_1^2 u_1^2(t) + 2\lambda_1 \lambda_2 u_1(t) u_2(t) + \lambda_2^2 u_2^2(t)$$

Ou seja:

$$y_3(t) \neq \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$$

<sup>5</sup> O modelo é estático.

Donde se conclui que o modelo *não* é linear.

A aplicação de um modelo linear para a descrição de um sistema terá que ter em conta o seu domínio de validade. Com isto quer dizer-se que, em geral, um modelo linear só é válido, só dá uma boa descrição do comportamento de um sistema, numa certa zona de funcionamento deste. Muitas vezes um modelo linear é construído a partir de um modelo não-linear.

**\*Exemplo 4-12 Modelos não-linear e linear de um pêndulo sem atrito.**

Consideremos um pêndulo rígido de massa  $M$  e comprimento  $L$ . Supõe-se que o pêndulo é ideal: não tem atrito e a sua haste tem massa nula.

A origem da medida do deslocamento angular  $\theta$  é a posição de equilíbrio. O pêndulo está apenas sujeito à aceleração da gravidade de valor  $g$ . Podemos, no entanto, deslocá-lo de um ângulo inicial  $\theta(0)$  e deixá-lo evoluir livremente a partir dessa situação.

Nestas condições o comportamento do pêndulo é descrito pela equação diferencial (homogénea):

$$J\ddot{\theta} + MgL \sin \theta = 0. \quad (4.16)$$

Em (4.16)  $J = ML^2$  é o momento de inércia do pêndulo referido ao seu eixo de oscilação. O modelo dado por esta equação é não-linear, devido à presença do termo em seno, e é válido para qualquer deslocamento angular  $\theta$ . No entanto, se estivermos interessados apenas em pequenos deslocamentos, podemos *linearizar* (4.16) à volta de  $\theta = 0$ , de forma a obter-se o modelo linear (usualmente usado no intervalo  $-0.1 \text{ rad} < \theta < +0.1 \text{ rad}$ ):

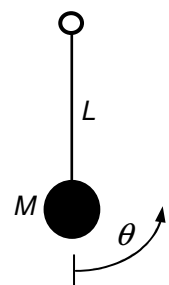
$$J\ddot{\theta} + MgL\theta = 0. \quad (4.17)$$

Tendo isto em mente, os modelos lineares revelam-se de grande utilidade e de aplicação muito geral.

### Modelos invariantes e variantes no tempo

Há sistemas que pela sua natureza e características implicam que os parâmetros dos modelos que os representam mudem de valor ao longo do tempo. Por exemplo, a massa total de um veículo de corrida diminui ao longo de uma prova, como resultado do consumo de combustível, e esta diminuição tem efeitos evidentes no comportamento do veículo. Para descrever sistemas em que a variação dos parâmetros afecta significativamente o comportamento dos mesmos, usam-se então modelos *variantes no tempo*.

Inversamente, modelos *invariantes no tempo* são aqueles em que os valores dos parâmetros são constantes ao longo do intervalo de tempo em que se estuda o comportamento



dos sistemas que os modelos descrevem. Modelos *variantes no tempo* podem ser lineares, desde que a variação dos parâmetros não esteja correlacionada com a variação das variáveis.

### \*Modelos de parâmetros concentrados e de parâmetros distribuídos

Os modelos a abordar neste texto são também ditos de *parâmetros concentrados*. Ao contrário de um modelo de parâmetros concentrados, um modelo de *parâmetros distribuídos* descreve o comportamento de um sistema não apenas com variáveis cujo valor depende das dimensões tempo e espaço, mas também com parâmetros cujo valor pode mudar ao longo das dimensões espaciais.

### Exercícios

- 4.19** Considerar o modelo  $y(t) = \int_0^t u^2(\tau) d\tau$ , em que  $y$  é variável de saída e  $u$  é variável de entrada. Dizer se o modelo é estático ou dinâmico.
- 4.20** Considerar o modelo de um amplificador exponencial  $v_o(t) = e^{v_i(t)} - 1$ , válido no intervalo  $0 \leq v_i \leq 2$ , em que  $v_o$  é a tensão de saída e  $v_i$  é a tensão de entrada. Dizer se ele é estático ou dinâmico.
- 4.21** Simular em Scilab o modelo do problema anterior. Comparar a resposta a um degrau deste modelo com a resposta de um circuito RC.
- 4.22** Mostrar que o modelo  $y(t) = \frac{du(t)}{dt}$ , em que  $y$  é variável de saída e  $u$  é variável de entrada, é não-causal.
- 4.23** Usando o ScicosLab e o modelo de circuito RC passa-baixo mostrar que este é linear. Ou seja, mostrar que a resposta à soma de duas entradas (por exemplo, degrau e uma sinusóide) é igual à soma das respostas a cada uma das entradas.
- 4.24** Mostrar que o modelo estático  $y(t) = bu(t) + b_0$  ( $b$  e  $b_0$ , constantes) é não-linear.
- 4.25** Mostrar que o modelo  $y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$ , em que  $y$  é variável de saída e  $u$  é variável de entrada, é linear e causal.
- 4.26** Mostrar que o modelo  $y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau + y(0)$ , em que  $y$  é variável de saída e  $u$  é variável de entrada, é não-linear se  $y(0) \neq 0$ .
- 4.27** Mostrar que o modelo  $y(t) = u(t - T_a)$  é dinâmico, linear e causal.
- 4.28** Considerar o modelo de um amplificador exponencial  $v_o(t) = e^{v_i(t)} - 1$ , válido no intervalo  $0 \leq v_i \leq 2$ , em que  $v_o$  é a tensão de saída e  $v_i$  é a tensão de entrada. Dizer se ele é linear ou não-linear.

**4.29** Classificar os seguintes modelos de acordo com a sua variância / invariância no tempo.

a)  $y'(t) + 5y(t) = 2u(t)$

b)  $y(k+1) + (4e^{-0.1k} + 1)y(k) = 2u(k)$

c)  $y'(t) + [5u(t)]y(t) = 2u(t)$

d)  $y(t) = [2\sin(t)]u(t)$



# 5

## PREVISÃO DO COMPORTAMENTO DE MODELOS LIT NO DOMÍNIO $s$

**Objectivos** *Modelos LIT no domínio  $s$ . Transformada de Laplace. Modelo LIT SISO de ordem  $n$ . Problema da previsão do comportamento do sistema representado pelo modelo. Conceito de resposta livre. Resposta forçada e função de transferência. Resposta total. Pólos e zeros. Diagramas de blocos no domínio  $s$  e sua álgebra.*

Os modelos lineares e invariantes no tempo (LIT) são de particular interesse devido à sua simplicidade e grande domínio de aplicação. O conjunto de evoluções de variáveis (que os modelos LIT podem gerar) é a composição de funções de uma só classe. A análise da influência dos parâmetros no comportamento de um modelo LIT é particularmente simples. A composição de dois modelos LIT é ainda um modelo LIT com a mesma estrutura, ou seja, a representação de modelos LIT é uniforme, o que, em particular, facilita a sua simulação. Por fim, é possível tornar a análise dos modelos LIT numa *álgebra* no domínio da variável complexa  $s$ .

Para tal, e a partir dos modelos LIT em tempo contínuo – equações diferenciais – apresentados no capítulo anterior, constroem-se *modelos no domínio da variável complexa  $s$* .

A ideia na base da construção e utilização dos modelos no domínio  $s$  é a representação das possíveis evoluções das variáveis de um modelo,  $u(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ , pelas suas correspondentes transformadas de Laplace,  $U(s)$ ,  $X(s)$ ,  $Y(s)$ . A álgebra referida resulta das notáveis propriedades desta transformada, que permite substituir uma equação diferencial por uma igualdade envolvendo funções complexas de variável complexa.

## 5.1 Previsão do comportamento

A construção de um modelo no domínio  $s$  a partir de uma equação diferencial – dita no domínio  $t$  – está intimamente ligada com a solução do problema de previsão do comportamento. A correspondência entre um modelo no domínio  $t$  e um modelo no domínio  $s$  é estabelecida pela transformada de Laplace. Esta pode ser considerada como um operador, uma entidade matemática que associa univocamente a uma função uma outra função. Mas enquanto um operador temporal associa a uma função do tempo outra função do tempo, por exemplo, o operador derivada:

$$\frac{d}{dt} : f(t) \mapsto \frac{df(t)}{dt}, \quad (5.1)$$

a transformada de Laplace  $\mathcal{L}$  associa a uma função do tempo uma função complexa de variável complexa:

$$\mathcal{L} : f(t) \mapsto F(s) \quad (5.2)$$

Assim, começamos por estudar como obter a transformada de Laplace,  $F(s)$ , de uma função do tempo,  $f(t)$ .

### 5.1.1 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace *à direita*<sup>1</sup> de uma função  $f(t)$  é *definida* pelo integral seguinte, em que  $s$  é a variável complexa:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (5.3)$$

Restringiremos a aplicação da transformada de Laplace a funções causais do tempo, isto é, a funções que satisfazem

$$\forall t < 0, f(t) = 0. \quad (5.4)$$

Se o integral em (5.3) *converge* para alguma região do plano  $s$ , então a transformada de Laplace *existe* e é uma função complexa de variável complexa  $F(s)$ :

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s).$$

---

<sup>1</sup> Diz-se transformada de Laplace *à direita*, por os limites de integração serem 0 e  $\infty$ . A transformada de Laplace *bilateral* tem por limites de integração  $-\infty$  e  $+\infty$ . Limitando-nos a funções causais, as duas definições são idênticas.

**Exemplo 5-1 Transformada do degrau unitário**

A função impulso de Heaviside ou degrau unitário  $h(t)$  define-se por

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Aplicando (5.3):

$$\mathcal{L}(h(t)) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s} (0 - e^{-s \cdot 0}) = \frac{1}{s} \quad (5.6)$$

Este integral converge para a região do plano  $s$ , tal que  $\text{Re}(s) > 0$ . Calculemos alguns valores (aproximados) desta função na *região de convergência*, para obtermos alguma sensibilidade para a sua forma.

$s$	$0.1 + j2$	$0.1 + j$	$0.1 + j0.5$	2	1	0.5	$0.1 - j2$	$0.1 - j$	$0.1 - j0.5$
$1/s$	$0.025 - j0.5$	$0.1 - j$	$0.004 - j2$	0.5	1	2	$0.025 + j$	$0.1 + j$	$0.002 + j$

**Determinação da transformada de Laplace de uma função  $f(t)$** 

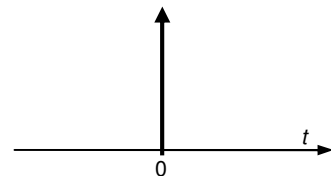
No contexto de utilização dos modelos LIT, a obtenção da transformada de Laplace de uma função arbitrária  $f(t)$  só raramente usa a definição (5.3). De facto, só precisamos de dois tipos de funções. O primeiro tipo só tem uma função: o impulso de Dirac,  $\delta(t)$ .

O impulso de Dirac pode ser visto como uma idealização da transmissão *instantânea* (num intervalo de tempo de duração 0) de uma quantidade finita de energia (o que implica uma potência infinita aplicada num instante de tempo). Matematicamente o impulso de Dirac pode definir-se por

$$\begin{cases} \forall t \neq 0, \delta(t) = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (5.7)$$

O valor de  $\delta(t)$  é nulo se  $t \neq 0$ . O seu valor em  $t = 0$  é tal que o integral de  $-\infty$  a  $+\infty$  soma 1. Intuitivamente, o valor de  $\delta(0)$  é infinito. A representação gráfica do impulso de Dirac costuma ser feita por uma seta vertical, situada no instante de aplicação, como na Figura 5-1.

**Figura 5-1** Representação gráfica do impulso de Dirac



Um impulso de Dirac pode ser aproximado de muitas formas. Por exemplo, por um impulso  $i(t)$  de largura  $h$  e amplitude  $A$ , com  $A \cdot h = 1$ :

$$i(t) = \begin{cases} A, & \text{para } t \in [0, h[ \\ 0, & \text{para } t \notin [0, h[ \end{cases} \quad (5.8)$$

A aproximação será tanto melhor, quanto menor for o intervalo de tempo  $h$ .

A transformada de Laplace do impulso de Dirac é a função que associa a todos os números complexos o número complexo  $(1, 0)$ . Usualmente escreve-se como:

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \quad (5.9)$$

O segundo tipo de funções, que usualmente se usa no contexto de modelos LIT, tem um número infinito de funções. São todas as funções que se podem obter como *somas pesadas*<sup>2</sup> de algum caso concreto da seguinte expressão geral:

$$b(t) = \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{s_i t} \quad \text{com} \quad \begin{cases} m = 1, 2, \dots \\ s_i \in \mathbb{C} \\ t < 0 \rightarrow b(t) = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Em  $b(t)$ ,  $m$  é uma variável sobre os naturais,  $s_i$  é um valor complexo,  $s_i = \sigma_i + j\omega_i = r_i e^{j\theta_i}$ . A última condição em (5.10) é necessária para garantirmos que  $b(t)$  é uma função causal.

Se  $s_i \in \mathbb{R}$ ,  $b(t)$  é uma função real do tempo. Seja  $m = 1$ ,  $s_i = \sigma_i$ . Então a expressão em (5.10) fica

$$b(t) = \begin{cases} e^{\sigma_i t}, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

A expressão de  $b(t)$  em (5.11) pode representar:

- i) exponenciais crescentes para  $t \geq 0$ , se  $\sigma_i > 0$ ;
- ii) exponenciais decrescentes para  $t \geq 0$ , se  $\sigma_i < 0$ ;
- iii) a função degrau unitário<sup>3</sup> ou impulso de Heaviside se  $\sigma_i = 0$ ; neste caso  $b(t) = h(t)$ .

Se  $m = 2$  e  $s_i = 0$ ,  $b(t)$  é chamada a rampa unitária:

$$f(t) = v(t) = \begin{cases} t, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Se  $s_i \in \mathbb{C}$ ,  $b(t)$  é uma função complexa do tempo. A soma pesada de funções correspondentes a valores complexos conjugados  $s_i$  e  $s_i^*$ , permite representar funções com componentes sinusoidais. Seja por exemplo,  $m = 1$ ,  $\sigma_i = 0$ ,  $\omega_i > 0$ .

Tem-se:

<sup>2</sup> Uma soma pesada é uma soma em que se multiplica cada uma das parcelas por uma constante ou peso. Também se chama *combinação linear*. Exemplo:  $f(t) = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$ .

<sup>3</sup> Note-se que  $b(t)$ , é 0 para  $t < 0$ .

$$\begin{aligned} b_i(t) &= e^{s_i t} = e^{j\omega_i t} = \cos \omega_i t + j \sin \omega_i t \\ b_i^*(t) &= e^{s_i^* t} = e^{-j\omega_i t} = \cos \omega_i t - j \sin \omega_i t \end{aligned} \quad (5.13)$$

Formemos agora a soma das funções em (5.13), pesando cada parcela com a constante 1/2. Obtém-se a expressão de Euler para o co-seno:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} b_i(t) + \frac{1}{2} b_i^*(t) = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\omega_i t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_i t} = \frac{1}{2} (e^{j\omega_i t} + e^{-j\omega_i t}) = \\ &= \cos \omega_i t \end{aligned} \quad (5.14)$$

Pesemos agora cada parcela com as constantes 1/(2j) e -1/(2j). Obtém-se a expressão de Euler para o seno:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2j} b_i(t) - \frac{1}{2j} b_i^*(t) = \\ &= \frac{1}{2j} e^{j\omega_i t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_i t} = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_i t} - e^{-j\omega_i t}) = \\ &= \sin \omega_i t \end{aligned} \quad (5.15)$$

Raciocinando no sentido inverso, podemos obter a representação de qualquer função sinusoidal em termos da soma pesada de uma função  $b_i(t)$  e, digamos, da sua conjugada,  $b_i^*(t)$ . Por exemplo, a função em (5.14), mas com amplitude  $A$  e fase inicial  $\phi$ :

$$\begin{aligned} A \cos(\omega_i t + \phi) &= \frac{A}{2} (e^{j(\omega_i t + \phi)} + e^{-j(\omega_i t + \phi)}) = \frac{A}{2} (e^{j\omega_i t} e^{j\phi} + e^{-j\omega_i t} e^{-j\phi}) = \\ &= \frac{A e^{j\phi}}{2} e^{j\omega_i t} + \frac{A e^{-j\phi}}{2} e^{-j\omega_i t} = \\ &= \frac{A e^{j\phi}}{2} b(t) + \frac{A e^{-j\phi}}{2} b^*(t) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Neste caso, os pesos seriam constantes, sim, mas com valores complexos e conjugados.

Conhecidos os dois tipos de funções, precisamos de conhecer mais 2 factos para determinar a transformada de Laplace de uma função  $f(t)$ .

O primeiro facto é que as transformadas de Laplace dos dois tipos de funções que estudámos, são dadas pela Tabela 5-1.

**Tabela 5-1** Transformadas de Laplace das funções impulso de Dirac e  $b(t)$

$f(t)$		$F(s)$
$\delta(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	1
$\frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{s_i t}$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\frac{1}{(s - s_i)^m}$

O segundo facto é que a transformada de Laplace é um operador linear:

$$\mathcal{L}(\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)) = \lambda_1 \mathcal{L}(f_1(t)) + \lambda_2 \mathcal{L}(f_2(t)). \quad (5.17)$$

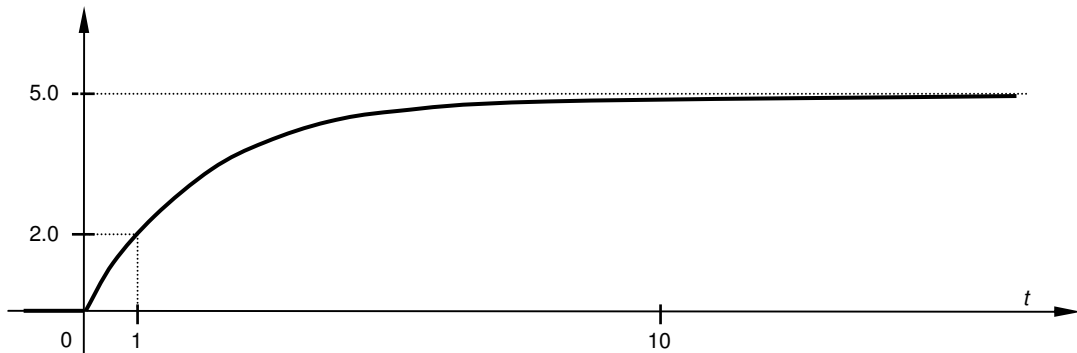
Agora, suponhamos que temos uma função  $f(t)$  para a qual pretendemos conhecer  $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ . O método básico enuncia-se como:

- i) Expressimos  $f(t)$  como uma soma pesada de casos particulares  $b_i(t)$  de (5.10), eventualmente com *um* impulso de Dirac;
- ii) Usamos a Tabela 5-1 para determinar a transformada de Laplace  $B_i(s)$  de cada  $b_i(t)$  (ou do Dirac);
- iii) Escrevemos  $F(s)$  baseando-nos em (5.17);
- iv) Usualmente calculamos o somatório de fracções (e da constante), de que resultará uma fracção de polinómios na variável  $s$ , sem qualquer referência às suas partes real ou imaginária.

Vejam-se 2 exemplos.

#### Exemplo 5-2 Transformada da resposta de um circuito RC passa-baixo

O registo da tensão aos terminais de saída de um circuito representa-se na Figura 5-2.



