Ficha 7: Integral impróprio

Na ficha anterior, considerámos situações onde a função fosse contínua num intervalo fechado $[a,b]$ com $a,b \in \mathbb{R}$. Vamos agora considerar intervalos abertos (ou semi-abertos) de tipo $[a,b[$ onde a,b são reais mas podem ser também $+\infty$ ou $-\infty$. Neste caso falamos de integrais impróprios.

7.1 Caso $[a,b[$ ou $]a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$

Definição 7.1 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b[$, temos as três possibilidades seguintes.*

- *A função é integrável no intervalo (ou admite um integral impróprio no intervalo) se existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que*
$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx = \ell.$$
- *O integral é divergente para $\pm\infty$ se*
$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx = \pm\infty.$$
- *Caso contrário, dizemos que o integral não converge no intervalo $[a,b[$*

NOTA 7.1 Temos a mesma definição para o intervalo $]a,b]$ onde consideramos o limite
$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

Vamos apresentar três exemplos representativos assim como a técnica para determinar a convergência de um integral impróprio

EXEMPLO 7.1 (CONVERGÊNCIA) Determinar, se existir, o integral
$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$
A função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ é contínua no intervalo $]0,1]$ então o problema está no ponto 0. Para $t \in]0,1]$, o integral
$$I(t) = \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[t,1]$. Temos assim

$$I(t) = \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \Big[\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}\Big]_t^1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{t}).$$

Como $\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t} = 0$, deduzimos que $\lim_{t\to 0^+} I(t) = \dfrac{1}{2}$ e concluimos que o integral converge para um meio seja

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 7.2 (Divergência) Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx.$$

A função $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ é contínua no intervalo $]0,1]$ então o problema está no ponto 0. Para $t \in]0,1]$, o integral

$$I(t) = \int_t^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[t,1]$. Temos assim

$$I(t) = \int_t^1 x^{-\frac{3}{2}} dx = \Big[-\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\Big]_t^1 = -\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{t}}).$$

Como $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = +\infty$, deduzimos que $\lim_{t\to 0^+} I(t) = +\infty$ e concluimos que o integral diverge para $+\infty$.

Exemplo 7.3 (Não convergência) Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

A função $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ é contínua no intervalo $]0,1]$ então o problema está no ponto 0. Para $t \in]0,1]$, o integral

$$I(t) = \int_t^1 \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[t,1]$. Notando que uma primitiva de f é $F(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, deduzimos que

$$I(t) = \Big[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\Big]_t^1 = \sin(1) - \sin\left(\frac{1}{t}\right).$$

Consideramos as duas sequências $t_i = \frac{1}{2i\pi}$ e $s_i = \frac{1}{\pi/2+2i\pi}$, obtemos

$$\sin\left(\frac{1}{t_i}\right) = \sin(2i\pi) = 0, \quad \sin\left(\frac{1}{s_i}\right) = \sin(\pi/2+2i\pi) = 1.$$

Deduzimos que

$$\lim_{i\to\infty} I(t_i) = \sin(1), \qquad \lim_{i\to\infty} I(s_i) = \sin(1) - 1$$

Concluimos que $I(t)$ não tem limite em 0 e o intergral não converge.

Nota 7.2 O princípio do método é considerar o integral no intervalo $[t, 1]$ depois passar ao limite. Para avaliar o integral sobre $[t, 1]$, podemos usar qualquer técnica que usamos anteriormente como a mudança de variável ou a integração por partes.

7.2 Caso $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$

Definição 7.2 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, +\infty[$, temos as três possibilidades seguintes.*

- *A função é integrável no intervalo (ou admite um integral impróprio no intervalo) se existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que*
$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx = \ell.$$
- *O integral é divergente para $\pm\infty$ se*
$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx = \pm\infty.$$
- *Caso contrário, dizemos que o integral não converge no intervalo $[a, +\infty[$*

Nota 7.3 Temos a mesma definição para o intervalo $]-\infty, b]$ onde consideramos o limite
$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

Vamos apresentar três exemplos representativos assim como a técnica para determinar a convergência de um integral impróprio

Exemplo 7.4 (convergência) Determinar, se existir, o integral
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx.$$

A função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é contínua no intervalo $[1, +\infty[$ então o problema está em $+\infty$. Para $t > 1$, o integral
$$I(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}dx$$
faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[1, t]$. Temos assim
$$I(t) = \int_1^t x^{-2}dx = \Big[-x^{-1}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

Como $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t} = 0$, deduzimos que $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t) = 1$ e concluimos que o integral converge para um seja
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

Exemplo 7.5 (Divergência) Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx.$$

A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua no intervalo $[1, +\infty[$ então o problema está em $+\infty$. Para $t > 1$, o integral

$$I(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[1, t]$. Temos assim

$$I(t) = \int_1^t x^{-1} dx = \Big[\ln(t)\Big]_1^t = \ln(t).$$

Como $\lim_{t \to +\infty} \ln(t) = +\infty$, deduzimos que $\lim_{t \to +\infty} I(t) = +\infty$ e concluimos que o integral é divergente.

