Sinais e Sistemas

Transformada de *Fourier* – 2ª parte

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Propriedades da TF

- A transformada de *Fourier* é uma ferramenta muito poderosa na análise de sinais e sistemas no domínio da frequência, fornecendo a informação de como é a dependência do sinal com a frequência
- Certo tipo de sinais ou funções cujas transformadas de *Fourier*, obtidas pela definição, são difíceis de calcular, devido à complexidade na resolução do integral
- As propriedades descritas a seguir são muito úteis para auxiliar no cálculo de transformadas de *Fourier* diretas e inversas de sinais mais complexos

Propriedades da TF

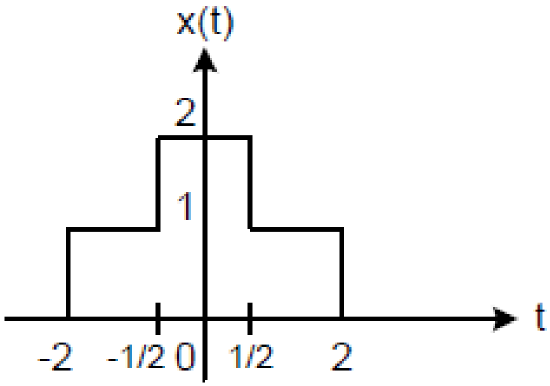
- Linearidade
- A propriedade de linearidade ou de sobreposição estabelece que combinações lineares no domínio do tempo correspondem a combinações lineares no domínio da frequência:

$$a.x_1(t) + b.x_2(t) \leftrightarrow a.X_1(f) + b.X_2(f)$$

- onde *a* e *b* são fatores independentes do tempo. A demonstração desta propriedade está relacionada com a definição de transformada de *Fourier* e do facto de que a integração é uma operação linear

Propriedades da TF

- Exemplo – 1: Determinar a transformada de *Fourier* do sinal desenhado na figura:



- Solução: Em primeiro lugar, observa-se que *x*(*t*) pode ser escrito como a sobreposição de:

$$x(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{4}) + \mathrm{rect}(\frac{t}{1})$$

Propriedades da TF

- Solução:
- Como foi visto na última aula:

$$\mathrm{rect}(t/\tau) \quad \leftrightarrow \quad \tau.\mathrm{sinc}(f\tau)$$

- Então:

$$x(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{4}) + \mathrm{rect}(\frac{t}{1}) \quad \leftrightarrow \quad X(f) = 4.\mathrm{sinc}(4f) + \mathrm{sinc}(f)$$

Propriedades da TF

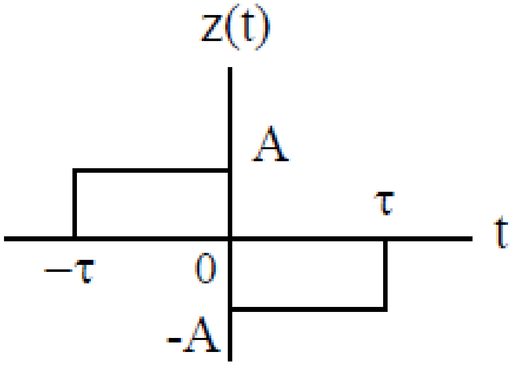
- Deslocamento no tempo
- A propriedade de deslocamento no tempo ou atraso estabelece que:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

- Ou seja, a um deslocamento no tempo está associado um deslocamento de fase linear do espectro do sinal original. A amplitude do espectro, porém, não é alterada

Propriedades da TF

- Exemplo – 2: Determinar a transformada de *Fourier* do sinal desenhado na figura:



- Solução: O cálculo pode ser efectuado com facilidade empregando-se as propriedades apresentadas e a transformada de *Fourier* do sinal $x(t) = A.\mathrm{rect}(t/\tau)$ do exemplo anterior

Propriedades da TF

- Solução:
- O sinal da figura pode ser representado por:

$$z(t) = x(t + \tau / 2) - x(t - \tau / 2)$$

- Aplicando-se as propriedades de linearidade e deslocamento no tempo fica:

$$\begin{aligned} Z(f) &= X(f).e^{j2\pi f\tau / 2} - X(f).e^{-j2\pi f\tau / 2} \\ &= j2.\mathrm{sen}(\pi f\tau).X(f) \end{aligned}$$

- Recorrendo-se à expressão da transformada de *Fourier* de *x*(*t*), e simplificando, obtém-se:

$$Z(f) = (j2\pi f\tau).A\tau.\mathrm{sinc}^2(f\tau)$$

Propriedades da TF

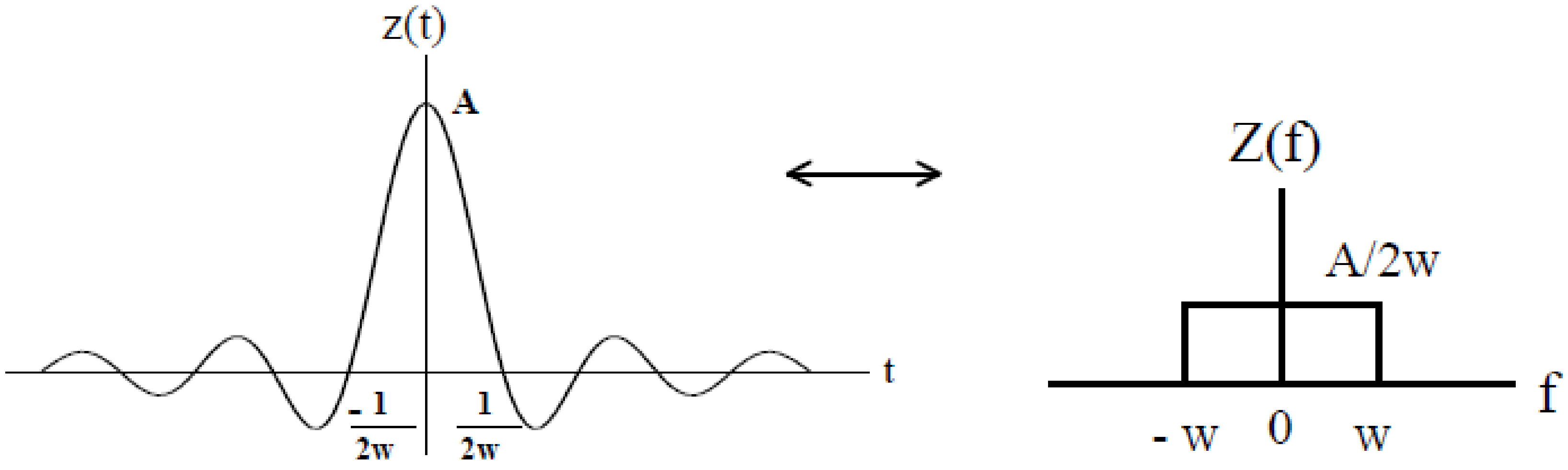
- Teorema da dualidade ou da simetria
- O teorema da dualidade advém da similaridade dos integrais das transformadas de *Fourier* direta e inversa, e estabelece que, se $x(t)$ <-> $X(f)$, então:

