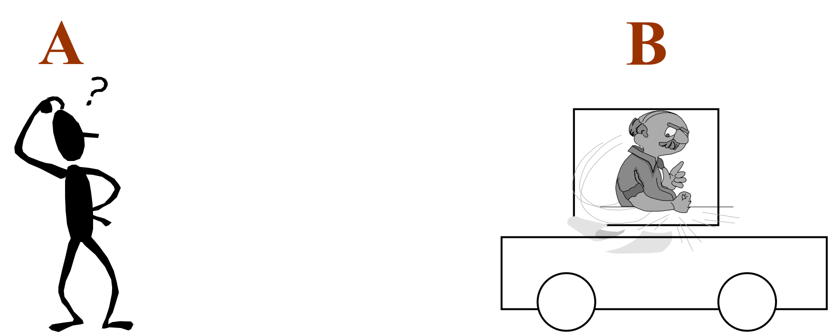
III. Cinemática de partícula

3.1. Introdução

O repouso e o movimento de um corpo são conceitos relativos:

- ***corpo está em movimento se a sua posição relativa a outro objecto varia com o tempo***
- ***corpo está em repouso se a sua posição relativa a outro objecto não varia com o tempo.***

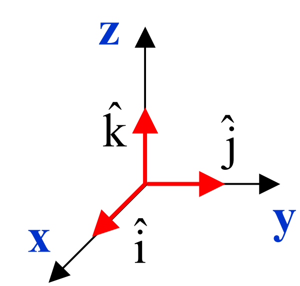


O observador A verifica que o carro se afasta dele.

O observador B verifica que o observador A se afasta dele.

Assim, o primeiro problema que se põe no estudo de um movimento é o da escolha de uma referência.

Tomamos habitualmente como referência a origem de um sistema de três eixos ortogonais - que constitui um referencial.



O lugar geométrico dos pontos do espaço que vão sendo sucessivamente ocupados pela partícula designa-se por <u>trajectória</u>.

Com base na trajectória podemos classificar os movimentos possíveis da partícula como:

Movimentos
- ***rectilíneos***
- ***curvilíneos***
  - ***no plano***
  - ***no espaço***

3.2. Movimentos rectilíneos

Para descrever o movimento de um corpo é necessário conhecer a posição do corpo em cada instante.

Começamos por simplificar: tartaruga = partícula

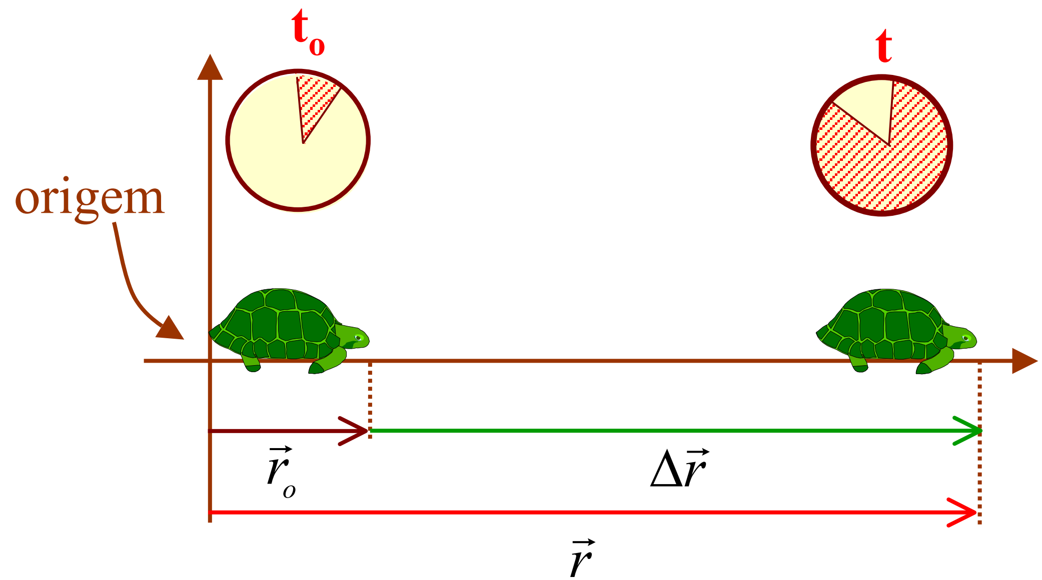
(uma **partícula** é um objecto cuja posição pode ser descrita por um ponto)

O estudo do movimento rectilíneo simplifica-se, se fizermos coincidir um dos eixos do referencial com a direcção do movimento.

Vector posição; Deslocamento

A posição da partícula é, em cada instante, caracterizada pelo vector posição

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i}$$



O vector deslocamento traduz a mudança de posição de um objecto.

É caracterizado por:

direcção - da recta suporte do vector

sentido - aponta da posição inicial para a posição final

módulo - menor distância entre a posição inicial e final

$\Delta\vec{r}$ - vector deslocamento $= (\vec{r} - \vec{r}_o)$ ➡ unidade SI: metro (m)

Velocidade média

Velocidade média da partícula define-se, no intervalo de tempo [t_1, t_2], como o quociente do espaço percorrido pelo tempo que o levou a percorrer:

$$v_{média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{intervalo de tempo}} \Leftrightarrow \vec{v}_{média} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right) \hat{i}$$

unidade SI: (m/s)

Admitindo que $t_1 < t_2$ teremos

se $v_{med} > 0 \;\Rightarrow\; x(t_2) > x(t_1)$	o movimento tem o sentido positivo do eixo Ox.
se $v_{med} < 0 \;\Rightarrow\; x(t_2) < x(t_1)$	o movimento tem o sentido negativo do eixo Ox.

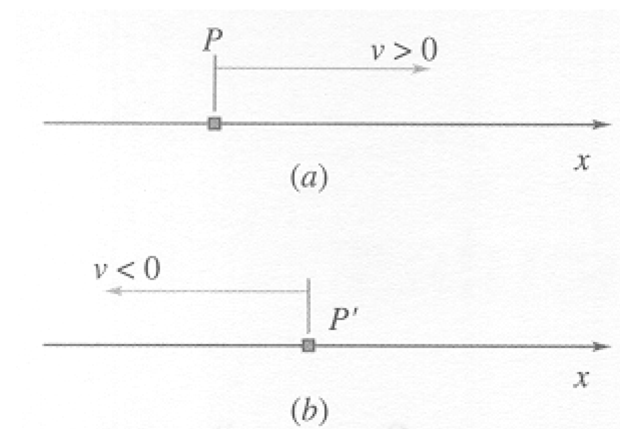
Velocidade instantânea

A velocidade média, devido a ser um valor médio, não contém informação detalhada sobre a mudança de posição.

