Universidade do Minho | MIECOM,MIEEIC
DMCT | 2007/2008

Séries de relevo

A - Série geométrica

• Seja $r \in \mathbb{R}$. À série numérica $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^{n-1} = 1+r+r^2+r^3+\cdots$ chama-se série geométrica de razão r. A sua sucessão das somas parciais é definida por

$$s_n = n \quad \text{se } \ r = 1, \qquad s_n = \frac{1-r^n}{1-r} \quad \text{se } \ r \neq 1.$$

Esta série diverge se $|r| \geq 1$ e converge se $|r| < 1$, caso em que a sua soma é $s = \dfrac{1}{1-r}$.

• Sejam $a, r \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. A série numérica $\sum_{n\in\mathbb{N}} ar^n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = ar(1 + r + r^2 + \cdots)$ é também uma série geométrica de razão r. Esta série diverge se $|r| \geq 1$ e converge se $|r| < 1$, caso em que a sua soma é $s = \dfrac{ar}{1-r}$.

B - Série de Riemann

• Seja $s\in\mathbb{R}^+$. À série numérica $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n^s}$ chama-se série de Riemann de expoente s. Esta série diverge se $s \leq 1$ e converge se $s > 1$. No caso particular em que $s = 1$, a série de Riemann recebe a designação de série harmónica (divergente, portanto).

C - Série telescópica

• Sejam $(a_n)_n$ uma sucessão de números reais e $p\in\mathbb{N}$. À série numérica $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+p})$ chama-se série de Mengoli ou telescópica. A sua sucessão das somas parciais é

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p}), \ \ n\in\mathbb{N}.$$

Esta série converge se e só se $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente. Em caso de convergência, a sua soma é $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \lim_n a_n$.

Critérios de convergência para séries de termos não negativos

A - Primeiro Critério de Comparação

Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ sucessões de termos não negativos, tais que para um certo $p \in \mathbb{N}$, se tem $u_n \leq v_n$, $\forall n \geq p$. Se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ também converge.

Equivalentemente, se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ também é diverge.

B - Segundo Critério de Comparação

Sejam $(u_n)_n$ uma sucessão de termos não negativos e $(v_n)_n$ uma sucessão de termos positivos, tais que existe $\ell = \lim\limits_n \dfrac{u_n}{v_n}$, sendo $\ell \in \mathbb{R}_0^+$ ou $\ell = +\infty$.

- Se $\ell \in \mathbb{R}^+$ então as séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ e $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ possuem a mesma natureza.
- Se $\ell = 0$ e $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge então $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ também converge.

  Equivalentemente, se $\ell = 0$ e $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge então $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ também diverge.
- Se $\ell = +\infty$ e $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge então $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ também diverge.

  Equivalentemente, se $\ell = +\infty$ e $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge então $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ também converge.

C - Critério da razão (de D'Alembert)

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos positivos tal que $\lim\limits_n \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

- Se $\ell < 1$ então a série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
- Se $\ell > 1$ então a série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
- Se $\ell = 1$ então nada se pode concluir sobre a natureza da série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

D - Critério da raíz (de Cauchy)

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos não negativos tal que $\lim\limits_n \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

- Se $\ell < 1$ então a série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
- Se $\ell > 1$ então a série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
- Se $\ell = 1$ então nada se pode concluir sobre a natureza da série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Critério de convergência para séries alternadas

Critério de Leibnitz (condição suficiente de convergência das séries alternadas)

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão decrescente, pelo menos a partir de uma certa ordem, e tal que $\lim\limits_n u_n = 0$. Então a série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1}\, u_n$ é convergente.