Apontamentos de

Complementos de Análise Matemática

J. Figueiredo, C. Ribeiro

Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

2011

Conteúdo

Estes apontamentos são baseados nos livros:

Braun M., Differential Equations and Their Applications
Springer-Verlag, 1992

Pinsky M.A., Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications
McGraw-Hill International Editions, 1998

Ross S.L., Differential Equations
John Wiley, 1984

Parte I

Equações Diferenciais Ordinárias

Capítulo 1

Introdução às equações diferenciais

1.1 Classificação de equações diferenciais

Definição 1.1 *Uma equação envolvendo derivadas de uma ou mais variáveis dependentes (as incógnitas) em ordem a uma ou mais variáveis independentes designa-se* ***equação diferencial****.*

Exemplo 1.1 *São equações diferenciais*

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{d^3v}{dt^3} + 5v \frac{dv}{dt} = \cos t, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = u - v. \tag{1.4}$$

Definição 1.2 *Uma equação diferencial envolvendo derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a uma variável independente designa-se* ***equação diferencial ordinária*** *(EDO).*

Exemplo 1.2 *As equações (1.1) e (1.2) são exemplos de equações diferenciais ordinárias (EDOs).*

Definição 1.3 *Uma equação diferencial envolvendo derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a mais do que uma variável independente designa-se* ***equação diferencial parcial*** *(EDP).*

Exemplo 1.3 *As equações (1.3) e (1.4) são exemplos de equações diferenciais parciais (EDPs).*

As equações diferenciais, quer ordinárias quer parciais, são ainda classificadas de acordo com a ordem da derivada de ordem mais elevada que nelas figura.

Definição 1.4 *A ordem da derivada de ordem mais elevada que figura numa equação diferencial designa-se* ***ordem da equação diferencial****.*

Exemplo 1.4 *A equação (1.1) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (e não de quarta ordem!). A equação (1.2) é uma equação diferencial ordinária de terceira ordem. As equações (1.3) e (1.4) são equações diferenciais parciais de segunda e de primeira ordem, respetivamente.*

Pode-se ainda classificar as equações diferenciais ordinárias quanto à sua linearidade (o mesmo acontece, como veremos mais adiante, com as equações diferenciais parciais).

Definição 1.5 *Uma* ***equação diferencial ordinária linear*** *de ordem n, na variável dependente y e na variável independente x, é uma equação que é, ou pode ser expressa, da seguinte forma*

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x), \tag{1.5}$$

onde a função $a_0(x)$ não é identicamente nula.

Exemplo 1.5 *Constituem exemplos de equações diferencias ordinárias lineares, supondo $y = y(x)$,*

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y &= 0, \\ \frac{dy}{dx} + (\cos x)\, y &= 0, \\ -x\frac{d^3y}{dx^3} + xe^x\frac{dy}{dx} + x^3y &= \cos x, \\ \frac{d^3y}{dx^3} - 5xe^x\frac{d^2y}{dx^2} &= 2\cosh 2x. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Note-se que nas equações diferenciais lineares:

(i) tanto y como as suas derivadas são sempre de primeiro grau;

(ii) não surgem produtos de y ou das suas derivadas;

(iii) não figuram funções transcendentes de y (exponencial, seno, coseno, logaritmo, potência, etc.) ou das suas derivadas.

Definição 1.6 *Uma* ***equação diferencial ordinária não linear*** *é uma equação diferencial ordinária que não pode ser expressa na forma (1.5).*

Exemplo 1.6 *São equações diferenciais ordinárias não lineares, supondo $y = y(x)$,*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y^2 = 0, \tag{1.7}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} = 0, \tag{1.8}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3y = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{dy}{dx} + x\cos y = 0, \tag{1.10}$$

$$\frac{dy}{dx} - 3e^{2y} = 0. \tag{1.11}$$

Na equação (1.7) a não linearidade deve-se ao termo y^2; na equação (1.8) é devida ao produto $y\,dy/dx$; na equação (1.9) é causada pelo termo $(dy/dx)^2$; finalmente, nas equações (1.10) e (1.11) é devida às funções transcendentes coseno e exponencial. Repare-se desde já na semelhança entre as equações (1.6) e (1.10) que, no entanto, têm caraterísticas diferentes no que se refere à linearidade.

Nota No caso das equações diferenciais de primeira ordem, e conforme veremos de seguida, estas podem ser escritas essencialmente de três formas equivalentes:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$$

e

$$f(x,y)\,dx - dy = 0.$$

Esta caraterística faz com que em muitos casos se possa escolher a variável independente que seja mais vantajosa na óptica da análise e resolução da equação diferencial em causa. Em particular, pode acontecer que determinada equação diferencial de primeira ordem não seja linear para determinada escolha da variável independente, mas passe a ser linear se for reescrita considerando outra variável independente (na prática, trocando o papel das variáveis dependente/independente). Por exemplo, a equação diferencial não linear (1.11) também se pode escrever como

$$\frac{dy}{dx} - 3e^{2y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3e^{2y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}e^{-2y},$$

onde se assumiu que $x = x(y)$. Esta equação diferencial já é linear (na variável dependente x). No entanto, já a aplicação deste procedimento à equação diferencial (1.10) não conduz a uma equação linear dado que se obtém

$$\frac{dy}{dx} + x\cos y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -x\cos y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y\frac{dx}{dy} + \frac{1}{x} = 0,$$

a qual não é linear (na variável dependente x) devido ao termo $1/x$. Voltaremos a tratar esta questão posteriormente quando este tipo de equação diferencial for abordado de forma mais pormenorizada.

Nota Para tornar a escrita menos pesada, ao longo deste texto adoptar-se-ão duas notações distintas para representar as derivadas de uma função f em ordem ao seu argumento x. Assim, sempre que tal não gere ambiguidade, serão usadas as notações

$$\frac{df}{dx}, \ \frac{d^2f}{dx^2}, \ \frac{d^3f}{dx^3}, \ \frac{d^4f}{dx^4}, \ldots, \frac{d^kf}{dx^k}$$

ou (equivalentemente)

$$f', \ f'', \ f''', \ f^{(iv)}, \ldots, f^{(k)}$$

para representar as sucessivas derivadas da função f em ordem ao seu argumento x.

Exercícios sobre classificação de equações diferenciais

Exercício 1.1 *Classificar cada uma das seguintes equações diferenciais como ordinárias ou parciais; mencionar a ordem de cada equação; averiguar, no caso de se tratar de uma equação diferencial ordinária, se esta é linear.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = x^2 e^x + \cos x;$

(b) $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6y = x^2 \operatorname{sen} x;$

(c) $\triangle u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

(d) $\dfrac{du}{dt} + u^2 = t;$

(e) $\dfrac{d^2v}{dx^2} - \left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2 + v = 3x + 1;$

(f) $\dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 0;$

(g) $\dfrac{ds}{dt} + t\cos s = 0;$

(h) $x^2\, dy + y^2\, dx = 0;$

(i) $\nabla^4 v \equiv \dfrac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 v}{\partial y^4} = 0;$

(j) $x\, dy + \operatorname{tg} y\, dx = 0.$

1.2 Soluções de equações diferenciais

Considere-se agora, e antes de abordar qualquer método de resolução de equações diferenciais, o conceito de **solução de uma equação diferencial ordinária** de ordem n.

Para poder abordar esta questão com alguma generalidade convém ter em mente que uma equação diferencial ordinária de ordem n (linear ou não) estabelece uma relação entre: (i) algumas derivadas da variável dependente em ordem à variável independente; (ii) a variável dependente; e (iii) a variável independente. Assim como a existência de uma relação entre as variáveis x, y e z se pode expressar genericamente na forma

$$f(x, y, z) = 0,$$

o mesmo pode ser feito para representar qualquer equação diferencial ordinária de ordem n que envolva as variáveis y e x, a saber,

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right] = 0,$$

onde se assumiu como anteriormente que $y = y(x)$. Cada equação diferencial deste tipo corresponde a uma forma particular da função real F, a qual tem $n+2$ argumentos (porquê?). Por exemplo, à EDO

$$x\frac{d^3y}{dx^3} - y = e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad x\frac{d^3y}{dx^3} - y - e^{-x} = 0$$

corresponde

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right] = x\frac{d^3y}{dx^3} - y - e^{-x}.$$

Abordemos então a noção de solução de uma equação diferencial ordinária.

Definição 1.7 *Considere-se a equação diferencial ordinária de ordem n*

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right] = 0, \tag{1.12}$$

onde F é uma função real dos seus $n+2$ argumentos. Diz-se que uma solução desta equação diferencial é qualquer relação (explícita ou implícita[1]) entre as variáveis x e y que não contenha derivadas e que verifique a equação (1.12). Assim, por exemplo, a função $y(x) = x^2$ é uma solução (explícita) da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y = x(x+2),$$

uma vez que substituindo y por x^2 na equação precedente se obtém uma identidade:

$$\frac{dy}{dx} + y = x(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx^2}{dx} + x^2 = x(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad 2x + x^2 = x(x+2).$$

Vejamos agora o que distingue as soluções explícitas das soluções implícitas.

1. *Seja $f(x)$ uma função real, definida para todo x pertencente a um intervalo real aberto I, que tenha derivada de ordem n - e consequentemente também derivadas de ordem inferior a n - para todo $x \in I$. A função f designa-se uma* ***solução explícita*** *da equação diferencial (1.12) no intervalo I se satisfaz as condições:*

   (a) $F\left[x,\, y,\, y',\dots,\, y^{(n)}\right]$ *está definida para todo $x \in I$;*

   (b) $F\left[x,\, f,\, f',\dots,\, f^{(n)}\right] = 0$ *para todo $x \in I$.*

   Ou seja, a função F, que está associada exclusivamente à forma da equação diferencial, deve, enquanto função explícita de x, fazer sentido para todo $x \in I$. Por outro lado, a substituição de $f(x)$ e das suas derivadas em (1.12) deve conduzir a uma identidade no intervalo aberto I.

2. *Uma relação (implícita) $g(x,y) = 0$ diz-se uma* ***solução implícita*** *da equação (1.12) se define pelo menos uma função real $f(x)$ num intervalo aberto I tal que $f(x)$ é uma solução explícita de (1.12) em I.*

Pode-se assim dizer que uma solução da equação diferencial (1.12) é uma relação - explícita ou implícita - entre as variáveis x e y que satisfaz a referida equação num determinado intervalo aberto I, sempre que o domínio de y, y', y'', $\dots$, $y^{(n)}$ contenha I, o mesmo acontecendo com o domínio de F.

Para fixar ideias, comecemos por ver alguns exemplos relativos a **soluções explícitas**.

Exemplo 1.7 *A função $f(x) = 2\operatorname{sen} x + 3\cos x$, $x \in \mathbb{R}$, é uma solução explícita da equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{1.13}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. *Primeiro, note-se que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso,*

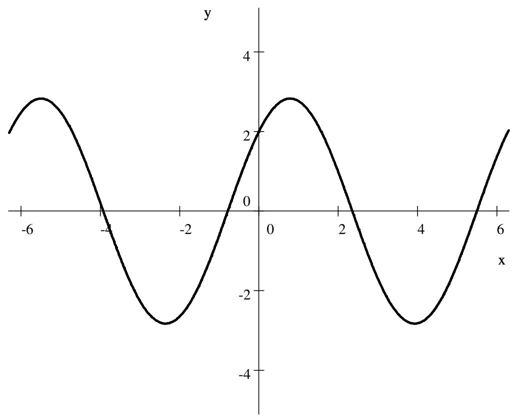
$$\begin{aligned} f(x) = 2\operatorname{sen} x + 3\cos x \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = 2\cos x - 3\operatorname{sen} x \\ &\Rightarrow \quad f''(x) = -2\operatorname{sen} x - 3\cos x, \end{aligned}$$

[1] A relação diz-se explícita se é da forma $y = f(x)$, por exemplo $y = x+1$, dizendo-se implícita se é da forma $g(x,y) = 0$, por exemplo $y^2 - x^2 + 4 = 0$.

pelo que substituindo y por $f(x)$ e d^2y/dx^2 por $f''(x)$ em (1.13) obtém-se uma identidade

$$(-2\operatorname{sen} x - 3\cos x) + (2\operatorname{sen} x + 3\cos x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

que é válida para todo x real. Portanto, a função $f(x)$ diz-se uma solução explícita da equação diferencial (1.13) para todo $x \in \mathbb{R}$. Note-se ainda que a forma da equação diferencial (1.13) não impõe, só por si, qualquer restrição aos valores que a variável independente x pode tomar, pelo que $D_F = \mathbb{R}$.



Representação gráfica da função $y = 2\operatorname{sen} x + 3\cos x$, solução da equação diferencial (1.13)

Exemplo 1.8 *A função $g(x) = 2x^{1/2}$ é uma solução explícita da equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1/2}$$

apenas no intervalo aberto $I =]0, +\infty[$.

Solução. *Neste caso tem-se $dg/dx = x^{-1/2}$ pelo que a função g verifica a equação diferencial dada. No entanto,*

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \quad e \quad D_{g'} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+,$$

pelo que $I = D_g \cap D_{g'} =]0, +\infty[$. Neste caso a forma da equação diferencial também impõe condições a x, embora como se verá de seguida tal não altere I. De facto, a equação diferencial em causa pode-se escrever na forma

$$\frac{dy}{dx} - x^{-1/2} = 0,$$

pelo que neste caso concreto

$$F\left[\frac{dy}{dx}, y, x\right] = \frac{dy}{dx} - x^{-1/2}$$

e o domínio de F, enquanto função da variável independente x, é

$$D_F = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Assim, em bom rigor, tem-se

$$I = D_g \cap D_{g'} \cap D_F =]0, +\infty[,$$

pelo que o resultado obtido anteriormente para o intervalo I não se altera.

Exemplo 1.9 *A função $h(x) = x^2$ é uma solução explícita da equação diferencial*

$$x^{-1}\frac{dy}{dx} = 2$$

no intervalo $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Solução. *Por um lado, tem-se a identidade $x^{-1}dh/dx = 2$. Além disso, $D_h = D_{h'} = \mathbb{R}$. No entanto,*

$$F\left[\frac{dy}{dx}, y, x\right] = x^{-1}\frac{dy}{dx} - 2,$$

pelo que $D_F = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ e consequentemente $I = D_g \cap D_{g'} \cap D_F = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Problema *Determinar em que intervalo da reta real é que a função $h(x) = \ln x$ é uma solução explícita da equação diferencial de primeira ordem $dy/dx = x^{-1}$.*
Resp.: $]0, +\infty[$.

Problema *Determinar em que intervalo da reta real é que a função $\theta(x) = x^3 + k_1x + k_2$, onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, é uma solução explícita da equação diferencial de segunda ordem $x^{-1}y'' - 6x = 0$.*
Resp.: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Vejamos agora alguns exemplos relativos a **soluções implícitas**.

Exemplo 1.10 *A relação $xy = 1$ é uma solução implícita da equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} \tag{1.14}$$

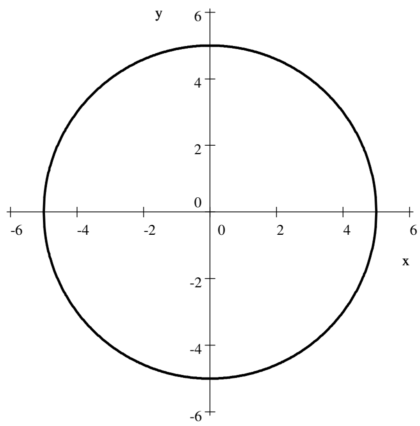
no intervalo $I = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Solução. *De facto, $xy = 1$ define uma função real $f(x) = x^{-1}$ para todo $x \in I$. Facilmente se conclui que $f(x)$ é uma solução explícita da equação diferencial (1.14) em I, como requerido.*

Exemplo 1.11 *A relação $x^2 + y^2 - 25 = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial*

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.15}$$

no intervalo I definido por $-5 < x < 5$.



Representação gráfica da relação implícita $x^2 + y^2 - 25 = 0$

Solução. *Neste caso a relação (implícita) entre as variáveis x e y, $x^2+y^2-25=0$, define duas funções reais*

$$f_1(x)=+\sqrt{25-x^2} \quad e \quad f_2(x)=-\sqrt{25-x^2},$$

correspondendo cada uma delas a uma semi-circunferência (ver gráfico anterior). Tanto $f_1(x)$ como $f_2(x)$ são soluções explícitas da equação diferencial (1.15) em I. Vejamos que assim é para $f_1(x)$:

$$f_1(x)=\sqrt{25-x^2} \quad \Rightarrow \quad f_1'(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}.$$

Substituindo $f_1(x)$ e $f_1'(x)$ em (1.15) obtém-se uma identidade

$$x+\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}\sqrt{25-x^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0=0,$$

conforme requerido. Por outro lado, tem-se (porquê?)

$$D_{f_1}=[-5,5]\,, \quad D_{f_1'}=\,]-5,5[\,, \quad D_F=\mathbb{R},$$

implicando $I=D_{f_1}\cap D_{f_1'}\cap D_F=\,]-5,5[$. A demonstração para $f_2(x)$ é similar.

Portanto, a relação $x^2+y^2-25=0$ define duas funções, f_1 e f_2, que são ambas soluções explícitas de (1.15) no intervalo $I=\,]-5,5[$. Como vimos, é apenas necessário que uma delas tenha essa propriedade para se concluir que a relação $x^2+y^2-25=0$ é uma solução implícita de (1.15) em I.

Note-se que se o intervalo proposto contivesse pontos fora do intervalo $]-5,5[$, então a relação $x^2+y^2-25=0$ não seria uma solução implícita da equação diferencial dada nesse intervalo, pois tanto $f_1'(x)$ como $f_2'(x)$ não estão definidas em nenhum ponto de $]-\infty,-5]\cup[5,+\infty[$ (ver gráfico anterior).

Problema *Determinar em que intervalo da reta real é que a relação $y^2-x^2=0$ é uma solução implícita da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}.$$

(Atenção: em geral $\sqrt{x^2}\neq x$).
Resp.: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Problema Determinar em que intervalo da reta real é que a relação $y^2+2xy+4=0$ é uma solução implícita da equação diferencial

$$(y+x)\,\frac{dy}{dx}+y=0.$$

(Requer o uso da "fórmula resolvente" para determinar uma relação explícita entre x e y a partir da relação implícita dada).
Resp.: $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$.

Vejamos agora como lidar com casos em que a relação implícita dada entre as variáveis x e y é demasiado complexa para se poder definir uma relação explícita (por exemplo, $y\cos y+x\,\mathrm{sen}\,x=0$). Será que nestes casos ainda se pode concluir algo relativamente à solução de determinada equação diferencial?

Exemplo 1.12 *Seja k uma constante real. Considere-se a relação*

$$x^2 + y^2 + k = 0, \tag{1.16}$$

a qual coincide com a relação dada no exemplo precedente quando se toma $k = -25$. Considere-se ainda a equação diferencial que também surgiu no exemplo precedente

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.17}$$

Comecemos por determinar qual é o declive da reta tangente ao gráfico desta curva em cada ponto de coordenadas (x, y). Pode-se obter uma expressão para dy/dx usando duas abordagens equivalentes:

(i) *derivando os dois membros de (1.16) em ordem a x, tendo sempre em conta que y depende de x (regra da derivação da função composta):*

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2 + k\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + \frac{dy^2}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + \frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = -xy^{-1};$$

(ii) *tendo em conta que a relação (1.16) é do tipo $G(x, y) = 0$ com $G(x, y) = x^2 + y^2 + k$ e que nesse caso se tem (derivada total da função implícita)*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial G}{\partial x}}{\dfrac{\partial G}{\partial y}}.$$

Neste caso concreto, resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -xy^{-1},$$

tal como obtido em (i).

Substituindo a expressão obtida para dy/dx na equação diferencial (1.15), obtém-se

$$x + y\left(-xy^{-1}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0,$$

*independentemente do valor de k. Assim, pode-se afirmar que a relação $x^2 + y^2 + k = 0$ **verifica formalmente** a equação (1.17) na medida em que nos pontos do plano em que a família de curvas $x^2+y^2+k = 0$ está definida, o declive da reta tangente ao gráfico da curva em cada ponto de coordenadas (x, y) é igual ao imposto pela equação diferencial.*

Poder-se-á deduzir então que $x^2 + y^2 + k = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial dada? A resposta é negativa. Na realidade, $x^2 + y^2 + k = 0$ parece ser uma solução implícita da equação diferencial pois verifica-a formalmente, mas é ainda necessário que defina pela menos uma função real que seja solução explícita da equação dada num determinado intervalo aberto I.

Vejamos, a relação $x^2+y^2+k=0$ permite definir duas funções que são potenciais soluções explícitas da equação (1.17), a saber,

$$g_1(x) = +\sqrt{-k-x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dg_1}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{-k-x^2}},$$

$$g_2(x) = -\sqrt{-k-x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dg_2}{dx} = \frac{x}{\sqrt{-k-x^2}}.$$

Ora, tem-se

$$D_{g_1} \cap D_{g_1'} = D_{g_2} \cap D_{g_2'} = \left\{x : x^2 < -k\right\},$$

donde se conclui que

$$I = \begin{cases} \left]-\sqrt{-k}, \sqrt{-k}\right[, & k < 0 \\ \varnothing, & k \geq 0 \end{cases}.$$

Conclusão: $x^2+y^2+k=0$, que verifica formalmente a equação diferencial

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0,$$

só é uma solução implícita desta equação se $k < 0$. Assim, considerando por exemplo $k = 25$, conclui-se que $x^2+y^2+25=0$ não é uma solução implícita desta equação diferencial em nenhum intervalo aberto da reta real (pela simples razão de que esta curva não existe em $\mathbb{R}^2$).

Do exemplo precedente pode-se concluir que ainda que determinada relação implícita entre as variáveis x e y verifique formalmente uma equação diferencial, tal não quer dizer que seja uma solução dessa mesma equação.

Qual é então a utilidade de averiguar se determinada relação verifica formalmente uma equação diferencial? Conforme veremos mais adiante, averiguar se determinada expressão verifica formalmente uma dada equação diferencial é útil, pois caso tal não suceda pode-se concluir imediatamente que a expressão em causa não é uma solução implícita da equação diferencial dada. Ou seja, a verificação formal pode ser vista como uma condição necessária, ainda que não suficiente, para que determinada relação entre as variáveis x e y seja uma solução da equação diferencial em estudo.

Do ponto de vista prático, este procedimento permitirá aferir se uma relação implícita obtida na sequência da resolução de uma equação diferencial de primeira ordem está ou não correta, pelo menos do ponto de vista formal (sem ter em conta qual é o intervalo I envolvido).

Exemplo 1.13 *Considere-se a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

Pode $x^3+y^2x=1$ ser uma solução desta equação diferencial?

Solução. *Da relação implícita proposta resulta (porquê?)*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2+y^2}{2xy},$$

donde se conclui que a resposta é negativa.

Problema Mostrar que a relação $xy^2 + y = 1$ verifica formalmente a seguinte equação diferencial recorrendo: (i) à derivada da função composta; e (ii) à derivada total da função implícita.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x}.$$

Considere-se agora a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \tag{1.18}$$

A função $f_0(x) = x^2$ é uma solução explícita desta equação diferencial para todo x real. São também soluções da equação diferencial (1.18), por exemplo, as funções

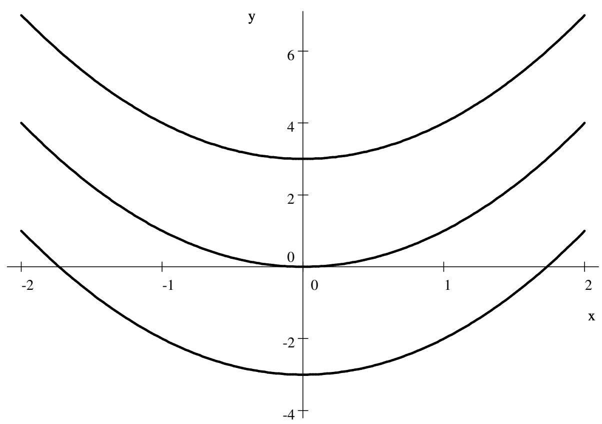
$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = x^2 + 2, \quad f_3(x) = x^2 + 3, \quad f_{\sqrt{7}}(x) = x^2 + \sqrt{7}.$$

De facto, para cada número real c, a função f_c definida para todo x real por

$$f_c(x) = x^2 + c \tag{1.19}$$

é uma solução da equação diferencial (1.18). Ou seja, a expressão (1.19) define uma família (infinita) de funções, uma para cada valor da constante real c, e toda a função desta família é uma solução de (1.18). A constante c designa-se **constante arbitrária**. A família de soluções assim definida escreve-se

$$y = x^2 + c. \tag{1.20}$$



Representação gráfica da família de parábolas $y = x^2 + c$; cada parábola é uma curva integral da equação diferencial (1.18)

Embora seja evidente que toda a função pertencente à família de soluções definida por (1.20) é uma solução de (1.18), não se mostrou que a família de soluções (1.20) contém todas as soluções de (1.18). Assim, podem em princípio existir outras funções que também sejam solução de (1.18), pelo que de momento não designaremos o conjunto (infinito) de soluções (1.20) como a "solução geral" da equação diferencial, mas apenas como "uma família de soluções" dessa equação. Voltaremos a este ponto mais adiante.

Exemplo 1.14 *Considere-se de novo a equação diferencial de primeira ordem (1.18). Esta equação diferencial pode ser interpretada como definindo o declive, $2x$, da reta tangente ao gráfico da curva $y = y(x)$ no ponto de coordenadas (x, y) para todo x real. Esta equação diferencial admite uma família de soluções da forma*

$$y = x^2 + c, \tag{1.21}$$

onde c é a constante arbitrária. A família de funções (1.21) corresponde geometricamente a uma família de parábolas. Para cada uma delas, o declive da reta tangente ao gráfico da parábola no ponto de coordenadas (x, y) obedece a (1.18). Estas parábolas designam-se ***curvas integrais*** *da equação diferencial (1.18).*

Problema Determinar curvas integrais da equação diferencial $dy/dx = \cos x$.
Resp.: $y = \operatorname{sen} x + k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$.

Problema Determinar curvas integrais da equação diferencial $dy/dx = \operatorname{senh} 2x$.
Resp.: $y = \frac{1}{2} \cosh 2x + k_2$, $k_2 \in \mathbb{R}$.

Exercícios sobre soluções de equações diferenciais

Exercício 1.2 *Mostrar que a função*

$$f(x) = x + 2e^{-x}$$

é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y = x + 1.$$

Exercício 1.3 *Mostrar que toda a função f pertencente à família de funções*

$$f_c(x) = 2 + ce^{-2x^2},$$

onde c é uma constante arbitrária, é uma solução da equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x.$$

Exercício 1.4 *Mostrar que toda a função g definida por*

$$g(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x},$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, é uma solução da equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0.$$

Exercício 1.5 *Determinar todos os valores da constante real m para os quais a função $f(x) = e^{mx}$ é solução da equação diferencial*

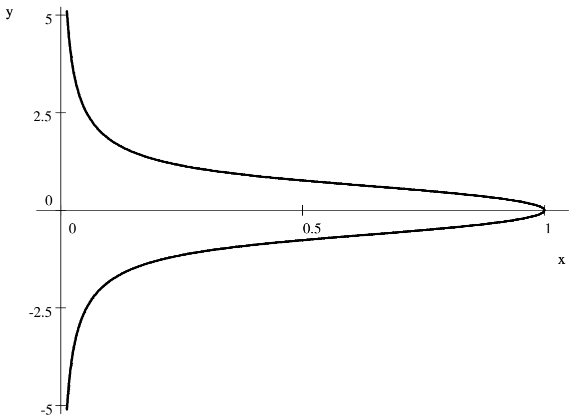
$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 12y = 0.$$

Nota: e^{2x} é uma solução da EDO (verificar).

Exercício 1.6 *Mostrar que* $x^3 + 3xy^2 = 1$ *é uma solução implícita da equação diferencial*

$$2xy\frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$$

no intervalo $I =]0,1[$.

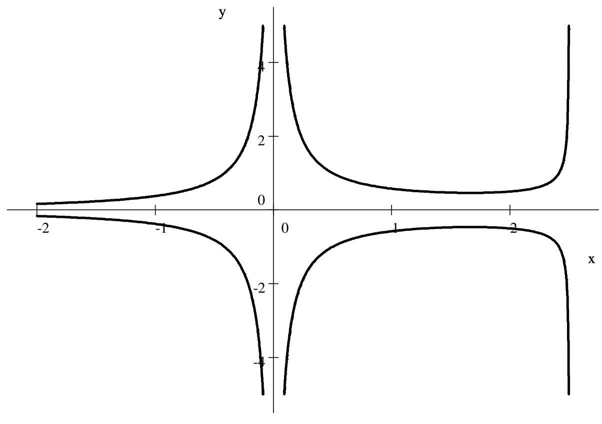


Representação gráfica da relação $x^3 + 3xy^2 = 1$ *(ver Exercício 1.6)*

Exercício 1.7 *Mostrar que* $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ *é uma solução implícita da equação diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^3$$

nos intervalos $]-\infty,0[$ *e* $]0,\frac{5}{2}[$.

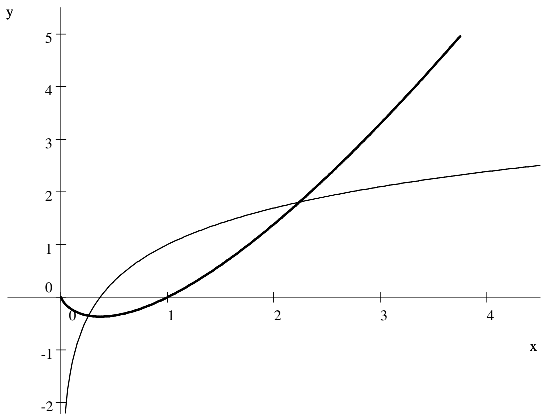


Representação gráfica da relação $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$*(ver Exercício 1.7)*

Exercício 1.8 *Mostrar que* $y = x\ln x$ *verifica formalmente a equação diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} = x + y,$$

mas não é uma solução explícita desta equação no intervalo $I =]-1,1[$.



Representação gráfica da função $y = x\ln x$ (a cheio) e da respectiva derivada (ver Exercício 1.8)

Exercício 1.9 *Mostrar que $y^2 + x = 1$ não é uma solução implícita da equação diferencial*

$$y\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$$

no intervalo $I =]0, 2[$, apesar de a verificar formalmente.

1.3 Problemas de valores iniciais, problemas de valores de fronteira e existência de soluções

1.3.1 Problemas de valores iniciais e problemas de valores de fronteira

Considere-se o problema que consiste em determinar a solução f da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x \tag{1.22}$$

tal que em $x = 1$ a solução f assume o valor 4 (note-se que se assume que a solução existe e é única). Este problema, que corresponde a determinar a curva que passa pelo ponto de coordenadas $(x, y) = (1, 4)$ cuja reta tangente ao seu gráfico tem declive x em cada ponto, pode ser escrito na forma abreviada

$$\frac{dy}{dx} = x, \quad y(1) = 4. \tag{1.23}$$

Verifica-se facilmente que a equação (1.22) admite uma família de soluções que é

$$y = \frac{1}{2}x^2 + c, \tag{1.24}$$

onde c é uma constante arbitrária, pelo que apenas se necessita de determinar o valor de c de forma a ter-se $y = 4$ quando $x = 1$. Substituindo $x = 1$ e $y = 4$ em (1.24) resulta

$$y(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = \frac{1}{2} + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{7}{2}.$$

Obtém-se, portanto, a solução (parábola)

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{2},$$

a qual verifica as duas condições expressas por (1.23).

Em aplicações envolvendo equações diferenciais de primeira ordem, ou de ordem mais elevada, os problemas mais frequentes são similares ao do exemplo precedente, já que envolvem uma equação diferencial e uma ou mais condições suplementares (tantas quantas a ordem da equação diferencial). Se todas as condições suplementares disserem respeito a um determinado valor da variável independente, diz-se que se está na presença de um **problema de valores iniciais** (PVI). Se as condições se referirem a dois valores distintos da variável independente, diz-se que se trata de um **problema de valores de fronteira** (PVF).

Exemplo 1.15 *Considere-se o problema que consiste em determinar a solução do problema*

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \tag{1.25}$$

Trata-se de um PVI que consiste em determinar a solução da equação diferencial $y'' - y = 0$ que assume o valor 1 em $x = 0$ e cuja primeira derivada tem valor 2 em $x = 0$. Conforme veremos, todas as soluções da equação diferencial dada podem-se escrever como

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x},$$

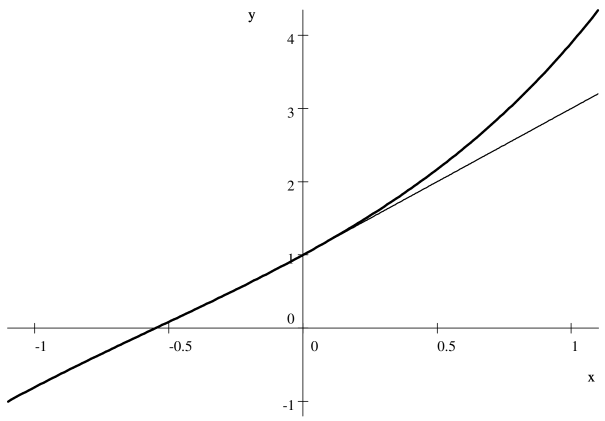
onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, pelo que $y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$. Ora,

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3/2 \\ c_2 = -1/2 \end{cases},$$

pelo que a solução deste PVI é

$$y(x) = \frac{3}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x},$$

cuja representação é feita no gráfico seguinte.



Representação gráfica da solução do PVI (1.25) e da recta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa $x = 0$ (cujo declive é igual a 2)

Exemplo 1.16 *Considere-se o problema que consiste em determinar a solução de*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 5. \tag{1.26}$$

Trata-se, neste caso, de um PVF. Conforme veremos, todas as soluções da equação diferencial dada são da forma $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$, *onde* c_1 *e* c_2 *são constantes arbitrárias. Assim,*

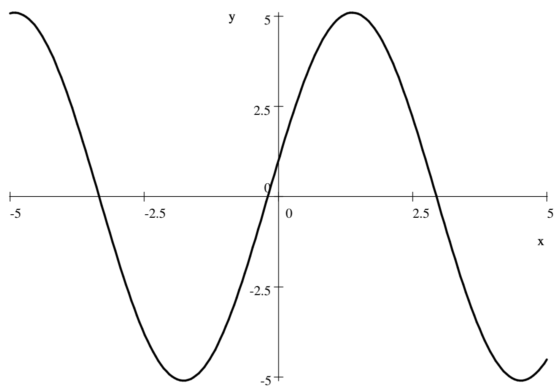
$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(\pi/2) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases}.$$

Portanto, a solução deste PVF é $y(x) = \cos x + 5 \operatorname{sen} x$. *No entanto, o PVF*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 5, \tag{1.27}$$

não tem solução pois as condições $y(0) = 1$ *e* $y(\pi) = 5$ *não são compatíveis com uma solução do tipo* $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(\pi) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_1 = -5 \end{cases}.$$



Representação gráfica da função $y = 5 \sin x + \cos x$, *solução do PVF (1.26)*

Por outro lado, o PVF

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(2\pi) = 2$$

tem uma infinidade de soluções uma vez que

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2\pi) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_1 = 2 \end{cases},$$

resultando $y(x) = 2 \cos x + k \operatorname{sen} x$, *onde* k *é uma constante real arbitrária.*

Este exemplo mostra que os PVFs podem ter solução única, mais do que uma solução, ou não ter solução.

Convém desde já notar que os PVIs têm uma estrutura rígida no que diz respeito às condições impostas, já que para uma equação diferencial de ordem n têm de ser impostas exatamente n condições para o mesmo valor da variável independente $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0, \quad \frac{dy}{dx}(x_0) = y_1, \quad \frac{d^2y}{dx^2}(x_0) = y_2, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{n-1}.$$

Tal não acontece nos PVFs. Por exemplo, pode-se ter

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(1) = 2;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0, \quad y(1) = 2; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(1) = 2.$$

É importante referir que quer se trate de um PVI quer de um PVF, as condições impostas nunca podem envolver derivadas de ordem igual ou superior à ordem da equação diferencial presente no problema em causa.

Problema Determinar uma solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad y(0) = 0.$$

Resp.: $y = x$.

Problema Determinar uma solução do PVF

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dx}(1) = 0.$$

Resp.: $y = 1$.

Vejamos agora algumas considerações sobre o **problema de valor inicial** para uma **equação diferencial de primeira ordem**.

Definição 1.8 *Considere-se a equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.28}$$

onde f é uma função contínua de x e y nalgum domínio[2] *D do plano xy. Seja ainda (x_0, y_0) um ponto do domínio D. O PVI associado a (1.28) consiste em determinar uma solução ϕ da equação diferencial (1.28), definida nalgum intervalo real contendo x_0, que satisfaça a condição inicial $\phi(x_0) = y_0$. Este PVI escreve-se habitualmente na forma*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Para o resolver deve-se determinar uma função ϕ que satisfaça não só a equação diferencial (1.28), mas também a condição inicial: tal função deve ter valor y_0 quando x toma o valor x_0. O método a usar para determinar ϕ depende do tipo de equação diferencial presente no problema, ou seja, da forma de $f(x, y)$.

[2] Um domínio é um conjunto aberto e conexo. Em termos simplistas, um domínio pode ser visto como o interior de uma curva fechada simples no plano.

Exemplo 1.17 *Determinar a solução do PVI*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(3) = 4,$$

sabendo que a equação diferencial admite uma família de soluções que pode ser escrita na forma

$$x^2 + y^2 = c^2. \tag{1.29}$$

Solução. *A condição $y(3) = 4$ significa que se pretende determinar a solução da equação diferencial dada tal que $y = 4$ em $x = 3$. Assim sendo, o par de valores $(x, y) = (3, 4)$ deve verificar a relação (1.29). Substituindo $x = 3$ e $y = 4$ em (1.29), obtém-se*

$$9 + 16 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 25.$$

Substituindo este valor de c^2 em (1.29), tem-se $x^2 + y^2 = 25$. Resolvendo em ordem a y, resulta

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}.$$

Deve-se escolher o sinal positivo para que $y = 4$ quando $x = 3$. Assim, a função f definida por

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad -5 < x < 5,$$

é uma solução do problema proposto e a respetiva solução escreve-se $y = \sqrt{25 - x^2}$.

1.3.2 Existência e unicidade de solução

No Exemplo 1.17 foi possível determinar uma solução do PVI em causa. Mas terão todos os PVIs e PVFs solução? Viu-se anteriormente que a resposta é negativa, uma vez que, por exemplo, o PVF

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 5,$$

não tem solução.

Surge, portanto, a questão da **existência** de soluções: dado um PVI ou um PVF, ele tem solução? Considere-se esta questão relativamente ao PVI genérico presente na Definição 1.8. Neste caso pode-se dar uma resposta inequívoca: todo PVI que satisfaça a Definição 1.8 tem pelo menos uma solução.

Coloca-se agora a questão da **unicidade**. Pode o referido problema ter mais do que uma solução? Considere-se o PVI

$$\frac{dy}{dx} = y^{1/3}, \quad y(0) = 0.$$

É fácil verificar que as funções f_1 e f_2 definidas, respetivamente, por

$$f_1(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}, & x \geq 0 \end{cases},$$

são ambas soluções do PVI. De facto, este problema tem uma infinidade de soluções. A resposta relativa à unicidade é clara: o PVI, conforme atrás definido, não tem necessariamente solução única. Para garantir unicidade torna-se necessário impor algumas condições adicionais. Estas condições são dadas pelo seguinte teorema.

Teorema 1.1 *(*Teorema de Existência e Unicidade*). Considere-se a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.30}$$

onde

1. *A função f é contínua num domínio D do plano xy;*
2. *A derivada parcial $\partial f/\partial y$ também é contínua em D.*

Seja (x_0, y_0) um ponto de D. Então a equação diferencial (1.30) admite uma e uma só solução ϕ num intervalo $|x - x_0| < h$, para h suficientemente pequeno, que verifica a condição

$$\phi(x_0) = y_0.$$

Este teorema estabelece que em determinadas condições o PVI

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1.31}$$

tem uma solução única que é válida num determinado intervalo em torno de x_0 (isto é, numa vizinhança de x_0 suficientemente pequena). No entanto, o teorema não indica qualquer método para determinar a solução do problema, apenas garante a existência de solução única se forem verificadas determinadas condições. No caso de alguma dessas condições não se cumprir, então nada se pode concluir.

Exemplo 1.18 *Considere-se o PVI*

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(1) = 3.$$

A ideia é aplicar o Teorema 1.1, começando por verificar as suas hipóteses. Neste caso

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y.$$

As duas funções f e $\partial f/\partial y$ são contínuas em qualquer domínio D do plano xy. A condição inicial $y(1) = 3$ implica que $x_0 = 1$ e $y_0 = 3$. Ora, o ponto $(x_0, y_0) = (1, 3)$ pertence a algum destes domínios D. Portanto, verificam-se as hipóteses do teorema, pelo que a conclusão é válida. Ou seja, existe uma e uma só solução ϕ da equação diferencial $dy/dx = x^2 + y^2$, definida num intervalo $|x - 1| < h$ em torno de $x_0 = 1$, que satisfaz a condição inicial, isto é, tal que $\phi(1) = 3$.

Exemplo 1.19 *Considere-se os PVIs*

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x^{1/3}}, \quad y(1) = 2;$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x^{1/3}}, \quad y(0) = 2;$
3. $\dfrac{dy}{dx} = xy^{1/3}, \quad y(2) = 0.$

Que se pode dizer em relação à existência e unicidade de solução destes PVIs?

Solução. *No caso dos problemas 1 e 2 tem-se*

$$f(x,y) = \frac{y}{x^{1/3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^{1/3}}.$$

Tanto f como $\partial f/\partial y$ são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, excepto nos pontos com abcissa x nula (isto é, ao longo do eixo dos yy). No problema 1, $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$. Ora, o quadrado de lado unitário centrado em $(1,2)$ não interseta o eixo dos yy e assim tanto f como $\partial f/\partial y$ verificam as hipóteses do Teorema 1.1 neste quadrado. O seu interior pode por isso ser considerado como o domínio D do Teorema 1.1 e o ponto $(1,2) \in D$. Portanto, o Teorema 1.1 permite concluir que o problema 1 tem uma e uma só solução definida numa vizinhança de $x_0 = 1$ suficientemente pequena.

Vejamos o que se passa no problema 2. Neste caso $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$. Neste ponto nem f nem $\partial f/\partial y$ são contínuas. Por outras palavras, o ponto de coordenadas $(x,y) = (0,2)$ não pertence a nenhum domínio D onde as condições do Teorema 1.1 sejam verificadas. Consequentemente, o Teorema 1.1 não permite concluir que o problema 2 tem uma e uma só solução na vizinhança do ponto $(0,2)$. Note-se que este teorema também não permite concluir que a solução não é única. Em suma, o Teorema 1.1 não permite obter nenhuma conclusão. Saliente-se ainda que uma vez que a função f não é contínua no ponto $(0,2)$, então o problema 2 não está de acordo com a Definição 1.8 apresentada na página 19, pelo que não se pode sequer concluir que o problema 2 tenha solução.

No caso do problema 3 tem-se

$$f(x,y) = xy^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{3}xy^{-2/3}.$$

Portanto, f é contínua em $\mathbb{R}^2$, pelo que o problema 3 obedece à Definição 1.8 e por isso tem garantidamente solução numa vizinhança do ponto de coordenadas $(x,y) = (2,0)$. No entanto, não se pode garantir que a solução seja única uma vez que $\partial f/\partial y$ não é contínua em nenhum domínio que contenha o ponto $(2,0)$ (porquê?).

Problema Relativamente aos PVIs,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}, \quad y(0) = 3,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}, \quad y(3) = 0,$$

averiguar se é possível concluir que têm solução única.

Resp.: Apenas para o segundo PVI podemos concluir que tem solução única.

Nota Atendendo ao resultado expresso no Teorema 1.1, quando noutros capítulos lidarmos com a solução de PVIs do tipo (1.31), qualquer referência à existência de solução única deverá ser entendida, à falta de um resultado mais forte, como algo que está garantido apenas numa vizinhança de x_0 suficientemente pequena. Conforme veremos, caso a equação diferencial envolvida no PVI seja linear, então a solução única é global, mas em geral tal não está garantido.

Exercícios sobre problemas de valores iniciais, problemas de valores de fronteira, e existência e unicidade de solução

Exercício 1.10 *Mostrar que a função* $f(x) = 4e^{2x} + 2e^{-3x}$ *é uma solução do problema de valores iniciais*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0, \quad y(0) = 6, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 2.$$

Averiguar se $h(x) = 2e^{2x} + 4e^{-3x}$ *também é uma solução deste PVI.*

Exercício 1.11 *Sabendo que toda a solução da equção diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12y = 0$$

pode ser escrita na forma $f(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-3x}$ *escolhendo adequadamente o valor das constantes* c_1 *e* c_2*, determinar a solução dos seguintes PVIs:*

$$(a) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12y = 0, \quad y(0) = 5, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 6;$$

$$(b) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12y = 0 \quad y(0) = -2, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 6.$$

Exercício 1.12 *Sabendo que toda a solução da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

pode ser escrita na forma $y = c_1x + c_2x^2$*, escolhendo* c_1 *e* c_2 *adequadamente, determinar a solução do PVF*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0, \quad y(2) = 0, \quad y(3) = 4.$$

Exercício 1.13 *Sabendo que toda a solução da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$$

pode ser escrita na forma $y = c_1 + c_2x^2$*, mostrar que o PVF*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(-1) = 1$$

não tem solução única.

Exercício 1.14 *Sabendo que toda a solução da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

pode ser escrita na forma $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$*, mostrar que o problema de valores iniciais*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 5$$

tem solução $f(x) = 5 \operatorname{sen} x + \cos x$*, mas que o PVF*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(2\pi) = 5$$

não tem solução.

Exercício 1.15 *Aplicar o Teorema 1.1 (ver página 21) para mostrar que cada um dos seguintes PVIs tem uma e uma só solução definida num intervalo suficientemente pequeno,* $|x-1| < h$*, em torno de* $x_0 = 1$*:*

$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = x^2 \operatorname{sen} y, \quad y(1) = -2; \qquad (b) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x-2}, \quad y(1) = 0.$$

Exercício 1.16 *Considere-se o PVI*

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y, \quad y(2) = 5,$$

onde $P(x)$ *e* $Q(x)$ *são polinómios de terceiro grau em* x*. Este problema tem solução única num intervalo* $|x-2| < h$*, em torno de* $x_0 = 2$*? Porquê?*

1.4 Soluções dos exercícios do Capítulo 1

1.2. (a) EDO, 1^a ordem, não linear; (b) EDO, 4^a ordem, linear;

(c) EDP, 2^a ordem; (d) EDO, 1^a ordem, não linear

(e) EDO, 2^a ordem, não linear; (f) EDO, 1^a ordem, linear;

(g) EDO, 1^a ordem, não linear; (h) EDO, 1^a ordem, não linear;

(i) EDP, 4^a ordem; (j) EDO, 1^a ordem, não linear se $y = y(x)$, mas linear se $x = x(y)$.

1.5. $m_1 = -2$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$.

1.10. Não verifica, pois $h'(0) = -8 \neq 2$.

1.11. (a) $y = 3e^{4x} + 2e^{-3x}$; (b) $y = -2.0e^{-3x}$.

1.12. $y = -\frac{8}{3}x + \frac{4}{3}x^2$.

1.13. A solução é $y = 1 + c\left(x^2 - 1\right)$.

1.16. Sim. O Teorema de Existência e Unicidade é aplicável. A função $f(x, y) = P(x)y^2 + Q(x)y$ é contínua em $D = \mathbb{R}^2$, o mesmo sucedendo com $\partial f / \partial y = 2P(x)y + Q(x)$. Finalmente, o ponto $(x_0, y_0) = (2, 5)$ pertence ao domínio D.

Capítulo 2

Resolução analítica de equações diferenciais de primeira ordem

2.1 Equações diferenciais exatas

As equações diferenciais de primeira ordem que estudaremos podem ser representadas quer na "**forma normal**"

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2.1}$$

quer como

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{2.2}$$

a qual podemos designar como "**forma diferencial**".

Exemplo 2.1 *A equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - 2y^2}$$

está escrita na forma (2.1). Pode-se também representá-la na forma (2.2), ou seja,

$$\left(x^2 + y^2\right)\, dx + \left(2y^2 - x^2\right)\, dy = 0.$$

De igual modo, a equação diferencial

$$(\cos x + y)\, dx + (x + 2y)\, dy = 0$$

pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x + y}{x + 2y}.$$

Note-se que na forma (2.1) é claro que x é a variável independente e y a variável dependente, isto é, a função $y(x)$ é a incógnita do problema. O mesmo não se passa quando a equação diferencial é expressa na forma (2.2). Em todo caso, assumiremos que se nada for dito em contrário x é a variável independente e y a variável dependente.

Problema Escrever a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x-y}$$

na forma: i) $dx/dy = g(x, y)$; ii) $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$.

Problema Escrever a equação diferencial

$$x\, dx + y\, dy = 0$$

na forma: i) $dy/dx = f(x, y)$; ii) $dx/dy = h(x, y)$.

Introduzimos agora o conceito de diferencial total de uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, o qual será essencial na definição do primeiro tipo de equações diferenciais de primeira ordem que abordaremos: as equações diferenciais exatas.

Definição 2.1 *Seja F uma função de duas variáveis reais que possui derivadas parciais contínuas num domínio D de $\mathbb{R}^2$. O* ***diferencial total*** *dF da função F é definido pela relação*

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\, dy \tag{2.3}$$

para todo $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.2 *Seja $F(x, y)$ a função de duas variáveis definida por*

$$F(x, y) = xy^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2xy,$$

tendo-se para o diferencial total de F, por aplicação de (2.3),

$$dF(x, y) = y^2\, dx + 2xy\, dy$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.3 *Seja $G(x, y)$ a função de duas variáveis definida por*

$$G(x, y) = xy^2 + 2x^3 y, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então,

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = y^2 + 6x^2 y, \quad \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} = 2xy + 2x^3,$$

tendo-se, por aplicação de (2.3),

$$dG(x, y) = \left(y^2 + 6x^2 y\right)\, dx + \left(2xy + 2x^3\right)\, dy$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Problema Determinar o diferencial total da função $H(x, y) = \cos xy$.
Resp.: $dH = -y \operatorname{sen} xy\, dx - x \operatorname{sen} xy\, dy$.

Definição 2.2 *A expressão*

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy \tag{2.4}$$

designa-se ***uma diferencial exata*** *num domínio D se existe uma função F de duas variáveis tal que a expressão (2.4) é igual ao diferencial total de F para todo $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Ou seja, atendendo às definições precedentes, conclui-se que a expressão (2.4) é uma diferencial exata em D se existir uma função F tal que*

$$dF(x, y) \equiv \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\, dy = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

para todo $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. De notar que nestas condições tem-se

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad e \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

para todo $(x, y) \in D$.

Exemplo 2.4 *A expressão $y^2\, dx + 2xy\, dy$ é uma diferencial exata pois corresponde ao diferencial total da função xy^2 conforme se viu no Exemplo 2.2.*

Exemplo 2.5 *A expressão $(y^2 + 6x^2 y)\, dx + (2xy + 2x^3)\, dy$ é uma diferencial exata pois corresponde ao diferencial total da função $xy^2 + 2x^3 y$ (ver Exemplo 2.3).*

Estamos agora em condições de definir o conceito de equação diferencial exata.

Definição 2.3 *Se $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ é uma diferencial exata em $D \subset \mathbb{R}^2$, então a equação diferencial*

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{2.5}$$

designa-se uma ***equação diferencial exata****.*

Note-se desde já que nestas condições existe, por definição de diferencial exata, uma função $F(x, y)$ tal que

$$dF(x, y) = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

e, portanto, pode-se escrever

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dF(x, y) = 0.$$

Este resultado será, conforme veremos em seguida, o ponto de partida para a determinação de famílias de soluções de equações diferenciais exatas.

Exemplo 2.6 *A equação diferencial*

$$y^2\, dx + 2xy\, dy = 0 \tag{2.6}$$

é uma equação diferencial exata em $\mathbb{R}^2$.

Solução. *Tal resulta do facto de $y^2\, dx + 2xy\, dy$ ser uma diferencial exata em $\mathbb{R}^2$ conforme se viu no Exemplo 2.4.*

Exemplo 2.7 *A equação diferencial*

$$\left(y^2 + 6x^2 y\right)\, dx + \left(2xy + 2x^3\right)\, dy = 0$$

é uma equação diferencial exata em $\mathbb{R}^2$*.*

Solução. *Novamente, tal resulta do facto de* $(y^2 + 6x^2y)\,dx + (2xy + 2x^3)\,dy$ *ser uma diferencial exata em* $\mathbb{R}^2$ *(ver Exemplo 2.5).*

Exemplo 2.8 *Considere-se agora a equação diferencial que se obtém dividindo ambos os membros da equação diferencial exata (2.6) por* y*, isto é,*

$$y\,dx + 2x\,dy = 0.$$

Será que esta equação diferencial é exata?

Solução. *Neste caso a resposta é negativa. O objetivo é averiguar se existe uma função* $F(x, y)$*, definida nalgum domínio de* $\mathbb{R}^2$*, tal que* $dF(x, y) = y\,dx + 2x\,dy$*, ou seja*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y \tag{2.7}$$

e

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2x. \tag{2.8}$$

Se tal função existir, então de (2.7) resulta

$$F(x,y) = \int y\,\partial x = xy + \phi(y),$$

onde ϕ *só depende da variável* y*. Substituindo a expressão agora obtida para* $F(x, y)$ *em (2.8) resulta*

$$\frac{\partial\left[xy + \phi(y)\right]}{\partial y} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dy} = x.$$

Ora, ϕ *não pode depender de* x*, pelo que* $d\phi/dy$ *também não pode depender de* x*, contradizendo o resultado obtido:* $d\phi/dy = x$*. Chegamos assim a um absurdo que resultou do facto de termos suposto que existe uma função* $F(x, y)$ *tal que* $dF(x, y) = y\,dx + 2x\,dy$*. Conclui-se portanto, por redução ao absurdo, que tal função não existe e que consequentemente a equação diferencial dada não é exata.*

Problema Mostrar que a equação diferencial que se obtém multiplicando ambos os membros da equação diferencial exata (2.6) por y, isto é,

$$y^3\,dx + 2xy^2\,dy = 0$$

não é exata.

Exemplo 2.9 *A equação diferencial*

$$(2x\cos y + 1)\, dx + \left(2 - x^2 \operatorname{sen} y\right)\, dy = 0 \tag{2.9}$$

é uma equação diferencial exata em $\mathbb{R}^2$*.*

Solução. *De facto, existe pelo menos função $F(x,y)$, definida em $\mathbb{R}^2$, tal que*

$$dF(x,y) = (2x\cos y + 1)\ dx + \left(2 - x^2 \operatorname{sen} y\right)\ dy. \tag{2.10}$$

Tal função obedece necessariamente ao sistema de equações

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 1, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2 - x^2 \operatorname{sen} y,$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x + g(y) \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2 - x^2 \operatorname{sen} y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x + g(y) \\ \dfrac{\partial\left[x^2\cos y + x + g(y)\right]}{\partial y} = 2 - x^2 \operatorname{sen} y \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x + g(y) \\ -x^2 \operatorname{sen} y + \dfrac{dg}{dy} = 2 - x^2 \operatorname{sen} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x + g(y) \\ \dfrac{dg}{dy} = 2 \end{cases},$$

isto é,

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x + g(y) \\ g(y) = 2y + c \end{cases} \Rightarrow \quad F(x,y) = x^2\cos y + x + 2y + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. De notar que se diferenciarmos a expressão agora obtida para $F(x,y)$ obtemos imediatamente a expressão (2.10), confirmando que o resultado obtido está correto.

Conclui-se então que existe uma infinidade de funções definidas em $\mathbb{R}^2$ cujo diferencial total é igual a $(2x\cos y + 1)\, dx + (2 - x^2 \operatorname{sen} y)\, dy$, pelo que a equação diferencial (2.9) é exata.

Decorre do exemplo precedente que averiguar se uma expressão do tipo $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy$ é uma diferencial exata pode ser um processo algo moroso, dado que obriga a indagar se existe $F(x,y)$ tal que $dF(x,y) = M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy$. Seria desejável dispor de um critério, envolvendo unicamente as funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$, que permitisse averiguar de forma direta e simples se uma equação diferencial de primeira ordem é (ou não) exata. Tal critério é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 2.1 *Considere-se a equação diferencial*

$$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0, \tag{2.11}$$

onde $M(x,y)$ e $N(x,y)$ têm primeiras derivadas parciais contínuas em todos os pontos (x,y) de um domínio retangular $D \subset \mathbb{R}^2$. Nestas condições:

1. *Se a equação diferencial (2.11) é exata em D, então*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D; \tag{2.12}$$

2. Reciprocamente, se

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D,$$

então a equação diferencial (2.11) é exata em D.

Em resumo,

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \text{ é exata em } D \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Demonstração Ponto 1. Se a equação diferencial (2.12) é exata em D, então $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ é uma diferencial exata em D. Existe por isso uma função $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

para todo $(x,y) \in D$. Então,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x,y) \in D$. Atendendo ao facto de, por hipótese, as primeiras derivadas parciais de M e N serem contínuas, podemos aplicar o Teorema de Schwarz[1],

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad \forall (x,y) \in D,$$

resultando

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D,$$

conforme pretendido.