**Figura 5-2** Registo da tensão de saída de um circuito RC passa-baixo.

Assumindo que a curva ascendente é do tipo exponencial, podemos interpretar  $v_o(t)$  como a soma de um degrau de amplitude 5 com uma exponencial cujo valor inicial é  $-5$  e tende para 0, quando  $t$  cresce:

$$v_o(t) = 5.0 \cdot h(t) - 5.0 \cdot e^{\sigma_1 t}. \quad (5.18)$$

Para determinarmos o valor de  $\sigma_1$  (que deve ser negativo), utilizamos a medida de  $v_o(t)$  para  $t = 1$ :

$$\begin{aligned} v_o(1) &= 2.0 = 5.0 - 5.0 e^{\sigma_1 \cdot 1} \\ \sigma_1 &= \ln(3/5) = -0.5 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Portanto:

$$v_o(t) = 5.0 h(t) - 5.0 e^{-0.5t} \quad (5.20)$$

A transformada virá:

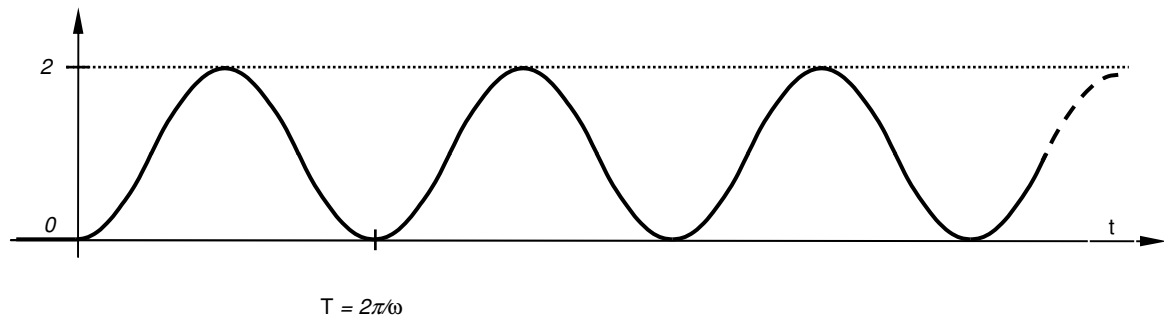
$$V_o(s) = \frac{5.0}{s} - \frac{5.0}{s - (-0.5)} . \quad (5.21)$$

O último passo será:

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{2.5}{s(s+0.5)} = \\ &= \frac{2.5}{s^2 + 0.5s} . \end{aligned} \quad (5.22)$$

### Exemplo 5-3 Transformada da resposta de um oscilador harmónico

A aplicação de um degrau unitário a um oscilador elementar LIT, ou oscilador harmónico, de período  $T$  (e, logo, frequência  $\omega = 2\pi/T$ ), produz o registo representado na Figura 5-3.



**Figura 5-3** Registo da resposta de um oscilador a um degrau.

Sendo as oscilações sinusoidais, parece razoável supor que para  $t \geq 0$

$$y_o(t) = 1 - \cos \omega t . \quad (5.23)$$

Expandindo o co-seno:

$$y_o(t) = e^0 - \frac{1}{2} e^{j\omega t} - \frac{1}{2} e^{-j\omega t} . \quad (5.24)$$

Logo, a transformada vem:

$$Y_o(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2(s - j\omega)} - \frac{1}{2(s + j\omega)} . \quad (5.25)$$

O último passo será:

$$\begin{aligned} Y_o(s) &= \frac{1}{s} - \frac{(s + j\omega)}{2(s - j\omega)(s + j\omega)} - \frac{(s - j\omega)}{2(s + j\omega)(s - j\omega)} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{(s + j\omega) + (s - j\omega)}{2(s + j\omega)(s - j\omega)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{s^2 + \omega^2 - s^2}{s(s^2 + \omega^2)} = \frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)} = \\ &= \frac{\omega^2}{s^3 + \omega^2 s} . \end{aligned} \quad (5.26)$$

Claro que se soubermos à partida que  $\mathcal{L}(\cos \omega t) = s/(s^2 + \omega^2)$ , podemos passar directamente à escrita da terceira linha de (5.26).

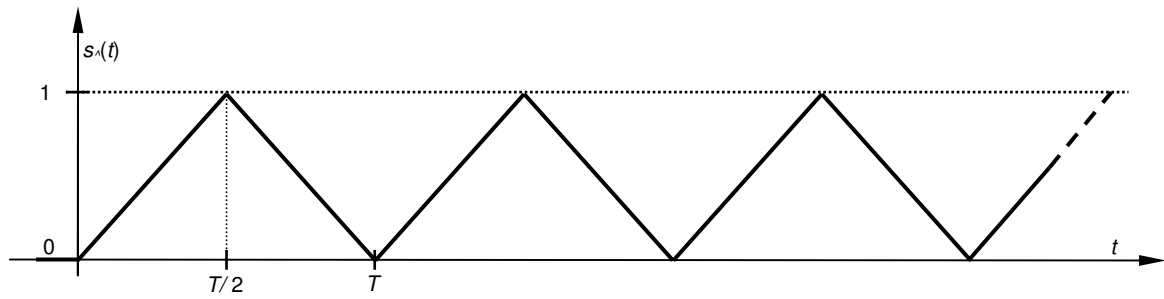
O método indicado não funciona se uma função estiver atrasada no tempo. A resposta para esta questão é dada pelo teorema do deslocamento no tempo das transformadas de Laplace, que se pode enunciar como:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) \rightarrow \mathcal{L}(f(t - T_a)) = F(s)e^{-sT_a}. \quad (5.27)$$

Na equação (5.27)  $T_a$  é o tempo de atraso e o símbolo  $\rightarrow$  lê-se “implica logicamente que”. Portanto, para se obter a transformada de Laplace de uma função atrasada no tempo de  $T_a$  segundos multiplica-se a transformada de Laplace da função original por  $e^{-sT_a}$ .

**\*Exemplo 5-4 Onda triangular**

Em Electrónica é muitas vezes usada a chamada onda triangular  $s_\Delta(t)$  de período  $T$ . Um exemplo é apresentado na Figura 5-4.



**Figura 5-3** Onda triangular de período  $T$ .

Para se obter a sua transformada de Laplace é necessário expressar a função como uma soma (infinita) de funções. Intuitivamente, estas funções deverão ser rampas unitárias – ver definição em (5.12) – com factores de pesos adequados, cada rampa estando atrasada em relação à anterior de  $T_a = T/2$ .

Cada segmento de rampa tem declive  $\pm\alpha = \pm 1/(T/2) = \pm 2/T$ . No intervalo  $[0, T/2]$ :

$$s_\Delta(t) = \alpha v(t) \quad (5.28)$$

No intervalo  $[T/2, T]$ , é necessário somar à expressão em (5.28) uma rampa de declive  $-2\alpha$ , atrasada de  $T/2$ , para se obter os valores da função no intervalo. Note-se que se a rampa tivesse declive  $-\alpha$ , o resultado da soma, no intervalo, teria valor constante e igual a 1. Fica então:

$$s_\Delta(t) = \alpha v(t) - 2\alpha v(t - T/2). \quad (5.29)$$

No intervalo  $[T, 3T/2]$ , é necessário somar à expressão em (5.29) uma rampa de declive  $+2\alpha$ , atrasada de  $T$ , para se obter os valores da função no intervalo:

$$s_\Delta(t) = \alpha v(t) - 2\alpha v(t - T/2) + 2\alpha v(t - T). \quad (5.30)$$

A partir  $3T/2$ , tudo se repete. Podemos escrever a expressão geral da função como:

$$s_\Delta(t) = \alpha v(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2\alpha v(t - kT/2) = \alpha \left[ v(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2 v(t - kT/2) \right]. \quad (5.31)$$

A transformada de Laplace vem:



$$\begin{aligned}
 S_{\wedge}(s) &= \alpha \left[ \frac{1}{s^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{s^2} e^{-skT/2} \right] = \\
 &= \alpha \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2} e^{-sT/2} + \frac{2}{s^2} e^{-sT} - \frac{2}{s^2} e^{-s3T/2} + \frac{2}{s^2} e^{-s2T} + \dots \right]
 \end{aligned} \quad (5.32)$$

### Pólos e zeros de uma função $F(s)$

A transformada de Laplace  $F(s)$  de uma função  $f(t)$  expressa como uma soma de funções  $b(t)$  em (5.10), é sempre uma fracção racional em  $s$ , ou seja, uma fracção em que o numerador e o denominador são polinómios na variável  $s$ :

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (5.33)$$

Se os polinómios numerador e denominador forem factorizados nas suas  $m$  e  $n$  raízes,  $F(s)$  pode ser representada na chamada forma zero-polar:

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \\
 &= K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad K = b_m
 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Os valores  $z_1$  a  $z_m$  são ditos os zeros de  $F(s)$ . Se  $z$  é um zero de  $F(s)$ , então  $|F(z)| = 0$ . Os zeros são os valores da função de transferência que a tornam nula. Os valores  $p_1$  a  $p_n$  são ditos os pólos de  $F(s)$ . Se  $p$  é um pólo de  $F(s)$ , então  $|F(p)| = \infty$ . Os pólos, os zeros e o valor de  $K = b_m$  caracterizam completamente  $F(s)$ .

#### Exemplo 5-5 Pólos e zeros de funções $F(s)$

Seja a função  $V_o(s) = \frac{2.5}{s^2 + 0.5s}$ . Ela é da forma (5.33) com

$$n = 2, m = 0, a_1 = 0.5, a_0 = 0, K = b_0 = 2.5.$$

Esta função não tem zeros e os seus pólos são  $s_1 = 0, s_2 = -0.5$ , porque  $s^2 + 0.5s = s(s + 0.5)$ .

Seja a função  $Y_o(s) = \frac{\omega^2}{s^3 + \omega^2 s}$ . Neste caso  $n = 3, m = 0, a_2 = 0, a_1 = \omega^2, a_0 = 0, K = b_0 = \omega^2$ .

Esta função não tem zeros e os seus pólos são  $s_1 = 0, s_2 = j\omega, s_3 = -j\omega$ , porque:

$$s^3 + \omega^2 s = s(s^2 + \omega^2) = s(s - j\omega)(s + j\omega).$$

Seja a função  $H(s) = \frac{2s}{s + 10}$ . Neste caso  $n = 1, m = 1, a_0 = 10, K = b_1 = 2, b_0 = 0$ .

Esta função tem 1 zero,  $z_1 = 0$ , e 1 pólo,  $s_1 = -10$ .

Seja a função  $U(s) = \frac{2s^2 + 2s + 1}{s^3 + s^2}$ .

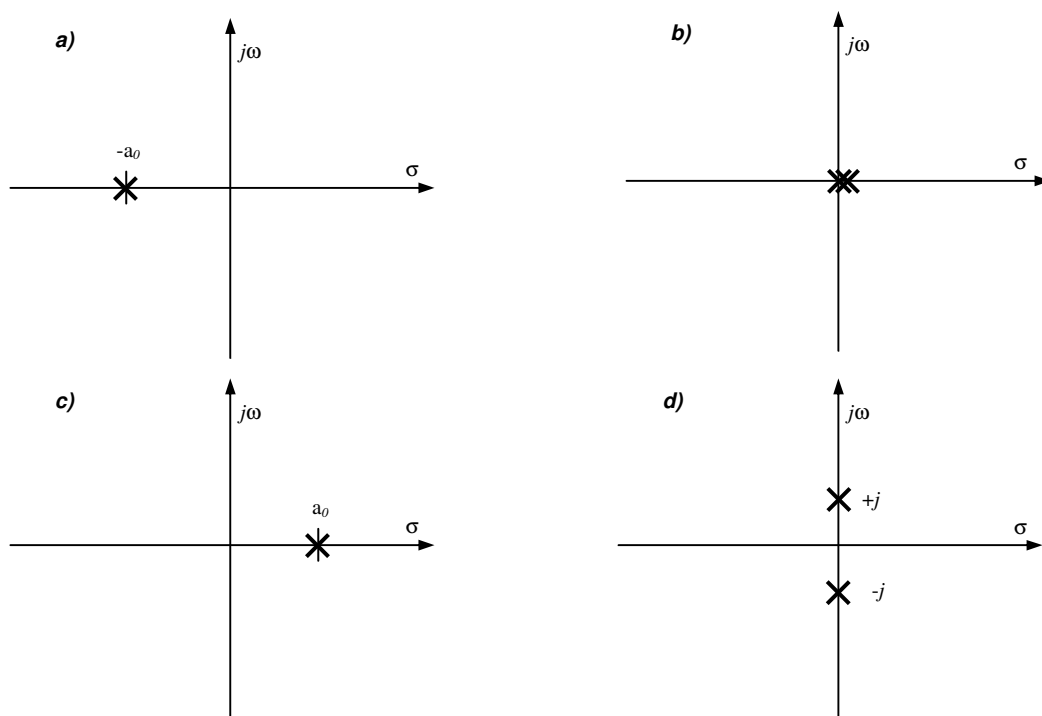
Neste caso  $n = 3, m = 2, a_2 = 1, a_1 = 0, a_0 = 0, K = b_2 = 2, b_1 = 2, b_0 = 1$ .

Esta função tem 2 zeros,  $z_1 = -0.5 - j0.5, z_2 = -0.5 + j0.5$  porque:

$$2s^2 + 2s + 1 = 2(s + 0.5 + j0.5)(s + 0.5 - j0.5)$$

Tem 3 pólos,  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$ ,  $s_3 = -1$ , porque  $s^3 + s^2 = s^2(s + 1)$ . Os pólos  $s_1$  e  $s_2$  têm o mesmo valor e, por isso, também se diz que o pólo em 0 tem multiplicidade 2 ou é um pólo duplo. (O somatório das multiplicidades dos pólos é sempre  $n$ .)

É útil representar graficamente os pólos e os zeros de uma função  $F(s)$  num diagrama no plano  $s$ . Um pólo representa-se por um sinal (×) e um zero por um pequeno círculo (○). Estes diagramas chamam-se zero-polares. Funções que só difiram pelo valor de  $K$  não se podem distinguir nestes diagramas.



**Figura 5-4** Exemplos de diagramas zero-polares.

**a)**  $F(s) = K / (s + a_0)$ ; **b)**  $F(s) = K / s^2$ ; **c)**  $F(s) = K / (s - a_0)$  **d)**  $F(s) = K / (s^2 + 1)$ . Observar a forma de representar o pólo duplo em b).

## Exercícios

**5.1** Determinar as transformadas de Laplace das seguintes funções. Para cada função  $f(t)$ :

- Exprimi-la como uma soma pesada de funções  $b_i(t)$ .
- Traçar o gráfico das funções  $b_i(t)$  e de  $f(t)$ .
- Determinar  $F(s)$  a partir da Tabela 5-1 e da propriedade da linearidade da transformada de Laplace.
- Exprimir  $F(s)$  como uma fracção racional em  $s$  (fracção de dois polinómios em  $s$ ).
- Indicar os seus pólos e zeros num diagrama zero-polar.

Sugere-se escrever e usar um programa em Scilab para verificar os resultados e automatizar o processo.

a)  $f(t) = e^{-t}$

b)  $f(t) = e^{-0.5t}$

c)  $f(t) = e^{0.5t}$

d)  $f(t) = e^t$

e)  $f(t) = h(t) - e^{-t}$

f)  $f(t) = h(t) + e^{-t} - 2e^{-0.5t}$

g)  $f(t) = v(t)$

h)  $f(t) = 2v(t) - 2h(t) + 2e^{-t}$

## 5.2 Idem 5.1 para as funções:

a)  $f(t) = 2\sin(2t)$

b)  $f(t) = \sin(4t)$

c)  $f(t) = \cos(2t + \pi/4)$

d)  $f(t) = \cos(4t - \pi/4)$

e)  $f(t) = e^{-t} \sin(4t)$

f)  $f(t) = e^{-0.5t} \sin(4t)$

g)  $f(t) = h(t) - e^{-t} \cos(4t)$

h)  $f(t) = v(t) - e^{-t} \sin(4t)$

Nota:  $f(t) = e^{-t} \sin(4t) = e^{-t} \left( \frac{1}{2j} e^{j4t} - \frac{1}{2j} e^{-j4t} \right) = \frac{1}{2j} e^{(-1+j4)t} - \frac{1}{2j} e^{(-1-j4)t}$

Exemplo de programa em Scilab, com os valores adequados para o exercício 5.2 h):

```
clear;clf
s=%s;
j=%i;
// Intervalo de tempo a considerar para visualização
t=0:0.01:4;
// Número de funções bi (1 a 3)
nd=3
//Definição de funções bi(t)
s1=-1+4*j;
m1=1;
b1=1/(factorial(m1-1))*t^(m1-1).*exp(s1*t);
s2=-1-4*j;
m2=1;
b2=1/(factorial(m2-1))*t^(m2-1).*exp(s2*t);
s3=0;
m3=2;
b3=1/(factorial(m3-1))*t^(m3-1).*exp(s3*t);
//f=soma pesada das bi e sua visualização
A1=-0.5*j;
A2=+0.5*j;
A3=1;
f1=A1*b1; plot(t, f1)
if nd>=2 then f2=A2*b2; plot(t,f2); else f2=0; end
if nd==3 then f3=A3*b3; plot(t,f3); else f3=0; end
plot(t,f1+f2+f3,'r')
```

```
//Transformada de Laplace
F1=A1/(s-s1)^m1
if nd>=2 then F2=A2/(s-s2)^m2
    else F2=0; end
if nd==3 then F3=A3/(s-s3)^m3
    else F3=0; end
F=F1+F2+F3
z_s=roots(F.num)
p_s=roots(F.den)
```

**5.3** Mostre que, em geral, a transformada de Laplace da função  $f(t) = \frac{1}{\omega} e^{\sigma t} \sin(\omega t)$  se pode obter como a soma de duas frações cujos denominadores são  $s - \sigma - j\omega$  e  $s - \sigma + j\omega$ . Compacte a expressão da transformada numa única fração. Esboce graficamente  $f(t)$ .

**5.4** \*Mostre que a transformada de Laplace do impulso de Dirac é 1. Nota: considere o impulso de Dirac como aproximado por uma função  $i(t)$  que é a soma de 2 degraus de amplitude  $1/h$  e  $-1/h$ , o primeiro ocorrendo em  $t=0$  e o segundo atrasado do primeiro de  $h$  segundos; determine a transformada de  $i(t)$  e o seu limite quando  $h \rightarrow 0$ , usando a regra de L'Hôpital.

### 5.1.2 Resposta livre e resposta forçada

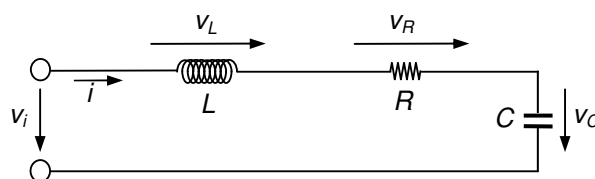
O resultado de um processo de modelização de um sistema, em que não há fenómenos de atraso no tempo e que aceita um modelo LIT SISO, é uma equação diferencial de ordem  $n$  de coeficientes constantes. Seja qual for a equação que se obtenha, ela pode ser reescrita como um caso concreto da seguinte expressão geral.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (5.35)$$

Nesta equação,  $y$  é a variável de saída do modelo,  $u$  é a variável de entrada, os coeficientes  $a_{n-1}$  a  $a_0$  e  $b_m$  a  $b_0$  são os parâmetros do modelo. Tem-se obrigatoriamente  $n \geq m$ , caso contrário, o modelo não será causal. O valor de  $n$  é dito a *ordem* do modelo.

#### Exemplo 5-6 Modelo de circuito LRC

Em exercício anterior, estabeleceu-se o modelo do circuito LRC série:



Considerando como variável de saída a tensão aos terminais do condensador, tem-se  $v_o = v_C$ .

Obteve-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{LC} v_o = \frac{1}{LC} v_i$$

Comparando com (5.35), tem-se que  $n = 2$  (o modelo é de *segunda ordem*) e  $m = 0$ . Tem-se ainda:

$$a_1 = R/L, a_0 = 1/(LC), b_0 = 1/(LC).$$

Suponha-se  $L = 1$  mH,  $R = 1$   $\Omega$ ,  $C = 1$  mF. Então:

$$a_1 = 10^3, a_0 = 10^6, b_0 = 10^6$$

A previsão da evolução da variável de saída de um modelo é realizada para um determinado intervalo de tempo  $[t_0, t_f]$ . No que se segue considerar-se-á  $t_0 = 0, t_f = \infty$ .

A previsão da evolução da variável de saída de um modelo como (5.35) implica determinar a situação para a qual se vai fazer a previsão. Esta determinação tem 2 aspectos:

– Definir a função que representa a evolução da variável  $u$  no intervalo de previsão:  $u = u(t)$ .

– Definir as condições iniciais do modelo, isto é o valor da saída  $y$  e os valores das suas  $n - 1$  derivadas no instante 0, entendidos como o limite de  $y(t)$  quando  $t$  tende para 0 por valores negativos. Podemos representar esta definição por:

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \mathbf{y}(t) = [y(0^-) \ y'(0^-) \ \dots \ y^{(n-1)}(0^-)] = \mathbf{y}_0 = [y_0 \ y'_0 \ \dots \ y_0^{(n-1)}]. \quad (5.36)$$

Em (5.36), chamaremos a  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(0^-)$ , o vector de condições iniciais. É muito importante distinguirmos entre  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(0^-)$  e  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(0^+)$  porque pretendemos permitir que a evolução de  $y$  no intervalo  $[0, \infty[$ ,  $y(t)$ , tenha descontinuidades no instante  $t = 0$ , sendo estas provocadas por  $u(t)$ .

Em geral,  $y(t)$  dependerá quer de  $u(t)$  quer de  $\mathbf{y}(0)$ . Podemos simplificar o problema considerando 2 situações:

–  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(0^-) \neq 0$  e  $\forall t \in [0, \infty[, u(t) = 0$ . Neste caso, o sistema não está em equilíbrio (“está em movimento”) no instante  $t = 0$  e não será “excitado” ou “estimulado” no intervalo  $[0, \infty[$  pela variável de entrada  $u$ . Dizemos então que a evolução de  $y$  no intervalo  $[0, \infty[, y(t)$ , é a *resposta livre* do sistema (ou do modelo) a  $u(t)$ . Para sublinhar esta ideia poderemos escrever  $y(t) = y_L(t)$ .

