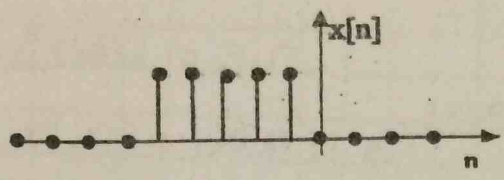
Processamento Digital de Sinal

Miniteste1 2009/2010 Versão B

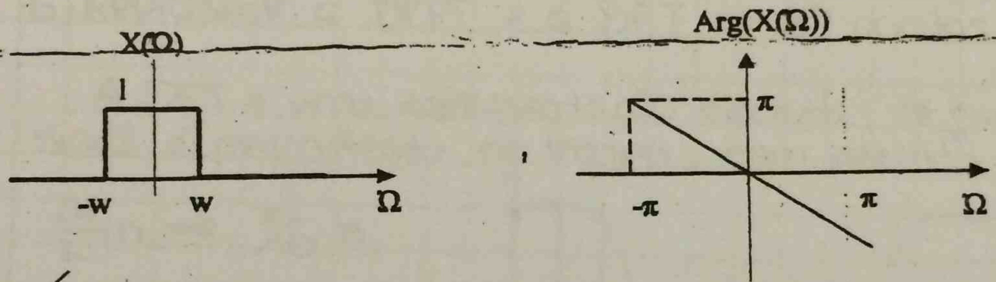
NOTA: Resolva <u>apenas</u> 2 dos 3 exercícios propostos

1. Considere o sinal representado na figura seguinte:



a) Represente graficamente o módulo e a fase de $X(\Omega)$. Justifique.
b) Represente a DTFT e a DFT de 20 pontos do sinal x[n]. Justifique.
c) Represente a FFT de mais de 20 pontos do sinal x[n]. Justifique.

2. Considere o sinal cuja DTFT (intervalo entre $-\pi$ e π) é representada nas figuras seguintes:



a) Determine x[n]. Justifique.
b) A comparação da alínea anterior com a alínea a) do problema 1 sugere-lhe algum comentário especial relativamente à propriedade da dualidade? Justifique.
c) Mostre que o sinal $y[n]=(-1)^n x[n]$ tem como DTFT $Y(\Omega)=X(\Omega-\pi)$. Represente $Y(\Omega)$.

Falta resolução

3. Considere o sistema LTI digital caracterizado pela seguinte equação de diferenças
$y[n]= 0.25y[n-1] + x[n] +0.5x[n-1]$.
a) Determine a resposta impulsional do sistema.
b) Determine a resposta do sistema à entrada

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

c) Determine a entrada do sistema cuja saída é

$$y[n]= n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$Y(\Omega)$

20

$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$

$TF\{y[n]\} = TF\{0,25\, y[n-1]$

$Y(\Omega)$

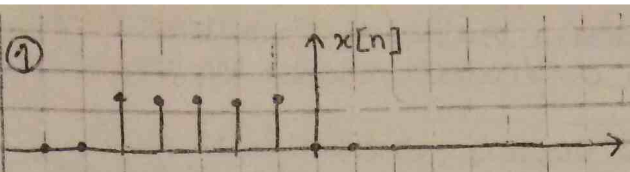
$Y(\Omega) =$

$$X(\Omega) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega n}\right)}$$

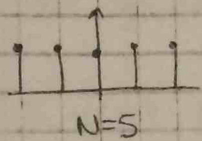
$Y = H.X \Leftrightarrow \frac{Y}{X} = H \Rightarrow X(\Omega) = \frac{Y}{H}$

20

①

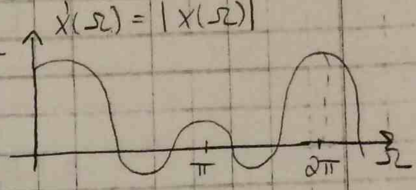


a) Represente graficamente o módulo e a fase de $X(\Omega)$.



$\longleftrightarrow X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} = \dfrac{\operatorname{sen}(N\Omega/2)}{\operatorname{sen}(\Omega/2)}$

$x[n] = x'[n+3] \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega) = X'(\Omega)\, e^{3j\Omega}$

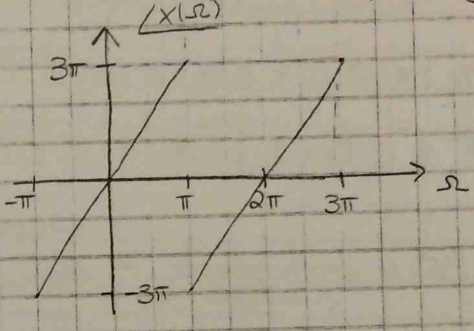


$|X(\Omega)| = |X'(\Omega)\, e^{3j\Omega}| = X'(\Omega)$

$\angle X(\Omega) = 3\Omega$

$X(\Omega) = |X(\Omega)|\, e^{j\angle X(\Omega)}$

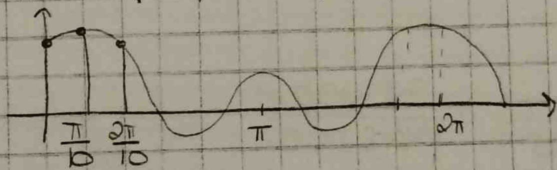
descentralização do sinal



b) Represente a DTFT e a DFT de 20 pontos do sinal $x[n]$

A DFT é uma representação discreta de freq. da DTFT. O sinal é periodizado no tempo, com período 2π.

