Teoria

O polinómio de Taylor para qualquer ordem n, pode ser obtido recorrendo à seguinte pirâmide de derivadas (neste caso construída até à ordem n = 3):

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & f(x;y) & & & \\
 & \dfrac{\partial f}{\partial x} & & & & \dfrac{\partial f}{\partial x} & \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} & & \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} & & \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} & & \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}
\end{array}
$$

Onde os respectivos coeficientes adjacentes a cada uma das derivadas são determinados através do seguinte triângulo de Pascal:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & \xrightarrow{+} & & 1 & & \\
 & 1 & & \xrightarrow{+} & 2 & \xrightarrow{+} & & 1 & \\
1 & \xrightarrow{+} & 3 & & \xrightarrow{+} & & 3 & \xrightarrow{+} & 1 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Daqui resulta a seguinte fórmula de Taylor (até à ordem n = 3, neste caso):

$$F(x;y)=F(a;b)+\left[\frac{\partial F}{\partial x}(a;b)\cdot(x-a)+\frac{\partial F}{\partial y}(a;b)\cdot(y-b)\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a;b)\cdot(x-a)^2+2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(a;b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a;b)\cdot(y-b)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{3!}\cdot\left[\begin{array}{l}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(a;b)\cdot(x-a)^3+3\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}(a;b)\cdot(x-a)^2\cdot(y-b)+3\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}(a;b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)^2+\\+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}(a;b)\cdot(y-b)^3\end{array}\right]+R_{n=3}$$

1. Determine o polinómio de Taylor de ordem n das funções seguintes nos pontos indicados:

a) $f(x;y)=\frac{1}{2+x-2y}$ **, onde:** $n=2$ **e** $(a;b)=(2;1)$

R:

Sabendo que o polinómio de Taylor de ordem 2 é dado pela seguinte expressão:

$$F(x;y)=F(a;b)+\left[\frac{\partial F}{\partial x}(a;b)\cdot(x-a)+\frac{\partial F}{\partial y}(a;b)\cdot(y-b)\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a;b)\cdot(x-a)^2+2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(a;b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a;b)\cdot(y-b)^2\right]+R_2 \quad \Leftrightarrow ¤$$

Antes de mais, vamos começar por determinar o valor da função no ponto: $(a;b)=(2;1)$

$$f(2;1)=\frac{1}{2+2-2\cdot 1}\Leftrightarrow f(2;1)=\frac{1}{2}$$

Vamos agora determinar as primeiras e as segundas derivadas, para posteriormente se substituírem os respectivos valores na expressão acima citada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\left(\frac{1}{2+x-2y}\right)'_x=\frac{(1)'_x\cdot(2+x-2y)-1\cdot(2+x-2y)'_x}{(2+x-2y)^2}=-\frac{1}{(2+x-2y)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(2;1)=-\frac{1}{(2+2-2\cdot1)^2}=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\left(\frac{1}{2+x-2y}\right)'_y=\frac{(1)'_y\cdot(2+x-2y)-1\cdot(2+x-2y)'_y}{(2+x-2y)^2}=\frac{2}{(2+x-2y)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(2;1)=\frac{2}{(2+2-2\cdot1)^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{(2+x-2y)^2}\right)=-\frac{(1)'_x\cdot(2+x-2y)^2-1\cdot\left((2+x-2y)^2\right)'_x}{\left((2+x-2y)^2\right)^2}=$$

$$=-\frac{-1\cdot\left(2\cdot(2+x-2y)\cdot\overbrace{(2+x-2y)'_x}^{=1}\right)}{(2+x-2y)^4}=\frac{2\cdot(2+x-2y)}{(2+x-2y)^4}=\frac{2}{(2+x-2y)^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2;1)=\frac{2}{(2+2-2\cdot1)^3}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{(2+x-2y)^2}\right)=-\frac{(1)'_y\cdot(2+x-2y)^2-1\cdot\left((2+x-2y)^2\right)'_y}{\left((2+x-2y)^2\right)^2}=$$

$$=-\frac{-1\cdot\left(2\cdot(2+x-2y)\cdot\overbrace{(2+x-2y)'_y}^{=-2}\right)}{(2+x-2y)^4}=\frac{-4\cdot(2+x-2y)}{(2+x-2y)^4}=-\frac{4}{(2+x-2y)^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2;1)=-\frac{4}{(2+2-2\cdot 1)^3}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{(2+x-2y)^2}\right)=\frac{(2)'_y\cdot(2+x-2y)^2-2\cdot\left((2+x-2y)^2\right)'_y}{\left((2+x-2y)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{-2\cdot\left(2\cdot(2+x-2y)\cdot\overbrace{(2+x-2y)'_y}^{=-2}\right)}{(2+x-2y)^4}=\frac{8\cdot(2+x-2y)}{(2+x-2y)^4}=\frac{8}{(2+x-2y)^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2;1)=\frac{8}{(2+2-2\cdot 1)^3}=\frac{8}{8}=1$$

Agora por substituição directa na expressão ¤, teremos:

$$F(x;y)=\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{4}\cdot(x-2)+\frac{1}{2}\cdot(y-1)\right]+\frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{1}{4}\cdot(x-2)^2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)\cdot(y-1)+1\cdot(y-1)^2\right]+R_2$$

b) $f(x;y)=\cos(x+sen(y))$**, onde:** $n=2$ **e** $(a;b)=(0;0)$

R:

Sabendo que o polinómio de Taylor de ordem 2 é dado pela seguinte expressão:

$$F(x;y)=F(a;b)+\left[\frac{\partial F}{\partial x}(a;b)\cdot(x-a)+\frac{\partial F}{\partial y}(a;b)\cdot(y-b)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a;b)\cdot(x-a)^2+2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(a;b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a;b)\cdot(y-b)^2\right]+R_2$$

