Teoria de apoio à resolução dos exercícios que se seguem

Na sua forma geral, uma equação diferencial linear é dada por: $(1)\cdot\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)$

Daqui se afere que o factor integrante é de uma forma geral do tipo: $\mu(x)=e^{\int P(x)\,dx}$

Assim sendo, pela multiplicação do factor integrante pela expressão geral da equação diferencial linear, teremos que:

$$\mu(x)\cdot\frac{dy}{dx}+\mu(x)\cdot P(x)\cdot y=\mu(x)\cdot Q(x)\Leftrightarrow\frac{d}{dx}(\mu(x)\cdot y)=\mu(x)\cdot Q(x)\Leftrightarrow\mu(x)\cdot y=\int\mu(x)\cdot Q(x)\,dx$$

Nota: Como forma de verificar se o cálculo do factor integrante foi bem efectuado, convém verificar se:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)\cdot y)=\mu(x)\cdot\frac{dy}{dx}+\mu(x)\cdot P(x)\cdot y\Leftrightarrow\frac{d}{dx}(\mu(x))\cdot y+\mu(x)\cdot\frac{d}{dx}(y)=\mu(x)\cdot\frac{dy}{dx}+\mu(x)\cdot P(x)\cdot y$$

1. Averigúe quais das seguintes equações diferenciais são lineares e determine uma família de soluções:

a) $\frac{dx}{dt}+\frac{x}{t^2}=\frac{1}{t^2}$

R:

$\frac{dx}{dt}+\frac{x}{t^2}=\frac{1}{t^2}$ → Equação diferencial de 1ª ordem linear.

$$\frac{dx}{dt}+\underbrace{\frac{1}{t^2}}_{P(t)}\cdot x=\underbrace{\frac{1}{t^2}}_{Q(t)} \Rightarrow \mu(t)=e^{\int P(t)\,dt} \Leftrightarrow \mu(t)=e^{\int \frac{1}{t^2}dt} \Leftrightarrow ☼$$

Cálculos auxiliares	
$\int \frac{1}{t^2}\,dt=\int \underbrace{t^{-2}}_{u^\alpha}\,dt=\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{t^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{t}+C$	$☼ \Leftrightarrow \mu(t)=e^{-\frac{1}{t}}$

Multiplicando agora o factor integrante $\mu(t)=e^{-\frac{1}{t}}$ pela equação dada no enunciado, teremos:

$$\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)\cdot\frac{dx}{dt}+\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)\cdot\frac{1}{t^2}\cdot x=\underbrace{\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)}_{\mu(t)}\cdot\underbrace{\frac{1}{t^2}}_{Q(t)}$$

Vamos agora confirmar se o factor integrante foi bem determinado:

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)\cdot x)=\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{1}{t}}\cdot x\right)=\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)\cdot x+e^{-\frac{1}{t}}\cdot\frac{d}{dt}(x)=\left[\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{t}\right)\right]\cdot x+e^{-\frac{1}{t}}\cdot\frac{dx}{dt}=$$

$$=\left[\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)\cdot\left(-\frac{(1)'_t\cdot t-1\cdot(t)'_t}{t^2}\right)\right]\cdot x+e^{-\frac{1}{t}}\cdot\frac{dx}{dt}=\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)\cdot\left(\frac{1}{t^2}\right)\cdot x+e^{-\frac{1}{t}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Está verificado que o factor integrante foi bem determinado e pode prosseguir-se com a resolução.

Assim sendo teremos então que:

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)\cdot x)=\mu(t)\cdot Q(t)\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{1}{t}}\cdot x\right)=\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)\cdot\frac{1}{t^2}\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{t}}\cdot x=\int\underbrace{\underbrace{\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)}_{e^u}\cdot\underbrace{\frac{1}{t^2}}_{u'}}_{e^u}dt\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{t}}\cdot x=e^{-\frac{1}{t}}+C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{e^{-\frac{1}{t}}+C}{e^{-\frac{1}{t}}}\Leftrightarrow x=1+C\cdot e^{\frac{1}{t}}$$

b) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{1}{x^3y^3}$

R:

$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{1}{x^3y^3}$ → Equação diferencial de 1ª ordem não linear, porque não se pode apresentar na forma geral que a caracteriza: $(1)\cdot\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)$ [1]. Como tal não se pode resolver.

c) $(u)dv-(2v)du=(u+1)du$

R:

Antes de mais temos que proceder ao re-arranjo da equação:

$$(u)dv-(2v)du=(u+1)du\Leftrightarrow(u)\frac{dv}{du}-(2v)\frac{du}{du}=(u+1)\frac{du}{du}\Leftrightarrow(u)\frac{dv}{du}-(2v)=(u+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(u)}{u}\frac{dv}{du}-\frac{(2v)}{u}=\frac{(u+1)}{u}\Leftrightarrow\frac{dv}{du}-\frac{(2v)}{u}=\frac{(u+1)}{u}$$ → Equação diferencial de 1ª ordem linear.