–  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(0^-) = 0$  e  $u(t) \neq 0$  (para algum subintervalo) no intervalo  $[0, \infty[$ . Neste caso, o sistema está em equilíbrio (“em repouso”, “parado”) no instante  $t = 0$  e será “excitado” ou “estimulado” no intervalo  $[0, \infty[$  pela variável de entrada  $u$ , de acordo com a sua evolução  $u(t)$ . Dizemos então que a evolução de  $y$  no intervalo  $[0, \infty[, y(t)$ , é a *resposta forçada* do sistema (ou do modelo) a  $u(t)$ . Para sublinhar esta ideia poderemos escrever  $y(t) = y_F(t)$ .

Um modelo linear tem a notável propriedade de a sua *resposta total* ser a *soma* da resposta forçada com a resposta livre:

$$y(t) = y_F(t) + y_L(t) \quad (5.37)$$

Se as condições iniciais forem nulas, a resposta livre é 0. A resposta total iguala então a resposta forçada. Se a entrada for nula, a resposta forçada é 0. A resposta total iguala então a resposta livre. Se as condições iniciais e a entrada forem não-nulas, a resposta total é a soma das duas.

## Exercícios

- 5.5** Enuncie o problema da previsão da resposta livre de um sistema que aceita um modelo LIT.
- 5.6** Classifique os seguintes problemas de previsão em previsão da resposta livre e previsão de resposta forçada. Para cada caso, apresente o raciocínio que levou à classificação que escolheu.
- Um pára-quedista salta de um avião. Pretende saber-se com que velocidade vertical vai tocar no solo.
  - Um condensador de 1 mF está carregado a 5 V. Descarrega-se o condensador através de uma resistência de 1 KΩ. Qual a duração do intervalo de tempo necessário para que a tensão aos seus terminais seja inferior a 0.5V?
  - Um motor de corrente contínua, que acciona uma carga mecânica rotativa, está parado. É alimentado a uma tensão de 100 V. Que velocidade máxima vai atingir?
  - Um pêndulo em suspensão é deslocado da sua posição de equilíbrio de 0.01 rad e a seguir é largado. Com que frequência vai oscilar?
  - Um automóvel desloca-se numa estrada horizontal. Subitamente “cai” numa depressão da estrada. Que tipo de oscilações vão ser produzidas no habitáculo?

## Função de transferência e determinação da resposta forçada

Estamos agora em condições de considerar o modelo no domínio  $s$  a que se chama *função de transferência*. Este modelo surge naturalmente quando se considera a determinação da resposta forçada do modelo (5.35) através das transformadas de Laplace. Para tal utilizamos a seguinte propriedade (teorema da derivação) das mesmas.

Seja a função  $f(t)$  com transformada de Laplace  $F(s)$ . A transformada da sua  $n$ ésima derivada  $f^{(n)}(t)$  é dada por:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (5.38)$$

Em particular:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= sF(s) - f(0) \\ \mathcal{L}[f''(t)] &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Por comodidade vamos voltar a escrever o modelo (5.35):

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (5.40)$$

Se determinarmos as transformadas de Laplace de cada um dos membros desta equação, usando a propriedade em (5.38), assumindo que *todos os valores iniciais são nulos*, encontramos que:

$$\begin{aligned} s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = \\ = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Em (5.41)  $Y(s)$  e  $U(s)$  são respectivamente as transformadas de Laplace de  $y(t)$  e  $u(t)$ , par de funções que satisfaz a equação. Pondo-as em evidência, vem:

$$Y(s) (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s). \quad (5.42)$$

Pelo que podemos exprimir  $Y(s)$  como

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} U(s) \quad (5.43)$$

A expressão

$$\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

é chamada a *função de transferência* do modelo (5.40) ou a função de transferência correspondente ao modelo (5.40). As funções de transferência são usualmente denotadas como  $H(s)$ . Seja então

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (5.44)$$

Podemos escrever

$$Y(s) = H(s) U(s). \quad (5.45)$$

Esta equação diz-nos que, sendo os valores iniciais todos *nulos*, a transformada de  $y(t)$  no modelo (5.40) é igual ao *produto* da transformada de  $u(t)$  pela função de transferência. Este resultado é de grande importância por várias razões.

Reparemos que, para definirmos  $H(s)$ , consideramos uma situação que corresponde ao problema da previsão da resposta forçada. Se tentarmos resolver este problema baseando-nos numa equação diferencial da forma (5.40), teremos que resolver a equação, sendo conhecida a evolução de  $u(t)$ , de forma a prevermos a evolução de  $y(t)$ . Mas com o modelo função de transferência, temos a seguinte alternativa.

Suponhamos que um modelo de um sistema nos é dado na forma de uma equação diferencial (5.40). Para prevermos a resposta do sistema  $y(t)$  a uma entrada específica  $u(t)$  (ou a qualquer entrada que tenha uma transformada de Laplace), procedemos da seguinte

forma.

- i) Calculamos a função de transferência do modelo  $H(s)$ ;
- ii) Calculamos a transformada de Laplace de  $u(t)$ :  $U(s) = \mathcal{L}(u(t))$ ;
- iii) Calculamos  $Y(s) = H(s) \cdot U(s)$ ;
- iv) Calculamos a transformada inversa de Laplace de  $Y(s)$ :  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$ .

Antes de analisarmos como calcular a transformada inversa de Laplace, vamos ver dois exemplos de aplicação do conceito de função de transferência.

**Exemplo 5-7 Determinação da resposta forçada  $V_o(s)$  do circuito LRC série a um degrau de tensão**

Suponha-se que pretendemos conhecer a resposta do circuito LRC série do Exemplo 2-6 a uma entrada em degrau unitário.

Considerando *condições iniciais nulas*, podemos calcular a sua função de transferência através de:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 v_o}{dt^2} + (R/L) \frac{dv_o}{dt} + 1/(LC) v_o &= 1/(LC) v_i \\
 \Leftrightarrow \\
 s^2 V_o(s) + (R/L) V_o(s) + 1/(LC) V_o(s) &= 1/(LC) V_i(s) \\
 \Leftrightarrow \\
 V_o(s) [s^2 + (R/L)s + 1/(LC)] &= 1/(LC) V_i(s) \\
 \Leftrightarrow \\
 V_o(s) &= \frac{1/(LC)}{s^2 + (R/L)s + 1/(LC)} V_i(s) \\
 \Leftrightarrow \\
 H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} &= \frac{1/(LC)}{s^2 + (R/L)s + 1/(LC)} \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

Para os valores de  $L$ ,  $R$  e  $C$  indicados tem-se:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{10^6}{s^2 + 10^3 s + 10^6} \quad (5.47)$$

Se a entrada é igual a um degrau unitário de tensão, então  $v_i(t) = h(t)$ . Então:

$$V_i(s) = \frac{1}{s} \quad (5.48)$$

A transformada da tensão de saída virá:

$$V_o(s) = H(s) V_i(s) = \frac{10^6}{s^2 + 10^3 s + 10^6} \cdot \frac{1}{s} = \frac{10^6}{s(s^2 + 10^3 s + 10^6)} \quad (5.49)$$



### Determinação da transformada inversa de uma função $F(s)$

Dada uma função complexa de variável complexa  $F(s)$ , a sua transformada de Laplace inversa, ou antitransformada de Laplace, é definida por:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{-st} ds. \quad (5.50)$$

O integral numa recta paralela ao eixo  $j\omega$  dentro da região do plano  $s$  em que transformada de Laplace converge. A expressão (5.50) permite interpretar a função  $f(t)$  como uma soma infinita de exponenciais complexas, pesadas pelos valores de  $F(s)$ .

A forma usual de calcular antitransformadas não faz uso de (5.50), mas sim da Tabela 2-1. O método básico é, de alguma forma, o inverso do método que se apresentou para calcular a transformada de  $f(t)$ . Para se calcular a antitransformada  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ , procede-se da seguinte forma:

- i) Factoriza-se  $D(s)$  se este não estiver factorizado.
- ii) Expressamos  $F(s)$  como uma soma pesada de fracções da forma  $B_{i,n}(s) = \frac{1}{(s-s_i)^n}$  (e uma constante);
- iii) Usamos a Tabela 2-1 para determinarmos a antitransformada de Laplace,  $b_{i,n}(t)$ , de cada  $B_i(s)$  (e da constante que será um impulso de Dirac de “energia” igual à constante);
- iv) Escrevemos  $f(t)$  baseando-nos na linearidade da transformada de Laplace;
- v) Se for caso disso, reduzem-se pares de expressões de exponenciais complexas a expressões em senos ou co-senos.

O passo ii) do cálculo de uma antitransformada envolve então converter uma fracção racional em  $s$ ,  $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ , num soma pesada de fracções, cada fracção da forma indicada.

Chama-se a isto fazer a expansão de  $F(s)$  em fracções parciais. Posto isto, e por comodidade de exposição, há dois casos a considerar.

#### Caso 1: as raízes $s_i$ de $D(s)$ são todas diferentes

Neste caso a expansão toma a forma:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)} = \\ &= A_0 + \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_n}{s-s_n}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Em (5.51),  $A_0, A_1, \dots, A_n$  são constantes (reais ou complexas) a serem determinadas.

Se  $m < n$ , isto é, se o grau do polinómio numerador,  $N(s)$ , for inferior ao grau do polinómio denominador,  $D(s)$ , então  $A_0 = 0$ . Se  $m = n$ , então  $A_0 = b_m$ .

As constantes  $A_1, \dots, A_n$  são determinadas da seguinte forma. Para cada  $A_i$  forma-se a função “resíduo”

$$F_i(s) = (s - s_i)F(s). \quad (5.52)$$

Então  $A_i$  é dada por

$$A_i = F_i(s_i). \quad (5.53)$$

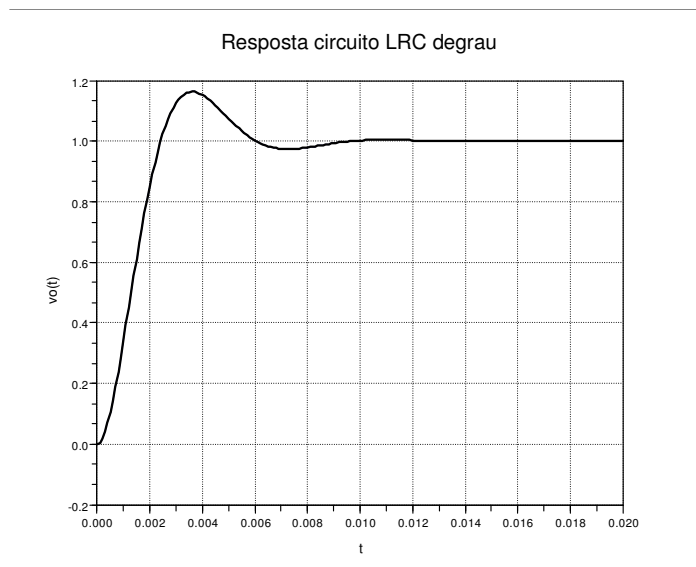
Realizada a expansão em fracções parciais de  $F(s)$ , determina-se a sua antitransformada  $f(t)$  utilizando a Tabela 2-1 e a linearidade da transformada.

#### Exemplo 5-8 Determinação da resposta forçada $v_o(t)$ do circuito LRC série a um degrau de tensão

No Exemplo 2-7, determinou-se a transformada de  $V_o(s)$ . Então:

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{10^6}{s(s^2 + 10^3 s + 10^6)} = \\ &= \frac{10^6}{s(s + 500 - j866)(s + 500 + j866)} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Vamos verificar analiticamente que a resposta tem a forma indicada na Figura 5-5.



**Figura 5-5** Resposta a um degrau de tensão de um circuito LRC.

As raízes de  $D(s)$  são todas diferentes.  $n > m$  logo  $A_0 = 0$ . Ainda:

$$V_o(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 500 - j866} + \frac{A_3}{s + 500 + j866} \quad (5.55)$$

Segue-se que:

$$F_1(s) = \frac{10^6}{s^2 + 10^3 s + 10^6} \quad (5.56)$$

$$A_1 = F_1(0) = 1$$

$$F_2(s) = \frac{10^6}{s(s + 500 + j866)}$$

$$A_2 = F_1(-500 + j866) = \frac{10^6}{(-500 + j866)(j2 \cdot 866)} = \quad (5.57)$$

$$= -0.5 + j0.289 = 0.577e^{j2.62}$$

$$F_3(s) = \frac{10^6}{s(s + 500 - j866)}$$

$$A_3 = F_1(-500 - j866) = \frac{10^6}{(-500 - j866)(-j2 \cdot 866)} = \quad (5.58)$$

$$= -0.5 - j0.289 = 0.577e^{-j2.62}$$

Portanto

$$V_o(s) = \frac{1}{s} + \frac{0.577e^{j2.62}}{s + 500 - j866} + \frac{0.577e^{-j2.62}}{s + 500 + j866} \quad (5.59)$$

$$v_o(t) = 1 + 0.577e^{j2.62}e^{(-500 + j866)t} + 0.577e^{-j2.62}e^{(-500 - j866)t} =$$

$$= 1 + 0.577e^{-500t} \left( e^{j866t + j2.62} + e^{-j866t - j2.62} \right) = \quad (5.60)$$

$$= 1 + 0.577e^{-500t} 2 \left( 0.5e^{j(866t + 2.62)} + 0.5e^{-j(866t + 2.62)} \right) =$$

$$= 1 + 1.154e^{-500t} \cos(866t + 2.62)$$

O gráfico de  $v_o(t)$  corresponde ao da Figura 5-5.

### Exemplo 5-9 A antitransformada é uma soma de exponenciais reais

Seja a transformada da resposta de um sistema dada por

$$Y(s) = \frac{6}{s^3 + 2s^2 - s - 2}. \quad (5.61)$$

É necessário factorizar o denominador:

$$Y(s) = \frac{6}{s^3 + 2s^2 - s - 2} = \frac{6}{(s + 2)(s + 1)(s - 1)}. \quad (5.62)$$

Podemos formar a expansão como:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s + 2} + \frac{A_2}{s + 1} + \frac{A_3}{s - 1}. \quad (5.63)$$

As funções “resíduos” são

$$Y_1(s) = \frac{6}{(s + 1)(s - 1)} \quad Y_2(s) = \frac{6}{(s + 2)(s - 1)} \quad Y_3(s) = \frac{6}{(s + 2)(s + 1)}. \quad (5.64)$$

Pelo que as constantes  $A_i$  têm os valores

$$\begin{aligned}
 A_1 &= Y_1(-2) = \frac{6}{(-1)(-3)} = 2 \\
 A_2 &= Y_2(-1) = \frac{6}{(+1)(-2)} = -3. \\
 A_3 &= Y_3(+1) = \frac{6}{(3)(2)} = 1
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

A antitransformada escrever-se-á

$$y(t) = 2e^{-2t} - 3e^{-t} + e^t. \tag{5.66}$$

### Exemplo 5-10 A antitransformada contém um impulso de Dirac

Seja a transformada da resposta de um sistema dada por

$$Y(s) = \frac{s+5}{s+1}. \tag{5.67}$$

Porque o grau do numerador é igual ao do denominador devemos formar a expansão como

$$Y(s) = A_0 + \frac{A_1}{s+1}. \tag{5.68}$$

A única função resíduo é

$$Y_1(s) = s+5. \tag{5.69}$$

Pelo que as constantes  $A_i$  têm os valores

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 1 \\
 A_1 &= Y_1(-1) = -1+5 = 4
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

A antitransformada escrever-se-á

$$y(t) = \delta(t) + 4e^{-t}. \tag{5.71}$$

Os exemplos tornam evidente que faz todo o sentido automatizar o cálculo de transformadas inversas com um programa adequado.

### \*Caso 2: algumas das raízes de $D(s)$ são repetidas (múltiplas)

A factorização do denominador de uma função da  $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  em que  $D(s)$  é um polinómio em que algumas raízes são múltiplas, dá como resultado:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-s_1)^{m(1)}(s-s_2)^{m(2)} \cdots (s-s_K)^{m(K)}} \tag{5.72}$$

As  $K$  raízes  $s_i$  ( $i=1,2,\dots,K$ ) têm multiplicidade  $m(1), m(2), \dots, m(K)$ . De notar que  $m(1)+m(2)+\dots+m(K)=n$ , em que  $n$  é o grau de  $D(s)$ .

Para simplificar, vamos supor que  $n > m$ . Então, a expansão de  $F(s)$  em fracções parciais

tem a forma geral:

$$F(s) = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_K(s).$$

Cada  $G_i(s)$  é expandido em tantas fracções quantas a multiplicidade da raiz  $i$ :

$$G_i(s) = \frac{A_{i,1}}{(s-s_i)^{m(i)}} + \frac{A_{i,2}}{(s-s_i)^{m(i)-1}} + \dots + \frac{A_{i,m(i)}}{(s-s_i)}.$$

Como exemplo, suponhamos  $F(s) = \frac{10}{s^2(s+1)}$ . Então:

$$F(s) = \frac{A_{1,1}}{s^2} + \frac{A_{1,2}}{s} + \frac{A_{2,1}}{s+1} \quad (5.73)$$

As constantes  $A_{i,1}$  calculam-se por

$$F_{i,1}(s) = (s-s_i)^{m(i)} F(s) \quad A_{i,1} = F_{i,1}(s_i). \quad (5.74)$$

Notemos que as expressões em (5.74) são para todos os efeitos equivalentes às expressões (5.52) e (5.53) se a multiplicidade de  $s_i$  for 1.

No exemplo, teríamos:

$$F_{1,1}(s) = s^2 \frac{10}{s^2(s+1)} = \frac{10}{s+1} \quad A_{1,1} = \frac{10}{0+1} = 10 \quad (5.75)$$

As constantes  $A_{i,2}, \dots, A_{i,m(i)}$  calculam-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} F_{i,2}(s) &= \frac{F_{i,1}(s) - A_{i,1}}{s-s_i} & A_{i,2} &= F_{i,2}(s_i) \\ &\vdots & &\vdots \\ F_{i,j}(s) &= \frac{F_{i,j-1}(s) - A_{i,j-1}}{s-s_i} & A_{i,j} &= F_{i,j}(s_i) \end{aligned} \quad (5.76)$$

No exemplo, teríamos:

$$F_{1,2}(s) = \frac{\frac{10}{s+1} - 10}{s} = -\frac{10}{s+1} \quad A_{1,2} = -\frac{10}{0+1} = -10. \quad (5.77)$$

Tendo esgotado as parcelas referentes à raiz 0, calculamos a constante referente à raiz -1:

$$F_{2,1}(s) = (s+1) \frac{10}{s^2(s+1)} = \frac{10}{s^2} \quad A_{2,1} = F_{2,1}(-1) = 10. \quad (5.78)$$

Pelo que a expansão ficará:

$$F(s) = \frac{10}{s^2} - \frac{10}{s} + \frac{10}{s+1}. \quad (5.79)$$

Sendo a sua antitransformada:

$$f(t) = 10t - 10h(t) + 10e^{-t} \quad (5.80)$$

## Exercícios

**5.7** Determine as antitransformadas de Laplace das funções  $R(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$  e  $T(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$ ,

Compare graficamente as funções do tempo obtidas.

**5.8** Determine a resposta ao degrau do circuito LRC série se  $L = 1$  mH,  $R = 4$   $\Omega$ ,  $C = 1$  mF. Realize um gráfico da função.

**5.9** Determine a expressão temporal das respostas forçadas dos seguintes 3 modelos ao degrau unitário e a um sinal causal  $u(t) = 2\sin 4t$  :

a)  $y' + 2y = u$       b)  $y' + 2y = u'$       c)  $y' + 2y = u' + u$

**5.10** Realize um programa que permita calcular a antitransformada de uma função  $F(s)$  e traçar o seu gráfico.

### 5.1.3 Impedância no domínio $s$ e modelos de circuitos eléctricos

Torna-se claro que com um pouco de prática se pode passar imediatamente *da equação diferencial à função de transferência* ou *da função de transferência à equação diferencial*, visto que os parâmetros de ambos os modelos são os mesmos e ocupam posições semelhantes.

Mais ainda: se todos os componentes forem lineares é possível estabelecer um modelo de um sistema directamente como uma função de transferência! Por “directamente” quer dizer-se, sem estabelecer primeiro a equação diferencial. No caso de circuitos eléctricos, tal pode ser feito a partir do conceito de *impedância em  $s$* .