Quanto menores forem os intervalos de tempo considerados, mais detalhada é a informação sobre a velocidade.

A **velocidade instantânea**, v, indica a velocidade, a direcção e o sentido do movimento de um objecto em cada instante. É igual ao valor limite da velocidade média, quando o intervalo de tempo se torna muito pequeno. Isto é:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right)\hat{i} = \frac{dx}{dt}\hat{i}$$



Aceleração média e instantânea

Aceleração: taxa de alteração da velocidade instantânea.

Aceleração média num dado intervalo de tempo, [t_1, t_2]:

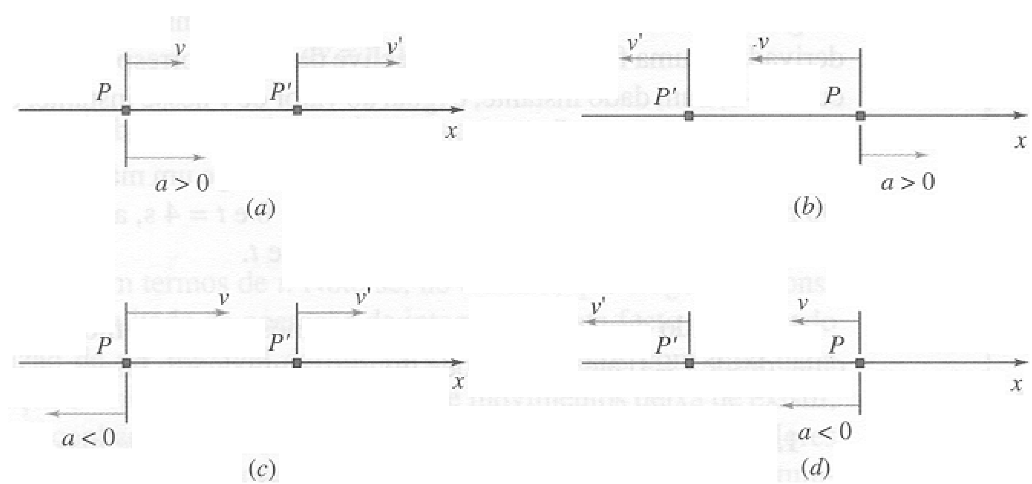
$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Aceleração instantânea é o valor limite da velocidade média, quando o intervalo de tempo tende para zero.

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

Supondo novamente que $t_1 < t_2$, teremos:

- **Se $a > 0 \Rightarrow v(t_2) > v(t_1)$:**
  - **Se $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são positivas, isto significa que a velocidade aumenta, isto é, o movimento é acelerado.**
  - **Mas se $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são negativas, $v(t_2) > v(t_1)$ significa que o valor absoluto (a grandeza) da velocidade em t_2 é menor do que em t_1 e o movimento é retardado.**
- **Se $a < 0 \Rightarrow v(t_2) < v(t_1)$:**
  - **Se $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são positivas a velocidade está a decrescer e o movimento é portanto retardado.**
  - **Mas se $v(t_2)$ e $v(t_1)$ são negativas a velocidade (em grandeza) está a aumentar e o movimento será acelerado.**



- Um movimento em que existe aceleração diz-se ***variado***.
- Se a aceleração é constante dir-se-á ***uniformemente variado***.
- No caso particular de ser $a = 0$ isto significa que a velocidade não varia e o movimento diz-se então ***uniforme***.

$$a.v > 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{movimento acelerado}$$

$$a.v < 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{movimento retardado}$$

Resumo: movimento rectilíneo

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i}$ **Equação de movimento**

$\vec{v} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i}$ **Velocidade**

$\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\hat{i}$ **Aceleração**

Podemos assim escrever: $\boldsymbol{dv = a.dt}$

Esta relação pode ser integrada. Para isso é necessário o conhecimento de um valor da velocidade (v_0 por exemplo) para um dado instante, t_0. Temos então:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt \quad \Rightarrow \quad v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

Do mesmo modo a equação do movimento pode ser obtida por integração uma vez conhecida a lei das velocidades. Tem-se

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{dx = v.dt}$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

Temos assim que a posição da partícula é dada em cada instante, *t*, por:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

Equação de movimento

O deslocamento, entre dois instantes, t_1 e t_2, é dado pela diferença das posições nestes dois instantes:

$$\Delta\vec{r} = \left[x(t_2) - x(t_1)\right]\hat{i}$$

Deslocamento

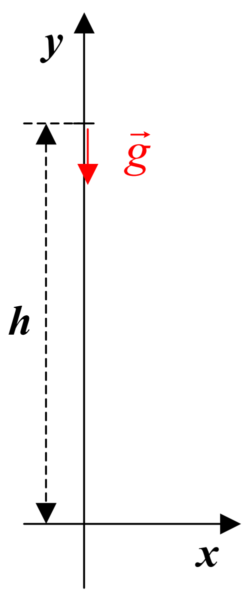
E que pode ser bastante diferente do espaço percorrido, pois a partícula pode inverter o sentido do movimento. Assim, para determinar o espaço percorrido temos que determinar os instantes em que a velocidade se anula, $\{t_1, t_2, t_3, \ldots\}$, e fazer:

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{n} \left| x(t_i) - x(t_{i-1}) \right|$$

Espaço percorrido

Exemplo: Movimento de queda livre

É um movimento rectilíneo com uma aceleração constante, igual à aceleração da gravidade, g, dirigida de cima para baixo. Seja h a altura da qual a partícula cai. O sentido do movimento é descendente. Escolhamos o eixo Oy com a direcção do movimento. A escolha da origem do eixo e do seu sentido positivo é arbitrária. Admitamos que foram as da figura.