[1] Conclui-se isto porque $Q(x)$ é composto pelas variáveis x e y.

$$\frac{dv}{du}\underbrace{-\frac{2}{u}}_{P(u)}v=\underbrace{\frac{u+1}{u}}_{Q(u)} \Rightarrow \mu(u)=e^{\int P(u)\,du} \Leftrightarrow \mu(u)=e^{\int -\frac{2}{u}\,du} \Leftrightarrow \text{☼}$$

Cálculos auxiliares	
$\int -\frac{2}{u}\,du=-2\cdot\underbrace{\int\frac{1}{u}\,du}_{\ln\lvert u\rvert}=-2\cdot\ln\lvert u\rvert+C=\ln(u)^{-2}+C$	☼ $\Leftrightarrow \mu(u)=e^{\ln[u]^{-2}} \Leftrightarrow \mu(u)=u^{-2}=\frac{1}{u^2}$

Multiplicando agora o factor integrante $\mu(u)=\frac{1}{u^2}$ pela equação re-arranjada, teremos:

$$\left(\frac{1}{u^2}\right)\cdot\frac{dv}{du}-\left(\frac{1}{u^2}\right)\cdot\frac{2}{u}v=\left(\frac{1}{u^2}\right)\cdot\frac{u+1}{u} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{u^2}\right)\cdot\frac{dv}{du}-\frac{2}{u^3}v=\underbrace{\frac{u+1}{u^3}}_{\mu(u)\cdot Q(u)}$$

Vamos agora confirmar se o factor integrante foi bem determinado:

$$\frac{d}{du}(\mu(u)\cdot v)=\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^2}\cdot v\right)=\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^2}\right)\cdot v+\frac{1}{u^2}\cdot\frac{d}{du}(v)=\left(\frac{(1)'_u\cdot u^2-1\cdot(u^2)'_u}{(u^2)^2}\right)\cdot v+\frac{1}{u^2}\cdot\frac{dv}{du}=$$

$$=\left(-\frac{2u}{u^4}\right)\cdot v+\frac{1}{u^2}\cdot\frac{dv}{du}=-\frac{2}{u^3}\cdot v+\frac{1}{u^2}\cdot\frac{dv}{du}$$

Está verificado que o factor integrante foi bem determinado e pode prosseguir-se com a resolução.

Assim sendo teremos então que:

$$\frac{d}{du}(\mu(u)\cdot v)=\mu(u)\cdot Q(u) \Leftrightarrow \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^2}\cdot v\right)=\frac{u+1}{u^3} \Leftrightarrow \frac{1}{u^2}\cdot v=\int\frac{u+1}{u^3}\,du \Leftrightarrow \frac{1}{u^2}\cdot v=\int\frac{u}{u^3}\,du+\int\frac{1}{u^3}\,du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u^2}\cdot v=\int\frac{1}{u^2}\,du+\int\frac{1}{u^3}\,du \Leftrightarrow \frac{1}{u^2}\cdot v=\int\underbrace{u^{-2}}_{u^\alpha}\,du+\int\underbrace{u^{-3}}_{u^\alpha}\,du \Leftrightarrow \frac{1}{u^2}\cdot v=\frac{u^{-2+1}}{-2+1}+\frac{u^{-3+1}}{-3+1}+C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u^2}\cdot v=\frac{u^{-1}}{-1}+\frac{u^{-2}}{-2}+C \Leftrightarrow \frac{1}{u^2}\cdot v=-\frac{1}{u}-\frac{1}{2\cdot u^2}+C \Leftrightarrow v=u^2\cdot\left(-\frac{1}{u}-\frac{1}{2\cdot u^2}+C\right) \Leftrightarrow v=C\cdot u^2-u-\frac{1}{2}$$

d) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$

R:

Antes de mais temos que proceder ao re-arranjo da equação:

$y' - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} \cdot y = -\frac{y^2}{x}$ → Equação diferencial de 1ª ordem não linear, porque não se pode apresentar na forma geral que a caracteriza: $(1) \cdot \frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$[2]. Como tal não se pode resolver.

