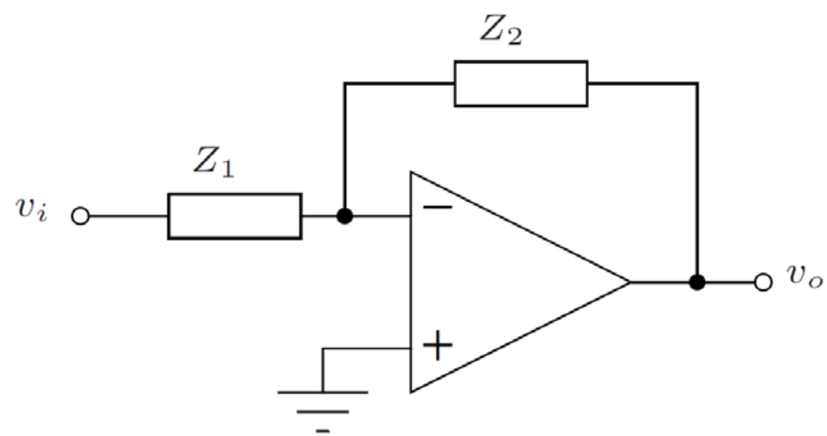
# Aula 10

# Configuração inversora com Z1 e Z2 em geral; Circuitos com amplificadores operacionais

Gerardo Rocha

# A configuração inversora com impedâncias Z1 e Z2 em geral

No amplificador inversor, as resistências R1 e R2 são substituídas por impedâncias de valores Z1(jw) e Z2(jw).




$$H(j\omega) = \frac{v_o(j\omega)}{v_i(j\omega)} = -\frac{Z_2(j\omega)}{Z_1(j\omega)}$$

# A configuração inversora com impedâncias Z1 e Z2 em geral

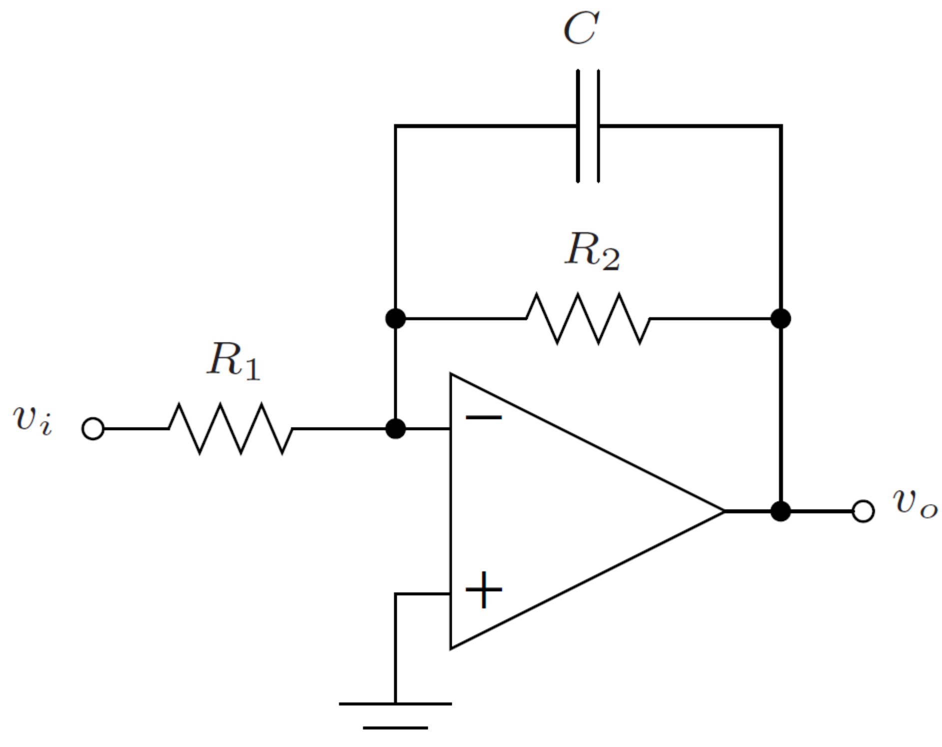
**Exemplo:**

Deduza uma expressão para a função de transferência do circuito da figura.

Dimensione o valor dos seus componentes para que o ganho em tensões contínuas seja de 40 dB e a frequência de corte de 1 kHz.

Qual é a frequência para a qual o ganho é unitário?

Qual é o ângulo de fase a essa frequência?



# A configuração inversora com impedâncias Z1 e Z2 em geral

Dedução da função de transferência:

$$X_c = \frac{1}{j\omega C}$$

$$(R_2||X_c) = \frac{R_2 \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}$$

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{v_o(j\omega)}{v_i(j\omega)} = -\frac{R_2||X_c}{R_1} \\ &= \frac{\frac{R_2}{1+j\omega R_2 C}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + j\omega R_2 C}. \end{aligned}$$

Fazendo $f_o = 1/(2\pi R_2 C)$,
$\omega R_2 C = 2\pi f R_2 C = f/f_o$

$$H(jf) = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + j(f/f_o)}$$

# A configuração inversora com impedâncias Z1 e Z2 em geral

Dimensionamento dos componentes:

Para tensões contínuas, $f = 0$:

$$H(0) = -\frac{R_2}{R_1}.$$

$$20 \log |H(0)| = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 40$$

$$\Leftrightarrow \log \left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 10^2$$

Fazendo $R_1 = 1\ k\Omega,\ R_2 = 100\ k\Omega.$

Para $f_o = 1\ kHz$

$$f_o = \frac{1}{2\pi R_2 C} = 1\ kHz$$

$$C = \frac{1}{2\pi R_2 \times 1000} = 1.59\ nF$$

# A configuração inversora com impedâncias Z1 e Z2 em geral

Cálculo da frequência para um ganho unitário

$$|H(jf)| = \left|-\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+j(f/f_o)}\right| = 1$$

$$\left|\frac{100}{1+\frac{jf}{1000}}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1\times10^5}{1000+jf}\right| = 1$$

$$|1000+jf| = 1\times10^5 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1000^2+f^2} = 1\times10^5 \Leftrightarrow$$

$$f = 100\ kHz.$$

Cálculo da fase para *f* = 100 kHz

$$\angle H(jf) = \angle\left(-\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+j(f/f_o)}\right) =$$

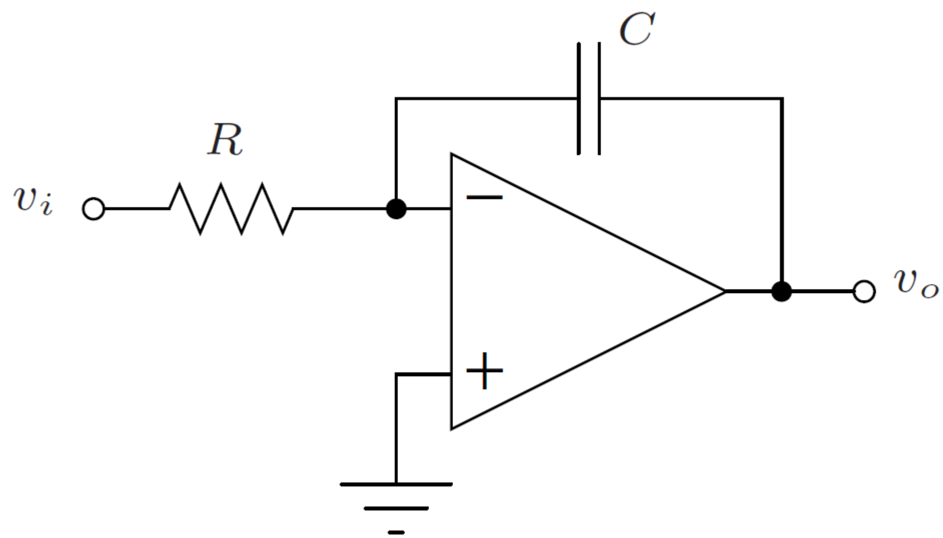
$$\angle\left(\frac{-100}{1+100j}\right) =$$

$$\arctan\left(\frac{0}{-100}\right) - \arctan\left(\frac{100}{1}\right)$$

$$\simeq 180 - 90 = 90^o.$$

# O integrador inversor

Coloca-se um condensador na realimentação e uma resistência na entrada. Este circuito implementa a operação matemática de integração.




Corrente em *R*: $i(t) = v_i(t)/R$

Esta corrente circula através do condensador, carregando-o. Se o circuito for ligado no instante $t$ = 0, no instante arbitrário $t$, a corrente $i(t)$ carregou o condensador com uma tensão que é dada por:

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_i(t)dt$$

O circuito fornece uma tensão de saída que é proporcional ao integral da entrada em ordem ao tempo.

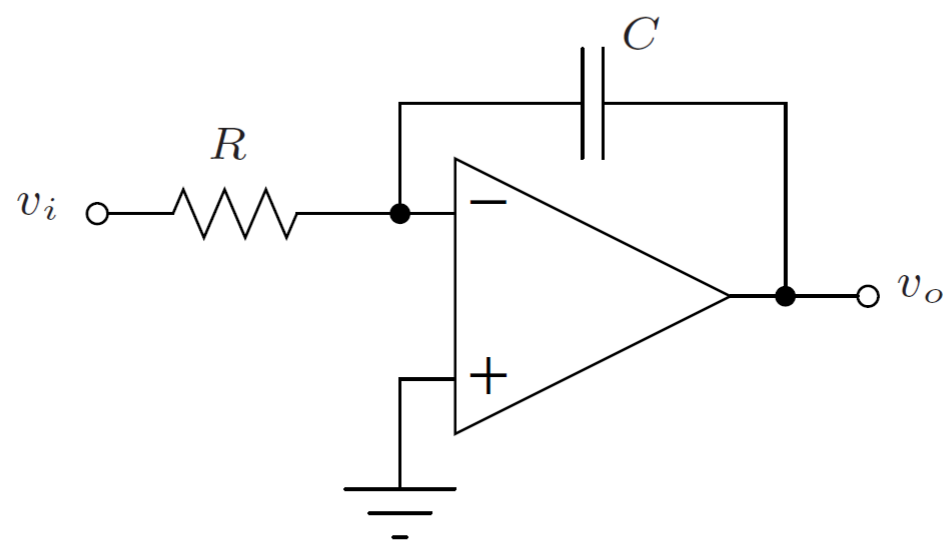
Este circuito também é conhecido por **integrador de Miller**, devido aos trabalhos publicados por este senhor nesta área.

# O integrador inversor

Também se pode descrever o funcionamento do circuito no domínio das frequências, substituindo as impedâncias *Z*1 e *Z*2 por *R* e *Xc:*

$$X_c = 1/(j\omega C)$$

$$H(j\omega) = \frac{v_o(j\omega)}{v_i(j\omega)} = -\frac{1}{j\omega RC}$$




A amplitude e a fase são dadas por:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\omega RC}$$

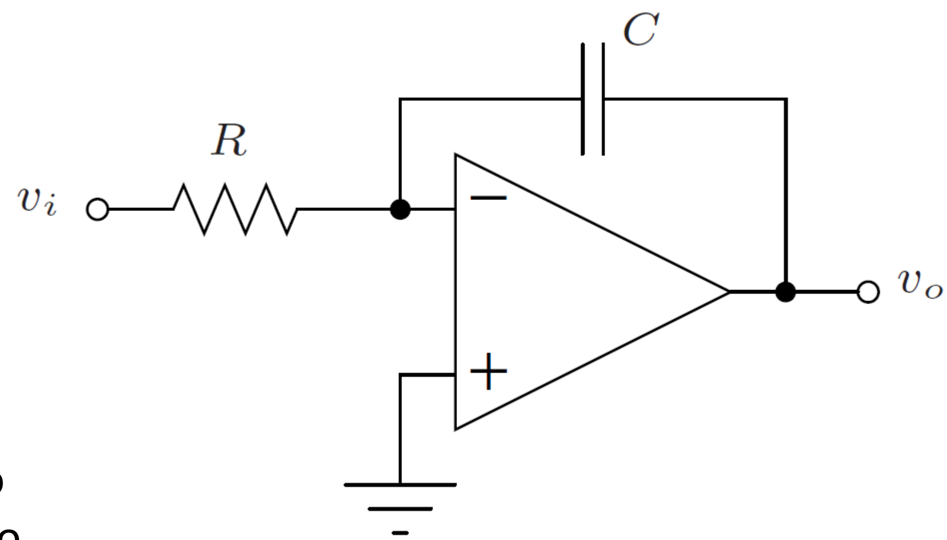
$$\angle H(j\omega) = 90^o.$$

# O integrador inversor

Observa-se que para tensões contínuas, a amplitude da função de transferência é infinita.

Em tensões contínuas, o amplificador operacional opera em malha aberta.

O elemento de realimentação negativa é um condensador que funciona como um circuito aberto, ou seja, deixa de haver realimentação negativa.




Isto pode ser um problema grave do circuito integrador: se o sinal de entrada tiver uma componente contínua, por pequena que seja, teoricamente produz uma saída infinita.

Na prática, isto resulta na saturação do amplificador, fazendo com que a sua saída apresente um valor próximo da tensão de alimentação.

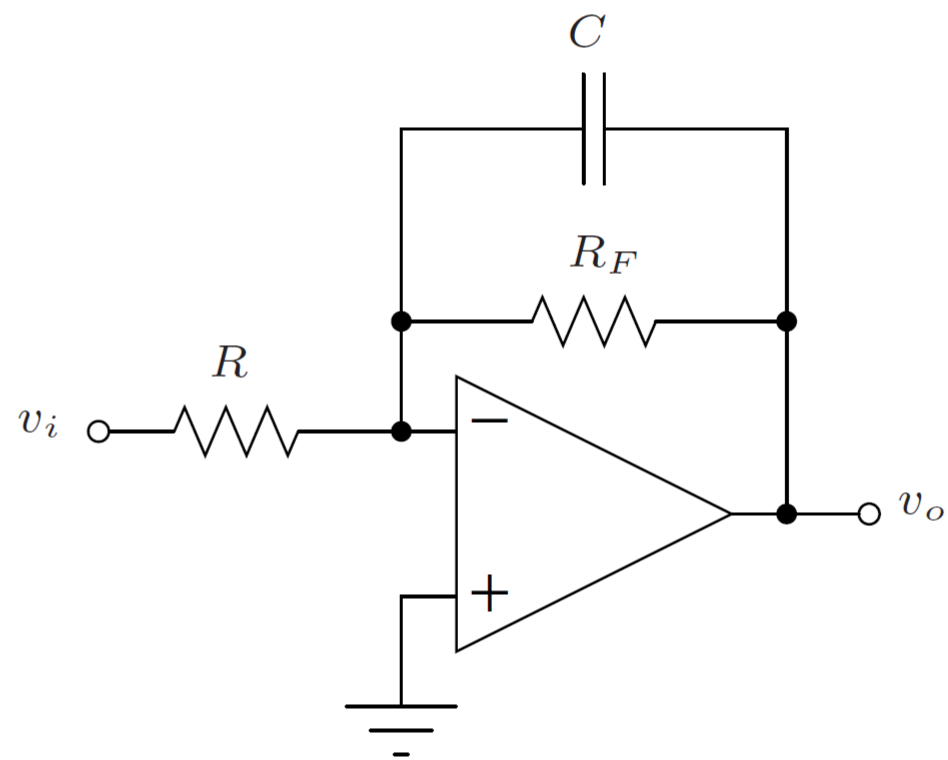
# O integrador inversor

O problema do ganho muito alto do integrador para tensões contínuas é resolvido ligando-se uma resistência *RF* em paralelo com o condensador.

A resistência *RF* fornece um caminho para a realimentação, fazendo com que o integrador tenha um ganho em tensões contínuas finito e dado por −*RF* /*R*.

A introdução da resistência *RF* faz com que o integrador deixe de ser ideal, pois o condensador tem mais um caminho alternativo para se descarregar.

*RF* deve ter um valor o mais alto possível.

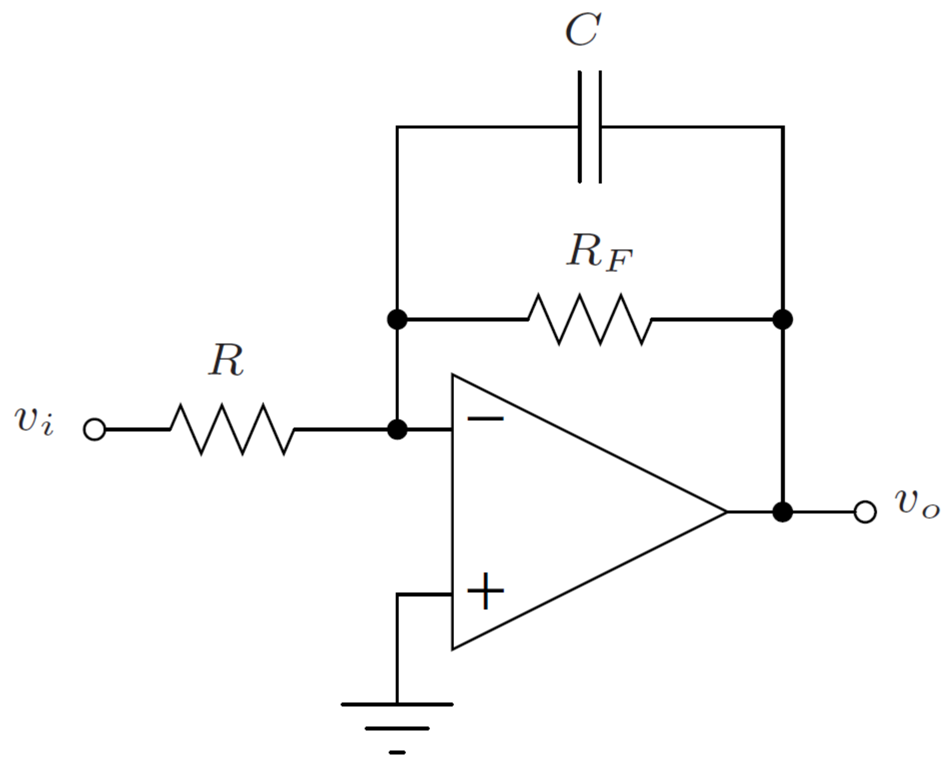


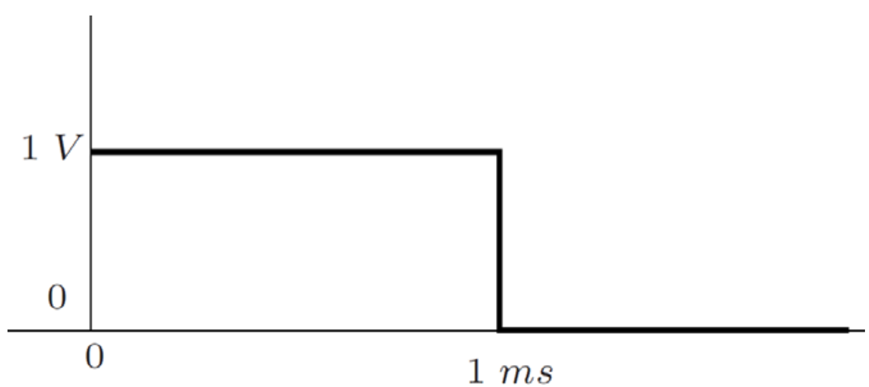
# O integrador inversor

**Exemplo:**

Esboce a forma de onda de saída de um integrador de Miller, com *R* = 10 kΩ, *C* = 10 nF e sem *RF* , ao qual é aplicado um pulso de 1 V de amplitude e 1 ms de duração.

Se for usada uma resistência *RF* de 1 M Ω, como seria a resposta?