Temos assim: $\boldsymbol{a = -g}$

Partícula libertada da altura h $\Rightarrow$ $t = 0,\ v_0 = 0$

$$\int_0^v dv = -\int_0^t g\,dt \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v = -g.t}$$

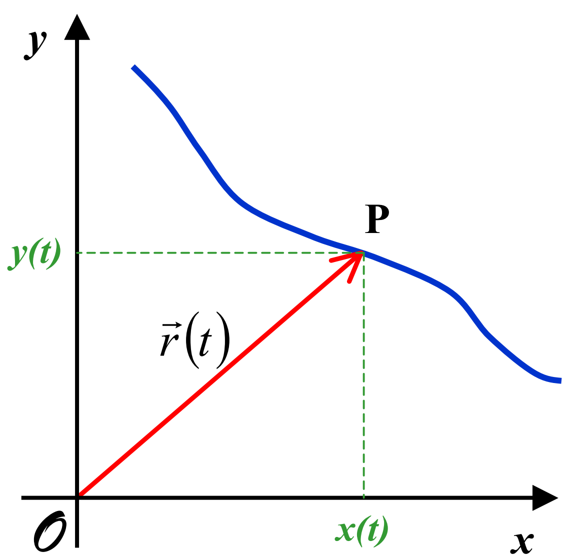
Conhecendo a velocidade, podemos obter a equação de movimento:

$$\int_h^y dy = -\int_0^t gt\,dt \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y - h = -\tfrac{1}{2}\, g.t^2}$$

3.3. Movimentos curvilíneos no plano

3.3.1. Coordenadas cartesianas

A posição de uma partícula que se move numa trajectória plana fica definida se for conhecido, em cada instante, o seu vector posição



$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Se o plano xOy é coincidente com o plano do movimento isto corresponde a conhecer as leis de variação no tempo das suas coordenadas cartesianas, e temos duas equações de movimento

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

Velocidade média:

$$\boxed{\vec{v}_{med} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

Velocidade instantânea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}}$$

Aceleração média:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

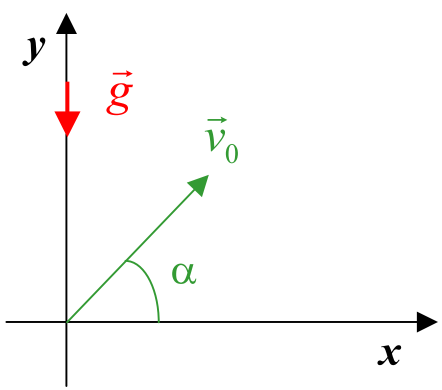
Aceleração instantânea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j}}$$

Exemplo: Movimento de projécteis

O movimento de projécteis constitui um bom exemplo de um movimento plano. Normalmente é conhecida a sua velocidade inicial, de grandeza v_0 e fazendo um ângulo α com a horizontal, para além da aceleração, g. Temos assim:



$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

Integrando:

$$\begin{cases} \int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt = 0 \\ \int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = \int_0^t (-g) dt \end{cases}$$

A partir da figura vemos que as componentes da velocidade inicial são:

$$v_{0x} = v_0 . \cos\alpha$$

$$v_{0y} = v_0 . \mathrm{sen}\alpha$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 sen\alpha - gt \end{cases}$$

Para se obter as leis do movimento integramos novamente:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0 \cos\alpha dt \\ \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t \left(v_0 sen\alpha - gt\right) dt \end{cases}$$

E obtemos:

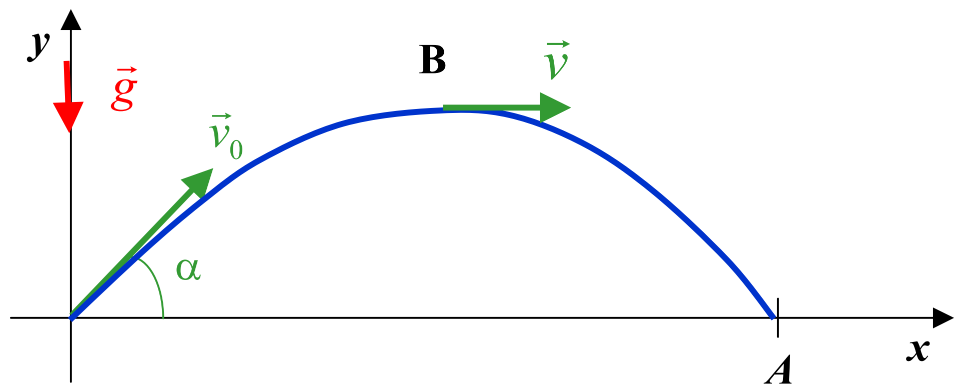
$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = v_0 sen\alpha\, t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Leis do movimento

Eliminando *t* nas equações anteriores obtemos a equação cartesiana da trajectória.

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow y = tg\alpha.x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2$$

Equação de uma parábola



O vértice desta parábola é o ponto B, que satisfaz a condição $dy/dx = 0$ (máximo da função).

Temos assim

$$\frac{dy}{dx}\left(x = x_B\right) = tg\alpha - g\frac{x_B}{v_0^2\cos^2\alpha} = 0$$

$$x_B = \frac{v_0^2 sen\alpha\cos\alpha}{g}$$

Posição do máximo

$$t_B = \frac{v_0 sen\alpha}{g}$$

Tempo, t_B, que a partícula demora a atingir o ponto mais alto da sua trajectória

Outra forma de chegar a este resultado seria notando que, para $t = t_B$, a componente vertical da velocidade se anula, isto é, $v_y(B) = v_0.sen\alpha - g.t_B = 0$, obtendo-se novamente o resultado anterior.

A <u>*altura máxima*</u> atingida pelo projéctil, y_B, será também neste ponto. Assim, substituindo o tempo na equação de y, obtemos

$$h_{max} = y_B = v_0 sen\alpha\, t_B - \frac{1}{2} g t_B^2$$

$$= v_0 sen\alpha \frac{v_0 sen\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 sen^2\alpha}{g^2}$$

$$h_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 sen^2\alpha}{g}$$

A <u>*distância máxima percorrida na horizontal*</u> é x_A. Para a calcular basta notar que, para $x = x_A$, temos $y_A = 0$, isto é

$$y_A = v_0 sen\alpha\, t_A - \frac{1}{2} g t_A^2 = 0$$

em que t_A, o tempo que o projéctil está no ar, é o <u>*tempo de voo*</u> e é a solução não nula desta equação. Temos

$$t_A\left(v_0 sen\alpha - \frac{1}{2} g t_A\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_A = 0 \\ t_A = \dfrac{2 v_0 sen\alpha}{g} \end{cases}$$

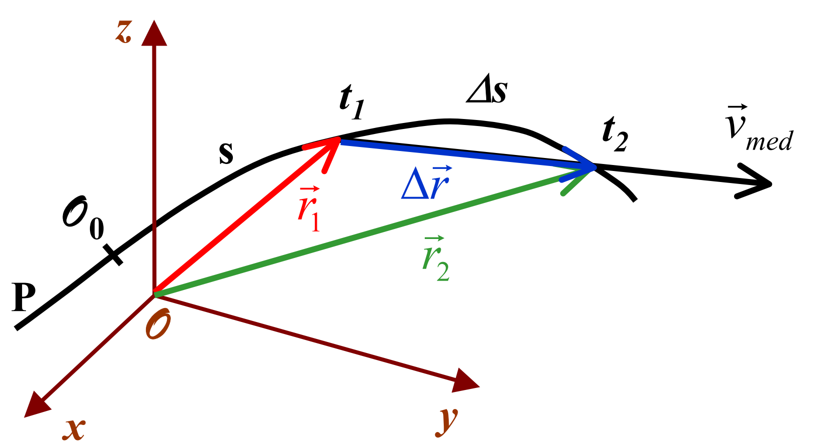
Obtemos assim:

$$x_{max} = x_A = v_0 \cos\alpha \frac{2 v_0 sen\alpha}{g} = \frac{v_0^2 sen(2\alpha)}{g}$$

As grandezas h_{max}, x_{max} e t_A são importantes no estudo de projécteis. Note-se no entanto que as expressões aqui deduzidas para estas grandezas <u>*só são válidas para as condições iniciais consideradas*</u>, isto é, quando temos $x_0 = y_0 = 0$.

