Ficha 7A

1. $f(x,y) = xy$

$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

$\Leftrightarrow \vec{\nabla} f(x,y) = (y, x)$

2. $f(x,y) = x^2 + y^2(1+\sin x)$

Calcular $\vec{\nabla} f$ no ponto $(\pi, 2)$:

$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

$\Leftrightarrow \vec{\nabla} f(x,y) = (2x + y^2 \cos x, 2y(1+\sin x))$

Agora

$\vec{\nabla} f(\pi, 2) = \left(2\times\pi + 2^2 \cdot \underbrace{\cos\pi}_{-1}, 2\times 2 \, (1 + \underbrace{\sin\pi}_{0}) \right)$

$\Leftrightarrow \vec{\nabla} f(\frac{\pi}{2}, 2) = (2\pi - 4, 4)$

3.

derivada direccional de f, no p.to (x_0, y_0) na direcção do vector unitário $\vec{u} = (a,b)$ é dada por:

$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot b$ onde $\vec{u} = (a,b)$ e $\|\vec{u}\| = 1$.

$\Updownarrow$

$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0) \cdot \vec{u}$

Resolução:

. $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z = \frac{x^z}{y^z}$

. Calcular derivadas parciais de 1.ª ordem:

$\frac{\partial f}{\partial x} = z \frac{x^{z-1}}{y^z}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -z\, x^z \cdot y^{-z-1}$

$\cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} = -z\dfrac{x^z}{y^{z+1}}$

Repa: $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$

$\cdot \dfrac{\partial f}{\partial z} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z \cdot \ln \dfrac{x}{y}$

Assim,

$$\vec{\nabla} f = \left(z\frac{x^{z-1}}{y^z}, -z\frac{x^z}{y^{z+1}}, \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) \right)$$

$$\vec{\nabla} f(1,1,1) = (1, -1, 0)$$

• Vector $\vec{u} = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 2\vec{e_3} = (2, 2, -2)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ → $\vec{u}$ é vector unitário

Vector unitário: $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}}, \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}}, -\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}} \right)$

$\Rightarrow \vec{v} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \right)$

$$D_{\vec{v}} f(1,1,1) = \vec{\nabla} f(1,1,1) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$= (1, -1, 0) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$= 1 \times \cancel{\frac{\sqrt{3}}{3}} - 1 \times \cancel{\frac{\sqrt{3}}{3}} + 0 \times -\frac{\sqrt{3}}{3} = \underline{\underline{0}}$$

4 - $f(x, y, z) = \sin\left(\dfrac{xz}{x^2 + y^2}\right)$

(a) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z} \right)$

C.A.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)$

$$= \left(\frac{z\cdot(x^2+y^2) - 2x^2 z}{(x^2+y^2)^2}\right) \cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{\left(-x^2z + y^2z\right)}{(x^2+y^2)^2} \cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)$$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)$

$$= -\frac{2yxz}{(x^2+y^2)^2} \cdot \cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)$$

- $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)$$

Assim

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{-x^2z+y^2z}{(x^2+y^2)^2} \cdot \cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right), -\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2} \cdot \cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right), \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)\right)$$

(b) $\vec{\nabla} f(2,1,0) = \left(0, 0, \frac{2}{5}\right)$

(c) $D_{\vec{u}} f(2,1,0) = \nabla f(2,1,0) \cdot u$

. Vector $\vec{u} = (1,1,1) \rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \rightarrow \vec{u}$ ñ é vector unitário

Assim, calculando vector unitário: $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$D_{\vec{v}} f(2,1,0) = \vec{\nabla} f(2,1,0) \cdot \vec{v}$$
$$= \left(0, 0, \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 + 0 + \frac{2}{5} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{15} \;//$$

5. sabendo que:

$$D_{\vec{u}} f = \vec{\nabla f} \cdot \vec{u} = \|\vec{\nabla f}\| \times \underbrace{\|\vec{u}\|}_{= 1} \times \cos\theta = \|\vec{\nabla f}\| \cdot \cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre os vectores $\vec{\nabla f}$ e $\vec{u}$.

