Análise Matemática EE
1ºano, 2ºsemestre

Derivadas parciais de funções reais de duas variáveis reais

As derivadas de funções reais de variável real, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, aplicam-se a

- Taxa de variação instantânea
$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$
- Declive da recta tangente à curva $y = f(x)$
$$f'(x_0) = \tan \alpha$$
onde α é o ângulo entre a recta tangente à curva no ponto $(x_0, f(x_0))$ e o semi-eixo positivo OX. $(1, f'(x_0))$ é o vector director dessa recta.
- Aproximação linear de funções
Para x numa vizinhança de x_0 tem-se
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
- Determinação de extremos
Um ponto crítico de f candidato a extremante de f é um ponto x_0 tal que $f'(x_0) = 0$.

Para funções reais de várias variáveis, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, podemos definir derivadas parciais relativas a cada uma das n variáveis independentes e as suas aplicações são análogas ao caso de funções reais de uma variável real.

Consideremos o caso $f : \mathbb{R}^2 \to R$, que a cada ponto (x_0, y_0) do domínio de f associamos o valor real $f(x_0, y_0)$.

- **Definição de derivada parcial num ponto**
Se fixarmos a variável $y = y_0$, temos que a função $f(x, y_0)$ só depende de x e podemos comparar a variação de f com a variação instantânea de x:
$$f_x(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
Chamamos a isto a **derivada parcial de** f **em ordem a** x no ponto (x_0, y_0).

Analogamente, se fixarmos a variável $x = x_0$, temos que a função $f(x_0, y)$ só depende de y e podemos comparar a variação de f com a variação instantânea de y:
$$f_y(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$
Chamamos a isto a **derivada parcial de** f **em ordem a** y no ponto (x_0, y_0).

Exemplo:

Considere a função $f(x,y) = x^2y$ e determine-se as derivadas parciais de f no ponto $(1,2)$.

Derivada parcial em ordem a x:

$$f'_x(1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,2) - f(1,2)}{h}$$

$$f'_x(1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 2 - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2 + 4h + 2 - 2}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+4) = 4.$$

Derivada parcial em ordem a y:

$$f'_y(1,2) == \lim_{h\to 0} \frac{f(1,2+h) - f(1,2)}{h}$$

$$f'_x(1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h) - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0}(1) = 1.$$

- **Derivadas parciais num subconjunto do domínio**

  Considere-se o subconjunto S dos pontos do domínio de f onde existe f'_x. Podemos definir uma nova função definida em S, a derivada de f em ordem a x:

$$\begin{array}{rccc} f'_x: & S \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f'_x(x,y) \end{array}$$

  De modo análogo, se pode definir a derivada de f em ordem a y: Considere-se o subconjunto T dos pontos do domínio de f onde existe f'_y.

$$\begin{array}{rccc} f'_y: & T \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f'_y(x,y) \end{array}$$

- **Derivadas parciais de ordem superior**

  Se uma função real de duas variáveis reais $f(x,y)$ admite derivadas parciais de 1ªordem, f'_x, f'_y num subconjunto do seu domínio, então é possível definir as suas derivadas parciais.

  As derivadas parciais da função f'_x:

  - Se derivarmos f'_x em ordem a x, obtemos a derivada de 2ªordem f''_{x^2};
  - Se derivarmos f'_x em ordem a y, obtemos a derivada de 2ªordem f''_{xy}.

  As derivadas parciais da função f'_y:

  - Se derivarmos f'_y em ordem a x, obtemos a derivada de 2ªordem f''_{yx};
  - Se derivarmos f'_y em ordem a y, obtemos a derivada de 2ªordem f''_{y^2}.

Esquematicamente,

$$\begin{array}{ccc} & & f''_{x^2} \\ & \nearrow & \\ f'_x & & \\ & \searrow & \\ & & f''_{xy} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & f''_{yx} \\ & \nearrow & \\ f'_y & & \\ & \searrow & \\ & & f''_{y^2} \end{array}$$

Exemplo:

Determinar as derivadas de 2ªordem da função $f(x,y) = x^3y + 7x^2 - 2y^3 - 1$.

$$\begin{array}{ccc} & & f''_{x^2} = 6xy + 14 \\ & \nearrow & \\ f'_x = 3x^2 + 14x & & \\ & \searrow & \\ & & f''_{xy} = 3x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & f''_{yx} = 3x^2 \\ & \nearrow & \\ f'_y = x^3 - 6y^2 & & \\ & \searrow & \\ & & f''_{y^2} = -12y \end{array}$$

De modo análogo, pode determinar as derivadas de ordem superior.

- **Teorema de Schwarz**

  Se existe f'_x, f'_y e f''_{xy} na vizinhança de (x_0, y_0) e se f''_{xy} é contínua nesse mesmo ponto então também existe f''_{yx} e

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

- **Taxa de variação instantânea na direção paralela aos eixos coordenados**

  Considere-se um ponto (x_0, y_0) ao qual se deu um incremento h na variável x e fixou y_0.

$$(x_0, y_0) \quad \rightarrow \quad (x_0 + h, y_0)$$

De que modo esse incremento na variável x vai modificar o valor de f no ponto?

$$\begin{array}{ccc} (x_0, y_0) & \rightarrow & (x_0 + h, y_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(x_0, y_0) & \rightarrow & f(x_0 + h, y_0) \end{array}$$

Determina-se a diferença

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)$$

e compara-se com a diferença $x_0 + h - x_0 = h$:

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Quando $h \to 0$, esta taxa de variação de f relativamente à variável x, transforma-se numa *taxa de variação instantânea de* f *no ponto* (x_0, y_0), *relativamente a* x:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Se, na igualdade anterior tirarmos o limite, deixa de ser uma igualdade e passa a ser um valor aproximado quando se considera valores de h próximos de zero.

$$h.f'_x(x_0, y_0) \approx f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)$$

Analogamente, tem-se

$$h.f'_y(x_0, y_0) \approx f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)$$

- **Aproximação linear e Plano tangente**

  Dada uma função real de duas variáveis reais $f(x, y)$, as derivadas parciais dão as taxas de variação instantânea dos valores de f na direção dos eixos coordenados. Mas existem muitas direções no plano. Como determinar a taxa de variação instantânea de f noutras direcções? Generalizando, se as duas variáveis sofrerem alterações, como se pode estudar a correspondente alteração nos valores de f?

  Uma função real de uma variável real $y = f(x)$ é diferenciável em x_0 se pode ser localmente aproximada por uma função linear

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

  onde $y_0 = f(x_0)$, ou, o que é semelhante, se o gráfico de $y = f(x)$ na vizinhança de (x_0, y_0) é cada vez mais parecido com uma recta, quanto mais perto olharmos. Essa reta (que passa em (x_0, y_0)) é determinada pelo seu declive $a = f'(x_0)$.

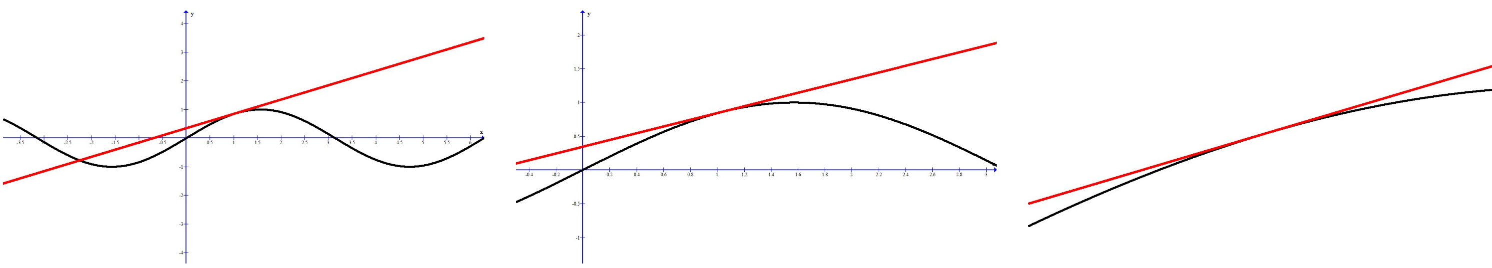


Figure 1: À medida que olhamos mais perto do ponto (x_0, y_0), a curva $y = f(x)$ parece cada vez mais uma reta.

Quando temos funções que dependem de mais do que uma variável, a ideia é semelhante.

Uma função real de duas variáveis $f(x, y)$ é **diferenciável** num ponto (x_0, y_0) do seu domínio se puder ser localmente aproximada por uma função linear numa vizinhança desse ponto, isto é, se numa vizinhança de (x_0, y_0), f puder ser aproximada por

$$L(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + z_0. \tag{1}$$

Geometricamente, a superfície $z = f(x, y)$ definida pelo gráfico da função f é cada vez mais parecida com um plano, quanto mais perto olharmos.

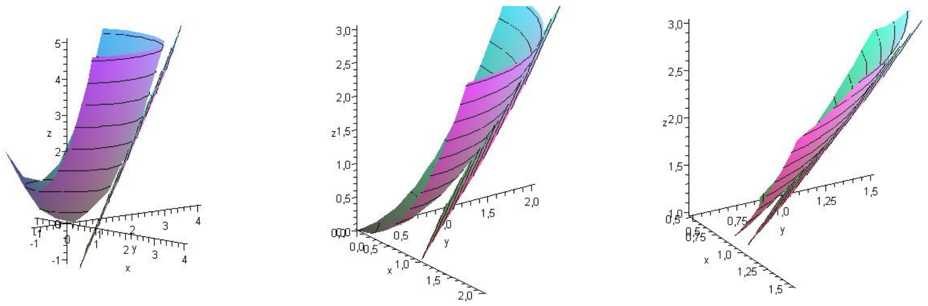


Figure 2: À medida que olhamos mais perto do ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, a superfície $z = f(x, y)$ parece cada vez mais um plano.

A função $L(x, y)$ chama-se *aproximação linear de* f em (x_0, y_0) ou *linearização de* f nesse mesmo ponto e é da forma

$$\mathbf{L(x, y) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0} \tag{2}$$

onde $z_0 = f(x_0, y_0)$.

A função $L(x, y)$ tem as seguintes propriedades:

- é a única função linear em x e y tal que:
  - $L(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$;
  - $L'_x(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)$;
  - $L'_y(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0)$.
- $L(x, y)$ dá valores aproximados de $f(x, y)$ para (x, y) próximos de (x_0, y_0):

$$L(x, y) \approx f(x, y).$$

- o gráfico da função L

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0$$

  é o **plano tangente ao gráfico de** f **no ponto** $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. E o vector $(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1)$ é o vector perpendicular ao plano.

