7. Movimento Oscilatório

Sumário

7.1. Introdução

Exemplos:

- Oscilações de um barco nas ondas
- Oscilações do pêndulo de um relógio
- Vibrações das partículas da corda de um violino
- Vibrações das moléculas do ar, quando o som se propaga
- Movimentos microscópicos dos átomos num sólido, em torno das suas posições de equilíbrio

Oscilação - Acontece quando um sistema em equilíbrio estável é perturbado (mas não "demasiado")

O sistema oscila em torno da sua posição de equilíbrio.

Corpos, partículas em movimento - estamos ainda no domínio da **mecânica**

No entanto há outro tipo de fenómenos em que há oscilações, não de partículas, mas de valores de certas variáveis (sinais eléctricos, magnéticos ...).

Estes fenómenos podem ser também estudados com base nas considerações que iremos fazer sobre os movimentos oscilatórios.

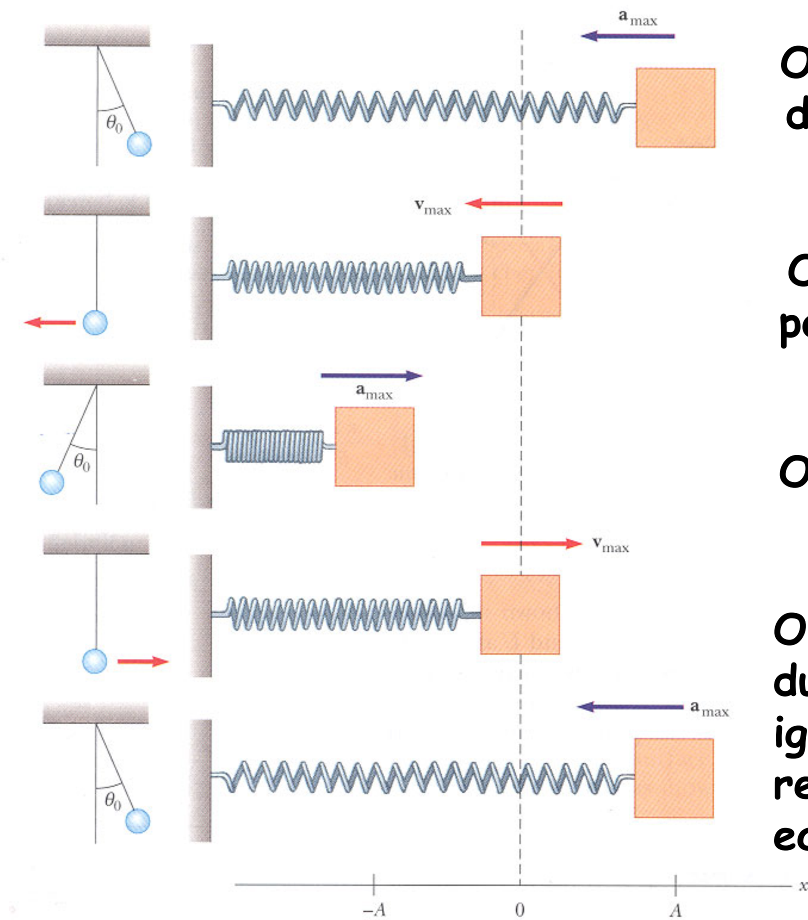
7.2. O Movimento Harmónico Simples

O estudo de um movimento pode ser feito de duas diferentes perspectivas:

- Estabelecer as “leis do movimento” partindo da observação e depois tentar perceber porque é que as características do movimento são as que são.
- Ver primeiro quais são as forças aplicadas ao sistema e a partir da segunda lei de Newton estabelecer as leis do movimento. Depois devemos verificar se o movimento está de acordo com o que foi previsto.

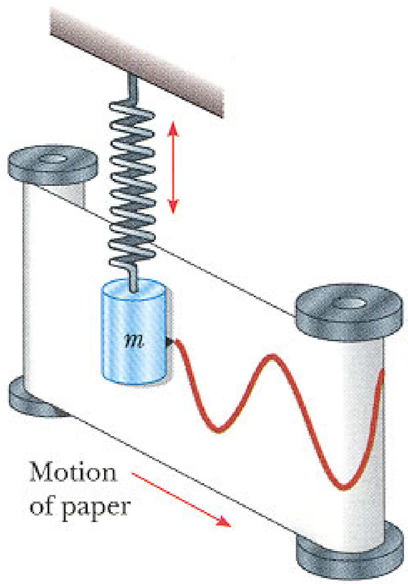
7.2.1. Características do movimento harmónico simples

Seguindo a 1ª opção - vamos observar o movimento:



O corpo oscila em torno da posição de equilíbrio	Equilíbrio → x = 0
O número de oscilações por segundo é constante	Frequência
O movimento é periódico	Período
O corpo vai oscilar entre duas posições extremas, igualmente espaçadas em relação à posição de equilíbrio	Amplitude

7.2.2. Equação de movimento



A variação da posição em função do tempo segue uma lei do tipo sinusoidal. Pode ser descrita por:

$$\boxed{x(t) = A\,sen\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t + c\right)}$$

amplitude

x(t) varia entre:
$\begin{cases} A & \text{(quando o sen =1)} \\ -A & \text{(quando o sen =-1)} \end{cases}$

é uma boa solução!