3.3.2. Coordenadas intrínsecas

As coordenadas cartesianas são um modo útil de estudar movimentos planos mas fisicamente pouco informativas no que diz respeito aos vectores velocidade e aceleração.

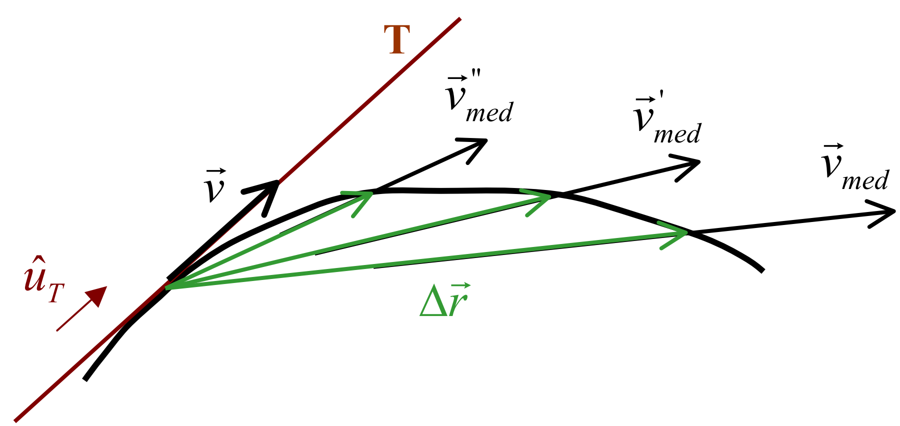


Velocidade média:

$$\vec{v}_{média} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Velocidade instantânea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Quando $\Delta t \to 0$, o módulo do deslocamento tende para Δs,

$$|\Delta\vec{r}| \to \Delta s$$

Se multiplicarmos e dividirmos por *Δs* no cálculo da velocidade, podemos escrever:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \underbrace{\left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right)} \cdot \underbrace{\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)}$$

Versor da tangente à curva:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \hat{u}_T$$

Módulo da velocidade:

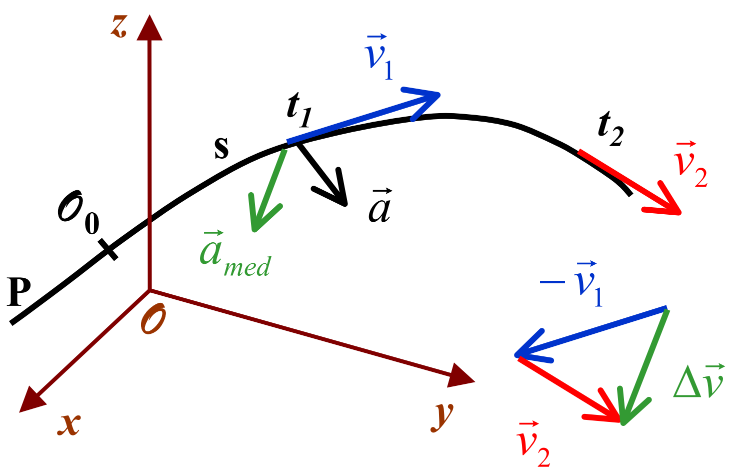
$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{v} = v.\hat{u}_T}$$

Velocidade instantânea

A partir do módulo da velocidade podemos obter a ***lei horária do movimento***, $s = s(t)$:

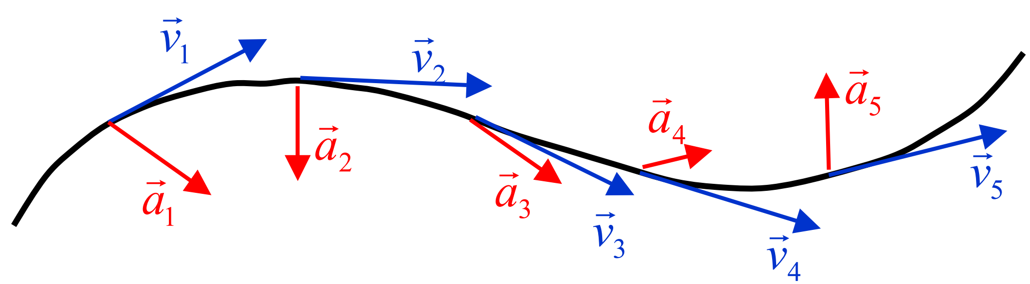
$$ds = v.dt \quad \Rightarrow \quad \int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v dt \quad \Rightarrow \quad s - s_0 = \int_0^t v dt$$



Aceleração média

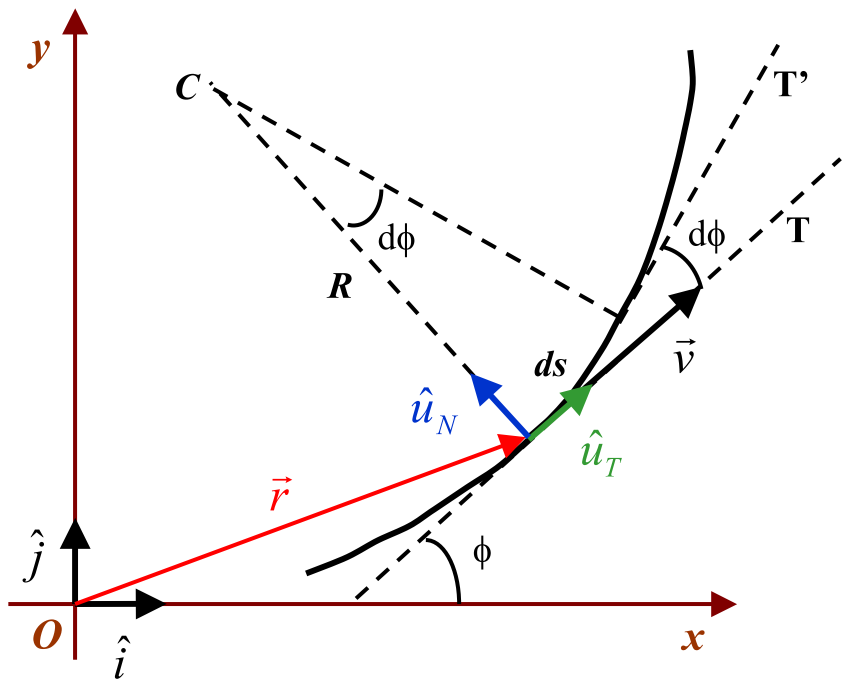
$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

A aceleração é um vector que tem a direcção e o sentido da concavidade da curva mas que, em geral, não será tangente nem perpendicular à trajectória.