Exemplos 1 *Considere a função diferenciável* $f(x, y) = x^2 + 4y$.

1. *Determina a aproximação linear de f no ponto $(1,3)$:*

$$L(x,y) = f(1,3) + f'_x(1,3)(x-1) + f'_y(1,3)(y-3)$$

Como

$$f(1,3) = 13, \quad f'_x(1,3) = 2, \quad f'_y(1,3) = 4$$

tem-se

$$L(x,y) = 13 + 2(x-1) + 4(y-3).$$

2. *Usando a alínea anterior, determine um valor aproximado de $f(0.9, 3.01)$.*

   Uma aproximação de $f(0.9, 3.01)$ é

$$L(0.9, 3.01) = 13 + 2 \times (-0.1) + 4 \times 0.01 = 13 - 0.16$$

   logo $f(0.9, 3.01) \approx L(0.9, 3.01) = 12.84$.

3. *O plano $z = 13 + 2(x-1) + 4(y-3)$ é o plano tangente à superfície $z = x^2 + 4y$ no ponto $(1, 3, 13)$.*

Propriedades

- Uma função f diz-se diferenciável se for diferenciável em todos os pontos do seu domínio.
- Se f é diferenciável num ponto (x_0, y_0) do seu domínio então existem as derivadas parciais $f'_x(x_0, y_0)$ e $f'_y(x_0, y_0)$.
- **Se f é diferenciável então f é contínua.**
  Equivalentemente, se uma função não é contínua num ponto então não é diferenciável nesse ponto.

Se f não é contínua então f não é diferenciável.

- **Diferenciais**

Considere a aproximação linear de uma função real diferenciável $f(x,y)$, definida em (1):

$$L(x,y) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

equivalente a

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Se representar a diferença $x - x_0 = dx$, $y - y_0 = dy$ e $z - f(x_0, y_0) = dz$, a igualdade anterior escreve-se

$$\mathbf{dz = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy}. \tag{3}$$

À função linear escrita desta forma $dz = df$ chama-se o **diferencial da função** f que depende das variáveis dx, dy.

Exemplos 2 *Considere a função diferenciável $f(x,y) = x^2 + 4y$.*

1. *Determina a função diferencial $df(dx, dy)$ no ponto $(1, 3)$:*

$$df = f'_x(1,3)dx + f'_y(1,3)dy$$

Como

$$f'_x(1,3) = 2, \quad f'_y(1,3) = 4$$

tem-se

$$df = 2dx + 4dy.$$

2. *Usando diferenciais, determina uma aproximação da variação dos valores da função f quando $(1, 3)$ se altera para $(0.9, 3.01)$.*

   Neste caso, $dx = 0.9 - 1 = -0.1$, $\quad dy = 3.01 - 3 = 0.01$. Uma aproximação da variação $f(0.9, 3.01) - f(1, 3)$ é

$$f(0.9, 3.01) - f(1,3) \approx df(-0.1, 0.01)$$

   e

$$df(-0.1, 0.01) = 2 \times (-0.1) + 4 \times 0.01 = -0.16$$

   logo $f(0.9, 3.01) - f(1, 3) \approx -0.16$.

Exemplos 3 *Considere a função diferenciável $f(x, y) = x^2 + y^2$.*

1. *Determina a função diferencial $df(dx, dy)$:*

$$df = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

   Neste caso,

$$f'_x(x,y) = 2x, \quad f'_y(x,y) = 2y.$$

   Assim,

$$df = 2xdx + 2ydy \tag{4}$$

2. *Usando diferenciais, calcula um valor aproximado de $1.01^2 + 0.99^2$:*

$$1.01^2 + 0.99^2 = f(1.01, 0.99).$$

   Se considerar que $(1.01, 0.99)$ está próximo do ponto $(1, 1)$ com $dx = 1.01 - 1 = 0.01$ e $dy = 0.99 - 1 = -0.01$ tem-se

$$f(1.01, 0.99) \approx f(1,1) + df(0.01, -0.01).$$

   Tem-se $f(1, 1) = 2$ e usando (4)

$$df(0.01, -0.01) = 2 \times 1 \times 0.01 + 2 \times 1 \times (-0.01) = 0.$$

   Assim, $f(1.01, 0.99) \approx f(1, 1) + 0$. Isto é, $f(1.01, 0.99) \approx 2$.

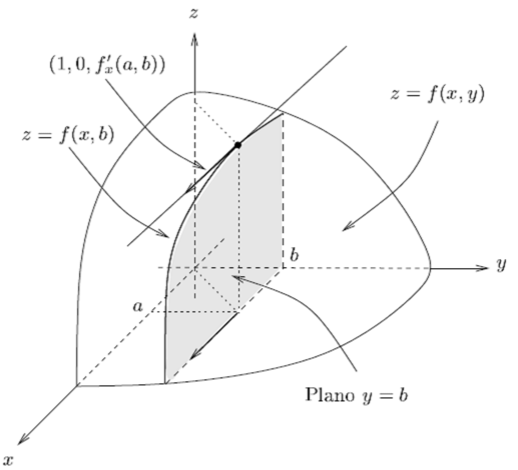
Na equação (3), vemos como responder à pergunta inicial: se as duas variáveis sofrerem alterações, como se pode estudar a correspondente alteração nos valores de f? Quando fazemos alterações nas variáveis x e y, essas alterações, dx e dy, respetivamente, provocam uma alteração em z que é a soma das alterações de x e y. Não interagem uma com a outra.

- **Significado geométrico das derivadas parciais**

– $f'_x(a,b)$ representa o declive da recta à curva

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = b \end{cases} \Leftrightarrow z = f(x,b)$$

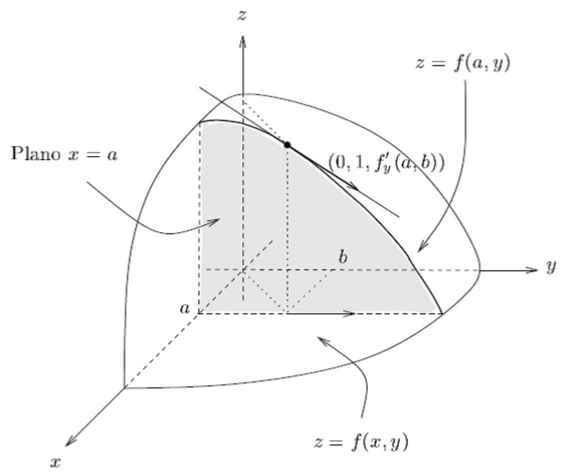
no ponto $(a,b,f(a,b))$ e $\vec{u} = (1,0,f'_x)$ é o vector director da recta tangente à curva.



– $f'_y(a,b)$ representa o declive da recta tangente à curva

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow z = f(a,y)$$

no ponto $(a,b,f(a,b))$ e $\vec{v} = (0,1,f'_y)$ é o vector director dessa recta.



Note-se que

$$\vec{u} \times \vec{v} = (1,0,f'_x) \times (0,1,f'_y) = (f'_x, f'_y, -1)$$

que é o vector normal ao plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ no ponto indicado.

- **Vector gradiente e significado geométrico**

  Seja f diferenciável num ponto (x_0,y_0). Podemos definir o vector

$$\text{grad} f(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \left(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\right)$$

denominado **vetor gradiente da função f no ponto** (x_0, y_0).

O vector gradiente de f num ponto é normal à curva de nível nesse ponto:

Seja (x_0, y_0) ponto que se encontra na curva de nível $f(x, y) = f(x_0, y_0) = k$. $\vec{\nabla} f$ é ortogonal ao vector $\vec{v}$ tangente à curva de nível no ponto (x_0, y_0).

Exemplo: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\vec{\nabla} f = (2x, 2y)$. Considere-se o ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ que se encontra na curva de nível $x^2 + y^2 = 4$.

Seja $\vec{c}(t)$ a equação vectorial da curva de nível e considere-se $\vec{c}(0) = (x_0, y_0)$. Tem-se que $f(\vec{c}(t)) = k$. Pela regra da derivada da função composta, $\vec{c}'(t) \cdot f'(\vec{c}(t)) = 0$. Para $t = 0$, tem-se $\vec{c}'(0) \cdot f'(\vec{c}(0)) = 0 = \vec{c}'(0) \cdot \vec{\nabla}(\vec{c}(0))$.

Note-se que a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pode escrever-se da forma

$$z = f(x_0, y_0) + \vec{\nabla} f.(x - x_0, y - y_0).$$

O vetor $\left(\vec{\nabla} f, -1\right) = \left(f'_x, f'_y, -1\right)$ é um vetor perpendicular ao plano tangente e a projeção deste vetor no plano XOY é o vetor $\vec{\nabla} f$.

Exemplos 4 *Considere a função diferenciável* $f(x, y) = x^3 y - 6xy^2$.

1. *Determina o vetor gradiente da função* f*:*

$$\vec{\nabla} f = \left(3x^2 y - 6y^2, x^3 - 12xy\right)$$

2. *Determina a equação do plano tangente ao gráfico de* f *no ponto* $(1, -1)$*:*

$$z = f(1, -1) + f'_x(1, -1)(x - 1) + f'_y(1, -1)(y + 1)$$

Neste caso,

$$f(1, -1) = -7, \quad f'_x(1, -1) = -9 \quad f'_y(1, -1) = 13$$

e a equação do plano é

$$z = -7 - 9(x - 1) + 13(y + 1)$$

$$z = -9x + 13y + 15.$$

- **Derivadas direccionais**

Define-se derivada direccional de f em (x_0, y_0) segundo um vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $(\|\vec{u}\| = 1)$, da forma

$$f'_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Se f é diferenciável em (x_0, y_0) então:

– existe $f'_{\vec{u}}(x_0, y_0)$ para todo o vector unitário $\vec{u}$;

– $f'_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u}$.

- **Derivada da função composta**

  Seja $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ diferenciável no ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e f diferenciável no ponto $g(a) \in \mathbb{R}^p$, então $f \circ g$ é diferenciável no ponto a e

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a)).Dg(a)$$

$$\begin{array}{ccccc} f \circ g: & \mathbb{R}^n & \overset{g}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^p & \overset{f}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^m \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & (y_1, y_2, ..., y_p) & \mapsto & (z_1, z_2, ..., z_m) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_m}{\partial x_1} & \frac{\partial z_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_p} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial y_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_m}{\partial y_1} & \frac{\partial z_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_m}{\partial y_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_p}{\partial x_1} & \frac{\partial y_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

