INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ENGENHARIA BIOMÉDICA – 1º ano /1º Semestre

2ªParte

27-Jan-2011 **Duração:2h**

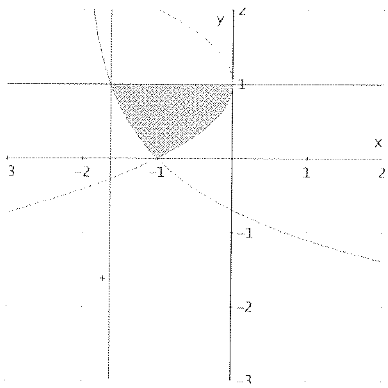
Importante:

Não é permitida a consulta de quaisquer livros ou textos de apoio

A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efectuados.

---

1. Considere a seguinte região do plano:



a)Um dos conjuntos seguintes define a região da figura. Indique, justificando, a sua opção.

$$R_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : e^{-1} - 2 \le x \le 0, e^{-y} - 2 \le x \le -(y-1)^2, y \le 1\}$$

$$R_2 = \{(x,y) \in \Re^2 : e^{-1} - 2 \le x \le 0, e^{-y} - 2 \le x \le -y^2 - 1, y \le 1\}$$

b)Calcule a área da região.

c)Indique, sem calcular, a expressão que lhe permite determinar o volume do sólido que se obtém por rotação da região em torno do eixo das abcissas.

d)Indique, sem calcular, a expressão simplificada que lhe permite determinar o perímetro total da região.

2. Considere a seguinte região do plano:

$$A = \{(x,y) \in \Re^2 : y \le -x^2 - 1 \wedge y \ge -x - 3\}$$

a)Represente A geometricamente e calcule a medida da sua área.

b)Determine uma expressão simplificada, definida por integrais simples, que lhe permita calcular a medida do volume do sólido obtido por rotação de A em torno do eixo YY.

c)Prove que a medida do comprimento do perímetro da região é igual a

$$3\sqrt{2} + \int_{-5}^{-2} \sqrt{\frac{4t+3}{4t+4}}\,dt + 2\int_{-2}^{-1} \sqrt{\frac{4t+3}{4t+4}}$$

3. a)Mostre que $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$ é um integral impróprio e determine a sua natureza. Que pode concluir da natureza do integral $\int_0^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

b)Determine, recorrendo à alínea anterior, a natureza da série $\sum_1^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{n^2}$.

4. Das seguinte expressões, identifique o integral impróprio e determine a sua natureza:

$$\int_{-3/2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx \qquad \int_{1/2}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx \qquad \int_{-1/2}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$$

5. Aplicando o critério da razão, determine os valores de $x \in \Re$ para os quais a série é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n(2n-1)^2}$$

6. Estude a natureza da série:

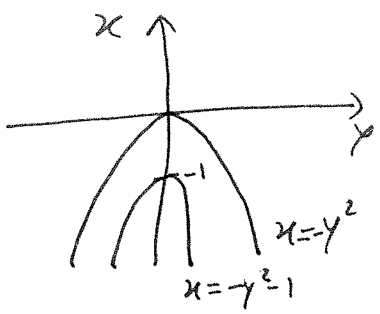
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^n} + \frac{3^{n-1}}{4^{2n+1}}$$

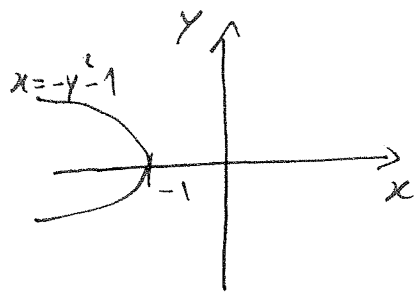
Cotação

1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	3a	3b	4	5	6
1	1,5	1,5	1	2,5	1,5	1	2,5	1	1,5	3	2

Teste 2 – 27 jan. 2011

1\. a)





Esta figura não coincide com a curva parabólica da região logo é o conj. R_1.

