Análise Matemática EE

1ºano, 2ºsemestre

Curvas em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$

1. Identifique as curvas seguintes e esboce-as no plano ou no espaço, conforme o caso:

   (a) $\vec{f}(t) = (t-1, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$

   (b) $\vec{f}(t) = (1-2t^2, t+1), \quad t \in \mathbb{R}.$

   (c) $\vec{f}(t) = (1+2t)\vec{e}_1 + (3-4t)\vec{e}_2, \quad t \in \mathbb{R}.$

   (d) $\vec{f}(t) = (1+2t)\vec{e}_1 + (3-4t)\vec{e}_2 + 5\,\vec{e}_3, \quad t \in \mathbb{R}.$

   (e) $x = -1-t,\ y = 2-t, \quad t \in [1,2].$

   (f) $\vec{f}(t) = (2\sin(2t), 2\cos(2t)), \quad t \in [0,\pi].$

   (g) $\vec{f}(t) = (-1+2\cos(\pi-t), 2+2\sin(\pi-t)), \quad t \in \mathbb{R}.$

   (h) $\vec{f}(t) = (-1+2\cos(\frac{\pi}{2}t), 4, 2+2\sin(\frac{\pi}{2}t)), \quad t \in [0,2\pi].$

   (i) $\vec{f}(t) = (2\sin t, \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$

   (j) $\vec{f}(t) = (2\sin(\frac{\pi}{2}+t), 1+\cos(\frac{\pi}{2}+t)), \quad t \in \mathbb{R}.$

   (k) $x = \ln t,\ y = t, \quad t \in [1,2].$

   (l) $x = t,\ y = e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$

   (m) $x = t+1,\ y = t^3,\ z = 5, \quad t \in [0,4].$

2. Em cada alínea, considere as descrições do movimento de duas partículas. Explique a diferença entre o movimento das partículas. Indique o sentido segundo o qual as curvas são percorridas, o ponto inicial e o ponto final.

   (a) $\vec{f}(t) = (t-1, t^2)$, $t \in [-5,5[$; $\quad \vec{f}(t) = (\cos t - 1, \cos^2 t)$, $t \in [0,2\pi[$.

   (b) $\vec{f}(t) = (1+2t)\vec{e}_1 + (3-4t)\vec{e}_2$, $t \in \mathbb{R}$; $\quad \vec{f}(t) = (1+2\cosh t)\vec{e}_1 + (3-4\cosh t)\vec{e}_2$, $t \in \mathbb{R}$.

   (c) $\vec{f}(t) = (2\cos t)\vec{e}_1 + (2\sin t)\vec{e}_2$, $t \in [0,2\pi[$; $\quad \vec{f}(t) = (2\cos(\frac{\pi}{2}+t))\vec{e}_1 + (2\sin(\frac{\pi}{2}+t))\vec{e}_2$, $t \in [0,2\pi[$.

   (d) $\vec{f}(t) = (-1+2\cos t)\vec{e}_1 + (1+\sin t)\vec{e}_2$, $t \in [0,2\pi[$; $\quad \vec{f}(t) = (-1+2\cos(\pi-3t))\vec{e}_1 + (1+\sin(\pi-3t))\vec{e}_2$, $t \in [0,\pi[$.

   (e) $\vec{f}(t) = (1+2t)\vec{e}_1 + (3-4t)\vec{e}_2$, $t \in [0,2[$; $\quad \vec{f}(t) = (-1+2u)\vec{e}_1 + (7-4u)\vec{e}_2$, $u \in [1,3[$.

3. Em cada alínea, determine o vetor tangente à curva descrita por $\vec{r}(t)$ no instante indicado $t = t_0$ e descreva a reta tangente à curva no ponto $\vec{r}(t_0)$:

   (a) $\vec{r}(t) = (t-1, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, para $t_0 = 2$.

   (b) $\vec{r}(t) = (\exp t^3, \ln(t+1) - t^3)$, $t \geq 0$, para $t_0 = 1$.

   (c) $\vec{r}(t) = (\frac{t^2-1}{t+2}, \tan t)$, $t \in \mathbb{R}$, para $t_0 = 0$.

   (d) $\vec{r}(t) = (\sqrt{t-1}, 3t^4 - 1)$, $t \in \mathbb{R}$, para $t_0 = 3$.

4. Determine o instante em que o vetor tangente à curva $\vec{r}(t) = (t^3-1, t^2+t)$, $t \in \mathbb{R}$ é paralelo à reta $x = -1+3t, y = 4-t$, $t \in \mathbb{R}$.

5. Considere a curva $\vec{r}(t) = (\cos t, t^2 - t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Determine o instante em que o vetor tangente à curva é vertical.

(b) Determine o instante em que o vetor tangente à curva é horizontal.

6. Considere a curva $\vec{r}(t) = (\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+1, \frac{t^3}{3}+2t-1)$, $t \in \mathbb{R}$ e a curva $\vec{u}(t) = (\frac{t^4}{4}+t-1, \frac{t^2}{2}+2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine o instante em que o vetor tangente à curva $\vec{r}(t)$ é paralelo ao vetor tangente à curva $\vec{u}(t)$.

   (b) Escreva as equações das rectas tangentes a essas curvas nesse instante.