A impedância em  $s$  pode ser interpretada como uma generalização do conceito de *resistência*. Considerem-se as equações que definem os elementos resistência, indutância e capacidade:

$$v = Ri \quad (5.81)$$

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (5.82)$$

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (5.83)$$

Determinemos as suas transformadas de Laplace (mais uma vez supondo valores iniciais nulos):

$$V(s) = RI(s) \quad (5.84)$$

$$V(s) = LsI(s) \quad (5.85)$$

$$I(s) = CsV(s) \quad (5.86)$$

Definimos a *impedância* em geral como a razão entre  $V(s)$  e  $I(s)$  – qualquer que seja o elemento.

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \quad (5.87)$$

Logo:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{1}{Z(s)} V(s) \quad (5.88)$$

As impedâncias *resistiva*,  $Z_R(s)$ , *indutiva*,  $Z_L(s)$ , e *capacitiva*,  $Z_C(s)$ , têm por expressão:

$$Z_R(s) = R \quad (5.89)$$

$$Z_L(s) = Ls \quad (5.90)$$

$$Z_C(s) = \frac{1}{Cs} \quad (5.91)$$

Defina-se agora a *admitância* como o inverso da impedância:

$$A(s) = \frac{1}{Z(s)} = Z^{-1}(s) \quad (5.92)$$

As impedâncias podem ser combinadas de acordo com as regras:

– A impedância de dois elementos em série é a soma das impedâncias dos elementos, porque a corrente sendo a mesma, as tensões somam-se:

$$Z_s(s) = Z_1(s) + Z_2(s) \quad (5.93)$$

– A admitância de dois elementos em paralelo é igual à soma das admitâncias, porque a tensão sendo a mesma, as correntes somam-se.  $A_p(s) = A_1(s) + A_2(s)$ . Logo, a impedância de dois elementos em paralelo:

$$Z_p(s) = \frac{1}{A_p(s)} = \frac{1}{A_1(s) + A_2(s)} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)}} = \frac{Z_1(s)Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \quad (5.94)$$

#### Exemplo 5-11 Função de transferência $V_o(s)/V_i(s)$ do circuito LRC a partir das impedâncias em $s$

Como em qualquer outro circuito, a transformada da corrente de entrada igualará a admitância do circuito vezes a transformada da tensão de entrada:

$$I_i(s) = I(s) = \frac{1}{Z(s)} V_i(s) \quad (5.95)$$

Visto que os componentes do circuito LRC estão em série, a impedância do circuito (impedância de entrada) é:

$$\begin{aligned}
 I(s) &= \frac{1}{Z_L(s) + Z_R(s) + Z_C(s)} V_i(s) = \\
 &= \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} V_i(s) = \\
 &= \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s)
 \end{aligned} \tag{5.96}$$

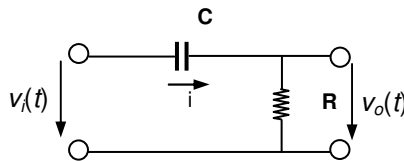
A tensão de saída  $V_o(s) = V_C(s)$  será:

$$\begin{aligned}
 V_o(s) &= V_C(s) = \\
 &= Z_C(s) I(s) = \\
 &= \frac{1}{Cs} \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s) = \\
 &= \frac{1/(LC)}{s^2 + (R/L)s + 1/(LC)} V_i(s)
 \end{aligned} \tag{5.97}$$

Resultado que se obteve na equação (5.46) do Exemplo 2-7, a partir da equação diferencial, e que obtivemos aqui raciocinando em termos de impedâncias em  $s$ .

#### Exemplo 5-12 Função de transferência $V_o(s)/V_i(s)$ do circuito RC passa-alto

A configuração de circuito RC na figura seguinte usa-se para transmitir sinais de tensão analógicos sem componente contínua ou para derivar sinais. Nesta configuração, a capacidade bloqueia a componente contínua de corrente.



O raciocínio do exemplo anterior pode ser “compactado”, usando a ideia de um “divisor de tensão em  $s$ ”:

$$\begin{aligned}
 V_o(s) &= \frac{Z_R(s)}{Z_C(s) + Z_R(s)} V_i(s) = \\
 &= \frac{R}{\frac{1}{Cs} + R} V_i(s) = \frac{RCs}{RCs + 1} V_i(s) = \\
 &= \frac{s}{s + 1/(RC)} V_i(s)
 \end{aligned} \tag{5.98}$$

A equação diferencial que descreve o circuito RC passa-alto pode retirar-se do resultado de (5.98) visto que:

$$(s + 1/(RC)) V_o(s) = s V_i(s) \tag{5.99}$$

Logo, passando (5.99) para o domínio dos tempos diz-nos que:

$$v_o'(t) + (1/RC)v_o(t) = v_i'(t) \tag{5.100}$$



**Exemplo 5-13 Função de transferência do amplificador operacional com realimentação negativa**

Um amplificador operacional é um amplificador diferencial

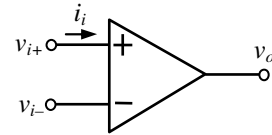
$$v_o(t) = K[v_{i+}(t) - v_{i-}(t)]$$

com as características de ter um ganho  $K$  muito elevado,

$$K \gg 1$$

e uma resistência de entrada  $R_i$  praticamente infinita

$$R_i = \frac{v_{i+}(t) - v_{i-}(t)}{i_i(t)} \approx \infty.$$



Estas características permitem analisar o comportamento do amplificador operacional, na sua zona linear de funcionamento, assumindo que as tensões de entrada são praticamente iguais

$$v_{i+}(t) \cong v_{i-}(t) \quad (5.101)$$

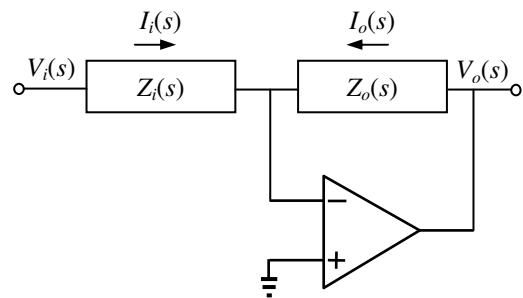
e a corrente de entrada é praticamente nula

$$i_i(t) \cong 0. \quad (5.102)$$

Considere-se agora a seguinte montagem de um amplificador operacional em que  $Z_o(s)$  e  $Z_i(s)$  são impedâncias a especificar.

A tensão na entrada + é 0. Então devido a (5.101) e (5.102) deve ter-se:

$$\begin{aligned} I_o(s) &= \frac{V_o(s)}{Z_o(s)} & I_i(s) &= \frac{V_i(s)}{Z_i(s)} \\ I_o(s) &= -I_i(s) \\ \frac{V_o(s)}{Z_o(s)} &= -\frac{V_i(s)}{Z_i(s)} \\ V_o(s) &= -\frac{Z_o(s)}{Z_i(s)} V_i(s) = Z_m(s) V_i(s) \end{aligned}$$



Os pólos de  $Z_m(s)$  são os pólos de  $Z_o(s)$  e/ou os zeros de  $Z_i(s)$ . Os zeros de  $Z_m(s)$  são os zeros de  $Z_o(s)$  e/ou os pólos de  $Z_i(s)$ .

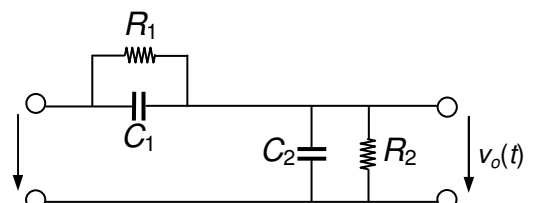
**Exercícios**

**5.11** Determine a expressão geral da resposta de um circuito RC passa-alto (Exemplo 2-12) a uma entrada em impulso de Heaviside.

**5.12** Para o circuito LRC série determinar as funções de transferência:

$$\text{a) } H_L(s) = \frac{V_L(s)}{V_i(s)} \quad \text{b) } H_R(s) = \frac{V_R(s)}{V_i(s)}$$

**5.13** Determinar a função de transferência do seguinte circuito:

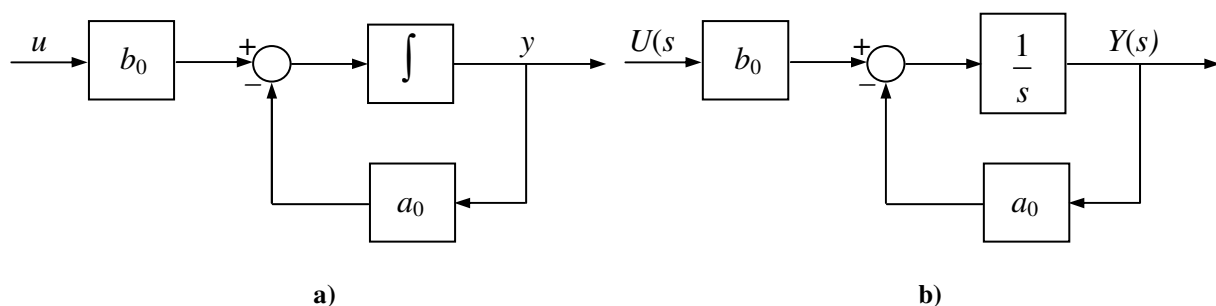


**5.14** Determinar as funções de transferência e equações diferenciais correspondentes das montagens do amplificador operacional como:

- amplificador inversor,  $Z_i$  e  $Z_o$  são realizados por resistências.
- integrador inversor,  $Z_i$  é realizado por uma resistência e  $Z_o$  por um condensador.
- derivador inversor,  $Z_i$  é realizado por um condensador e  $Z_o$  por uma resistência.

## 5.2 Diagramas de blocos no domínio de Laplace

Os conceitos de função de transferência e de transformada de Laplace da evolução temporal de uma variável podem ser aplicados aos diagramas de blocos. Num diagrama de blocos *temporal* as setas representam variáveis e os blocos representam operadores temporais. Num diagrama de blocos no *domínio de Laplace*, as setas representam *transformadas de Laplace* de variáveis e os blocos representam *funções de transferência* de operadores. Veja-se a Figura 5-6 para um exemplo.



**Figura 5-6** a) Diagrama de blocos temporal do integrador realimentado. b) Diagrama de blocos no domínio de Laplace do integrador realimentado. A função de transferência de um produto por constante é igual à constante. A função de transferência do integrador puro é igual a  $1/s$ .

Uma das razões que tornam os diagramas de blocos em Laplace particularmente úteis é o facto de um diagrama com vários blocos poder ser reduzido a um diagrama com um só bloco e vice-versa. Através da redução, é possível modelizar um sistema complicado, se forem conhecidas as funções de transferência dos seus subsistemas ou componentes.

A redução ou expansão de diagramas de blocos faz uso de equivalências entre diagramas baseadas em propriedades das transformadas de Laplace e pode ser sumariada em 5 equivalências. A primeira equivalência é verdadeira para diagramas no domínio de Laplace ou no domínio do tempo. As restantes podem ser estendidas ao domínio do tempo se for definido um operador de derivação temporal com propriedades correspondentes às da multiplicação pelo operador  $s$  no domínio de Laplace: existência de inverso, composição soma e composição produto.

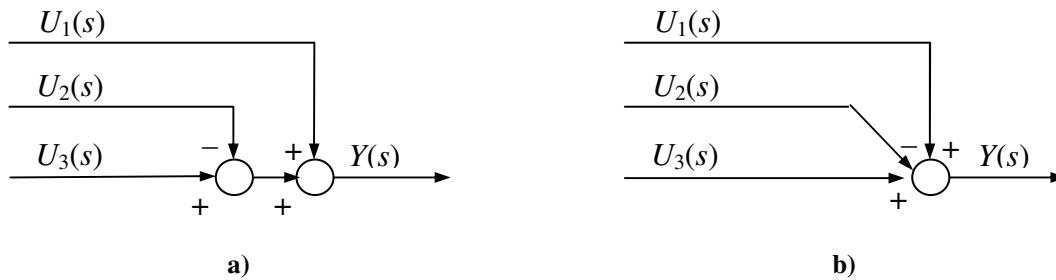
### Equivalência de pontos de soma

A propriedade associativa da adição permite reduzir pontos de soma ou expandi-los. A

expressão

$$Y(s) = U_1(s) + U_2(s) + \dots + U_n(s) \quad (5.103)$$

pode ser representada em qualquer forma que a propriedade associativa da adição permita. Veja-se a Figura 2-25 para um exemplo.



**Figura 5-7** Exemplo de equivalência de pontos de soma dada a associatividade da adição. O diagrama em **b)** é equivalente ao diagrama em **a)**.

### Equivalência série

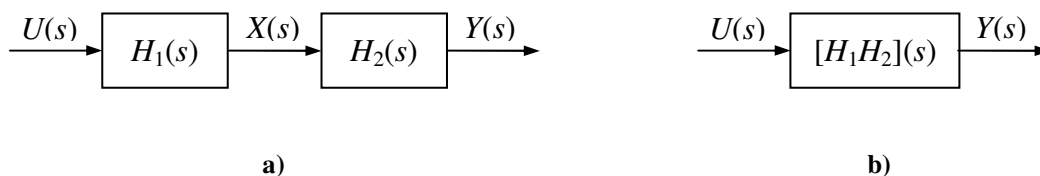
Suponha-se que num diagrama de blocos encontramos 2 blocos em série como mostra a Figura 5-8a. Tem-se:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_2(s)X(s) \\ X(s) &= H_1(s)U(s) \end{aligned} \quad (5.104)$$

Substituindo a expressão de  $X(s)$  na primeira equação obtém-se:

$$Y(s) = H_1(s)H_2(s)U(s) = [H_1H_2](s)U(s). \quad (5.105)$$

Ou seja, dois blocos em série são equivalentes a um só bloco cuja função de transferência é o produto das funções de transferência de cada um.



**Figura 5-8** Equivalência de dois blocos em série. A função de transferência do bloco equivalente em **b)** iguala o produto das funções de transferência de cada um dos blocos em **a)**.

### Equivalência paralelo

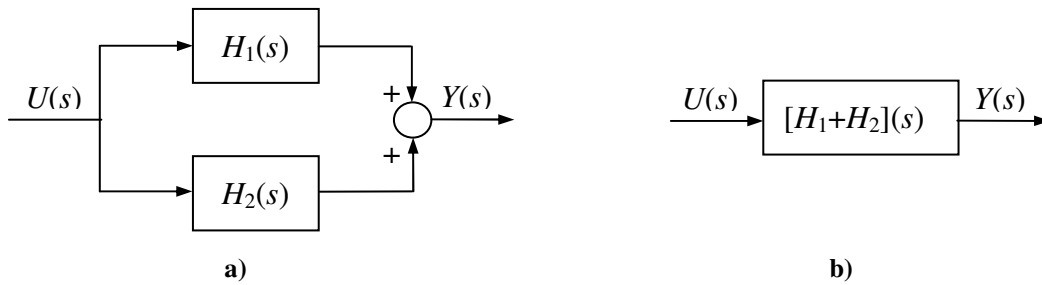
Suponha-se que num diagrama de blocos encontramos 2 blocos em paralelo como mostra a Figura 5-9a. Tem-se:

$$Y(s) = H_1(s)U(s) + H_2(s)U(s). \quad (5.106)$$

Aplicando a propriedade distributiva do produto em relação à soma obtém-se:

$$Y(s) = [H_1(s) + H_2(s)]U(s) = [H_1 + H_2](s)U(s). \quad (5.107)$$

Ou seja, dois blocos em paralelo podem ser substituídos por um só bloco cuja função de transferência é a soma das funções de transferência de cada um e vice-versa.



**Figura 5-9** Equivalência de dois blocos em paralelo. A função de transferência do bloco equivalente em **b)** iguala a soma das funções de transferência de cada um dos blocos em **a)**.

### Equivalência de um anel

Suponha-se que num diagrama de blocos encontramos 2 blocos formando um anel como mostra a Figura 5-10a. Tem-se:

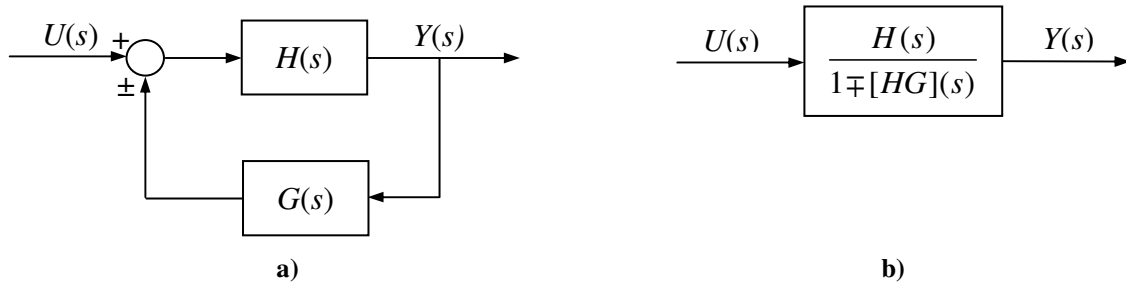
$$Y(s) = H(s)[U(s) \pm G(s)Y(s)]. \quad (5.108)$$

A obtenção de um bloco equivalente ao anel obtém-se pela seguinte reescrita de (5.108):

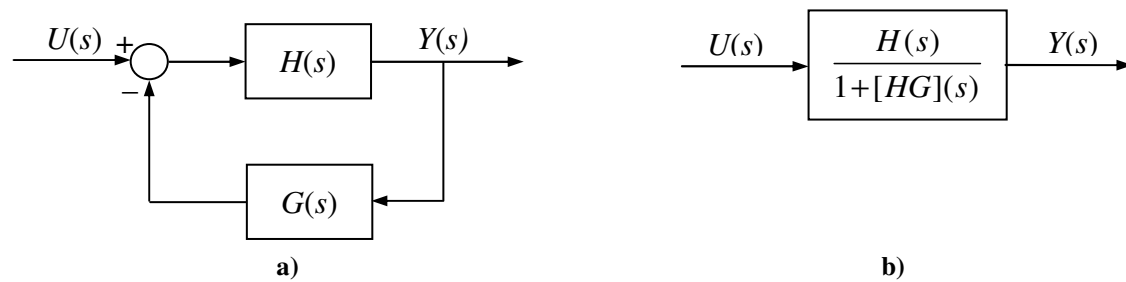
$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)U(s) \pm H(s)G(s)Y(s) \\ Y(s) \mp H(s)G(s)Y(s) &= H(s)U(s) \\ Y(s)[1 \mp H(s)G(s)] &= H(s)U(s) \end{aligned} \quad (5.109)$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{H(s)}{1 \mp H(s)G(s)} U(s) \\ &= \frac{H(s)}{1 \mp [HG](s)} U(s) \end{aligned} \quad (5.110)$$

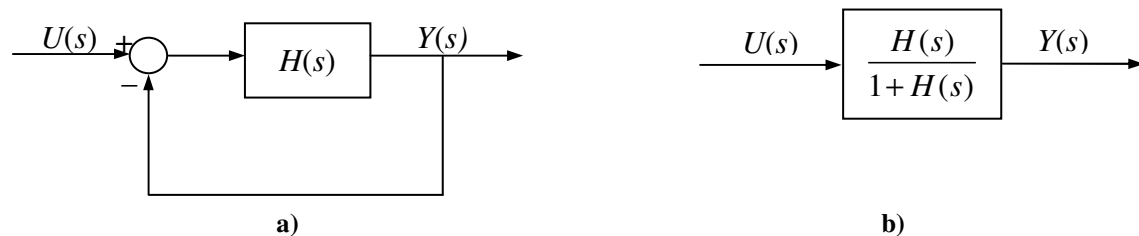
Consoante o sinal da soma algébrica de  $H(s)G(s)Y(s)$  é positivo ou negativo diz-se que o anel é de realimentação positiva ou negativa. A redução de anéis de realimentação negativa é particularmente frequente e está documentada na Figura 5-11. O caso particular de ser  $G(s) = 1$ , representado na Figura 5-12, merece também atenção especial.



**Figura 5-10** Redução de um anel de realimentação. A realimentação pode ser positiva (sinal +) ou negativa (sinal -).



**Figura 5-11** Redução de um anel de realimentação negativa. O denominador da função de transferência equivalente iguala 1 mais o produto das funções de transferência no anel.