b) $$\text{Area} = \int_0^1 -(y-1)^2-(e^{-y}-2)\,dy = \int_0^1 -(y-1)^2 - \int_0^1 e^{-y}-2\,dy =$$

$$= -\left[\frac{(y-1)^3}{3}\right]_0^1 - \left[-e^{-y}-2y\right]_0^1 = -\left(0+\frac{1}{3}\right)-\left(-e^{-1}-2-(-1-0)\right)$$

$$= -\frac{1}{3}+e^{-1}+2-1 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{e}+1.$$

c) $$x = e^{-y}-2 \Leftrightarrow e^{-y} = x+2 \Leftrightarrow -y = \ln(x+2) \Leftrightarrow y = -\ln(x+2)$$

$$x = -(y-1)^2 \Leftrightarrow (y-1)^2 = -x \Leftrightarrow y-1 = \pm\sqrt{-x} \Leftrightarrow y = 1\pm\sqrt{-x}$$

$$Vol_{xx} = \pi\int_{e^{-1}-2}^{-1} 1^2-\left[-\ln(x+2)\right]^2 dx + \pi\int_{-1}^{0} 1^2-\left[1-\sqrt{-x}\right]^2 dx.$$

d) $$\text{Perímetro} = 2-\frac{1}{e}+\int_{e^{-1}-2}^{-1}\sqrt{1+\left[(-\ln(x+2))'\right]^2}\,dx+\int_{-1}^{0}\sqrt{1+\left[(1-\sqrt{-x})'\right]^2}\,dx$$

$$= 2-\frac{1}{e}+\int_{e^{-1}-2}^{-1}\sqrt{1+\frac{1}{(x+2)^2}}\,dx+\int_{-1}^{0}\sqrt{1+\frac{1}{-x}}\,dx.$$

C. Aux

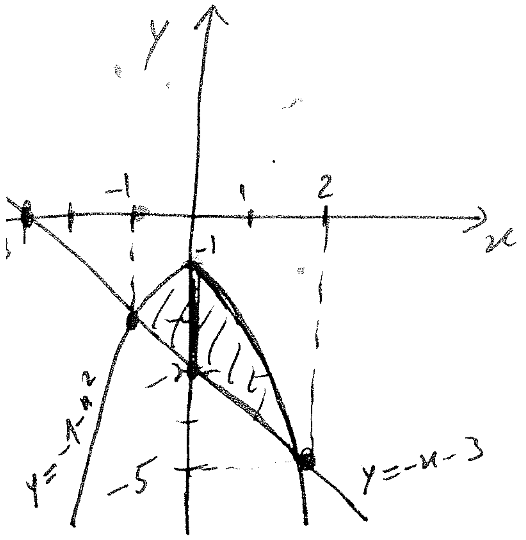
$$(-\ln(x+2))' = -\frac{1}{x+2}$$

$$(1-\sqrt{-x})' = -\frac{1}{2}(-x)^{-\frac{1}{2}}(-1) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$$

2.

a) $y+1=-x^2 \Leftrightarrow y=-1-x^2$

x	$y=-x-3$
0	-3
-3	0



$$\begin{cases} y=-x-3 \\ y=-1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ -x-3=-1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ x=\frac{1\pm\sqrt{1-4(-2)}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ x=\frac{1\pm 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5 \\ x=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-2 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\text{Area} = \int_{-1}^{2} -1-x^2-(-x-3)\,dx = \int_{-1}^{2} -1-x^2+x+3\,dx = \int_{-1}^{2} 2-x^2+x\,dx =$$

$$= \left[2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = 4-\frac{8}{3}+2-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 6-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = 8-3+\frac{1}{2} = \underset{(2)}{5}+\frac{1}{2} = \frac{11}{2}.$$

b) $y+1=-x^2 \Leftrightarrow x^2=-y-1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-y-1}$

$y=-x-3 \Leftrightarrow x=-3-y$

$$Vol_{yy} = \pi\int_{-5}^{-3}\left(\sqrt{-y-1}\right)^2-(-3-y)^2\,dy + \pi\int_{-3}^{-1}\left(\sqrt{-y-1}\right)^2-0\,dy =$$

$$= \pi\int_{-5}^{-3} -y-1-(9+6y+y^2)\,dy + \pi\int_{-3}^{-1} -y-1\,dy =$$

$$= \pi\int_{-5}^{-3} -y-1-9-6y-y^2\,dy + \pi\int_{-3}^{-1} -y-1\,dy =$$

$$= \pi\int_{-5}^{-3} -y^2-7y-10\,dy + \pi\int_{-3}^{-1} -y-1\,dy.$$

2/5

e) $A(-1,-2)$, $B(2,-5)$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\int_{-5}^{-2} \sqrt{1+\left[\left(\sqrt{-y-1}\right)'\right]^2}\, dy + 2\int_{-2}^{-1} \sqrt{1+\left[\left(\sqrt{-y-1}\right)'\right]^2}\, dy =$$

$$= \int_{-5}^{-2} \sqrt{\frac{4y+3}{4y+4}}\, dy + 2\int_{-2}^{-1} \sqrt{\frac{4y+3}{4y+4}}\, dy.$$

c. Aux.