(a) O valor máximo de $D_{\vec{u}} f$ ~~da taxa de crescimento~~ ocorre quando $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$. ~~Portanto~~ Ou seja quando $\vec{u}$ tem a mesma direcção e sentido de $\vec{\nabla f}$. Neste caso a taxe de variação máxima é: $D_{\vec{u}} f = \|\vec{\nabla f}\|$

(b) O valor mínimo de $D_{\vec{u}} f$ ocorre quando $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$. Ou seja, quando $\vec{u}$ tem a mesma direcção mas sentido oposto ao de $\vec{\nabla f}$. Neste caso a taxa de variação mínima é:

$$D_{\vec{u}} f = -\|\vec{\nabla f}\|.$$

(c) O valor nulo de $D_{\vec{u}} f$ ocorre quando

$$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ Ou seja,}$$

quando $\vec{u}$ é perpendicular ao vector gradiente de f. Neste caso a taxa de variação nula é: $D_{\vec{u}} f = 0$

6. ~~[illegible]~~ Para que valores de k a equação $x + 2yx + 3z^2 + x^2 z = 1$ define z implicitamente como uma função de x e y, na vizinhança do ponto $(1, 0, k)$.

Resolução:

$$\underbrace{x + 2yx + 3z^2 + x^2 z - 1}_{F(x,y,z)} = 0 \quad (A)$$

condição a verificar:

(i) $F(x_0, y_0, z_0) = 0 \Leftrightarrow F(1, 0, k) = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{1} + 0 + 3k^2 + k - \cancel{1} = 0$

$\Leftrightarrow k(3k+1) = 0$

$\Leftrightarrow k = 0 \vee 3k + 1 = 0$

$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = -\frac{1}{3}$

(ii) $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2y + 2xz$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 6z + x^2$

→ São funções contínuas em $\mathbb{R}^2$ pois são funções polinomiais. Logo tb é verdade que são contínuas numa vizinhança do ponto $(1, 0, k)$.

(iii) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, k) \neq 0$

$\Leftrightarrow 6k + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow k \neq -\frac{1}{6}$

Conclusão: Por (i), (ii) e (iii), a eq (A) define z implicitamente como uma função de $\underline{\underline{x}}$ e y,

para $k = 0 \vee k = -\frac{1}{3}$.

7. $1+y=x^2-\ln y \Leftrightarrow \underbrace{1+y-x^2+\ln y}_{F(x,y)}=0$ (1)

(a) Condições a verificar p/ q a eq. (1) define y implicitamente como uma função de $\underline{\underline{x}}$ numa vizinhança do ponto $(\sqrt{2},1)$:

(i) $F(\sqrt{2},1)=0 \Leftrightarrow 1+1-(\sqrt{2})^2+\ln 1=0$

$\Leftrightarrow \cancel{2}-\cancel{2}+0=0$

$0=0$ ✓

(ii) $\frac{\partial F}{\partial x}=-2x$

$\frac{\partial F}{\partial y}=1+\frac{1}{y}$

$\to$ $\frac{\partial F}{\partial x}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, logo tb em D_f, dado q é uma f. polinomial.
$\frac{\partial F}{\partial y}$ é contínua $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y): y\neq 0\}$, logo tb em D_f, dado q é f. pol.
logo tb é verdade q são contínuas numa vizinhança do ponto $(\sqrt{2},1)$ contida em D_f.

obs: $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y>0\}$

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\sqrt{2},1)\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{1}\neq 0 \Leftrightarrow 2\neq 0$ ✓