**Figura 5-12** Redução de um anel de realimentação negativa em que a realimentação é unitária.

### Deslocamento de um ponto de soma algébrica

Na transformação de diagramas de blocos é por vezes necessário obter um diagrama equivalente em que um ponto de soma está deslocado da saída de um bloco para a sua entrada. Suponha-se a configuração mostrada na Figura 5-13a. A expressão de  $Y(s)$  escreve-se:

$$Y(s) = U_1(s) + H(s)U_2(s). \quad (5.111)$$

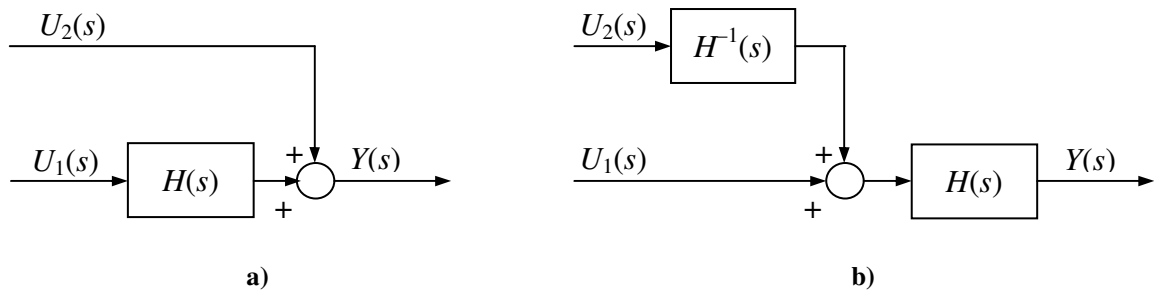
Como  $H(s)H^{-1}(s) = 1$  podemos reescrever (5.111) na forma:

$$Y(s) = H(s)H^{-1}(s)U_1(s) + H(s)U_2(s). \quad (5.112)$$

Pondo  $H(s)$  em evidência:

$$Y(s) = H(s)[H^{-1}(s)U_1(s) + U_2(s)]. \quad (5.113)$$

A equação (5.113) descreve o diagrama na Figura 5-13b.



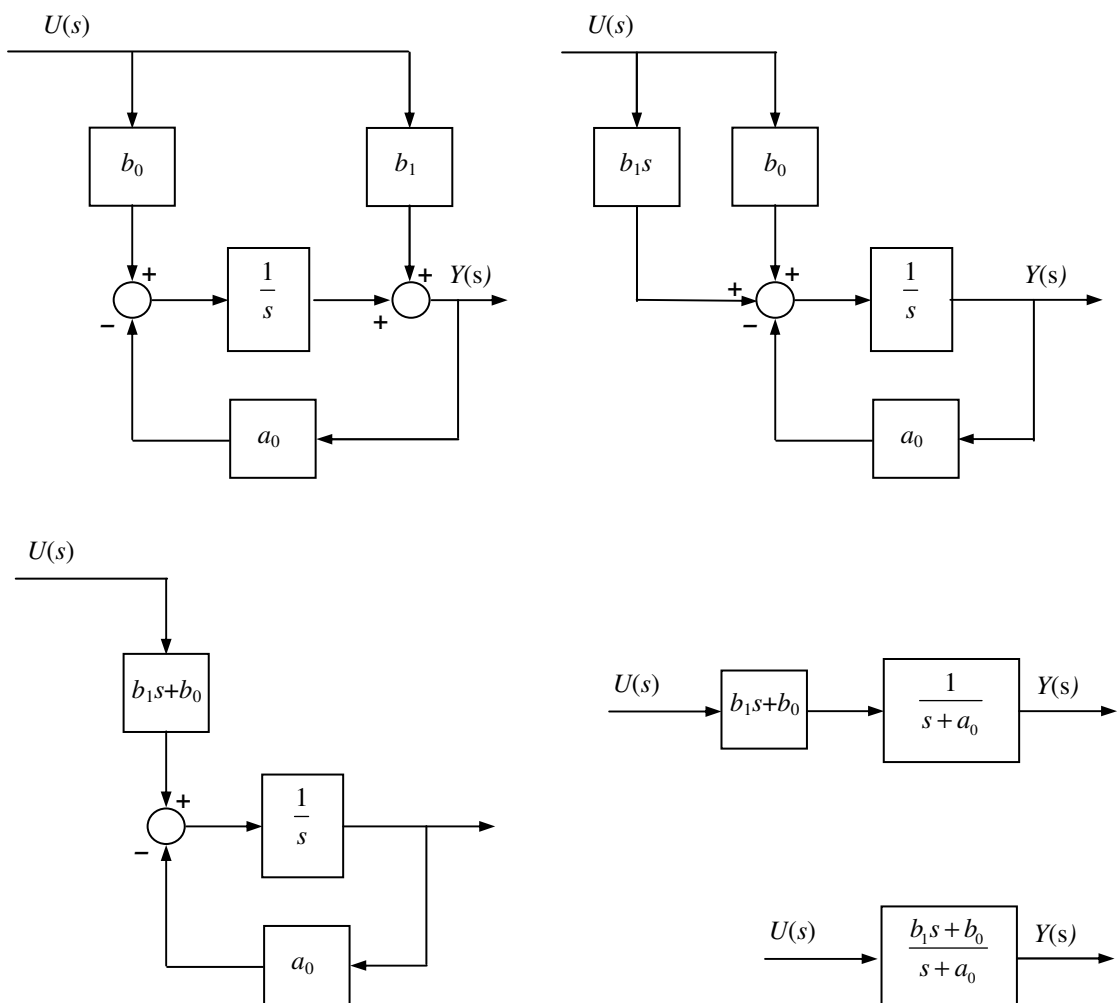
**Figura 5-13** Deslocamento de um ponto de soma algébrica da saída de um bloco para a sua entrada.

O Exemplo 2-15 mostra a aplicação de todas as regras na redução do diagrama de blocos do modelo LIT diferencial causal de primeira ordem:

$$y' + a_0 y = b_1 u' + b_0 u \quad (5.114)$$

#### Exemplo 5-14 Redução do diagrama de blocos do modelo diferencial de primeira ordem

O leitor deve tomar em consideração que as equivalências entre pontos de soma devidas à associatividade da adição não são explicitamente documentadas na sequência de diagramas.



## Exercícios

**5.15** Um sistema é representado pelo seguinte conjunto de equações no domínio  $s$ :

$$\begin{cases} Y(s) = \frac{1}{s} X(s) \\ X(s) = \frac{s+5}{s+10} C(s) \\ C(s) = K[R(s) - Y(s)] \end{cases} .$$

- Determine o diagrama de blocos correspondente à descrição.
- Após análise do sistema conclui-se que uma variável externa,  $P(s)$  age sobre o sistema de forma que, de facto, se tem:

$$X(s) = \frac{s+5}{s+10} [C(s) + P(s)]$$

Transforme o diagrama obtido, de forma a obter-se um diagrama coerente com esta equação.

- Uma segunda análise do sistema mostra que na variável  $Y(s)$  estão presentes duas componentes. Uma componente é a variável de saída da função de transferência  $1/s$ . A outra é uma variável de ruído  $N(s)$ . As componentes combinam-se de forma aditiva.

Transforme o diagrama obtido, de forma a obter-se um diagrama coerente com esta situação.

Simule esta situação em ScicosLab.

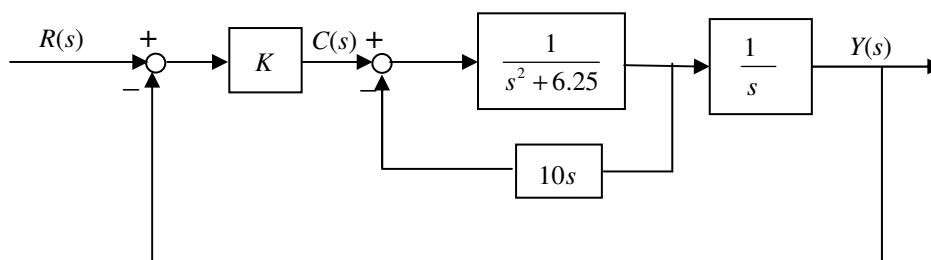
- Estabeleça as funções de transferência:

$$H_{ry}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \quad H_{py}(s) = \frac{Y(s)}{P(s)} \quad H_{ny}(s) = \frac{Y(s)}{N(s)}$$

- Simule a saída  $y(t)$  em ScicosLab.

**5.16** Reduza o seguinte diagrama de blocos a um só bloco equivalente com entrada  $R(s)$  e saída  $Y(s)$ .

Simule o sistema das duas formas e verifique que são produzidas as mesmas saídas para as mesmas entradas em qualquer das formas.



## 6

# MODELOS LIT E INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS

*Objectivo* Problema da análise da influência dos parâmetros no comportamento de um sistema. Resposta ao Dirac e função de peso. Comportamento estável e instável. Estabilidade estrita e marginal e critério de estabilidade. Regime transitório e regime permanente em respostas a entradas lineares. Ganho em regime permanente ao degrau e à sinusóide.

Na secção anterior, mostramos como os modelos no domínio  $s$  podem ser usados para resolver o problema da previsão da resposta forçada. Nesta secção vamos debruçar-nos sobre a informação que os valores dos parâmetros dos modelos nos podem dar sobre os comportamentos que eles descrevem.

### 6.1.1 Resposta impulsional ou resposta ao impulso de Dirac

Embora o impulso de Dirac seja uma abstracção, apenas aproximável, de um sinal ou evolução temporal de uma variável com uma duração muito curta, é extremamente útil considerar a resposta de um modelo LIT à sua aplicação.

Seja um sistema tendo por modelo uma função de transferência  $H(s)$ . Aplicando na entrada um impulso de Dirac  $\delta(t)$ , que sinal  $y_\delta(t)$  observaríamos na saída?

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\delta(t)) &= 1 \\ Y_\delta(s) &= H(s) \cdot 1 = H(s) \\ y_\delta(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y_\delta(s)) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)) = h(t)\end{aligned}\tag{6.1}$$



A resposta prevista pelo modelo será uma função  $h(t)$  que é a antitransformada de  $H(s)$ . Esta função  $h(t)$ <sup>1</sup>, tal como a função de transferência, caracteriza o modelo. É chamada a *função de peso* do modelo. A razão é que qualquer saída  $y_F(t)$  se pode calcular como a convolução de  $h(t)$  pela entrada aplicada  $u(t)$ :

$$y_F(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau) d\tau. \quad (6.2)$$

Em (6.2) o símbolo  $*$  significa a operação de convolução. A função  $h(t)$  pode ver-se como pesando a contribuição de cada  $u(\tau)$  no valor de  $y_F(t)$ . Uma das vantagens da utilização da transformada de Laplace é a de permitir substituir o cálculo de um integral de convolução como o de (6.2) por operações algébricas envolvendo transformadas.

A forma de  $h(t)$  é determinada pelo número e valor dos pólos de  $H(s)$ . Com efeito tem-se, para o caso dos pólos  $p_i$  de  $H(s)$  serem todos distintos:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_i}{s-p_i}\right). \quad (6.3)$$

Em (6.3)  $n$  é o número de pólos,  $p_i$  o valor de cada pólo e  $A_i = H_i(p_i)$  o valor da função “resíduo” para  $s = p_i$  (confrontar (5.51), (5.52), (5.53)). O facto de  $h(t)$  ser uma soma em que cada parcela depende directamente de um pólo<sup>2</sup> de uma forma precisa, permite prever a forma e propriedades da resposta, se forem conhecidos os pólos e os zeros da função de transferência. Vejamos alguns exemplos de funções de transferência sem zeros.

#### Exemplo 6-1 Resposta ao Dirac de funções de transferência com um só pólo real.

Uma função de transferência com um só pólo real e sem zeros tem por expressão:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s-\sigma} \quad (6.4)$$

As respostas ao Dirac  $y_\delta(t)$  ou funções de peso  $h(t)$  para  $t > 0$  serão, conforme o sinal do pólo  $\sigma$ ,

com  $T = |\sigma|^{-1} = \frac{1}{|\sigma|}$ :

$$\begin{array}{ll} \sigma < 0 \rightarrow y_\delta(t) = h(t) = Ke^{-\frac{t}{T}} & \text{exponencial tendendo para 0 de valor inicial } K \\ \sigma = 0 \rightarrow y_\delta(t) = h(t) = K & \text{constante de valor } K \\ \sigma > 0 \rightarrow y_\delta(t) = h(t) = Ke^{\frac{t}{T}} & \text{exponencial tendendo para } \infty \text{ de valor inicial } K \end{array} \quad (6.5)$$

#### Exemplo 6-2 Resposta ao Dirac de funções de transferência com um só par de pólos complexos

<sup>1</sup> Não confundir o símbolo genérico de uma função de peso  $h(t)$ , com o símbolo do degrau unitário  $h(t)$ .

<sup>2</sup> É a antitransformada de uma expressão  $A_i/(s-p_i)$ ,  $p_i$  sendo um pólo.

**conjugados.**

A função de transferência a considerar tem apenas dois pólos complexos conjugados:

$$p = \sigma + j\omega, p^* = \sigma - j\omega, \quad \omega > 0.$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{(s-p)(s-p^*)} = \frac{K}{(s-(\sigma+j\omega))(s-(\sigma-j\omega))} = \frac{K}{s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2} \quad (6.6)$$

Se  $\sigma = 0$ , os pólos desta função de transferência situam-se no eixo imaginário em  $\pm j\omega$ :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2 + \omega^2}. \quad (6.7)$$

A resposta ao Dirac  $y_\delta(t)$  ou função de peso  $h(t)$  é uma oscilação sinusoidal de frequência  $\omega$ , fase inicial 0 e amplitude constante  $K/\omega$ .

$$\begin{aligned} y_\delta(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{K}{(s-j\omega)(s+j\omega)} \right) = \\ &= K \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{2j\omega} \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{2j\omega} \frac{1}{s+j\omega} \right) = \\ &= \frac{K}{\omega} \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \\ &= \frac{K}{\omega} \text{sen}(\omega t). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Se  $\sigma \neq 0$  os pólos situam-se ou no semiplano esquerdo ou no semiplano direito do plano  $s$ .

$$\begin{aligned} y_\delta(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{K}{(s-(\sigma+j\omega))(s-(\sigma-j\omega))} \right) = \\ &= K \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{2j\omega} \frac{1}{s-(\sigma+j\omega)} - \frac{1}{2j\omega} \frac{1}{s-(\sigma-j\omega)} \right) = \\ &= \frac{K}{\omega} \frac{1}{2j} (e^{(\sigma+j\omega)t} - e^{(\sigma-j\omega)t}) = \frac{K}{\omega} e^{\sigma t} \frac{1}{2j} (e^{+j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \\ &= \frac{K}{\omega} e^{\sigma t} \text{sen}(\omega t). \end{aligned} \quad (6.9)$$

A resposta ao Dirac  $y_\delta(t)$  ou função de peso  $h(t)$  é uma oscilação sinusoidal de frequência  $\omega$ , fase inicial 0, com amplitude decrescente se  $\sigma < 0$ , ou amplitude crescente se  $\sigma > 0$ .

## Resposta ao Dirac como uma soma de modos

Os exemplos anteriores ajudarão a compreender o seguinte. *Qualquer* resposta ao impulso de Dirac de uma função de transferência  $H(s)$  da forma (5.34) com  $n > m$ , e *qualquer* função de peso correspondente  $h(t)$  é uma soma de funções que chamamos *modos lineares*. Se os pólos  $p_i$  de  $H(s)$  forem todos diferentes, então a forma geral de (6.3) é uma soma de *modos lineares exponenciais*:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} . \quad (6.10)$$

Se  $p_i \in \mathbb{R} \leftrightarrow p_i = \sigma_i$ , a constante  $A_i$  é real e o modo  $h_i(t) = A_i e^{\sigma_i t}$  é uma exponencial real que tende para 0, para  $A_i$  ou para  $\infty$  dependendo do sinal de  $\sigma_i$ :

$$\begin{aligned} \sigma_i < 0 &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t) = 0 \\ \sigma_i = 0 &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t) = A_i \\ \sigma_i > 0 &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t) = \infty \end{aligned} \quad (6.11)$$

Neste caso, dizemos que o modo é *real e não-oscilatório*.

Se  $p_i \in \mathbb{C} \leftrightarrow p_i = \sigma_i + j\omega_i$ , o coeficiente  $A_i$  pode ser complexo,  $A_i = |A_i| e^{j\phi_i}$  e o modo  $h_i(t) = A_i e^{p_i t} = A_i e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} = A_i e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t}$  é uma exponencial complexa. Dizemos que o modo é *complexo*.

O seu módulo é

$$|h_i(t)| = |A_i| |e^{\sigma_i t}| |e^{j\omega_i t}| = |A_i| e^{\sigma_i t} \cdot 1 = |A_i| e^{\sigma_i t} . \quad (6.12)$$

Similarmente ao caso anterior, o comportamento de  $|h_i(t)|$  quando  $t \rightarrow \infty$ , é uma função do sinal de  $\sigma_i$ .

$$\begin{aligned} \sigma_i < 0 &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |h_i(t)| = 0 \\ \sigma_i = 0 &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |h_i(t)| = |A_i| \\ \sigma_i > 0 &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |h_i(t)| = \infty \end{aligned}$$

Num modelo LIT de coeficientes reais, um pólo  $p_i \in \mathbb{C} \leftrightarrow p_i = \sigma_i + j\omega_i$  aparecerá sempre acompanhado do seu conjugado

$$\exists p_i = \sigma_i + j\omega_i \rightarrow \exists p_j = p_i^* = \sigma_i - j\omega_i \quad (6.13)$$

A função de peso conterá dois modos complexos conjugados com coeficientes também conjugados:

$$\begin{aligned} h_i(t) + h_i^*(t) &= |A_i| e^{j\phi_i} e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} + |A_i| e^{-j\phi_i} e^{\sigma_i t} e^{-j\omega_i t} = \\ &= |A_i| e^{\sigma_i t} (e^{j\omega_i t} e^{j\phi_i} + e^{-j\omega_i t} e^{-j\phi_i}) = \\ &= |A_i| e^{\sigma_i t} (e^{j(\omega_i t + \phi_i)} + e^{-j(\omega_i t + \phi_i)}) = \\ &= 2|A_i| e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i) = \\ &= 2|A_i| e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t + \phi_i + \pi/2) \end{aligned} \quad (6.14)$$

A soma  $h_{ii^*}(t) = h_i(t) + h_i^*(t)$  de dois modos complexos conjugados é uma função sinusoidal do tempo de amplitude  $2|A_i| e^{\sigma_i t}$  frequência angular  $\omega_i$  e fase inicial  $\phi_i$ , ou fase inicial  $\phi_i - \pi/2$ , conforme se exprima a função em co-seno ou em seno. Dizemos que a soma

dos modos complexos é um *modo real oscilatório*.

Diferentemente do caso anterior, o comportamento de  $h_{ii^*}(t)$  ou de  $|h_{ii^*}(t)|$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , não é monótono, mas sim oscilatório, devido à função sinusoidal. É então útil exprimir este comportamento em termos de intervalos de valores, em que os valores da função  $h_{ii^*}(t)$  ou do seu módulo  $|h_{ii^*}(t)|$  podem ficar confinados em função do sinal de  $\sigma_i$ :

$$\sigma_i < 0 \rightarrow \forall M > 0, \exists t, \forall \tau > 0, |h_{ii^*}(t + \tau)| < M \quad (6.15)$$

$$\sigma_i = 0 \rightarrow \exists M > 0, \forall t, |h_{ii^*}(t)| \leq M \quad (6.16)$$

$$\sigma_i > 0 \rightarrow \neg \exists M > 0, \forall t, |h_{ii^*}(t)| \leq M \quad (6.17)$$

A primeira equação diz que se  $\sigma_i < 0$ , então, por pequeno que seja o valor constante  $M$  escolhido, existirá um instante de tempo  $t$ , a partir do qual, todos os valores de  $|h_{ii^*}(t + \tau)|, \tau > 0$  lhe serão inferiores. Significa isto, claro, que  $\sigma_i < 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |h_{ii^*}(t)| = 0$ . A segunda equação diz que, se  $\sigma_i = 0$ , os valores de  $h_{ii^*}(t + \tau)$  estarão confinados num intervalo  $[-M, +M]$ . A terceira que, se  $\sigma_i > 0$ , tal intervalo não existe.

Pode ver-se que as implicações em (6.15), (6.16) e (6.17) também são verdadeiras para os modos reais exponenciais.

Esta análise permite-nos enunciar o seguinte resultado de grande interesse prático.