$$\left[\left(\sqrt{-y-1}\right)'\right]^2 = \left[\frac{1}{2}(-y-1)^{-\frac{1}{2}}(-1)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(-y-1)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{4(-y-1)}$$

$$1 + \frac{1}{4(-y-1)} = \frac{4(-y-1)+1}{4(-y-1)} = \frac{-4y-4+1}{-4y-4} = \frac{-4y-3}{-4y-4} = \frac{4y+3}{4y+4}$$

Conclusão: o perímetro da região A tem o valor: $3\sqrt{2} + \displaystyle\int_{-5}^{-2} \sqrt{\frac{4y+3}{4y+4}}\, dy +$

$$+ 2\int_{-2}^{-1} \sqrt{\frac{4y+3}{4y+4}}\, dy.$$

3. É um int. impróprio de 2ª espécie pois o limite de integração $x = 0$ não está no domínio da função integranda e nesse ponto f não é limitada

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx = -\lim_{b\to 0^-} \int_{-1}^{b} \frac{e^{1/x}}{-x^2}\, dx = -\lim_{b\to 0^-} \left[e^{1/x}\right]_{-1}^{b} = -\lim_{b\to 0^-} \left(e^{\overset{-\infty}{1/b}} - e^{-1}\right) =$$

$$= -\left(0 - e^{-1}\right) = \frac{1}{e}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx + \int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx = \lim_{a\to -\infty} \int_{a}^{-1} \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx + \frac{1}{e} =$$

$$= -\lim_{a\to -\infty} \left[e^{1/x}\right]_{a}^{-1} + \frac{1}{e} = -\lim_{a\to -\infty}\left(e^{-1} - e^{1/a}\right) + \frac{1}{e} = -\left(e^{-1} - 1\right) + \frac{1}{e} = 1$$

3/5

4. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 > 0\} =]-\frac{1}{2}, +\infty[$

o int. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$ é i.p. de 2ª espécie pois $x = -\frac{1}{2} \notin D_f$ e f não é limitada nesse ponto

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \lim_{a \to -\frac{1}{2}^+} \int_a^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \lim_{a \to -\frac{1}{2}^+} \left[\sqrt{2x+1}\right]_a^4 =$$

$$= \lim_{a \to -\frac{1}{2}^+} \left(\sqrt{9} - \sqrt{2a+1}\right) =$$

$$= \lim_{a \to -\frac{1}{2}^+} \left(3 - \sqrt{2a+1}\right) = 3, \text{ convergente}$$

C. Aux

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(2x+1)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x+1}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n(2n-1)^2}$$

Critério da razão:

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{(2x-1)^{n+1}}{3^{n+1}(2n+1)^2}}{\frac{(2x-1)^n}{3^n(2n-1)^2}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{|2x-1|^{n+1}\, 3^n (2n-1)^2}{|2x-1|^n\, 3^{n+1}(2n+1)^2} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} |2x-1| \frac{1}{3} \Big(\underbrace{\frac{2n-1}{2n+1}}_{1}\Big)^2 = |2x-1| \cdot \frac{1}{3} < 1$$

(para a série ser convergente)

$\Leftrightarrow |2x-1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x-1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4$

$\Leftrightarrow -1 < x < 2$ a série é absolutamente convergente

Para $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2-1)^n}{3^n(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Analisemos a série dos módulos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{(2n-1)^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

comparando com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ obtém-se:

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$ as séries são da mesma natureza. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente (série de Dirichlet) então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ é convergente

e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-1)^2}$ é absolutamente convergente

Para $x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \times 2-1)^n}{3^n(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

série convergente

Conclusão: A série é convergente para

$x \in [-1, 2]$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^n} + \frac{3^{n-1}}{4^{2n+1}}$

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^n}$:

Analisar a série dos módulos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Pelo critério da raiz $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim \frac{1}{n} = 0 < 1$

$\Rightarrow$ a série é convergente (absolutamente convergente)

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^{2n+1}}$ série geométrica de razão

$$R = \frac{\frac{3^n}{4^{2n+3}}}{\frac{3^{n-1}}{4^{2n+1}}} = \frac{3}{4^2} < 1$$ logo a série é convergente

A soma de 2 séries convergentes é convergente.