

Processamento Digital de Sinal

Exame de Recurso 2010/2011 MIECOM

1. Considere que dispõe de uma rede FDM digital para comunicação de voz onde o canal de comunicação é completamente preenchido com 4 canais de voz, sem bandas de guarda. Pretende-se implementar um filtro digital que permita extrair o canal de voz que foi modulado à frequência mais elevada. Note que a recuperação do canal de voz pode ser efectuada seguindo-se ao filtro o demodulador digital.

- a) Os dois tipos de filtragem digital que conhece são classificados de acordo com a existência ou não de recursividade no filtro digital. Neste contexto qual lhe parece o tipo de filtro mais apropriado para a aplicação em causa. Justifique. Quais as vantagens e desvantagens de cada um dos tipos de filtros digitais em questão.
- b) O projecto de filtros FIR pelo chamado método das janelas requer um procedimento do tipo tentativa e erro para controlo das características do filtro resultante. Justifique esta afirmação.
- c) Pretende-se que determine a resposta impulsional de um filtro capaz de efectuar o pretendido admitindo que a frequência de corte é a frequência limite do canal e que se pretende uma banda de transição pelo menos 10 vezes inferior à largura de banda de cada canal de voz. Suponha ainda que para redução eficiente do "cross-talk" se necessita de uma atenuação mínima de 60 dB na banda de rejeição, e que a qualidade da voz não fica comprometida para um "ripple" na banda passante de -0.05 dB.

TABLE 7.2 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Window Type	Peak Sidelobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Mainlobe	Peak Approximation Error $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

- d) O filtro que projectou na alínea anterior é o filtro de ordem mais baixa que permite efectuar o pretendido? Justifique. Qual a ordem deste filtro? Quais as vantagens e desvantagens do filtro que projectou relativamente ao filtro de ordem mais baixa possível? Justifique.

2. Considere 2 processos estocásticos estacionários e discretos $u[n]$ e $v[n]$. Considere ainda o processo $x[n]=u[n]+v[n]$ e determine justificando as suas respostas:
- A média do processo $x[n]$.
 - A variância do processo $x[n]$, considerando que:
 - Os processos u e v são independentes
 - Os processos u e v são correlados.
 - A sequência de autocorrelação do processo $x[n]$ para ambas as situações da alínea anterior.
 - A densidade espectral de potência do processo $x[n]$ para ambas as situações das 2 alíneas anteriores.
 - Se os processos u e v forem processos ruído branco de média não nula e não correlados, obtenha uma expressão para a densidade espectral de potência do processo $x[n]$ como função das médias e variâncias dos processos u e v .
3. Suponha o caso da detecção da direcção de fontes radiantes ou puras superfícies reflectoras através de um agregado linear e uniforme de sensores.
- Justifique a seguinte afirmação: “A DSFT não é um método de elevada resolução espectral pelo que não pode ser usada para este fim”
 - Um dos métodos mais usado na detecção da direcção de chegada (DoA) é o método designado por Multiple Signal Classification (MUSIC). Descreva os fundamentos do método estabelecendo a equação que o caracteriza.
 - Suponha um sistema de comunicações móveis onde o sinal chega à antena receptora degradado por 1 eco. Suponha ainda que o ângulo de chegada do sinal directo e da reflexão são respectivamente $\pi/4$ e $\pi/3$ relativamente à perpendicular ao eixo do agregado. Considere um agregado uniforme com 4 elementos distanciados de $\lambda/4$. Desenhe o diagrama de blocos e escreva neste caso um conjunto de equações lineares que lhe permitam determinar as amplitudes dos sinais provenientes de cada elemento do agregado necessárias para garantir a aniquilação da réplica. Justifique os cálculos que efectuar.

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0 \left[\beta \left(1 - \left[\frac{n-\alpha}{\alpha} \right]^2 \right)^{1/2} \right]}{I_0(\beta)}; & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7); & A > 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21); & 21 \leq A \leq 50 \\ 0.0; & A < 21 \end{cases}$$

$$M = \frac{A-8}{2.285\Delta\Omega}$$

$$M = \frac{-10 \log(\delta_1 \delta_2) - 13}{2.324\Delta\Omega}$$

2. Considere um sinal discreto $x[n]$ obtido por amostragem de uma realização de um processo de ruído branco estacionário de média nula e variância σ_x^2 .

a) Determine as médias temporais e de conjunto do processo estocástico.