Aceleração instantânea:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{d\left(v\hat{u}_T\right)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt} \qquad \left[\hat{u}_T = \hat{u}_T(t)\right]$$



No sistema de eixos considerado podemos escrever imediatamente:

$$\hat{u}_T = \cos\phi\hat{i} + sen\phi\hat{j}$$

$$\hat{u}_N = \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\hat{i} + sen\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\hat{j}$$

$$= -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$$

Assim, e uma vez que o ângulo ϕ varia de ponto para ponto, podemos escrever:

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = -\sin\phi.\frac{d\phi}{dt}\hat{i} + \cos\phi.\frac{d\phi}{dt}\hat{j} = \left(-\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}\right)\frac{d\phi}{dt}$$

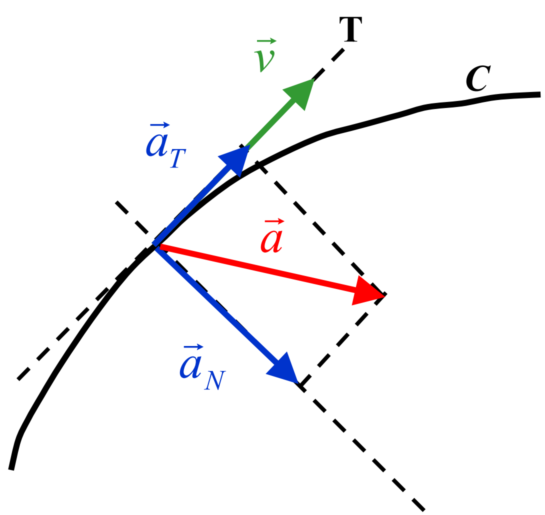
Isto é:
$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{d\phi}{dt}.\hat{u}_N$$

Se **R** for o raio de curvatura da trajectória em A, sabemos que $ds = R.d\phi$, e podemos sempre fazer

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} \cdot v$$

Desta forma, obtemos para a aceleração:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N}$$



Vemos assim que a aceleração se pode decompor em duas componentes, que têm um significado físico imediato:

- a ***componente tangencial***, $a_T = dv/dt$, que está ligada à variação do módulo da velocidade.
- a ***componente normal***, $a_N = v^2/R$, que está ligada à variação da direcção do vector velocidade.

A classificação dos movimentos curvilíneos quanto à aceleração faz-se em termos da variação da grandeza da velocidade, e portanto à custa de ***v*** e de ***a_T = dv/dt***. Analogamente ao movimento rectilíneo temos

$$v.a_T = v \cdot \frac{dv}{dt} > 0$$ **Movimento acelerado**

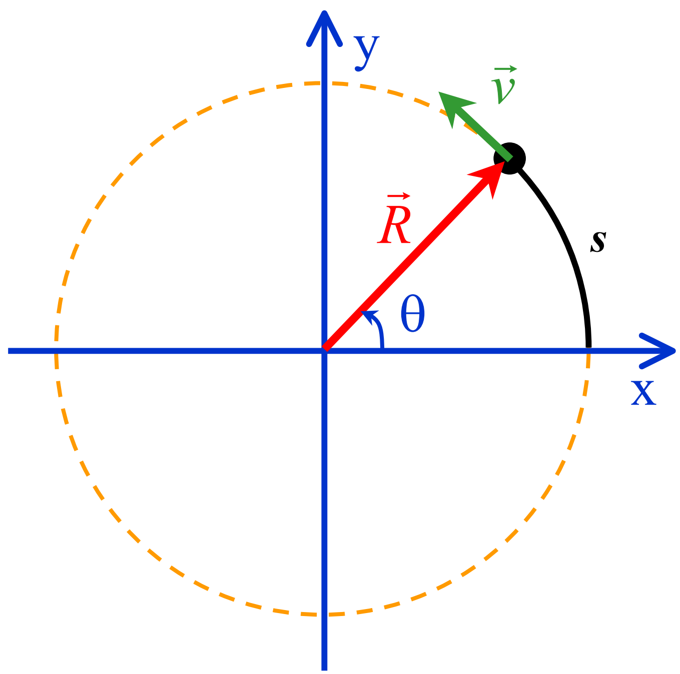
$$v.a_T = v \cdot \frac{dv}{dt} = 0$$ **Movimento uniforme**

$$v.a_T = v \cdot \frac{dv}{dt} < 0$$ **Movimento retardado**

Se *a_T = dv/dt = const.* o movimento dir-se-á uniformemente variado.

Exemplo: Movimento circular

Um caso em que este tipo de coordenadas é particularmente útil é o do movimento circular. O estudo deste movimento torna-se mais simples se tomarmos como origem do sistema de eixos o centro da circunferência. O arco s, percorrido pela partícula, está relacionado com o ângulo θ por:



$$\boldsymbol{s = R.\theta}$$

Assim, a velocidade vem simplesmente

$$\vec{v} = v.\hat{u}_T = \frac{ds}{dt}\hat{u}_T = R\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_T$$

