1. Considere um sinal discreto aleatório x[n] e a estimativa da sequência de autocorrelação dada por:

$$C_{xx}(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1}x(n).x^{*}(n+m)$$

   a) Sabendo que quando N>>|m| a variância deste estimador é dada por

$$\operatorname{var}[C_{xx}(m)]\approx\frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\left[\phi_{xx}^{2}(r)+\phi_{xx}(r-m)+\phi_{xx}(r+m)\right]$$

   como o classifica relativamente à consistência? Justifique.

   b) Mostre que o valor médio do periodograma é dado por:

$$E[I_N(\Omega)]=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\frac{N-|m|}{N}\phi_{xx}(m)e^{-j\Omega m}$$

   c) Mostre que o valor médio do periodograma está relacionado com a densidade espectral de potência por

$$E[I_N(\Omega)]=P_{xx}(\Omega)*\frac{1}{N}\left(\frac{\sin\left(\Omega\frac{N}{2}\right)}{\sin\frac{\Omega}{2}}\right)^{2}$$

   d) Enuncie e justifique o método de Bartlett para a estimação da densidade espectral de potência. Mostre que este método diminui a resolução espectral. Proponha uma alteração ao método que não apresente esta desvantagem. Em sua opinião este aumento de resolução espectral é efetivo? Justifique.

2. Considere um sistema discreto LTI caracterizado pela função de transferência

$$H(z)=\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

   e ao qual é aplicado um sinal ruído branco de média nula.

   a) Explique o que entende por um sinal ruído branco. Caracterize-o em termos de densidade espectral de potência e sequência de autocorrelação. Justifique.
   b) Dos métodos de estimação espectral que conhece qual o mais indicado para estimar a densidade espetral de potência do processo de saída? Justifique.
   c) Mostre que a autocorrelação do sinal de saída é dada por

$$\varphi_{xx}(m)=\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_{xx}(|m-k|)$$

   d) Considere que dispõe de uma amostra do sinal de saída de 5 pontos {1, -1, 1, 0, -1}. Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $-4\leq m\leq 4$.
   e) Determine o erro do preditor.
   f) Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para m>4 e m<9.
   g) Determine o espectro de máxima entropia do sinal de saída do sistema.

PDS estudo - cont.

① b) $I_N(\Omega) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} C_{xx}(m)\, e^{-j\Omega m}$

$$E\{I_N(\Omega)\} = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N}\, \phi_{xx}(m)\, e^{-j\Omega m}$$

→ indo à alínea anterior

c) $E\{I_N(\Omega)\} = P_{xx}(\Omega) * \left(\frac{\sin N\,\Omega/2}{\sin \Omega/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{N}$

$$\boxed{\begin{array}{l} N-|m| \xleftrightarrow{T.F.} \text{sinc}^2(\Omega/2) \\ \phi_{xx}(\Omega) \xleftrightarrow{T.F.} P_{xx}(\Omega) \end{array}}$$

d) Devido ao facto da variância do periodograma não tender para 0 com o aumento do tamanho da amostra tentou-se arranjar métodos que diminuíssem a variância do periodograma.

Bartlett usou o conhecimento da estatística de que a soma de K variáveis aleatórias todas com a mesma variância geram uma variável aleatória cuja variância é $\frac{1}{K}$ x a variância de cada uma. A forma de conseguir isto é dividir os dados em K segmentos, calcular o periodograma de cada segmento e estimar o espetro do sinal pela média dos periodogramas de cada segmento.

Fazendo uma amostra de N pontos, vamos ter N amostras. Com este método, em cada segmento vamos ter J pontos. No total, temos vamos ter N/J segmentos.

② $w[n] \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow x[n]$

a) Ruído branco - sinal aleatório cujas amostras são não autocorrelacionadas

$$\phi_{ww} = \sigma_w^2\, \delta(m) + m_w^2 = \sigma_w^2\, \delta(m)$$

$$P_{ww} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{ww}(m)\, e^{-j\Omega m} = \sigma_w^2$$

b) Método da entropia máxima, porque processos auto-regressivos têm sequência de autocorrelação infinita e os métodos clássicos truncam a sequência de autocorrelação.

c) $H(z) = \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{X(z)}{W(z)}$ $\quad X(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k X(z) z^{-k} = W(z)$

(IDTFT)

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k\, x[n-k] + w[n]$$

$x[n] = \hat{x}[n] + e[n]$

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k\, x[n-k]$$

$$\underbrace{E\{x[n]x[n+m]\}}= E\left\{\sum_{K=1}^{N} a_K x[n-K]\, x[n-m]\right\}$$

$$\phi_{xx}(m) = \sum_{K=1}^{N} a_K \underbrace{E\{x[n-K]\,x[n-m]\}}$$

$n+m-(n-K) = m+K$
$n-K-(n+m) = -K-m$
$n-m-(n-K) = K-m$
$n-K-(n-m) = (m-K)$

$$c_{xx}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\,x[n+m]$$

d)

$$c_{xx}(0) = \frac{1}{5}(4) = \frac{4}{5}$$

$\longrightarrow$ somatório

$1.1 + (-1).(-1) + 1.1 + (-1).(-1) = 4$

$$c_{xx}(1) = c_{xx}(-1) = \frac{1}{5}(-1-1) = -2/5$$

(3)

$$c_{xx}(2) = c_{xx}(-2) = \frac{1}{5}(1-1) = 0$$

$$c_{xx}(3) = c_{xx}(-3) = \frac{1}{5}(1) = \frac{1}{5}$$

$$c_{xx}(4) = c_{xx}(-4) = \frac{1}{5}(-1) = -\frac{1}{5}$$

$$\underbrace{c_{xx}(K) = c_{xx}(-K)}$$

Isto porque a função é par

e) MMSE — erro preditor

$$MMSE = \phi_{xx}(0) - \sum_{K=1}^{N} a_K \phi_{xx}(K)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(2) & \phi_{xx}(3) \\ \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(2) \\ \phi_{xx}(2) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) \\ \phi_{xx}(3) & \phi_{xx}(2) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(1) \\ \phi_{xx}(2) \\ \phi_{xx}(3) \\ \phi_{xx}(4) \end{bmatrix}$$

Indo à alínea anterior, substituindo os $\phi_{xx}(K)$ pelos $c_{xx}(K).5$

$$\begin{cases} 4a_1 - 2a_2 + a_4 = -2 \\ -2a_1 + 4a_2 - 2a_3 = 0 \\ -2a_2 + 4a_3 - 2a_4 = 1 \\ a_1 - 2a_3 + 4a_4 = -1 \end{cases}$$

$a_2 = 0$

$$MMSE = \frac{4}{5} - \left(a_1\left(-\frac{2}{5}\right) + a_3(1/5) + a_4(-1/5)\right)$$

PDS

f) $\phi_{xx}(5) = a_1\left(-1/5\right) + a_2\left(1/5\right) + a_4\left(-2/5\right)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\downarrow\quad\quad\quad\quad\quad\downarrow\quad\quad\quad\quad\quad\downarrow$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad c_{xx}(4)\quad\quad c_{xx}(3)\quad\quad c_{xx}(1)$

$\phi_{xx}(6) = a_1\,\phi_{xx}(5) + a_2\left(-1/5\right) + a_3\left(1/5\right) + 0$

$\phi_{xx}(7) = a_1\,\phi_{xx}(6) + a_2\,\phi_{xx}(5) + a_3\left(-1/5\right) + a_4\left(1/5\right)$

$\phi_{xx}(8) = a_1\,\phi_{xx}(7) + a_2\,\phi_{xx}(6) + a_3\,\phi_{xx}(5) + a_4\left(-1/5\right)$

g) $P_{xx}(\Omega) = \dfrac{MMSE}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\Omega k}}$