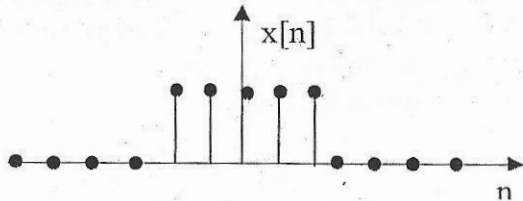


Processamento Digital de Sinal

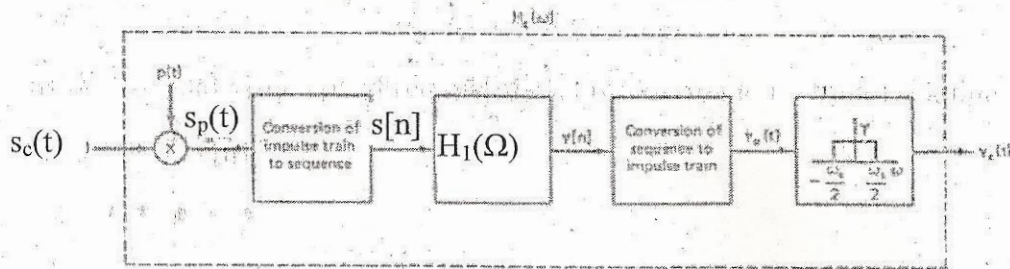
Miniteste1 2012/2013

1. Considere o sinal $y[n]=x[n-5]$ onde $x[n]$ está representado na figura seguinte:



- Represente graficamente $y[n]$ bem como o módulo e a fase de $Y(\Omega)$. Justifique.
- Diga o que entende por DFT e explicita as motivações do seu aparecimento.
- Represente a DFT de 9 pontos do sinal $y[n]$. Justifique.
- Diga o que entende por FFT e represente a FFT de mais de 9 pontos do sinal $y[n]$. Justifique.

2. Considere o sistema de processamento discreto de sinais contínuos mostrado na figura seguinte com o qual se pretende recuperar o sinal $x(t)$ que se apresenta à entrada do sistema degradado da forma $s_c(t) = x(t - T_0) + x(t + T_0)$;



- Considere $x(t) = 1 + 2\delta(t) + \cos(\omega_1 t)$. O sinal $s_c(t)$ pode ser, em sua opinião, directamente aplicado à entrada do sistema? Se a sua resposta for negativa represente em termos de diagrama de blocos um sistema que permita a adaptação de $s_c(t)$ ao sistema de processamento digital de sinais contínuos.
- Determine o período de amostragem máximo para o qual $x(t)$ ou uma sua versão modificada possa ser completamente recuperado à saída do sistema. Justifique.
- Considere o sinal $s_c(t)$ amostrado à frequência de Nyquist e determine o atraso do eco para o qual $s[n] = x[n-1] + x[n+1]$.
- Represente os espectros dos sinais $s_c(t)$, $p(t)$, $s_p(t)$ e $s[n]$. Justifique convenientemente os cálculos que efectuar e comente adequadamente as suas representações gráficas.
- Projecte o filtro $H_1(\Omega)$ que permita recuperar a versão mais aproximada possível de $x(t)$ a menos da fase. Pretende-se que $y_c(t) = x(t - 4T_0)$.

f) Imagine que na situação da alínea c) fazia uma decimação por um factor de 2 em $s[n]$. Na sua opinião perdia alguma informação do sinal. Se sim como procederia para minimizar ou anular essa perda. Justifique convenientemente a sua resposta.

3. Considere o sistema LTI digital caracterizado pela seguinte equação de diferenças $y[n] = 0.25y[n-1] + x[n] + 0.5x[n-1]$. Utilize a Transformada-Z e:

a) Determine a resposta impulsional do sistema.

b) Determine a resposta do sistema à entrada

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

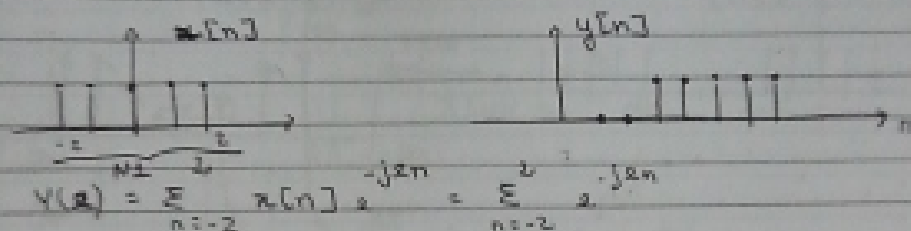
c) Determine a entrada do sistema cuja saída é

$$y[n] = n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Processamento Digital de Sinal
 Mini-projeto 1 (2013)

① Pelas propriedades da DFT

$$g[n] = x[n-5] \xrightarrow{\text{DFT}} Y(\omega) = X(\omega) \cdot e^{-j5\omega}$$



Para transformar numa progressão geométrica, n deve ser igual a zero.