$\Leftrightarrow$ ¤

Antes de mais, vamos começar por determinar o valor da função no ponto: $(a;b)=(0;0)$

$$f(0;0)=\cos\left(0+\underbrace{sen(0)}_{=0}\right)\Leftrightarrow f(0;0)=1$$

Vamos agora determinar as primeiras e as segundas derivadas, para posteriormente se substituírem os respectivos valores na expressão acima citada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=(\cos(x+sen(y)))'_x=-sen(x+sen(y))\cdot(x+sen(y))'_x=-x\cdot sen(x+sen(y))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=-0\cdot\underbrace{sen(0+sen(0))}_{=0}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=(\cos(x+sen(y)))'_y=-sen(x+sen(y))\cdot(x+sen(y))'_y=-sen(x+sen(y))\cdot\cos(y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=-\underbrace{sen(0+sen(0))}_{=0}\cdot\underbrace{\cos(0)}_{=1}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(-x\cdot sen(x+sen(y)))=$$

$$=(-x)'_x\cdot(sen(x+sen(y)))+(-x)\cdot(sen(x+sen(y)))'_x=$$

$$=-1\cdot sen(x+sen(y))-x\cdot\cos(x+sen(y))\cdot(x+sen(y))'_x=-sen(x+sen(y))-x\cdot\cos(x+sen(y))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0;0)=\underbrace{-sen(0+sen(0))}_{=0}-0\cdot\underbrace{\cos\left(0+\underbrace{sen(0)}_{=0}\right)}_{=1}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(-x\cdot sen(x+sen(y)))=$$

$$=(-x)'_y\cdot(sen(x+sen(y)))+(-x)\cdot(sen(x+sen(y)))'_y=$$

$$=-x\cdot\cos(x+sen(y))\cdot(x+sen(y))'_y=-x\cdot\cos(x+sen(y))\cdot\cos(y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0;0)=-0\cdot\underbrace{\cos\left(0+\underbrace{sen(0)}_{=0}\right)}_{=1}\cdot\underbrace{\cos(0)}_{=1}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(-sen(x+sen(y))\cdot\cos(y))=$$

$$=(-sen(x+sen(y)))'_y\cdot\cos(y)+(-sen(x+sen(y)))\cdot(\cos(y))'_y=$$

$$= \left(-\cos(x+sen(y))\cdot(x+sen(y))'_y\right)\cdot\cos(y)+(-sen(x+sen(y)))\cdot(-sen(y))=$$

$$= (-\cos(x+sen(y))\cdot\cos(y))\cdot\cos(y)+(-sen(x+sen(y)))\cdot(-sen(y))=$$

$$= \left(-\cos(x+sen(y))\cdot\cos^2(y)\right)+(sen(x+sen(y)))\cdot sen(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0;0)=\left(\underbrace{-\cos\left(0+\underbrace{sen(0)}_{=0}\right)}_{=-1}\cdot\underbrace{\cos^2(0)}_{=1}\right)+\left(\underbrace{sen\left(0+\underbrace{sen(0)}_{=0}\right)\cdot\underbrace{sen(0)}_{=0}}_{=0}\right)=-1$$

Agora por substituição directa na expressão ¤, teremos:

$$F(x;y)=1+[0\cdot(x-0)+0\cdot(y-0)]+\frac{1}{2!}\cdot\left[0\cdot(x-0)^2+2\cdot0\cdot(x-0)\cdot(y-0)+1\cdot(y-0)^2\right]+R_2$$

c) $f(x;y)=e^{x+2y}$**, onde:** $n=3$ **e** $(a;b)=(0;0)$

R:

Sabendo que o polinómio de Taylor de ordem 3 é dado pela seguinte expressão:

$$F(x;y)=F(a;b)+\left[\frac{\partial F}{\partial x}(a;b)\cdot(x-a)+\frac{\partial F}{\partial y}(a;b)\cdot(y-b)\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a;b)\cdot(x-a)^2+2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(a;b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a;b)\cdot(y-b)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{3!}\cdot\left[\begin{array}{l}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(a;b)\cdot(x-a)^3+3\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}(a;b)\cdot(x-a)^2\cdot(y-b)+3\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}(a;b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)^2+\\+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}(a;b)\cdot(y-b)^3\end{array}\right]+R_{n=3}$$

$\Leftrightarrow$ ¤

Antes de mais, vamos começar por determinar o valor da função no ponto: $(a;b)=(0;0)$

$$f(0;0)=e^{0+2\cdot 0} \Leftrightarrow f(0;0)=e^{0} \Leftrightarrow f(0;0)=1$$

Vamos agora determinar as primeiras, as segundas e as terceiras derivadas, para posteriormente se substituírem os respectivos valores na expressão acima citada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\left(e^{x+2y}\right)'_x = \underbrace{(x+2y)'_x}_{=1}\cdot e^{x+2y} = e^{x+2y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=e^{0+2\cdot 0} = e^{0} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\left(e^{x+2y}\right)'_y = \underbrace{(x+2y)'_y}_{=2}\cdot e^{x+2y} = 2\cdot e^{x+2y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=2\cdot e^{0+2\cdot 0} = 2\cdot e^{0} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+2y}\right)=\underbrace{(x+2y)'_x}_{=1}\cdot e^{x+2y} = e^{x+2y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0;0)=e^{0+2\cdot 0} = e^{0} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+2y}\right)=\underbrace{(x+2y)'_y}_{=2}\cdot e^{x+2y} = 2\cdot e^{x+2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0;0)=2\cdot e^{0+2\cdot 0} = 2\cdot 1 = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2\cdot e^{x+2y}\right)=\underbrace{(x+2y)'_y}_{=2}\cdot 2\cdot e^{x+2y} = 4\cdot e^{x+2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0;0)=4\cdot e^{0+2\cdot 0} = 4\cdot 1 = 4$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+2y}\right)=\underbrace{(x+2y)'_x}_{=1}\cdot e^{x+2y}=e^{x+2y}\Rightarrow\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0;0)=e^{0+2\cdot 0}=e^0=1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+2y}\right)=\underbrace{(x+2y)'_y}_{=2}\cdot e^{x+2y}=2\cdot e^{x+2y}\Rightarrow\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0;0)=2\cdot e^{0+2\cdot 0}=2\cdot 1=2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(4\cdot e^{x+2y}\right)=\underbrace{(x+2y)'_x}_{=1}\cdot 4\cdot e^{x+2y}=4\cdot e^{x+2y}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(0;0)=4\cdot e^{0+2\cdot 0}=4\cdot 1=4$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(4\cdot e^{x+2y}\right)=\underbrace{(x+2y)'_y}_{=2}\cdot 4\cdot e^{x+2y}=8\cdot e^{x+2y}\Rightarrow\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0;0)=8\cdot e^{0+2\cdot 0}=8\cdot 1=8$$