e) $x \cdot y' - 2y = x^3 e^x$

R:

Antes de mais temos que proceder ao re-arranjo da equação:

$x \cdot \frac{dy}{dx} - 2y = x^3 e^x \Leftrightarrow \frac{x}{x} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} \cdot y = \frac{x^3 e^x}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} \cdot y = \frac{x^3 e^x}{x}$ → Eq. diferencial de 1ª ordem linear

$$\frac{dy}{dx} \underbrace{- \frac{2}{x}}_{P(x)} \cdot y = \underbrace{x^2 e^x}_{Q(x)} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \Leftrightarrow \mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}\,dx} \Leftrightarrow ☼$$

Cálculos auxiliares	
$\int -\frac{2}{x}\,dx = -2 \cdot \underbrace{\int \frac{1}{x}\,dx}_{\ln\lvert u\rvert} = -2 \cdot \ln\lvert x\rvert + C = \ln(x)^{-2} + C$	☼ $\Leftrightarrow \mu(x) = e^{\ln x^{-2}} \Leftrightarrow \mu(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

Multiplicando agora o factor integrante $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ pela equação re-arranjada, teremos:

$$\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{dy}{dx} - \left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{2}{x} \cdot y = \left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot x^2 e^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x^3} \cdot y = \underbrace{e^x}_{u(x) \cdot Q(x)}$$

[2] Conclui-se isto porque $Q(x)$ é composto pelas variáveis x e y.

Vamos agora confirmar se o factor integrante foi bem determinado:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)\cdot y)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\cdot y\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot y+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d}{dx}(y)=\left(\frac{(1)'_x\cdot x^2-1\cdot(x^2)'_x}{(x^2)^2}\right)\cdot y+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dx}=$$

$$=\left(-\frac{2x}{x^4}\right)\cdot y+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dx}=\left(-\frac{2}{x^3}\right)\cdot y+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Está verificado que o factor integrante foi bem determinado e pode prosseguir-se com a resolução.

Assim sendo teremos então que:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)\cdot y)=\mu(x)\cdot Q(x)\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\cdot y\right)=e^x\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}\cdot y=\int e^x\,dx\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}\cdot y=e^x+C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=x^2\cdot(e^x+C)\Leftrightarrow y=e^x x^2+C\cdot x^2$$

f) $\frac{dx}{dt}+\frac{t+1}{2t}x=\frac{t+1}{t\cdot x}$

R:

$\frac{dx}{dt}+\frac{t+1}{2t}x=\frac{t+1}{t\cdot x}\rightarrow$ Equação diferencial de 1ª ordem não linear, porque não se pode apresentar na forma geral que a caracteriza: $(1)\cdot\frac{dx}{dt}+P(t)\cdot x=Q(t)$[3]. Como tal não se pode resolver.

[3] Conclui-se isto porque $Q(t)$ é composto pelas variáveis t e x.

g) $dy-(4y)dx=\left(2e^{x}y^{\frac{1}{2}}\right)dx$

R:

Antes de mais temos que proceder ao re-arranjo da equação, dividindo tudo por dx:

$\frac{dy}{dx}-(4y)\frac{dx}{dx}=\left(2e^{x}y^{\frac{1}{2}}\right)\frac{dx}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}-4y=2e^{x}y^{\frac{1}{2}} \rightarrow$ Equação diferencial de 1ª ordem não linear, porque não se pode apresentar na forma geral que a caracteriza: $(1)\cdot\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)$[4]. Como tal não se pode resolver.

h) $y'+3\frac{y}{x}=6x^{2}$

R:

Antes de mais temos que proceder ao re-arranjo da equação:

$$y'+3\frac{y}{x}=6x^{2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}+\underbrace{\frac{3}{x}}_{P(x)}y=\underbrace{6x^{2}}_{Q(x)} \Rightarrow \mu(x)=e^{\int P(x)dx} \Leftrightarrow \mu(x)=e^{\int\frac{3}{x}dx} \Leftrightarrow ☼$$

Cálculos auxiliares	
$\int\frac{3}{x}dx=3\cdot\underbrace{\int\frac{1}{x}dx}_{\ln\lvert u\rvert}=3\cdot\ln\lvert x\rvert+C=\ln(x)^{3}+C$	☼ $\Leftrightarrow \mu(x)=e^{\ln x^{3}} \Leftrightarrow \mu(x)=x^{3}$

Multiplicando agora o factor integrante $\mu(x)=x^{3}$ pela equação re-arranjada, teremos:

$$x^{3}\cdot\frac{dy}{dx}+x^{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot y=x^{3}\cdot 6x^{2} \Leftrightarrow x^{3}\cdot\frac{dy}{dx}+3x^{2}\cdot y=\underbrace{6x^{5}}_{\mu(x)\cdot Q(x)}$$

Vamos agora confirmar se o factor integrante foi bem determinado:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)\cdot y)=\frac{d}{dx}\left(x^{3}\cdot y\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{3}\right)\cdot y+x^{3}\cdot\frac{d}{dx}(y)=3x^{2}\cdot y+x^{3}\cdot\frac{dy}{dx}$$

[4] Conclui-se isto porque $Q(x)$ é composto pelas variáveis x e y.

