Primitivas

imediatas

por partes

por substituição

de funções racionais

1 Introdução

O problema central desta secção é o de, dada uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo I, determinar uma nova função $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I. \tag{44}$$

Trata-se do chamado problema da primitivação da função f no intervalo I. Existindo solução do problema, dizemos que f é *primitivável* em I e cada função F verificando a condição (44) é chamada uma *primitiva* ou uma *antiderivadas* de f em I. Escrevemos

$$F(x) = \mathrm{P}\Big(f(x)\Big) \qquad \text{ou} \qquad F(x) = \int f(x)dx. \tag{45}$$

Em particular, na segunda expressão de (45), o símbolo $\int$ representa um "S" alongado e "dx" é uma partícula formal usada para denotar a variável independente em relação à qual se está a primitivar. Da definição, é imediato que

$$F(x) = \mathrm{P}\Big(f(x)\Big), \;\; \forall x \in I \quad \text{sse} \quad F'(x) = f(x), \;\; \forall x \in I,$$

ou seja, que

$$F \text{ é uma primitiva de } f \quad \text{sse} \quad f \text{ é a derivada de } F.$$

Fica assim claro que a primitivação é o processo inverso da derivação.

Exemplo 1
(a) A função definida por $F(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, é uma primitiva de $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
De facto, basta atender a que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) A função definida por $F(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, é uma primitiva de $f(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$.
Basta recordar que $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. ■

2 Consequências

Da definição de primitiva, extraem-se algumas consequências que passamos a enunciar.

Consequência 1
Se F é uma primitiva de f no intervalo I então toda a função

$$F(x) + \mathcal{C}, \quad x \in I, \tag{46}$$

com $\mathcal{C}$ uma constante real arbitrária, é também uma primitiva de f. ■

Basta notar que $[F(x) + \mathcal{C}]' = F'(x) = f(x), \; x \in I$.

Consequência 2

Se F_1 e F_2 são duas primitivas de f em I então $F_2(x) = F_1(x) + \mathcal{C}$, $x \in I$. ■

Basta atender a que $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, $x \in I$, resultando $[F_1(x) - F_2(x)]' = 0$, $x \in I$. Como I é um intervalo, conclui-se que $F_1(x) - F_2(x) = \mathcal{C}$, $x \in I$, ou seja que $F_1(x) = F_2(x) + \mathcal{C}$, $x \in I$.

Observação 1

(a) Das Consequências 1 e 2 sai que, quando o problema da primitivação de uma função num intervalo é possível, ele admite uma infinidade de soluções, que se obtêm de uma primitiva conhecida adicionando uma constante real arbitrária. Para além destas, não há outras primitivas de f no intervalo I. Representamos a expressão geral das primitivas de f por

$$F(x) + \mathcal{C}, \ \ \mathcal{C} \text{ constante},$$

onde F é uma primitiva conhecida, e escrevemos

$$\mathrm{P}\,(f(x)) = F(x) + \mathcal{C}. \tag{47}$$

(b) A título de curiosidade, note-se que o problema da primitivação de uma função num intervalo pode também não possuir solução. É o que se passa, por exemplo, com a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

em qualquer intervalo e com a função

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } \ 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

no intervalo $[0, 4]$. Estas funções não podem ser a derivada de função alguma num intervalo, porque a derivada de uma função num intervalo, ainda que seja descontínua, possui a propriedade do valor intermédio, não passando de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios. Este resultado é conhecido por *Teorema de Darboux* do valor intermédio para a derivada de uma função num intervalo (*cf.* a bibliografia recomendada). As descontinuidades de uma derivada num intervalo, se existirem, são bastante complexas, e nunca descontinuidades de *salto*.

(c) Mais adiante vamos abordar algumas regras de primitivação muito úteis. Convém, no entanto, registar que estas regras não permitem determinar as primitivas de todas as funções primitiváveis. Um exemplo bem conhecido (*cf.* a bibliografia recomendada) é o da função definida por $\boldsymbol{e}^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, que, como ficará claro mais adiante, é primitivável em qualquer intervalo I e, no entanto, as regras que iremos abordar não permitem determinar as primitivas desta função. ■

Exemplo 2

$$\mathrm{P}\,(\cos x) = \operatorname{sen} x + \mathcal{C};$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + \mathcal{C}. \qquad \blacksquare$$

3 Primitivas imediatas

Chamamos *primitivas imediatas* àquelas primitivas que se obtêm por simples reversão das regras de derivação, recorrendo, eventualmente, a alguns artifícios de cálculo. A partir de um quadro de derivadas do tipo

Função	*Derivada*
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
ax	a
x^k	kx^{k-1}

facilmente construimos um quadro de primitivas imediatas. Para tal, basta fazer uma troca de colunas, adicionar uma constante arbitrária aos elementos da coluna da direita e, eventualmente, ajustar constantes. Resulta

Função	*Primitiva*
e^x	$e^x + \mathcal{C}$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + \mathcal{C}$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + \mathcal{C}$
a	$ax + \mathcal{C}$
x^{k-1}	$x^k/k + \mathcal{C}$

Mais em geral, sendo $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável num intervalo I e a, α constantes reais, alguns exemplos de primitivas imediatas são:

(i) $\mathrm{P}\,(a) = ax + \mathcal{C} \;\; (a \in \mathbb{R})$

(ii) $\mathrm{P}\,(f'(x)f^{\alpha}(x)) = \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + \mathcal{C} \;\; (\alpha \neq -1)$

(iii) $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right) = \ln|f(x)| + \mathcal{C}$

(iv) $\mathrm{P}\left(a^{f(x)}f'(x)\right) = \dfrac{a^{f(x)}}{\log a} + \mathcal{C} \;\; (a \in \mathbb{R}^+ \backslash 1)$

(v) $\mathrm{P}\,(\cos f(x) f'(x)) = \operatorname{sen} f(x) + \mathcal{C}$

(vi) $\mathrm{P}\,(\operatorname{sh} f(x) f'(x)) = \operatorname{ch} f(x) + \mathcal{C}$

É assim possível construir uma tabela de primitivas imediatas (Apêncice 1 deste capítulo) que mais não é do que uma lista de regras obtidas por leitura revertida de regras de derivação. Em cada caso, pôs-se dentro do sinal $\mathrm{P}\,(\,\cdots\,)$ uma "expressão" na forma de "derivada de alguma função". A tabela diz-nos, no segundo membro, qual é essa função. Por exemplo, a regra *(vi)* afirma que a primitiva de uma "expressão" do tipo

$\operatorname{sh} f(x)\, f'(x)$ é igual a $\operatorname{ch} f(x) + \mathcal{C}$; isto acontece porque a derivada de $\operatorname{ch} f(x) + \mathcal{C}$ é precisamente igual a $\operatorname{sh} f(x) f'(x)$. Para que a tabela seja útil, devemos ser capazes de traduzir a "expressão" a primitivar numa das formas contempladas na tabela dentro do símbolo $\mathrm{P}\,(\,\cdots\,)$. Este passo representa a única dificuldade do processo de primitivação imediata. Ele requer um conhecimento razoável das regras de derivação.

Exemplo 3 [Primitivas imediatas]

1. $\mathrm{P}\big(-\operatorname{sen} x \cos^5 x\big) = \dfrac{\cos^6 x}{6} + \mathcal{C}.$ [Regra 4. da tabela]

2. $\mathrm{P}\left(\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\right) = \mathrm{P}\left(\dfrac{e^x}{1+(e^x)^2}\right) = \operatorname{arctg} e^x + \mathcal{C}.$ [Regra 15. da tabela]

3. $\mathrm{P}\left(\dfrac{e^x}{7+e^x}\right) = \ln(7+e^x) + \mathcal{C}.$ [Regra 3 da tabela]

4. $\mathrm{P}\left(\dfrac{e^x}{\sqrt[4]{(5+e^x)^3}}\right) = \mathrm{P}\left(e^x(5+e^x)^{-3/4}\right) = \dfrac{(5+e^x)^{-3/4+1}}{-3/4+1} + \mathcal{C}$

   $= 4\sqrt[4]{5+e^x} + \mathcal{C}.$ [Regra 4 da tabela]

■

4 Regras de primitivação

O cálculo das primitivas de uma função baseia-se num conjunto de regras, as chamadas *regras de primitivação*, que se obtêm a partir das regras de derivação.

4.1 Regra de primitivação por decomposição

Resulta da regra da derivação da soma de funções e da regra de derivação do produto de uma função por uma constante. Se u e v são funções deriváveis e α e β são constantes reais, então

$$[\alpha u(x) + \beta v(x)]' = \alpha u'(x) + \beta v'(x). \tag{48}$$

Em termos de primitivas, a regra (48) traduz-se por

$$\mathrm{P}\left[\alpha u'(x) + \beta v'(x)\right] = \alpha u(x) + \beta v(x) + \mathcal{C}.$$

Pondo, mais em geral, $u'(x) = f(x)$, $v'(x) = g(x)$ e $u(x) = F(x)$, $v(x) = G(x)$, com F e G primitivas de f e de g, respectivamente, vem

$$\mathrm{P}\left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] = \alpha F(x) + \beta G(x) + \mathcal{C}.$$

Podemos então estabelecer o seguinte resultado.

Conclusão 1 [Primitivação por decomposição]
Sejam f e g funções primitiváveis num intervalo I e α, β duas constantes reais.. Então $\alpha f + \beta g$ é primitivável em I, tendo-se

$$\mathrm{P}\big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big] = \alpha\,\mathrm{P}\big(f(x)\big) + \beta\,\mathrm{P}\big(g(x)\big)\,. \tag{49}$$

Exemplo 4

$$\mathrm{P}\left(5\cos x - \frac{2}{5}e^x + \frac{3\,\mathrm{sen}\,x}{1+\cos^2 x}\right) = 5\,\mathrm{P}\big(\cos x\big) - \frac{2}{5}\,\mathrm{P}\big(e^x\big) - 3\,\mathrm{P}\left(\frac{-\,\mathrm{sen}\,x}{1+\cos^2 x}\right)$$

$$= 5\,\mathrm{sen}\,x - \frac{2}{5}e^x - 3\,\mathrm{arctg}(\cos x) + \mathcal{C} \qquad \blacksquare$$

