

Projecto de Filtros Digitais

UC de Processamento de Sinal

Carlos A. Silva

Dept. Electrónica Industrial

Mestrado Integrado em Engenharia Biomédica, 2º Ano,
2009/10

1 Perspectiva geral sobre o projecto de filtros

Especificação das propriedades pretendidas do sistema
Aproximação da especificação através de um sistema discreto causal

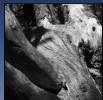
2 Projectos de Filtros IIR

Projecto de filtros através do método da invariância da resposta impulsional

Projecto de filtros através do método da transformação bilinear

3 Projectos de Filtros FIR

Projecto de filtros FIR baseado no método das janelas



Introdução

Os filtros são uma classe especial de sistemas LIT.

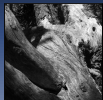
Filtros selectivos na frequência

Estritamente trata-se apenas dos sistemas que deixam passar certas gamas de frequência, mas

Filtros causais

Iremos concentrar-nos apenas nos filtros causais.

Notar que em determinadas aplicações há vantagem em usar filtros não causais, p. ex., em processamento *offline*.



Projecto de um filtro

O projecto de um filtro envolve os seguintes passos:

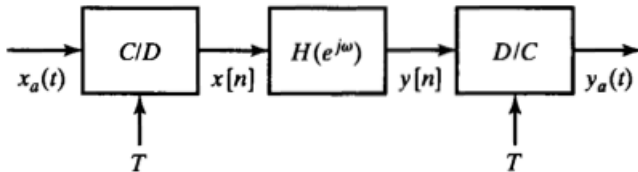
- Especificação das propriedades pretendidas do sistema.
- Aproximação da especificação através de um sistema discreto causal.
- Implementação do sistema.

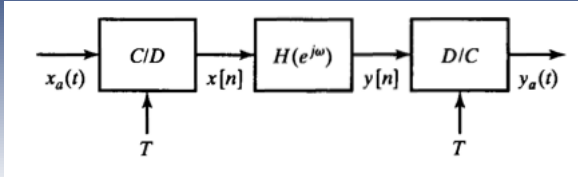
Nós abordaremos apenas o segundo ponto.



Especificação das propriedades pretendidas do sistema

Processamento de sinais contínuos através de um sistema de processamento digital de sinal.

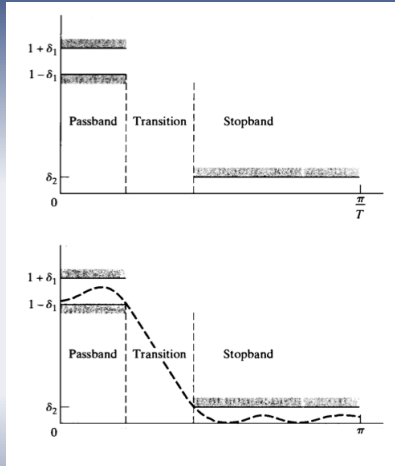




Se o sinal de entrada é de banda limitada e a frequência amostragem é adequada então:

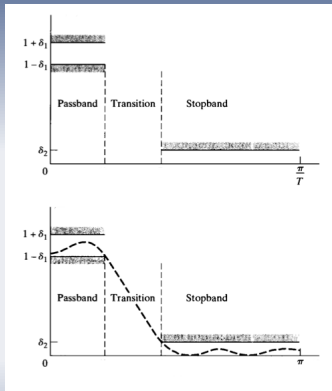
$$H_{eff}(j\omega) = \begin{cases} H(\omega T), & |\omega| < \pi/T \\ 0, & |\omega| > \pi/T \end{cases} \quad (1)$$

Questão: Nestas circunstâncias que cuidados devo ter no uso de um filtro digital ?