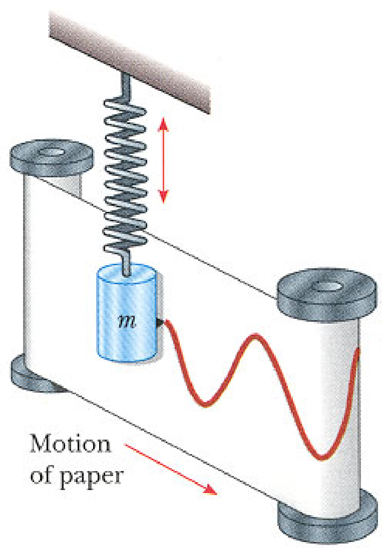
fase inicial (ϕ_0)

Se $t = 0 \rightarrow x(t) = a\ sen\ c$, c indica a posição em que o corpo inicia o movimento

período (T)

Verifique que as posições, x(t) correspondentes aos instantes $t = T$, $t = 2T$, $t = 3T$, …. são todas iguais. Verifique que $\omega = 2\pi / T$.

Posição em função do tempo



Movimento harmónico Simples

Qualquer movimento que se repita a si próprio a intervalos regulares, diz-se que é um movimento periódico ou harmónico. Se no movimento periódico a posição da partícula é descrita por uma expressão do tipo:

$$x(t) = A.\sin(\omega t + \phi_0)$$

diz-se que o movimento é ***harmónico simples (MHS).***

7.2.2.1. Velocidade e aceleração em função do tempo

Posição:

$$x(t) = A sen\left(\omega t + \phi_0\right)$$

Velocidade:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

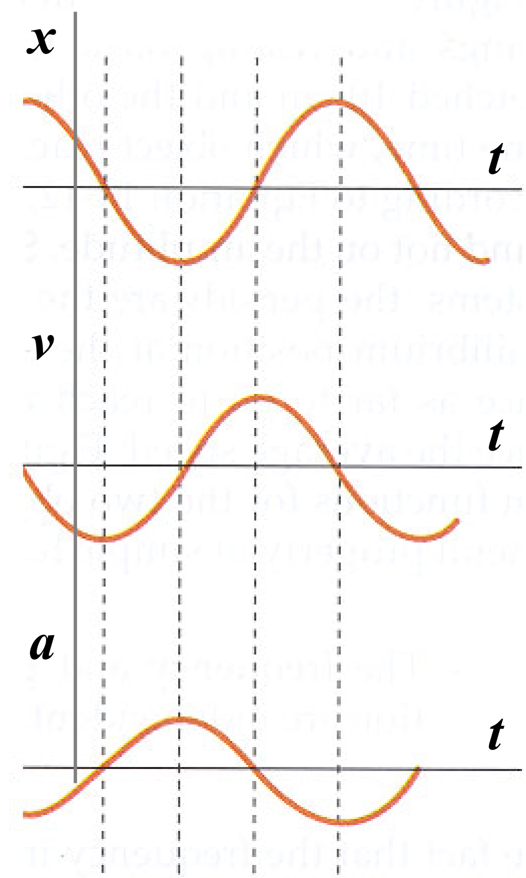
$$v(t) = \omega A \cos\left(\omega t + \phi_0\right)$$

Aceleração:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$a(t) = -\omega^2 A sen\left(\omega t + \phi_0\right)$$

$$a(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$



7.2.3. Aplicação da 2ª lei de Newton

Seguindo a 2ª opção - vamos prever o movimento a partir das forças aplicadas:

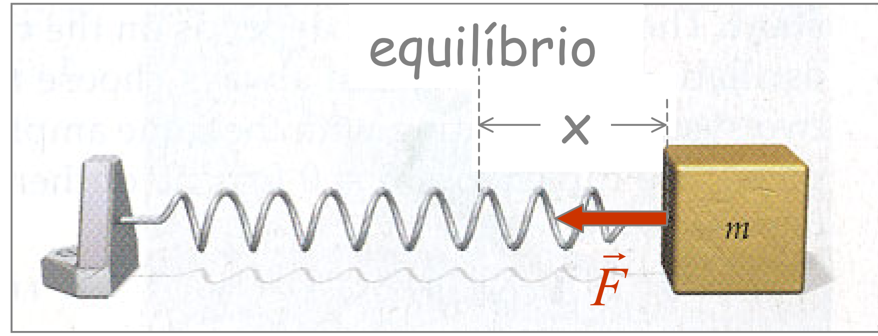
Como se pode prever a posição, a velocidade, a aceleração conhecendo as características do oscilador ? É necessário estudar as forças responsáveis pelo movimento.

A relação entre as forças aplicadas a um corpo e a aceleração do corpo é estabelecida pela 2ª lei de Newton. Conhecendo a aceleração é depois fácil estabelecer as leis da posição e da velocidade em função do tempo.

O "tratamento" da 2ª lei de Newton para obter a relação entre o oscilador e o movimento pode ser feito de duas formas diferentes: uma mais simples e outra um pouco mais "elegante", mais geral, que permite estabelecer a equação diferencial do movimento e a partir daí obter a descrição do movimento.

Que forças provocam o movimento harmónico ?

Um corpo ligado a uma mola oscila quando é afastado da posição de equilíbrio.