Exemplo 7.6 (Não convergência) Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(x) dx.$$

A função $f(x) = \cos(x)$ é contínua no intervalo $[0, +\infty[$ então o problema está em $+\infty$. Para $t > 0$, o integral

$$I(t) = \int_0^t \cos(x) dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[1, t]$. Temos assim

$$I(t) = \Big[\sin(t)\Big]_0^t = \sin(t).$$

Consideramos as duas sequências $t_i = 2i\pi$ e $s_i = \pi/2 + 2i\pi$, obtemos

$$\sin(t_i) = \sin(2i\pi) = 0, \quad \sin(s_i) = \sin(\pi/2 + 2i\pi) = 1.$$

Deduzimos que

$$\lim_{i \to \infty} I(t_i) = 0, \qquad \lim_{i \to \infty} I(s_i) = 1$$

Concluimos que $I(t)$ não tem limite em 0 e o intergral não converge.

7.3 Outros casos

Seja I um intervalo qualquer e $c \in I$, notamos por $I^- = I \cap] - \infty, c]$, $I^+ = I \cap [c, +\infty[$.

Definição 7.3 *Seja f uma função definida contínua no intervalo I. A função é integrável em I se f é integravel em I^- e em I^+ e escrevemos*

$$\int_I f(x)dx = \int_{I^-} f(x)dx + \int_{I^+} f(x)dx.$$

Nota 7.4 A definição é independente da escolha de c porque temos o teorema de Chasles (aditividade).

Nota 7.5 Se apenas um dos dois integrais não converge (ou diverge) não podemos concluir, não termos fenómenos de compensação.

Exemplo 7.7 Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

A função é simétrica (par) então devemos só de considerar o integral no intervalo $[0, +\infty[$. Seja $t > 0$, uma primitiva da função $\frac{1}{1+x^2}$ é $\arctan(x)$ e deduzimos

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \Big[\arctan(t)\Big]_0^t = \arctan(t)$$

Como $\lim_{t \to +\infty} \arctan(t) = \pi/2$, concluimos que o integral é convergente e temos

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

Exemplo 7.8 Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2-1} dx.$$

A função é contínua no intervalo $]-1, 1[$. Usamos uma decomposição em elementos simples e encontramos

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.$$

Seja $t \in]0, 1[$ e consideramos o integral

$$I(t) = \int_0^t \frac{1}{x^2-1} = \int_0^t \left(\frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}\right) dx = \Big[1/2\ln(1-x) + 1/2\ln(1+x)\Big]_0^t = 1/2\ln(1-t^2).$$

Como $\lim_{t \to 1^-} \ln(1-t^2) = -\infty$ concluimos que o intergral é divergente é então não podemos calcular o integral no intervalo $]-1, 1[$.

7.4 Exercícios

Exercício 1 Determinar, se existir, o integral

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2t} dt, \quad I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t} dt, \quad I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt, \quad I = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[5]{t-1}} dt.$
2. $I = \displaystyle\int_0^5 \frac{t^2-1}{2t} dt, \quad I = \int_1^e \frac{1}{t\ln(t)} dt, \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx.$
3. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1-e^t} dt, \quad I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx, \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2} dx.$

Exercício 2 Determinar, se existir, o integral

1. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}\,dt$, $\quad I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\,dt$, $\quad I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt$, $\quad I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{t/2}}{e^t+1}\,dt$.
2. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$ por partes, $\quad I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+3t^2}\,dt$, $\quad I = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{7t}{1-4t^2}\,dt$.
3. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\,dt$ e $u = \sqrt{t}$, $\quad I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^{5/2}}\,dt$ e $t = \sinh(x)$.

Solução 1

1. *i)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2t}\,dt = +\infty$, $\quad$ *ii)* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t}\,dt = +\infty$, $\quad$ *iii)* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt = 2\sqrt{2}$,
iv) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[5]{t-1}}\,dt = \frac{5\sqrt[5]{2}}{4}$.

2. *i)* $\displaystyle\int_0^5 \frac{t^2-1}{2t}\,dt = +\infty$, $\quad$ *ii)* $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t\ln(t)}\,dt = +\infty$, $\quad$ *iii)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = +\infty$.

3. *i)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1-e^t}\,dt = +\infty$, $\quad$ *ii)* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx = \sqrt[4]{8}$, $\quad$ *iii)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2}\,dx = +\infty$.

Solução 2

1. *i)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}\,dt = +\infty$, $\quad$ *ii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = 1$, $\quad$ *iii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt = +\infty$,
iv) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{t/2}}{e^t+1}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

2. *i)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt = 1$, $\quad$ *ii)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+3t^2}\,dt = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$, $\quad$ *iii)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{7t}{1-4t^2}\,dt = +\infty$.

3. *i)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\,dt = +\infty$, $\quad$ *ii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^{5/2}}\,dt = \frac{1}{3}$.