Análise Matemática EE
1^{o}ano, 2^{o}semestre

Integrais de linha

O conceito de integral de linha é uma das possibilidades de generalizar o integral de funções reais de variável real para integrais de funções de várias variáveis.

Integral de linha de campos escalares

Considere uma linha ou curva $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}^3$ definida como a imagem do caminho ou trajetória

$$\begin{array}{rccc} \vec{c}: & [a,b] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

com $b > a$, $\vec{c}$ uma função vetorial de classe C^1 e $c'(t) \neq 0$. E seja f uma função real de várias variáveis (campo escalar) definida em $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) \end{array}$$

Chama-se *integral de linha da função real f ao longo da linha $\mathcal{C}$* ao integral

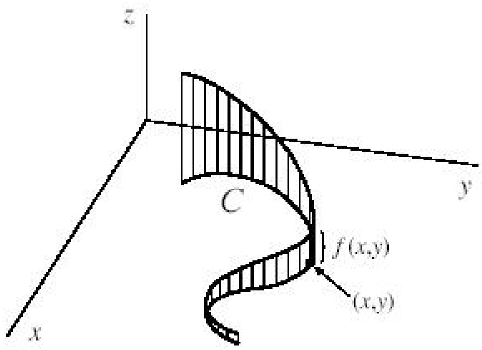
$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\vec{c}(t)) \|\vec{c}\,'(t)\|\, dt \tag{1}$$

e

$$\int_a^b f(\vec{c}(t)) \|\vec{c}\,'(t)\|\, dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Por exemplo, se a imagem de $\vec{c}$ representa um fio e $f(x,y,z)$ representa a densidade de massa em cada ponto do fio (x,y,z), o integral definido em (1) representa a massa total do fio.

Se os valores de $f(x,y)$ forem positivos para todo (x,y) pertencente à linha percorrida $\mathcal{C}$, o integral $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ representa a área de um lado da "cerca" cuja base é $\mathcal{C}$ e cuja altura acima de cada ponto (x,y) é dada por $f(x,y)$.



Exemplo 1 *Seja $\mathcal{C}$ a hélice representada pelo caminho*

$$\begin{array}{rccc} \vec{c}: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (\cos t, \sin t, t) \end{array}$$

e seja $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$*. Determine o valor do integral* $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f$.

Primeiro, calcula-se

$$\|\vec{c}\,'(t)\| = \sqrt{((\cos t)')^2 + ((\sin t)')^2 + (t')^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

De seguida, substituimos na função $f(x,y,z)$ *as variáveis* x, y, z *pelas funções respetivas de* t*:*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2.$$

Assim, temos o valor da função f *ao longo do caminho* $\vec{c}$*.*

Agora, colocamos esta informação no cálculo do integral:

$$\int_{\mathcal{C}} f = \int_0^{2\pi} (1+t^2)\,\sqrt{2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3 + 4\pi^2).$$

Chama-se *elemento do comprimento de arco* a

$$ds = \|\vec{c}\,'(t)\|\,dt.$$

Usando o elemento de arco, o integral de linha da função f ao longo da linha $\mathcal{C}$ pode representar-se por $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$.

Em particular, o *comprimento da linha* $\mathcal{C}$ pode ser calculado da forma

$$l(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_{\mathcal{C}} \|\vec{c}\,'(t)\|\,dt.$$

Exemplo 2 *Calcule o comprimento da hélice* $\mathcal{C}$ *representada pelo caminho*

$$\begin{array}{cccc} \vec{c}: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (\cos t, \sin t, t) \end{array}$$

Calcula-se

$$\|\vec{c}\,'(t)\| = \sqrt{((\cos t)')^2 + ((\sin t)')^2 + (t')^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_{\mathcal{C}} \|\vec{c}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\,[t]_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi.$$

À função $s(t) = \displaystyle\int_0^t \|\vec{c}\,'(u)\|\,du$ chama-se *comprimento do arco*.