4.2 Regra de primitivação por partes

Resulta da regra de derivação de um produto de funções. Se u e v são funções deriváveis, então

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \tag{50}$$

Em termos de primitivas, podemos traduzir a igualdade (50) por

$$\mathrm{P}\left[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right] = u(x)v(x) + \mathcal{C}.$$

Numa forma mais útil, e atendendo ao que se vimos na subsecção 4.1, podemos escrever

$$\mathrm{P}\big[u'(x)v(x)\big] = u(x)v(x) - \mathrm{P}\big[u(x)v'(x)\big] + \mathcal{C}.$$

Pondo agora $u'(x) = f(x)$, $v(x) = g(x)$, $u(x) = F(x)$, onde F é uma primitiva de f, sai

$$\mathrm{P}\big[f(x)g(x)\big] = F(x)g(x) - \mathrm{P}\big[F(x)g'(x)\big],$$

ou ainda,

$$\mathrm{P}\big[f(x)g(x)\big] = \mathrm{P}\,[f(x)]\;g(x) - \mathrm{P}\Big[\mathrm{P}\big(f(x)\big)g'(x)\Big]. \tag{51}$$

Podemos então estabelecer a seguinte conclusão.

Conclusão 2 [Primitivação por partes]
Sejam $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivável, $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f e $g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável, tais que o produto Fg' é primitivável em I. Então fg é primitivável em I, tendo-se

$$\mathrm{P}\big[f(x)g(x)\big] = F(x)g(x) - \mathrm{P}\big[F(x)g'(x)\big]. \tag{52}$$

Podemos ler a fórmula (52) da seguinte forma: *a primitiva de um produto é igual à primitiva do primeiro factor a multiplicar pelo segundo factor, menos a primitiva do novo produto que resulta de multiplicar o factor que já está primitivado pela derivada do segundo factor.* A regra de primitivação expressa na fórmula (52) evidencia que a primitiva de um produto pode ser calculada em duas partes: na primeira, primitiva-se apenas o primeiro factor, que depois é multiplicado pelo segundo; na segunda parte, primitiva-se o produto da função que já está primitivada pela derivada do segundo factor.

Observação 2

(a) Para que o método de primitivação por partes tenha sucesso, pelo menos um dos factores deve ter primitiva imediata; o método resulta quando se sabe primitivar o produto que aparece na segunda parte (*cf.* o exemplo 5 (a)).

(b) Em geral, conhecendo a primitiva de ambos os factores, escolhe-se para primeiro aquele que menos se simplifica a derivar (*cf.* o exemplo 5 (b)).

(c) O método de primitivação por partes pode ser aplicado com suceso para primitivar uma função que não tem primitiva imediata, digamos $f(x)$, interpretando-a como o produto $1f(x)$ e começando por primitivar o factor 1,

$$\mathrm{P}\big[f(x)\big] = \mathrm{P}\big[1f(x)\big] = xf(x) - \mathrm{P}\big[xf'(x)\big] = \cdots \tag{53}$$

Este é o processo habitualmente utilizado para primitivar, por exemplo, logarítmos, arcos trigonométricos e argumentos hiperbólicos (*cf.* o exemplo 5 (c)).

(d) Ao aplicar o método de primitivação por partes duas ou mais vezes sucessivas, é frequente reencontrarmos a primitiva inicial afectada de um certo coeficiente (diferente de 1). A primitiva proposta pode ser obtida como solução de uma equação cuja incógnita é precisamente essa primitiva (*cf.* o exemplo 5 (d)). ■

Exemplo 5

(a) $\mathrm{P}(x \ln x) \;=\; \dfrac{x^2}{2}\ln x - \mathrm{P}\left(\dfrac{x^2}{2}\,\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + \mathcal{C}.$

Repare-se que o factor $\ln x$ não possui primitiva imediata. Devemos, portanto, primitivar primeiro o factor x.

(b) $\mathrm{P}(xe^x) \;=\; x\,e^x - \mathrm{P}(e^x) = x\,e^x - e^x + \mathcal{C}.$

Aqui conhecemos a primitiva de ambos os factores. Mas o polinómio "complica-se" quando primitivado, porque aumenta de grau, e simplifica-se quando derivado. É então conveniente guardá-lo para segundo factor.

$$\begin{aligned}\text{(c) } \mathrm{P}(\operatorname{arctg} x) &= \mathrm{P}\big(1\operatorname{arctg} x\big) = x\,\operatorname{arctg} x - \mathrm{P}\left(x\,\frac{1}{1+x^2}\right)\\ &= x\,\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = x\,\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\,\ln(1+x^2) + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

O arco-tangente não tem primitiva imediata, mas foi muito simples usar o método de primitivação por partes para o primitivar.

$$\begin{aligned}\text{(d) } \mathrm{P}\big(e^x \operatorname{sen} x\big) &= e^x \operatorname{sen} x - \mathrm{P}\big(e^x \cos x\big) = e^x \operatorname{sen} x - \big[e^x \cos x + \mathrm{P}\big(e^x \operatorname{sen} x\big)\big]\\ &= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \mathrm{P}\big(e^x \operatorname{sen} x\big).\end{aligned}$$