# O integrador inversor

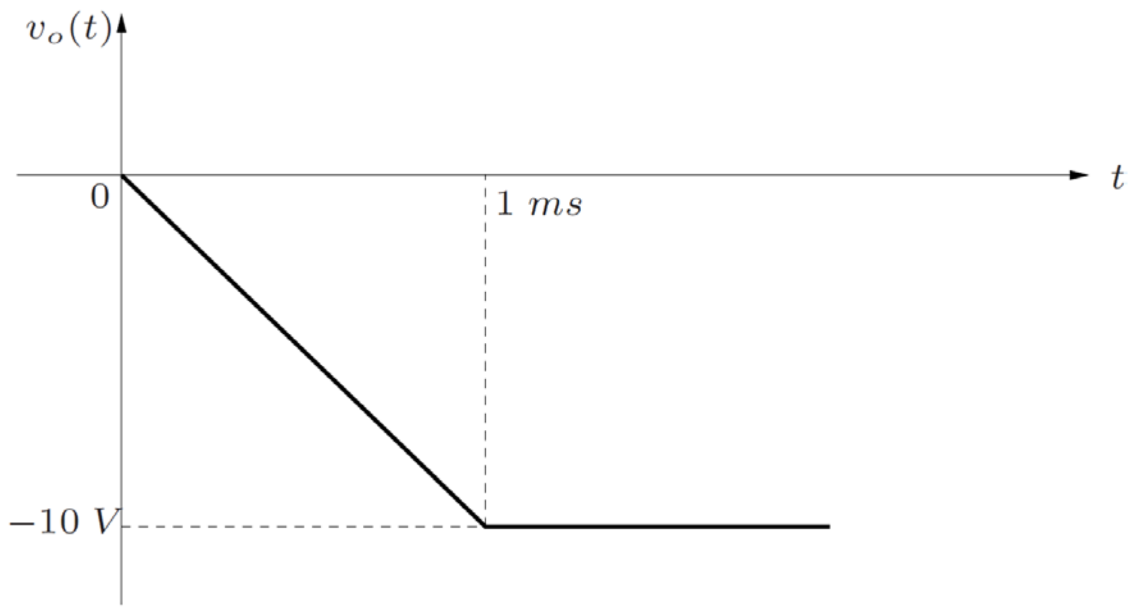
Assumindo que inicialmente o condensador está descarregado, como resposta ao pulso de 1 V e 1 ms, a saída será:

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^{1ms} dt$$

Esta equação representa uma rampa. A tensão *vo* atinge o valor de −10 V para *t* = 1 ms, permanecendo constante a partir daí

Para *R* = 10 k Ω e *C* = 10 nF:

$$v_o(t) = -10^4 t$$




No exemplo está implícita uma aplicação dos integradores: conversão de ondas quadradas em ondas triangulares.

# O integrador inversor

Com a introdução de *RF* , a corrente de 100 µA, que circula em *R,* vai dividir-se por *RF* e *C:*

$$I_F(t) = \frac{V_c(t)}{R_f}$$

$$I_c(t) = 100\mu - I_F(t)$$

$$I_c(t) = C\frac{dV_c}{dt}$$

$$dV_c(t) = \frac{I_c(t)dt}{C}$$

Inicialmente, o condensador está descarregado e *Vc*(0) = 0, o que faz com que *IF* (0) = 0.

Quando *t* = 1 ms, o pulso de entrada desaparece, o que faz com que apenas haja corrente em *RF* e *C:*

$$I_F(t) = \frac{V_c(t)}{R_f}$$

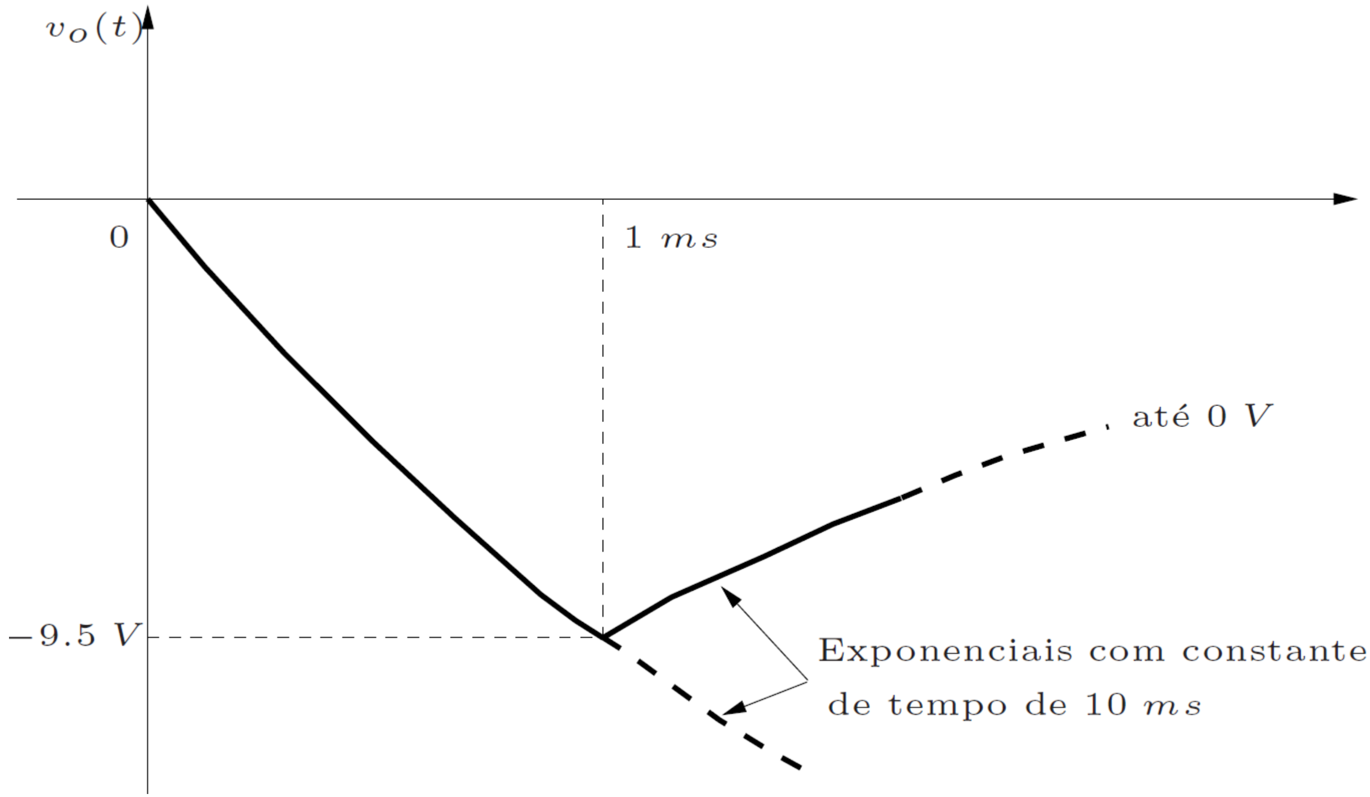
$$I_c(t) = -I_F(t)$$

$$I_c(t) = C\frac{dV_c}{dt}$$

$$dV_c(t) = \frac{I_c(t)dt}{C}$$

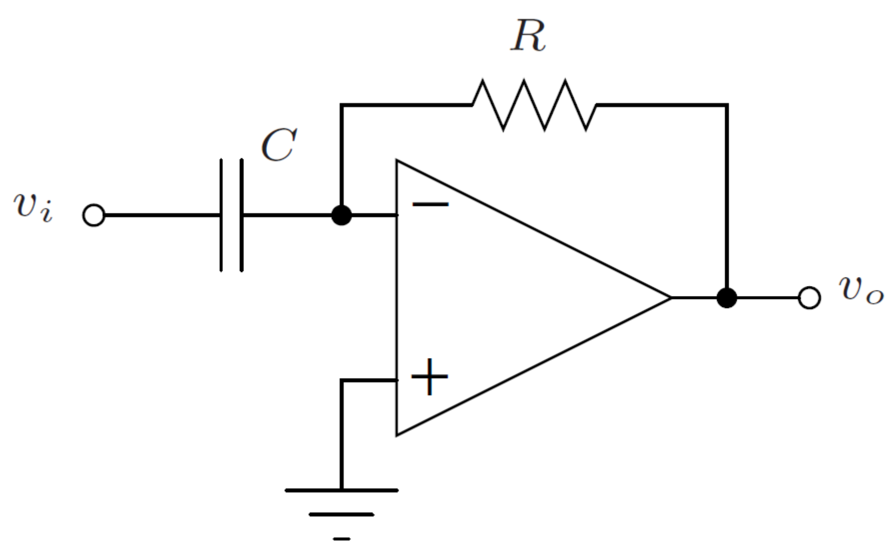
# O integrador inversor

Gráfico resultante:



# O diferenciador

Trocando a resistência com o condensador, obtém-se um circuito que implementa a função matemática de diferenciação.



# O diferenciador

A entrada inversora do amplificador operacional está ligada à terra virtual.

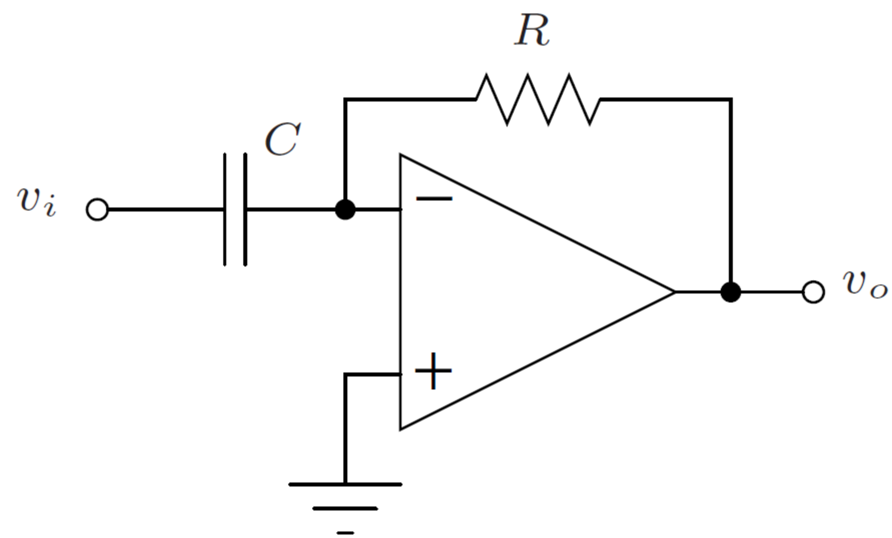
A tensão *vi(t)* aparece aos terminais do condensador.

A corrente que circula no condensador é dada por

*Ic* = *C*(*dvi(t)/dt*).

