Processamento de Sinal (2014/15)

Teste 2 – 7 de janeiro de 2015

Nome:____ Nº_____________ Curso_________

Grupo I

Classifique, neste enunciado, as questões que se seguem indicando se são verdadeiras (V) ou falsas (F). Duas respostas erradas anulam uma resposta correta. Atenção às siglas que se seguem:

SFTC - Série de Fourier em Tempo Contínuo
SFTD - Série de Fourier em Tempo Discreto
TFTC - Transformada de Fourier em Tempo Contínuo
TFTD - Transformada de Fourier em Tempo Discreto
f_a – Frequência de amostragem

1. Tal como na SFTC, na SFTD os coeficientes $|a_k| = |a_{-k}|$ desde que o sinal seja par. ___________
2. Caso o sinal seja real e observe uma simetria impar, então os coeficientes da sua SFTD serão sempre impares, também. ______________
3. Os coeficientes da SFTD são periódicos, com período igual a 2π/N._____________
4. A TFTC só pode ser usada caso o sinal seja aperiódico. _________________
5. A energia do sinal pode ser calculada pela sua evolução no tempo, ou usando o conteúdo espetral que resulta do cálculo da TFTC . ___________
6. O espetro de um sinal em tempo contínuo que foi amostrado é sempre periódico, com período igual a 2π. _________________
7. O resultado da TFTD é sempre discreto e periódico. _________________
8. Um sinal amostrado pode ser recuperado desde que usemos uma f_a igual ou superior a duas vezes a largura de banda do sinal. ____________
9. Se um sinal pode ser decimado sem gerar aliasing, então significa que foi sobreamostrado. ___________
10. A decimação (após amostragem com período N) equivale a reduzir a frequência de amostragem de um fator de N. ____________
11. O aliasing pode ser evitado usando filtros passa-baixo ideais com frequência de corte igual à frequência de amostragem. ________________
12. Num processo de interpolação, a recuperação do sinal faz-se usando um filtro passa-baixo. ___________

Grupo II

Responda às seguintes questões numa folha separada. Todas as respostas carecem de uma justificação adequada.

1. Considere que um sinal $x[n]$ é real, ímpar e com período 5 e que os coeficientes da série de Fourier que o define são a_k. Sabendo que: $a_{-3} = j2$, que $|a_1| = 1$ e que a fase de a_6 é 90º, calcule:
   a) Os coeficientes a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1 e a_2.
   b) A potência média do sinal ao longo de um período (caso não tenha respondido à questão anterior, considere que os coeficientes são definidos pela seguinte expressão: $a_k = \frac{j}{5}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)$

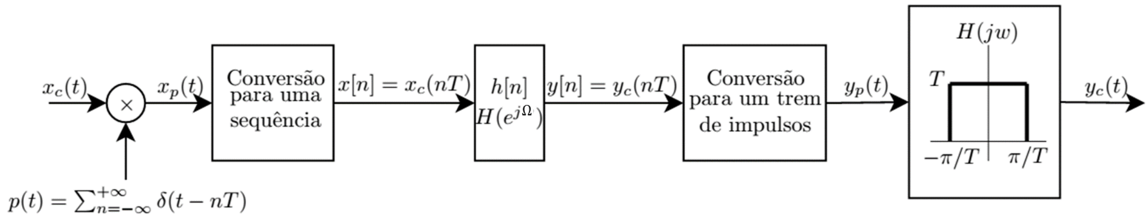
2. Considere o sinal $x(t) = f(t) \cdot g(t)$, em que $f(t) = 2\cos(10t)$ e $g(t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t}$:
   a) Calcule, ou esboce, o espetro de $x(t)$, isto é $X(j\omega)$.
   b) Qual será a saída de um sistema LIT com resposta impulsional $h(t) = 20e^{-10t} \cdot u(t)$, quando a entrada é $f(t)$.

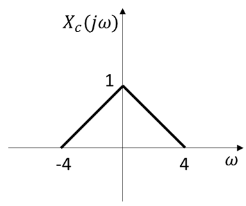
3. Um sistema LIT em tempo discreto é descrito pela seguinte equação às diferenças:

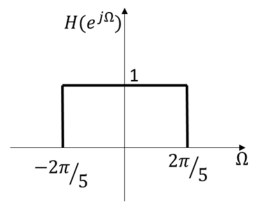
$$2y[n] = -2x[n] + y[n-1] + x[n-2]$$

   a) Calcule a resposta em frequência deste sistema.
   b) Calcule a resposta impulsional do sistema.
   c) Calcule a saída do sistema, $y[n]$, quando a entrada é o sinal $x[n] = u[n+1] - u[n-1]$.

4. A figura seguinte apresenta um sistema que processa sinais contínuos em tempo discreto (como por exemplo um microcontrolador que processa sinais amostrados). O período de amostragem é $T = \pi/5$.







