

# Complementos de Análise Matemática B/C

Departamento de Matemática e Aplicações

2011/2012

## Folha de Exercícios 3

Solução de equações diferenciais de primeira ordem

Eng<sup>a</sup>. de Comunicações, Eng<sup>a</sup>. Electrónica Industrial e Computadores, Eng<sup>a</sup>. de Materiais

### Equações Diferenciais Exatas

1. Averiguar quais das seguintes equações diferenciais são exatas e determinar a sua solução.

(a)  $(3x^2y^2 - y^3 + 2x) dx + (2x^3y - 3xy^2 + 1) dy = 0$

(b)  $\left(\frac{2s-1}{t}\right) ds + \left(\frac{s-s^2}{t^2}\right) dt = 0$

(c)  $(x + e^{x/y}) dx + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0, y(1) = 1$

2. Para cada uma das equações seguintes determinar o valor da constante  $A$  de forma a serem exatas e resolver as equações correspondentes.

(a)  $(6xy + 2y^2 - 5) dx + (3x^2 + Axy - 6) dy = 0$

(b)  $\left(\frac{Ay}{x^3} + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dy = 0$

3. Para cada uma das equações seguintes determinar a função mais geral  $f(x, y)$  de forma a ter-se uma equação diferencial exata:

(a)  $f(x, y) dx + (2ye^x + y^2e^{3x}) dy = 0$

(b)  $(y^2 + 1) \cos x dx + f(x, y) dy = 0$

### Equações Diferenciais Exatas e Fatores Integrantes

4. Para cada alínea que se segue, verificar que a equação diferencial dada não é exata, que  $\mu(x, y)$  é um fator integrante e, com base nisso, obter uma família de soluções:

(a)  $(x^2 - y + 1) + (x^3 - 3xy + 2x) y' = 0, \quad \mu(y) = e^{3y}$

(b)  $x^2y^3 dx + x(1 + y^2) dy = 0, \quad \mu(x, y) = \frac{1}{xy^3}$

(c)  $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right) dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right) dy = 0, \quad \mu(x, y) = ye^x$

5. Considerar a equação diferencial

$$(y^2 + 2xy) dx - x^2 dy = 0$$

- (a) Mostrar que esta equação não é exata.
- (b) Multiplicar a equação por  $y^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , e determinar  $n$  de forma a que a nova equação seja exata.
- (c) Resolver a equação que se obtém quando se multiplica a equação acima pelo fator integrante obtido em b)
- (d) Mostrar que  $y = 0$  é uma solução da equação não exata, mas que não é solução da equação obtida quando esta é multiplicada pelo fator integrante obtido em a).

### Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis

6. Resolver cada uma das seguintes equações diferenciais. Mostrar que a solução verifica formalmente a equação diferencial dada.

- (a)  $4xy dx + (x^2 + 1) dy = 0$
- (b)  $(x + 4)(y^2 - 1) dx + y(x^2 + 8x) dy = 0$
- (c)  $\operatorname{tg} \theta dr + 2r d\theta = 0$
- (d)  $\frac{dy}{dx} = x - y$ , (sugestão: fazer  $w = x - y$ )
- (e)  $\frac{dy}{dx} = (y + x)^2$ , (sugestão: fazer  $w = y + x$ )

7. Resolver o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 8(\cos^2 y) dx + (\operatorname{cosec}^2 x) dy = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

### Equações Diferenciais Homogéneas

8. Recorde-se que uma função  $g(x, y)$  diz-se homogénea de grau  $n$  se  $g(tx, ty) = t^n g(x, y)$ .

Uma equação diferencial da forma  $y' = f(x, y)$  diz-se homogénea se a função  $f(x, y)$  é homogénea de grau zero.

- (a) Verificar se as seguintes funções  $f(x, y)$  são homogéneas. Em caso afirmativo, indicar o respectivo grau.
  - i.  $f(x, y) = x^2 + 3xy$
  - ii.  $f(x, y) = \ln(x/y) + xy$

- (b) Mostrar que a mudança de variável  $y = vx$  transforma a equação diferencial homogênea  $y' = f(x, y)$  na seguinte equação de variáveis separáveis  $xv' = f(1, v) - v$ .
- (c) Usando o resultado obtido na alínea anterior resolver as seguintes equações diferenciais:
- $(x + y) dx - x dy = 0, x > 0$
  - $(2xy - x^2) dx + x^2 dy = 0, x > 0$
  - $y' = \frac{5y - 2x}{4x - y}, y(0) = 12$

9. Resolver as seguintes equações diferenciais usando dois métodos diferentes:

- $y' \cos x + 2y \sin x = 0$
- $(2x - y) y' + x + 2y = 0$
- $(4xy - y^2) \frac{dy}{dx} + x^2 + 2y^2 = 0$

### Equações Diferenciais Lineares

10. Averiguar quais das seguintes equações diferenciais são lineares e determinar uma família de soluções:

- $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t^2} = \frac{1}{t^2}$
- $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^3 y^3}$
- $u dv - 2v du = (u + 1) du$
- $y' - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$
- $xy' - 2y = x^3 e^x$
- $\frac{dx}{dt} + \frac{t+1}{2t}x = \frac{t+1}{tx}$
- $dy - 4y dx = 2e^x y^{1/2} dx$
- $y' + 3\frac{y}{x} = 6x^2$
- $x dy + (y + 2x^6 y^4) dx = 0$

11. Resolver os seguintes problemas de valor inicial:

- $\frac{dy}{dx} - 5y = 3e^{5x}, y(0) = 8;$
- $xy' + y - e^x = 0, \text{ e } y(a) = b.$

12. A equação

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

designa-se equação de Riccati.