E para a primitiva proposta podemos escrever

$$\mathrm{P}\big(e^x \operatorname{sen} x\big) = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) - \mathrm{P}\big(e^x \operatorname{sen} x\big).$$

Resolvendo esta última equação a respeito da incógnita $\mathrm{P}\big(e^x \operatorname{sen} x\big)$, resulta

$$\mathrm{P}\big(e^x \operatorname{sen} x\big) = \frac{e^x}{2}\,(\operatorname{sen} x - \cos x) + \mathcal{C}. \qquad \blacksquare$$

4.3 Primitivação de potências de funções trigonométricas e hiperbólicas

Há um conjunto de regras práticas para a primitivação de potências com expoente natural de funções trigonométricas e de funções hiperbólicas, que se baseiam em algumas propriedades destas funções. Passemos à apresentação destas regras, apenas no caso das funções *seno* e *cosseno*, bem como das funções *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólico*.

A - Potências pares de funções trigonométricas e hiperbólicas

No caso da primitivação de potências de expoente par de funções trigonométricas, é conveniente passar para o arco duplo, recorrendo às fórmulas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\,, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\,. \tag{54}$$

De modo perfeitamente equivalente, no caso da primitivação de potências de expoente par de funções hiperbólicas, é conveniente passar para o argumento duplo, tendo em conta que

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}\,, \qquad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}\,. \tag{55}$$

Exemplo 6

(a) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(\cos^2 x) &= \mathrm{P}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\big(1+\cos 2x\big) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + \mathcal{C} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(\operatorname{ch}^4 x) &= \mathrm{P}\left[\left(\frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}\,\mathrm{P}\big(\operatorname{ch}^2 2x + 2\operatorname{ch} 2x + 1\big) \\ &= \frac{1}{4}\,\mathrm{P}\big(\operatorname{ch}^2 2x\big) + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\big(\operatorname{ch} 2x\big) + \frac{x}{4} = \frac{1}{4}\,\mathrm{P}\left(\frac{\operatorname{ch} 4x + 1}{2}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{x}{4} \\ &= \frac{1}{8}\,\mathrm{P}\big(\operatorname{ch} 4x\big) + \frac{x}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{x}{4} = \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x + \frac{x}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{x}{4} + \mathcal{C} \\ &= \frac{1}{16}\operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} 2x + \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \mathcal{C} \\ &= \frac{1}{8}\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) + \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \mathcal{C}\end{aligned}$$

$\blacksquare$

B - Potências ímpares de funções trigonométricas e hiperbólicas

No caso da primitivação de potências de expoente ímpar de funções trigonométricas ou hiperbólicas, é conveniente destacar uma unidade à potência ímpar e passar o outro factor para a co-função, através das fórmulas

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1\ , \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{56}$$

Exemplo 7

$$\begin{aligned}
\text{(a) } \mathrm{P}(\cos^3 x) &= \mathrm{P}\big(\cos x\, \cos^2 x\big) = \mathrm{P}\Big(\cos x\big(1-\operatorname{sen}^2 x\big)\Big) \\
&= \mathrm{P}\big(\cos x\big) - \mathrm{P}\big(\cos x \operatorname{sen}^2 x\big) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b) } \mathrm{P}(\operatorname{ch}^5 x) &= \mathrm{P}\big(\operatorname{ch} x \operatorname{ch}^4 x\big) = \mathrm{P}\big[\operatorname{ch} x(1+\operatorname{sh}^2 x)^2\big] \\
&= \mathrm{P}\big(\operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^4 x\big) \\
&= \operatorname{sh} x + \frac{2}{3}\operatorname{sh}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

■

4.4 Regra de primitivação por substituição

Resulta da regra de derivação de uma função composta. Se u e v são funções deriváveis e a composta $u \circ v$ está bem definida, então

$$[u\,(v(t))]' = u'\,(v(t))\,v'(t). \tag{57}$$

Em termos de primitivas, podemos escrever

$$\mathrm{P}\Big[u'\,(v(t))\,v'(t)\Big] = u\,(v(t)) + \mathcal{C}.$$

Pondo $u'(x)=f(x)$, $u(x)=F(x)$, $v(x)=g(x)$ e $v'(x)=g'(x)$, onde F é uma primitiva de f, vem

$$\mathrm{P}\,\big[f\,(g(t))\,g'(t)\big] = F\,(g(t)) + \mathcal{C}. \tag{58}$$

A expressão (58) pode adquirir uma forma mais útil, atendendo a que $F(g(t))+\mathcal{C}$ indica uma primitiva genérica de $f(x)$ calculada em $x=g(t)$. De facto, podemos escrever

$$\mathrm{P}\big[f\big(g(t)\big)g'(t)\big] = \Big[\mathrm{P}\big[f(x)\big]\Big]_{x=g(t)}, \tag{59}$$

mas a expressão (59) ainda não é bem o que nos interessa. No entanto, tendo em conta que, em geral, o problema que nos é proposto é o de calcular $\mathrm{P}\big[f(x)\big]$, basta então desfazer a substituição $x = g(t)$ na fórmula (59), através de $t = g^{-1}(x)$. Legitimando as "manobras" anteriores, a conclusão é a seguinte.

Conclusão 3 [Primitivação por substituição]
Sejam $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável no intervalo I, F uma primitiva de f em I, e $g : J \longrightarrow I$ uma função bijectiva com derivada não nula em cada ponto de J. Então $F \circ g$ é uma primitiva de $(f \circ g)\, g'$ em J, tendo-se

$$\mathrm{P}\big[f(x)\big] = \Big[\mathrm{P}\big[f\,(g(t))\, g'(t)\big]\Big]_{t=g^{-1}(x)}. \tag{60}$$

A expressão (60) exprime a regra de primitivação por substituição de variável. Mais concretamente, ela indica que o cálculo da primitiva de $f(x)$ pode ser efectuado da seguinte forma:

- faz-se a substituição $x = g(t)$;
- calcula-se depois a nova primitiva $\mathrm{P}\big[f(g(t))\, g'(t)\big]$;
- desfaz-se a substituição, regressando à variável inicial x, através de $t = g^{-1}(x)$.

Observação 3
Em geral, aplica-se o método de primitivação por substituição quando não se sabe primitivar a função dada por outro processo, ou ainda quando o cálculo da primitiva dada se simplifica significativamente. O sucesso do método depende, obviamente, da substituição adoptada. A dificuldade está em intuir uma substituição adequada para a primitiva que nos é proposta. Para a escolha da substituição, podemos recorrer a uma tabela onde se listam substituições de sucesso para os casos mais importantes (Apêndice 2 deste capítulo). ■

Exemplo 8

(a) Para calcular $\mathrm{P}\big(x\sqrt{x-1}\big)$, faça-se a substituição definida por $x - 1 = t^2,\ t \geq 0$.

Vem $x = 1 + t^2,\ t \geq 0$, e no âmbito da fórmula (60), tem-se $g(t) = 1 + t^2$. Então $g'(t) = 2t$ e somos conduzidos ao cálculo da nova primitiva,

$$\mathrm{P}\Big[(1+t^2)\sqrt{t^2}\,\underbrace{2t}_{g'(t)}\Big] = 2\mathrm{P}(t^2 + t^4) = \frac{2}{3}\,t^3 + \frac{2}{5}\,t^5 + \mathcal{C}.$$

Para regressar à variável x, desfaz-se a substituição, notando que $t = \sqrt{x-1}$ com $x \geq 1$, uma vez que $t \geq 0$. Resulta finalmente

$$\mathrm{P}\Big(x\sqrt{x-1}\Big) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \mathcal{C}.$$

(b) Para calcular $\mathrm{P}\big(\sqrt{1-x^2}\big)$, faça-se a substituição $x = \cos t$, com $t \in [0, \pi]$. Neste caso, tem-se $g(t) = \cos t$ e $g'(t) = -\operatorname{sen} t$, para $t \in [0, \pi]$. Calculemos então

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big[\sqrt{1-\cos^2 t}\,\underbrace{(-\operatorname{sen} t)}_{g'(t)}\big] &= -\mathrm{P}\big(\operatorname{sen}^2 t\big) \overset{*}{=} -\mathrm{P}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,(\cos 2t - 1) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\,\cos t - \frac{1}{2}\,t + \mathcal{C},\end{aligned}$$

onde na igualdade $\overset{*}{=}$ se usou o que vimos na subsecção 4.3, parte A. Para regressar à variável x, atenda-se a que $x=\cos t,\ t\in[0,\pi] \Leftrightarrow t = \arccos x,\ x\in[-1,1]$ e a que, para $t\in[0,\pi]$, $\cos t=x \Leftrightarrow \operatorname{sen} t=\sqrt{1-x^2}$, uma vez que $\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Então

$$\mathrm{P}\left(\sqrt{1-x^2}\right) \;=\; \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\,\arccos x + \mathcal{C}.$$

(c) Para calcular $\mathrm{P}\left(\dfrac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$, faça-se $x = t^2,\ t > 0$. Depois de introduzir a substituição, caimos numa primitiva que podemos determinar recorrendo ao método de primitivação por partes. Vem

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\frac{\operatorname{arcsen} t}{t}\;\underbrace{2t}_{\text{derivada}}\right) &= 2\mathrm{P}\big(\operatorname{arcsen} t\big) \;=\; 2\mathrm{P}\big(1\ \operatorname{arcsen} t\big)\\
&= 2\left[t\ \operatorname{arcsen} t - \mathrm{P}\left(t\,\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)\right]\\
&= 2t\ \operatorname{arcsen} t + \mathrm{P}\left[(-2t)(1-t^2)^{-1/2}\right]\\
&= 2t\ \operatorname{arcsen} t + 2\sqrt{1-t^2} + \mathcal{C},
\end{aligned}$$

donde, regressando à variável x, resulta

$$\mathrm{P}\left(\frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = 2\sqrt{x}\ \operatorname{arcsen}\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + \mathcal{C}.$$

(d) Para calcular $\mathrm{P}\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right)$, faça-se $x = t^6,\ t \geq 0$. A solução é

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right) &= \frac{3}{5}\,x^{5/3} - \frac{3}{4}\,x^{4/3} - \frac{6}{7}\,x^{7/6} + x + \frac{6}{5}\,x^{5/6} - \frac{3}{2}\,x^{2/3}\\
&= -2\,x^{1/2} + 6\,x^{1/6} - 3\,\ln(1+x^{1/3}) - 6\,\operatorname{arctg}(x^{1/6}) + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

(e) Para calcular $\mathrm{P}\big(x\,\sqrt[4]{1+x}\big)$, faça-se $1+x = t^4,\ t \geq 0$. Vem

$$\mathrm{P}\big(x\,\sqrt[4]{1+x}\big) = \frac{4}{9}\,\sqrt[4]{(1+x)^9} - \frac{4}{5}\,\sqrt[4]{(1+x)^5} + \mathcal{C}.$$

■

5 Primitivação de funções racionais

A primitivação de funções definidas como quociente de polinómios (funções racionais),

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{x\in\mathbb{R} :\, Q(x) = 0\}\,, \tag{61}$$

é feita com uma técnica muito própria que se baseia na decomposição da fracção $P(x)/Q(x)$ em fracções mais simples, ditas *elementares*. Para obter uma tal decomposição, é crucial a determinação dos zeros do polinómio Q, bem como a especificação da natureza e da multiplicidade de cada zero. Omitindo aqui alguns resultados sobre polinómios, passemos à descrição desta técnica.

Passo 1 Divisão dos polinómios (nem sempre é necessário).

Se $\operatorname{grau} Q \geq \operatorname{grau} P$ então efectua-se a divisão dos dois polinómios. Resulta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,, \tag{62}$$

onde S e R são polinómios e $\operatorname{grau} R < \operatorname{grau} Q$. A fracção $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ deve agora ser decomposta, como virá explicado nos passos seguintes.

Passo 2 Decomposição de $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ em fracções simples.

(a) Determinam-se os zeros de Q, atendendo a que:

- se Q é um polinómio de grau n então Q possui exactamente n zeros, que podem ser reais ou complexos;
- os zeros complexos ocorrem sempre aos pares de conjugados, isto é, se $a + bi$ é um zero de Q então $a - bi$ também é um zero de Q;
- cada zero de Q pode ser *simples* ou de *multiplicidade um*, quando anula Q mas não anula a sua derivada Q', e pode ser *múltiplo* com *multiplicidade* $k > 1$, quando anula Q e todas as suas derivadas até à ordem $k - 1$ mas não anula a derivada de ordem k;
- o polinómio Q possui o zero real $x = a$ com multiplicidade $k \geq 1$ se, na factorização de Q, o factor $(x - a)$ ocorre exactamente k vezes;
- o polinómio Q possui o par de zeros complexos $x = a \pm b\imath$ com multiplicidade $k \geq 1$ se, na factorização de Q, o factor $[(x-a)^2 + b^2]^k$ ocorre exactamente k vezes.

(b) Decompõe-se $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ numa soma de fracções simples, com base nos zeros de Q encontrados em (a), atendendo a que:

- cada zero real $x = a$, com multiplicidade k, contribui com k fracções simples da forma

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}\,,\quad \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}\,,\quad \cdots\,,\quad \frac{A_k}{x-a}\,, \tag{63}$$

  onde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são constantes reais a determinar;

- cada par de zeros complexos conjugados $x = a \pm b\imath$, com multiplicidade k, contribui com k fracções simples da forma

$$\frac{P_1 x + Q_1}{[(x-a)^2 + b^2]^k}\,,\quad \frac{P_2 x + Q_2}{[(x-a)^2 + b^2]^{k-1}}\,,\quad \cdots\,,\quad \frac{P_k x + Q_k}{(x-a)^2 + b^2} \tag{64}$$

  onde $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_k, Q_k$ são constantes reais a determinar.

(c) Calculam-se as constantes A_i, P_i, Q_i que figuram nos numeradores das fracções simples (63) e (64), recorrendo ao chamado método dos *coeficientes indeterminados*, que virá exposto nos exemplos que se apresentam a seguir. Na prática, recorre-se muitas vezes a outras regras bastante simples que, conjugadas com o método anterior, simpificam significativamente os cálculos a efectuar.

Passo 3 Cálculo das primitivas.

O cálculo da primitiva inicial é efectuado a partir do que se viu nos passos anteriores, nomeadamente, a partir da expressão (62), onde $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ se escreve como uma soma de parcelas dos tipos (63) e (64). Então

$$\mathrm{P}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = \mathrm{P}\left[S(x)\right] + \mathrm{P}\left[\frac{R(x)}{Q(x)}\right]$$

onde a primeira primitiva no segundo membro é imediata, por se tratar de um polinómio, e a segunda primitiva é a soma das primitivas das fracções simples envolvidas na decomposição. Todas as fracções da forma (63) têm primitiva imediata (regra 4. da potância e regra 3. do logarítmo). As fracções da forma (64) podem ser primitivadas através de uma substituição de variável. A última, em particular, pode ser tratada como primitiva imediata, depois de algumas manipulações algébricas (regra 15. do arco-tangente). ■

Exemplo 9

1. Calcular $\mathrm{P}\left(\dfrac{2x^5-4x^4+4x^3-4x^2+3x}{(x^2+1)(x-1)^2}\right)$.

Passo 1 Neste caso, $\operatorname{grau} P = 5$ e $\operatorname{grau} Q = 4$, pelo que é necessário efectuar a divisão dos dois polinómios. Resulta

$$\frac{2x^5-4x^4+4x^3-4x^2+3x}{(x^2+1)(x-1)^2} = 2x + \frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2}\ .$$

Passo 2 Vamos decompor a fracção no segundo membro da última equação em fracções simples.

