Simplex

Equações das restrições:

$5x_1 + 4x_2 + x_3 = 200$

$4x_1 + 6x_2 + x_4 = 230$

$2x_1 + x_2 + x_5 = 70$

Variáveis básicas

Esta linha é como se fosse um sinal de igualdade.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5	4	1	0	0	200
x_4	4	6	0	1	0	230
x_5	2	1	0	0	1	70
z	−10	−9	0	0	0	0

- função objectivo: $z-10x_1-9x_2-0x_3-0x_4-0x_5=0$
- *Os valores que aparecem nesta linha são denominados por* ***custos reduzidos.***

- *A que solução corresponde o quadro simplex apresentado?*

Simplex

- Um quadro simplex que corresponda a uma solução básica admissível (primal) tem as seguintes características:
  - Uma coluna correspondente a uma variável básica tem um 1 na linha associada à variável básica e zeros em todas as outras linhas (exemplo, a coluna de x_5 tem um 1 na terceira linha - associada à variável x_5 e zeros nas primeira e segunda linhas). Esta característica implica que as colunas das variáveis básicas formam uma matriz identidade.
  - Na linha da função objectivo, todas as variáveis básicas têm coeficiente *0*.
  - Os termos independentes são sempre maiores ou iguais a zero (manter válida a não-negatividade).

Simplex

•A cada quadro simplex corresponde uma solução básica admissível imediatamente perceptível através das variáveis básicas e da coluna dos termos independentes.

– No exemplo, $x_3=200$, $x_4=230$, $x_5=70$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5	4	1	0	0	200
x_4	4	6	0	1	0	230
x_5	2	1	0	0	1	70
z	–10	–9	0	0	0	0

•A solução associada ao quadro simplex é óptima?

Simplex

•Não! Se se aumentar o valor de x_1 ou x_2 o valor de z aumenta (e pretende-se maximizar o valor de z). O que o coeficiente *-10* de x_1 (linha da função objectivo) significa é que por cada unidade de aumento de x_1 o valor da função objectivo, aumenta *10* unidades (o sinal negativo é devido à mudança de membro efectuada inicialmente).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5	4	1	0	0	200
x_4	4	6	0	1	0	230
x_5	2	1	0	0	1	70
z	–10	–9	0	0	0	0

Simplex

•Em cada iteração do simplex passa-se (da base actual) para uma base adjacente (que se obtém da actual passando uma variável não básica a básica e uma variável básica a não básica - o número de variáveis básicas é constante).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5	4	1	0	0	200
x_4	4	6	0	1	0	230
x_5	2	1	0	0	1	70
z	−10	−9	0	0	0	0

Simplex

•Qual a variável mais promissora para entrar na base?

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5	4	1	0	0	200
x_4	4	6	0	1	0	230
x_5	2	1	0	0	1	70
z	−10	−9	0	0	0	0

Simplex

•A variável mais promissora é x_1 (aumento de 10 unidades na função objectivo por unidade de aumento de x_1, para x_2 esse valor é 9 o que é pior já que se está a maximizar).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5	4	1	0	0	200
x_4	4	6	0	1	0	230
x_5	2	1	0	0	1	70
z	−10	−9	0	0	0	0

- Isto é uma decisão gulosa, míope... não garante que seja a melhor decisão.
- E se houver empate? (custos reduzidos iguais)

Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5	4	1	0	0	200
x_4	4	6	0	1	0	230
x_5	2	1	0	0	1	70
z	−10	−9	0	0	0	0

•Sendo assim x_1 entra na base (passará a tomar um valor positivo)!

- Qual a variável que sai base?

•Como o aumento do valor de x_1 aumenta o valor da função objectivo, queremos aumentar o mais possível o seu valor.

- Qual é o limite?

Simplex

- Tem de haver um limite (ou melhor, se não houver um limite o problema é ilimitado, mas não é esse o caso do exemplo).

O que acontece às outras variáveis quando se aumenta o valor de x_1

A variável x_2 continua não básica (logo com valor igual a 0).

As outras relacionam-se com x_1 através das restrições.

$$5x_1 + x_3 = 200$$

$$4x_1 + x_4 = 230$$

$$2x_1 + x_5 = 70.$$

x_1	x_3	x_4	x_5
0	200	230	70
20	100	150	30
35	25	90	0
40	0	70	−10

Qual a variável que deve sair da base?

Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5	4	1	0	0	200
x_4	4	6	0	1	0	230
x_5	**2**	1	0	0	1	70
z	−10	−9	0	0	0	0

Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5	4	1	0	0	200
x_4	4	6	0	1	0	230
x_5	**2**	1	0	0	1	70
z	–10	–9	0	0	0	0

entra na base

Simplex

Coluna pivot

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5	4	1	0	0	200
x_4	4	6	0	1	0	230
x_5	**2**	1	0	0	1	70
z	–10	–9	0	0	0	0

entra na base

Simplex

Coluna pivot

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		(Razão do critério de saida da base)
x_3	5	4	1	0	0	200	(200/5)
x_4	4	6	0	1	0	230	(230/4)
x_5	2	1	0	0	1	70	(70/2)
z	–10	–9	0	0	0	0	

entra na base

Simplex

Coluna pivot

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		(Razão do critério de saida da base)
x_3	5	4	1	0	0	200	(200/5)
x_4	4	6	0	1	0	230	(230/4)
x_5	2	1	0	0	1	70	(70/2)
z	–10	–9	0	0	0	0	

sai da base

Linha pivot

entra na base

A variável que sai da base é x_5, a primeira que se anula (logo passa a não básica) quando se tenta aumentar x_1 o mais possível.

A razão entre o valor da coluna dos termos independentes e o valor da coluna da variável que vai entrar na base para todas as linhas (cujo valor seja positivo) e escolher a menor.

Simplex

Coluna pivot

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		(Razão do critério de saída da base)
x_3	5	4	1	0	0	200	(200/5)
x_4	4	6	0	1	0	230	(230/4)
x_5	2	1	0	0	1	70	(70/2)
z	−10	−9	0	0	0	0	

sai da base

Linha pivot

elemento pivot

entra na base

(Na resolução primal) O elemento pivot nunca pode ser negativo.

Simplex

Coluna pivot

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		(Razão do critério de saída da base)
x_3	5	4	1	0	0	200	(200/5)
x_4	4	6	0	1	0	230	(230/4)
x_5	2	1	0	0	1	80	(80/2)
z	−10	−9	0	0	0	0	

sai da base

sai da base

elemento pivot

entra na base

Se houver empate na saída?

- escolha indiferente: algoritmo pode entrar em ciclo
- escolhe-se a razão de maior divisor: sai x_3

Simplex

- Como obter o quadro correspondente à nova base?
  - Cada linha corresponde a uma equação de um sistema, logo
    - pode-se multiplicar toda a linha por uma constante
    - pode-se somar duas linhas, substituindo uma delas pelo resultado da soma, que o sistema de equações não se altera (só se altera a sua representação). No exemplo, a linha 3 (L3) é a linha pivot, fazendo as operações

L'3 = L3 / 2 (para a linha L3)

L1 - 5L'3 (para a linha L1)
L2 - 4L'3 (para a linha L2)
L4 + 10L'3 (para a linha L4)

x_1
5
4
2
–10

Coluna pivot

- obtém-se o quadro simplex correspondente à nova base

Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	**0**	3/2	1	0	–5/2	25
x_4	**0**	4	0	1	–2	90
$\mathbf{x_1}$	**1**	½	0	0	½	35
z	**0**	–4	0	0	5	350

Para experimentar e/ou verificar cálculos:
http://www.tutor.ms.unimelb.edu.au/simplex_intro/index.html

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

- Fizemos uma iteração do algoritmo simplex primal:

1. Teste de optimalidade (a solução básica actual é óptima se todos os coeficientes da função objectivo (**custos reduzidos**) são não negativos). Se a solução é óptima, parar. Se não, prosseguir com o passo 2.
2. Decidir qual a variável que entra na base (é aquela que tem o coeficiente mais negativo na linha da função objectivo - em caso de empate escolher a variável que "crescerá mais". Se persistir o empate, escolher arbitrariamente). Prosseguir com o passo 3.
3. Decidir qual a variável básica que sai da base (é aquela que tem a razão do critério de saída mais pequena - excluindo as razões negativas; em caso de empate, escolher o maior elemento pivot. Se persistir o empate, escolher arbitrariamente). Se não houver nenhuma razão estritamente positiva o problema é ilimitado, parar. Se não, prosseguir para 4.
4. Actualizar o quadro simplex para a base actual e passar à iteração seguinte (passo 1).

Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		(Razão do critério de saída da base)
x_3	0	3/2	1	0	–5/2	25	(50/3) ⇨
x_4	0	4	0	1	–2	90	(90/4)
x_1	1	½	0	0	½	35	(70)
z	0	–4	0	0	5	350	
		⇧					

Simplex

- O quadro simplex obtido em qualquer iteração corresponde sempre a uma solução básica admissível e a um ponto extremo.
- Quadro óptimo do exemplo (após duas iterações).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	−6/21	5/14	0	25
x_5	0	0	−4/7	3/14	1	5
x_1	1	0	3/7	−2/7	0	20
z	0	0	12/7	5/14	0	425

Simplex

- Soluções alternativas
  - O que são?
  - Como se identifica a sua existência?

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	−6/21	5/14	0	25
x_5	0	0	−4/7	3/14	1	5
x_1	1	0	3/7	−2/7	0	20
z	0	0	0	0	0	425

- **Custo(s) reduzido(s) NULO(s)** nas variáveis não básicas.

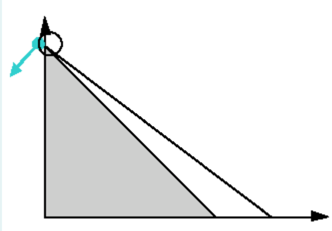
Simplex

- **Degenerescência…**
  - O algoritmo simplex pode entrar em ciclo (se não forem tomadas as devidas previdências) por causa da existência de soluções básicas degeneradas (soluções em que há variáveis básicas com valor zero).
  - A causa é a presença de restrições redundantes (que não são fáceis de detectar analiticamente…). De uma iteração para a seguinte, pode acontecer que a base seja diferente, mas o valor das variáveis de decisão seja o mesmo (uma básica com valor zero sai da base e uma não básica entre na base com valor zero).

Simplex

- **Degenerescência…**
  - Na prática, o *software* actual tem implementadas formas de lidar com a degenerescência (através de regras mais sofisticadas do que escolher arbitrariamente a variável que entra na base em caso de empate).
  - De qualquer maneira, em problemas muito degenerados, este fenómeno pode abrandar significativamente a execução do método.

Um só ponto extremo e duas bases!



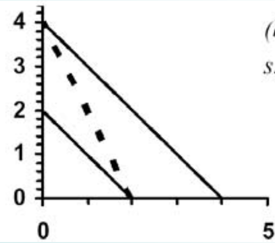
Simplex

- Como obter um quadro simplex válido para um problema que tenha restrições de igualdade e/ou de maior ou igual?
  - Note-se que, se o problema só tiver restrições de "menor ou igual", temos sempre uma base "à mão": a constituída pelas variáveis de folga - como no exemplo anterior.
  - O ponto de solução nula pertence ao espaço de soluções válidas, e forma-se a base com as variáveis de folga.

(a) Max $z = 2x_1 + x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$



(b) Max $z = 2x_1 + x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 - t = 2$$
$$x_1 + x_2 + s = 4$$
$$x_1 , x_2, s, t \geq 0$$

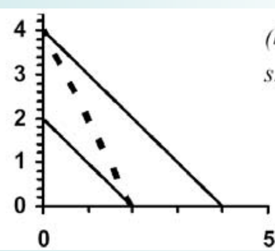
Simplex

- Modelos *(a)* e *(b)* são equivalentes.
  - O modelo *(b)* está na forma estandardizada e inclui uma variável de excesso (primeira restrição) e uma variável de folga (segunda restrição).
  - Para a segunda linha é fácil encontrar uma variável básica inicial (tem coeficiente 1 na própria linha e 0 nas restantes).
  - Qual a variável básica a associar à primeira linha? Não é claro. Não há nenhuma variável que tenha coeficiente 1 na própria linha e 0 nas restantes.

(a) Max $z = 2x_1 + x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$



(b) Max $z = 2x_1 + x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 - t = 2$$
$$x_1 + x_2 + s = 4$$
$$x_1 , x_2, s, t \geq 0$$

- **Modifica-se** o modelo por inclusão de variáveis artificiais ->vê-se isso na próxima aula