$\frac{2\pi}{N} n \Rightarrow \frac{\pi}{10} n$



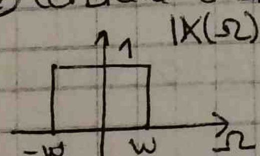
c) Represente a FFT de mais 20 pontos do sinal $x[n]$

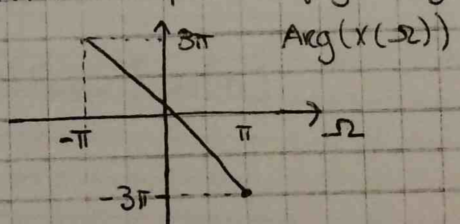
A FFT é um algoritmo rápido da DFT, que tira partido da simetria complexa conjugada e periodicidade da exponencial complexa.

$2^5 > 20 \implies N = 5$

As amostras de pot. são de base 2 [intervalo entre $-\pi$ a π]

② Considere o sinal cuja DTFT é rep. nas fig. seguintes:





a) Determine $x[n]$.

$X(\Omega) = |X(\Omega)|\, e^{j\angle X(\Omega)}$

$X(\Omega) = \begin{cases} e^{-j3\Omega} & , |\Omega| \le w \\ 0 & , |\Omega| > w \end{cases} \implies x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-w}^{w} e^{-j3\Omega}\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$

b) A comparação da alínea anterior com a alínea a) do 1º problema sugere-lhe algum comentário relativamente à dualidade?

Não há dualidade, porque a T.F. de um pulso rectangular no tempo não é um sinc. Funções discretas requerem uma periodicidade de 2π, logo só em algumas partes é que aparece a função sinc

3. $y[n] = 0{,}25\,y[n-1] + x[n] + 0.5\,x[n-1]$

a) Resposta impulsional do sistema

$$Y(\Omega) = 0{,}25\,Y(\Omega)\,e^{-j\Omega} + X(\Omega) + 0{,}5\,X(\Omega)\,e^{-j\Omega}$$

$$\Leftrightarrow Y(\Omega) - 0{,}25\,Y(\Omega)\,e^{-j\Omega} = X(\Omega) + 0{,}5\,X(\Omega)\,e^{-j\Omega}$$

$$\Leftrightarrow Y(\Omega)\left[1 - 0{,}25\,e^{-j\Omega}\right] = X(\Omega)\left[1 + 0{,}5\,e^{-j\Omega}\right]$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1+0{,}5e^{-j\Omega}}{1-0{,}25e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1-0{,}25e^{-j\Omega}} + 0{,}5e^{-j\Omega}\frac{1}{1-0{,}25e^{-j\Omega}}$$

$$h[n] = (0{,}25)^n\,u[n] + 0{,}5\,(0{,}25)^{n-1}\,u[n-1]$$

b) Resposta do sistema à entrada $x[n] = (1/3)^n\,u[n]$

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-1/3\,e^{-j\Omega}}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega).H(\Omega) = \frac{1}{1-1/3e^{-j\Omega}}\cdot\frac{1+0{,}5e^{-j\Omega}}{1-0{,}25\,e^{-j\Omega}} = \frac{A}{1-1/3e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1-0{,}25e^{-j\Omega}}$$

$$A = \left.\frac{1+0{,}5e^{-j\Omega}}{1-0{,}25e^{-j\Omega}}\right|_{e^{-j\Omega}=3} = 10$$

$$B = \left.\frac{1+0{,}5e^{-j\Omega}}{1-1/3\,e^{-j\Omega}}\right|_{e^{-j\Omega}=4} = -9$$

$$Y(\Omega) = \frac{10}{1-1/3\,e^{-j\Omega}} - \frac{9}{1-0{,}25e^{-j\Omega}}$$

$$y[n] = 10\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 9\,(0{,}25)^n\,u[n]$$

e) Entrada do sistema, cuja saída é $y[n] = n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$$Y(\Omega) = \frac{1/4\, e^{-j\Omega}}{(1 - 1/4\, e^{-j\Omega})^2} + \frac{1}{1 - 1/2\, e^{-j\Omega}}$$

$$X(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{H(\Omega)} = \frac{1/4\, e^{-j\Omega}}{(1 - 1/4\, e^{-j\Omega})^{\cancel{2}}} \cdot \frac{1 - 0{,}25\, \cancel{e^{-j\Omega}}}{1 + 0{,}5\, e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - 1/2\, e^{-j\Omega}} \cdot \frac{1 - 0{,}25\, e^{-j\Omega}}{1 + 0{,}5\, e^{-j\Omega}}$$

$$= \frac{A}{1 - 1/4\, e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1 + 0{,}5\, e^{-j\Omega}} + \frac{C}{1 - 1/2\, e^{-j\Omega}} + \frac{D}{1 + 0{,}5\, e^{-j\Omega}} + \frac{E}{1 + 0{,}5\, e^{-j\Omega}}$$

$$x[n] = 1/4 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$- 0{,}25 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$