$$X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

- Existe uma dualidade entre os domínios do tempo e da frequência. O teorema prova-se permutando t e f nos integrais de *Fourier*

Propriedades da TF

- Exemplo – 3: Determinar a transformada de *Fourier* do sinal $z(t) = A.\text{sinc}(2\omega t)$, onde A e ω são constantes, desenhado na figura:



Propriedades da TF

- Solução:
- Sabemos que:

$$x(t) = B.\mathrm{rect}(t/\tau) \leftrightarrow X(f) = B\tau.\mathrm{sinc}(f\tau)$$

- Aplicando o teorema da dualidade fica:

$$\Im[B\tau.\mathrm{sinc}(t\tau)] = \Im[X(t)] = x(-f) = B.\mathrm{rect}(-f/\tau) = B.\mathrm{rect}(f/\tau)$$

- fazendo B = $A/2\omega$ e $2\omega = \tau$, obtém-se:

$$z(t) = \frac{A}{2w}2w.\mathrm{sinc}(2wt) = A.\mathrm{sinc}(2wt) \leftrightarrow \frac{A}{2w}\mathrm{rect}(\frac{f}{2w})$$

Propriedades da TF

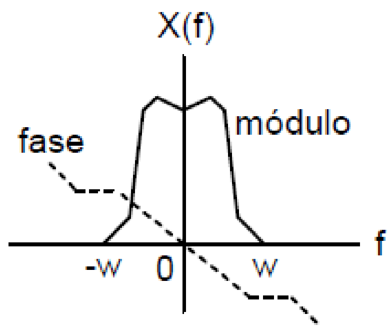
- Translação em frequência
- A propriedade de translação em frequência ou <u>modulação complexa</u>, mostra que um desfasamento no tempo está associado a um deslocamento de frequências do espectro

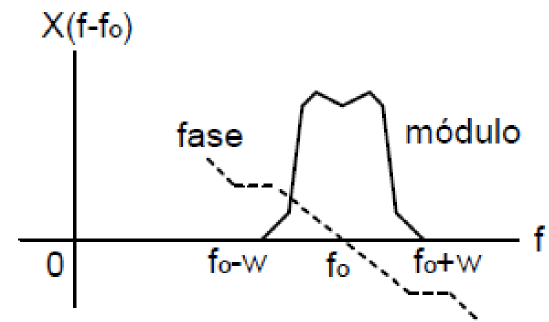
$$e^{j2\pi f_0 t}x(t) \leftrightarrow X(f - f_0)$$

- A demonstração emprega o teorema da dualidade aplicado à propriedade de deslocamento no tempo

Propriedades da TF

- Translação em frequência





- Conforme se observa, embora $X(f)$ tenha largura espectral igual a ω, o espectro transladado $X(f - f_0)$ tem largura 2ω: a porção de frequência negativa de $X(f)$ aparece agora como frequências positivas em $X(f - f_0)$
- Além disso, como o sinal temporal não é mais real, o espectro $X(f - f_0)$ não exibe mais a simetria *Hermitiana*

Propriedades da TF

- Escalonamento no tempo e frequência
- A propriedade de mudança de escala estabelece que:

$$x(a\,t) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

"a" constante

- Reflete a fenómeno de espalhamento recíproco
- Sinais de curta duração temporal possuem espectros com elevadas larguras de banda, e vice-versa

Propriedades da TF

- Propriedade das áreas
- Partindo-se das transformadas de *Fourier* direta e inversa, obtém-se as propriedades das áreas:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt \quad \Rightarrow \quad X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt$$

e

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t} df \quad \Rightarrow \quad x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, df$$

- $X(0)$ corresponde à área sob a função $x(t)$
  - resultado equivalente àquele no caso periódico, onde C_0 é igual ao valor médio de $x(t)$
- $x(0)$ corresponde à área sob o espectro $X(f)$

Propriedades da TF

- Diferenciação e Integração no tempo
- Os efeitos da diferenciação ou integração de um sinal sobre o seu espectro são indicados pelas relações:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f) \qquad \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$$

  - A diferenciação enriquece as componentes de alta frequência de um sinal
  - A integração suprime as componentes de alta frequência
  - A diferenciação acentua as variações no tempo, enquanto a integração as atenua

Propriedades da TF

- Exemplo – 4: Determinar a transformada de *Fourier* da função impulso triangular:

$$w(t) = A.\text{tri}(\frac{t}{2\tau})$$

- Solução: Recorrendo-se à função *z*(*t*) utilizada no Exemplo - 2, observa-se que:

