Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

MIEInf
11 de novembro de 2016
[duração 2h]

Cálculo
Teste 1

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Nome Completo	Número

JUSTIFIQUE CUIDADOSAMENTE TODAS AS SUAS RESPOSTAS.

Grupo I
(15 valores)

1. (2 valores)

Mostre que: $\forall x \in [-1,1]$

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Seja $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$, $\forall x \in [-1,1]$. Pretende-se mostrar que $f(x)$ é constante $(=\pi/2)$!
Ora $f'(x) = (\operatorname{arcsen} x + \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0$, isto é f é uma função constante.
O valor dessa constante obtem-se, por exemplo, para $x=0$; $f(0)=\frac{\pi}{2}$

2. (2 valores)

Estude a continuidade da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1 \\ \frac{4x-1}{7-x}, & -1 \le x < 7 \\ 5x+2, & x \ge 7 \end{cases}$$

A função f é contínua em $]-\infty,-1[$ porque é polinomial, em $]-1,7[$ porque é racional mas $x \neq 7$ e em $]7,+\infty[$ porque neste intervalo, também é polinomial.

Para $x=-1$ tem-se $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} x^3 = -1$ e $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{4x-1}{7-x} = \frac{4(-1)-1}{7-(-1)} = -\frac{5}{8}$, isto é, não existe $\lim_{x\to -1} f(x)$. Por conseguinte, f é descontínua em -1

Para $x=7$ tem-se $\lim_{x\to +7^-} f(x) = \lim_{x\to +7} \frac{4x-1}{7-x}$ que não existe (é um infinitamente grande). Portanto, f é descontínua em 7.

$\therefore$ f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1,7\}$

3. (2 valores)

Defina, se existir, (ou mostre que não existe) uma reta tangente ao gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, no ponto de abcissa $x = 0$, sabendo que

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$$

A reta tangente é definida por $y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$f'_e(0) = f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} (x^2 + 1) = 1$

$f'_d(0) = f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} (x+1) = 1$

$\therefore f'(0) = 1$ $\therefore$ A reta tangente é definida por $y = x$

4. (2 valores)

Determine

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(2x)} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminação)}$$

regra de l'Hôpital!

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{[1 - \cos(2x)]'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2\operatorname{sen}(2x)} = \frac{0}{0}$

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{[e^x - e^{-x}]'}{[2\operatorname{sen}(2x)]'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{4\cos(2x)} = \frac{2}{4}$

$= 1/2$

5. (2 valores)

Seja f uma função, real de variável real, definida por $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

Nestas condições, defina o polinómio de Taylor de ordem 2 em torno do ponto $a = 1$ de f.

$P_{2,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$

Para $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ tem-se $f(1) = 1+2+3+4 = 10$

e $f'(x) = 2 + 6x + 12x^2$, isto é, $f'(1) = 2 + 6 + 12 = 20$

e $f''(x) = 6 + 24x$, isto é, $f''(1) = 6 + 24 = 30$

$\therefore P_{2,1}(x) = 10 + 20(x-1) + \frac{30}{2}(x-1)^2$

$= 15x^2 - 10x + 5$

6. (2 valores)

Defina a função f, real de domínio $\mathbb{R}$, sabendo que $f'(x) = x^2 + 1$ e $f(1) = 2$.

A família de funções primitivas de f é

$$F(x) = \int x^2+1 \, dx + C = \frac{x^3}{3} + x + C, \; C \in \mathbb{R}$$

Pretende-se que $f(1) = 2 \Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3} + x + C\right]_{x=1} = 2 \Rightarrow C = 2/3$

Assim, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} + x + 2/3$.

7. (3 valores)

Calcule as seguintes primitivas

(a) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 x \, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$ (c) $\displaystyle\int x \operatorname{sen}(2x) \, dx$.

a) Usando a regra de primitivas imediata $\int u' u^\alpha dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ vem

$$\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 x \, dx = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + C, \; C \in \mathbb{R} \quad \text{pois } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

b) Usando a regra de primitivas imediata

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \operatorname{arctg} u + C$$

Tomando $u(x) = e^x$ vem

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \operatorname{arctg}(e^x) + C, \; C \in \mathbb{R}$$

c) Usando a regra de primitivas por partes $\int f'g \, dx = fg - \int f g' dx$ tomando

$f'(x) = \operatorname{sen}(2x) \rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

$g(x) = x \rightarrow g'(x) = 1$

vem

$$\int x \operatorname{sen}(2x) dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x) dx + C$$

$$= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) \, dx + C, \; C \in \mathbb{R}$$

Grupo II

(5 valores)

Apresente um exemplo ou justifique porque não existe a entidade descrita.

1. Um conjunto A cujo conjunto de pontos de acumulação seja o conjunto vazio.

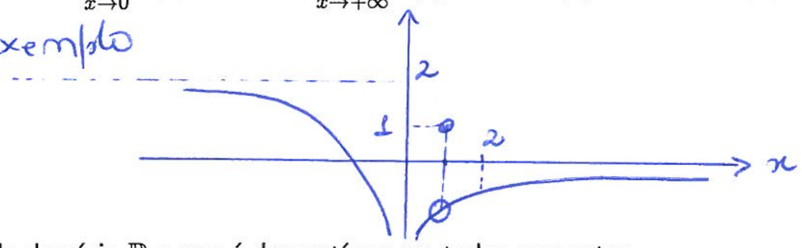
Por exemplo $A = \{1, \sqrt{3}, \pi\}$

Tem-se $A' = \emptyset$ pois existe pelo menos uma vizinhança de cada um dos elementos de A que não contém outro elemento de A

2. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (basta uma representação gráfica) tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad f(1) = 1, \quad \text{e} \quad f(2) = -1$$

Existe. Por exemplo



3. Uma função real de domínio $\mathbb{R}$ e que é descontínua em todos os pontos.

Por exemplo

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

pois $\forall a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe

4. Uma função f real de domínio $\mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \neq -1, \ f'(x) \text{ existe}, \qquad \text{e} \qquad f'(-1) \text{ não existe}.$$

Por exemplo $f(x) = |x+1|$ pois as derivadas laterais em $x = -1$ são diferentes.

5. Uma função real de domínio $\mathbb{R}$ que não é primitivável.

Por exemplo,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$$

uma vez que não existe nenhuma função cuja derivada seja g.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{sen} x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,$ $\qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$