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \frac{1-x^N}{1-x}$$

* continuando o raciocínio:

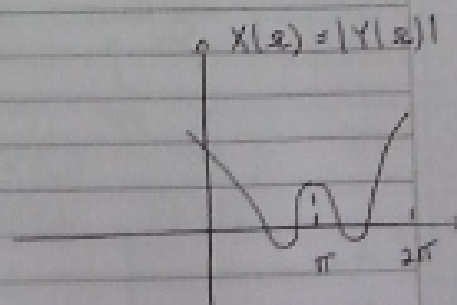
1) Fazer mudança de variável: $n \rightarrow m = n+2$

2) 0

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\omega(m-2)} = e^{j2\omega} \sum_{m=0}^{N-1} (e^{-j\omega})^m = e^{j2\omega} \frac{1 - (e^{-j\omega})^N}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{j2\omega} (1 - e^{-jN\omega})}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{j2\omega} (e^{jN\omega/2} - e^{-jN\omega/2})}{e^{j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}$$

$$= \frac{2j \sin(N\omega/2)}{2j \sin(\omega/2)}$$

$$X(\omega) = \frac{\sin((N/2)\omega)}{\sin(\omega/2)}$$



②

$$a) \quad x(t) = 1 + 2\delta(t) + \cos(\omega_1 t)$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) = ?$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$1 = \frac{1}{2\pi} K \Rightarrow K = 2\pi$$

Transformadas

$$x(t) = 1 \longleftrightarrow X(\omega) = 2\pi \delta(\omega)$$

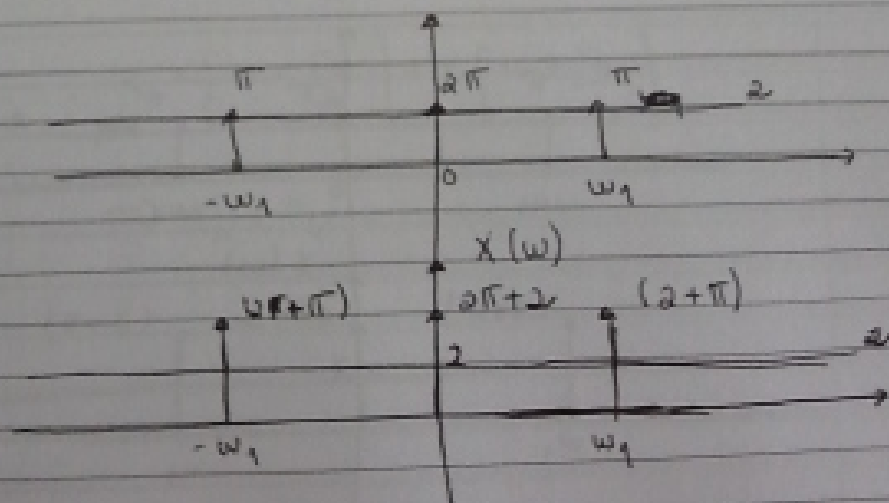
$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$A \cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$x(t) = 1 + 2\delta(t) + \cos(\omega_1 t)$$

Pela propriedade da linearidade,

$$X(\omega) = 2\pi \delta(\omega) + 2 + \pi (\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1))$$



② a) $x(t) = 1 + 2\delta(t) + \cos(\omega_1 t)$

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) = ?$
 $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$1 = \frac{1}{2\pi} K \Rightarrow K = 2\pi$