Agora por substituição directa na expressão ¤, teremos:

$$F(x;y)=1+[1\cdot(x-0)+2\cdot(y-0)]+\frac{1}{2!}\cdot\left[1\cdot(x-0)^2+2\cdot 2\cdot(x-0)\cdot(y-0)+4\cdot(y-0)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{3!}\cdot\begin{bmatrix}1\cdot(x-0)^3+3\cdot 2\cdot(x-0)^2\cdot(y-0)+3\cdot 4\cdot(x-0)\cdot(y-0)^2+\\+8\cdot(y-0)^3\end{bmatrix}+R_{n=3}$$

d) $f(x;y)=y^x$**, onde:** $n=2$ **e** $(a;b)=(1;1)$

R:

Sabendo que o polinómio de Taylor de ordem 2 é dado pela seguinte expressão:

$$F(x;y)=F(a;b)+\left[\frac{\partial F}{\partial x}(a;b)\cdot(x-a)+\frac{\partial F}{\partial y}(a;b)\cdot(y-b)\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a;b)\cdot(x-a)^2+2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(a;b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a;b)\cdot(y-b)^2\right]+R_2 \Leftrightarrow$$

Antes de mais, vamos começar por determinar o valor da função no ponto: $(a;b)=(1;1)$

$$f(1;1)=1^1 \Leftrightarrow f(1;1)=1$$

Vamos agora determinar as primeiras e as segundas derivadas, para posteriormente se substituírem os respectivos valores na expressão acima citada:

[1] $$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\left(y^x\right)'_x=y^x\cdot(x)'_x\cdot\ln(y)=y^x\cdot\ln(y)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(1;1)=1^1\cdot\underbrace{\ln(1)}_{0}=0$$

[2] $$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\left(y^x\right)'_y=x\cdot y^{x-1}\cdot(y)'_y=x\cdot y^{x-1}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(1;1)=1\cdot\underbrace{1^{1-1}}_{=1}=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^x\cdot\ln(y)\right)=\left(y^x\right)'_x\cdot(\ln(y))+y^x\cdot(\ln(y))'_x=y^x\cdot(x)'_x\cdot\ln(y)\cdot(\ln(y))=$$

---

[1] Aqui temos uma derivada do tipo: $\left(\frac{a^u}{\ln(a)}\right)'=a^u\cdot u'\Leftrightarrow\frac{1}{\ln(a)}\cdot\left(a^u\right)'=a^u\cdot u'\Leftrightarrow\left(a^u\right)'=a^u\cdot u'\cdot\ln(a)$

[2] Aqui temos uma derivada do tipo: $\left(u^a\right)'=a\cdot u^{a-1}\cdot u'$

$$= y^x \cdot (\ln(y))^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;1) = 1^1 \cdot (\ln(1))^2 = 1 \cdot \underbrace{(\ln(1))^2}_{=0} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^x \cdot \ln(y)\right) = \left(y^x\right)'_y \cdot (\ln(y)) + y^x \cdot (\ln(y))'_y =$$ [3]

$$= x \cdot y^{x-1} \cdot (y)'_y \cdot (\ln(y)) + y^x \cdot \frac{(y)'_y}{y} = x \cdot y^{x-1} \cdot \ln(y) + y^x \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1;1) = 1 \cdot 1^{1-1} \cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} + 1^1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x \cdot y^{x-1}\right) = (x)'_y \cdot \left(y^{x-1}\right) + (x) \cdot \left(y^{x-1}\right)'_y = (x) \cdot (x-1) \cdot \left(y^{x-1-1}\right) \cdot (y)'_y =$$

$$= \left(x^2 - x\right) \cdot y^{x-2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1;1) = \underbrace{\left(1^2 - 1\right)}_{=0} \cdot 1^{1-2} = 0$$

Agora por substituição directa na expressão ¤, teremos:

$$F(x;y) = 1 + [0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1)] + \frac{1}{2!} \cdot \left[0 \cdot (x-1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot (x-1) \cdot (y-1) + 0 \cdot (y-1)^2\right] + R_2$$

---

[3] Aqui temos uma derivada do tipo: $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

e) $f(x;y;z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$**, onde:** $n = 2$ **e** $(a;b) = (1;1;1)$

R:

2. Utilize o exercício anterior para determinar uma aproximação dos seguintes valores:

a) $\dfrac{1}{2+2{,}01-2\times 0{,}97}$

R:

Recorrendo ao exercício anterior, tal como é sugerido neste enunciado, podemos verificar que: $\dfrac{1}{2+2{,}01-2\times 0{,}97} \Rightarrow f(x;y)=\dfrac{1}{2+x-2y} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=2{,}01 \\ y=0{,}97 \end{Bmatrix}$

Assim sendo e, uma vez que já foi determinado o polinómio de Taylor para esta função na alínea 1.a), teremos que:

$$F(x;y)=\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{4}\cdot(x-2)+\frac{1}{2}\cdot(y-1)\right]+\frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{1}{4}\cdot(x-2)^2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)\cdot(y-1)+1\cdot(y-1)^2\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} F(2{,}01;0{,}97)\approx\dfrac{1}{2}+\left[-\dfrac{1}{4}\cdot(2{,}01-2)+\dfrac{1}{2}\cdot(0{,}97-1)\right]+ \\ +\dfrac{1}{2!}\cdot\left[\dfrac{1}{4}\cdot(2{,}01-2)^2+2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot(2{,}01-2)\cdot(0{,}97-1)+1\cdot(0{,}97-1)^2\right] \end{array}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(2{,}01;0{,}97)\approx\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{4}\cdot 0{,}01+\frac{1}{2}\cdot(-0{,}03)\right]+\frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{1}{4}\cdot(0{,}01)^2-1\cdot(0{,}01)\cdot(-0{,}03)+1\cdot(-0{,}03)^2\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(2{,}01;0{,}97)\approx\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{400}-\frac{3}{200}\right]+\frac{1}{2\times 1}\cdot\left[\frac{1}{40000}+\frac{3}{10000}+\frac{9}{10000}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(2{,}01;0{,}97)\approx 0{,}483$$

b) $\cos\left(-0{,}02+sen(0{,}15)\right)$

R:

Recorrendo ao exercício anterior, tal como é sugerido neste enunciado, podemos verificar que: $\cos\left(-0{,}02+sen(0{,}15)\right)\Rightarrow f(x;y)=\cos\left(x+sen(y)\right)\Rightarrow\begin{Bmatrix}x=-0{,}02\\ y=0{,}15\end{Bmatrix}$