Por (i), (ii), (iii) a eq. (1) define y implicitamente como uma função de x na vizinhança do pto $(\sqrt{2},1)$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$=-\frac{-2x}{1+\frac{1}{y}} \to \frac{dy}{dx}(\sqrt{2})=\frac{2\times\sqrt{2}}{1+\frac{1}{1}}=$$

$$=\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{2xy}{y+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}(2xy)\cdot(y+1) - \frac{d}{dx}(y+1)\cdot 2xy}{(y+1)^2}$$

$$= \frac{\left(2\cdot y + 2x\cdot\frac{dy}{dx}\right)\cdot(y+1) - \frac{dy}{dx}\cdot 2xy}{(y+1)^2}$$

CA:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+\frac{1}{y}} = \frac{2x}{\frac{y+1}{y}}$$

$$= \frac{2\cdot xy}{y+1}$$

Assim

$$\frac{d^2y}{dx^2}(\sqrt{2}) = \frac{\left(2\times 1 + 2\sqrt{2}\cdot\frac{dy}{dx}(\sqrt{2})\right)(1+1) - \frac{dy}{dx}(\sqrt{2})\cdot 2\times\sqrt{2}\cdot 1}{(1+1)^2}$$

$$= \frac{(2+2\sqrt{2}\times\sqrt{2})\times 2 - \sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{(2+2\times 2)\times 2 - 2\times 2}{4} = \frac{12-4}{4} = \frac{8}{4} = 2 //$$

8. $1-\cos(x+2y+z) = 2x+y-3z \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1-\cos(x+2y+z)-2x-y+3z}_{F(x,y)} = 0 \quad (A)$$

$\rightarrow D_F = \mathbb{R}^3$

condições a verificar para que a eq. (A) define z, implicitamente como uma função de $\underline{\underline{x}}$ e y, numa vizinhança do ponto $(0,0,0)$

(i) $F(0,0,0) = 0 \Leftrightarrow 1-\cos\overset{1}{0} = 0 \Leftrightarrow 0=0$ ✓

(ii) $\frac{\partial F}{\partial x} = +\sin(x+2y+z) - 2$

$\cdot \dfrac{\partial F}{\partial y} = +2\,\text{sen}(x+2y+z) - 1$

$\cdot \dfrac{\partial F}{\partial z} = \text{sen}(x+2y+z) + 3$

As derivadas parciais de 1ª ordem são funções contínuas em $\mathbb{R}^3$ pois são funções polinomiais. Logo tb é verdade F são contínuas numa vizinhança do ponto $(0,0,0)$ contida em $\mathbb{R}^3$.

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) \neq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\text{sen}\,0}_{0} + 3 \neq 0 \Leftrightarrow 3 \neq 0$ ✓

Por (i), (ii), (iii) a eq. (A) define z implicitamente como uma função de x e ~~y~~ na vizinhança do ponto $(0,0,0)$.

$$\cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\text{sen}(x+2y+z)-2}{\text{sen}(x+2y+z)+3}$$

logo $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0,0) = -\dfrac{\overset{0}{\text{sen}\,0} - 2}{\underset{0}{\text{sen}\,0} + 3} = \dfrac{2}{3}$

$$\cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2\,\text{sen}(x+2y+z)-1}{\text{sen}(x+2y+z)+3}$$

logo $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0,0) = -\dfrac{2\,\text{sen}\,0 - 1}{\text{sen}\,0 + 3} = \dfrac{1}{3}$

9. $\underbrace{x^3+2xy^2-7z^3+3y+1}_{F}=0$ ← superfície de nível 7.5

Eq. do plano tangente à sup. nível no ponto $(1,1,1)$:

$$\boxed{\vec{\nabla}F(P_0)\cdot(P-P_0)=0}$$

obs.
- $P_0=(1,1,1)$ pertence ao plano
- $P=(x,y,z)$ é um pto qualquer do plano
- $\vec{P_0P}=P-P_0$ pertence ao plano.

