

Processamento Digital de Sinal

Teste 2 2020-2021 --- Duração: 2:15 h + 15m

1. Considere um processo ruído branco $x[n]$ estacionário de média nula e variância σ_x^2 e a estimativa da sequência de autocorrelação dada por:

$$C_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n) \cdot x^*(n+m)$$

- a) Sabendo que quando $N \gg |m|$ a variância deste estimador é dada por

$$\text{var}[C_{xx}(m)] \approx \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} [\phi_{xx}^2(r) + \phi_{xx}(r-m) + \phi_{xx}(r+m)]$$

como o classifica relativamente à consistência? Justifique.

- b) Mostre que o valor médio do periodograma é a DTFT da sequência de autocorrelação passada por uma janela triangular, ou seja é dado por:

$$E[I_N(\Omega)] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}(m) e^{-j\Omega m}$$

- c) Mostre que o valor médio do periodograma está relacionado com a densidade espectral de potência por

$$E[I_N(\Omega)] = P_{xx}(\Omega) * \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(\Omega \frac{N}{2}\right)}{\sin \frac{\Omega}{2}} \right)^2$$

- d) Enuncie e justifique o método de Bartlett para a estimação da densidade espectral de potência. Mostre que este método diminui a resolução espectral. Proponha uma alteração ao método que não apresente esta desvantagem. Em sua opinião este aumento de resolução espectral é efetivo? Justifique.
- e) Considere a DFT de $x[n]$. Determine a variância de $X(k)$. Justifique.
- f) Com base no resultado da alínea anterior e na definição de PSD verifique que a potência obtida no domínio temporal coincide com a potência obtida no domínio espectral. Justifique.
- g) Considere que o sinal $x[n]$ é aplicado ao sistema LTI cuja Transformada-z da resposta impulsional é dada por

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Determine a sequência de autocorrelação do sinal de saída. Justifique.

- h) Considere que dispõe de 4 amostras do sinal de saída do sistema apresentado na alínea anterior. Escreva um conjunto de equações que lhe permitam calcular os coeficientes a_k que minimizam o erro do preditor. Apresente uma expressão que lhe permita calcular esse erro. Justifique.

2. Considere um sinal $s[n]$ de média m_s e desvio padrão σ_s corrompido de modo aditivo por um sinal ruído branco $e[n]$ de média m_e e desvio padrão σ_e .

- a) Considere que $s[n]$ é um sinal sinusoidal com fase aleatória e uniformemente distribuída em $]0, 2\pi[$ ou seja $s[n] = A \cos(w_0 n + \varphi)$. Determine em que circunstâncias a sequência de autocorrelação do sinal observado é dada por:

$$\Phi_{xx}[m] = \frac{A^2}{2} \cos w_0 m + \sigma_e^2 \delta[m] + m_e^2$$

- b) Determine e esboce justificando, no contexto da alínea a) a densidade espectral de potência do processo $x[n]$.
- c) Considere estacionaridade na realização dos processos $s[n]$ e $e[n]$ e determine a DTFT do filtro de wiener que permite atenuar o ruído no sinal. Justifique. Determine ainda a resposta impulsional do filtro de wiener. Justifique.
- d) Estabeleça a equação de filtragem no domínio temporal para este filtro de wiener. Justifique. Diga com poderia numa situação prática estimar os parâmetros que fazem parte da equação do filtro (média e variância do sinal limpo $s[n]$).