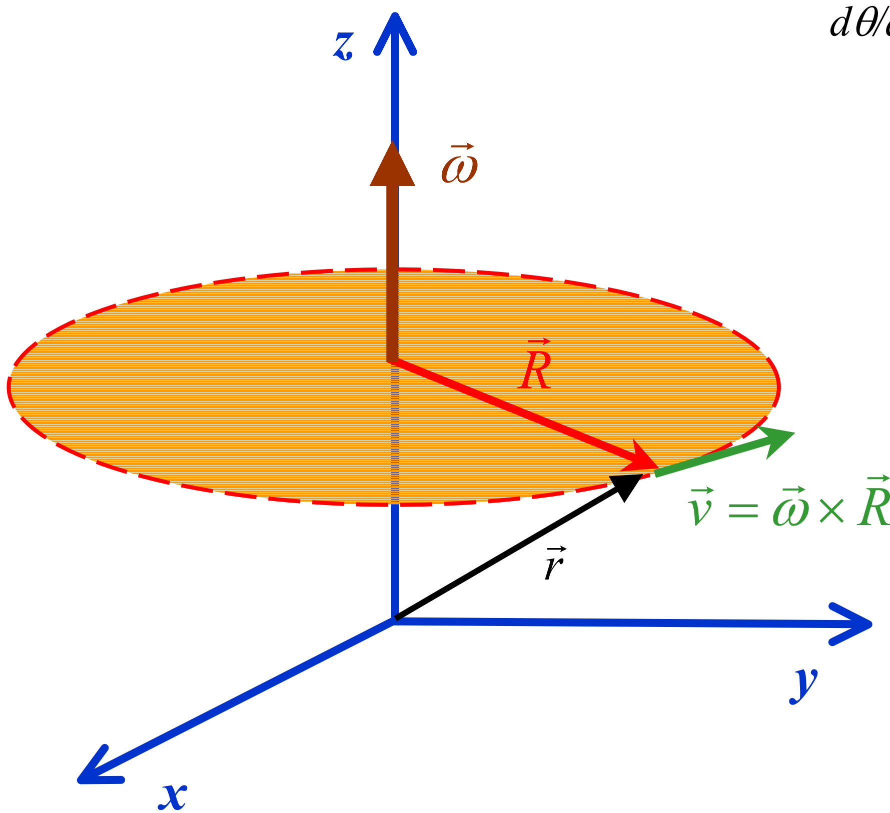
uma vez que neste caso o raio, R, é constante.
A grandeza

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

é designada por ***velocidade angular***, e é igual à taxa de variação do ângulo. Temos assim

$$\vec{v} = v.\hat{u}_T = \omega R\hat{u}_T \quad \Rightarrow \quad v = \omega R$$

É útil em certas situações definir um vector velocidade angular, $\vec{\omega}$, como sendo um vector com a direcção do eixo de rotação, a grandeza $d\theta/dt$ e o sentido tal que se verifique



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Olhando para as duas figuras, vemos que neste caso o vector posição pode ser escrito na forma genérica

$$\vec{r} = R.\left(\cos\theta\,\hat{i} + sen\theta\,\hat{j}\right) + z\hat{k}$$

Neste caso, as duas componentes da aceleração são dadas por

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$$

A quantidade $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$ designa-se por ***<u>aceleração angular</u>*** da partícula. Temos então para a aceleração total:

$$\vec{a} = \alpha R\hat{u}_T + R\omega^2\hat{u}_N$$

Movimento Circular Uniforme

Se o movimento se faz com velocidade angular constante ($\omega = d\theta/dt = const.$) diz-se então uniforme. Neste caso, o intervalo de tempo necessário para a partícula efectuar uma volta completa designa-se por ***<u>período do movimento</u>***, T, e corresponde a uma rotação de $\theta = 2\pi$ rad. A sua relação com ω determina-se facilmente já que

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\theta = \int_{t}^{t+T} \omega dt \quad \Rightarrow \quad 2\pi = \omega.T$$

Isto é: $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ ***<u>Período do movimento</u>***

A frequência do movimento, *f*, é o número de voltas por unidade de tempo, e é o inverso do período:

$$f = 1/T \qquad \Rightarrow \qquad \omega = 2\pi f$$

Podemos neste caso obter também a variação temporal do ângulo

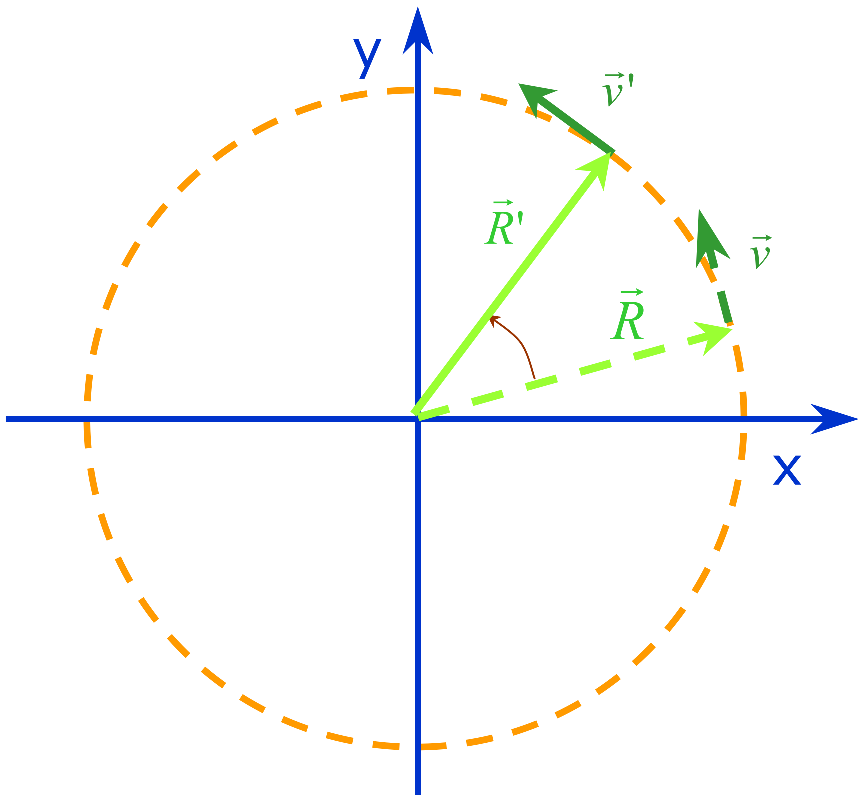
$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow d\theta = \omega dt \Leftrightarrow \int_{\theta_o}^{\theta} d\theta = \int_{t_o}^{t} \omega dt \Leftrightarrow \theta - \theta_o = \int_{t_0}^{t} \omega\, dt$$

$$\Leftrightarrow \theta - \theta_o = \left[\omega\, t\right]_{t_o}^{t}$$

Obtemos assim: $$\boxed{\theta = \theta_o + \omega(t - t_o)}$$

Em coordenadas cartesianas, a posição da partícula é:

$x(t)$ = R.cos($\theta_0+\omega t$) e $y(t)$ = R.sen($\theta_0+\omega t$)



$\boxed{\vec{v}' \neq \vec{v}}$ $\Rightarrow$ Existe aceleração

$$|\vec{a}| = \frac{v^2}{R} \quad \text{ou} \quad |\vec{a}| = \omega^2 R$$

⇓

Radial, aponta para o centro da trajectória.