- na posição de equilíbrio: $\vec{F}_{mola \to corpo} = \vec{0}$

- fora da posição de equilíbrio: $\vec{F}_{mola \to corpo}$ aumenta quando x aumenta

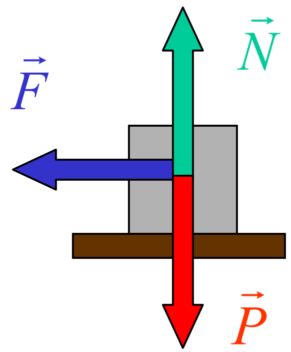
$\vec{F}$ (que a mola exerce sobre o corpo)

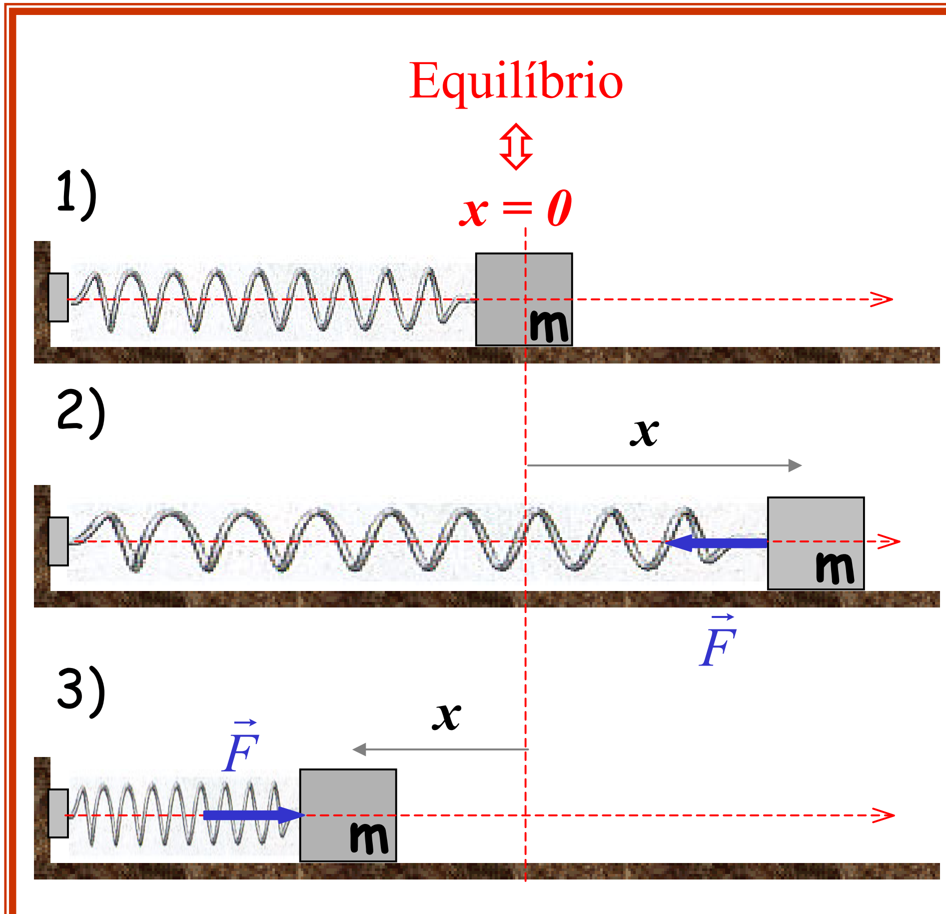
$$\boxed{\vec{F} = -k\vec{x}}$$

medido em relação à posição de equilíbrio

- actua na direcção do eixo da mola
- tem sempre o sentido contrário ao deslocamento
- é proporcional ao deslocamento

As forças que actuam





Forças aplicadas sobre o corpo:

P - Peso

N - Reacção normal da mesa sobre o corpo (N)

F = -kx - Força que a mola exerce

Aplicando a 2ª lei de Newton:

yy' $\Rightarrow$ $N - P = m.a_y = 0$

xx' $\Rightarrow$ $F = -k.x = m.a_x \Leftrightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$

Oscilações de um corpo ligado a uma mola elástica

$$\boxed{a_x = -\frac{k}{m}x}$$

➪ Aceleração não é constante:

- tem o sentido contrário ao deslocamento.
- é proporcional ao deslocamento
- é nula na posição de equilíbrio
- é máxima nos extremos (quando x é maximo)

E a velocidade ? E o deslocamento ? Como variam ?

7.2.3.1. Equação diferencial do MHS

vimos atrás que : $\boldsymbol{a_x = -\frac{k}{m}x}$

$$\text{mas: } \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \text{então:}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0} \quad (*)$$

Eq. Diferencial do M.H.S.

É necessário encontrar a solução desta equação

ou seja, é necessário encontrar uma função $x = f(t)$, tal que quando se substituir x por $f(t)$, na expressão (*) se obtenha uma expressão verdadeira.

Equação diferencial do movimento

Se $x = a\,sen(bt+c) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ba\cos(bt+c) \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = -b^2 a sen(bt+c) = -b^2 x \end{cases}$

Substituindo na eq. diferencial $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x$, vem:

$$-b^2 x = -\frac{k}{m}x$$, verdadeira desde que $b = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Então podemos dizer que:

$$\boxed{x(t) = a sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + c\right)}$$

é uma boa solução!

Oscilações de um corpo ligado a uma mola elástica

Falta agora ver qual é o significado desta expressão:

$$\boxed{x(t) = a\,sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + c\right)}$$

Amplitude - depende das condições iniciais

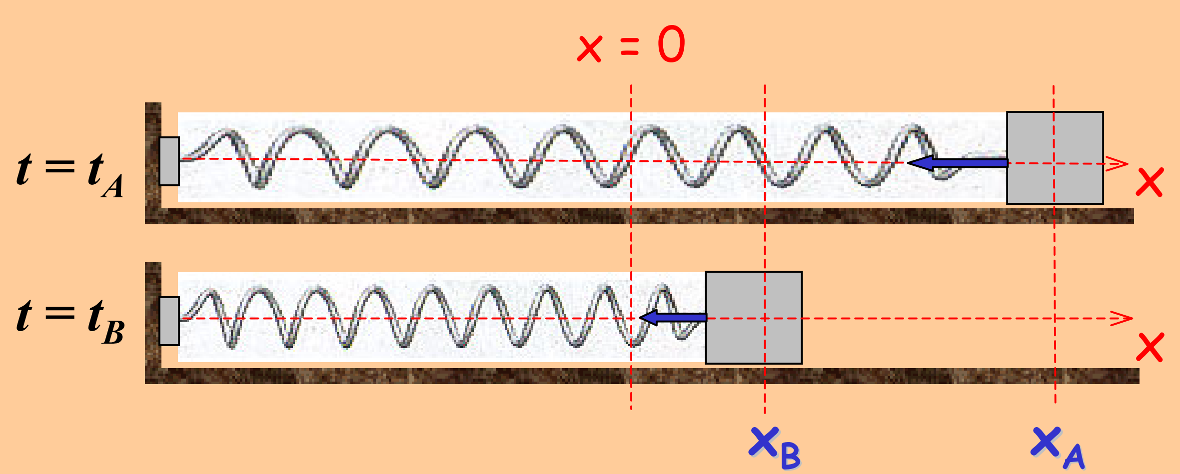
Fase inicial - depende das condições iniciais

Frequência angular - depende das características do oscilador

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

7.2.4. Considerações sobre Energia

Vimos atrás que a força que actua no corpo é: **F= - kx**
Vamos agora calcular o trabalho realizado por esta força, quando o corpo se move entre as posições x_A e x_B



$$W_{AB}=\int_{x_A}^{x_B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{x_A}^{x_B}kx\hat{i}\cdot dx\hat{i}=-\int_{x_A}^{x_B}kx\cdot dx=-k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_A}^{x_B}=-k\frac{x_B^2}{2}+k\frac{x_A^2}{2}$$

$$\boxed{W_{AB}=\frac{1}{2}k\left(x_A^2-x_B^2\right)}$$

Energia potencial elástica

Se $W_{AB} = \frac{1}{2} k \left(x_A^2 - x_B^2 \right)$ o trabalho realizado pela força elástica não depende do caminho percorrido, mas apenas das posições inicial e final, então:

O campo de forças elásticas é conservativo

Pode-se definir uma função **Energia Potencial Elástica** (Ep) de uma partícula de massa **m**, colocada num ponto P de elongação **x**

$$\boxed{E_p(A) = \frac{1}{2} k \cdot x_A^2}$$

Energia Cinética

$$\boxed{E_{Cinética} = \frac{1}{2}mv^2}$$

mas $v(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi_0)$, então:

$$E_C = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi_0)$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \left[1 - sen^2(\omega t + \phi_0)\right]$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 sen^2(\omega t + \phi_0)$$

$m\omega^2 = k$, porque $\omega^2 = k/m$

x^2

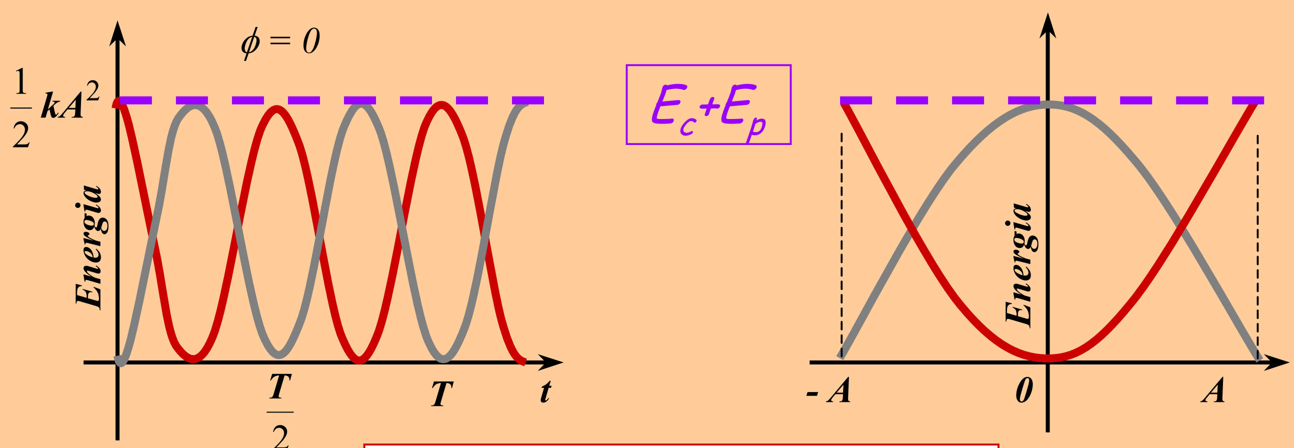
$$\boxed{E_{cinética} = \frac{1}{2}k \cdot \left[A^2 - x^2\right]}$$

Energia mecânica

Durante o movimento a energia mecânica é conservada:

$$E_{potencial} + E_{cinética} = \text{constante}$$

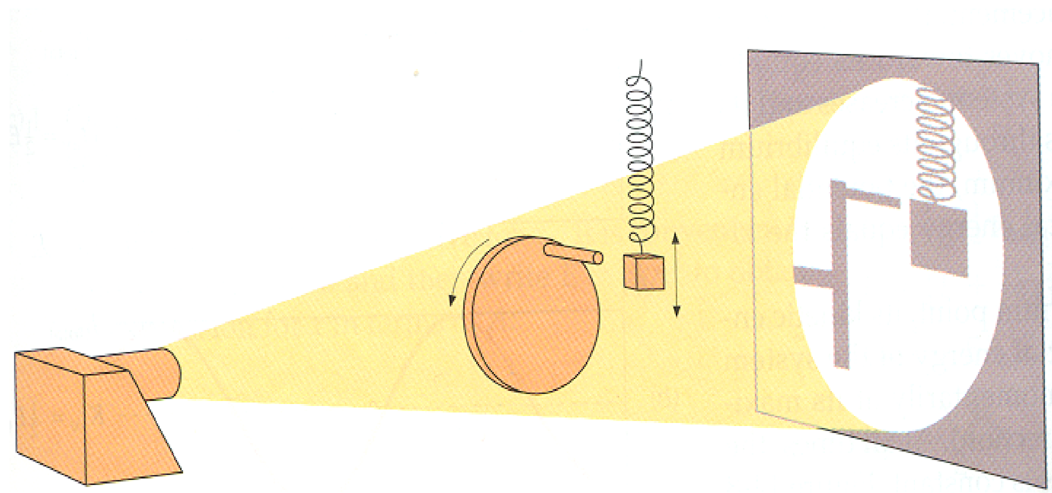
$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = C^{\underline{te}}$$



$E_c = \frac{1}{2}mv^2$		Energia cinética
$E_p = \frac{1}{2}kx^2$		Energia potencial

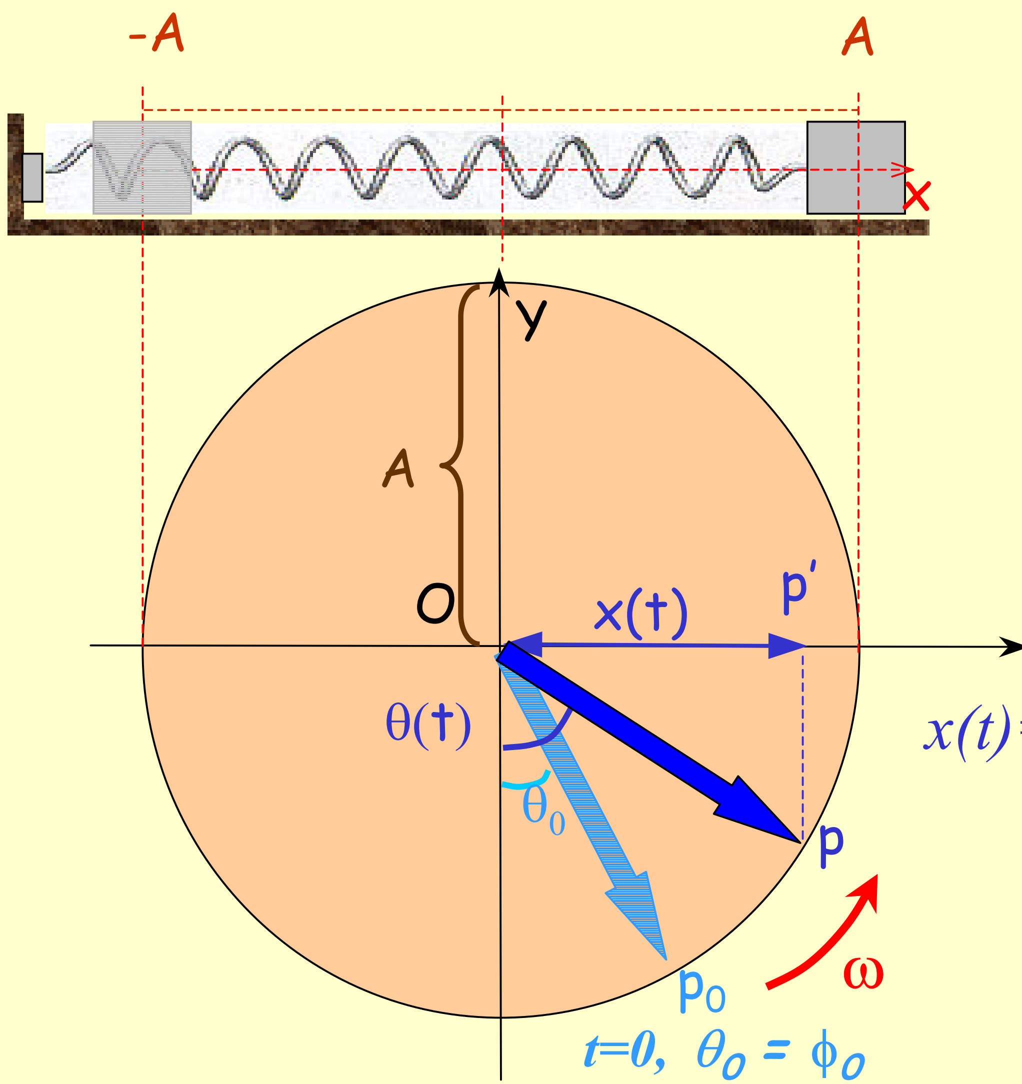
7.2.5. MHS e movimento circular uniforme

Callisto descreve um movimento (quase) circular uniforme em torno de Júpiter. No entanto observado da terra, o movimento é semelhante ao MHS.



