INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ENGENHARIA BIOMÉDICA – 1º ano /1º Semestre

Exame

27-Jan-2010 **Duração:2h**

Importante:
Não é permitida a consulta de quaisquer livros ou textos de apoio
A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efectuados.

---

1. Determine as seguintes primitivas:

a) $\int \frac{2^x}{4^x+1}dx$ b) $\int (x+5)e^x dx$ c) $\int \frac{x^3-1}{x^3+2x^2+x}dx$

2. Considere a equação $x^2y^2 + xy = 2$ que define implicitamente y como função de x.

a)Determine y'.

b)Prove que a equação da recta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto pertencente ao 1ºQuadrante de abcissa $x = 1$ é dada pela expressão $x = -y + 2$.

c)Considere a região A do plano limitada pela recta obtida na alínea anterior e pelas curvas $(x-1)^2+1 = y$ e $y = x+2$. Represente A geometricamente e calcule a medida da sua área.

d) Determine uma expressão, definida por integrais simples, que lhe permita calcular a medida do comprimento total da região A.

e) Calcule a medida do volume do sólido obtido por rotação de A em torno do eixo do yy.

3. Determine a natureza do seguinte integral impróprio $\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$.

4. Estude a natureza das séries:

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\left((-1)^n\frac{(2n+5)}{n!}+\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5^n}{3^n}$

Cotação

1a	1b	1c	2a	2b	2c	2d	2e	3	4a	4b
2	2	2	1	1	2	1	1	4	2	2

Exame - 27. Jan. 2010
(Eng Biomédica)

1. a) $\displaystyle\int \frac{2^x}{4^x+1}\,dx = \int \frac{2^x}{(2)^{2x}+1}\,dx = \int \frac{2^x}{(2^x)^2+1}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln 2\; 2^x}{(2^x)^2+1}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\,\text{arctg}\,(2^x) + C$

b) $\displaystyle\int (x+5)\,e^x\,dx = \int e^x dx\,(x+5) - \int\left[\int e^x dx\,(x+5)'\right]dx$

$\displaystyle = e^x(x+5) - \int e^x\,dx = e^x(x+5) - e^x + C$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int 1 + \frac{-2x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}\,dx =$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3} \quad\quad\quad -1 & x^3+2x^2+x \\
\underline{-\cancel{x^3}-2x^2-x} & 1 \\
-2x^2-x-1 &
\end{array}$$

$\displaystyle = x + \int \frac{-2x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}\,dx$

$x^3+2x^2+x = x\,(x^2+2x+1) = x\,(x+1)^2$

$\displaystyle \frac{-2x^2-x-1}{x^3+2x^2+x} = \frac{-2x^2-x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)}$

Cálculo das constantes

$-2x^2-x-1 = A\,(x+1)^2 + Bx + C\,x\,(x+1)$

$$\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -1 = A + 0 + 0 \Rightarrow A = -1 \\ -2+1-1 = 0 - B + 0 \Rightarrow B = 2 \\ -2-1-1 = 2A + B + 2C \Rightarrow -4 = -2 + 2 + 2C \Rightarrow C = -2 \end{array} \right.$$

$$\int \frac{-2x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)}\,dx =$$

$$= -\ln|x| + 2\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1} - 2\ln|x+1| + C$$

2. $x^2y^2 + xy = 2$

a) $y' = ?$

$$2xy^2 + x^2(2yy') + y + xy' = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2yy' + xy' = -2xy^2 - y$$

$$\Leftrightarrow y'(2x^2y + x) = -2xy^2 - y$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{-2xy^2 - y}{2x^2y + x}$$

b) Ponto de tangência

$$x = 1 \Rightarrow y^2 + y = 2 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Como o ponto está no 1º Quadrante será então $(1, 1)$

Declive do recta tangente:

$$y'(1) = \frac{-2.1.1 - 1}{2.1.1 + 1} = \frac{-3}{3} = -1$$

Eq da recta

$$y = mx + b$$

$$y = -x + b$$

Cálculo de b (no ponto (1,1))

$$1 = -1 + b \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow y = -x + 2 \Leftrightarrow x = -y + 2$$

c) Exercício do exame : 2 a)

d) Exercício do exame : 2 b)

e) Exercício do exame : 2 c)

3. $$\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}$$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x^2 - 4 > 0\}$$

$$=]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

c.A.

$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$

f é contínua em Df

f é não limitada em $x = 2 \in$ ao intervalo limitado

$\Rightarrow$ Integral impróprio de 2ª espécie

Cálculo auxiliar

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

$x = 2\sec t$

$dx = 2\sec t\,tg\,t\,dt$

$$= \int \frac{1}{2\sec t \sqrt{4\sec^2 t - 4}} \cdot 2\sec t \, tg\, t \, dt =$$

$$= \int \frac{tg\, t}{\sqrt{4(\sec^2 t - 1)}} \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{tg\, t}{\sqrt{tg^2 t}} \, dt = \frac{1}{2} \int 1 \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} t + C$$

$x = 2\sec t \Rightarrow \frac{x}{2} = \sec t$

$\Rightarrow \cos t = \frac{2}{x}$

$\Rightarrow t = \arccos \frac{2}{x}$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} \, dx = \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{x} + C$$

$\varepsilon > 0$

$$G(\varepsilon) = \int_{2+\varepsilon}^{2\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} \, dx = \left[\frac{1}{2} \arccos \frac{2}{x} \right]_{2+\varepsilon}^{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{2+\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} G(\varepsilon) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\pi}{8}$$

o integral é convergente

4 a) exercício do exame 6

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} + \frac{5^n}{3^n}$ série numérica de termos positivos

$\longrightarrow$ série geométrica

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n$ é divergente (a razão é $\frac{5}{3} > 1$) a série dada é Divergente, pois é a soma de 2 séries.