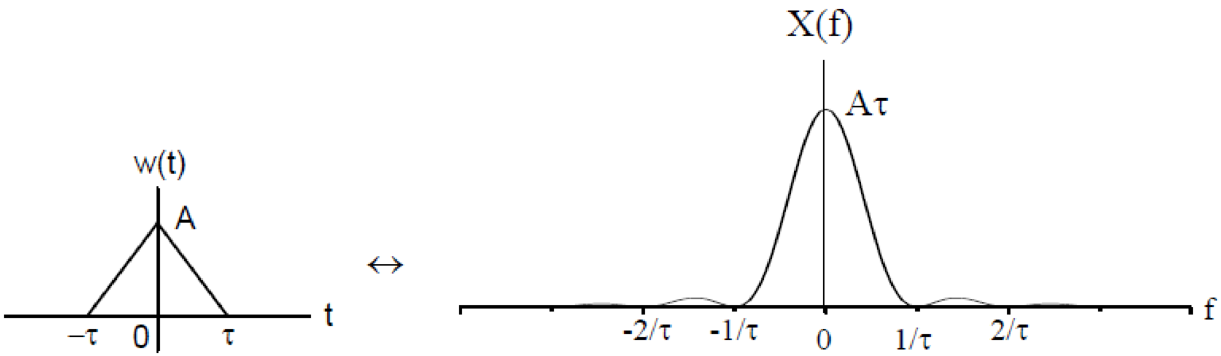
$$w(t) = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{t} z(\lambda).d\lambda$$

- Com o auxílio do teorema da integração e do resultado obtido no Exemplo – 2: $Z(f) = (j2\pi f\tau).A.\tau.\text{sinc}^2(f\tau)$, fica:

$$W(f) = \frac{1}{\tau}\frac{1}{j2\pi f}Z(f) = A\tau.\text{sinc}^2(f\tau)$$

Propriedades da TF

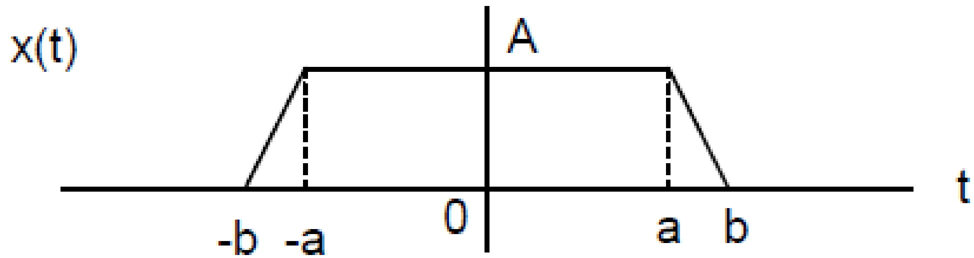
- Solução:



  - As transformadas de *Fourier* de certas funções $x(t)$ podem ser determinadas diferenciando-se esta função uma ou mais vezes, até que apareça uma descontinuidade do tipo degrau
  - A próxima derivada deverá incluir um impulso nessa descontinuidade
  - A aplicação da propriedade da diferenciação permitirá a determinação de $X(f)$

Propriedades da TF

- Exemplo – 5: Determinar a transformada de *Fourier* do trapézio $x(t)$ mostrado na figura:

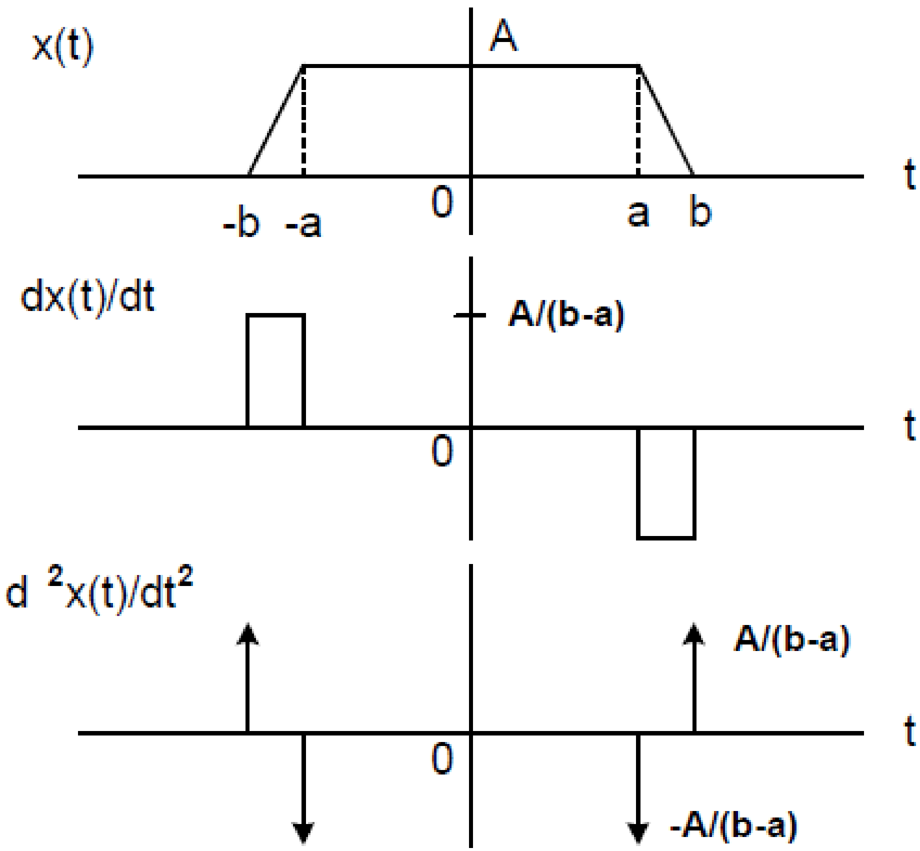


- Solução: Nas figuras seguintes são mostrados os gráficos das derivadas $dx(t)/dt$ e $d^2x(t)/dt^2$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{A}{b-a}[\delta(t+b) - \delta(t+a) - \delta(t-a) + \delta(t-b)]$$

Propriedades da TF

- Solução:



Propriedades da TF

- Solução:
- Aplicando-se a propriedade da Diferenciação no tempo:

$$(j2\pi f)^2 X(f) = \frac{A}{b-a}[e^{j2\pi fb} - e^{j2\pi fa} - e^{-j2\pi fa} + e^{-j2\pi fb}]$$

- após algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$X(f) = \frac{A}{b-a}\left[\frac{\cos 2\pi fa - \cos 2\pi fb}{(2\pi f)^2}\right]$$