(a) Os zeros de $Q(x) = (x^2+1)(x-1)^2$ são:

$x = 1\ ,$ real com multiplicidade 2;

$x = \pm i\ ,$ complexos conjugados com multiplicidade 1.

(b) A fracção decompõe-se numa soma de três fracções simples, duas delas associadas ao zero real de multiplicidade 2 e a outra associada ao par de complexos conjugados de multiplicidade 1,

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{Px+Q}{x^2+1}\,, \tag{65}$$

onde A_1, A_2, P e Q são constantes a determinar.

(c) Da equação (65), reduzindo ao mesmo denominador, sai que

$$\begin{aligned} x &= A_1(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + (Px+Q)(x-1)^2 \\ &= (A_2+P)x^3 + (A_1-A_2-2P+Q)x^2 + (A_2+P-2Q)x + (A_1-A_2+Q), \end{aligned}$$

donde

$$A_2+P=0\,,\quad A_1-A_2-2P+Q=0\,,\quad A_2+P-2Q=1\,,\quad A_1-A_2+Q=0,$$

e, portanto

$$A_1=\frac{1}{2}\,,\quad A_2=0\,,\quad P=0\,,\quad Q=-\frac{1}{2}\,. \tag{66}$$

A concluir este segundo passo, da equação (65) e das expressões (66), resulta

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}\,.$$

Passo 3 Do que se viu anteriormente, sai

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x^5-4x^4+4x^3-4x^2+3x}{(x^2+1)(x-1)^2}\right) &= \mathrm{P}(2x) + \mathrm{P}\left(\frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2}\right) \\ &= \mathrm{P}(2x) + \frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \\ &= x^2 - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

2. Calcular $\mathrm{P}\left(\dfrac{4x^2+x+1}{x^3-x}\right)$.

Passo 1 Não é necessário dividir os polinómios.

Passo 2 Obter $\dfrac{4x^2+x+1}{x^3-x} = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{x-1}\,.$

Passo 3 Resulta $\mathrm{P}\left(\dfrac{4x^2+x+1}{x^3-x}\right) = \ln\dfrac{|x-1|^3\,(x+1)^2}{|x|} + \mathcal{C}.$

3. Calcular $\mathrm{P}\left(\dfrac{x+1}{x(x^2+1)^2}\right)$.

Passo 1 Não é necessário dividir os polinómios.

Passo 2 Obter $\dfrac{x+1}{x(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-x+1}{(x^2+1)^2} + \dfrac{-x}{x^2+1}$.

Passo 3 Resulta

$$\mathrm{P}\left(\frac{x+1}{x(x^2+2)^2}\right) = \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} + \mathcal{C}.$$

■

Tabela de primitivas imediatas

Primitivas Imediatas

Na lista de primitivas que se segue, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável no intervalo I e $\boldsymbol{c}$ denota uma constante real arbitrária.

1. $\mathrm{P}\,(a) = ax + \boldsymbol{c}$

2. $\mathrm{P}\,(f' f^{\alpha}) = \dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \boldsymbol{c} \;\; (\alpha \neq -1)$

3. $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'}{f}\right) = \ln|f| + \boldsymbol{c}$

4. $\mathrm{P}\left(a^f f'\right) = \dfrac{a^f}{\log a} + \boldsymbol{c} \;\; (a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1)$

5. $\mathrm{P}\,(f' \cos f) = \operatorname{sen} f + \boldsymbol{c}$

6. $\mathrm{P}\,(f' \operatorname{sen} f) = -\cos f + \boldsymbol{c}$

7. $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'}{\cos^2 f}\right) = \operatorname{tg} f + \boldsymbol{c}$

8. $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}\right) = -\operatorname{cotg} f + \boldsymbol{c}$

9. $\mathrm{P}\,(f' \operatorname{tg} f) = -\log|\cos f| + \boldsymbol{c}$

10. $\mathrm{P}\,(f' \operatorname{cotg} f) = \log|\operatorname{sen} f| + \boldsymbol{c}$

11. $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'}{\cos f}\right) = \log\left|\dfrac{1}{\cos f} + \operatorname{tg} f\right| + \boldsymbol{c}$

12. $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'}{\operatorname{sen} f}\right) = \log\left|\dfrac{1}{\operatorname{sen} f} - \operatorname{cotg} f\right| + \boldsymbol{c}$

13. $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\right) = \operatorname{arcsen} f + \boldsymbol{c}$

14. $\mathrm{P}\left(\dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}\right) = \arccos f + \boldsymbol{c}$

15. $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'}{1+f^2}\right) = \operatorname{arctg} f + \boldsymbol{c}$

16. $\mathrm{P}\left(\dfrac{-f'}{1+f^2}\right) = \operatorname{arccotg} f + \boldsymbol{c}$

17. $\mathrm{P}\,(f' \operatorname{ch} f) = \operatorname{sh} f + \boldsymbol{c}$