O MHS pode ser visto como uma projecção de um movimento circular uniforme sobre um diâmetro

Analogia do MHS com um vector girante



$$x(t) = A\,sen(\omega t + \phi_0)$$

$$\theta(t) = \omega t + \phi_0$$

Analogia do MHS com um vector girante

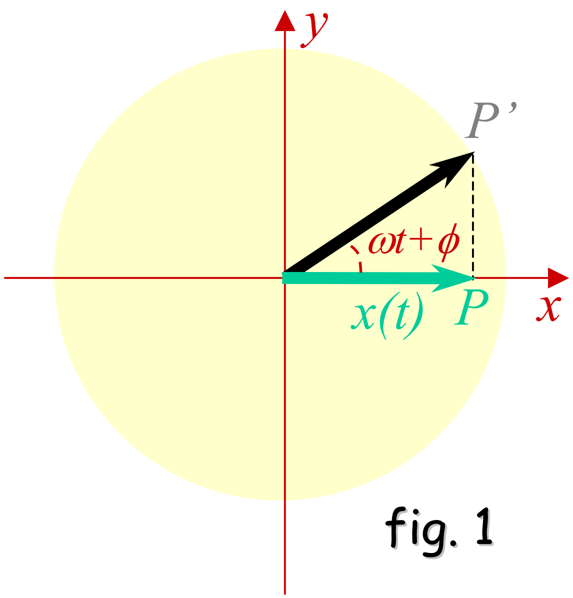


fig. 1

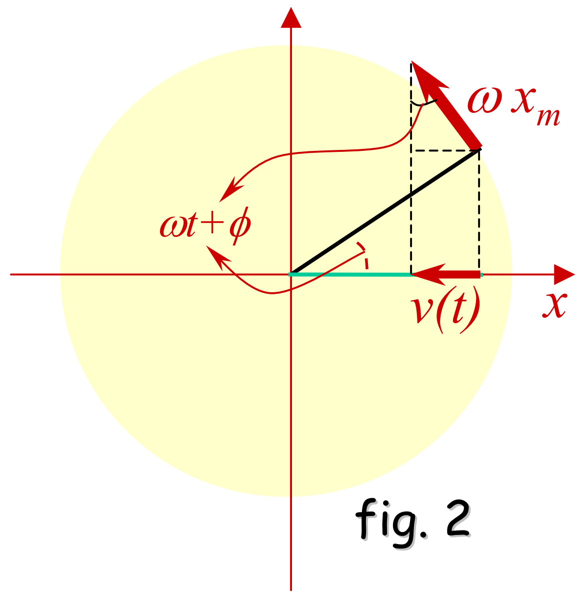


fig. 2

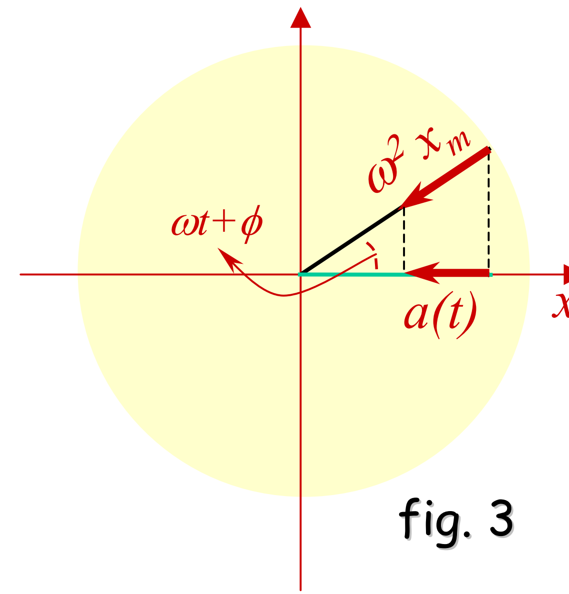


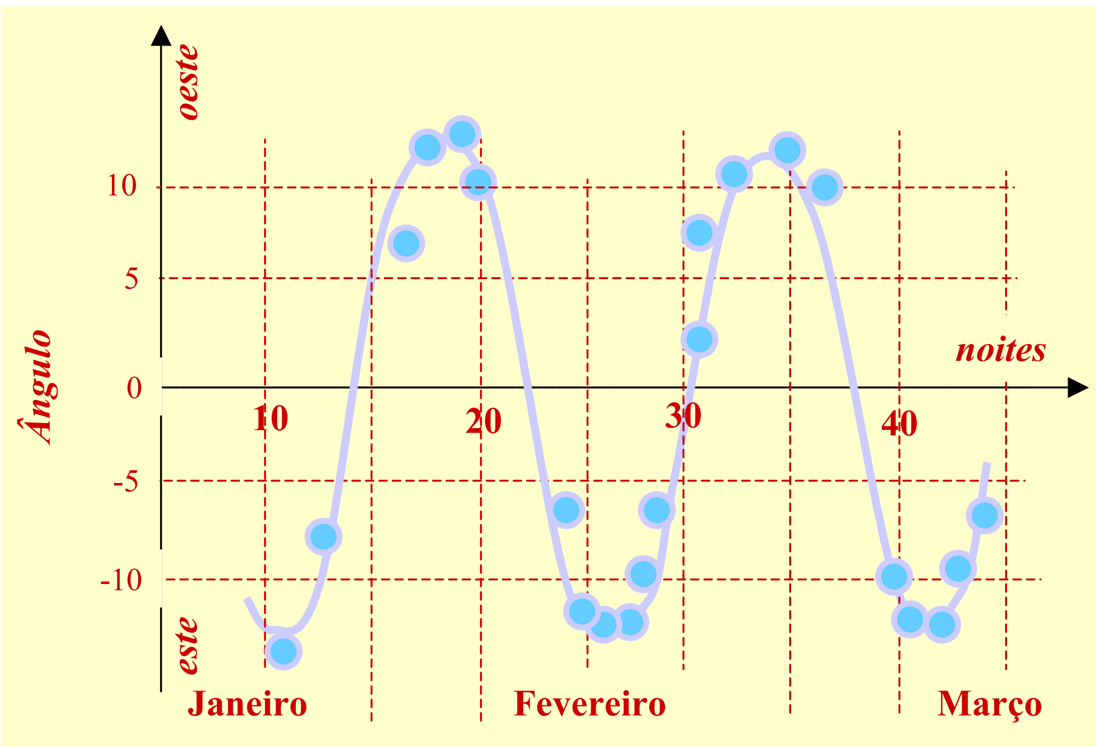
fig. 3

Uma partícula *P'* move-se com movimento circular uniforme percorrendo um círculo de raio x_m .

- fig. 1 - a projecção de *P'* sobre o eixo dos xx' , P , executa um MHS.
- fig. 2 - a projecção da velocidade , v', da partícula P' é a velocidade do MHS
- fig. 3 - a projecção da aceleração, a', da partícula P' é a aceleração do MHS

Observações de Galileu

**Em 1610 Galileu estudou o movimento das luas de Júpiter.
Observadas da terra, parecia que as luas efectuavam um movimento de vai-vem, obedecendo àquilo que hoje chamamos um movimento harmónico simples. Júpiter encontrava-se a meia distância dos dois pontos extremos.**



ângulo entre Júpiter e a sua lua *callisto*, visto da terra

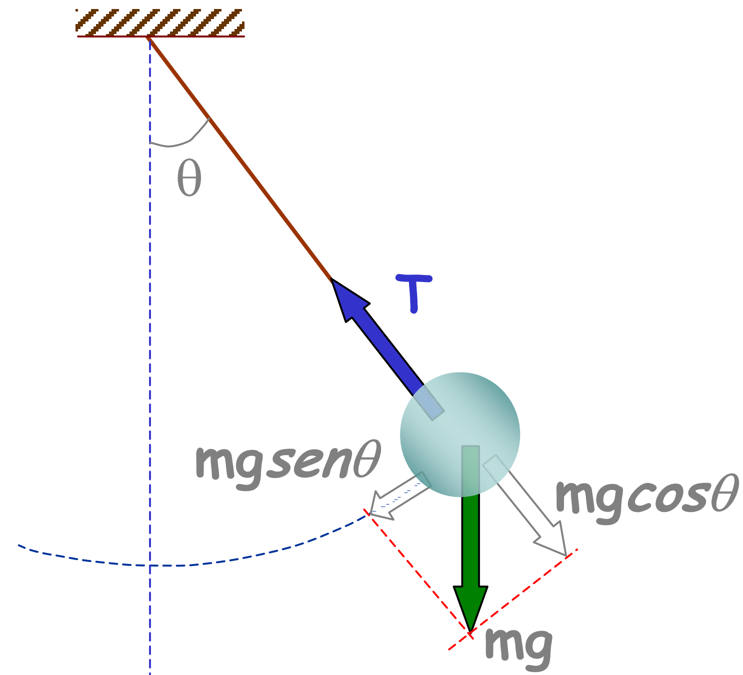
7.3. Exemplos

1 - *Pêndulo simples*

2 - *Oscilação de um corpo ligado a uma mola (horizontal)*

3 - *Oscilação de um corpo suspenso numa mola (vertical)*

Exemplo 1 : Pêndulo simples



Forças: Tensão, Peso

Aplicando a 2ª lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Na direcção tangente ao movimento:

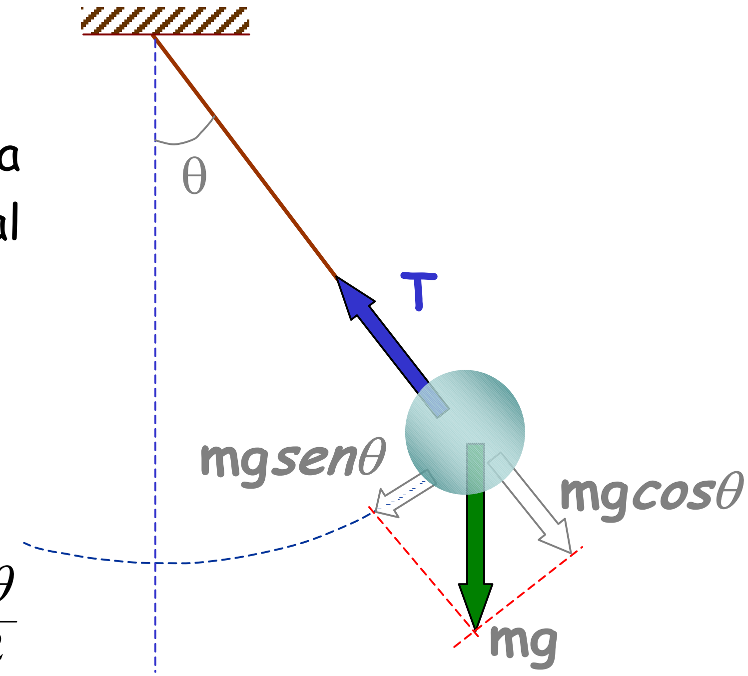
$$-P sen\theta = m a_t \Leftrightarrow -mg sen\theta = m a_t,$$

mas $a_t = \alpha \cdot L$, então :

$-mg sen\theta = m \cdot \alpha \cdot L \Leftrightarrow -g sen\theta = \alpha \cdot L$ se θ for pequeno, então $sen\theta \approx \theta$ e :

$\boxed{\alpha = -\frac{g}{L}\theta}$ comparando esta expressão com $\boxed{a = -\omega^2 x}$ (calculada atrás) vemos que:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}},\ \theta = \text{desl. angular},\ \alpha = \text{ac. angular}}$$



Podemos resolver o problema de outra forma, recorrendo à equação diferencial do movimento:

Na direcção do movimento:

$$-mgsen\theta = ma\,, \quad \text{mas} \quad a = \alpha \cdot L = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-gsen\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}sen\theta = 0$$ se $sen\theta \approx \theta$ (se θ pequeno)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Equação diferencial do MHS}}$$

