Exame de Complementos de Análise Matemática

Duração: 2h

Exame de Recurso: PARTE I e PARTE II (exceto as questões 4.(c) e 8.). Peso na nota final: 100%.

Recurso 3ºteste: PARTE II (exceto questão 5). Peso na nota final: 33%.

PARTE I

1. Relativamente a cada uma das proposições seguintes indique, **justificando**, se é verdadeira ou falsa:

   (a) A equação diferencial $(x^2+y)dx - xdy = 0$ é linear se x for considerada a variável independente.

   (b) A função $\mu(x,y) = e^{xy}$ é um fator integrante da equação diferencial $(3xe^{-xy} + y)\,dx + (x + 4e^{-xy}\cos y)$.

2. (a) Mostre que a equação diferencial de primeira ordem

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{2}{3}e^{-\frac{y}{x}}$$

   é homógenea.

   (b) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{2}{3}e^{-\frac{y}{x}}, \quad y(1) = 0.$$

3. Mostre que e^x e e^{-x} são soluções linearmente independentes da equação diferencial

   $$y'' - y = 0.$$

PARTE II

4. Relativamente a cada uma das proposições seguintes indique, **justificando**, se é verdadeira ou falsa:

   (a) Da aplicação do Teorema de Convolução resulta

   $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)(s-5)}\right\} = \int_0^t \sin(2x)e^{5(t-x)}dx.$$

   (b) A série de Fourier em senos da função $f(x) = 4$, no intervalo $0 < x < 2$, é dada por

   $$\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right).$$

(c) As funções $f(x,y) = -e^{-x-6y}$ e $g(x,y) = \cos\left(\frac{x}{2} + 3y\right)$ são soluções da equação diferencial parcial

$$3\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

5. Recorrendo ao método dos coeficientes indeterminados, determine a solução geral da equação diferencial

$$y'' - y = 2e^{-x} - x,$$

sabendo que as funções e^x, e^{-x} são soluções da equação homogénea associada.

6. (a) Determine a transformada de Laplace da função $h(t) = \begin{cases} 0 & se \;\; 0 < t < 2 \\ t & se \;\; 2 < t < 4 \\ 0 & se \;\; \quad t > 4 \end{cases}$.

   (b) Determine, aplicando a transformada de Laplace, a solução do PVI

$$y'' + y = u_1(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7. (a) Para $\lambda > 0$, determine os valores próprios e as funções próprias do PVF:
$$y'' + 4\lambda y = 0, \;\; 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

   (b) Determine a solução do seguinte PVF, $u(x,t)$, usando o método de separação de variáveis:

$$\begin{cases} u_t + xu_x = 2u, & x,t > 0 \\ u(x,0) = x - 3x^4, & x > 0. \end{cases}$$

8. Determine, aplicando a transformada de Laplace, a solução do PVI

$$\begin{cases} y' + x &= 1 \\ x' + y &= 2e^t \end{cases} \qquad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$$

onde t é a variável independente.

Questão	1a)	1b)	2a)	2b)	3.	4a)	4b)	4c)	5.	6a)	6b)	7a)	7b)	8.
Exame	1	1	1	3	1	1	1	–	2	1.5	2.5	2.5	2.5	–
Parte II	–	–	–	–	–	1.5	1.5	1.5	-	2.5	3.5	3	3	3.5