  Assim, todas as derivadas parciais da função $f \circ g$ estão contidas na matriz jacobiana $D\ (f \circ g)$ que se pode obter da forma

$$D\ (f \circ g) = D\ f.\ D\ g$$

  onde

  - $D\ (f \circ g)$ é a matriz jacobiana da função $f \circ g$ de tamanho $m \times n$;
  - $D\ f$ é a matriz jacobiana da função f de tamanho $m \times p$:

$$D\ f = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_p} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial y_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_m}{\partial y_1} & \frac{\partial z_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_m}{\partial y_p} \end{pmatrix}$$

  - $D\ g$ é a matriz jacobiana da função g de tamanho $p \times n$:

$$D\ g = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_p}{\partial x_1} & \frac{\partial y_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Exemplos:

1.

$$\begin{array}{ccccccc} f \circ g: & \mathbb{R} & \overset{g}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^2 & \overset{f}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t)) & \mapsto & z = f(x(t), y(t)) \end{array}$$

$$z \ = \ (f \circ g)(t) \ = \ f(g(t)) \ = \ f(x(t), y(t))$$

Para determinar $\dfrac{dz}{dt}$ tem que se considerar a relação de dependências:

$$\begin{array}{ccccc} & & x & \longrightarrow & t \\ & \nearrow & & & \\ z & & & & \\ & \searrow & & & \\ & & y & \longrightarrow & t \end{array}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \overrightarrow{\nabla} f \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{array}\right]$$

Exemplo: $z = x^2 + 3y$ com $x = \cos t$ e $y = \sin t$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2x(-\sin t) + 3\cos t$$

2.

$$\begin{array}{ccccccc} f \circ g: & \mathbb{R}^2 & \overset{g}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^2 & \overset{f}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ & (t,s) & \mapsto & (x,y) = g(t,s) & \mapsto & z = f(x(t,s), y(t,s)) \end{array}$$

$$z \;=\; (f \circ g)(t,s) \;=\; f(g(t,s)) \;=\; f(x(t,s), y(t,s))$$

Para determinar $\dfrac{dz}{dt}$ tem que se considerar a relação de dependências:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & t \\ & & & \nearrow & \\ & & x & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & s \\ & \nearrow & & & \\ z & & & & \\ & \searrow & & & \\ & & & & t \\ & & & \nearrow & \\ & & y & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & s \end{array}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \overrightarrow{\nabla} f \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \overrightarrow{\nabla} f \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

Assim,

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{array}\right] = \overrightarrow{\nabla} z \cdot D\ g$$

onde $D\ g$ representa a matriz jacobiana da função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, isto é, a matriz das derivadas parciais de primeira ordem.

Exemplo: $z = 2x + 3y^2$ com $x = \ln t + 2s$ e $y = \frac{1}{t} + s^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2}{t} - \frac{6y}{t^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 4 + 12ys$$

3.

$$\begin{array}{ccccccc} f \circ g : & \mathbb{R}^2 & \overset{g}{\longrightarrow} & \mathbb{R} & \overset{f}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ & (t,s) & \mapsto & x = g(t,s) & \mapsto & y = f(x(t,s)) \end{array}$$

$$y \ = \ (f \circ g)(t,s) \ = \ f(g(t,s)) \ = \ f(x(t,s))$$

Para determinar $\dfrac{dy}{dt}$ tem que se considerar a relação de dependências:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & t \\ & & & \nearrow & \\ y & \longrightarrow & x & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & s \end{array}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dy}{dx}\frac{\partial x}{\partial t}$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{dy}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \frac{dy}{dx} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{bmatrix}$$

Exemplo: Seja $y = 3x^2$ com $x = \ln(ts)$. Tem-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \frac{dy}{dx} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{bmatrix} = 6x \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6x}{t} & \frac{6x}{s} \end{bmatrix}$$

- **Fórmula de Taylor**

Seja f uma função real definida num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, f de classe C^p, $(p \geq 1)$ (f admite derivadas até à p-ésima ordem contínuas) em (x_0, y_0) e em (x, y) pertencente a U. Então, tem-se

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + [f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)]+$$

$$+\frac{1}{2!}[f''_{x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2]+$$

$$+\frac{1}{3!}[f'''_{x^3}(x_0,y_0)(x-x_0)^3+3f'''_{x^2y}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)+3f'''_{xy^2}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2+f'''_{y^3}(x_0,y_0)(y-y_0)^3]+$$

$$+\frac{1}{p!}D^pf(x_0,y_0) + R_p(x_0,y_0)$$

onde

- $R_p(x_0, y_0)$ representa o resto de ordem p, que tende para zero mais depressa do que (x, y) tende para (x_0, y_0), isto é $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_p(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$.
- $D^pf(x_0,y_0) = \sum\limits_{i=0}^{p} f^{(p)}_{x^{p-i}y^i}(x_0,y_0)\frac{p!}{i!(p-i)!}(x-x_0)^{p-i}(y-y_0)^i$.

Se truncarmos o polinómio no grau n, dizemos que é o polínómio de grau n da função f na vizinhança de (x_0, y_0)

Exemplo: $f(x, y) = x^2e^{3y}$ em torno de $(1, 0)$.