Transformadas

$x(t) = 1 \longleftrightarrow X(\omega) = 2\pi \delta(\omega)$

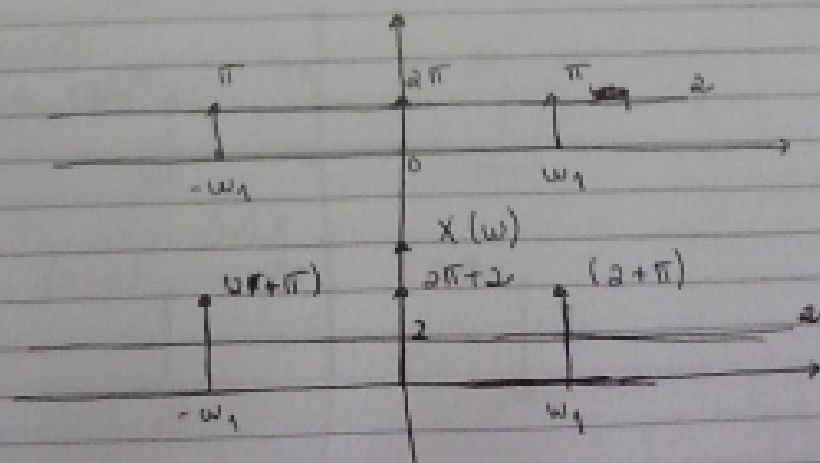
$\delta(t) \longleftrightarrow 1$

$A \cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

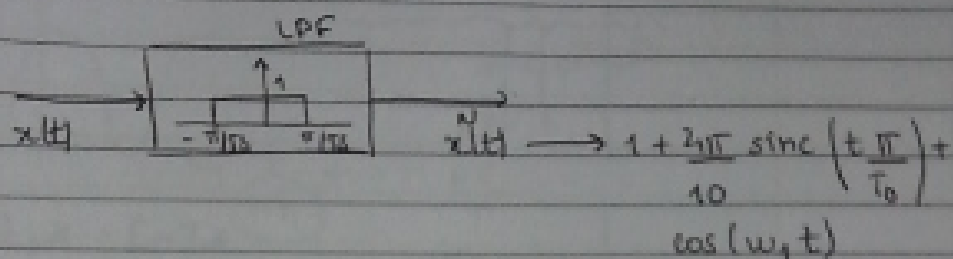
$x(t) = 1 + 2\delta(t) + \cos(\omega_1 t)$

Pela propriedade da linearidade,

$X(\omega) = 2\pi \delta(\omega) + 2 + \pi [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]$

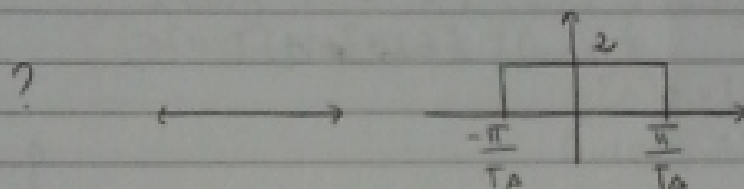


$X(\omega)$ não é de banda limitada, logo não pode ser directamente amostrado



$$\frac{\pi}{T_A} > \omega_1$$

Continua a haver erro mas o menor possível. Para corrigir o erro deveria ser utilizado um ADC



Teorema de Nyquist $\omega_m > 2\omega_m$

$$\frac{\pi}{T_A} > \omega_m \rightarrow \boxed{T_A < \frac{\pi}{\omega_m}}$$

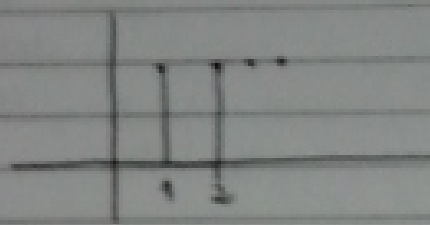
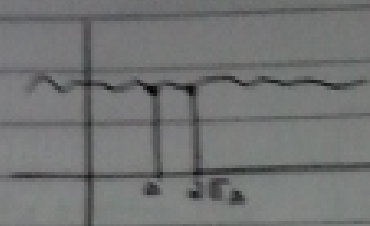
c) $s_c(t) = x(t - T_0) + x(t + T_0)$

$$p[n] = p_c(nT) = x(nT_A - T_0) + x(nT_A + T_0)$$

$$p[n] = x\left[\frac{nT_A - T_0}{T_A}\right] + x\left[\frac{nT_A + T_0}{T_A}\right]$$

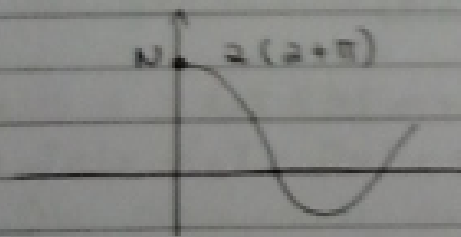
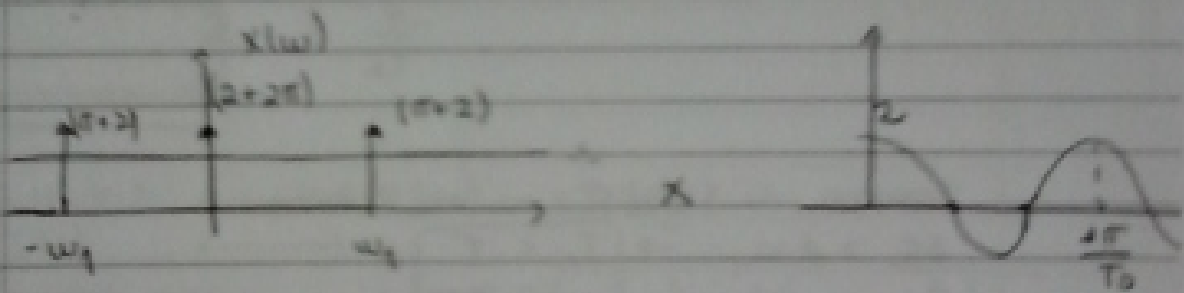
$$= x\left[n - \frac{T_0}{T_A}\right] + x\left[n + \frac{T_0}{T_A}\right]$$

$$\Rightarrow T_A = T_0$$

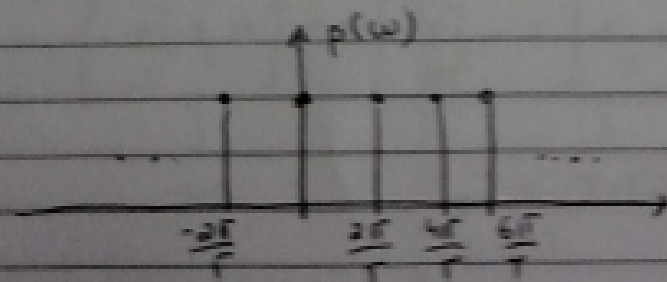


$$x[n] = x_c(nT_0)$$

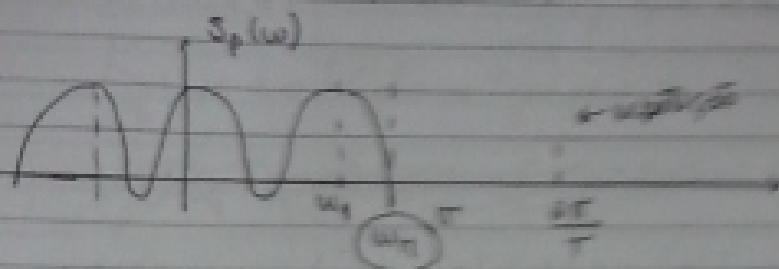
d) $x_c(t) = x(t - T_0) + x(t + T_0)$
 $X(\omega) = x(\omega) e^{-j\omega T_0} + x(\omega) e^{j\omega T_0}$
 $= x(\omega) [2 \cos(\omega T_0)]$



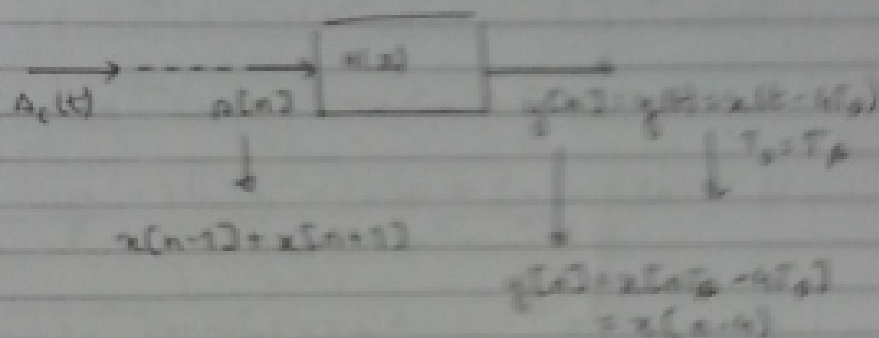
$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T_0})$$



$$S_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_c(\omega - k \frac{2\pi}{T})$$

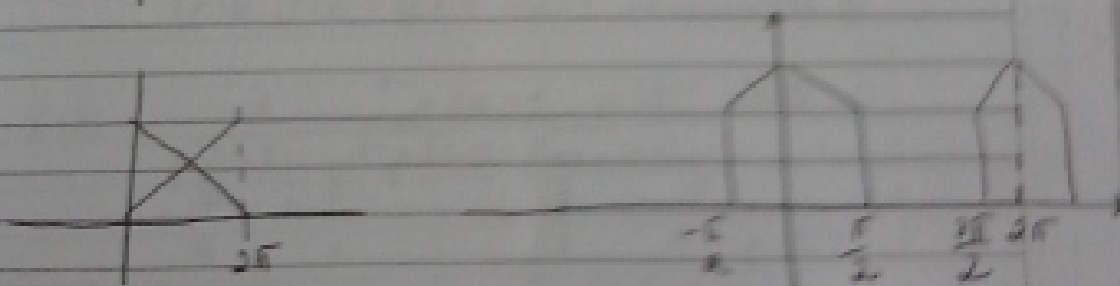
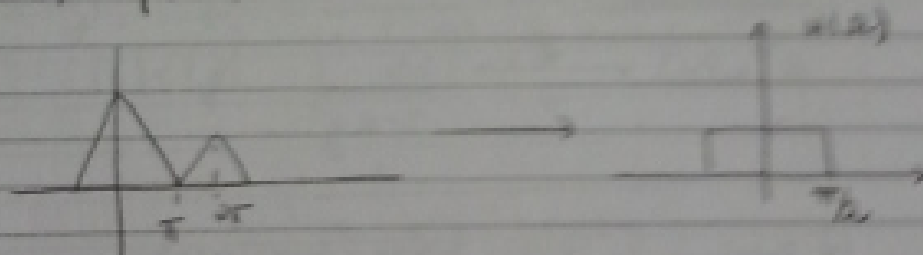


2)



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$S(z) = S_p(\omega T)$$



$$a) \quad y[n] = 0,25 y[n-1] + x[n] + 0,5 x[n-1]$$

$$Y(z) = 0,25 Y(z) z^{-1} + X(z) + 0,5 X(z) z^{-1}$$

$$Y(z) [1 - 0,25 z^{-1}] = X(z) [1 + 0,5 z^{-1}]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 0,5 z^{-1}}{1 - 0,25 z^{-1}} = \left(\frac{1}{1 - 0,25 z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0,25 z^{-1}} \right) \cdot 0,5 z^{-1}$$

$$h[n] = (0,25)^n u[n] + 0,5 \times (0,25)^{n-1} u[n-1]$$

$$b) \quad y[n] = x[n] * h[n] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k u[k] x[(0,25)^{n-k} u[n-k] +$$

$$0,5 \times (0,25)^{n-k-1} u[n-k-1]]$$

Transformada

$$a^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$b) \text{ Determinar } Y(z): Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$Y(z) = \frac{1 + 0,5 z^{-1}}{1 - 0,25 z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{A}{1 - 0,25 z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$A = \frac{1 + 0,5 z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \bigg|_{z^{-1}=2} = \frac{8}{-1} = -8$$

$$B = \frac{1 + 0,5z^{-1}}{1 - 0,25z^{-1}} \bigg|_{z^{-1}=2} = \frac{2}{1/2} = 4$$

c) ~~$y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$~~

$$y[n] = -3(0,25)^n u[n] + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$y[n] = 0\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \\ &= \frac{\frac{1}{4}z^{-1} + \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{Y(z)}{x(z)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} \times \frac{(1 - 0,25z^{-1})}{1 + 0,5z^{-1}} = \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 + 0,5z^{-1}\right)} \end{aligned}$$

$$X(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 + 0,5z^{-1}} \quad \text{eq (1)}$$

$$A = \frac{1}{1 + 0,5z^{-1}} \bigg|_{z^{-1}=4} = \frac{1}{3}$$

$$B = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \bigg|_{z^{-1} = -2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (1) \quad x[n] = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{2}{3} (-0,5)^n u[n]$$

Transformada de z

$$n a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

« Pode sair matheob (falou com tanta Rocha)

»

Pedia última aula matheob

Poderamos levar formulário!