Propriedades da TF

- Solução:
- Aplicando-se a propriedade da Diferenciação no tempo:

$$(j2\pi f)^2 X(f) = \frac{A}{b-a}[e^{j2\pi fb} - e^{j2\pi fa} - e^{-j2\pi fa} + e^{-j2\pi fb}]$$

- após algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$X(f) = \frac{A}{b-a}\left[\frac{\cos 2\pi fa - \cos 2\pi fb}{(2\pi f)^2}\right]$$

Propriedades da TF

- Diferenciação e Integração em frequência
- A partir das propriedades de diferenciação e integração no tempo e do teorema da dualidade obtém-se as propriedades de diferenciação e integração em frequência:

$$-j2\pi t\, x(t) \leftrightarrow \frac{d\,X(f)}{df}$$

$$\frac{x(0)}{2}\delta(t) - \frac{x(t)}{j2\pi t} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{f} X(\lambda)d\lambda$$

Propriedades da TF

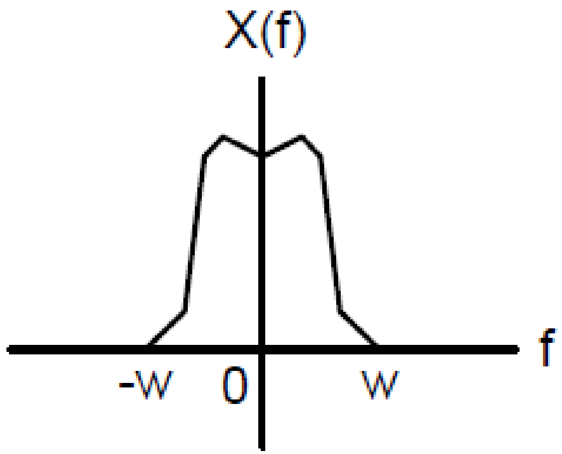
- Convolução e multiplicação
- Um dos teoremas mais importantes na análise de sinais é o teorema da convolução:
  - a convolução no domínio do tempo transforma-se em multiplicação no domínio da frequência
  - a multiplicação no domínio do tempo transforma-se em convolução no domínio da frequência

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) \cdot X_2(f)$$

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$$

Propriedades da TF

- Exemplo – 6: Considere-se $x(t)$ limitado em banda w como o espectro mostrado na figura:



- Determinar o espectro de $x^2(t)$

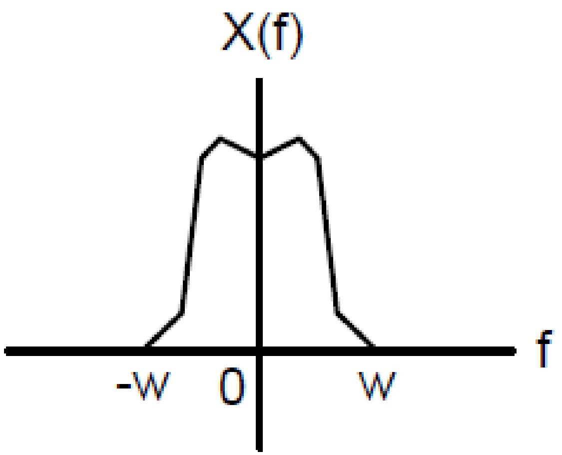
Propriedades da TF

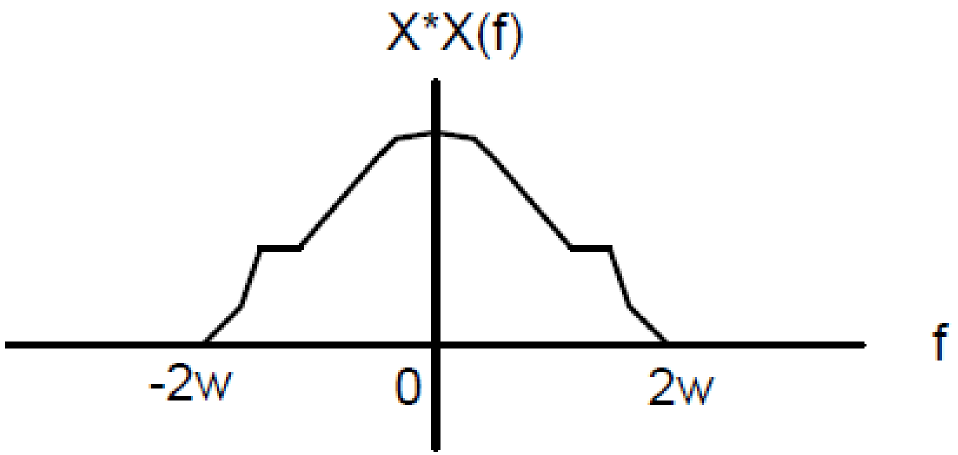
- Solução:
- Se $X(f)$ for o espectro de $x(t)$, então, o espectro de $x^2(t)$ deve ser resultado da convolução de $X(f)$ com ele mesmo
- Se $X(f)$ ocupa a largura de banda w, o resultado de $X(f)*X(f)$ deve ocupar $2w$
- O resultado está esboçado esquematicamente na figura seguinte
- Sem nenhum conhecimento específico sobre $x(t)$, observa-se que $x^2(t)$ tem largura de banda $2w$

Propriedades da TF

- Solução:

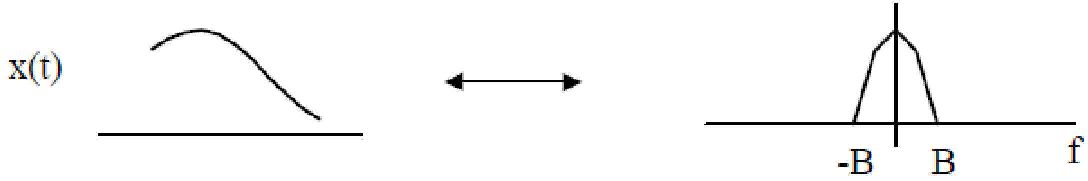
- Aplicação do teorema de convolução:



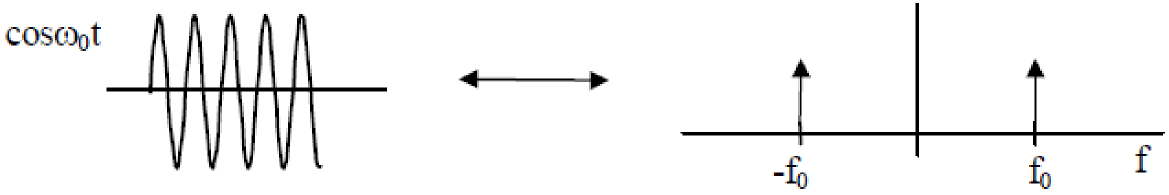


Propriedades da TF

- Modulação real
- Considere-se um sinal $x(t)$ de banda limitada a B, como o da figura:

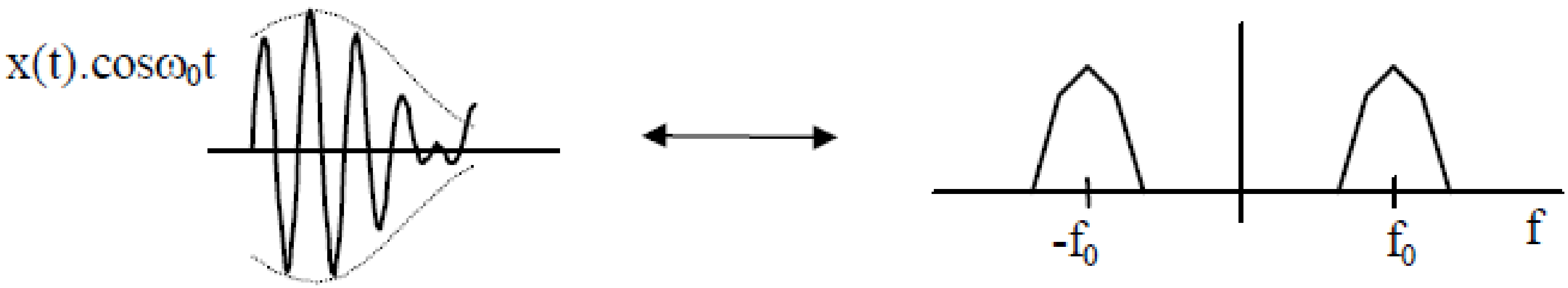


- multiplicando por um sinal sinosoidal com frequência f_0 maior que $2B$, como o da figura:



Propriedades da TF

- Modulação real
- O resultado é o da figura:



- Ou seja, ao multiplicar-se o sinal $x(t)$ por uma sinusóide de frequência f_0, o efeito causado em frequência é um deslocamento do espectro do sinal modulador $x(t)$ para as frequências $\pm f_0$

Propriedades da TF

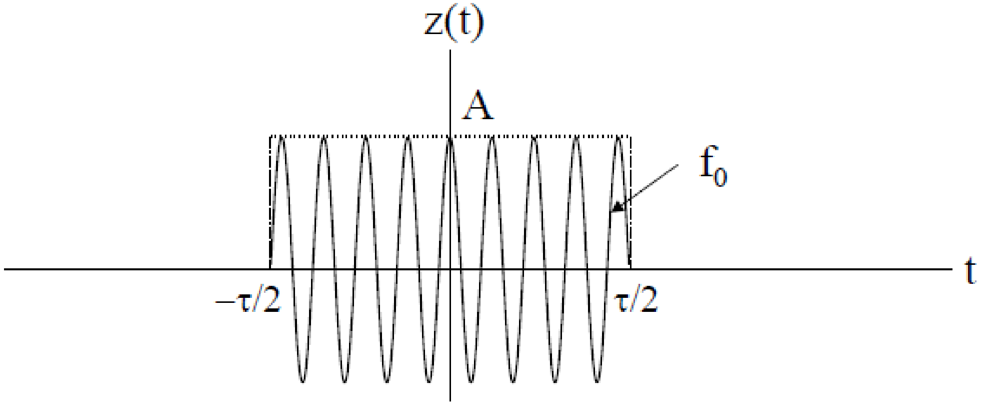
- Modulação real
- Generalizando, a propriedade de modulação real estabelece que:

$$x(t).\cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad \leftrightarrow \quad \frac{e^{j\phi}}{2} X(f - f_0) + \frac{e^{-j\phi}}{2} X(f + f_0)$$

- Esta propriedade é de extrema importância quando se estudam processos de modulação linear como, por exemplo, a modulação de amplitude (AM) em sistemas de telecomunicações

Propriedades da TF

- Exemplo – 7: Impulso RF
- Uma função muito usada em telecomunicações é o impulso de RF (Rádio - Frequência), definido por:
  - $z(t) = A.\mathrm{rect}(t/\tau).\cos(\omega_0 t)$



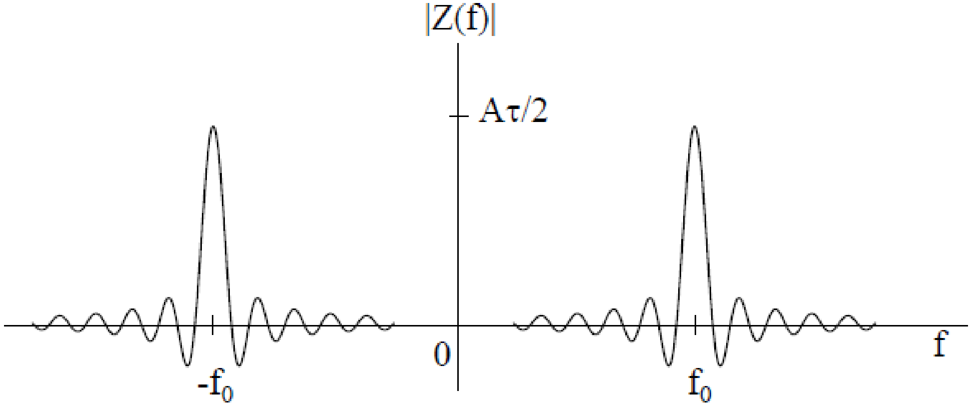
- Obter a transformada de Fourier de $z(t)$