Na resposta ao Dirac ou na função de peso  $h(t)$  de uma função de transferência  $H(s)$  da forma (5.34) com  $n > m$  e *todos os pólos distintos*, podemos encontrar 6 (e apenas 6!) tipos de parcelas reais ou de modos reais. Pondo mais uma vez  $T = |\sigma|^{-1}$ :

	Módulo tem limite 0	Módulo é limitado	Módulo é ilimitado
Não-oscilatórios	$Ae^{-\frac{t}{T}}$	$A$	$Ae^{+\frac{t}{T}}$
Oscilatórios	$Ae^{-\frac{t}{T}} \cos(\omega t + \phi)$	$A \cos(\omega t + \phi)$	$Ae^{+\frac{t}{T}} \cos(\omega t + \phi)$

Se os pólos não forem todos distintos, isto é se alguns pólos forem múltiplos, a expressão de  $H(s)$  vem:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \\ &= b_m \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_j) \dots (s - p_i)^{K(i)} \dots} \end{aligned} \quad (6.18)$$

$H(s)$  tem  $J$  pólos simples ou de multiplicidade 1 e tem pelo menos um pólo  $p_i$  de multiplicidade  $K(i) = 2, 3, \dots$ ,

Na expressão do somatório de  $H(s)$  em fracções parciais existirá alguma ou algumas fracções parciais da forma:

$$H_{i,k}(s) = \frac{A_{i,k}}{(s - p_i)^k}. \quad (6.19)$$

Em que  $k = 2, 3, \dots, K(i)$ . A resposta ao Dirac ou o modo que corresponde à expressão (6.19) é

$$y_\delta(t) = h_{i,k}(t) = \frac{A_{i,k}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} = \frac{A_{i,k}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} \quad (6.20)$$

Chamaremos a modos com esta forma modos *ressonantes*. Tal como no caso dos pólos simples, se  $p_i \in \mathbb{C}$ , existirá um modo que lhe é conjugado. Uma análise semelhante à anterior levar-nos-ia á conclusão de que podemos definir também 6 tipos de modos reais ressonantes, um para cada um dos modos no quadro anterior:

	Módulo tem limite 0	Módulo é ilimitado	Módulo é ilimitado
Não-oscilatórios	$At^k e^{-\frac{t}{T}}$	$At^k$	$At^k e^{+\frac{t}{T}}$
Oscilatórios	$At^k e^{-\frac{t}{T}} \cos(\omega t + \phi)$	$At^k \cos(\omega t + \phi)$	$At^k e^{+\frac{t}{T}} \cos(\omega t + \phi)$

Uma importante diferença aparece na coluna do meio: o módulo dos modos correspondentes a pólos múltiplos situados no eixo imaginário,  $\text{Re}(p_i) = \sigma_i = 0$ , cresce sem limite quando  $t \rightarrow \infty$ :

$$\sigma_i = 0 \rightarrow \neg \exists M > 0, \forall t, |h_{i,k}(t)| \leq M \quad (6.21)$$

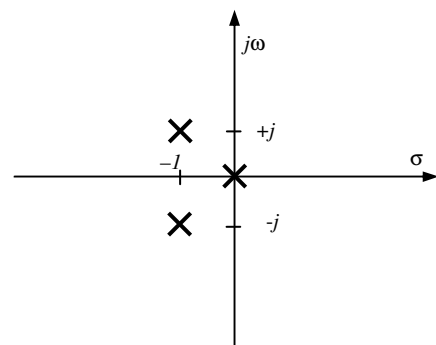
Nos outros dois casos,  $\sigma_i < 0 \vee \sigma_i > 0$ , o comportamento é igual ao dos pólos simples.

## Exercícios

**6.1** Determinar os pólos e os zeros das seguintes funções de transferência, escrevê-las na forma zero-polar, determinar as suas respostas ao impulso de Dirac e o comportamento destas quando  $t \rightarrow \infty$ , e esboçar os seus gráficos.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } H(s) = -\frac{1}{s} & \text{b) } H(s) = \frac{2}{s^2} & \text{c) } H(s) = \frac{1}{s+5} & \text{d) } H(s) = \frac{10}{s^2+25} \\ \text{e) } H(s) = \frac{25}{s^3+25s} & \text{f) } H(s) = \frac{50}{(s+5)^2} & \text{e) } H(s) = \frac{54}{(s+2)(s^2+25)} & \end{array}$$

**6.2** Considere o diagrama zero-polar de uma função de transferência representado na figura. Sem calcular antitransformadas, dizer qual a forma da resposta ao Dirac da mesma e esboçar um gráfico.



### 6.1.2 Estabilidade de modelos LIT

Seja a resposta ao Dirac  $h(t)$  de uma função de transferência  $H(s)$ . Dizemos que é *instável* se

$$\neg \exists M > 0, \forall t, |h(t)| \leq M. \quad (6.22)$$

Uma  $h(t)$  – ou  $H(s)$  – será *estável* se não for instável. Ou seja, se:

$$\exists M > 0, \forall t, |h(t)| \leq M. \quad (6.23)$$

Podemos distinguir duas classes de estabilidade. Um modelo *estritamente estável* satisfaz (6.23) e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t)| = 0. \quad (6.24)$$

Um modelo marginalmente estável satisfaz (6.23), mas não (6.24).

#### Critério fundamental de estabilidade

Visto que a resposta ao Dirac de uma função de transferência  $H(s)$ :

- i) é um somatório de modos;
- ii) para cada tipo de modos conhecemos a sua estabilidade como uma função da parte real  $\text{Re}(p_i) = \sigma_i$  e da multiplicidade  $K(p_i)$  do pólo, ou pólos, que lhe dão origem.

Podemos classificar a estabilidade de um modelo linear na forma de  $H(s)$ , pela análise da posição dos pólos no plano  $s$  e da sua multiplicidade.

A condição equivalente a instabilidade é

$$\exists p_i, \text{Re}(p_i) > 0 \vee \exists p_i, \text{Re}(p_i) = 0 \wedge K(p_i) > 1. \quad (6.25)$$

Ou seja existe pelo menos um pólo no semiplano direito ou um pólo de multiplicidade maior que 1 no eixo imaginário.

A condição equivalente a estabilidade estrita é

$$\forall p_i, \text{Re}(p_i) < 0. \quad (6.26)$$

Ou seja, todos os pólos estão no semiplano esquerdo.

Um modelo é marginalmente estável se só tiver pólos de multiplicidade 1 no eixo imaginário e não tiver pólos no semiplano direito.

### 6.1.3 Regime transitório e regime permanente da resposta forçada

Suponhamos que aplicamos a um modelo de função de transferência  $H(s)$ , estritamente estável, com  $n_H$  pólos,  $p_{1H} \dots p_{nH}$ , e  $m_H$  zeros,  $z_{1H} \dots z_{mH}$ , uma entrada arbitrária  $U(s)$  definida por uma fracção de polinómios em  $s$  com  $n_U$  pólos,  $p_{1U} \dots p_{nU}$ , e  $m_U$  zeros,

$z_{1H} \dots z_{mH}$ . A transformada da saída vem:

$$Y(s) = H(s)U(s) = K_H \frac{(s - z_{1H}) \dots (s - z_{mH})}{(s - p_{1H}) \dots (s - p_{nH})} K_U \frac{(s - z_{1U}) \dots (s - z_{mU})}{(s - p_{1U}) \dots (s - p_{nU})} \quad (6.27)$$

A saída  $y(t)$  vai ser o somatório de dois tipos de modos. Os *modos próprios* de  $H$  e os *modos provocados* por  $U$ :

$$y(t) = \sum h_{iH}(t) + \sum h_{iU}(t) \quad (6.28)$$

Se  $H$  é estritamente estável todos os seus modos tendem para 0. É possível encontrar um tempo de observação  $t_o$  a partir do qual a contribuição do primeiro somatório possa ser considerada 0. Então

$$t \geq t_o \rightarrow y(t) = \sum h_{iU}(t) \quad (6.29)$$

Ou seja, apenas os modos provocados pela entrada estão presentes na saída. Chamamos ao intervalo  $[0, t_o[$  o *regime transitório* e ao intervalo  $[t_o, \infty[$  o *regime permanente* da resposta  $y(t)$ .

### Ganho ao degrau unitário em regime permanente

Suponhamos que aplicamos a um modelo de função de transferência  $H(s)$ , estritamente estável – todos os pólos no semiplano esquerdo –, um impulso em degrau unitário. Pode ver-se que a resposta  $y(t)$  tende para um valor constante.

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{H(s)}{s} = \\ &= \frac{A_0}{s} + H'(s) = \frac{H(0)}{s} + H'(s) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Pelo método dos resíduos tem-se que:

$$A_0 = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = H(0) \quad (6.31)$$

A resposta  $y(t)$  tem por expressão:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = H(0) \cdot h(t) + \mathcal{L}^{-1}[H'(s)] \quad (6.32)$$

O facto de  $H(s)$  ser estritamente estável faz com que  $H'(s)$  o seja (os pólos de  $H'(s)$  são idênticos aos de  $H(s)$ ). O limite de  $y(t)$  quando  $t$  tende para infinito é então:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( H(0) \cdot h(t) + \mathcal{L}^{-1} [H'(s)] \right) = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} H(0) \cdot h(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} [H'(s)] = \\
&= H(0) + 0 = \\
&= H(0)
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Então no regime permanente, a propriedade (6.29) é satisfeita e:

$$t > t_o \rightarrow y(t) = H(0) \tag{6.34}$$

$H(0)$  é chamado o *ganho ao degrau em regime permanente* e é também simbolizado como  $K_{rp}$ .

### Ganho à sinusóide em regime permanente

O conhecimento da resposta forçada de um modelo LIT  $H(s)$ , estritamente estável, a uma sinusóide é de importância fulcral em diversas áreas da Engenharia. Suponha-se que a sinusóide de teste é dada pela função de amplitude unitária  $u(t) = \text{sen}(\omega t)$ . Tem-se que

$$\begin{aligned}
Y(s) &= H(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = H(s) \frac{\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = \\
&= \frac{A}{s - j\omega} - \frac{A^*}{s + j\omega} + H'(s) = \\
&= \frac{H(j\omega)/2j}{s - j\omega} - \frac{H(-j\omega)/2j}{s + j\omega} + H'(s)
\end{aligned} \tag{6.35}$$

De novo, o método dos resíduos permite-nos concluir que:

$$A = \frac{H(j\omega)}{2j} \quad A^* = \frac{H(-j\omega)}{2j} \tag{6.36}$$

Também, o facto de  $H(s)$  ser estritamente estável faz com que  $H'(s)$  o seja. Então no regime permanente, a propriedade (6.29) é satisfeita. Com efeito, usando o facto de que  $H(j\omega)$  e  $H(-j\omega)$  são números complexos conjugados com módulo  $K$  e argumentos  $\pm\phi$ :

$$\begin{aligned}
K &= |H(j\omega)| = |H(-j\omega)| \\
\phi &= \arg H(j\omega) = -\arg H(-j\omega)
\end{aligned} \tag{6.37}$$



Podemos verificar que no regime permanente

$$\begin{aligned}
 t > t_o &\rightarrow \\
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{2j} \frac{H(j\omega)}{s - j\omega} - \frac{1}{2j} \frac{H(-j\omega)}{s + j\omega} \right) = \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{2j} \frac{K e^{j\phi}}{s - j\omega} - \frac{1}{2j} \frac{K e^{-j\phi}}{s + j\omega} \right) \\
 &= K \frac{1}{2j} \left( e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)} \right) = \\
 &= K \sin(\omega t + \phi).
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

A saída é portanto uma sinusóide com amplitude  $K$  e desfasamento  $\phi$ . O ganho em regime permanente para uma sinusóide é um número complexo, cujo módulo é o ganho em amplitude  $K$  e o argumento é a fase para o instante 0. Este número complexo –  $H(j\omega)$  – é função de  $\omega$ . Será diferente para diferentes valores de  $\omega$ .

## Exercícios

**6.3** Para os seguintes modelos determinar:

- i) a estabilidade aplicando o critério fundamental de estabilidade;
- ii) o ganho em regime permanente, quando aplicável;
- iii) as respostas em regime permanente a sinusóides com expressão  $u_1(t) = 2\sin(5t)$ ,  $u_2(t) = \sin(t + \pi/4)$ , quando tiverem regime permanente.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } H(s) = \frac{1}{s+5} & \text{b) } H(s) = -\frac{1}{s} & \text{c) } H(s) = \frac{2}{s^2} \\
 \text{d) } H(s) = \frac{25}{s^2 + s + 25} & \text{e) } H(s) = \frac{10}{s^2 + 25} & \text{f) } H(s) = \frac{25}{s^3 + 25s} \\
 \text{g) } H(s) = \frac{50}{(s+5)^2} & \text{h) } H(s) = \frac{2}{s^2 + 3s - 10} & \text{i) } H(s) = \frac{10}{(s^2 + 100)^2}
 \end{array}$$

**6.4** Um sistema mecânico tem a seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{16}{(s+1)^2 + 16}.$$

Determine a amplitude de oscilação produzida na variável de saída  $x(t)$  em regime permanente por uma evolução da força aplicada na entrada dada por  $f(t) = 0.5 \cdot \sin(4t)$  N.



# APÊNDICE A

## FUNÇÕES

### A.1 Definição de função

No sentido matemático, a palavra ‘função’ conceptualiza a noção de *relação unívoca* entre elementos de um conjunto  $X$ , dito *conjunto de partida*, e elementos de um conjunto  $Y$ , dito *conjunto de chegada*. A relação é estabelecida através de um processo de *associação* ou *transformação*  $f$ .

A palavra *unívoca* significa: se o processo de transformação  $f$  associa a um elemento  $x \in X$  um elemento  $y \in Y$ , então  $y$  é único.

#### Exemplo A-1

Seja  $P$  um conjunto de pessoas. A frase “ $y$  é pai de  $x$ ” define uma função em  $P$  (mais exactamente: de  $P$  para  $P$ ), porque uma pessoa só pode ter um pai, logo a pessoa que é pai de  $x$  é única.

Já a frase “ $y$  é filho de  $x$ ” não define uma função em  $P$  porque uma pessoa pode ter mais do que um filho.

Podemos então pensar uma função como a aplicação de um processo de associação  $f$  a um conjunto  $X$ , que tem resultados num conjunto  $Y$ . Em particular deve notar-se que pode ser  $Y = X$ .

Para representarmos sucintamente uma função, indicamos o processo de associação  $f$ , o conjunto de partida  $X$  e o conjunto de chegada  $Y$  através da sua *assinatura*:

$$f : X \rightarrow Y \quad (\text{A.1})$$

Para dizermos que  $y$  é o elemento de  $Y$  que  $f$  associa a um elemento  $x$  de  $X$ , usamos a notação:

$$y = f(x) \quad (\text{A.2})$$

Com a notação (A.2) a *univocidade* de uma função pode exprimir-se pela seguinte fórmula lógica:

$$\forall a, b, c \quad b = f(a) \wedge c = f(a) \rightarrow b = c \quad (\text{A.3})$$

## A.2 Funções totais e parciais

Uma função é dita *total* se associar a *todos* os elementos de  $X$  algum  $y \in Y$ .

$$\forall x \in X, \exists y \in Y \quad y = f(x) \quad (\text{A.4})$$

É dita *parcial* no caso contrário. Se uma função for parcial, existirão elementos de  $X$  que não serão associados a elementos de  $Y$  por  $f$ . Diz-se então que  $f(x)$  não está definido para esses elementos.

### Exemplo A-2

Seja o processo de associação que calcula o inverso de um número  $x$ ,  $f(x) = 1/x$ . A função:

$$1/x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.5})$$

É parcial, porque  $f(0)$  não está definido!

Já a função:

$$1/x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (\text{A.6})$$

É total.

Ao subconjunto dos elementos de  $X$  que são associados a algum elemento de  $Y$  por  $f$ , chamamos o *domínio* da função e representamo-lo por  $\text{Dom}(f)$ . Uma função é então total se

$$\text{Dom}(f) = X \quad (\text{A.7})$$

Uma função é parcial se

$$\text{Dom}(f) \subset X \quad (\text{A.8})$$

## A.3 Funções sobrejectivas

Uma função é dita *sobrejectiva* se todos os elementos de  $Y$  forem associados a elementos de  $X$  por  $f$ .

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \quad y = f(x) \quad (\text{A.9})$$

### Exemplo A-3

Seja o processo de associação que calcula o quadrado de um número  $x$ ,  $f(x) = x^2$ . A função:

$$x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.10})$$

Não é sobrejectiva, porque nenhum número real negativo pode ser quadrado de outro.

Já a função

$$x^2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (\text{A.11})$$

É sobrejectiva.

Ao subconjunto dos elementos de  $Y$  que são associados a algum elemento de  $X$  por  $f$ , chamamos o contra-domínio da função e representamo-lo por  $\text{Codom}(f)$ . Uma função é então sobrejectiva se

$$\text{Codom}(f) = Y \quad (\text{A.12})$$

Uma função não é sobrejectiva se

$$\text{Codom}(f) \subset Y \quad (\text{A.13})$$

#### A.4 Funções injectivas e bijectivas

Uma função é dita *injectiva* se cada elemento de  $X$  só for associado a 1 elemento de  $Y$  por  $f$ .

$$\forall a, b, c \quad c = f(a) \wedge c = f(b) \rightarrow a = b \quad (\text{A.14})$$

##### Exemplo A-4

Seja o processo de associação que calcula o quadrado de um número  $x$ ,  $f(x) = x^2$ . A função:

$$x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.15})$$

Não é injectiva, porque números simétricos têm o mesmo quadrado.

Já a função

$$x^2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (\text{A.16})$$

É injectiva. O mesmo acontece com a função:

$$x^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.17})$$

Uma função é *bijectiva*, se for total, sobrejectiva e injectiva.

Uma função bijectiva estabelece uma correspondência de 1 para 1 entre um conjunto  $X$  e um conjunto  $Y$ .

#### A.5 Facilidade de expressão na linguagem

É usual chamar *função* ao processo de associação  $f$  sem especificar os conjuntos de partida e de chegada.

Em rigor, esta forma de expressão é incorrecta, como mostram os exemplos (A.5) e (A.6), (A.10) e (A.11), (A.15) e (A.16). O *mesmo* processo de associação, aplicado a conjuntos de partida e de chegada *diferentes*, resulta em relações unívocas com *propriedades diferentes*: total versus parcial, sobrejectiva versus não-sobrejectiva, injectiva versus não-injectiva. Segue-se que o processo de associação  $f$  não especifica por completo uma função.

Mas se se tiver isto em mente, resulta mais fácil e cómodo utilizar esta forma de expressão usual em muitas situações.

## A.6 Estabelecimento de valores de uma função

A indicação de uma função através da sua assinatura,  $f : X \rightarrow Y$ , é útil, mas, em geral, insuficiente, porque a assinatura não nos diz *concretamente* que valores de  $X$  são associados a que valores de  $Y$ .

### Exemplo A-5

Considere-se um conjunto de pessoas  $P = \{\text{António, Fernanda, João, José, Maria}\}$ . Porque todas as pessoas têm mãe, segue-se que a assinatura

$$\text{mãe\_de} : \{\text{António, Fernanda, João, José, Maria}\} \rightarrow \{\text{António, Fernanda, João, José, Maria}\} \quad (\text{A.18})$$

indica uma função. Mas quem é mãe de quem? Essa informação só pode ser dada concretamente listando todos os pares  $(p, \text{mãe\_de}(p))$ . Suponhamos que estes são:

(António, Maria), (Fernanda, Maria), (João, Fernanda), (José, Fernanda), (Maria, indef.), o último par significando que a mãe de Maria é uma pessoa que não pertence a  $P$ .

A informação concreta dos pares  $(p, \text{mãe\_de}(p))$  que são associados pela função pode ser dada convenientemente através de uma *tabela*.

### Exemplo A-6

Continuando com o exemplo anterior. A função cuja assinatura é dada por (A.18), supondo que os elementos associados de  $P$  para  $P$  são os indicados acima, pode ser dada extensionalmente pela tabela:

$p$	António	Fernanda	João	José	Maria
$\text{mãe\_de}(p)$	Maria	Maria	Fernanda	Fernanda	indef.

Os exemplos anteriores mostram um caso em que uma função só pode ser concretamente definida, ou dada *extensionalmente*, listando todos os seus pares.

Poderá parecer que este não será o caso, se a função for *numérica*, isto é, tiver como conjuntos de partida e de chegada, conjuntos de números. Não é assim. Considere-se a evolução de uma variável ao longo de um determinado intervalo de tempo, em que os valores da variável são determinados por um processo de *medida*. O processo de associação de valores de instantes de tempo a valores da variável é então estabelecido por um sensor ou instrumento, que, para instantes de tempo pré-fixados, *registra* o valor medido. Se, no intervalo de tempo em causa, forem colhidos  $n$  valores da variável,  $m(t_1)$  a  $m(t_n)$ , a tabela que define a função terá o aspecto geral:

$t$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	...	$t_{n-1}$	$t_n$
$m(t)$	$m(t_1)$	$m(t_2)$	$m(t_3)$	$m(t_4)$	...	$m(t_{n-1})$	$m(t_n)$

Dois problemas comuns em Ciência e Engenharia são as seguintes.

i) Obtido o registo das medidas de uma variável  $y$  ao longo de um intervalo de tempo, encontrar uma *expressão* matemática  $y = f(t)$  que aproxime com um determinado grau de precisão os valores medidos constantes de uma tabela, como a apresentada acima.

Não trataremos dos métodos de solução deste problema aqui. Mas vamos tratar do segundo problema que pode ser considerado, de alguma forma, como o inverso de i):

ii) Seja dada uma função pela assinatura

$$f : T \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.19})$$

Em que  $T = [t_0, t_f]$  é um intervalo de tempo,  $\mathbb{R}$  o conjunto dos reais e  $f$  é uma *expressão* cujo valor pode ser calculado para qualquer  $t \in T$ , conhecido o valor de  $t$ . Ou seja  $f = f(t)$ . O problema é calcular uma tabela como a apresentada acima para  $n$  instantes de tempo pertencentes a  $T$ .

