Caderno de Exercícios de Análise Matemática II
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica, Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial
Séries Numéricas, Séries de Potências, Séries de Fourier

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra

2010-2011

3.1 Sucessões de números reais

1. Mostre que as sucessões seguintes são limitadas.

   (a) $u_n = (-1)^n + \sin n$ (b) $v_n = \dfrac{4n}{n+6}$ (c) $w_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$.

2. Estude quanto à monotonia as sucessões seguintes.

   (a) $u_n = n - 2^n$ (b) $v_n = \dfrac{4n}{n+6}$ (c) $w_n = \dfrac{n!}{2^n}$.

3. Diga, justificando, se as seguintes sucessões são convergentes. Em caso afirmativo, calcule o seu limite.

   (a) $a_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & n \text{ ímpar} \\ 1 + \frac{1}{n}, & n \text{ par} \end{cases}$;

   (b) $b_n = \begin{cases} 1, & n \leq 1000 \\ \frac{1}{n+2}, & n > 1000 \end{cases}$;

   (c) $b_n = \dfrac{\sin(2n)}{2n}$;

   (d) $a_n = n^{2n+1}$;

   (e) $b_n = \dfrac{\ln(3n+1)}{n}$;

   (f) $a_n = \dfrac{e^n}{n}$;

   (g) $b_n = \dfrac{\ln(2n+1)}{\ln n}$;

   (h) $a_n = \frac{n^2-3}{4n^2+1}$;

   (i) $b_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{n+1}$;

   (j) $a_n = \left(\dfrac{n+7}{n+3}\right)^n$;

   (k) $b_n = \sqrt{n+1} - n + 1$

   (l) $a_n = \sqrt[n]{c},\ c > 0$;

   (m) $b_n = n \sin \dfrac{1}{n^2}$;

   (n) $b_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{(n+3)^2}$;

   (o) $b_n = \sqrt[n]{n}$.

4. Considere a sucessão $\{v_n\}$ com $v_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

   (a) Mostre que $\{v_n\}$ é limitada e monótona e conclua sobre a sua convergência.

   (b) Calcule $\lim v_n$.

5. Considere a sucessão $\{a_n\}$ onde $a_n = r^n$.

   (a) Mostre que $r > 1$ então $\{a_n\}$ é monótona e não limitada. Que conclui sobre a sua convergência?

   (b) Mostre que se $|r| < 1$ então $\{|a_n|\}$ é monótona e limitada. Que conclui sobre a sua convergência?

6. Considere a sucessão $\{u_n\}$ com $u_n = \cos(n\pi) + 2\sin((2n+1)\dfrac{\pi}{2})$.

   (a) Mostre que $u_{2n} = 3$ e $u_{2n+1} = -3$.

   (b) O que pode concluir sobre a convergência de $\{u_n\}$?

7. Sejam $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ duas sucessões tais que $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = 0$ e seja $\{w_n\}$ a sucessão produto das sucessões referidas.

   Dê exemplos de sucessões $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ nas condições referidas e de tal modo que se tenha

   (a) $\lim w_n = +\infty$; (b) $\lim w_n = -\infty$; (c) $\lim w_n = 0$; (d) $\lim w_n = \pi$.

8. Mostre que a soma dos n primeiros termos duma progressão geométrica de razão $r \neq 1$ e primeiro termo a é dada por $S_n = a\dfrac{1-r^n}{1-r}$.

3.2 Séries numéricas

9. Indique os cinco primeiros termos das sucessões das somas parciais das seguintes séries.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 2^{n+1})$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{2^n}$.

10. Seja $\left\{\dfrac{2n+2}{n+2}\right\}$ a sucessão das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Indique o quarto termo da série e a soma dos quatro primeiros termos da série. Verifique se a série é convergente e calcule a sua soma caso seja possível.

11. (a) Indique uma sucessão cujo limite seja $1,\overline{2} = 1,2222\ldots$.
    (b) Indique uma série cuja soma pareça ser $1,\overline{2}$.

12. Determine a natureza e indique, se possível, a soma das séries de termo geral indicado.

    (a) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1},\ n \geq 1$;
    (b) $u_n = 2^{\frac{2}{n}} - 2^{\frac{2}{n+1}},\ n \geq 1$;
    (c) $u_n = 2\cos n\pi,\ n \geq 0$;
    (d) $u_n = (-1)^{2n-1},\ n \geq 0$.

13. Chama-se *série de Mengoli* (ou *série telescópica*) a qualquer série do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+p}),\ \text{com } p \in \mathbb{N}.$$

    Mostre que as séries de termo geral u_n são séries de Mengoli. Determine a sua natureza e, se possível, a sua soma.

    (a) $u_n = \sqrt[3n]{5} - \sqrt[3n+9]{5},\ n \geq 1$;
    (b) $u_n = \ln(1 - \dfrac{1}{n^2}),\ n \geq 2$;
    (c) $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+3},\ n \geq 1$;
    (d) $u_n = \dfrac{1}{n(n+4)},\ n \geq 1$.

14. Chama-se *série geométrica* a qualquer série do tipo $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} ba^n$, com $b \neq 0$.

    Mostre que esta série é convergente e de soma $\dfrac{ba^p}{1-a}$ se $|a| < 1$, e divergente se $|a| \geq 1$.

15. Determine a natureza e, se possível, a soma das séries de termo geral:

    (a) $a_n = \dfrac{5}{2^n},\ n \geq 1$;
    (b) $b_n = 2(-1)^{n+1}(\dfrac{6}{5})^n,\ n \geq 2$;
    (c) $c_n = \dfrac{2^n + 3^n}{6^n},\ n \geq 0$;
    (d) $d_n = \dfrac{3(-1)^{n+1}}{7^n},\ n \geq 0$;
    (e) $e_n = \dfrac{2}{5^n} + (1 - \dfrac{7}{n})^n,\ n \geq 1$;
    (f) $f_n = \begin{cases} 1 + e^{-n}, & n \leq 10^6 \\ \frac{2}{3^{n-1}}, & n > 10^6 \end{cases}$;
    (g) $g_n = \dfrac{\ln(n+7)}{\ln n},\ n \geq 2$;
    (h) $h_n = 5^{3n} 7^{1-n},\ n \geq 2$;
    (i) $i_n = \left(\dfrac{\pi}{e}\right)^n,\ n \geq 2$.

16. Escreva os números seguintes na forma $\dfrac{p}{q}$ com p e q inteiros.

(a) $0,\overline{2} = 0,22222\ldots$; (b) $3,\overline{471} = 3,471471\ldots$; (c) $1,\overline{12} = 1,1212\ldots$.

17. Quando largada de uma altura h metros, uma bola de borracha ao atingir o solo ressalta e atinge uma altura igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}h$ metros. Suponha que a bola é largada de uma altura igual a 1 metro. Prove que se o diâmetro da bola for desprezado, a distância total percorrida pela bola é igual a $(3+2\sqrt{2})$ metros.

18. Uma fonte radioactiva emite em cada ano uma quantidade de radiação igual a $\frac{9}{10}$ da quantidade emitida durante o ano anterior. Suponha que num dado ano a quantidade de radiação emitida foi de 2000 unidades Roetgen (Unidade Internacional dos Raios X). Qual o total de radiações que irão ser emitidas pela fonte a partir desse ano?

19. Mostre que se as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos^2 n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin^2 n$ convergem então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

20. Chama-se *série de Dirichlet* ou *série de Riemann* a qualquer série do tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, onde $p \in \mathbb{R}^+$. Mostre que a série dada é convergente se $p > 1$, e divergente se $p \leq 1$.

21. Use o critério do integral para determinar a natureza das séries seguintes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

22. Determine a natureza das séries de termo geral indicado, aplicando os critérios de comparação:

(a) $\dfrac{\sin^2 n}{n^2}$; (c) $\dfrac{3n}{2n^3+3}$; (e) $\dfrac{1+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^4-2}}$; (g) $\sin^3 \dfrac{\pi}{2n}$;

(b) $\dfrac{\cos^2 n}{2^n}$; (d) $\dfrac{\ln(2n-3)}{n}$; (f) $\dfrac{5}{2^n+n}$; (h) $\tan(\dfrac{\pi}{2n}) \sin(\dfrac{\pi}{3n})$.

23. Determine a natureza das séries de termo geral indicado, aplicando os critérios da raiz e da razão.

(a) $\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$; (d) $n e^{-n^2}$; (g) $\dfrac{(2+(-1)^n)^n}{3^n}$; (i) $\dfrac{5^n+n}{n!+3}$;

(b) $\dfrac{e^{n+1}}{10^{n+2}}$; (e) $\dfrac{3^n n^2}{n!}$; (j) $\left(n \sin \dfrac{\pi}{3^n}\right)^n$.

(c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{1}{n!}$; (f) $\dfrac{(-1)^n n}{n!}$; (h) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

24. Determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, onde os termos a_n são definidos recursivamemte por

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{3n+7}{2n+1} a_n.$$

25. Determine a natureza das séries de termo geral indicado.

(a) $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{2^n}$; (b) $u_n = \tan^{10} \dfrac{\pi^2}{9n}$; (c) $u_n = \dfrac{n}{2n^2-1} \tan^5 \dfrac{\pi}{n}$, $n \geq 3$.

26. Determine a natureza das séries de termo geral indicado.

(a) $u_n = \left(\frac{(-1)^n}{n+3} - \frac{1}{n^2+3}\right)$; (b) $u_n = \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{3^n}\right)$;

(c) $u_n = \frac{\sin^2(n^2)}{n^2}$; (d) $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$; (e) $u_n = \left(\frac{\cos n}{n^2+1} - \frac{n!}{1+2^n}\right)$;

(f) $u_n = \tan\frac{3\pi}{5n^2}$; (g) $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}, n \geq 2$; (h) $u_n = \frac{(-1)^n(5n-\pi)}{n^4+12}$.

27. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots n^2}$, $n \geq 2$.

(a) Indique os primeiros três termos da sucessão.

(b) Averigúe se a afirmação seguinte é verdadeira: $\forall n \geq 2, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
Que conclui acerca da monotonia da sucessão?

(c) Determine a natureza da série $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$.

28. Use o critério do integral para concluir que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ é convergente.

29. Suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com $a_n \neq 0$, é absolutamente convergente. Mostre que

(a) as séries de termo geral $u_n = a_n \cos^2 n$ e $v_n = a_n \sin^2 n$ são absolutamente convergentes.

(b) a série de termo geral $u_n = \frac{n+2}{n} a_n$ é absolutamente convergente;

(c) a série de termo geral $u_n = \sin a_n$ é absolutamente convergente;

(d) a série de termo geral $u_n = \frac{1}{a_n}$ é divergente.

30. (a) Determine a natureza da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+1)}{n} \frac{1}{5^n \sqrt[5]{n+2}}$.

(b) Indique, justificando, o valor de $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n+1)}{n} \frac{1}{5^n \sqrt[5]{n+2}}$.

31. Começando por justificar a convergência das seguintes séries, avalie o erro que se comete ao substituir a sua soma pela soma dos primeiros p termos indicados.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}, \quad p = 12$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{\frac{3}{4}}}, \quad p = 5$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}, \quad p = 3$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad p = 15$.

32. Indique quantos dos primeiros termos das seguintes séries é preciso tomar para calcular a sua soma com a precisão indicada:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad 0,005$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(2n+1)5^n}, \quad 0,001$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n+3}, \quad 0,02$.

3.3 Séries de potências

33. Para cada uma das seguintes séries de potências, determine raio de convergência, e depois investigue a convergência nas extremidades do seu intervalo de convergência (caso este exista).

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n \ln^2 n}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{n+1}}{n+1}$;

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n \cdot (x-3)^n}{n}$;

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$;

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n$;

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$;

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{9^n}$;

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$;

(n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n (x+5)^n$;

(o) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{4^{2n}}$.

34. Determine o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \ \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \dots \ \cdot (2n-1)} x^{2n+1}$.

35. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Determine o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{b^n}$.

36. Mostre que, se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tem raio de convergência r, então a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$ tem raio de convergência $\sqrt{r}$.

37. Aplique a fórmula de Taylor, em $a = 0$, para estabelecer as seguintes fórmulas de aproximação. Indique o grau de precisão se $|x| \leq 0,1$.

(a) $\cos x \simeq 1 - \dfrac{x^2}{2}$;

(b) $e^x \simeq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$;

(c) $\sqrt[3]{1+x} \simeq 1 + \dfrac{1}{3}x$.

38. Determine as séries de Taylor das seguintes funções nas vizinhanças dos pontos indicados e determine os raios de convergência das séries obtidas.

(a) $\dfrac{1}{2-x}, \quad a = 1$;

(b) $e^x, \quad a = -1$;

(c) $\ln(\dfrac{1+x}{1-x}), \quad a = 0$.

39. Determine as séries de Taylor das seguintes funções nas vizinhanças dos pontos indicados e determine os raios de convergência das séries obtidas.

(a) $\dfrac{1}{1-x}, \quad a = 0$;

(b) $\cosh x, \ a = 0$

(c) $3^{-x}, \quad a = 0$

(d) $\ln(1-x), \quad a = 0$;

(e) $\sin x, \quad a = 0$;

(f) $\arctan x, \quad a = 0$.

40. Calcule, usando derivação termo a termo ou integração termo a termo, a soma das séries seguintes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1}$.

41. Calcule, usando derivação termo a termo ou integração termo a termo, a soma das séries seguintes.

    (a) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$

    (b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \cdots n \cdot (n+1)x^{n-1} + \cdots$.

42. Determine o desenvolvimento em série de potências de x de cada uma das funções $f(x)$ e calcule $f^{(n)}(0)$.

    (a) $f(x) = \ln(1+3x)$, (b) $f(x) = \sinh x$.

43. Mostre, usando as séries de Maclaurin apropriadas, que

    (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$;

    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} = -1$;

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} = 1$;

    (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

44. Para cada uma das seguintes séries de funções, determine o conjunto dos pontos onde a série converge. De seguida, procure uma expressão analítica familiar para a sua soma.

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x^n}{n!} + e^{nx})$;

    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sin x)^{2n}}{n!}$;

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

    (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^{2n+1}}{2n+1}$.

45. Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(\sqrt{3})^{2n+1}}$.

46. Obtenha uma valor aproximado de $\displaystyle\int_0^1 \cos(x^2)dx$ e estime o erro da aproximação.

47. Obtenha um valor aproximado dos seguintes integrais, com erro absoluto inferior a ϵ.

    (a) $\displaystyle\int_0^1 \sin(x^2)dx, \quad \epsilon = 5 \times 10^{-5}$;

    (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx, \quad \epsilon = 5 \times 10^{-3}$;

    (c) $\displaystyle\int_{-1}^0 e^{x^3}dx, \quad \epsilon = 5 \times 10^{-6}$.

3.4 Séries de Fourier

48. Determine os coeficientes de Fourier e a série de Fourier da função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \le x < \pi \end{cases} \quad \text{e} \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

49. Utilize a série de Fourier obtida no exercício anterior com $x = \frac{\pi}{2}$ para concluir que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

50. Para cada uma das seguintes funções, periódicas de período 2π, definidas no intervalo $[-\pi,\pi]$ pela expressão correspondente, determine a série de Fourier de f e os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a função coincide com a soma da sua série de Fourier.

(1) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ -1, & \text{se } 0 \le x < \pi \end{cases}$;

(3) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ \cos(x), & \text{se } 0 \le x < \pi \end{cases}$;

(2) $f(x) = x$;

(4) $f(x) = x^2$.

51. Considere a função definida por $f(x) = |x|$, para $-1 \le x \le 1$ e $f(x+2) = f(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(a) Determine a série de Fourier de f. Para que valores de x é $f(x)$ igual à soma da sua série de Fourier?

(b) Mostre que

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

52. Determine as série de Fourier das seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } |x| < 1 \\ 0, & \text{if } 1 \le |x| \le 2 \end{cases}$ e $f(x+4) = f(x)$;

(b) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{if } -4 \le x < 0 \\ 0, & \text{if } 0 \le x < 4 \end{cases}$ e $f(x+8) = f(x)$;

(c) $f(x) = \sin(3\pi x)$, $-1 \le x \le 1$.

53. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π definida por $f(x) = x,\ x \in]-\pi,\pi]$.

(a) Determine a série de Fourier de f.

(b) Calcule a soma da série de Fourier de f.

(c) Mostre que $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

54. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$ e periódica de período 2π, definida por $f(x) = x^2 - \pi x$, $x \in [-\pi,\pi[$.

(a) Verifique que os coeficientes de Fourier de f são

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad b_n = \frac{2\pi(-1)^n}{n}, \quad \text{para } n \ge 1.$$

(b) Escreva a série de Fourier de f.

(c) Determine a soma da série de Fourier de f.

(d) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (Sugestão: Use as alíneas anteriores).

55. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função periódica de período 2π definida por $f(x) = \begin{cases} (\pi - x)^2 & \text{se } x \in [0,\pi] \\ (\pi + x)^2 & \text{se } x \in]-\pi, 0[\end{cases}$

(a) Determine a série de Fourier de f.

(b) Calcule a soma da série de Fourier de f.