Esta corrente provoca uma queda de tensão aos terminais da resistência, fazendo com que *vo* seja:

$$v_o(t) = -RC\frac{dv_i(t)}{dt}$$

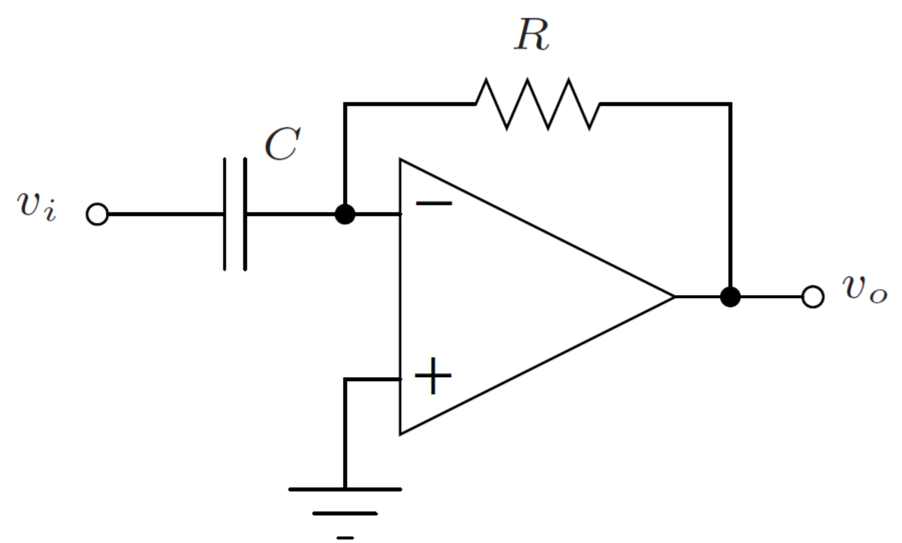



A tensão de saída é proporcional à derivada da tensão de entrada.

# O diferenciador

A função de transferência no domínio das frequências pode ser obtida substituindo *Z1(jw)* por *1/(jwC)* e *Z2(jw)* por *R*:

$$H(j\omega) = \frac{v_o(j\omega)}{v_i(j\omega)} = -j\omega RC$$




A amplitude da função de transferência é dada por:

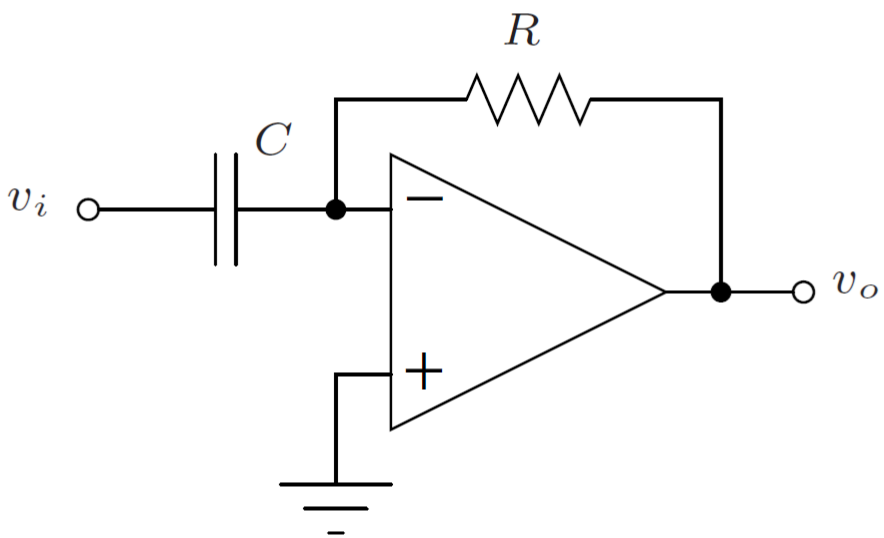
$$|H(j\omega)| = \omega RC$$

Para a fase vem:

$$\angle H(j\omega) = -90^o$$

# O diferenciador

Devido à sua natureza, o diferenciador é um circuito intensificador de ruído, uma vez que para cada variação que aparece na entrada, é produzido um pico na saída.



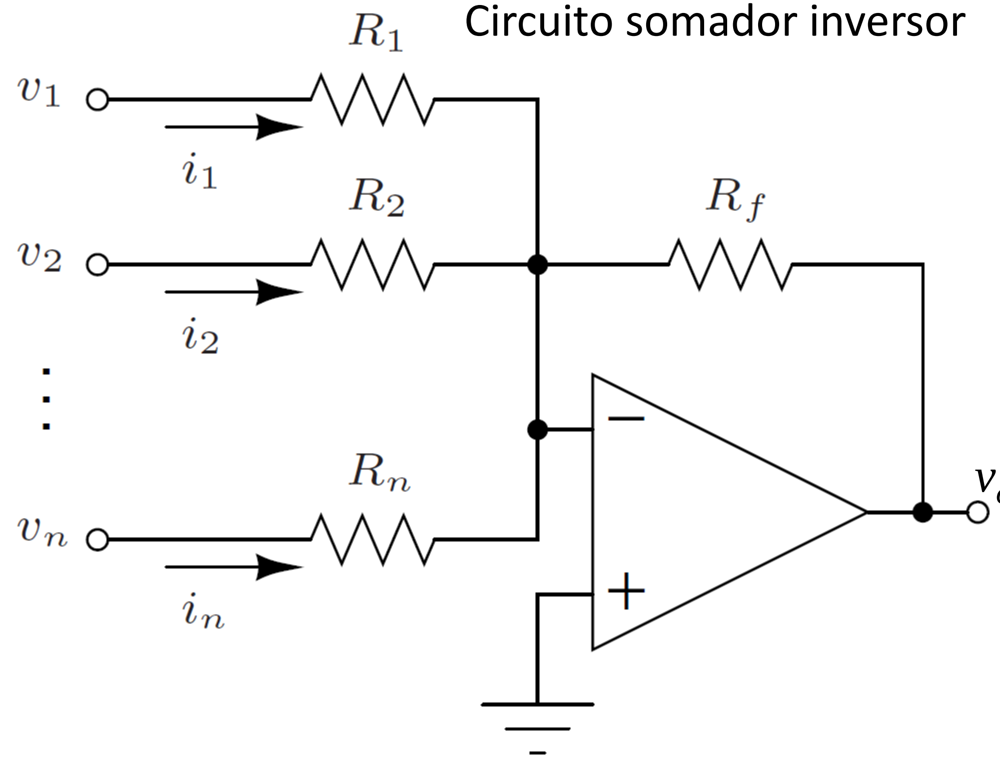

O circuito diferenciador é muito pouco usado na prática.

Para diminuir o problema da intensificação do ruído, é necessário colocar uma resistência de valor baixo em série com o condensador, o que torna o diferenciador um circuito não ideal.

# O somador

A resistência *Rf* está na malha de realimentação, tal como no circuito amplificador inversor, mas aqui existem vários sinais de entrada, *v*1, *v*2, . . . *Vn*, cada um aplicado à resistência correspondente, *R*1, *R*2, . . .*Rn*, todas elas ligadas à entrada inversora do amplificador operacional.

Circuito somador inversor




Como a entrada inversora do amplificador operacional é um ponto de terra virtual, aplicando a lei de Ohm, obtém-se para as correntes:

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1}, \qquad i_2 = \frac{v_2}{R_2}, \qquad \ldots \qquad i_n = \frac{v_n}{R_n}$$

Todas as correntes vão somar-se, fazendo com que a corrente em *Rf* seja de:

$$i_f = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$$

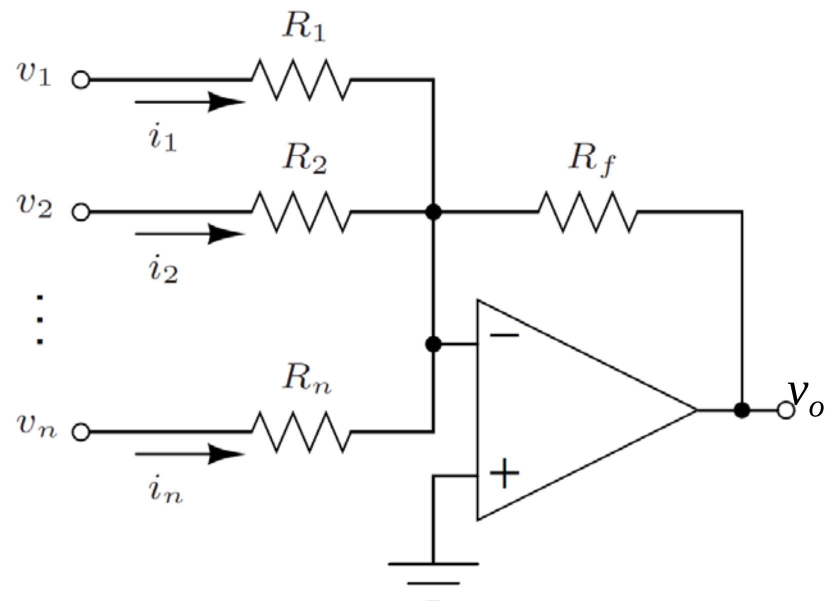
# O somador

A tensão de saída é dada por:

Circuito somador inversor

$$v_o = -R_f i_f$$

$$\boxed{v_o = -\left(\frac{R_f}{R_1}v_1 + \frac{R_f}{R_2}v_2 + \cdots + \frac{R_f}{R_n}v_n\right)}$$




A tensão de saída é uma soma pesada das tensões de entrada.

O peso de cada parcela da soma pode ser ajustado pelo valor da resistência correspondente.

Esta propriedade, que simplifica muito o ajuste do circuito, é uma consequência direta da terra virtual que existe na entrada inversora do amplificador operacional.

# O nome de amplificador operacional

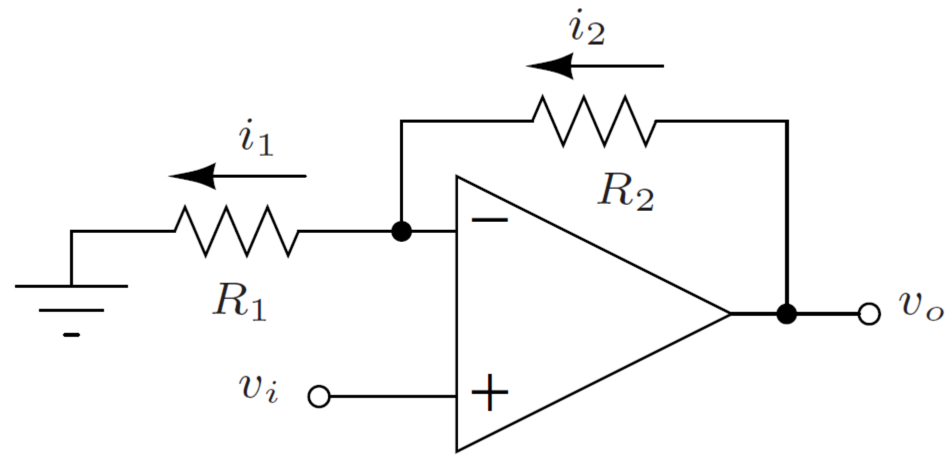
Até aqui foi visto que os amplificadores operacionais podem ser usados para multiplicar um sinal por uma constante, integrá-lo, derivá-lo e somar vários sinais com pesos predefinidos, ou seja, os amplificadores operacionais servem para implementar operações matemáticas.

Daqui deriva o nome de amplificador operacional -> que faz operações.

Os amplificadores operacionais, no entanto, servem para muito mais do que implementar operações matemáticas.

# Configuração não inversora

O sinal de entrada é ligado diretamente à entrada não inversora do amplificador operacional, enquanto que *R*1 é ligada à terra.




A tensão na entrada inversora é igual à tensão na entrada não inversora, que por sua vez é igual a *vi*.

Corrente em *R*1: $i_1 = v_i / R_1$

Devido à impedância de entrada do amplificador operacional ser infinita, esta corrente circula através de R2.
A tensão de saída é de:

$$v_o - v_i = R_2 i_1 = R_2 \frac{v_i}{R_1}$$

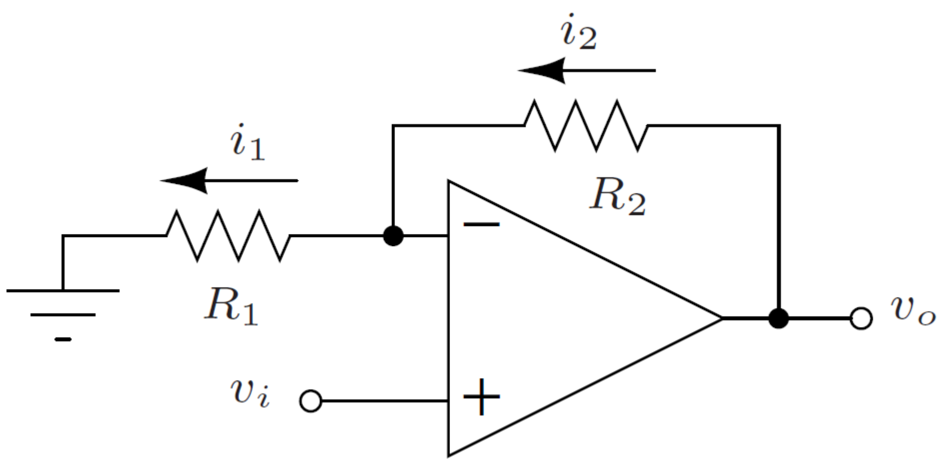
O que dá para o ganho:

$$\boxed{G = \frac{v_o}{v_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}}$$

# Configuração não inversora

Outro modo de obter a expressão do ganho da configuração não inversora é o seguinte:

o divisor de tensão formado por *R*2 e *R*1 faz com que a tensão na entrada inversora do amplificador operacional seja dada por:




$$v_n = v_o \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Mas como o ganho do amplificador operacional é infinito, existe um curto-circuito virtual entre os dois terminais de entrada, forçando a tensão na entrada inversora a ser igual a *vi*, ou seja:

$$v_o \frac{R_1}{R_1 + R_2} = v_i$$

o que leva à expressão do ganho obtida anteriormente.

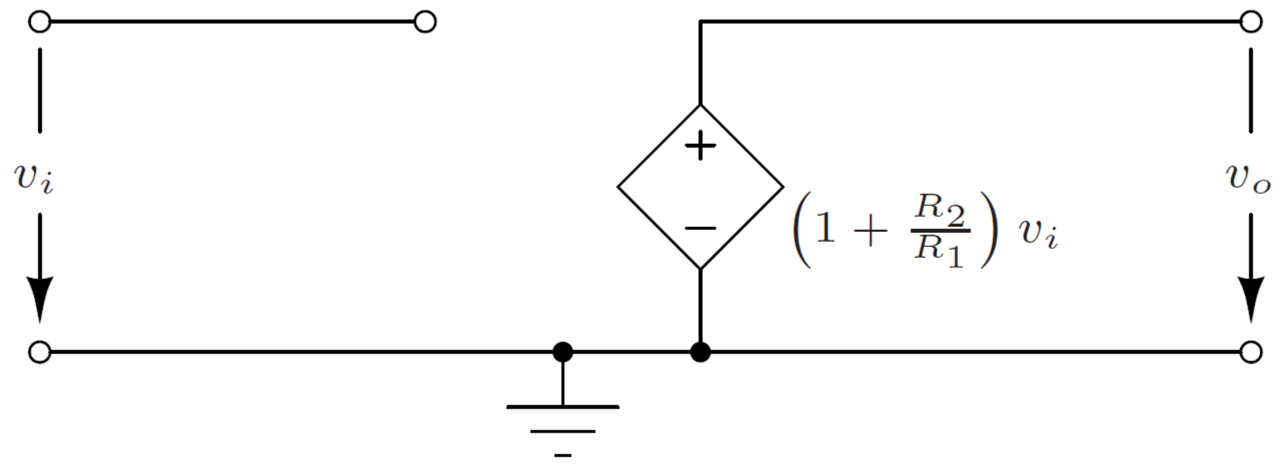
# Modelo equivalente

O ganho desta configuração é positivo.

A impedância de entrada deste amplificador em malha fechada é idealmente infinita.

A saída do circuito é tomada no terminal de saída do amplificador operacional, ou seja, aos terminais de uma fonte de tensão, portanto a impedância de saída do circuito é nula.

Colocando estas propriedades todas juntas, obtém-se o modelo equivalente.




Este modelo é obtido assumindo o amplificador operacional ideal.

# Ganho finito em malha aberta

O amplificador operacional tem um ganho em malha aberta finito A.

Este influencia o ganho em malha fechada, que é dado por:

$$\boxed{G = \frac{v_o}{v_i} = \frac{1 + R_2/R_1}{1 + (1 + R_2/R_1)/A}}$$

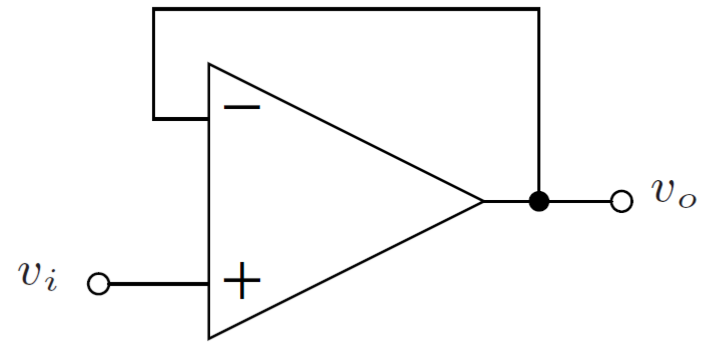
O denominador é idêntico ao do caso da configuração inversora: tanto a montagem inversora como a não inversora têm a mesma malha de realimentação.

O numerador dá o valor do ganho ideal em malha fechada.

Finalmente deve notar-se que a equação dá o valor ideal para valores de A tais que:

$$A \gg 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

# Seguidor de tensão




Uma das caraterísticas mais procuradas da montagem amplificadora não inversora é a sua muito alta impedância de entrada.

Esta caraterística permite usar o amplificador não inversor com ganho unitário, ou seja, como *buffer*, para ligar fontes de alta impedância a cargas de baixa impedância.

O *buffer* não é usado para introduzir ganho no circuito.
Em vez disso, é usado como transformador de impedância.

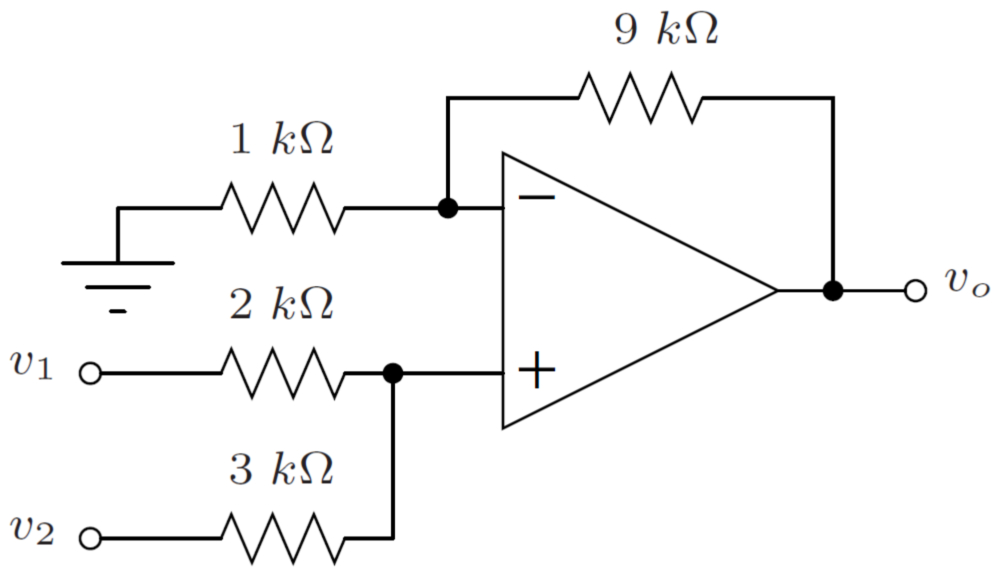
Para que a montagem tenha um ganho unitário basta fazer $R2 = 0$ e $R1 = \infty$.

Este circuito também é chamado de seguidor de tensão, uma vez que a sua tensão de saída segue a de entrada.

No caso de o amplificador operacional ser ideal, $vo = vi$, $zi = \infty$ e $zo = 0$.

# Exemplo

Use o princípio da sobreposição para calcular a tensão de saída do circuito da figura.



# Exemplo

- Considerando *v*2 = 0, a tensão na entrada não inversora do amplificador operacional é dada pelo divisor de tensão:

$$v_p = v_1 \frac{3k}{3k + 2k} = \frac{3}{5} v_1$$

A tensão de saída é:

$$v_o = v_p \left(1 + \frac{9k}{1k}\right) = 10 v_p = 6 v_1$$

- Considerando *v*1 = 0, a tensão na entrada não inversora do amplificador operacional é dada pelo divisor de tensão:

$$v_p = v_2 \frac{2k}{2k + 3k} = \frac{2}{5} v_2$$

A tensão de saída é:

$$v_o = v_p \left(1 + \frac{9k}{1k}\right) = 10 v_p = 4 v_2$$

- Pelo teorema da sobreposição:

$$v_o = 6v_1 + 4v_2$$

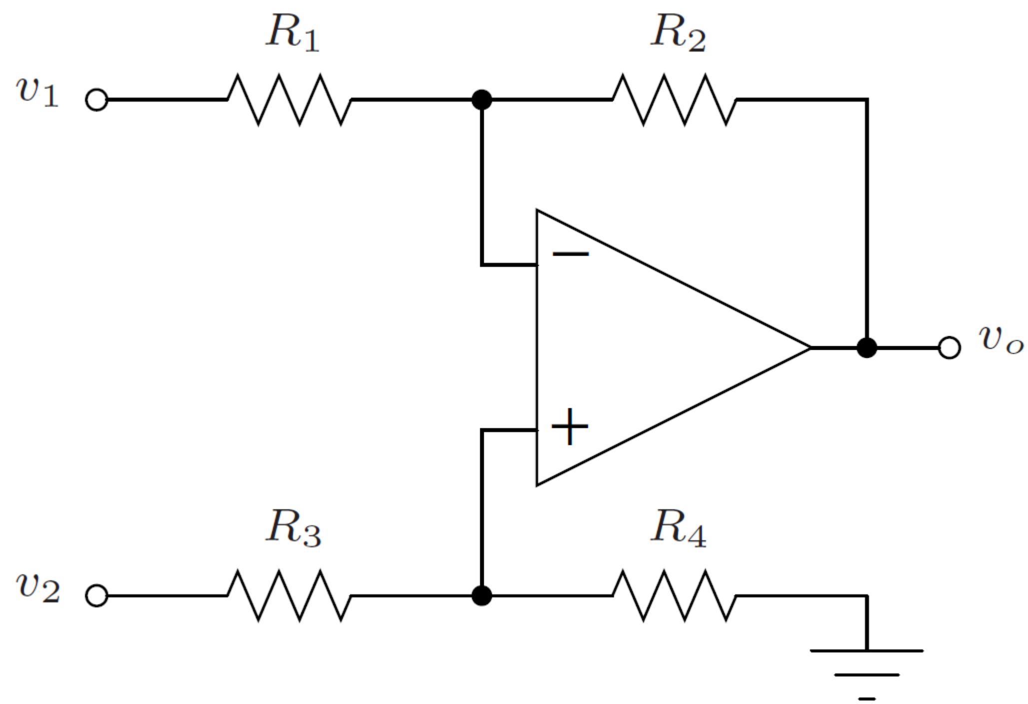
# Amplificador diferencial

Para calcular o ganho deste amplificador, pode usar-se o princípio da sobreposição, uma vez que o circuito é linear.

Considere-se em primeiro lugar o caso em que *v*2 = 0.

Neste caso, a tensão de saída (vo1) deve-se apenas à ação da entrada *v*1.

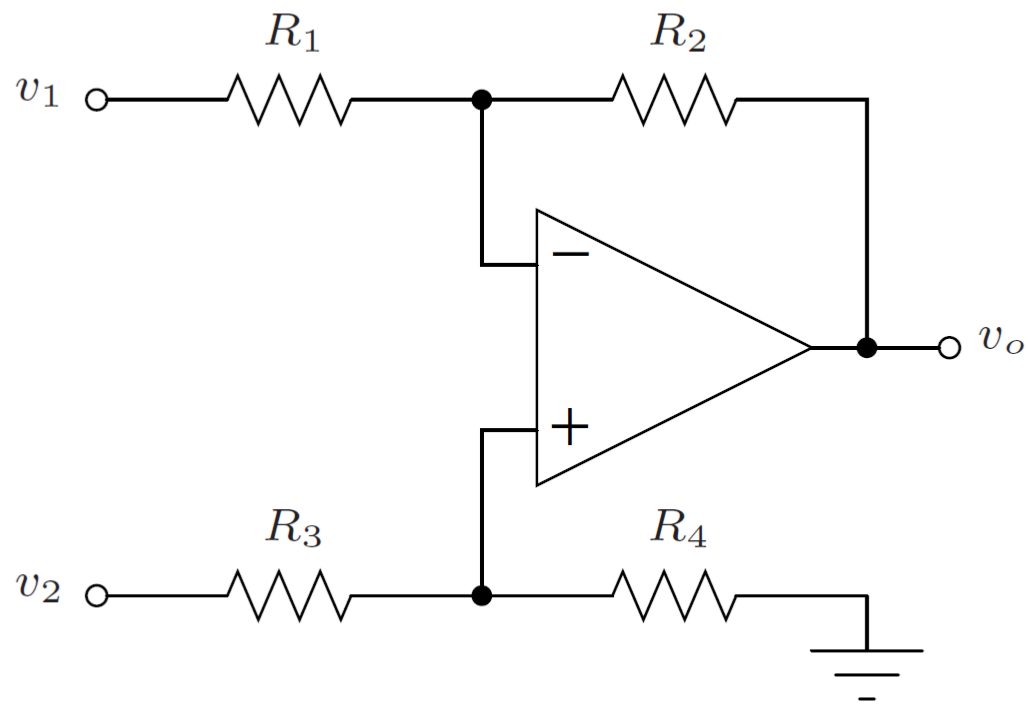
A tensão na entrada não inversora do amplificador operacional é nula e o circuito comporta-se como uma montagem inversora típica.




$$v_{o1} = -v_1 \frac{R_2}{R_1}$$

# Amplificador diferencial

Considere-se agora o caso em que *v*1 = 0.




A tensão de saída (vo2) é devida apenas à ação de *v*2.

A tensão na entrada não inversora do amplificador operacional é dada por:

$$v_p = v_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

e uma vez que se está em presença de uma montagem não inversora, para a saída vem:

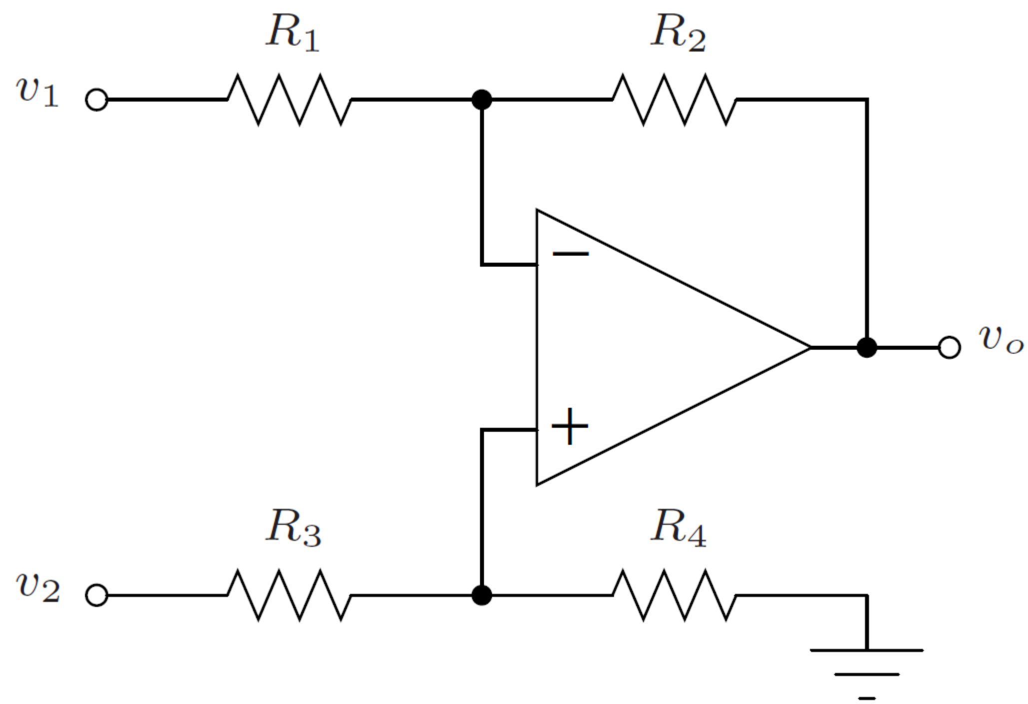
$$v_{o2} = v_p \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = v_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

# Amplificador diferencial

Pelo princípio da sobreposição e fazendo *R*2 = *R*4 e *R*1 = *R*3, vem:

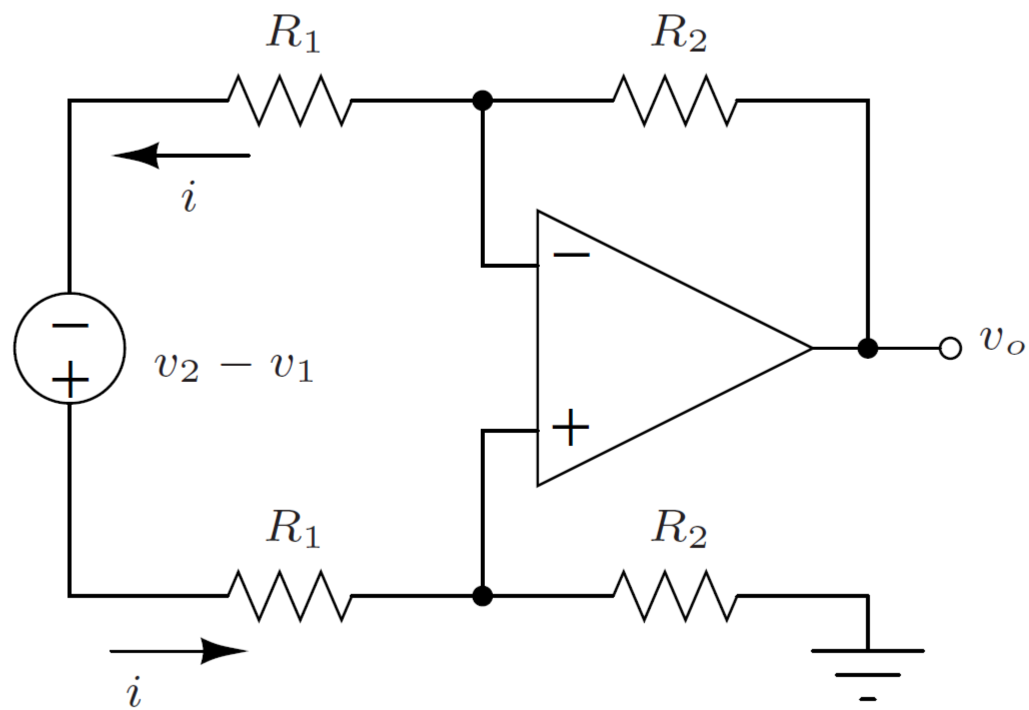
$$\boxed{v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)}$$

que mostra claramente que se trata de um amplificador que amplifica a diferença entre as duas tensões de entrada.