Está verificado que o factor integrante foi bem determinado e pode prosseguir-se com a resolução.

Assim sendo teremos então que:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)\cdot y)=\mu(x)\cdot Q(x)\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(x^3\cdot y\right)=6x^5 \Leftrightarrow x^3\cdot y=\int 6x^5dx \Leftrightarrow x^3\cdot y=6\cdot\int x^5dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3\cdot y=6\cdot\frac{x^{5+1}}{5+1}+C\Leftrightarrow y=\frac{x^6}{x^3}+C\Leftrightarrow y=x^3+C$$

i) $(x)dy+\left(y+2x^6y^4\right)dx=0$

R:

Antes de mais temos que proceder ao re-arranjo da equação, dividindo tudo, primeiro por dx e em seguida por x:

$$(x)\frac{dy}{dx}+\left(y+2x^6y^4\right)\frac{dx}{dx}=0\Leftrightarrow(x)\frac{dy}{dx}+y+2x^6y^4=0\Leftrightarrow\frac{(x)}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}+\frac{2x^6y^4}{x}=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\cdot y=-\frac{2x^6y^4}{x}\rightarrow$ Equação diferencial de 1ª ordem não linear, porque não se pode apresentar na forma geral que a caracteriza: $(1)\cdot\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)$[5]. Como tal não se pode resolver.

[5] Conclui-se isto porque $Q(x)$ é composto pelas variáveis x e y.

2. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $-\frac{dy}{dx}+5y=-3e^{5x},\quad y(0)=8$

R:

Antes de mais vamos re-arranjar esta equação, multiplicando todos os membros por (-1), isto para que $\frac{dy}{dx}$ possa respeitar a forma geral deste tipo de equações[6]:

$$(-1)\cdot-\frac{dy}{dx}+(-1)\cdot 5y=(-1)\cdot-3e^{5x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\underbrace{-5}_{P(x)}y=\underbrace{3e^{5x}}_{Q(x)} \Rightarrow \mu(x)=e^{\int P(x)\,dx} \Leftrightarrow \mu(x)=e^{\int -5\,dx} \Leftrightarrow ☼$$

Cálculos auxiliares	
$\int -5\,dx=-5\cdot\int 1\,dx=-5x+C$	☼$\Leftrightarrow \mu(x)=e^{-5x}$

Multiplicando agora o factor integrante $\mu(x)=e^{-5x}$ pela equação re-arranjada, teremos:

$$\left(e^{-5x}\right)\cdot\frac{dy}{dx}-\left(e^{-5x}\right)\cdot 5y=\left(e^{-5x}\right)\cdot 3e^{5x} \Leftrightarrow \left(e^{-5x}\right)\cdot\frac{dy}{dx}-5\cdot e^{-5x}\cdot y=3\cdot\underbrace{e^{5x-5x}}_{e^{0}=1} \Leftrightarrow \left(e^{-5x}\right)\cdot\frac{dy}{dx}-5\cdot e^{-5x}\cdot y=3$$

Vamos agora confirmar se o factor integrante foi bem determinado:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)\cdot y)=\frac{d}{dx}\left(e^{-5x}\cdot y\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{-5x}\right)\cdot y+e^{-5x}\cdot\frac{d}{dx}(y)=\frac{d}{dx}(-5x)\cdot e^{-5x}\cdot y+e^{-5x}\cdot\frac{dy}{dx}=$$

$$=-5\cdot e^{-5x}\cdot y+e^{-5x}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Está verificado que o factor integrante foi bem determinado e pode prosseguir-se com a resolução.

[6] $(1)\cdot\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)$

Assim sendo teremos então que:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)\cdot y)=\mu(x)\cdot Q(x)\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-5x}\cdot y\right)=3\Leftrightarrow e^{-5x}\cdot y=\int 3\,dx\Leftrightarrow e^{-5x}\cdot y=3\cdot\int 1\,dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-5x}\cdot y=3\cdot x+C\Leftrightarrow y=\frac{3x+C}{e^{-5x}}\Leftrightarrow y=\frac{3x+C}{\frac{1}{e^{5x}}}\Leftrightarrow y=e^{5x}\cdot(3x+C)$$

Calculando agora o valor da constante C, com base no valor inicial dado no enunciado teremos que:

$$y(0)=8\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=8\end{cases}\Rightarrow 8=e^{5\cdot 0}\cdot(3\cdot 0+C)\Leftrightarrow 8=1\cdot(0+C)\Leftrightarrow C=8$$

Então: $y=e^{5x}\cdot(3x+8)$

b) $x\cdot y'+y-e^{x}=0,\quad y(a)=b$

R:

Antes de mais vamos re-arranjar esta equação, dividindo todos os membros por (x), isto para que $\frac{dy}{dx}$ possa respeitar a forma geral deste tipo de equações[7]:

$$x\frac{dy}{dx}+y-e^{x}=0\Leftrightarrow\left(\frac{x}{x}\right)\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{e^{x}}{x}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}+\underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)}\cdot y=\underbrace{\frac{e^{x}}{x}}_{Q(x)}\Rightarrow\mu(x)=e^{\int P(x)\,dx}\Leftrightarrow\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\Leftrightarrow☼$$

Cálculos auxiliares	
$\int\frac{1}{x}\,dx=\ln(x)+C$	☼$\Leftrightarrow\mu(x)=e^{\ln(x)}\Leftrightarrow\mu(x)=x$

[7] $(1)\cdot\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)$

Multiplicando agora o factor integrante $\mu(x) = x$ pela equação re-arranjada, teremos:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + x \cdot \frac{1}{x} \cdot y = x \cdot \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow x \cdot \frac{dy}{dx} + y = \underbrace{e^x}_{\mu(x) \cdot Q(x)}$$

Vamos agora confirmar se o factor integrante foi bem determinado:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x) \cdot y) = \frac{d}{dx}(x \cdot y) = \frac{d}{dx}(x) \cdot y + x \cdot \frac{d}{dx}(y) = y + x \cdot \frac{dy}{dx}$$

Está verificado que o factor integrante foi bem determinado e pode prosseguir-se com a resolução.

Assim sendo teremos então que:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x) \cdot y) = \mu(x) \cdot Q(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(x \cdot y) = e^x \Leftrightarrow x \cdot y = \int e^x \, dx \Leftrightarrow x \cdot y = e^x + C \Leftrightarrow y = \frac{e^x + C}{x}$$

Calculando agora o valor da constante C, com base no valor inicial dado no enunciado teremos que:

$$y(a) = b \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = a \\ y = b \end{matrix} \right\} \Rightarrow b = \frac{e^a + C}{a} \Leftrightarrow a \cdot b = e^a + C \Leftrightarrow C = a \cdot b - e^a$$

Então: $y = \dfrac{e^x + \left(a \cdot b - e^a\right)}{x}$

3. A equação: $\frac{dy}{dx} = A(x) \cdot y^2 + B(x) \cdot y + C(x)$**, designa-se por equação de Riccati.**

a) Mostre que se $A = 0$ **então a equação referida é uma equação linear.**

R:

Procedendo ao re-arranjo da equação dada, para $A(x) = 0$, teremos que:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \cdot y^2 + B(x) \cdot y + C(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - B(x) \cdot y = C(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int -B(x)\,dx}$$

Multiplicando agora o factor integrante $\mu(x) = e^{\int -B(x)\,dx}$ pela equação re-arranjada, teremos:

$$\left(e^{\int -B(x)\,dx}\right) \cdot \frac{dy}{dx} - \left(e^{\int -B(x)\,dx}\right) \cdot B(x) \cdot y = \left(e^{\int -B(x)\,dx}\right) \cdot C(x)$$

Assim sendo teremos então que:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x) \cdot y) = \mu(x) \cdot Q(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{\int -B(x)\,dx} \cdot y\right) = \left(e^{\int -B(x)\,dx}\right) \cdot C(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\int -B(x)\,dx} \cdot y = \int \left(e^{\int -B(x)\,dx}\right) \cdot C(x)\,dx$$

b) Verifique que $f = x$ **é uma solução explícita da equação de Riccati** $y' = -y^2 + xy + 1$ **e que a transformação** $y = f + \frac{1}{v}$ **reduz a equação diferencial a uma equação linear em** $v(x)$**. Resolva a equação linear obtida pela transformação.**

R: