Teoria

→ Equação do **plano tangente** à superfície de equação $F(x;y;z)=0$, em: $P=(x_0;y_0;z_0)$;

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)\cdot(z-z_0)=0$$

→ Equação da **recta normal** ao gráfico de $F(x;y;z)=0$, em: $P=(x_0;y_0;z_0)$;

$$\frac{(x-x_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)}=\frac{(y-y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)}=\frac{(z-z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)}$$

→ A matriz Jacobiana e a matriz Hessiana de uma determinada função $f(x;y;z)$ são dadas por;

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z}\end{bmatrix} \quad ; \quad H=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\end{bmatrix}$$

Assim sendo, o Jacobiano e o Hessiano serão os respectivos determinantes das matrizes anteriores:

$$\det|J| \qquad \text{e} \qquad \det|H|$$

1. Determine as equações do plano tangente e da recta normal aos gráficos das funções dadas nos pontos específicos:

a) $f(x;y) = x^2 + y^2$ **em** $(-2;1)$

R:

Antes de mais vamos começar por rearranjar a expressão dada:

$$f(x;y) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = x^2 + y^2 \Leftrightarrow -x^2 - y^2 + z = 0 \Leftrightarrow F(x;y;z) = 0$$

Posto isto e, sabendo que temos actualmente apenas as coordenadas em x_0 e em y_0, vamos determinar em seguida o valor da coordenada z_0, para assim definirmos o ponto $(x_0;y_0;z_0)$:

$$z_0 = f(x_0;y_0) \Leftrightarrow z_0 = f(-2;1) \Leftrightarrow z_0 = (-2)^2 + 1^2 \Leftrightarrow z_0 = 5 \Rightarrow (x_0;y_0;z_0) = (-2;1;5)$$

Agora teremos que determinar as primeiras derivadas de $F(x;y;z)$ para posteriormente as substituir nas equações pedidas:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x;y;z) = \left(-x^2 - y^2 + z\right)_x' = -2x \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(-2;1;5) = -2 \cdot (-2) = 4$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x;y;z) = \left(-x^2 - y^2 + z\right)_y' = -2y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(-2;1;5) = -2 \cdot 1 = -2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x;y;z) = \left(-x^2 - y^2 + z\right)_z' = 1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(-2;1;5) = 1$$

Assim sendo, teremos então que:

→ Equação do **plano tangente** à superfície de equação $F(x;y;z)=0$, em: $P=(-2;1;5)$;

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P)\cdot(z-z_0)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot(x-(-2))+(-2)\cdot(y-1)+1\cdot(z-5)=0\Leftrightarrow 4\cdot(x+2)-2\cdot(y-1)+(z-5)=0$$

→ Equação da **recta normal** ao gráfico de $F(x;y;z)=0$, em: $P=(-2;1;5)$;

$$\frac{(x-x_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(P)}=\frac{(y-y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)}=\frac{(z-z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}\Leftrightarrow\frac{(x+2)}{4}=\frac{(y-1)}{-2}=\frac{(z-5)}{1}\Leftrightarrow\frac{(x+2)}{4}=-\frac{(y-1)}{2}=(z-5)$$

b) $f(x;y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ **em** $(1;1)$

R:

Antes de mais vamos começar por rearranjar a expressão dada:

$$f(x;y)=\frac{x-y}{x+y}\Leftrightarrow z=\frac{x-y}{x+y}\Leftrightarrow\frac{x-y}{x+y}-z=0\Leftrightarrow F(x;y;z)=0$$

Posto isto e, sabendo que temos actualmente apenas as coordenadas em x_0 e em y_0, vamos determinar em seguida o valor da coordenada z_0, para assim definirmos o ponto $(x_0;y_0;z_0)$:

$$z_0=f(x_0;y_0)\Leftrightarrow z_0=f(1;1)\Leftrightarrow z_0=\frac{1-1}{1+1}\Leftrightarrow z_0=0\Rightarrow(x_0;y_0;z_0)=(1;1;0)$$

Agora teremos que determinar as primeiras derivadas de $F(x;y;z)$ para posteriormente as substituir nas equações pedidas:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x;y;z)=\left(\frac{x-y}{x+y}-z\right)'_x=\left(\frac{x-y}{x+y}\right)'_x-(z)'_x=\frac{(x-y)'_x\cdot(x+y)-(x-y)\cdot(x+y)'_x}{(x+y)^2}=$$

$$=\frac{1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2}=\frac{x+y-x+y}{(x+y)^2}=\frac{2y}{(x+y)^2}\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial x}(1;1;0)=\frac{2\cdot 1}{(1+1)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x;y;z)=\left(\frac{x-y}{x+y}-z\right)'_y=\left(\frac{x-y}{x+y}\right)'_y-(z)'_y=\frac{(x-y)'_y\cdot(x+y)-(x-y)\cdot(x+y)'_y}{(x+y)^2}=$$

$$=\frac{-1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2}=\frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2}=\frac{-2x}{(x+y)^2}\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}(1;1;0)=\frac{-2\cdot 1}{(1+1)^2}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x;y;z)=\left(\frac{x-y}{x+y}-z\right)'_z=\left(\frac{x-y}{x+y}\right)'_z-(z)'_z=-1\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial z}(1;1;0)=-1$$

Assim sendo, teremos então que:

→ Equação do **plano tangente** à superfície de equação $F(x;y;z)=0$, em: $P=(1;1;0)$;

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P)\cdot(z-z_0)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot(x-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(y-1)+(-1)\cdot(z-0)=0\Leftrightarrow\frac{(x-1)}{2}-\frac{(y-1)}{2}-z=0$$

→ Equação da **recta normal** ao gráfico de $F(x;y;z)=0$, em: $P=(1;1;0)$;

$$\frac{(x-x_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(P)}=\frac{(y-y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)}=\frac{(z-z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}\Leftrightarrow\frac{(x-1)}{\frac{1}{2}}=\frac{(y-1)}{-\frac{1}{2}}=\frac{(z-0)}{-1}\Leftrightarrow 2\cdot(x-1)=-2\cdot(y-1)=-z$$

c) $f(x;y)=\cos\left(\frac{x}{y}\right)$ **em** $(p;4)$

R:

Antes de mais vamos começar por rearranjar a expressão dada:

$$f(x;y)=\cos\left(\frac{x}{y}\right)\Leftrightarrow z=\cos\left(\frac{x}{y}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\frac{x}{y}\right)-z=0\Leftrightarrow F(x;y;z)=0$$

Posto isto e, sabendo que temos actualmente apenas as coordenadas em x_0 e em y_0, vamos determinar em seguida o valor da coordenada z_0, para assim definirmos o ponto $(x_0;y_0;z_0)$:

$$z_0=f(x_0;y_0)\Leftrightarrow z_0=f(p;4)\Leftrightarrow z_0=\cos\left(\frac{p}{4}\right)\Leftrightarrow z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(x_0;y_0;z_0)=\left(p;4;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Agora teremos que determinar as primeiras derivadas de $F(x;y;z)$ para posteriormente as substituir nas equações pedidas:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x;y;z)=\left(\cos\left(\frac{x}{y}\right)-z\right)'_x=\left(\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_x-(z)'_x=-\left(\frac{x}{y}\right)'_x\cdot sen\left(\frac{x}{y}\right)=$$

$$=-\frac{(x)'_x\cdot(y)-(x)\cdot(y)'_x}{y^2}\cdot sen\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{1\cdot(y)}{y^2}\cdot sen\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{1}{y}\cdot sen\left(\frac{x}{y}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}\left(p;4;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{4}\cdot sen\left(\frac{p}{4}\right)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x;y;z)=\left(\cos\left(\frac{x}{y}\right)-z\right)_y^{'}=\left(\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right)_y^{'}-(z)_y^{'}=-\left(\frac{x}{y}\right)_y^{'}\cdot sen\left(\frac{x}{y}\right)=$$

$$=-\frac{(x)_y^{'}\cdot(y)-(x)\cdot(y)_y^{'}}{y^2}\cdot sen\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{(x)\cdot 1}{y^2}\cdot sen\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{y^2}\cdot sen\left(\frac{x}{y}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}\left(p;4;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{p}{4^2}\cdot sen\left(\frac{p}{4}\right)=\frac{p}{16}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{p\sqrt{2}}{32}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x;y;z)=\left(\cos\left(\frac{x}{y}\right)-z\right)_z^{'}=\left(\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right)_z^{'}-(z)_z^{'}=-1\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}\left(p;4;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1$$

Assim sendo, teremos então que:

→ Equação do **plano tangente** à superfície de equação $F(x;y;z)=0$, em: $P=\left(p;4;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P)\cdot(z-z_0)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot(x-p)+\left(\frac{p\sqrt{2}}{32}\right)\cdot(y-4)+(-1)\cdot\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{2}\cdot(x-p)}{8}+\frac{p\sqrt{2}\cdot(y-4)}{32}-\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

→ Equação da **recta normal** ao gráfico de $F(x;y;z)=0$, em: $P=\left(p;4;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$$\frac{(x-x_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(P)}=\frac{(y-y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)}=\frac{(z-z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}\Leftrightarrow\frac{(x-p)}{-\frac{\sqrt{2}}{8}}=\frac{(y-4)}{\frac{p\sqrt{2}}{32}}=\frac{\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{8\cdot(x-p)}{\sqrt{2}}=\frac{32\cdot(y-4)}{p\sqrt{2}}=-\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

d) $4x^2+2y^2+z^3=9$ **em** $(1;4;z_0)$

R:

Antes de mais vamos começar por rearranjar a expressão dada:

$$4x^2+2y^2+z^3=9\Leftrightarrow 4x^2+2y^2+z^3-9=0\Leftrightarrow F(x;y;z)=0$$

Posto isto e, sabendo que temos actualmente apenas as coordenadas em x_0 e em y_0, vamos determinar em seguida o valor da coordenada z_0:

$$z_0=\sqrt[3]{9-4{x_0}^2-2{y_0}^2}\Leftrightarrow z_0=\sqrt[3]{9-4\cdot 1^2-2\cdot 4^2}\Leftrightarrow z_0=\sqrt[3]{9-4-2\cdot 16}\Leftrightarrow z_0=\sqrt[3]{-27}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_0=\sqrt[3]{-3^3}\Leftrightarrow z_0=-3\Rightarrow(x_0;y_0;z_0)=(1;4;-3)$$

Agora teremos que determinar as primeiras derivadas de $F(x;y;z)$ para posteriormente as substituir nas equações pedidas:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x;y;z)=\left(4x^2+2y^2+z^3-9\right)'_x=8x\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial x}(1;4;-3)=8\cdot 1=8$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x;y;z)=\left(4x^2+2y^2+z^3-9\right)'_y=4y\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}(1;4;-3)=4\cdot 4=16$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x;y;z)=\left(4x^2+2y^2+z^3-9\right)'_z=3z^2\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial z}(1;4;-3)=3\cdot(-3)^2=27$$

Assim sendo, teremos então que:

→ Equação do **plano tangente** à superfície de equação $F(x;y;z)=0$, em: $P=(1;4;-3)$;

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P)\cdot(z-z_0)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\cdot(x-1)+16\cdot(y-4)+27\cdot(z-(-3))=0\Leftrightarrow 8\cdot(x-1)+16\cdot(y-4)+27\cdot(z+3)=0$$

→ Equação da **recta normal** ao gráfico de $F(x;y;z)=0$, em: $P=(1;4;-3)$;

$$\frac{(x-x_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(P)}=\frac{(y-y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)}=\frac{(z-z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}\Leftrightarrow\frac{(x-1)}{8}=\frac{(y-4)}{16}=\frac{(z+3)}{27}$$

2. Determine as equações do plano tangente e da recta normal do hiperbolóide $16x^2 - 9y^2 + 36z^2 = 144$**, no ponto** $(3;-4;2)$**.**

R:

Antes de mais vamos começar por rearranjar a expressão dada:

$$16x^2 - 9y^2 + 36z^2 = 144 \Leftrightarrow 16x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow F(x;y;z) = 0$$

Agora teremos que determinar as primeiras derivadas de $F(x;y;z)$ para posteriormente as substituir nas equações pedidas:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x;y;z) = \left(16x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 144\right)'_x = 32x \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(3;-4;2) = 32 \cdot 3 = 96$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x;y;z) = \left(16x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 144\right)'_y = -18y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(3;-4;2) = -18 \cdot (-4) = 72$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x;y;z) = \left(16x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 144\right)'_x = 72z \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(3;-4;2) = 72 \cdot 2 = 144$$

Assim sendo, teremos então que:

→ Equação do **plano tangente** à superfície de equação $F(x;y;z) = 0$, em: $P = (3;-4;2)$;

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P) \cdot (z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 96 \cdot (x-3) + 72 \cdot (y - (-4)) + 144 \cdot (z-2) = 0 \Leftrightarrow 96 \cdot (x-3) + 72 \cdot (y+4) + 144 \cdot (z-2) = 0$$

→ Equação da **recta normal** ao gráfico de $F(x;y;z)=0$, em: $P=(3;-4;2)$;

$$\frac{(x-x_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(P)}=\frac{(y-y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)}=\frac{(z-z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}\Leftrightarrow\frac{(x-3)}{96}=\frac{(y+4)}{72}=\frac{(z-2)}{144}$$

3. Qual é o plano horizontal tangente à superfície $z=x^2-4xy-2y^2+12x-12y-1$ e quais as coordenadas do ponto do gráfico onde o plano é tangente.

R:

Antes de mais vamos começar por rearranjar a expressão dada:

$$z=x^2-4xy-2y^2+12x-12y-1\Leftrightarrow x^2-4xy-2y^2+12x-12y-z-1=0\Leftrightarrow F(x;y;z)=0$$

Sabendo que a equação do **plano tangente** à superfície de equação $F(x;y;z)=0$ num ponto P é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P)\cdot(z-z_0)=0\Rightarrow\vec{\nabla}F(x;y;z)=0$$

Ora, o enunciado ao referir-se a um plano horizontal ($z=k$ onde : $k\in \mathbb{Z}$) está a indicar que o declive (m) da equação é zero.

Conforme é sabido, o declive corresponde à primeira derivada no ponto, pelo que se admitirmos que o nosso plano $z=k$ é paralelo ao plano XOY, então teremos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)=\frac{\partial F}{\partial y}(P)=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}(P)=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}(P)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x^2-4xy-2y^2+12x-12y-z-1\right)'_x=0\\ \left(x^2-4xy-2y^2+12x-12y-z-1\right)'_y=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y+12=0 \\ -4x-4y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4y-12}{2} \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ -4\cdot\left(\dfrac{4y-12}{2}\right)-4y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ -2\cdot(4y-12)-4y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ -8y+24-4y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow (x_0;y_0)=(-4;1)$$

Agora vamos obter a coordenada z_0, através da expressão presente no enunciado:

$$z_0 = x_0^{\ 2} - 4\cdot x_0\cdot y_0 - 2\cdot y_0^{\ 2} + 12\cdot x_0 - 12\cdot y_0 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_0 = (-4)^2 - 4\cdot(-4)\cdot 1 - 2\cdot 1^2 + 12\cdot(-4) - 12\cdot 1 - 1 \Leftrightarrow z_0 = -31$$

Conclusão: O plano horizontal tangente à superfície dada é definido pelas seguintes coordenadas: $(x_0;y_0;z_0)=(-4;1;-31)$

4. **Determine a equação de um plano tangente à superfície:** $x^2-2y^2+4z^2=-1$ **de modo que seja paralelo ao plano:** $4x-12y+8z=0$**.**

R:

Sabendo que a equação que define o plano paralelo: $4x-12y+8z=0$, implica as seguintes coordenadas: $(4;-12;8)\cdot k=(4k;-12k;8k)$.

E sabendo que a equação do **plano tangente** à superfície de equação $F(x;y;z)=0$ num ponto P é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P)\cdot(z-z_0)=0 \Rightarrow \vec{\nabla}F(x;y;z)=0$$

Então, estabelecendo uma igualdade entre ambos os pressupostos teremos que:

$$\vec{\nabla} F(x;y;z) = (4k;-12k;8k) \Leftrightarrow ✰$$

Ora, sabendo que: $\underbrace{x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 1}_{F(x;y;z)} = 0$. Vamos então agora determinar as derivadas parciais de primeira ordem para obter o vector $\vec{\nabla} F(x;y;z)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x;y;z) = \left(x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 1\right)'_x = 2x \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x;y;z) = \left(x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 1\right)'_y = -4y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x;y;z) = \left(x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 1\right)'_z = 8z$$

Assim sendo teremos então que: $\vec{\nabla} F(x;y;z) = (2x;-4y;8z)$

Logo, por substituição directa em ✰ teremos:

$$✰ \Leftrightarrow (2x;-4y;8z) = (4k;-12k;8k) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4k \\ -4y = -12k \\ 8z = 8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 3k \\ z = k \end{cases}$$

Assim sendo teremos então que para: $(x;y;z) = (2k;3k;k)$, a equação da superfície assumirá a nova forma:

$$F(2k;3k;k) = (2k)^2 - 2\cdot(3k)^2 + 4\cdot(k)^2 + 1 = 4k^2 - 18k^2 + 4k^2 + 1 = -10k^2 + 1$$

Ora, como para:

$$F(2k;3k;k)=0 \Leftrightarrow -10k^2+1=0 \Leftrightarrow k=\pm\sqrt{\frac{-1}{-10}} \Leftrightarrow k=\pm\frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Então teremos que:

Para: $k=-\frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \\ y=3\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \\ z=-\frac{\sqrt{10}}{10} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{\sqrt{10}}{5} \\ y=-3\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} \\ z=-\frac{\sqrt{10}}{10} \end{array}\right\} \Rightarrow P=\left(-\frac{\sqrt{10}}{5};-\frac{3\cdot\sqrt{10}}{10};-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} F\left(-\frac{\sqrt{10}}{5};-3\cdot\frac{\sqrt{10}}{10};-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\left(2\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right);-4\cdot\left(-3\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}\right);8\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} F\left(-\frac{\sqrt{10}}{5};-3\cdot\frac{\sqrt{10}}{10};-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\left(-\frac{2\cdot\sqrt{10}}{5};\frac{12\cdot\sqrt{10}}{10};-\frac{8\cdot\sqrt{10}}{10}\right)$$

Assim sendo, teremos então que a equação do **plano tangente** à superfície de equação $F(x;y;z)=0$, em: $P=\left(-\frac{\sqrt{10}}{5};-\frac{3\cdot\sqrt{10}}{10};-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$;

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P)\cdot(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\cdot\sqrt{10}}{5}\cdot\left(x+\frac{\sqrt{10}}{5}\right)+\frac{12\cdot\sqrt{10}}{10}\cdot\left(y+\frac{3\cdot\sqrt{10}}{10}\right)-\frac{8\cdot\sqrt{10}}{10}\cdot\left(z+\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=0$$

Para: $k=\frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \\ y=3\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \\ z=\frac{\sqrt{10}}{10} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{10}}{5} \\ y=3\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} \\ z=\frac{\sqrt{10}}{10} \end{array}\right\} \Rightarrow P=\left(\frac{\sqrt{10}}{5};\frac{3\cdot\sqrt{10}}{10};\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} F\left(\frac{\sqrt{10}}{5};3\cdot\frac{\sqrt{10}}{10};\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\left(2\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right);-4\cdot\left(3\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}\right);8\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} F\left(\frac{\sqrt{10}}{5};3\cdot\frac{\sqrt{10}}{10};\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\left(\frac{2\cdot\sqrt{10}}{5};-\frac{12\cdot\sqrt{10}}{10};\frac{8\cdot\sqrt{10}}{10}\right)$$

Assim sendo, teremos então que a equação do **plano tangente** à superfície de equação $F(x;y;z)=0$, em: $P=\left(\frac{\sqrt{10}}{5};\frac{3\cdot\sqrt{10}}{10};\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$;

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P)\cdot(z-z_0)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cdot\sqrt{10}}{5}\cdot\left(x-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)-\frac{12\cdot\sqrt{10}}{10}\cdot\left(y-\frac{3\cdot\sqrt{10}}{10}\right)+\frac{8\cdot\sqrt{10}}{10}\cdot\left(z-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=0$$

5. Seja $\vec{v}(x;y;z)=\left(x^3+3y;3xyz;3+z^2\right)$ uma função vectorial que representa o campo de velocidades de uma partícula ocupando a posição $(x;y;z)$ num dado instante. Qual o vector velocidade da partícula que ocupa a posição de coordenadas $(0;3;-1)$?

R:

Sabendo do enunciado que: $\vec{v}(x;y;z)=\left(x^3+3y;3xyz;3+z^2\right)$, então para as coordenadas $(0;3;-1)$, teremos que:

$$\vec{v}(0;3;-1)=\left(0^3+3\cdot 3;3\cdot 0\cdot 3\cdot(-1);3+(-1)^2\right)\Leftrightarrow \vec{v}(0;3;-1)=(9;0;4)$$

6. Seja $f(x;y;z)=sen\left(\dfrac{xz}{x^2+y^2}\right)$:

a) Determine a função vectorial $\vec{\nabla} f$.

R:

Sabendo que a função vectorial gradiente é dada por: $\vec{\nabla} f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x};\dfrac{\partial f}{\partial y};\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$

Então teremos que calcular as primeiras derivadas, pelo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y;z)=\left(sen\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)\right)'_x=\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)'_x\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{(xz)'_x\cdot\left(x^2+y^2\right)-xz\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)=\left(\frac{z\cdot\left(x^2+y^2\right)-xz\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{z\cdot\left(x^2+y^2\right)-2x^2z}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y;z)=\left(sen\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)\right)_y^{'}=\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)_y^{'}\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{(xz)_y^{'}\cdot\left(x^2+y^2\right)-xz\cdot\left(x^2+y^2\right)_y^{'}}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)=\left(\frac{-xz\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{-2xyz}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x;y;z)=\left(sen\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)\right)_z^{'}=\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)_z^{'}\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{(xz)_z^{'}\cdot\left(x^2+y^2\right)-xz\cdot\left(x^2+y^2\right)_z^{'}}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)=\left(\frac{x\cdot\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)$$

Assim sendo teremos então:

$$\vec{\nabla} f=\left(\frac{z\cdot\left(x^2+y^2\right)-2x^2z}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right);\frac{-2xyz}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right);\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\cos\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right)\right)$$

b) Calcule $\vec{\nabla} f(2;1;0)$.

R:

$$\vec{\nabla} f(2;1;0)=$$

$$=\left(\frac{0\cdot(2^2+1^2)-2\cdot 2^2\cdot 0}{(2^2+1^2)^2}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 0}{2^2+1^2}\right);\frac{-2\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{(2^2+1^2)^2}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 0}{2^2+1^2}\right);\frac{2}{2^2+1^2}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 0}{2^2+1^2}\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} f(2;1;0)=\left(\frac{0-0}{(2^2+1^2)^2}\cdot\cos(0);\frac{0}{(2^2+1^2)^2}\cdot\cos(0);\frac{2}{2^2+1^2}\cdot\cos(0)\right)\Leftrightarrow \vec{\nabla} f(2;1;0)=\left(0;0;\frac{2}{5}\right)$$

7. Seja $\vec{v}(x;y)=y\cdot\vec{e}_1-x\cdot\vec{e}_2$ um campo vectorial. Verifique que não existe uma função real f com derivadas parciais contínuas tal que $\vec{v}$ seja um "campo de gradientes" para $\vec{f}$, isto é, tal que: $\vec{v}(x;y)=\vec{\nabla} f(x;y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\cdot\vec{e}_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\cdot\vec{e}_2$

R:

Uma vez que: $\vec{v}(x;y)=\vec{\nabla} f(x;y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\cdot\vec{e}_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\cdot\vec{e}_2=\left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Então, por equivalência directa com o campo vectorial dado no enunciado, teremos que:

$$\vec{v}(x;y)=\vec{\nabla} f(x;y)=y\cdot\vec{e}_1+(-x)\cdot\vec{e}_2=(y;-x)$$

Assim sendo teremos então que: $\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=y\\ \frac{\partial f}{\partial y}=-x\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f(x;y)=xy+j(y)\\ f(x;y)=-xy+f(x)\end{array}\right\}$

Pelo que a função será dada por: $f(x;y) = xy - xy \Leftrightarrow f(x;y) = 0$

Conclusão: Não existe uma função que com derivadas parciais continuas para $\vec{v}$.

8. Seja $\vec{v}(x;y) = x \cdot \vec{e}_1 + tg(y) \cdot \vec{e}_2$ um campo vectorial. Calcule a função real f, com derivadas parciais contínuas no seu domínio, tal que $\vec{v}$ seja um "campo de gradientes".

R:

Uma vez que: $\vec{v}(x;y) = \vec{\nabla} f(x;y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) \cdot \vec{e}_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Então, por equivalência directa com o campo vectorial dado no enunciado, teremos que:

$\vec{v}(x;y) = \vec{\nabla} f(x;y) = x \cdot \vec{e}_1 + tg(y) \cdot \vec{e}_2 = (x; tg(y))$

Assim sendo teremos então que: $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = tg(y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x;y) = \frac{x^2}{2} + j(y) \\ f(x;y) = -\ln|\cos(y)| + f(x) \end{array}\right\}$

Pelo que a função será dada por: $f(x;y) = \frac{x^2}{2} - \ln|\cos(y)| + C$

9. Determine a matriz Jacobiana e o Jacobiano da transformação:

$$\vec{f}\,(r;q;j) = (r\cdot\cos q\cdot sen j\,;\, r\cdot sen q\cdot sen j\,;\, r\cdot\cos j)$$

em que: $? \geq 0; 0 \leq ? \leq 2p$ e $0 \leq j \leq p$ **, sendo** $?;?$ e j **"coordenadas esféricas" em** $\Re^3$ **.**

R:

Sabendo que: $\vec{f}\,(r;q;j) = \left(\underbrace{r\cdot\cos q\cdot sen j}_{f_1};\underbrace{r\cdot sen q\cdot sen j}_{f_2};\underbrace{r\cdot\cos j}_{f_3}\right)$, então a matriz Jacobiana, para este caso, será dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial j} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} & \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial j} \end{bmatrix} \Leftrightarrow J = \begin{bmatrix} (r\cdot\cos q\cdot \mathrm{sen} j)'_r & (r\cdot\cos q\cdot \mathrm{sen} j)'_q & (r\cdot\cos q\cdot \mathrm{sen} j)'_j \\ (r\cdot \mathrm{sen} q\cdot \mathrm{sen} j)'_r & (r\cdot \mathrm{sen} q\cdot \mathrm{sen} j)'_q & (r\cdot \mathrm{sen} q\cdot \mathrm{sen} j)'_j \\ (r\cdot\cos j)'_r & (r\cdot\cos j)'_q & (r\cdot\cos j)'_j \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J = \begin{bmatrix} \cos q\cdot \mathrm{sen} j & -r\cdot sen q\cdot \mathrm{sen} j & r\cdot\cos q\cdot\cos j \\ \mathrm{sen} q\cdot \mathrm{sen} j & r\cdot cos q\cdot \mathrm{sen} j & r\cdot \mathrm{sen} q\cdot cos j \\ \cos j & 0 & -r\cdot sen j \end{bmatrix}$$

O Jacobiano da transformação será dado pelo determinante da matriz Jacobiana, pelo que:

$$\det|J| = \det\begin{bmatrix} \cos q\cdot \mathrm{sen} j & -r\cdot sen q\cdot \mathrm{sen} j & r\cdot\cos q\cdot\cos j \\ \mathrm{sen} q\cdot \mathrm{sen} j & r\cdot cos q\cdot \mathrm{sen} j & r\cdot \mathrm{sen} q\cdot cos j \\ \underbrace{\cos j}_{+} & \underbrace{0}_{-} & \underbrace{-r\cdot sen j}_{+} \end{bmatrix} =$$

$$= \cos j \times \left[\left(-r \cdot senq \cdot senj \times r \cdot senq \cdot \cos j \right) - \left(r \cdot \cos q \cdot senj \times r \cdot \cos q \cdot \cos j \right) \right] -$$

$$- 0 \times \left[\left(\cos q \cdot senj \times r \cdot senq \cdot \cos j \right) - \left(senq \cdot senj \times r \cdot \cos q \cdot \cos j \right) \right] +$$

$$+ \left(-r \cdot senj \right) \times \left[\left(\cos q \cdot senj \times r \cdot \cos q \cdot senj \right) - \left(senq \cdot senj \times \left(-r \cdot senq \cdot senj \right) \right) \right] =$$

$$= \cos j \times \left[\left(r \cdot senq \cdot \left(-senj + \cos j \right) \right) - \left(r \cdot \cos q \cdot \left(senj + \cos j \right) \right) \right] +$$

$$+ \left(-r \cdot senj \right) \times \left[\left(r \cdot \cos^2 q \cdot sen^2 j \right) - \left(-r \cdot sen^2 q \cdot sen^2 j \right) \right] =$$

$$= \cos j \times \left[\left(r \cdot senq \cdot \left(-senj + \cos j \right) \right) - \left(r \cdot \cos q \cdot \left(senj + \cos j \right) \right) \right] +$$

$$+ \left(-r \cdot senj \right) \times \left[r \cdot sen^2 j \cdot \underbrace{\left(\cos^2 q + sen^2 q \right)}_{=1} \right] =$$

$$= \cos j \times \left[\left(r \cdot senq \cdot \left(-senj + \cos j \right) \right) - \left(r \cdot \cos q \cdot \left(senj + \cos j \right) \right) \right] - r^2 \cdot sen^3 j$$

10. Considere a transformação de $\Re^3$ para $\Re^2$, dada por:

$$\vec{f}(x; y; z) = \left(x^2 + y \cdot z; y^2 - x \cdot \ln(z) \right)$$

a) Determine a matriz Jacobiana da transformação dada.

R:

Sabendo que: $\vec{f}(x; y; z) = \left(\underbrace{x^2 + y \cdot z}_{f_1}; \underbrace{y^2 - x \cdot \ln(z)}_{f_2} \right)$, então a matriz Jacobiana, para este caso, será dada por:

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\end{bmatrix}\Leftrightarrow J=\begin{bmatrix}\left(x^2+\mathrm{yz}\right)'_{\mathrm{x}} & \left(x^2+\mathrm{yz}\right)'_{\mathrm{y}} & \left(x^2+\mathrm{yz}\right)'_{\mathrm{z}}\\ \left(y^2-x\cdot\ln(z)\right)'_{\mathrm{x}} & \left(y^2-x\cdot\ln(z)\right)'_{\mathrm{y}} & \left(y^2-x\cdot\ln(z)\right)'_{\mathrm{z}}\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J=\begin{bmatrix}2\mathrm{x} & z & y\\ -\ln(\mathrm{z}) & 2\mathrm{y} & -\frac{x}{z}\end{bmatrix}$$

b) Use $J(2;2;1)$ para calcular um valor aproximado para $\vec{f}(1{,}98;2{,}01;1{,}03)$.

Nota: $\vec{f}(x+dx;y+dy;z+dz)\approx\vec{f}(x;y;z)+J(x;y;z)\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}$.

R:

Observando o enunciado podemos concluir que (x;y;z) varia de (2;2;1) para (1,98;2,01;1,03), pelo que teremos:

$$\begin{cases}dx=1{,}98-2=-0{,}02=-\frac{2}{100}\\ dy=2{,}01-2=0{,}01=\frac{1}{100}\\ dz=1{,}03-1=0{,}03=\frac{3}{100}\end{cases}\Rightarrow\vec{f}(x+dx;y+dy;z+dz)\approx\vec{f}(x;y;z)+J(x;y;z)\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\vec{f}(2-0{,}02;2+0{,}01;1+0{,}03)\approx\vec{f}(2;2;1)+J(2;2;1)\cdot\begin{pmatrix}-0{,}02\\0{,}01\\0{,}03\end{pmatrix}\Leftrightarrow ¤$$

Antes de mais, podemos determinar o valor do vector $\vec{f}$ e da matriz Jacobiana no ponto pedido pelo que: $\vec{f}(2;2;1)=\left(2^2+2\cdot1;2^2-2\cdot\ln(1)\right)=(4+2;4-2\cdot0)=(6;4)$

$$J=\begin{bmatrix} 2x & z & y \\ -\ln(z) & 2y & -\frac{x}{z} \end{bmatrix} \Rightarrow J(2;2;1)=\begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 1 & 2 \\ -\ln(1) & 2\cdot 2 & -\frac{2}{1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Vamos então agora determinar:

$$J(2;2;1)\cdot\begin{pmatrix} -0{,}02 \\ 0{,}01 \\ 0{,}03 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -0{,}02 \\ 0{,}01 \\ 0{,}03 \end{pmatrix}=$$

$$=(4\times(-0{,}02)+1\times 0{,}01+2\times 0{,}03;0\times(-0{,}02)+4\times 0{,}01+(-2)\times 0{,}03)=(-0{,}01;-0{,}02)$$

Substituindo então os respectivos valores em ¤ , teremos:

$$\vec{f}(1{,}98;2{,}01;1{,}03)\approx(6;4)+(-0{,}01;-0{,}02)\approx(6-0{,}01;4-0{,}02)\approx(5{,}99;3{,}98)$$

11. Dada a função: $\begin{cases} u = 2x + 3y^2 + 2z \\ v = x - \cos(y) \\ w = 2y + tg(z) \end{cases}$**. Calcule a sua Jacobiana e o seu Jacobiano, se possível.**

R:

Sabendo que: $\vec{f}(x;y;z) = \left(\underbrace{2x + 3y^2 + 2z}_{u}; \underbrace{x - \cos(y)}_{v}; \underbrace{2y + tg(z)}_{w} \right)$, então a matriz Jacobiana, para este caso, será dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \Leftrightarrow J = \begin{bmatrix} (2x + 3y^2 + 2z)'_x & (2x + 3y^2 + 2z)'_y & (2x + 3y^2 + 2z)'_z \\ (x - \cos(y))'_x & (x - \cos(y))'_y & (x - \cos(y))'_z \\ (2y + tg(z))'_x & (2y + tg(z))'_y & (2y + tg(z))'_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J = \begin{bmatrix} 2 & 6y & 2 \\ 1 & -(-sen(y)) & 0 \\ 0 & 2 & sec^2(z) \end{bmatrix} \Leftrightarrow J = \begin{bmatrix} 2 & 6y & 2 \\ 1 & sen(y) & 0 \\ 0 & 2 & sec^2(z) \end{bmatrix}$$

O Jacobiano da transformação será dado pelo determinante da matriz Jacobiana, pelo que:

$$\det|J| = \det \begin{bmatrix} 2 & 6y & 2 \\ 1 & sen(y) & 0 \\ \underbrace{0}_{+} & \underbrace{2}_{-} & \underbrace{sec^2(z)}_{+} \end{bmatrix} =$$

$$= 0 \times [(6y \times 0) - (sen(y) \times 2)] - 2 \times [(2 \times 0) - (1 \times 2)] + (\sec^2(z)) \times [(2 \times sen(y)) - (1 \times 2)] =$$

$$= -2\times[-2]+\left(\sec^2(z)\right)\times[(2\times sen(y))-2]= 4+\left(\sec^2(z)\right)\times[(2\times sen(y))-2]$$

12. Determine a matriz hessiana e o hessiano da função:

$$f(x;y)=x^3y+x^2\cdot sen(y)+4 \text{ ; no ponto } P\left(1;\frac{p}{2}\right)$$

R:

Sabendo que a matriz Hessiana de uma determinada função é dada por;

$$H=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Então teremos que antes de mais determinar as primeiras derivadas da função, pelo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(x^3y+x^2\cdot sen(y)+4\right)'_x = 3x^2y+2x\cdot sen(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(x^3y+x^2\cdot sen(y)+4\right)'_y = x^3+x^2\cdot \cos(y)$$

Assim sendo teremos agora a seguinte matriz Hessiana:

$$H=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{bmatrix} \Leftrightarrow H=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y+2x\cdot sen(y)\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y+2x\cdot sen(y)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3+x^2\cdot\cos(y)\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3+x^2\cdot\cos(y)\right) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H = \begin{bmatrix} 6xy + 2\cdot sen(y) & 3x^2 + 2x\cdot\cos(y) \\ 3x^2 + 2x\cdot\cos(y) & -x^2\cdot sen(y) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H\left(1;\frac{p}{2}\right) = \begin{bmatrix} 6\cdot 1\cdot\frac{p}{2} + 2\cdot \underbrace{sen\left(\frac{p}{2}\right)}_{=1} & 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1\cdot \underbrace{\cos\left(\frac{p}{2}\right)}_{=0} \\ 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1\cdot \underbrace{\cos\left(\frac{p}{2}\right)}_{=0} & -1^2\cdot \underbrace{sen\left(\frac{p}{2}\right)}_{=1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p}{3} + 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p+6}{3} & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo, o Hessiano será dado pelo determinante da matriz $H\left(1;\frac{p}{2}\right)$:

$$\det\left|H\left(1;\frac{p}{2}\right)\right| = \det\begin{bmatrix} \frac{p+6}{3} & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \left(\frac{p+6}{3}\times(-1)\right) - (3\times 3) = -\left(\frac{p+6}{3}\right) - 9 = \frac{-p-6-27}{3} =$$

$$= \frac{-p-33}{3}$$

13. Determine a matriz hessiana e o hessiano da função:

$$f(x;y;z)=\frac{1}{2}\cdot\left(x^4+y^4+z^4\right)+\left(x-y-z\right)^2 \text{ ; no ponto } P(1;1;1)$$

R:

Sabendo que a matriz Hessiana de uma determinada função é dada por;

$$H=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

Então teremos que antes de mais determinar as primeiras derivadas da função, pelo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{1}{2}\cdot\left(x^4+y^4+z^4\right)+\left(x-y-z\right)^2\right)_x^{'}=\left(\frac{1}{2}\cdot\left(x^4+y^4+z^4\right)\right)_x^{'}+\left(\left(x-y-z\right)^2\right)_x^{'}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot 4x^3\right)+\left(2\cdot\left(x-y-z\right)^{2-1}\cdot\underbrace{\left(x-y-z\right)_x^{'}}_{=1}\right)=2x^3+2\cdot\left(x-y-z\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{1}{2}\cdot\left(x^4+y^4+z^4\right)+\left(x-y-z\right)^2\right)_y^{'}=\left(\frac{1}{2}\cdot\left(x^4+y^4+z^4\right)\right)_y^{'}+\left(\left(x-y-z\right)^2\right)_y^{'}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot 4y^3\right)+\left(2\cdot\left(x-y-z\right)^{2-1}\cdot\underbrace{\left(x-y-z\right)_y^{'}}_{=-1}\right)=2y^3-2\cdot\left(x-y-z\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{1}{2}\cdot\left(x^4+y^4+z^4\right)+\left(x-y-z\right)^2\right)'_z=\left(\frac{1}{2}\cdot\left(x^4+y^4+z^4\right)\right)'_z+\left(\left(x-y-z\right)^2\right)'_z=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot 4z^3\right)+\left(2\cdot\left(x-y-z\right)^{2-1}\cdot\underbrace{\left(x-y-z\right)'_z}_{=-1}\right)=2z^3-2\cdot\left(x-y-z\right)$$

Assim sendo teremos agora a seguinte matriz Hessiana:

$$H=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) & \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) & \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3+2\cdot\left(x-y-z\right)\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3+2\cdot\left(x-y-z\right)\right) & \frac{\partial}{\partial z}\left(2x^3+2\cdot\left(x-y-z\right)\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(2y^3-2\cdot\left(x-y-z\right)\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(2y^3-2\cdot\left(x-y-z\right)\right) & \frac{\partial}{\partial z}\left(2y^3-2\cdot\left(x-y-z\right)\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(2z^3-2\cdot\left(x-y-z\right)\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(2z^3-2\cdot\left(x-y-z\right)\right) & \frac{\partial}{\partial z}\left(2z^3-2\cdot\left(x-y-z\right)\right)\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H=\begin{bmatrix}\left(6\mathrm{x}^2+2\right) & -2 & -2\\ -2 & \left(6\mathrm{y}^2+2\right) & 2\\ -2 & 2 & \left(6\mathrm{z}^2+2\right)\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H\left(1;1;1\right)=\begin{bmatrix}\left(6\cdot 1^2+2\right) & -2 & -2\\ -2 & \left(6\cdot 1^2+2\right) & 2\\ -2 & 2 & \left(6\cdot 1^2+2\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -2 & -2\\ -2 & 8 & 2\\ -2 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

Logo, o Hessiano será dado pelo determinante da matriz $H(1;1;1)$:

$$\det\left|H(1;1;1)\right| = \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad + & \quad - & \quad + \end{array} \\ \begin{bmatrix} \overbrace{8} & \overbrace{-2} & \overbrace{-2} \\ -2 & 8 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \end{array} =$$

$$= \underbrace{8\times(8\times8-2\times2)}_{480} - \underbrace{(-2)\times(-2\times8-(-2)\times2)}_{24} + \underbrace{(-2)\times(-2\times2-(-2)\times8)}_{-24} = 480-24-24=432$$