Ponto 2. Neste caso consideramos como hipótese

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x,y) \in D$ e pretendemos mostrar que $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é exata em D. Isto quer dizer que temos de provar que existe uma função F tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

para todo $(x,y) \in D$. Atendendo a que F deve verificar as duas condições precedentes, podemos escolher qualquer uma delas e obter uma expressão para F primitivando adequadamente. Por exemplo,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = \int M(x,y)\,\partial x + \phi(y),$$

[1] O Teorema de Schwarz diz que se uma função de duas variáveis $g(x,y)$ é tal que g, g_x, g_y, g_{xy} e g_{yx} são contínuas num domínio D, então $g_{xy} = g_{yx}$ em D.

onde $\phi(y)$ é uma função arbitrária que só depende de y. Para obter $F(x,y)$ resta-nos determinar $\phi(y)$ substituindo a expressão de $F(x,y)$ na outra condição, ou seja,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,\partial x + \phi(y)\right] = N(x,y),$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x + \frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x.$$

Uma vez que ϕ só depende de y, o mesmo deve acontecer com a sua derivada, pelo que se deverá ter

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x\right] = 0$$

para todo $(x,y) \in D$. De facto, a equação precedente é equivalente a

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x\right] = 0$$

ou

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,\partial x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0$$

para todo $(x,y) \in D$. Uma vez que (2.12) é válida por hipótese, a equação precedente converte-se numa identidade. Podemos por isso escrever

$$\phi(y) = \int\left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,\partial x\right]\partial y,$$

resultando

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\partial x + \phi(y) = \int M(x,y)\,\partial x + \int\left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,\partial x\right]\partial y.$$

(Sugestão: realizar a mesma demonstração começando por primitivar a expressão

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Os passos subsequentes são semelhantes aos acima expostos). ■

O teorema precedente dá-nos um critério para decidir se determinada equação diferencial do tipo (2.11) é ou não exata. De facto, se a condição (2.12) for verificada então a equação diferencial (2.11) é exata, caso contrário ela não é exata. Por outras palavras, o teorema diz-nos que uma condição necessária e suficiente para que a equação diferencial (2.11) seja exata em D é que a condição (2.12) seja válida para todo $(x,y) \in D$.

A demonstração da segunda parte do teorema sugere qual o procedimento para obter $F(x,y)$ a partir de $M(x,y)$ e $N(x,y)$. O procedimento é relativamente simples e direto conforme ilustra o seguinte exemplo (ver também Exemplo 2.9).

Exemplo 2.10 *Considere-se novamente a equação diferencial (2.6)*

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0.$$

Vimos anteriormente que a equação diferencial é exata dado $y^2\,dx + 2xy\,dy$ ser a diferencial exata da função $F(x, y) = xy^2$. Em todo o caso, uma vez que em geral a função $F(x, y)$ não é conhecida à priori, apliquemos o critério que figura no Teorema 2.1 para averiguar se uma equação diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ é exata.

Solução. *Tem-se,*

$$M(x,y) = y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y,$$

$$N(x,y) = 2xy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y.$$

Portanto, o critério (2.12) verifica-se pois

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, confirmando-se assim que a equação diferencial é exata em $\mathbb{R}^2$. Podemos então determinar uma função $F(x, y)$ tal que

$$dF(x,y) = y^2\,dx + 2xy\,dy$$

(uma vez que está garantido que tal função existe), isto é

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = y^2, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2xy.$$

Tem-se

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y) = y^2x + \phi(y).$$

Substituindo este resultado na segunda equação, obtém-se

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2xy \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[y^2x + \phi(y)\right] = 2xy,$$

ou seja,

$$2xy + \frac{d\phi(y)}{dy} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi(y)}{dy} = 0,$$

pelo que $\phi(y) = k$, onde k é uma constante arbitrária. Tem-se então

$$F(x,y) = xy^2 + k.$$

Sugestão: obter o mesmo resultado começando por primitivar a equação

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2xy.$$

Problema Considerar a equação diferencial

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Mostrar que a equação diferencial é exata e determinar $F(x,y)$ tal que $dF(x,y) = x\,dx + y\,dy$.
Resp.: $F = x^2/2 + y^2/2 + c$.

Exemplo 2.11 *A aplicação do critério (2.12) permite agora mostrar de forma simples que a equação diferencial*

$$y\,dx + 2x\,dy = 0$$

não é exata.

Solução. *Tem-se $M(x,y) = y$ e $N(x,y) = 2x$, pelo que*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 \quad e \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2,$$

ou seja, a condição (2.12) não é verificada em nenhum domínio retangular de $\mathbb{R}^2$ e consequentemente a equação diferencial não é exata.

Problema *Averiguar se a equação diferencial $y\,dx - x\,dy = 0$ é exata.*
Resp.: A equação diferencial é exata.

Dado que já temos uma forma de testar se determinada equação diferencial é ou não exata, o passo seguinte consiste em estabelecer um método para determinar (famílias de) soluções de equações diferenciais exatas. Conforme vimos, se a equação diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é exata num domínio retangular $D \subset \mathbb{R}^2$, então existe uma função $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

para todo $(x,y) \in D$. Assim, a equação diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy = 0,$$

ou seja, atendendo à definição de diferencial total de uma função (2.3),

$$dF(x,y) = 0.$$

Pode-se então concluir que a relação $F(x,y) = c$, onde c é uma constante arbitrária: (1) verifica formalmente a equação diferencial dada qualquer que seja o valor da constante arbitrária c; (2) define uma família de curvas que são solução dessa equação diferencial. Nestas condições diz-se que

$$F(x,y) = c$$

define uma **família de soluções da equação diferencial exata** dada.

Exemplo 2.12 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial exata*

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0.$$

Solução. *Vimos anteriormente que se tem*

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(xy^2) = 0,$$

pelo que $F(x,y) = xy^2$. *Assim, a relação (implícita)*

$$xy^2 = c,$$

onde c *é uma constante arbitrária, define uma família de soluções da equação diferencial dada.*

Nota: vimos com mais generalidade que neste caso $F(x,y) = xy^2 + c_1$, *onde* c_1 *é uma constante arbitrária. Assim, a família de soluções também pode ser dada por*

$$xy^2 + c_1 = c_2,$$

onde c_2 *é uma constante arbitrária, pelo que se teria*

$$xy^2 = c,$$

onde $c = c_2 - c_1$ *é uma constante arbitrária, obtendo–se desta forma o resultado anterior. Na prática, para simplificar o cálculo, e sem que tal implique perda de generalidade, é usual tomar-se* $c_1 = 0$ *aquando da determinação de* $F(x,y)$.

Exemplo 2.13 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\left(3x^2 + 4xy\right)\,dx + (2x^2 + 2y)\,dy = 0$$

e expressá-la na forma $G(x,y) = 0$.

Solução. *Primeiro tem de se averiguar se se trata de uma equação diferencial exata. Sendo a equação dada do tipo* $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, *resulta*

$$M(x,y) = 3x^2 + 4xy, \quad N(x,y) = 2x^2 + 2y.$$

O critério (2.12) verifica-se pois

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 4xy\right) = 4x, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2 + 2y\right) = 4x.$$

Portanto, a equação diferencial é exata em $\mathbb{R}^2$. *Determinamos agora* $F(x,y)$ *tal que*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2 + 4xy, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2 + 2y.$$

Obtém-se,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2x^2 + 2y \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y) = \int \left(2x^2 + 2y\right)\,\partial y = 2x^2y + y^2 + \varphi(x),$$

pelo que $\varphi(x)$ *deve obedecer a*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2x^2y + y^2 + \varphi(x)\right] = 3x^2 + 4xy,$$

resultando

$$4xy + \frac{d\varphi(x)}{dx} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = x^3 + k,$$

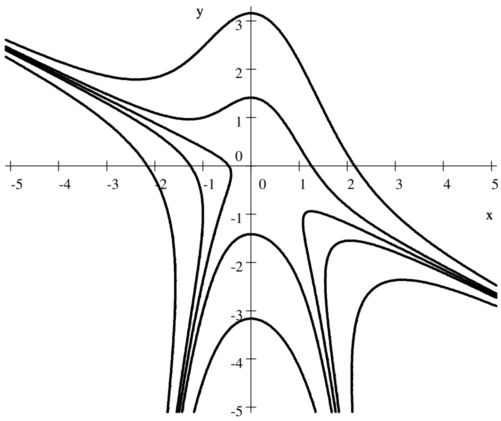
onde k *é uma constante arbitrária. Temos então*

$$F(x,y) = 2x^2y + y^2 + \varphi(x) = 2x^2y + y^2 + x^3 + k.$$

Portanto, uma família de soluções da equação diferencial dada é $F(x,y) = c$*, isto é (tomando* $k = 0$*),*

$$2x^2y + y^2 + x^3 = c,$$

onde c *é uma constante arbitrária. Esta equação pode ser expressa na forma* $G(x,y) = 0$*, bastando para esse efeito tomar, por exemplo,* $G(x,y) = 2x^2y + y^2 + x^3 - c$ *(porquê?).*



Representação gráfica da famíla de curvas $2x^2y + y^2 + x^3 = c$

Verifiquemos que o resultado obtido está correto, mostrando que a relação $2x^2y + y^2 + x^3 = c$ *(ou em alternativa* $2x^2y + y^2 + x^3 - c = 0$*) verifica formalmente a equação diferencial dada. De facto, tem-se*

$$d\left(2x^2y + y^2 + x^3\right) = d\left(c\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(3x^2 + 4xy\right)\,dx + \left(2x^2 + 2y\right)\,dy = 0,$$

que mais não é do que a equação diferencial proposta, o que mostra o resultado pretendido. Em alternativa, podíamos ter considerado

$$d\left(2x^2y + y^2 + x^3 - c\right) = d\left(0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(3x^2 + 4xy\right)\,dx + \left(2x^2 + 2y\right)\,dy = 0,$$

obtendo-se o mesmo resultado.

Problema Determinar uma família de soluções da equação diferencial

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

expressar a respetiva família de soluções na forma $F(x,y) = c$ e $G(x,y) = 0$, e mostrar que, em qualquer dos casos, a família de soluções obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.

Resp.: $x^2 + y^2 = c$ (ou equação equivalente); $x^2 + y^2 - c = 0$ (ou equação equivalente); tanto $d\left(x^2 + y^2\right) = d(c)$ como $d\left(x^2 + y^2 - c\right) = d(0)$ são equivalentes a $x\,dx + y\,dy = 0$.

Exemplo 2.14 *Sabendo que o PVI*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x\cos y + 3x^2 y}{x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y}, \quad y(0) = \frac{3}{4} \tag{2.13}$$

admite solução única da forma $G(x,y) = 0$ na vizinhança do ponto de coordenadas $(0, 3/4)$, determinar uma expressão para $G(x,y)$.

Solução. *Começamos por verificar se a equação diferencial é exata. Mostra-se facilmente que a equação dada pode ser escrita na forma diferencial*

$$\left(2x\cos y + 3x^2 y\right)\,dx + \left(x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y\right)\,dy = 0. \tag{2.14}$$

Tem-se

$$M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2 y, \quad N(x,y) = x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y,$$

resultando

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2x \operatorname{sen} y + 3x^2, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 2x \operatorname{sen} y,$$

pelo que o critério (2.12) verifica-se e a equação diferencial é exata para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Determinamos agora $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2 y, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y,$$

sabendo de antemão que uma família de soluções da equação diferencial dada é $F(x,y) = c$. Tem-se

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 3x^2 y \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} F(x,y) = x^2 \cos y + x^3 y + \gamma(y) \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y \end{array}\right.,$$

ou, equivalentemente,

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y) = x^2 \cos y + x^3 y + \gamma(y) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left[x^2 \cos y + x^3 y + \gamma(y)\right] = x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F(x,y) = x^2 \cos y + x^3 y + \gamma(y) \\ \dfrac{d\gamma(y)}{dy} = -y \end{array}\right.,$$

pelo que

$$\gamma(y) = -\frac{1}{2}y^2 + k \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = x^2 \cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2 + k.$$

Uma família de soluções da equação diferencial dada é então

$$x^2 \cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2 = c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Da infinidade de curvas integrais definidas por esta última relação pretende-se reter apenas a que passa no ponto de coordenadas $(0,3/4)$, ou seja, a que verifica a condição $y(0)=3/4$. Assim,

$$\begin{cases} x^2\cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2 = c, \\ y(0)=3/4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c = x^2\cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2\bigg|_{x=0,\ y=3/4} = -\frac{9}{32},$$

obtendo-se a solução

$$x^2\cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2 = -\frac{9}{32} \quad \Rightarrow \quad x^2\cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{9}{32} = 0,$$

pelo que

$$G(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{9}{32}.$$

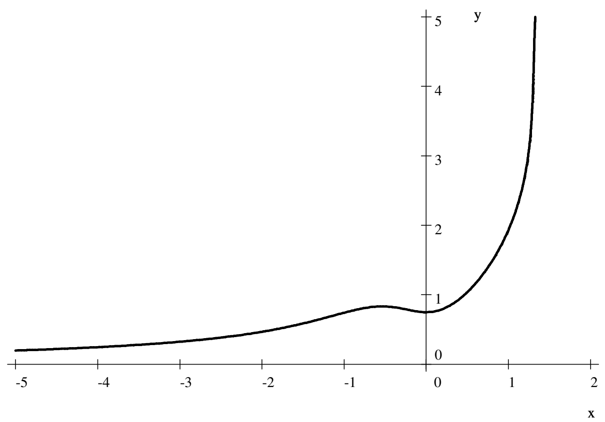
Podia-se ainda ter escrito a solução na forma

$$32x^2\cos y + 32x^3 y - 16y^2 + 9 = 0,$$

tendo-se nesse caso

$$G(x,y) = 32x^2\cos y + 32x^3 y - 16y^2 + 9. \tag{2.15}$$

Portanto, a função $G(x,y)$ está definida a menos de um fator multiplicativo que pode ser qualquer constante não nula. A figura seguinte ilustra a solução obtida para o PVI (2.13).



Representação gráfica da solução do PVI (2.13)

De novo, é conveniente averiguar se a expressão obtida verifica formalmente a equação diferencial dada, bem como a condição suplementar. Tem-se, recorrendo, por exemplo a (2.15),

$$d\left(32x^2\cos y + 32x^3 y - 16y^2 + 9\right) = d\,(0)\,,$$

resultando

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(32x^2\cos y + 32x^3 y - 16y^2 + 9\right)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(32x^2\cos y + 32x^3 y - 16y^2 + 9\right)\,dy = 0$$

ou

$$\left(64x\cos y + 96x^2 y\right)\, dx + \left(-64x^2 \operatorname{sen} y + 96x^3 - 32y\right)\, dy = 0.$$

Dividindo ambos os membros da equação anterior por 32, *obtém-se a equação diferencial proposta na sua forma diferencial (2.14). Resta verificar se o ponto* $(x, y) = (0, 3/4)$ *pertence à curva integral* $32x^2\cos y + 32x^3 y - 16y^2 + 9 = 0$. *É fácil mostrar que substituindo* $x = 0$ *e* $y = 3/4$ *na equação precedente resulta uma identidade, conforme requerido.*

Exemplo 2.15 *Um ponto material* P *descreve um movimento no plano* xy *cujas coordenadas polares* (θ, ρ) *verificam a equação diferencial*

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta\right), \quad -\pi/2 < \theta < 3\pi/2.$$

Sabe-se ainda que a trajetória de P *passa pelo ponto de coordenadas* $(\theta, \rho) = (-\pi/2, 1)$. *Determinar a equação polar da respetiva trajetória.*

Solução. *Trata-se de um PVI que tem solução única na vizinhança do ponto* P *e cuja equação diferencial pode ser escrita na forma diferencial* $M(\theta, \rho)\, d\theta + N(\theta, \rho)\, d\rho = 0$, *tendo-se*

$$4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen} x\right)\, d\theta - d\rho = 0, \quad \rho(-\pi/2) = 1, \tag{2.16}$$

ou seja $M(\theta, \rho) = 4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta\right)$ *e* $N(\theta, \rho) = -1$. *É fácil constatar que esta equação diferencial é exata (porquê?). Então, existe uma função* $F(\theta, \rho)$ *tal que* $dF(\theta, \rho) = 4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta\right)\, d\theta - d\rho$, *escrevendo-se uma família de soluções da equação diferencial*

$$F(\theta, \rho) = c.$$

Tem-se,

$$\frac{\partial F(\theta, \rho)}{\partial\theta} = M(\theta, \rho) = 4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta\right), \quad \frac{\partial F(\theta, \rho)}{\partial\rho} = N(\theta, \rho) = -1,$$

resultando da segunda equação $F(\theta, \rho) = -\rho + \omega(\theta)$, *pelo que*

$$\frac{\partial\left[-\rho + \omega(\theta)\right]}{\partial\theta} = 4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{d\theta} = 4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta\right),$$

isto é

$$\omega(\theta) = 4\theta\cos\theta + k.$$

Assim,

$$F(\theta, \rho) = 4\theta\cos\theta + k - \rho,$$

sendo uma família de soluções da equação diferencial proposta (tomando $k = 0$*)*

$$4\theta\cos\theta - \rho = c.$$

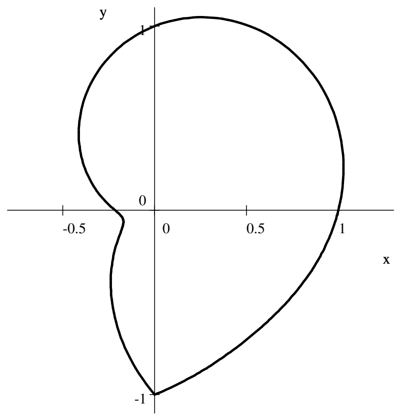
Resta realizar o cálculo da constante c. *Tem-se,*

$$c = 4\theta\cos\theta - \rho\big|_{\theta=-\pi/2,\ \rho=1} = -1,$$

pelo que a trajetória de P é dada por

$$4\theta\cos\theta - \rho = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{1}{4}\theta\cos\theta + 1, \quad -\pi/2 < \theta < 3\pi/2.$$

Neste caso a solução é explícita, sendo o respetivo gráfico



Representação gráfica da função $\rho = \frac{1}{4}\theta\cos\theta + 1$, solução do PVI (2.16)

Exercícios sobre equações diferencias exatas

Exercício 2.1 *Averiguar quais das seguintes equações diferenciais são exatas e determinar, para as que o forem, uma família de soluções. Mostrar ainda que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $(3x + 2y)\, dx + (2x + y)\, dy = 0$;

(b) $(2xy + 1)\, dx + (x^2 + 4y)\, dy = 0$;

(c) $\left(\theta^2 + 1\right)\cos r\, dr + 2\theta \operatorname{sen} r\, d\theta = 0$;

(d) $\left(\dfrac{2s-1}{t}\right) ds + \left(\dfrac{s - s^2}{t^2}\right) dt = 0.$

Exercício 2.2 *Determinar a solução dos seguintes PVIs. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI dado.*

(a) $(2xy - 3)\, dx + (x^2 + 4y)\, dy = 0, \quad y(1) = 2$;

(b) $\left(ye^x + 2e^x + y^2\right)\, dx + (e^x + 2xy)\, dy = 0, \quad y(0) = 6.$

Exercício 2.3 *Para cada uma das equações diferenciais seguintes determinar o valor da constante A de forma a serem exatas e determinar uma família de soluções das equações diferenciais resultantes. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $\left(x^2 + 3xy\right)\, dx + (Ax^2 + 4y)\, dy = 0$;

(b) $\left(\dfrac{Ay}{x^3}+\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)dy=0.$

Exercício 2.4 *Para cada uma das equações diferenciais seguintes determinar a função mais geral $f(x,y)$ de forma a que sejam equações diferenciais exatas.*

(a) $\left(x^3+xy^2\right)dx+f(x,y)\,dy=0;$

(b) $f(x,y)\,dx+\left(2ye^x+y^2e^{3x}\right)dy=0.$

2.2 Equações diferenciais exatas e fatores integrantes

Conforme vimos anteriormente, a equação diferencial

$$y\,dx+2x\,dy=0 \tag{2.17}$$

não é exata. No entanto, se multiplicarmos ambos os membros desta equação por y, a equação diferencial resultante

$$y^2\,dx+2xy\,dy=0$$

é exata, conforme também já vimos. Dizemos então que y é um fator integrante da equação diferencial (2.17).

Problema Tomando por base o exemplo acima, indicar um fator integrante para a equação diferencial

$$y^3\,dx+2xy^2\,dy=0.$$

Resp.: Qualquer expressão do tipo ky^{-1} com $k\in R\backslash\{0\}$.

Em geral, tem-se a seguinte definição.

Definição 2.4 *Se a equação diferencial*

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \tag{2.18}$$

não é exata num domínio D de $\mathbb{R}^2$, mas a equação diferencial

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx+\mu(x,y)N(x,y)\,dy=0$$

é exata em D, então $\mu(x,y)$ designa-se ***um fator integrante*** *da equação diferencial (2.18).*

Desta definição decorre que se $\mu(x,y)$ é um fator integrante de determinada equação diferencial, então $k\mu(x,y)$, onde k é uma constante não nula, também é um fator integrante dessa mesma equação diferencial.

Exemplo 2.16 *Considere-se a equação diferencial*

$$\left(3y+4xy^2\right)dx+(2x+3x^2y)\,dy=0. \tag{2.19}$$

A equação diferencial é do tipo $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ *com*

$$M(x,y) = 3y + 4xy^2 \quad e \quad N(x,y) = 2x + 3x^2y,$$

pelo que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3 + 8xy \quad e \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2 + 6xy.$$

Isto quer dizer que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

somente ao longo da curva $2xy + 1 = 0$*, pelo que a equação diferencial (2.19) não é exata em nenhum domínio retangular de* $\mathbb{R}^2$*. No entanto, considerando* $\mu(x,y) = x^2y$ *como um potencial fator integrante, a correspondente equação diferencial é agora*

$$x^2y\left(3y + 4xy^2\right)\,dx + x^2y(2x + 3x^2y)\,dy = 0,$$

ou seja,

$$\left(3x^2y^2 + 4x^3y^3\right)\,dx + (2x^3y + 3x^4y^2)\,dy = 0,$$

a qual é exata em qualquer domínio retangular de $\mathbb{R}^2$ *dado que*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 + 4x^3y^3\right) = 6x^2y + 12x^3y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y + 3x^4y^2)$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*. Portanto,* $\mu(x,y) = x^2y$ *é um fator integrante da equação diferencial (2.19).*

Exemplo 2.17 *Considere-se agora a equação diferencial (2.17). Será que esta equação admite fatores integrantes do tipo* y^n*? E do tipo* x^m*?*

Solução. *Se a equação diferencial (2.17) admtir fatores integrantes do tipo* y^n *então a equação diferencial*

$$y^n y\,dx + 2y^n x\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^{n+1}\,dx + 2y^n x\,dy = 0$$

deve ser exata, ou seja, considerando $M(x,y) = y^{n+1}$ *e* $N(x,y) = 2y^n x$*, deve-se ter*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)y^n = 2y^n,$$

donde resulta que $n = 1$ *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, pelo que o único fator integrante do tipo* y^n *é* y *(como de resto já se tinha visto anteriormente).*

Considere-se agora a possibilidade de existirem fatores integrantes do tipo x^m*. Nesse caso ter-se-ia a equação diferencial*

$$x^m y\,dx + 2x^{m+1}\,dy = 0$$

e $M(x,y) = x^m y$ *e* $N(x,y) = 2x^{m+1}$*. A condição a impor é então*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad x^m = 2(m+1)x^m,$$

donde se obtém $m = -1/2$*.*

Assim, $x^{-1/2}$ *é uma fator integrante da equação dada no semi-plano* $x > 0$ *(porquê?), resultando na equação diferencial exata*

$$x^{-1/2}y\,dx + 2x^{1/2}\,dy = 0, \quad x > 0.$$

Exemplo 2.18 *Considere-se a equação diferencial*

$$2\cos y\,dx - \operatorname{sen} y\,dy = 0. \tag{2.20}$$

Verifica-se facilmente que a equação diferencial não é exata (porquê?). Será que admite fatores integrantes que só dependam da variável x? E só da variável y?

Solução. *No primeiro caso, tem de se averiguar se existe uma função $f(x)$ tal que*

$$\frac{\partial\,[2f(x)\cos y]}{\partial y} = \frac{\partial\,[-f(x)\operatorname{sen} y]}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad -2f(x)\operatorname{sen} y = -\operatorname{sen} y\frac{df(x)}{dx},$$

resultando para $f(x)$ a equação diferencial

$$\frac{df(x)}{dx} = -2f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f}\,df + 2\,dx = 0, \tag{2.21}$$

a qual, conforme veremos de seguida, aceita soluções do tipo

$$f(x) = k_1 e^{-2x},$$

onde k_1 é uma constante arbitrária.

Conclui-se assim que a equação diferencial (2.20) admite, por exemplo, a função e^x como fator integrante, pelo que a equação diferencial

$$2e^{2x}\cos y\,dx - e^{2x}\operatorname{sen} y\,dy = 0 \tag{2.22}$$

é exata.

Será que a mesma equação diferencial também admite fatores integrantes que só dependem de y? Para tal deveria verificar-se

$$2\frac{\partial\,[g(y)\cos y]}{\partial y} = \frac{\partial\,[-g(y)\operatorname{sen} y]}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dg(y)}{dy}\cos y - g(y)\operatorname{sen} y = 0,$$

obtendo-se

$$\frac{1}{g}\,dg - \operatorname{tg} y\,dy = 0, \tag{2.23}$$

resultando, conforme veremos,

$$g(y) = k_2\sec y, \quad k_2 \in \mathbb{R}.$$

Portanto, um fator integrante da equação diferencial (2.20) é, por exemplo, $\sec y$. Assim,

$$2\,dx - \operatorname{tg} y\,dy = 0 \tag{2.24}$$

é uma equação diferencial exata.

Problema Determinar uma família de soluções das equações diferenciais exatas obtidas no exemplo precedente - (2.22) e (2.24) - e mostrar que ambas se podem escrever na forma $e^{2x}\cos y = c$, $c \in \mathbb{R}$. Mostrar que esta família de soluções verifica formalmente a equação diferencial (2.20).

A multiplicação de uma equação diferencial não exata por um fator integrante "transforma-a" numa equação diferencial exata. No entanto, a multiplicação da equação original pelo fator integrante gera uma nova equação diferencial, pelo que esta operação pode conduzir a:

(1) perda de (uma ou mais) soluções da equação original, ou seja, há soluções da equação original que não se obtêm como resultado da resolução da nova equação diferencial;

(2) ganho de "funções" que sendo solução da nova equação diferencial, não são solução da equação diferencial original;

(3) tanto (1) como (2).

Por isso, quando usarmos um fator integrante temos de investigar se existe ganho/perda de soluções. Veremos mais adiante como lidar, na prática, com este aspeto.

Coloca-se agora a questão: como se determina um fator integrante? De momento não responderemos a esta pergunta e passaremos a abordar as equações diferenciais de variáveis separáveis e as equações diferenciais lineares (de primeira ordem). Conforme veremos, as equações diferenciais de variáveis separáveis admitem fatores integrantes de obtenção imediata, enquanto que as equações diferenciais lineares têm fatores integrantes de determinado tipo. O nosso objetivo foi, aqui, o de introduzir o conceito de fator integrante associado à noção/resolução de equações diferenciais exatas.

Exercícios sobre equações diferencial exatas e fatores integrantes

Exercício 2.5 *Considerar a equação diferencial*

$$\left(y^2 + 2xy\right)\, dx - x^2\, dy = 0.$$

(a) Mostrar que a equação diferencial dada não é exata;

(b) Multiplicar ambos os membros da equação diferencial dada por y^n, $n \in \mathbb{Z}$, e determinar o valor de n de forma a que a nova equação diferencial seja exata;

(c) Determinar uma família de soluções da equação diferencial (exata) obtida na alínea (b) e mostrar que esta família de soluções verifica formalmente a equação diferencial não exata;

(d) Mostrar que $y(x) = 0$ é uma solução da equação diferencial não exata, mas não é uma solução da equação diferencial obtida em (b);

(e) Tendo em conta os resultados obtidos nas alíneas (c) e (d), indicar a família de soluções mais geral para a equação diferencial proposta.

Exercício 2.6 *Considerar a equação diferencial*

$$\cos\theta\, d\varphi - \operatorname{sen}\theta\, \operatorname{tg}\varphi\, d\theta = 0, \quad \varphi \in \left]0, \pi/2\right[.$$

(a) Mostrar que a equação diferencial dada não é exata, mas que admite $\cos\varphi$ como um fator integrante;

(b) Determinar uma família de soluções da equação diferencial (exata) que se obtém multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada por $\cos\varphi$ e mostrar que esta família de soluções verifica formalmente a equação diferencial proposta;

(c) Mostrar que a equação diferencial dada também admite o fator integrante $\sec\theta\, \operatorname{cotg}\varphi$.

2.3 Equações diferenciais de variáveis separáveis

Definição 2.5 *Uma equação diferencial da forma*

$$f_1(x)g_2(y)\,dx + f_2(x)g_1(y)\,dy = 0 \tag{2.25}$$

designa-se uma ***equação diferencial de variáveis separáveis****.*

Exemplo 2.19 *A equação diferencial*

$$(x-4)\,y^4\,dx - x^3\left(y^2-3\right)\,dy = 0$$

é uma equação diferencial de variáveis separáveis pois é do tipo (2.25), com

$$f_1(x) = x-4, \quad g_2(y) = y^4, \quad f_2(x) = -x^3, \quad g_1(y) = y^2-3.$$

Exemplo 2.20 *As equações diferenciais*

$$-x\,dx + dy = 0 \quad e \quad dx - x\,dy = 0$$

também são equações diferenciais de variáveis separáveis (porquê?).

Problema Averiguar se as equações diferenciais

$$\frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{x+y}{y^2+1}\,dy = 0; \qquad \frac{y}{x^2+1}\,dx + \frac{x+1}{y^2+1}\,dy = 0,$$

são equações diferenciais de variáveis separáveis.
Resp.: Apenas a segunda equação diferencial é de variáveis separáveis.

Em geral, a equação diferencial de variáveis separáveis (2.25) não é exata, mas possui um fator integrante óbvio, a saber

$$\mu(x,y) = \frac{1}{f_2(x)g_2(y)}, \quad g_2(y) \neq 0,\ f_2(x) \neq 0.$$

De facto, multiplicando ambos os membros de (2.25) por $\mu(x,y)$ obtém-se a equação diferencial

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = 0. \tag{2.26}$$

Esta equação diferencial é exata pois

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{g_1(y)}{g_2(y)}\right]$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. A equação diferencial (2.25) pode portanto ser resolvida usando o fator integrante acima e consequentemente o procedimento descrito nas secções precedentes relativo às equações diferencias exatas. No entanto, há outra forma de determinar uma solução que é, em geral, bastante mais simples e direta (embora baseada no facto da equação diferencial obtida ser exata). De facto, definindo

$$M(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad \text{e} \quad N(y) = \frac{g_1(y)}{g_2(y)}$$

a equação (2.26) toma a forma

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0. \tag{2.27}$$

O processo de determinação de uma família de soluções de (2.27) é, na prática, simples, conforme expresso pelo seguinte teorema.

Teorema 2.2 *A equação diferencial exata $M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$, onde M e N são funções de classe C^1, admite uma família de soluções que é dada por*

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = c, \tag{2.28}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Demonstração *Sendo (2.27) uma equação diferencial de variáveis exata, então uma família de soluções dessa equação é da forma $F(x, y) = c$, onde a função $F(x, y)$ existe garantidamente e verifica as condições*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x) \quad e \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(y).$$

Da primeira equação resulta

$$F(x, y) = \int M(x)\,dx + \phi(y),$$

pelo que da segunda equação decorre

$$\frac{\partial\left[\int M(x)\,dx + \phi(y)\right]}{\partial y} = N(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi(y)}{dy} = N(y),$$

donde

$$\phi(y) = \int N(y)\,dy + k$$

e assim

$$F(x, y) = \int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy + k.$$

Tomando $k = 0$ e recordando que uma família de soluções de (2.27) se escreve na forma $F(x, y) = c$, tem-se (2.28) conforme requerido. ■

Portanto, o método de resolução da equação diferencial (2.25) é relativamente direto, uma vez que envolve apenas as primitivações presentes em (2.28), as quais podem ser de menor ou maior complexidade dependendo da forma concreta da equação diferencial em estudo. Há ainda a questão do eventual uso de fatores integrantes que será abordada de seguida.

Problema Determinar uma família de soluções da equação diferencial

$$x\,dx - y\,dy = 0.$$

Resp.: $x^2 - y^2 = c$ (ou equação equivalente).

Problema Determinar a solução do PVI

$$x\,dx + y\,dy = 0, \quad y(0) = 5$$

e identificar a curva integral obtida.
Resp.: $x^2 + y^2 - 25 = 0$ (ou equação equivalente); circunferência de raio 5 centrada no ponto de coordenadas $(x, y) = (0, 0)$.

Note-se que uma vez que a equação diferencial exata (2.27) é geralmente obtida a partir da equação diferencial não exata (2.25) usando o fator integrante $1/[f_2(x)g_2(y)]$, pode daí resultar perda ou ganho de soluções. Por outro lado, ao usar este fator integrante está-se a supor que $f_2(x)$ e $g_2(y)$ não se anulam. Admitindo que x é a variável independente, resta saber o que se passa quando $g_2(y)$ se anula. Para esse efeito escrevemos a equação diferencial (2.25) na forma

$$f_2(x)g_1(y)\,\frac{dy}{dx} + f_1(x)g_2(y) = 0.$$

Ora, se y_0 é um número real tal que $g_2(y_0) = 0$, isto é, se y_0 é uma raiz da equação $g_2(y) = 0$, então $y(x) = y_0$ é uma solução (constante) da equação diferencial original (2.25) uma vez que

$$f_2(x)g_1(y_0)\,\frac{dy_0}{dx} + f_1(x)g_2(y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

Pode-se obter o mesmo resultado partindo quer da equação diferencial anterior na forma

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y(x)=y_0} = -\left.\frac{f_1(x)g_2(y)}{f_2(x)g_1(y)}\right|_{y(x)=y_0} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0,$$

quer na forma (2.25), dado que $dy = dy_0 = 0$ e portanto

$$f_1(x)g_2(y_0)\,dx + f_2(x)g_1(y_0)\,dy_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

A solução $g_2(y) = 0$ é sempre uma solução da equação diferencial em estudo, podendo eventualmente ser perdida devido à introdução do fator integrante. Assim sendo, temos de determinar as soluções $y = y_0$ da equação $g_2(y) = 0$ e incluí-las na família de soluções da equação diferencial original. Vejamos como proceder através dos exemplos seguintes.

Exemplo 2.21 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$(x-4)\,y^4\,dx - x^3\left(y^2 - 3\right)\,dy = 0. \tag{2.29}$$

Solução. *Conforme já vimos (ver Exemplo 2.19), trata-se de uma equação diferencial de variáveis separáveis, pelo que usando o fator integrante*

$$\mu(x, y) = \frac{1}{y^4 x^3}$$

e assumindo que $y^4(x) \neq 0$ e $x^3 \neq 0$ - supomos que x é a variável independente - obtemos a equação diferencial exata

$$\frac{x-4}{x^3}\,dx - \frac{y^2-3}{y^4}\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)dx - \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4}\right)dy = 0,$$

a qual pode ser "integrada", obtendo-se

$$\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx - \int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4} \right) dy = c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Assim

$$-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} = c \tag{2.30}$$

é uma família de soluções da equação diferencial proposta. De facto, derivando implicitamente ambos os membros da solução encontrada (2.30) em ordem a x, obtém-se

$$-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} = c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \left(-\frac{1}{y^2} + \frac{3}{y^4} \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

que é equivalente a ter-se

$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx + \left(-\frac{1}{y^2} + \frac{3}{y^4} \right) dy = 0,$$

ou seja, multiplicando por $x^3 \neq 0$ *e* $y^4(x) \neq 0$,

$$(x-4)\, y^4 dx - x^3 \left(y^2 - 3 \right) dy = 0,$$

que mais não é do que a equação diferencial proposta (2.29).

Coloca-se agora outra questão: ao multiplicar a equação original (2.30) pelo fator integrante assumimos que $y^4(x) \neq 0$. *Temos agora de considerar as raízes da equação* $y^4 = 0$, *isto é,* $y_0(x) = 0$ *(multiplicidade 4). Verifica-se facilmente que esta solução (eixo dos x) não faz parte da família de soluções (2.30), pois não existe nenhum valor da constante c que conduza a* $y(x) = 0$ *para todo x. No entanto, escrevendo a equação diferencial (2.29) como*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-4)y^4}{x^3(y^2-3)}$$

conclui-se imediatamente que $y(x) = 0$ *é uma solução dessa equação já que*

$$y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad e \quad \left. \frac{(x-4)y^4}{x^3(y^2-3)} \right|_{y=0} = 0.$$

Trata-se por isso de uma solução perdida no processo que envolveu o uso de um fator integrante. Uma família de soluções da equação diferencial (2.29) é portanto

$$-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} = c \quad e \quad y = 0.$$

Exemplo 2.22 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$y\, dx + 2x\, dy = 0.$$

Solução. *Trata-se de uma equação de variáveis separáveis, pelo que usando o fator integrante*

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy},$$

e assumindo que $y(x) \neq 0$ *obtemos a equação diferencial exata*

$$\frac{1}{x}\,dx + \frac{2}{y}\,dy = 0,$$

resultando

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2}{y}\,dy = c \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x| + 2\ln|y| = c,$$

onde c *é uma constante arbitrária. Exponenciando ambos os membros da equação precedente tem-se*

$$|x|\,y^2 = k_1,$$

onde $k_1 = e^c$ *é uma (nova) constante arbitrária positiva. É possível escrever a igualdade precedente na forma*

$$xy^2 = k_2,$$

onde k_2 *é uma constante arbitrária não nula (porquê?). Note-se que esta família de soluções foi obtida supondo que* $y(x) \neq 0$.

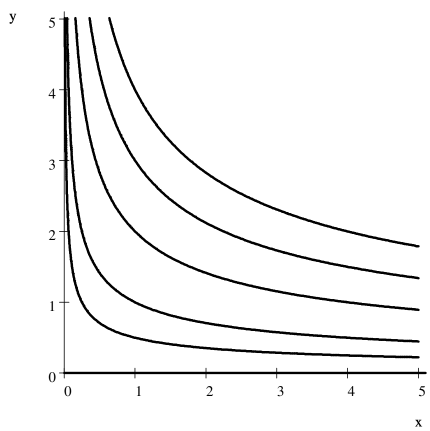
Será que a relação $y(x) = 0$ *também é uma solução da equação diferencial proposta? Vimos no caso geral que sim e é fácil de verificá-lo: nesse caso* $y(x) = 0 \Rightarrow dy = 0$, *pelo que a equação* $y\,dx + 2x\,dy = 0$ *transforma-se na identidade* $0 = 0$. *Ora, a solução* $y(x) = 0$ *não se encontra incluída na família de soluções anteriormente obtida,* $xy^2 = k_2$, *já que desta expressão resulta* $y(x) = 0$ *para todo* x *real apenas quando* $k_2 = 0$ *(recorde-se que* $k_2 \neq 0$ *por hipótese). Devemos então escrever a família de soluções como*

$$xy^2 = k_2,\ k_2 \neq 0 \quad e \quad y = 0,$$

ou, de forma mais sucinta,

$$xy^2 = k, \tag{2.31}$$

onde k *é uma constante real arbitrária.*



Representação gráfica da família de curvas (2.31) no primeiro quadrante

Problema Determinar uma família de soluções da equação diferencial $y\,dx + dy = 0$.

Resp.: $y = ce^{-x}$, onde $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.23 *Determinar a solução do PVI*

$$x \operatorname{sen} y \, dx + \left(x^2+1\right) \cos y \, dy = 0, \quad y(1) = \pi/4. \tag{2.32}$$

Solução. *Multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada pelo fator integrante*

$$\mu(x,y) = \frac{1}{(x^2+1)\operatorname{sen} y}$$

obtém-se, admitindo que $\operatorname{sen} y(x) \neq 0$,

$$\frac{x}{(x^2+1)}\, dx + \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\, dy = 0.$$

Portanto,

$$\int \frac{x}{(x^2+1)}\, dx + \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\, dy = c_0,$$

onde c_0 *é uma constante arbitrária. Primitivando, tem-se*

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \ln|\operatorname{sen} y| = c_0$$

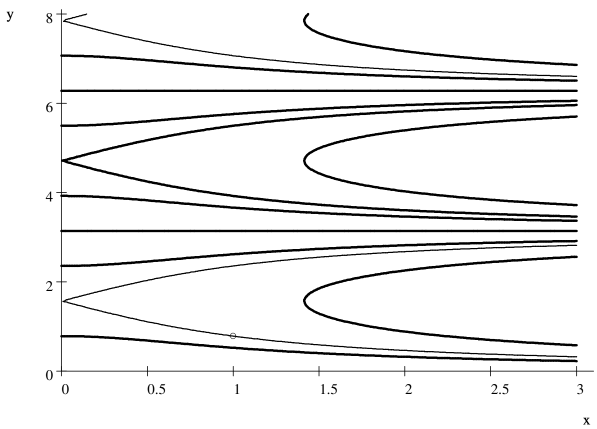
ou, tomando $c_1 = e^{c_0} > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \ln|\operatorname{sen} y| = \ln c_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\sqrt{(x^2+1)} + \ln|\operatorname{sen} y| = \ln c_1\\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\sqrt{(x^2+1)}\,|\operatorname{sen} y|\right) = \ln c_1.\end{aligned}$$

Recorrendo à exponenciação, obtemos a seguinte família de soluções

$$\sqrt{(x^2+1)}\operatorname{sen} y = c, \quad c \neq 0, \tag{2.33}$$

cujo gráfico se apresenta de seguida.



Representação gráfica das famílias de curvas (2.33) e $y = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, *no primeiro quadrante*

Uma vez que considerámos que $\operatorname{sen} y(x) \neq 0$, *temos agora de averiguar (confirmar) se as soluções de* $\operatorname{sen} y(x) = 0$ *também são solução da equação diferencial (2.32). Tem-se,*

$$\operatorname{sen} y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Se escrevermos a equação (2.32) na forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x^2+1}\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y},$$

conclui-se que a solução constante $y(x) = n\pi$ *da equação* $\operatorname{sen} y(x) = 0$ *é também solução da equação diferencial (2.32). Resta saber se esta solução já se encontra incluída na família de soluções (2.33). Verifica-se facilmente que a resposta é negativa, ou seja, não há nenhum valor da constante* $c > 0$ *para o qual a família de curvas integrais (2.33) se resuma ao conjunto de funções* $y(x) = n\pi$ *- ver também figura anterior. Teríamos então a família de soluções*

$$\sqrt{(x^2+1)}\operatorname{sen} y = c, \;\; c \neq 0 \quad e \quad y = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

É possível condensar este resultado escrevendo-o na forma

$$\sqrt{(x^2+1)}\operatorname{sen} y = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Para determinar a solução do PVI tem de se calcular o valor da constante c de forma a verificar-se a condição $y(1) = \pi/4$. *Tem-se,*

$$c = \left.\sqrt{(x^2+1)}\operatorname{sen} y\right|_{x=1, y=\pi/4} = 1.$$

A solução do PVI proposto é assim (representada a traço fino no gráfico anterior)

$$\sqrt{(x^2+1)}\operatorname{sen} y = 1.$$

Considere-se de novo a forma geral das equações diferenciais de variáveis separáveis,

$$f_1(x)g_2(y)\,dx + f_2(x)g_1(y)\,dy = 0.$$

Outra forma equivalente de representação é

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1(x)g_2(y)}{f_2(x)g_1(y)} = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\frac{g_2(y)}{g_1(y)},$$

ou seja, uma **equação diferencial** de primeira ordem é **de variáveis separáveis** se pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \tag{2.34}$$

Exemplo 2.24 *Determinar a solução do PVI*

$$\frac{dy}{dx} = -xy, \quad x > 0, \;\; y > 0; \quad y(0) = 2. \tag{2.35}$$

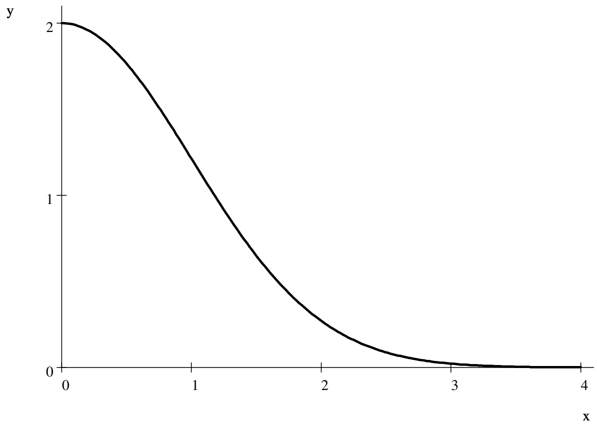
Solução. *A equação diferencial é do tipo (2.34), sendo por isso uma equação diferencial de variáveis separáveis. Tem-se, uma vez que* $y(x) \neq 0$*,*

$$\frac{dy}{dx} = -xy \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\, dy = -x\, dx$$

ou seja, primitivando,

$$\ln y = -\frac{x^2}{2} + \ln c \quad \Leftrightarrow \quad y = c\, e,$$

onde $c > 0$*. Impondo* $y(0) = 2$ *resulta* $c = 2$*, pelo que a solução do PVI (2.35) é* $y = 2\, e^{-x^2/2}$*.*



Representação gráfica da solução do PVI (2.35)

Exemplo 2.25 *Considere-se um circuito elétrico constituido por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão* E*, uma resistência* R *e uma bobine com indutância* L *ligados em série (circuito RL). Nestas condições a intensidade de corrente* i *em cada instante de tempo* t *obedece à EDO*

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E, \quad t > 0.$$

Considere-se $E = 20\, V$*,* $R = 4\,\Omega$*,* $L = 4\, H$ *e ainda que no instante inicial,* $t = 0$*, se tem* $i = 0\, A$*. Determinar a intensidade de corrente em cada instante.*

Solução. *Trata-se de um PVI em que a equação diferencial envolvida é de variáveis separáveis (porquê?). Escrevendo-a na forma diferencial, resulta*

$$(Ri - E)\; dt + L\, di = 0,$$

ou, assumindo que $i(t) \neq E/R$*,*

$$\begin{aligned} dt + \frac{L}{Ri - E}\, di = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int dt + \int \frac{L}{Ri - E}\, di = c_1 \\ &\Leftrightarrow \quad t + \frac{L}{R} \ln|Ri - E| = c_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln|Ri - E| = c_1 - \frac{R}{L} t, \end{aligned}$$

onde c_1 *é uma constante arbitrária. Exponenciando, resulta*

$$Ri - E = c_2 e^{-Rt/L}, \quad c_2 \neq 0,$$

isto é

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(E - c_2 e^{-Rt/L}\right).$$

Recordemos que esta família de soluções foi obtida no pressuposto de que $i(t) \neq E/R$. *Ora, mostra-se facilmente que* $i(t) = E/R$ *é uma solução da equação diferencial dada (porquê), pelo que a família de soluções é*

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(E + ce^{-Rt/L}\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Impondo a condição $i(0) = 0$ *obtém-se*

$$i(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{R}(E + c) \quad \Rightarrow \quad c = -E,$$

pelo que a solução do PVI proposto é

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right), \quad t \geq 0.$$

Conclui-se desde já que quando $t \to 0$ *a intensidade tende para* E/R *(estado estacionário). Tal já era de esperar porque fazendo* $di/dt = 0$ *na equação diferencial dada, obtém-se* $i = E/R$. *De notar ainda que da expressão de* $i(t)$ *decorre que quanto mais elevado for o valor de* R/L, *mais rapidamente a intensidade atingirá (assintoticamente) o valor estacionário.*
Para os valores propostos, $E = 20\,V$, $R = 4\,\Omega$ *e* $L = 4\,H$, *tem-se*

$$i(t) = 5\left(1 - e^{-t}\right), \quad t \geq 0,$$

cujo gráfico se apresenta de seguida.

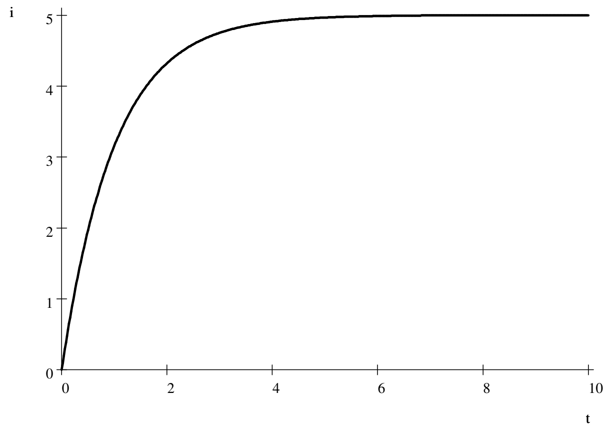


Gráfico da função $i(t) = 5\left(1 - e^{-t}\right)$, *solução do PVI do Exemplo 2.25*

Problema Considere-se um circuito elétrico constituido por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R e um condensador com capacitância C, ligados em série (circuito RC). Nestas condições a carga instantânea no condensador q é tal que

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E,$$

sendo a intensidade de corrente i em cada instante de tempo t dada por

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Determinar a carga do condensador em cada instante, bem como a intensidade de corrente, sabendo que E, R e C não dependem do tempo e que no instante inicial a carga do condensador era nula. Mostrar que o valor estacionário da carga do condensador é igual a CE e que o valor correspondente da intensidade é zero, conforme seria de esperar se considerarmos $dq/dt = 0$ na equação diferencial dada e atendermos à relação que existe entre i e q.
Resp.: $q = CE(1 - \exp[-t/(CR)])$; $i = E/R \exp[-t/(CR)]$; $\lim q(t)$ quando $t \to \infty$ é igual a CE; $\lim i(t)$ quando $t \to \infty$ é igual a 0.

Consideramos agora equações diferenciais de primeira ordem do tipo

$$\frac{dy}{dx} = h(ax + by + c),$$

onde $b \neq 0$. Em geral estas equações diferenciais não são de variáveis separáveis, mas podem ser transformadas numa equação diferencial de variáveis separáveis recorrendo a uma mudança de variável apropriada. O seguinte teorema traduz este resultado.

Teorema 2.3 *Seja*

$$\frac{dy}{dx} = h(ax + by + c) \tag{2.36}$$

uma equação diferencial de primeira ordem, onde a, $b \neq 0$ *e* c *são constantes. Então a mudança de variável* $w = ax + by + c$ *transforma a equação diferencial precedente numa equação diferencial de variáveis separáveis nas variáveis* w *e* x*.*

Demonstração A mudança de variável proposta conduz a

$$w = ax + by + c \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}.$$

Substituindo a expressão de dy/dx dada por (2.36) obtém-se

$$\frac{dw}{dx} = a + bh(w),$$

resultando na equação diferencial de variáveis separáveis

$$\frac{1}{a + bh(w)}\, dw - dx = 0,$$

conforme requerido. ■

Exemplo 2.26 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 3y + 5.$$

Solução. *A mudança de variável adequada é*

$$w = 6x + 3y + 5,$$

vindo, derivando ambos os membros da equação precedente em ordem a x,

$$\frac{dw}{dx} = 6 + 3\frac{dy}{dx}.$$

Ora,

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 3y + 5 = w,$$

pelo que a equação diferencial dada escreve-se agora

$$\frac{dw}{dx} = 6 + 3w, \tag{2.37}$$

(note-se que é de variáveis separáveis) resultando para $w(x) \neq -2$

$$\frac{1}{2+w}\,dw = 3\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|2+w| = 3x + c_1.$$

Uma vez que $w(x) = -2$ também é solução da equação (2.37), obtém-se a família de soluções

$$w + 2 = ce^{3x}.$$

Atendendo a que $w = 6x + 3y + 5$, obtemos a família de soluções

$$6x + 3y + 7 - ce^{3x} = 0.$$

Para averiguar se esta família de soluções verifica formalmente a equação diferencia dada basta, por exemplo, derivar (implicitamente) a expresão precedente em ordem a x:

$$6 + 3\frac{dy}{dx} - 3ce^{3x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = ce^{3x} - 2,$$

ou seja, atendendo a que $ce^{3x} = 6x + 3y + 7$ (porquê?),

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 3y + 7 - 2 = 6x + 3y + 5,$$

conforme pretendido.

Exemplo 2.27 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}, \quad x > 0. \tag{2.38}$$

Solução. *Neste caso a mudança de variável adequada é*

$$z = x + y,$$

resultando

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}.$$

Mas,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y} = \frac{1}{z},$$

tendo-se agora a equação diferencial de variáveis separáveis (admitindo que $z \neq 0$ e $z \neq -1$)

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{1+z}\,dz = dx \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) dz = dx,$$

que admite a família de soluções

$$\begin{aligned} z - \ln|1+z| = x + c_1 \quad & \Leftrightarrow \quad z - x + c_1 = \ln|1+z|\,, \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ & \Rightarrow \quad c_2 e^{z-x} = |1+z|\,, \quad c_2 > 0 \\ & \Rightarrow \quad c_3 e^{z-x} = 1 + z, \quad c_3 \neq 0. \end{aligned}$$

Ora, $z = -1$ também é uma solução da equação diferencial (porquê?)

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{z},$$

pelo que uma família de soluções é

$$ce^{z-x} = 1 + z, \quad c \in \mathbb{R}$$

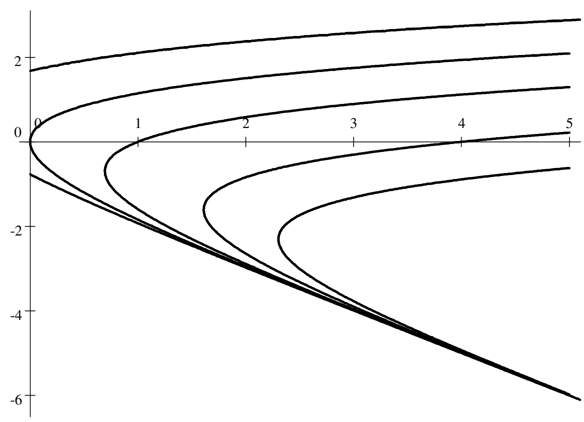
ou

$$ce^{y} = 1 + x + y \quad \Leftrightarrow \quad c = (1 + x + y)\,e^{-y}.$$

Neste caso, dada a forma da família de soluções, decorre da equação precedente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{-y}}{e^{-y} - (1+x+y)\,e^{-y}} = \frac{1}{x+y},$$

ou seja, a família de soluções obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.



Representação gráfica de uma família de soluções de (2.38)

Exemplo 2.28 *Determinar a solução do PVI*

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x-y}, \quad y(0) = 0. \tag{2.39}$$

Solução. *Consideramos a mudança de variável*

$$z = 2x - y,$$

donde

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx}.$$

Uma vez que

$$\frac{dz}{dx} = e^{2x-y} = e^z,$$

resulta

$$\frac{dz}{dx} = 2 - e^z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{2-e^z} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\int \frac{dz}{e^z - 2} + c_1,$$

onde se supôs que $z(x) \neq \ln 2$ (porquê?). Ora,

$$\int \frac{1}{e^z - 2}\, dz = \frac{1}{2} \ln |e^z - 2| - \frac{1}{2} z$$

e então obtém-se

$$x = -\frac{1}{2} \ln |e^z - 2| + \frac{1}{2} z + c_1 \quad \Leftrightarrow \quad z - 2x + 2c_1 = \ln |e^z - 2|$$

e consequentemente

$$c_2 e^{z-2x} = e^z - 2, \quad c_2 \neq 0.$$

Atendendo a que $z(x) = \ln 2$ é uma solução de $dz/dx = 2 - e^z$, a família de soluções pode-se escrever

$$c e^{z-2x} = e^z - 2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ou seja, atendendo a que $z = 2x - y$,

$$c e^{-y} = e^{2x-y} - 2.$$

A condição $y(0) = 0$ implica

$$c = \left. \frac{e^{2x-y} - 2}{e^{-y}} \right|_{x=0, y=0} = -1,$$

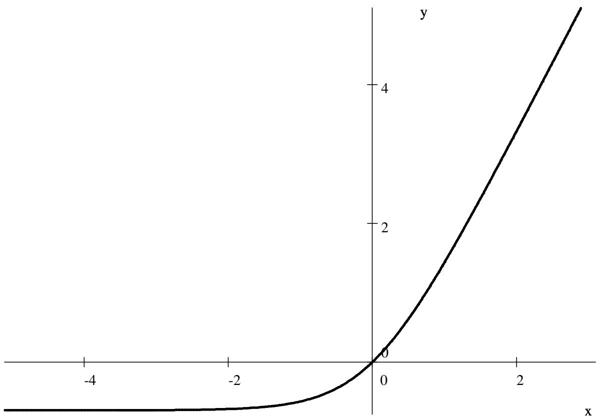
resultando para a solução do PVI

$$e^{2x-y} + e^{-y} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2e^y + 1 = 0.$$

É óbvio que a relação obtida verifica a condição $y(0) = 0$. Por outro lado, tem-se (porquê?)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{e^{-y}} = e^{2x-y},$$

como requerido.



Representação gráfica da solução do PVI (2.39)

Problema Determinar uma família de soluções explícitas da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

e mostrar que a família de soluções obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.
Resp.: $y = ce^x - x - 1$.

Exercícios sobre equações diferenciais de variáveis separáveis

Exercício 2.7 *Determinar uma família de soluções de cada uma das seguintes equações diferenciais. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $4xy\,dx + \left(x^2+1\right)\,dy = 0$;

(b) $\dfrac{ds}{dr} = -\dfrac{2r\left(s^2+1\right)}{r^4+1}$;

(c) $\operatorname{tg}\theta\,dr + 2r\,d\theta = 0$;

(d) $(x+4)\left(y^2+1\right)\,dx + y\left(x^2+3x+2\right)\,dy = 0$;

(e) $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x+y)$.

Exercício 2.8 *Determinar a solução dos seguintes PVIs. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI dado.*

(a) $(y+2)\,dx + y\,(x+4)\,dy = 0, \quad y(-3) = -1$;

(b) $8\operatorname{sen}^2 y\,dx + \sec^2 x\,dy = 0, \quad y(\pi/4) = \pi/4$;

(c) $\dfrac{dz}{dx} = xz, \quad z(0) = 0$.

