1. Considere um processo estocástico discreto.

   a) Diga justificando, que parâmetros o caracterizam e como os poderia determinar.
   b) Se o processo for estacionário em que medida esses parâmetros se modificam. Justifique.
   c) Se além de estacionário o processo for ergódico como se pode caracterizá-lo apenas com uma realização. Justifique.

2. Considere um sinal discreto s[n] de média m_s e desvio padrão σ_s corrompido de modo aditivo por um sinal ruído branco e[n] de média m_e e desvio padrão σ_e.

   a) Determine a média e a variância do processo x[n]=s[n]+e[n] admitindo que os processos são não correlados.
   b) Determine a sequência de autocorrelação e a densidade espectral de potência de x[n] em função dos parâmetros conhecidos dos processos s[n] e e[n].
   c) Considere que s[n] é um sinal sinusoidal com fase aleatória e uniformemente distribuída em]0, 2π[ou seja $s[n]=A\cos(w_0 n+\varphi)$. Mostre que nestas circunstâncias

$$\Phi_{xx}[m] = \frac{A^2}{2}\cos w_0\, m + \sigma_e^2 \delta[m] + m_e^2$$

   d) Determine e esboce justificando, no contexto da alínea c) a densidade espectral de potência do processo x[n].

3. Considere x[n] e y[n] 2 processos estocásticos reais, estacionários de médias m_x e m_y. Mostre as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} \gamma_{xx}(m) = \phi_{xx}(m) - m_x^2 \\ \gamma_{xy}(m) = \phi_{xy}(m) - m_x m_y \end{cases}$$

(i)

(j)

(k) 1º determinar $h_1[n]$ >> h = ideal lp (wc, M)

>> M = - - - -

M, β >>

janela de Kaiser → M = ← valor alínea i)

>> beta

→ w = kaiser

max(H(1,500)) < lp3 → h = hd' * w

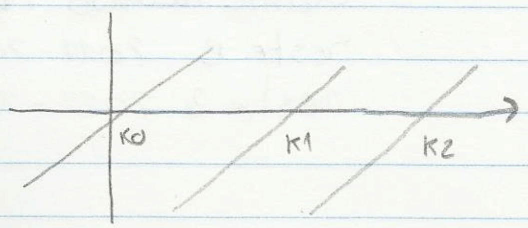
min(H(1,500)) > 0,92

```
function h = my l filter (wc, M, beta)
    hd = ideal Lp (wc, M);
    w = Kaiser (M, beta);
    h = hd' * w;
end
```

TESTE 2 2011-2012

1.

(a)



parâmetros → aqueles que caracterizam cada distribuição

↳ aqueles q caracterizam as relações entre as variáveis aleatórias

(b) se um processo for estacionário os parametros que caracterizam as variaveis aleatorias que os compõem, são constantes no tempo, ou seja, são iguais a todas (cumpre o regime lax.

Os parametros q caracterizam as relações entre as variáveis aleatórias dependem apenas da distância temporal entre elas.

(c) se o processo for ergódico as médias temporais são iguais às médias do conjunto.

2. $s[n], ms, \sigma_s \longrightarrow me, \sigma_e$

$s[n] + e[n]$

(a) mx, σ_x^2

média ↑ ↑ variância

$$E\{x\} = E\{s[n] + e[n]\} = E\{s[n]\} + E\{e[n]\} = ms + me$$

$$\sigma_x^2 = E\{(x - mx)^2\} = E\{x^2 + 2xmx + mx^2\} = E\{x^2\} - mx^2$$

$$E\{x^2\} = E\{(s+e)^2\} = E\{s^2 + 2se + e^2\} = E\{s^2\} + 2E\{se\} + E\{e^2\}$$

$$\sigma_x^2 = E\{s^2\} + 2E\{es\} + E\{e\} - (ms + me)^2$$
$$= \sigma_s^2 + ms^2 + 2E\{es\} + \cancel{me^2} - \cancel{ms^2} - 2ms\,me - \cancel{me^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2E\{es\} = 2mems \\ E\{s^2\} = \sigma_s^2 + ms^2 \end{array}}$$

Teste 2 - 11 - 12 CONTINUAÇÃO

2. (b) $x[n] = s[n] + e[n]$ $e[n]$ é ruído branco

$\hookrightarrow \gamma ee(m) = \sigma_e^2 \delta(m)$

$ms, \sigma_s, me, \sigma_e$ $\phi ee(m) = \gamma ee(m) + me^2$
$= \sigma_e^2 \delta(m) + me^2$

$\hookrightarrow \phi_{xx}(m) = E\{x[n] x^*[n+m]\}$

$$= E\{(s[n] + e[n])(s[n+m] + e[n+m])^*\}$$
$$= E\{s[n]s^*[n+m] + \underbrace{s[n]e^*[n+m] + e[n]s^*[n+m]}_{\text{se estes são correlados (*)}} + e[n]e^*[n+m]\}$$

(*) $E\{s[n]\, e^*[n+m]\} = E\{\underbrace{s[n]}_{ms}\}.\, E\{\underbrace{e^*[n+m]}_{me}\}$

$\Rightarrow \phi_{ss}[m] + 2 ms me + \phi_{ee}[m]$

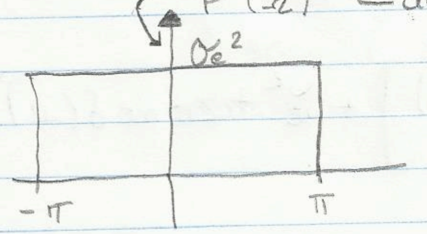
$= \phi_{ss}[m] + 2 ms me + \sigma_e^2\, \delta[m] + me^2$

- densidade espetral

$P_{xx}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{ss}[m]\, e^{-j\Omega m} = P_{ss}(\Omega) + \underbrace{2\pi(2 ms me + me^2)\,\delta(\Omega)}_{P'(\Omega)} +$

$\underbrace{+\sigma_e^2}$

$P'(\Omega)$ — amplitude é $2\pi(2msme + me^2)$



(c)

$\phi_{ss}(m) = E\{s[n]\, s[n+m]\}$

$\Rightarrow s[n] = A\cos(\Omega_0 n + \varphi)$

$= E\{A\cos(\underbrace{\Omega_0 n + \varphi}_{a}) . A\cos(\underbrace{\Omega_0 (n+m) + \varphi}_{b})\}$

$\boxed{\begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a . \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{array}}$

se somar $\cos(a+b)$ e $\cos(a-b)$ obtemos,

$= \cos a . \cos b - \cancel{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} + \cos a \cos b + \cancel{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$

$= 2\cos a . \cos b \Rightarrow \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) = \cos a \cos b$

Assim,

$\Rightarrow \frac{A^2}{2} E\{\cos(2\Omega_0 n + \Omega_0 m + 2\varphi) + \cos(+\Omega_0 m)\}$

$= \frac{A^2}{2} E\{\cos(2\Omega_0 n + \Omega_0 m + 2\varphi)\} + \frac{A^2}{2} E\{\cos(\Omega_0 m)\}$

→ m é constante
→ coseno tem o mesmo valor positivo e negativo logo a média é zero então conta o 1° coseno

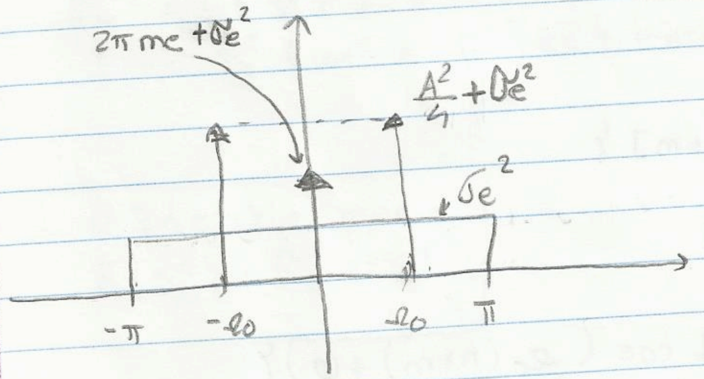
(d) $P_{xx}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}(m) e^{-j\Omega m}$

$$\frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0 m) \xleftrightarrow[\text{Fourier (T.F)}]{\text{Transformada}} \frac{A^2}{2}\pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right]$$

$$\xleftrightarrow{\text{série Fourier (S.F)}} \begin{cases} a_1 = \dfrac{A^2}{4} \\ a_{-1} = \dfrac{A^2}{4} \end{cases}$$

Usando a propriedade da linearidade

$$P_{xx}(\Omega) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right] + \sigma_e^2 + 2\pi m_e \delta(\Omega)$$



$$\boxed{\cos(\Omega_0 n) = \frac{e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega n}}{2}}$$
por isso aparece o $\frac{A^2}{4}$

3. $\gamma_{xx}(m) = E\{(x[n]-m_x)(x[n+m]-m_x)\}$

$= E\{\underbrace{x[n]\,x[n+m]} - \underbrace{x[n]\,m_x} - m_x \overbrace{x[n+m]}^{\text{como é estacionário a esperança é } m_x} + m_x^2\}$ ⊛

este é o ϕ_{xx}

$= \phi_{xx}[m] - m_x^2$

é constante

$\hookrightarrow E\{x[n]\,m_x\} = m_x \underbrace{E\{x[n]\}}_{m_x}$

$= m_x^2$

⊛ iria ficar $-\cancel{m_x^2} + \cancel{m_x^2}$
portanto fica $\phi_{xx}[m] - m_x^2$

$$\gamma_{xy}(m) = E\{(x[n]-m_x)(y[n+m]-m_y)^*\}$$

$$= E\{x[n]\,y^*[n+m] - x[n]\,m_y - m_x\,y^*[n+m] + m_y m_x\}$$

$$= \phi_{xy}[m] - m_x m_y$$

Teste 3-11-12

1. (a) Um estimador é consistente quando

$$\left.\begin{array}{l} B \to 0 \\ Var \to 0 \end{array}\right\} N \to +\infty \qquad B = E\{c_{xx}(m)\} - \overbrace{\phi_{xx}[m]}^{\text{seq. autocorrelação}}$$

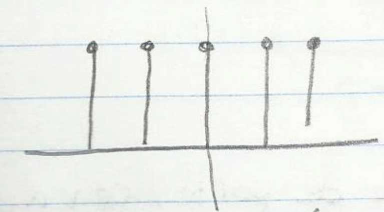
$$E\{c_{xx}(m)\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\,x[n+m]\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} \underbrace{E\{x[n]\,x[n+m]\}}_{\phi_{xx}(m)} = \frac{1}{N}(N-|m|)\,\phi_{xx}(m)$$

$$= \frac{N-|m|}{N}\,\phi_{xx}(m)$$

$$\lim_{N\to+\infty} c_{xx}(m) = \phi_{xx}(m)$$

Logo, consideramos consistente



$$c_{xx}(3) = \frac{1}{5}\left(x[-2]\,x[1] + x[-1]\,x[1]\right.$$

$$c_{xx}(4) = \frac{1}{5}\left(x[-2]\,x[2]\right)$$