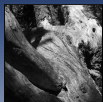
- Neste tipo de sistemas é comum que a especificação seja feita no domínio das frequências.
- A especificação do sistema pode ser transformada na especificação do sistema discreto no tempo através da relação $\Omega = \omega T$:
- Isto significa que $H(\Omega)$ está definido num período pela equação:

$$H(\Omega) = H_{\text{eff}} \left(j \frac{\Omega}{T} \right), \quad |\Omega| < \pi \quad (2)$$



Problema: Considere um filtro discreto no tempo que deve ser usado para filtrar as altas frequências de um sinal contínuo no tempo. Pretendemos que o nosso sistema tenha as propriedades abaixo, quando o sinal de entrada é amostrado à 10^4 amostras/s:

- O ganho de $|H_{eff}(j\omega)|$ deve ter uma tolerância de 0.01 (0.086dB) em torno de 1 (0dB) na banda de frequência $0 \leq \omega \leq 4000\pi$.
- O ganho não deve ser superior à 0.001 (−60dB) na banda $6000\pi \leq \omega$.

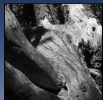


Aproximação da especificação através de um sistema discreto causal

Problema de aproximação de um sistema discreto às suas especificações em termos de bandas de tolerância → Problema de aproximação funcional.

Iremos estudar duas grandes classes de soluções:

- ***Infinite Impulse Response Filter*** (filtro IIR). Aproxima a resposta na frequência através de uma função racional em z .
- ***Finite Impulse Response Filter*** (filtro FIR). Aproxima a resposta na frequência através de uma interpolação polinomial.



Filtros IIR

Na abordagem de projectos de filtros IIR geralmente emprega-se a transformação de filtros contínuos em filtros discretos que cumpram as especificações indicadas.

Esta abordagem apresenta várias vantagens:

- O conhecimento sobre o projecto de filtros analógicos IIR é avançada e madura.
- Muitos métodos de projecto de filtros analógicos IIR têm uma equação fechada relativamente simples. Logo, o projecto de filtros discretos tende a ser simples.
- Os métodos de aproximação de filtros analógicos IIR, que apresentam bons resultados quando aplicados no seu projecto, resultam em maus resultados quando aplicados directamente no projecto de filtros discretos.

No projecto do filtro discreto pela transformação de um protótipo de um filtro analógico teremos que:

- Obter a especificação do filtro analógico protótipo através da transformação da especificação do filtro discreto.
- Calcular a função do sistema, $H_c(s)$, ou a resposta impulsional, $h(t)$, do filtro analógico usando um dos métodos de aproximação.
- Calcular a função do sistema, $H(z)$, ou a resposta impulsional, $h[n]$, do sistema discreto através da aplicação de uma das transformações sobre $H_c(s)$ ou $h(t)$.



Projecto de Filtros através do método da invariância da resposta impulsional

O primeiro método de transformação do protótipo do filtro analógico que estudaremos é o *método da invariância da resposta impulsional*.

Neste método a resposta do filtro discreto é obtida pela amostragem da resposta impulsional do filtro analógico (protótipo):

$$h[n] = T_d h_c(nT_d) \quad (3)$$

Onde T_d é o período de amostragem. Na prática o período de amostragem T_d é considerado como sendo 1. (Porque ?)

Quando empregamos esta transformação estamos especialmente interessados na relação entre as respostas na frequência do filtro discreto e do filtro protótipo (Qual será a sua relação ?)

Quando empregamos esta transformação estamos especialmente interessados na relação entre as respostas na frequência do filtro discreto e do filtro protótipo (Qual será a sua relação ?)

Da teoria sobre amostragem de sinais sabemos que os espectros dos dois sistemas estarão relacionados por:

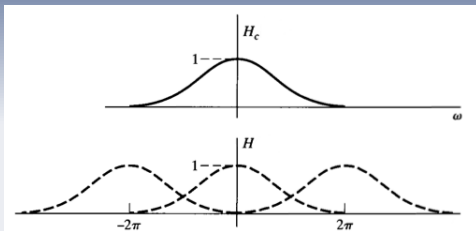
$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c \left(\frac{\Omega}{T_d} + j \frac{2\pi}{T_d} k \right). \quad (4)$$

Se o filtro protótipo for de banda limitada, ou seja $H_c(j\omega) = 0$ ($|\omega| \geq \pi/T_d$), então

$$H(\Omega) = H_c \left(j \frac{\Omega}{T_d} \right) \quad (5)$$

Qual é o problema que encontramos na prática ?