Assim sendo e, uma vez que já foi determinado o polinómio de Taylor para esta função na alínea 1.b), teremos que:

$$F(x;y)=1+\left[0\cdot(x-0)+0\cdot(y-0)\right]+\frac{1}{2!}\cdot\left[0\cdot(x-0)^2+2\cdot 0\cdot(x-0)\cdot(y-0)+1\cdot(y-0)^2\right]+R_2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}F(-0{,}02;0{,}15)=1+\left[0\cdot(-0{,}02-0)+0\cdot(0{,}15-0)\right]+\\ +\frac{1}{2!}\cdot\left[0\cdot(-0{,}02-0)^2+2\cdot 0\cdot(-0{,}02-0)\cdot(0{,}15-0)+1\cdot(0{,}15-0)^2\right]\end{matrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(-0{,}02;0{,}15)=1+\frac{1}{2!}\cdot\left[1\cdot(0{,}15-0)^2\right]\Leftrightarrow F(-0{,}02;0{,}15)=1+\frac{1}{2\times 1}\cdot\left[\left(\frac{15}{100}\right)^2\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(-0{,}02;0{,}15)=1+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{225}{10000}\right]\Leftrightarrow F(-0{,}02;0{,}15)\approx 1{,}011$$

c) $1{,}1^{0,9}$

R:

Recorrendo ao exercício anterior, tal como é sugerido neste enunciado, podemos verificar que: $1{,}1^{0,9}\Rightarrow f(x;y)=y^x\Rightarrow\begin{Bmatrix}x=0{,}9\\ y=1{,}1\end{Bmatrix}$

Assim sendo e, uma vez que já foi determinado o polinómio de Taylor para esta função na alínea 1.d), teremos que:

$$F(x;y)=1+[0\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)]+\frac{1}{2!}\cdot\left[0\cdot(x-1)^2+2\cdot1\cdot(x-1)\cdot(y-1)+0\cdot(y-1)^2\right]+R_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} F(0{,}9;1{,}1)=1+[0\cdot(0{,}9-1)+1\cdot(1{,}1-1)]+ \\ +\frac{1}{2!}\cdot\left[0\cdot(0{,}9-1)^2+2\cdot1\cdot(0{,}9-1)\cdot(1{,}1-1)+0\cdot(1{,}1-1)^2\right] \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(0{,}9;1{,}1)=1+[1\cdot(1{,}1-1)]+\frac{1}{2!}\cdot[2\cdot1\cdot(0{,}9-1)\cdot(1{,}1-1)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(0{,}9;1{,}1)=1+[0{,}1]+\frac{1}{2\times1}\cdot[2\cdot(-0{,}1)\cdot(0{,}1)] \Leftrightarrow F(0{,}9;1{,}1)\approx 1{,}090$$

3. Determine e classifique os pontos críticos das funções seguintes:

a) $f(x;y)=x^2+2y^2-4x+4y$

R:

Para determinar o que nos é pedido temos que verificar as seguintes condições:

i) Condições de 1ª ordem: $\vec{\nabla} f(x;y)=\vec{0}$

$$\vec{\nabla} f(x;y)=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right)=(0;0) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1=\frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ f_2=\frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ 4y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ O ponto crítico é: $(2;-1)$

ii) Condições de 2ª ordem;

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(2x - 4) & \frac{\partial}{\partial y}(2x - 4) \\ \frac{\partial}{\partial x}(4y + 4) & \frac{\partial}{\partial y}(4y + 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Então: $H(2;-1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Assim sendo teremos então que: $\Delta = \det\begin{bmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{0} \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = (2 \times 4) - (0 \times 0) = 8$

Conclusão: Como: $\Delta = 8 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2;-1) = 2 > 0$, então $f(2;-1)$ é mínimo relativo.

b) $g(x;y) = x^2 y^2 - 2xy$

R:

Para determinar o que nos é pedido temos que verificar as seguintes condições:

i) Condições de 1ª ordem: $\vec{\nabla} f(x;y) = \vec{0}$

$$\vec{\nabla} f(x;y) = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0;0) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ f_2 = \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 - 2y = 0 \\ 2x^2 y - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \cdot (2xy - 2) = 0 \\ x \cdot (2xy - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{O ponto crítico é: } (0;0)$$

ii) Condições de 2ª ordem;

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy^2 - 2y\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^2 - 2y\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y - 2x\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2y - 2x\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^2 & (4xy - 2) \\ (4xy - 2) & 2x^2 \end{bmatrix}$$

Então: $H(0;0) = \begin{bmatrix} 2\cdot 0^2 & (4\cdot 0\cdot 0 - 2) \\ (4\cdot 0\cdot 0 - 2) & 2\cdot 0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Assim sendo teremos então que: $\Delta = \det \begin{bmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{-2} \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = (0\times 0) - (-2\times(-2)) = -4$

Conclusão: Como: $\Delta = -4 < 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0;0) = 0$, então $f(0;0)$ é um ponto de sela.

c) $h(x;y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$

R:

Para determinar o que nos é pedido temos que verificar as seguintes condições:

i) Condições de 1ª ordem: $\vec{\nabla} f(x;y) = \vec{0}$

$$\vec{\nabla} f(x;y) = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0;0) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ f_2 = \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ---- \\ \frac{x}{y^2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -------- \\ x=-y^2 \wedge y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{8}{\left(-y^2\right)^2}=0 \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{8}{y^4}=0 \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^3}{y^4}-\dfrac{8}{y^4}=0 \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^3-8}{y^4}=0 \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3-8=0 \wedge y\neq 0 \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt[3]{8} \wedge y\neq 0 \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt[3]{2^3} \wedge y\neq 0 \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \wedge y\neq 0 \\ x=-2^2 \wedge y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-4 \end{cases} \Rightarrow \text{O ponto crítico é: } \left(-4;2\right)$$

ii) Condições de 2ª ordem;

$$H=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{8}{x^2}\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{8}{x^2}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{x}{y^2}-1\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{x}{y^2}-1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{16}{\text{x}^3} & -\dfrac{1}{y^2} \\ -\dfrac{1}{y^2} & \dfrac{2\text{x}}{\text{y}^3} \end{bmatrix}$$