Usando uma linguagem de programação com o tipo primitivo de dados *vector* (ou *matriz*), o problema pode ser resolvido facilmente. Suponhamos que dispomos de um interpretador da linguagem  $M^*$ . A solução do problema comporta dois passos:

1. Definimos um vector  $\mathbf{t}$  de  $n$  instantes de tempo igualmente espaçados no intervalo  $T = [t_0, t_f]$ .

#### Exemplo A-7

Por simplicidade, supomos que  $(t_f - t_0)$  é exactamente divisível por  $n-1$  e que:

$$\frac{t_f - t_0}{n-1} = h \quad (\text{A.20})$$

Ou então escolhemos um valor de  $h$  que divida exactamente  $(t_f - t_0)$ . É a mesma coisa. Então a instrução ou comando

$$\mathbf{t} = \mathbf{t_0} : h : \mathbf{t_f} \quad (\text{A.21})$$

cria um vector  $\mathbf{t}$  com  $n$  elementos, igualmente espaçados.

Seja  $T = [0, 10]$ . Escolhemos  $h = 1$ . A instrução ou comando

$$\mathbf{t} = 0 : 1 : 10 \quad (\text{A.22})$$

cria o vector de instantes de tempo:

$$\mathbf{t} = 0. \quad 1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad 6. \quad 7. \quad 8. \quad 9. \quad 10.$$

Este vector tem 11 elementos e divide o intervalo de tempo em 10 subintervalo.

---

\* Implementado nos ambientes de ‘software’ livre ou de código aberto GNU Octave ou Scilab. Ou no ambiente de ‘software’ proprietário Matlab.

2. Calculamos um vector  $y = f(t)$ .

#### Exemplo A-8

Continuando o exemplo anterior. Seja  $f(t) = e^{-0.5t}$ . Então a instrução ou comando

$$y = \exp(-0.5 * t) \quad (\text{A.23})$$

cria um vector  $y$  com 11 elementos, em que cada elemento é o valor de  $f(t) = e^{-0.5t}$  para o  $t$  correspondente:

$y$  =

column 1 to 5

1.      0.6065307      0.3678794      0.2231302      0.1353353

column 6 to 9

0.0820850      0.0497871      0.0301974      0.0183156

column 10 to 11

0.0111090      0.0067379

O par de vectores  $(t, y)$  pode ser entendido como a tabela pretendida.

Tendo determinado o par de vectores  $(t, y)$  podemos fazer qualquer processamento posterior dos seus valores que entendamos. Em particular, podemos obter o gráfico da função para os valores calculados.

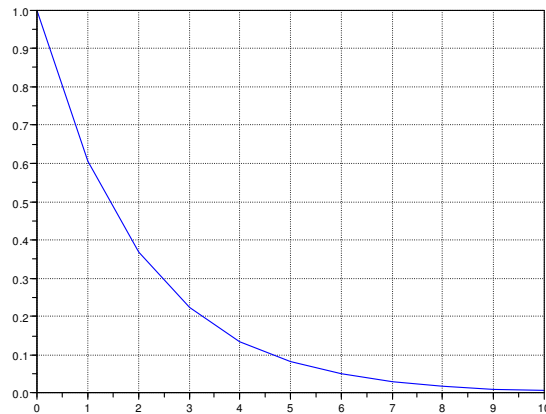
#### Exemplo A-9

Continuando o exemplo anterior. A instrução ou comando

$$\text{plot}(t, y) \quad (\text{A.24})$$

abre (no ambiente Scilab) uma janela com o seguinte gráfico:



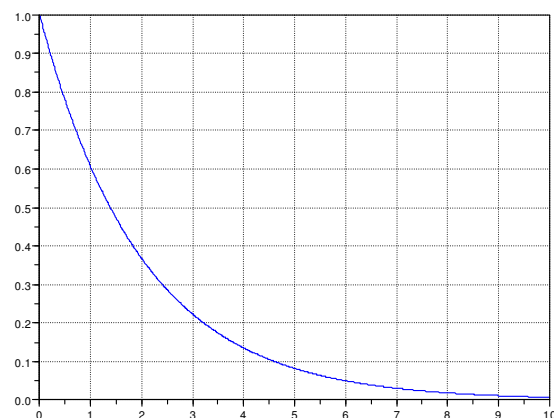


As linhas que unem os pontos definidos pelo par de vectores  $(t, y)$  *não* correspondem a valores da função: resultam de um procedimento de interpolação linear realizado por defeito pelo ambiente. O gráfico pode ser editado (ou o comando `plot` pode ser modificado) de forma a modificar a apresentação dos valores.

Porque estamos a usar um dispositivo digital (computador), nunca conseguiremos um traçado do gráfico realmente contínuo – será sempre um traçado obtido pela justaposição de pontos. No entanto, se definirmos um número de pontos suficientemente grande, obteremos um gráfico em que todos os pontos serão calculados. Por exemplo, a sequência de comandos:

```
clf
t=0:0.01:10;
y=exp(-0.5*t);
plot(t,y)
```

resulta no gráfico:



t

t e y têm neste caso 1001 elementos.

## Exercícios

Os exercícios seguintes deverão ser realizados num ambiente computacional que implemente a linguagem M. Para fixar ideias, usar como intervalo de tempo a considerar  $T = [0, 10]$ . É claro que nada impede, dependendo da curiosidade de cada um, considerar outros intervalos de tempo e experimentar diferentes parâmetros de apresentação de gráficos.

Realizar gráficos das funções:

**A.1** Degrau unitário ou impulso de Heaviside, abreviadamente  $h(t)$ , define-se por:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \leftarrow t \geq 0 \\ 0 & \leftarrow t < 0 \end{cases}$$

Nota: no Scilab, a função `ones` permite definir o vector  $y$  com um só comando.

**A.2** A partir de  $h(t)$  podemos definir uma qualquer função *degrau de* “altura” ou *amplitude*  $A$ , sendo  $A$  uma constante positiva ou negativa, por

$$A h(t) = \begin{cases} A & \leftarrow t \geq 0 \\ 0 & \leftarrow t < 0 \end{cases}$$

Escolher 3 valores para  $A$  e realizar os gráficos das correspondentes funções degrau.

**A.3** Rampa unitária ou *impulso em rampa*, abreviadamente  $v(t)$ , define-se por:

$$v(t) = \begin{cases} t & \leftarrow t \geq 0 \\ 0 & \leftarrow t < 0 \end{cases}$$

**A.4** A partir de  $v(t)$  podemos definir uma qualquer função *rampa de* “inclinação” ou *derivada*  $A$ , sendo  $A$  uma constante positiva ou negativa, por

$$A v(t) = \begin{cases} At & \leftarrow t \geq 0 \\ 0 & \leftarrow t < 0 \end{cases}$$

Escolher 3 valores para  $T$  e realizar os gráficos das correspondentes funções rampa.

**A.5** A função exponencial decrescente,  $f(t) = e^{-t/T}$  em que  $T$  significa aqui “constante de tempo”.

Escolher 3 valores para  $T$  e realizar os gráficos das correspondentes funções exponencial decrescente.

*Nota muito importante:* o que acontece se  $T = \infty$ ? Por outras palavras: qual o gráfico da função  $f(t) = e^{0t}$ , para  $t \geq 0$ ?

**A.6** A função exponencial crescente,  $f(t) = e^{t/T}$  em que  $T$  significa aqui “constante de tempo”.

Escolher 3 valores para  $T$  e realizar os gráficos das correspondentes funções exponencial crescente.

**A.7** A função seno com amplitude  $A$  frequência angular  $\omega$  e fase inicial  $\phi$ ,  $f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ .

“Amostrar” o espaço de possíveis valores de  $A$ ,  $\omega$  e  $\phi$ , de modo a obter uma boa compreensão do seu significado através dos gráficos.

# APÊNDICE B

## NÚMEROS E FUNÇÕES COMPLEXAS

### B.1 Números complexos

Um número complexo  $s$  é uma entidade matemática que se pode representar por um par ordenado de números reais  $a$  e  $b$ , nas seguintes condições:

$$\begin{aligned}s &\triangleq (a, b) & a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \\ (a, b) &= (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d \\ (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}\tag{B.1}$$

#### Exemplo B-1

$$\begin{aligned}(2^2, 1) &= (4, \sin^2(x) + \cos^2(x)) \\ (5, 5) + (-5, -5) &= (0, 0) \\ (1, 2)(0.2, -0.4) &= (1, 0)\end{aligned}$$

A esta forma de representação de números complexos chamaremos *cartesiana*.

### B.2 Existência de elementos identidade.

Os números  $(0,0)$  e  $(1,0)$  são os elementos neutros ou elementos identidade respectivamente da adição e da multiplicação.

### B.3 Existência de simétrico e inverso.

O número  $(-a, -b)$  é o simétrico de  $(a, b)$ . Para todo o  $s \neq (0,0)$ , o seu inverso existe. O inverso de  $(a, b)$  representa-se por  $(a, b)^{-1}$  ou  $1/(a, b)$  e tem-se que:

$$\frac{1}{(a, b)} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).\tag{B.2}$$

## B.4 Componentes de um número complexo

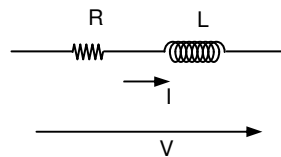
O primeiro componente do par  $s = (a, b)$  diz-se a *parte real* do número complexo. O segundo componente diz-se a *parte imaginária* do número complexo. As funções  $\text{Re}(s)$  e  $\text{Im}(s)$  são entendidas retornar, respectivamente, o primeiro e o segundo componente de  $s$ . Podem ser definidas por:

$$\begin{aligned} s = (a, b) &\rightarrow \text{Re}(s) = a \\ s = (a, b) &\rightarrow \text{Im}(s) = b . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

O estudante não deve atribuir importância às designações de ‘real’ e ‘imaginária’ que têm razões históricas internas ao desenvolvimento da Matemática. Em Electrotecnia, os números complexos são usados, por exemplo, para representar o valor de *impedâncias*. Os valores das duas componentes de uma impedância podem ser medidas ou determinadas, a parte ‘imaginária’ tendo um valor tão real como o da parte ‘real’.

### Exemplo B-2 Impedância de um circuito RL

A relação entre as variáveis no circuito,



com  $I$  e  $V$  corrente e tensão *sinusoidais* de *frequência angular*  $\omega$ , pode ser expressa pelo número complexo  $Z = (R, \omega L)$ . A primeira componente – *resistência* – de  $Z$  tem o valor  $R$  e a segunda componente – *reactância* – tem o valor  $\omega L$ . A resistência pode ser determinada aplicando ao circuito uma tensão constante, medindo a intensidade de corrente resultante e dividindo o valor da tensão pelo da corrente. Os instrumentos que realizam esta determinação (a que comumente se chama medida da resistência) são os ohmímetros. Se o valor de  $R$  for diferente de 0, o valor de  $\omega L$  pode ser determinado ou medido, aplicando ao circuito uma tensão sinusoidal, medindo o ângulo  $\phi$  de desvio da corrente sinusoidal resultante em relação à tensão e multiplicando  $R$  pela tangente de  $-\phi$ .

O número complexo  $Z = (R, \omega L)$  mede o valor de uma quantidade a que em Electrotecnia se chama *impedância*. Genericamente  $Z = (R, X)$ . A definição desta quantidade permite generalizar a lei de Ohm para circuitos em que existam apenas correntes e tensões sinusoidais de amplitude e frequência angular constantes:

$$V = ZI$$

Generalizando também as regras de combinação de resistências a impedâncias:

$$Z_3 = \text{impedância em série de } Z_1 \text{ e } Z_2 = Z_1 + Z_2$$

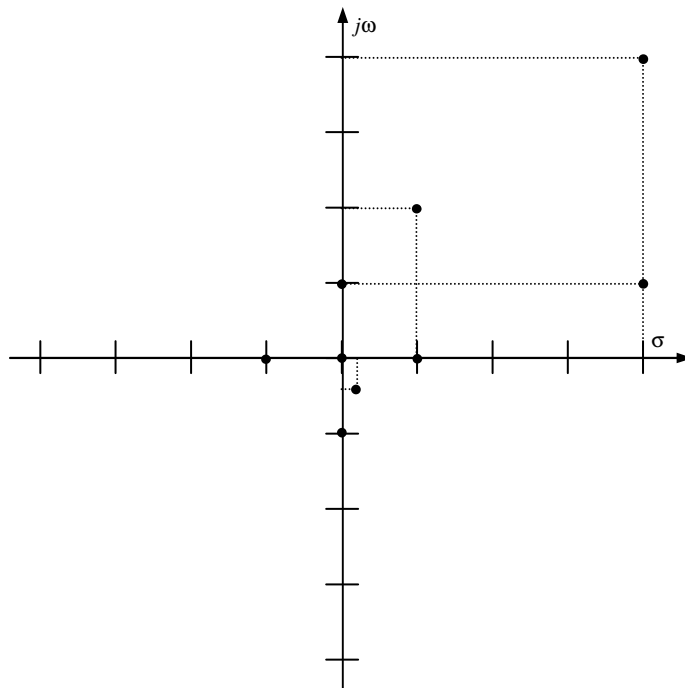
$$Z_3 = \text{impedância em paralelo de } Z_1 \text{ e } Z_2 = Z_1 \parallel Z_2 = (Z_1^{-1} + Z_2^{-1})^{-1} = Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)$$

## B.5 Representação geométrica

Entendendo-se os números complexos como pares de números reais, pode usar-se o plano cartesiano para representar números complexos como pontos. O número complexo  $s = (\sigma, \omega)$  representa-se como um ponto de abscissa  $\sigma$  e de ordenada  $\omega$ .

### Exemplo B-3

Os números complexos referidos até agora representar-se-ão como na Figura B.1. Estão também representados os números  $(0,1), (-1,0), (0,-1)$ .



**Figura B-1** Representação de números complexos no plano com um referencial cartesiano. É também usual referir esta representação como representação no plano de Argand ou no plano complexo. Em Electrotecnia diz-se também plano  $s$  e designa-se o eixo das abcissas por  $\sigma$  e o eixo das ordenadas por  $j\omega$ .

O conjunto dos números complexos designa-se por  $\mathbb{C}$ . O subconjunto de  $\mathbb{C}$  que contém todos os números complexos da forma  $s = (a, 0)$  designa-se por  $\mathbb{C}_0$ . A função  $f(a) = (a, 0)$  tem domínio em  $\mathbb{R}$  e contradomínio em  $\mathbb{C}_0$ . Esta função estabelece uma correspondência de 1 para 1 entre os números reais e os números complexos com segunda componente nula. Tem-se ainda que:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{e} \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0). \quad (\text{B.4})$$

Ou seja, a adição e a multiplicação em  $\mathbb{C}_0$  preservam a correspondência de 1 para 1 acima. Estas razões sugerem que se convencie escrever  $a$  em vez de  $(a, 0)$ , para simplicidade de notação. Sempre que numa expressão envolvendo números complexos

aparece um número  $a$ , importa ter em conta se significa um número em  $\mathbb{R}$  ou em  $\mathbb{C}_0$ .

## B.6 O número complexo $j$ ou unidade imaginária

O número complexo  $(0,1)$  representa-se habitualmente em Electrotecnia por  $j$ . Frequentemente é chamado de unidade imaginária. Tem propriedades de interesse. Por exemplo:

$$(0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

Esta propriedade e o uso da notação simplificada acima, explicam porque, às vezes, se encontram expressões que podem entender-se como absurdas, por exemplo:

$$j = +\sqrt{-1}.$$

Se na expressão acima se ler ‘ $-1$ ’ como o número real  $-1$ , a expressão é absurda porque a função  $+\sqrt{(\cdot)}$  não é definida para números negativos (a raiz quadrada positiva de  $-1$  não existe). Para que a expressão tenha significado, é preciso ler ‘ $-1$ ’ como o número complexo  $(-1, 0)$ . Ou seja

$$j = +\sqrt{(-1, 0)}.$$

Outra propriedade de interesse é a seguinte

$$j(\omega, 0) = (0, 1)(\omega, 0) = (0, \omega). \quad (\text{B.5})$$

A multiplicação por  $j$  de um número representado no eixo real corresponde geometricamente a rodar o ponto que o representa de um arco de  $90^\circ$  em torno da origem. Esta propriedade é verdadeira para qualquer complexo  $s$ , não apenas para os pertencentes a  $\mathbb{C}_0$ :

$$js = (0, 1)(\sigma, \omega) = (0 - \omega, \sigma - 0) = (-\omega, \sigma). \quad (\text{B.6})$$

Pode verificar-se que  $(\sigma, \omega)$  e  $(-\omega, \sigma)$  são os extremos de um arco de circunferência de  $90^\circ$  em torno da origem. Como tal os segmentos de recta definidos por cada um dos números e a origem são perpendiculares.

## B.7 A representação $\sigma + j\omega$

A propriedade (B.5) permite escrever:

$$(\sigma, \omega) = (\sigma, 0) + (0, \omega) = (\sigma, 0) + (0, 1)(\omega, 0) = (\sigma, 0) + j(\omega, 0). \quad (\text{B.7})$$

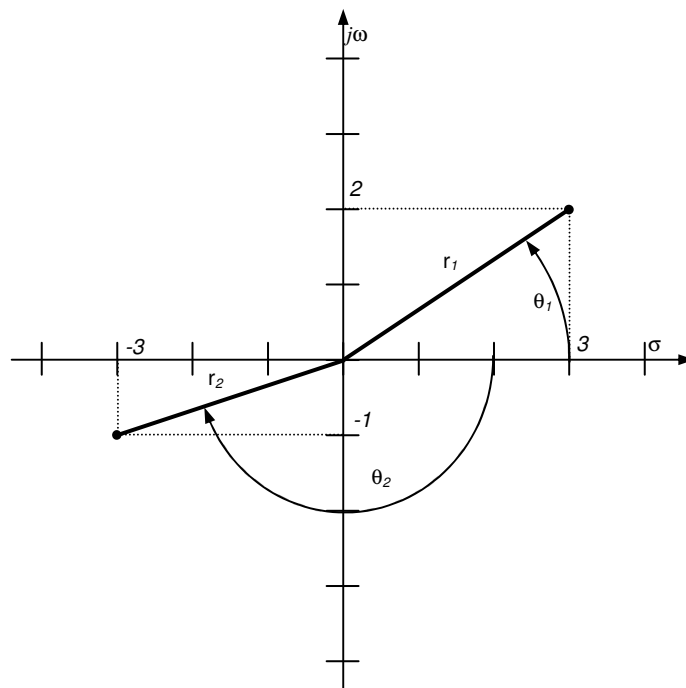
Utilizando a notação simplificada descrita acima, isto é,  $\sigma = (\sigma, 0)$  e  $\omega = (\omega, 0)$ , pode então escrever-se

$$(\sigma, \omega) = \sigma + j\omega. \quad (\text{B.8})$$

### B.8 A representação polar $r\angle\theta$

Um número complexo pode ser entendido como instruções para achar um ponto no plano. Suponha-se uma pessoa situada na origem do plano  $s$ . A pessoa deve deslocar-se até ao ponto que representa o número  $(\sigma, \omega)$  ou  $\sigma + j\omega$ . Para o fazer desloca-se de  $\sigma$  no eixo das abcissas e a seguir de  $\omega$  paralelamente ao eixo das ordenadas.

A pessoa pode fazer tal com outros movimentos. Pode, colocando-se inicialmente de forma a ‘olhar’ ao longo do eixo das abcissas, rodar de um ângulo  $\theta$  e a seguir deslocar-se de uma distância  $r$ . Veja-se a Figura B-2.



**Figura B-2** Representação polar de números complexos. Nos exemplos representados tem-se  $r_1 = \sqrt{3^2 + 2^2}$ ,  $\theta_1 = \text{atan}(2/3)$ ,  $r_2 = \sqrt{3^2 + 1^2}$ ,  $\theta_2 = \text{atan}(-1/-3)$ .

Assim, um número complexo  $(\sigma, \omega)$  ou  $\sigma + j\omega$  pode alternativamente representar-se pelo par  $r\angle\theta$ , dito representação na forma *polar*, se

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \\ \theta &= \text{atan} \frac{\omega}{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Aos valores  $r$  e  $\theta$  chamam-se respectivamente o *módulo* e o *argumento* do número complexo. As funções  $|s|$  e  $\arg(s)$  são definidas como retornando o módulo e o argumento do número complexo  $s$ .

Inversamente, se um número complexo estiver representado na forma polar  $r\angle\theta$ , ele

pode alternativamente ser representado por  $(\sigma, \omega)$  ou  $\sigma + j\omega$  se

$$\begin{aligned}\sigma &= r \cos \theta \\ \omega &= r \sin \theta .\end{aligned}\tag{B.10}$$

As equações (B.9) definem a transformação da representação cartesiana na representação polar. As equações (B.10) definem a transformação inversa.

