Complementos de Análise Matemática B

Departamento de Matemática e Aplicações

2012/2013

Folha de Exercícios 2

Introdução às equações diferenciais

Eng^{a}. de Comunicações, Eng^{a}. de Polímeros

Classificação de equações diferenciais

1. Classificar cada uma das seguintes equações diferenciais ordinárias quanto à ordem e (eventual) linearidade. Nota: No caso das equações de primeira ordem averiguar a linearidade para cada uma das duas escolhas possíveis para a variável (in)dependente.

$$
\begin{array}{llll}
a) & \dfrac{dy}{dx} + x^2 y = xe^x & b) & \dfrac{d^4y}{dx^4} + 3\dfrac{dy}{dx} + 5y = sen x \\
c) & 3y\dfrac{dy}{dx} + 5y = sen x & d) & \dfrac{du}{dt} + t^2 = u \\
e) & \dfrac{dv}{dt} + v^2 = t & f) & \dfrac{d^2v}{dx^2} + \left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2 + v = xe^x \\
g) & \dfrac{dy}{dx} + y sen x = 0 & h) & x\dfrac{dy}{dx} + y sen x = 0 \\
i) & \dfrac{dy}{dx} + x sen y = 0 & j) & x^2 dy + y^2 dx = 0
\end{array}
$$

Soluções explícitas de equações diferenciais

2. Verificar se as seguintes funções são solução das equações diferenciais dadas.

   (a) $f(x) = \frac{g}{24m}x^4$, $\quad m\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}gx^2$ qualquer que seja o intervalo real considerado.

   (b) $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\quad y\frac{dy}{dx} + x = 0$ no intervalo $I =]-1,1[$.

   (c) $h(x) = (x^3+c)e^{-3x}$, $\quad \frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2e^{-3x}$ no intervalo $I = \mathbb{R}$, onde c é uma constante arbitrária.

   (d) $m(x) = c_1e^x - c_2e^{-x}$, $\quad \frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ no intervalo $I = \mathbb{R}$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

3. A função $f(x) = \frac{x^2}{2}$ é uma solução da equação diferencial $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = 1$? Em que intervalo da recta real?

4. A função $g(x) = xlnx$ é uma solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 1 + lnx$? Em que intervalo da recta real?

5. Determinar o valor da constante β de modo que a função $\varphi(x) = x^\beta$ seja solução da equação $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ no intervalo $I =]0, +\infty[$.

6. Mostrar que $y = xlnx$ verifica formalmente a equação diferencial
$$x\frac{dy}{dx} = x + y,$$
mas não é uma solução explícita desta equação diferencial no intervalo $] - 1, 1[$.

Soluções implícitas de equações diferenciais

7. Mostrar que $y^2 + x = 1$ não é uma solução implícita da equação diferencial
$$y\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2},$$
no intervalo $]0, 2[$, apesar de a verificar formalmente.

8. A relação $y^2 - x = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$? Em que intervalo da recta real?

9. Mostrar que a função $x^2 + 2xy = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial $x\frac{dy}{dx} + x + y = 0$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

10. Mostrar que a função $x^2y^2 + x^2 - 9 = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial $yx\frac{dy}{dx} + y^2 + 1 = 0$ no intervalo $]-3, 3[\setminus \{0\}$.

Problemas de valores iniciais

11. Mostrar que $h(x) = e^x - e^{-x}$ é uma solução do problema de valores iniciais $d^2y/dx^2 - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. Averiguar se $g(x) = e^x + e^{-x}$ é uma solução do mesmo problema.

12. Sabendo que toda a solução da equação diferencial $d^2y/dx^2 - y = 0$ pode ser escrita na forma $f(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, determinar qual deverá ser o valor de c_1 e c_2 por forma a que $f(x)$ seja uma solução do problema de valores iniciais $d^2y/dx^2 - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Problemas de valores de fronteira

13. Mostrar que $y = 2xe^{x-1}$ é uma solução do problema de valores de fronteira $d^2y/dx^2 - 2dy/dx + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 2$.

14. Mostrar que $v(x) = \cos x + senx$ é uma solução do problema de valores de fronteira $d^2y/dx^2 + y = 0$, $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$. Averigúe se $u(x) = -\cos x - senx$ é uma solução do mesmo problema.

15. Sabendo que toda a solução da equação diferencial $d^2y/dx^2 + y = 0$ pode ser escrita na forma $u(x) = c_1 \cos x + c_2 senx$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, determinar qual deverá ser o valor de c_1 e c_2 por forma a que $u(x)$ seja uma solução do problema de valores de fronteira $d^2y/dx^2 + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = -1$.

16. Sabendo que toda a solução da equação diferencial $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ pode ser escrita na forma $y = c_1 + c_2x^2$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, mostrar que o problema de valores de fronteira
$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(-1) = 1,$$
não tem solução única.

17. Sabendo que toda a solução da equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ pode ser escrita na forma $y = c_1 cosx + c_2 senx$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, mostrar que o problema de valores de fronteira
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 5,$$
não tem solução.

Soluções da folha de exercícios 2

1. (a) equação diferencial de 1ª ordem, linear (se y for a variável dependente)
   (b) equação diferencial de 4ª ordem, linear (se y for a variável dependente)
   (c) equação diferencial de 1ª ordem, não-linear
   (d) equação diferencial de 1ª ordem, linear (se u for a variável dependente)
   (e) equação diferencial de 1ª ordem, não-linear
   (f) equação diferencial de 2ª ordem, não-linear
   (g) equação diferencial de 1ª ordem, linear (se y for a variável dependente)
   (h) equação diferencial de 1ª ordem, linear (se y for a variável dependente)
   (i) equação diferencial de1ª ordem, não-linear
   (j) equação diferencial de 1ª ordem, não-linear

2. (a) verdade; (b) verdade; (c) verdade; (d) verdade

3. $I = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

4. $I =]0, +\infty[$

5. $\beta = 1$ ou $\beta = 4$

8. $I =]0, +\infty[$

12. $c_1 = 3/2, \quad c_2 = -1/2$

15. $c_1 = 0, \quad c_2 = 1$