Exercício 2.9 *Determinar uma família de soluções das seguintes equações diferenciais realizando uma mudança de variável adequada.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{(x+y)}$;

(b) $\dfrac{dy}{dx} = x - 2y$;

(c) $\dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2$.

2.4 Equações diferenciais homogéneas de primeira ordem

Consideramos agora uma classe de equações diferenciais que podem ser transformadas em equações diferenciais de variáveis separáveis através de uma mudança de variável adequada.

Definição 2.6 *A equação diferencial de primeira ordem*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

diz-se uma ***equação diferencial homogénea*** *(de primeira ordem) se quando escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

existe uma função $g(t)$ tal que $f(x,y)$ pode ser expressa como

$$f(x,y) = g(y/x).$$

Assim, uma equação diferencial é homogénea se for da forma,

$$\frac{dy}{dx} = g(y/x). \tag{2.40}$$

Exemplo 2.29 *A equação diferencial*

$$(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

é uma equação diferencial homogénea.

Solução. *De facto, podemos escrever a equação dada na forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\frac{x}{y} = \frac{3}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{y/x},$$

pelo que fazendo $t = y/x$, tem-se

$$\frac{dy}{dx} = g(t), \quad \text{com} \quad g(t) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{t}.$$

Exemplo 2.30 *A equação diferencial*

$$(x+2y)\frac{dy}{dx} + (y-4x) = 0$$

é uma equação diferencial homogénea.

Solução. *Podemos reescrever a equação dada como*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x-y}{x+2y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4-y/x}{1+2y/x},$$

resultando

$$\frac{dy}{dx} = g(y/x), \quad \textit{com} \quad g(t) = \frac{4-t}{1+2t}.$$

Problema Averiguar se as equações diferenciais

$$x\,dx + 2y\,dy = 0; \qquad dx - xy\,dy = 0,$$

são homogéneas.

Resp.: Apenas a primeira equação diferencial é homogénea.

Exemplo 2.31 *A equação diferencial*

$$y + \sqrt{x^2+y^2}\,dx - x\,dy = 0$$

é uma equação diferencial homogénea

Solução. *Tem-se,*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} = \frac{y}{x} \pm \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2}} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

A expressão final depende do sinal de x, mas é sempre da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(t), \quad \textit{com} \quad g(t) = t \pm \sqrt{1+t^2},$$

onde $t = y/x$.

Problema Averiguar se as equações diferenciais

$$y^2\,dx - x^3\,dy = 0; \qquad \left(y^2+x^2\right)\,dx - \left(y^2-x^2\right)\,dy = 0,$$

são homogéneas.

Resp.: Apenas a segunda equação diferencial é homogénea.

Vejamos agora outra forma de averiguar se estamos na presença de uma equação diferencial homogénea de primeira ordem. Para esse efeito necessitamos de introduzir o conceito de função homogénea.

Definição 2.7 *Uma função $F(x,y)$ diz-se uma **função homogénea de grau n** se*

$$F(tx,ty) = t^n F(x,y), \quad \forall t \in I,$$

onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.32 *A função $F(x,y) = x^2 + y^2$ é uma função homogénea de grau 2 pois*

$$F(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2+y^2) = t^2F(x,y), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.33 *A função $F(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ não é homogénea dado que*

$$F(tx,ty) = 1 + (tx)^2 + (ty)^2 = 1 + t^2x^2 + t^2y^2 = 1 + t^2(x^2+y^2) \neq t^nF(x,y).$$

Exemplo 2.34 *A função $F(x,y) = 1 + x/y$ é uma função homogénea de grau zero pois*

$$F(tx,ty) = 1 + (tx/ty) = 1 + x/y = t^0F(x,y), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Problema Averiguar se as funções

$$f(x,y) = 3xy + 5x^2; \qquad g(x,y) = e^{2x/y}; \qquad h(x,y) = x+1$$

são homogéneas e, em caso afirmativo, de que grau.
Resp.: f é uma função homogénea de grau 2; g é uma função homogénea de grau 0; h não é uma função homogénea.

Podemos agora enunciar um resultado que nos permite concluir se uma equação diferencial de primeira ordem escrita na forma $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é homogénea.

Teorema 2.4 *Considere-se a equação diferencial*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções homogéneas do mesmo grau, então a equação diferencial é homogénea de primeira ordem.

Demonstração Admitindo que $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções homogéneas de grau n, tem-se

$$\begin{aligned} M(x,y) &= M\left(x, x\frac{y}{x}\right) = x^n M\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ N(x,y) &= N\left(x, x\frac{y}{x}\right) = x^n N\left(1, \frac{y}{x}\right), \end{aligned}$$

pelo que a equação diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ pode escrever-se na forma

$$x^n \left[M\left(1, \frac{y}{x}\right)\,dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right)\,dy\right] = 0,$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)}.$$

Ora, o segundo membro desta equação diferencial depende apenas de y/x, pelo que resulta

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

conforme requerido [ver (2.40)]. Note-se que nestas condições $f(x,y)$ é uma função homogénea de grau zero. ■

Exemplo 2.35 *A equação diferencial*

$$\left(x^2 - 3y^2\right)\, dx + 2xy\, dy = 0$$

é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem.

Solução. *Efetivamente,* $M(x,y) = \left(x^2 - 3y^2\right)$ *e* $N(x,y) = 2xy$ *são ambas funções homogéneas de grau 2. De notar que a equação diferencial dada pode ainda ser escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

com

$$f(x,y) = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3(y/x)^2 - 1}{2(y/x)},$$

que é uma função homogénea de grau zero.

Exemplo 2.36 *A equação diferencial*

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\, dx - x\, dy = 0$$

é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem.

Solução. *Nesta caso, tanto* $M(x,y) = y + \sqrt{x^2+y^2}$ *como* $N(x,y) = -x$ *são funções homogéneas de grau 1:*

$$M(tx,ty) = ty + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = t\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right) = t\, M(x,y), \quad \forall t \geq 0$$

e

$$N(tx,ty) = -tx = t\, N(x,y), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

A equação diferencial dada podia ter sido escrita como

$$\frac{dy}{dx} = h(x,y),$$

onde

$$h(x,y) = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + (y/x)^2},$$

que é uma função homogénea de grau zero.

Problema Averiguar, recorrendo ao resultado expresso no Teorema 2.4, se as seguintes equações diferenciais são homogéneas.

$$(y+2x)\ dx - x^2\, dy = 0; \qquad x\cos(x/y)\, dx - y\, dy = 0; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y}\cos(x/y).$$

Resp.: Apenas a segunda equação diferencial é homogénea.

Resta agora saber qual a forma de determinar soluções de equações diferenciais homogéneas de primeira ordem. A resolução deste tipo de equações realiza-se recorrendo à seguinte propriedade: toda a equação diferencial homogénea de primeira ordem pode ser transformada numa equação diferencial de variáveis separáveis mediante uma mudança de variável adequada.

Teorema 2.5 *Se $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$ é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, então a mudança de variável $y(x) = v(x)\, x$ transforma a equação diferencial dada numa equação diferencial de variáveis separáveis nas variáveis v e x.*

Apresentaremos a demonstração deste resultado por descrever, com generalidade, o procedimento a adoptar na resolução deste tipo de equações diferenciais.

Demonstração Se $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$ é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, então a mudança de variável $y(x) = v(x)\, x$ conduz a

$$M(x,vx)\, dx + N(x,vx)\, d\,(vx) = 0.$$

Como as funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são, por hipótese, funções homogéneas do mesmo grau - n - tem-se

$$\begin{aligned} M(x,vx)\, dx + N(x,vx)\, d\,(vx) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^n \left[M(1,v)\, dx + N(1,v)\, d\,(vx)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad M(1,v)\, dx + N(1,v)\, d\,(vx) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad M(1,v)\, dx + N(1,v)\ (v\, dx + x\, dv) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad [M(1,v) + vN(1,v)]\ dx + xN(1,v)\, dv = 0. \end{aligned}$$

A última equação é do tipo (2.25), tratando-se por isso de uma equação diferencial de variáveis separáveis. Usando o fator integrante

$$\mu(x,v) = \frac{1}{x\,[M(1,v) + vN(1,v)]}$$

podemos escrever a equação diferencial precedente como

$$\frac{1}{x}\, dx + \frac{N(1,v)}{[M(1,v) + vN(1,v)]}\, dv = 0,$$

obtendo-se a família de soluções

$$\int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{N(1,v)}{[M(1,v) + vN(1,v)]}\, dv = c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Atendendo a que $v = y/x$, resulta a seguinte famíla de soluções da equação diferencial dada

$$\ln|x| + g(v) = c \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x| + g(y/x) = c,$$

onde

$$g(v) = \int \frac{N(1,v)}{[M(1,v) + vN(1,v)]}\, dv$$

é determinada a partir das funções M e N dadas.

Alternativamente, podemos partir da hipótese (equivalente) de que uma equação diferencial homogénea se pode escrever na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

onde

$$f(x,y) = g(y/x),$$

ou seja, $f(x,y)$ é uma função homogénea de grau zero. Assim, substituindo $y(x) = x\,v(x)$ na equação diferencial, resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x\,v) = g(v) \quad &\Leftrightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = g(v) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{g(v) - v}{x} \end{aligned}$$

que é uma equação de variáveis separáveis (porquê?), tal como pretendido. ■

Nota A mudança de variável $y(x) = v(x)\,x$ mantém x como variável independente da equação diferencial. Resultado idêntico seria obtido usando a mudança de variável $x(y) = v(y)\,y$, mas neste caso y passaria a assumir o papel de variável independente. Há casos em que a mudança de variável $x(y) = v(y)\,y$ é mais vantajosa pelo facto da equação de variáveis separáveis que se obtém ser de mais simples resolução, mas tal só pode ser aferido realizando o cálculo recorrendo a cada uma destas mudanças de variável.

Outra situação que aconselha o uso de uma das mudanças de variável em deterimento da outra surge no âmbito da resolução de PVIs. Por exemplo, num PVI em que a condição seja $y(0) = 1$ a mudança de variável $v = y/x$ pode não ser adequada uma vez que a condição inicial envolve $x = 0$, sendo geralmente preferível usar $v = x/y$. De igual modo, se a condição for $y(1) = 0$, então pode ser preferível usar $v = y/x$ em vez de $v = x/y$, já que a condição inicial envolve $y = 0$.

Exemplo 2.37 *Determinar uma família de soluçõe da equação diferencial*

$$\left(x^2 - 3y^2\right) dx + 2xy\, dy = 0, \quad x > 0. \tag{2.41}$$

Solução. *Conforme vimos no Exemplo 2.35, trata-se de uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, pelo que usamos a mudança de variável $y(x) = v(x)\,x$, resultando*

$$\left(x^2 - 3v^2x^2\right) dx + 2x^2v\,(v\,dx + x\,dv) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - 3v^2\right) dx + 2v\,(v\,dx + x\,dv) = 0.$$

Agrupando os termos em dx e dv, obtém-se

$$\left(1 - 3v^2 + 2v^2\right) dx + 2vx\,dv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 - v^2\right) dx + 2vx\,dv = 0. \tag{2.42}$$

Trata-se agora de uma equação diferencial de variáveis separáveis, pelo que usando o fator integrante

$$\mu(x,v) = \frac{1}{(1 - v^2)\,x},$$

obtém-se ($x \neq 0,\ v(x) \neq \pm 1$)

$$\frac{1}{x}\,dx + 2\frac{v}{1-v^2}\,dv = 0, \quad 1 - v\,(x)^2 \neq 0,$$

ou seja

$$\ln|x| - \ln\left|1-v^2\right| = c_0 = \ln c_1,$$

onde c_0 *e* $c_1 > 0$ *são constantes arbitrárias. Exponenciando ambos os membros da equação anterior resulta*

$$|x| = c_1\left|1-v^2\right|$$

ou

$$c_2\,|x| = \left|1-v^2\right|,$$

onde $c_2 = c_1^{-1} > 0$ *é uma constante arbitrária. Pode-se ainda escrever,*

$$cx = 1 - v^2, \quad c \neq 0. \tag{2.43}$$

Falta agora averiguar se devido à aplicação do fator integrante

$$\mu(x,v) = \frac{1}{(1-v^2)\,x},$$

ou seja, por se ter suposto que

$$1 - v\,(x)^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad v\,(x) \neq \pm 1$$

houve perda de soluções. É fácil verificar que $v(x) = \pm 1$ *são soluções de (2.42) e que estas soluções não estão incluídas na família de curvas (2.43) a menos que* c *pudesse tomar o valor* 0. *Assim, uma família de soluções de (2.42) é*

$$cx = 1 - v^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Atendendo a que $y = vx$ *e* $x > 0$, *tem-se a família de soluções de (2.41)*

$$cx^3 = x^2 - y. \tag{2.44}$$

Nota: alternativamente, podíamos ter escrito a equação diferencial (2.41) como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \quad x > 0,\ y(x) \neq 0,$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3(y/x)^2}{2(y/x)}, \quad x > 0,\ y(x) \neq 0.$$

Realizando a mudança de variável $y = vx$, *e supondo agora que* $v(x) \neq 0$, *teríamos*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,(v\,x) = \frac{3v^2-1}{2v} \qquad &\Leftrightarrow \qquad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2-1}{2v} \\ &\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x}\,dx = 2\frac{v}{v^2-1}\,dv \\ &\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x}\,dx + 2\frac{v}{1-v^2}\,dv = 0, \end{aligned}$$

impondo-se que $v(x) \neq \pm 1$. *O resto da resolução é igual ao já realizado no início deste exemplo, à excepção da condição* $v(x) \neq 0$. *No entanto, esta condição nada traz de novo pois a função* $y(x) = 0$ *não é solução da equação diferencial proposta (porquê?).*

Problema Determinar um família de soluções (na forma explícita) da seguinte equação diferencial (que é simultaneamente homogénea, exata e de variáveis separáveis) realizando a mudança de variável (*i*) $y = vx$ e (*ii*) $x = vy$; mostrar ainda que a família de soluções obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.

$$y\,dx + x\,dy = 0, \quad x > 0,$$

Resp.: $y = cx^{-1}$, onde $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.38 *Determinar a solução do PVI*

$$dx + dy = 0, \quad x > 0; \quad y(0) = 1.$$

usando uma mudança de variável adequada.

Solução. *Tratando-se de uma equação diferencial homogénea de primeira ordem (porquê?), atendendo à condição* $y(0) = 1$, *escolhemos realizar a mudança de variável* $x = vy$, *pelo que*

$$d\,(vy) + dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y\,dv + (v+1)\,dy = 0, \tag{2.45}$$

ou seja, assumindo $y \neq 0$ *e* $v(y) \neq -1$,

$$\frac{1}{y}\,dy + \frac{1}{1+v}\,dv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y| + \ln|1+v| = c_1,$$

pelo que

$$y(1+v) = c_2, \quad c_2 > 0.$$

Atendendo a que $v(y) = -1$ *é uma solução de (2.45), então uma família de soluções desta equação diferencial escreve-se*

$$y(1+v) = c,$$

onde c é uma constante arbitrária. O valor da constante arbitrária c podia-se determinar aplicando a condição $y(v = 0) = 1$, *uma vez que é esta a condição que resulta de* $y(x = 0) = 1$ *atendendo a que* $x = vy$. *Tal conduziria a* $c = 1$. *Alternativamente, podemos obter primeiro a família de soluções que decorre de* $y(1+v) = c$ *e* $x = vy$:

$$y\left(1 + \frac{x}{y}\right) = c \quad \Leftrightarrow \quad y + x = c.$$

Aplicando agora a condição $y(0) = 1$, *resulta* $c = 1$ *(como esperado) e portanto*

$$y + x = 1.$$

Exemplo 2.39 *Determinar a solução do PVI*

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx - x\,dy = 0, \quad x > 0; \quad y(3/2) = 0. \tag{2.46}$$

Solução. *Vimos no Exemplo 2.36 que a equação diferencial acima é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, pelo que fazemos a mudança de variável $y = vx$. Resulta assim,*

$$(vx + \sqrt{x^2 + (vx)^2})\,dx - x\,d\,(vx) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v + \sqrt{1+v^2})\,dx - d\,(vx) = 0,$$

isto é

$$(v + \sqrt{1+v^2})\,dx - v\,dx - xdv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1+v^2}\,dx - x\,dv = 0.$$

Obtemos, conforme esperado, uma equação diferencial de variáveis separáveis. Usando o fator integrante

$$\mu(x,v) = \frac{1}{x\sqrt{1+v^2}},$$

tem-se (note-se que $\sqrt{1+v^2} \neq 0$ é uma condição universal)

$$\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\,dv \quad \Rightarrow \quad \ln x + \ln c = \ln\left(v + \sqrt{1+v^2}\right), \quad c > 0.$$

Exponenciando, tem-se

$$cx = v + \sqrt{1+v^2}, \quad c > 0.$$

Dado que $v = y/x$, resulta a família de soluções

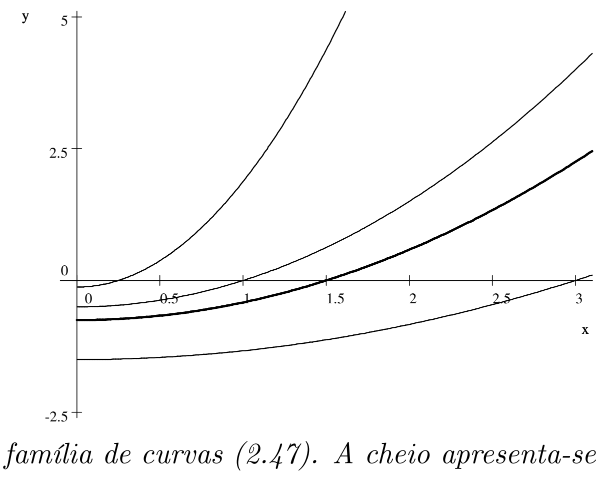
$$cx^2 = y + \sqrt{x^2+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2c}\left(c^2x^2 - 1\right), \quad c > 0, \tag{2.47}$$

não sendo necessário verificar se houve soluções da equação diferencial proposta que se perderam por aplicação do fator integrante (porquê?). A condição inicial $y = 0$ quando $x = 3/2$ conduz a

$$cx^2\big|_{x=3/2,\ y=0} = y + \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=3/2,\ y=0} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2}{3},$$

pelo que se tem a seguinte solução (explícita) do PVI (2.46)

$$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{4}, \quad x > 0. \tag{2.48}$$



Representação gráfica da família de curvas (2.47). A cheio apresenta-se a solução do PVI (2.46)

Mostramos agora que (2.48) é efetivamente a solução do PVI (2.46). Tem-se, partindo de (2.48),

$$y(3/2) = 0,$$

conforme requerido. Por outro lado, de (2.48) resulta

$$dy = \frac{2}{3}x\,dx,$$

pelo que substituindo as expressões obtidas para y *e* dy *na equação diferencial (2.46), obtêm-se*

$$\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{144}\left(4x^2+9\right)^2}\right) dx - \frac{2}{3}x^2\,dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0,$$

conforme requerido. Portanto, a solução obtida para o PVI (2.46) verifica-o formalmente. Por outro lado, tem-se que o domínio da função definida por (2.48), bem como da sua primeira derivada, é $\mathbb{R}^+$ *e que o domínio associado à forma da equação diferencial dada*

$$(y + \sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}, \quad x > 0,$$

é também $\mathbb{R}^+$*, pelo que concluímos que (2.48) não só verifica formalmente o PVI (2.46) como é a sua solução.*

Problema Determinar a solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \quad y(1) = 1,$$

e mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI.
Resp.: $x = e^{y/x-1}$.

Exercícios sobre equações diferenciais homogéneas de primeira ordem

Exercício 2.10 *Determinar uma família de soluções de cada uma das equações diferenciais seguintes. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $(x+y)\,dx - x\,dy = 0, \quad x < 0;$

(b) $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{v^3}{uv^2 - u^3};$

(c) $\left(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy = 0, \quad x > 0.$

Exercício 2.11 *Determinar a solução dos seguintes PVIs. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI dado.*

(a) $\left(x^2+3y^2\right)dx - 2xy\,dy = 0, \quad y(2) = 6;$

(b) $(2x - 5y)\ dx + (4x - y)\ dy = 0, \quad y(0) = 4.$

Exercício 2.12 *Determinar uma família de soluções das equações diferenciais seguintes usando dois métodos distintos. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y}{y-2x};$

(b) $\left(x^2 + 2y^2\right)\ dx + \left(4xy - y^2\right)\ dy = 0.$

Exercício 2.13 *Averiguar em que condições é que a equação diferencial*

$$\left(Ax^2 + Bxy + Cy^2\right)\ dx + \left(Dx^2 + Exy + Fy^2\right)\ dy = 0,$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes não nulas,

(a) *é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem;*

(b) *é uma equação diferencial exata.*

Exercício 2.14 *Seja $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ uma equação diferencial homogénea de primeira ordem. Mostrar que a transformação $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ transforma esta equação diferencial numa equação diferencial de variáveis separáveis nas variáveis r e θ.*

2.5 Equações diferenciais lineares

Definição 2.8 *Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, na variável dependente y e na variável independente x, que esteja ou possa ser escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.49}$$

*designa-se uma **equação diferencial linear** (de primeira ordem).*

Nota *Da definição precedente decorre que uma equação diferencial de primeira ordem é linear se quando representada na forma normal assume a forma*

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{P}(x)y + Q(x).$$

De igual modo, se se encontrar escrita na forma diferencial, então será do tipo

$$\left[P(x)y + \tilde{Q}(x)\right] dx + dy = 0$$

ou equivalente.

Exemplo 2.40 *A equação diferencial*

$$-\frac{dy}{dx} + y - e^{-x} = 0$$

é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem já que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} - y = -e^{-x}.$$

É, portanto, da forma (2.49) com

$$P(x) = -1, \quad Q(x) = -e^{-x}.$$

Exemplo 2.41 *A equação diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} + (1+x)\,y = x^3$$

é uma equação diferencial linear uma vez que pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} + \left(x^{-1}+1\right) y = x^2,$$

tendo-se

$$P(x) = x^{-1} + 1, \quad Q(x) = x^2.$$

Exemplo 2.42 *São também equações diferenciais lineares de primeira ordem (considerando y a variável dependente):*

$$\frac{dy}{dx} = e^x(x+1)y - 2x; \qquad \tilde{P}(x) = e^x(x+1), \qquad Q(x) = -2x,$$

$$-3x\,(y+x)\;dx + dy = 0; \qquad P(x) = -3x, \qquad Q(x) = -3x^2.$$

Problema Mostrar que relativamente às equações diferenciais seguintes

$$2\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} - e^x; \qquad 2x\,dy - 5y\,dx = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} - 3\frac{x^2}{y} = 2e^y; \qquad x^2\,dy + 2y\,dx = 0,$$

se tem quatro situações distintas: linearidade somente se a variável dependente for y, linearidade somente se a variável dependente for x, linearidade qualquer que seja a variável dependente e, finalmente, não linearidade qualquer que seja a variável dependente escolhida.

Escrevemos agora a equação (2.49) na forma

$$[P(x)y - Q(x)]\;dx + dy = 0. \tag{2.50}$$

Esta equação diferencial é da forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

com
$$M(x,y) = P(x)y - Q(x), \quad N(x,y) = 1.$$
Dado que
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = P(x), \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial y} = 0,$$
concluímos que a equação diferencial (2.50) não é exata, a menos que $P(x) = 0$, caso em que teríamos uma equação diferencial de variáveis separáveis. No entanto, a equação diferencial (2.50) possui um fator integrante que só depende da variável independente x, $\mu(x)$, que passamos a determinar.

Comecemos por multiplicar ambos os membros da equação diferencial (2.50) por $\mu(x)$. Resulta,
$$\mu(x)\,[P(x)y - Q(x)]\,dx + \mu(x)\,dy = 0.$$
Por definição, $\mu(x)$ é um fator integrante da equação diferencial precedente se e só se esta for exata, isto é, se e só se
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\mu(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mu(x)P(x) = \frac{d\mu(x)}{dx},$$
ou seja, sempre que
$$\frac{1}{\mu(x)}\,d\mu(x) = P(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|\mu(x)| = \int P(x)\,dx.$$
Se assumirmos que $\mu(x) > 0$, tem-se
$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}. \tag{2.51}$$
Portanto, a equação diferencial (2.50) possui um fator integrante da forma (2.51), pelo que podemos determinar uma família de soluções usando essa propriedade. Dado que o fator integrante não depende da incógnita, não precisamos de nos preocupar com eventuais perdas de soluções.

Exemplo 2.43 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial linear de primeira ordem*
$$\frac{dy}{dx} + 2x^{-1}y = x^3, \quad x > 0, \tag{2.52}$$
usando um fator integrante adequado.

Solução. *Começamos por escrever a equação dada na forma diferencial, isto é,*
$$(2x^{-1}y - x^3)\,dx + dy = 0. \tag{2.53}$$
Neste caso tem-se $P(x) = 2x^{-1}$ e $Q(x) = x^3$, pelo que de (2.51) decorre que um fator integrante da equação precedente é
$$\mu(x) = e^{2\int x^{-1}\,dx} = e^{\ln x^2} = x^2.$$
Portanto, multiplicando ambos os membros de (2.53) por $\mu(x) = x^2$ obtém-se a equação diferencial exata
$$(2xy - x^5)\,dx + x^2\,dy = 0.$$
Ora, uma família de soluções desta equação escreve-se, conforme já vimos,
$$F(x,y) = c,$$

onde a função F existe e é solução do seguinte sistema de equações

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = (2xy - x^5), \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2.$$

Após alguns cálculos simples, obtém-se

$$F(x,y) = x^2 y - \frac{x^6}{6} + k,$$

pelo que uma família de soluções de (2.53) é (tomando $k = 0$)

$$x^2 y - \frac{x^6}{6} = c. \tag{2.54}$$

Mostramos agora que (2.54) verifica formalmente a equação diferencial (2.52). De (2.54) resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy - x^5}{x^2} = x^3 - 2x^{-1}y,$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} + 2x^{-1}y = x^3,$$

que mais não é do que (2.52), conforme requerido.

Portanto, uma equação diferencial linear de primeira ordem pode ser transformada numa equação diferencial exata, usando o fator integrante dado por (2.51), e resolvida enquato tal. No entanto, o fator integrante dado por (2.51) tem propriedades que permitem determinar uma família de soluções da equação linear de primeira ordem (2.49) sem obrigar à resolução de uma equação diferencial exata. Descrevemos agora esse procedimento.

Vejamos, multiplicando a equação (2.49) pelo fator integrante (2.51) tem-se

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}P(x)y = e^{\int P(x)\,dx}Q(x) \tag{2.55}$$

ou (este é o passo chave da resolução!)

$$\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)\,dx}] = e^{\int P(x)\,dx}Q(x) \tag{2.56}$$

já que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)\,dx}y] &= e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}[e^{\int P(x)\,dx}]\,y \\
&= e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}\frac{d}{dx}\left[\int P(x)\,dx\right]y \\
&= e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}P(x)\,y.
\end{aligned}$$

Primitivando ambos os membros de (2.56) obtém-se a família de soluções de (2.49)

$$e^{\int P(x)\,dx}\,y = \int e^{\int P(x)\,dx}Q(x)\,dx + c,$$

onde c é uma constante arbitrária, ou seja,

$$\mu(x)\, y = \int \mu(x)Q(x)\, dx + c$$

Tem-se então o seguinte resultado.

Teorema 2.6 *A equação diferencial linear*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.57}$$

tem um fator integrante, $\mu(x)$, da forma

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\, dx}. \tag{2.58}$$

Uma família de soluções desta equação diferencial é

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)Q(x)\, dx + c \right].$$

É possível mostrar que esta família de soluções inclui todas as soluções da equação diferencial (2.49). Mais adiante voltaremos a abordar esta questão no âmbito das resolução analítica das equações lineares de ordem n.

Nota O resultado (2.55) $\Rightarrow$ (2.56), essencial na demonstração do teorema precedente, não é natural, pelo que tivemos de recorrer ao resultado inverso para justificar de forma mais evidente a equivalência entre (2.55) e (2.56). Curiosamente, há outra obordagem que permite obter o mesmo resultado sem recorrer a esta equivalência.

O ponto de partida é novamente a equação diferencial (2.57) e em particular o termo

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y.$$

Coloca-se a questão: será que existe uma função φ, apenas dependente da variável independente x, que tenha a seguinte propriedade?

$$\varphi(x) \left(\frac{dy}{dx} + P(x)y \right) = \frac{d}{dx} \left(\varphi(x)y \right) \tag{2.59}$$

Se assim for, ter-se-á, desenvolvendo (2.59), a igualdade

$$\varphi(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(x)P(x)y = \frac{d\varphi(x)}{dx}y + \varphi(x)\frac{dy}{dx}$$

ou seja,

$$\varphi(x)P(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

que mais não é do que a equação diferencial obtida anteriormente para o fator integrante, a saber,

$$\mu(x)P(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}.$$

Concluindo, o fator integrante (2.51) tem a propriedade (2.59), ou seja,

$$\mu(x)\left(\frac{dy}{dx}+P(x)y\right)=\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right),$$

pelo que (2.55) $\Leftrightarrow$ (2.56). Portanto, multiplicando ambos os membros da equação diferencial (2.57) pelo fator integrante $\mu(x)$ obtém-se

$$\mu(x)\left(\frac{dy}{dx}+P(x)y\right)=\mu(x)Q(x).$$

O que acabámos de ver, por dois processos distintos, é que o primeiro membro da equação precedente se transforma em

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right),$$

conduzindo a

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right)=\mu(x)Q(x).$$

Depois basta primitivar ambos os membros desta equação em ordem a x e obtém-se uma família de soluções (na forma explícita) da equação diferencial (2.57).

Tal como em ocasiões anteriores, o procedimento geral pode sugerir complexidade no método de resolução, mas este é relativamente simples, conforme se mostra nos exemplos seguintes.

Exemplo 2.44 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial linear de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx}+\left(2+x^{-1}\right)y=e^{-2x}. \tag{2.60}$$

Solução. *A equação diferencial já se encontra escrita na forma (2.49), tendo-se*

$$P(x)=2+x^{-1},\quad Q(x)=e^{-2x},$$

pelo que o fator integrante a usar é

$$\mu(x)=\exp\int\left(2+x^{-1}\right)\,dx=\exp\left(2x+\ln|x|\right)=e^{2x}\,|x|\,,$$

cuja forma final depende do sinal de x. Dado tratar-se de um fator integrante podemos usar, por exemplo,

$$\mu(x)=xe^{2x}.$$

Multiplicando ambos os membros de (2.60) por $\mu(x)$ resulta,

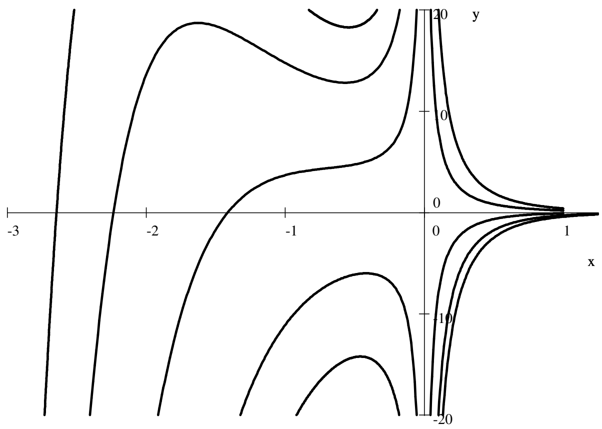
$$xe^{2x}\frac{dy}{dx}+e^{2x}\left(2x+1\right)y=x\quad\Leftrightarrow\quad\frac{d}{dx}\left(xe^{2x}y\right)=x$$

ou, equivalentemente,

$$xe^{2x}y=\frac{x^2}{2}+c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Tem-se então a família de soluções

$$y=\left(\frac{1}{2}x+cx^{-1}\right)e^{-2x}.$$



Representação gráfica da família de curvas $y = (\frac{1}{2}x + cx^{-1})e^{-2x}$

Nota: Aconselha-se fazer sempre a verificação da igualdade

$$xe^{2x}\frac{dy}{dx} + e^{2x}(2x+1)\,y = \frac{d}{dx}\left(xe^{2x}y\right), \tag{2.61}$$

pois assim garante-se que o fator integrante está bem calculado. Para tal basta derivar o produto do fator integrante pela variável dependente, neste caso $xe^{2x}y$*, e verificar se se obtém a identidade (2.61). No caso concreto deste exemplo tem-se*

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{2x}y\right) = xe^{2x}\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}\left(xe^{2x}\right) = xe^{2x}\frac{dy}{dx} + e^{2x}(1+2x)\,y,$$

o que mostra que a identidade (2.61) é válida e portanto confirmamos que o fator integrante está bem calculado.

Problema Reescrever a equação diferencial de primeira ordem na forma (2.57)

$$-\frac{dy}{dx} - y = x + 1.$$

e determinar uma família de soluções na forma explícita. Mostrar ainda que a família de soluções obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.

Resp.: $y = ce^{-x} - x$.

Exemplo 2.45 *Determinar a solução do PVI*

$$2\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx} + 8xy = 2x, \quad y(2) = 1. \tag{2.62}$$

Solução. *A equação diferencial dada pode ser escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{x^2+1}y = \frac{x}{x^2+1}.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear com

$$P(x) = \frac{4x}{x^2+1}, \quad Q(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Um fator integrante a usar é então

$$\mu(x) = \exp\left(\int P(x)\,dx\right) = \exp\left(\int \frac{4x}{x^2+1}\,dx\right) = \exp\left[2\ln\left(x^2+1\right)\right] = \left(x^2+1\right)^2.$$

Tem-se assim,

$$\left(x^2+1\right)^2 \frac{dy}{dx} + 4x\left(x^2+1\right)y = x\left(x^2+1\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[\left(x^2+1\right)^2 y\right] = x\left(x^2+1\right),$$

pelo que primitivando ambos os membros da equação precedente resulta

$$\left(x^2+1\right)^2 y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c \tag{2.63}$$

ou

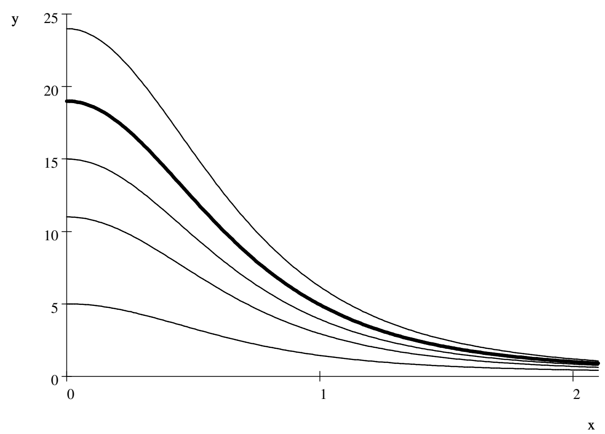
$$\left(x^2+1\right)^2 y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = c \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{(x^2+1)^2}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c\right),$$

onde c é uma constante arbitrária. Esta família de soluções é representada na figura seguinte. Para que se verifique a condição inicial $y(2) = 1$, tem-se

$$\left.\left(x^2+1\right)^2 y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right|_{x=2,\ y=1} = c \quad \Rightarrow \quad c = 19.$$

Desta forma, a solução do PVI (2.62) é

$$\left(x^2+1\right)^2 y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = 19 \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 19\right)\left(x^2+1\right)^{-2}$$



Representação gráfica da família de soluções (2.63). Nos restantes quadrantes a representação é simétrica devido à forma da família de soluções. A cheio representa-se a solução do PVI (2.62)

De novo, podemos verificar se a solução encontrada para o PVI está correta. Consideremos, por exemplo, a solução na forma (2.63). Tem-se para $c = 19$ a identidade

$$\left(x^2+1\right)^2 y\Big|_{x=2,\ y=1} = \frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\Big|_{x=2,\ y=1} + 19 \quad \Rightarrow \quad 25 = 25.$$

Por outro lado, de

$$\left(x^2+1\right)^2 y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = c$$

resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x\left(x^2+1\right)y - x^3 - x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x-4xy}{x^2+1}$$

isto é,

$$\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx} + 4xy = x,$$

que é equivalente a (2.63), conforme requerido.

Exemplo 2.46 *Pretende-se determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$y^2\,dx + (3xy-1)\,dy = 0.$$

Solução. *Tem-se*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{1-3xy} = 0,$$

pelo que a equação diferencial dada não é linear em $y(x)$. No entanto, se considerarmos que x é a variável dependente e y a variável independente, podemos escrever

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1-3xy}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{3}{y}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} + \frac{3}{y}x = \frac{1}{y^2},$$

que é uma equação linear (em x) - ver (2.49). Podemos por isso determinar um fator integrante para esta equação, a saber,

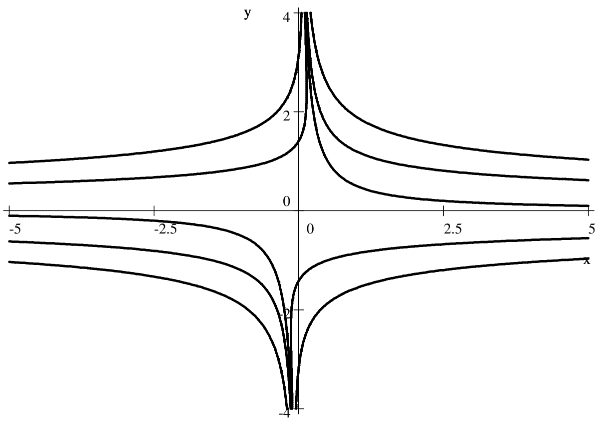
$$\mu(y) = \exp\left(\textstyle\int 3y^{-1}\,dy\right) = \exp\left(\ln|y|^3\right) = |y|^3.$$

Assim, adoptando $\mu(y) = y^3$, resulta

$$y^3\frac{dx}{dy} + 3y^2x = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dy}\left(y^3x\right) = y \quad \Rightarrow \quad y^3x = \frac{1}{2}y^2 + c,$$

onde c é uma constante arbitrária, pelo que se obtém a família de soluções

$$x = \frac{1}{2y} + \frac{c}{y^3}.$$



Representação gráfica da família de curvas $y^3x = \frac{1}{2}y^2 + c$

Exemplo 2.47 *Considere-se um circuito elétrico constituido por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R e uma bobine com indutância L ligados em série (circuito RL), tal como fizemos no Exemplo 2.25 (ver página 51). Vamos considerar que a intensidade de corrente i em cada instante de tempo t obedece ao PVI*

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E, \quad t > 0; \quad i(0) = 0. \tag{2.64}$$

Vimos que se trata de uma equação diferencial de variáveis separáveis quando se assume que E não depende de t. Neste caso vamos supor que $E = E(t)$ e que $R = 4\,\Omega$, $L = 4\,H$. O objetivo é, tal como anteriormente, determinar a intensidade de corrente em cada instante de tempo $i(t)$.

Solução. *Trata-se de um PVI em que a equação diferencial envolvida é linear tal como, de facto, acontecia no Exemplo 2.25 (porquê?). Tem-se,*

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L},$$

pelo que

$$P(t) = \frac{R}{L}$$

e portanto tem-se um fator integrante que é

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{R}{L}\,dt\right) = e^{Rt/L}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{Rt/L}\frac{di}{dt} + e^{Rt/L}\frac{R}{L}i = e^{Rt/L}\frac{E}{L} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{Rt/L}i\right) = e^{Rt/L}\frac{E}{L} \qquad \textit{(confirmar!)} \\
&\Leftrightarrow \quad e^{Rt/L}i = \frac{1}{L}\int Ee^{Rt/L}\,dt + c,
\end{aligned}$$

resultando na família de soluções (para $R = L = 4$)

$$i = e^{-t}\left(\frac{1}{4}\int Ee^t\,dt + c\right), \tag{2.65}$$

cuja expressão final depende de $E(t)$:

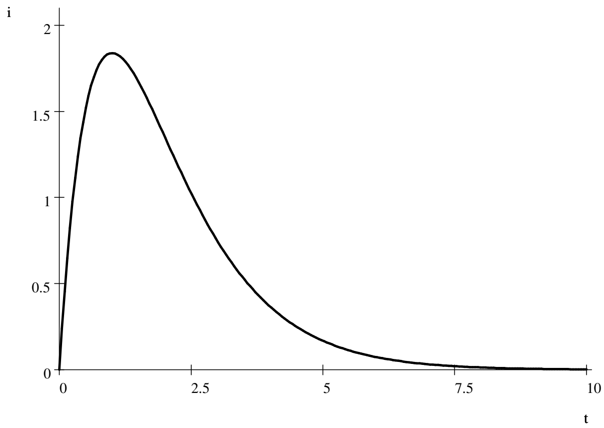
(i) *Se E não depender de t, reencontramos o resultado obtido no Exemplo 2.25 (porquê?);*

(ii) *Se tomarmos $E = 20e^{-t}$, então de (2.65) obtém-se*

$$i = e^{-t}\left(\frac{1}{4}\int 20\,dt + c\right) = e^{-t}\left(5t + c\right),$$

resultando da condição $i(0) = 0$,

$$i = 5te^{-t};$$



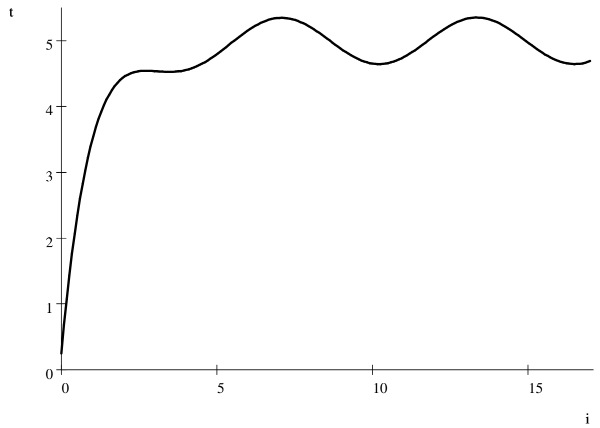
Representação gráfica da solução do PVI (2.64) quando $E = 20e^{-t}$

(iii) *Já se considerarmos $E = 20 + 2\cos t$, tem-se*

$$i = e^{-t}\left(\frac{1}{4}\int (20 + 2\cos t)\,e^t\,dt + c\right) = \frac{1}{4}\left(\cos t + \operatorname{sen} t\right) + ce^{-t} + 5,$$

obtendo-se, da condição inicial,

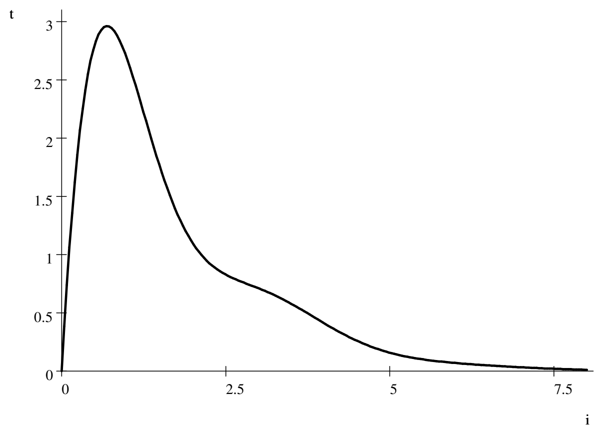
$$i = \frac{1}{4}\left(\cos t + \operatorname{sen} t\right) + 5(1 - e^{-t});$$



Representação gráfica da solução do PVI (2.64) quando $E = 20 + 2\cos t$

(iv) Finalmente, considerando $E = 20(1 + \cos 2t)e^{-t}$, *tem-se a partir de (2.65) e de* $i(0) = 0$,

$$i = e^{-t}\left(5t + \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2t\right).$$



Representação gráfica da solução do PVI (2.64) quando $20(1 + \cos 2t)e^{-t}$

Exemplo 2.48 *Resolver o PVI*

$$\frac{dy}{dx} - xy = g(x), \quad x > 1; \quad y(1) = 2, \tag{2.66}$$

onde

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 1 \leq x < 4 \\ x, & x \geq 4 \end{cases}.$$

Solução *Neste caso o segundo membro da equação está definido por (dois) ramos, pelo que temos de considerar duas equações diferenciais lineares, a saber,*

$$\frac{dy_1}{dx} - xy_1 = 0, \quad 1 < x < 4, \tag{2.67}$$

e

$$\frac{dy_2}{dx} - xy_2 = x, \quad x > 4. \tag{2.68}$$

Para a primeira equação diferencial temos a condição inicial $y_1(1) = 2$. No caso da segunda equação, vamos impor condições que assegurem que a solução do problema é contínua (continuidade da solução e das suas derivadas até à ordem $n-1$, em que neste caso $n = 1$). Assim, imporemos

$$\lim_{x\to 4^-} y_1(x) = \lim_{x\to 4^+} y_2(x). \tag{2.69}$$

A solução do PVI proposto é então

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & 1 \le x < 4 \\ y_2(x), & x \ge 4 \end{cases}.$$

Comecemos pela equação diferencial linear de primeira ordem (2.67), a qual é equivalente a

$$\frac{1}{y_1}\,dy_1 = \frac{1}{x}\,dx, \quad 1 < x < 4.$$

Trata-se, portanto, de uma equação diferencial que também é de variáveis separáveis e cuja família de soluções é (verificar)

$$y_1 = c_1 x.$$

Uma vez que se deverá ter $y_1(1) = 2$, resulta $c_1 = 2$, ou seja tem-se a solução explícita:

$$y_1(x) = 2x, \quad 1 \le x < 4. \tag{2.70}$$

Passemos agora à equação diferencial linear (2.68). Um fator integrante associado a esta equação diferencial linear é (porquê?)

$$\mu(x) = \exp\left(\int -x\,dx\right) = e^{-x^2/2},$$

tendo-se, por aplicação deste fator integrante,

$$\begin{aligned} e^{-x^2/2}\left(\frac{dy_2}{dx} - xy_2\right) = xe^{-x^2/2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}\,y_2\right) = xe^{-x^2/2} \qquad \textit{(confirmar!)} \\ &\Leftrightarrow \quad y_2 = c_2\,e^{x^2/2} - 1 \end{aligned}$$

Resta determinar o valor da constante c_2. Atendendo à condição (2.69), c_2 obedece a

$$\lim_{x\to 4^-} y_1(x) = \lim_{x\to 4^+} y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad 8 = c_2\,e^8 - 1,$$

pelo que

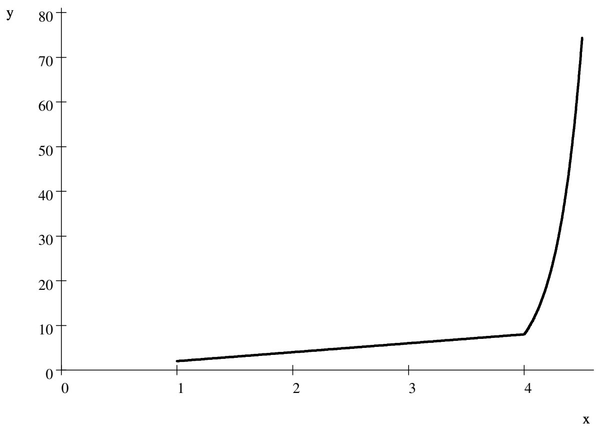
$$c_2 = 9\,e^{-8},$$

resultando

$$y_2(x) = 9\,e^{(x^2-16)/2} - 1, \quad x \ge 4. \tag{2.71}$$

Assim sendo, combinando (2.70) e (2.71), a solução do PVI (2.66) é

$$y = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 4 \\ 9\,e^{(x^2-16)/2} - 1, & x \ge 4 \end{cases}.$$



Representação gráfica da solução do PVI (2.66)

Problema Determinar uma solução explícita do PVI

$$\frac{dy}{dx} + y = h(x), \quad x > 0; \quad y(0) = 0,$$

com

$$h(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases},$$

e mostrar que a solução obtida é contínua, o mesmo não acontecendo com a sua primeira derivada.

Resp.: $y = \begin{cases} e^{-x} - e^{-2x}, & 0 \leq x < 2 \\ (1 - e^{-2})e^{-x}, & x \geq 2 \end{cases}$.

Exercícios sobre equações diferenciaia lineares de primeira ordem

Exercício 2.15 *Determinar uma família de soluções de cada uma das equações diferenciais seguintes. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} + 3\dfrac{y}{x} = 6x^2$;

(b) $x^4\dfrac{dy}{dx} + 2x^3y = 1$;

(c) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{x}{t^2} = \dfrac{1}{t^2}$;

(d) $\dfrac{dr}{d\theta} + \operatorname{tg}\theta = \cos\theta$.

Exercício 2.16 *Determinar a solução dos seguintes PVIs. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI dado.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2, \quad y(0) = 2;$

(b) $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x), \quad y(0) = 0,$ *com* $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$

Nota: a solução deste PVI deverá obedecer à condição $\lim_{x\to 1^-} y(x) = \lim_{x\to 1^+} y(x)$.

2.6 Equações diferenciais de Bernoulli

Consideramos agora um caso especial em que a equação diferencial pode ser reduzida a uma equação diferencial linear de primeira ordem usando uma mudança de variável adequada.

Definição 2.9 *Uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{2.72}$$

onde $n \in \mathbb{Q}$, designa-se uma ***equação diferencial de Bernoulli****.*

Observe-se que para $n = 0$ ou $n = 1$ a equação de Bernoulli (2.72) reduz-se a uma equação linear (porquê?). Nos restantes casos a equação tem de ser abordada de outra forma.

Suponhamos então que $n \neq 0$ e $n \neq 1$. Note-se que comparando (2.72) com a equação linear

$$\frac{dz}{dx} + \overline{P}(x)z = \overline{Q}(x),$$

conclui-se que o termo que origina a não linearidade em (2.72) é y^n. Assim sendo, comecemos por dividir ambos os membros de (2.72) por y^n, obtendo-se

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \tag{2.73}$$

A equação obtida é claramente não linear, nomeadamente devido ao termo $P(x)y^{1-n}$. Tal facto sugere a seguinte mudança de variável

$$z = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} \tag{2.74}$$

Tendo (2.74) em mente, a equação (2.73) transforma-se na equação diferencial linear

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} + (1-n)\,P(x)z = (1-n)\,Q(x).$$

Assim, no caso em que $n \neq 0$ e $n \neq 1$ tem-se o seguinte resultado.

Teorema 2.7 *Suponhamos que $n \neq 0$ e $n \neq 1$. Então a mudança de variável definida por*

$$z = y^{1-n}$$

transforma a equação de Bernoulli (2.72) na equação diferencial linear (na variável z):

$$\frac{dz}{dx} + \overline{P}(x)z = \overline{Q}(x),$$

onde $\overline{P}(x) = (1-n)\,P(x)$ e $\overline{Q}(x) = (1-n)\,Q(x)$.

Exemplo 2.49 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3. \tag{2.75}$$

Solução. *Trata-se de uma equação diferencial de Bernoulli com $n = 3$. Multiplicando esta equação por y^{-3}, tem-se*

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x,$$

pelo que tomando

$$v = y^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx},$$

resultando

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + v = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dx} - 2v = -2x.$$

Esta equação diferencial linear admite o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}.$$

Tem-se, por aplicação do fator integrante,

$$e^{-2x}\frac{dv}{dx} - 2e^{-2x}v = -2xe^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(e^{-2x}v\right) = -2xe^{-2x}.$$

Primitivando por partes resulta

$$e^{-2x}v = e^{-2x}\left(x + \frac{1}{2}\right) + c \quad \Leftrightarrow \quad v = x + \frac{1}{2} + ce^{2x},$$

onde c é uma constante arbitrária. Atendendo à mudança de variável $v = y^{-2}$, tem-se a família de soluções

$$\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}. \tag{2.76}$$

Podemos mostrar que a família de soluções obtida verifica formalmente a equação diferencial (2.75). Para esse efeito derivamos implicitamente ambos os membros da equação (2.76) em ordem a x, vindo

$$-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = 1 + 2ce^{2x}.$$

Eliminando a constante arbitrária c usando a equação (2.76) vem

$$-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = 1 + 2\left(\frac{1}{y^2} - x - \frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y^2} - 2x.$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial precedente por $-y^3/2$ obtém-se

$$\frac{dy}{dx} = -y + xy^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} + y = xy^3,$$

conforme requerido.

Problema Transformar a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + xy = xy^2$$

numa equação diferencial linear realizando uma mudança de variável adequada.
Resp.: $dz/dx - xz = -x$, com $z = y^{-1}$.

Exemplo 2.50 *Determinar a solução do PVI*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = f(x)y^4, \quad y(1) = 1, \tag{2.77}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Solução. *Neste caso temos de considerar dois problemas,*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = (x-1)\,y^4, \quad 1 < x \leq 2; \quad y(1) = 1$$

e

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = y^4, \quad x > 2,$$

sujeitos à condição

$$\lim_{x \to 2^-} y(x) = \lim_{x \to 2^+} y(x).$$

Para a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = (x-1)\,y^4$$

tem-se, dividindo por $y^4 \neq 0$,

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y^{-3} = x - 1.$$

Realizando a mudança de variável $z = y^{-3}$ resulta

$$z = y^{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx},$$

pelo que a equação diferencial passa a escrever-se

$$-\frac{1}{3}\frac{dz}{dx} - \frac{1}{3x}z = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = -3x + 3.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear, sendo o fator integrante a usar

$$\mu(x) = e^{\int \ln x \, dx} = x.$$

Tem-se assim,

$$x\frac{dz}{dx} + z = -3x^2 + 3x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\,(xz) = -3x^2 + 3x,$$

ou seja

$$xz = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c_1 \quad \Leftrightarrow \quad z = -x^2 + \frac{3}{2}x + c_1 x^{-1}.$$

Retomando a variável dependente y*, vem*

$$y^{-3} = -x^2 + \frac{3}{2}x + c_1 x^{-1}.$$

A constante c_1 *é tal que* $y(1) = 1$*, resultando*

$$c_1 = \frac{1}{2},$$

pelo que a solução do problema

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = (x-1)\,y^4, \quad 1 < x \leq 2; \quad y(1) = 1$$

é

$$y^{-3} = -x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1}, \quad 1 \leq x \leq 2. \tag{2.78}$$

Note-se que $y(x) = 0$ *é solução da equação diferencial dada, mas não é a solução do problema proposto pois não verifica a condição* $y(1) = 1$*.*

Consideremos agora a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = y^4, \quad x > 2.$$

O procedimento que conduz à sua resolução é em tudo idêntico ao anteriormente exposto, obtendo-se

$$y^{-3} = -\frac{3}{2}x + c_2 x^{-1}, \quad x > 2. \tag{2.79}$$

Resta determinar o valor da constante c_2 *de forma a ter-se*

$$\lim_{x \to 2^-} y(x) = \lim_{x \to 2^+} y(x).$$

Recorrendo à solução (2.78) tem-se

$$\lim_{x \to 2^-} y(x) = y(2) = \left[-x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1}\right]_{x=2} = -\frac{3}{4}.$$

Por outro lado, da solução (2.79) resulta

$$\lim_{x \to 2^+} y(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(-\frac{3}{2}x + c_2 x^{-1}\right) = -3 + \frac{1}{2}c_2.$$

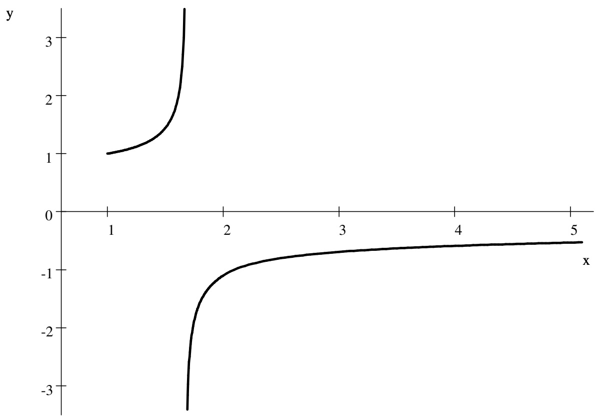
Assim, c_2 *é tal que*

$$-\frac{3}{4} = -3 + \frac{1}{2}c_2,$$

resultando $c_2 = 9/2$. *Portanto, a solução do PVI proposto é*

$$\begin{cases} y^{-3} = -x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}x^{-1}, & 1 \leq x \leq 2 \\ y^{-3} = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{2}x^{-1}, & x > 2 \end{cases},$$

a qual tem uma assintota em $x \simeq 1.68$, *correspondendo à raiz real do polinómio* $-2x^3 + 3x^2 + 1$, *conforme se pode constatar no gráfico seguinte.*



Representação gráfica da solução do PVI (2.77)

Problema Determinar a solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3}y = e^x y^{-2}, \quad y(0) = 1.$$

Resp.: $y^3 = (1 + 3x)e^x$.

Exercícios sobre equações diferenciais de Bernoulli

Exercício 2.17 *Determinar uma família de soluções das equações diferenciais seguintes. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}$;

(b) $x\dfrac{dy}{dx} + y = -2x^6y^4$;

(c) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{t+1}{2t}x = \dfrac{t+1}{tx}$;

(d) $dy + \left(4y - 8y^{-3}\right) x\, dx = 0$.

Exercício 2.18 *Determinar a solução dos seguintes PVIs. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI dado.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{y^3}, \quad y(1) = 2;$

(b) $-x\dfrac{dy}{dx} - y = (xy)^{3/2}, \quad y(1) = 4.$

2.7 Aplicação à determinação de trajetórias ortogonais

Definição 2.10 *Seja*

$$F(x, y, c) = 0 \tag{2.80}$$

uma família de curvas definida no plano xy. Uma curva que intersete a família de curvas (2.80) segundo ângulos retos designa-se uma ***trajetória ortogonal*** *da família de curvas dada.*

Exemplo 2.51 *Considere-se a família de circunferências*

$$x^2 + y^2 = c^2 \tag{2.81}$$

com centro no ponto de coordenadas $(x, y) = (0, 0)$ e raio $c > 0$. Cada uma das retas que passa pela origem

$$y = kx, \tag{2.82}$$

onde k é uma constante arbitrária, é uma trajetória ortogonal da família de circunferências (2.81). Reciprocamente, cada uma das circunferências da família (2.81) é uma trajetória ortogonal da família de retas (2.82).

O próximo passo consiste em determinar as trajetórias ortogonais correspondentes a uma família de curvas genérica dada $F(x, y, c) = 0$. O procedimento baseia-se no facto de que se duas famílias de curvas, γ_1 e γ_2, se intersetam ortogonalmente no plano xy, então os respetivos declives das retas tangentes nos pontos de interseção devem verificar a igualdade

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_1} = -\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_2}\right)^{-1}.$$

Assim, começamos por obter uma equação diferencial de primeira ordem que expresse o declive da reta tangente em cada um dos pontos da família de curvas dada (2.80) fazendo:

(1) derivação implícita ou explícita da relação (2.80) em ordem a x

(2) (eventual) eliminação da constante arbitrária c usando a relação (2.80) e a equação diferencial que se obteve em (1)

Assumiremos que a equação diferencial resultante, que representa a família de curvas (2.80), pode ser expressa na forma

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_1} = f(x, y),$$

onde $f(x,y)$ é uma função dada. Portanto, uma curva C da família de curvas γ_1 que passa pelo ponto de coordenadas (x,y) tem nesse ponto a propriedade $dy/dx = f(x,y)$. Assim sendo, deveremos ter

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_1} = -\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_2}\right)^{-1}$$

ou, equivalentemente,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_2} = -\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma 1}\right)^{-1},$$

pelo que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_2} = -\frac{1}{f(x,y)}. \tag{2.83}$$

Esta equação diferencial de primeira ordem define a família de curvas γ_2. Uma família de curvas

$$G(x,y,c) = 0$$

que seja solução da equação diferencial (2.83) representa a família de trajetórias ortogonais da família dada (2.80), excepto possivelmente para algumas trajetórias ortogonais que são retas verticais.

Resumo do procedimento

(1) A partir da equação

$$F(x,y,c) = 0,$$

que define a família de curvas dada, determinamos a correspondente equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

(2) A equação diferencial correspondente às trajetórias ortogonais é

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)} \tag{2.84}$$

(3) Determinamos a família de soluções

$$G(x,y,c) = 0$$

associada à equação diferencial (2.84), obtendo assim a desejada família de trajetórias ortogonais (exceptuando, possivelmente, certas trajetórias que são retas verticais, as quais têm que ser determinadas separadamente).

Exemplo 2.52 *Determinar as trajetórias ortogonais à família de curvas*

$$x^2 + y^2 = c^2, \tag{2.85}$$

onde c é uma constante arbitrária não nula.

Solução. *Derivando ambos os membros da equação precedente em ordem a x, tem-se*

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

A equação diferencial correspondente à família de trajetórias ortogonais é então - ver equação (2.84),

$$\frac{dy}{dx} = -\left(-\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}.$$

Determinamos agora uma família de soluções desta equação diferencial,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \underset{y(x)\neq 0}{\Rightarrow} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln|k_1| \quad \Rightarrow \quad y = k_1 x,$$

onde k_1 é uma constante arbitrária não nula. Temos ainda de considerar a solução $y(x) = 0$ (porquê?), pelo que a família de soluções é dada por

$$y = kx,$$

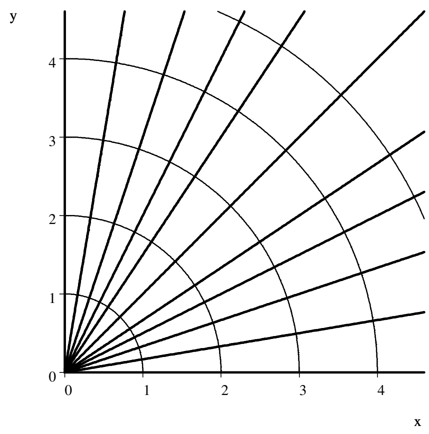
onde k é uma constante arbitrária.

Obtivemos assim uma família de trajetórias ortogonais à família de circunferências (2.85). Resta averiguar se há retas verticais que sejam ortogonais à família de circunferências dada. Para este efeito, note-se que na família de circunferências todos os pontos da forma $(0, y)$ têm dy/dx nulo já que nessas condições

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = 0.$$

Portanto, a reta $x = 0$ também faz parte do conjunto de trajetórias ortogonais. Note-se que a família de trajetórias ortogonais determinada anteriormente, $y = kx$, não inclui esta reta. Em resumo, a solução do problema proposto é

$$y = kx \quad e \quad x = 0.$$



Representação gráfica da família de circunferências $x^2 + y^2 = c^2$ e respectivas trajectórias ortogonais em $[0, 4] \times [0, 4]$. Nos restantes quadrantes a representação é simétrica

Exemplo 2.53 *Determinar as trajetórias ortogonais à família de parábolas*

$$y = c(x-1)^2, \tag{2.86}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Solução. *Começamos por obter a equação diferencial de primeira ordem que nos dá o declive em cada ponto da reta tangente à da família de parábolas. Derivando ambos os membros da equação dada em ordem a x obtemos*

$$\frac{dy}{dx} = 2c\,(x-1)\,.$$

Note-se desde já que todos os pontos da forma $(1, y)$ têm derivada nula, pelo que a reta $x = 1$ é ortogonal à família de curvas dada. Eliminando c na equação precedente usando (2.86) resulta

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x-1},$$

pelo que dy/dx em cada ponto das trajetórias ortogonais é dado por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{2y}.$$

Resta portanto determinar uma família de soluções da equação diferencial

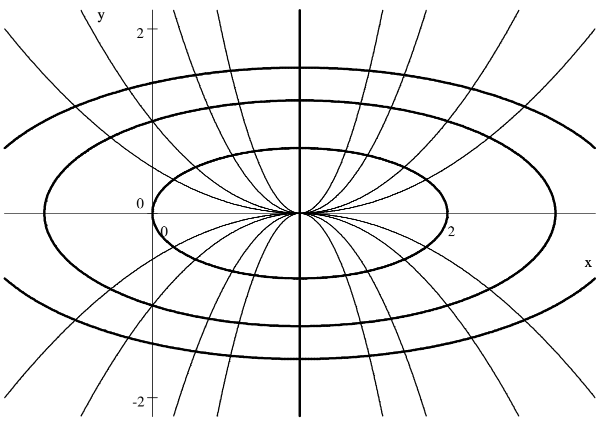
$$2y\,dy + (x-1)\;dx = 0,$$

resultando

$$2y^2 + (x-1)^2 = k^2,$$

onde k é uma constante arbitrária. Obtêm-se assim as trajetórias ortogonais

$$2y^2 + (x-1)^2 = k^2 \quad e \quad x = 1.$$



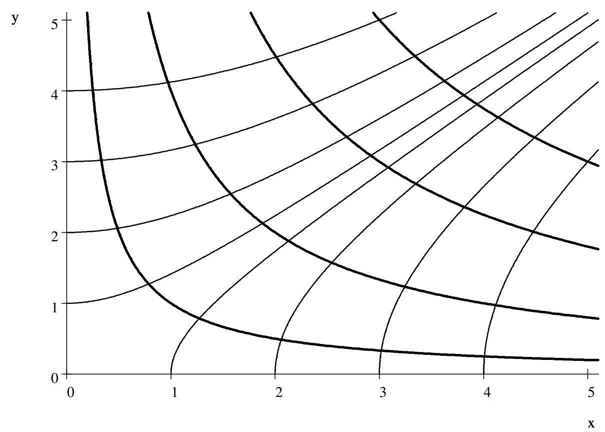
Representação gráfica da família de parábolas $y = c(x-1)^2$ e respectivas trajectórias ortogonais em $[-1, 3] \times [-2, 2]$

Problema Determinar as trajetórias ortogonais à família de curvas

$$y^2 - x^2 = k, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

onde k é uma constante arbitrária não nula.

Resp.: $yx = c$, onde c é uma constante arbitrária positiva.



Representação gráfica da família de hipérboles $y^2 - x^2 = k$, $k \neq 0$, e respectivas trajectórias ortogonais em $[0, 5] \times [0, 5]$

Nota O conceito de trajetórias ortogonais surge, por exemplo, no contexto dos campos elétricos. De facto, as linhas equipotenciais, que se definem como sendo o lugar geométrico dos pontos que têm o mesmo potencial elétrico, são ortogonais às linhas de campo elétrico e por isso são ortogonais ao vetor campo elétrico em cada ponto (recorde-se que as linhas de campo são tangentes, em cada ponto, ao vetor campo elétrico). Assim, nos exemplos precedentes, se a família de curvas dada corresponder a linhas equipotenciais de um campo elétrico (no plano), então a família de curvas obtida corresponde às linhas de força desse mesmo campo elétrico. De igual modo, pode-se obter as linhas equipotenciais a partir do conhecimento das linhas de campo.

Exercícios sobre determinação de trajetórias ortogonais

Exercício 2.19 *Determinar as trajetórias ortogonais a cada uma das seguintes famílias de curvas.*

(a) $y = cx^3$;

(b) $cx^2 + y^2 = 1$;

(c) $y = e^{cx}$;

(d) $y = x - 1 + ce^{-x}$.

2.8 Exercícios de revisão do Capítulo 2

Exercício 2.20 *Determinar uma família de soluções das seguintes equações diferenciais usando dois métodos de resolução distintos.*

(a) $6x^2y\,dx - (x^3+1)\,dy = 0$;

(b) $e^{2x}y^2\,dx + (e^{2x}y - 2y)\,dy = 0$;

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + 1$.

Exercício 2.21 *Determinar uma família de soluções de cada uma das equações diferenciais seguintes.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-7y}{3y-8x}$;

(b) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + xy = e^{-x}$;

(c) $x^2\dfrac{dy}{dx} + xy = xy^3$;

(d) $\dfrac{dy}{dx} = (y+x)^2$
sugestão: fazer $w = y + x$ *e resolver a equação diferencial resultante em ordem a* $w(x)$;

(e) $\dfrac{dy}{dx} = 4y - 16x + 4$
sugestão: fazer $w = 4y - 16x + 4$ *e resolver a equação diferencial resultante em ordem a* $w(x)$.

Exercício 2.22 *Determinar a solução dos seguintes PVIs.*

(a) $\left(x^2+y^2\right)\,dx - 2xy\,dy = 0, \quad y(1) = 2$;

(b) $(e^{2x}y^2 - 2x)\,dx + e^{2x}y\,dy = 0, \quad y(0) = 2$;

(c) $4xy\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1, \quad y(2) = 1$;

(d) $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad$ *com* $\quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 2 \\ x/2, & x > 2 \end{cases}$;

(e) $x^2\dfrac{dy}{dx} - xy = \dfrac{y^3}{x}, \quad y(1) = 1$.

Exercício 2.23 *Determinar o valor de* k *de forma a que as parábolas* $y = c_1x^2 + k$ *sejam as trajetórias ortogonais da família de elípses* $x^2 + 2y^2 - y = c_2$.

Exercício 2.24 *A equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \tag{2.87}$$

designa-se uma equação diferencial de Riccati.

(a) *Mostrar que se $A(x) \equiv 0$ a equação diferencial (2.87) é linear, enquanto que para $C(x) \equiv 0$ é uma equação diferencial de Bernoulli;*

(b) *Mostrar que se $f(x)$ é uma solução (conhecida) da equação diferencial (2.87), então a transformação*

$$y = f + \frac{1}{v}$$

transforma a equação diferencial (2.87) numa equação diferencial linear em v;

(c) *Usando o resultado obtido na alínea (b) determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 + \left(1 - 2x^2\right) y + x^3 - x + 1,$$

sabendo que $f(x) = x$ é uma solução desta equação diferencial.

Exercício 2.25 *Considerar um objeto pontual P que se desloca ao longo do eixo OX. Seja x a abcissa de P em cada instante de tempo t.*

(a) *Suponha-se que a velocidade de P em cada instante, dx/dt, se relaciona com a sua abcissa através da lei*

$$\frac{dx}{dt} = x$$

e que a posição de P no instante inicial, $t = 0$, é $x(0) = 5$. Qual será a abcissa de P para $t = 5$?

(b) *Suponha-se agora que a lei que relaciona a velocidade, a abcissa e o tempo é*

$$\frac{dx}{dt} = x + t$$

e que $x(0) = 1$. Determinar $x(t)$ usando dois métodos distintos: i) recorrendo a um fator integrante adequado; ii) realizando a mudança de variável $w = x + t$ e resolvendo a equação diferencial resultante em $w(t)$.

Exercício 2.26 *Um objeto pontual M de massa unitária, $m = 1$, desloca-se ao longo do eixo dos xx com velocidade $v(t)$ em cada instante de tempo t. O ponto M está sujeito a uma força de atrito $F_a = -2v$ e a uma força $F_e = t$, de tal forma que a sua velocidade em cada instante t é dada pela segunda lei de Newton*

$$m\frac{dv}{dt} = F_a + F_e = -2v + t,$$

ou seja, atendendo a que $m = 1$,

$$\frac{dv}{dt} = -2v + t.$$

(a) *Determinar a velocidade de* M *em cada instante de tempo sabendo que* $v(0) = 0$;

(b) *Supondo que no instante inicial,* $t = 0$, M *se encontra na origem das abcissas, determinar a sua posição em cada instante de tempo,* $x(t)$, *sabendo que*

$$\frac{dx}{dt} = v;$$

(c) *Determinar* $v(t)$ *no caso de* $F_a = -v^2$, $F_e = 1$ *e* $v(0) = 2$.

Exercício 2.27 *Um objeto pontual* Q *de massa* m *desloca-se com movimento retilíneo sobre o eixo dos* xx, *estando sujeito a uma força* $-kx$ *que o atrai para o ponto de coordenadas* $x = 0$, *onde* $k > 0$ *é uma constante de proporcionalidade e* x *a abcissa correspondente à posição de* Q. *Nestas condições a lei que rege o movimento de* Q *é*

$$v\frac{dv}{dx} = -\alpha x,$$

onde $\alpha = k/m$. *Sabendo que a velocidade inicial de* Q *é* $v(0) = v_0 > 0$ *e a sua posição inicial* $x(0) = x_0$, *mostrar que:*

(a) $v^2 = v_0^2 + \alpha(x_0^2 - x^2)$;

(b) $x = \dfrac{v_0}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha} t) + x_0 \cos(\sqrt{\alpha} t)$.

sugestão: atender aos seguintes resultados,

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{b}, \quad \operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \operatorname{sen}\phi \cos\theta.$$

Exercício 2.28 *Um circuito elétrico é composto por uma fonte eletromotriz que em cada instante* t *fornece uma tensão* E, *um elemento com resistência* R *e outro elemento com indutância* L *ligados em série. Nestas condições a intensidade de corrente em cada instante* i *obedece a*

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Determinar i *quando:*

(a) $E = 200$, $R = 100$, $L = 100$, $i(0) = 0$;

(b) $E = 200 \cos t$, $R = 100$, $L = 100$, $i(0) = 0$.

Exercício 2.29 *Para uma dada população, seja* n *o número de indivíduos que dela fazem parte no instante* t. *Suponhamos que a lei que rege a evolução temporal de* n *é*

$$\frac{dn}{dt} = kn,$$

onde k *é uma constante positiva. Neste contexto, considere-se uma população sobre a qual se sabe que o número de indivíduos no ano* 2000 *era de* 10000, *sendo de* 5000 *no ano* 1900.

(a) Com base nestes dados determinar qual deverá ser o número de membros da população no ano 2100;

(b) Supondo agora que para outra população a lei a considerar é

$$\frac{dn}{dt} = 10^{-2}n - 10^{-8}n^2, \quad n < 10^6.$$

Sabendo que no ano 2000 *a população tinha*100000 *membros, determinar:*

(i) o número de membros no ano 2100;

(ii) o número de membros quando $t \to +\infty$.

Exercício 2.30 *A lei de arrefecimento de Newton postula que a velocidade de arrefecimento de um corpo é proporcional, em cada instante* t*, à diferença entre a temperatura do corpo* T *e a temperatura do meio circundante* T_m*, ou seja,*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

onde k *é uma constante positiva e* $T > T_m$*. Considerando que a temperatura de determinado corpo é de* $30\,^oC$ *no instante* $t = 0$*, passando a ser de* $17.5\,^oC$ *para* $t = 1$ *hora e de* $11.25\,^oC$ *para* $t = 2$ *horas, determinar:*

(a) a temperatura do meio circundante (suposta constante durante o processo de arrefecimento);

(b) a temperatura do objeto para $t = 3$ *horas;*

(c) a temperatura do objeto quando $t \to +\infty$.

2.9 Soluções dos exercícios do Capítulo 2

2.1. (a) $y^2 + 3x^2 + 4xy = c$; (b) $x^2y + x + 2y^2 = c$; (c) $\left(\theta^2 + 1\right) \operatorname{sen} r = c$; (d) $\left(s - s^2\right)/t = c$.

2.2. (a) $x^2y - 3x + 2y^2 = 7$; (b) $e^x\,(y + 2) + y^2x = 8$.

2.3. (a) $A = 3/2$, $2x^3 + 9x^2y + 12y^2 = c$; (b) $A = -2$, $y/x^2 - y/x = c$.

2.4. (a) $f(x, y) = x^2y + \phi(y)$; (b) $f(x, y) = y^2e^x + y^3e^{3x} + \phi(x)$.

2.5. (b) $n = -2$; (c) $x + x^2/y = c$; (d).$x + x^2/y = c$ e $y = 0$.

2.6. (b) $\cos\theta \operatorname{sen}\varphi = c$.

2.7. (a) $y\left(x^2 + 1\right)^2 = c$; (b) $\operatorname{tg}^{-1} r^2 + \operatorname{tg}^{-1} s = c$; (c) $r \operatorname{sen}^2\theta = c$;
(d) $(x + 1)^6\,(x + 2)^{-4}\,(y^2 + 1) = c$, $c \geq 0$; (e) $x - \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\,(x + y)\right) = c$.

2.8. (a) $(x + 4)\,(y + 2)^{-2}\,e^y = e^{-1}$; (b) $2 \operatorname{sen} 2x + 4x - \operatorname{cotg} y = \pi + 1$; (c) $z(x) = 0$.

2.9. (a) $-\ln(c-e^x)$; (b) $\frac{1}{2}x+e^{2(c-x)}-\frac{1}{4}$; (c) $\mathrm{tg}\,(x-c)-x$.

2.10. (a) $y=x\ln(-x)+cx$; (b) $(v/u)^2-\ln v^2=c$ e $v(u)=0$; (c) $\ln x^3-\left(1+y^2/x^2\right)^{3/2}=c$.

2.11. (a) $x^2+y^2-5x^3=0$; (b) $y=2\sqrt{1-3x}-2x+2$.

2.12. (a) $x^2+4xy-y^2=c$; (b) $x^3+6xy^2-y^3=c$.

2.13. (a) Sempre; (b) Se e só se $B=2D$ e $E=2C$.

2.15. (a) $y=x^3+cx^{-3}$; (b) $y=cx^{-2}-x^{-3}$; (c) $x=1+ce^{1/t}$; (d) $r=\ln(\cos\theta)+\mathrm{sen}\,\theta+c$.

2.16. (a) $y=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}e^{-x^3}$; (b) $y=x-1+e^{-x}$ para $0\le x\le 1$ e $y=1+e^{-x}(1-e)$ para $x>1$.

2.17. (a) $y=x(x+c)^{-1}$; (b) $y^{-3}=2x^6+cx^3$; (c) $\ln\left(x^2-2\right)t+t=c$; (d) $y^4=2+ce^{-8x^2}$.

2.18. (a) $y^4=x^2+15x^{-2}$; (b) $y=4x^{-3}$.

2.19. (a) $3y^2+x^2=k^2$ e $x=0$; (b) $2x+y^2-\ln y^2=k$ e $x=0$; (c) $(\ln y^2-1)y^2+2x^2=k$;
(d) $2y+\ln(y-x-1)^2=k$.

2.20. (a) $y=c\left(x^6+2x^3+1\right)$; (b) $y=c\left(e^{2x}-2\right)^{1/2}$; (c) $y=x\ln x+cx$.

2.21. (a) $(3y+2x)^2=c(y-x)$, $c>0$; (b) $y=(cx+c-1)e^{-x}$; (c) $y^{-2}=1+cx^2$ e $y=0$;
(d) $y=\mathrm{tg}\,(x-c)-x$; (e) $y=4x+e^{4(x-c)}$.

2.22. (a) $y=\left(x^2+3x\right)^{1/2}$; (b) $e^{2x}y^2-2x^2=4$; (c) $y=(\sqrt{2x}/2-1)^{1/2}$;
(d) $y=1-e^{-x}$ se $x\le 2$ e $2y=x-1-\left(2-e^2\right)e^{-x}$ se $x>2$; (e) $e^{1-x^2/y^2}=x^2$.

2.23. $k=1/4$.

2.24. (b) $dv/dx+[2A(x)f(x)+B(x)]\,v=-A(x)$; (c) $y=x+(1-x+ce^{-x})^{-1}$.

2.25. (a) $x=5\,e^t$, $x(5)=5\,e^5$; (b) $x=2\,e^t-t-1$.

2.26. (a) $v=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\,e^{-2t}$; (b) $x=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}e^{-2t}$; (c) $v=(3\,e^{2t}+1)/(3\,e^{2t}-1)$.

2.28. (a) $i=2(1-e^{-t})$; (b) $i=(\cos t+\mathrm{sen}\,t-e^{-t})/2$.

2.29. (a) $n=9.54\times10^{-3}2^{t/100}$, 20000; (b) $n=(10^{-6}+4370e^{-t/100})^{-1}$, (i) 232010, (ii) 10^6.

2.30. $T=25\,2^{-t}+5$; (a) $5\,^oC$; (b) $8.125\,^oC$; (c) $5\,^oC$.

Capítulo 3

Resolução analítica de equações diferenciais lineares de ordem n

3.1 Introdução às equações diferenciais lineares de ordem n

Definição 3.1 *Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n na variável dependente y e na variável independente x é uma equação diferencial que se encontra, ou pode ser expressa, na forma*

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x), \tag{3.1}$$

onde a função $a_0(x)$ não é identicamente nula. Supomos que as funções reais a_0, a_1, ..., a_n e F são funções reais contínuas no intervalo real $I = [a, b]$ e que $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. O termo do lado direito (segundo membro) da equação diferencial precedente, $F(x)$, designa-se ***termo não homogéneo*** *da equação diferencial. Se a função F for identicamente nula, a equação diferencial diz-se uma* ***equação diferencial linear homogénea****.*

Para $n = 2$ a equação diferencial (3.1) reduz-se a

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x),$$

sendo a correspondente equação diferencial de segunda ordem homogénea (ou incompleta)

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0.$$

De novo, supomos que a_0, a_1, a_2 e F são funções reais contínuas em $I = [a, b]$ e que $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Exemplo 3.1 *As equações diferenciais*

$$(a) \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + \cos x\frac{dy}{dx} + x^3\, y = e^x; \qquad (b) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

são equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem, sendo (a) não homogénea e (b) homogénea.

3.2 Propriedades das equações diferenciais lineares homogéneas

Consideramos agora alguns resultados relativos à equação diferencial linear homogénea

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0. \tag{3.2}$$

Teorema 3.1 *Sejam f_1, f_2, ..., f_m, m soluções da equação diferencial (3.2). Então*

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m,$$

onde c_1, c_2, ..., c_m, são constantes arbitrárias, é ainda uma solução da equação diferencial (3.2).

Demonstração Tem-se, por hipótese,

$$\begin{aligned}
a_0(x)\frac{d^n f_1}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}f_1}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{df_1}{dx} + a_n(x)f_1 = 0\\
a_0(x)\frac{d^n f_2}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}f_2}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{df_2}{dx} + a_n(x)f_2 = 0\\
\vdots\\
a_0(x)\frac{d^n f_m}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}f_m}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{df_m}{dx} + a_n(x)f_m = 0,
\end{aligned}$$

pelo que, atendendo à linearidade da equação diferencial dada, resulta

$$\begin{aligned}
a_0(x)\frac{d^n c_1 f_1}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}c_1 f_1}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dc_1 f_1}{dx} + a_n(x)c_1 f_1 = 0\\
a_0(x)\frac{d^n c_2 f_2}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}c_2 f_2}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dc_2 f_2}{dx} + a_n(x)c_2 f_2 = 0\\
\vdots\\
a_0(x)\frac{d^n c_m f_m}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}c_m f_m}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dc_m f_m}{dx} + a_n(x)c_m f_m = 0.
\end{aligned}$$

Adicionando cada um dos membros das m equações diferenciais precedentes e agrupando as várias derivadas, tem-se

$$\begin{aligned}
a_0(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m\right) + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m\right) + \cdots\\
\cdots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx}\left(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m\right) + a_n(x)\left(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m\right) = 0,
\end{aligned}$$

ficando assim demonstrado o resultado pretendido. ■

Definição 3.2 *Se f_1, f_2, ..., f_m, são m funções dadas e c_1, c_2, ..., c_m, são m constantes, então a expressão*

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m$$

designa-se uma ***combinação linear*** *das funções f_1, f_2, ..., f_m.*

Desta definição e do teorema precedente decorre o seguinte resultado.

Corolário 3.2 *Qualquer combinação linear de soluções da equação diferencial linear homogénea (3.2) é ainda uma solução dessa equação diferencial.*

Exemplo 3.2 *Pode-se verificar facilmente que as funções* $\operatorname{sen} x$ *e* $\cos x$ *são soluções da equações diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0. \tag{3.3}$$

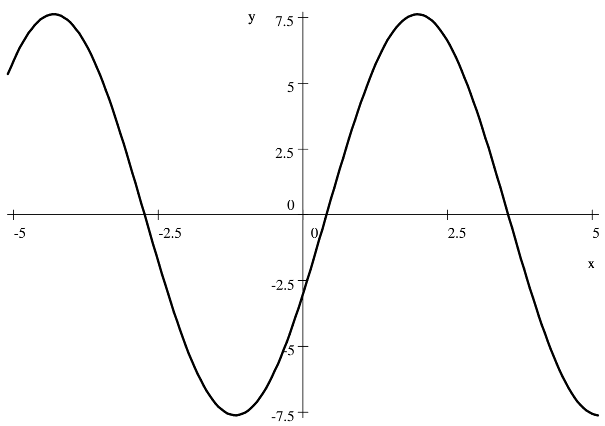
Então a combinação linear

$$c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

é também uma solução da equação diferencial dada quaisquer que sejam as constantes c_1 *e* c_2*. Por exemplo,*

$$7 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$$

é uma solução da equação diferencial dada.



Representação gráfica da função $7 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$*, solução de (3.3)*

Exemplo 3.3 *Sabendo que* e^x*,* e^{-x} *e* e^{2x} *são soluções da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0, \tag{3.4}$$

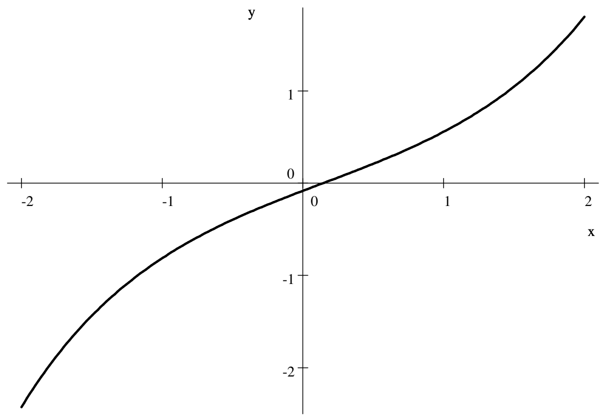
conclui-se que

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

é uma solução da equação diferencial dada quaisquer que sejam as constantes c_1*,* c_2 *e* c_3*. Assim,*

$$\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{-x}$$

é uma solução da equação diferencial dada.



Representação gráfica da função $\frac{1}{4}e^{x} - \frac{1}{3}e^{-x}$, *solução de (3.4)*

Problema Sabendo que e^{5x}, e^{-2x} e e^{3x} são soluções da equação diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 30y = 0,$$

determinar uma família de soluções desta equação que envolva 3 constantes arbitrárias.
Resp.: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} + c_3e^{5x}$.

Passamos agora a lidar com o que designaremos por solução geral da equação diferencial (3.2). Para esse efeito começaremos por introduzir (ou recordar) os conceitos de dependência linear e independência linear de funções.

Definição 3.3 *As k funções f_1, f_2, ..., f_k, dizem-se **funções linearmente dependentes** no intervalo $I = [a, b]$ se existem constantes c_1, c_2, ..., c_k, não todas nulas, tais que*

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_kf_k(x) = 0$$

para todo $x \in I$.

Exemplo 3.4 *As funções x e $2x$ são linearmente dependentes no intervalo $[0, 1]$ já que existem constantes c_1 e c_2, não todas nulas, tais que*

$$c_1(x) + c_2(2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (c_1 + 2c_2)x = 0$$

para todo $x \in [0, 1]$. Considere-se, por exemplo, $c_1 = 2$ e $c_2 = -1$.

Exemplo 3.5 *As funções $\operatorname{sen} x$, $3\operatorname{sen} x$ e $-\operatorname{sen} x$ são linearmente dependentes no intervalo $[-1, 2]$ pois existem constantes c_1, c_2 e c_3, não todas nulas, tais que*

$$c_1(\operatorname{sen} x) + c_2(3\operatorname{sen} x) + c_3(-\operatorname{sen} x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (c_1 + 3c_2 - c_3)\operatorname{sen} x = 0$$

para todo $x \in [-1, 2]$. Tome-se, por exemplo, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ e $c_3 = 4$.

Definição 3.4 *As m funções f_1, f_2, ..., f_m, dizem-se* ***funções linearmente independentes*** *no intervalo $I = [a, b]$ se não são linearmente dependentes nesse intervalo. Ou seja, as funções f_1, f_2, ..., f_m, são linearmente independentes no intervalo I se a relação*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_m f_m(x) = 0, \qquad \forall x \in I$$

implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0.$$

Por outras palavras, a única combinação linear das funções f_1, f_2, ..., f_m, que é identicamente nula em I é a combinação trivial

$$0 \times f_1(x) + 0 \times f_2(x) + \cdots + 0 \times f_m(x) = 0.$$

Exemplo 3.6 *As funções x e x^2 são linearmente independentes no intervalo $[0, 1]$ pois*

$$c_1 x + c_2 x^2 = 0, \quad \forall x \in [0, 1]$$

verifica-se somente quando $c_1 = c_2 = 0$ (porquê?). O mesmo se passa, por exemplo, com as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\cos 2x$, e^x e e^{-x}, $\cosh 3x$ e $\operatorname{senh} 3x$, etc, conforme veremos mais à frente.

O próximo teorema diz respeito à existência de conjuntos de soluções linearmente independentes de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n, bem como à relevância de tais conjuntos na construção de soluções deste tipo de equações diferenciais.

Teorema 3.3 *A equação diferencial linear homogénea de ordem n (3.2) possui sempre n soluções linearmente independentes. Mais ainda, se f_1, f_2, ..., f_n, são n soluções linearmente independentes da equação diferencial (3.2), então toda a solução da equação diferencial (3.2) pode ser expressa como uma combinação linear*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$

destas n funções linearmente independentes, escolhendo adequadamente as constantes c_1, c_2, ..., c_n.

Este teorema diz-nos que dada uma equação diferencial linear homogénea de ordem n, existe um conjunto de n soluções linearmente independentes. Uma vez assegurada a existência desse conjunto, o teorema estabelece que qualquer solução da equação diferencial (3.2) pode ser escrita como uma combinação linear das n soluções linearmente independentes escolhendo adequadamente as constantes que intervêm na combinação linear.

Exemplo 3.7 *Vimos anteriormente que as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ são soluções da equação diferencial linear homogénea*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

em $\mathbb{R}$. Pode-se mostrar que estas duas soluções são linearmente independentes (ver Exemplo 3.13). Suponhamos agora que f é uma solução qualquer desta equação diferencial. O Teorema 3.3 garante que f pode ser expressa como uma combinação linear $c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ das funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ escolhendo adequadamente as constantes c_1 e c_2. Ou seja, existem duas constantes c_1 e c_2 (que são únicas) tais que

$$f(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo, $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/6)$ *é uma solução da equação diferencial dada conforme se verifica facilmente. Como*

$$\operatorname{sen}(x + \pi/6) = \operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos x,$$

vemos que a solução $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/6)$ *pode ser expressa como uma combinação linear*

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos x$$

das duas soluções linearmente independentes $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$*. Considerou-se, portanto,* $c_1 = \sqrt{3}/2$ *e* $c_2 = 1/2$*.*

Seja agora f_1, f_2, ..., f_n, um conjunto de n soluções linearmente independentes da equação diferencial linear homogénea de ordem n (3.2). Então o Teorema 3.2 garante que a combinação linear

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x), \tag{3.5}$$

onde c_1, c_2, ..., c_n, são constantes arbitrárias, é também uma solução da equação diferencial (3.2). Por outro lado, pelo Corolário 3.3 sabemos que se f é uma solução da equação diferencial (3.2), então f pode ser expressa como uma combinação linear (3.5) das n soluções linearmente independentes f_1, f_2, ..., f_n, escolhendo adequadamente as constantes c_1, c_2, ..., c_n. Portanto, a combinação linear (3.5) das n soluções linearmente independentes f_1, f_2, ..., f_n, na qual c_1, c_2, ..., c_n, são constantes arbitrárias, deve incluir todas as soluções da equação diferencial (3.2). Por esta razão, referimos-nos a um conjunto de n soluções da equação diferencial homogénea (3.2) como "um conjunto fundamental de soluções" dessa equação diferencial e designamos uma combinação linear "geral" de n soluções linearmente independentes por "solução geral" da equação diferencial (3.2).

Definição 3.5 *Se* f_1, f_2, ..., f_n, *são* n *soluções linearmente independentes da equação diferencial linear homogénea de ordem* n

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \tag{3.6}$$

em $I = [a, b]$*, então o conjunto* f_1, f_2, ..., f_n, *designa-se* ***um conjunto fundamental de soluções*** *desta equação diferencial. Por outro lado, a função* f *definida por*

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x), \qquad x \in I,$$

onde c_1, c_2, ..., c_n, *são constantes arbitrárias, designa-se* ***solução geral da equação diferencial*** *(3.6) em* I*. Conforme veremos, para uma dada equação diferencial do tipo (3.6), existe uma infinidade de conjuntos fundamentais de soluções e consequentemente de formas distintas, embora equivalentes, de escrever a respetiva solução geral.*

Exemplo 3.8 *Sabendo que as funções* $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$ *são duas soluções linearmente independentes da equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

para todo x real, então $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ constituem um conjunto fundamental de soluções desta equação diferencial, sendo a sua solução geral dada por

$$c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x,$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Podemos então escrever a respetiva solução geral como

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Exemplo 3.9 *Pode-se mostrar que as soluções e^x, e^{-x} e e^{2x} da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

são linearmente independentes para todo x real (ver Exemplo 3.15). Então e^x, e^{-x} e e^{2x} constituem um conjunto fundamental de soluções desta equação diferencial, sendo a sua solução geral dada por

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x},$$

onde c_1, c_2 e c_3 são constantes arbitrárias.

Exemplo 3.10 *Pode-se mostrar que as funções e^x e e^{-x} constituem um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial (porquê?)*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0. \tag{3.7}$$

Assim, a sua solução geral pode ser escrita como

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Se atribuirmos valores às constantes c_1 e c_2 obteremos soluções da equação diferencial (3.7). Por exemplo, tomando $c_1 = 1/2$ e $c_2 = 1/2$ concluímos que a função $\cosh x$ é uma solução de (3.7). De igual modo, escolhendo $c_1 = 1/2$ e $c_2 = -1/2$ concluímos que o mesmo se passa com a função $\operatorname{senh} x$. Ora, o par de funções $\cosh x$ e $\operatorname{senh} x$ constitui um conjunto fundamental de soluções de (3.7), pelo que a respetiva solução geral também pode ser expressa como

$$y = k_1 \cosh x + k_2 \operatorname{senh} x.$$

Esta forma de representar a solução geral, embora menos óbvia, pode ser mais útil em determinados contextos conforme veremos adiante.

Problema Determinar a solução geral da equação diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 6y = 0, \quad x > 0,$$

sabendo que admite duas soluções do tipo x^n, $n \in \mathbb{Z}$.
Resp.: $y = c_1 x^2 + c_2 x^3$

O próximo teorema fornece-nos um critério simples para determinar se n soluções de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n são ou não linearmente independentes. Antes, porém, introduzimos um novo conceito.

Definição 3.6 *Sejam f_1, f_2, ..., f_k, k funções reais, cada uma possuindo derivadas até à ordem $k-1$ em $I = [a, b]$. O determinante*

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_k) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_k \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_k' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(k-1)} & f_2^{(k-1)} & \cdots & f_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

designa-se o ***Wronskiano*** *destas k funções. Note-se que $W(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ é, tal como f_1, f_2, ..., f_k, uma função real definida em I.*

Teorema 3.4 *As k funções f_1, f_2, ..., f_k, são linearmente independentes em $I = [a, b]$ se e só se o Wronskiano de f_1, f_2, ..., f_k, é diferente de zero para algum valor de x em I.*

Exemplo 3.11 *As funções x, x^2 e x^3, são linearmente independentes em qualquer intervalo real do tipo $[a, b]$.*

Solução. *Tem-se*

$$W\left(x, x^2, x^3\right) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3,$$

pelo que o Wronskiano só se anula para $x = 0$.

Exemplo 3.12 *As funções x^m e x^n, são linearmente independentes no intervalo $[1, 2]$ se e só se $m \neq n$.*

Solução. *De facto, tem-se*

$$W(x^m, x^n) = \begin{vmatrix} x^m & x^n \\ mx^{m-1} & nx^{n-1} \end{vmatrix} = (n - m)\, x^{m+n-1},$$

o qual não se anula no intervalo $[1, 2]$ se e só se $m \neq n$. Note-se que se impusermos adicionalmente que $m + n > 1$, então o mesmo resultado é válido para qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ uma vez que nessas condições o Wronkiano apenas se anula para $x = 0$, existindo portanto uma infinidade de valores de x para os quais $W(x^m, x^n) \neq 0$.

Problema Averiguar em que condições é que os seguintes pares de funções são linearmente independentes: $\left(e^{ax}, e^{bx}\right)$, $(\cos ax, \cos bx)$, $\left(e^{ax}\cos cx, e^{bx}\operatorname{sen} cx\right)$, $(e^{cx}\cos ax, e^{cx}\operatorname{sen} bx)$.
Resp.: $a \neq b$, $|a| \neq |b|$, $a \neq b$, $|a| \neq |b|$, respetivamente.

Caso as funções em análise sejam soluções de determinada equação diferencial linear homogénea de ordem n tem-se o seguinte resultado.

Teorema 3.5 *O Wronskiano de n soluções de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n ou é identicamente nulo em I ou nunca se anula nesse intervalo.*

Portanto, se conhecermos n soluções de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n, podemos usar o teorema precedente para determinar, de forma simples, se são ou não linearmente independentes. Se forem linearmente independentes, então formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial em causa, escrevendo-se a respetiva solução geral como uma combinação linear destas n funções com coeficientes arbitrários.

Exemplo 3.13 *Podemos aplicar o Teorema 3.5 para mostrar que as soluções* $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$ *da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

são linearmente independentes. De facto,

$$W(\cos x, \operatorname{sen} x) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

para todo x *real. Portanto,* $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$ *são soluções linearmente independentes da equação diferencial dada, constituindo portanto um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial.*

Exemplo 3.14 *As soluções* e^x *e* e^{-x} *da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

são linearmente independentes uma vez que $W(e^x, e^{-x}) = -2 \neq 0$ *para todo* x *real.*

Exemplo 3.15 *As soluções* e^x*,* e^{-x} *e* e^{2x} *da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

são linearmente independentes em qualquer intervalo real pois

$$W\left(e^x, e^{-x}, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0$$

para todo x *real.*

Exemplo 3.16 *As soluções* x *e* $2x$ *da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

são linearmente dependentes em qualquer intervalo real pois

$$W(x, 2x) = \begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

para todo x *real.*

Problema Mostrar que o Wronskiano das funções 1, x e x^2, soluções da equação diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

nunca se anula.

Problema As funções x e x^2 são linearmente independentes. No entanto, o seu Wronskiano pode anular-se. Podem estas funções constituir um conjunto fundamental de soluções de uma equação diferencial linear homogénea de segunda ordem? Porquê?

A redução de ordem

Teorema 3.6 *Seja $f(x)$ uma solução não trivial (isto é, não identicamente nula) da equação diferencial linear homogénea de ordem n*

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0. \tag{3.8}$$

Então a transformação $y = f(x)v$ reduz a equação diferencial (3.8) a uma equação diferencial linear homogénea de ordem $n-1$ na variável $w = dv/dx$.

Demonstração Este teorema será particularmente útil na obtenção de soluções de equações diferenciais lineares homogéneas de ordem 2. Vejamos o que acontece nessa situação. Considere-se, para o efeito, a equação diferencial (3.8) no caso em que $n = 2$, ou seja,

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0. \tag{3.9}$$

Seja a transformação

$$y = f(x)v, \tag{3.10}$$

onde $f(x)$ é uma solução (conhecida) da equação diferencial (3.9). De (3.10) resulta

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\frac{dv}{dx} + \frac{df(x)}{dx}v \tag{3.11}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{df(x)}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2f(x)}{dx^2}v. \tag{3.12}$$

Substituindo (3.10), (3.11) e (3.12) em (3.9) obtém-se

$$a_0(x)f(x)\frac{d^2v}{dx^2} + \left[2a_0(x)\frac{df(x)}{dx} + a_1(x)f(x)\right]\frac{dv}{dx} + \left[a_0(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} + a_1(x)\frac{df(x)}{dx} + a_2(x)f(x)\right]v = 0,$$

a qual ainda é uma equação de segunda ordem. No entanto, como f é uma solução da equação diferencial (3.9), o coeficiente que multiplica v na equação diferencial agora obtida é nulo, resultando

$$a_0(x)f(x)\frac{d^2v}{dx^2} + \left[2a_0(x)\frac{df(x)}{dx} + a_1(x)f(x)\right]\frac{dv}{dx} = 0.$$

A não existência de termo em v na equação diferencial precedente permite realizar a mudança de variável $w = dv/dx$, vindo

$$a_0(x)f(x)\frac{dw}{dx} + \left[2a_0(x)\frac{df(x)}{dx} + a_1(x)f(x)\right] w = 0,$$

que é uma equação diferencial linear homogénea de primeira ordem na variável dependente w (e simultaneamente de variáveis separáveis). Portanto, supondo que $f(x) \neq 0$ e $\mathrm{a}_0(x) \neq 0$, tem-se

$$\frac{dw}{w} = -\left[2\frac{df(x)}{dx}\frac{1}{f(x)} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right] dx,$$

resultando por primitivação e subsequente exponenciação

$$w = c\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx\right] \frac{1}{[f(x)]^2}.$$

Tomando $c = 1$ e tendo em conta que $w = dv/dx$, obtém-se

$$v = \int \frac{\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx\right]}{[f(x)]^2}\, dx,$$

resultando, atendendo a que $y = vf(x)$,

$$y = f(x)\int \frac{\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx\right]}{[f(x)]^2}\, dx.$$

Esta última solução, que designamos por $g(x)$, é também uma solução da equação diferencial (3.9). Além disso, $f(x)$ e $g(x)$ são linearmente independentes já que

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x) & f(x)v \\ f'(x) & f(x)v' + f'(x)v \end{vmatrix} = [f(x)]^2\, v' = \exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx\right] \neq 0.$$

Portanto, f e g formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial (3.9), pelo que a combinação linear

$$c_1 f + c_2 g$$

é a solução geral da equação diferencial (3.9). ■

Exemplo 3.17 *Sabendo que $y = x$ é uma solução da equação diferencial*

$$\left(x^2+1\right)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0,$$

determinar uma solução linearmente independente usando a propriedade da redução de ordem.

Solução. *Fazendo a mudança de variável $y = vx$, tem-se*

$$y = vx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx},$$

pelo que substituindo estas expressões na equação diferencial dada, resulta

$$\left(x^2+1\right)\left(x\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}\right)-2x\left(v+x\frac{dv}{dx}\right)+2vx=0,$$

ou seja

$$x\left(x^2+1\right)\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}=0, \tag{3.13}$$

onde não figura (como esperado) nenhum termo em v. Fazendo a mudança de variável $w = dv/dx$ obtém-se

$$w=\frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2v}{dx^2}=\frac{dw}{dx},$$

vindo para a equação diferencial (3.13)

$$x\left(x^2+1\right)\frac{dw}{dx}+2w=0,$$

que, conforme esperado, é uma equação diferencial de primeira ordem. Tem-se, supondo que $w(x) \neq 0$,

$$\frac{dw}{w}=-\frac{2}{x\left(x^2+1\right)}dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dw}{w}=\left(-\frac{2}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx,$$

resultando por primitivação e posterior exponenciação

$$\ln|w|=-2\ln|x|+\ln\left(x^2+1\right)+\ln|c| \quad \Rightarrow \quad w=c\frac{x^2+1}{x^2}=c\left(1+\frac{1}{x^2}\right),$$

onde c é uma constante arbitrária não nula (porquê?). Tomando $c = 1$ e atendendo a que $w = dv/dx$ vem

$$\frac{dv}{dx}=\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad v=x-\frac{1}{x}+k,$$

onde k é uma constante arbitrária. Tomando $k = 0$ resulta

$$y=vx=x^2-1,$$

isto é,

$$g(x)=f(x)v(x)=x\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2-1.$$

O Teorema 3.6 garante que esta é a solução linearmente independente que procurávamos. As funções x e x^2-1 constituem um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial dada, pelo que a sua solução geral pode ser escrita como

$$y=c_1x+c_2\left(x^2-1\right).$$

Note-se que o caso $w(x) = 0$ não é interessante neste contexto já que conduz a $v(x) =$ constante e portanto não permite obter um conjunto fundamental de soluções (porquê?).

Exemplo 3.18 *Sabendo que e^{-x} é uma solução da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

pretende-se determinar a solução geral desta equação diferencial.

Solução. *Fazendo a mudança de variável $y = ve^{-x}$, tem-se*

$$y = ve^{-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{-x}\frac{dv}{dx} - ve^{-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}\frac{d^2v}{dx^2} - 2e^{-x}\frac{dv}{dx} + ve^{-x},$$

pelo que substituindo estas expressões na equação diferencial dada, obtém-se

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2} - 2\frac{dv}{dx} + v\right) + 2\left(\frac{dv}{dx} - v\right) + v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2v}{dx^2} = 0,$$

cuja solução geral é (dada a simplicidade da equação diferencial em v não se justifica realizar a mudança de variável $z = dv/dx$)

$$v = Ax + B.$$

Portanto, escolhendo $A = 1$ e $B = 0$, temos que xe^{-x} é uma solução da equação diferencial dada, formando conjuntamente com e^{-x} um conjunto fundamental de soluções (porquê?). Assim, a solução geral da equação diferencial proposta pode ser escrita como

$$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} = (c_1 + c_2x)\,e^{-x}.$$

Problema Sabendo que x^2 é uma solução da equação diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad x > 0,$$

determinar a respetiva solução geral.
Resp.: $y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$.

Exercícios sobre propriedades das equações diferencial lineares homogéneas

Exercício 3.1 *Mostrar que se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são duas soluções da equação diferencial*

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

então $c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$ também é uma solução desta equação diferencial, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Exercício 3.2 *Considerar a equação diferencial*

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

(a) Mostrar que e^x e xe^x são soluções linearmente independentes desta equação diferencial para todo x real;

(b) Escrever a solução geral da equação diferencial dada;

(c) Determinar a solução que satisfaz a condição $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

Exercício 3.3 *Considerar a equação diferencial*

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad x \in [1, 2].$$

(a) Mostrar que x e x^2 são soluções linearmente independentes desta equação diferencial para todo $x \in [1, 2]$;

(b) Escrever a solução geral da equação diferencial dada.

Exercício 3.4 *Considerar a equação diferencial*

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

(a) Mostrar que as funções e^x, e^{4x} e $2e^x - 3e^{4x}$ são soluções desta equação diferencial em $\mathbb{R}$;

(b) Mostrar que as soluções e^x e e^{4x} são linearmente independentes para todo x real;

(c) Mostrar que as soluções e^x e $2e^x - 3e^{4x}$ também são linearmente independentes para todo x real;

(d) Escrever a solução geral da equação diferencial dada.

Exercício 3.5 *Sabendo que $f(x) = x$ é uma solução da equação diferencial*

$$x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$$

em $[1, 2]$, determinar uma solução linearmente independente, $g(x)$, usando a propriedade da redução de ordem e escrever a solução geral da equação diferencial dada.

Exercício 3.6 *Sabendo que $w(x) = e^{2x}$ é uma solução da equação diferencial*

$$(2x + 1)\, y'' - 4\,(x + 1)\, y' + 4y = 0,$$

em $[0, 1]$, determinar uma solução linearmente independente, $q(x)$, usando a propriedade da redução de ordem e escrever a solução geral da equação diferencial dada.

3.3 Propriedades das equações diferenciais lineares não homogéneas

Consideramos agora alguns resultados relativos à equação diferencial não homogénea (ou completa)

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x). \tag{3.14}$$

Um teorema fundamental relativo a esta equação diferencial é o seguinte.

Teorema 3.7 *Seja v uma solução qualquer da equação diferencial linear não homogénea de ordem n (3.14). Seja u uma solução qualquer da equação diferencial homogénea associada. Nestas condições $u+v$ é uma solução da equação diferencial não homogénea (3.14).*

Demonstração A demonstração deste teorema recorre ao facto da equação diferencial ser linear. De facto, tem-se por hipótese,

$$a_0(x)\frac{d^n v}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dv}{dx} + a_n(x)v = F(x)$$

e

$$a_0(x)\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{du}{dx} + a_n(x)u = 0.$$

Adicionando as duas equações precedentes membro a membro, obtém-se

$$a_0(x)\frac{d^n(u+v)}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}(u+v)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d(u+v)}{dx} + a_n(x)(u+v) = F(x),$$

mostrando-se assim que $u+v$ é também uma solução de (3.14). ■

Exemplo 3.19 *Sabendo que $f(x)=x$ é uma solução da equação diferencial não homogénea*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$$

e que $g(x)=\operatorname{sen} x$ é uma solução da equação diferencial homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

conclui-se que $h(x)=x+\operatorname{sen} x$ é também uma solução da equação diferencial não homogénea dada.

Problema Mostrar que $y = x + k\cos x$ também é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$$

qualquer que seja o valor da constante real k.

Apliquemos agora o Teorema 3.7 ao caso em que v é uma solução dada y_p da equação diferencial não homogénea (3.14), não envolvendo qualquer constante arbitrária, e que u é a solução geral

$$y_c = c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n$$

da equação diferencial homogénea associada. Então

$$y_c + y_p$$

é uma solução da equação diferencial não homogénea (3.14) envolvendo n constantes arbitrárias. Temos ainda o seguinte resultado.

Teorema 3.8 *Seja y_p uma solução dada da equação diferencial linear não homogénea de ordem n (3.14) não envolvendo qualquer constante arbitrária. Seja*

$$y_c = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$$

a solução geral da equação diferencial homogénea (ou incompleta) associada. Então toda a solução da equação diferencial (3.14) pode ser expressa na forma

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n + y_p$$

escolhendo adequadamente as constantes c_1, c_2, ..., c_n.

Neste contexto, tem-se a seguinte definição.

Definição 3.7 *Considere-se a equação diferencial linear não homogénea de ordem n*

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x) \tag{3.15}$$

e a equação diferencial homogénea associada

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0. \tag{3.16}$$

Tem-se os seguintes resultados:

1. *A solução geral da equação diferencial (3.16) designa-se* ***função complementar*** *da equação diferencial (3.15), denotando-se por y_c;*
2. *Qualquer solução particular da equação diferencial (3.15) que não envolva constantes arbitrárias designa-se um* ***integral particular*** *ou* ***solução particular*** *da equação diferencial (3.15), y_p;*
3. *A solução $y_c + y_p$ da equação diferencial (3.15), onde y_c é a função complementar e y_p é um integral particular da equação diferencial (3.15), designa-se* ***solução geral*** *da equação diferencial (3.15).*

Exemplo 3.20 *Considere-se a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x.$$

A função complementar associada é a solução geral da equação diferencial homogénea associada

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

pelo que (ver Exemplo 3.2)

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Por outro lado, um integral particular da equação diferencial não homogénea é (ver Exemplo 3.19)

$$y_p = x,$$

pelo que a solução geral da equação diferencial não homogénea pode ser escrita na forma

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x.$$

Problema Determinar a solução geral da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 16x,$$

sabendo que as funções $\cosh 2x$ e $\operatorname{senh} 2x$ são soluções da equação homogénea associada.
Resp.: $y = c_1 \cosh 2x + c_2 \operatorname{senh} 2x - 4x$.

Abordaremos de seguida alguns métodos para obtenção destas duas componentes da solução geral. Para esse efeito comecemos por notar que se o membro não homogéneo da equação diferencial (3.15) for expresso como uma combinação linear de duas ou mais funções, então podemos usar o seguinte resultado para obter uma solução particular daquela equação.

Teorema 3.9 ***(Princípio da Sobreposição)*** *Sejam f_1, f_2, ..., f_m, integrais/soluções particulares das equações diferenciais*

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F_1(x), \tag{3.17}$$

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F_2(x), \tag{3.18}$$

$$\vdots$$

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F_m(x), \tag{3.19}$$

respetivamente. Então

$$k_1f_1 + k_2f_2 + \cdots + k_mf_m$$

é um integral/solução particular da equação diferencial

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = k_1F_1(x) + k_2F_2(x) + \cdots + k_mF_m(x),$$

onde k_1, k_2, ..., k_m, são constantes. A demonstração deste teorema é imediata devido à linearidade das equações diferenciais envolvidas.

Exemplo 3.21 *Considere-se a equação diferencial*

$$y'' - y = -5 + 2x + 8e^{-x}.$$

O segundo membro desta equação diferencial é uma combinação linear das funções $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ e $f_3(x) = e^{-x}$, sendo os coeficientes dessa combinação linear $k_1 = -5$, $k_2 = 2$, $k_3 = 8$ (note-se que a escolha dos pares (f_i, k_i) não é única). Assim, consideremos as equações diferenciais e as respetivas soluções particulares

$$\begin{aligned} y'' - y = 1 \quad &\Rightarrow \quad y_{p1} = -1, \\ y'' - y = x \quad &\Rightarrow \quad y_{p2} = -x, \\ y'' - y = e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad y_{p3} = -\frac{1}{2}xe^{-x}. \end{aligned}$$

Assim, por aplicação do Princípio da Sobreposição podemos concluir que uma solução particular da equação diferencial dada é

$$y_p = k_1 y_{p1} + k_2 y_{p2} + k_3 y_{p3} = 5 - 2x - 4xe^{-x}.$$

Exemplo 3.22 *Suponhamos que queremos determinar um integral particular da equação diferencial*

$$y'' + y = 3x + 5\operatorname{tg} x.$$

Solução. *Podemos considerar duas equações diferenciais, a saber,*

$$y'' + y = x \quad e \quad y'' + y = \operatorname{tg} x,$$

as quais têm integrais particulares x e $-(\cos x)\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$, respetivamente. Portanto, aplicando o Princípio da Sobreposição podemos concluir que um integral particular da equação diferencial dada é

$$y_p = 3x - 5(\cos x)\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|.$$

Problema Determinar uma solução particular da equação diferencial

$$y'' - y' = 7 - 3e^x + 4e^{2x},$$

sabendo que as funções x, xe^x e e^{2x} são, respetivamente, solução das seguintes equações diferenciais

$$y'' - y' = -1, \quad y'' - y' = e^x \quad \text{e} \quad y'' - y' = 2e^{2x}.$$

Resp.: $y_p = -7x - 3xe^x + 2e^{2x}$.

O interesse da aplicação desta propriedade está portanto na possibilidade de decompor o problema inicial em problemas mais simples, (no máximo) tantos quanto o número de parcelas existentes no termo não homogéneo da equação diferencial para a qual se pretende determinar uma solução particular. Assim, conforme veremos, pode-se inclusivamente usar métodos distintos para o cálculo de soluções particulares consoante a natureza das funções que surjam no segundo membro de cada uma das m equações diferenciais referidas no teorema precedente.

Exercícios sobre propriedades das equações diferenciais lineares não homogéneas

Exercício 3.7 *Considerar a equação diferencial linear não homogénea*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2.$$

(a) *Mostrar que e^x e e^{2x} são soluções linearmente independentes da equação diferencial homogénea associada;*

(b) *Qual a função complementar da equação diferencial dada?*

(c) *Mostrar que $2x^2 + 6x + 7$ é um integral particular da equação diferencial dada;*

(d) *Qual a solução geral da equação diferencial dada?*

Exercício 3.8 *Sabendo que um integral particular da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 1$$

é $y = 1/6$; que um integral particular da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x$$

é $y = x/6 + 5/36$; e que um integral particular da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^x$$

é $y = e^x/2$, determinar um integral particular da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = -6 + 12x - 3e^x.$$

3.4 A equação linear homogénea com coeficientes constantes

Consideramos agora a **equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes**

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = 0, \tag{3.20}$$

onde a_0, a_1, ..., a_n, são constantes reais. Mostraremos que a solução geral desta equação diferencial pode ser obtida de forma explícita.

Devido à forma da equação diferencial (3.20), é de esperar que qualquer função $f(x)$ que seja uma solução dessa equação tenha a seguinte propriedade:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[f(x)\right] = c_kf(x). \tag{3.21}$$

Ou seja, as derivadas de f devem ser múltiplos da própria função. A questão está em saber se existe alguma função com tal propriedade. A resposta é afirmativa pois a função

$$f(x) = e^{mx},$$

onde m é uma constante (em geral complexa), verifica a propriedade (3.21) uma vez que

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[f(x)\right] = \frac{d^k}{dx^k}\left[e^{mx}\right] = m^ke^{mx} = m^kf(x) = c_kf(x),$$

com $c_k = m^k$. Assim sendo, procuramos soluções da equação diferencial (3.20) da forma

$$y = e^{mx}$$

para um dado valor de m.

Supondo então que $y = e^{mx}$ é uma solução da equação diferencial (3.21) para um determinado valor de m, tem-se

$$y = e^{mx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = me^{mx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx} \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \frac{d^ny}{dx^n} = m^n e^{mx}.$$

Substituindo estes resultados na equação diferencial (3.20), obtém-se

$$a_0 m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + \cdots + a_{n-1} m e^{mx} + a_n e^{mx} = 0$$

ou, dado que $e^{mx} \neq 0$ para todo x real,

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0. \tag{3.22}$$

Esta equação polinomial de grau n denomina-se **equação caraterística** associada à equação diferencial (3.20).

Se $y = e^{mx}$ é uma solução da equação diferencial (3.20), então a constante complexa m deve satisfazer a equação caraterística (3.22). Portanto, para determinar soluções da equação diferencial (3.20) escrevemos a equação caraterística associada (3.22) e determinamos as n soluções desta equação polinomial. Teremos várias situações consoante a natureza das raízes da equação caraterística: raízes reais distintas, raízes reais repetidas, raízes complexas conjugadas distintas, raízes complexas conjugadas repetidas, podendo-se ter inclusivamente combinações envolvendo vários destes "casos base". Vejamos o que acontece para cada um destes casos.

Raízes reais distintas

Suponhamos que as raízes da equação (3.22) são n números reais distintos,

$$m_1, \; m_2, \; \ldots \; , \; m_n.$$

Então,

$$e^{m_1 x}, \; e^{m_2 x}, \; \ldots \; , \; e^{m_n x}$$

são n soluções distintas da equação diferencial (3.20). Mais ainda, recorrendo ao Wronskiano pode-se mostrar que estas soluções são linearmente independentes, constituindo portanto um conjunto fundamental de soluções de (3.20). Tem-se o seguinte resultado.

Teorema 3.10 *Considere-se a equação diferencial linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes (3.20). Se a equação caraterística associada (3.22) tiver n raízes reais distintas, $m_1, m_2, \ldots, m_n$, então a solução geral da equação diferencial (3.20) é*

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x},$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$, são constantes arbitrárias.

Exemplo 3.23 *Considere-se o PVI*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0, \quad x > 0; \quad y(0) = -1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0. \tag{3.23}$$

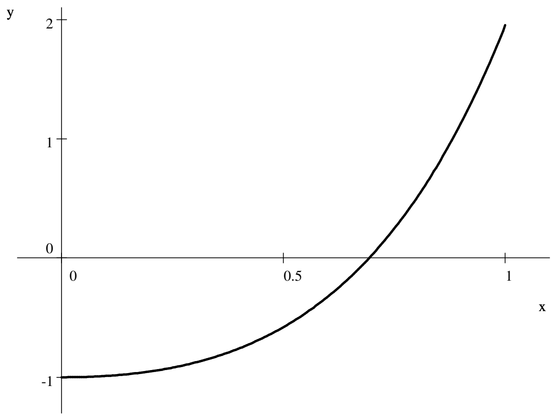
A equação caraterística associada à equação diferencial é (porquê?)

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m-1)(m-2) = 0,$$

sendo as suas raízes $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Tratando-se de duas raízes reais distintas, concluímos que e^x e e^{2x} são duas soluções linearmente independentes da equação diferencial de segunda ordem dada, pelo que constituem um conjunto fundamental de soluções dessa equação diferencial. Assim, a sua solução geral é

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Calculando o valor de c_1 e c_2 de forma a ter-se $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, obtém-se $y = e^{2x} - 2e^x$.



Representação gráfica da função $e^{2x} - 2e^x$, solução do PVI (3.23)

Exemplo 3.24 *Determinar a solução do PVI*

$$y''' - 4y'' + y' + 6y = 0, \quad x > 0; \quad y(0) = 14, \quad y'(0) = 12, \quad y''(0) = 36. \tag{3.24}$$

Solução. *A equação caraterística associada à equação diferencial é*

$$m^3 - 4m^2 + m + 6 = 0.$$

Sabendo que $m_1 = -1$ é uma raiz desta equação, podemos aplicar a "regra de Ruffini" para determinar as restantes raízes, obtendo-se a fatorização

$$m^3 - 4m^2 + m + 6 = (m+1)(m^2 - 5m + 6) = (m+1)(m-2)(m-3).$$

As raízes obtidas são números reais distintos,

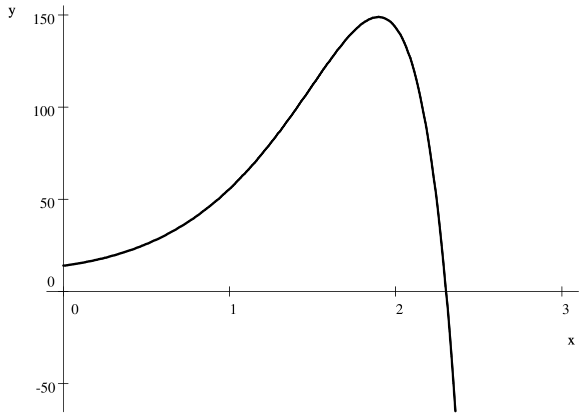
$$m_1 = -1, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 3,$$

pelo que as funções e^{-x}, e^{2x} e e^{3x} formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial dada e assim a respetiva a solução geral é

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}.$$

Calculando o valor de c_1, c_2, e c_3 de forma a ter-se $y(0) = 14$, $y'(0) = 12$, $y''(0) = 36$, obtém-se

$$y = 5e^{-x} + 10e^{2x} - e^{3x}.$$



Representação gráfica da função $5e^{-x} + 10e^{2x} - e^{3x}$, *solução do PVI (3.24)*

Problema Determinar a solução do PVF

$$y'' - y' = 0, \quad 0 < x < 1; \quad y(0) = 2, \quad y'(1) = e.$$

Resp.: $y = e^x + 1$.

Raízes reais repetidas

Exemplo 3.25 *Considere-se a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$$

A equação caraterística associada,

$$m^2 - 6m + 9 = 0,$$

tem duas raízes reais, mas que não são distintas, $m_1 = 3$ *e* $m_2 = 3$. *Correspondendo à raiz* $m_1 = 3$ *teríamos a solução* e^{3x}, *o mesmo acontecendo para a raiz* $m_2 = 3$. *Desta forma, as raízes da equação caraterística não conduzem a um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial dada.*

Sabemos, portanto, que e^{3x} *é uma solução da equação diferencial proposta, faltando agora determinar outra solução que seja linearmente independente. Podemos determinar essa solução usando a propriedade (método) da redução de ordem (porquê?). Ou seja, a segunda solução deve ser da forma*

$$y = e^{3x}\, v(x),$$

com $v(x)$ *não constante. Assim, fazemos*

$$y = e^{3x}\, v \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3e^{3x}\, v + e^{3x}\,\frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{3x}\, v + e^{3x}\,\frac{d^2v}{dx^2} + 6e^{3x}\,\frac{dv}{dx}.$$

Substituindo estes resultados na equação diferencial dada, vem

$$\left(9v + \frac{d^2v}{dx^2} + 6\,\frac{dv}{dx}\right) - 6\left(3v + \frac{dv}{dx}\right) + 9\,v = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 0.$$

Obtém-se assim

$$v = c_1x + c_2.$$

Escolhendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ tem-se $v(x) = x$, obtendo-se a solução

$$y = e^{3x}\, v(x) = x\, e^{3x}.$$

Dispomos assim de duas funções, e^{3x} e $x\, e^{3x}$, que constituem um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial dada (porquê?). Portanto, a respetiva solução geral é

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} = (c_1 + c_2x)\, e^{3x}.$$

Nota A equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

pode ser abordada de uma forma distinta para efeitos da determinação da sua solução geral. O "método" é baseado na fatorização do polinómio que surge na equação caraterística que lhe está associada, ou seja,

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m-3)(m-3) = 0.$$

Tal permite escrever a equação diferencial dada como

$$\left(\frac{d}{dx} - 3\right)\left(\frac{d}{dx} - 3\right) y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{d}{dx} - 3\right)\underbrace{\left(\frac{dy}{dx} - 3y\right)}_{u} = 0. \tag{3.25}$$

Ora, realizando a mudança de variável

$$u = \frac{dy}{dx} - 3y, \tag{3.26}$$

tem-se que a equação diferencial (3.25) corresponde a

$$\left(\frac{d}{dx} - 3\right) u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} - 3u = 0.$$

A equação caraterística associada é $m - 3 = 0$, pelo que uma família de soluções é (porquê?)

$$u = k_1e^{3x}.$$

Uma vez determinada a função $u(x)$, podemos determinar $y(x)$ recorrendo à equação diferencial (3.26), ou seja,

$$u = \frac{dy}{dx} - 3y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} - 3y = k_1e^{3x}.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear de primeira ordem que admite o fator integrante e^{-3x}, pelo que se obtém

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = k_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(e^{-3x}y\right) = k_1 \quad \Leftrightarrow \quad y = (k_1x + k_2)\, e^{3x},$$

que mais não é do que o resultado obtido recorrendo à propriedade de redução da ordem. Esta forma de abordar as equações lineares com coeficientes constantes pode ser interessante quando abordarmos a determinação de soluções particulares de equações lineares não homogéneas (o que não é o caso deste exemplo), pelo que voltaremos posteriormente a este assunto.

Tendo o exemplo precendente como guia, voltemos à equação diferencial de ordem n (3.20). Se a equação caraterística associada (3.22) tem uma raiz real m de multiplicidade dois, então é de esperar que e^{mx} e xe^{mx} sejam as duas soluções linearmente independentes correspondentes.

Suponhamos agora que a equação caraterística associada (3.22) tem uma raiz real m de multiplicidade dois e $n-2$ raízes reais distintas

$$m_1,\ m_2,\ \ldots\ ,\ m_{n-2}.$$

Nestas condições, as n soluções linearmente independentes da equação diferencial (3.20) são

$$e^{mx},\ xe^{mx},\ e^{m_1x},\ e^{m_2x},\ \ldots\ ,\ e^{m_{n-2}x},$$

pelo que a solução geral é

$$y = (c_1 + c_2x)\, e^{mx} + c_3e^{m_1x} + \cdots + c_ne^{m_{n-2}x}.$$

De forma análoga, se a equação caraterística (3.22) tiver 3 raízes reais repetidas, m, pode-se mostrar por sucessivas aplicações da propriedade da redução de ordem que as 3 soluções linearmente independentes que lhes correspondem são

$$e^{mx}, \quad xe^{mx}, \quad x^2e^{mx},$$

sendo a solução geral da equação diferencial dada por

$$y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right) e^{mx}.$$

Tem-se então o seguinte resultado geral.

Teorema 3.11 *Considere-se a equação diferencial linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes (3.20). Se a equação caraterística associada (3.22) tiver uma raiz real m de multiplicidade k, então a parte da solução geral da equação diferencial (3.20) correspondente a estas raízes é*

$$\left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1}\right) e^{mx}$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$, são constantes arbitrárias. Se, além disso, as restantes raízes da equação diferencial (3.20) são números reais distintos $m_{k+1}, \ldots, m_n$, então a solução geral de (3.20) escreve-se

$$y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1}\right) e^{mx} + c_{k+1}e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_ne^{m_nx}.$$

Exemplo 3.26 *Considere-se o PVF*

$$3\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 3y = 0, \quad 0 < x < 3; \quad y(0) = -\frac{5}{4},\ y(3) = \frac{55}{4}e^{-3}. \tag{3.27}$$

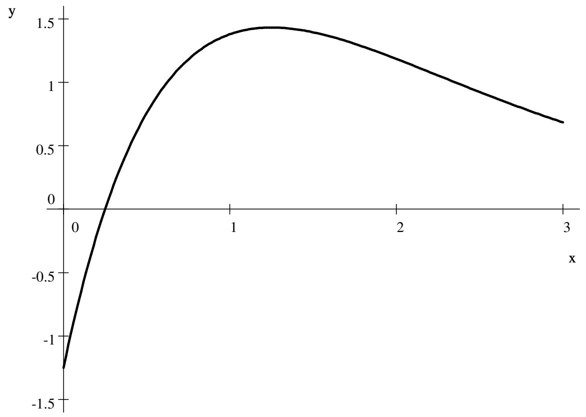
A equação caraterística associada à equação diferencial,

$$3m^2 + 6m + 3 = 0,$$

tem raízes -1 *e* -1*, pelo que a solução geral da equação diferencial é*

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x}.$$

Atendendo às condições fronteira impostas, resulta $y = 5(x - 1/4)e^{-x}$.



Representação gráfica da função $5(x - 1/4)e^{-x}$*, solução do PVF (3.27)*

Exemplo 3.27 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 18y = 0,$$

sabendo que e^{-2x} *é uma solução.*

Solução. *Uma vez que* e^{-2x} *é uma solução da equação diferencial, então concluímos que uma raiz da equação caraterística associada,*

$$m^3 - 4m^2 - 3m + 18 = 0,$$

é -2*. As restantes raízes podem ser calculadas usando a "regra de Ruffini", obtendo-se que a equação caraterística tem duas raízes reais de multiplicidade 2 e uma raiz real que não se repete:* 3*,* 3 *e* -2*. Assim, um conjunto fundamental de soluções é* e^{3x}*,* xe^{3x} *e* e^{-2x}*, pelo que a solução geral da equação diferencial é*

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{3x} + c_3 e^{-2x}.$$

Exemplo 3.28 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 8y = 0,$$

sabendo que e^{-x} *e* e^{2x} *são soluções desta equação.*

Solução. *Procedendo de forma análoga ao exemplo precedente, conclui-se que a equação caraterística associada,*

$$m^4 - 5m^3 + 6m^2 + 4m - 8 = 0,$$

tem raízes 2*,* 2*,* 2 *e* -1*, pelo que a solução geral da equação diferencial é*

$$y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^{2x} + c_4 e^{-x}.$$

Problema Determinar a solução do PVF

$$y'' - 10y' + 25y = 0, \quad 0 < x < 1; \quad y'(0) = 25,\ y'(1) = 0.$$

Resp.: $y = 6e^{5x} - 5xe^{5x}$.

Raízes complexas conjugadas distintas

Suponhamos agora que a equação caraterística (3.22) tem a raiz $a + bi$, onde a e b são números reais, e que esta não se repete. Então, uma vez que os coeficientes da equação caraterística são números reais, $a - bi$ também é uma raiz da equação caraterística que não se repete (porquê?). A parte da solução geral da equação diferencial (3.20) que corresponde a estas duas raízes complexas conjugadas é

$$k_1 e^{(a+bi)x} + k_2 e^{(a-bi)x}$$

ou, equivalentemente,

$$e^{ax}\left(k_1 e^{ibx} + k_2 e^{-ibx}\right),$$

onde k_1e k_2 são constantes complexas. Neste caso, as constantes k_1 e k_2 não podem ser arbitrárias, pois a expressão precedente deve ter parte imaginária nula (porquê?). Assim, temos de averiguar qual a parte real e a qual parte imaginária daquela expressão. Para esse efeito comecemos por notar que

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

pelo que,

$$\begin{aligned} e^{ax}\left(k_1 e^{ibx} + k_2 e^{-ibx}\right) &= e^{ax}\left[k_1\left(\cos bx + i \operatorname{sen} bx\right) + k_2\left(\cos bx - i \operatorname{sen} bx\right)\right] \\ &= e^{ax}\left[(k_1 + k_2)\cos bx + i(k_1 - k_2)\operatorname{sen} bx\right]. \end{aligned}$$

Impondo que

$$\operatorname{Im}(k_1 + k_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} k_1 = -\operatorname{Im} k_2$$

e

$$\operatorname{Re}(k_1 - k_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} k_1 = \operatorname{Re} k_2$$

obtém-se a expressão

$$e^{ax}\left(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx\right),$$

onde $c_1 = k_1 + k_2$ e $c_2 = i\,(k_1 - k_2)$ são duas constantes arbitrárias reais. Portanto, a parte da solução geral correspondente às raízes complexas conjugadas (não repetidas) $a + bi$ e $a - bi$ é

$$e^{ax}\left(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx\right).$$

Teorema 3.12 *Considere-se a equação diferencial linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes (3.20). Se a equação caraterística associada (3.22) tem raízes complexas conjugadas não repetidas $a + bi$ e $a - bi$, onde a e b são números reais, então a parte correspondente na solução geral da equação diferencial (3.20) é*

$$e^{ax}\left(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx\right).$$

É usual assumir-se, sem perda de generalidade, que $b > 0$.

Exemplo 3.29 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' + y = 0, \quad x > 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \tag{3.28}$$

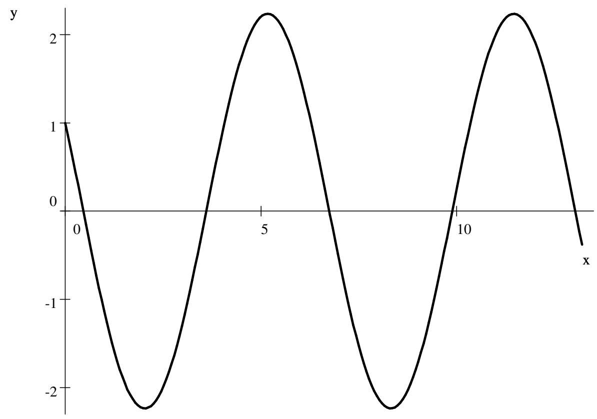
Solução. *A equação caraterística associada à equação diferencial é*

$$m^2 + 1 = 0,$$

cujas raízes são $0 \pm i$*. Assim,* $a = 0$ *e* $b = 1$ *(pois assume-se que* $b > 0$*), pelo que o respetivo conjunto fundamental de soluções é, por exemplo,* $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$*. A solução geral é da equação diferencial é então*

$$y = e^{0x} (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

É fácil mostrar que a solução do PVI proposto é $y = \cos x - 2 \operatorname{sen} x$*.*



Representação gráfica da função $\cos x - 2 \operatorname{sen} x$*, solução do PVI (3.28)*

Note-se que a expressão $\cos x - 2 \operatorname{sen} x$ *pode ser representada na forma* $A \cos(x + \varphi)$*. De facto, tem-se*

$$A \cos(x + \varphi) = A \cos x \cos \varphi - A \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \varphi,$$

pelo que bastará escolher A *e* φ *tal que*

$$A \cos \varphi = 1, \quad -A \operatorname{sen} \varphi = -2,$$

vindo

$$A = \sqrt{5}, \quad \varphi = \cos^{-1} \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 1.107.$$

Assim sendo, outra forma (aproximada) de representar a solução do PVI seria

$$y = \sqrt{5} \cos(x + 1.107).$$

Exemplo 3.30 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' + \frac{1}{3} y' + \frac{37}{36} y = 0, \quad x > 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{13}{6}. \tag{3.29}$$

Solução. *A equação caraterística associada à equação diferencial é*

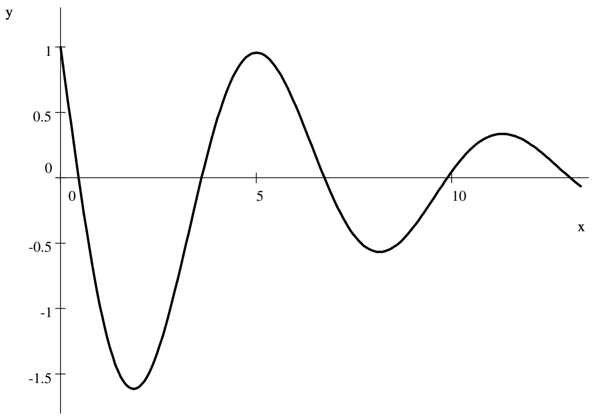
$$m^2 + \frac{1}{3}m + \frac{37}{36} = 0,$$

cujas raízes são $-1/6 \pm i$. *Assim, constituem um conjunto fundamental de soluções as funções* $e^{-x/6}\cos x$ *e* $e^{-x/6}\operatorname{sen} x$, *sendo a respetiva solução geral*

$$y = e^{-x/6}\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right).$$

As condições iniciais impostas conduzem à solução

$$y = e^{-x/6}\left(\cos x - 2\operatorname{sen} x\right).$$



Representação gráfica da função $e^{-x/6}\left(\cos x - 2\sin x\right)$, *solução do PVI (3.29)*

Exemplo 3.31 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 25\frac{dy}{dx} = 0.$$

Solução. *A equação caraterística associada é*

$$m\left(m^2 - 6m + 25\right) = 0,$$

cujas raízes são 0 *e* $3 \pm 4i$. *Um conjunto fundamental de soluções é formado pelas funções* $e^{3x}\cos 4x$, $e^{3x}\operatorname{sen} 4x$ *e* 1, *sendo a respetiva solução geral*

$$y = e^{3x}\left(c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x\right) + c_3.$$

Problema Determinar a solução do PVF

$$y'' + 10y' + 26y = 0, \quad 0 < x < \pi; \quad y(0) = 1,\ y'(\pi) = 0.$$

Resp.: $y = \left(\cos x + 5\operatorname{sen} x\right)e^{-5x}$.

Raízes complexas conjugadas repetidas

Teorema 3.13 *Considere-se a equação diferencial linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes (3.20). Se a equação caraterística associada (3.22) tem raízes complexas conjugadas $a + bi$ e $a - bi$ de multiplicidade k, então a parte correspondente na solução geral da equação diferencial (3.20) é*

$$e^{ax}\left[\left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_kx^{k-1}\right)\cos bx + \left(c_{k+1} + c_{k+2}x + c_{k+3}x^2 + \ldots + c_{2k}x^{k-1}\right)\operatorname{sen} bx\right].$$

Exemplo 3.32 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 14\frac{d^2y}{dx^2} - 20\frac{dy}{dx} + 25y = 0,$$

sabendo que $1 + 2i$ é uma raiz da equação caraterística associada.

Solução. *Se $1 + 2i$ é uma raiz da equação caraterística associada,*

$$m^4 - 4m^3 + 14m^2 - 20m + 25 = 0,$$

então $1 - 2i$ também o é (porquê?). Aplicando a "regra de Ruffini" sucessivamente às raízes $1 + 2i$ e $1 - 2i$ (a ordem é arbitrária), obtém-se a fatorização

$$\left[(m-1)^2 + 4\right]\left(m^2 - 2m + 5\right) = 0,$$

resultando o fator $(m - 1)^2 + 4$ do facto de $1 + 2i$ e $1 - 2i$ serem raízes da equação caraterística. Ora, $m^2 - 2m + 5$ tem precisamente as raízes $1 + 2i$ e $1 - 2i$, pelo que as raízes da equação caraterística são $1 \pm 2i$ de multiplicidade 2. Consequentemente, a respetiva solução geral é

$$y = e^x\left[(c_1 + c_2x)\cos 2x + (c_3 + c_4x)\operatorname{sen} 2x\right].$$

Exemplo 3.33 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 12\frac{d^3y}{dx^3} + 56\frac{d^2y}{dx^2} - 120\frac{dy}{dx} + 100y = 0,$$

sabendo que $e^{3x}\cos x$ é uma solução desta equação.

Solução. *Se a função $e^{3x}\cos x$ é uma solução da equação diferencial, então $e^{3x}\operatorname{sen} x$ também é solução dessa equação. Além disso, a equação caraterística associada admite as raízes $3 \pm i$. Assim, usando um procedimento análogo ao do exemplo precedente, conclui-se que $3 \pm i$ é uma raiz de multiplicidade 2 da equação caraterística*

$$m^4 - 12m^3 + 56m^2 - 120m + 100 = 0$$

e, portanto, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = e^{3x}\left[(c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\operatorname{sen} x\right].$$

Problema Determinar a solução geral da equação diferencial

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Resp.: $y = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\operatorname{sen} x$

Exercícios sobre a equação linear homogénea com coeficientes constantes

Exercício 3.9 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

$(a)\quad y'' - 5y' + 6y = 0;$ $\qquad (f)\quad y''' - 6y'' + 5y' + 12y = 0,\quad$ (e^{-x} *é uma sol.*);

$(b)\quad y'' - 2y' - 3y = 0;$ $\qquad (g)\quad y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0,\quad$ (x^2e^{2x} *é uma sol.*);

$(c)\quad y'' + 9y = 0;$ $\qquad (h)\quad y^{(iv)} - 3y''' - 2y'' + 2y' + 12y = 0,\quad$ (e^{2x}, e^{3x} *são sols.*);

$(d)\quad y'' - 8y' + 16y = 0;$ $\qquad (i)\quad y^{(v)} = 0.$

$(e)\quad y'' + y' + \dfrac{1}{4}y = 0;$

Exercício 3.10 *Determinar a solução dos seguintes PVIs. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI dado.*

(a) $y'' - y' - 12y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5;$

(b) $y'' + 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2;$

(c) $y''' - 5y'' + 9y' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1,$ (e^{2x} *é uma sol. da EDO*).

Exercício 3.11 *As raízes da equação caraterística correspondente a determinada equação diferencial linear homogénea de ordem 8 são:* $3, 3, 3, -1, 2 \pm 3i, 2 \pm 3i$. *Escrever a respetiva solução geral.*

Exercício 3.12 *Sabendo que a função* $e^x \cos 2x$ *é uma solução da equação diferencial*

$$y^{(iv)} + 3y''' + y'' + 13y' + 30y = 0,$$

determinar a respetiva solução geral. Pista: A "regra de Ruffini" aplica-se mesmo quando as raízes são complexas (conjugadas neste caso).

3.5 O método dos coeficientes indeterminados

Consideremos novamente a equação diferencial linear não homogénea de ordem n com coeficientes constantes

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = F(x). \tag{3.30}$$

Recorde-se que a solução geral desta equação diferencial se escreve na forma

$$y_c + y_p,$$

onde y_c é a solução geral da equação diferencial homogénea associada e y_p uma solução particular da equação diferencial (3.30).

O **método dos coeficientes indeterminados** tem como finalidade a determinação de y_p. Do ponto de vista matemático, a classe de funções F à qual podemos aplicar o método dos coeficientes indeterminados é algo limitada, conforme veremos de seguida. No entanto, esta classe contém funções que surgem frequentemente nos segundos membros das equações diferencias lineares não homogéneas associadas a problemas de índole muito variada. Portanto, do ponto de vista prático, a classe de funções em causa não é tão restritiva quanto possa parecer à primeira vista. Acresce-se que o método dos coeficientes indeterminados tem a vantagem de, no caso de poder ser aplicado, ser relativamente simples.

Antes procedermos à descrição detalhada do método propriamente dito, é necessário introduzir alguns conceitos adicionais que se prendem com a classe de funções F.

Definição 3.8 *Diz-se que uma função f é uma* ***função de coeficientes indeterminados*** *(função CI) se obedece a uma das seguintes condições:*

(i) $f(x) = x^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}_0$;

(ii) $f(x) = e^{ax}$, *onde* $a \neq 0$;

(iii) $f(x) = \operatorname{sen}(bx + c)$, *onde* $b \neq 0$;

(iv) $f(x) = \cos(dx + e)$, *onde* $d \neq 0$,

ou ainda se a função f for um produto finito de duas ou mais funções destes quatro tipos.

Exemplo 3.34 *As seguintes funções são exemplos de funções CI dos "tipos base" (i) – (iv).*

$$x^3, \quad e^{-2x}, \quad \operatorname{sen}(2x), \quad \cos(3x - 1).$$

Exemplo 3.35 *As seguintes funções são exemplos de produtos finitos de duas ou mais funções dos "tipos base" (i) – (iv).*

$$x^3 e^{-2x}, \quad x \operatorname{sen}(2x), \quad e^x \cos(3x - 1), \quad x^2 e^{-x} \operatorname{sen}(x) \cos(x).$$

Problema As seguintes funções não são funções CI (porquê?).

$$x + 1, \quad e^x - x, \quad \sec x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \ln x, \quad x^{3/2}, \quad \cos^2(x), \quad x^{-1}$$

O método dos coeficientes indeterminados pode ser aplicado apenas quando a função F presente no segundo membro da equação diferencial com coeficientes constantes (3.30) for uma combinação linear finita de funções CI.

Definição 3.9 *Seja f uma função CI. O conjunto de funções que consiste na própria função f e em todas as funções CI linearmente independentes das quais as sucessivas derivadas de f são múltiplos constantes ou combinações lineares designa-se* ***conjunto CI da função*** *f.*

A definição precedente é, na prática, bem mais simples do que pode parecer à primeira vista. Ilustremos o conceito com alguns exemplos.

Exemplo 3.36 *Seja $f(x) = x^3$. Trata-se de uma função CI, tendo-se,*

$$\frac{df}{dx} = 3x^2, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = 6x, \quad \frac{d^3f}{dx^3} = 6, \quad \frac{d^kf}{dx^k} = 0 \text{ para } k > 3.$$

Assim, as funções CI linearmente independentes das quais as sucessivas derivadas da função f são múltiplos constantes ou combinações lineares são

$$x^2, \quad x, \quad 1,$$

pelo que o conjunto CI associado à função $f(x) = x^3$ é

$$S_f = \left\{x^3,\ x^2,\ x,\ 1\right\}.$$

Exemplo 3.37 *Considere-se a função CI $g(x) = \cos 2x$. Tem-se,*

$$\frac{dg}{dx} = -2\operatorname{sen} 2x, \quad \frac{d^2g}{dx^2} = -4\cos 2x, \quad \frac{d^3g}{dx^3} = 8\operatorname{sen} 2x, \quad \ldots,$$

pelo que o conjunto CI associado à função $g(x)$ é

$$S_g = \{\cos 2x,\ \ \operatorname{sen} 2x\}.$$

Problema Determinar o conjunto CI associado à função CI $r(x) = e^{-x}$.
Resp.: $S_r = \{e^{-x}\}$.

Exemplo 3.38 *A função $h(x) = x^2 \cos x$ é um produto de duas funções CI: x^2 e $\cos x$. Portanto, $h(x)$ é também uma função CI, tendo-se*

$$\frac{dh}{dx} = 2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x, \qquad \frac{d^2h}{dx^2} = 2\cos x - 4x\operatorname{sen} x - x^2\cos x,$$

$$\frac{d^3h}{dx^3} = -6\operatorname{sen} x - 6x\cos x + x^2\operatorname{sen} x, \qquad \frac{d^4h}{dx^4} = \cdots.$$

Ainda que prossigamos a derivação, obteremos sempre combinações lineares das funções $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $x\operatorname{sen} x$, $x\cos x$, $x^2\operatorname{sen} x$ e $x^2\cos x$, pelo que o conjunto CI associado a $h(x)$ é

$$S_h = \left\{\operatorname{sen} x, \cos x, x\operatorname{sen} x, x\cos x, x^2\operatorname{sen} x, x^2\cos x\right\}.$$

Este conjunto CI pode ser determinado, de forma mais simples, recorrendo aos conjuntos CI associados às funções x^2 e $\cos x$. De facto,

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad S_f = \left\{x^2, x, 1\right\}$$

e

$$g(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad Sg = \{\cos x, \operatorname{sen} x\},$$

sendo o conjunto CI associado à função $x^2\cos x$ dado pelo produto cartesiano dos conjuntos S_f e S_g, isto é

$$S_h = S_t \times S_g = \left\{x^2,\ x,\ 1\right\} \times \{\cos x,\ \operatorname{sen} x\} = \left\{\operatorname{sen} x,\ \cos x,\ x\operatorname{sen} x,\ x\cos x,\ x^2\operatorname{sen} x,\ x^2\cos x\right\}.$$

Este procedimento é generalizável ao produto finito de funções CI, podendo ser muito mais simples do que o método direto.

Exemplo 3.39 *Seja* $p(x) = x^2 e^x \cos x$*. Tem-se,*

$$p(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x),$$

onde

$$p_1(x) = x^2, \quad p_2(x) = e^x, \quad p_3(x) = \cos x,$$

são funções CI, correspondendo-lhes os seguintes conjuntos CI,

$$S_{p_1} = \left\{x^2, x, 1\right\}, \quad S_{p_2} = \{e^x\}, \quad S_{f_{p3}} = \{\cos x, \ \operatorname{sen} x\}.$$

Então,

$$Sp = S_{p_1} \times S_{p_2} \times S_{p_3},$$

resultando,

$$S_p = \left\{x^2 e^x \cos x, \ x^2 e^x \operatorname{sen} x, \ x e^x \cos x, \ x e^x \operatorname{sen} x, \ e^x \cos x, \ e^x \operatorname{sen} x\right\}.$$

Problema Determinar o conjunto CI associado à função $q(x) = x^3 e^{-x}$.
Resp.: $S_q = \left\{x^3 e^{-x}, \ x^2 e^{-x}, \ x e^{-x}, \ e^{-x}\right\}$

Vejamos agora em que consiste o método dos coeficientes indeterminados, o qual nos permitirá, recorde-se, determinar soluções particulares da equação diferencial linear não homogénea com coeficientes constantes

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x), \tag{3.31}$$

onde $F(x)$ é uma combinação linear finita $F(x) = A_1 u_1(x) + A_2 u_2(x) + \cdots + A_m u_m(x)$ de funções CI, u_1, u_2, ..., u_m, sendo A_1, A_2, ..., A_m constantes conhecidas.

Assumindo que a função complementar y_c foi previamente determinada recorrendo, por exemplo, à equação caraterística associada à correspondente equação diferencial homogénea, fazemos:

1. Para cada uma das m funções CI
$$u_1, \ u_2, \ldots, \ u_m,$$
determinamos o conjunto CI correspondente, obtendo assim os m conjuntos
$$S_1, \ S_2, \ldots, \ S_m,$$
que lhes estão associados.

2. Suponhamos que um destes conjuntos CI, por exemplo S_j, é um subconjunto de outro conjunto CI, S_k, ou seja $S_j \subset S_k$. Nesse caso, omitimos o conjunto S_j de qualquer consideração futura, preservando somente o conjunto S_k. Este tipo de análise aplica-se a cada um dos conjuntos CI obtidos no passo 1.

3. Consideramos agora cada um dos conjuntos CI restantes (depois do passo 2). Suponhamos que um destes conjuntos CI, por exemplo S_t, inclui um ou mais elementos (necessariamente funções CI linearmente independentes) que são solução da equação diferencial homogénea associada. Nesse caso, multiplicamos cada um dos elementos de S_t pela menor potência inteira de x, de

forma a que o conjunto resultante não contenha nenhum elemento que seja solução da equação diferencial homogénea associada. Como resultado deste processo o conjunto S_t é substituido pelo conjunto CI "revisto" S_t'. Novamente, este tipo de análise aplica-se, separadamente, a cada um os conjuntos CI obtidos após o passo 2.

4. Em geral, teremos neste momento

   (i) Alguns dos conjuntos CI originais, os quais não foram nem omitidos no passo 2, nem "revistos" no passo 3

   (ii) Alguns conjuntos CI "revistos" no passo 3

   Formamos então uma combinação linear dos elementos dos vários conjuntos com coeficientes desconhecidos (mas constantes) – os **coeficientes indeterminados**.

5. Determinamos o valor de cada um dos coeficientes indeterminados substituindo a combinação linear obtida no passo precedente na equação diferencial não homogénea (3.31), obrigando a que se verifique uma identidade. Obtém-se desta forma uma solução particular da equação diferencial não homogénea (3.31).

Nota Se o passo 2. for omitido, o resultado final será o mesmo, mas os cálculos serão, desnecessariamente, mais extensos. Já no que se refere à omissão do passo 3., esta conduz inevitavelmemte a que o sistema de equações resultante do passo 5. não tenha solução, tornando impossível a obtenção de uma solução particular.

Exemplo 3.40 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' - 2y' - 3y = 2e^x - 10\operatorname{sen} x, \quad x > 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{3.32}$$

Solução. *A equação diferencial homogénea associada é*

$$y'' - 2y' - 3y = 0,$$

sendo a equação caraterística correspondente $m^2 - 2m - 3 = 0$*, cujas raízes são reais e distintas:* 3 *e* -1*. Assim, as funções* e^{3x} *e* e^{-x} *formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial precedente, pelo que a função complementar é*

$$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x},$$

onde c_1 *e* c_2 *são constantes arbitrárias. O segundo membro da equação diferencial dada,* $f(x) = 2e^x - 10\operatorname{sen} x$*, é uma combinação linear finita de (duas) funções CI,*

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = \operatorname{sen} x.$$

Assim, os conjuntos CI a considerar neste caso são

$$S_{f_1} = \{e^x\}, \quad S_{f_2} = \{\operatorname{sen} x, \ \cos x\}.$$

É obvio que $S_{f_1} \not\subset S_{f_2}$ *e* $S_{f_2} \not\subset S_{f_1}$*. Por outro lado, nenhum dos elementos destes conjuntos são solução da equação diferencial homogénea associada (basta analisar o conjunto fundamental de soluções ou a* *expressão da função complementar para concluir imediatamente que assim é), pelo que os passos 2 e 3 descritos anteriormente não se aplicam. Desta maneira, uma solução particular da equação diferencial dada é da forma*

$$y_p = Ae^x + B \operatorname{sen} x + C \cos x,$$

onde A, B *e* C *são coeficientes constantes a determinar de forma a que a expressão precedente seja uma solução particular da equação diferencial proposta. Tem-se*

$$y_p' = Ae^x + B \cos x - C \operatorname{sen} x, \quad y_p'' = Ae^x - B \operatorname{sen} x - C \cos x.$$

Atendendo a que deverá ter-se

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = 2e^x - 10 \operatorname{sen} x,$$

a substituição das expressões encontradas para y_p *e para as suas derivadas em ordem a* x *na equação diferencial precedente conduz a*

$$(-4A - 2)\, e^x + (2C - 4B + 10) \operatorname{sen} x + (-4C - 2B) \cos x = 0,$$

que deverá verificar-se para todo x *real. Assim, sendo as funções* e^x, $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$ *linearmente independentes em* $\mathbb{R}$, *a combinação linear precedente é nula para todo* x *real se e só se*

$$\begin{cases} -4A - 2 = 0 \\ 2C - 4B + 10 = 0 \\ -4C - 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ B = 2 \\ C = -1 \end{cases}.$$

Portanto, a aplicação do método dos coeficientes indeterminados permite obter a seguinte solução particular para a equação diferencial dada,

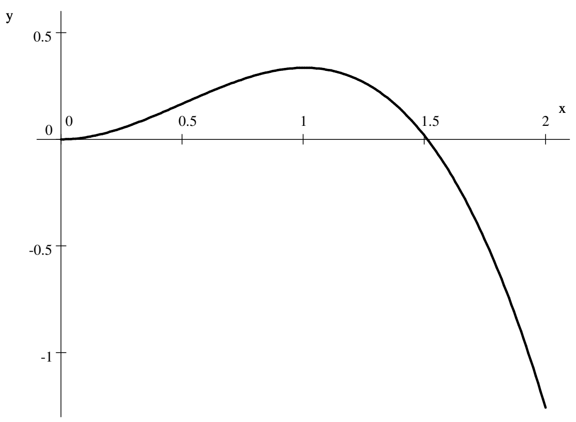
$$y_p = -\frac{1}{2}e^x + 2 \operatorname{sen} x - \cos x,$$

obtendo-se para a solução geral

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2 \operatorname{sen} x - \cos x.$$

O cálculo das constantes c_1 *e* c_2 *é feito impondo as condições iniciais* $y(0) = 0$ *e* $y'(0) = 0$ *na solução geral obtida, resultando*

$$y = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2 \operatorname{sen} x - \cos x.$$



Representação gráfica da função $\frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2 \operatorname{sen} x - \cos x$, *solução do PVI (3.32)*

Problema Mostrar, usando o método dos coeficientes indeterminados, que a solução geral da equação diferencial

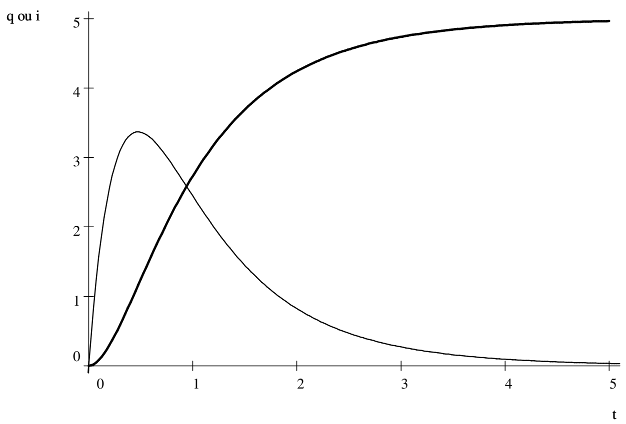
$$y'' - 2y' - 3y = 30 - 12xe^x$$

é $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} + 3xe^x - 10$.

Problema Considere-se um circuito elétrico constituido por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R, uma bobine com indutância L e um condensador com capacitância C, ligados em série (circuito RLC). Nestas condições a carga instantânea no condensador q em cada instante de tempo t é tal que

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E,$$

sendo a intensidade de corrente i em cada instante dada por $i = q'$. Supondo que $E = 20(e^{-3t} + 1)$ (Volt), $R = 6$ (Ohm), $L = 2$ (Henry) e $C = 1/4$ (Farad), e ainda que $q(0) = i(0) = 0$, determinar a carga do condensador, bem como a intensidade de corrente, em cada instante de tempo.
Resp.: $q = 5\left(1 + e^{-3t} - e^{-2t} - e^{-t}\right)$; $i = 5\left(e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t}\right)$.



Representação gráfica de $q(t)$ (a cheio) e $i(t)$

Exemplo 3.41 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' - y' = -7 - 2e^{-x}, \quad x > 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \tag{3.33}$$

Solução. *A equação diferencial homogénea associada é*

$$y'' - y' = 0,$$

tendo-se a equação caraterística $m^2 - m = 0$, cujas raízes são reais e distintas: 0 e 1. Assim, as funções 1 e e^x formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial dada, pelo que a função complementar é

$$y_c = c_1 + c_2e^x,$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Atendendo a que o segundo membro da equação diferencial dada é uma combinação linear das funções CI

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = e^{-x},$$

os conjuntos CI envolvidos são

$$S_{f_1} = \{1\}\,, \quad S_{f_2} = \left\{e^{-x}\right\}.$$

Ora, 1 é uma solução da equação homogénea associada (porquê?) e por isso tem-se

$$S_{f_1} = \{1\} \quad \rightarrow \quad S'_{f_1} = \{x\}\,.$$

O conjunto S_{f_2} não é alterado já que nenhum dos seus membros é solução da equação homogénea associada. Assim,

$$y_p = Ax + Be^{-x},$$

donde

$$y'_p = A - Be^{-x} \quad \Rightarrow \quad y''_p = Be^{-x}.$$

Portanto, a condição

$$y''_p - y'_p = -7 - 2e^{-x}$$

implica

$$Be^{-x} - \left(A - Be^{-x}\right) = -7 - 2e^{-x} \quad \Rightarrow \quad (2B-2)\,e^{-x} - A + 7 = 0,$$

para todo o x real, pelo que $B = 1$ e $A = 7$, vindo

$$y_p = 7x + e^{-x}$$

e consequentemente a solução geral da equação diferencial proposta é

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 e^x + 7x + e^{-x}.$$

Impondo $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, resulta

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 1 \\ c_2 + 7 - 1 = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 7 \\ c_2 = -7 \end{cases},$$

ou seja, a solução do PVI é

$$y = 7 - 7e^x + 7x + e^{-x}.$$

Podemos fazer a respetiva verificação formal. Tem-se,

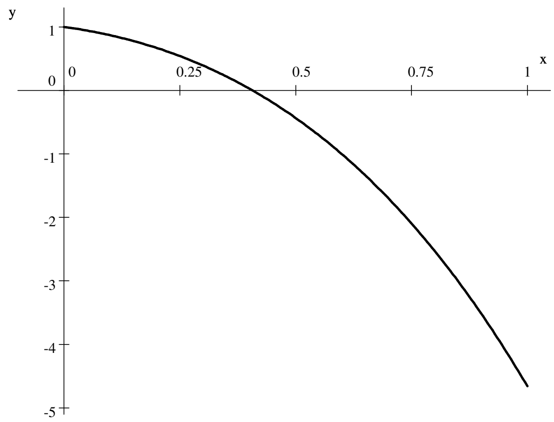
$$y = 7 - 7e^x + 7x + e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y(0) = 1,$$
$$y' = -7e^x + 7 - e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y'(0) = -1,$$

conforme requerido. Além disso,

$$y'' = -7e^x + e^{-x},$$

pelo que

$$y'' - y' = -7 - 2e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad -7e^x + e^{-x} - \left(-7e^x + 7 - e^{-x}\right) = -7 - 2e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0.$$



Representação gráfica da função $7 - 7e^x + 7x + e^{-x}$, *solução do PVI (3.33)*

Problema Determinar a solução geral da equação diferencial

$$y'' - y = -6e^{-x} + 8x^2.$$

Resp.: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + 3xe^{-x} - 8x^2 - 16.$

Exemplo 3.42 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$y^{(iv)} + y'' = 3x^2 + 4\operatorname{sen} x - 2\cos x.$$

Solução. *A equação diferencial homogénea associada é*

$$y^{(iv)} + y'' = 0,$$

cuja equação caraterística, $m^4 + m^2 = 0$, *tem raízes* 0, 0, i *e* $-i$. *A função complementar é, portanto,*

$$y_c = c_1 + c_2x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x.$$

Por outro lado, o termo não homogéneo da equação diferencial dada,

$$3x^2 + 4\operatorname{sen} x - 2\cos x,$$

é uma combinação linear das funções CI

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \operatorname{sen} x, \quad h(x) = \cos x.$$

Os respetivos conjuntos CI são

$$S_f = \left\{x^2, x, 1\right\}, \quad S_g = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}, \quad S_h = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}.$$

Dado que S_g *e* S_h *são idênticos, retemos apenas os conjuntos* S_f *e* S_g. *Relativamente a* S_f, *note-se que este conjunto contém dois elementos,* 1 *e* x, *que são solução da equação diferencial homogénea associada (porquê?). Então, multiplicamos todos os elementos de* S_f *(e apenas de* S_f *!) por* x^2, *resultando*

$$S_f' = \left\{x^4, x^3, x^2\right\}.$$

No que respeita ao conjunto S_g, os seus dois elementos são solução da equação diferencial homogénea associada (porquê), pelo que multiplicamos todos os elementos deste conjunto por x, de forma a que no conjunto resultante não existam soluções da equação diferencial homogénea associada. Obtém-se assim

$$S_g^{'} = \{x \operatorname{sen} x, x \cos x\}.$$

Neste caso a solução particular é da forma

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx \operatorname{sen} x + Ex \cos x,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
y_p' &= 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D \operatorname{sen} x + Dx \cos x + E \cos x - Ex \operatorname{sen} x, \\
y_p'' &= 12Ax^2 + 6Bx + 2C + 2D \cos x - Dx \operatorname{sen} x - Ex \cos x - 2E \operatorname{sen} x, \\
y_p''' &= 24Ax + 6B - Dx \cos x - 3D \operatorname{sen} x + Ex \operatorname{sen} x - 3E \cos x, \\
y_p^{(iv)} &= 24A + Dx \operatorname{sen} x - 4D \cos x + Ex \cos x + 4E \operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Dado que y_p deve verificar

$$y_p^{(iv)} + y_p'' = 3x^2 + 4 \operatorname{sen} x - 2 \cos x$$

para todo x real, tem-se

$$(12A - 3)x^2 + 6Bx + (24A + 2C)\, x^0 + (2D - 2) \cos x + (2E - 4) \operatorname{sen} x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dado que as funções x^2, x, 1, $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}$, resulta

$$\begin{cases} 12A - 3 = 0 \\ 6B = 0 \\ 24A + 2C = 0 \\ 2D - 2 = 0 \\ 2E - 4 = 0 \end{cases}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1/4 \\ B = 0 \\ C = -3 \\ D = 1 \\ E = 2 \end{cases},$$

pelo que um integral particular da equação diferencial dada é

$$y_p = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x \operatorname{sen} x + 2x \cos x,$$

sendo a sua solução geral,

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x \operatorname{sen} x + 2x \cos x.$$

Problema Determinar a solução do PVI

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^x - 2xe^{2x} + 2, \quad x > 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Resp.: $y = 1 - 6\,(1+x)\,e^x + \left(5 + 2x - x^2\right)e^{2x}$.

Exemplo 3.43 *Vejamos finalmente o que acontece caso se omita o passo 3, ou seja, se permanecer num conjunto CI alguma função que seja solução da equação homogénea associada. Para esse efeito considere-se a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2 - e^x. \tag{3.34}$$

Tem-se $y_c = c_1 + c_2 e^{-x}$. As funções CI a considerar são $f_1(x) = 1$ e $f_2(x) = e^x$, sendo os respetivos conjuntos CI $S_1 = \{1\}$ e $S_2 = \{e^x\}$. Uma vez que a função 1 é uma solução da equação diferencial homogénea associada, deveríamos fazer $S_1 = \{1\} \to S_1' = \{x\}$. Se omitirmos este passo, tem-se

$$y_p = A + Be^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_p}{dx} = Be^x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y_p}{dx^2} = Be^x.$$

Substituindo estas expressões em (3.34) resulta

$$2Be^x = 2 - e^x \quad \Leftrightarrow \quad (2B+1)\,e^x - 2 = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Ora, dado e^x e x^0 serem linearmente independentes, decorre da equação precedente o sistema (porquê?)

$$\begin{cases} 2B + 1 = 0 \\ -24 = 0 \end{cases},$$

o qual não tem solução. Portanto, não existe nenhuma função da forma $A + Be^x$ que seja solução particular de (3.34) - a forma correta seria $Ax + Be^x$.

Exercícios sobre o método dos coeficientes indeterminados

Exercício 3.13 *Relativamente às equações diferenciais seguintes indicar, justificando, se podem ser resolvidas usando o método dos coeficientes indeterminados.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4x^2$; (d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 1 + 3\cosh x$;

(b) $y\dfrac{dy}{dx} + y = \cos x$; (e) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2xy = \dfrac{1}{\cos x}$;

(c) $\dfrac{dy}{dx} + xy = \cos x$; (f) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^7 = 0$.

Exercício 3.14 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4x^2;$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 8y = 4e^{2x} - 21e^{-3x};$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 6\operatorname{sen} 2x + 7\cos 2x;$

(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 10y = 5xe^{-2x};$

(e) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - y = \operatorname{sen} 2x + 2x^2 + 1;$

(f) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 12x^2 - 16x\cos 2x.$

Nota: no caso das equações diferenciais com segundos membros que são combinações lineares de duas funções CI, $k_1f_1 + k_2f_2$, determinar também a respetiva solução geral recorrendo à resolução de duas equações diferenciais com segundos membros f_1 e f_2 (Princípio da Sobreposição).

Exercício 3.15 *Determinar a solução dos seguintes PVIs.*

(a) $y'' + 4y = 8\operatorname{sen} 2x, \quad x > 0; \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 8;$

(b) $y'' - y = 12x^2e^x, \quad x > 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

(c) $y'' - y' = x, \quad x > 2; \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 2.$

3.6 O método de variação das constantes

Embora o método dos coeficientes indeterminados seja relativamente simples de aplicar, a verdade é que o seu âmbito de aplicação é algo limitado. De facto, conforme vimos, a classe de funções que podem surgir no segundo membro da equação diferencial a resolver é restrito e, por outro lado, a equação diferencial deve ter obrigatoriamente coeficientes constantes. Assim, o método dos coeficientes indeterminados não poderia ser aplicado para determinar uma solução particular da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{tg} x,$$

pois $\operatorname{tg} x$ não é uma função CI, nem da equação diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} + xy = \cos x,$$

já que não tem coeficientes constantes. Desejaríamos, portanto, dispor de um método para determinar soluções particulares de equações lineares não homogéneas que pudesse ser aplicado em todos os casos, inclusivamente quando os coeficientes não são constantes, sempre que seja conhecida a função complementar. É neste contexto que surge o **método de variação das constantes** – também designado método de variação dos parâmetros. Consideraremos este método para determinar uma solução particular de equações diferenciais lineares não homogéneas de ordem n.

Comecemos por considerar a situação em que a equação diferencial é de segunda ordem ($n = 2$). Nestas condições, tem-se

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = F(x). \tag{3.35}$$

Suponhamos que f e g são duas soluções linearmente independentes da equação diferencial homogénea associada

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{3.36}$$

A função complementar correspondente seria

$$y_c = c_1 f(x) + c_2 g(x),$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

O procedimento adotado no método de variação das constantes consiste em propor que uma solução particular da equação diferencial linear não homogénea (3.35) é da forma

$$y_p = v_1(x)f(x) + v_2(x)g(x),$$

onde v_1 e v_2 são funções a determinar. Note-se desde já a semelhança entre as expressões de y_c e y_p, como se as constantes arbitrárias c_1 e c_2 passassem agora a "variar", transformando-se nas funções v_1 e v_2, respetivamente. A designação do método deriva desta semelhança. Seja então

$$y_p = v_1(x)\, f(x) + v_2(x)\, g(x). \tag{3.37}$$

Temos duas incógnitas, v_1 e v_2, mas apenas uma condição, a saber,

$$a_0(x)y_p'' + a_1(x)y_p' + a_2(x)y_p = F(x), \tag{3.38}$$

pelo que teremos de impor uma condição adicional (arbitrária). Tal será feito de forma a simplificar ao máximo os cálculos a efetuar. Assim, de (3.37) resulta,

$$y_p' = v_1'(x)\, f(x) + v_2'(x)\, g(x) + v_1(x)\, f'(x) + v_2(x)\, g'(x).$$

Estabelecemos a condição arbitrária impondo que

$$v_1'(x)\, f(x) + v_2'(x)\, g(x) = 0 \tag{3.39}$$

para todo x no intervalo de interesse. Desta forma, a expressão para y_p' simplifica-se, vindo

$$y_p' = v_1(x)\, f'(x) + v_2(x)\, g'(x),$$

pelo que

$$y_p'' = v_1'(x)\, f'(x) + v_2'(x)\, g'(x) + v_1(x)\, f''(x) + v_2(x)\, g''(x).$$

Note-se que devido à condição imposta para a expressão de y_p', a expressão de y_p'' não contém segundas derivadas das funções v_1 e v_2.

Substituindo as expressões obtidas para y_p, y_p' e y_p'' na equação diferencial (3.38) resulta

$$v_1\left[a_0(x)f'' + a_1(x)f' + a_2(x)f\right] + v_2\left[a_0(x)g'' + a_1(x)g' + a_2(x)g\right] + a_0(x)\left[v_1'f' + v_2'g'\right] = F(x).$$

Atendendo ao facto de f e g serem soluções da equação diferencial (3.36), a equação diferencial (3.38) escreve-se agora

$$a_0(x)\left[v_1'(x)\, f'(x) + v_2'(x)\, g'(x)\right] = F(x).$$

Em resumo, as funções v_1 e v_2 deverão obedecer ao sistema de equações

$$\begin{cases} v_1'(x)\, f(x) + v_2'(x)\, g(x) = 0, \\ v_1'(x)\, f'(x) + v_2'(x)\, g'(x) = F(x)/a_0(x). \end{cases} \tag{3.40}$$

Note-se que a condição imposta (3.39) não só simplificou os cálculos, como permitiu que o sistema de equações precedente apenas inclua as incógnitas $v_1'(x)$ e $v_2'(x)$. O sistema de equações (3.40) pode-se escrever na forma matricial

$$\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F(x)/a_0(x) \end{pmatrix},$$

cujo determinante associado,

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix},$$

mais não é do que o Wronskiano das funções f e g. Uma vez que estas funções são, por hipótese, linearmente independentes (porquê?), resulta que este determinante nunca se anula. Desta forma, o sistema de equações (3.40) tem solução única, a saber ("regra de Cramer")

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & g(x) \\ F(x)/a_0(x) & g'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}} = -\frac{F(x)g(x)}{a_0(x)W\left[f(x), g(x)\right]},$$

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} f(x) & 0 \\ f'(x) & F(x)/a_0(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}} = \frac{F(x)f(x)}{a_0(x)W\left[f(x), g(x)\right]}.$$

Obtemos assim as funções v_1 e v_2 definidas por

$$v_1(x) = -\int \frac{F(x)g(x)}{a_0(x)W\left[f(x), g(x)\right]}\, dx, \quad v_2(x) = +\int \frac{F(x)f(x)}{a_0(x)W\left[f(x), g(x)\right]}\, dx.$$

A solução particular da equação diferencial (3.35) obtida por aplicação do método de variação das constantes é assim

$$y_p(x) = v_1(x)\, f(x) + v_2(x)\, g(x),$$

onde as funções $v_1(x)$ e $v_2(x)$ são dadas pelas expressões precedentes.