Propriedades da TF

- Solução:
- Aplicando-se a propriedade de modulação, obtém-se:

$$Z(f) = \frac{A\tau}{2}\operatorname{sinc}(f - f_0)\tau + \frac{A\tau}{2}\operatorname{sinc}(f + f_0)\tau$$

- cujo espectro é mostrado em baixo:



Transformadas no Limite

- Serão agora apresentados exemplos de funções descontínuas
  - Ex: função sinal
- ou que não são absolutamente integráveis
  - Ex: função constante e degrau
- mas que permitem o cálculo da transformada de *Fourier* como um processo limite

Transformadas no Limite

- Função Sinal
- A função sinal é dada por:

$$x(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

- Vamos tentar obter a transformada de *Fourier* através da definição:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{0} (-1)\, e^{-j2\pi ft} dt + \int_{0}^{\infty} (+1)\, e^{-j2\pi ft} dt = -\left.\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f}\right|_{0}^{\infty}$$

Transformadas no Limite

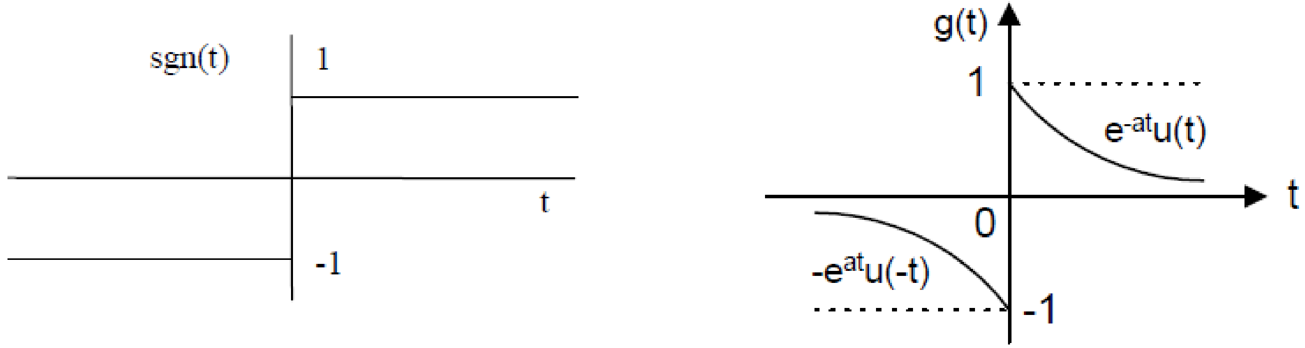
- Função Sinal
- Desenvolvendo as exponenciais em seno e coseno fica:

$$X(f) = \frac{\cos(2\pi ft) - j.\mathrm{sen}(2\pi ft)}{j2\pi f}\Bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{\cos(2\pi ft) - j.\mathrm{sen}(2\pi ft)}{j2\pi f}\Bigg|_{0}^{\infty}$$

- O valor de cos(*x*), quando x-->∞ não é definido
- Logo, a transformada de *Fourier* dessa função não pode ser determinada aplicando-se diretamente a definição
- No entanto, ela pode ser aplicada através dum processo limite, como vai ser visto a seguir

Transformadas no Limite

- Função Sinal
- Para o cálculo do espectro, considera-se o impulso exponencial *g*(*t*), como mostra a figura abaixo:



$$g(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t) \ , \ a > 0$$

- Observa-se que, à medida que "*a*" tende para zero, *g*(*t*) tende para a função sinal

Transformadas no Limite

- Função Sinal
- Então é possível escrever que:

$$x(t) = \mathrm{sgn}(t) = \lim_{a \to 0} g(t)$$

- e:

$$\Im[x(t)] = X(f) = \Im[\lim_{a \to 0} g(t)] = \lim_{a \to 0} \Im[g(t)] = \lim_{a \to 0} G(f)$$

- Como:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j2\pi ft} dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j2\pi ft} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{-1}{(a - j2\pi f)} + \frac{1}{(a + j2\pi f)}$$

$$G(f) = \frac{-j2\omega}{a^2 + \omega^2},$$

Transformadas no Limite

- Função Sinal
- A transformada de Fourier é assim dada por:

$$X(f) = \lim_{a \to 0} G(f) = \lim_{a \to 0} \frac{-j2\omega}{a^2 + \omega^2} = -j\frac{2}{\omega}$$

- Obtém-se mais um par de transformada de *Fourier*:

$$\mathrm{sgn}(t) \quad \leftrightarrow \quad -j\frac{1}{\pi f}$$

Transformadas no Limite

- Função Constante
- Apesar de corresponder a um sinal bastante simples, a função constante $x(t) = A$ não é absolutamente integrável e nem permite que o seu espectro seja determinado a partir da definição
- Assim, deve-se aplicar o processo limite conforme visto no caso anterior
- Para tal, considerar-se o par de transformadas de *Fourier*:

$$\mathrm{rect}(t/\tau) \leftrightarrow \tau.\mathrm{sinc}(f\tau)$$

Transformadas no Limite

- Função Constante
- No limite, quando *τ* --> ∞, a largura do impulso de amplitude *A* tende para infinito e, portanto, podemos afirmar que:

$$x(t) = \lim_{\tau \to \infty} A.\mathrm{rect}(t / \tau)$$

- Considerando-se a transformada de *Fourier* de ambos os lados da expressão:

$$\Im[x(t)] = X(f) = \Im[\lim_{\tau \to \infty} A.\mathrm{sinc}(f / \tau)] = \lim_{\tau \to \infty} \Im[A.\mathrm{rect}(t / \tau)] = \lim_{\tau \to \infty}[A\tau.\sin(f\tau)]$$

Transformadas no Limite

- Função Constante
- Fazendo a mudança de variável: $\Delta = 1 / \tau$ fica:

$$X(f) = A \lim_{\Delta \to 0}[\frac{.1}{\Delta} \operatorname{sinc}(\frac{f}{\Delta})]$$

- observa-se que no limite o termo entre “[ ]” é um impulso unitário (*Dirac*)
- obtém-se assim, mais um par de transformada de *Fourier*:

$$A \quad \leftrightarrow \quad A.\delta(f)$$

Transformadas no Limite

- Degrau unitário
- O degrau unitário é definido por:

$$x(t) = u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- que também não é absolutamente integrável

- TPC: tentar calcular a transformada de *Fourier* do degrau usando a definição, para verificar que não conduz a resultado definido

Transformadas no Limite

- Degrau unitário
- No entanto:

$$x(t) = u(t) = \frac{1 + \mathrm{sgn}(t)}{2}$$

- Assim, usando a propriedade de linearidade e o resultado obtido para a função sinal, obtém-se:

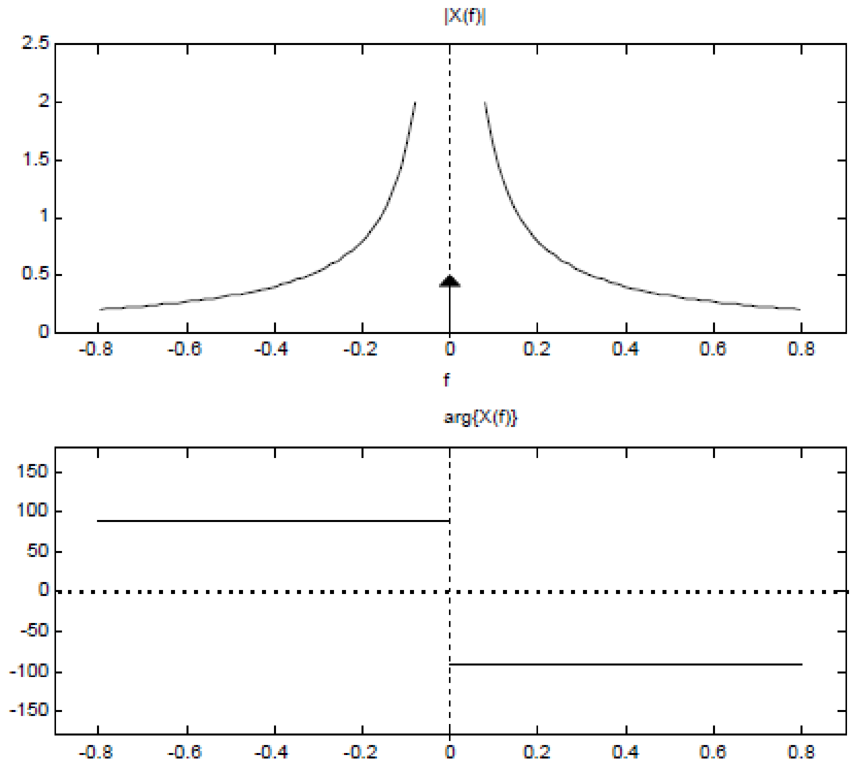
$$X(f) = \Im\left\{\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{sgn}(t)}{2}\right\} = \frac{\delta(f)}{2} - j\frac{1}{\omega}$$

- Ou seja:

$$u(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{\delta(f)}{2} - j\frac{1}{2\pi f}$$

Transformadas no Limite

- Degrau unitário
- O espectro da função degrau é mostrado em baixo:



Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Transformada de *Fourier*

- O conceito de transformada de *Fourier* e das suas propriedades são ferramentas poderosas para análise de sistemas lineares invariantes no tempo e amostragem de sinais
- Deste modo, para consolidar este estudo, os slides seguintes apresentam uma tabela com os principais pares de Transformadas de *Fourier* e um conjunto de exercícios resolvidos

Tabela de Transformadas de *Fourier*

Signal	Fourier transform	Fourier series coefficients (if periodic)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, otherwise
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, otherwise
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, otherwise
$x(t) = 1$	$2\pi\,\delta(\omega)$	$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \; k \neq 0$ (this is the Fourier series representation for any choice of $T > 0$)

Tabela de Transformadas de *Fourier*

Signal	Fourier transform	Fourier series coefficients (if periodic)
Periodic square wave $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \le \frac{T}{2} \end{cases}$ and $x(t+T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k}\delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ for all k
$x(t)\begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\sin \omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	—

Tabela de Transformadas de *Fourier*

Signal	Fourier transform	Fourier series coefficients (if periodic)
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t), \Re e\{a\} > 0$	$\dfrac{1}{a + j\omega}$	—
$te^{-at}u(t), \Re e\{a\} > 0$	$\dfrac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$, $\Re e\{a\} > 0$	$\dfrac{1}{(a + j\omega)^n}$	—

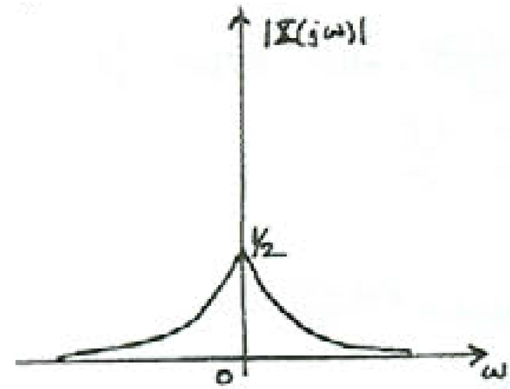
Transformada de *Fourier* - Exercícios

- Exercício – 1
- Através da <u>Equação de Análise</u> calcule a Transformada de *Fourier* dos sinais seguintes:
- a) $e^{-2(t\ -\ 1)}.u(t - 1)$
- b) $e^{-2|t\ -\ 1|}$
- Desenhe os gráficos do módulo de cada um dos resultados

Transformada de *Fourier* - Exercícios

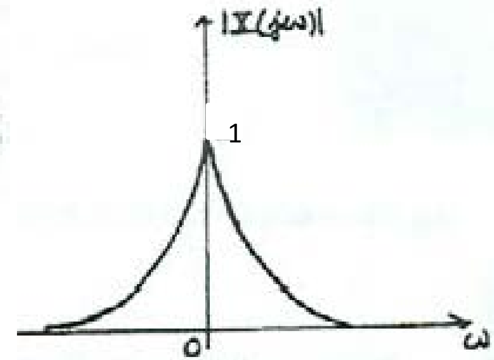
- Exercício – 1 (Resolução)
- a)

$$
\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-1)} u(t-1) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{1}^{\infty} e^{-2(t-1)} e^{-j\omega t} dt \\
&= e^{-j\omega}/(2+j\omega)
\end{aligned}
$$