Então: $H\left(-4;2\right)=\begin{bmatrix} \dfrac{16}{-4^3} & -\dfrac{1}{2^2} \\ -\dfrac{1}{2^2} & \dfrac{2\cdot(-4)}{2^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}$

Assim sendo teremos então que: $\Delta=\det\begin{bmatrix} \overbrace{-\dfrac{1}{4}}^{+} & \overbrace{-\dfrac{1}{4}}^{-} \\ -\dfrac{1}{4} & -1 \end{bmatrix} = \left(-\dfrac{1}{4}\times(-1)\right)-\left(-\dfrac{1}{4}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right)=\dfrac{3}{16}$

Conclusão: Como: $\Delta=\dfrac{3}{16}>0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-4;2\right)=-\dfrac{1}{4}<0$, então $f\left(-4;2\right)$ é máximo relativo.

d) $m(x;y)=2(x-y)^2-2(x^4+y^4)$

R:

Para determinar o que nos é pedido temos que verificar as seguintes condições:

i) Condições de 1ª ordem: $\vec{\nabla} f(x;y)=\vec{0}$

$$\vec{\nabla} f(x;y)=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right)=(0;0) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1=\dfrac{\partial m}{\partial x}=0 \\ f_2=\dfrac{\partial m}{\partial y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot 2\cdot (x-y)^{2-1}-2\cdot 4\cdot x^{4-1}=0 \\ -2\cdot 2\cdot (x-y)^{2-1}-2\cdot 4\cdot y^{4-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\cdot (x-y)-8\cdot x^3=0 \\ -4\cdot (x-y)-8\cdot y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)=\dfrac{8x^3}{4}=2x^3 \\ -4\cdot (2x^3)-8y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -------- \\ -8x^3-8y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -------- \\ -8\cdot (x^3+y^3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -------- \\ x^3+y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ x^3=-y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ x=\sqrt[3]{-y^3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-y-y)=2\cdot (-y)^3 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y=-2y^3 \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=y^3 \\ ---- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3-y=0 \\ ---- \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\cdot (y^2-1)=0 \\ ------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \vee y=\pm\sqrt{1} \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{y=0}_{\Downarrow} \vee \underbrace{y=-1}_{\Downarrow} \vee \underbrace{y=1}_{\Downarrow} \\ x=0 \vee x=1 \vee x=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Os pontos críticos são: $(0;0)$, $(1;-1)$ e $(-1;1)$.

ii) Condições de 2ª ordem;

$$H=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\left(4\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y})-8x^3\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(4\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y})-8x^3\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(-4\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y})-8y^3\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(-4\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y})-8y^3\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(4-24x^2\right) & -4\\ -4 & \left(4-24y^2\right)\end{bmatrix}$$

- Ponto crítico (0;0):

$$H(0;0)=\begin{bmatrix}\left(4-24\cdot 0^2\right) & -4\\ -4 & \left(4-24\cdot 0^2\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -4\\ -4 & 4\end{bmatrix}$$

Assim sendo teremos então que: $\Delta=\det\begin{bmatrix}\overbrace{4}^{+} & \overbrace{-4}^{-}\\ -4 & 4\end{bmatrix}=(4\times 4)-(-4\times(-4))=0$

Conclusão: Como: $\Delta=0$, então trata-se de um caso duvidoso.

- Ponto crítico (1;-1):

$$H(1;-1)=\begin{bmatrix}\left(4-24\cdot 1^2\right) & -4\\ -4 & \left(4-24\cdot(-1)^2\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-20 & -4\\ -4 & -20\end{bmatrix}$$

Assim sendo teremos então que: $\Delta=\det\begin{bmatrix}\overbrace{-20}^{+} & \overbrace{-4}^{-}\\ -4 & -20\end{bmatrix}=(-20\times(-20))-(-4\times(-4))=384$

Conclusão: Como: $\Delta=384>0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;-1)=-20<0$, então é um ponto máximo.

- Ponto crítico (-1;1):

$$H(-1;1)=\begin{bmatrix}\left(4-24\cdot(-1)^2\right) & -4\\ -4 & \left(4-24\cdot 1^2\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-20 & -4\\ -4 & -20\end{bmatrix}$$

Assim sendo teremos então que: $\Delta=\det\begin{bmatrix}\overbrace{-20}^{+} & \overbrace{-4}^{-}\\ -4 & -20\end{bmatrix}=\left(-20\times(-20)\right)-\left(-4\times(-4)\right)=384$

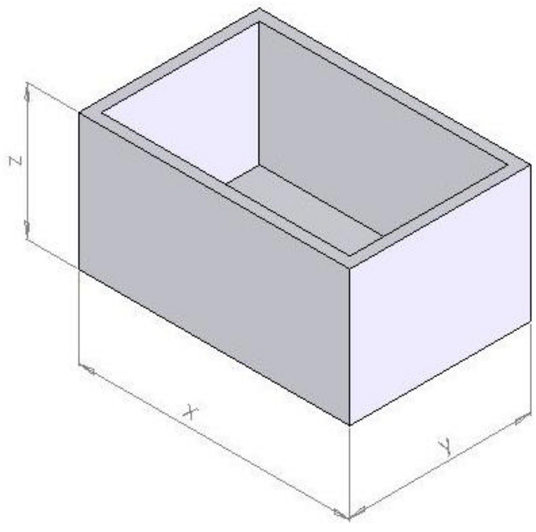
Conclusão: Como: $\Delta=384>0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1;1)=-20<0$, então é um ponto máximo.

4. **Determine as dimensões de uma caixa rectangular sem topo, com um dado volume V e tal que o valor da área de superfície total das suas cinco faces seja mínimo.**

R:

É sabido que a área da superfície para um qualquer paralelepípedo é dada por:

$$S=2\cdot(x\cdot y)+2\cdot(y\cdot z)+2\cdot(x\cdot z)$$



Ora, como é dito no enunciado que a caixa não tem topo, conforme se pode ver na figura, então:

$$S=(x\cdot y)+2\cdot(y\cdot z)+2\cdot(x\cdot z)$$

Sabendo ainda que o volume de um paralelepípedo é dado por: $V=x\cdot y\cdot z\Leftrightarrow z=\frac{V}{x\cdot y}$

Então, se substituirmos este valor encontrado para z a partir da expressão que permite o cálculo do volume, na expressão encontrada para a área da superfície da caixa teremos que:

$$S = (x\cdot y) + 2\cdot(y\cdot z) + 2\cdot(x\cdot z) \Leftrightarrow S = (x\cdot y) + 2\cdot\left(y\cdot\frac{V}{x\cdot y}\right) + 2\cdot\left(x\cdot\frac{V}{x\cdot y}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = x\cdot y + \frac{2\cdot V}{x} + \frac{2\cdot V}{y}$$

Para verificar o que é pedido no enunciado temos que determinar os pontos críticos, pelo que teremos:

i) Condições de 1ª ordem: $\vec{\nabla} f(x;y) = \vec{0}$

$$\vec{\nabla} f(x;y) = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0;0) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = \dfrac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ f_2 = \dfrac{\partial S}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy)'_x + \left(\dfrac{(2V)'_x\cdot x - 2V\cdot(x)'_x}{x^2}\right) = 0 \\ (xy)'_y + \left(\dfrac{(2V)'_y\cdot y - 2V\cdot(y)'_y}{y^2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + \left(\dfrac{-2V}{x^2}\right) = 0 \\ x + \left(\dfrac{-2V}{y^2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y\cdot x^2 - 2V}{x^2} = 0 \\ \dfrac{x\cdot y^2 - 2V}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\cdot x^2 - 2V = 0 \wedge x \neq 0 \\ x\cdot y^2 - 2V = 0 \wedge y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\cdot x^2 = 2V \\ x\cdot y^2 = 2V \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ x\cdot y^2 = y\cdot x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ x = \dfrac{y\cdot x^2}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ x = \dfrac{x^2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ \dfrac{x^2}{y} - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ x\cdot\left(\dfrac{x}{y} - 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ x\cdot\left(\dfrac{x}{y} - 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ x = 0 \vee \left(\dfrac{x}{y} - 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ x = 0 \vee x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0\cdot y^2 = 2V \\ x = y \Rightarrow y\cdot y^2 = 2V \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow V = 0 \rightarrow impossivel \\ x = y \Rightarrow y^3 = 2V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{2V} \\ y = \sqrt[3]{2V} \end{cases}$$

Assim sendo teremos então que:

$$z = \frac{V}{x \cdot y} \Leftrightarrow z = \frac{V}{\sqrt[3]{2V} \cdot \sqrt[3]{2V}} \Leftrightarrow z = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} \Leftrightarrow z = \frac{V}{\left(4V^2\right)^{\frac{1}{3}}} \Leftrightarrow z = \frac{V \cdot \left(4V^2\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(4V^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(4V^2\right)^{\frac{2}{3}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{V \cdot \sqrt[3]{\left(4V^2\right)^2}}{4V^2} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt[3]{\left(4V^2\right)^2}}{4V}$$

ii) Condições de 2ª ordem;

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(y - \frac{2V}{x^2}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(y - \frac{2V}{x^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{2V}{y^2}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{2V}{y^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4V}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4V}{y^3} \end{bmatrix}$$

Então: $H\left(\sqrt[3]{2V}; \sqrt[3]{2V}\right) = \begin{bmatrix} \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^3} & 1 \\ 1 & \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Assim sendo teremos então que: $\Delta = \det \begin{array}{c} \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} = (2 \times 2) - (1 \times 1) = 3$

Conclusão: Como: $\Delta = 3 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, então o ponto é mínimo.

5. Determine os máximos e os mínimos da função: $f(x;y)=x^2+3y^2$ com as variáveis sujeitas à restrição: $x+y=20$.

R:

Sabendo que: $x+y=20 \Leftrightarrow \underbrace{x+y-20}_{j(x;y)}=0 \Leftrightarrow j(x;y)=0$

E que: $F(x;y;l)=f(x;y)+l\cdot j(x;y) \Rightarrow F(x;y;l)=\left(x^2+3y^2\right)+l\cdot(x+y-20)$

Então teremos que:

i) Condições de 1ª ordem:

$$\begin{cases}\vec{\nabla} F=\vec{0}\\ \text{Restrição}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0\\ x+y=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+3y^2\right)+(lx+ly-20l)\right)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left(x^2+3y^2\right)+(lx+ly-20l)\right)=0\\ x+y=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+l=0\\ 6y+l=0\\ x+y=20\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{l}{2}\\ y=-\dfrac{l}{6}\\ -\dfrac{l}{2}+\left(-\dfrac{l}{6}\right)=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{--------}\\ \text{--------}\\ \dfrac{-6l-2l}{12}=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{--------}\\ \text{--------}\\ -8l=12\cdot 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{--------}\\ \text{--------}\\ l=\dfrac{12\cdot 20}{-8}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\text{--------}\\ \text{--------}\\ l=\dfrac{3\cdot 20}{-2}=3\cdot(-10)=-30\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{-30}{2}\\ y=-\dfrac{-30}{6}\\ l=-30\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=15\\ y=5\\ l=-30\end{cases} \Rightarrow \text{Ponto critico: } (15;5;-30)$$

ii) Condições de 2ª ordem (matriz Hessiana orlada $\overline{H}$):

$$\overline{H}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial j}{\partial x} & \frac{\partial j}{\partial y} \\ \frac{\partial j}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial j}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{H}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x}(x+y-20) & \frac{\partial}{\partial y}(x+y-20) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x+y-20) & \frac{\partial}{\partial x}(2\mathrm{x}+l) & \frac{\partial}{\partial y}(2x+l) \\ \frac{\partial}{\partial y}(x+y-20) & \frac{\partial}{\partial x}(6\mathrm{y}+l) & \frac{\partial}{\partial y}(6y+l) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{H}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Assim sendo:

$$\Delta=\det\left|\overline{H}\right|=\det \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{array} = \underbrace{0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}}_{=0} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot(1\times 6-1\times 0)+1\cdot(1\times 0-1\times 2)=$$

$$=-6-2=-8$$

Ora, neste tipo de casos, quando $\Delta<0 \Rightarrow$ Ponto mínimo, pelo que:

$\Delta=-8<0 \Rightarrow$ o ponto $(15;5;-30)$ é ponto mínimo.

