1ª Parte

1. Relativamente a cada uma das proposições seguintes, indique se é verdadeira ou falsa, <u>justificando adequadamente</u>:

1.a) A equação diferencial $e^u\ dv + u \cdot v\ du = 0$ é linear qualquer que seja a variável independente considerada?

R: Sabendo que uma equação diferencial linear é dada por: $(1) \cdot \frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$. Então:

- ***Considerando u a variável independente:***

$$e^u\ dv + u \cdot v\ du = 0 \Leftrightarrow \frac{e^u}{e^u}\ dv + \frac{u}{e^u} \cdot v\ du = \frac{0}{e^u} \Leftrightarrow dv + \frac{u}{e^u} \cdot v\ du = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{du} + \underbrace{\frac{u}{e^u}}_{P(u)} \cdot v = \underbrace{0}_{Q(u)} \rightarrow \text{A}$$

equação diferencial *é linear* para $\frac{dv}{du} \Rightarrow (v \text{ depende de } u)$ porque se enquadra na forma geral: $(1) \cdot \frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$.

- ***Considerando v a variável independente:***

$$e^u\ dv + u \cdot v\ du = 0 \Leftrightarrow e^u + u \cdot v\ \frac{du}{dv} = 0 \Leftrightarrow \frac{u \cdot v}{u \cdot v}\ \frac{du}{dv} + \frac{e^u}{u \cdot v} = \frac{0}{u \cdot v} \Leftrightarrow \frac{du}{dv} + v^{-1} \cdot \frac{e^u}{u} = 0 \rightarrow \quad \text{A}$$

equação diferencial *não é linear* para $\frac{du}{dv} \Rightarrow (u \text{ depende de } v)$ porque a equação resultante não se enquadra naquilo que está disposto no caso geral: $(1) \cdot \frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$

Relativamente à equação diferencial $y''+x\cdot y=0$ sabe-se que $f(x)$ é uma solução.

1.b) Então pelo método de redução de ordem, a mudança de variável $y(x)=x\cdot v(x)$ conduz a uma equação diferencial de primeira ordem na variável $v(x)$.

R: O método da redução de ordem implica a seguinte mudança de variável:

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot v(x)\Leftrightarrow y_2(x)=x\cdot v(x)$$

Assim sendo teremos então que:

- $y_2(x)=x\cdot v(x)\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x\cdot v(x))=\frac{d}{dx}(x)\cdot v(x)+x\cdot\frac{d}{dx}(v(x))=v+x\cdot\frac{dv}{dx}$

- $\frac{dy}{dx}=v+x\cdot\frac{dv}{dx}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left[v+x\cdot\frac{dv}{dx}\right]=\frac{dv}{dx}+\frac{d}{dx}\left[x\cdot\frac{dv}{dx}\right]=$

$$=\frac{dv}{dx}+\left[\frac{dx}{dx}\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right)+x\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)\right]=\frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dx}+x\cdot\frac{d^2v}{dx^2}=x\cdot\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}$$

Substituindo agora estes valores ***na equação diferencial dada*** *teremos que:*

$$y''+x\cdot y=0\Leftrightarrow\frac{d^2y}{dx^2}+x\cdot y=0\Leftrightarrow\left[x\cdot\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}\right]+x\cdot[x\cdot v]=0\Leftrightarrow x\cdot\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}+x^2\cdot v=0$$

Conclusão: Tal como se pode verificar *a mudança de variável sugerida conduz a uma equação diferencial de segunda ordem.*

1.c) A transformada de Laplace de $\{t^2 * \cos(t)\}$ é $\dfrac{1}{s^2 \cdot (s^2+1)}$?

R: Sabendo que o ***Teorema da Convolução*** é dado por:

$$L\{f(t) * g(t)\} = L\{f(t)\} \cdot L\{g(t)\} \text{ onde: } f(t) * g(t) = \int_0^t f(x) \cdot g(t-x)dx$$

Então teremos neste caso que:

$$L\{t^2 * \cos(t)\} = \underbrace{L\{t^2\}}_{L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}} \cdot \underbrace{L\{\cos(t)\}}_{L\{\cos(bt)\}=\frac{s}{s^2+b^2}} \Leftrightarrow L\{t^2 * \cos(t)\} = \frac{2!}{s^{2+1}} \cdot \frac{s}{s^2+1^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L\{t^2 * \cos(t)\} = \frac{2 \cdot s}{s^3 \cdot (s^2+1^2)} \Leftrightarrow L\{t^2 * \cos(t)\} = \frac{2}{s^2 \cdot (s^2+1)}$$

Conclusão: Conforme se pode verificar a igualdade apresentada no enunciado é falsa.