Relativamente a este sistema, e sabendo que o espetro da entrada, $X_c(j\omega)$, e que a resposta em frequência do sistema discreto, $H(e^{j\Omega})$, são os indicados acima, responda às questões seguintes:
   a) Esboce os espetros $X_p(j\omega)$, $X(e^{j\Omega})$, $Y(e^{j\Omega})$, $Y_p(j\omega)$ e $Y_c(j\omega)$;
   b) Qual seria a menor frequência de amostragem que se poderia usar e que evitava o aliasing?

1

a) $x[n]$ real e ímpar, $N=5$

Porque é real $|a_k| = |a_{-k}|$

Porque é real e ímpar, os coeficientes são puramente imaginarios e ímpares também, então

$$a_k = -a_{-k}$$

Para além disso $a_k = a_{k\pm N}$

Então:

$a_{-2} = a_3 = j2 = -a_2$

$a_{-1} = -a_1$

$a_0 = 0$

$a_1 = 1\angle 90^\circ = j$

$a_2 = -a_{-2} = -j2$

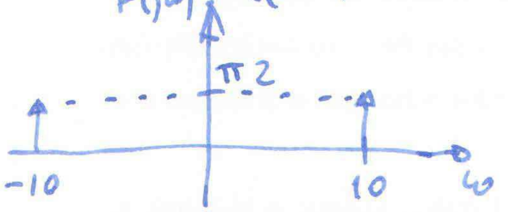
b) $P_{med} = \sum_{k=-2}^{2} |a_k|^2 = |2|^2 + |1|^2 + |1|^2 + |2|^2 = 10$

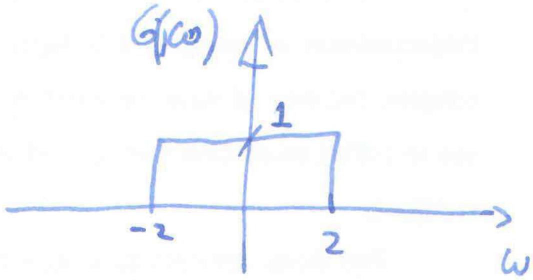
② $x(t) = f(t) \cdot g(t)$, $f(t) = 2\cos(10t)$, $g(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(2t)}{\pi t}$

a) $X(j\omega) = ?$

$$x(t) = f(t) \cdot g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot F(j\omega) * G(j\omega)$$

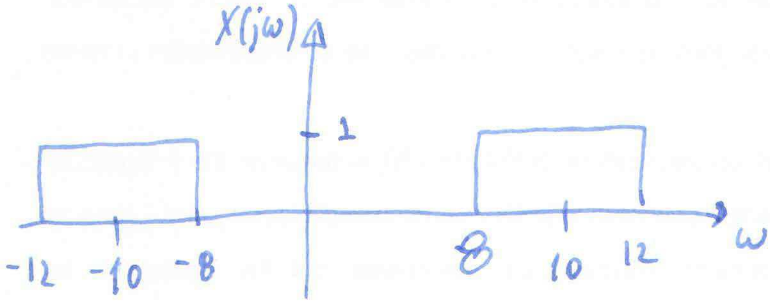
$F(j\omega) = \pi\delta(\omega-10) + \pi\delta(\omega+10)$





$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{2\pi}\Big(\delta(\omega-10) * G(j\omega) + \delta(\omega+10) * G(j\omega)\Big)$$

$$= G(j(\omega-10)) + G(j(\omega+10))$$



b) $y(t) = f(t) * h(t)$ ou $\left| \begin{array}{l} Y(j\omega) = F(j\omega) \cdot H(j\omega) \\ y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} \end{array} \right.$

$$H(j\omega) = \frac{20}{10 + j\omega}$$

$$Y(j\omega) = \left[2\pi\,\delta(\omega-10) + 2\pi\,\delta(\omega+10)\right] \cdot H(j\omega) =$$

$$= 2\pi\,\delta(\omega-10) \cdot H(j10) + 2\pi\,\delta(\omega+10) \cdot H(-j10)$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\,e^{-j\pi/4}\,\delta(\omega-10) + 2\pi\sqrt{2}\,e^{j\pi/4}\,\delta(\omega+10)$$

$$H(j10) = \frac{20}{10 + j10} = \frac{2}{\sqrt{2}\angle\pi/4} = \sqrt{2}\angle{-\pi/4} = \sqrt{2}\,e^{-j\pi/4}$$

$$H(-j10) = \sqrt{2}\,e^{j\pi/4}$$

$$Y(j\omega) = 2\pi\sqrt{2}\, e^{-j\pi/4}\,\delta(\omega-10) + 2\pi\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}\,\delta(\omega+10)$$

$$y(t) = \cancel{2\pi}\sqrt{2}\, e^{-j\pi/4} \cdot e^{j10t} + \sqrt{2}\, e^{j\pi/4}\, e^{-j10t}$$

$$= \cancel{2}\sqrt{2}\left[e^{j(10t-\pi/4)} + e^{-j(10t-\pi/4)}\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\left(10t - \pi/4\right)$$