Exemplo 3.44 *Consideremos a equação diferencial*

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

Conforme já tivemos oportunidade de ver, a função complementar associada é

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x,$$

pelo que queremos determinar um integral particular da equação diferencial dada que seja da forma

$$y_p = v_1(x)\cos x + v_2(x)\,\mathrm{sen}\,x.$$

Tem-se

$$y_p' = v_1'(x)\cos x + v_2'(x)\,\mathrm{sen}\,x - v_1(x)\,\mathrm{sen}\,x + v_2(x)\cos x.$$

Impondo a condição (arbitrária)

$$v_1'(x)\cos x + v_2'(x)\,\mathrm{sen}\,x = 0$$

para todo x real, vem

$$y_p' = -v_1(x)\,\mathrm{sen}\,x + v_2(x)\cos x \quad \Rightarrow \quad y_p'' = -v_1(x)\cos x - v_2(x)\,\mathrm{sen}\,x - v_1'(x)\,\mathrm{sen}\,x + v_2'(x)\cos x.$$

Dado que y_p deve verificar

$$y_p'' + y_p = \mathrm{tg}\,x,$$

resulta

$$-v_1(x)\cos x - v_2(x)\,\mathrm{sen}\,x - v_1'(x)\,\mathrm{sen}\,x + v_2'(x)\cos x + v_1(x)\cos x + v_2(x)\,\mathrm{sen}\,x = \mathrm{tg}\,x,$$

isto é,

$$-v_1'(x)\,\mathrm{sen}\,x + v_2'(x)\cos x = \mathrm{tg}\,x.$$

Portanto, o sistema de equações a resolver é

$$\begin{cases} v_1'(x)\cos x + v_2'(x)\,\mathrm{sen}\,x = 0 \\ -v_1'(x)\,\mathrm{sen}\,x + v_2'(x)\cos x = \mathrm{tg}\,x \end{cases},$$

vindo

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{sen}\,x \\ \mathrm{tg}\,x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \mathrm{sen}\,x \\ -\mathrm{sen}\,x & \cos x \end{vmatrix}} = -\,\mathrm{tg}\,x\ \mathrm{sen}\,x, \quad v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\mathrm{sen}\,x & \mathrm{tg}\,x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \mathrm{sen}\,x \\ -\mathrm{sen}\,x & \cos x \end{vmatrix}} = \mathrm{sen}\,x,$$

ou, equivalentemente,

$$v_1'(x) = \cos x - \sec x, \quad v_2'(x) = \mathrm{sen}\,x.$$

Assim,

$$v_1(x) = \mathrm{sen}\,x - \ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x|\,, \quad v_2(x) = -\cos x,$$

pelo que uma solução particular da equação diferencial é

$$y_p = (\mathrm{sen}\,x - \ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x|)\cos x - \mathrm{sen}\,x\cos x = -\ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x|\cos x,$$

resultando a solução geral

$$y = y_c + y_p = c_1\cos x + c_2\,\mathrm{sen}\,x - \ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x|\cos x.$$

Problema Determinar a solução do PVI

$$y'' - y = \frac{2xe^x}{(x+1)^3}, \quad x > 0; \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0.$$

Resp.: $y = \cosh x - (x+1)^{-1} e^x$.

Exemplo 3.45 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\left(x^2+1\right) y'' - 2xy' + 2y = 6\left(x^2+1\right)^2.$$

Solução. *A equação diferencial homogénea correspondente,*

$$\left(x^2+1\right) y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

tem, conforme vimos no Exemplo 3.17, a seguinte solução geral

$$y_c = c_1 x + c_2\left(x^2-1\right).$$

Assim sendo, tem-se

$$y_p = v_1 x + v_2\left(x^2-1\right),$$

pelo que

$$y_p' = v_1' x + v_2'\left(x^2-1\right) + v_1 + 2xv_2.$$

Impondo a condição

$$v_1' x + v_2'\left(x^2-1\right) = 0$$

para todo x real, resulta

$$y_p' = v_1 + 2xv_2 \quad \Rightarrow \quad y_p'' = v_1' + 2xv_2' + 2v_2.$$

Substituindo as expressões obtidas para y_p, y_p' e y_p'' na equação diferencial

$$\left(x^2+1\right) y_p'' - 2xy_p' + 2y_p = 6\left(x^2+1\right)^2,$$

vem

$$\left(x^2+1\right)\left(v_1' + 2xv_2' + 2v_2\right) - 2x\left(v_1 + 2xv_2\right) + 2v_1 x + 2v_2\left(x^2-1\right) = 6\left(x^2+1\right)^2,$$

ou seja,

$$\left(x^2+1\right) v_1' + 2x\left(x^2+1\right) v_2' = 6\left(x^2+1\right)^2.$$

Consequentemente, o sistema de equações a resolver é

$$\begin{cases} xv_1' + \left(x^2-1\right) v_2' = 0 \\ v_1' + 2xv_2' = 6\left(x^2+1\right) \end{cases},$$

obtendo-se

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 \\ 6\left(x^2+1\right) & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = 6\left(1-x^2\right), \quad v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 6\left(x^2+1\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = 6x,$$

pelo que

$$v_1 = 6x - 2x^3, \quad v_2 = 3x^2.$$

Desta forma, tem-se

$$y_p = v_1 x + v_2\left(x^2 - 1\right) = 6x^2 - 2x^4 + 3x^2\left(x^2 - 1\right) = 3x^2 + x^4,$$

sendo a solução geral da equação diferencial proposta dada por

$$y = y_c + y_p = c_1 x + c_2\left(x^2 - 1\right) + 3x^2 + x^4.$$

Problema Determinar a solução geral da equação diferencial

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 32x^2 - 9x, \quad x > 0;$$

sabendo que a equação homogénea associada admite uma solução do tipo x^k, $k \in \mathbb{R}$.
Resp.: $y = (c_1 + c_2 \ln x)\, x^{-2} + 2x^2 - x$.

Exemplo 3.46 *Determinar a solução do PVI*

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = x^{-1}e^x, \quad x > 1; \quad y(1) = -\frac{3}{4}e,\ y'(1) = -\frac{7}{4}e,\ y''(1) = -\frac{11}{4}e. \tag{3.41}$$

Solução. *A equação diferencial homogénea associada*

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

tem solução geral $y_c = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right)e^x$. *A aplicação do método de variação das constantes sugere*

$$y_p = \left(u_1 + u_2 x + u_3 x^2\right)e^x,$$

resultando

$$y_p' = y_p + \left(u_1' + u_2' x + u_3' x^2\right)e^x + \left(u_2 + 2xu_3\right)e^x.$$

Impondo

$$u_1' + u_2' x + u_3' x^2 = 0$$

para todo $x > 1$, *obtém-se*

$$y_p' = y_p + \left(u_2 + 2xu_3\right)e^x \quad \Rightarrow \quad y_p'' = y_p' + \left(u_2 + 2xu_3\right)e^x + \left(u_2' + 2xu_3'\right)e^x + 2u_3 e^x$$

$$\Rightarrow \quad y_p'' = y_p + \left[\left(2u_2 + 4xu_3 + 2u_3\right) + \left(u_2' + 2xu_3'\right)\right]e^x$$

Necessitamos de impor uma segunda condição, a saber,

$$u_2' + 2xu_3' = 0$$

para todo $x > 1$, *vindo*

$$y_p'' = y_p + \left(2u_2 + 4xu_3 + 2u_3\right)e^x \quad \Rightarrow \quad y_p''' = y_p' + \left[2\left(u_2' + 2xu_3'\right) + 2u_3' + 6u_3 + 2u_2 + 4xu_3\right]e^x$$

$$\Rightarrow \quad y_p''' = y_p + \left(2u_3' + 6u_3 + 3u_2 + 6xu_3\right)e^x$$

Substituindo as expressões obtidas para y_p, y_p', y_p'' *e* y_p''' *na equação diferencial*

$$y_p''' - 3y_p'' + 3y_p' - y_p = x^{-1}e^x, \quad x > 1$$

resulta

$$\left[\left(2u_3' + 6u_3 + 3u_2 + 6xu_3\right) - 3\left(2u_2 + 4xu_3 + 2u_3\right) + 3\left(u_2 + 2xu_3\right)\right] e^x = x^{-1}e^x,$$

ou, equivalentemente,

$$2u_3' = x^{-1},$$

pelo que temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} u_1' + u_2'x + u_3'x^2 = 0 \\ u_2' + 2xu_3' = 0 \\ 2u_3' = x^{-1} \end{cases} .$$

Assim,

$$u_1' = \frac{x}{2}, \quad u_2' = -1, \quad u_3' = \frac{1}{2}x^{-1},$$

vindo

$$u_1 = \frac{x^2}{4}, \quad u_2 = -x, \quad u_3 = \frac{1}{2}\ln x,$$

ou seja,

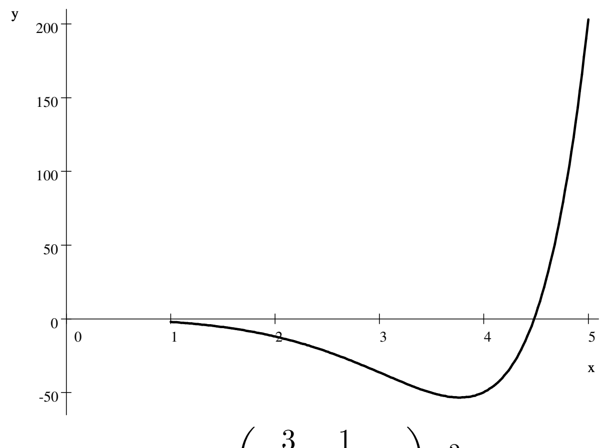
$$y_p = \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right) x^2 e^x,$$

tendo-se a solução geral (porquê?)

$$y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x \ln x.$$

Impondo as condições iniciais, obtém-se

$$y = \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right) x^2 e^x.$$



Representação gráfica da função $\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right) x^2 e^x$, *solução do PVI (3.41)*

Quando a equação diferencial tem coeficientes constantes, mas a natureza do segundo membro não permite aplicar o método dos coeficientes indeterminados para determinar uma solução particular da equação diferencial pode ser útil usar um método alternativo que consiste na resolução de uma sequência de equações diferenciais lineares de primeira ordem, tantas quantas a ordem da equação diferencial em causa. O método baseia-se na forma que a equação caraterística assume quando fatorizada.

Comecemos por ver um exemplo em que a equação diferencial podia ser resolvida usando o método dos coeficientes indeterminados e depois outro exemplo que obrigaria à utilização do método de variação das constantes. Recorde-se que aquando da abordagem do cálculo de conjuntos fundamentais de soluções de equações lineares homogéneas em que as raízes da respetiva equação caraterística são reais e repetidas já usamos este método (ver Nota na página 119).

Exemplo 3.47 *Determinar a solução do PVI*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x - x, \quad x > 0; \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0. \tag{3.42}$$

Exercício 3.16 ***Solução.*** *A equação caraterística a considerar é*

$$m^2 - m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(m-1) = 0,$$

pelo que sabemos desde já que

$$y_c = c_1 + c_2 e^x.$$

A forma da equação caraterística permite escrever a equação diferencial dada na forma

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - 1\right) y = e^x - x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} - y\right) = e^x - x.$$

Fazendo

$$u = \frac{dy}{dx} - y, \tag{3.43}$$

resulta

$$\frac{du}{dx} = e^x - x,$$

pelo que

$$u = e^x - \frac{x^2}{2} + k_1.$$

Retomando a equação diferencial (3.43), vem

$$\frac{dy}{dx} - y = e^x - \frac{x^2}{2} + k_1 \underset{k_1=0}{=} e^x - \frac{x^2}{2}.$$

Trata-se de uma equação linear que admite o fator integrante e^{-x}, tendo-se

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x} y\right) = 1 - \frac{x^2}{2} e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} y = x - \frac{1}{2}\int x^2 e^{-x}\, dx + k_2,$$

donde, tomando $k_2 = 0$ e atendendo a que

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -\left(2x + x^2 + 2\right) e^{-x},$$

resulta a solução particular

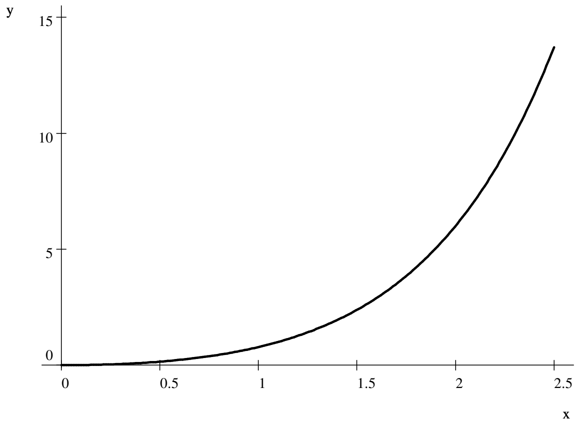
$$y_p = xe^x - \left(2x + x^2 + 2\right).$$

Assim, a solução geral da equação diferencial é

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2e^x + x + \frac{1}{2}x^2 + xe^x.$$

Impondo as condições iniciais, resulta

$$y = 2 - 2e^x + x + \frac{1}{2}x^2 + xe^x$$



Representação gráfica da função $2 - 2e^x + x + \frac{1}{2}x^2 + xe^x$, *solução do PVI (3.42)*

Exemplo 3.48 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \ln x - 1, \quad x > 0.$$

Solução. *A equação caraterística associada à correspondente equação diferencial homogénea é*

$$m^3 - m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(m^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(m-1)(m+1),$$

pelo que a respetiva função complementar é

$$y_c = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}.$$

Consideramos então a equação diferencial dada escrita na forma

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)y = -\frac{1}{x^2} - \ln x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - y\right) = -\frac{1}{x^2} - \ln x - 1.$$

Tomando

$$v = \frac{d^2y}{dx^2} - y,$$

tem-se a equação diferencial (linear) de primeira ordem

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \ln x - 1,$$

para a qual se obtém de imediato uma solução particular

$$v = -\int \left(\frac{1}{x^2} + \ln x + 1 \right) dx = \frac{1}{x} - x \ln x.$$

Assim, tem-se agora de considerar a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{1}{x} - x \ln x.$$

Novamente, recorrendo à equação caraterística, podemos concluir que esta equação diferencial se pode escrever como

$$\left(\frac{d}{dx} - 1 \right) \left(\frac{d}{dx} + 1 \right) y = \frac{1}{x} - x \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{d}{dx} - 1 \right) \left(\frac{dy}{dx} + y \right) = \frac{1}{x} - x \ln x.$$

Ora, fazendo

$$u = \frac{dy}{dx} + y,$$

resulta a equação diferencial

$$\frac{du}{dx} - u = \frac{1}{x} - x \ln x,$$

a qual admite o fator integrante e^{-x}, vindo

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-x} u \right) = \frac{e^{-x}}{x} - x e^{-x} \ln x.$$

Tem-se então a solução particular

$$e^{-x} u = \int \frac{e^{-x}}{x} \, dx - \int x e^{-x} \ln x \, dx.$$

Integrando por partes, vem

$$\int \frac{e^{-x}}{x} \, dx = e^{-x} \ln x + \int e^{-x} \ln x \, dx$$

e

$$-\int x e^{-x} \ln x \, dx = x e^{-x} \ln x - \int (\ln x + 1) \, e^{-x} \, dx,$$

pelo que

$$u = (x + 1) \ln x + 1.$$

Finalmente, consideramos a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y = u \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} + y = (x + 1) \ln x + 1,$$

a qual é linear, conforme esperado, admitindo o fator integrante e^x. Tem-se,

$$\frac{d}{dx}\left(e^x y\right) = (x+1)\, e^x \ln x + e^x,$$

vindo

$$e^x y = \int x e^x \ln x \, dx + \int e^x \ln x \, dx + e^x.$$

Uma vez que

$$\int x e^x \ln x \, dx = x e^x \ln x - \int e^x \ln x \, dx - e^x,$$

tem-se

$$e^x y = x e^x \ln x \quad \Leftrightarrow \quad y_p = x \ln x.$$

A função $x \ln x$ é portanto uma solução particular da equação dada, pelo que se tem a solução geral

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x \ln x.$$

Nota Uma vez que no exemplo precedente a resolução da equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = x^{-1} - x \ln x,$$

através da sua conversão em duas equações diferencial lineares de primeira ordem, obrigou a recorrer sistematicamente à integração por partes, podia ter sido vantajoso determinar uma solução desta equação diferencial usando o método de variação das constantes. Teríamos então,

$$y_c = A e^x + B e^{-x},$$

vindo

$$y_p = f_1 e^x + f_2 e^{-x}$$

obedecendo f_1 e f_2 ao sistema de equações

$$\begin{cases} f_1' e^x + f_2' e^{-x} = 0 \\ f_1' e^x - f_2' e^{-x} = x^{-1} - x \ln x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_1' = \dfrac{1}{2}\left(x^{-1} e^{-x} - x e^{-x} \ln x\right) \\ f_2' = -\dfrac{1}{2}\left(x^{-1} e^{x} - x e^{x} \ln x\right) \end{cases}.$$

Ainda assim teríamos de determinar, usando integração por partes,

$$\int x^{-1} e^{ax} \, dx = e^{ax} \ln x - a \int e^{ax} \ln x \, dx \tag{3.44}$$

e

$$\int x e^{ax} \ln x \, dx = \frac{1}{a} x e^{ax} \ln x - \frac{1}{a^2} e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} \ln x \, dx, \tag{3.45}$$

sendo que no caso que nos interessa $a = \pm 1$, pelo que combinando (3.44) e (3.45) obtemos

$$\int x^{-1} e^{ax} \, dx - \int x e^{ax} \ln x \, dx = (1 - ax)\, e^{ax} \ln x + e^{ax}.$$

Portanto,

$$f_1 = \frac{1}{2}(1+x)\,e^{-x}\ln x + \frac{1}{2}e^{-x}, \quad f_2 = -\frac{1}{2}(1-x)\,e^{x}\ln x - \frac{1}{2}e^{x},$$

tendo-se o resultado obtido anteriormente

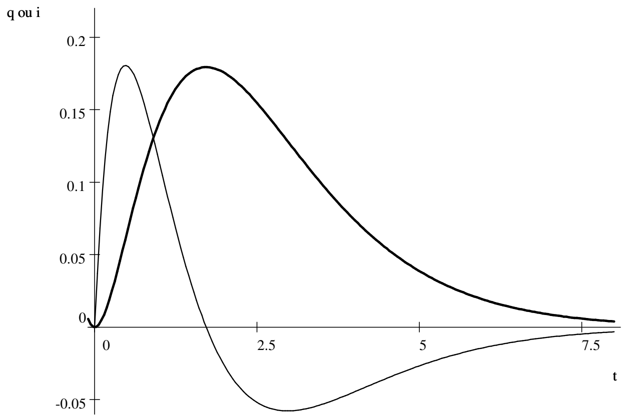
$$y_p = f_1 e^{x} + f_2 e^{-x} = x\ln x.$$

Problema Considere-se um circuito elétrico constituido por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R, uma bobine com indutância L e um condensador com capacitância C, ligados em série (circuito RLC). Nestas condições a carga instantânea no condensador q em cada instante de tempo t é tal que

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E,$$

sendo a intensidade de corrente i em cada instante $i = dq/dt$. Supondo que $E = (1+t)^{-1}\,e^{-t}$ (Volt), $R = 2$ (Ohm), $L = 1$ (Henry) e $C = 1$ (Farad), determinar $q(t)$ e $i(t)$ sabendo que $q(0) = i(0) = 0$.

Resp.: $q = ((t+1)\ln(t+1) - t)\,e^{-t}$; $i = (1 - \ln(t+1))\,te^{-t}$



Representação gráfica de $q(t)$ (a cheio) e $i(t)$

Exemplo 3.49 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = -3e^{x} + 7\frac{e^{x}}{e^{x}+1}, \quad x > 0, \tag{3.46}$$

sabendo que a solução geral da equação homogénea associada é

$$y_c = c_1e^{x} + c_2e^{3x}.$$

Solução. *Neste caso vamos usar o Princípio da Sobreposição considerando duas equações diferenciais,*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^{x}, \quad x > 0, \tag{3.47}$$

cuja solução particular designaremos por y_{p_1}, *e*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{e^x}{e^x+1}, \quad x > 0, \tag{3.48}$$

cuja solução particular designaremos por y_{p_2}. *Assim, uma solução particular da equação (3.46) será dada por*

$$y_p = -3y_{p_1} + 7y_{p_2},$$

sendo a respetiva solução geral

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} - 3y_{p_1} + 7y_{p_2}.$$

Para determinar uma solução particular de (3.47) podemos usar o método dos coeficientes indeterminados (porquê?), o qual conduz a

$$y_{p_1} = -\frac{1}{2}xe^x.$$

Relativamente à determinação de uma solução particular de (3.48), podemos usar dois métodos distintos, atendendo ao facto de se tratar de uma equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes.

1. *Método A*

   Usamos o método de variação das constantes, propondo então que

   $$y_{p_2} = v_1 e^x + v_2 e^{3x}.$$

   Mostra-se que substituindo as expressões de y_{p_2}, y'_{p_2} *e* y''_{p_2} *na equação (3.48) e considerando a condição arbitrária habitual, obtém-se o sistema de equações*

   $$\begin{cases} e^x v_1' + e^{3x} v_2' = 0 \\ e^x v_1' + 3e^{3x} v_2' = \dfrac{e^x}{e^x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1' = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^x+1} \\ v_2' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^{2x}+e^{3x}} \end{cases}.$$

   Ora, tem-se

   $$v_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{e^x+1}\,dx \underset{u=e^x}{\Rightarrow} v_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u\,(u+1)}\,du = \frac{1}{2}\ln(u+1) - \frac{1}{2}\ln u,$$

   pelo que

   $$v_1 = \frac{1}{2}\ln(e^x+1) - \frac{1}{2}x.$$

   Por outro lado,

   $$v_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^{2x}+e^{3x}}\,dx \underset{u=e^x}{\Rightarrow} v_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^3(u+1)}\,du = \frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2}\ln(u+1) + \frac{1}{2u} - \frac{1}{4u^2},$$

   implicando,

   $$v_2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} y_{p_2} &= \left(\frac{1}{2}\ln\left(e^x+1\right)-\frac{1}{2}x\right)e^x+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left(e^x+1\right)+\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\right)e^{3x} \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}\left(2x+1\right)e^x+\frac{1}{2}xe^{3x}+\frac{1}{2}\left(e^x-e^{3x}\right)\ln\left(e^x+1\right). \end{aligned} \tag{3.49}$$

2. *Método B*

   A equação caraterística associada à equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=0 \tag{3.50}$$

é $m^2-4m+3=0$, ou seja, $(m-1)(m-3)=0$. Assim, a equação diferencial (3.50) pode ser escrita como

$$\left(\frac{d}{dx}-1\right)\left(\frac{d}{dx}-3\right)y=0$$

e consequentemente (3.48) pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{d}{dx}-1\right)\left(\frac{d}{dx}-3\right)y=\frac{e^x}{e^x+1},\quad x>0,$$

ou, equivalentemente,

$$\left(\frac{d}{dx}-1\right)\left(\frac{dy}{dx}-3y\right)=\frac{e^x}{e^x+1}.$$

Fazendo

$$u=\frac{dy}{dx}-3y, \tag{3.51}$$

passamos a ter a equação linear de primeira ordem

$$\left(\frac{d}{dx}-1\right)u=\frac{e^x}{e^x+1}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{du}{dx}-u=\frac{e^x}{e^x+1},$$

a qual admite o fator integrante e^{-x}, obtendo-se

$$u=e^x\left(x-\ln\left(e^x+1\right)+k_1\right),$$

onde k_1 é uma constante arbitrária. A equação diferencial (3.51) escreve-se agora

$$\frac{dy}{dx}-3y=e^x\left(x-\ln\left(e^x+1\right)+k_1\right).$$

Portanto, obtemos novamente uma equação diferencial linear de primeira ordem que admite o fator integrante e^{-3x}, vindo da sua resolução (considerando as constantes arbitrárias nulas, dado que apenas pretendemos determinar uma solução particular)

$$y_{p_2}=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{2}xe^{3x}+\frac{1}{2}\left(e^x-e^{3x}\right)\ln\left(e^x+1\right)$$

que mais não é do que (3.49).

Assim, obtivemos

$$y_p = -3y_{p_1} + 7y_{p2} = \frac{7}{2}e^{2x} - 2xe^x - \frac{7}{4}e^x + \frac{7}{2}xe^{3x} + \frac{7}{2}\left(e^x - e^{3x}\right)\ln\left(e^x+1\right),$$

resultando para a solução geral de (3.46) a expressão

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{7}{2}e^{2x} - 2xe^x + \frac{7}{2}xe^{3x} + \frac{7}{2}\left(e^x - e^{3x}\right)\ln\left(e^x+1\right).$$

Exercícios sobre método de variação das constantes

Exercício 3.17 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cotg} x;$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{tg}^2 x;$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{x};$

(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{1}{1+e^x};$

(e) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 4e^x \ln x, \quad x > 0;$

(f) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2} - \ln x - 1, \quad x > 0.$

Exercício 3.18 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(x+2\right)\frac{dy}{dx} + \left(x+2\right)y = x^3, \quad x > 0,$$

sabendo que xe^x é uma solução da equação diferencial homogénea associada.

Exercício 3.19 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\operatorname{sen}^2 x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\operatorname{sen} x\cos x\frac{dy}{dx} + \left(1+\cos^2 x\right)y = 2\operatorname{sen}^3 x, \quad x \in \left]0, \pi/2\right[,$$

sabendo que $\operatorname{sen} x$ e $x \operatorname{sen} x$ são soluções da equação diferencial homogénea associada.

3.7 A equação de Cauchy-Euler

Vimos anteriormente como obter a solução geral de equações diferenciais lineares homogéneas de ordem n com coeficientes constantes. Nesses casos é relativamente fácil determinar um conjunto fundamental de soluções e, consequentemente, a respetiva função complementar. No entanto, no caso (geral) em que os coeficientes não são constantes a situação é bem diferente, só se podendo obter a função complementar em casos muito especiais. Um desses casos designa-se **equação de Cauchy-Euler**, sendo esta equação diferencial da forma

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}x\frac{dy}{dx} + a_ny = F(x), \tag{3.52}$$

onde a_0, a_1, ..., a_n, são constantes reais. Note-se que os termos que surgem no primeiro membro da equação precedente são da forma

$$x^k \frac{d^k y}{dx^k}.$$

A resolução deste tipo de equação diferencial baseia-se no seguinte resultado.

Teorema 3.14 *A transformação $x = e^t$ reduz a equação diferencial de Cauchy-Euler (3.52) a uma equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes.*

Demonstração Consideremos o caso correspondente a uma equação diferencial de segunda ordem (a demonstração no caso geral é similar). Tem-se

$$a_0 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_2 y = F(x). \tag{3.53}$$

Da mudança de variável

$$x(t) = e^t, \quad x > 0,$$

resulta

$$x(t) = e^t \quad \Leftrightarrow \quad t(x) = \ln x,$$

pelo que, atendendo à dependência $y = y(t(x))$, decorre desta transformação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x},$$

isto é,

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}. \tag{3.54}$$

Vejamos agora como se transforma a segunda derivada. Tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}\frac{1}{x} + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}\frac{d^2 y}{dt^2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),
\end{aligned}$$

pelo que

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}. \tag{3.55}$$

Substituindo as expressões (3.54) e (3.55) na equação diferencial (3.53), obtém-se a equação diferencial

$$a_0\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + a_1\frac{dy}{dt} + a_2 y = F(e^t) \quad \Leftrightarrow \quad a_0\frac{d^2 y}{dt^2} + (a_1 - a_0)\frac{dy}{dt} + a_2 y = F(e^t),$$

que é do tipo

$$b_0\frac{d^2 y}{dt^2} + b_1\frac{dy}{dt} + b_2 y = G(t),$$

com $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1 - a_0$, $b_2 = a_2$, $G(t) = F(e^t)$. Fica assim demonstrado o resultado pretendido.

Observe-se que na demonstração supôs-se que $x > 0$. No caso de ser $x < 0$, a mudança de variável a realizar é $x = -e^t$, mantendo-se o restante procedimento inalterado (porquê?). ∎

Exemplo 3.50 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3, \quad x > 0.$$

Solução. *Seja* $x = e^t$. *Tem-se,* $t = \ln x$ *e*

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt},$$

resultando a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}.$$

Obteve-se, portanto, uma equação diferencial linear com coeficientes constantes que pode ser resolvida usando o método dos coeficientes indeterminados. Comecemos então por considerar a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

A equação caraterística associada é

$$m^2 - 3m + 2 = 0,$$

cujas raízes são $m_1 = 1$ *e* $m_2 = 2$, *pelo que*

$$y_c = c_1e^t + c_2e^{2t}.$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados, pretendemos determinar uma solução particular de

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t},$$

a qual deverá ser da forma $y_p = Ae^{3t}$ *(porquê?). Assim,*

$$y_p = Ae^{3t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_p}{dt} = 3Ae^{3t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y_p}{dt^2} = 9Ae^{3t},$$

pelo que

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} - 3\frac{dy_p}{dt} + 2y_p = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad 2Ae^{3t} = e^{3t},$$

resultando $A = 1/2$. *Obtém-se assim,*

$$y_p = \frac{1}{2}e^{3t},$$

sendo a solução geral da equação diferencial proposta

$$y = y_c + y_p = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t},$$

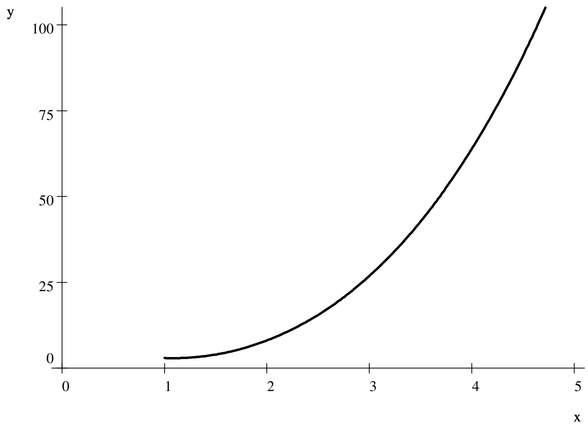
ou, atendendo à transformação $t = \ln x$,

$$y = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

Problema Determinar a solução do PVI

$$x^2y'' + 5xy' + 8y = 29x^3, \quad x > 1; \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -1. \tag{3.56}$$

Resp.: $y = x^3 + 2x^{-2}\cos(2\ln x)$.



Representação gráfica da função $x^3 + 2x^{-2}\cos(2\ln x)$, solução do PVI (3.56)

Exemplo 3.51 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 4\ln(-x), \quad x < 0.$$

Solução. *Fazendo* $x = -e^t$ *tem-se* $t = \ln(-x)$, *vindo*

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.$$

A equação diferencial dada passa a escrever-se

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 2y = 4t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 4t.$$

Obteve-se portanto uma equação diferencial linear com coeficientes constantes que pode ser resolvida usando o método dos coeficientes indeterminados. Comecemos então por considerar a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

A equação caraterística associada é

$$m^2 + 3m + 2 = 0,$$

cujas raízes são $m_1 = -1$ *e* $m_2 = -2$, *pelo que*

$$y_c = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}.$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados, pretendemos determinar uma solução particular de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 4t,$$

que deverá ser da forma $y_p = At + B$ (porquê?). Assim,

$$y_p = At + B \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_p}{dt} = A \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y_p}{dt^2} = 0,$$

pelo que

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} + 3\frac{dy_p}{dt} + 2y_p = 4t \quad \Rightarrow \quad 3A + 2\,(At + B) = 4t,$$

resultando

$$\begin{cases} 3A + 2B = 0 \\ 2A = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B = -3 \\ A = 2 \end{cases}.$$

Obtém-se assim

$$y_p = 2t - 3,$$

sendo a solução geral da equação diferencial proposta

$$y = y_c + y_p = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + 2t - 3,$$

ou, atendendo à transformação $t = \ln(-x)$,

$$y = c_1x + c_2x^2 + 2\ln(-x) - 3.$$

Nota: nesta caso podíamos em vez de ter usado a transformação $x = -e^t$, devido ao facto de $x < 0$, ter reescrito a equação diferencial dada realizando primeiro a mudança de variável $z = -x$. Teríamos obtido (porquê?)

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + 4z\frac{dy}{dz} + 2y = 4\ln(z), \quad z > 0,$$

permitindo usar a mudança de variável $z = e^t$.

Exemplo 3.52 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$(x-3)^2\,\frac{d^2y}{dx^2} + (x-3)\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(x-3)}, \quad x > 3.$$

Solução. *Fazendo $z = x - 3$ vem*

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln z}, \quad z > 0.$$

Considerando agora a transformação $z = e^t$, resulta

$$z\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dt}, \quad z^2\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.$$

A equação diferencial dada passa a escrever-se,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{t}.$$

Assim, $y_c = c_1 + c_2 t$.

Para determinar uma solução particular da equação diferencial não homogénea procedemos à integração direta

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \ln t + k_1 \quad \Leftrightarrow \quad y = t\left(\ln t - 1 + k_1\right) + k_2.$$

Considerando $k_1 = 1$ *e* $k_2 = 0$*, obtém-se*

$$y_p = t \ln t,$$

tendo-se para a solução geral da equação diferencial proposta,

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 t + t \ln t,$$

ou, atendendo a que $t = \ln z$ *e* $z = x - 3$*,*

$$y = c_1 + c_2 \ln(x-3) + \ln(x-3)\ln\left[\ln(x-3)\right].$$

Exercícios sobre a equação de Cauchy-Euler

Exercício 3.20 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

(a) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0, \quad x > 0;$

(b) $x^2y'' + xy' + 9y = 0, \quad x > 0;$

(c) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 4x - 6, \quad x > 0;$

(d) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 4\ln x, \quad x > 0.$

Exercício 3.21 *Determinar a solução dos seguintes PVIs.*

(a) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 10x^2, \quad x > 1; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -6;$

(b) $x^2y'' - 6y = \ln x, \quad x > 1; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$

Exercício 3.22 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$(x+1)^2y'' - (x+1)y - 3y = x^2 - 1, \quad x < -1.$$

3.8 Exercícios de revisão do Capítulo 3

Exercício 3.23 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

(a) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} = 24x + e^{-x};$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 4e^x + 4e^{-x};$

(c) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{dy}{dx} = 2e^x + 4e^{-x} + 1;$

(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 2\cos x + 1;$

(e) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 1 + 6xe^x;$

(f) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 6y = e^{-t}\left(16t - 8\right).$

Exercício 3.24 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

$(a)\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{e^x}{x};$ $\qquad (c)\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cotg} x;$

$(b)\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{e^x}{\cos x};$ $\qquad (d)\quad \dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 6\cos^2 t.$

Exercício 3.25 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$(t-1)\frac{d^2y}{dt^2} - t\frac{dy}{dt} + y = (t-1)^2 e^t,$$

sabendo que t e e^t são duas soluções da equação diferencial homogénea associada.

Exercício 3.26 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{9}{x^2}y = 0, \quad x > 0.$$

Exercício 3.27 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 10x, \quad x > 0,$$

sabendo que $x \ln x$ é uma solução da equação diferencial homogénea associada.

Exercício 3.28 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais*

$(a)\quad t^2\dfrac{d^2x}{dt^2} + t\dfrac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad t > 0;$

$(b)\quad (x-1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x-1)\dfrac{dy}{dx} + y = x^2, \quad x < 1.$

$(c)\quad x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + y = x\ln x, \quad x > 0;$

$(d)\quad (z+1)\dfrac{d^2y}{dz^2} + 2\dfrac{dy}{dz} = z, \quad z > 0.$

Exercício 3.29 *Considere-se uma mola que está fixa numa das extremidades. Um objeto pontual P, de massa m, está preso na outra extremidade da mola. Suponhamos que o afastamento de P relativamente à posição de equilíbrio O obdece à seguinte lei (movimento livre e não amortecido)*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

onde $k > 0$ é a constante de elasticidade da mola, ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = 0,$$

onde $\lambda^2 = k/m$. Sabendo que P parte com velocidade $v_0 = dx/dt(0)$, do ponto de abcissa x_0:

(a) determinar $x(t)$;

(b) determinar o valor mínimo e máximo da abcissa de P;

(c) determinar o período do movimento de P;

(d) representar o gráfico de $x(t)$ considerando $x_0 = 2$, $v_0 = 1$, $\lambda = 1$.

Exercício 3.30 *Considere-se uma mola que está fixa num dos seus extremos. Um objeto pontual Q, de massa m, está preso na outra extremidade da mola. Suponhamos que o afastamento de Q relativamente à posição de equilíbrio O obdece à seguinte lei (movimento livre e amortecido)*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

onde $k > 0$ é a constante de elasticidade da mola e $a > 0$, ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \lambda^2 x = 0,$$

onde $\lambda^2 = k/m$ e $a/m = 2b$. Sabendo que Q parte com velocidade $v_0 = dx/dt(0)$, do ponto de abcissa x_0, determinar $x(t)$ quando:

(a) $b < \lambda$ $\quad (a < 2\sqrt{km})$; representar o gráfico de $x(t)$ para $\lambda = 5$, $b = 3$, $x_0 = 1$, $v_0 = 2$;

(b) $b = \lambda$ $\quad (a = 2\sqrt{km})$; representar o gráfico de $x(t)$ para $\lambda = b = 4$, $x_0 = 1$, $v_0 = 2$;

(c) $b > \lambda$ $\quad (a > 2\sqrt{km})$; representar o gráfico de $x(t)$ para $\lambda = 3$, $b = 5$, $x_0 = 1$, $v_0 = 2$.

Exercício 3.31 *Considere-se uma mola que está fixa num dos extremos. Um objeto pontual M, de massa m, está preso na outra extremidade da mola. Suponhamos que o afastamento de M relativamente à posição de equilíbrio O obdece à seguinte lei (movimento forçado correspondente à ação de uma força externa $F\cos\omega t$)*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F\cos\omega t,$$

onde $k > 0$ é a constante de elasticidade da mola e $a > 0$, ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \lambda^2 x = E\cos\omega t,$$

onde $\lambda^2 = k/m$, $a/m = 2b$ e $E = F/m$. Sabendo que M parte com velocidade $v_0 = dx/dt(0)$, do ponto de abcissa x_0, determinar $x(t)$ quando $\lambda = \omega$ e $b < \lambda$.

Exercício 3.32 *Considere-se um circuito elétrico constituido por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R, uma bobine com indutância L e um condensador com capacitância C, ligados em série (circuito RLC). Nestas condições a carga instantânea no condensador q é tal que*

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E,$$

sendo a intensidade de corrente i em cada instante de tempo t dada por $i = dq/dt$.

Supondo que $E = 100\cos 60t$ (Volt), $R = 4$ (Ohm), $L = 0.1$ (Henry) e $C = 1/40$ (Farad), e sabendo que no instante inicial a intensidade de corrente e a carga do condensador eram ambas nulas:

(a) determinar a carga do condensador em cada instante;

(b) determinar a intensidade de corrente em cada instante;

(c) representar os gráficos de $q(t)$ e de $i(t)$.

3.9 Soluções dos exercícios do Capítulo 3

3.2. (b) $y = c_1e^x + c_2xe^x$; (c) $y = e^x + 3e^x x$.

3.3. (b) $y = c_1x + c_2x^2$.

3.4. (d) $y = c_1e^x + c_2e^{4x}$.

3.5. $g(x) = x^4$, $y = c_1x + c_2x^4$.

3.6. $q(x) = x + 1$, $y = c_1e^{2x} + c_2\,(x + 1)$.

3.7. (b) $y_c = c_1e^x + c_2e^{2x}$; (d) $y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$.

3.8. $y_p = 2/3 + 2x - 3e^x/2$.

3.9. (a) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$; (b) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}$; (c) $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$;
(d) $y = (c_1 + c_2x)\,e^{4x}$; (e) $y = (c_1 + c_2x)\,e^{-x/2}$; (f) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-x}$;
(g) $y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right) e^{2x}$; (h) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-x} \operatorname{sen} x + c_4e^{-x} \cos x$;
(i) $y = c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5$.

3.10. (a) $y = 2e^{4x} + e^{-3x}$; (b) $y = \left(13e^{-x} - e^{-5x}\right)/4$;
(c) $y = e^{2x} - \sqrt{3}e^{3x/2}\left(\frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

3.11. $y = e^{3x}(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{2x}[(c_5 + c_6x) \cos 3x + (c_7 + c_8x) \operatorname{sen} 3x]$.

3.12. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} + e^x\,(c_3 \operatorname{sen} 2x + c_4 \cos 2x)$.

3.13. (a) Sim, pois a equação diferencial é linear, com coeficientes constantes, e o segundo membro é um múltiplo da função CI x^2; (b) Não, pois a equação diferencial não é linear; (c) Não, pois a equação diferencial apesar de ser linear não é de coeficientes constantes; (d) Sim, pois a equação diferencial é linear, com coeficientes constantes, e o segundo membro é uma combinação linear das funções CI 1, e^x e e^{-x}; (e) Não, pois a equação diferencial não é de coeficientes constantes e o segundo membro não é uma combinação linear finita de funções CI; (f) Sim, pois a equação diferencial é linear, com coeficientes constantes, podendo-se reescrever por forma a que o segundo membro seja um múltiplo da função CI x^7.

3.14. (a) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 7 + 6x + 2x^2$; (b) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x} - \left(e^{2x} + 6e^{-3x}\right)/2$;
(c) $y = e^{-x}(c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x) + 2 \operatorname{sen} 2x - \cos 2x$;
(d) $y = (x/2 + 1/10)\, e^{-2x} + e^{-x}\, (c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x)$;
(e) $y = c_1e^x + e^{-x}\,(c_2 + c_3x) - 9 + 4x - 2x^2 + \frac{2}{25}\cos 2x - \frac{1}{25}\operatorname{sen} 2x$;
(f) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x - x\cos 2x - 2x^2 \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2} + 3x^2$.

3.15. (a) $6\cos 2x + 5 \operatorname{sen} 2x - 2x\cos 2x$; (b) $y = \left(2x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)e^x + 2e^{-x}$;
(c) $y = 5e^{x-2} - x^2/2 - x - 1$.

3.17. (a) $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \operatorname{sen} x \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x|$;
(b) $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - 2 + \operatorname{sen} x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$;
(c) $y = e^{-3x}\,(c_1 + c_2x) + e^{-3x}x\,(\ln x - 1)$; (d) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln\left(e^x + 1\right)$;
(e) $y = e^x\,(c_1 + c_2x) + x^2e^x\,(2\ln x - 3)$; (f) $c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + x\ln x$.

3.18. $y = c_1x\,(e^x - 1) + c_2x\,(e^x + 1) - x^2$.

3.19. $y = (c_1 + c_2x) \operatorname{sen} x + x^2 \operatorname{sen} x$.

3.20. (a) $y = c_1x + c_2x^3$; (b) $y = c_1 \cos(3\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(3\ln x)$; (c) $y = c_1x^2 + c_2x^3 + 2x - 1$;
(d) $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2} + 2\ln x - 3$.

3.21. (a) $y = 2x^{-3} + x^2\,(2\ln x - 1)$; (b) $y = \left(8x^3 - 9x^{-2} - 6\ln x + 1\right)/36$.

3.22. $y = c_1\,(x+1)^{-1} + c_2\,(x+1)^3 - x^2\,(3 + 2x)\,(x+1)^{-1}/6$.

3.23. (a) $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} - 3x^2 + 2x^3 + e^{-x}$; (b) $y = (c_1 + c_2x)\,e^x + 2x^2e^x + e^{-x}$;
(c) $y = c_1 + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x + e^x - 2e^{-x} + x$; (d) $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + 1$;
(e) $y = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x + x - 3x^2e^x + x^3e^x$; (f) $y = c_1e^{-2t} + c_2e^{3t} - 4te^{-t} + 5e^{-t}$.

3.24. (a) $y = (c_1 + c_2x)\,e^x + x\,(\ln x)\,e^x$;
(b) $y = e^x\,(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + e^x(\cos x \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x)$;
(c) $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x)\ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x|$; (d) $y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \cos 2t + 3$.

3.25. $y = c_1t + c_2e^t - te^t + t^2e^t/2$.

3.26. $y = c_1x^{-3} + c_2x^3$.

3.27. $y = c_1x + c_2x\ln x + 5x\ln^2 x$.

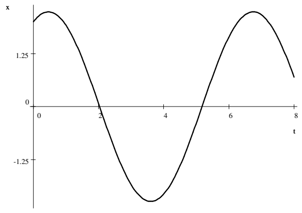
3.28. (a) $y = c_1 \cos(2 \ln t) + c_2 \operatorname{sen}(2 \ln t)$;

(b) $y = c_1 (1 - x) + c_2 (1 - x) \ln(1 - x) + (1 - x)^2 + 1 - (1 - x) \ln^2 (1 - x)$;

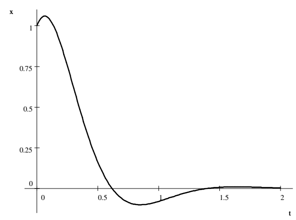
(c) $y = \frac{1}{3} x (1 - \ln x) + x^{-1/2} (c_1 \cos(\sqrt{3} (\ln x)/2) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3} (\ln x)/2))$;

(d) $y = -\left(c_1 + c_2 z - \frac{1}{6} z^3\right) (z + 1)^{-1}$.

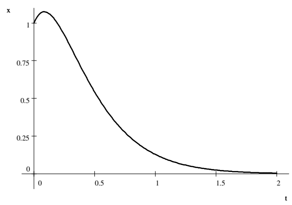
3.29. (a) $x = \dfrac{v_0}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda t + x_0 \cos \lambda t$; (b) $\pm \left((v_0/\lambda)^2 + x_0^2\right)^{1/2}$; (c) $2\pi/\lambda$;

(d) 

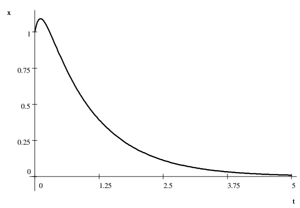
3.30. (a) $x = e^{-bt} \left(\frac{v_0 + b x_0}{r} \operatorname{sen} rt + x_0 \cos rt\right)$, $r = \sqrt{\lambda^2 - b^2}$;



(b) $x = e^{-bt} (x_0 + (v_0 + b x_0) t)$;



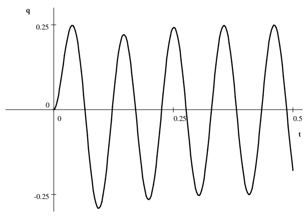
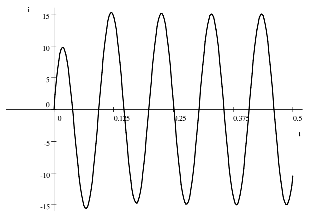
(c) $x = e^{-bt} \left(\frac{v_0 + b x_0}{r} \operatorname{senh} rt + x_0 \cosh rt\right)$, $r = \sqrt{b^2 - \lambda^2}$;.



3.31. $x = e^{-bt} \left(\theta^{-1} (v_0 + b x_0 - \frac{1}{2b} E) \operatorname{sen} \theta t + x_0 \cos \theta t\right) + \frac{E}{2b\omega} \operatorname{sen} \omega t$, $\theta = \sqrt{\omega^2 - b^2}$.

3.32. (a) $q = (\frac{1}{5} - 5t) e^{-20t} - \frac{1}{5} \cos 60t + \frac{3}{20} \operatorname{sen} 60t$;

(b) $i = (-9 + 100t) e^{-20t} + 9 \cos 60t + 12 \operatorname{sen} 60t$;

(c)  

Capítulo 4

A Transformada de Laplace

4.1 Definição, existência e propriedades

Definição 4.1 *Seja f uma função real de variável real t, definida para $t > 0$. Seja s uma variável real e F uma função definida por*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{4.1}$$

para todos os valores de s para os quais este integral existe (finito). A função F definida por (4.1) designa-se ***transformada de Laplace*** *da função f. Usaremos a seguinte notação para a transformada de Laplace da função f,*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Dada a natureza do integral impróprio (4.1), para garantir que este integral existe para uma certa gama de valores de s temos de impor restrições adequadas à função f. No entanto, antes de analisarmos estas restrições detalhadamente, comecemos por determinar a transformada de Laplace de algumas funções simples e, em cada caso, quais os valores de s para os quais o integral (4.1) é finito.

Exemplo 4.1 *Considere-se a função*

$$f(t) = 1, \quad t > 0.$$

Então, aplicando a definição (4.1), resulta

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st}\, dt = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^R = \frac{1}{s}$$

para todo $s > 0$. Assim,

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Exemplo 4.2 *Considere-se a função*

$$f(t) = t, \quad t > 0.$$

Então, aplicando a definição (4.1), resulta

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} t\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} t\, dt = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{s^2} e^{-st}(st+1)\right]_0^R = \frac{1}{s^2}$$

para todo $s > 0$. *Portanto,*

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

Exemplo 4.3 *Considere-se a função*

$$f(t) = e^{at}, \quad a \in \mathbb{R}/\{0\}, \quad t > 0.$$

Então,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-(s-a)t}\,dt = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{a-s}\right]_0^R = \frac{1}{s-a}$$

para todo $s > a$. *Portanto,*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

Exemplo 4.4 *Considere-se a função*

$$f(t) = \cos bt, \quad b \in \mathbb{R}^+, \quad t > 0.$$

Então,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos bt\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}\cos bt\,dt$$

Integrando por partes, obtém-se

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{s^2+b^2}(-s\cos bt + b\,\mathrm{sen}\,bt)\right]_0^R = \frac{s}{s^2+b^2}$$

para todo $s > 0$. *Portanto,*

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}, \quad s > 0.$$

Exemplo 4.5 *Considere-se a função*

$$f(t) = \mathrm{sen}\,bt, \quad b \in \mathbb{R}^+, \quad t > 0.$$

Então,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{sen}\,bt\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}\,\mathrm{sen}\,bt\,dt$$

Integrando por partes, obtém-se

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}\,bt\} = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2+b^2}(s\,\mathrm{sen}\,bt + b\cos bt)\right]_0^R = \frac{b}{s^2+b^2}$$

para todo $s > 0$. *Portanto,*

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}\,bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0.$$

Em cada um dos casos anteriores constatamos, sem surpresa, que o integral (4.1) existe apenas para certos valores de s. Abordaremos agora uma classe de funções para as quais o integral (4.1) existe sempre. Antes, porém, temos de considerar algumas propriedades de funções.

Definição 4.2 *Uma função $f(t)$ diz-se uma **função seccionalmente contínua** no intervalo limitado $a \leq t \leq b$ se este intervalo puder ser dividido num número finito de subintervalos tais que:*

(a) f é contínua no interior de cada subintervalo;

(b) $f(t)$ tem limite finito quando t se aproxima de qualquer um dos extremos de cada subintervalo a partir do seu interior.

Exemplo 4.6 *Considere-se a função*

$$f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}.$$

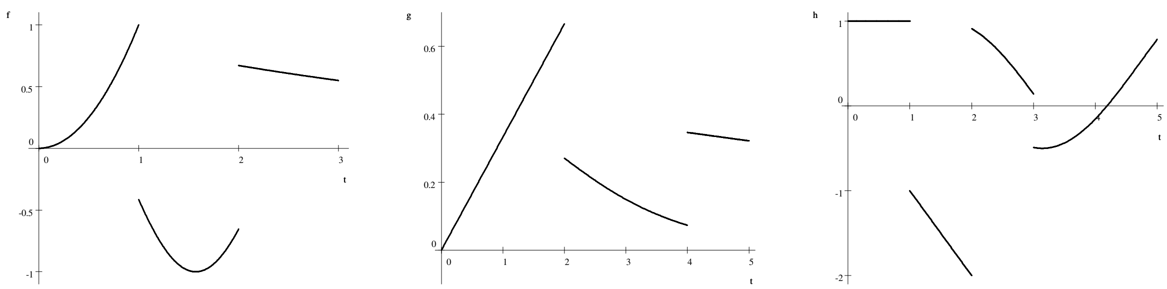
Averiguar se a função f é seccionalmente contínua no intervalo finito $0 \leq t \leq b$ qualquer que seja o número real positivo b.

Solução. *De facto, a função f é contínua em $]0,2[$ e em $]2,c[$ para todo $c > 2$. Tem-se ainda*

$$f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t) = -1, \quad f(2^-) = \lim_{t \to 2^-} f(t) = -1, \quad f(2^+) = \lim_{t \to 2^+} f(t) = +1,$$

pelo que os limites de f quando t se aproxima de qualquer um dos extremos de cada subintervalo a partir do seu interior são finitos. Portanto, f é seccionalmente contínua no intervalo finito $0 \leq t \leq b$ para todo $b > 0$.

Exemplo 4.7 *Alguns exemplos de gráficos de funções seccionalmente contínuas.*



Exemplo 4.8 *Considere-se a função*

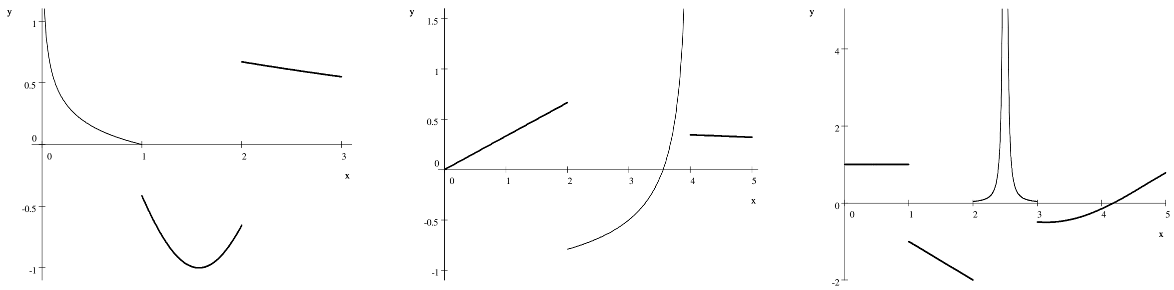
$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 5 \\ (x-5)^{-1}, & t > 5 \end{cases}.$$

A função g não é seccionalmente contínua no intervalo finito $0 \leq t \leq d$ para $d > 5$ uma vez que o limite

$$f(5^+) = \lim_{t \to 5^+} g(t)$$

não é finito ($+\infty$).

Exemplo 4.9 *Alguns exemplos de gráficos de funções que não são seccionalmente contínuas.*



Definição 4.3 *Uma função f diz-se uma* ***função de ordem exponencial*** *se existe uma constante real α e constantes positivas t_0 e M, tais que*

$$e^{-\alpha t}\,|f(t)| < M$$

para todo $t > t_0$ para o qual f esteja definida. Dizemos portanto que f é de ordem exponencial $e^{\alpha t}$ se existe uma constante positiva α tal que o produto

$$e^{-\alpha t}\,|f(t)|$$

é limitado para valores de t suficientemente elevados. Tem-se

$$e^{-\alpha t}\,|f(t)| < M \quad \Leftrightarrow \quad |f(t)| < Me^{\alpha t}$$

para todo $t > t_0$ para o qual f esteja definida.

Note-se que se f é uma função de ordem exponencial $e^{\alpha t}$, então também é de ordem exponencial $e^{\beta t}$ para todo $\beta > \alpha$ (porquê?).

Exemplo 4.10 *Toda a função limitada é de ordem exponencial $e^{\alpha t}$ com $\alpha = 0$. Assim, $\cos bt$ e $\operatorname{sen} bt$ são funções de ordem exponencial pois*

$$|\cos bt| \leq 1 < Me^{\alpha t} \quad e \quad |\operatorname{sen} bt| \leq 1 < Me^{\alpha t}$$

para $M > 1$ e $\alpha = 0$, para todo t.

Exemplo 4.11 *Toda a função f do tipo $e^{at}\cos bt$ é de ordem exponencial com $\alpha = a$ pois*

$$\left|e^{at}\cos bt\right| \leq e^{at} < Me^{\alpha t}$$

para $M > 1$ e $\alpha = a$, para todo t. O mesmo se aplica a funções do tipo $e^{at}\operatorname{sen} bt$.

Exemplo 4.12 *Considere-se a função $f(t) = t^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Dado que*

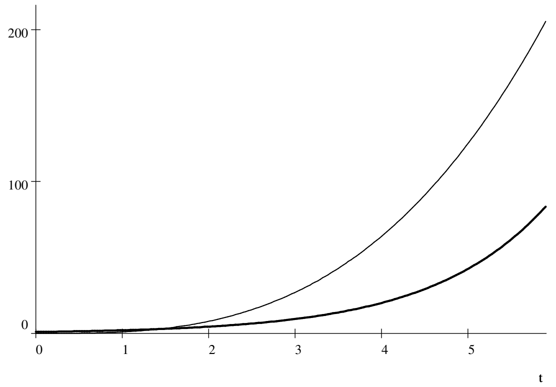
$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}t^n = 0,$$

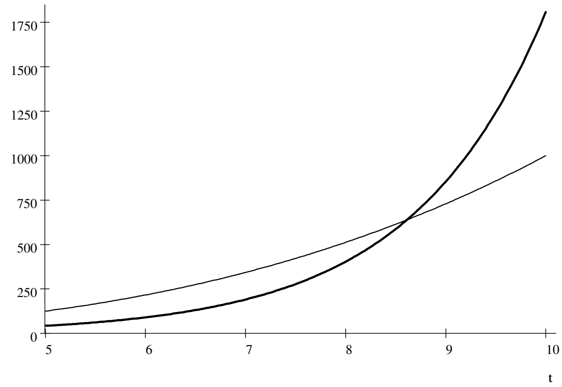
para $\alpha > 0$, então deverão existir $M > 0$ e $t_0 > 0$ tais que

$$e^{-\alpha t}\,|t^n| = e^{-\alpha t}t^n < M$$

para $t > t_0$. *Portanto,* $f(t) = t^n$ *é de ordem exponencial para* $\alpha > 0$.