# Amplificador diferencial

Para o cálculo da impedância de entrada do amplificador diferencial, usa-se a figura ao lado.




A impedância de entrada é dada por:

$$z_i = \frac{v_2 - v_1}{i}$$

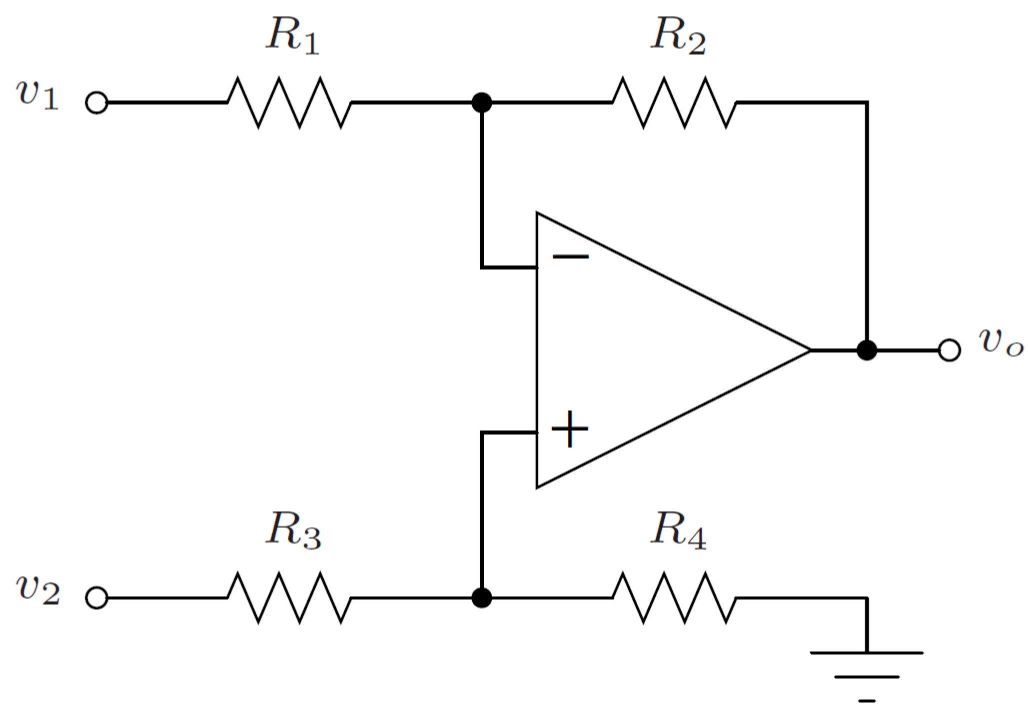
Como as entradas do amplificador operacional formam um curto-circuito virtual entre elas, aplicando a lei das malhas, fica:

$$v_2 - v_1 = R_1 i + 0 + R_1 i$$

fazendo com que: $\boxed{z_i = 2R_1}$

# Amplificador diferencial

É de notar que normalmente se pretende um ganho diferencial alto, o que significa que R1 deve ter um valor relativamente pequeno, fazendo com que o circuito tenha uma baixa impedância de entrada.

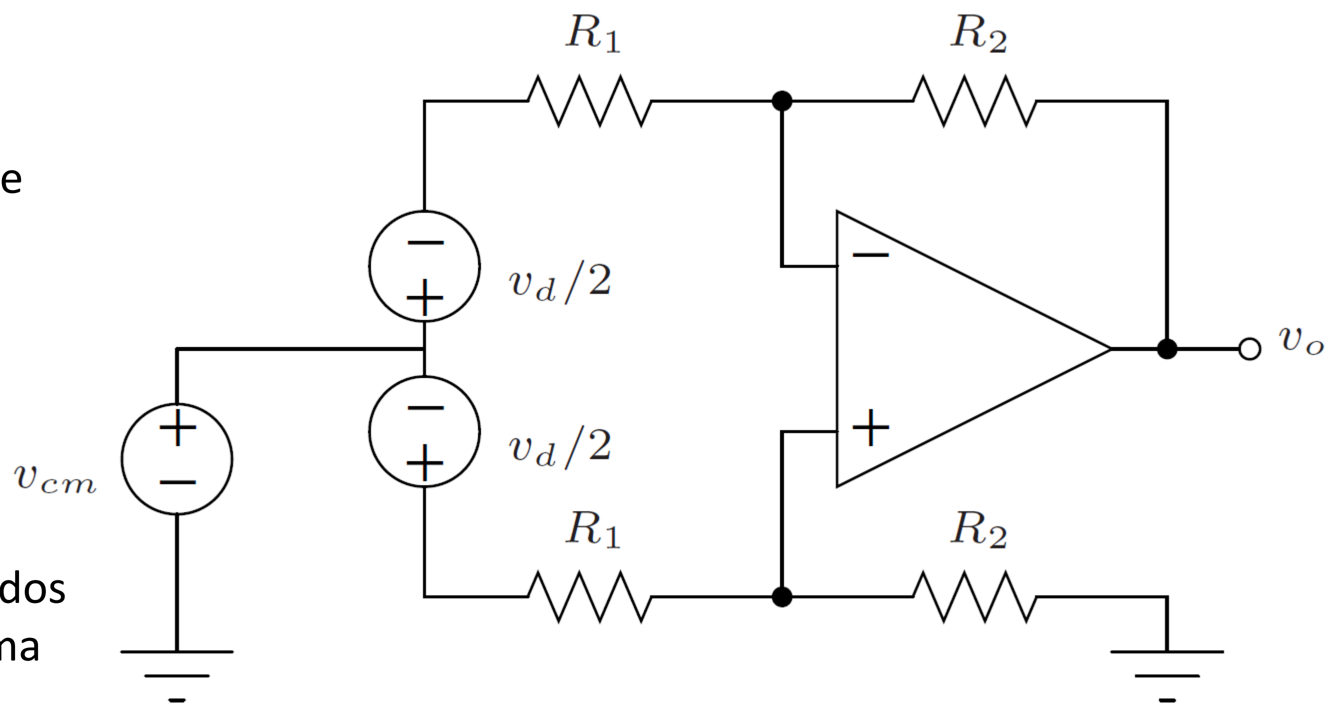



Isto é um inconveniente deste circuito.

Os amplificadores diferenciais têm muitas aplicações, sobretudo no projeto de sistemas de instrumentação.

# Amplificador diferencial

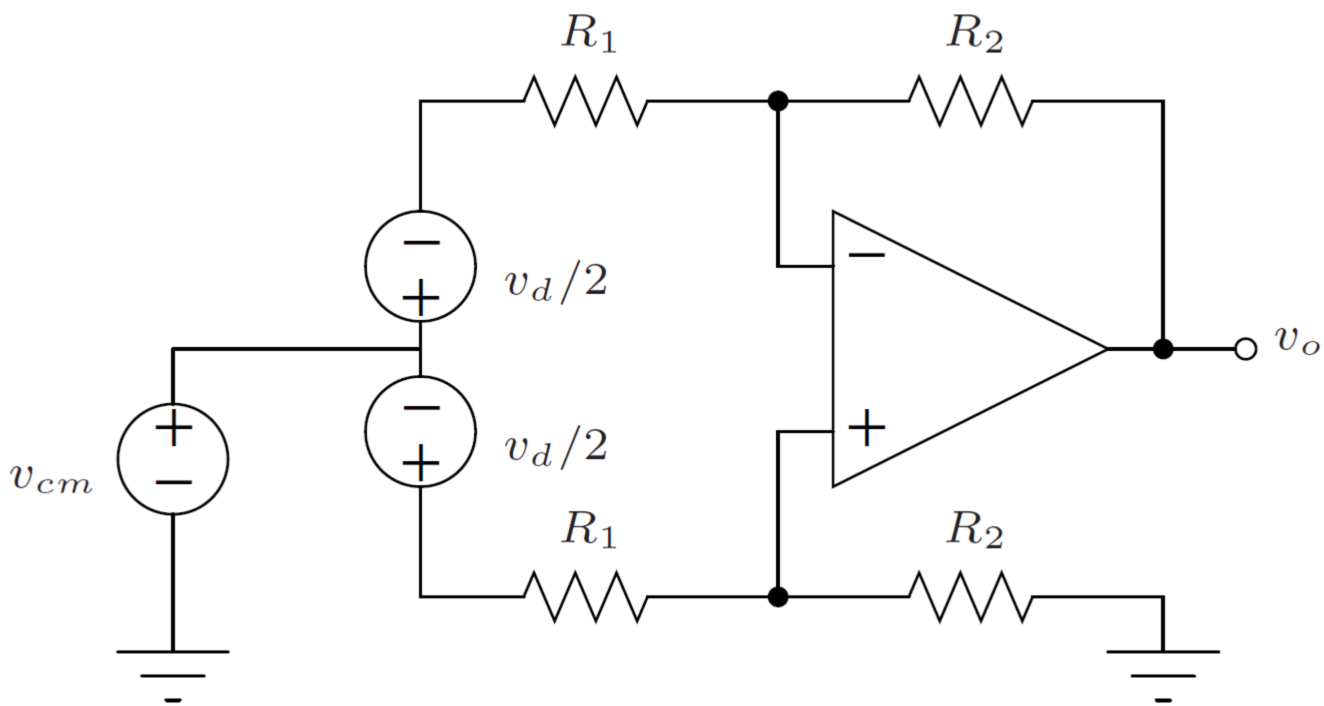
Como exemplo, considere-se um transdutor que produz uma tensão entre os seus terminais relativamente pequena (*vd* < 1 mV ).




