Teoria de apoio à resolução

Uma equação diferencial do tipo: $M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$ é exacta quando: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

As suas soluções determinadas por: $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N \end{cases}$, onde a solução final é do tipo: $F(x;y) = C$

1. Averigúe quais das seguintes equações diferenciais são exactas e determine a sua solução.

a) $(3x^2y^2 - y^3 + 2x)dx + (2x^3y - 3xy^2 + 1)dy = 0$

R:

Sabendo que: $\underbrace{(3x^2y^2 - y^3 + 2x)}_{M(x;y)}dx + \underbrace{(2x^3y - 3xy^2 + 1)}_{N(x;y)}dy = 0$ e que: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ equação exacta.

Então: $\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - y^3 + 2x) = 6x^2y - 3y^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y - 3xy^2 + 1) = 6x^2y - 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ → Esta equação é exacta.

Vamos agora determinar a sua solução, sabendo que: $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y^2 - y^3 + 2x \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^3y - 3xy^2 + 1 \end{cases}$

Primitivando agora em ordem a x teremos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y^2 - y^3 + 2x \Rightarrow P_x(3x^2y^2 - y^3 + 2x) = P_x(3x^2y^2) + P_x(-y^3) + P_x(2x) =$$

$$= x^3y^2 - xy^3 + x^2 + \phi(y) \Rightarrow F(x;y) = x^3y^2 - xy^3 + x^2 + \phi(y)$$

Substituindo $F(x;y)=x^3y^2-xy^3+x^2+\phi(y)$ no outro ramo do sistema, e derivando em seguida em ordem a y, iremos ter que:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2x^3y-3xy^2+1 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y^2-xy^3+x^2+\phi(y)\right)=2x^3y-3xy^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3y-3xy^2+\phi'(y)=2x^3y-3xy^2+1 \Leftrightarrow \phi'(y)=1 \Rightarrow \phi(y)=P_y(1) \Leftrightarrow \phi(y)=y+k$$

Assim sendo teremos então que:

$$F(x;y)=x^3y^2-xy^3+x^2+\phi(y) \Leftrightarrow F(x;y)=x^3y^2-xy^3+x^2+(y+k),\ k=0$$

Logo a solução será: $F(x;y)=C \Leftrightarrow x^3y^2-xy^3+x^2+y=C$

b) $\left(\frac{2s-1}{t}\right)ds+\left(\frac{s-s^2}{t^2}\right)dt=0$

R:

Sabendo que: $\underbrace{\left(\frac{2s-1}{t}\right)}_{M(s;t)}ds+\underbrace{\left(\frac{s-s^2}{t^2}\right)}_{N(s;t)}dt=0$ e que: $\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial s}\Rightarrow \text{equação exacta}$.

$$\text{Então:}\begin{cases}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2s-1}{t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-1}\cdot(2s-1)\right)=-1\cdot t^{-1-1}\cdot(2s-1)=-t^{-2}\cdot(2s-1)\\ \frac{\partial N}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{s-s^2}{t^2}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{t^2}\cdot\left(s-s^2\right)\right)=\frac{1}{t^2}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(s-s^2\right)=t^{-2}\cdot(1-2s)=-t^{-2}\cdot(2s-1)\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial s}$ → Esta equação é exacta.

Vamos agora determinar a sua solução, sabendo que: $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial s}=M\\ \frac{\partial F}{\partial t}=N\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{2s-1}{t}\\ \frac{\partial F}{\partial t}=\frac{s-s^2}{t^2}\end{cases}$

Primitivando agora em ordem a s teremos que:

$$\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{2s-1}{t}\Rightarrow P_s\left(\frac{2s-1}{t}\right)=P_s\left(\frac{1}{t}\cdot(2s-1)\right)=\frac{1}{t}\cdot P_s(2s-1)=\frac{1}{t}\cdot\left[P_s(2s)-P_s(1)\right]=$$

$$=\frac{1}{t}\cdot\left[2\cdot P_s(s)-P_s(1)\right]=\frac{1}{t}\cdot\left[2\cdot\frac{s^{1+1}}{1+1}-s\right]+\phi(t)=\frac{1}{t}\cdot\left[s^2-s\right]+\phi(t)\Rightarrow F(s;t)=\frac{1}{t}\cdot\left(s^2-s\right)+\phi(t)$$

Substituindo $F(s;t)=\frac{1}{t}\cdot\left(s^2-s\right)+\phi(t)$ no outro ramo do sistema, e derivando em seguida em ordem a t, iremos ter que:

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{s-s^2}{t^2}\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\cdot\left(s^2-s\right)+\phi(t)\right)=\frac{s-s^2}{t^2}\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-1}\cdot\left(s^2-s\right)+\phi(t)\right)=\frac{s-s^2}{t^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1\cdot t^{-1-1}\cdot\left(s^2-s\right)+\phi'(t)=\frac{s-s^2}{t^2}\Leftrightarrow -t^{-2}\cdot\left(s^2-s\right)+\phi'(t)=\frac{s-s^2}{t^2}\Leftrightarrow-\frac{\left(s^2-s\right)}{t^2}+\phi'(t)=\frac{s-s^2}{t^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\phi'(t)=\frac{s-s^2}{t^2}+\frac{\left(s^2-s\right)}{t^2}\Leftrightarrow\phi'(t)=\frac{s-s^2+s^2-s}{t^2}\Leftrightarrow\phi'(t)=0\Rightarrow\phi(t)=P_t(0)\Leftrightarrow\phi(t)=k$$

Assim sendo teremos então que:

$$F(s;t)=\frac{1}{t}\cdot\left(s^2-s\right)+\phi(t)\Leftrightarrow F(s;t)=\frac{1}{t}\cdot\left(s^2-s\right)+(k),\ k=0$$

Logo a solução será: $F(s;t)=C\Leftrightarrow\frac{1}{t}\cdot\left(s^2-s\right)=C$

c) $\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0 \quad ; \quad y(1)=1$

R:

Sabendo que: $\underbrace{\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)}_{M(x;y)}dx+\underbrace{e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)}_{N(x;y)}dy=0$ e que: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow \text{equação exacta}$.

Então:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\cdot y^{-1}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}}=x\cdot\left(-1\cdot y^{-1-1}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}}=-\frac{x}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}\\ \\ \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{x}{y}}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)+e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(1-\frac{x}{y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)+e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y}\right)=\\ =\frac{1}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)-e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}\cdot\left(1-\frac{x}{y}-1\right)=\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{x}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ → Esta equação é exacta.

Vamos agora determinar a sua solução, sabendo que: $\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial F}{\partial x}=M\\ \frac{\partial F}{\partial y}=N\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial F}{\partial x}=x+e^{\frac{x}{y}}\\ \frac{\partial F}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)\end{array}\right\}$

Primitivando agora em ordem a x teremos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=x+e^{\frac{x}{y}}\Rightarrow P_x\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)=P_x(x)+P_x\left(\underbrace{e^{\frac{x}{y}}}_{e^u}\right)=P_x(x)+y\cdot P_x\left(\underbrace{\frac{1}{y}}_{u'}\cdot\underbrace{e^{\frac{x}{y}}}_{e^u}\right)=\frac{x^{1+1}}{1+1}+y\cdot e^{\frac{x}{y}}+\phi(y)=$$

$$=\frac{x^2}{2}+y\cdot e^{\frac{x}{y}}+\phi(y)\Rightarrow F(x;y)=\frac{x^2}{2}+y\cdot e^{\frac{x}{y}}+\phi(y)$$

Substituindo $F(x;y)=\frac{x^2}{2}+y\cdot e^{\frac{x}{y}}+\phi(y)$ no outro ramo do sistema, e derivando em seguida em ordem a y, iremos ter que:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2}+y\cdot e^{\frac{x}{y}}+\phi(y)\right)=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial y}\left(y\cdot e^{\frac{x}{y}}+\phi(y)\right)=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\underbrace{(y)_y'}_{=1}\cdot e^{\frac{x}{y}}+y\cdot\underbrace{\left(e^{\frac{x}{y}}\right)_y'}_{(e^u)'=u'\cdot e^u}\right)+\phi'(y)=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)\Leftrightarrow\left(e^{\frac{x}{y}}+y\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_y'\cdot e^{\frac{x}{y}}\right)+\phi'(y)=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(e^{\frac{x}{y}}+y\cdot\left(\frac{\overbrace{(x)_y'}^{=0}\cdot y-x\cdot\overbrace{(y)_y'}^{=1}}{y^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}}\right)+\phi'(y)=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)\Leftrightarrow\left(e^{\frac{x}{y}}-\left(\frac{x}{y}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}}\right)+\phi'(y)=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)+\phi'(y)=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)\Leftrightarrow\phi'(y)=0\Rightarrow\phi(y)=P_y(0)\Leftrightarrow\phi(y)=k$$

Assim sendo teremos então que:

$$F(x;y)=\frac{x^2}{2}+y\cdot e^{\frac{x}{y}}+\phi(y)\Leftrightarrow F(x;y)=\frac{x^2}{2}+y\cdot e^{\frac{x}{y}}+k,\ \ k=0$$

Logo a solução será: $F(x;y)=C\Leftrightarrow\frac{x^2}{2}+y\cdot e^{\frac{x}{y}}=C$

2. Para cada uma das equações seguintes determine o valor da constante A por forma a serem exactas e resolva as equações correspondentes.

a) $\left(6xy+2y^2-5\right)dx+\left(3x^2+Axy-6\right)dy=0$

R:

Sabendo que: $\underbrace{\left(6xy+2y^2-5\right)}_{M(x;y)}dx+\underbrace{\left(3x^2+Axy-6\right)}_{N(x;y)}dy=0$ e que: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow \text{equação exacta}$.

Então: $\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(6xy+2y^2-5\right)=6x+4y\\ \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2+Axy-6\right)=6x+Ay\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Leftrightarrow 6x+4y=6x+Ay\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4y=Ay\Leftrightarrow A=\frac{4y}{y}\Leftrightarrow A=4\Rightarrow \underbrace{\left(6xy+2y^2-5\right)}_{M(x;y)}dx+\underbrace{\left(3x^2+4xy-6\right)}_{N(x;y)}dy=0$$

Vamos agora determinar a sua solução, sabendo que: $\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial F}{\partial x}=M\\ \frac{\partial F}{\partial y}=N\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial F}{\partial x}=6xy+2y^2-5\\ \frac{\partial F}{\partial y}=3x^2+4xy-6\end{array}\right\}$

Primitivando agora em ordem a x teremos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=6xy+2y^2-5\Rightarrow P_x\left(6xy+2y^2-5\right)=6y\cdot P_x(x)+2y^2\cdot P_x(1)-5\cdot P_x(1)=$$

$$=6y\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1}+2y^2\cdot x-5\cdot x+\phi(y)=3x^2y+2xy^2-5x+\phi(y)\Rightarrow F(x;y)=3x^2y+2xy^2-5x+\phi(y)$$

Substituindo $F(x;y)=3x^2y+2xy^2-5x+\phi(y)$ no outro ramo do sistema, e derivando em seguida em ordem a y, iremos ter que:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3x^2+4xy-6\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y+2xy^2-5x+\phi(y)\right)=3x^2+4xy-6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+4xy+\phi'(y)=3x^2+4xy-6\Leftrightarrow\phi'(y)=-6\Rightarrow\phi(y)=P_y(-6)\Leftrightarrow\phi(y)=-6y+k$$

Assim sendo teremos então que:

$$F(x;y)=3x^2y+2xy^2-5x+\phi(y) \Leftrightarrow F(x;y)=3x^2y+2xy^2-5x+(-6y+k),\ k=0$$

Logo a solução será: $F(x;y)=C \Leftrightarrow 3x^2y+2xy^2-5x-6y=C$

b) $\left(\frac{Ay}{x^3}+\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dy=0$

R:

Sabendo que: $\underbrace{\left(\frac{Ay}{x^3}+\frac{y}{x^2}\right)}_{M(x;y)}dx+\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}_{N(x;y)}dy=0$ e que: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{equação exacta}$.

$$\text{Então:}\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Ay}{x^3}+\frac{y}{x^2}\right)=\frac{A}{x^3}+\frac{1}{x^2}\\ \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-2}-x^{-1}\right)=-2\cdot x^{-2-1}-(-1)\cdot x^{-1-1}=-2x^{-3}+x^{-2}=-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{A}{x^3}+\frac{1}{x^2}=-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{A}{x^3}=-\frac{2}{x^3} \Leftrightarrow A=-\frac{2x^3}{x^3} \Leftrightarrow A=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(-\frac{2y}{x^3}+\frac{y}{x^2}\right)}_{M(x;y)}dx+\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}_{N(x;y)}dy=0$$

Vamos agora determinar a sua solução, sabendo que: $\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial F}{\partial x}=M\\ \frac{\partial F}{\partial y}=N\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{2y}{x^3}+\frac{y}{x^2}\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\end{array}\right\}$

Primitivando agora em ordem a y teremos que:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x} \Rightarrow P_y\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot P_y(1)=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot y+\phi(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x;y)=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot y+\phi(x)$$

Substituindo $F(x;y)=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot y+\phi(x)$ no outro ramo do sistema, e derivando em seguida em ordem a x, iremos ter que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{2y}{x^3}+\frac{y}{x^2}\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot y+\phi(x)\right]=-\frac{2y}{x^3}+\frac{y}{x^2}\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^{-2}-x^{-1}\right)\cdot y+\phi(x)\right]=-\frac{2y}{x^3}+\frac{y}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(-2\cdot x^{-2-1}-(-1)\cdot x^{-1-1}\right)\cdot y+\phi'(x)=-\frac{2y}{x^3}+\frac{y}{x^2}\Leftrightarrow\left(-2\cdot x^{-3}+x^{-2}\right)\cdot y+\phi'(x)=-\frac{2y}{x^3}+\frac{y}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)\cdot y+\phi'(x)=-\frac{2y}{x^3}+\frac{y}{x^2}\Leftrightarrow-\frac{2y}{x^3}+\frac{y}{x^2}+\phi'(x)=-\frac{2y}{x^3}+\frac{y}{x^2}\Leftrightarrow\phi'(x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\phi(x)=P_x(0)\Leftrightarrow\phi(x)=k$$

Assim sendo teremos então que:

$$F(x;y)=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot y+\phi(x)\Leftrightarrow F(x;y)=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot y+k,\ k=0$$

Logo a solução será: $F(x;y)=C\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot y=C$

3. Para cada uma das equações seguintes determine a função mais geral $f(x;y)$ por forma a ser uma equação diferencial exacta.

a) $f(x;y)dx + \left(2y \cdot e^x + y^2 e^{3x}\right)dy = 0$

R:

Para $f(x;y)$ ser uma equação diferencial exacta terá que se verificar o seguinte: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Ora, sabendo que: $\underbrace{f(x;y)}_{M(x;y)}dx + \underbrace{\left(2y \cdot e^x + y^2 e^{3x}\right)}_{N(x;y)}dy = 0$, então teremos que determinar antes de mais a derivada $\dfrac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y \cdot e^x + y^2 e^{3x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y \cdot e^x\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 e^{3x}\right) = 2y \cdot (x)'_x \cdot e^x + y^2 \cdot (3x)'_x \cdot e^{3x} = 2y \cdot e^x + 3y^2 \cdot e^{3x}$$

Posto isto, teremos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y \cdot e^x + 3y^2 \cdot e^{3x} \Leftrightarrow \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 2y \cdot e^x + 3y^2 \cdot e^{3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\right) = P_y\left(2y \cdot e^x + 3y^2 \cdot e^{3x}\right) \Leftrightarrow f(x;y) = P_y\left(2y \cdot e^x\right) + P_y\left(3y^2 \cdot e^{3x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x;y) = 2 \cdot e^x \cdot P_y(y) + 3 \cdot e^{3x} \cdot P_y\left(y^2\right) \Leftrightarrow f(x;y) = 2 \cdot e^x \cdot \frac{y^{1+1}}{1+1} + 3 \cdot e^{3x} \cdot \frac{y^{2+1}}{2+1} + \phi(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x;y) = 2 \cdot e^x \cdot \frac{y^2}{2} + 3 \cdot e^{3x} \cdot \frac{y^3}{3} + \phi(x) \Leftrightarrow f(x;y) = e^x \cdot y^2 + e^{3x} \cdot y^3 + \phi(x)$$

b) $\left[\left(y^2+1\right)\cdot\cos(x)\right]dx+f(x;y)dy=0$

R:

Para $f(x;y)$ ser uma equação diferencial exacta terá que se verificar o seguinte: $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$

Ora, sabendo que: $\underbrace{\left[\left(y^2+1\right)\cdot\cos(x)\right]}_{M(x;y)}dx+\underbrace{f(x;y)}_{N(x;y)}dy=0$, então teremos que determinar antes de mais a derivada $\dfrac{\partial M}{\partial y}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(y^2+1\right)\cdot\cos(x)\right]=\cos(x)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2+1\right)=2y\cdot\cos(x)$$

Posto isto, teremos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Leftrightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=2y\cdot\cos(x)\Leftrightarrow\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}=2y\cdot\cos(x)\Leftrightarrow P\left(\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\right)=P_x\left(2y\cdot\cos(x)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x;y)=P_x\left(2y\cdot\cos(x)\right)\Leftrightarrow f(x;y)=2y\cdot P_x\left(\cos(x)\right)\Leftrightarrow f(x;y)=2y\cdot sen(x)+\phi(y)$$