Neste caso, o polinómio de Taylor de 3ºgrau será da forma

$$P_3(x,y) = f(1,0) + [f'_x(1,0)(x-1) + f'_y(1,0)(y-0)]+$$

$$+\frac{1}{2!}[f''_{x^2}(1,0)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,0)(x-1)(y-0) + f''_{y^2}(1,0)(y-0)^2]+$$

$$+\frac{1}{3!}[f'''_{x^3}(1,0)(x-1)^3+3f'''_{x^2y}(1,0)(x-1)^2(y-0)+3f'''_{xy^2}(1,0)(x-1)(y-0)^2+f'''_{y^3}(1,0)(y-0)^3]$$

isto é,

$$P_3(x,y) = 1 + [2(x-1) + 3y] + [+\frac{1}{2!}[2(x-1)^2 + 12(x-1)y + 9y^2]+$$

$$+\frac{1}{3!}[18(x-1)^2y + 54(x-1)y^2 + 27y^3]$$

- **Extremos**

Considere-se f uma função real de duas variáveis reais. Diz-se que f tem um extremo em (x_0, y_0) pertencente ao interior do domínio de f, se para todo o ponto (x, y) pertencente a uma vizinhança de (x_0, y_0) se verifica

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \text{ tem sinal constante.}$$

Neste caso, $f(x_0, y_0)$ chama-se **extremo de** f e (x_0, y_0) **extremante de** f.

  - Se
$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \leq 0$$
para todo (x, y) pertencente a uma vizinhança de (x_0, y_0), então f tem um *máximo local* em (x_0, y_0) - $f(x_0, y_0)$ é o máximo local e (x_0, y_0) é o *maximizante*. Se a desigualdade se verificar para todo (x, y) pertencente ao domínio de f, diz-se que f tem um *máximo global* em (x_0, y_0).
  - Se
$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq 0$$
para todo (x, y) pertencente a uma vizinhança de (x_0, y_0), então f tem um *mínimo local* em (x_0, y_0) - $f(x_0, y_0)$ é o mínimo local e (x_0, y_0) é o *minimizante*. Se a desigualdade se verificar para todo (x, y) pertencente ao domínio de f, diz-se que f tem um *mínimo global* em (x_0, y_0).

Teorema - Se $f(x, y)$ tem um extremo local ou global num ponto (x_0, y_0) do seu domínio então:

- (x_0, y_0) é um ponto crítico de f, isto é, f admite derivadas parciais de primeira ordem em (x_0, y_0) e $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0)$, ou
- (x_0, y_0) é um ponto singular de f, isto é, f não admite uma ou as duas derivadas parciais de primeira ordem em (x_0, y_0), isto é, $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$ não existe, ou
- (x_0, y_0) é um ponto da fronteira do domínio de f.

Demonstração - por exemplo, na secção 13.1 do livro *Calculus* de Robert A. Adams.

O teorema não garante que a função f tem extremos. Diz onde procurar extremos pois se os houver são os que satisfazem aquelas propriedades.

Geometricamente, afirmar que, se um ponto (x_0, y_0) onde f admite derivadas parciais é extremo de f então $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0)$, é equivalente a afirmar que, se o gráfico de f admite plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, esse plano tangente será um plano horizontal, $z = f(x_0, y_0)$.

Exemplos:

1. A função $f(x, y) = x^2 + y^2$ tem mínimo absoluto em $(0, 0)$ pois $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $f'_x(x, y) = 2x$, $f'_y(x, y) = 2y$, fazendo que $\overrightarrow{\nabla} f(0, 0) = (0, 0)$, logo $(0, 0)$ é ponto crítico de f.
2. A função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ tem mínimo absoluto em $(0, 0)$ pois $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tem-se $f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, daí f não admite derivadas parciais em $(0, 0)$, logo $(0, 0)$ é ponto singular de f.

3. Seja $f(x,y) = y^2 - x^2$ que tem um ponto crítico em $(0,0)$, pois $f'_x(x,y) = 2x$, $f'_y(x,y) = -2y$ e $\overrightarrow{\nabla} f(0,0) = (0,0)$ mas $f(0,0)$ não é máximo nem mínimo pois $f(x,0) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(0,y) \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Os pontos críticos de f onde a função f não admite extremos, dizem-se *pontos de sela de f*.

Como determinar extremos de uma função de n variáveis reais

Para determinar os extremos de uma função de n variáveis, em primeiro lugar, determinam-se os pontos críticos, os pontos singulares e a fronteira do domínio.

Os pontos críticos de f são aqueles que satisfazem a condição

$$\overrightarrow{\nabla} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0, 0, \cdots, 0)$$

denominada *condição de estacionariedade.*

Classificação dos pontos críticos de funções de duas variáveis

Seja (x_0, y_0), pertencente ao interior do domínio de f, um ponto crítico de f. Suponha-se que as derivadas parciais de segunda ordem da função f são contínuas numa vizinhança de (x_0, y_0) e represente-se

$$A = f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{y^2}(x_0, y_0).$$

Como as derivadas parciais de primeira ordem são nulas no ponto (x_0, y_0), a fórmula de Taylor escreve-se da forma

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2}\right] + R_2(x,y)$$

onde $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_2(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$

Representando $x - x_0 = h$ e $y - y_0 = k$, a igualdade anterior implica

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx \frac{1}{2}\left[\mathbf{Ah^2 + 2Bhk + Ck^2}\right] = \frac{A}{2}\left[(h + \frac{B}{A}k)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}k^2\right]$$

O sinal de $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ será o sinal de $\displaystyle\frac{A}{2}\left((h + \frac{B}{A}k)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}k^2\right)$. Assim,

1. Se $AC - B^2 > 0$ e $A > 0$, $f(x_0, y_0)$ é mínimo de f;
2. Se $AC - B^2 > 0$ e $A < 0$, $f(x_0, y_0)$ é máximo de f;
3. Se $AC - B^2 < 0$, (x_0, y_0) é ponto de sela de f;
4. Se $AC - B^2 = 0$, este teste é inconclusivo.

Se $A = 0$ e $B \neq 0$, tem-se $f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx k(2Bh + Ck)$, e (x_0,y_0) é ponto de sela de f pois entre a direção $k = 0$ e a direção $2Bh + Ck = 0$, f admite valores positivos e negativos.

Nota: Note que pode escrever-se na forma matricial

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

e que

$$AC - B^2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

A matriz $Hess(f) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{bmatrix}$ é a matriz das segundas derivadas de f e chama-se *matriz hessiana* e ao seu determinante, *hessiano.*

Vericamos assim que f tem extremo em (x_0,y_0) se o hessiano de f no ponto (x_0,y_0) for positivo.

Classificação dos pontos críticos de funções de n variáveis

Considere um ponto crítico de f, $P = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$, isto é, $\vec{\nabla}(P) = \vec{0}$. Representando $x_1 - x_1^0 = h_1$, $x_2 - x_2^0 = h_2$, $\cdots$, $x_n - x_n^0 = h_n$, da fórmula de Taylor temos que:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) - f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0) \approx \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2^2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

onde a matriz $\begin{bmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2^2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_n^2} \end{bmatrix}$ é a matriz hessiana da função f.

Represente-se por $\triangle = |Hessf|$ no ponto crítico P e a cadeia de menores $\triangle_k = |f''_{x_ix_j}|$, com $1 \leq i,j \leq k$ e $k = 1, 2, \cdots, n$, são os determinantes da matriz formada pelas primeiras k linhas e k colunas da matriz hessiana. Exemplificando,

$$\triangle_1 = f''_{x_1^2}, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2^2} \end{vmatrix}, \quad \triangle_3 = \begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1x_2} & f''_{x_1x_3} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2^2} & f''_{x_2x_3} \\ f''_{x_3x_1} & f''_{x_3x_2} & f''_{x_3^2} \end{vmatrix}, \ldots.,$$

Tem-se que:

– Se $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\cdots$, $\triangle_n = \triangle$ são todos positivos então $f(P)$ é um mínimo de f.

- Se $\triangle_1 < 0$, $\triangle_2 > 0$, $\triangle_3 < 0$, $\cdots$, $\triangle_n = \triangle$ tiver o sinal de $(-1)^n$, então $f(P)$ é um máximo de f.
- Se $\triangle = 0$, o teste é inconclusivo.
- Qualquer outro caso, não há extremo em P.

- **Extremos condicionados - Método de Lagrange**

Sejam f uma função real definida em $\mathbb{R}^2$ e K um subconjunto do domínio de f.

Diz-se que $(a,b) \in K$ é um *minimizante de f condicionado ou restrito a K* se

$$f(a,b) \leq f(x,y)$$

para todo (x,y) numa vizinhança de (a,b) contida em K. $f(a,b)$ diz-se *mínimo condicionado.*

Diz-se que $(a,b) \in K$ é um *maximizante de f condicionado ou restrito a K* se

$$f(a,b) \geq f(x,y)$$

para todo (x,y) numa vizinhança de (a,b) contida em K. $f(a,b)$ diz-se *máximo condicionado.*

Quando K é um conjunto definido por condições $g_1(x,y) = 0$; $g_2(x,y) = 0$, existe um método para estudar extremos condicionados, chamado *método de Lagrange.*

Teorema (Lagrange) - Sejam f e g duas funções reais de duas variáveis reais com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, tal que f atinge um extremo no ponto (a,b) na curva de restrição $g(x,y) = 0$.

Se $\overrightarrow{\nabla} g(a,b) \neq (0,0)$ então existe um número real λ tal que $\overrightarrow{\nabla} f(a,b) = \lambda \overrightarrow{\nabla} g(a,b)$.
O escalar λ chama-se multiplicador de Lagrange.

Método dos multiplicadores de Lagrange para determinar extremos condicionados

Pretende-se determinar os extremos da função real $f(x,y)$ que satisfaçam a condição $g(x,y) = 0$.

1. Constrói-se a função lagrangeana

$$L(\lambda, x, y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

e resolve-se o sistema $\overrightarrow{\nabla} L = 0$ que corresponde ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} L'_x &= f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ L'_y &= f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ L'_\lambda &= g(x,y) = 0 \end{aligned}$$

Note que as duas primeiras equações do sistema equivalem a dizer que $\overrightarrow{\nabla} f = \lambda \overrightarrow{\nabla} g$.

2. Seja o ponto (λ_0, x_0, y_0) solução do sistema anterior e considere o determinante da matriz hessiana da função lagrangena L, chamada matriz hessiana orlada.

$$\det(H_L(\lambda_0, x_0, y_0)) = \begin{vmatrix} L''_{\lambda^2} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{y^2} \end{vmatrix}_{(\lambda_0,x_0,y_0)} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} \end{vmatrix}_{(\lambda_0,x_0,y_0)}$$

   (a) Se $\det(H_L(\lambda_0, x_0, y_0)) > 0$ então (λ_0, x_0, y_0) é maximizante;
   (b) Se $\det(H_L(\lambda_0, x_0, y_0)) < 0$ então (λ_0, x_0, y_0) é minimizante.

