Departamento de Matemática
e Aplicações

1º Teste de Análise Matemática

Grupo I

(4 valores) Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correcta no quadrado correspondente. Cada resposta correcta vale 1 valor. Cada resposta errada vale -0,25 valores.

1. O raio de convergência R da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[4(3-x)]^n}{n^2}$ é

$R = \frac{1}{2}$ ☐; $R = \frac{1}{4}$ ☒; $R = 2$ ☐; $R = 4$ ☐; $R = +\infty$ ☐; nenhum dos anteriores ☐.

2. Sabendo que o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n (x+1)^n}{\sqrt{n}}$ é $R = \frac{1}{\pi}$, o seu intervalo de convergência é:

$C = -1$

$x \in \left]-1-\frac{1}{\pi}, -1+\frac{1}{\pi}\right]$

$]-\frac{\pi+1}{\pi}, -\frac{\pi-1}{\pi}[$ ☐; $[-\frac{\pi+1}{\pi}, -\frac{\pi-1}{\pi}[$ ☐; $]-\frac{\pi+1}{\pi}, -\frac{\pi-1}{\pi}]$ ☒;

$]\frac{\pi-1}{\pi}, \frac{\pi+1}{\pi}]$ ☐; $]\frac{\pi-1}{\pi}, \frac{\pi+1}{\pi}[$ ☐; $[\frac{\pi-1}{\pi}, \frac{\pi+1}{\pi}[$ ☐.

$x = -1-\frac{1}{\pi} \Rightarrow \sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é div

$x = -1+\frac{1}{\pi} \Rightarrow \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ é simp. conv.

3. Seja f uma função real de duas variáveis cujo domínio é $\mathbb{R}^2$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- ☐ f é contínua em (x_0, y_0) se e só se f é diferenciável em (x_0, y_0);
- ☐ Se f é contínua em (x_0, y_0) então f é diferenciável em (x_0, y_0);
- ☒ Se f é diferenciável em (x_0, y_0) então f é contínua em (x_0, y_0);
- ☐ Se f é diferenciável em (x_0, y_0) então as suas derivadas parciais de 1ª ordem são contínuas em (x_0, y_0);
- ☐ Nenhuma das afirmações anteriores.

4. Seja a função real $f(x, y) = x^2 y - \ln y$. Então f satisfaz a relação:

☐ $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$; ☐ $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$; ☐ $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$;

☐ $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$; ☐ Nenhuma das expressões anteriores.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ $\quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x^3$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 2x^3$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \frac{1}{y}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2}$

Grupo II

(5 valores) Sem indicar os cálculos efectuados, apresente apenas o resultado final.

1. Escreva os quatro primeiros termos, não nulos, do desenvolvimento em série de MacLaurin da função $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{2}}$.

$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\frac{u^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{u^3}{3!} + \cdots$

$4 \times 2^2 \times 2 = 32$
$8 \times 2^3 \times 2 = 128$

$\sqrt{1-\frac{x}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2!} + \frac{3}{8}\left(-\frac{x}{2}\right)^3 \times \frac{1}{3!} + \cdots = 1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{32} - \frac{x^3}{128} + \cdots$

3. Considere a função $f(x,y) = e^{x^2+4x+y^2}$. Identifique a curva de nível de f que passa no ponto $(-2,2)$.

$f(-2,2) = e^0 \Rightarrow z = e^0 = 1$

$e^{x^2+4x+y^2} = e^0 \Leftrightarrow x^2+4x+y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2 = 4$ Circunferência de $C_{(-2,0)}$ $R=2$

4. Suponha que $\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = 2$. Diga, justificando, o que pode dizer do valor de $f(2,1)$.

$(2,1)$ $\in D_f$: f é contínua em $(2,1) \Rightarrow f(2,1) = 2$; f não é contínua em $(2,1) \Rightarrow f(2,1)$ existe e é $\neq 2$

$(2,1) \notin D_f \Rightarrow$ não existe

5. (a) O valor dos limites iterados $\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}\right)$ e $\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}\right)$ é, respectivamente:

$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2} = 1$ $\quad \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to0}\frac{-2y^2}{y^2} = -2$

(b) O que pode concluir sobre a existência de $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}$?