6. Determine os extremos das funções $f(x;y)$ com as variáveis sujeitas às restrições:

a) $f(x;y)=\ln(xy)$**, sendo a restrição:** $x+y=20$

R:

Sabendo que: $x+y=20 \Leftrightarrow \underbrace{x+y-20}_{j(x;y)}=0 \Leftrightarrow j(x;y)=0$

E que: $F(x;y;l)=f(x;y)+l\cdot j(x;y) \Rightarrow F(x;y;l)=(\ln(xy))+l\cdot(x+y-20)$

Então teremos que:

i) Condições de 1ª ordem:

$$\begin{cases}\vec{\nabla}F=\vec{0}\\ \text{Restrição}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0\\ x+y=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}((\ln(xy))+(lx+ly-20l))=0\\ \dfrac{\partial}{\partial y}((\ln(xy))+(lx+ly-20l))=0\\ x+y=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(xy)'_x}{xy}+l=0\\ \dfrac{(xy)'_y}{xy}+l=0\\ x+y=20\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{y}{xy}+l=0\\ \dfrac{x}{xy}+l=0\\ x+y=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}+l=0\\ \dfrac{1}{y}+l=0\\ x+y=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1+xl}{x}=0\\ \dfrac{1+yl}{y}=0\\ x+y=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+xl=0 \wedge x\neq 0\\ 1+yl=0 \wedge y\neq 0\\ x+y=20\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{l} \\ y = -\dfrac{1}{l} \\ -\dfrac{1}{l} + \left(-\dfrac{1}{l}\right) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -------- \\ -------- \\ -\dfrac{2}{l} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{-\frac{1}{10}} \\ y = -\dfrac{1}{-\frac{1}{10}} \\ l = -\dfrac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \\ l = -\dfrac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ponto critico: $\left(10;10;-\dfrac{1}{10}\right)$

ii) Condições de 2ª ordem (matriz Hessiana orlada $\overline{H}$):

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial j}{\partial x} & \dfrac{\partial j}{\partial y} \\ \dfrac{\partial j}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial j}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial}{\partial x}(x+y-20) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x+y-20) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(x+y-20) & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x}+l\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x}+l\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(x+y-20) & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{y}+l\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{y}+l\right) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\dfrac{1}{x^2} & 0 \\ 1 & 0 & -\dfrac{1}{y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{H}(10;10) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\dfrac{1}{10^2} & 0 \\ 1 & 0 & -\dfrac{1}{10^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\dfrac{1}{100} & 0 \\ 1 & 0 & -\dfrac{1}{100} \end{bmatrix}$$

Assim sendo:

$$\Delta = \det\left|\overline{H}(10;10)\right| = \det\begin{bmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{1} & \overset{+}{1} \\ 1 & -\frac{1}{100} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{100} \end{bmatrix} = \underbrace{0\cdot\begin{vmatrix} -\frac{1}{100} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{100} \end{vmatrix}}_{=0} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{100} \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{100} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot\left(1\times\left(-\frac{1}{100}\right) - 1\times 0\right) + 1\cdot\left(1\times 0 - 1\times\left(-\frac{1}{100}\right)\right) = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{2}{100}$$

Ora, neste tipo de casos, quando $\Delta > 0 \Rightarrow$ Ponto máximo, pelo que:

$\Delta = \frac{2}{100} > 0 \Rightarrow$ o ponto $\left(10;10;-\frac{1}{10}\right)$ é ponto máximo.

b) $g(x;y) = xy$**, sendo a restrição:** $x^2 + y^2 = 2\cdot a^2$**, com:** $a > 0$

R:

Sabendo que: $x^2 + y^2 = 2\cdot a^2 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2 - 2\cdot a^2}_{j(x;y)} = 0 \Leftrightarrow j(x;y) = 0$

E que: $F(x;y;l) = f(x;y) + l\cdot j(x;y) \Rightarrow F(x;y;l) = (xy) + l\cdot\left(x^2 + y^2 - 2\cdot a^2\right)$

Então teremos que:

i) Condições de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} F = \vec{0} \\ \text{Restrição} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ x^2 + y^2 = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left((xy) + \left(lx^2 + ly^2 - 2 \cdot a^2 \cdot l\right)\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left((xy) + \left(lx^2 + ly^2 - 2 \cdot a^2 \cdot l\right)\right) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 2xl = 0 \\ x + 2yl = 0 \\ x^2 + y^2 = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2xl \\ x + 2(-2xl)l = 0 \\ x^2 + (-2xl)^2 = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -------- \\ x - 4xl^2 = 0 \\ x^2 + 4x^2 l^2 = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -------- \\ l^2 = \dfrac{x}{4x} \Leftrightarrow l^2 = \dfrac{1}{4} \\ x^2 + 4x^2 \cdot \dfrac{1}{4} = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ----- \\ ----- \\ 2x^2 = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ----- \\ ----- \\ x = \pm\sqrt{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{x = -a}_{\Downarrow} \vee \underbrace{x = a}_{\Downarrow} \\ y = 2al \vee y = -2al \\ l^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{x = -a}_{\Downarrow} \vee \underbrace{x = a}_{\Downarrow} \\ y = 2al \vee y = -2al \\ l = \pm\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \underbrace{x = -a}_{\Downarrow} & \vee & \underbrace{x = a}_{\Downarrow} \\ \begin{cases} y = 2a\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -a \\ y = 2a\left(\dfrac{1}{2}\right) = a \end{cases} & \vee & \begin{cases} y = -2a\left(-\dfrac{1}{2}\right) = a \\ y = -2a\left(\dfrac{1}{2}\right) = -a \end{cases} \\ \overbrace{l = -\dfrac{1}{2} \vee l = \dfrac{1}{2}}^{\Uparrow} & & \overbrace{l = -\dfrac{1}{2} \vee l = \dfrac{1}{2}}^{\Uparrow} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Pontos criticos: } \left(-a; -a; -\frac{1}{2}\right); \left(a; a; -\frac{1}{2}\right); \left(-a; a; \frac{1}{2}\right) \text{ e } \left(a; -a; \frac{1}{2}\right)$$

ii) Condições de 2ª ordem (matriz Hessiana orlada $\overline{H}$):

$$\overline{H}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial j}{\partial x} & \frac{\partial j}{\partial y} \\ \frac{\partial j}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial j}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{H}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2-2a^2\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2-2a^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2-2a^2\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(y+2xl\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(y+2xl\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2-2a^2\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(x+2yl\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(x+2yl\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2l & 1 \\ 2y & 1 & 2l \end{bmatrix}$$