## B.9 Função exponencial de um número complexo

Como definir a função exponencial de um número complexo  $s$ ? Recorrendo à representação cartesiana, podemos começar por escrever

$$e^s = e^{\sigma + j\omega} .$$

Uma propriedade que certamente se pretende é a da validade da lei dos expoentes, isto é:

$$e^{\sigma + j\omega} = e^{\sigma} e^{j\omega} .$$

A interpretação de  $e^{\sigma}$  não oferece dificuldades: é um número real ou um número complexo em  $\mathbb{C}_0$ . A questão é: como interpretar  $e^{j\omega}$ , para que as propriedades da exponenciação em  $\mathbb{R}$  sejam transpostas para  $\mathbb{C}$ ? A resposta foi encontrada por Euler que definiu

$$e^{j\omega} = (\cos \omega, \sin \omega) = \cos \omega + j \sin \omega .\tag{B.11}$$

Esta definição tem as importantes propriedades:

$$\begin{aligned}\forall \omega, |e^{j\omega}| &= \sqrt{\sin^2 \omega + \cos^2 \omega} = 1 \\ \forall \omega, \arg e^{j\omega} &= \text{atan} \frac{\sin \omega}{\cos \omega} = \text{atan}(\tan \omega) = \omega .\end{aligned}\tag{B.12}$$

Portanto  $e^{j\omega} = 1 \angle \omega$ , ou seja,  $e^{j\omega}$  é sempre um número complexo situado na circunferência de raio unitário do plano  $s$  e que define um raio desta que faz um ângulo  $\omega$  com o semi-eixo positivo  $\sigma$ . Por exemplo:

$$\begin{aligned}e^{j0} &= (1, 0) \\ e^{j(\pi/2)} &= (0, 1) = j \\ e^{j\pi} &= e^{-j\pi} = (-1, 0) = j^2 \\ e^{j(3\pi/2)} &= (0, -1) = -j = j^{-1} \\ e^{j2\pi} &= (1, 0) = j^4\end{aligned}$$

Sejam dois números complexos  $e^{j\theta_1}$  e  $e^{j\theta_2}$ . Como a definição de Euler preserva a lei dos expoentes deve ter-se que

$$e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} = e^{j\theta_1 + j\theta_2} = e^{j(\theta_1 + \theta_2)} .\tag{B.13}$$

Ou seja o produto de dois complexos situados na circunferência de raio unitário do plano



$s$  é um complexo situado na mesma circunferência e cujo argumento é a soma dos argumentos dos factores.

De acordo com a definição de Euler tem-se em geral que para um número complexo  $s$

$$e^s = e^{\sigma+j\omega} = e^\sigma e^{j\omega} = e^\sigma (\cos \omega + j \sin \omega). \quad (\text{B.14})$$

Deverá agora ter-se que

$$\begin{aligned} |e^{\sigma+j\omega}| &= \sqrt{(e^\sigma)^2 \cos^2 \omega + (e^\sigma)^2 \sin^2 \omega} = e^\sigma \\ \arg e^{\sigma+j\omega} &= \text{atan} \frac{e^\sigma \sin \omega}{e^\sigma \cos \omega} = \omega. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

### Exemplo B-3 Gráfico no plano $s$ da função $e^{(\sigma+j\omega)t}$

Considere-se a expressão  $e^{(\sigma+j\omega)t}$ . Ela define uma função complexa  $s$  da variável real  $t$ . Tem-se:

$$s(t) = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} \quad (\text{B.16})$$

Que curva descreve  $s(t)$  quando  $t$  varia num certo intervalo  $[0, t_f]$ ? O seguinte programa em Scilab, exemplifica o traçado de três curvas, usando-se um valor de  $\sigma$  negativo, um valor nulo e um valor positivo. A frequência  $\omega$  é escolhida com o valor  $2\pi$  rad/s, ou seja, correspondente a 1 Hz. O programa pode ser modificado para outros valores de  $\sigma$  e  $\omega$ .

```
clear; clf

tf=2;
w=2*pi;
t=0:0.01:tf;

sigma=log(0.75); s_n=exp((sigma+i*w)*t); x_n=real(s_n); y_n=imag(s_n);

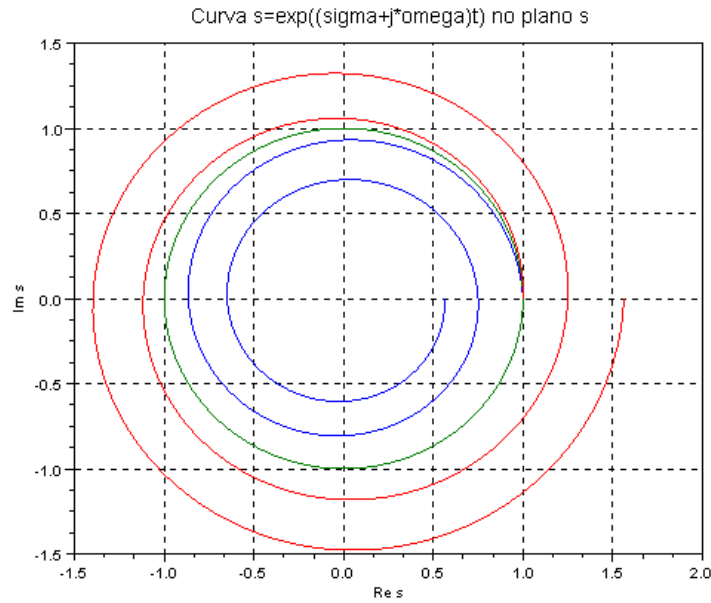
sigma=log(1); s_0=exp((sigma+i*w)*t); x_0=real(s_0); y_0=imag(s_0);

sigma=log(1.25); s_p=exp((sigma+i*w)*t); x_p=real(s_p); y_p=imag(s_p);

scf(0); clf
drawlater()
a=gca();
a.title.text='Curva s=exp((sigma+j*omega)t) no plano s';
a.title.font_size=3;
a.grid=[0 0]; //visível a preto
a.x_label.text='Re s';
a.y_label.text='Im s';
plot(x_n, y_n, x_0, y_0, x_p, y_p);
drawnow()
```

O gráfico resultante do traçado das três curvas apresenta-se na Figura B-3.

**Figura B.3** Curvas descritas por  $e^{(\sigma+j\omega)t}$  quando  $t$  varia. A curva a azul corresponde a um valor de  $\sigma$  negativo, a curva a verde corresponde a um valor de  $\sigma$  nulo e a curva a vermelho corresponde a um valor de  $\sigma$  positivo.



### B.10 Fórmulas de Euler para o seno e o co-seno

Consideremos um par de funções  $e^{(\sigma+j\omega)t}$  e  $e^{(\sigma-j\omega)t}$ . Têm componentes imaginárias simétricas. Realizemos a sua soma:

$$\begin{aligned} e^{(\sigma+j\omega)t} + e^{(\sigma-j\omega)t} &= e^{\sigma t} e^{+j\omega t} + e^{\sigma t} e^{-j\omega t} = e^{\sigma t} (e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}) = \\ &= e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t + \cos \omega t - j \sin \omega t) = \\ &= e^{\sigma t} 2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Façamos  $\sigma = 0$  em (B.17). Resulta a fórmula de Euler para o co-seno:

$$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2 \cos \omega t \Leftrightarrow \cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (\text{B.18})$$

Realizemos agora a diferença das 2 funções:

$$\begin{aligned} e^{(\sigma+j\omega)t} - e^{(\sigma-j\omega)t} &= e^{\sigma t} e^{+j\omega t} - e^{\sigma t} e^{-j\omega t} = e^{\sigma t} (e^{+j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \\ &= e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t - \cos \omega t + j \sin \omega t) = \\ &= e^{\sigma t} 2 j \sin \omega t \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Façamos  $\sigma = 0$  em (B.19). Resulta a fórmula de Euler para o seno:

$$e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = 2 j \sin \omega t \Leftrightarrow \sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (\text{B.20})$$

#### Exemplo B-4 Cálculo de funções do tipo co-seno usando a fórmula de Euler

Para se obter uma melhor compreensão das fórmulas de Euler (representação de co-senos e senos por exponenciais complexas) podemos modificar o programa no Exemplo B-3 da seguinte forma:

```

clear; clf
tf=2;w=2*pi;t=0:0.01:tf;

sigma=log(0.75);s_n=exp((sigma+i*w)*t);s_n_conj=exp((sigma-i*w)*t);
cos_n=0.5*(s_n+s_n_conj);

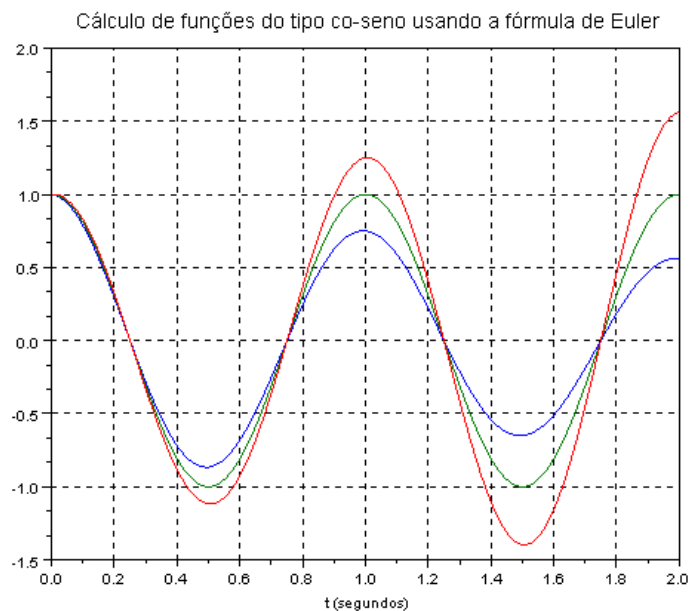
sigma=log(1);s_0=exp((sigma+i*w)*t);s_0_conj=exp((sigma-i*w)*t);
cos_0=0.5*(s_0+s_0_conj);

sigma=log(1.25);s_p=exp((sigma+i*w)*t);s_p_conj=exp((sigma-i*w)*t);
cos_p=0.5*(s_p+s_p_conj);

scf(0);clfdrawlater()
a=gca();
a.title.text='Cálculo de funções do tipo co-seno usando a fórmula de
Euler';a.title.font_size=3;
a.grid=[0 0]; //visível a preto
a.x_label.text='t (segundos)';a.y_label.text='y(t)';
plot(t,cos_n,t,cos_0,t,cos_p);
drawnow()

```

A execução do programa gera três funções no tempo: uma função do tipo co-seno de amplitude decrescente; uma função co-seno e uma função do tipo co-seno de amplitude crescente. A sua visualização é feita na Figura B.4.



**Figura B.4** Cálculo de funções do tipo co-seno usando a fórmula de Euler.

A curva a azul corresponde a um valor de  $\sigma$  negativo, a curva a verde corresponde a um valor de  $\sigma$  nulo e a curva a vermelho corresponde a um valor de  $\sigma$  positivo.

### B.11 Forma exponencial de representação de números complexos

As equações (B.14) e (B.15) sugerem uma outra forma de representação dos números complexos, dita forma exponencial. Seja um número complexo  $s$  representado na forma polar por  $r \angle \theta$ . O módulo e o argumento do número complexo expresso por  $re^{j\theta}$  são

$$\begin{aligned} |re^{j\theta}| &= r \\ \arg re^{j\theta} &= \theta. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Portanto

$$r \angle \theta = re^{j\theta}.$$

A forma exponencial mostra que a multiplicação de dois complexos expressos nesta forma ou na forma polar é muito simples de calcular. Sejam os números  $r_1 e^{j\theta_1}$  e  $r_2 e^{j\theta_2}$ :

$$r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (\text{B.22})$$

Portanto

$$r_1 \angle \theta_1 \cdot r_2 \angle \theta_2 = r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2). \quad (\text{B.23})$$

Ou seja para se multiplicar dois números complexos na forma polar, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos.

Resumindo, neste momento dispomos de 4 formas de representação de números complexos. Se as relações em (B.9) ou em (B.10) se verificarem, então um número complexo  $s$  pode ser expresso como

$$(\sigma, \omega) = \sigma + j\omega = r \angle \theta = re^{j\theta}. \quad (\text{B.24})$$

### B.12 Números complexos conjugados

Se  $s = \sigma + j\omega$  o *complexo conjugado* de  $s$  é o número  $s^* = \sigma - j\omega$ . Geometricamente  $s^*$  corresponde à reflexão de  $s$  ao longo do eixo  $\sigma$ . A definição implica as seguintes propriedades para os conjugados:

$$(s_1 + s_2)^* = s_1^* + s_2^* \quad (s_1 s_2)^* = s_1^* s_2^* \quad ss^* = |s|^2. \quad (\text{B.25})$$

### B.13 Representação gráfica de funções complexas de variável complexa

Uma função real de variável real exige duas dimensões para representação do seu gráfico. Uma função complexa de variável complexa exigiria 4 dimensões para representação do seu gráfico. No entanto, é possível representar uma função complexa de variável complexa através de 2 gráficos, uma para o módulo e outro para o argumento. O programa seguinte em Scilab permite realizar este tipo de representação. O programa está particularizado para realizar a representação da função  $z(s) = s$ , mas pode ser modificado ou ampliado para

representar qualquer outra função.

```
//Graphical representation of complex functions of complex variable
//by modulus and argument

clear
ieee(2); //Sets the result of a division by 0 to Inf

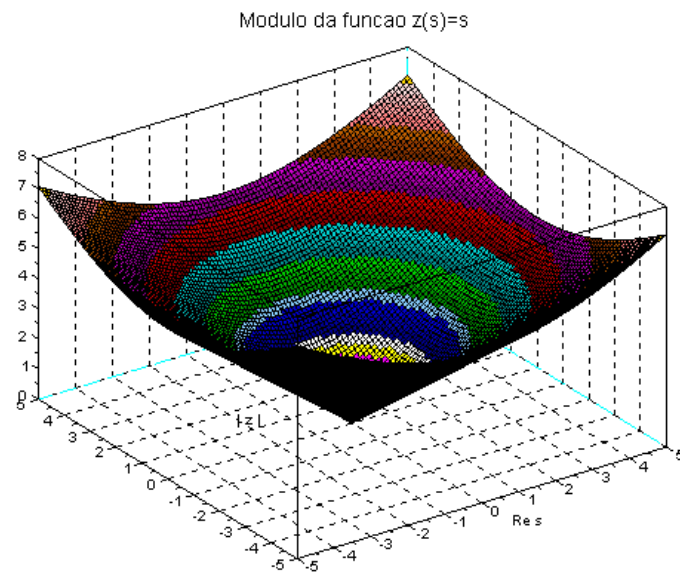
[X,Y] = meshgrid([-5:0.1:5]);
// The X matrix contains the real components and
// the Y matrix contains the imaginary components
// of the numbers in the defined grid in the s plane

//Function z=s
Zm=sqrt(X.^2+Y.^2); //Calculates the modulus of z
Za=atan(Y,X); //Calculates the argument of z

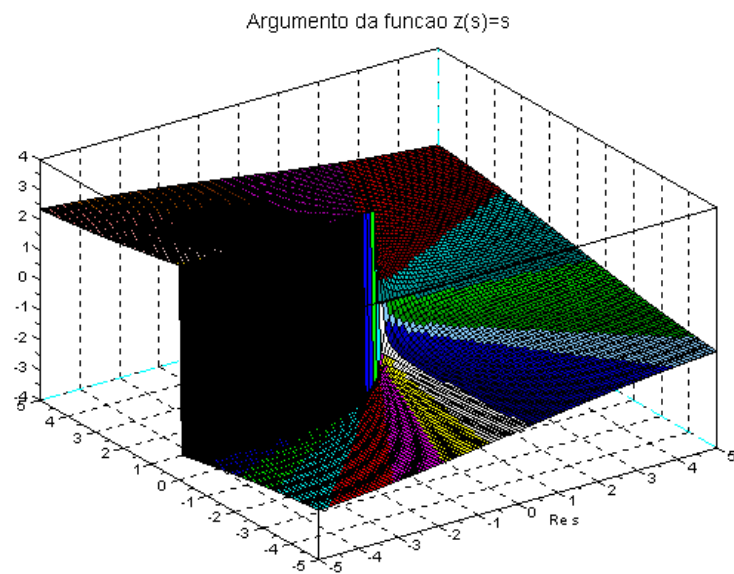
//Graphical display of the modulus
scf(0); clf
drawlater()
a=gca();
a.title.text='Modulo da funcao z(s)=s';
a.title.font_size=3;
a.grid=[0 0]; //visible in black
surf(X,Y,Zm);
a.x_label.text='Re s';
a.y_label.text='Im s';
a.z_label.text='| z |';
drawnow()

//Graphical display of the argument
scf(1); clf
drawlater()
a=gca();
a.title.text='Argumento da funcao z(s)=s';
a.title.font_size=3;
a.grid=[0 0]; //visível a preto
surf(X,Y,Za);
a.x_label.text='Re s';
a.y_label.text='Im s';
a.z_label.text='arg(z)';
drawnow()
```

O resultado gráfico da execução do programa apresenta-se nas Figuras B.5 e B.6.



**Figura B.5** Gráfico em perspectiva do módulo da função  $z(s) = s$ .



**Figura B.6** Gráfico em perspectiva do argumento da função  $z(s) = s$ .

## Exercícios

**B.1** Sejam os números complexos  $x = a + jb$  e  $y = c + jd$ . Tem-se que:

( )  $xy = (ac - bd) + j(ad + bc)$

( )  $xy = (ac + bd) + j(ad - bc)$

( )  $xy = (ad - bc) + j(ac + bd)$

**B.2** Seja o número complexo  $4\angle\pi/4$ . É igual a:

☐  $4 + j\pi$

☐  $2e^{j\pi/4}$

☐  $2 + j2$

☐  $4e^{j\pi/4}$

**B.3** Seja o número complexo  $e^{j\omega}$ . É igual a:

☐  $\cos \omega + j\sin \omega$

☐  $1\angle\omega$

☐  $\omega + je^{\omega}$

**B.4** Seja a função complexa de variável real  $z(t) = 5e^{j2t}$ . Tem-se que:

☐  $\forall t, |z(t)| = 10$

☐  $\forall t, |z(t)| = 5$

☐  $\forall t, \arg z(t) = 2$

☐  $\forall t, \arg z(t) = 2t$

**B.5** Seja o número complexo  $x = a + jb$ . Escreva a expressão deste número na forma polar (módulo e argumento) e na forma exponencial.

**B.6** Seja o número complexo  $x = r\angle\theta$ . Escreva a expressão deste número na forma cartesiana e na forma exponencial.

**B.7** Sejam os números complexos  $x_1 = r_1\angle\theta_1$  e  $x_2 = r_2\angle\theta_2$ . Escreva as expressões de

$$y = x_1 \cdot x_2, y^*, z = \frac{1}{x_1}, z^*.$$

**B.8** Sejam os números complexos  $x_1 = r_1e^{j\theta_1}$  e  $x_2 = r_2e^{j\theta_2}$ . Escreva as expressões de

$$y = x_1 \cdot x_2, y^*, z = \frac{1}{x_1}, z^*.$$

**B.9** Para cada uma das seguintes funções, escreva a sua assinatura. (Exemplo: a função expressa na alínea a) tem por assinatura  $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .)

a)  $z(t) = 5e^{j2t}$

b)  $z(s) = 5(s+1)^{-1}$

c)  $x(t) = \operatorname{Re}(10e^{j2t})$

d)  $y(t) = \operatorname{Im}(10e^{j2t})$

e)  $r(s) = |5(s+1)|$

f)  $\theta(s) = \arg(5(s+1))$

**B.10** Exprima as seguintes funções do tempo como exponenciais complexas:

$$y(t) = 2 \cos 5t$$

$$y(t) = -3 \sin 0.5t$$

$$y(t) = 2 \cos(5t + 1)$$

$$y(t) = -3 \sin(0.5t - \pi/4)$$

$$y(t) = 2e^{-0.8t} \cos 5t$$

$$y(t) = -3e^{+0.8t} \sin 0.5t$$

Modificando o programa apresentado, realize traçados destas funções no tempo.

**B.11** Determine a expressão e faça gráficos em perspectiva do módulo e argumento das seguintes funções, modificando o programa descrito acima:

$$z = j$$

$$z = s$$

$$z = s^2$$

$$z = s^3$$

$$z = \frac{1}{s}$$

$$z = \frac{1}{s+a}$$

$$z = \frac{1}{s^2}$$

$$z = \frac{1}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$z = \frac{1}{(s + \sigma_a + j\omega_a)(s + \sigma_a - j\omega_a)}$$

## Bibliografia

Apostol, T. (1967). *Calculus*. vol. 1. Xerox College Publishing, Waltham, MA.