Qual é o problema que encontramos na prática ?



- Na prática haverá sempre *aliasing* visto a resposta na frequência de um sistema realizável nunca anular-se.
- De forma a minorar este problema devemos ter em conta a banda de transição e a ordem do filtro.

Podemos obter de igual modo uma relação em termos da função do sistema, $H_c(s)$.

Sabemos que a função do sistema será uma função racional, logo podemos fazer a sua expansão em fracções parciais:

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}. \quad (6)$$

Cuja resposta impulsional será:

$$h_c(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (7)$$

A resposta impulsional do sistema discreto obtida pela amostragem de será:

$$h[n] = T_d h_c(nT_d) = \sum_{k=1}^N T_d A_k e^{s_k n T_d} u[n] \quad (8)$$

$$= \sum_{k=1}^N T_d A_k (e^{s_k T_d})^n u[n] \quad (9)$$

A transformada de Z da resposta impulsional do filtro discreto será então:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}} \quad (10)$$

Problema: Projecte um filtro discreto passa-baixo que obedeça as seguintes especificações:

$$\begin{cases} 0.89125 \leq |H(\Omega)| \leq 1, & 0 \leq |\Omega| \leq 0.2\pi \\ |H(\Omega)| \leq 0.17783, & 0.3\pi \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (11)$$

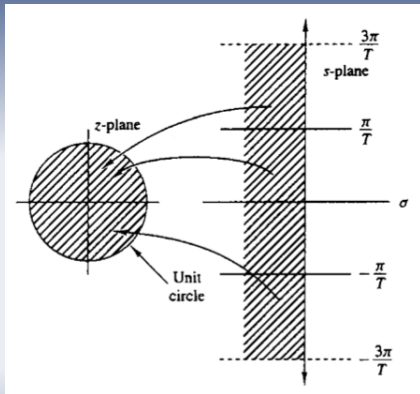
O filtro discreto deve ser projectado a partir de um protótipo de um filtro de *Butterworth* através do método da invariância da resposta impulsional.



Limitações do método da invariância da resposta impulsional

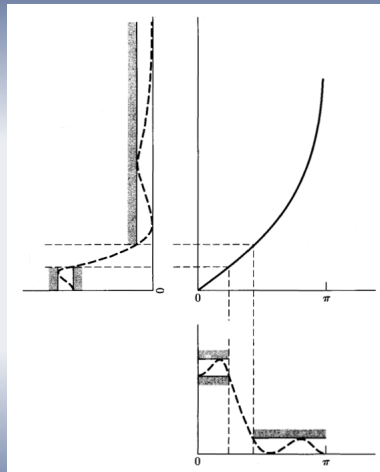
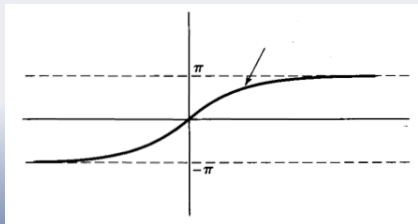
O método da invariância da resposta impulsional apresenta duas grandes limitações:

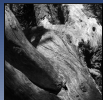
- Visto a resposta na frequência do filtro nunca se anular, haverá sempre *aliasing*.
- Devido a condição de ser de banda limitada não será possível sintetizarmos filtros passa-alto e rejeita banda.



- 1 As limitações anteriores devem-se a que no método da invariância da resposta impulsional cada banda de frequência entre $]-\pi/T_s + k\omega_s, \pi/T_s + k\omega_s]$ é mapeado no círculo unitário no plano z .
- 2 Como poderíamos ultrapassar esta limitação ?

Consideremos a seguinte transformação não linear:





Projecto de filtros através do método da transformação bilinear

Este mapeamento de todo eixo $j\omega$ do plano s no círculo unitário no plano z pode ser obtido pela *transformação bilinear*.

