UNIVERSIDADE DO MINHO MIEMEC
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

Análise Matemática B

Folha 3

Funções de várias variáveis - domínios e limites

1. Determine o domínio das seguintes funções:

   a) $f(x,y) = 3x - y^3$
   b) $f(x,y) = \sqrt{2-x} - e^{x/y}$
   c) $f(x,y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$

2. Para cada função f definida, represente o gráfico de f:

   a) $f(x,y) = -\sqrt{36 - x^2 - y^2}$;
   b) $f(x,y) = \sin y$;
   c) $f(x,y) = 2 - x$;
   d) $f(x,y) = a, \quad a \in \mathbb{R}$.

3. Determine os seguintes limites, caso existam:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$;

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^3+y^3}$;

   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ com $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-3,2)} f(x,y)$ com $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y-2)}{(x+3)} & \text{se} \quad x \neq -3 \\ 0 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$

4. Use a definição de limite para provar que:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} (5x+3y) = 13$;

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$;

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

Continuidade de funções de várias variáveis

5. Estude a continuidade da função f no seu domínio.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{5x^2 - y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+1} & \text{se} \quad x \neq -1 \\ 0 & \text{se} \quad x = -1 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$ em $(0,0)$.

6. Seja $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ com $(x,y) \neq (0,0)$. Como terá de ser definida $f(0,0)$ para que f seja contínua na origem?

Derivadas parciais

7. Utilize a definição de derivada parcial para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P)$, sabendo que:

a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $P = (2,-1)$,

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $P = (0,0)$

8. Determine as derivadas parciais de primeira e segunda ordem das seguintes funções:

a) $f(x,y) = x^3y + 7x^2 - 2y^3 - 1$ b) $g(x,y) = \dfrac{3x + y^2}{7x + y}$

c) $m(x,y) = \sin(1 + e^{xy})$

9. Tendo $z = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{3}}$, verifique se $3x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

10. Mostre que a função $v(x,t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$, $k \in \mathbf{R}$ satisfaz a equação de difusão $\dfrac{\partial v}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$