Não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}$

GRUPO III

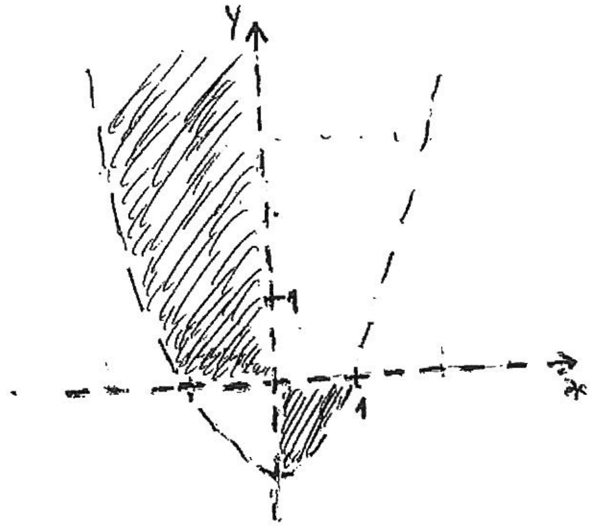
(11 valores) Apresente **todos** os cálculos efectuados.

1. (2,5 val.)Determine e represente geometricamente o domínio de $f(x,y) = \frac{\ln(y-x^2+1)}{\sqrt{-2xy}}$.

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + 1 > 0 \wedge -2xy > 0\}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 - 1 \wedge xy < 0\}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 - 1 \wedge [\underbrace{(x>0 \wedge y<0)}_{4^\circ Q} \vee \underbrace{(x<0 \wedge y>0)}_{2^\circ Q}]\}$



2. (2,5 val.) Estude a continuidade da função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3y^2}{x^5+y^5} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^5 \neq -y^5\} \cup \{(0,0)\}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -y\} \cup \{(0,0)\}$

Para os pontos $(x,y) \in Df \wedge (x,y) \neq (0,0)$ f é contínua pois é uma função racional com denominador diferente de zero.

Para $(x,y) = (0,0)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{4x^3y^2}{x^5+y^5}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{4x^3y^2}{x^5+y^5}\right) = 0 \Rightarrow \text{o limite, se existir, é zero}$$

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y=mx}} \frac{4x^3y^2}{x^5+y^5} = \lim_{x\to 0} \frac{4m^2x^5}{x^5+m^5x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{4m^2}{1+m^5} = \frac{4m^2}{1+m^5}$$ depende da

recta $y = mx$ escolhida. Assim, f não é contínua em $(0,0)$.

$\therefore$ f é contínua em $Df \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -y\}$

3. (1,5 val.) Seja a função $f(x,y) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$. Determine a expressão de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x^2+y^2} + x^2\left[-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\left(-\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right] & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. Determine, usando diferenciais, um valor aproximado da hipotenusa, de um triângulo rectângulo,
cujos catetos medem, respectivamente, 3,1 e 3,9 cm.

$$h = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (x_0;y_0) = (3;4) \qquad (dx, dy) = (0,1\,;\,-0,1)$$

$$f(3,4) = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$f(3+0,1\,;\,4-0,1) = f(3,1\,;\,3,9) \approx f(3;4) + df(3;4)$$

$$df(3,4) = \frac{\partial f}{\partial x}(3,4)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4)\,dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$df(3,4) = \frac{3}{5}\times\frac{1}{10} - \frac{4}{5}\times\frac{1}{10} = \frac{3-4}{50} = -\frac{1}{50} = -0,02$$

$$f(3,1\,;\,3,9) \approx 5 - 0,02 = 4,98 \text{ cm}$$

(Valor real 4,981967...)

5. (2 val.) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $z = f(u,v)$, onde $u = e^{2x} + y^2$ e $v = y^4$. Determine a expressão de $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$z \begin{cases} u \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ v - y \end{cases} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2e^{2x}\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 2e^{2x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

Seja $h(u,v) = \frac{\partial z}{\partial u}$ $\quad h \begin{cases} u \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ v - y \end{cases}$, então

$$2e^{2x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 2e^{2x}\frac{\partial h}{\partial y} = 2e^{2x}\left[\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{dv}{dy}\right] =$$

$$= 2e^{2x}\left[\frac{\partial h}{\partial u}2y + \frac{\partial h}{\partial v}4y^3\right] = 4ye^{2x}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)2y^2\right]$$

$$= 4ye^{2x}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right]$$