Nota: neste caso a representação gráfica das funções t^n *e* $e^{\alpha t}$ *é uma boa forma de ilustrar esta conclusão. Nos dois gráficos seguintes representam-se as funções* t^3 *e* $e^{3t/4}$ *(esta última a cheio).*

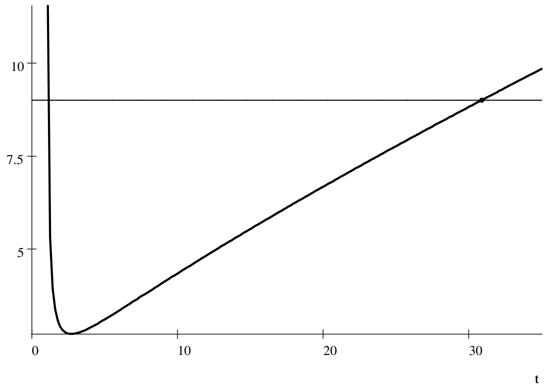




Apesar de para valores relativamente pequenos de t *o gráfico da função* t^3 *estar tipicamente acima do gráfico da função* $e^{3t/4}$, *existe um valor de* t, *neste caso concreto* $t_0 \approx 8.6$, *tal que* $e^{3t/4} > t^3$ *para todo* $t > t_0$. *No caso geral, o comportamento descrito acima verifica-se qualquer que seja* n *desde que se tome* $\alpha > 0$ *por muito próximo que* α *esteja de zero. Quanto maior for a razão* n/α *maior será naturalmente o valor de* t_0, *dado que* t_0 *é a maior raiz da equação (porquê?)*

$$\frac{t}{\ln t} = \frac{n}{\alpha},$$

conforme se pode concluir do gráfico seguinte que representa a função $t(\ln t)^{-1}$ *(a reta horizontal representa um valor hipotético para a razão* n/α*).*



Exemplo 4.13 *A função* $f(t) = e^{t^2}$ *não é uma função de ordem exponencial já que*

$$e^{-\alpha t} e^{t^2} = e^{(t-\alpha)t}$$

não é limitada quando $t \to \infty$, *independentemente do valor de* α. *Em termos gráficos tal quer dizer que por muito grande que seja o valor de* α, *não existe nenhum valor* t_0 *tal que o gráfico da função* $e^{\alpha t}$ *esteja sempre acima do gráfico da função* e^{t^2} *para todo* $t > t_0$ *(na realidade, passa-se precisamente o contrário).*

Podemos agora apresentar um teorema que nos dá condições sobre f que são suficientes para que o integral (4.1) exista.

Teorema 4.1 *Seja f uma função real com as seguintes propriedades:*

(a) f é seccionalmente contínua para todos os intervalos limitados fechados $0 \leq t \leq b$, onde $b > 0$;

(b) f é de ordem exponencial, isto é, existem constantes α, $M > 0$ e $t_0 > 0$, tais que

$$e^{-\alpha t}\,|f(t)| < M$$

para todo $t > t_0$.

Nestas condições a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

existe para $s > \alpha$. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em S.L. Ross.

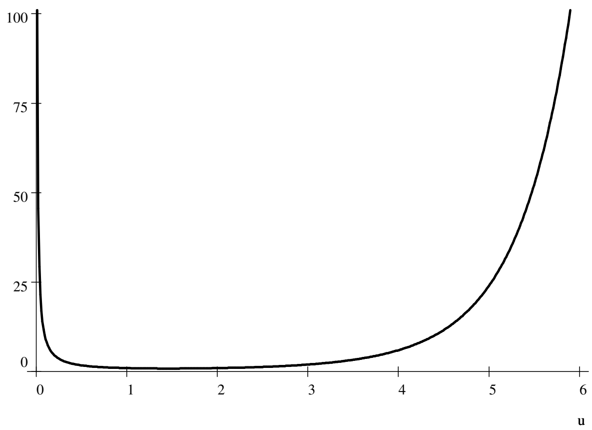
Note-se que o teorema precedente estabelece condições suficientes para que determinada função f admita transformada de Laplace. No entanto, há funções que mesmo não cumprindo alguma das condições deste teorema têm transformada de Laplace. Por exemplo, a função $t^{-1/3}$ não tem limite finito quando $t \to 0^+$, pelo que não é seccionalmente contínua em $0 \leq t \leq b$, e no entanto

$$\mathcal{L}\left\{t^{-1/3}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} t^{-1/3}\,dt = s^{-2/3} \int_0^\infty e^{-x} x^{-1/3}\,dx = s^{-2/3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right),$$

onde Γ é a função Gamma

$$\Gamma\left(u\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{u-1} dx,$$

é finito, pelo que a função $t^{-1/3}$ tem transformada de Laplace para $s > 0$ apesar de não cumprir as condições do teorema.



Representação gráfica da função Γ no intervalo $]0,\, 6[$

Vejamos agora algumas propriedades básicas da transformada de Laplace que decorrem da respetiva definição (4.1) e que, conforme veremos, serão úteis no cálculo da transformada de Laplace e suas aplicações à determinação da solução de PVIs envolvendo equações (integro-) diferenciais lineares com coeficientes constantes.

Teorema 4.2 ***(Propriedade da linearidade)*** *Sejam f e g funções cuja transformada de Laplace existe para $s > a$. Sejam ainda A e B constantes. Então,*

$$\mathcal{L}\{Af + Bg\} = A\mathcal{L}\{f\} + B\mathcal{L}\{g\}, \quad s > a.$$

Demonstração *Tem-se*

$$\mathcal{L}\{Af + Bg\} = \int_0^\infty e^{-st}(Af + Bg)\, dt = A\int_0^\infty e^{-st} f\, dt + B\int_0^\infty e^{-st} g\, dt = A\mathcal{L}\{f\} + B\mathcal{L}\{g\},$$

conforme requerido. ■

É fácil mostrar que o resultado precedente se pode generalizar ao seguinte.

Proposição 4.3 *Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_m$ funções cuja transformada de Laplace existe para $s > a$. Sejam ainda $A_1, A_2, \ldots, A_m$ constantes. Então,*

$$\mathcal{L}\{\textstyle\sum_{i=1}^m A_i f_i\} = \sum_{i=1}^m A_i \mathcal{L}\{f_i\}.$$

Exemplo 4.14 *Determinar $\mathcal{L}\left\{5 - 3t + 8t^2\right\}$ usando o teorema precedente.*
Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{5 - 3t + 8t^2\right\} = 5\mathcal{L}\{1\} - 3\mathcal{L}\{t\} + 8\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \frac{5}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{16}{s^3}$$

para todo $s > 0$, uma vez que as funções 1 e t admitem, como já vimos, transformada de Laplace para $s > 0$, o mesmo acontecendo com a função t^2 (ver mais adiante).

Exemplo 4.15 *Determinar $\mathcal{L}\left\{\cos^2 at\right\}$ usando o teorema precedente e o facto de se ter*

$$\cos^2 at = \frac{1 + \cos 2at}{2}.$$

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{\cos^2 at\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1 + \cos 2at}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2at\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4a^2}\right) = \frac{2s^2 + 4a^2}{(s^2 + 4a^2)\, s}$$

para todo $s > 0$, uma vez que as funções 1 e $\cos 2at$ são funções de ordem exponencial com $\alpha = 0$ (porquê?).

Problema Determinar $\mathcal{L}\left\{\text{sen}^2\, at\right\}$ usando o teorema precedente, sabendo que

$$\text{sen}^2 at = \frac{1 - \cos 2at}{2}.$$

Resp.: $2s^{-1}(s^2 + 4)^{-1}$.

O teorema seguinte dá-nos um primeiro resultado que será essencial para podermos aplicar a transformada de Laplace à resolução de PVIs envolvendo equações lineares com coeficientes constantes. Para já este resultado permitirá abordar, num primeiro momento, PVIs envolvendo equações diferenciais de primeira ordem.

Teorema 4.4 *Seja f uma função real contínua para $t \geq 0$ e de ordem exponencial $e^{\alpha t}$. Seja f' uma função seccionalmente contínua em todo o intervalo fechado $0 \leq t \leq b$, $b > 0$. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0), \quad s > \alpha.$$

Demonstração *(Esboço) Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f'\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f'\, dt.$$

Integrando por partes resulta

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \lim_{R\to\infty} \left[e^{-st} f\right]_0^R + \lim_{R\to\infty} \int_0^R s e^{-st} f\, dt = -f(0) + s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}.$$

Ora, $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ existe por hipótese para $s > \alpha$, pelo que

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0), \quad s > \alpha,$$

conforme requerido. A demonstração completa por ser consultada em S.L. Ross. ■

Exemplo 4.16 *Considere-se a função $f(t) = \operatorname{sen} at$. Esta função satisfaz as hipóteses do Teorema 4.4, tendo-se $f(0) = 0$ e $f'(t) = a\cos at$. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{a\cos at\right\} = s\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} at\right\}, \quad s > 0,$$

ou seja

$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} at\right\} = \frac{a}{s}\mathcal{L}\left\{\cos at\right\} = \frac{a}{s}\frac{s}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0.$$

Problema Considerar a função $f(t) = \cos at$ e obter o resultado do exemplo precedente assumindo conhecido $\mathcal{L}\left\{\cos at\right\}$.

Exemplo 4.17 *Considere-se o seguinte PVI*

$$\frac{dy}{dt} + y = 1, \quad y(0) = 1.$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + \mathcal{L}\left\{y\right\} = \frac{1}{s}. \tag{4.2}$$

Por outro lado, da aplicação do Teorema 4.4 resulta

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} - y(0),$$

pelo que a equação (4.2) passa a escrever-se

$$s\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{y\right\} - y(0) = \frac{1}{s},$$

ou, atendendo à condição inicial do PVI,

$$(s+1)\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s} + 1.$$

Ou seja, a solução $y(t)$ do PVI, se existir, é tal que a sua transformada de Laplace $\mathcal{L}\{y(t)\}$ obedece a

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s\,(s+1)} + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s}.$$

Ora, vimos anteriormente que $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, pelo que o PVI admite pelo menos a solução $y(t) = 1$.

Este exemplo pretende apenas ilustrar a aplicação da transformada de Laplace para determinar a solução de um PVI envolvendo uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes constantes. Este assunto será posteriormente desenvolvido em secção própria.

Problema Considerar o PVI

$$\frac{dy}{dt} - y = t, \quad t > 0; \quad y(0) = 0.$$

Mostrar que a transformada de Laplace de $y(t)$ deve obedecer a

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

e consequentemente que uma solução do PVI é $y(t) = t - 1 + e^{-t}$ (porquê?).

O resultado do Teorema 4.4 pode ser generalizado, permitindo aplicar a transformada de Laplace à resolução de PVIs envolvendo equações lineares com coeficientes constantes de qualquer ordem.

Teorema 4.5 *Seja f uma função real tendo derivadas até à ordem $n-1$ contínuas para $t \geq 0$, onde $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que as funções $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$, são todas de ordem exponencial $e^{\alpha t}$. Suponhamos ainda que $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua para todo o intervalo fechado limitado $0 \leq t \leq b$, $b > 0$. Então $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}$ existe para $s > \alpha$ e*

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Nota: Para $n = 1$ obtém-se o resultado do teorema precedente, enquanto que para $n = 2$ e $n = 3$ resulta

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - s f(0) - f'(0),$$
$$\mathcal{L}\left\{f'''(t)\right\} = s^3 \mathcal{L}\{f(t)\} - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0).$$

Demonstração *(Esboço) A demonstração deste teorema é feita por indução.*

Passo 1. Para $n = 1$ obtém-se, conforme já referimos, o resultado do Teorema 4.4.

Passo 2. Suponhamos agora que o resultado é válido para $k = n - 1$, ou seja,

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n-1)}(t)\right\} = s^{n-1} \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-2} f(0) - s^{n-3} f'(0) - \cdots - s f^{(n-3)}(0) - f^{(n-2)}(0), \tag{4.3}$$

Definindo $g(t) = f^{(n-1)}(t)$, *tem-se que a função* g *é seccionalmente contínua, tendo transformada de Laplace dada por (ver Teorema 4.4),*

$$\mathcal{L}\left\{g'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} - g(0)$$

ou seja

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f^{(n-1)}(t)\right\} - f^{(n-1)}(0).$$

Substituindo a expressão de $\mathcal{L}\left\{f^{(n-1)}(t)\right\}$ *dada por (4.3) na expressão precedente obtém-se o resultado pretendido. A demonstração completa por ser consultada em S.L. Ross.* ■

Exemplo 4.18 *Aplicamos este teorema no caso* $n = 2$ *para determinar* $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\}$ *sem recorrer à definição de transformada de Laplace. Tem-se que* $f(t) = \operatorname{sen} bt$ *satisfaz as condições do Teorema 4.5 com* $\alpha = 0$. *Por outro lado, para* $n = 2$ *obtemos,*

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - sf(0) - f'(0).$$

Assim,

$$\mathcal{L}\left\{(\operatorname{sen} bt)''\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} - s\operatorname{sen} 0 - b\cos 0 = s^2\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} - b.$$

Desta forma, dado que $(\operatorname{sen} bt)'' = -b^2 \operatorname{sen} bt$, *resulta*

$$-b^2\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} - b \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0.$$

Problema Aplicar o Teorema 4.5 para obter a transformada de Laplace da função $\mathcal{L}\left\{\cos bt\right\}$ sem recorrer à respetiva definição.

Tal como anteriormente, daremos agora um exemplo ilustrativo da aplicação da transformada de Laplace para determinar a solução de um PVI envolvendo uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Este assunto será posteriormente desenvolvido em secção própria.

Exemplo 4.19 *Determinar uma solução do PVI*

$$y'' + 25y = 0, \quad t > 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5,$$

usando a transformada de Laplace.

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{y'' + 25y\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\left\{y''\right\} + 25\mathcal{L}\left\{y\right\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(s^2+25\right)\mathcal{L}\left\{y\right\} - 5 = 0,$$

pelo que $y(t)$ *deverá ser tal que*

$$\mathcal{L}\left\{y\right\} = \frac{5}{s^2+25}.$$

Uma solução para o PVI é então (porquê?)

$$y(t) = \operatorname{sen} 5t.$$

Problema Determinar uma solução do PVI

$$y'' + 4y = 0, \quad t > 0; \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0,$$

usando a transformada de Laplace.
Resp.: $y = -2\cos 2t$.

Teorema 4.6 ***(Propriedade da translação)*** *Suponhamos que f é tal que $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > \alpha$. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a), \quad s > \alpha + a,$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Demonstração *Seja*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f\, dt,$$

então

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(e^{at} f\right)\, dt = \mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}.$$

Por outro lado, se f é de ordem exponencial $e^{\alpha t}$, então existem constantes t_0 e M, tais que

$$e^{-\alpha t}\left|f(t)\right| < M \quad \Rightarrow \quad e^{-(\alpha+a)t}\left|e^{\alpha t}f(t)\right| < M$$

para todo $t > t_0$, pelo que $e^{\alpha t}f(t)$ é de ordem exponencial $e^{(\alpha+a)t}$. ■

Exemplo 4.20 *Determinar $\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\}$. Tem-se,*

$$\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = F(s-a),$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

Dado que t é de ordem exponencial com $\alpha = 0$, vem

$$\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad s > a.$$

Exemplo 4.21 *Determinar $\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\}$. Tem-se,*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\} = F(s-a),$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}.$$

Dado que $\cos bt$ é de ordem exponencial com $\alpha = 0$, vem

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\} = \frac{s}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a.$$

Problema Determinar $\mathcal{L}\left\{2t^2e^{-t} - 3e^t \operatorname{sen} 5t\right\}$ usando as propriedades da linearidade e da translação. Resp.: $4(s+1)^{-3} - 15[(s-1)^2+25]^{-1}$, $s > 1$.

Vejamos agora um resultado que nos permitirá determinar a transformada de Laplace de funções do tipo $t^n f(t)$. Neste contexto, tem-se o seguinte teorema.

Teorema 4.7 *Suponhamos que a função f admite transformada de Laplace para $s > \alpha$. Então,*

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[F(s)],$$

onde

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f\, dt.$$

Demonstração *Derivando*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f\, dt$$

sucessivamente em ordem a s, obtém-se

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f\, dt = (-1)^1 \int_0^\infty e^{-st} t f\, dt = (-1)^1 \mathcal{L}\left\{t^1 f(t)\right\}$$

$$\frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left[(-1)^1 \int_0^\infty e^{-st} t f\, dt\right] = (-1)^2 \int_0^\infty e^{-st} t^2 f\, dt = (-1)^2 \mathcal{L}\left\{t^2 f(t)\right\}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^nF(s)}{ds^n} = (-1)^n \int_0^\infty e^{-st} t^n f\, dt = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\},$$

donde se conclui que

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^nF(s)}{ds^n},$$

conforme requerido. ■

Exemplo 4.22 *Determinar $\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} bt\}$.*

Solução. *Usando o resultado que se acaba de demonstrar, obtém-se*

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} bt\} = (-1)^1 \frac{dF(s)}{ds},$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{s^2+b^2},$$

resultando

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} bt\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right) = -2\frac{bs}{(b^2+s^2)^2}, \quad s > 0.$$

Exemplo 4.23 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{t^2 \cos bt\right\}$.

Solução. *Aplicando o Teorema 4.7, obtém-se*

$$\mathcal{L}\left\{t^2 \cos bt\right\} = (-1)^2 \frac{d^2 F(s)}{ds^2},$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\cos bt\right\} = \frac{s}{s^2+b^2},$$

vindo

$$\mathcal{L}\left\{t^2 \cos bt\right\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+b^2}\right) = 2s\frac{s^2-3b^2}{\left(s^2+b^2\right)^3} = \frac{2s}{\left(b^2+s^2\right)^2} - \frac{8b^2 s}{\left(b^2+s^2\right)^3}.$$

Problema Determinar $\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\}$ e comparar o resultado com aquele que se obteve por aplicação da propriedade da translação.

Problema Determinar $\mathcal{L}\left\{t^3\right\}$ usando o facto de $\mathcal{L}\left\{t^3\right\} = \mathcal{L}\left\{t^2 f(t)\right\}$, com $f(t) = t$.
Resp.: $6s^{-4}$.

Vejamos mais algumas propriedades da transformada de Laplace.

Teorema 4.8 *Suponhamos que a função f admite transformada de Laplace $F(s)$ para $s > \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s}, \quad s > \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Demonstração *A definição de transformada de Laplace permite escrever*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(u)\,du\right) e^{-st}\,dt = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a\left(\int_0^t f(u)\,du\right) e^{-st}\,dt.$$

Por outro lado, designando por g uma primitiva de f, tem-se

$$\int_0^a\left(\int_0^t f(u)\,du\right) e^{-st}\,dt = \int_0^a \left(g(t)-g(0)\right) e^{-st}\,dt = \int_0^a g(t)\,e^{-st}\,dt - g(0)\int_0^a e^{-st}\,dt,$$

pelo que aplicando integração por partes, resulta

$$\begin{aligned}\int_0^a\left(\int_0^t f(u)\,du\right) e^{-st}\,dt &= \frac{1}{s}\int_0^a f(t)\,e^{-st}\,dt - \frac{1}{s}\left[g(t)\,e^{-st}\right]_0^a + \frac{g(0)}{s}\left[e^{-st}\right]_0^a \\ &= \frac{1}{s}\int_0^a f(t)\,e^{-st}\,dt - \frac{g(a)}{s}\,e^{-sa} + \frac{g(0)}{s} + \frac{g(0)}{s}\left(e^{-sa}-1\right) \\ &= \frac{1}{s}\int_0^a f(t)\,e^{-st}\,dt + \frac{1}{s}e^{-sa}\left(g(0)-g(a)\right).\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $a \to +\infty$ e uma vez que $s > \alpha > 0$, obtém-se finalmente

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\left(\int_0^t f(u)\,du\right) e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\lim_{a\to+\infty}\int_0^a f(t)\,e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt = \frac{F(s)}{s},$$

ou

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s},$$

tal como requerido. ■

Exemplo 4.24 *Sendo*

$$\operatorname{sen} t = \int_0^t \cos u\,du$$

e

$$\mathcal{L}\{\cos u\} = \frac{s}{s^2+1}, \quad s > 0,$$

resulta da aplicação do teorema precedente

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos u\,du\right\} = \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}, \quad s > 0.$$

O principal interesse do resultado expresso pelo Teorema 4.8 prende-se com a sua aplicação na resolução de PVIs envolvendo equações integro-diferenciais lineares com coeficientes constantes. Vejamos um pequeno exemplo de ilustrição, à semelhança do que fizemos anteriormente para ilustrar a resolução de PVIs utilizando a transformada de Laplace.

Exemplo 4.25 *Considere-se o seguinte PVI envolvendo uma equação integro-diferencial*

$$\frac{dy}{dt} - \int_0^t y(x)\,dx = 1, \quad t > 0; \quad y(0) = 1.$$

Tem-se

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(x)\,dx\right\} = \mathcal{L}\{1\}.$$

Designando $\mathcal{L}\{y\}$ *por* $Y(s)$, *vem*

$$sY(s) - y(0) - \frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s-1},$$

pelo que uma solução do PVI é

$$y(t) = e^t.$$

Problema Determinar uma solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} - 4\int_0^t y(x)\,dx = -2, \quad t > 0; \quad y(0) = 1.$$

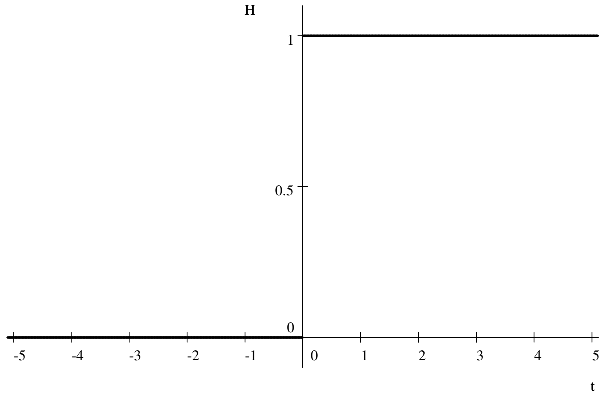
Resp.: $y = e^{-2t}$.

As funções que surgem nos segundos membros das equações diferenciais lineares são muitas vezes definidas por ramos. Seguindo o processo que não recorre à transformada de Laplace é necessário determinar a solução de tantos PVIs quantos os ramos envolvidos na definição da função que surge no segundo membro. O uso da transformada de Laplace permite, conforme veremos, determinar a solução do PVI dado independentemente do número de ramos envolvidos. No entanto, para abordar este tipo de problemas, necessitamos de abordar alguma noções adicionais.

Definição 4.4 *A função de Heaviside H (também designada "função salto unitário") define-se para todo* $t \in \mathbb{R}$ *como*

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases},$$

sendo o respetivo gráfico



Representação gráfica da função de Heaviside

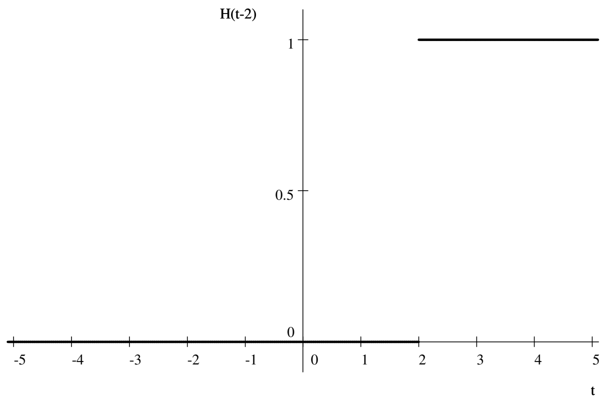
Consideraremos também a função de Heaviside avaliada em $t - a$, onde $a \geq 0$, ou seja

$$H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}.$$

Por exemplo, para $a = 2$, tem-se

$$H(t-2) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases},$$

correspondendo-lhe o seguinte gráfico



Representação gráfica da função de Heaviside avaliada em $t - 2$

Trata-se portanto de uma translação da função de Heaviside $H(t)$.

A função de Heaviside permite a representação de funções que têm vários ramos sem ter de os explicitar. Além disso, a "amplitude, base e direção do salto" podem variar. Os exemplos seguintes ilustram estas propriedades.

Exemplo 4.26 *A função $f(t)$ definida por*

$$f\,(t) = A + B\,H(t-a), \quad t \geq 0,\ a \geq 0,$$

onde A e B são constantes reais, corresponde a

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < a \\ A+B, & t \geq a \end{cases}.$$

Portanto, dependendo dos valores atribuídos a a, A e B, podemos ter funções distintas, por exemplo,

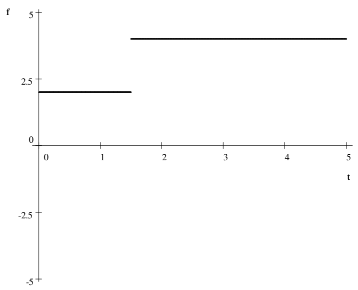


Gráfico de $2 + 2H(t-3/2)$

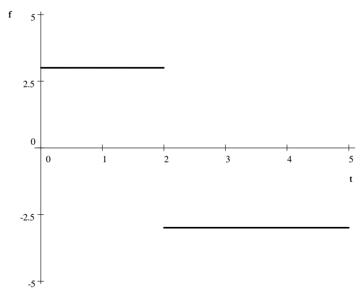


Gráfico de $3 - 6H(t-2)$

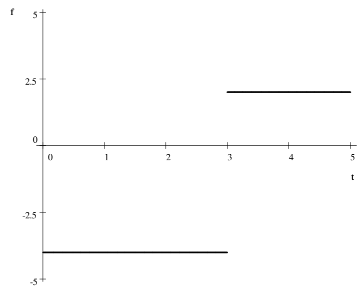


Gráfico de $-4 + 6H(t-3)$

Podemos ainda ter, por exemplo, funções do tipo

$$g(t) = A + B\,H(t-a) + C\,H(t-b) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < a \\ A+B, & a \leq t < b \\ A+B+C, & t \geq b \end{cases},$$

ou

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)\,H(t-a) = \begin{cases} h_1(t), & 0 \leq t < a \\ h_1(t) + h_2(t), & t \geq a \end{cases},$$

conforme se ilustra nos gráficos seguintes.

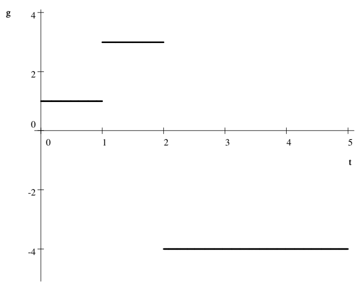


Gráfico de $1 + 2H(t-1) - 7H(t-2)$

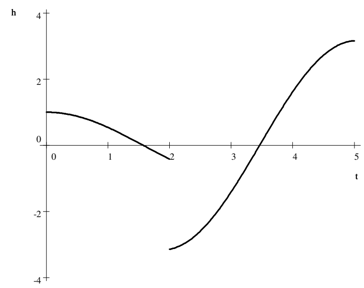


Gráfico de $\cos(t) - 3\,\mathrm{sen}(t)H(t-2)$

Conforme veremos de seguida, um procedimento que é necessário realizar no âmbito do cálculo da transformada de Laplace de funções definidas por ramos é o de expressar tais funções à custa da combinação de funções de Heaviside.

Comecemos por determinar a transformada de Laplace da função de Heaviside avaliada em $t-a$. Tem-se, por definição,

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} H(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_a^R e^{-st}\,dt = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^R = \frac{e^{-as}}{s},$$

para todo $s>0$. Então,

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad s>0.$$

Dada a definição que adoptamos para a transformada de Laplace, resulta, quando se toma $a=0$,

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{1}{s}, \quad s>0,$$

o que é natural porque $H(t)=1$ quando $t\geq 0$.

Exemplo 4.27 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0\leq t<2 \\ 3, & t\geq 2 \end{cases},$$

cujo gráfico é

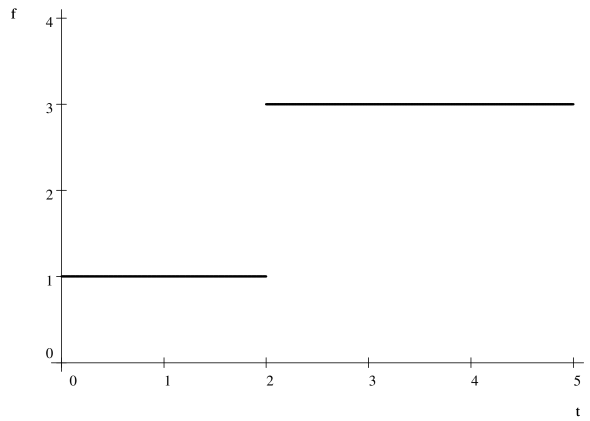


Gráfico da função $f(t)$

Solução. *Pode-se recorrer à definição para determinar $\mathcal{L}\{f(t)\}$, mas o objetivo é escrever $f(t)$ à custa da função de Heaviside para poder usar o resultado anterior. É fácil mostrar que em geral se tem*

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0\leq t<a \\ B, & t\geq a \end{cases} = A + (B-A)\,H(t-a).$$

Então

$$f(t) = 1 + 2H(t-2),$$

pelo que

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{1 + 2H(t-2)\right\} = \mathcal{L}\left\{1\right\} + 2\mathcal{L}\left\{H(t-2)\right\} = \frac{1}{s} + 2\frac{e^{-2s}}{s}, \quad s > 0.$$

Exemplo 4.28 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$g(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 1 \\ -3, & 1 \le t < 4 \\ 0, & t \ge 4 \end{cases}.$$

Solução. *Novamente, o primeiro passo consiste em escrever a função dada à custa da função de Heaviside. Tem-se o seguinte resultado geral*

$$g(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t < a \\ B, & a \le t < b \\ C, & t \ge b \end{cases} = A + (B - A)\, H(t-a) + (C - B)\, H(t-b).$$

Portanto,

$$g(t) = 2 - 5H(t-1) + 3H(t-4)$$

e assim

$$\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{2 - 5H(t-1) + 3H(t-4)\right\} = \frac{2}{s} - 5\frac{e^{-s}}{s} + 3\frac{e^{-4s}}{s}, \quad s > 0.$$

Nota Se uma função $h(t)$ for definida por $n+1$ ramos,

$$h(t) = \begin{cases} A_1, & 0 \le t < a_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_k, & a_{k-1} \le t < a_k \\ \vdots & \vdots \\ A_{n+1} & t \ge a_n \end{cases},$$

então

$$h(t) = A_1 + (A_2 - A_1)\, H\left(t - a_1\right) + (A_3 - A_2)\, H\left(t - a_2\right) + \cdots + (A_{n+1} - A_n)\, H\left(t - a_n\right).$$

Este resultado é ainda válido mesmo quando os ramos da função não são constantes.

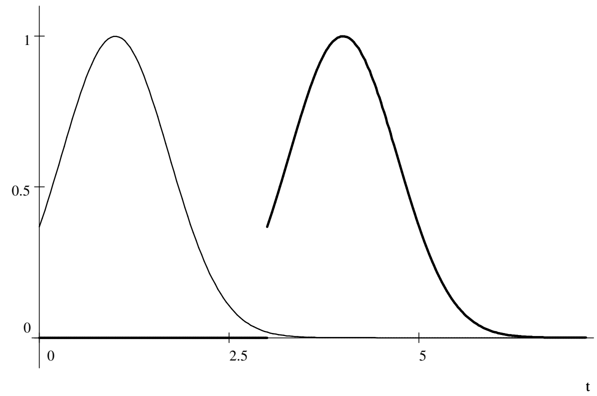
Consideremos agora a função definida por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ f(t-a), & t \ge a \end{cases},$$

ou seja,

$$g(t) = H(t-a)\, f(t-a).$$

Por exemplo, para
$$f(t) = e^{-(t-1)^2} \quad \text{e} \quad a = 3,$$
tem-se
$$g(t) = H(t-3)\, f(t-3) = H(t-3)\, e^{-(t-4)^2} = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3 \\ e^{-(t-4)^2}, & t \ge 3 \end{cases},$$
correspondendo-lhe o seguinte gráfico:



Representação gráfica das funções $e^{-(t-1)^2}$ e $H(t-3)e^{-(t-4)^2}$ (a cheio)

Tem-se, portanto, uma translação da função $f(t)$.

Teorema 4.9 *Seja f uma função que admite transformada de Laplace $F(s) \equiv \mathcal{L}\{f(t)\}$ para $s > \alpha$. Seja ainda*
$$r(t) = H(t-a)\, f(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ f(t-a), & t \ge a \end{cases}.$$
Então
$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \mathcal{L}\{H(t-a)\, f(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s)$$
para $s > \alpha$.

Demonstração *Tem-se,*
$$\mathcal{L}\{H(t-a)\, f(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}H(t-a)\, f(t-a)\, dt = \int_a^{\infty} e^{-st}f(t-a)\, dt.$$
Fazendo $u = t - a$ vem,
$$\mathcal{L}\{H(t-a)\, f(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-s(u+a)}f(u)\, du. = e^{-as}\int_0^{\infty} e^{-su}f(u)\, du.$$
O integral é finito para $s > \alpha$, pelo que nessas condições,
$$\mathcal{L}\{H(t-a)\, f(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s),$$
tal como requerido. ∎

Exemplo 4.29 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$g(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < 7 \\ t-4, & t \geq 7 \end{cases},$$

cujo gráfico é

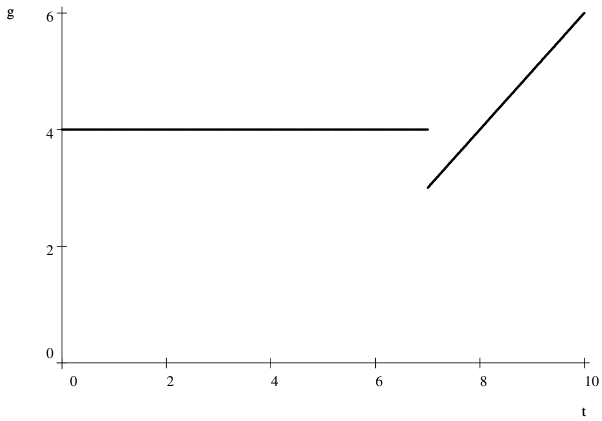


Gráfico da função $g(t)$

Solução. *Atendendo ao resultado apresentado na Nota presente na página 180, tem-se*

$$g(t) = 4 + H(t-7)\ (t-4-4) = 4 + H(t-7)\ (t-8)\,.$$

Assim,

$$\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{4 + H(t-7)\ (t-8)\right\} = 4\mathcal{L}\left\{1\right\} + \mathcal{L}\left\{H(t-7)\ (t-8)\right\}.$$

Resta determinar

$$\mathcal{L}\left\{H(t-7)\ (t-8)\right\}.$$

Para esse efeito, e para poder aplicar o Teorema 4.9, teremos de determinar uma função $f(t)$ de forma que

$$H(t-7)\ (t-8) = H(t-a)\, f(t-a), \tag{4.4}$$

já que nesse caso teríamos

$$\mathcal{L}\left\{H(t-7)\ (t-8)\right\} = e^{-as}F(s),$$

com $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$. Ora, da equação (4.4) decorre imediatamente que $a = 7$, pelo que $f(t)$ terá de verificar a condição

$$f(t-7) = t-8. \tag{4.5}$$

Resta determinar $f(t)$. Para tal considere-se a mudança de variável

$$\tau = t-7 \quad \Rightarrow \quad t = \tau + 7.$$

A equação (4.5) escreve-se agora

$$f(\tau) = \tau + 7 - 8 = \tau - 1,$$

e por isso concluímos que (recorde-se que τ, tal como t, são "variáveis mudas")

$$f(t) = t - 1 \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = 4\mathcal{L}\{1\} + e^{-5s}F(s) = \frac{4}{s} + e^{-5s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right), \quad s > 0.$$

Exemplo 4.30 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$h(t) = \begin{cases} 2\,\mathrm{sen}\,3t, & 0 \leq t < \pi/2 \\ 3\cos 4t, & t \geq \pi/2 \end{cases},$$

cujo gráfico é

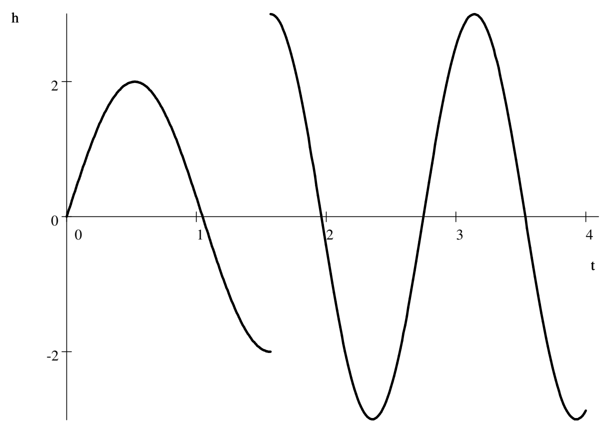


Gráfico da função $h(t)$

Solução. *Tem-se*

$$h(t) = 2\,\mathrm{sen}\,3t + H\left(t - \pi/2\right)\left(3\cos 4t - 2\,\mathrm{sen}\,3t\right).$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = 2\mathcal{L}\{\mathrm{sen}\,3t\} + 3\mathcal{L}\{H\left(t - \pi/2\right)\cos 4t\} - 2\mathcal{L}\{H\left(t - \pi/2\right)\mathrm{sen}\,3t\}. \qquad (4.6)$$

Comecemos pelo termo

$$\mathcal{L}\{H\left(t - \pi/2\right)\cos 4t\} = \mathcal{L}\{H\left(t - a\right)\, h_1(t - a\} = e^{-as}H_1(s),$$

onde definimos $H_1(s) = \mathcal{L}\{h_1(t)\}$. Determinamos então a função $h_1(t)$ sabendo que $a = \pi/2$. Tem-se,

$$h_1(t - \pi/2) = \cos 4t,$$

pelo que fazendo

$$\tau = t - \pi/2 \quad \Rightarrow \quad t = \tau + \pi/2,$$

resulta

$$h_1(\tau) = \cos\left(4\tau + 2\pi\right) = \cos 4\tau,$$

pelo que

$$H_1(s) = \mathcal{L}\{\cos 4t\} = \frac{s}{s^2+16}, \quad s > 0. \tag{4.7}$$

Consideramos agora o termo

$$\mathcal{L}\{H(t-\pi/2)\ \mathrm{sen}\, 3t\} = \mathcal{L}\{H(t-a)\ h_2(t-a\} = e^{-as} H_2(s),$$

onde $H_2(s) = \mathcal{L}\{h_2(t)\}$. *Dado que* $a = \pi/2$, *tem-se*

$$h_2(t-\pi/2) = \mathrm{sen}\, 3t.$$

Neste caso a mudança de variável apropriada é novamente $\tau = t - \pi/2$ *e por isso*

$$h_2(\tau) = \mathrm{sen}\,(3\tau + 3\pi/2) = -\cos 3\tau,$$

vindo

$$H_2(s) = -\mathcal{L}\{\cos 3t\} = -\frac{s}{s^2+9}, \quad s > 0. \tag{4.8}$$

Combinando (4.6) - (4.8) tem-se, finalmente,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{h(t)\} &= 2\mathcal{L}\{\mathrm{sen}\, 3t\} + 3e^{-\pi s/2} H_1(s) - 2e^{-\pi s/2} H_2(s) \\ &= \frac{6}{s^2+9} + e^{-\pi s/2}\left(\frac{3s}{s^2+16} + \frac{2s}{s^2+9}\right), \quad s > 0.\end{aligned}$$

Problema Determinar a transformada de Laplace da função

$$w(t) = \begin{cases} t+2, & 0 \le t < 1 \\ 2, & t \ge 1 \end{cases}.$$

Resp.: $s^{-1}(2 - e^{-s}) + s^{-2}(1 - e^{-s}), \quad s > 0.$

Exemplo 4.31 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$r(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 3t+2, & 1 \le t < 2 \\ 2t-1, & t \ge 2 \end{cases},$$

cujo gráfico é

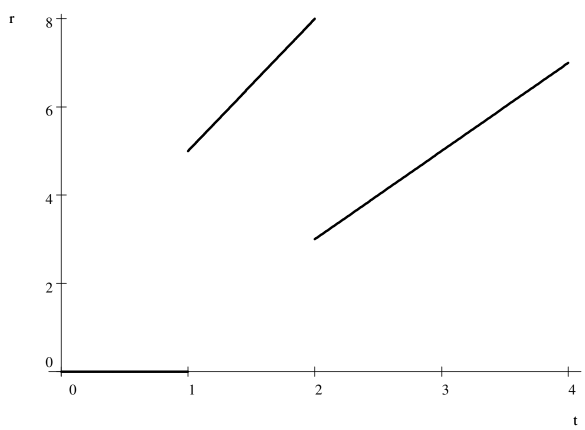


Gráfico da função $r(t)$

Solução. *Tem-se*

$$r(t) = H(t-1)\ (3t+2) + H(t-2)\ (-t-3) = H(t-1)\ (3t+2) - H(t-2)\ (t+3)\,,$$

vindo

$$\mathcal{L}\left\{r(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{H(t-1)\ (3t+2)\right\} - \mathcal{L}\left\{H(t-2)\ (t+3)\right\} = e^{-s}R_1(s) - e^{-2s}R_2(s),$$

com

$$R_1(s) = \mathcal{L}\left\{r_1(t)\right\},\ r_1(t-1) = 3t+2; \quad R_2(s) = \mathcal{L}\left\{r_2(t)\right\},\ r_2(t-2) = t+3.$$

Então, considerando $x = t-1$*, resulta* $t = x+1$ *e consequentemente*

$$r_1(x) = 3\,(x+1) + 2 = 3x+5 \quad \Rightarrow \quad R_1(s) = \frac{3}{s^2} + \frac{5}{s}, \quad s > 0.$$

Por outro lado, fazendo $y = t-2$*, vem* $t = y+2$ *e portanto*

$$r_2(y) = y+2+3 = y+5 \quad \Rightarrow \quad R_2(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{5}{s}, \quad s > 0.$$

Conclui-se então que

$$\mathcal{L}\left\{r(t)\right\} = e^{-s}R_1(s) + e^{-2s}R_2(s) = e^{-s}\left(\frac{3}{s^2} + \frac{5}{s}\right) - e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{5}{s}\right), \quad s > 0.$$

Problema Determinar a transformada de Laplace da função

$$v(t) = \begin{cases} -2t^2, & 0 \leq t < 3 \\ 1-t, & 3 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5 \end{cases}.$$

Resp.: $e^{-5s}\left(4s^{-1} + s^{-2}\right) - 4s^{-3} + e^{-3s}\left(16s^{-1} + 11s^{-2} + 4s^{-3}\right), \quad s > 0.$

Abordamos agora a transformada de Laplace de funções periódicas. É certo que já lidámos com as funções periódicas seno e coseno, mas essas são funções especiais na medida em que a sua periodicidade é de alguma forma intrínseca, não obrigando a definir estas funções por ramos. Por exemplo, a função períodica $f(t)$ a que corresponde o seguinte gráfico

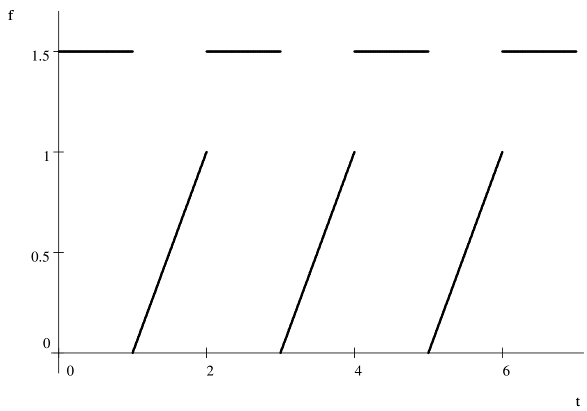


Gráfico da função periódica $f(t)$

define-se analiticamente como

$$f(t) = \begin{cases} 3/2, & 0 \leq t < 1 \\ t-1, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad f(t+2) = f(t) \text{ para } t \geq 0.$$

Coloca-se portanto a questão de como calcular a transformada de Laplace deste tipo de funções. O teorema seguinte dá-nos a resposta.

Teorema 4.10 *Suponhamos que f é uma função periódica, com período p, que admite transformada de Laplace. Então,*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^p e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{-ps}}. \tag{4.9}$$

Demonstração *Tem-se, por definição de transformada de Laplace,*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots + \int_{kp}^{kp+p} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots,$$

ou

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{kp}^{(k+1)p} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Considerando a mudança de variável $u = t - kp$, resulta

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^p e^{-s(u+kp)} f(u+kp)\, du.$$

Atendendo à periodicidade da função f tem-se $f(u+kp) = f(u)$, pelo que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-kps} \left[\int_0^p e^{-su} f(u)\, du\right].$$

Ora,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-kps} = 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{-kps}$$

envolve a soma de n termos de uma progressão geométrica em que o primeiro termo é e^{-ps} e a razão é também e^{-ps}. Então,

$$1 + \sum_{k=1}^{n} e^{-kps} = 1 + e^{-ps} \frac{e^{-nps} - 1}{e^{-ps} - 1}$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-kps} = 1 + \frac{e^{-ps}}{1 - e^{-ps}} = \frac{1}{1 - e^{-ps}}.$$

Concluindo,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^p e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{-ps}},$$

conforme requerido. ■

Este teorema permite-nos portanto determinar a transformada de Laplace de uma função periódica recorrendo apenas à definição da função no intervalo $[0, p]$. O termo que aparece no denominador da expressão (4.9) é necessariamente inferior a 1 (porquê?), "compensando" assim o facto do integral que aparece no numerador se restringir ao intervalo $[0, p]$.

Exemplo 4.32 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ -1, & 2 \leq t < 4 \end{cases} \quad \textit{e} \quad f(t+4) = f(t) \ \textit{para} \ t \geq 0.$$

Solução. *Sendo f uma função periódica, de período $p = 4$, que admite transformada de Laplace (porquê?), vem*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^4 e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{-4s}} = \frac{\int_0^2 e^{-st}\, dt - \int_2^4 e^{-st}\, dt}{1 - e^{-4s}} = \frac{1}{s} \frac{\left(1 - e^{-2s}\right)^2}{\left(1 - e^{-2s}\right)\left(1 + e^{-2s}\right)} = \frac{1}{s} \frac{1 - e^{-2s}}{1 + e^{-2s}}, \quad s > 0.$$

Exemplo 4.33 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad \textit{e} \quad g(t+2) = g(t) \ \textit{para} \ t \geq 0.$$

Solução. *Sendo g uma função periódica, de período $p = 2$, que admite transformada de Laplace (porquê?), vem*

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{\int_0^2 e^{-st} g(t)\, dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{\int_0^1 t e^{-st}\, dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{1}{s^2} \frac{1 - (1+s)\, e^{-s}}{1 - e^{-2s}}, \quad s > 0.$$

Problema Determinar a transformada de Laplace da função

$$h(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad h(t + 2\pi) = h(t) \ \text{para} \ t \geq 0.$$

Resp.: $\left(1 - e^{-2\pi s}\right)^{-1} \left(s^2 + 1\right)^{-1} \left(1 + e^{-\pi s}\right), \quad s > 0.$

Exercícios sobre a transformada de Laplace

Exercício 4.1 *Determinar a transformada de Laplace das seguintes funções usando a respetiva definição. Indicar, em cada caso, o domínio da transformada de Laplace, recorrendo para o efeito à definição de função de ordem exponencial.*

(a) $f(t) = t^2$; $\qquad$ (c) $h(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < 3 \\ 2, & t > 3 \end{cases}$;

(b) $g(t) = \operatorname{senh} t$; $\qquad$ (d) $\varphi(t) = \begin{cases} t, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$.

Exercício 4.2 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}^2(\sqrt{2}t)\right\}$ *usando a propriedade da linearidade e o facto de*

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}.$$

Exercício 4.3 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{\cos^2 3t \operatorname{sen} 3t\right\}$ *em função de* $\mathcal{L}\left\{\cos^3 3t\right\}$*, atendendo ao facto de se ter* $\left(\cos^3 3t\right)' = -9\cos^2 3t \operatorname{sen} 3t$ *e recorrendo ao resultado do Teorema 4.4 (ver página 170).*

Exercício 4.4 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{t^3\right\}$ *sabendo que* $\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = 2/s^3$.

Exercício 4.5 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{e^{-3t}t^2\right\}$ *usando a propriedade da translação.*

Exercício 4.6 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{t^3 \operatorname{sen} 5t\right\}$ *usando o resultado do Teorema 4.7 (ver página 174).*

Exercício 4.7 *Determinar a transformada de Laplace das seguintes funções.*

(a) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 6 \\ 5, & t \ge 6 \end{cases}$; (d) $\psi(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t < 5 \\ 10, & t \ge 5 \end{cases}$;

(b) $g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 5 \\ 2, & 5 \le t < 7 \\ 0 & t \ge 7. \end{cases}$; (e) $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 2, \\ e^{-t} & t \ge 2. \end{cases}$;

(c) $h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 4 \\ 3t, & t \ge 4 \end{cases}$; (f) $\rho(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi \\ \cos t, & t \ge \pi \end{cases}$.

4.2 A transformada inversa de Laplace

Até agora considerámos o seguinte problema: dada uma função $f(t)$, definida para $t > 0$, pretende-se determinar a sua transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ - ou $F(s)$. Considere-se agora o problema inverso, isto é, dada uma função $F(s)$, determinar uma função $f(t)$ cuja transformada de Laplace seja $F(s)$. Usaremos a notação $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ para representar tal função f, ou seja,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\},$$

pelo que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s).$$

Nestas condições, $f(t)$ designa-se a **transformada inversa de Laplace** da função $F(s)$. A este respeito colocam-se três questões:

1. Dada uma função $F(s)$, existe sempre a sua transformada inversa de Laplace?

2. Supondo que $F(s)$ admite transformada inversa de Laplace, ela é única?

3. Como se determina a transformada inversa Laplace?

A resposta à questão 1, relativa à existência da transformada inversa de Laplace, é que nem todas funções admitem transformada inversa de Laplace. Por exemplo, resulta da definição da transformada de Laplace que esta não é crescente (porquê?). Por isso qualquer função $F(s)$ que seja crescente não admite transformada inversa de Laplace (exemplo: s, $s^2(s+1)^{-1}$, e^s). Portanto, há funções que têm transformada inversa de Laplace, enquanto que outras não são a transformada de Laplace de nenhuma função.

Quanto à questão 2, relativa à unicidade da transformada inversa de Laplace, se assumirmos que a transformada inversa de Laplace existe, em que medida é que podemos afirmar que a sua transformada inversa é única? Para as aplicações que nos interessam a resposta é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 4.11 *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções contínuas para $t \geq 0$ que têm a mesma transformada de Laplace $F(s)$. Então $f(t) = g(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Ou seja, se soubermos que uma dada função $F(s)$ tem transformada inversa contínua $f(t)$, então $f(t)$ é a única função contínua que é a transformada inversa de Laplace de $F(s)$, isto é, não existe mais nenhuma função contínua cuja transformada de Laplace seja $F(s)$.

Exemplo 4.34 *Conforme vimos, $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$. Portanto, uma transformada inversa de Laplace da função $1/s$ é a função contínua f definida para todo $t \geq 0$ por $f(t) = 1$. Há outras funções cuja transformada de Laplace é $1/s$, mas estas são forçosamente descontínuas como é, por exemplo, o caso da função*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 5, & t = 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}.$$

Assim, considerando apenas funções contínuas definidas para $t \geq 0$, tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1.$$

Consideremos agora a questão 3. Supondo que existe uma e uma só função contínua $f(t)$ que é a transformada inversa de $F(s)$, como é que a determinamos? Não consideraremos aqui a determinação direta da transformada inversa de Laplace, a qual teria de ser abordada no âmbito da Análise Complexa. Faremos antes uso de tabelas de transformadas de Laplace, as quais existem em abundância em numerosas publicações. Consulte-se, a título de exemplo, a tabela publicada em S.L. Ross, ou ainda "Fórmulas e Tabelas de Matemática Aplicada, L. Abellanas, M.R. Spiegel, ed. McGraw-Hill, 1990". As referidas tabelas são semelhantes à Tabela 4.1 (ver página seguinte).

Embora as funções cuja transformada inversa de Laplace queremos determinar não sejam em geral iguais às que figuram na Tabela 4.1, é possível expressar tais funções como combinações lineares daquelas que se encontram tabeladas. Usando algumas das propriedades da transformada inversa de Laplace, que decorrem das propriedades da transforrmada de Laplace, conseguimos efetuar o respetivo cálculo. Assim, por exemplo, da propriedade da linearidade da transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}\{Af_1(t) + Bf_2(t)\} = A\mathcal{L}\{f_1(t)\} + B\mathcal{L}\{f_2(t)\},$$

resulta

$$\mathcal{L}\{Af_1(t) + Bf_2(t)\} = AF_1(s) + BF_2(s),$$

	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\dfrac{1}{s}$
2.	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
3.	$\operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$
4.	$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$
5.	$\operatorname{senh} bt$	$\dfrac{b}{s^2-b^2}$
6.	$\cosh bt$	$\dfrac{s}{s^2-b^2}$
7.	$t^n \ (n = 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
8.	$t^n e^{at} \ (n = 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
9.	$t \operatorname{sen} bt$	$\dfrac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
10.	$t \cos bt$	$\dfrac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
11.	$e^{at} \operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
12.	$e^{at} \cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
13.	$H(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
14.	$H(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$

Tabela 4.1: Transformadas de Laplace de algumas funções

onde $F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}$ e $F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$. Aplicando a transformada inversa de Laplace aos dois membros da equação precedente, vem

$$Af_1(t) + Bf_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{AF_1(s) + BF_2(s)\}$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}\{AF_1(s) + BF_2(s)\} = A\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + B\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\},$$

pois $\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = f_1(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = f_2(t)$. A equação precedente mostra que a transformada inversa de Laplace também goza da propriedade da linearidade.

Vejamos agora alguns exemplos de determinação da transformada inversa de Laplace.

Exemplo 4.35 *Determinar a transformada inversa de Laplace da função*

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 13}$$

recorrendo à Tabela 4.1.

Solução. *Uma vez que queremos determinar*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 6s + 13}\right\},$$

gostaríamos de ver tabelado

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{as^2 + bs + c}\right\},$$

ou seja,

$$F(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c},$$

mas não é assim. No entanto, encontra-se tabelado

$$F(s) = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2},$$

isto é

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}\right\} = e^{-at}\operatorname{sen} bt.$$

Assim, tendo em conta que

$$\frac{1}{s^2 + 6s + 13} = \frac{1}{(s+3)^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\frac{2}{(s+3)^2 + 2^2},$$

resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 6s + 13}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^2 + 2^2}\right\} = \frac{1}{2}e^{-3t}\operatorname{sen} 2t.$$

Problema Determinar a transformada inversa de Laplace da função

$$G(s)=\frac{5s}{s^2-2s-24}$$

Resp.: $2e^{-4t}+3e^{6t}$.

Problema Determinar a transformada inversa de Laplace da função

$$H(s)=\frac{3s-9}{s^2-6s+18}$$

Resp.: $3\,(\cos 3t)\,e^{3t}$.

Exemplo 4.36 *Determinar*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\}.$$

Solução. *Recorrendo à decomposição*

$$\frac{1}{s\,(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}=\frac{(A+B)\,s^2+Cs+A}{s\,(s^2+1)},$$

resulta $A=1$, $B=-1$ *e* $C=0$, *pelo que*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=1-\cos t.$$

Problema Determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3-s}\right\}.$$

Resp.: $e^t+e^{-t}-2$.

Exemplo 4.37 *Determinar*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s}-3\frac{e^{-3s}}{s}-2\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\}.$$

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s}-3\frac{e^{-3s}}{s}-2\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\}=5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\}.$$

Ora,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1,$$

enquanto que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s}\right\}=H(t-3)=\left\{\begin{array}{ll}0, & 0\le t<3\\ 1, & t>3\end{array}\right.\quad,$$

uma vez que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} = H(t-a).$$

Dado que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = H(t-a)ft-a), \quad \text{onde} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\},$$

tem-se ainda

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\} = H(t-7)f(t-7) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 7 \\ f(t-7), & t \ge 7 \end{cases},$$

onde

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t,$$

pelo que

$$f(t-7) = t-7$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\} = H(t-7)(t-7) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 7 \\ t-7, & t \ge 7 \end{cases}.$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s} - 3\frac{e^{-3s}}{s} - 2\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\} = 5 - 3H(t-3) - 2H(t-7)(t-7).$$

Considerando os vários ramos que intervêm nesta expressão podemos escrever

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s} - 3\frac{e^{-3s}}{s} - 2\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\} = \begin{cases} 5, & 0 \le t < 3 \\ 5-3, & 3 \le t < 7 \\ 5-3-2(t-7), & t \ge 7 \end{cases} = \begin{cases} 5, & 0 \le t < 3 \\ 2, & 3 \le t < 7 \\ 16-2t, & t \ge 7 \end{cases}.$$

Exemplo 4.38 *Determinar*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}e^{-5s}\right\}.$$

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}e^{-5s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-as}\right\} = H(t-a)f(t-a),$$

onde $a = 5$ *e*

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}\right\}.$$

Uma vez que (porquê?)

$$\frac{s}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2},$$

resulta

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = (t+1)\,e^t.$$

Então,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}e^{-5s}\right\} = H(t-5)f(t-5) = H(t-5)\left[(t+4)\,e^{t-5}\right],$$

isto é

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}e^{-5s}\right\} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 5 \\ (t+4)\,e^{t-5}, & t \geq 5 \end{cases}.$$

Problema Determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}e^{-3\pi s} - \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\}.$$

Resp.: $H\,(t-\pi)\operatorname{sen} t + H\,(t-3\pi)\cos 2t$.

Problema Determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2\left(s^2-1\right)}{s^3-s^2-2s}e^{-s}\right\}.$$

Resp.: $H\,(t-1)\left(e^{2t-2}+1\right)$.

4.2.1 A convolução

Outro procedimento importante relacionado com o uso de tabelas para a determinação da transformada inversa de Laplace é aquele que decorre do **Teorema da Convolução**. No entanto, antes de enunciar o teorema, definimos primeiro o conceito de convolução de duas funções.

Definição 4.5 *Sejam f e g duas funções que são seccionalmente contínuas para todo o intervalo fechado limitado $0 \leq t \leq b$, $b \in \mathbb{R}^+$. A função $h(t) = f(t) * g(t)$ definida por*

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g\,(t-\tau)\;d\tau \tag{4.10}$$

designa-se ***convolução das funções*** *f e g.*

Note-se que o resultado da convolução de duas funções é ainda uma função. Por outro lado, se no integral presente em (4.10) realizarmos a mudança de variável

$$u = t - \tau \quad \Leftrightarrow \quad \tau = t - u$$

resulta $d\tau = -du$, e consequentemente

$$f(t) * g(t) = -\int_t^0 f(t-u)g\,(u)\;du = \int_0^t f(t-u)g\,(u)\;du = \int_0^t g\,(u)\,f(t-u)\,du = g(t) * f(t),$$

concluindo-se portanto que a convolução é uma operação comutativa.

