CAPÍTULO 3

INTEGRAIS DEFINIDOS

3.1 SOMAS DE DARBOUX

Seja $f(x)$ uma funçaõ definida no segmento de recta
$a \leq x \leq b$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.
Considere-se a partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$

Fig. Soma inferior de Darboux

DEFINIÇÃO: Dada uma funçaõ $f(x)$ definida em $[a,b]$ e P uma sua partição:

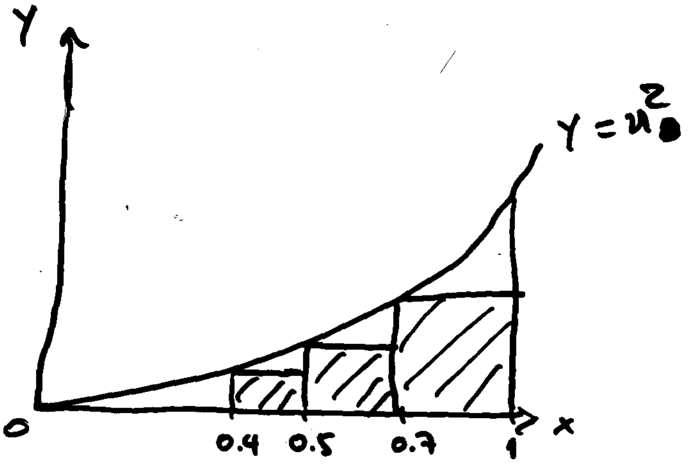
a) Soma inferior de f para a partição P

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f, P)(x_i - x_{i-1})$$

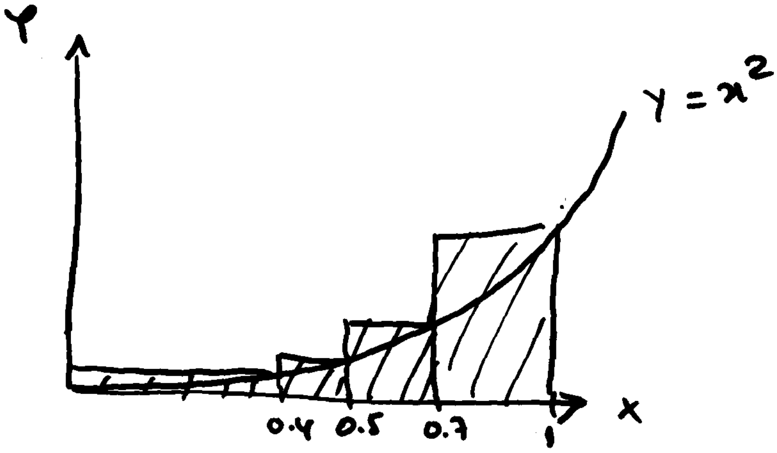
onde $m_i = \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i-1}]} f(x)$

b) Soma superior de f para P

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f, P)(x_i - x_{i-1}) \qquad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i-1}]} f(x)$$



$\underline{S}(f, P)$



$\overline{S}(f, P)$

<u>Ex:</u> $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, $P = \{0, 0.4, 0.5, 0.7, 1\}$

3.2 INTEGRAL DEFINIDO COMO LIMITE DA SOMA

Seja $f(x)$ uma função definida no segmento $a \leq x \leq b$ e $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Faz-se a divisão arbitrária deste segmento em n partes iguais

$$S = \lim S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \frac{b-a}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f(x$$

A partição considerada é tal que $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$

A S chamamos soma integral. Se não necessitamos de saber o valor exacto do integral definido $\frac{b-a}{n} \sum_{0}^{n-1} f(x_k)$ dá-nos um valor aproximado

Ex 1 $f(x) = 6 - 3x$

Calcule a soma integral de $f(x)$ no intervalo $[0,2]$, usando a definição de integral definida

$$S = \lim S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} \sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{2k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} \sum_{0}^{n-1} \left(6 - \frac{6k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} 6 - \frac{6}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \right\}$$

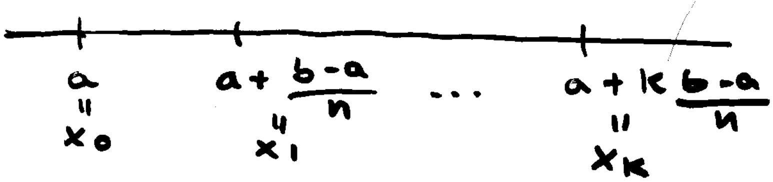
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} \left\{ 6n - \frac{6}{n} \times \frac{0 + n-1}{2} \times n \right\}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left\{ 12 - \frac{6(n-1)}{n} \right\}$$

$$= 6$$

OBS : $\sum_{k=p}^{n} a_k = \frac{a_p + a_n}{2} \times (n-p+1)$

Prog. aritmética.



EXEMPLO 2: $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,4]$

3.3 INTEGRAL DEFINIDO

O limite da soma S_n, quando o nº de divisões do intervalo tende para infinito e a maioria das diferenças $x_{k+1} - x_k$ tende para zero, chama-se de integral definido da função $f(x)$ entre os limites de integração $x = a$ e $x = b$, e escreve-se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_a^b f(x)\, dx$$

3.3.1 Cálculo do integral definido

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO:

Seja $F'(x) = f(x)$, ou seja, $F(x)$ é a primitiva de $f(x)$. Então:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

EX: a) $\int_{-2}^{2} x^2\, dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx$