2.º Teste de Complementos de Análise Matemática

Mestrado Integrado em Engenharia de Materiais, Têxtil,
Telecomunicações e Informática
28 de Novembro de 2016

Duração: 1h30

---

1. Sabendo que e^x, $\cos x$ e $\sin x$ são soluções da equação diferencial $y''' - y'' + y' - y = 0$ diga, justificando, se $y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$, onde c_1, c_2 e c_3 são constantes arbitrárias, é ou não a solução geral.
Solução: e^x, $\cos x$ e $\sin x$ constituem um conjunto fundamental de soluções linearmente independentes da equação diferencial $y''' - y'' + y' - y = 0$, sendo a sua solução geral dada por $y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$, onde c_1, c_2 e c_3 são constantes arbitrárias.

2. Usando o método dos coeficientes indeterminados determine a solução do problema de valores iniciais
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x, \ y(0) = 2, \ y'(0) = -3.$$
Solução: Seja $f(x) = \cos x$, tem-se que $S_f = \{\sin x, \cos x\}$. Como $\sin x$ e $\cos x$ são soluções da equação diferencial homogénea associada, multiplicamos o elemento de S_f por x, resultando
$$S'_f = \{x \sin x, x \cos x\}.$$
Portanto a solução particular é da forma
$$y_p = Ax \sin x + Bx \cos x = x\left(A \sin x + B \cos x\right), ...$$
Portanto a solução geral é
$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x.$$
Atendendo que $y(0) = 2$ e $y'(0) = -3$ e $y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} x \cos x$. tem-se $c_1 = 2$ e $c_2 = -3$. Logo a solução do PVI é
$$y = 2 \cos x - 3 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

3. Usando o método da variação das constantes determine a solução geral da equação diferencial
$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^5}, \ x > 0.$$
Solução: A solução particular da equação diferencial dada é da forma
$$y_p = v_1(x) e^x + v_2(x) x e^x$$
Portanto, o sistema de equações a resolver é:
$$\begin{cases} v_1'(x) e^x + v_2'(x) x e^x = 0 \\ v_2'(x) e^x = \frac{e^x}{x^5} \end{cases} \quad ......$$
Assim

$$v_1(x) = \tfrac{1}{3}x^{-3} \ e \ v_2(x) = -\tfrac{1}{4}x^{-4}$$

pelo que a solução particular é

$$y_p = \frac{1}{3}x^{-3}e^x - \frac{1}{4}x^{-4}xe^x = \frac{1}{12}x^{-3}e^x.$$

Logo, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{12}x^{-3}e^x.$$

4. Determine a transformada inversa de Laplace:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 8}$$

Solução: $f(t) = \frac{e^{-2t}sen(2t)}{2}$

5. Determine a solução dos seguintes PVI usando a transformada de Laplace:

(a)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t), \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1, \text{com} \quad f(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 < t < \pi \\ \pi & , \quad t \geq \pi \end{cases}.$$

Solução:

$$y(t) = t + \frac{1}{6}t^3 - u_\pi(t)\left(\frac{1}{6}(t-\pi)^3\right)$$

(b)

$$\begin{cases} x' & = & 3x - 4y \\ y' & = & 2x + 3y \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Solução: Sejam $X = L\{x(t)\}$ e $Y = L\{y(t)\}$ e atendendo que $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$ então temos:

$$\begin{cases} sX - 1 & = & 3X - 4Y \\ sY & = & 2X + 3Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s-3)X + 4Y & = & 1 \\ -2X + (s-3)Y & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y & = & \frac{1}{4} - \frac{s-3}{4}X \\ -2X + \frac{s-3}{4} - \frac{(s-3)^2}{4}X & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y & = & \frac{1}{4} - \frac{s-3}{4}X \\ X & = & \frac{s-3}{(s-3)^2+8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y & = & \frac{2}{(s-3)^2+8} \\ X & = & \frac{s-3}{(s-3)^2+8} \end{cases}$$

Assim, pela tabela, $x(t) = e^{3t}\cos\left(\sqrt{8}t\right)$ e $y(t) = \frac{2}{\sqrt{8}}e^{3t}\sin\left(\sqrt{8}t\right)$

(c)

$$x' + 15x + 50y = f(t), \ x(0) = 0, \text{com} \ f(t) = 5\left(1 - u_1(t)\right) \text{ e } \ y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau.$$

Solução:

$$x(t) = e^{-5t} - e^{-10t} - u_1(t)\left(e^{-5(t-1)} - e^{-10(t-1)}\right).$$

Questão	1	2	3	4	5
Cotação	1.5	4	4	1.5	9