18. $\mathrm{P}\,(f' \operatorname{sh} f) = \operatorname{ch} f + \boldsymbol{c}$

19. $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'}{\operatorname{ch}^2 f}\right) = \operatorname{th} f + \boldsymbol{c}$

20. $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'}{\operatorname{sh}^2 f}\right) = -\coth f + \boldsymbol{c}$

21. $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'}{\sqrt{f^2+1}}\right) = \operatorname{argsh} f + \boldsymbol{c}$

22. $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'}{\sqrt{f^2-1}}\right) = \operatorname{argch} f + \boldsymbol{c}$

23. $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'}{1-f^2}\right) = \operatorname{argth} f + \boldsymbol{c}$

24. $\mathrm{P}\left(\dfrac{f'}{1-f^2}\right) = \operatorname{argcoth} f + \boldsymbol{c}$

Tabela de substituições

Primitivas por Substituição

Na lista de substituições que se segue, a, b e c são constantes reais arbitrárias. A notação $R(\cdots)$ indica uma função racional dos monómios que se encontram dentro dos parêntesis. Na coluna da esquerda, figuram diferentes tipos de funções primitiváveis Na coluna da direita sugere-se, em cada caso, uma substituição adequada à função indicada na coluna da esquerda.

Tipo de Função	Substituição
1. $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^k}\ ,\ k\in\mathbb{N},\ k>1$	$x = a\ \mathrm{tg}\, t$
2. $\dfrac{Q(x)}{(ax^2+bx+c)^k}\ ,\ k\in\mathbb{N},\ k>1,\ b^2-4ac<0$ onde $Q(x)$ é um polinómio de grau inferior a $2k$	$ax + \dfrac{b}{2} = t$
3. $\dfrac{Q(x)}{[(x-p)^2+q^2]^k}\ ,\ k\in\mathbb{N},\ k>1$ onde $Q(x)$ é um polinómio de grau inferior a $2k$	$x = p + qt$
4. $R(a^{rx},\, a^{sx},\, \ldots)$	$a^{mx} = t$ com $m = \text{m.d.c.}(r, s, \ldots)$
5. $R(\log_a x)$	$t = \log_a x$
6. $R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}, \ldots\right)$	$\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^m$ com $m = \text{m.m.c.}(q, s, \ldots)$
7. $R\left(x, (ax+b)^{p/q}, (ax+b)^{r/s}, \ldots\right)$	$(ax+b) = t^m$ com $m = \text{m.m.c.}(q, s, \ldots)$
8. $R\left(x, x^{p/q}, x^{r/s}, \ldots\right)$	$x = t^m$ com $m = \text{m.m.c.}(q, s, \ldots)$
9. $R\left(x, \sqrt{a^2-b^2x^2}\right)$	$x = \dfrac{a}{b}\,\mathrm{sen}\, t$ ou $x = \dfrac{a}{b}\cos t$ ou $x = \dfrac{a}{b}\,\mathrm{th}\, t$
10. $R\left(x, \sqrt{a^2+b^2x^2}\right)$	$x = \dfrac{a}{b}\,\mathrm{tg}\, t$ ou $x = \dfrac{a}{b}\,\mathrm{sh}\, t$
11. $R\left(x, \sqrt{b^2x^2-a^2}\right)$	$x = \dfrac{a}{b}\sec t$ ou $x = \dfrac{a}{b}\,\mathrm{ch}\, t$
12. $R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{a-bx}\right)$	$x = \dfrac{a}{b}\,\mathrm{sen}^2\, t$ ou $x = \dfrac{a}{b}\cos^2 t$
13. $R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{a+bx}\right)$	$x = \dfrac{a}{b}\,\mathrm{tg}^2\, t$

Tipo de Função	Substituição
14. $R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{bx-a}\right)$	$x = \dfrac{a}{b}\sec^2 t$
15. $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$	se $a>0$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+t$ se $c>0$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c}+tx$ se $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-r_1)t$ ou $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-r_2)t$
16. $x^m(a+bx^n)^{p/q}$	se $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a+bx^n = t^q$ se $\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a+bx^n = x^n t^q$
17. $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ com	
(a) R ímpar em $\operatorname{sen} x$ isto é $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\cos x = t$
(b) R ímpar em $\cos x$ isto é $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\operatorname{sen} x = t$
(c) R par em $(\operatorname{sen} x, \cos x)$ isto é $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\operatorname{tg} x = t$, sendo então (supondo $x \in]0, \pi/2[$) $\operatorname{sen} x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
(d) nos restantes casos (e até nos anteriores)	$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, sendo $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
18. $R(\operatorname{sen} mx, \cos mx)$	$mx = t$
19. $R(e^x \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	$x = \log t$
20. $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ com	
(a) R ímpar em $\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x = t$
(b) R ímpar em $\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x = t$
(c) R par em $(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	$\operatorname{th} x = t$, sendo $\operatorname{sh} x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
(d) nos restantes casos (e até nos anteriores)	$\operatorname{th}\dfrac{x}{2} = t$, sendo $\operatorname{sh} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$
21. $R(\operatorname{sh} mx, \operatorname{ch} mx)$	$mx = t$