A transformação bilinear mapea os dois planos pela equação:

$$s = \frac{2}{t_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (12)$$

Desta forma, a função de sistema do filtro discreto será dada por:

$$H(z) = H_{prot}(s) \Big|_{s = \frac{2}{t_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} \quad (13)$$

Podemos estudar as propriedades desta transformação, resolvendo a equação em ordem a z :

$$z = \frac{1 + (T_d/2)s}{1 - (T_d/2)s}, \quad (14)$$

mas sabemos que $s = \sigma + j\omega$, logo

$$z = \frac{1 + \sigma(T_d/2) + j\omega T_d/2}{1 - \sigma(T_d/2) - j\omega T_d/2} \quad (15)$$

$$z = \frac{1 + \sigma(T_d/2) + j\omega T_d/2}{1 - \sigma(T_d/2) - j\omega T_d/2}$$

Da análise desta equação podemos concluir que:

- SE $\sigma < 0$, então $|z| < 1$ para qualquer ω .
- Semelhantemente, se $\sigma > 0$, então $|z| > 1$ para todo ω .

Podemos então concluir que filtros que sejam causais e estáveis no plano s serão transformados em filtros discretos causais e estáveis.

Para verificarmos que o eixo- $j\omega$ do plano s será mapeado no círculo unitário, devemos investigar a relação quando $s = j\omega$, vindo:

$$z = \frac{1 + j\omega T_d/2}{1 - j\omega T_d/2}, \quad (16)$$

Desta equação temos que $|z| = 1$ para qualquer valor de ω , portanto todo eixo- $j\omega$ no plano- s é mapeado no círculo unitário no plano- z .

Podemos também obter uma relação entre pontos do eixo- $j\omega$ e o pontos do círculo unitário. Se substituirmos $z = e^{j\Omega}$ na equação original temos que:

$$s = \frac{2}{t_d} \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 + e^{-j\Omega}} \quad (17)$$

$$= \frac{2}{t_d} \frac{2e^{-j\Omega/2}(j \sin(\Omega/2))}{2e^{-j\Omega/2}(j \cos(\Omega/2))} \quad (18)$$

$$= \frac{2j}{t_d} \tan(\Omega/2) \quad (19)$$

$$= \sigma + j\omega \quad (20)$$

Igualando as partes reais e imaginárias das equações 20 e 19 podemos obter uma relação entre as duas frequências.

Igualando as respectivas partes reais e imaginárias das equações 20 e 19 teremos então:

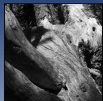
$$\omega = \frac{2}{t_d} \tan(\Omega/2). \quad (21)$$

e que

$$\Omega = 2 \arctg(\omega T_d/2) \quad (22)$$

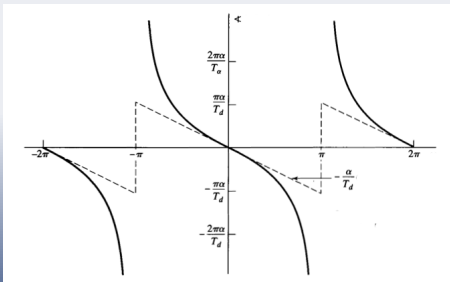
Nota:

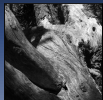
- Devido a natureza não linear da transformação bilinear, as frequências indicadas na especificação do filtro serão deslocadas.
- Este problema pode ser corrigido fazendo o *prewarping* das respectivas frequências.
- No *prewarping*, usamos a equação, $\omega = \frac{2}{t_d} \tan(\Omega/2)$, para transformar a especificação do filtro discreto na especificação do filtro protótipo.



Limitações do método da transformação bilinear

A grande limitação da transformação bilinear é distorcer a fase do filtro protótipo devido a sua natureza não-linear. Isto significa que mesmo que tivéssemos projectado um filtro protótipo com fase linear, o filtro discreto obtido pela transformação teria fase não-linear.