O teorema afirma que num extremo condicionado de f os vectores $\overrightarrow{\nabla} f(a, b)$ e $\overrightarrow{\nabla} g(a, b)$ são paralelos. E, considere o vector $\vec{u}$ tangente à curva $g(x, y) = 0$ no ponto onde f admite o extremo, isto é, em (a, b). Sabe-se que

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} g(a, b) = 0,$$

isto é, $\overrightarrow{\nabla} g(a, b)$ é perpendicular ao vector $\vec{u}$. Como $\overrightarrow{\nabla} f(a, b)$ é paralelo a $\overrightarrow{\nabla} g(a, b)$, tem-se que

$$f'_{\vec{u}}(a, b) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} f(a, b) = 0.$$

O vector $\overrightarrow{\nabla} f(a, b)$ também é perpendicular ao vector $\vec{u}$. as curvas de nível $f(x, y) = f(a, b)$ e $g(x, y) = 0$ são tangentes em (a, b).

Exemplo:

Determinar os extremos da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeita à condição $x + y = 2$.

Construir a função lagrangeana:

$$L(\lambda, x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2)$$

e resolver o sistema $\overrightarrow{\nabla} L = 0$:

$$\begin{aligned} L'_x &= 2x + \lambda = 0 \\ L'_y &= 2y + \lambda = 0 \\ L'_\lambda &= x + y - 2 = 0 \end{aligned}$$

equivalente a

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\lambda}{2} \\ y &= -\frac{\lambda}{2} \\ x + y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

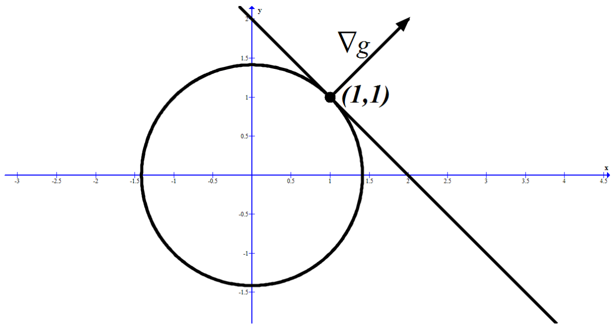
Substituindo na terceira equação, obtém-se $-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = 2$ equivalente a $\lambda = -2$. Substituindo agora o valor de λ nas duas primeiras equações, obtemos $(a, b) = (1, 1)$.

Calcula-se o determinante da matriz hessiana da função lagrangeana,

$$\det(H_L(-2,1,1)) = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right|_{(-2,1,1)} = -4.$$

E verifica-se que $f(1,1) = 2$ é o mínimo da função para os pontos (x, y) que satisfazem a equação $x + y = 2$.

Geometricamente, tem-se que o ponto $(1,1)$ pertence à curva de nível $x^2 + y^2 = f(1,1) = 2$ e pertence à curva de nível $x + y = 2$.



E o vector gradiente de f é $\overrightarrow{\nabla} f(1,1) = (2,2)$ é múltiplo do vector gradiente de g, $\overrightarrow{\nabla} f(1,1) = (2,2)$, ambos os vectores aplicados ao ponto $(1,1)$ são paralelos entre si e perpendiculares às curvas de nível em questão.

Exemplo:

Determinar os extremos da função $f(x, y) = x^2 - y^2$ sujeita à condição $x^2 + y^2 = 1$.

Construir a função lagrangeana:

$$L(\lambda, x, y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

e resolver o sistema $\overrightarrow{\nabla} L = 0$:

$$\begin{aligned} L'_x &= 2x + 2x\lambda = 0 \\ L'_y &= -2y + 2y\lambda = 0 \\ L'_\lambda &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

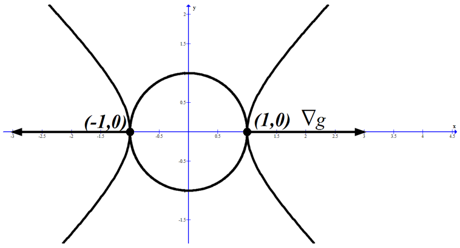
Da resolução deste sistema, obtemos quatro soluções: $(\lambda, a, b) = (1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$, (-1,1,0) e (-1,-1,0).

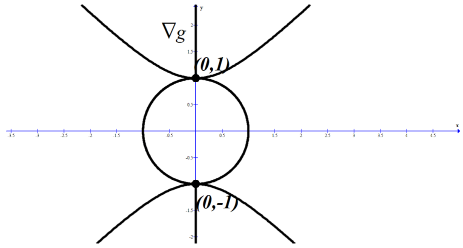
Calcula-se o determinante da matriz hessiana da função lagrangeana,

$$\det(H_L(\lambda, x, y)) = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2+2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2+2\lambda \end{array} \right|$$

para cada um dos quatro pontos. E verifica-se que $f(0,1) = f(0,-1) = -1$ é o mínimo da função para os pontos (x, y) que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 1$ e que $f(1,0) = f(-1,0) = 1$ é o máximo da função para os pontos (x, y) que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 1$.

Geometricamente, tem-se que os pontos $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$ pertencem à curva de nível $x^2+y^2 = 1$. E que $(1,0)$, $(-1,0)$ pertencem à curva de nível $x^2-y^2 = 1$ enquanto $(0,1)$, $(0,-1)$ pertencem à curva de nível $x^2 - y^2 = -1$.





Exemplo:

Determinar os extremos da função $f(x, y) = \ln(xy)$ sujeita à restrição de $2x + 3y = 5$.