Cálculo B

Ficha número 1 — Outubro 2006

Mestrado Integrado em Engenharia: Mecânica, Comunicações.

Funções trigonométricas inversas

1. Calcule :

a) $arcsen(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ **b)** $2arcsen(-1)$

c) $\cos(arcsen\frac{1}{2})$ **d)** $tg\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

e) $cotg\left(arcsen(-\frac{4}{5})\right)$ **f)** $sen(arcsen\left(-\frac{5}{13}\right))$

g) $sen(\frac{\pi}{3} - arctg\frac{4}{5})$ **h)** $\cos\left[arcsen(\frac{1}{2}) - \arccos(\frac{3}{5})\right]$

2. Determine o número real designado por:

a) $arcsen\left(sen\frac{\pi}{2}\right) + 4arcsen(-\frac{1}{2}) + 2arc\cos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

b) $cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right) - sen^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right)$

c) $tg^2(arcsen\frac{3}{5}) - cotg^2\left(arc\cos\frac{4}{5}\right)$

3. Considere as seguintes funções reais de variável real:

a) $f(x) = 2arcsen(2x-1) + \pi$ b) $g(x) = \cos\pi + 3\arccos(1-4x)$

c) $h(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{x+2}\right) + \frac{\pi}{2}$ d) $i(x) = \frac{\pi}{3} + arctg\left(\frac{1}{x+5}\right)$

Determine o domínio e o contradomínio das funções indicadas. Caracterize as suas funções inversas.

4. Considere a função real de variável real definida por,

$$p(x) = \frac{\pi}{3} - 2arccos(x+1)$$

a) Calcule $p(-1) - p(-\frac{3}{2})$.
b) Determine o domínio e o contradomínio da função.
c) Calcule caso existam, os zeros de p.
d) Caracterize a função inversa de p.
e) Resolva a seguinte inequação; $p(x) \leq -\frac{\pi}{3}$.

5. Determine a expressão das derivadas das funções:

a) $f(x) = xarcsen(4x)$ b) $g(t) = arctg^2(7t)$

c) $h(y) = \sqrt{seny} + \arccos(\frac{1}{y})$ d) $i(x) = \cos\left(arctg\left(3x\right)\right)$

e) $j(t) = 3t.arcsen\left(\sqrt{t^2-1}\right)$ f) $m(y) = \frac{1}{\cos y} - arctg(\frac{y}{2})$

6. Considere a função real de variável real definida por,

$$t(x) = \frac{\pi}{4} + arctg\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

a) Calcule $t(0) + t(-2)$.
b) Determine o domínio e o contradomínio de t.
c) Determine o conjunto de solução de $A = \{x \in \mathbb{R} : t(x) > 0\}$.
d) Caracterize a função inversa de t.
e) Escreva a equação da recta tangente de t, no ponto de abcissa 0.
f) Que pode concluir acerca da continuidade de t no ponto de abcissa 0. Justifique a sua resposta.

7. Considere a função real de variável real definida por

$$g(x) = \frac{\pi}{3} + 2arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$$

a) Calcule $g(1) + g(-2)$.
b) Determine o domínio e o contradomínio de g.
c) Determine o conjunto de solução de $A = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq \frac{2\pi}{3}\}$.
d) Caracterize a função inversa de g.
e) Escreva a equação da recta tangente de g, no ponto de abcissa -2.

8. Uma escada de 130 dm está encostada a uma parede. A parte inferior da escada está a escorregar e afasta-se do rodapé da parede a uma velocidade de 50 dm/s. Qual a velocidade a que muda a medida (em radianos) do ângulo entre a escada e o chão no exacto momento em que a escada se situa a uma distância de 120 dm do rodapé da parede?

Cálculo B

Ficha número 2 — Outubro 2006

Mestrado Integrado em Engenharia: Mecânica, Comunicações.

Funções hiperbólicas

Por definição temos:

Coseno hiperbólico	Seno hiperbólico
$chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$shx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
Tangente hiperbólica	Cotangente hiperbólico
$thx = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	$cothx = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

1. Considere a função $f(x) = thx$.
(a) Qual é o domínio de f?
(b) Determine os zeros da função.
(c) Determine os intervalos onde a função toma os valores positivos e os intervalos onde toma os valores negativos.
(d) Quais os intervalos onde a função é crescente? E decrescente?
(e) Calcule $\lim_{x\to+\infty} thx$ e $\lim_{x\to-\infty} thx$.
(f) Esboçe o seu gráfico.

2. Demonstre as seguintes igualdades aplicando a definição.

(a) $ch^2x - sh^2x = 1$
(b) $ch(x+y) = chxchy + shxshy$
(c) $sh(x-y) = shxchy - shychx$

3. Mostre que:

(a) $ch(2x) = ch^2x + sh^2x$
(b) $sh(2x) = 2shxchx$
(c) $coth^2x - cosech^2x = 1$

4. Determine a expressão das derivadas das funções

(a) $f(x) = shx.thx$ (b) $h(x) = e^{3x}\coth(x^2)$

(c) $m(x) = \frac{\ln x}{sh(4x)}$ (d) $r(x) = \frac{sen(3x)}{ch(2x)}$

Funções hiperbólicas inversas

Dada uma função f, relembrar que para definir a função inversa f^{-1}, esta tem que ser injectiva no conjunto considerado. Assim,

$$\boxed{\begin{array}{l} argshx : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \\ argchx : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_0^+ \\ \\ argthx :]-1, 1[\to \mathbb{R} \\ \\ argcothx :]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R} \end{array}}$$

5. Mostre que:

a) $argshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

b) $arg\coth x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $\qquad x > 1 \vee x < -1$

c) $arg\sec hx = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$ $\qquad 0 < x \leq 1$

6. Prove que:

a) $th(ln(x)) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\qquad$ b) $\frac{ch(ln(x))+sh(ln(x))}{ch(ln(x))-sh(ln(x))} = x^2$

7. Escreva a equação da recta tangente ao gráfico da função $f(x) = sh(2x)$, no ponto de abcissa $ln2$.

Cálculo B

Ficha número 3 Outubro/Novembro 2006

Mestrado Integrado em Engenharia: Mecânica, Comunicações.

Primitivação

Note que $P(f(x)) = \int f(x)dx$.

1.Calcule:

a) $P(5k^2x^6)$, com $k \in \mathbb{R}$ b) $P\left(\sqrt[3]{x^2} + 7x + 8\right)$

c) $P\left(\frac{1}{x^5} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$ d) $P\frac{x^3+3\sqrt{x}+4}{x^2}$

e) $P\frac{2}{3x-5}$ f) $P\frac{5x}{4+4x^2}$

g) $P\sqrt{2x+3}$ h) $P\frac{3x}{\sqrt{1+5x^2}}$

2. Determine a função f que verifica a seguinte condição,

a) $f'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ e $f(0) = 2$.

b) O gráfico f passa pelo ponto $(1, 1)$, a tangente ao gráfico nesse ponto tem a equação $x + 2y = 3$ e f verifica a condição $f''(x) = x^2 + 1$.

3. A taxa de crescimento da população de uma cidade é dada por $500t^{1,06}$ em que t é o tempo em anos. A população da cidade é, no momento actual, de 50 mil habitantes. Qual será a população daqui a 10 anos.

4. Determine a primitiva das seguintes funções:

a) $a(x) = x^2 ch\left(x^3\right) + x.4^{x^2}$ b) $c(x) = sen(2x).e^{\cos^2 x}$ c) $c(x) = \frac{2a}{(a-x)^2}$

d) $d(x) = \frac{sh(5x)}{\sqrt[3]{ch^4(5x)}}$ e) $e(x) = \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}$ f) $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

g) $g(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ h) $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4-4}}$ i) $i(x) = \frac{\cos(7x)}{sen^3(7x)}$

j) $j(x) = \frac{(\ln x+e)^4}{x}$ l) $l(x) = x\sqrt{4-x^2}$ m) $m(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x-4}}$

n) $n(x) = x^2\left(x^3+e\right)^4$ o) $o(x) = sen^2\left(4x\right)$ p) $p(x) = tgx$

5. Um motorista trava o seu carro que se movimenta a $72Km/h$, numa estrada sem inclinação, e os travões causam uma desaceleração de $5m/s^2$. Em quantos segundos o carro para? Quantos metros anda o carro desde que o motorista trava até ele parar?

Cálculo B

Ficha número 4 Novembro 2006

Mestrado Integrado em Engenharia: Mecânica, Comunicações.

Primitivação por partes

A fórmula da primitivação por partes é baseada na regra da derivação do produto de duas funções:

$$P(u.v') = u.v - P(u'.v)$$

ou usando outra notação:

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

e é útil para primitivar certos produtos de funções.

Nota: A primitivação por partes aplica-se quando se procura primitivar o produto de duas funções, conhecendo a primitiva de uma delas, pelo menos.

1. Usando a fórmula de primitivação por partes, calcule:

a) $Px.shx$ b) $Px^2 \ln(3x)$ c) $P4x^2e^x$

d) $Pe^x.\cos(2x)$ e) $P\frac{\ln^2 x}{x^3}$ f) $P\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$

g) $P\ arctgx$ h) $Px.\sec^2 x$ i) $P\ arsenx$

Primitivação de funções racionais

Existem vários métodos para primitivar fracções racionais, isto é, funções do tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios em x. O método dos coeficientes indeterminados é frequentemente utilizado (pag. 360 e seguintes, do livro *Calculus* Robert A. Adams.)

2. Calcule a primitiva das seguintes funções racionais:

a) $P\frac{x^2-x+3}{x^2-3x+2}$ b) $P\frac{1}{x(x+1)^2}$ c) $P\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}$

d) $P\frac{x^3+2}{x^3-x}$ e) $P\frac{x^2}{x^4-1}$ f) $P\frac{1}{x^4-x^2}$

g) $P\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$ h) $P\frac{3x^2}{x^4+5x^2+4}$ i) $P\frac{x^2+3x+2}{(x^2+1)x}$

3. Determine a função f que verifica as condições

$$f'(x) = \frac{5}{(x^2+1)(x-2)} \quad \text{e} \quad f(1) = \frac{\pi}{2}.$$

4. Um objecto move-se ao longo de uma recta com velocidade $v(t) = 3t - 1$ (em metros por segundo). Qual o deslocamento do objecto no periodo de tempo $0 \leq t \leq 2$ segundos?

Primitivação de funções trignométricas

5. Calcule a primitiva das seguintes funções:

a) $P\ sen^5 x$ b)$P \cos^4 x$ c) $P\ sen^2 x \cos^2 x$

d) $P\ tg^5 x$ e)$P \coth^4 x$ f) $P\ \frac{1}{ch^6 x}$

Primitivação pelo método da substituição

O cálculo das primitivas de certas funções é mais simples se substituirmos a variável x por uma função de outra variável, $x = \varphi(t)$ (com $\varphi'(t)$ contínua). Nestas condições

$$P_x f(x) = P_t \left[f(\varphi(t)) . \varphi'(t) \right]$$

calculando ambos os membros em pontos correspondentes. É possivel verificar a fórmula anterior derivando ambos os membros da igualdade em ordem à variável t.

6. Calcule a primitiva das seguintes funções, usando a substituição adequada.

a) $Px\sqrt{1+3x}$ b) $P\sqrt{4+x^2}$

c) $P\frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$ d) $P\frac{1}{e^x+1}$

e) $P\sqrt{1-9x^2}$ f) $P\frac{1}{1+sen x - \cos x}$

Cálculo B

Ficha número 5 Novembro 2006

Mestrado Integrado em Engenharia: Mecânica, Comunicações.

Integrais definidos

Teorema Fundamental do Cálculo: Se f é uma função contínua em $[a,b]$ e se F é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$ então

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

1. Utilizando as primitivas já conhecidas e as propriedades dos integrais definidos, calcule:

a) $\int_1^2 \left(5x^4 - 1\right) dx$ b) $\int_{-1}^0 (x+1)^2\ dx$ c) $\int_0^3 (2y-5)^2\ dy$

d) $\int_{-2}^0 \left|x^4 - 1\right|\ dx$ e) $\int_1^2 x \ln x\ dx$ f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t.sent\ dt$

2. Calcule o seguinte integral definido:

$$\int_0^2 f(x)\ dx \text{ sendo } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{2-x} & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

3. Determine todos os valores de $c \in \mathbb{R}$, para os quais $\int_0^c x(1-x)dx = 0$.

4. Determine um polinómio quadrático tal que:

$$p(0) = p(1) = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 p(t)\ dt = 1$$

Teorema: Se f é uma função integrável em $[a,b]$, então $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é uma função contínua em $[a,b]$.
Se f é uma função contínua em $[a,b]$, então $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é uma função derivável em $[a,b]$ e $F'(x) = (\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$.

5. Seja f uma função contínua tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ se verifica a igualdade:

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{4}{3} + 3x^2 + sen(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Calcule $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

6. Seja F uma função de variável $x \in \mathbb{R}$ e definida pela seguinte expressão; $F(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3}dt$. Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de F no ponto de abcissa 0.

7. Sabendo que a função f é contínua e que para todo $x \in \mathbb{R}^+$ tem-se, $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$, calcule $f(2)$.

Mudança de variável: Seja $\varphi : U \to I$ uma aplicação, U e I intervalos reais, φ com derivada contínua e f uma função contínua em I. Então, sendo $\alpha, \beta \in U$, tais que $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$ tem-se,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\ dt$$

8. Calcule o valor dos seguintes integrais definidos, utilizando substituições adequadas:

a) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$ b) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\ dx$ c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\ dx$

d) $\int_0^{3/8} \sqrt{1+4x^2}\ dx$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos x}\ dx$ f) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{2+\cos x}$

9. Seja f uma função cujo o domínio contém $-x$ sempre que contém x. Se f é integravel em $[0,b]$, prove que :

a) $\int_{-b}^b f(x)dx = 0$, se f é ímpar.

b) $\int_{-b}^b f(x)\ dx = 2\int_0^b f(x)dx$, se f é par.

Cálculo B

Ficha número 6 | Novembro 2006

Mestrado Integrado em Engenharia: Mecânica, Comunicações.

Integrais impróprios

I) Integrais do tipo $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)dx$,onde f é uma função integrável no intervalo real $[a,b]$, para todo $b>a$, denominam-se por *integrais impróprios da primeira espécie* (o intervalo considerado é não limitado) e calculam-se, por definição, do seguinte modo:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx} \qquad \boxed{\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{M\to-\infty}\int_M^b f(x)dx}$$

II) Integrais do tipo $\int_a^b f(x)dx$,onde f é uma função integrável no intervalo real $[y,b]$, com $a<y<b$, mas não limitada em $]a,b]$ para todo $b>a$, denominam-se por *integrais impróprios da segunda espécie* (a função integrável é não limitada no intervalo considerado) e calculam-se, por definição, do seguinte modo:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{y\to a^+}\int_y^b f(x)\ dx}$$

1. Classifique os seguintes integrais impróprios quanto à espécie e, usando a definição, verifique se são convergentes ou divergentes:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\ dx$ b) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\ dx$

c) $\int_0^1 \ln x\ dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tgx}{1+sen^2x}\ dx \qquad (t=tgx)$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$ f) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx$

g) $\int_{-1}^1 \frac{1}{2x-1}\ dx$ h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\ dx$

2. Esboce a região limitada pelas condições seguintes e determine a sua área

a) $y\le\frac{1}{x^2}$, $y\ge0$ e $x\ge1$ b) $y\le e^x$, $y\ge0$ e $x\le1$

c) $y\le\frac{1}{\sqrt{x}}$, $y\ge0$, $x>0$ e $x\le16$ d) $y\le\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $y\ge0$, $x>0$ e $x\le8$

3. Dada uma função $f(t)$ e $s>0$ definimos $L\{f\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$.
Calcule $L\{t\}$. (Chamamos a esta transformação a *transformada de Laplace*).

Cálculo B

Ficha número 7 Dezembro 2006

Mestrado Integrado em Engenharia: Mecânica, Comunicações.

Áreas

Seja $f(x)$ e $g(x)$ funções integráveis, verificando a relação $f(x) \geq g(x)$. A região S entre os respectivos gráficos e $x = a$ e $x = b$, é mensurável e a sua área, A é dada pelo integral

$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx}$$

1. Esboçe a região limitada pelas condições seguintes e determine a sua área

a) $y \leq x^2$; $y \geq -x^2$; $x \geq -1$ e $x \leq 1$

b) $y \geq x^2$ e $y \leq 1 - x^2$

c) $x^2 + y^2 \leq 4$; $y \leq x + 2$ e $y \leq -x + 2$

d) $y \leq \sqrt{x}$; $y \geq x$ e $x \leq 2$

e) $y \leq |x - 1|$; $y \geq x^2 - 2x$; $x \geq 1$ e $x \leq 2$

f) $y \geq x^2$; $xy \geq 1$ e $y \leq 4$

Volumes de sólidos de revolução

Os sólidos de revolução são sólidos que podem ser gerados através da rotação de uma área plana em torno de um eixo. O volume de um sólido gerado pela rotação de uma região plana M, limitada pelos gráficos de $y = f(x)$ e$y = g(x)$, e pelas rectas $x = a$ e $x = b$, em torno do eixo OX é:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right)\ dx}$$

2. Faça o esoço da região $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\right\}$ e escreva a expressão que permite determinar o volume gerado pela rotação em torno:

a) do eixo OX;
b) do eixo OY;
c) da recta $y = 5$;
d) da recta $x = -3$

3. Em cada uma das seguintes alíneas, faça um esboço das regiões indicadas e repita o exercício anterior:

a) $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq y^2 + 1 \ ;\ x \geq -y^2 + 1 \ ;\ y \geq 0 \ ;\ y \leq 1\right\}$

b) $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq x \ ;\ y \leq -x^2 + 1 \ ;\ x \geq 0\right\}$

Coordenadas Polares

Num referencial OXY, um ponto P pode ser descrito em termos de coordenadas cartesianas (x, y) ou em coordenadas polares (ρ, θ) onde ϱ é a distância de $\overline{OP}$ e θ é o ângulo que o vector $\overrightarrow{OP}$ faz com a parte positiva do eixo xx. A relação entre as coordenadas cartesianas (x, y) e as coordenadas polares (ρ, θ) é:

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho sen\theta \end{cases}}$$

4. Mostre a equivalência entre as equação polares e cartesianas das curvas seguintes :

a) $x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad$ $\rho = 1 + \cos\theta$ e $\theta \in [0, 2\pi]$

b) $9x^2 + 4y^2 = 36$ $\qquad$ $\rho = \frac{6}{\sqrt{4+5\cos^2\theta}}$ e $\theta \in [0, 2\pi]$

c) $(x-1)^2 + y^2 = 1$ $\qquad$ $\rho = 2\cos\theta$ e $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

d) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = \left|x^2 - y^2\right|$, $y^2 \leq x^2$ $\qquad$ $\rho = \sqrt{|\cos 2\theta|}$ e $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

Área em coordenadas polares

Se uma função é escrita em coordenadas polares (ρ, θ), a área delimitada pela curva $\rho = f(\theta)$ e pelas rectas $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$ é:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 \, d\theta}$$

5. Desenhe o gráfico de f em coordenadas cartesianas e calcule a área do conjunto radial de f no intervalo indicado.

a) $f(\theta) = \theta$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (espiral de Arquimedes)

b) $f(\theta) = 2\cos\theta$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (circunferência tangente OY)

c) $f(\theta) = 1 + \cos\theta$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (cardioide)

6. Esboce os gráficos de $f(\theta) = 2\cos\theta$ e $g(\theta) = 4\cos\theta$, em coordenadas cartesianas e calcule a área limitada pelas duas curvas.

Comprimento de arco de uma curva

Dada f contínua, derivável e f' contínua, então o *comprimento de arco* de uma curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ é dado pela seguinte expressão:

$$\boxed{C = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

Se a curva estiver na forma paramétrica $\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t))$ com $t \in [t_0, t_1]$, o comprimento do arco respectivo é:

$$\boxed{C = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt}$$

7. Determine o comprimento de arco da curva:

a) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ entre $x = 0$ e $x = 1$

b) $y^2 = (x-1)^3$ entre os pontos $(1, 0)$ e $(2, 1)$

c) $y = \ln(\cos x)$ entre $x = \dfrac{\pi}{6}$ e $x = \dfrac{\pi}{4}$

8. Mostre que o perímetro da circunferência de raio a é $2\pi a$.

9. Determine o comprimento de arco de um cicloide de $\begin{cases} x = a(t - sent) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Área da superfície em revolução

Uma superfície em revolução é uma superfície que pode ser gerada pela rotação de uma curva plana em torno de uma recta no plano. Assim, se f' é contínua em $[a, b]$, a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo dos xx é:

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

Se a rotação for em torno do eixo dos yy, a área da superfície assim gerada é:

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

10. Em cada uma das alíneas, escreva a expressão que permite determinar a área da superfície gerada pela rotação das curvas em torno das rectas indicadas:

a) $y = x^2$, com $x \in [0, 2]$ em torno dos eixos xx.

b) $y = x^{\frac{3}{2}}$, com $x \in [0, 1]$ em torno dos eixos yy.

c) $y = e^x$, com $x \in [0, 1]$ em torno da recta $y = -1$.

Cálculo B

Ficha número 8 Dezembro 2006

Mestrado Integrado em Engenharia: Mecânica, Comunicações.

Séries numéricas

A soma de um número infinito de parcelas,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + ...$$

com $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ chamamos uma série numérica. Se somarmos todos os termos de uma progressão geométrica, obtém-se uma série numérica:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n ... = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}r^{k-1}$$

Para calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, utiliza-se a seguinte expressão:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}r^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

1. Verifique quais das seguintes séries são convergentes e calcule a sua soma:

a) $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + ...$ b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ...$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{8^{n+1}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

2. Estude a convergencia das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)+2}{\sqrt{n}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} sen(\frac{1}{n^2})$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt[3]{n^4}}{1+\sqrt[3]{n^5}}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3+3^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2.e^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}.2^n}{\sqrt{n!}}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!.\pi^n}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n\left(\frac{1}{n}\right)$

3. Prove que se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{a}_n$ é convergente e $\mathbf{a}_n \geq 0$ então

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{n})}{1+\mathbf{a}_n}$ é divergente.

4. Prove que se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{a}_n$ é convergente e $\mathbf{a}_n \geq 0$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathbf{a}_n}$ é divergente.

5. Uma bolinha de borracha cai de 10 m e sempre que bate no chão sobe 2/3 da distância percorrida anteriormente. Qual a distância total percorrida pela bolinha até ficar em repouso?

Séries numéricas alternadas

Séries numéricas alternadas são séries cujos termos têem alternadamente sinal positivo e sinal negativo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^n a_n + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \qquad a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Se a série correspondente dos módulos dos termos $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ convergir, então a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ também converge. Diz-se, neste caso, que a série alternada converge absolutamente. Se a série correspondente dos módulos dos termos $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ não convergir, então a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ pode convergir ou pode não convergir. Se a série convergir, diz-se, neste caso, que a série alternada converge simplesmente.

Teste de convergência para séries alternadas:

Considere-se a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$:

Se $|a_{n+1}| \leq |a_n|$,a partir de uma certa ordem N; se $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ então a série alternada converge.

6. Estude a natureza das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4+5}$ **b)** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ **c)** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(-100)^n}$ **e)** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2-n}{n^4+5n+3}$ **f)** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+4}$