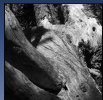
Filtros FIR

Na abordagem de projectos de filtros FIR a aproximação da resposta na frequência desejada é obtida directamente.

Esta abordagem apresenta algumas vantagens:

- A maioria das técnicas de aproximação da resposta assumem fase linear.
- Apresenta alguns métodos de simples implementação.

O método mais simples de projecto de filtros FIR é o método das janelas.



Método das janelas

No método das janelas começamos pela resposta ideal pretendida na frequência:

$$H_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] e^{-j\Omega n} \quad (23)$$

onde $h_d[n]$ é a resposta impulsional do filtro ideal e pode ser expressa como

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega. \quad (24)$$

Na especificação do filtro terei bandas de ganho constante e descontinuidades nas transições para as bandas de rejeição.

- Como resultado estes sistemas terão resposta impulsionais que serão não-causais e de duração infinita.

Na especificação do filtro terei bandas de ganho constante e descontinuidades nas transições para as bandas de rejeição.

- Como resultado estes sistemas terão resposta impulsionalis que serão não-causais e de duração infinita.

A forma mais simples de obter um sistema causal a partir da definição da resposta ideal é:

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{outro } n. \end{cases} \quad (25)$$

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{outro } n. \end{cases}$$

$h[n]$ pode ser rescrito como,

$$h[n] = h_d[n]w[n], \quad (26)$$

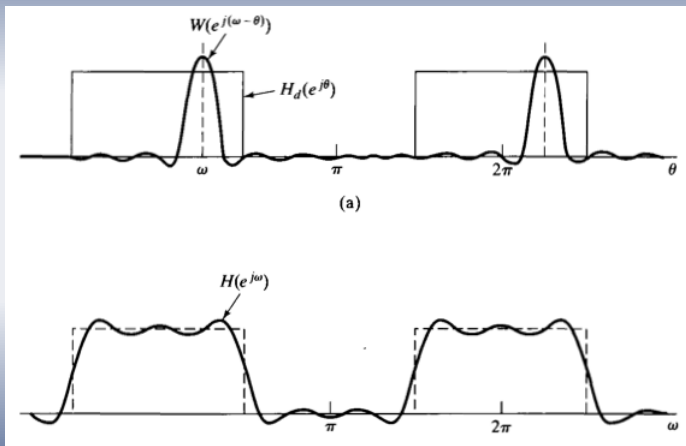
onde $w[n]$ representa a janela rectangular usada para truncar a resposta impulsional do filtro discreto. Portanto,

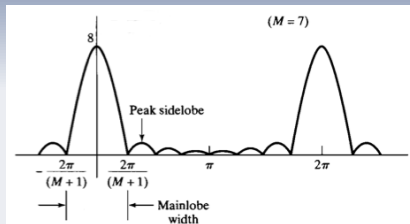
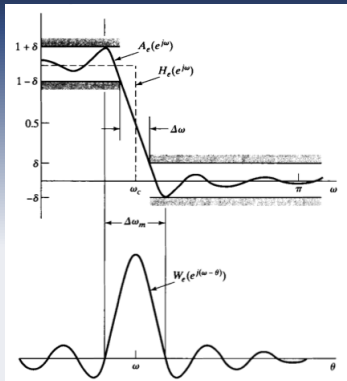
$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{outro } n. \end{cases} \quad (27)$$

O produto da janela pela resposta impulsional permitiu-nos obter um filtro com resposta impulsional finita (como poderia tornar esta causal ?). Mas qual será a consequência desta operação sobre a especificação do filtro ?