- Mostrar que se  $A \equiv 0$  então a equação referida é uma equação linear.

- (b) Verificar que  $f = x$  é uma solução explícita da equação de Riccati  $y' = -y^2 + xy + 1$  e que a transformação  $y = f + \frac{1}{v}$  reduz a equação diferencial a uma equação linear em  $v(x)$ ; resolver a equação linear obtida pela transformação.

### Exercícios Diversos

13. Classificar e resolver as seguintes equações diferenciais determinando uma família de soluções:

- (a)  $e^x dx + x^3 dy + 4x^2 y dx = 0$   
 (b)  $2r(s^2 + 1) dr + (r^4 + 1) ds = 0$   
 (c)  $y' = y^{\frac{1}{2}}$ .  
 (d)  $(y + \cos x) dx + (x + \sin y) dy = 0$ .  
 (e)  $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ .

14. Resolver os seguintes problemas de valor inicial:

- (a)  $\left(\frac{1}{y^2} \ln x - y\right) dy - \frac{1}{xy} dx = 0, x > 0, y(1) = 2$   
 (b)  $\left(x^3 + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx - xy \sqrt{x^2 + y^2} dy = 0, x > 0, y(1) = 0$   
 (c)  $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg}(x) = \sec(x) \quad y(0) = 0$

15. Considere-se a equação diferencial

$$x^2 y' + 2xy = 0, \quad x \neq 0$$

- (a) Averiguar se a equação dada é exata e determinar a respectiva família de soluções.  
 (b) A equação dada é linear? Em caso afirmativo, determinar o respectivo fator integrante,  $\mu_1$ .  
 (c) A equação dada é de variáveis separáveis? Em caso afirmativo, determinar o respectivo fator integrante,  $\mu_2$ .

### Soluções da folha de exercícios 3

1. a)  $x^3 y^2 - y^3 x + x^2 + y = c$     b)  $\frac{s^2 - s}{t} = c$     c)  $\frac{x^2}{2} + ye^{x/y} = c, y(1) = 1 \Rightarrow c = 1/2 + e$   
 2. a)  $A = 4; 3x^2 y + 2y^2 x - 5x - 6y = c$     b)  $A = -2; \frac{y}{x^2} - \frac{y}{x} = c$

3. a)  $f(x, y) = y^2 e^x + y^3 e^{3x} + \phi(x)$       b)  $f(x, y) = 2y \operatorname{sen} x + \phi(y)$
4. a)  $e^{3y} \left( \frac{x^3}{3} - xy + x \right) = c$       b)  $x^2 - \frac{1}{y^2} + \ln y^2 = c, y \neq 0$   
c)  $e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x = k$
5. b)  $n = -2$       c)  $x + \frac{x^2}{y} = c$
6. a)  $y(x^2 + 1)^2 = c$       b)  $(y^2 - 1)(x^2 + 8x) = c$       c)  $r \operatorname{sen}^2 \theta = c$   
d)  $y = x - 1 + ce^{-x}$       e)  $y = \operatorname{tg}(x - c) - x$
7.  $4x - 2 \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{tg} y = \frac{\pi}{3}$
8. a) i) sim, grau 2,      ii) não  
c) i)  $x \ln x - cx = y$       ii)  $3yx^2 - x^3 = c$       iii)  $y = 6\sqrt{1-x} - 2x + 6$
9. a)  $y = c \cos^2 x$   
b)  $y^2 - 4yx - x^2 = c$   
c)  $x^3 + 6xy^2 - y^3 = c$
10. b), d), f), g) e i) - equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, não lineares  
a), c), e) e h) - equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, lineares  
a)  $x(t) = 1 + ce^{1/t}$       c)  $v = cu^2 - c - \frac{1}{2}$       e)  $y = x^2 e^x + cx^2$       h)  $y = x^3 + cx^{-3}$
11. a)  $y = e^{5x}(3x + 8)$       b)  $(e^x + ab - e^a)x^{-1}$
12. b)  $v' - vx = 1, \quad e^{-x^2/2}v = \int e^{-x^2/2} dx + c$
13. a) linear,  $y = 1/x^4 \{(1-x)e^x + c\}$       b) v. separáveis,  $\operatorname{arctg} r^2 + \operatorname{arctg} s = c$   
c) v. separáveis,  $x - 2\sqrt{y} = c$       d) exata,  $xy + \operatorname{sen} x - \cos y = c$   
e) homogênea,  $y^2 = x^2(\ln x^2 + c)$
14. a)  $\frac{1}{y} \ln x + \frac{y^2}{2} = 2$       b)  $3 \ln x - \left( \frac{x^2 + y^2}{x^2} \right)^{3/2} = -1$       c)  $y = x \sec x$
15. a)  $F(x, y) = x^2 y + c$       b)  $\mu_1 = x^2$       c)  $\mu_2 = \frac{1}{x^2 y}$