A definição de integral de linha de um campo escalar não depende da função que descreve a linha $\mathcal{C}$, isto é, **é independente da parametrização escolhida**:
Sejam $\vec{c}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{c}(t)$ e $\vec{r}: [a_1,b_1] \to \mathbb{R}^3$, $u \mapsto \vec{r}(u)$ dois caminhos equivalentes [1] e que descrevem a mesma linha $\mathcal{C}$. Então

[1]Dois caminhos são equivalentes se existe uma função $\alpha : [a_1, b_1] \to [a, b]$, com α bijetiva, de classe C^1, tal que $\alpha'(u) \neq 0$, para todo $u \in [a_1, b_1]$.

$$\int_a^b f(\vec{c}(t))\|\vec{c}^{\,\prime}(t)\|\,dt = \int_{a_1}^{b_1} f(\vec{r}(u))\|\vec{r}^{\,\prime}(u)\|\,du.$$

Frequentemente, os integrais de linha levam a integrais definidos muito difíceis ou impossíveis de calcular exatamente. Nesse caso, só é possível usar métodos numéricos para determinar o seu valor.

Integral de linha de campos vetoriais

Vamos ver como integrar um campo vetorial[2] ao longo de um caminho $\mathcal{C}$.

Seja $\vec{F}$ um campo de vetores em $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rccl} \vec{F}: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & \vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)) \end{array}$$

As funções escalares F_1, F_2, F_3 chamam-se as funções componentes do campo vetorial $\vec{F}$. E seja $\mathcal{C}$ a curva definida da forma

$$\begin{array}{rccc} \vec{c}: & [a,b] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

com $b > a$ e $\vec{c}$ uma função vetorial de classe C^1.

O *integral do campo vetorial* $\vec{F}$ *ao longo da linha* $\mathcal{C}$ é dado por

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{c} = \int_a^b \vec{F}(\vec{c}(t))\cdot \vec{c}^{\,\prime}(t)\,dt$$

igual a

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{c}(t))\cdot \vec{c}^{\,\prime}(t)\,dt = \int_a^b (F_1(\vec{c}(t)), F_2(\vec{c}(t)), F_3(\vec{c}(t)))\cdot \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)\,dt$$

$$= \int_a^b \left[F_1(\vec{c}(t))x'(t) + F_2(\vec{c}(t))y'(t) + F_3(\vec{c}(t))z'(t)\right]\,dt =$$

$$= \int_a^b \left(F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz\right).$$

O valor do integral $\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{c}$ é o valor W do trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}$ ao deslocar uma partícula ao longo do caminho $\mathcal{C}$, isto é,

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{c}.$$

Exemplo 3 *Calcule o trabalho W realizado pelo campo de forças $\vec{F} = (-y^2, xy, 3)$, ao deslocar uma partícula ao longo da semi-circunferência determinada por $\vec{c}(t) = (\cos t, \sin t, 3)$, $t \in [0,\pi]$.*

Tem-se que

$$\vec{c}^{\,\prime}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

e

[2] Um campo vetorial é uma função $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

$$\vec{F}(\vec{c}(t)) = (-\sin^2 t, \cos t \sin t, 3).$$

Assim,

$$\vec{F}(\vec{c}(t)) \cdot \vec{c}\,'(t) = \sin^3 t + \cos^2 t \sin t$$

e finalmente

$$W = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{c} = \int_0^\pi \left(\sin^3 t + \cos^2 t \sin t\right)\, dt =$$

$$= \int_0^\pi \sin t\, dt = 2.$$

Os integrais de linha de campos vetoriais não dependem da parametrização escolhida desde que a orientação seja mantida mas dependem da curva percorrida entre o ponto inicial e o ponto final.

Se o integral de linha for calculado ao longo de uma linha fechada $\mathcal{C}$, representa-se da forma

$$\oint_\mathcal{C} F \cdot d\vec{c}.$$

Integral de linha de campos conservativos

Um campo vetorial $\vec{F}$ (em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) diz-se *conservativo* se existir uma função real f (de duas variáveis reais ou três, respetivamente) tal que

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f.$$

Toda a função f que satisfaz a igualdade anterior diz-se um *potencial* para $\vec{F}$.

Exemplo 4 *O campo vetorial definido em $\mathbb{R}^2$ da forma $\vec{F}(x, y) = (y, x)$ é um campo conservativo, pois para $f(x, y) = xy$, tem-se que*

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (f'_x, f'_y) = (y, x) = \vec{F}(x, y).$$

O integral de linha de um campo conservativo não depende do caminho percorrido entre os pontos inicial e final.

Seja Γ uma linha em $\mathbb{R}^3$ e $\vec{c}$ uma sua parametrização definida em $[a, b]$. E seja $\vec{F}$ um campo vetorial conservativo, contínuo no seu domínio e f o seu potencial ($\vec{F} = \vec{\nabla} f$). Então,

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{c} = \int_\Gamma \vec{\nabla} f \cdot d\vec{c} = f(\vec{c}(b)) - f(\vec{c}(a)). \quad (2)$$

Note que $\vec{c}(a)$ e $\vec{c}(b)$ são os pontos inicial e final da linha Γ.

Exemplo 5 *Calcular $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{c}$, sendo $\vec{F}(x, y) = (y, x)$ e Γ uma curva no plano parametrizada por $\vec{c}(t) = (e^t, \cos(\pi t))$, com $t \in [0, 1]$.*

Como $\vec{F}$ é um campo conservativo, basta aplicar a igualdade (2):
A função $f(x, y) = xy$ é um potencial para $\vec{F}$. E tem-se que $\vec{c}(0) = (1, 1)$ e $\vec{c}(1) = (e, -1)$.
Assim,

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{c} = f(\vec{c}(1)) - f(\vec{c}(0)) = f(e, -1) - f(1, 1) = e + 1.$$

Pelo resultado anterior, tem-se que o integral de linha de um campo conservativo ao longo de uma linha fechada é zero.

O resultado seguinte está relacionado com a independência do caminho percorrido entre dois pontos:

Seja $\vec{F}$ um campo de vetores com domínio D aberto e conexo. Então as três afirmações seguintes são equivalentes, isto é, uma é verdadeira se e só se as outras também o são:

- $\displaystyle\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{c} = 0$, para toda a curva fechada Γ.
- Dados dois pontos P_1 e P_2 em D, o integral $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{c}$ tem sempre o mesmo valor para qualquer curva Γ cujo ponto inicial seja P_1 e ponto final seja P_2.
- $\vec{F}$ é conservativo em D.

Temos o seguinte resultado, devido ao Teorema de Schwarz, que nos permite concluir quando um campo de vetores não é conservativo.

Seja $\vec{F} = (F_1, F_2)$ um campo de vetores conservativo, com F_1 e F_2 funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa região R do plano. Então $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ para todo (x, y) em R.

Exemplo 6 *Seja o campo de vetores $\vec{F} = (2xy, e^x y)$.*
Como

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x$$

e

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial(e^x y)}{\partial x} = e^x y$$

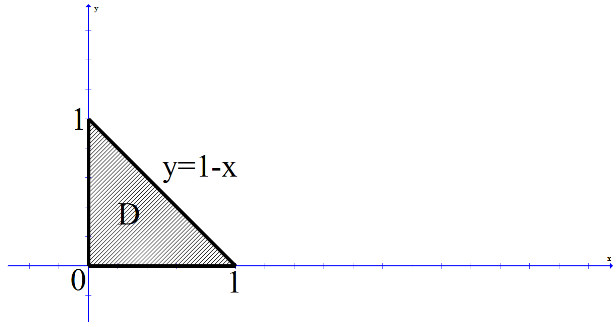
são diferentes, então $\vec{F}$ não é um campo conservativo.

Teorema de Green

Teorema de Green - Seja $\mathcal{C}$ uma curva plana simples, fechada, contínua por secções e orientada positivamente. Seja D a região delimitada pela curva $\mathcal{C}$.
Sejam F_1 e F_2 funções reais de duas variáveis reais que têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\oint_C F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA.$$

Exemplo 7 *Calcule $\oint_C x^4\,dx + xy\,dy$, onde C é o triângulo que une os pontos $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.*



$$\oint_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^4)}{\partial y} \right) dA =$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} y\,dy\,dx = 1/6$$

Rotacional e divergência

Seja $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ uma função vectorial definida em $\mathbb{R}^3$ tal que as derivadas parciais existem.

Define-se o **rotacional de** F da forma

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Podemos escrever esta definição usando uma notação de operadores. Se definir o operador diferencial

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(por exemplo, aplicando este operador sobre uma função real de três variáveis, obtém-se o gradiente de f: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$).

Tem-se que

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Assim, podemos escrever $\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$.

Exemplo 8 *Considere a função* $\vec{F}(x,y,z) = (xz, xyz, -y^2)$. *Tem-se que*

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} = (-y(x+2),\ x,\ yz)$$

Define-se a **divergência de** F da forma

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

E a divergência pode escrever-se como

$$\operatorname{div} = \nabla \cdot \vec{F}$$

Exemplo 9 *Considere a função* $\vec{F}(x, y, z) = (xz, xyz, -y^2)$. *Tem-se que*

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(xyz)}{\partial y} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial z} = z + xz.$$