Movimento circular não uniforme

Existe aceleração angular ($\underline{\alpha}$)

Caso geral $\rightarrow$ α é diferente de zero e variável no tempo:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \qquad \omega - \omega_o = \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \qquad \theta - \theta_o = \int_{t_0}^{t} \omega \, dt$$

Se α é constante:

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

$$\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Movimento circular não uniforme

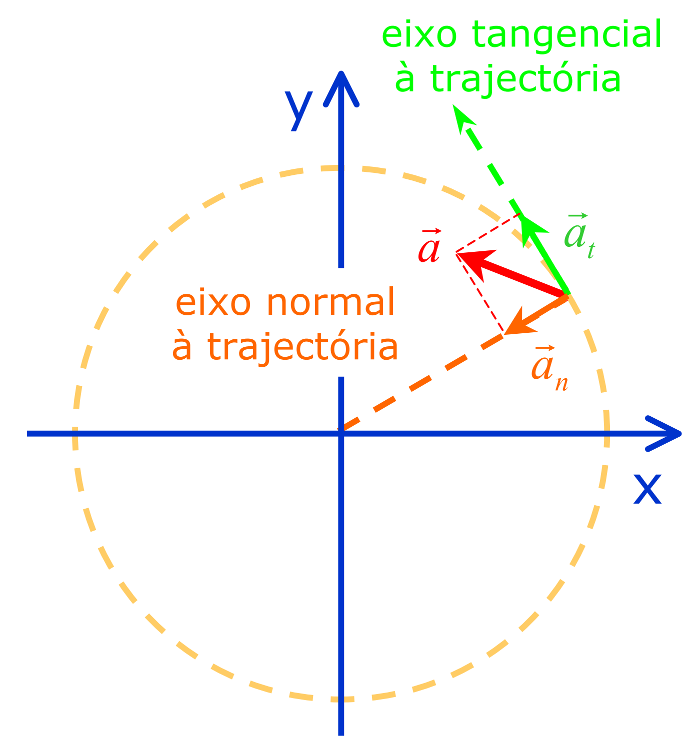
Componentes normal e tangencial da aceleração

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \quad \text{ou} \quad a_t = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

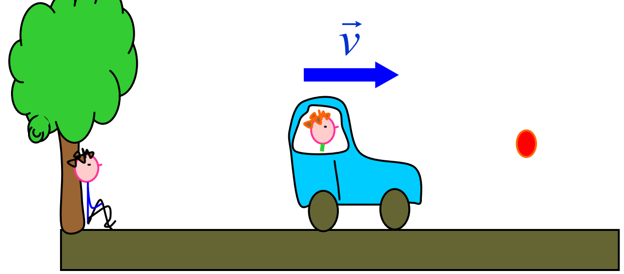
$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\hat{u}_n + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{u}_t$$

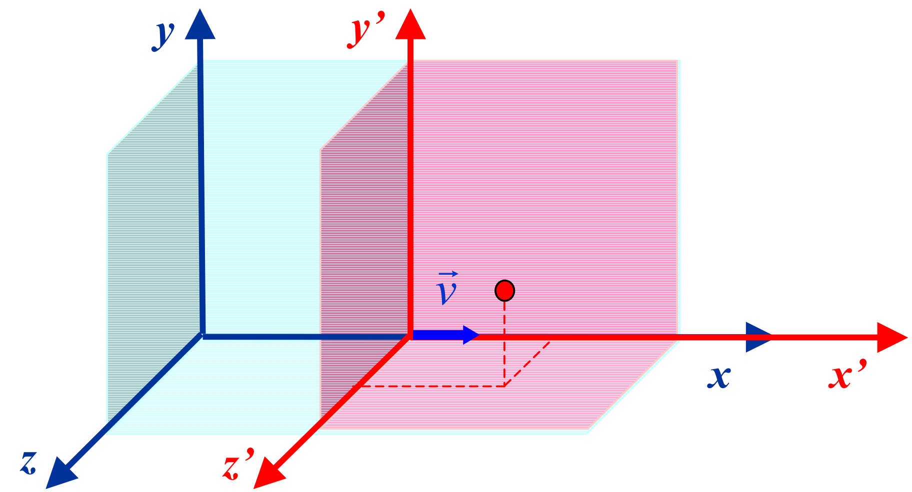


3.4. Movimento relativo. Sistemas de Referência

Problema:

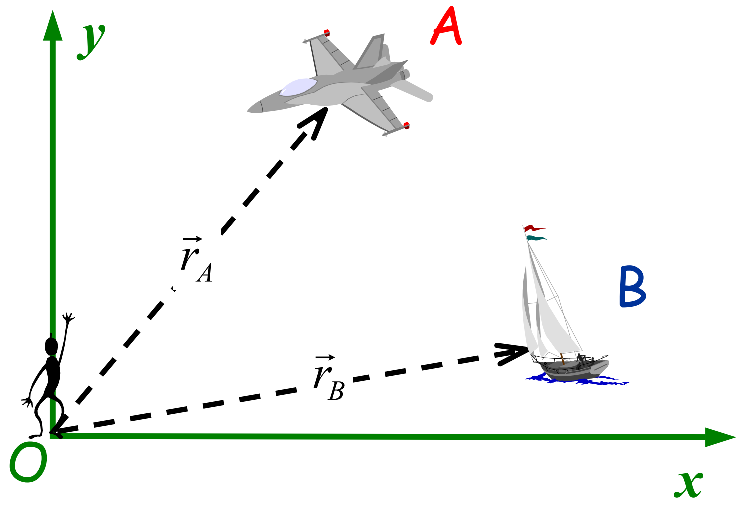
O homem que está de baixo da árvore e o condutor do carro, que se move com velocidade constante $\vec{v}$, observam uma bola vermelha. O movimento da bola, descrito pelos dois observadores é diferente. Como podemos comparar as duas observações ?





