Teoria dos Circuitos e Fundamentos de Electrónica

Análise de Circuitos Dinâmicos no Domínio do Tempo

Teresa Mendes de Almeida

TeresaMAlmeida@ist.utl.pt

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

DEEC

Área Científica de Electrónica

Março de 2008

Matéria

- **Sinais e medidas no domínio do tempo**
  - sinais AC e DC - notação
  - valor médio e valor eficaz
- **Tipos de circuitos eléctricos lineares**
  - Resistivo e Dinâmico
- **Condensador**
  - características
  - associação em série e em paralelo
- **Bobine**
  - características
  - associação em série e em paralelo
  - transformador
- **Exemplos de aplicação**
- **Resposta no tempo de circuitos RC e RL**
  - análise de transitórios em circuitos de 1ª ordem
  - solução da equação diferencial de 1ª ordem
  - método de cálculo do transitório
    - circuitos RC
    - circuitos RL
  - propriedades da solução geral da equação diferencial
  - função escalão
    - aplicação em circuitos
- **Exemplos de aplicação**

Notação para Sinais no Domínio do Tempo

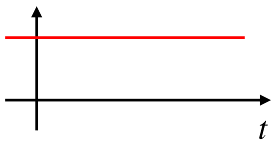
- DC – componente constante (não varia com o tempo)
  - grandeza – maiúscula
  - índice – maiúscula
- AC – componente variável no tempo
  - grandeza – minúscula
  - índice – minúscula
- DC+AC – componentes fixa e variável no tempo
  - grandeza – minúscula
  - índice – maiúscula

$$v_{IN}(t) = \underbrace{V_{IN}}_{DC} + \underbrace{v_{in}(t)}_{AC}$$

$$i_{OUT}(t) = \underbrace{I_{OUT}}_{DC} + \underbrace{i_{out}(t)}_{AC}$$

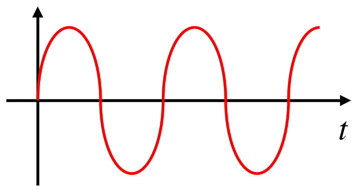
DC

$V_A = 10\,V$



AC

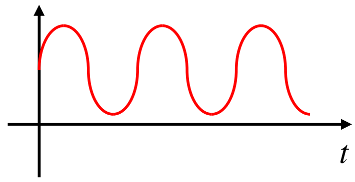
$v_b(t) = 2\sin(2\pi 500 t)\,V$



DC+AC

$v_C(t) = 2 + 1{,}5\sin(2\pi 800 t)\,V$

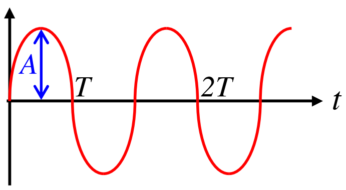
$V_C = 2\,V \quad v_c(t) = 1{,}5\sin(2\pi 800 t)\,V$



Medidas no Domínio do Tempo

- **Valor Médio e Valor Eficaz**

$$X_{Medio} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,dt \qquad X_{ef} = X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)\,dt}$$



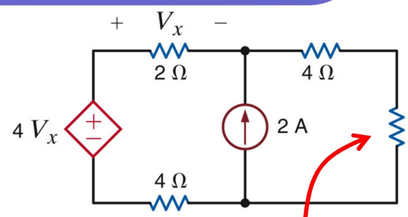
$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \qquad X_{med} = 0$$

$$\omega = 2\pi f \quad f = \frac{1}{T} \qquad X_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707A$$

- **Medição experimental com Voltímetro**
  - modo DC – valor médio
  - modo AC – valor eficaz
- **Visualização das formas de onda no osciloscópio**
  - modo AC – apenas se visualiza componente variável (AC) do sinal
  - modo DC – visualiza-se componente DC e AC do sinal
    - utilizar habitualmente modo DC

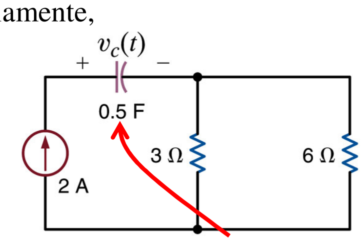
Tipos de Circuitos Eléctricos

- **Circuito Resistivo Linear**
  - constituído por elementos resistivos
    - componentes resistivos
      - resistência, fonte de tensão, fonte de corrente
    - relação *v(t)-i(t)* descrita por equação algébrica linear
  - descrito por conjunto de equações algébricas lineares
  - todos os circuitos que foram considerados e estudados em TCFE até agora são do tipo resistivo linear



$$\boxed{v_R(t) = R \times i_R(t)}$$

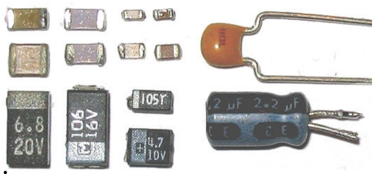
- **Circuito Dinâmico Linear**
  - contém elementos que podem <u>armazenar energia</u>
    - absorvem energia do circuito, armazenam-na temporariamente, mais tarde podem devolver essa energia ao circuito
  - componentes dinâmicos
    - <u>condensador</u> e <u>bobine</u>
  - relação *v(t)-i(t)* descrita por <u>equação diferencial</u>
  - descrito por um conjunto de equações diferenciais lineares
  - geralmente também contém componentes resistivos



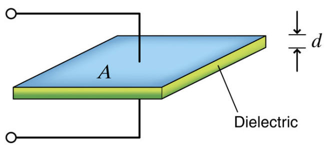
condensador

$$\boxed{i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}}$$

Condensador



- **Constituição**
  - 2 placas de material condutor (armaduras)
  - separadas por material isolante – o dieléctrico
    - p. ex.: ar, silício, papel impregnado, cerâmico, mica, ...
- **Capacidade (C)**
  - depende de parâmetros definidos no processo de fabrico
    - geometria e dieléctrico utilizado
  - medida experimentalmente
  - para um condensador plano pode calcular-se teoricamente
    - A – área de cada armadura
    - d – distância entre armaduras
    - ε – constante dieléctrica (permitividade) do dieléctrico
      ($\varepsilon = \varepsilon_r\,\varepsilon_0$ vazio: ε_0=8,85E-12 F/m ar(puro, seco): $\varepsilon_r \sim 1$)



$$C = \varepsilon\frac{A}{d}$$

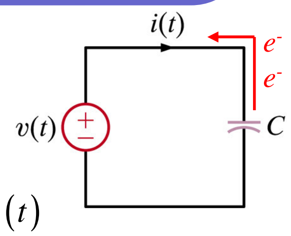
  - é a medida da quantidade de carga (Q) armazenada em cada armadura para uma dada diferença de potencial (V) entre as armaduras

$$C = \frac{Q}{V} \quad \Leftrightarrow \quad Q = CV \qquad [F] = \frac{[C]}{[V]} \qquad [Farad] = \frac{[Coulomb]}{[Volt]}$$

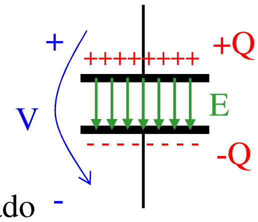
  - C=1F é uma capacidade muito elevada (1F = 1C / 1V)
  - capacidades são geralmente de valor baixo
    - expressas em microfarad (μF), nanofarad (nF), picofarad (pF)

$$q_e = -1{,}602 \times 10^{-19}\,C$$

Condensador



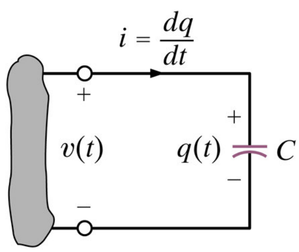
- **Carregar um condensador**
  - impor uma diferença de potencial *v(t)* entre as armaduras
    - por intermédio de uma fonte de energia eléctrica
  - carga armazenada no condensador é *q(t)* $q(t) = C \times v(t)$
    - a carga é directamente proporcional à tensão
  - surge campo eléctrico no dieléctrico entre as armaduras
    - energia eléctrica armazenada nessa região do espaço devido à existência do campo eléctrico
  - condensador armazena energia eléctrica quando está a ser carregado
  - energia eléctrica é transferida da fonte para o condensador



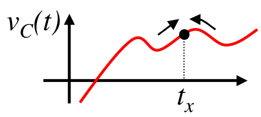
- **Descarregar um condensador**
  - condensador liberta para o circuito a energia eléctrica que estava armazenada
- **Condensador – componente com capacidade de armazenar energia eléctrica**
  - ideal – manteria indefinidamente essa energia
  - real – tem perdas – vai muito lentamente perdendo a energia armazenada

Condensador

- **Relação entre $v_C(t)$ e $i_C(t)$**



  - corrente eléctrica $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$
  - carga armazenada no condensador $q(t) = C \times v(t)$
  - a corrente é directamente proporcional à taxa de variação da tensão $\boxed{i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt}}$
  - DC
    - tensão constante $\Rightarrow$ corrente nula
    - em DC condensador comporta-se como um circuito aberto
      - condensador bloqueia componente contínua
  - $v_C(t)$ não pode variar instantaneamente (ter descontinuidades)
    - obter-se-ía corrente infinita!
    - energia eléctrica armazenada (associada ao campo eléctrico existente) não pode ser descontínua!
    - num instante t_x qualquer $v_C(t_x^-) = v_C(t_x^+) = v_C(t_x)$



Condensador

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

- **Condição inicial**

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(x)\,dx = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i_C(x)\,dx + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(x)\,dx = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(x)\,dx$$

  - ao analisar o funcionamento do circuito é preciso conhecer (ou assumir) uma condição inicial para a tensão(carga) no condensador

- **Energia armazenada no condensador**

$$p_C(t) = v_C(t)\times i_C(t)$$

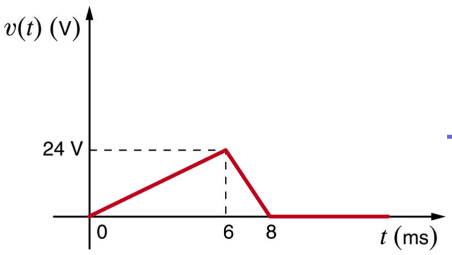
$$w_C(t) = \int_{-\infty}^{t} p_C(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} v_C(x)\times C\frac{dv_C(x)}{dx}\,dx = \frac{1}{2}Cv^2{}_C(t) - \frac{1}{2}Cv^2{}_C(-\infty)$$

$$v_C(-\infty) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2{}_C(t)} \qquad [J] \quad [Joule]$$

  - em cada instante, a energia no condensador apenas depende da tensão aos seus terminais nesse instante

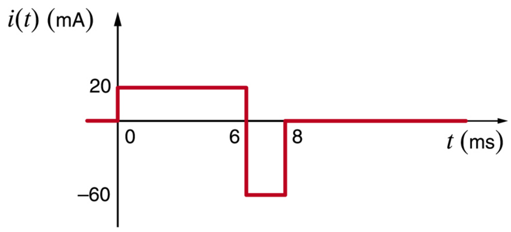
Exemplo de aplicação

- **Determinar $i_C(t)$ e $w_C(6ms)$ de um condensador com $C=5\mu F$ a partir do gráfico da tensão**



$$v_C(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le t \\ 4\times10^3 t & , \quad 0 \le t \le 6ms \\ 96 - 12\times10^3 t & , \quad 6ms \le t \le 8ms \\ 0 & , \quad 8ms \le t \end{cases}$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} \quad \rightarrow$$



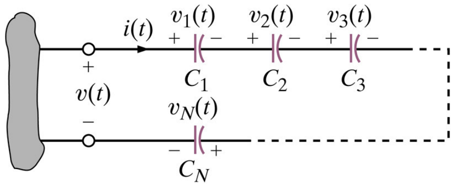
$$i_C(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < t \\ 20\ mA & , \quad 0 < t < 6ms \\ -60\ mA & , \quad 6ms < t < 8ms \\ 0 & , \quad 8ms < t \end{cases}$$

$$w_C(6ms) = \frac{1}{2}Cv^2{}_C(6ms) = \frac{1}{2}5\times10^{-6}(24)^2$$

$$w_C(6ms) = 1{,}44\ mJ$$

Associação de Condensadores

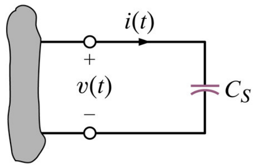
- **Condensadores em série**
  - KVL $\quad v(t) = v_1(t) + v_2(t) + \cdots v_N(t)$



$$v_k(t) = \frac{1}{C_k}\int_{-\infty}^{t} i(x)\,dx \quad k = 1,2,\ldots,N$$

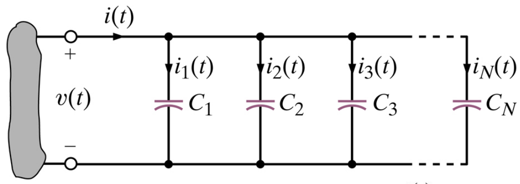
$$v(t) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}\right)\int_{-\infty}^{t} i(x)\,dx$$

$$\boxed{\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}}$$



  - 2 condensadores em série $\quad \frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad C_S = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad C_S < C_1, C_2$

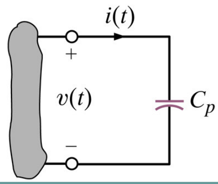
- **Condensadores em paralelo**
  - KCL $\quad i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \cdots i_N(t)$



$$i(t) = C_1\frac{dv(t)}{dt} + C_2\frac{dv(t)}{dt} + \cdots + C_N\frac{dv(t)}{dt}$$

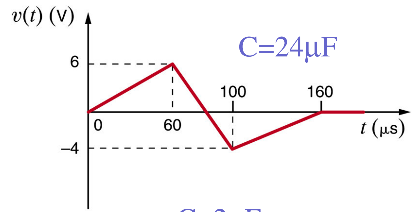
$$i(t) = (C_1 + C_2 + \cdots + C_N)\frac{dv(t)}{dt}$$

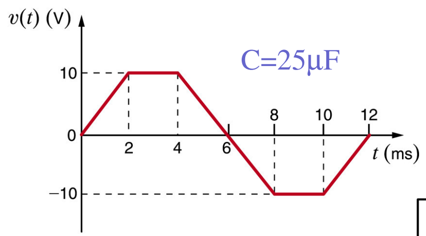
$$\boxed{C_P = C_1 + C_2 + \cdots + C_N}$$

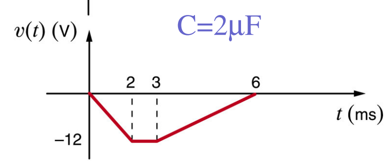


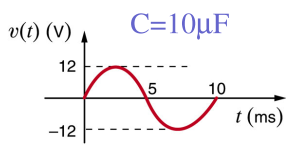
Exemplos de aplicação

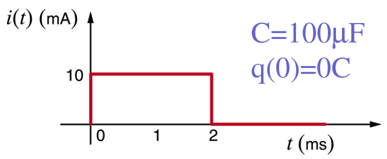
- **Determinar a corrente/tensão no condensador**

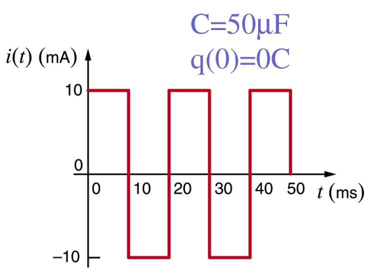


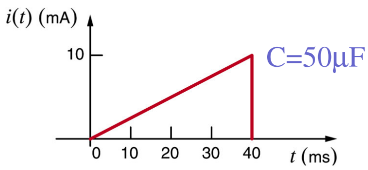


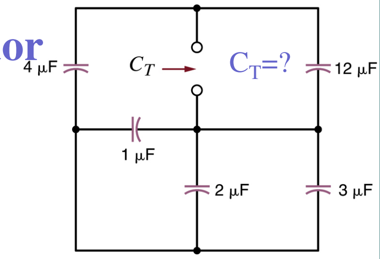


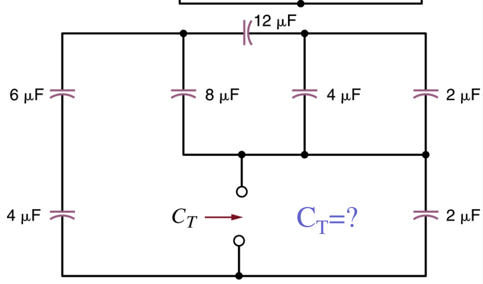


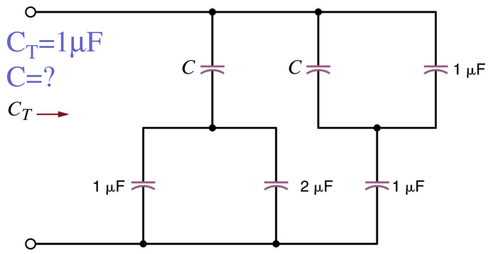






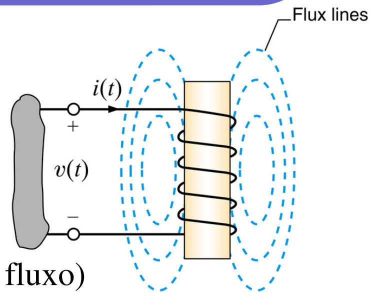






Bobine

- **Constituição**
  - fio condutor enrolado em forma de espiral
  - núcleo de material
    - não magnético – ar
    - magnético – ferro, ferrite (concentram linhas de fluxo)



- **Condutor onde passa corrente - cria um campo magnético**
  - campo magnético e corrente estão relacionados de forma linear
- **L – coeficiente de auto-indução (indutância) [H] [Henry]**
  - é a constante de proporcionalidade

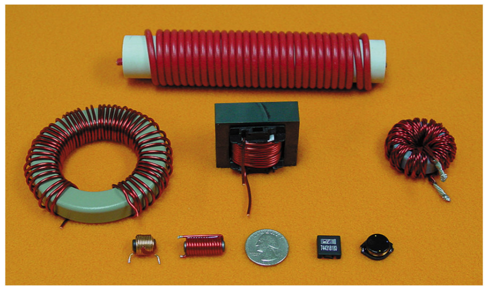
$$\lambda = N\phi \qquad \lambda = Li_L$$

$$\phi = \frac{L}{N} i_L$$

λ – fluxo de ligação magnética

ϕ – fluxo magnético

N – n. espiras da bobine



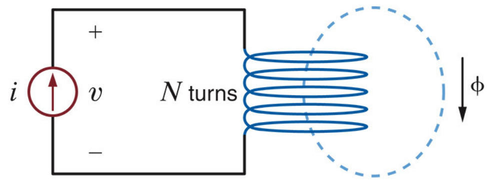
- variação na corrente que atravessa a bobine

$$v_L = \frac{d\lambda}{dt}$$

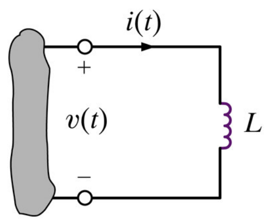
  - induz aos seus terminais uma tensão
  - L é a constante de proporcionalidade

Bobine

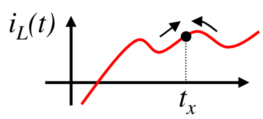
- **Relação entre $v_L(t)$ e $i_L(t)$**
  - a tensão é directamente proporcional à taxa de variação da corrente



$$v_L = \frac{d\lambda}{dt} \qquad \lambda = Li_L \qquad \boxed{v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}}$$



- DC
  - corrente constante ⇒ tensão nula
  - em DC bobine comporta-se como um curto-circuito
    - bobine deixa passar componente contínua
- $i_L(t)$ não pode variar instantaneamente (ter descontinuidades)
  - obter-se-ía tensão infinita!
  - energia armazenada (associada ao campo magnético existente) não pode ser descontínua!
  - num instante t_x qualquer $\quad i_L(t_x^-) = i_L(t_x^+) = i_L(t_x)$



Bobine

$$\boxed{v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}}$$

- **Condição inicial**

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(x)\,dx \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v_L(x)\,dx + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_L(x)\,dx = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_L(x)\,dx$$

  - ao analisar o funcionamento do circuito é preciso conhecer (ou assumir) uma condição inicial para a corrente na bobine