No entanto, entre cada um dos terminais e a terra existe uma tensão relativamente alta (*vcm* > 1 V ).

O amplificador usado neste caso deve amplificar apenas a diferença entre as tensões de entrada e rejeitar a tensão de interferência (de mais de 1 V ) que é comum às duas entradas.

# Amplificador diferencial




$$v_1 = v_{cm} - vd/2$$

$$v_2 = v_{cm} + vd/2$$

$$v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1) = \frac{R_2}{R_1} vd$$

A componente diferencial do sinal de entrada (*vd*) é amplificada, enquanto que a componente de modo comum (*Vcm*) é rejeitada.

# Amplificador de instrumentação

- Dá-se o nome de amplificador de instrumentação a um amplificador que satisfaça os seguintes requisitos:

    - Impedância de entrada muito elevada (idealmente infinita);
    - Impedância de saída muito baixa (idealmente nula);
    - Ganho preciso e estável e às vezes ajustável;
    - Deve amplificar apenas a diferença entre as tensões aplicadas às suas entradas, rejeitando completamente a tensão de modo comum.

- O amplificador diferencial não é inteiramente satisfatório como amplificador de instrumentação.
- A sua impedância de entrada não é muito elevada e o seu ganho não pode ser ajustável (pelo menos de uma maneira fácil).

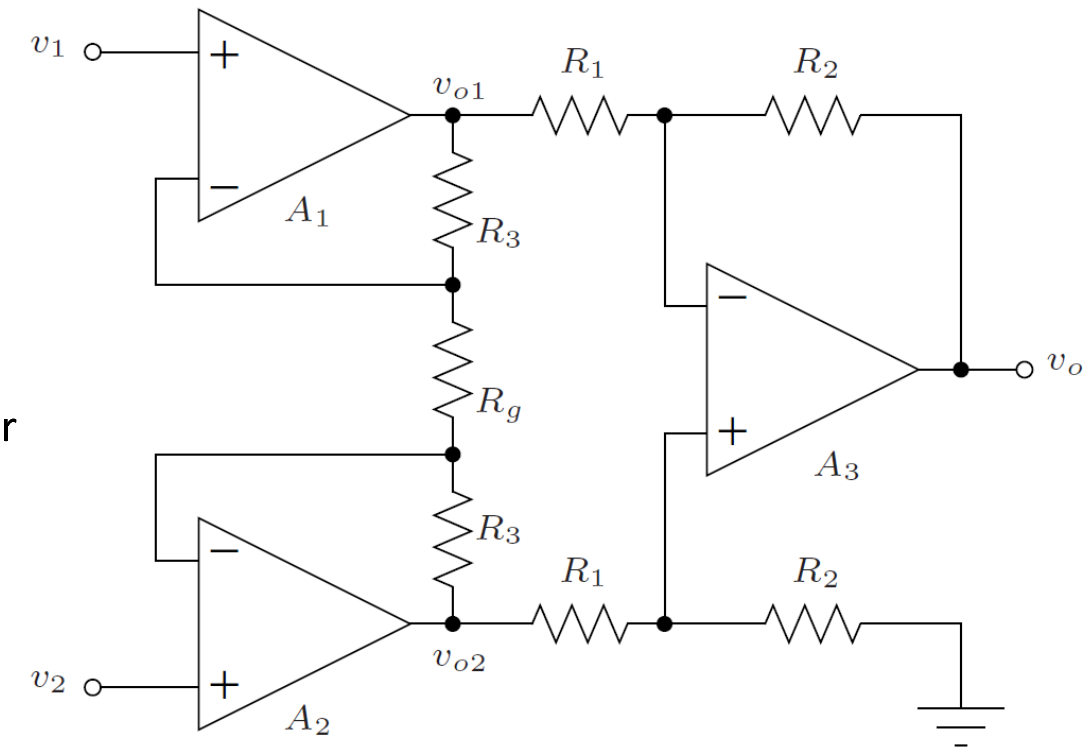
# Amplificador de instrumentação

Este circuito consiste em dois estágios:

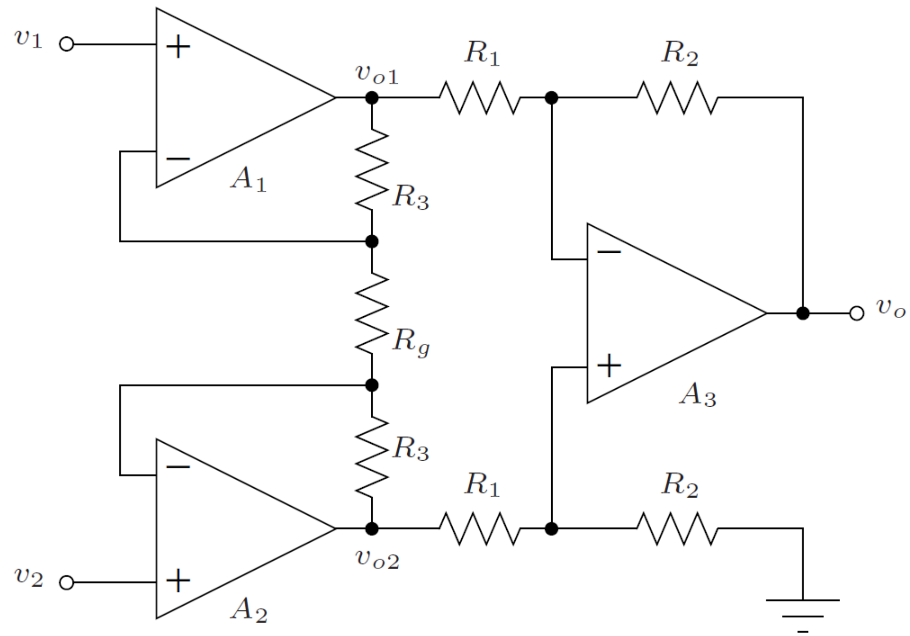
O primeiro é formado pelos amplificadores operacionais *A*1 e *A*2.

O segundo é formado pelo amplificador operacional *A*3.

O segundo estágio consiste no circuito amplificador diferencial.



# Amplificador de instrumentação




Devido aos curto-circuitos virtuais entre as entradas dos amplificadores operacionais *A*1 e *A*2, a tensão aos terminais de *Rg* é *v*2 − *v*1 e a sua corrente é dada por:

$$i_g = \frac{v_2 - v_1}{R_g}$$

Devido à impedância de entrada dos amplificadores operacionais ser infinita, esta corrente circula pelas resistências *R*3, o que dá:

$$v_{o2} - v_{o1} = (R_g + 2R_3) i_g = \left(1 + \frac{2R_3}{R_g}\right)(v_2 - v_1)$$

O ganho do segundo estágio foi calculado anteriormente e é de *R*2/*R*1, fazendo com que a saída seja de:

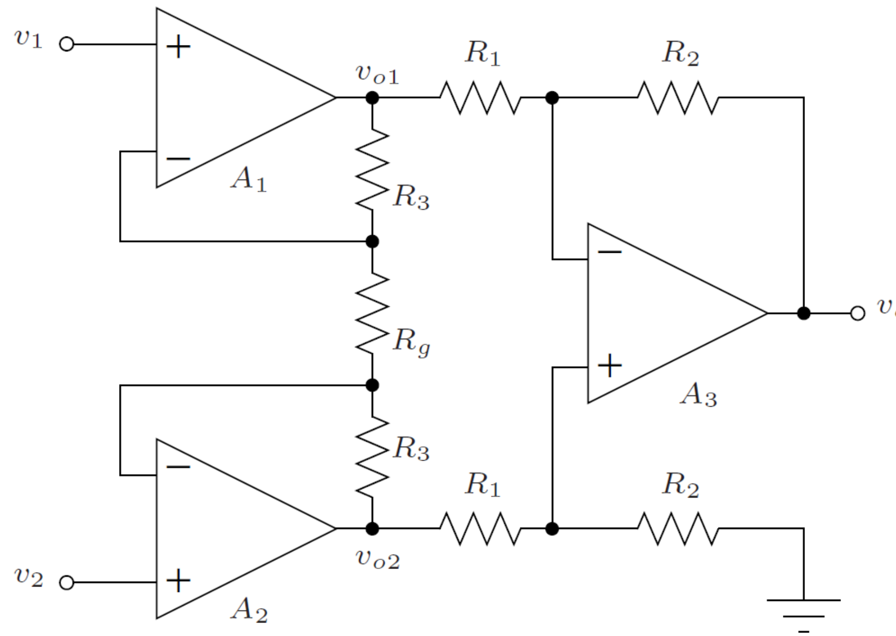
$$\boxed{v_o = \left(1 + \frac{2R_3}{R_g}\right)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)(v_2 - v_1)}$$

# Amplificador de instrumentação

Este circuito satisfaz os requisitos do amplificador de instrumentação:

Como os amplificadores operacionais de entrada estão ligados numa configuração não inversora, a impedância de entrada do amplificador de instrumentação é muito elevada.

A saída do amplificador de instrumentação obtém-se diretamente da saída de um amplificador operacional, portanto a sua impedância é muito baixa.




O ganho pode ser ajustável variando apenas o valor de *Rg*. No amplificador diferencial era necessário ajustar duas resistências em simultâneo.

Neste amplificador pode ser visto facilmente que o sinal de entrada de modo comum *vcm* (aplicado simultaneamente às duas entradas) provoca uma corrente nula em *Rg*, logo é rejeitado.