Folha 10A – Séries Numéricas (parte I).

1. Diga se cada umas das seguintes séries é convergente ou divergente (em caso de convergência, determine, se possível, a soma da série):

   (a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-(5n+1)}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$.

2. Verifique que cada uma das seguintes expressões representa uma série telescópica, estude a sua natureza e determine, se possível, a soma da série:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3. Estude a natureza das séries com as seguintes sucessões geradoras:

   (a) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (b) $w_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. Estude a natureza das séries numéricas dadas por:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n!}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

5. Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos positivos. Conclua, justificando, que:

   (a) a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (1+u_n)$ é divergente;

   (b) se $(u_n)_n$ é decrescente então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+u_n}$ é divergente;

   (c) se $\lim_n (n\, u_n) = +\infty$ então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente;

   (d) se $\lim_n (n^2\, u_n) = 0$ então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.