A resposta na frequência do novo filtro será:

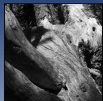
$$H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W(\Omega - \theta) d\theta. \quad (28)$$



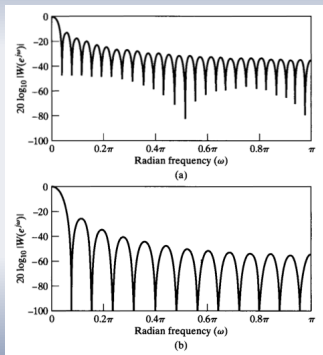


Onde a resposta na frequência da janela rectangular de comprimento $M + 1$ será:

$$W(\Omega) = \sum_{n=0}^M e^{j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j\Omega(M+1)}}{1 - e^{-j\Omega}} = e^{-j\Omega M/2} \frac{\sin[\Omega(M+1)/2]}{\sin(\Omega/2)}. \quad (29)$$



Características espectrais de diferentes janelas

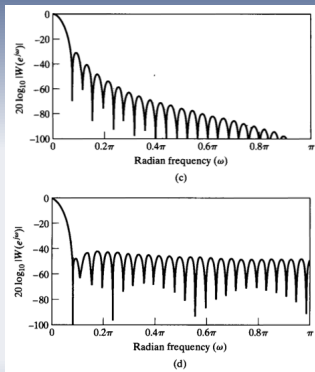


Janela rectangular:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{outro } n \end{cases} \quad (30)$$

Janela Bartlett:

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \leq n \leq M/2, \\ 2 - 2n/M, & M/2 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{outro } n \end{cases} \quad (31)$$



Janela Hanning:

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq \\ 0, & \text{outro } n \end{cases} \quad (32)$$

Janela Hamming:

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq \\ 0, & \text{outro } n \end{cases} \quad (33)$$

Janela Blackman:

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n/M) + 0.08 \cos(4\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{outro } n \end{cases} \quad (34)$$

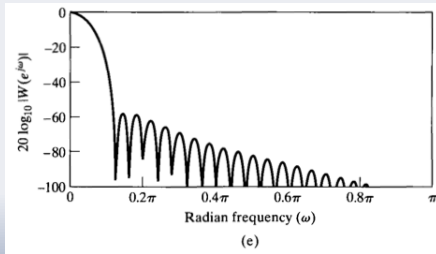
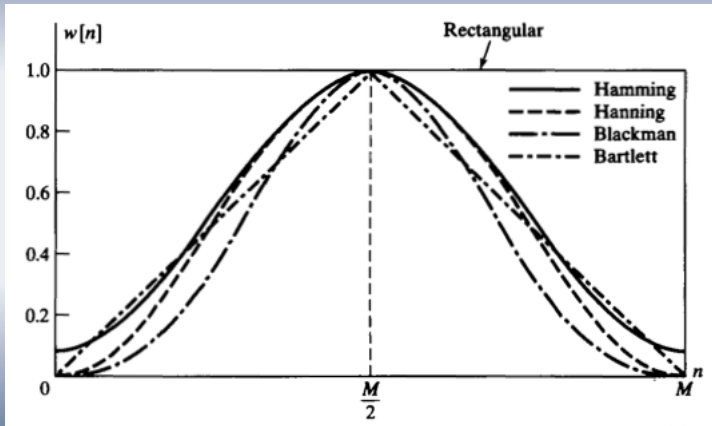
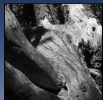




Gráfico comparativo das cinco janelas apresentadas





Janela de Kaiser

A janela de Kaiser é definida pela seguinte equação:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0[\beta\sqrt{(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2})]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{outro } n \end{cases} \quad (35)$$

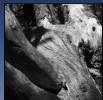
Onde $I_0(.)$ representa a função de Bessel de ordem zero modificada.

$$\alpha = M/2$$

$$A = -20 \log_{10} \delta$$

$$\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_p$$

$$M = \frac{A - 8}{2.285\Delta\Omega}$$



Janela de Kaiser

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7), & A > 50, \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50, \\ 0.0, & A < 21. \end{cases} \quad (36)$$

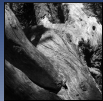
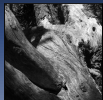


Tabela comparativa das janelas estudadas

TABLE 7.1 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$



Filtro FIR

A resposta impulsional do filtro FIR causal será então dada por:

$$h[n] = w[n] \times \frac{\sin[\Omega_c(n - M/2)]}{\pi(n - M/2)} \quad (37)$$