Análise Matemática B

Folha 1

1. Determine o centro a, o raio de convergência R e o intervalo de convergência I das seguintes séries de potências.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(x-10)^n$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n (x-4)^{2n}}{n^2}$

   f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-3)^{2n} n^2}{4^n}$

   g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n x^n}{n^3-1}$

   h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ sol:$a=0, \quad R=+\infty, \quad I=]-\infty,+\infty[$

   i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ sol: $a=0, \quad R=+\infty, \quad I=]-\infty,+\infty[$

   j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^{n-1}}{n^2}$ sol: $a=-2, \quad R=1, \quad I=[-3,-1]$

   l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+5)^n}{(2n-1)(2n)}$ sol: $a=-5, \quad R=1, \quad I=[-6,-4]$

   m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)!}$ sol: $a=1, \quad R=+\infty, \quad I=]-\infty,+\infty[$

2. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1+b)^{n+1}}$ e determine o valor de $b>0$ de forma que o seu raio de convergência seja $R=3$.

3. Sabendo que $\displaystyle\frac{1}{1-x} = 1+x+\cdots+x^n\cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ quando $|x|<1$, determine a representação em série de potências de x das seguintes funções:

   a) $\displaystyle\frac{1}{1-x^4}$

   b) $\displaystyle\frac{1}{2+x}$

c) $\dfrac{x}{1-x^2}$

d) $\dfrac{1}{6-x-x^2}$

e) $\ln(1-x)$

f) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

g) $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{6-t-t^2}$

4. Seja $f(x)$ uma função definida pelas séries de potências dadas. Escreva uma série de potências para $f'(x)$ e encontre o seu raio de convergência.

   a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$

   b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

   c) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n/2}(x+1)^{2n}$

5. Seja $f(x)$ uma função definida pelas séries de potências dadas. Determine uma série de potências para $\int_0^x f(t)dt$ e encontre o seu raio de convergência.

   a) $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$

   b) $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{2^{n+1}}$

   c) $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

   d) $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^3}$

6. Sabendo que o desenvolvimento da função $\sin x$ em série de potências de x é $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, determine o desenvolvimento em série de potências de x da função $\cos x$

   a) usando derivação;

   b) usando primitivação.