- Ponto $\left(-a;-a;-\frac{1}{2}\right)$:

$$\overline{H}\left(-a;-a;-\frac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix} 0 & -2a & -2a \\ -2a & 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 1 \\ -2a & 1 & 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -2a & -2a \\ -2a & -1 & 1 \\ -2a & 1 & -1 \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -2a & -2a \\ -2a & -1 & 1 \\ -2a & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{l} -(-2a)\cdot(-2a\times(-1)-(-2a)\times 1)+ \\ +(-2a)\times(-2a\times 1-(-2a)\times(-1))= \end{array}$$

$$=2a\cdot(4a)-2a\times(-4a)=8a^2+8a^2=16a^2>0\Rightarrow \text{Ponto máximo.}$$

- Ponto $\left(a;a;-\frac{1}{2}\right)$:

$$\overline{H}\left(a;a;-\frac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix}0 & 2a & 2a\\ 2a & 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 1\\ 2a & 1 & 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2a & 2a\\ 2a & -1 & 1\\ 2a & 1 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\begin{bmatrix}\overbrace{0}^{+} & \overbrace{2a}^{-} & \overbrace{2a}^{+}\\ 2a & -1 & 1\\ 2a & 1 & -1\end{bmatrix}=-2a\cdot(2a\times(-1)-2a\times 1)+2a\times(2a\times 1-2a\times(-1))=$$

$$=-2a\cdot(-4a)+2a\times(4a)=8a^2+8a^2=16a^2>0\Rightarrow \text{Ponto máximo.}$$

- Ponto $\left(-a;a;\frac{1}{2}\right)$:

$$\overline{H}\left(-a;a;\frac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix}0 & -2a & 2a\\ -2a & 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) & 1\\ 2a & 1 & 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2a & 2a\\ -2a & 1 & 1\\ 2a & 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\begin{bmatrix}\overbrace{0}^{+} & \overbrace{-2a}^{-} & \overbrace{2a}^{+}\\ -2a & 1 & 1\\ 2a & 1 & 1\end{bmatrix}=-(-2a)\cdot(-2a\times 1-2a\times 1)+2a\times(-2a\times 1-2a\times 1)=$$

$$=2a\cdot(-4a)+2a\times(-4a)=-8a^2-8a^2=-16a^2<0\Rightarrow \text{Ponto mínimo.}$$

- Ponto $\left(a;-a;\frac{1}{2}\right)$:

$$\overline{H}\left(a;-a;\frac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix}0 & 2a & -2a\\ 2a & 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) & 1\\ -2a & 1 & 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2a & -2a\\ 2a & 1 & 1\\ -2a & 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{bmatrix}0 & 2a & -2a\\ 2a & 1 & 1\\ -2a & 1 & 1\end{bmatrix} \end{array}=-2a\cdot\left(2a\times 1-\left(-2a\right)\times 1\right)+\left(-2a\right)\times\left(2a\times 1-\left(-2a\right)\times 1\right)=$$

$$=-2a\cdot\left(4a\right)-2a\times\left(4a\right)=-8a^2-8a^2=-16a^2<0\Rightarrow \text{Ponto mínimo.}$$

c) $h\left(x;y\right)=x^2+y^2-4$ **, sendo a restrição:** $x+y=3$

R:

Sabendo que: $x+y=3\Leftrightarrow \underbrace{x+y-3}_{j\,(x;y)}=0\Leftrightarrow j\left(x;y\right)=0$

E que: $F\left(x;y;l\right)=f\left(x;y\right)+l\cdot j\left(x;y\right)\Rightarrow F\left(x;y;l\right)=\left(x^2+y^2-4\right)+l\cdot\left(x+y-3\right)$

Então teremos que:

i) Condições de 1ª ordem:

$$\begin{cases}\vec{\nabla} F=\vec{0}\\ \text{Restrição}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0\\ x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+y^2-4\right)+\left(lx+ly-3l\right)\right)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left(x^2+y^2-4\right)+\left(lx+ly-3l\right)\right)=0\\ x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+l=0\\ 2y+l=0\\ x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{l}{2}\\ y=-\dfrac{l}{2}\\ -\dfrac{l}{2}+\left(-\dfrac{l}{2}\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-------\\ -------\\ -2\cdot\dfrac{l}{2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{-3}{2}\\ y=-\dfrac{-3}{2}\\ l=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ y=\dfrac{3}{2}\\ l=-3\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ponto critico: $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};-3\right)$

ii) Condições de 2ª ordem (matriz Hessiana orlada $\overline{H}$):

$$\overline{H}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\partial j}{\partial x} & \dfrac{\partial j}{\partial y}\\ \dfrac{\partial j}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial j}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\overline{H}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\partial}{\partial x}(x+y-3) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x+y-3)\\ \dfrac{\partial}{\partial x}(x+y-3) & \dfrac{\partial}{\partial x}(2x+l) & \dfrac{\partial}{\partial y}(2x+l)\\ \dfrac{\partial}{\partial y}(x+y-3) & \dfrac{\partial}{\partial x}(2y+l) & \dfrac{\partial}{\partial y}(2y+l)\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{H}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Assim sendo:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\Delta = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -1\cdot(1\times 2 - 1\times 0) + 1\cdot(1\times 0 - 1\times 2) = -2 - 2 = -4$$

Ora, neste tipo de casos, quando $\Delta < 0 \Rightarrow$ Ponto mínimo, pelo que:

$\Delta = -4 < 0 \Rightarrow$ o ponto $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-3\right)$ é ponto mínimo.

7. Uma caixa paralelipipédica, está aberta na face superior e tem de volume 32 cm^3. Determine as dimensões da caixa, de modo que a área das faces seja mínima.

R:

Sabendo do exercício número 4 desta ficha de exercícios que: $\left\{\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{2\cdot V} \\ y = \sqrt[3]{2\cdot V} \\ z = \frac{\sqrt[3]{\left(4\cdot V^2\right)^2}}{4\cdot V} \end{array}\right\}$

E sabendo do enunciado que: $V = 32\left[cm^3\right]$

Então teremos que: $\left\{\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{2\cdot 32} \\ y = \sqrt[3]{2\cdot 32} \\ z = \frac{\sqrt[3]{\left(4\cdot 32^2\right)^2}}{4\cdot 32} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{64} \\ y = \sqrt[3]{64} \\ z = \frac{\sqrt[3]{(4096)^2}}{128} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4[cm] \\ y = 4[cm] \\ z = 2[cm] \end{array}\right\}$