③

a) $2y[n] = -2x[n] + y[n-1] + x[n-2]$

$$\downarrow \mathcal{F}$$

$$2Y(e^{j\Omega}) = -2X(e^{j\Omega}) + e^{-j\Omega} \cdot Y(e^{j\Omega}) + e^{-j2\Omega} X(e^{j\Omega})$$

$$(2 - e^{-j\Omega}) Y(e^{j\Omega}) = (e^{-j2\Omega} - 2) X(e^{j\Omega})$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{e^{-j2\Omega} - 2}{2 - e^{-j\Omega}}$$

b) $h[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{ H(e^{j\Omega}) \right\}$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1/2\, e^{-j2\Omega} - 1}{1 - 1/2\, e^{-j\Omega}} = 1/2 \frac{e^{-j2\Omega}}{1 - 1/2\, e^{-j\Omega}} - \frac{1}{1 - 1/2\, e^{-j\Omega}}$$

$$h[n] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$$

c) $x[n] = u[n+1] - u[n-1] = \delta[n+1] + \delta[n]$

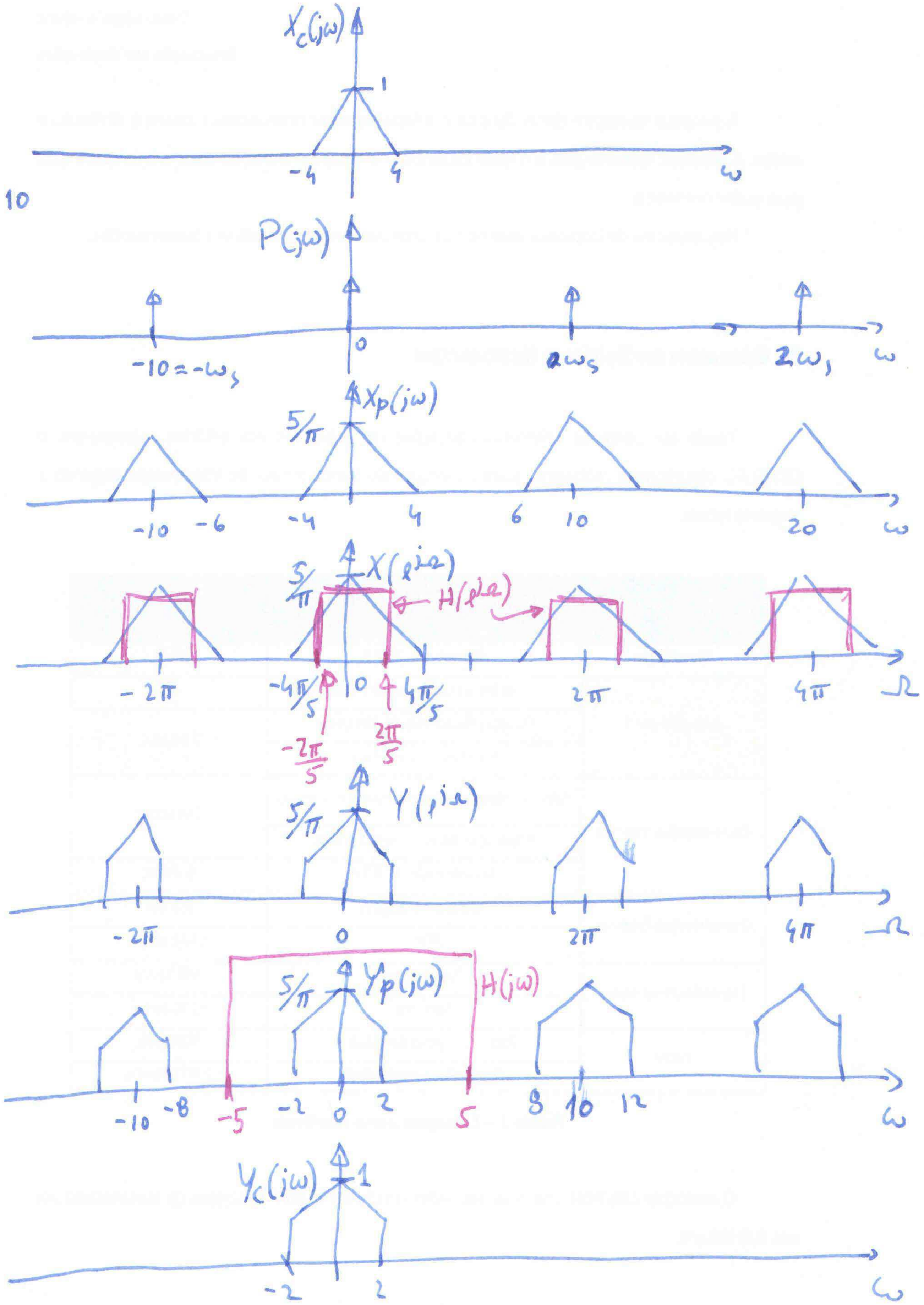
$$y[n] = x[n] * h[n] = (\delta[n+1] + \delta[n]) * h[n] = h[n+1] + h[n]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$$

4

a)

$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 10$



b) $\omega_s > 8$