$\Leftrightarrow (5,7,-21)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0$

C.A. $\Leftrightarrow 5(x-1)+7(y-1)-21(z-1)=0$

$5x+7y-21z+9=0$

C.A. $\vec{\nabla}F=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$

$=(3x^2+2y^2,\ 4xy+3,\ -21z^2)$

- $\vec{\nabla}F(1,1,1)=(3+2,\ 4+3,\ -21)=(5,7,-21)$

- $P-P_0=(x,y,z)-(1,1,1)=(x-1,y-1,z-1)$

10. $z=x^2-y^2 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-y^2-z}_{F(x,y,z)}=0$ (a superfície de nível c/ $k=0$ de F)

Eq. do plano tang. à sup. nível no pto $P_0=(a,b,c)$:

$$\vec{\nabla}F(P_0)\cdot(P-P_0)=0$$

C.A. $\Leftrightarrow (2a,-2b,-1)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0$

$\Leftrightarrow 2a(x-a)-2b(y-b)-(z-c)=0$

C.A.:

$\vec{\nabla}F=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial z},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=(2x,-2y,-1)$

$\nabla F(a,b,c)=(2a,-2b,-1)$; $P-P_0=(x,y,z)-(a,b,c)=(x-a,y-b,z-c)$

$\Leftrightarrow \; 2ax - 2a^2 - 2by + 2b^2 - z + c = 0$

$\Leftrightarrow \; 2ax - 2by - z - 2a^2 + 2b^2 + c = 0$

Intersecção do plano tang. c/ o eixo dos zz: $\Rightarrow x=0$ e $y=0$

$0 - 0 - z - 2a^2 + 2b^2 + c = 0$

$\Leftrightarrow \; -z - 2a^2 + 2b^2 + c = 0$

Dado que $F(a,b,c) = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - c = 0$

$\Leftrightarrow c = a^2 - b^2$

Assim

$$-z - 2\underbrace{(a^2 - b^2)}_{= c} + c = 0$$

$\Leftrightarrow -z - 2c + c = 0$

$\Leftrightarrow -z - c = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{z = -c}$ c.t.p.

11. $x^2 - yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z}_{= F(x,y,z)} = 0$$ (superfície de nível c/ $k=0$ de F)

$\bullet \; \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(2x - 2z^2, -z + 6y, -y - 4xz + 8\right)$

13 - Polinómio de Taylor de Grau 2:

$$f(a+dx, b+dy) \simeq f(a,b) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\, dy\right] +$$

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot (dx)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\, dx \cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \cdot (dy)^2\right]$$

. $(a,b) = (2,1)$

. $f(x,y) = \frac{1}{2+x-2y} \rightarrow f(2,1) = \frac{1}{2+2-2\times 1} = \frac{1}{2}$

. $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{(2+x-2y)^2} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -\frac{1}{(2+\cancel{2}-\cancel{2})^2} = -\frac{1}{4}$

. $\frac{\partial f}{\partial y} = +\frac{2}{(2+x-2y)^2} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{2}{(2+\cancel{2}-\cancel{2})^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-(2+x-2y)^{-2}\right) = 2(2+x-2y)^{-3} = \frac{2}{(2+x-2y)^3} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = \frac{2}{(2+\cancel{2}-\cancel{2})^3} = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$

. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-(2+x-2y)^{-2}\right) = 2(2+x-2y)^{-3} \times (-2) = \frac{-4}{(2+x-2y)^3}$

$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,1) = \frac{-4}{(2+\cancel{2}-\cancel{2})^3} = -\frac{4}{2^3} = -\frac{1}{2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2(2+x-2y)^{-2}\right) = -4(2+x-2y)^{-3} \times (-2) = \frac{8}{(2+x-2y)^3}$

$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = \frac{8}{(2+\cancel{2}-\cancel{2})^3} = 1$

Portanto

$$f(2+dx, 1+dy) \approx \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4} \cdot dx + \frac{1}{2}dy\right) + \frac{1}{2!}\left[\frac{1}{4} \cdot (dx)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dx\, dy + 1 \cdot (dy)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow f(2+dx, 1+dy) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{4}dx + \frac{1}{2}dy + \frac{1}{8}(dx)^2 - \frac{1}{2}dx\,dy + \frac{1}{2}(dy)^2$$