- **Energia armazenada na bobine**

$$p_L(t) = v_L(t)\times i_L(t)$$

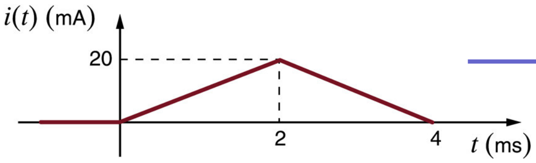
$$w_L(t) = \int_{-\infty}^{t} p_L(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} L\frac{di_L(x)}{dx}\times i_L(x)\,dx = \frac{1}{2}Li^2{}_L(t) - \frac{1}{2}Li^2{}_L(-\infty)$$

$$i_L(-\infty) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2{}_L(t)} \qquad [J] \quad [Joule]$$

  - em cada instante, a energia na bobine apenas depende da corrente aos seus terminais nesse instante

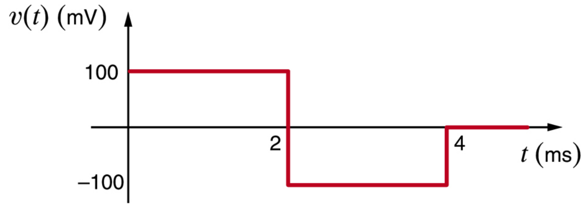
Exemplo de aplicação

- **Determinar $v_L(t)$, $w_L(2ms)$ e $w_L(4ms)$ de uma bobine com $L=10mH$ a partir do gráfico da corrente**



$$\longrightarrow \quad i_L(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \le 0 \\ 10t & , \quad 0 \le t \le 2ms \\ 40\times10^{-3} - 10t & , \quad 2ms \le t \le 4ms \\ 0 & , \quad 4ms \le t \end{cases} \quad [A]$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad \longrightarrow$$



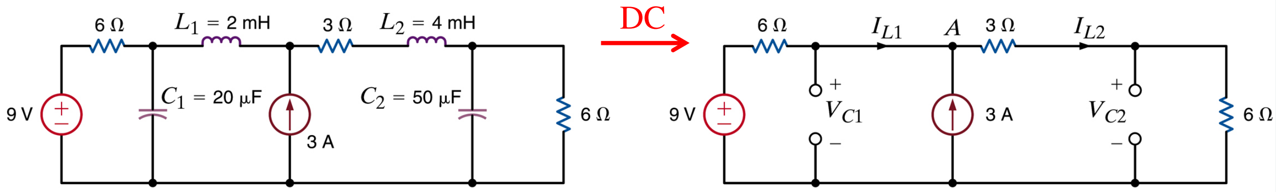
$$v_L(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 100 & , \quad 0 < t < 2ms \\ -100 & , \quad 2ms < t < 4ms \\ 0 & , \quad 4ms < t \end{cases} \quad [mV]$$

$$w_L(2ms) = \frac{1}{2}\left(10\times10^{-3}\right)\left(20\times10^{-3}\right)^2 = 2\ \mu J$$

$$w_L(4ms) = 0\ J$$

Exemplo de aplicação

- **Calcular energia total armazenada no circuito**
  - circuito só tem fontes DC
  - admitindo que foram ligadas há muito tempo – todas grandezas constantes
    - condensadores → circuito aberto
    - bobines → curto-circuito



  - analisar circuito resistivo resultante (KCL nó A, KVL malha exterior)

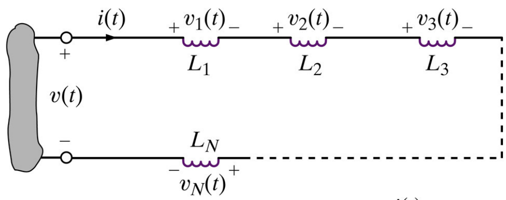
$$\begin{cases} I_{L1}+3=I_{L2} \\ -9+6I_{L1}+(3+6)I_{L2}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_{L1}=-1,2\ A \\ I_{L2}=1,8\ A \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{C2}=6I_{L2}=10,8\,V \\ V_{C1}=-6I_{L1}+9=16,2\,V \end{cases}$$

$$W_{C1}=2,62\ mJ \quad W_{C2}=2,92\ mJ$$
$$W_{L1}=1,44\ mJ \quad W_{L2}=6,48\ mJ$$
$$W_T=W_{C1}+W_{C2}+W_{L1}+W_{L2}=13,46\ mJ$$

Associação de Bobines

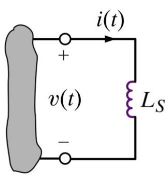
- **Bobines em série**
  - KVL $\quad v(t)=v_1(t)+v_2(t)+\cdots v_N(t)$



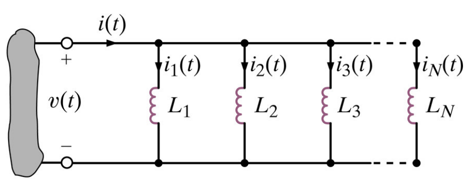
$$v(t)=L_1\frac{di(t)}{dt}+L_2\frac{di(t)}{dt}+\cdots+L_N\frac{di(t)}{dt}$$

$$v(t)=(L_1+L_2+\cdots+L_N)\frac{di(t)}{dt}$$

$$\boxed{L_S=L_1+L_2+\cdots+L_N}$$



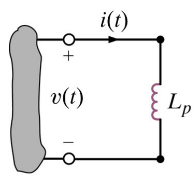
- **Bobines em paralelo**
  - KCL $\quad i(t)=i_1(t)+i_2(t)+\cdots i_N(t)$



$$i_k(t)=\frac{1}{L_k}\int_{-\infty}^{t}v(x)\,dx \quad k=1,2,\ldots,N$$

$$i(t)=\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_N}\right)\int_{-\infty}^{t}v(x)\,dx$$

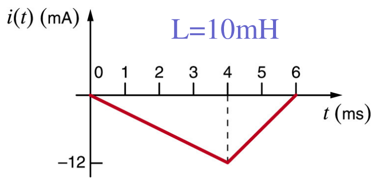
$$\boxed{\frac{1}{L_P}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_N}}$$

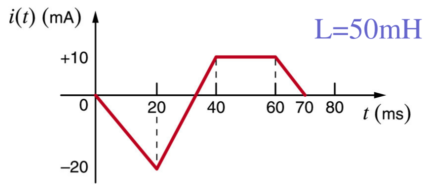


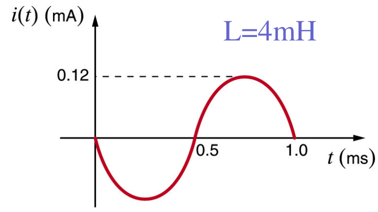
  - 2 bobines em paralelo $\quad \frac{1}{L_P}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2} \qquad L_P=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2} \qquad L_P<L_1,L_2$

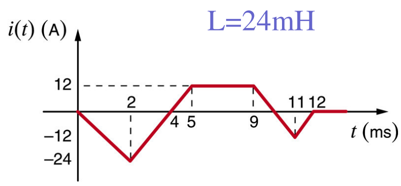
Exemplos de aplicação

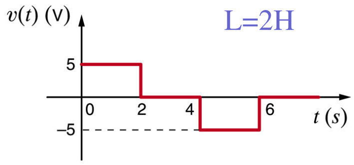
- **Determinar a tensão/corrente na bobine**

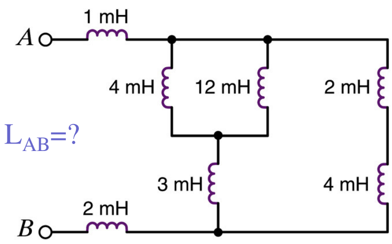


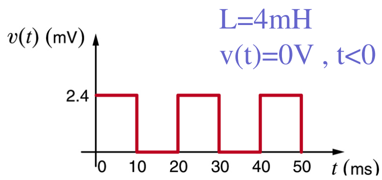


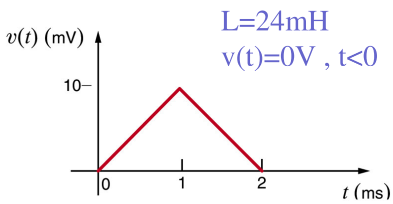


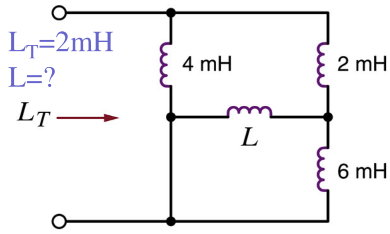






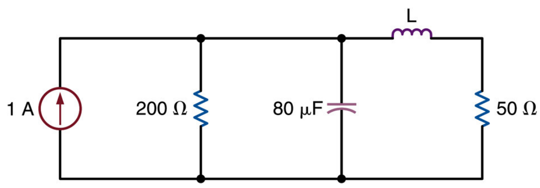




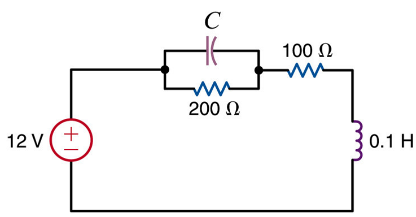


Exemplos de aplicação

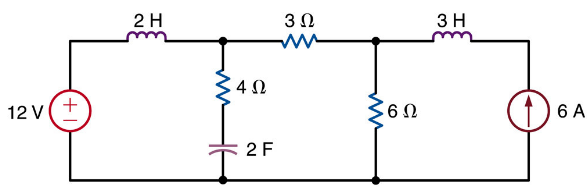
- **Se energia total armazenada no circuito é 80mJ, quanto vale L?**



- **Calcular C sabendo que energia armazenada no condensador é igual à energia armazenada na bobine**

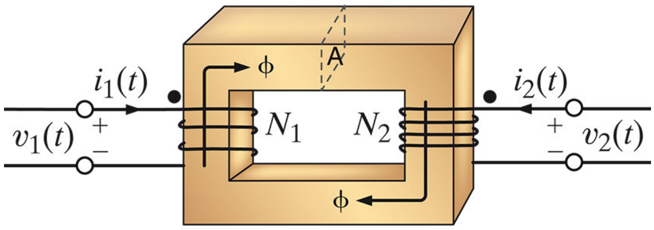


- **Calcular a potência dissipada na R=3Ω e a energia armazenada no condensador**



Transformador

- **Constituição**
  - 2 bobines adjacentes
    - primário e secundário
  - existe ligação magnética – ϕ
  - não existe ligação eléctrica
    - isolamento eléctrico



- **Transformador ideal**
  - resistência dos fios é desprezada
  - fluxo ϕ no núcleo liga todas as espiras das 2 bobines

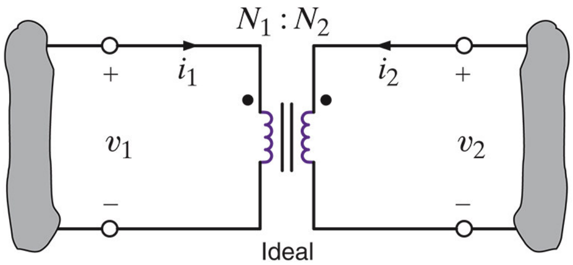
$$v_1(t) = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$v_2(t) = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\oint H dl = N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$$

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}}$$

$$\boxed{\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1}}$$



Transformador

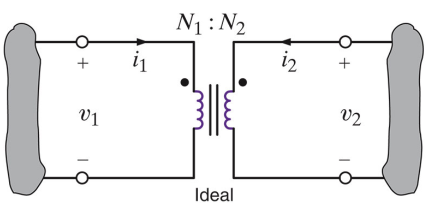
- **Níveis de Tensão, Corrente e Resistência são alteradas**

$$\boxed{v_1 = \frac{N_1}{N_2} v_2} \quad \boxed{i_1 = -\frac{N_2}{N_1} i_2} \quad \frac{v_1}{i_1} = R_1 = \frac{\frac{N_1}{N_2} v_2}{-\frac{N_2}{N_1} i_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{v_2}{-i_2} \quad \boxed{R_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2}$$

- **Nível de Potência não se altera**

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \quad v_1 i_1 + v_1 \frac{N_2}{N_1} i_2 = 0 \quad v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0 \qquad \boxed{p_1 = -p_2}$$

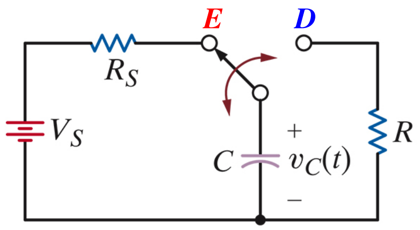
- **Análise de circuitos com transformadores ideais**
  - reflectir grandezas do primário/secundário no secundário/primário
    - usando as relações do quociente do número de espiras
  - necessário ter atenção à marcação
    - polaridade das tensões
    - sentido das correntes
    - sentido acoplamento magnético

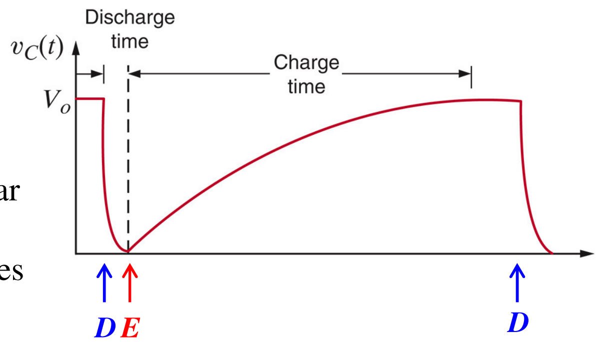


Análise de Transitórios em Circuitos

- **Circuitos de 1ª ordem**
  - contêm apenas um elemento armazenador de energia
    - circuitos RC
    - circuitos RL
  - descritos por equação diferencial de 1ª ordem
- **Análise do circuito**
  - comportamento do circuito quando existem alterações no circuito
    - interruptor abre/fecha
    - fonte ligada/desligada ou com valor alterado num instante de tempo
  - tensões e correntes vão-se alterar transitoriamente
    - análise do circuito permite determinar qual a forma dos transitórios
  - ao fim de algum tempo tensões e correntes ficam com valores constantes
    - regime estacionário

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$





Solução da eq. diferencial de 1ª ordem

- **Solução da eq. diferencial de 1ª ordem genérica**
  - $x_p(t)$ – solução particular (forçada)
    - é uma solução da eq. diferencial genérica
    - depende da função f(t)
  - $x_c(t)$ – solução complementar (natural)
    - é uma solução da eq. homogénea
    - só depende da topologia do circuito
  - solução total da eq. diferencial de partida

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0$$

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t)$$

- **Para uma função constante *f(t)=A***

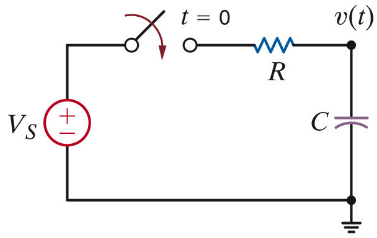
$$\frac{dx_p(t)}{dt} + a\,x_p(t) = A \quad \rightarrow \quad x_p(t) = K_1 = \frac{A}{a}$$

$$\frac{dx_c(t)}{dt} + a\,x_c(t) = 0 \quad \rightarrow \quad x_c(t) = K_2 e^{-at} \qquad \tau = \frac{1}{a}$$

$$\boxed{x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{\begin{cases} x(+\infty) = K_1 \\ x(0) = K_1 + K_2 \end{cases}}$$

Análise de Transitório em circuito RC



- **Como varia a tensão no condensador?**
- **Antes do interruptor fechar em *t=0–***
  - regime estacionário – grandezas constantes
    - fonte já estava ligada há muito tempo
  - condensador estava descarregado

$$v_C\left(0^-\right)=0$$

- **Logo após o interruptor fechar *t=0+***
  - tensão no condensador não pode variar instantaneamente

$$v_C\left(0^+\right)=v_C\left(0^-\right)=v_C\left(0\right)=0$$

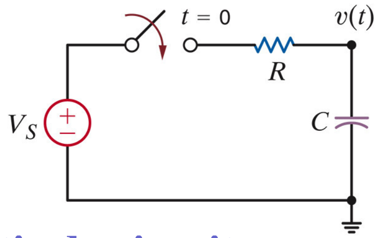
- **Deixando passar muito tempo *t=+∞***
  - regime estacionário – grandezas constantes
  - condensador comporta-se como circuito aberto

$$v_C\left(+\infty\right)=V_S$$

- **Durante o transitório**
  - KCL

$$\frac{V_S-v_C\left(t\right)}{R}=C\frac{dv_C\left(t\right)}{dt}\quad\rightarrow\quad\frac{dv_C\left(t\right)}{dt}+\overset{a=1/\tau}{\boxed{\frac{1}{RC}}}v_C\left(t\right)=\overset{A}{V_S}$$

Análise de Transitório em circuito RC (cont.)



- **Assumir a solução da eq. diferencial**

$$v_C\left(t\right)=K_1+K_2e^{-t/\tau}$$

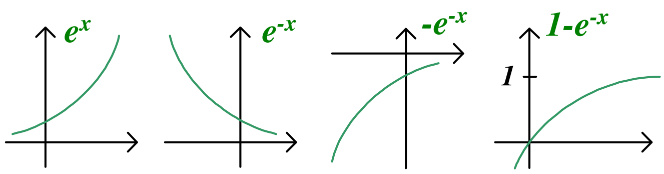
- **Determinar as constantes (K_1, K_2, τ) a partir do circuito**

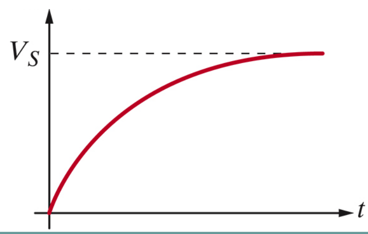
$$v_C\left(0\right)=0\quad\wedge\quad v_C\left(0\right)=K_1+K_2\quad\Rightarrow\quad K_1+K_2=0$$

$$v_C\left(+\infty\right)=V_S\quad\wedge\quad v_C\left(+\infty\right)=K_1\quad\Rightarrow\quad K_1=V_S$$

$$\tau=RC$$

- **A solução é:** $v_C\left(t\right)=V_S-V_Se^{-\frac{t}{RC}}=V_S\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\quad t\geq 0$





Método de cálculo de Transitório em RC

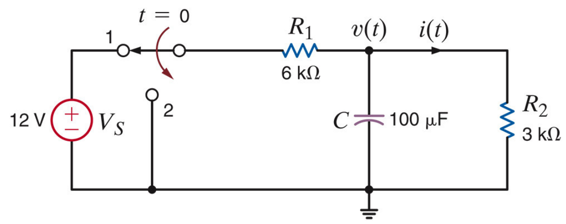
- **Assumir que a solução para a tensão no condensador é**

$$v_C(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

  - t_0 – instante em que ocorre alteração no circuito (interruptor abre/fecha)
- **Calcular constante K_1**
  - $t=+\infty$ regime estacionário (grandezas constantes)
  - fazer análise do circuito e determinar $v_C(+\infty)$ $\quad v_C(+\infty) = K_1$
- **Calcular constante K_2**
  - $t=t_0^-$ regime estacionário (grandezas constantes)
  - fazer análise do circuito e determinar $v_C(t_0^-)$ $\quad v_C(t_0^-) = v_C(t_0^+) = v_C(t_0)$
  - continuidade na tensão no condensador $\quad v_C(t_0) = K_1 + K_2$
  - calcular K_2
- **Calcular constante de tempo τ**
  - calcular R_{Th} – resistência equivalente de Thévenin vista pelo condensador
  - calcular τ $\quad \tau = R_{Th} C$

Exemplo de aplicação

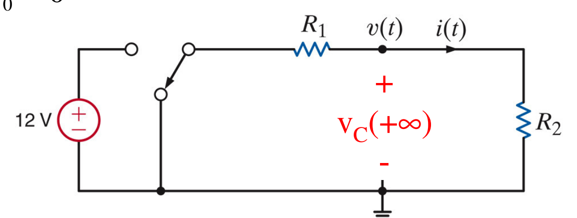
- **Calcular *i(t)* admitindo que interruptor está em 1 há muito tempo e muda para 2 em t=0**



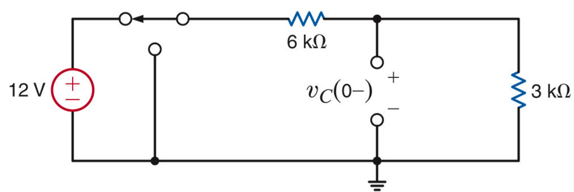
  - relacionar i(t) com $v_C(t)$

$$i(t) = \frac{v_C(t)}{R_2}$$

  - determinar $\quad v_C(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad t_0 = 0$
  - calcular K_1
    - $t=+\infty$ $\quad v_C(+\infty) = 0 = K_1$
    - regime estacionário



  - calcular K_2
    - $t=0^-$
    - regime estacionário



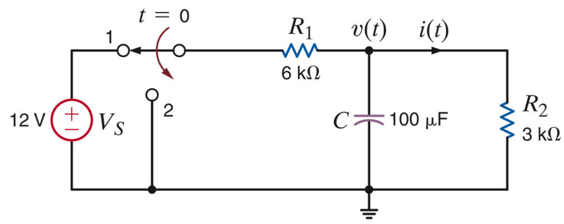
$$v_C(0-) = \frac{3k}{3k+6k} 12 = 4\,V$$

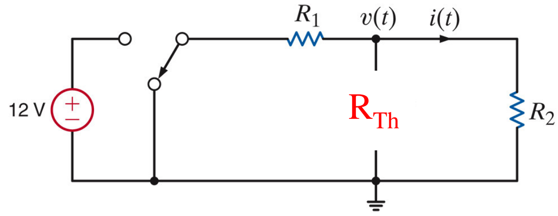
$$v_C(0+) = v_C(0-) = 4\,V = K_1 + K_2 \qquad K_2 = 4\,V$$

Exemplo de aplicação (continuação)

- **Calcular *i(t)* admitindo que interruptor está em 1 há muito tempo e muda para 2 em t=0**
  - calcular τ
    - interruptor em 2
    - R_{Th} vista pelo condensador

$$R_{Th} = R_1 // R_2 = 2\ k\Omega$$
$$\tau = R_{Th} C = 0{,}2\ s$$



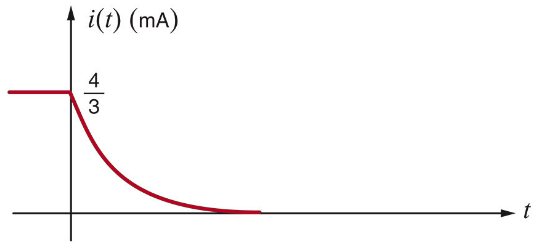


  - obter $v_C(t)$

$$v_C(t) = \begin{cases} 4 & , \quad t \le 0 \\ 4e^{-\frac{t}{0{,}2}} & , \quad t \ge 0 \end{cases} \quad [V]$$

  - obter i(t)

$$i(t) = \begin{cases} \frac{4}{3} & , \quad t \le 0 \\ \frac{4}{3} e^{-\frac{t}{0{,}2}} & , \quad t \ge 0 \end{cases} \quad [mA]$$



Método de cálculo de Transitório em RL

- **Assumir que a solução para a corrente na bobine é**

$$i_L(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

  - t_0 – instante em que ocorre alteração no circuito (interruptor abre/fecha)
- **Calcular constante K_1**
  - $t=+\infty$ regime estacionário (grandezas constantes)
  - fazer análise do circuito e determinar $i_L(+\infty)$

$$i_L(+\infty) = K_1$$

- **Calcular constante K_2**
  - $t=t_0^-$ regime estacionário (grandezas constantes)
  - fazer análise do circuito e determinar $i_L(t_0^-)$
  - continuidade na corrente na bobine
  - calcular K_2

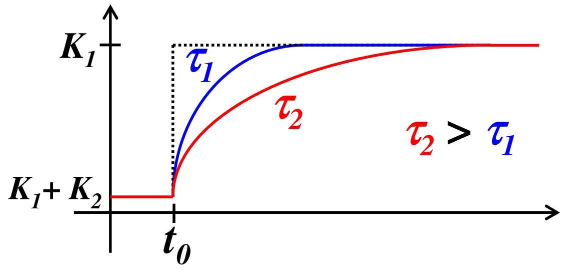
$$i_L(t_0^-) = i_L(t_0^+) = i_L(t_0)$$
$$i_L(t_0) = K_1 + K_2$$

- **Calcular constante de tempo τ**
  - calcular R_{Th} – resistência equivalente de Thévenin vista pela bobine
  - calcular τ

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}}$$

Propriedades da solução $x(t)=K_1+K_2e^{-(t-t0)/\tau}$

- **Constante de tempo τ**
  - indica rapidez da variação da curva
    - τ menor – mais rápida
    - τ maior – mais lenta



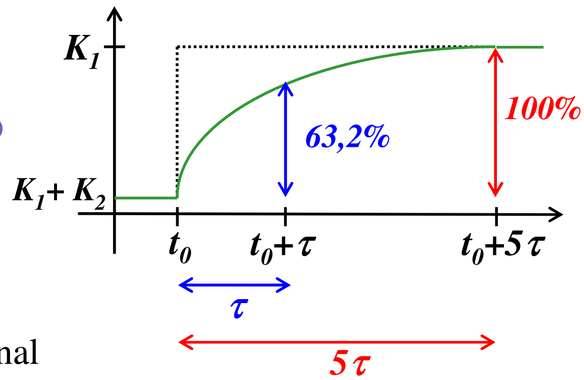
- **Ao fim de uma constante de tempo**
  - $\Delta t = \tau$
  - variação de 63,2%

$$\left(1-e^{-1}\right)\times 100\% = 63,2\%$$

- **Ao fim de 5 constantes de tempo**
  - $\Delta t = 5\,\tau$
  - variação de 99,3%

$$\left(1-e^{-5}\right)\times 100\% = 99,3\% \approx 100\%$$

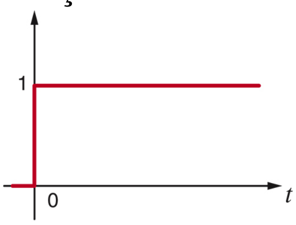
  - considera-se que foi atingido valor final



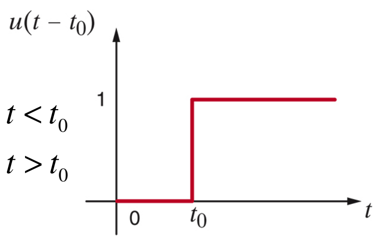
Função escalão

- **Função escalão (unitário)**
  - permite a descrição matemática de mudança brusca

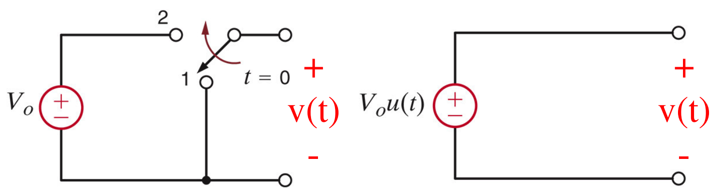
$$u(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 1 & , \quad t>0\end{cases}$$



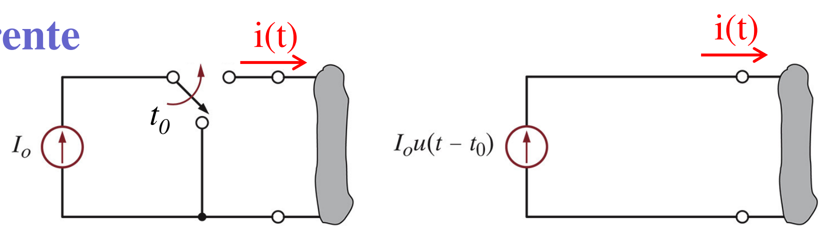
$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & , \quad t<t_0\\ 1 & , \quad t>t_0\end{cases}$$



- **Ligar fonte de tensão em t=0**



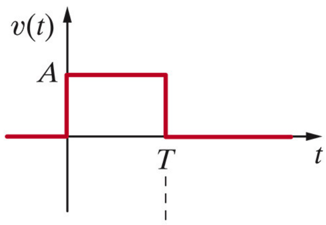
- **Ligar Fonte de corrente em t=t_0**



Função escalão

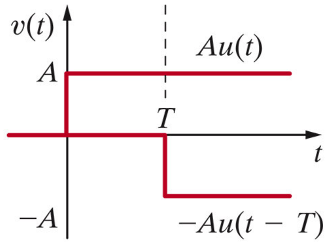
- **Descrição matemática de impulso 0<t<T**

$$v(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ A & , \quad 0<t<T\\ 0 & , \quad T<t\end{cases}$$



- **Subtraindo 2 escalões de altura A**

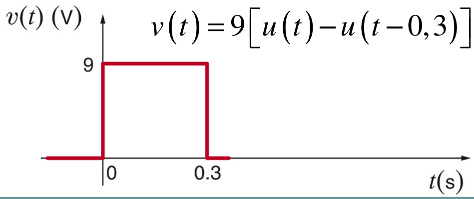
$$v(t)=Au(t)-Au(t-T)$$



- **Descrição matemática de impulso t_0<t<t_0+T**
  - t_0 – instante de início do impulso
  - T – largura do impulso

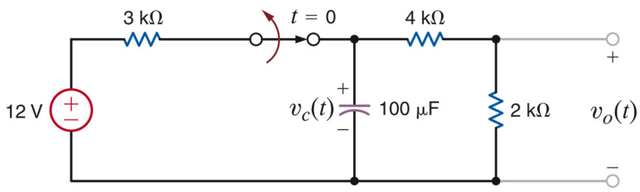
$$v(t)=A\{u(t-t_0)-u(t-(t_0+T))\}$$

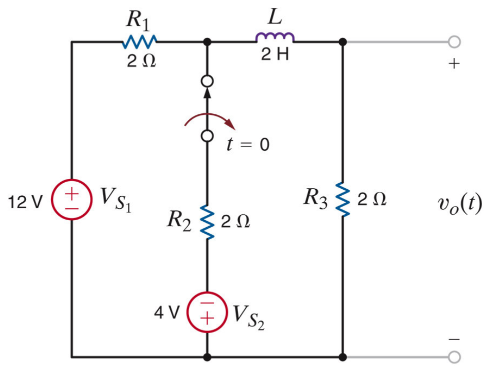
$$v(t)=9\left[u(t)-u(t-0,3)\right] \quad [V]$$



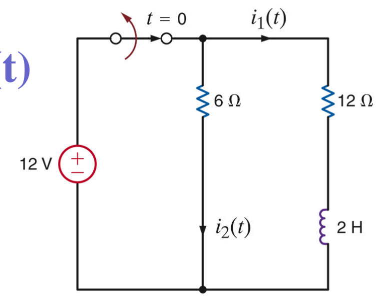
Exemplos de aplicação

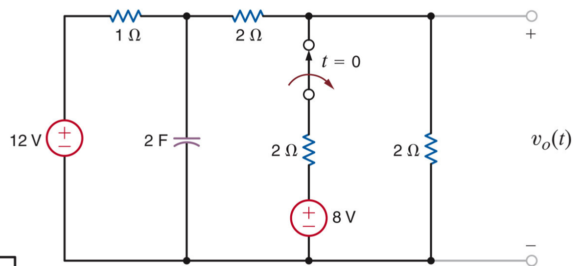
- **Calcular v_o(t)**



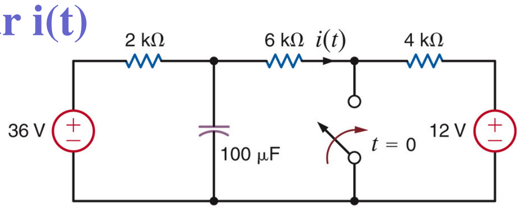


- **Calcular i_1(t)**



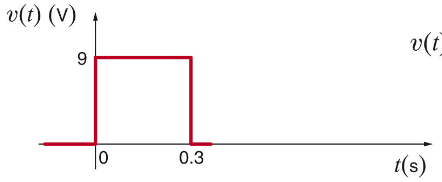


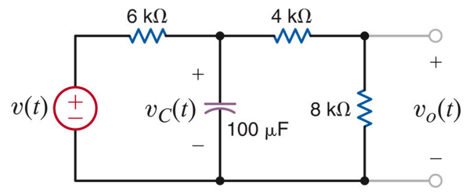
- **Calcular i(t)**

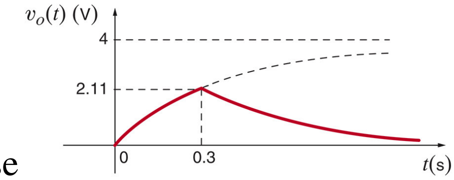


Exemplos de aplicação

- **Calcular $v_o(t)$**



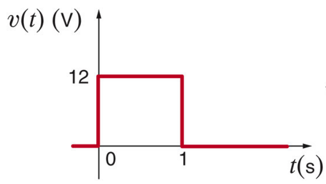


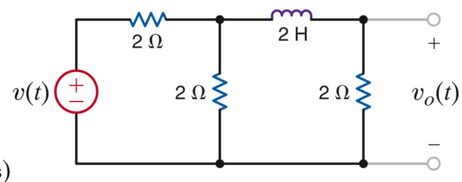


1- calcular $v_o(t)$ para 0<t<0,3s como se não ocorresse a 2ª transição em v(t)

2- calcular $v_o(t)$ para t>0,3s como se não ocorresse 1ª transição mas sabendo que $v_o(t=0,3s)$ é o ponto de partida

- **Calcular $v_o(t)$**





$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \le 0 \\ 4\left(1 - e^{-(3/2)t}\right) & , \quad 0 \le t \le 1s \\ 3{,}11e^{-(3/2)(t-1)} & , \quad 1s \le t \end{cases} \quad [V]$$

Números complexos

- **PRÓXIMA AULA**
- **Vai ser necessário fazer cálculos com números complexos**
- **Relembrar cálculo com números complexos**
  - representação no plano complexo
  - forma cartesiana e forma polar
  - equação de Euler
  - soma e subtracção
  - multiplicação e divisão
  - complexo conjugado
  - ...