Análise Matemática EE - Ficha nº 2

1ºano, 2ºsemestre

Funções reais de várias variáveis

1. Determina o domínio das seguintes funções reais de várias variáveis:

a) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$ d) $g(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

e) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$

g) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-16)\sin x}$ h) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sin(xy)}$

i) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2-4\right)$ j) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{\ln(x^2-y)}$

l) $f(x,y) = \arccos\left(\frac{x}{y^2}\right)$ m) $g(x,y) = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{y}-x^2\right)}$

n) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x+y} \text{ se } x \neq y \\ 0 \text{ se } x = y \end{cases}$ o) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\ln(x-y+2)} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ e \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. Uma loja vende cada unidade de um produto A a 2,5 euros e cada unidade do produto B a 1,4 euros. A expressão que descreve o dinheiro da venda dos produtos A e B em função do número de unidades vendidas do produto A (x) e do número de unidades vendidas do produto B (y) é $f(x,y) = 2,5x + 1,4y$.

   Determina $f(100,10)$ e diz qual o significado deste valor.

3. Considerando uma taxa de inflação a 5%, o valor actual de A euros daqui a t anos transforma-se em $P(A,t) = A\exp(-0.05t)$ euros.

   Determina $P(100,10)$ e diz qual o significado desse valor.

4. Um método de amostragem para determinar o número de indivíduos de uma determinada espécie animal numa área circunscrita consiste em:

   - Primeiro, marcar R animais recolhidos nessa área e voltar a libertá-los para se misturarem com os não marcados.
   - Numa data posterior, recolhe-se uma amostra de M animais dessa mesma área e são contados aqueles que foram marcados na primeira vez S.

   É feita uma estimativa do número de animais existentes nessa área usando a fórmula $N = f(R,M,S) = \frac{RM}{S}$.

   Determina $f(400,400,80)$ e diz qual o significado desse valor.

5. Considere-se que, num determinado período de tempo, o número de unidades de produto produzidas quando se usa x unidades de trabalho e y unidades de material é $f(x,y) = 60x^{3/4}y^{1/4}$.

   (a) Se considerarmos 81 unidades de trabalho e 16 unidades de material, quantas unidades de produto são produzidas.

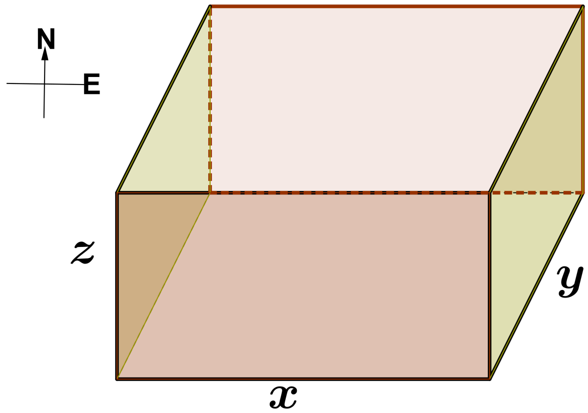
   (b) Verifica que, se a quantidade de trabalho e a quantidade de material duplicam, também o número de unidades de produto duplica.

6. Sob determinadas condições, se um casal com olhos castanhos tem k filhos, a probabilidade $P = P(r, k)$ de terem r filhos com olhos azuis é dada por

$$P(r,k) = \frac{k!(\frac{1}{4})^r(\frac{3}{4})^{k-r}}{r!(k-r)!}, \quad r = 0, 1, 2, ..., k$$

Determina a probabilidade de um casal com 4 filhos ter 3 com olhos azuis.

7. Considere-se um edifício com dimensões x, y, z como mostra a figura.



A perda diária de calor em cada lado do edifício, medida em unidades convenientes de calor por unidade de área é indicada na tabela.

Tecto	Lado Este	Lado Oeste	Norte	Sul	Chão
10	8	6	10	5	1

Represente-se por $f(x, y, z)$ a perda diária de calor no edifício.

(a) Escreve uma fórmula para $f(x, y, z)$.

(b) Se a altura do edifício for de 50m, comprimento 100m e largura 70m, qual a perda diária de calor.

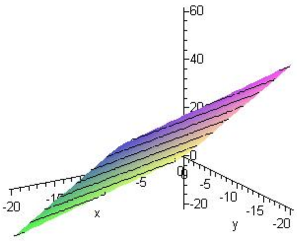
8. Represente geometricamente o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
c) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ d) $f(x, y) = x + y$

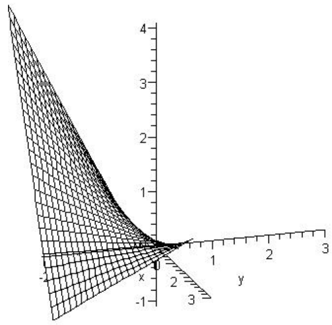
9. Considere as seguintes funções reais definidas em $\mathbb{R}^2$:

a) $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ b) $f(x, y) = x - 3y$
c) $f(x, y) = y^2$ d) $f(x, y) = xy$

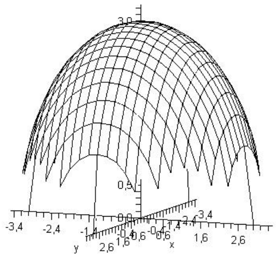
Estabeleça a correspondência correta entre as funções acima e os gráficos abaixo:



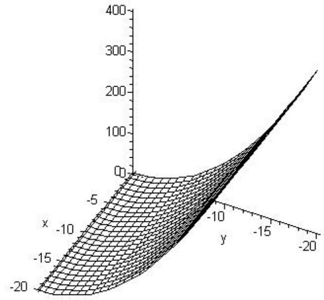
1)



2)



3)



4)

10. Representa as curvas de nível das funções:

    (a) $f(x,y) = 3(1 - x - y)$
    (b) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$
    (c) $f(x,y) = x^2 - y^2$
    (d) $f(x,y) = x^2$
    (e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$
    (f) $f(x,y) = \sin y$