A solução da equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

é do tipo:

$$\theta(t) = \theta_0 sen(\omega t + \phi_0)$$

em que

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad e \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Ou seja, a equação que traduz a posição do pêndulo em cada instante é:

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 sen\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi_0\right)}$$

Oscilação de um corpo ligado a uma mola (horizontal)

Um corpo de massa 4 kg oscila sobre um plano horizontal, ligado a uma mola elástica (K=40 N/m). O corpo foi deslocado 10 cm para a direita da posição de equilíbrio e abandonado. Calcule:

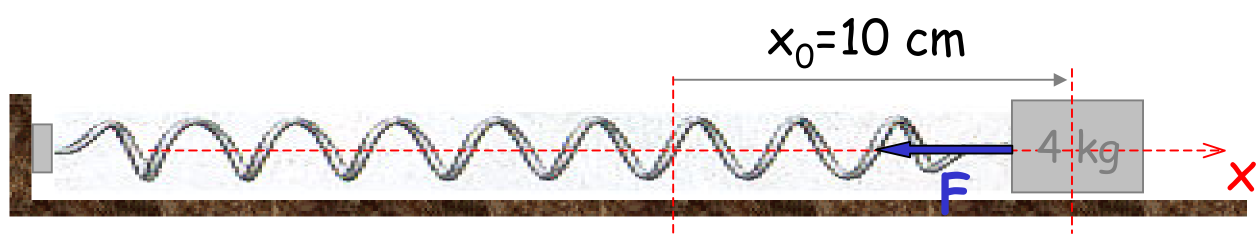
a) a equação diferencial do movimento.

b) a equação que define a posição do corpo em qualquer instante.

c) a amplitude, a frequência e o período do movimento.

d) a velocidade máxima e a aceleração máxima.

e) a energia cinética e a energia potencial quando o corpo está 5 cm afastado da posição de equilíbrio.



Oscilação de um corpo suspenso numa mola (vertical)

Exercício:

Um corpo de massa 100 g, é suspenso numa mola ($K = 10^3$ N/m).

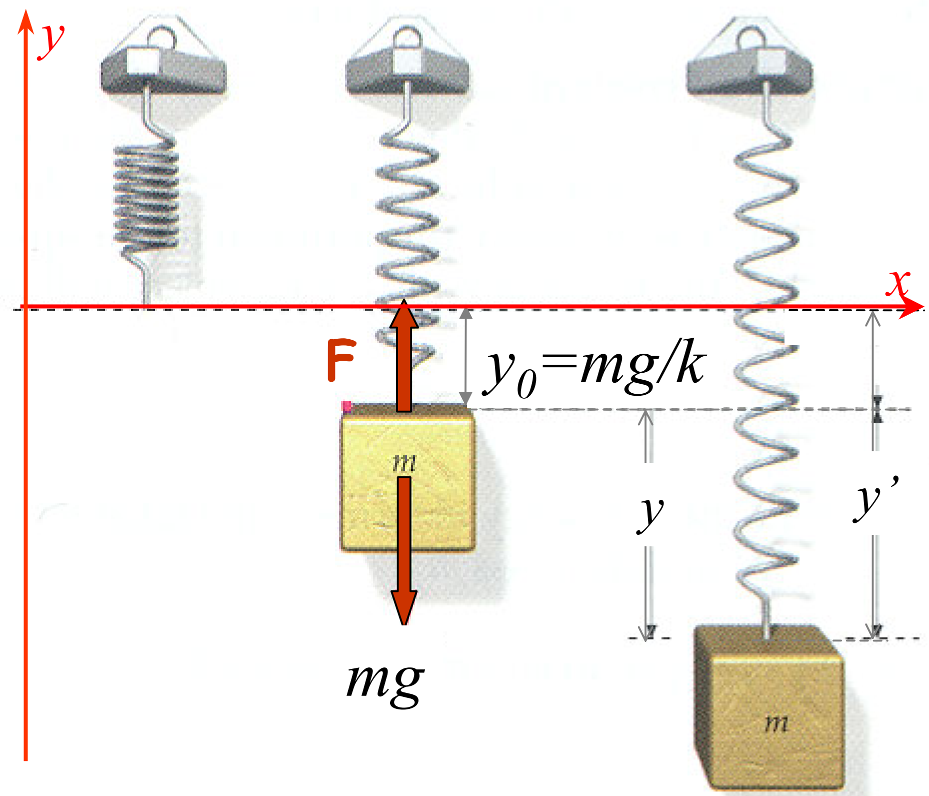
1. Determine a posição de equilíbrio do sistema.

2. Se o corpo for afastado 15 cm (para cima) da posição de equilíbrio, calcule:

a) A equação do movimento.

b) A velocidade máxima.

c) A energia cinética, quando o corpo está a 5 cm da posição de equilíbrio.



Oscilação de um corpo suspenso numa mola - resolução

Aplicando a 2ª lei de Newton:

Na situação de equilíbrio: $\sum \vec{\boldsymbol{F}} = 0 \Leftrightarrow -\boldsymbol{k}\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{mg}$

substituindo: $-k(y + y_0) + mg = m\dfrac{d^2 y}{dt^2} \Leftrightarrow \dfrac{d^2 y}{dt^2} + \dfrac{k}{m} y = 0$

Cuja solução já é conhecida:

$$\boxed{y(t) = A.sen(\omega t + \phi_0)}$$

O movimento é um MHS, como no caso em que a mola está num plano horizontal, mas o "centro do movimento" deixa de coincidir com a posição de equilíbrio da mola, e passa a ser a posição em que a força da mola equilibra o peso.