Carro = sistema S'; ***Árvore = sistema S;*** ***bola = objecto***

3.4.1. Velocidade relativa

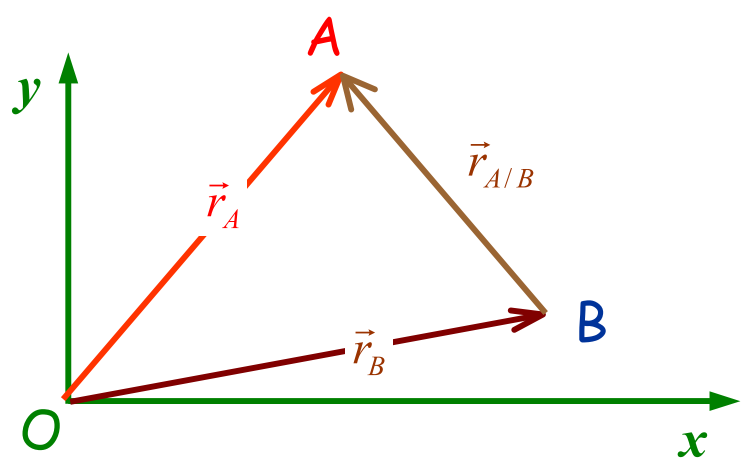


Um observador no ponto O (Terra) vê:

$$\left(\vec{v}_{avião}\right)_{Ref.Terra} = \vec{v}_{A/O}$$

$$\left(\vec{v}_{barco}\right)_{Ref.Terra} = \vec{v}_{B/O}$$

Mas, um observador no barco vê o avião mover-se com uma velocidade: $\vec{v}_{A/B} \neq \vec{v}_{B/O}$



Temos assim, relativamente a O:

$$\vec{v}_{A/O} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$$

$$\vec{v}_{B/O} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B$$

De igual forma, podemos definir as velocidades relativas da forma:

$$\vec{v}_{A/B} = \frac{d\vec{r}_{A/B}}{dt}$$ ***Velocidade de A relativamente a B***

$$\vec{v}_{B/A} = \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt}$$ ***Velocidade de B relativamente a A***

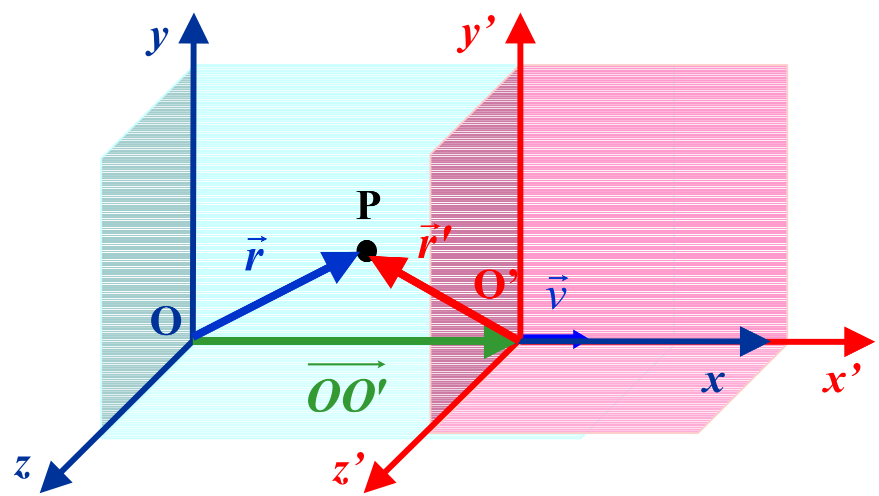
A partir da figura, vemos que: $\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ $\quad$ $\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$

E portanto $\vec{r}_{A/B} = -\vec{r}_{B/A}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A}}$

Derivando os vectores posição, podemos escrever:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_B}{dt} - \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} \\ \dfrac{d\vec{r}_{A/B}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} - \dfrac{d\vec{r}_B}{dt} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \\ \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \end{cases}}$$

3.4.2. Referencial com movimento rectilíneo acelerado



Posição da partícula no referencial **S**:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

Posição da partícula no referencial **S'**:

$$\vec{r}\,' = \overrightarrow{O'P}$$

Estes vectores estão relacionados por:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'$$

Para o observador ***O'*** a velocidade do ponto **P** será:

$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'$$

O observador *O'* vê assim o ponto P deslocar-se com uma velocidade dada por $d\vec{r}\,'/dt$ e que se designa por ***velocidade relativa*** de P, $\vec{v}_{rel}$

O observador *O*, por sua vez, define a velocidade de P como sendo $d\vec{r}/dt$

e esta será a ***velocidade absoluta*** de P porque é calculada num referencial em repouso.

Temos pois que

$$\vec{v}_{abs} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{v}_{rel} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt}$$

Para acharmos uma relação entre estas velocidades derivamos $\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'$

$$\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\text{Velocidade absoluta}} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}_{\text{Velocidade de transporte}} + \underbrace{\frac{d\vec{r}\,'}{dt}}_{\text{Velocidade relativa}}$$

Temos assim

$$\boxed{\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{tr} + \vec{v}_{rel}}$$

Os observadores *O* e *O'* observam, respectivamente, velocidades $\vec{v}_{abs}$ e $\vec{v}_{rel}$ que são diferentes.

O mesmo se passa em relação à aceleração. No referencial S o observador O define $\vec{a}_{abs} = \frac{d\vec{v}_{abs}}{dt}$

e no referencial S' o observador O' define $\vec{a}_{rel} = \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt}$

relacionadas entre si por

$$\frac{d\vec{v}_{abs}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{tr}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{rel}}$$

Movimento rectilíneo uniforme de translação

Suponhamos que temos dois observadores, O e O', um em repouso (O), e o outro com movimento uniforme (O'), de velocidade $\vec{v}$ e que tem a direcção do eixo Ox. Vamos supor, além disso, que para $t = 0$ as origens dos sistemas de coordenadas coincidem. Temos assim

$$\vec{v} = v\hat{i} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OO'} = \vec{v}t$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\vec{v}\,'_A = \vec{v}_A - \vec{v}$$

$$\begin{cases} v'_{Ax} = v_{Ax} - v \\ v'_{Ay} = v_{Ay} \\ v'_{Az} = v_{Az} \end{cases}$$

Transformação de Galileu

Transformação de Galileu

Para fazer a comparação chama-se um "Físico":

1) Carro = sistema S'; Árvore = sistema S; bola = objecto

2) Cada sistema deve ter o seu referencial. Para tornar o problema mais simples escolhem-se eixos paralelos para S e S'. Para facilitar mais ainda escolhem-se os eixos X e X' paralelos à velocidade do sistema S' (do carro, em linguagem corrente).

3) Houve um instante em que a origem do sistema S' coincidiu com a origem do sistema S (em linguagem corrente: houve um momento em que o carro passou pela árvore). Pode-se imaginar que esse instante é o instante T=0. Por outro lado vamos supor que o tempo para ambos os observadores é o mesmo.

Então, de acordo com estes pressupostos:

$$\begin{cases} t = t' \qquad z = z' \\ y = y' \qquad x = x' + vt \end{cases}$$

(verifique!)