1.d) A série de Fourier da função $-x$, no intervalo $-1 < x < 1$, não contém co-senos?

R: Como a função é impar $f(-x) = -f(x)$, então a série de Fourier para o intervalo dado apenas se pode escrever como uma série de senos. Assim sendo é verdade que a série de Fourier da função $-x$ não contém co-senos.

2ª Parte

2. **Resolva o seguinte problema de valor inicial:** $x\dfrac{dy}{dx}-2y=2x^4,\quad x>0,\quad y(2)=8$

R: Sabendo que uma equação diferencial linear é dada por: $(1)\cdot\dfrac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)$. Então:

Considerando x a variável independente:

$x\dfrac{dy}{dx}-2y=2x^4 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}y=\dfrac{2x^4}{x} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx}\underbrace{-\dfrac{2}{x}}_{P(x)}\cdot y=\underbrace{2x^3}_{Q(x)} \rightarrow$ A equação diferencial *é linear*

logo teremos que:

$$\dfrac{dy}{dx}\underbrace{-\dfrac{2}{x}}_{P(x)}\cdot y=\underbrace{2x^3}_{Q(x)} \Rightarrow \mu(x)=e^{\int P(x)\,dx} \Leftrightarrow \mu(x)=e^{\int -\frac{2}{x}dx} \Leftrightarrow ☼$$

Cálculos auxiliares	
$\int -\dfrac{2}{x}dx=-2\cdot\underbrace{\int\dfrac{1}{x}dx}_{\ln\lvert u\rvert}=-2\cdot\ln\lvert x\rvert+C=\ln(x)^{-2}+C$	$☼\Leftrightarrow \mu(x)=e^{\ln x^{-2}} \Leftrightarrow \mu(x)=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$

Multiplicando agora o factor integrante $\mu(x)=\dfrac{1}{x^2}$ pela equação re-arranjada, teremos:

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{dy}{dx}-\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{2}{x}\cdot y=\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot 2x^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x^3}\cdot y=\underbrace{2x}_{\mu(x)\cdot Q(x)}$$

Vamos agora confirmar se o factor integrante foi bem determinado:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)\cdot y)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\cdot y\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot y+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d}{dx}(y)=\left(\frac{(1)'_x\cdot x^2-1\cdot(x^2)'_x}{(x^2)^2}\right)\cdot y+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dx}=$$

$$=\left(-\frac{2x}{x^4}\right)\cdot y+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dx}=\left(-\frac{2}{x^3}\right)\cdot y+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dx}\rightarrow \textit{Está verificado.}$$

Assim sendo teremos então que:

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)\cdot y\right)=\mu(x)\cdot Q(x)\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\cdot y\right)=2x\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\cdot y=\int 2x\,dx\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\cdot y=2\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1}+C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\cdot y=x^2+C\Leftrightarrow y=x^2\cdot x^2+C\cdot x^2\Leftrightarrow y=x^4+C\cdot x^2$$

Calculando agora o valor da constante C, com base no valor inicial dado no enunciado teremos que:

$$y(2)=8\Rightarrow\begin{Bmatrix}x=2\\ y=8\end{Bmatrix}\Rightarrow 8=2^4+C\cdot 2^2\Leftrightarrow 8=16+C\cdot 4\Leftrightarrow C=-2$$

Então teremos finalmente que: $y=x^4-2\cdot x^2$

3. Considere a seguinte equação diferencial: $y'''-4y''+5y'-2y=3-2e^{2x}$

3.a) Mostre que a equação característica associada à correspondente equação homogénea admite as raízes $1, 1\ e\ 2$ **.**

R: A ***equação homogénea associada*** à equação diferencial dada é: $y'''-4y''+5y'-2y=0$

Assim sendo ***a respectiva equação característica*** será: $m^3-4m^2+5m-2=0$

Para verificar o que é pedido teremos que recorrer à ***regra de Ruffini***:

	m^3	m^2	m	$Ind.$
	1	-4	5	-2
$m=1$		1	-3	2
	1	-3	2	0

$$m^3-4m^2+5m-2=0\Leftrightarrow (m-1)\cdot\left(m^2-3m+2\right)=0$$

Posto isto teremos pela ***formula resolvente*** agora que:

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow m = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow m = 1 \vee m = 2$$

Conclusão: *Está então assim verificado que as raízes da equação característica associada à equação homogénea são:* $1, 1$ *e* 2.

3.b) Determine a solução geral da equação diferencial dada.

R: Sabe-se que a solução geral para este tipo de problemas é dada por: $y = y_C + y_P$, então:

- **Cálculo da solução da Equação Homogénea Associada y_C:**

Conforme já se verificou na alínea anterior:

$$m^3 - 4m^2 + 5m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m-1)\cdot(m^2 - 3m + 2) = 0 \Leftrightarrow (m-1)\cdot(m-1)\cdot(m-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 \cdot (m-2) = 0$$

Para raízes de multiplicidade k temos: $y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{m_2 \cdot x}$, sendo a outra raiz do tipo: $y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x}$

Logo teremos que: $y = c_1 \cdot e^{1 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{1 \cdot x} + c_3 \cdot e^{2 \cdot x} \Leftrightarrow y = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot x \cdot e^{x} + c_3 \cdot e^{2x}$

- **Cálculo da solução Particular Associada às Funções C.I. y_P:**

1. ***Funções C.I. existentes:*** $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 3 \cdot \underbrace{1}_{f_1} - 2 \cdot \underbrace{e^{2x}}_{f_2} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_1 = 1 \\ f_2 = e^{2x} \end{Bmatrix}$

2. ***Determinação dos conjuntos C.I.:***

$f_1 = 1 \Rightarrow S_{f_1} = \{1\}$

$$f_2 = e^{2x} \Rightarrow f'_2 = \left(e^{2x}\right)' = \underbrace{2 \cdot e^{2x}}_{f'_2 = e^{2x} = f_2} \Rightarrow f''_2 = \left(2e^{2x}\right)' = \underbrace{4 \cdot e^{2x}}_{f''_2 = e^{2x} = f_2} \Rightarrow S_{f_2} = \left\{\underbrace{e^{2x}}_{f_2}\right\}$$

3. ***Procurar eliminar todos os subconjuntos obtidos em 2.:***

Não há subconjuntos.

4. ***Determinar se algum elemento de S_{f_1} e S_{f_2} verifica a solução da equação homogénea associada:***

Sendo: $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x + c_3 \cdot e^{2x}$, a solução da equação homogénea associada então:

Elemento: 1	$1 = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x + c_3 \cdot e^{2x} \rightarrow$ Não existe nenhum valor atribuível a c_1, c_2 e c_3 que permita verificar a igualdade $1 = 1$, logo: $\lfloor S_{f_1} \rfloor_{alt} = \{1\}$.

Elemento: e^{2x}	$e^{2x} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x + c_3 \cdot e^{2x} \rightarrow$ Se: $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ e $c_3 = 1$ então teremos a identidade $e^{2x} = e^{2x}$, assim sendo teremos que multiplicar este elemento pela menor potência de x que permita inviabilizar este elemento como solução da equação homogénea associada. Então, para $x \cdot e^{2x}$, já não se verifica a identidade $e^{2x} = e^{2x}$ então: $\lfloor S_{f_2} \rfloor_{alt} = \{x \cdot e^{2x}\}$.

5. ***Determinar*** $y_P(x)$***:***

Sendo: $S=\{1; x\cdot e^{2x}\}$, então: $y_P(x)=A\cdot 1+B\cdot x\cdot e^{2x} \Leftrightarrow y_P(x)=A+B\cdot x\cdot e^{2x}$

6. ***Determinar as derivadas de*** $y_P(x)$ ***até à ordem existente na equação diferencial dada:***

Sendo: $y'''-4y''+5y'-2y=3-2e^{2x}$, então:

$$y_P(x)=A+B\cdot x\cdot e^{2x} \Rightarrow y'_P(x)=\left(A+B\cdot x\cdot e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'_P(x)=(B\cdot x)'\cdot e^{2x}+B\cdot x\cdot\left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow y'_P(x)=B\cdot e^{2x}+2B\cdot x\cdot e^{2x}$$

$$y''_P(x)=\left(B\cdot e^{2x}\right)'+\left(2B\cdot x\cdot e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y''_P(x)=B\cdot\left(e^{2x}\right)'+\left[(2B\cdot x)'\cdot e^{2x}+2B\cdot x\cdot\left(e^{2x}\right)'\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y''_P(x)=2B\cdot e^{2x}+2B\cdot e^{2x}+4B\cdot x\cdot e^{2x} \Leftrightarrow y''_P(x)=4B\cdot e^{2x}+4B\cdot x\cdot e^{2x}$$

$$y'''_P(x)=\left(4B\cdot e^{2x}\right)'+\left(4B\cdot x\cdot e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'''_P(x)=8B\cdot e^{2x}+\left[(4B\cdot x)'\cdot e^{2x}+4B\cdot x\cdot\left(e^{2x}\right)'\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'''_P(x)=8B\cdot e^{2x}+\left[4B\cdot e^{2x}+8B\cdot x\cdot e^{2x}\right] \Leftrightarrow y'''_P(x)=12B\cdot e^{2x}+8B\cdot x\cdot e^{2x}$$

7. ***Substituir as derivadas obtidas na equação diferencial dada:***

$$y'''-4y''+5y'-2y=3-2e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l}\left[12B\cdot e^{2x}+8B\cdot x\cdot e^{2x}\right]-4\cdot\left[4B\cdot e^{2x}+4B\cdot x\cdot e^{2x}\right]+5\cdot\left[B\cdot e^{2x}+2B\cdot x\cdot e^{2x}\right]-\\-2\cdot\left[A+B\cdot x\cdot e^{2x}\right]=3-2e^{2x}\end{array}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (12B-16B+5B)\cdot e^{2x}+(8B-16B+10B-2B)\cdot x\cdot e^{2x}-2A=3-2e^{2x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\cdot e^{2x}-2A=3-2e^{2x}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-2\\-2A=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{3}{2}\\B=-2\end{cases}\Rightarrow y_P(x)=-\frac{3}{2}-2x\cdot e^{2x}$$

Logo a solução geral será: $y=y_C+y_P\Leftrightarrow y=\left(c_1\cdot e^{x}+c_2\cdot x\cdot e^{x}+c_3\cdot e^{2x}\right)+\left(-\frac{3}{2}-2x\cdot e^{2x}\right)$

4. Determine, usando a transformada de Laplace, a solução do problema de valor inicial: $\begin{cases}x''-3x'+y'+2x-y=0\\x'+y'-2x+y=0\\x(0)=0,\ x'(0)=0,\ y(0)=-1\end{cases}$

R: Aplicando transformadas de Laplace a todos os membros, teremos que:

$$\begin{cases}x''-3x'+y'+2x-y=0\\x'+y'-2x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}L\{x''\}-3\cdot L\{x'\}+L\{y'\}+2\cdot L\{x\}-L\{y\}=0\\L\{x'\}+L\{y'\}-2\cdot L\{x\}+L\{y\}=0\end{cases}\Leftrightarrow ☼$$

Sabendo que: $L\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^n\cdot L\{f(t)\}-s^{n-1}\cdot f(0)-s^{n-2}\cdot f'(0)-\ldots-s^0\cdot f^{n-1}(0)$

Cálculos Auxiliares
• $L\{x''\}=L\left\{x^{(2)}(t)\right\}=s^2\cdot\underbrace{L\{x(t)\}}_{X(s)}-\underbrace{s^{2-1}}_{=s}\cdot\underbrace{x(0)}_{=0}-\underbrace{s^{1-1}}_{=s^0=1}\cdot\underbrace{x'(0)}_{=0}\Leftrightarrow L\left\{x^{(2)}(t)\right\}=s^2\cdot X(s)$

- $L\{x'\} = L\{x^{(1)}(t)\} = s^1 \cdot \underbrace{L\{x(t)\}}_{X(s)} - \underbrace{s^{1-1}}_{=s^0=1} \cdot \underbrace{x(0)}_{=0} \Leftrightarrow L\{x^{(1)}(t)\} = s \cdot X(s);$
- $L\{x\} = L\{x^{(0)}(t)\} = s^0 \cdot \underbrace{L\{x(t)\}}_{X(s)} = X(s);$
- $L\{y'\} = L\{y^{(1)}(t)\} = s^1 \cdot \underbrace{L\{y(t)\}}_{Y(s)} - \underbrace{s^{1-1}}_{=s^0=1} \cdot \underbrace{y(0)}_{=-1} \Leftrightarrow L\{y^{(1)}(t)\} = s \cdot Y(s) + 1;$
- $L\{y\} = L\{y^{(0)}(t)\} = s^0 \cdot \underbrace{L\{y(t)\}}_{Y(s)} = Y(s);$