O principal resultado que estabelece a ligação entre a convolução de funções e a transformada (inversa) de Laplace é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 4.12 (Teorema da Convolução) *Sejam f e g duas funções que são seccionalmente contínuas para todo o intervalo fechado limitado $0 \leq t \leq b$, $b \in \mathbb{R}^+$, ambas de ordem exponencial $e^{\alpha t}$. Nestas condições a transformada de Laplace*

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\}$$

existe para $s > \alpha$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em S.L. Ross.

Usando a notação, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, o Teorema da Convolução toma a forma

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)\,G(s),$$

permitindo escrever

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = f(t) * g(t).$$

Tem-se assim uma forma alternativa de determinar a transformada inversa de Laplace de um produto de duas funções a partir das respetivas transformadas inversas de Laplace.

Exemplo 4.39 *Vimos no Exemplo 4.36 (ver página 192) que*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\} = 1 - \cos t,$$

tendo para o efeito recorrido à decomposição da função racional $s^{-1}\left(s^2+1\right)^{-1}$. Pretende-se agora determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\}$$

usando o Teorema da Convolução.

Solução. *Tem-se*

$$\frac{1}{s\,(s^2+1)} = \frac{1}{s}\,\frac{1}{s^2+1},$$

pelo que escolhendo

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad f(t) = 1; \qquad G(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad g(t) = \operatorname{sen} t,$$

tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = f(t) * g(t),$$

isto é,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\} = 1 * \operatorname{sen} t = \int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)\; d\tau = \left[\cos(t-\tau)\right]_0^t = 1 - \cos t.$$

Atendendo à comutatividade da convolução, podíamos ter escrito

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\} = \operatorname{sen} t * 1 = \int_0^t \operatorname{sen}\tau\, d\tau = \left[-\cos(\tau)\right]_0^t = 1 - \cos t.$$

Exemplo 4.40 *Determinar, usando o Teorema da Convolução,*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s+1)}\right\}.$$

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s+1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\,\frac{1}{s+1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}*\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\},$$

donde

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s+1)}\right\}=1*e^{-t}=e^{-t}*1=\int_0^t e^{-x}\,dx=1-e^{-t}.$$

Problema Determinar, usando o Teorema da Convolução,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2-1)}\right\}.$$

Resp.: $\cosh t-1$.

Problema Determinar, usando o Teorema da Convolução,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\}.$$

Resp.: e^t-t-1.

O Teorema da Convolução pode ainda ser usado no seguinte contexto. Sejam $h(t)$ e $f(t)$ funções seccionalmente contínuas em $0\le t\le b$, para todo $b>0$, que admitem transformada de Laplace. Estas funções são conhecidas e relacionam-se através da seguinte equação

$$h(t)=f(t)*g(t).$$

Coloca-se a questão de como determinar analiticamente a função $g(t)$ - que se admite ser seccionalmente contínua e ter transformada de Laplace?

O Teorema da Convolução permite escrever

$$\mathcal{L}\left\{h(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{f(t)*g(t)\right\}\quad\Leftrightarrow\quad H(s)=F(s)\,G(s),$$

pelo que

$$G(s)=\frac{H(s)}{F(s)}\quad\Rightarrow\quad g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(s)}{F(s)}\right\}.$$

Exemplo 4.41 *Considerem-se as funções $f(t)=t$ e $h(t)=t^2-t$. Determinar a função $g(t)$ que verifica*

$$h(t)=f(t)*g(t).$$

Solução. *Por aplicação do teorema da Convolução, tem-se*

$$H(s)=F(s)\,G(s)\quad\Leftrightarrow\quad\mathcal{L}\left\{t^3-t^2\right\}=\mathcal{L}\left\{t\right\}\,G(s)\quad\Leftrightarrow\quad G(s)=\frac{6}{s^2}-\frac{2}{s},$$

vindo

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2} - \frac{2}{s}\right\} = 6t - 2.$$

Para confirmar este resultado fazemos

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t * (6t-2)\right\} = \int_0^t (6\tau - 2)(t-\tau)\, d\tau = t^3 - t^2,$$

obtendo-se, portanto, o resultado esperado.

Problema Considerem-se as funções $f(t) = 3e^{-t}$ e $h(t) = e^{2t} - e^{-t}$. Determinar a função $g(t)$ que verifica

$$h(t) = f(t) * g(t).$$

Resp.: $g(t) = e^{2t}$.

Problema Considerem-se as funções $f(t) = 2\cos t$ e $h(t) = t \operatorname{sen} t$. Determinar a função $g(t)$ que verifica

$$h(t) = f(t) * g(t).$$

Resp.: $g(t) = \operatorname{sen} t$.

Exercícios sobre a transformada inversa de Laplace

Exercício 4.8 *Determinar a transformada inversa de Laplace das seguintes funções.*

(a) $\dfrac{6}{s^2+9}$; (e) $\dfrac{2s+2}{s^3+2s}$; (i) $\dfrac{6s+27}{s^2+4s+13}e^{-3s}$;

(b) $\dfrac{30}{(s-2)^4}$; (f) $\dfrac{7s+12}{s^2+9}$; (j) $3\dfrac{e^{-4s}-e^{-7s}}{s^2}$;

(c) $\dfrac{3s}{s^2-4}$; (g) $\dfrac{35s+56}{s^2+3s-10}$; (k) $\dfrac{2+2e^{-\pi s}}{s^2+4}$;

(d) $\dfrac{5s}{s^2+4s+4}$; (h) $\dfrac{5s+6}{s^2+9}e^{-\pi s}$; (l) $\dfrac{4\left(e^{-2s}-1\right)}{s\left(s^2+4\right)}$.

Exercício 4.9 *Determinar a transformada inversa de Laplace das seguintes funções recorrendo ao Teorema da Convolução.*

(a) $\dfrac{1}{s^2+5s+6}$; (c) $\dfrac{9}{2s\left(s^2+9\right)}$;

(b) $\dfrac{10}{s^2-6s-16}$; (d) $\dfrac{9}{s^2\left(s+3\right)}$.

4.3 Aplicações da transformada de Laplace

4.3.1 Solução de problemas de valores iniciais envolvendo equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Veremos agora como é que a transformada de Laplace pode ser usada para determinar a solução de PVIs envolvendo equações diferenciais lineares de ordem n com coeficientes constantes, ou seja, do tipo

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = b(t),$$

com condições iniciais

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}.$$

Tomando a transformada de Laplace de ambos os membros da equação diferencial acima obtém-se,

$$a_0\mathcal{L}\left\{y^{(n)}\right\} + a_1\mathcal{L}\left\{{}_1y^{(n-1)}\right\} + \cdots + a_{n-1}\mathcal{L}\left\{y'\right\} + a_n\mathcal{L}\left\{y\right\} = \mathcal{L}\left\{b(t)\right\}.$$

Aplicando o resultado enunciado no Teorema 4.5 (ver página 171),

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

e usando a notação

$$Y(s) = \mathcal{L}\left\{y\left(t\right)\right\}, \qquad B(s) = \mathcal{L}\left\{b\left(t\right)\right\},$$

resulta

$$\left(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n\right)Y(s) - A(s) = B(s),$$

onde $A(s)$ é um polinómio de grau $n-1$ na variável s envolvendo por um lado as constantes $a_0, \ldots, a_n$, as quais estão associadas à forma da equação diferencial homogénea associada, e por outro as constantes que determinam as condições iniciais $c_0, \ldots, c_{n-1}$. Assim,

$$Y(s) = \frac{B(s) - A(s)}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n},$$

pelo que a solução do PVI é

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y\left(s\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s) - A(s)}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}\right\}.$$

Exemplo 4.42 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} - 2y = e^{5t}, \quad t > 0; \quad y(0) = 3, \tag{4.11}$$

usando a transformada de Laplace.

Solução. *Tem-se*

$$\frac{dy}{dt} - 2y = e^{5t} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt} - 2y\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{5t}\right\}.$$

Atendendo a que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt} - 2y\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 2\mathcal{L}\left\{y\right\} = sY(s) - y(0) - 2Y(s) = (s-2)Y(s) - 3,$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, *e*

$$\mathcal{L}\left\{e^{5t}\right\} = \frac{1}{s-5},$$

resulta

$$(s-2)Y(s) - 3 = \frac{1}{s-5} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{-14+3s}{(s-5)(s-2)}.$$

Ora, escrevendo,

$$Y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-5},$$

obtém-se $A = 8/3$ *e* $B = 1/3$ *(porquê?), pelo que*

$$Y(s) = \frac{8}{3}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-5},$$

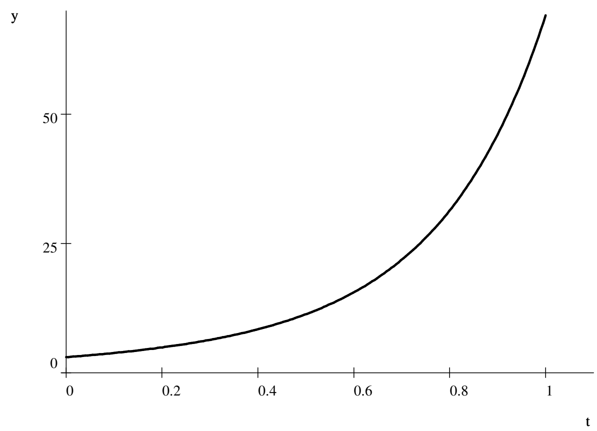
vindo

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{8}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\},$$

ou seja,

$$y(t) = \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}.$$

Note-se que $y(0) = 3$, *conforme requerido.*



Representação gráfica da função $y(t) = \left(8e^{2t} + e^{5t}\right)/3$, *solução do PVI (4.11)*

Nota Dado que as soluções dos PVIs que podem ser resolvidos usando a transformada de Laplace são forçosamente soluções explícitas (porquê?), averiguar se a solução obtida está correta é um processo que pode requerer mais ou menos cálculos, mas que é, na essência, simples. Em todo o caso, se tal não for feito, e há falta de melhor, pode-se averiguar se as condições iniciais são verificadas pela solução encontrada. Isto porque a imposição das condições iniciais é realizada logo no início do cálculo (ao contrário do que se passa quando se utilizam os métodos que abordamos no capítulo precendente) e por isso se a solução estiver errada é muito provável que as condições iniciais não sejam satisfeitas pela solução obtida. Atenção: se as condições iniciais forem satisfeitas, tal não garante que a solução obtida esteja correta, mas costuma ser um bom aferidor.

Exemplo 4.43 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' - 2y' - 8y = 0, \quad t > 0; \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 6, \tag{4.12}$$

usando a transformada de Laplace.

Solução. *Tem-se*

$$y'' - 2y' - 8y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{y'' - 2y' - 8y\right\} = 0.$$

Atendendo a que

$$\mathcal{L}\left\{y''\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 3s - 6$$

e

$$\mathcal{L}\left\{y'\right\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 3,$$

resulta

$$\left(s^2Y(s) - 3s - 6\right) - 2\left(sY(s) - 3\right) - 8Y(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{3s}{s^2 - 2s - 8}.$$

Ora, escrevendo

$$Y(s) = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+2},$$

obtém-se $A = 2$ *e* $B = 1$*, pelo que*

$$Y(s) = \frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2},$$

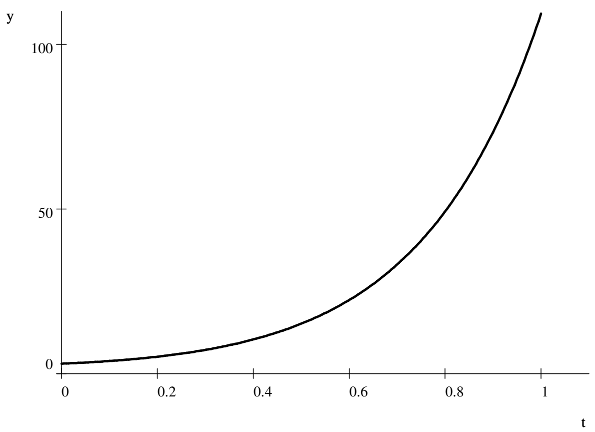
vindo

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\},$$

ou seja,

$$y(t) = 2e^{4t} + e^{-2t}.$$

Note-se que $y(0) = 3$*, enquanto que* $y'(0) = 6$*, conforme requerido.*



Representação gráfica da função $y(t) = 2e^{4t} + e^{-2t}$*, solução do PVI (4.12)*

Problema Determinar, usando a transformada de Laplace, a solução do PVI

$$y'' + 4y = \cos 2t, \quad t > 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Resp.: $2 \operatorname{sen} 2t + t \operatorname{sen} 2t$.

Problema Determinar a solução do seguinte PVI usando a transformada de Laplace.

$$y''' - y' = 2t, \quad t > 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Resp.: $e^t + e^{-t} - t^2 - 2$.

Nos exemplos precedentes as condições iniciais foram colocadas sistematicamente para $t = 0$. No entanto, tal não tem porque ser necessariamente assim, conforme se ilustra no exemplo seguinte.

Exemplo 4.44 *Determinar a solução do problema de valores iniciais*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = t, \quad t > \pi; \quad y(\pi) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(\pi) = 1 \tag{4.13}$$

usando a transformada de Laplace. Realizando a mudança de variável $x = t - \pi$ resulta $t = x + \pi$ e o PVI proposto escreve-se

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x + \pi, \quad x > 0; \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 1.$$

Aplicando a transformada de Laplace, vem

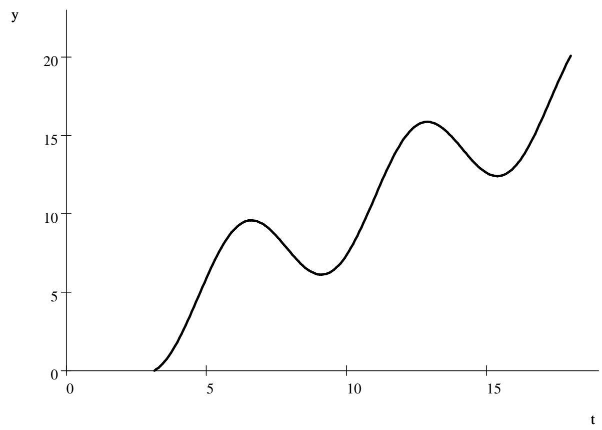
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2} + y\right\} = \mathcal{L}\{x + \pi\} \quad \Rightarrow \quad s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s},$$

pelo que

$$\left(s^2 + 1\right) Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s} + 1 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1 + \pi s}{(s^2+1)\, s^2} + \frac{1}{s^2+1} = -\frac{\pi s}{s^2+1} + \frac{\pi}{s} + \frac{1}{s^2}.$$

Obtém-se então

$$y(x) = -\pi \cos x + \pi + x \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\pi \cos(t - \pi) + t = \pi \cos t + t.$$



Representação gráfica da função $y(t) = \pi \cos t + t$, solução do PVI (4.13)

Portanto, se o PVI a resolver envolver condições impostas para $t = t_0$ ($t_0 \neq 0$), então a mudança de variável $x = t - t_0$ conduzirá a um PVI cujas condições estarão impostas para $x = 0$, tal como requerido.

Qualquer dos exercícios precedentes podia ter sido resolvido recorrendo, por exemplo, ao método dos coeficientes indeterminados. O uso da transformada de Laplace tem especial interesse no caso do segundo membro da EDO ser uma função definida por ramos. Esse tipo de problema pode também ser resolvido usando os métodos abordados no capítulo relativo à resolução de equações diferencias lineares de ordem n, mas nesse caso a resolução é em geral mais morosa já que os ramos têm de ser tratados um a um. Conforme veremos nos próximos exemplos, o uso da transformada de Laplace com recurso à função de Heaviside permite evitar esta situação.

Exemplo 4.45 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' + 2y' + 5y = h(t), \quad t > 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \tag{4.14}$$

onde

$$h(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases},$$

usando a transformada de Laplace.

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{y'' + 2y' + 5y\right\} = \mathcal{L}\left\{h(t)\right\}.$$

Ora,

$$\mathcal{L}\left\{y'' + 2y' + 5y\right\} = \left[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + 5Y(s) = \left(s^2 + 2s + 5\right) Y(s).$$

e

$$\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} h(t)\, dt = 5 \int_0^\pi e^{-st}\, dt = 5\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\pi = 5\,\frac{1 - e^{-\pi s}}{s}.$$

Assim, a equação para $Y(s)$ é

$$\left(s^2 + 2s + 5\right) Y(s) = 5\,\frac{1 - e^{-\pi s}}{s} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{5}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)} - \frac{5e^{-\pi s}}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)}.$$

Portanto,

$$y(t) = 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)}\right\} - 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)}\right\}.$$

Tem-se por isso de determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} \quad e \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\pi s}\right\},$$

onde

$$F(s) = \frac{1}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)}.$$

Dado que

$$\frac{1}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5}\right),$$

vem

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right\}.$$

Tendo em conta que

$$\frac{s+2}{s^2+2s+5} = \frac{s+2}{(s+1)^2+2^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{(s+1)^2+2^2},$$

então,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right\} = e^{-t}\cos 2t + \frac{e^{-t}}{2}\operatorname{sen} 2t.$$

Resumindo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{5} - \frac{e^{-t}}{5}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) = \frac{1}{5}\left[1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right].$$

É agora fácil determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\pi s}\right\} = f(t-\pi)\,H(t-\pi),$$

onde

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{5}\left[1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right].$$

Tem-se então

$$f(t-\pi) = \frac{1}{5}\left[1 - e^{-(t-\pi)}\left(\cos 2\,(t-\pi) + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\,(t-\pi)\right)\right] = \frac{1}{5}\left[1 - e^{-(t-\pi)}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right],$$

resultando

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\pi s}\right\} = H(t-\pi)\frac{1}{5}\left[1 - e^{-(t-\pi)}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right].$$

Atendendo a que

$$y(t) = 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} - 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\pi s}\right\},$$

tem-se

$$y(t) = 1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) - \underbrace{\left[1 - e^{-(t-\pi)}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right]}_{u(t)}H(t-\pi),$$

isto é,

$$y(t) = \frac{1}{2}\begin{cases} 2 - (2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)\,e^{-t}, & 0 \le t < \pi \\ (e^{\pi} - 1)\,(2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)\,e^{-t}, & t \ge \pi \end{cases}. \tag{4.15}$$

Facilmente se conclui que $y(0) = 0$. Por outro lado,

$$y'(t) = \frac{5}{2}\begin{cases} e^{-t}\operatorname{sen} 2t, & 0 \le t < \pi \\ (1 - e^{\pi})\,e^{-t}\operatorname{sen} 2t, & t \ge \pi \end{cases}, \tag{4.16}$$

pelo que $y'(0) = 0$ conforme requerido.

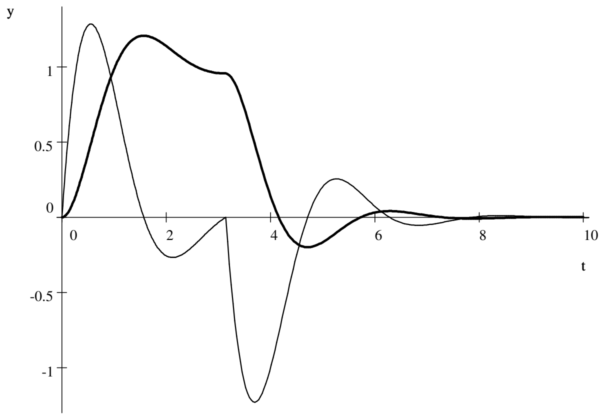
Apesar do segundo membro da equação diferencial ser uma função descontínua, tanto a solução deste PVI como a sua derivada são contínuas em $t = \pi$ (o que já era esperado - porquê?). De facto, $u(\pi) = u'(\pi)$ e por isso

$$\lim_{t\to\pi-} y(t) = y(\pi) = 1 - e^{-\pi},$$

enquanto que

$$\lim_{t\to\pi-} y'(t) = y(\pi) = 0.$$

Tal como previsto, a segunda derivada de $y(t)$ não é contínua em $x = \pi$ (ver gráfico seguinte).



Representação gráfica da função (4.15), solução do PVI (4.14), bem como da sua primeira derivada (4.16) (representada pela linha fina)

Nota Qual seria a solução do PVI proposto no exemplo precedente se resolvessemos a equação diferencial ramo a ramo impondo

$$\lim_{t\to\pi-} y(t) = y(\pi) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\pi-} y'(t) = y'(\pi).$$

Comecemos por considerar a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = 5, \quad 0 \le t < \pi.$$

Da aplicação do método dos coeficientes indeterminados resulta (porquê?)

$$y_-(t) = 1 + c_1 e^{-t} \operatorname{sen} 2t + c_2 e^{-t} \cos 2t.$$

As constantes c_1 e c_2 determinam-se impondo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, vindo

$$y_-(t) = 1 - \frac{1}{2} e^{-t} \operatorname{sen} 2t - e^{-t} \cos 2t, \quad 0 \le t < \pi.$$

Considermos agora a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad t \ge \pi.$$

A sua solução geral é

$$y_+(t) = k_1 e^{-t} \operatorname{sen} 2t + k_2 e^{-t} \cos 2t, \quad t \ge \pi.$$

O valor das constantes k_1 e k_2 não pode ser determinado usando as condições iniciais uma vez que esta solução não é válida para $t = 0$, mas apenas para $t \geq \pi$. As constantes são tais que

$$\lim_{t\to\pi-} y_-(t) = y_+(\pi) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\pi-} y'_-(t) = y'_+(\pi).$$

Ora,

$$\begin{aligned} y_-(t) &= 1 - \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen}2t - e^{-t}\cos 2t, \quad 0 \leq t < \pi, \\ y_+(t) &= c_1 e^{-t}\operatorname{sen}2t + c_2 e^{-t}\cos 2t, \quad t \geq \pi, \end{aligned}$$

pelo que

$$\lim_{t\to\pi-} y_-(t) = y_+(\pi) \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-\pi} = c_2 e^{-\pi},$$

resultando

$$k_2 = e^{\pi} - 1.$$

Tem-se ainda

$$\begin{aligned} y'_-(t) &= \frac{5}{2}e^{-t}\operatorname{sen}2t, \quad 0 \leq t < \pi, \\ y'_+(t) &= (-2k_2 - k_1)\, e^{-t}\operatorname{sen}2t + (2k_1 - k_2)\, e^{-t}\cos 2t, \quad t \geq \pi, \end{aligned}$$

pelo que

$$\lim_{t\to\pi-} y'_-(t) = 0 \quad \text{e} \quad y'_+(\pi) = (2k_1 - k_2)\, e^{-\pi}.$$

Combinando a condição

$$\lim_{t\to\pi-} y'_-(t) = y'_+(\pi),$$

com o facto de se ter $k_2 = e^{\pi} - 1$, resulta

$$\begin{cases} (2k_1 - k_2)\, e^{-\pi} = 0 \\ k_2 = e^{\pi} - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{2}(e^{\pi} - 1) \\ k_2 = e^{\pi} - 1 \end{cases}.$$

Assim, a solução do PVI proposto usando o método dos coeficientes indeterminados é

$$\begin{aligned} y_-(t) &= 1 - \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen}2t - e^{-t}\cos 2t, \quad 0 \leq t < \pi, \\ y_+(t) &= \frac{1}{2}(e^{\pi} - 1)\, e^{-t}\operatorname{sen}2t + (e^{\pi} - 1)\, e^{-t}\cos 2t, \quad t \geq \pi, \end{aligned}$$

ou seja

$$y(t) = \begin{cases} 1 - 2\,(2\cos 2t + \operatorname{sen}2t)\, e^{-t}, & 0 \leq t < \pi \\ \dfrac{1}{2}(e^{\pi} - 1)\,(2\cos 2t + \operatorname{sen}2t)\, e^{-t}, & t \geq \pi \end{cases},$$

que mais não é do que a solução obtida anteriormente usando a transformada de Laplace.

Exemplo 4.46 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' - y = p(t), \quad t > 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \tag{4.17}$$

onde

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 3 \\ 2t, & t \geq 3 \end{cases},$$

usando a transformada de Laplace.

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{y'' - y\right\} = \mathcal{L}\left\{p(t)\right\},$$

isto é

$$\left(s^2 - 1\right) Y(s) = P(s),$$

onde

$$P(s) = \mathcal{L}\left\{p(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{1 + (2t-1)H(t-3)\right\} = \mathcal{L}\left\{1\right\} - \mathcal{L}\left\{H(t-3\right\} + 2\mathcal{L}\left\{t\, H(t-3)\right\}.$$

Uma vez que

$$\mathcal{L}\left\{t\, H(t-3)\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t-a)\, H(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$$

desde que consideremos

$$a = 3 \quad e \quad f(t-3) = t = (t-3) + 3,$$

concluímos que

$$f(\tau) = \tau + 3 \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}.$$

Portanto,

$$P(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + 2\left(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}\right)e^{-3s}$$

e assim a equação a que deve obedecer $Y(s)$ é

$$\left(s^2 - 1\right) Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + 2\left(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}\right)e^{-3s},$$

ou seja

$$Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2-1\right)} + \left(\frac{5}{s\left(s^2-1\right)} + \frac{2}{s^2\left(s^2-1\right)}\right)e^{-3s}. \tag{4.18}$$

Designando

$$K(s) = \frac{1}{s\left(s^2-1\right)},$$

tem-se, usando o Teorema da Convolução em alternativa à decomposição da função racional $K(s)$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{K(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} \quad \Rightarrow \quad k(t) = \operatorname{senh} t * 1 = \cosh t - 1.$$

Ora, de (4.18) resulta

$$Y(s) = K(s) + \left(5K(s) + \frac{2}{s}K(s)\right)e^{-3s},$$

pelo que definindo

$$R(s) = \frac{1}{s}K(s),$$

tem-se

$$y(t) = k(t) + 5k(t-3)\,H(t-3) + 2r(t-3)\,H(t-3),$$

restando apenas determinar a função $r(t)$. Para esse efeito evocamos uma vez mais o Teorema da Convolução, obtendo-se

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{R(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{K(s)\right\} = 1 * k(t),$$

isto é,

$$r(t) = 1 * (\cosh t - 1) = (\cosh t - 1) * 1 = \int_0^t (\cosh x - 1)\,dx = \operatorname{senh} t - t.$$

Tem-se, finalmente,

$$\begin{aligned} y(t) &= k(t) + \left[5k(t-3) + 2r(t-3)\right]\,H(t-3) \\ &= \cosh t - 1 + \left[5\left(\cosh(t-3) - 1\right) + 2\left(\operatorname{senh}(t-3) - t + 3\right)\right]\,H(t-3) \\ &= \cosh t - 1 + \underbrace{\left[5\cosh(t-3) + 2\operatorname{senh}(t-3) - 2t + 1\right]}_{v(t)}H(t-3), \end{aligned}$$

pelo que

$$y'(t) = \operatorname{senh} t + \underbrace{\left[5\operatorname{senh}(t-3) + 2\cosh(t-3) - 2\right]}_{v'(t)}H(t-3).$$

ou, explicitando os vários ramos,

$$y(t) = \begin{cases} \cosh t - 1, & 0 \le t < 3 \\ \cosh t + 5\cosh(t-3) + 2\operatorname{senh}(t-3) - 2t, & t \ge 3 \end{cases} \tag{4.19}$$

e

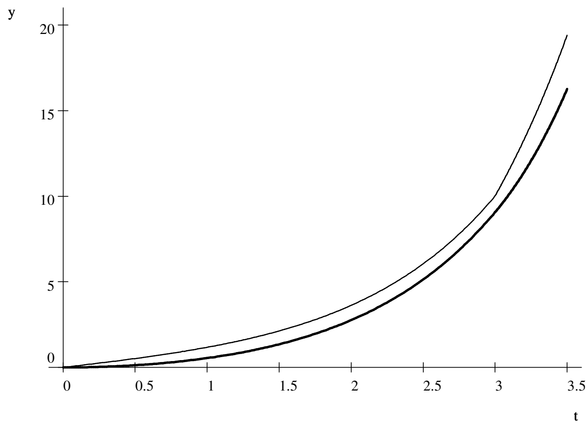
$$y'(t) = \begin{cases} \operatorname{senh} t, & 0 \le t < 3 \\ \operatorname{senh} t + 5\operatorname{senh}(t-3) + 2\cosh(t-3) - 2, & t \ge 3 \end{cases}. \tag{4.20}$$

Portanto, as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ são verificadas pela solução obtida, tendo-se ainda $v(3) = v'(3) = 0$, pelo que

$$\lim_{t \to 3^-} y(t) = y(3) = \cosh 3 - 1,$$

$$\lim_{t \to 3^-} y'(t) = y'(3) = \operatorname{senh} 3,$$

confirmando a continuidade da solução e da respetiva derivada (ver gráfico seguinte).



Representação gráfica da função (4.19), solução do PVI (4.14), bem como da sua primeira derivada (4.20) (representada pela linha fina)

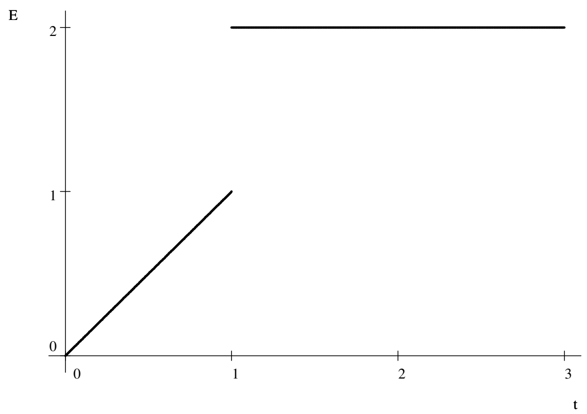
Exemplo 4.47 *Considere-se um circuito elétrico constituido por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R, uma bobine com indutância L e um condensador com capacitância C, ligados em série (circuito RLC) . Como vimos em exemplos anteriores, nestas condições a carga no condensador em cada instante de tempo $q(t)$ é tal que*

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E, \tag{4.21}$$

sendo a intensidade de corrente dada por $i(t) = q'(t)$. Determinar $q(t)$ e $i(t)$ quando $q(0) = i(0) = 0$, $L = 1/2$, $R = 1$, $C = 1$ e

$$E(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & t \geq 1 \end{cases},$$

nas unidades habituais.



Representação gráfica da função $E(t)$

Solução. *Comecemos por determinar $\mathcal{L}\{E(t)\}$. Tem-se,*

$$E(t) = t + (2 - t)\ H(t - 1).$$

Atendendo a que

$$\mathcal{L}\left\{t\right\} = \frac{1}{s^2}$$

e, por outro lado, que

$$\mathcal{L}\left\{(2-t)\ H(t-1)\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t-a)\,H(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$$

com $a = 1$ *e* $f(t-1) = 2-t$, *conduz a*

$$f(t) = 1-t \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2},$$

tem-se

$$\mathcal{L}\left\{E(t)\right\} = \frac{1}{s^2} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right)e^{-s}.$$

Consideramos agora a EDO (4.21)

$$\frac{1}{2}q'' + q' + q = E.$$

Por aplicação da transformada de Laplace, resulta

$$\frac{1}{2}s^2Q(s) + sQ(s) + Q(s) = \frac{1}{s^2} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right)e^{-s},$$

isto é

$$Q(s) = \frac{2}{s^2\left((s+1)^2+1\right)}\left(1-e^{-s}\right) + \frac{2}{s\left((s+1)^2+1\right)}e^{-s}.$$

Seja

$$R(s) = \frac{2}{s^2\left((s+1)^2+1\right)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$P(s) = \frac{2}{s\left((s+1)^2+1\right)} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+1}$$

então

$$Q(s) = R(s) + (P(s) - R(s))\,e^{-s} \quad \Rightarrow \quad q(t) = r(t) + (p(t-1) - r(t-1))\,H(t-1),$$

com

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{R(s)\right\} = t - 1 + e^{-t}\cos t$$

$$p(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{P(s)\right\} = 1 - (\cos t + \operatorname{sen} t)\,e^{-t}$$

e consequentemente

$$q(t) = t - 1 + e^{-t}\cos t + \underbrace{\left(3 - t - e^{1-t}\left(\operatorname{sen}(t-1) + 2\cos(t-1)\right)\right)}_{w(t)}H(t-1),$$

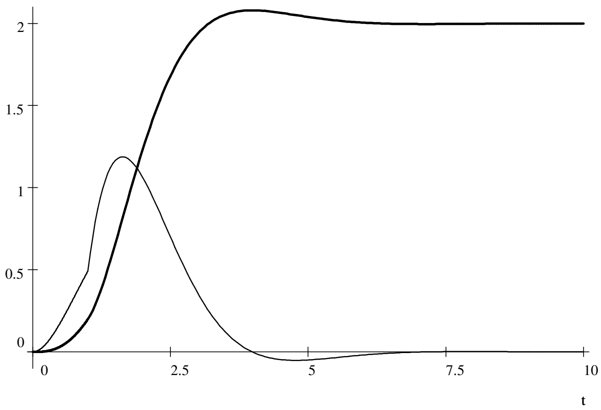
ou,

$$q(t) = \begin{cases} t - 1 + e^{-t}\cos t, & 0 \le t < 1 \\ 2 - e^{1-t}\left(\operatorname{sen}(t-1) + 2\cos(t-1)\right) + e^{-t}\cos t, & t \ge 1 \end{cases},$$

implicando

$$i(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}\left(\cos t + \operatorname{sen} t\right), & 0 \le t < 1 \\ e^{1-t}\left(\cos(1-t) - 3\operatorname{sen}(1-t)\right) - \left(\operatorname{sen} t + \cos t\right)e^{-t}, & t \ge 1 \end{cases}.$$

Tem-se $q(0) = 0$ *e* $i(0) = 0$*, conforme requerido. Além disso,* $w(1) = w'(1) = 0$*, pelo que* $q(t)$ *e* $i(t) = q'(t)$ *são funções contínuas.*



Representação gráfica da solução do PVI (4.21) $q(t)$ *- a cheio - e de* $i(t)$

Conforme já tínhamos perspetivado anteriormente, a transformada de Laplace também pode ser usada para resolver problemas de valores iniciais envolvendo equações integro-diferenciais, conforme se exemplifica de seguida.

Exemplo 4.48 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$\frac{du}{dt} + \int_0^t u\,dt = \frac{t^2}{2}; \quad x > 0, \quad u(0) = 0. \tag{4.22}$$

Solução. *Aplicando a transformada de Laplace obtém-se*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt} + \int_0^t u\,dt\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt}\right\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^t u\,dt\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\},$$

$$s\mathcal{L}(u) - u(0) + \mathcal{L}\left\{\int_0^t u\,dt\right\} = \frac{1}{s^3}. \tag{4.23}$$

A propriedade enunciada no Teorema 4.8 (ver página 175) conduz a

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t u\,dt\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}(u),$$

pelo que de (4.23) vem

$$s\mathcal{L}(u) - u(0) + \frac{1}{s}\mathcal{L}(u) = \frac{1}{s^3},$$

ou seja, definindo $U(s) = \mathcal{L}(u)$ e atendendo a que $u(0) = 0$,

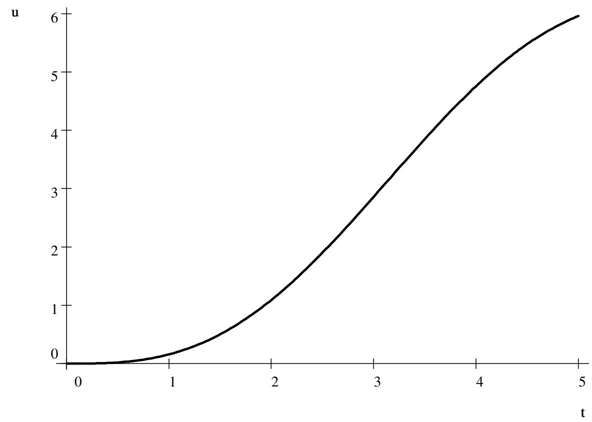
$$\left(s + s^{-1}\right) U(s) = \frac{1}{s^3}.$$

Assim,

$$U(s) = \frac{1}{s^2 + s^4} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1},$$

resultando

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right) = t - \operatorname{sen} t.$$



Representação gráfica da função $u(t) = t - \operatorname{sen} t$, solução do PVI (4.14)

4.3.2 Solução de problemas de valores iniciais envolvendo sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Aplicaremos a transformada de Laplace para determinar a solução de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem do tipo

$$\begin{cases} a_1\dfrac{dx}{dt} + a_2\dfrac{dy}{dt} + a_3x + a_4y = \beta_1(t) \\ b_1\dfrac{dx}{dt} + b_2\dfrac{dy}{dt} + b_3x + b_4y = \beta_2(t) \end{cases},$$

onde a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3 e b_4 são constantes e β_1 e β_2 são funções conhecidas, satisfazendo as condições iniciais

$$x(0) = c_1, \quad y(0) = c_2.$$

O método é análogo ao usado para determinar a solução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, sendo facilmente aplicável a equações diferenciais de ordem mais elevada e com mais funções incógnita. Vejamos alguns exemplos que ilustram o método.

Exemplo 4.49 *Determinar a solução do sistema de equações diferenciais*

$$\frac{dx}{dt} - 6x + 3y = 8e^t, \quad \frac{dy}{dt} - y - 2x = 4e^t,$$

satisfazendo as condições iniciais $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt} - 6x + 3y\right\} = \mathcal{L}\left\{8e^t\right\}, \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt} - y - 2x\right\} = \mathcal{L}\left\{4e^t\right\},$$

resultando da aplicação da propriedade da linearidade

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} - 6\mathcal{L}\{x\} + 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\left\{8e^t\right\}, \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - \mathcal{L}\{y\} - 2\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\left\{4e^t\right\}.$$

Usando a notação $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ *e* $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, *vem*

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) - 6X(s) + 3Y(s) = \dfrac{8}{s-1} \\[2mm] sY(s) - y(0) - Y(s) - 2X(s) = \dfrac{4}{s-1} \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} (s-6)\,X(s) + 3Y(s) = -\dfrac{s-9}{s-1} \\[2mm] -2X(s) + (s-1)\,Y(s) = \dfrac{4}{s-1} \end{cases}.$$

Resta resolver o sistema precedente em ordem a $X(s)$ *e* $Y(s)$. *Tem-se então,*

$$\begin{cases} 2\,(s-6)\,X(s) + 6Y(s) = -2\dfrac{s-9}{s-1} \\[2mm] -2\,(s-6)\,X(s) + (s-1)\,(s-6)\,Y(s) = 4\dfrac{s-6}{s-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(s^2 - 7s + 12\right) Y(s) = \dfrac{2s-6}{s-1} \\[2mm] -2X(s) + (s-1)\,Y(s) = \dfrac{4}{s-1} \end{cases},$$

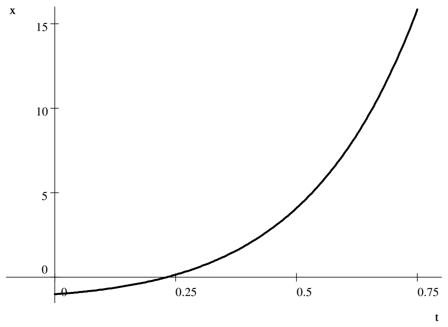
resultando

$$\begin{cases} (s-3)\,(s-4)\,Y(s) = \dfrac{2\,(s-3)}{s-1} \\[2mm] X(s) = \dfrac{1}{2}\,(s-1)\,Y(s) - \dfrac{2}{s-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y(s) = -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{s-4} \\[2mm] X(s) = \dfrac{1}{s-4} - \dfrac{2}{s-1} \end{cases}.$$

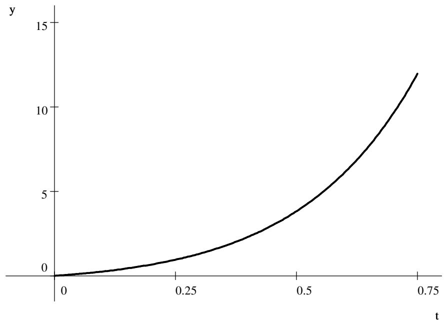
Dado que $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ *e* $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, *obtém-se*

$$x(t) = e^{4t} - 2e^t, \quad y(t) = \frac{2}{3}e^{4t} - \frac{2}{3}e^t.$$

Note-se que se tem $y(0) = 0$ e $x(0) = -1$, tal como requerido.



Representação gráfica da função $x(t)$



Representação gráfica da função $y(t)$

Exemplo 4.50 *Determinar a solução do PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2y - x = -2e^t \operatorname{sen} t \\ \dfrac{dy}{dt} + x = e^t\,(2\cos t + 1) \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1 \end{cases}.$$

Solução. *Aplicando a transformada de Laplace tem-se*

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2y - x\right\} = \mathcal{L}\left\{-2e^t \operatorname{sen} t\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\dfrac{dy}{dt} + x\right\} = \mathcal{L}\left\{e^t\,(2\cos t + 1)\right\} \end{cases},$$

vindo

$$\begin{cases} sX(s) - 1 + sY(s) - 1 - 2Y(s) - X(s) = \dfrac{-2}{(s-1)^2+1} \\ sY(s) - 1 + X(s) = 2\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1} + \dfrac{1}{s-1} \end{cases},$$

ou

$$\begin{cases} (s-1)X(s) + (s-2)Y(s) = \dfrac{-2}{(s-1)^2+1} + 2 \\ X(s) + sY(s) = 2\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1} + \dfrac{1}{s-1} + 1 \end{cases},$$

resultando

$$\begin{cases} (s-1)X(s) + (s-2)Y(s) = \dfrac{-2}{(s-1)^2+1} + 2 \\ Y(s) = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+1} + \dfrac{1}{(s-1)^2+1} \end{cases}.$$

Concluímos que

$$y(t) = e^t(\cos t + \operatorname{sen} t).$$

Para determinar $x(t)$ podemos resolver o sistema de equações precedente em ordem a $X(s)$ e determinar a respetiva transformada inversa de Laplace,

$$X(s) = \frac{1}{s-1} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^t,$$

ou, alternativamente, usar a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + x = e^t\,(2\cos t + 1) \quad \Leftrightarrow \quad x = e^t\,(2\cos t + 1) - \frac{dy}{dt}$$

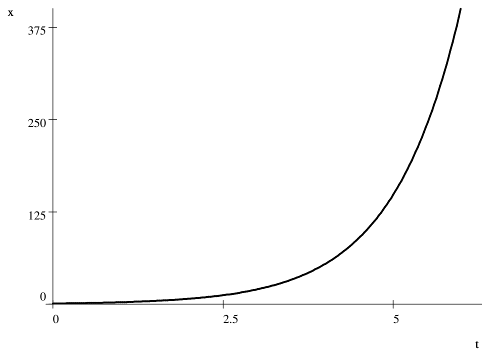
e a expressão já obtida para $y(t)$, vindo

$$x(t) = e^t\,(2\cos t + 1) - \frac{d}{dt}\left[e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)\right] = e^t.$$

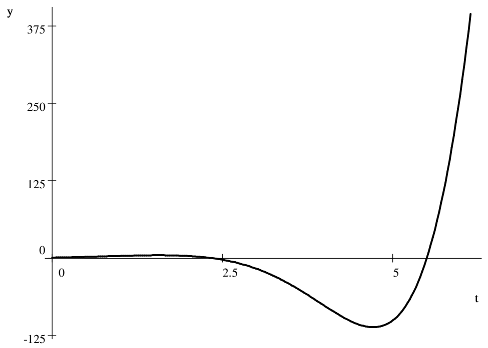
Desta forma, a solução do PVI proposto é

$$x(t) = e^t, \quad y(t) = e^t(\cos t + \operatorname{sen} t),$$

verificando-se as condições iniciais impostas.



Representação gráfica da função $x(t)$



Representação gráfica da função $y(t)$

Problema Determinar a solução do PVI

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y - 2x = -4e^t \\ \dfrac{dy}{dt} - 2x = 2e^t\,(2t+1) \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \end{cases}.$$

Resp.: $x(t) = \cos\left(\sqrt{2}t\right) - 2te^t - e^t$, $y(t) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}t\right)$.

Exemplo 4.51 *Determinar a solução do PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dw}{dt} + 4x + 2w = e^{-2t}\,(1+4t) \\ \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dw}{dt} - 2x + 3w = e^{-2t}(1-t^2) - 8 \\ x(0) = 1, \quad w(0) = -2 \end{cases}.$$

Solução. *Aplicando a transformada de Laplace tem-se*

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dw}{dt}+4x+2w\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{-2t}+4te^{-2t}\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\dfrac{dx}{dt}+2\dfrac{dw}{dt}-2x+3w\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{-2t}-t^2e^{-2t}-8\right\} \end{cases},$$

ou seja

$$\begin{cases} sX(s)-1+sW(s)+2+4X(s)+2W(s)=\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{4}{(s+2)^2} \\ sX(s)-1+2sW(s)+4-2X(s)+3W(s)=\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{2}{(s+2)^3}-\dfrac{8}{s} \end{cases},$$

resultando

$$\begin{cases} (s+4)\,X(s)+(s+2)\,W(s)=\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{4}{(s+2)^2}-1 \\ (s-2)\,X(s)+(2s+3)\,W(s)=\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{2}{(s+2)^3}-\dfrac{8}{s}-3 \end{cases},$$

isto é,

$$\begin{cases} (s+4)\,X(s)+(s+2)\,W(s)=-\dfrac{s^2+3s-2}{(s+2)^2} \\ (s-2)\,X(s)+(2s+3)\,W(s)=-\dfrac{3s^4+25s^3+80s^2+118s+64}{s\,(s+2)^3} \end{cases}.$$

Tem-se, aplicando o método de eliminação de Gauss,

$$\begin{cases} -(2s+3)\,(s+4)\,X(s)-(s+2)\,(2s+3)\,W(s)=\dfrac{2s^3+9s^2+5s-6}{(s+2)^2} \\ (s+2)\,(s-2)\,X(s)+(s+2)\,(2s+3)\,W(s)=-\dfrac{3s^4+25s^3+80s^2+118s+64}{s\,(s+2)^2} \end{cases},$$

vindo

$$X(s)=\frac{s^4+16s^3+75s^2+124s+64}{s\,(s+2)^2\,(s^2+11s+16)}.$$

Ora, nem 0 *nem* -2 *são raízes comuns ao numerador e ao denominador do segundo membro da equação precendente, mas as raízes de* $s^2+11s+16$*,*

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{57}-11\right), \quad -\frac{1}{2}\left(\sqrt{57}+\frac{11}{2}\right),$$

também anulam o numerador. Então, aplicando a "regra de Ruffini", obtém-se,

$$s^4+16s^3+75s^2+124s+64=\left(s^2+11s+16\right)\left(s^2+5s+4\right),$$

pelo que

$$X(s)=\frac{s^2+5s+4}{s\,(s+2)^2}=\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+2)^2}.$$

Portanto,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{(s+2)^2}\right\} = 1 + te^{-2t}.$$

Para determinar $w(t)$ podemos optar por calcular $W(s)$ e de seguida $w(t)$, ou então substituir a expressão obtida para $x(t)$ no PVI inicial, vindo

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt} + 2w = e^{-2t}(1+4t) - \dfrac{dx}{dt} - 4x \\ 2\dfrac{dw}{dt} + 3w = e^{-2t}(1-t^2) - 8 - \dfrac{dx}{dt} + 2x \\ w(0) = -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dw}{dt} + 2w = 2te^{-2t} - 4 \\ 2\dfrac{dw}{dt} + 3w = 4te^{-2t} - t^2e^{-2t} - 6 \\ w(0) = -2 \end{cases}.$$

Nesta fase podemos optar por resolver qualquer um dos dois PVIs, por exemplo

$$\frac{dw}{dt} + 2w = 2te^{-2t} - 4, \quad w(0) = -2,$$

para obter $w(t)$ ou, em alternativa, trabalhar o sistema anterior de forma a não ter de resolver qualquer equação diferencial. De facto, multiplicando ambos os membros da primeira equação diferencial por -2, tem-se (método de eliminação de Gauss)

$$\begin{cases} -2\dfrac{dw}{dt} - 4w = -4te^{-2t} + 8 \\ 2\dfrac{dw}{dt} + 3w = 4te^{-2t} - t^2e^{-2t} - 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad w(t) = t^2e^{-2t} - 2.$$

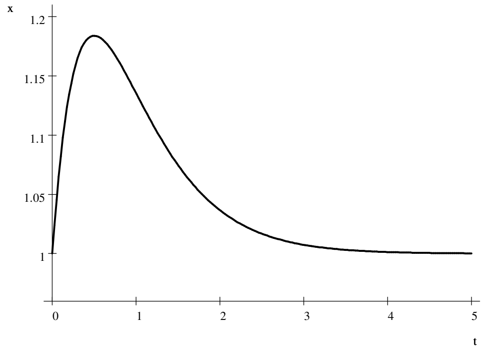
Assim, a solução do PVI proposto é

$$x(t) = 1 + te^{-2t}, \quad w(t) = t^2e^{-2t} - 2.$$

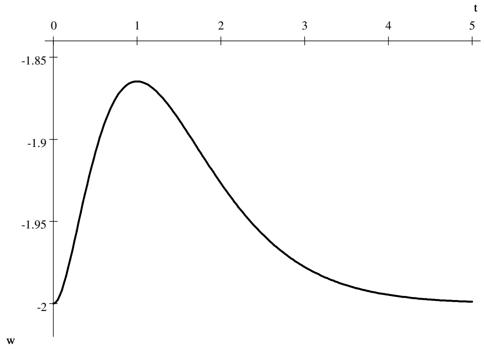
Consequentemente, tem-se

$$x(0) = 1, \quad w(0) = -2,$$

conforme requerido. Mostra-se facilmente que a substituição das expressões de $x(t)$ e $w(t)$ nas duas equações diferenciais presentes no PVI conduzem a duas identidades.



Representação gráfica da função $x(t)$



Representação gráfica da função $w(t)$

Exercícios sobre aplicações da transformada de Laplace

Exercício 4.10 *Usar a transformada de Laplace para determinar a solução dos seguintes PVIs.*

(a) $\dfrac{dy}{dt} - y = 2e^{3t}, \quad y(0) = 2;$

(b) $\dfrac{dy}{dt} + y = \operatorname{sen} t, \quad y(0) = -1;$

(c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 2;$

(d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = h(t), \quad y(0) = 0, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 0, \quad h(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 4 \\ 0, & t \ge 4 \end{cases};$

(e) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = 4te^t, \quad y(1) = 1, \quad \dfrac{dy}{dt}(1) = 0.$

Exercício 4.11 *Usar a transformada de Laplace para determinar a solução dos seguintes PVIs.*

(a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = 6e^t \\ \dfrac{dy}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 0 \end{cases};$ $\qquad (b)$ $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + 4\dfrac{dy}{dt} - y + x = 9e^t \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y + 2x = 3e^t \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases}.$

Exercício 4.12 *Usar a transformada de Laplace para determinar a solução dos seguintes PVIs.*

(a) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2y = -\cos t - 2t \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + x - 3y = \cos t - 3t \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases};$ $\qquad (b)$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dz}{dt} = 4e^{-t} \\ \dfrac{dx}{dt} + 2y = 4e^t \\ \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dz}{dt} = 0 \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0 \end{cases}.$

4.4 Exercícios de revisão do Capítulo 4

Exercício 4.13 *Determinar a transformada inversa de Laplace das seguintes funções através de dois métodos distintos.*

(a) $F(s) = \dfrac{2}{(s^2+1)^2};$

(b) $G(s) = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2};$

(c) $H(s) = \dfrac{5}{(s^2+1)(s-2)}.$

Exercício 4.14 *Usar a transformada de Laplace para determinar a solução dos seguintes PVIs.*

$(a)\quad y'' + 2y' + y = te^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

$(b)\quad y'' + y = g(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3; \quad g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \pi \\ \pi, & t \geq \pi \end{cases};$

$(c)\quad y' + y = h(x), \quad y(-1) = 0; \quad h(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases};$

$(d)\quad \begin{cases} y'' - 4z = 0 \\ z' - 2y = 0 \\ y(0) = 6, \quad y'(0) = 6, \quad z(0) = 0 \end{cases};$ $\qquad (e)\quad \begin{cases} y' + z + x = 2\cosh t + 1 \\ z' + x' - y = -2\,\mathrm{senh}\, t \\ y' - x' = e^t \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1 \end{cases}.$

Exercício 4.15 *Considere-se um circuito elétrico constituido por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R, uma bobine com indutância L e um condensador com capacitância C, ligados em série. Nestas condições a carga instantânea no condensador q é tal que*

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E, \tag{4.24}$$

sendo a intensidade de corrente i em cada instante de tempo t dada por

$$i = \frac{dq}{dt}. \tag{4.25}$$

Nestas condições (4.25) permite escrever

$$q(t) = q(0) + \int_0^t i\,du. \tag{4.26}$$

Combinado (4.24) - (4.26) resulta

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\left(q(0) + \int_0^t i\,du\right) = E. \tag{4.27}$$

Considere-se um circuito do tipo descrito (RLC) em que $E = 100\cos 60t$ (Volts), $R = 4$ (Ohms), $L = 0.1$ (Henries) e $C = 1/40$ (Farads). Sabe-se que no instante inicial a intensidade de corrente e a carga do condensador eram ambas nulas.

(a) Determinar a intensidade de corrente em cada instante recorrendo à equação (4.27);

(b) Usar a equação (4.26) para determinar a carga do condensador em cada instante;

Sugestão: Comparar os resultados agora obtidos com os obtidos no Exercício 3.32 (ver página).

4.5 Soluções dos exercícios do Capítulo 4

4.1. (a) $2s^{-3}$, $s>0$; (b) $\left(s^2-1\right)^{-1}$, $s>1$; (c) $4s^{-1}-2s^{-1}e^{-3s}$, $s>0$;
(d) $\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)\left(2s^{-1}+s^{-2}\right)$, $s>0$.

4.2. $4\left[s\left(s^2+8\right)\right]^{-1}$.

4.3. $\left(1-s\mathcal{L}\left\{\cos^3 3t\right\}\right)/9$.

4.4. $\mathcal{L}\left\{t^3\right\}=\mathcal{L}\left\{t\times t^2\right\}=\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\}=6s^{-4}$, $s>0$.

4.5. $2\left(s+3\right)^{-3}$, $s>-3$.

4.6. $120s\left(s^2-25\right)\left(s^2+25\right)^{-4}$, $s>0$.

4.7. (a) $5e^{-6s}/s$, $s>0$; (b) $2\left(e^{-5s}-e^{-7s}\right)/s$, $s>0$; (c) $3e^{-4s}\left(s^{-2}+4s^{-1}\right)$, $s>0$;
(d) $2s^{-2}\left(1-e^{-5s}\right)$, $s>0$; (e) $(s+1)^{-1}e^{-2(s+1)}$, $s>-1$; (f) $-e^{-\pi s}s/\left(s^2+1\right)$, $s>0$.

4.8. (a) $2\operatorname{sen}3t$; (b) $5t^3e^{2t}$; (c) $3\cosh 2t$; (d) $(5-10t)\,e^{-2t}$; (e) $\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t-\cos\sqrt{2}t+1$;
(f) $7\cos 3t+4\operatorname{sen}3t$; (g) $18e^{2t}+17e^{-5t}$; (h) $-\left(5\cos 3t+2\operatorname{sen}3t\right)u_\pi(t)$;
(i) $e^{-2t+6}u_3(t)(6\cos 3\,(t-3)+5\operatorname{sen}3\,(t-3))$; (j) $3\,(t-4)\,u_4(t)+3\,(7-t)\,u_7(t)$;
(k) $(1+u_\pi(t))\operatorname{sen}2t$; (l) $\cos 2t-1+(1-\cos\left(2t-4\right))\,u_2(t)$.

4.9. (a) $e^{-2t}-e^{-3t}$; (b) $e^{8t}-e^{-2t}$; (c) $\operatorname{sen}^2(3t/2)$; (d) $3t-1+e^{-3t}$.

4.10. (a) $y=e^{3t}+e^t$; (b) $y=-\cos t+\operatorname{sen}t$; (c) $y=e^{2t}$;
(d) $y=1+e^{2t}-2e^t-u_4(t)(1-2e^{t-4}+e^{2t-8})$; (e) $y=e^t\,(2t-3)+1+e^{2-t}$.

4.11. (a) $x=-2e^t+4e^{2t}$, $y=2e^t-2e^{2t}$; (b) $x=e^t-3te^t$, $y=3te^t$.

4.12. (a) $x=\cos t$, $y=t$; (b) $x=4e^t\,(t-1)+6-2e^{-t}$, $y=2e^t\,(1-t)-e^{-t}$, $z=2e^t\,(1-t)-1-e^{-t}$.

4.13. (a) $f(t)=\operatorname{sen}t-t\cos t$; (b) $g(t)=t\operatorname{sen}t$; (c) $h(t)=e^{2t}-\cos t-2\operatorname{sen}t$.

4.14. (a) $y=(t+2)\,e^{-2t}+e^{-t}\,(2t-1)$; (b) $y=2\cos t+2\operatorname{sen}t+t-(t-\pi+\operatorname{sen}t)\,u_\pi(t)$;
(c) $y=u_1(x)\left(1-e^{1-x}\right)-u_2(x)\left(1-e^{-x+2}\right)$;
(d) $z=3e^{2x}+\sqrt{3}e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{3}x-3e^{-x}\cos\sqrt{3}x$; $y=3e^{2x}+\sqrt{3}e^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)+3e^{-x}\cos(\sqrt{3}x)$;
(e) $x=1-e^{-t}+\cos t-\operatorname{sen}t$, $y=e^t-e^{-t}+\cos t-\operatorname{sen}t$, $z=e^{-t}+2\operatorname{sen}t$.

4.15. (a) $i=(-9+100t)e^{-20t}+9\cos 60t+12\operatorname{sen}60t$;
(b) $q=(\frac{1}{5}-5t)e^{-20t}-\frac{1}{5}\cos 60t+\frac{3}{20}\operatorname{sen}60t$.