- b)

$$
\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t-1|} e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{1}^{\infty} e^{-2(t-1)} e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{1} e^{2(t-1)} e^{-j\omega t} dt \\
&= e^{-j\omega}/(2+j\omega) + e^{-j\omega}/(2-j\omega) \\
&= 4e^{-j\omega}/(4+\omega^2)
\end{aligned}
$$



Transformada de *Fourier* - Exercícios

- Exercício – 2
- Determine a Transformada de *Fourier* dos sinais periódicos seguintes:
- a) $\mathrm{sen}(2\pi t + \pi/4)$
- b) $1 + \cos(6\pi t + \pi/8)$

Transformada de *Fourier* - Exercícios

- Exercício – 2 (Solução)
- a) Este sinal é periódico com $T = 1$. A frequência fundamental é de $\omega_0 = 2\pi$. Os coeficientes da série de *Fourier* podem ser obtidos através de:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{1}{2j}\left(e^{j(2\pi t+\pi/4)} - e^{-j(2\pi t+\pi/4)}\right) \\
&= \frac{1}{2j}e^{j\pi/4}e^{j2\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi t}
\end{aligned}
$$

$$
a_1 = \frac{1}{2j}e^{j\pi/4}e^{j2\pi t}, \qquad a_{-1} = -\frac{1}{2j}e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi t}
$$

Transformada de *Fourier* - Exercícios

- Exercício – 2 (Solução)
- a) Sabe-se também que, para sinais periódicos, a transformada de *Fourier* resulta num trem de impulsos centrados nas frequências $k.\omega_0$
- Além disso, a área de cada impulso é igual a $a_k.2\pi$. Logo:

$$
\begin{aligned}
X_1(j\omega) &= 2\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi a_{-1} \delta(\omega + \omega_0) \\
&= (\pi/j) e^{j\pi/4} \delta(\omega - 2\pi) - (\pi/j) e^{-j\pi/4} \delta(\omega + 2\pi)
\end{aligned}
$$

Transformada de *Fourier* - Exercícios

- Exercício – 2 (Solução)
- b) Este sinal é periódico com $T = 1/3$. A frequência fundamental é de $\omega_0 = 6\pi$. Os coeficientes da série de *Fourier* podem ser obtidos através de:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 1 + \frac{1}{2}\left(e^{j(6\pi t+\pi/8)} - e^{-j(6\pi t+\pi/8)}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}e^{j\pi/8}e^{j6\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/8}e^{-j6\pi t} \end{aligned}$$

Transformada de *Fourier* - Exercícios

- Exercício – 3
- Use a equação de Síntese ou Transformada inversa de *Fourier* para determinar os sinais $x(t)$, a partir da sua Transformada:

- a) $X_1(j\omega) = 2\pi.\delta(\omega) + \pi.\delta(\omega - 4\pi) + \pi.\delta(\omega + 4\pi)$
- b) $X_2(j\omega) = \begin{cases} 2, & 0 \leq \omega \leq 2 \\ -2, & -2 \leq \omega < 0 \\ 0, & |\omega| > 2 \end{cases}$

Transformada de *Fourier* - Exercícios

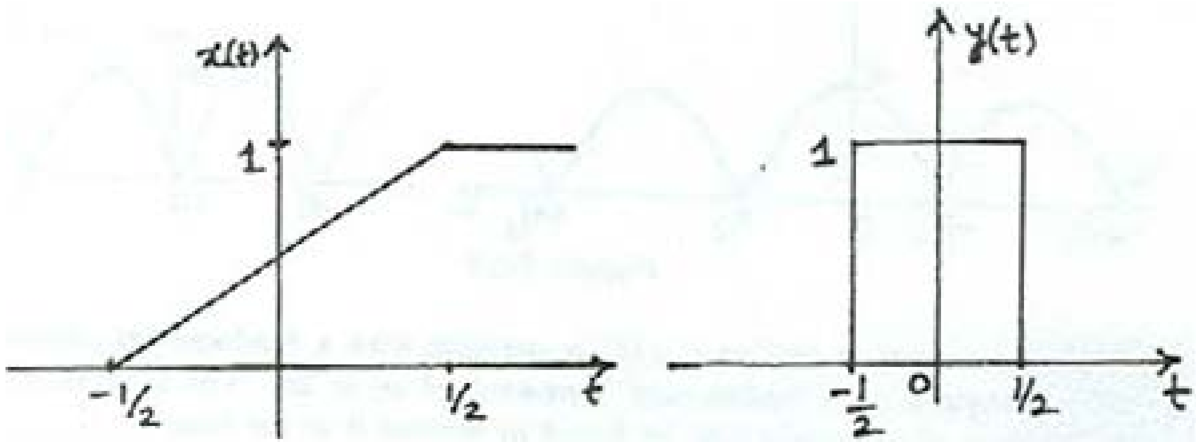
- Exercício – 4
- Considere o sinal:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{1}{2} \\ t + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 1, & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Use as propriedades da Diferenciação e Integração para determinar $X(j\omega)$

Transformada de *Fourier* - Exercícios

- Exercício – 4 (solução)
- Os sinais *x*(*t*) e *y*(*t*) estão representados abaixo:



- em que:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} y(t)dt$$

Transformada de *Fourier* - Exercícios

- Exercício – 4 (solução)
- Usando as propriedades da TF:

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}Y(j\omega) + \pi Y(j0)\delta(\omega)$$

- Através da Tabela de pares de TF obtém-se:

$$Y(j\omega) = \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$$

- Finalmente:

$$X(j\omega) = \frac{2\sin(\omega/2)}{j\omega^2} + \pi\delta(\omega)$$

Bibliografia

- Oppenheim, A.V. , Willsky, A.S. and Young, I.T., Signals and Systems, Prentice- Hall Signal Processing Series, 1983