Estacionariedade \rightarrow sinal em regime permanente.

Contém características invariantes no tempo.

média temporal:

$$m_x = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N x[n]$$

média do conjunto

$$\langle X \rangle = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N X_n$$

b) Considere a DFT de $x[n]$. Determine a média e a sequência de autocorrelação.

$$x[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

médias

$$E\{X(k)\} = E\left\{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} E\{x[n]\} e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = 0$$

sequência de autocorrelação:

$$\begin{aligned} E\{X(k) X^*(k)\} &= E\left\{\sum_{n_1=0}^{N-1} x[n_1] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn_1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x^*[n_2] e^{+j \frac{2\pi}{N} kn_2}\right\} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} E\{x[n_1] x^*[n_2]\} e^{-j \frac{2\pi}{N} k(n_1 - n_2)} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \sigma_x^2 \delta[n_2 - n_1] e^{-j \frac{2\pi}{N} k(n_1 - n_2)} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \sigma_x^2 \delta[n_2 - n_1] = \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_x^2 \end{aligned}$$

$$R_{xx}[m] = \mathcal{F}^{-1}\{P_{xx}(k)\} =$$

$$= \sigma_x^2 \delta[m_2 - m_1]$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \sigma_x^2 \delta[n_2 - n_1] e^{-j \frac{2\pi}{N} k(n_1 - n_2)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_x^2$$

c) Determine a correlação cruzada entre os valores da DFT.

$$E\{X(K)X^*(N)\} = E\left\{\sum_{m_1=0}^{N-1} X[m_1] e^{j\frac{2\pi}{N} m_1 K} \sum_{m_2=0}^{N-1} X^*[m_2] e^{-j\frac{2\pi}{N} m_2 N}\right\} =$$

$$= E\left\{\sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} \underbrace{X[m_1] X^*[m_2]}_{\phi_{xx}[m_2-m_1]} e^{-j\frac{2\pi}{N} (m_2 K - m_1 N)}\right\} =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} \phi_{xx}[m_2-m_1] e^{-j\frac{2\pi}{N} (m_2 K - m_1 N)} =$$

$m_2 = m_1$ é que a função tem
Valores $\neq 0$ definidos.

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \phi_{xx}[m] e^{-j\frac{2\pi}{N} m K} =$$

$$= N \cdot \phi_{xx}[K-N]$$

2.d) Determine uma estimativa do espectro de potência deste Processo Estocástico. Determine o valor esperado desta estimativa.

Para a estimativa espectral de potência podemos utilizar os métodos clássicos.

Como tal temos de estimar a sequência de auto-correlação:

$$c_{xx}[m] = \frac{1}{N-|m|-1} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n] x^*[n+m]$$

↓ DFT

$$I_N(K) = \sum_{m=0}^{N-1} c_{xx}[m] e^{-jK\frac{2\pi}{N} Km}$$

$$I_N(K) \approx G_x^2$$

$$c_{xx}[m] \approx \phi_{xx}[m]$$

2.e) Determine a polarização e a variância do estimador do espectro de potência na linha anterior.

Polarização \rightarrow

$$B = \phi_{xx}[m] - E\{c_{xx}[m]\} =$$

$$= \phi_{xx}[m] - \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-|m|-1} E\{x[n] x^*[n+m]\} =$$

$$= \phi_{xx}[m] - \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-|m|-1} \phi_{xx}[m] =$$

$$= \phi_{xx}[m] \left[1 - \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-|m|-1} 1\right] =$$

$$= \phi_{xx}[m] \left[1 - \frac{N-|m|}{N}\right]$$

c) Determine a correlação cruzada entre valores de DFT.

$$\begin{aligned}
 E\{X(k)X^*(n)\} &= E\left\{\sum_{m_1=0}^{N-1} X[m_1] e^{-j\frac{2\pi}{N} m_1 k} \sum_{m_2=0}^{N-1} X^*[m_2] e^{+j\frac{2\pi}{N} m_2 n}\right\} = \\
 &= E\left\{\sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} \underbrace{X[m_1] X^*[m_2]}_{\substack{\rho_{XX}[m_2-m_1] = \\ = \sigma_X^2 \delta[m_2-m_1]}} e^{-j\frac{2\pi}{N} (m_1 k - m_2 n)}\right\} = \\
 &= \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} \sigma_X^2 \delta[m_2-m_1] e^{-j\frac{2\pi}{N} (m_1 k - m_2 n)} = \\
 &\quad m_2 = m_1 \text{ e } \text{que a função tem} \\
 &\quad \text{valores não definidos.} \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \sigma_X^2 e^{-j\frac{2\pi}{N} m(k-n)} = \\
 &= N \cdot \sigma_X^2 \delta(k-n)
 \end{aligned}$$

2.d) Determine uma estimativa do espectro de potência deste Processo Estocástico. Determine o valor esperado desta estimativa.

Para a estimativa espectral de potência podemos utilizar os métodos clássicos

Como tal temos de estimar a sequência de auto-correlação

$$c_{XX}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} X[n] X^*[n+m]$$

$$I_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_{XX}[n] e^{-j k \frac{2\pi}{N} n m}$$

$$I_N(k) \approx \sigma_X^2$$

$$c_{XX}[m] \approx \phi_{XX}[m]$$

2.e) Determine a polarização e a variância do estimador do espectro de potência na linha anterior.

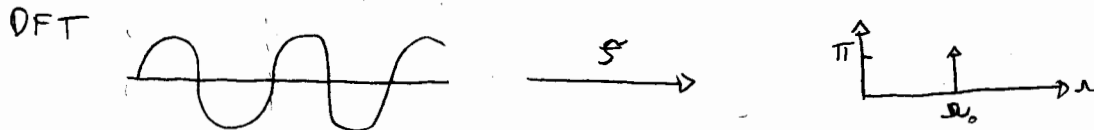
$$\begin{aligned}
 \text{Polarização} \rightarrow B &= \phi_{XX}[m] - E\{c_{XX}[m]\} = \\
 &= \phi_{XX}[m] - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E\{X[n] X^*[n+m]\} = \\
 &= \phi_{XX}[m] - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \phi_{XX}[m] = \\
 &= \phi_{XX}[m] \left[1 - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} 1\right] = \\
 &= \phi_{XX}[m] \left[1 - \frac{N-|m|}{N}\right]
 \end{aligned}$$

3. Suponha o caso da detecção de fontes radiantes ou pontos superficiais refletoras através de um agregado linear e uniforme de sensores.

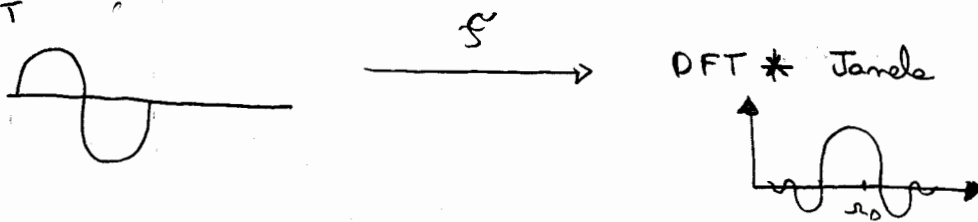
a) Explique o que significa e quais as limitações da DSFT p/ executar o pretendido. Justifique eventualmente por comparação com os métodos baseados em séries temporais

DSFT \rightarrow Transformada de Fourier discreta espacial

serie espacial x_k \xrightarrow{f} $X(r) = \sum_{n=0}^{N-1} x_k[n] e^{-j r n}$



DSFT
é uma
pequena
amostra da
DFT



Existem perdas de informação
No caso de pouca resolução pode acontecer o fenômeno de "doakage" (Sobreposição do ruído)

b) Explique, no âmbito do problema em causa, como é feita a amostragem do sinal vindo do agregado e calcule a correlação espacial dos dados em função da matriz das amplitudes.

A amostragem vindo do agregado é feita pelos sensores, sendo que cada sensor está em convergência pelo receção de um sinal por um determinado ângulo.

$l \rightarrow$ sensores $N-1$

$$Y(t) = \sum_{l=0}^{N-1} A_l + w_l$$

- c) Um dos métodos mais usado na detecção de direção de chegada (DOA) é o método designado por Multiple signal Classification (MUSIC).
Descreva os fundamentos do método estabelecendo a ~~equação~~ equação que o caracteriza.

$$P_{\text{Music}} = \frac{1}{\sum_{i=M+1}^N |e^+(n) v_i|^2} = \frac{1}{\sum_{i=M+1}^N |e^+(n) v_i|^2}$$