Substituindo os valores obtidos na expressão ☼, teremos que:

$$☼ \Leftrightarrow \begin{cases} [s^2 \cdot X(s)] - 3 \cdot [s \cdot X(s)] + [s \cdot Y(s) + 1] + 2 \cdot [X(s)] - [Y(s)] = 0 \\ [s \cdot X(s)] + [s \cdot Y(s) + 1] - 2 \cdot [X(s)] + [Y(s)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (s^2 - 3s + 2) \cdot X(s) + (s-1) \cdot Y(s) = -1 \\ (s-2) \cdot X(s) + (s+1) \cdot Y(s) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} s^2 - 3s + 2 & s-1 \\ s-2 & s+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lozenge$$

→ *Recorrendo agora à "**regra de Cramer**" para resolver esta matriz teremos que:*

- $$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} \overbrace{-1}^{+} & \overbrace{s-1}^{-} \\ -1 & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overbrace{s^2 - 3s + 2}^{+} & \overbrace{s-1}^{-} \\ s-2 & s+1 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow X(s) = \frac{-1 \times (s+1) - (-1) \times (s-1)}{(s^2 - 3s + 2) \times (s+1) - (s-2) \times (s-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{(-s-1) + (s-1)}{(s^2 - 3s + 2) \times (s+1) - \left(s^2 \underbrace{-s - 2s}_{-3s} + 2\right)} \Leftrightarrow X(s) = \frac{-2}{(s^2 - 3s + 2) \times (s + 1 - 1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{-2}{(s^2 - 3s + 2) \times s} \Leftrightarrow^{1} X(s) = \frac{-2}{(s-2) \cdot (s-1) \cdot s}$$

[1] $s^2 - 3s + 2 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow s = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow s = 1 \vee s = 2 \Rightarrow (s-1) \cdot (s-2) = 0$

- $$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix}\overbrace{s^2-3s+2}^{+} & \overbrace{-1}^{-}\\ s-2 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overbrace{s^2-3s+2}^{+} & \overbrace{s-1}^{-}\\ s-2 & s+1\end{vmatrix}}\Leftrightarrow Y(s)=\frac{(s^2-3s+2)\times(-1)-(s-2)\times(-1)}{(s^2-3s+2)\times(s+1)-(s-2)\times(s-1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s)=\frac{-(s^2-3s+2)+(s-2)}{(s^2-3s+2)\times(s+1)-\left(s^2\underbrace{-s-2s}_{-3s}+2\right)}\Leftrightarrow Y(s)=\frac{-s^2+3s-2+s-2}{(s^2-3s+2)\times(s+1-1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s)=\frac{-s^2+4s-4}{(s-2)\cdot(s-1)\cdot s}\,{}^{2}\Leftrightarrow Y(s)=\frac{(s-2)\cdot(s-2)}{(s-2)\cdot(s-1)\cdot s}\Leftrightarrow Y(s)=\frac{(s-2)}{(s-1)\cdot s}$$

Por substituição em ◊ teremos que:

$$\left\{\begin{array}{l}\underbrace{X(s)}_{L\{x(t)\}}=\dfrac{-2}{(s-2)\cdot(s-1)\cdot s}\\ \underbrace{Y(s)}_{L\{y(t)\}}=\dfrac{(s-2)}{(s-1)\cdot s}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\underbrace{L^{-1}\{X(s)\}}_{L^{-1}\{L\{x(t)\}\}=x(t)}=L^{-1}\left\{\dfrac{-2}{(s-2)\cdot(s-1)\cdot s}\right\}\\ \underbrace{L^{-1}\{Y(s)\}}_{L^{-1}\{L\{y(t)\}\}=y(t)}=L^{-1}\left\{\dfrac{(s-2)}{(s-1)\cdot s}\right\}\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x(t)=L^{-1}\left\{\dfrac{-2}{(s-2)\cdot(s-1)\cdot s}\right\}\\ y(t)=L^{-1}\left\{\dfrac{(s-2)}{(s-1)\cdot s}\right\}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x(t)=L^{-1}\left\{\dfrac{A}{(s-2)}+\dfrac{B}{(s-1)}+\dfrac{C}{s}\right\}\\ y(t)=L^{-1}\left\{\dfrac{A}{(s-1)}+\dfrac{B}{s}\right\}\end{array}\right\}\Leftrightarrow☼$$

Cálculos Auxiliares para $x(t)$

$$\frac{-2}{(s-2)\cdot(s-1)\cdot s}=\frac{A}{(s-2)}+\frac{B}{(s-1)}+\frac{C}{s}\Leftrightarrow -2=A\cdot(s-1)\cdot s+B\cdot(s-2)\cdot s+C\cdot(s-2)\cdot(s-1)\Leftrightarrow$$

---

[2] $-s^2+4s-4=0\Leftrightarrow s=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)}\Leftrightarrow s=\dfrac{4\pm 0}{2}\Leftrightarrow s=2\vee s=2\Rightarrow(s-2)\cdot(s-2)=0$

$$\Leftrightarrow -2 = A\cdot\left(s^2 - s\right) + B\cdot\left(s^2 - 2s\right) + C\cdot\left(s^2 - 3s + 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 = \left(A+B+C\right)\cdot s^2 + \left(-A-2B-3C\right)\cdot s + 2C \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = A+B+C \\ 0 = -A-2B-3C \\ -2 = 2C \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = A+B-1 \\ 0 = -A-2B-3\cdot(-1) \\ C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1-B \\ -3 = -(1-B)-2B \\ C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = -1 \end{cases}$$

Cálculos Auxiliares para $y(t)$

$$\frac{s-2}{(s-1)\cdot s} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{s} \Leftrightarrow s-2 = A\cdot s + B\cdot(s-1) \Leftrightarrow s-2 = (A+B)\cdot s - B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = A+B \\ -2 = -B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

Substituindo agora estes valores em ☼ teremos:

$$☼ \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = L^{-1}\left\{\frac{0}{(s-2)} + \frac{1}{(s-1)} + \frac{-1}{s}\right\} \\ y(t) = L^{-1}\left\{\frac{-1}{(s-1)} + \frac{2}{s}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \underbrace{L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\}}_{=e^{a\cdot t},a=1} - \underbrace{L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}}_{=1} \\ y(t) = -\underbrace{L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\}}_{=e^{a\cdot t},a=1} + 2\cdot \underbrace{L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}}_{=1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = e^t - 1 \\ y(t) = -e^t + 2 \end{cases}$$ → ***Solução do problema.***

5. **Considere o PVF:** $\begin{cases} y''+\lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(\pi) = y'(0) = 0 \end{cases}$

5.a) **Mostre que as funções próprias e valores próprios deste problema são, respectivamente,** $\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right]$ **e** $\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$**, com** $n = 0,1,2,...$

R: Vamos começar por determinar as raízes associadas à equação diferencial dada:

$$y''+\lambda y = 0 \Leftrightarrow m^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{-\lambda}$$

Posto isto, vamos estudar individualmente cada um dos valores que λ poderá tomar e encontrar para cada caso uma solução geral:

Se: $\lambda = 0$	$m = \pm\sqrt{-\lambda} \Leftrightarrow m_1 = 0 \vee m_2 = 0$ → Uma raiz real de multiplicidade 2. Para este tipo de raízes temos a seguinte solução na forma geral: $y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{m_2 \cdot x}$ Logo, neste caso teremos: $y = c_1 \cdot \underbrace{e^{0\cdot x}}_{=1} + c_2 \cdot x \cdot \underbrace{e^{0\cdot x}}_{=1} \Leftrightarrow y = c_1 + c_2 \cdot x \Rightarrow y' = c_2$

Se: $\lambda < 0$	$m = \pm\sqrt{\underbrace{-\underbrace{\lambda}_{<0}}_{>0}} \Leftrightarrow m_1 = -\sqrt{-\lambda} \vee m_2 = \sqrt{-\lambda}$ → Duas raízes reais distintas. Para este tipo de raízes temos a seguinte solução na forma geral: $y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + ... + c_n \cdot e^{m_n \cdot x}$ Logo, neste caso teremos: $y = c_1 \cdot e^{\left(-\sqrt{-\lambda}\right)x} + c_2 \cdot e^{\left(\sqrt{-\lambda}\right)x} \Rightarrow$ $\Rightarrow y' = c_1 \cdot \left(-\sqrt{-\lambda}\right) \cdot e^{\left(-\sqrt{-\lambda}\right)x} + c_2 \cdot \left(\sqrt{-\lambda}\right) \cdot e^{\left(\sqrt{-\lambda}\right)x}$

Se: $\lambda > 0$	$m = \pm\sqrt{\underbrace{-\underbrace{\lambda}_{>0}}_{<0}} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\lambda\cdot(-1)} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\lambda}\cdot\underbrace{\sqrt{-1}}_{=i} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\lambda}\cdot i \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m_1 = \underbrace{0}_{=a} - \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{=b}\cdot i \vee m_2 = \underbrace{0}_{=a} + \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{=b}\cdot i \rightarrow$ Duas raízes imaginárias distintas. Para este tipo de raízes temos a seguinte solução na forma geral: $y = c_1\cdot e^{a\cdot x}\cdot\cos(bx) + c_2\cdot e^{a\cdot x}\cdot sen(bx)$ Logo, neste caso teremos: $y = c_1\cdot\underbrace{e^{0\cdot x}}_{=1}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right) + c_2\cdot\underbrace{e^{0\cdot x}}_{=1}\cdot sen\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = c_1\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right) + c_2\cdot sen\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right)\Rightarrow$ $\Rightarrow y' = c_1\cdot\left(-\sqrt{\lambda}\right)\cdot sen\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right) + c_2\cdot\left(\sqrt{\lambda}\right)\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right)$

Atendendo agora aos valores de fronteira apresentados conjuntamente com a equação diferencial, teremos que:

Se: $\lambda = 0$	$\begin{Bmatrix} y(\pi) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1 + c_2\cdot\pi = 0 \\ c_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Se: $\lambda < 0$	$\begin{Bmatrix} y(\pi) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1\cdot e^{\left(-\sqrt{-\lambda}\right)\pi} + c_2\cdot e^{\left(\sqrt{-\lambda}\right)\pi} = 0 \\ c_1\cdot\left(-\sqrt{-\lambda}\right)\cdot e^{\left(-\sqrt{-\lambda}\right)0} + c_2\cdot\left(\sqrt{-\lambda}\right)\cdot e^{\left(\sqrt{-\lambda}\right)0} = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1\cdot e^{\left(-\sqrt{-\lambda}\right)\pi} + c_2\cdot e^{\left(\sqrt{-\lambda}\right)\pi} = 0 \\ c_1\cdot\left(-\sqrt{-\lambda}\right) + c_2\cdot\left(\sqrt{-\lambda}\right) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1\cdot e^{\left(-\sqrt{-\lambda}\right)\pi} + c_2\cdot e^{\left(\sqrt{-\lambda}\right)\pi} = 0 \\ c_2 = \dfrac{c_1\cdot\left(\sqrt{-\lambda}\right)}{\left(\sqrt{-\lambda}\right)} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1\cdot e^{\left(-\sqrt{-\lambda}\right)\pi} + c_1\cdot e^{\left(\sqrt{-\lambda}\right)\pi} = 0 \\ c_2 = c_1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1\cdot\left(e^{\left(-\sqrt{-\lambda}\right)\pi} + e^{\left(\sqrt{-\lambda}\right)\pi}\right) = 0 \\ c_2 = c_1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Se: $\lambda > 0$	$\begin{cases} y(\pi)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)+c_2\cdot sen(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)=0 \\ c_1\cdot(-\sqrt{\lambda})\cdot\underbrace{sen(\sqrt{\lambda}\cdot 0)}_{=0}+c_2\cdot(\sqrt{\lambda})\cdot\underbrace{\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0)}_{=1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} c_1\cdot\cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)+c_2\cdot sen(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)=0 \\ c_2\cdot(\sqrt{\lambda})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1\cdot\cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)=0 \\ c_2=0 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda_n}\cdot\pi)=0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda_n}\cdot\pi=\arccos(0) \Leftrightarrow \sqrt{\lambda_n}\cdot\pi=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n=0,1,... \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{\lambda_n}=\frac{\pi}{2\cdot\pi}+\frac{n\pi}{\pi} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda_n}=\frac{1}{2}+n \Leftrightarrow \left(\sqrt{\lambda_n}\right)^2=\left(\frac{1}{2}+n\right)^2 \Leftrightarrow \lambda_n=\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$ *Assim sendo, e uma vez que* $c_2=0$ *teremos que:* $y=c_1\cdot\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right)+0\cdot sen(\sqrt{\lambda}\cdot x) \Leftrightarrow y=c\cdot\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Para $c=1 \Rightarrow y=\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right)$ **Conclusão:** *A função própria é:* $y=\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right)$ *e o valor próprio é:* $\lambda_n=\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$*, para* $n=0,1,...$*. Está então mostrado o que se pretendia ver mostrado.*

Determine, usando o método de separação de variáveis, a solução do PVF:

5.b)

$$\begin{aligned} &u_{xx} - u_t = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ &u(\pi;t) = 0, \quad u_x(0;t) = 0, \quad t > 0 \\ &u(x;0) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{5x}{2}\right), \quad 0 < x < \pi \end{aligned}$$

R: O ***método da separação de variáveis*** supõe que a solução poderá ser escrita na forma que a seguir se apresenta: $u(x;t) = X(x) \cdot T(t)$.

Assim sendo teremos que:

$$u_t = (u(x;t))'_t = X(x) \cdot T'(t) \;\; ; \;\; u_x = (u(x;t))'_x = X'(x) \cdot T(t) \;\; ; \;\; u_{xx} = (u(x;t))''_x = X''(x) \cdot T(t)$$

Recorrendo agora à expressão dada no enunciado $u_{xx} - u_t = 0$, teremos por substituição que:

$$u_{xx} - u_t = 0 \Leftrightarrow X''(x) \cdot T(t) - X(x) \cdot T'(t) = 0 \Leftrightarrow X''(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot T'(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \\ \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} T'(t) = -\lambda \cdot T(t) \\ X''(x) = -\lambda \cdot X(x) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} T'(t) + \lambda \cdot T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0 \end{Bmatrix} ☼$$

Aplicando agora os valores de fronteira $u(\pi;t) = 0$ e $u_x(0;t) = 0$ *na expressão* $u(x;t) = X(x) \cdot T(t)$, *teremos que:* $\begin{Bmatrix} u(\pi;t) = 0 \\ u_x(0;t) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} X(\pi) \cdot T(t) = 0 \\ X'(0) \cdot T(t) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} X(\pi) = 0 \\ X'(0) = 0 \end{Bmatrix}$

Posto isto teremos então que: $\begin{Bmatrix} X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0 \\ X(\pi) = 0 \,;\, X'(0) = 0 \end{Bmatrix}$, *sendo agora necessário determinar a função e o valor próprio, associados a este sistema.*

Observando atentamente este sistema e comparando-o com o sistema existente na alínea no enunciado principal desta mesma questão, concluímos que ambos apenas diferem na letra escolhida para a variável dependente. Deste modo já sabemos quais são, a função própria e o valor próprio, pelo que:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda\cdot X(x)=0 \\ X(\pi)=0\,;\,X'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow X_n(x)=\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right) \text{ e } \lambda_n=\left(\frac{1}{2}+n\right)^2, \text{ para } n=0,1,...$$

Estudando agora o outro ramo do sistema ☼, teremos que:

$T'(t)+\lambda\cdot T(t)=0 \Leftrightarrow m+\lambda=0 \Leftrightarrow m=-\lambda \rightarrow$ Uma raiz real distinta.

Como é sabido, para este tipo de raízes temos a seguinte solução na forma geral:

$$y(x)=c_1\cdot e^{m_1\cdot x}+c_2\cdot e^{m_2\cdot x}+...+c_n\cdot e^{m_n\cdot x} \Rightarrow y(t)=c_1\cdot e^{m_1\cdot t}+c_2\cdot e^{m_2\cdot t}+...+c_n\cdot e^{m_n\cdot t}$$

Logo, neste caso teremos: $y=c_1\cdot e^{-\lambda\cdot t} \Leftrightarrow T_n(t)=e^{-\lambda_n\cdot t}, \lambda_n=\left(\frac{1}{2}+n\right)^2 \Rightarrow T_n(t)=e^{-\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\cdot t}$

Encontrados os valores de $X_n(x)$ *e de* $T_n(t)$, *vamos agora substitui-los na seguinte expressão:*

$$u_n(x;t)=X_n(x)\cdot T_n(t) \Leftrightarrow u_n(x;t)=\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right)\cdot e^{-\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\cdot t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right)\cdot e^{-\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\cdot t} \Rightarrow u(x;0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right)\cdot \underbrace{e^{-\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\cdot 0}}_{=1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(x;0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right)$$

Igualando agora este $u(x;0)$ que se acabou de determinar com o $u(x;0)$ dado no enunciado teremos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{5x}{2}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right) = -\cos\left(\frac{5x}{2}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x\right) = -\cos\left(\frac{5x}{2}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x = \frac{x}{2} \\ \left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot x = -\frac{5x}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}+n = \frac{x}{2x} \\ \frac{1}{2}+n = -\frac{5x}{2x} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ n = -\frac{5}{2}-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n = 0 \\ n = -3 \end{array}\right\}$$

Assim sendo a solução será dada por:

$$u(x;t) = c_1 \cdot \cos\left(\left(\frac{1}{2}+0\right)\cdot x\right)\cdot e^{-\left(\frac{1}{2}+0\right)^2\cdot t} + c_2 \cdot \cos\left(\left(\frac{1}{2}-3\right)\cdot x\right)\cdot e^{-\left(\frac{1}{2}-3\right)^2\cdot t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(x;t) = c_1 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot t} + c_2 \cdot \cos\left(-\frac{5x}{2}\right)\cdot e^{-\frac{25}{4}\cdot t}$$