álgebra linear

Maria Raquel Valença, Universidade do Minho 1995

ÍNDICE

0. Introdução **1**

1. Matrizes **3**
- 1.1 Conceitos básicos 3
- 1.2 Operações com matrizes 4
- 1.3 Inversa duma matriz 7
- 1.4 Matrizes simétricas e hermitianas 7
- 1.5 Algumas matrizes especiais 10
- 1.6 Exercícios 11

2. Espaços vectoriais **15**
- 2.1 Definição 16
- 2.2 Bases e dimensão 18
- 2.3 Transformações lineares 20
- 2.4 Exercícios 24

3. Sistemas de equações lineares **28**
- 3.1 Definição 28
- 3.2 Existência e unicidade de solução 30
- 3.3 Sistemas triangulares 36
- 3.4 Método de eliminação de Gauss 37
- 3.5 Cálculo da inversa duma matriz 43
- 3.6 Sistemas indeterminados 44
- 3.7 Sistemas homogéneos. Núcleo duma matriz 47
- 3.8 Exercícios 49

4. Determinantes **53**
- 4.1 Definição 53
- 4.2 Propriedades 55
- 4.3 Cálculos com determinantes 57
- 4.4 Exercícios 59

5. Valores e vectores próprios **62**
- 5.1 Definições básicas 62
- 5.2 Algumas propriedades 65
- 5.3 Matrizes semelhantes 66
- 5.4 Vectores ortogonais 67
- 5.5 Matrizes reais e simétricas e matrizes hermitianas 68
- 5.6 Discos de Gerschgorin 69
- 5.7 Exercícios 70

Apêndice A. O espaço $\mathbb{R}^n$ 74
Apêndice B. Matrizes fraccionadas 76
Apêndice C. Erros de arredondamento 77
Apêndice D. Eficiência computacional 78
Apêndice E. Ferramentas de *software* em Álgebra Linear 79

Bibliografia 86

INTRODUÇÃO

"Where shall I begin, please your Majesty?" he asked.
"Begin at the beginning" the King said, gravely, "and go on till you come to the end: then stop".

Lewis Carroll, Alice's Adventures in Wonderland.

Começaremos com um estudo elementar sobre matrizes. Como iremos apreciar matrizes constituem um tema central neste curso de álgebra linear.

Salientamos que matrizes são a ferramenta utilizada para uma notação simples e muito conveniente para representar sistemas de equações.

Consideremos, por exemplo, o sistema de três equações a três incógnitas

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ -x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Podemos representar os coeficientes das incógnitas num quadro com três linhas começando por escrever na primeira linha os coeficientes das incógnitas na primeira equação, na segunda linha os coeficientes na segunda equação (pela mesma ordem) e na terceira linha os coeficientes na terceira equação do modo que em seguida ilustramos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Este quadro de números dispostos em três linhas e três colunas é uma matriz.

Podemos também apresentar os termos independentes do sistema numa matriz com uma coluna e três linhas

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz seguinte contem toda a informação sobre os dados do sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veremos mais tarde as vantagens da notação matricial na descrição algorítmica dos métodos de resolução de sistemas.

Mas esta não é a única aplicação importante das matrizes. Outros problemas numéricos envolvendo matrizes ocorrem frequentemente em modelos matemáticos de fenómenos físicos, de engenharia, biologia, economia.

O objectivo deste texto é apresentar uma introdução à Álgebra Linear, a nível elementar, com enfâse nos temas relacionados com os dois mais importantes problemas numéricos de álgebra linear

- resolução de sistemas de equações lineares
- cálculo de valores e vectores próprios

A resolução dum sistema de equações lineares é o problema numérico mais comum em todo o cálculo científico. Ocorre "directamente" ou como subproblema na resolução numérica de equações diferenciais, dum sistema de equações não lineares, em aproximação, ... A dimensão do problema pode variar desde o sistema de duas equações a duas incógnitas que é facilmente resolvido à mão usando de modo quase *ad-hoc* princípios de equivalência das equações, até sistemas de milhares de equações e incógnitas cuja resolução só pode ser feita num computador com programas baseados em algoritmos de alguma complexidade.

O outro importante problema numérico em álgebra linear é o cálculo de valores e vectores próprios. Ocorre geralmente na modelação de sistemas dinâmicos. Neste caso os problemas diferem não só na sua dimensão como na informação que se pretende conhecer a respeito da solução.

O texto contem cinco capítulos com os títulos seguintes

1. Matrizes
2. Espaços vectoriais
3. Sistemas de equações lineares
4. Determinantes
5. Vectores e valores próprios

O conceito de espaço vectorial e suas propriedades são necessários para estabelecer condições de existência e unicidade de solução dum sistema de equações lineares e em aspectos teóricos do problema dos valores e vectores próprios duma matriz. Conheceremos também exemplos variados e importantes de espaços vectoriais.

O tema dos determinantes é aqui incluído para fazer uma ponte entre sistemas de equações lineares e o problema dos valores e vectores próprios duma matriz. Serão usados para estabelecer alguns resultados teóricos a respeito destes dois problemas. As aplicações práticas dos determinantes são apenas úteis, em ambos os casos, com problemas de muito pequena dimensão.

O material seleccionado para este curso tem em vista o facto de se tratar da única disciplina de álgebra linear dos Cursos a que se dirige - Engenharia, Física e Química - e é limitado pela sua duração, inferior a um semestre [1].

Quase todas as referências incluídas na Bibliografia deste texto são obras de álgebra linear aplicada. Umas são referências obrigatórias para o estudo de métodos numéricos para a resolução dos problemas mais comuns em álgebra linear. Outras incluem exemplos simples de problemas da engenharia, da física, da química e da economia que 'conduzem' a problemas matemáticos desta área.

[1] Na disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica o resto do semestre é dedicado ao ensino de geometria analítica.

47

Capítulo 1

MATRIZES

"Supposto isto vamos ao nosso cazo".

Joze Anastacio da Cunha, Ensaio sobre As Minas.

1.1 Conceitos básicos

Usaremos letras maiúsculas para denotar matrizes. Os elementos que constituem a matriz serão representados pela letra minúscula correspondente, com dois índices, o primeiro especificando a linha da matriz em que o elemento se encontra, o segundo a coluna. Assim a_{ij} designará o elemento da matriz A da linha i, coluna j. Uma matriz A, de ordem $m \times n$ [1], poderá ser representada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Em notação abreviada ao escrever $A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$, referimos uma matriz de ordem $m \times n$, de elementos a_{ij}, $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$.

Definição 1.1 *Uma matriz de ordem $m \times n$ diz-se real se todos os seus elementos são números reais. Diz-se complexa se os seus elementos são números complexos.*

Ao longo do curso faremos referência apenas a matrizes reais ou complexas. O conjunto das matrizes reais de ordem $m \times n$ será designado por $\mathbb{R}^{m\times n}$ e o conjunto das matrizes complexas de ordem $m \times n$ por $C^{m\times n}$.

Definição 1.2 *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Se $m \neq n$, A diz-se rectangular. Se $m = n$, A diz-se quadrada* [2].

Definição 1.3 *Uma matriz de ordem $n \times 1$ tem a forma*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},$$

[1] Lê-se "de ordem m por n"

[2] Ao referir uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ é usual dizer-se apenas matriz de ordem n.

e chama-se matriz coluna. Uma matriz de ordem $1 \times n$ tem a forma

$$(a_{11} \quad \dots \quad a_{1n}),$$

e chama-se matriz linha.

Matrizes linha ou matrizes coluna são frequentemente representadas por letras minúsculas e os seus elementos apenas com um índice. Por exemplo,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \qquad y = (y_1 \quad \dots \quad y_n).$$

Definição 1.4 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n. Diz-se que os elementos a_{ij} tal que $i = j$ se dispõem na diagonal de A.*

Definição 1.5 *Uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero chama-se matriz nula. Representaremos, em geral, a matriz nula de ordem $m \times n$ por $O_{m\times n}$ ou simplesmente O* [3]*.*

Definição 1.6 *Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes de ordem $m \times n$. Diz-se que A é igual a B e escreve-se $A = B$, se e só se,*

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

1.2 Operações com matrizes

Definição 1.7 *Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes de ordem $m \times n$. A soma de A e B é uma matriz $C = (c_{ij})$ cujos elementos são dados por*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n),$$

e escreve-se $C = A + B$.

Note-se que a adição de matrizes só é definida para matrizes com a mesma ordem.

Exemplo 1.1. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ então,

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+(-1) & -1+0 \\ 3+0 & 0+(-2) & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Algoritmo 1.1. Adição de matrizes

Cálculo de $C = A + B$ onde $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes de ordem $m \times n$.

para j **de** 1 **até** n **fazer**

  para i **de** 1 **até** m **fazer**

    $c_{ij} \leftarrow a_{ij} + b_{ij}$

[3] No caso da ordem da matriz se inferir do contexto.

Teorema 1.1 *Sejam A, B e C matrizes de ordem $m \times n$. Então,*
i) $A + B = B + A$,
ii)$(A + B) + C = A + (B + C)$,
iii) Se O designa a matriz nula de ordem $m \times n$, $A + O = A$,
iv) Se $-A = (-a_{ij})$, $A + (-A) = O$.

Demonstração: Fica como exercício.□

Definição 1.8 *Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes de ordem $m \times n$. $A - B$ quer significar $A + (-B)$ sendo $-B = (-b_{ij})$.*

Definição 1.9 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$ e α um número. O produto de α por A é a matriz $C = (c_{ij})$ cujos elementos são dados por*

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n),$$

e escreve-se $C = \alpha A$.

Exemplo 1.2. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ então $4A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Algoritmo 1.2. Multiplicação de uma matriz por um número

Cálculo de $C = \alpha A$ dada a matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ e o número α.

para j **de** 1 **até** n **fazer**

  para i **de** 1 **até** m **fazer**

    $c_{ij} \leftarrow \alpha a_{ij}$

Teorema 1.2 *Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ e α e β números. Então,*
i) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,
ii)$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
iii)$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
iv) $1A = A$.

Demonstração: Fica como exercício.□

Definição 1.10 *Seja A uma matriz de ordem $m \times l$ e B uma matriz de ordem $l \times n$. O produto de A e B é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$ cujos elementos são dados por*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}, \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n),$$

e escreve-se $C = AB$.

Exemplo 1.3. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ então,

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 17 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$ [4].

Algoritmo 1.3. Multiplicação de matrizes

Cálculo de $C = AB$ sendo $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times l$ e $B = (b_{ij})$ de ordem $l \times n$.

para i **de** 1 **até** m **fazer**

  para j **de** 1 **até** n **fazer**

    $c_{ij} \leftarrow \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$

Teorema 1.3 *Sejam A, B, e C matrizes e α um número. Então, se todos os produtos a seguir indicados forem definidos,*
i) $(AB)C = A(BC)$,
ii) $A(B + C) = AB + AC$,
iii) $(A + B)C = AC + BC$,
iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Demonstração: Fica como exercício. □

A multiplicação de matrizes não é comutativa. Com efeito, se A é de ordem $m \times l$ e B de ordem $l \times n$ o produto AB é definido. Se assim acontecer AB será $m \times n$. Se $m = n$ então BA é definido mas a matriz é de ordem $l \times l$. No entanto, mesmo quando $m = l = n$, pode ter-se $AB \neq BA$.

Exemplo 1.4. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem-se $AB = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Quando se tem $AB = BA$, as matrizes A e B dizem-se comutáveis.

Definição 1.11 *A matriz quadrada de ordem n cujos elementos da diagonal são todos iguais a um e os elementos fora da diagonal todos iguais a zero chama-se matriz identidade de ordem n e representa-se por I_n.*

Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, então $AI_n = A$ e $I_m A = A$. Se $m = n$, $I_n A = AI_n = A$.

---

[4] No cálculo, por exemplo, do elemento da posição $(2,3)$ da matriz AB 'intervêm' a linha 2 de A e a coluna 3 de B,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

sendo $-1 \times 3 + 1 \times 7 = 4$.

1.3 Inversa duma matriz

Definição 1.12 *Seja A uma matriz de ordem n. Se existir uma matriz X, de ordem n, tal que*

$$XA = AX = I_n, \tag{1.1}$$

diz-se que A é invertível, regular, ou não singular. Uma matriz X que verifica (1.1) *chama-se inversa de A.*

Se A não tem inversa diz-se singular ou não invertível.

Exemplo 1.5. A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ é invertível pois existe $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ tal que $XA = AX = I_2$ como se pode verificar.

Se A for invertível a sua inversa é única. Com efeito, se X e Y fossem inversas de A teríamos, por definição,

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n.$$

Mas,

$$YAX = Y(AX) = YI_n = Y$$
$$YAX = (YA)X = I_nX = X,$$

logo $X = Y$.

Quando existe, a matriz inversa de A é representada por A^{-1}.

Teorema 1.4 *Sejam A e B matrizes de ordem n, invertíveis. Então,*

i)A^{-1} é invertível sendo $(A^{-1})^{-1} = A$.

ii)AB é invertível sendo $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração: Fica como exercício. □

Mais tarde serão enunciadas condições para que uma matriz quadrada seja invertível e estudados métodos numéricos para calcular a inversa duma matriz regular.

1.4 Matrizes simétricas e hermitianas

Definição 1.13 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$. A matriz $B = (b_{ij})$, de ordem $n \times m$, cujos elementos são dados por*

$$b_{ij} = a_{ji}, \qquad (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m),$$

chama-se transposta de A e escreve-se $B = A^T$.

Exemplo 1.6 Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ então $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Teorema 1.5 *Sejam A e B matrizes e α um número. Se as operações indicadas forem definidas então,*

i)$(A^T)^T = A$,
ii)$(A+B)^T = A^T + B^T$,
iii)$(\alpha A)^T = \alpha A^T$,
iv)$(AB)^T = B^T A^T$,
v)$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Demonstração: Fica como exercício. □

Definição 1.14 *Seja A uma matriz quadrada. A diz-se simétrica se e só se $A = A^T$.*

Exemplo 1.7. A matriz $H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$ é simétrica.

Se A e B são matrizes simétricas, em geral, o produto AB não é uma matriz simétrica. Com efeito, se $A = A^T$ e $B = B^T$ segue-se $(AB)^T = B^T A^T = BA$.

E ainda é fácil verificar que se A é simétrica, não singular, A^{-1} é simétrica pois $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$.

Definição 1.15 *Seja A uma matriz real de ordem n. A diz-se ortogonal se e só se*

$$A^T A = A A^T = I_n.$$

Segue-se que se A é ortogonal, então A é invertível e $A^{-1} = A^T$.

Exemplo 1.8. A matriz $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ é ortogonal como se verifica facilmente.

Definição 1.16 *Seja A uma matriz complexa de ordem $m \times n$. A conjugada de A é a matriz C cujos elementos são dados por*

$$c_{ij} = \overline{a}_{ij}, \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n),$$

onde $\overline{a}_{ij}$ denota o conjugado de a_{ij}, e escreve-se $C = \overline{A}$.

Exemplo 1.9. Se $A = \begin{pmatrix} 3/2 & i & 0 \\ -i/2 & 5 & i/2 \\ 1+i & 0 & 5i \end{pmatrix}$ então $\overline{A} = \begin{pmatrix} 3/2 & -i & 0 \\ i/2 & 5 & -i/2 \\ 1-i & 0 & -5i \end{pmatrix}$.

Definição 1.17 *Seja A uma matriz complexa de ordem $m \times n$. A matriz C cujos elementos são dados por*

$$c_{ij} = \overline{a}_{ji}, \qquad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m),$$

chama-se transconjugada de A e escreve-se $C = A^H$.

Exemplo 1.10. Se $A = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ 3 & 2i \\ 5-i & 0 \end{pmatrix}$ então $A^H = \begin{pmatrix} 1-i & 3 & 5+i \\ i & -2i & 0 \end{pmatrix}$.

Note-se que $A^H = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$.

Teorema 1.6 *Sejam A e B matrizes complexas e α um número complexo. Se as operações indicadas forem definidas então*
i) $(A^H)^H = A$,
ii) $(A+B)^H = A^H + B^H$,
iii) $(\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$,
iv) $(AB)^H = B^H A^H$,
v) $(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$.

Demonstração: Fica como exercício. □

Definição 1.18 *Seja A uma matriz complexa de ordem n. A é hermitiana se e só se $A = A^H$.*

Exemplo 1.11. A matriz $\begin{pmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$ é hermitiana.

Definição 1.19 *Seja A uma matriz complexa de ordem n. A é unitária se e só se*

$$A^H A = AA^H = I_n.$$

Donde, se A é unitária então A é invertível e $A^{-1} = A^H$.

Exemplo 1.12. A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^i/\sqrt{2} & 0 & e^{2i}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -e^{-2i}/\sqrt{2} & 0 & e^{-i}/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ é unitária.

(Recorde que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\mathrm{sen}\theta$ e por isso $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \overline{e^{i\theta}}$).

1.5 Algumas matrizes especiais

Definição 1.20 *Uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem n é uma matriz diagonal se e só se*

$$i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Definição 1.21 *Uma matriz $A = (a_{ij})$, de ordem n, diz-se triangular superior (inferior) se*

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0, \qquad (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0).$$

Se A é triangular superior (inferior) e todos os elementos da diagonal são nulos, A diz-se estritamente triangular superior (inferior).

Exemplo 1.14. A matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ é diagonal.

A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1.5 & 1 \end{pmatrix}$ é triangular inferior.

A matriz $\begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ é triangular superior.

Não é difícil verificar que se $A = (a_{ij})$ é uma matriz diagonal (triangular) de ordem n, verificando $a_{ii} \neq 0$, $(i = 1, \ldots, n)$, então A é invertível e A^{-1} é diagonal (triangular).

Definição 1.22 *Uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem n é uma matriz banda, de largura de banda $2k+1$ se*

$$|i - j| > k \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Se $k = 1$ a matriz banda diz-se tridiagonal.

Exemplo 1.15. A matriz $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$ é tridiagonal.

Definição 1.23 *Uma matriz diz-se densa se a maior parte dos seus elementos são diferentes de zero.*

Definição 1.24 *Uma matriz diz-se dispersa se uma grande percentagem dos seus elementos são nulos.*

Muitas aplicações conduzem a matrizes dispersas cujos elementos não nulos se dispõem segundo um determinado "padrão". O caso mais comum é o das matrizes banda.

Exemplo 1.16. A seguinte é uma matriz dispersa,

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

sendo possível definir uma "regra" que dá os valores e posições dos elementos não nulos:

$$a_{ij} = \begin{cases} 4, & \text{se } i = j; \\ -1, & \text{se } |i-j| = 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 1.25 *Uma matriz $A = (a_{ij})$, de ordem n diz-se de diagonal dominante se*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Diz-se estritamente diagonal dominante se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

A matriz do exemplo anterior é estritamente diagonal dominante.

1.6 Exercícios

1. Dê exemplo de uma matriz
   (a) quadrada de ordem 3.
   (b) rectangular de ordem 2×4.
   (c) rectangular de ordem 5×3.
   (d) linha de ordem 1×6.
   (e) coluna de ordem 2×1.

2. Em cada caso escreva por extenso a matriz quadrada de ordem 3 cujos elementos são dados por
   (a) $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$
   (b) $a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

3. Quais os elementos que constituem a diagonal de cada uma das seguintes matrizes?
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Determine a, b e c de modo que as matrizes

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi & 0 \\ 0 & 0.8 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & b & 0 \\ a & 0.8 & c \end{pmatrix}$$

sejam iguais.

5. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Calcule:

(a) $A + D$.

(b) $3u - 2v$.

(c) BC.

(d) CA.

(e) AF.

(f) CF.

(g) AD e DA.
(Obs.: Note que D comuta com A.)

(h) EA e AE.
(Obs.: Observe que E se obtem de I_3 trocando entre si a segunda e terceira linhas (ou colunas). Note o "efeito" sobre A que corresponde à multiplicação à esquerda (e à direita) por E.)

Daqui até aqui

(i) $B - \lambda I_2$ e $A - \lambda I_3$.
(Obs.: λ representa um número. Compare B e $B - \lambda I_2$. Compare A e $A - \lambda I_3$.)

(j) Bu.
(Obs.: Note que u é solução do sistema $Bu = v$.)

(k) Cx.
(Obs.: Note que se tem $Cx = 0$ sem que $C = O$ ou $x = 0$.)

6. Simplifique a expressão seguinte onde A, B e C representam matrizes quadradas com a mesma ordem, $AB + \cancel{AC} + \cancel{BC} - BA - \cancel{AC} - \cancel{BC} = AB - BA$.

$$A(B + C) + B(C - A) - (A + B)C.$$

7. Desenvolva a expressão $(A + B)^3$ no caso de:

$(B+C)A + B(C-A) - (A+B)C$

$\cancel{BA} + CA + BC - \cancel{BA} - AC - \cancel{BC}$

$$(A+B)(A+B)(A+B)$$

$$A(A+B)+B(A+B)$$

$$(AA+AB+BA+BB)(A+B) \longrightarrow$$ desenvolver

(a) A e B serem matrizes de ordem n quaisquer.

(b) A e B serem comutáveis.

8. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ determine $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tal que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

9. (a) Construa matrizes A e B não nulas, por exemplo de ordem 2, tal que $AB = O$.

   (b) Dê exemplo de matrizes não nulas A, X e Y tais que

$$AX = AY \quad \text{mas} \quad X \neq Y.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Dê exemplos de uma matriz simétrica de ordem 2 e de uma matriz simétrica de ordem 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

11. Calcule a transposta da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

12. A respeito das matrizes apresentadas no exercício 5 calcule:

   (a) AC^T.

   (b) C^TB.

   (c) $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}$.

   (d) $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$.

   (e) $\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T$.

   (f) $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}$.

   (g) $\boldsymbol{u}^TB\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$.

   (*Obs.: Note que $\boldsymbol{u}^TB\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$ são números.*)

13. Seja A uma matriz simétrica. Prove que P^TAP é simétrica.

14. Verifique que a inversa de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ é $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

15. Use a definição para calcular a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\quad AX = XA = I_2$

   (b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

   (c) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Dada a matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   (a) Use a definição para calcular a inversa verificando que a matriz M é invertível se e só se $ad - bc \neq 0$.

(b) Conclua que:

i. Se a matriz M tem uma fila de zeros (linha ou coluna) então não é invertível.

ii. Se a matriz M tem uma fila que é múltipla de outra então não é invertível.

(c) Dê exemplo de uma matriz não invertível.

17. Sejam A e B matrizes invertíveis.

(a) Mostre que $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}$.

(b) Se além disso $A + B$ é invertível verifique que $A^{-1} + B^{-1}$ é invertível sendo

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A.$$

18. Verifique que as matrizes seguintes são ortogonais.

(a) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. $\quad A \cdot A^T = A^T A = 1$

(b) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

19. Seja x uma matriz coluna de ordem $n \times 1$, verificando $x^T x = 1$. Seja

$$H_n = I_n - 2xx^T.$$

(a) Prove que H_n é simétrica e ortogonal.
(*Obs.: Matrizes com a forma de H_n são chamadas matrizes elementares hermitianas.*)

(b) Com

$$x = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

calcule H_3.

20. Prove que o produto de duas matrizes ortogonais é ainda uma matriz ortogonal.

21. Justifique que a inversa duma matriz ortogonal é uma matriz ortogonal.

22. Dê exemplo de uma matriz diagonal de ordem 5.

23. Dê exemplos de matrizes triangulares inferiores de ordem 2 e de orden 3.

24. Dê exemplos de matrizes triangulares superiores de ordem 2 e de ordem 3.

25. (a) Prove que a matriz diagonal de ordem 2

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}$$

é invertível se e só se $d_{11} \neq 0$ e $d_{22} \neq 0$, tendo-se então

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} \end{pmatrix}.$$

(b) Generalize o resultado da alínea anterior.

26. Prove que uma matriz triangular $A = (a_{ij})$ de ordem n é invertível se e só se os elementos da diagonal são todos diferentes de zero.

Capítulo 2

ESPAÇOS VECTORIAIS

"I keep six honest serving-men
(They taught me all I knew):
Their names are What and Why and When
And How and Where and Who".

Rudyard Kipling.

O conceito de espaço vectorial é fundamental para se desenvolver a teoria sobre condições de existência e unicidade de solução dum sistema de equações lineares.

Consideraremos o conjunto, que representaremos por $\mathbb{R}^n$, cujos elementos são sequências ordenadas de n números reais que denotaremos na forma

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

e os quais designaremos por vectores. Este conjunto algebrizado com uma adição e uma multiplicação por um número real constitui um espaço vectorial. O estudo deste caso particular de espaço vectorial fornecerá as ferramentas necessárias para responder às questões sobre a existência e unicidade de solução dum sistema de equações lineares e as características do conjunto das soluções.

A apresentação aqui feita sobre espaços vectoriais é orientada, em grande parte, na perspectiva de dar enfâse à aplicação ao problema de resolução dum sistema de equações lineares.

Outros exemplos de espaços vectoriais são o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ (m e n fixos) que começámos a estudar no capítulo anterior; o conjunto dos vectores dum plano e o conjunto dos vectores do espaço ordinário ambos tão importantes na física e que podem dar uma visualização geométrica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$; o conjunto dos polinómios de coeficientes reais e o conjunto[1] das funções reais e contínuas num intervalo de $\mathbb{R}$ fundamentais em muitas aplicações na engenharia e na física.

[1] Estando definidas em todos estes conjuntos duas operações, uma adição e uma multiplicação por um número real.

Assim, para além da aplicação particular que já referimos o estudo que aqui se faz sobre espaços vectoriais contribui para conhecer melhor as propriedades de conjuntos de entidades matemáticas tão diversas e tão importantes como as acabadas de mencionar.

2.1 Definição

Observem-se as propriedades do conjunto $\mathbb{R}^n$ apresentadas no teorema 1 do Apêndice A, as propriedades do conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ das matrizes reais de ordem $m \times n$ (m e n fixos) apresentadas nos teoremas 1.1 e 1.2. Porque cada um destes conjuntos algebrizados com uma adição e uma multiplicação por um número real satisfazem tal lista de propriedades são chamados espaços vectoriais reais.

Definição 2.1 *Seja V um conjunto. Diz-se que V é um espaço vectorial*[2] *real*[3] *se estão definidas duas operações. Uma chamada* adição, *e representada por $+$, que associa a cada par de elementos de V, x e y, o elemento $x+y \in V$. Outra chamada* multiplicação por um escalar *que associa a cada número real α e cada elemento x de V o elemento αx de V. Estas operações devem satisfazer as seguintes propriedades:*

i $x + y = y + x,\ \forall x, y \in V$.

ii $x + (y + z) = (x + y) + z,\ \forall x, y, z \in V$.

iii *Existe um único elemento, representado por 0, em V, tal que $x + 0 = 0 + x = x$ para todo $x \in V$.*

iv *Para todo o $x \in V$ existe um único elemento em V, representado por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.*

v $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,\ \forall \alpha \in I\!R,\ \forall x, y \in V$.

vi $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,\ \forall \alpha, \beta \in I\!R,\ \forall x \in V$.

vii $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),\ \forall \alpha, \beta \in I\!R,\ \forall x \in V$.

viii $1x = x,\ \forall x \in V$.

Os elementos dum espaço vectorial são chamados vectores.

Exemplo 2.1. O conjunto $\mathbb{R}^n$ (ver Apêndice A) algebrizado com as operações de adição e multiplicação por um escalar real é um espaço vectorial real.

Definição 2.2 *Um subconjunto não vazio U dum espaço vectorial real é chamado um subespaço vectorial se*

i $x + y \in U,\ \forall x, y \in U$.

ii $\alpha x \in U,\ \forall x \in U, \forall \alpha \in I\!R$.

[2] Ou espaço linear

[3] De modo similar se define espaço vectorial complexo.

$x \oplus (-1) \otimes x =$

$0 \otimes x = (-1+1) \otimes x = -1 \otimes x \oplus 1 \otimes x$

$x = (1+0) \otimes x = 1 \otimes x + 0 \otimes x =$

$= x + \underbrace{0 \otimes x}$

$0 \otimes x$ elemento zero.

elemento simétrico.

$x \oplus (-1) \otimes x = 0 \otimes x$

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ espaço vectorial subespaço de $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ subespaço de $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

Exemplo 2.2. O conjunto das matrizes diagonais (reais) de ordem n é um subespaço de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Consideremos o espaço $\mathbb{R}^{2\times 2}$ das matrizes reais de ordem 2. Dadas as matrizes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

note-se que se tem

$$A = 5X_1 + 6X_2 + 7X_3 + 8X_4.$$

Diz-se, por isso, que A é combinação linear de X_1, X_2, X_3, X_4.

Definição 2.3 *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vectores dum espaço vectorial real V. Diz-se que $x \in V$ é combinação linear dos vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3. O vector $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ é combinação linear dos vectores $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pois

$$x = 4e_1 + (-3)e_2.$$

É também combinação linear dos vectores $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pois

$$x = \frac{1}{2}f_1 + \frac{7}{2}f_2.$$

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são vectores dum espaço vectorial real V então o conjunto U formado por todas as combinações lineares destes vectores é um subespaço de V como se pode verificar facilmente.

U é não vazio pois $0 \in U$ uma vez que $0 = 0x_1 + \ldots + 0x_n$. Se $u, v \in U$, isto é,

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

e

$$v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n,$$

então

$$\begin{aligned} u + v &= (\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) + (\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)x_n. \end{aligned}$$

Logo $u + v$ é combinação linear de $x_1, \ldots, x_n$ e consequentemente pertence a U.

Também
$$\begin{aligned} \alpha u &= \alpha(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \\ &= (\alpha\alpha_1)x_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n)x_n, \end{aligned}$$
pertence a U.

Diz-se que U é o *espaço gerado* pelos vectores $x_1, \ldots, x_n$ de V.

Exemplo 2.4. O espaço gerado pelas matrizes
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
é o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ formado pelas matrizes diagonais de ordem 2.

2.2 Bases e dimensão

Definição 2.4 *Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dum espaço vectorial real V são linearmente independentes se*
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0,$$
se verifica apenas com $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Exemplo 2.5. As matrizes X_1, X_2, X_3, X_4 de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ há pouco referidas são linearmente independentes. Com efeito, temos a combinação linear nula
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
isto é,
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
ou,
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
O que implica $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0$.

Exemplo 2.6. Os vectores $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ não são linearmente independentes.

Escrevendo
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
isto é,
$$\begin{aligned} \alpha_1 \quad + 2\alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$
concluímos que, por exemplo, se tem
$$-2f_1 - 3f_2 + f_3 = 0.$$

Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dum espaço vectorial V se não são linearmente independentes dizem-se linearmente dependentes.

Os vectores f_1, f_2, f_3 do exemplo 2.6 são linearmente dependentes.

Teorema 2.1 *Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dum espaço vectorial V são linearmente dependentes se e só se um dos vectores pode ser escrito como combinação linear dos restantes.*

Demonstração: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linearmente dependentes. Então tem-se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0,$$

sendo pelo menos um dos coeficientes diferente de zero. Sem perda de generalidade suponhamos $\alpha_1 \neq 0$. Então podemos escrever

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n.$$

Donde x_1 é combinação linear dos restantes vectores.

Suponhamos agora que dados os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, um deles, por exemplo x_1, é combinação linear dos restantes,

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Vem então

$$x_1 - \alpha_2 x_2 - \ldots - \alpha_n x_n = 0.$$

Tem-se assim uma combinação linear nula com pelo menos um dos coeficientes (o de x_1) diferente de zero. □

Exemplo 2.7. Na sequência do exemplo 2.6 note-se que se tem

$$f_3 = 2f_1 + 3f_2.$$

No espaço $\mathbb{R}^{2\times 2}$ como já vimos as matrizes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

são linearmente independentes. Mas além disso qualquer matriz real de segunda ordem

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

pode ser escrita como combinação linear de X_1, X_2, X_3, X_4,

$$A = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{21}X_3 + a_{22}X_4.$$

Diz-se que X_1, X_2, X_3, X_4, formam uma base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Definição 2.5 *Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dum espaço vectorial V formam uma base de V se são linearmente independentes e geram V.*

Exemplo 2.8. Os vectores $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

Se um espaço vectorial tem uma base com um número finito de elementos então todas as bases de V tem o mesmo número de elementos. A esse número chama-se *dimensão* do espaço V e representa-se por $dim(V)$[4].

Exemplo 2.9. O espaço $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tem dimensão 4.
O espaço $\mathbb{R}^2$ tem dimensão 2.

Prova-se que num espaço vectorial de dimensão n quaisquer n vectores linearmente independentes formam uma base desse espaço. E também quaisquer $n+1$ vectores são sempre linearmente dependentes.

2.3 Transformações lineares

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Consideremos a aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ que associa a cada vector $x \in \mathbb{R}^n$ o vector $Ax \in \mathbb{R}^m$,

$$x \to Ax.$$

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$x \mapsto Ax$

$m \times n \quad n \times 1$

$m \times 1$

Observe-se que, se $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$A(x+y) = Ax + Ay,$$

e se $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A(\alpha x) = \alpha A x.$$

Fica assim definida uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vectoriais reais. Uma aplicação

$$T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

$T(\alpha \otimes x \oplus \beta \otimes y) = $
$= \alpha \otimes' T(x) \oplus' \beta \otimes' T(y)$

é uma transformação linear de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ se satisfaz

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{V}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}.$$

Consideremos a aplicação $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad P(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ex

P é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ como se verifica facilmente. Com efeito, sejam $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vectores de $\mathbb{R}^2$. Então, se $\alpha, \beta \in R$,

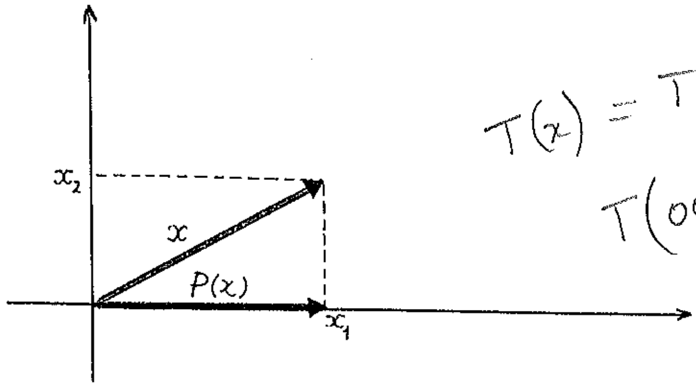
$$P(\alpha x + \beta y) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha P(x) + \beta P(y).$$

Para interpretar geometricamente esta transformação observe-se a figura seguinte.

---

[4] O espaço vectorial $V = \{0\}$ tem, por convenção, dimensão finita igual a zero. Um espaço vectorial V diz-se de dimensão infinita se para todo o inteiro positivo n se pode encontrar em V um conjunto de n vectores linearmente independentes. Um exemplo de tal espaço é dado no exercício 1.c (ver exercício 14) no fim do capítulo.

427



$T(x) = T(x \oplus 0) = T(x) + T(0)$

$T(0 \otimes x) = 0T(x) = 0$

Dado um vector x do plano, $P(x)$ é o vector obtido por projecção de x no eixo das abcissas $\vec{OX}$.

Note-se que uma transformação linear de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ transforma o vector nulo de $\mathcal{V}$ no vector nulo de $\mathcal{W}$. Pois

$$T(0) = T(0x) = 0.T(x) = 0.$$

Referimos atrás que dada uma matriz A de ordem $m \times n$, a aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ que associa a cada vector x de $\mathbb{R}^n$ o vector Ax de $\mathbb{R}^m$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. dar como exemplo

Por outro lado observe-se que, relativamente ao exemplo dado da transformação $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se tem

$$P(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_P x.$$

Temos então a transformação linear P "representada" por uma matriz,

$$P(x) = A_P x.$$

Vamos de seguida "identificar" matrizes como transformações lineares entre espaços vectoriais. Começaremos por mostrar que toda a transformação linear entre espaços vectoriais pode ser representada por uma matriz.

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vectoriais reais. Sejam $e_1, e_2, \ldots, e_n$ e $f_1, f_2, \ldots, f_m$ bases de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ respectivamente. Seja $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma transformação linear.

Se $x \in \mathcal{V}$ então

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots \alpha_n e_n.$$

Assim,

$$T(x) = \alpha_1 T(e_1) + \alpha_2 T(e_2) + \ldots + \alpha_n T(e_n),$$

onde $T(e_1), \ldots, T(e_n) \in \mathcal{W}$. Cada $T(e_i), (i = 1, 2, \ldots, n)$ pode escrever-se como combinação linear dos vectores da base referida de $\mathcal{W}$,

$$\begin{cases} T(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \ldots + a_{m1} f_m \\ \ldots \\ T(e_n) = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \ldots + a_{mn} f_m \end{cases}$$

Vem então

$$T(x) \;=\; \alpha_1 \sum_{i=1}^{m} a_{i1} f_i + \ldots + \alpha_n \sum_{i=1}^{m} a_{in} f_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_j a_{ij}\boldsymbol{f}_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j)\boldsymbol{f}_i.
\end{aligned}
$$

De modo que se $T(\boldsymbol{x}) = \beta_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots\beta_m\boldsymbol{f}_m$, as coordenadas de $T(\boldsymbol{x})$ em relação à base $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m$, são dadas[5] por

$$
\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.
$$

Donde se conhecermos o quadro de números $A = (a_{ij})$ podemos sempre determinar o transformado de um vector de $\mathcal{V}$ por meio de T. Esta matriz é chamada matriz da transformação linear T em relação às bases $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ e $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$.

Consideremos o caso particular de transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Teorema 2.2 *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Consideremos fixadas em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ as bases canónicas. Então existe uma única matriz A_T de ordem $m \times n$ tal que*

$$
T(\boldsymbol{x}) = A_T\boldsymbol{x}, \tag{2.1}
$$

para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Reciprocamente, se A_T é uma matriz $m \times n$ então a função definida por (2.1) é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Demonstração: Note-se que as coordenadas dum vector de $\mathbb{R}^p$ relativamente à base canónica $e_1, e_2, \ldots, e_p$ são exactamente as suas componentes. Sendo $\boldsymbol{x} = (x_i)$ tem-se

$$
\begin{aligned}
T(\boldsymbol{x}) &= T(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) \\
&= x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \ldots + x_nT(e_n).
\end{aligned}
$$

Definindo $T(e_i) = \boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$, $(i = 1, \ldots, n)$, vem

$$
T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_1x_1 + \boldsymbol{a}_2x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_nx_n,
$$

ou,

$$
T(\boldsymbol{x}) = A_T\boldsymbol{x},
$$

onde A_T é a matriz definida por

$$
A_T = (\, a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n\,) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.
$$

Note-se que se B_T fosse outra matriz satisfazendo (2.16) então para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ter-se-ia

$$
B_T\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{x}) = A_T\boldsymbol{x}, \tag{2.2}
$$

[5] Ver exercício 18.

o que implica $B_T = A_T$.Com efeito basta substituir em (2.2) x por $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Reciprocamente, se A_T é uma matriz $m \times n$, então

$$A_T(\alpha x + \beta y) = A_T\alpha x + A_T\beta y = \alpha A_T x + \beta A_T y,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Logo a aplicação definida por (2.1) é uma transformação linear.

□

Considere-se a aplicação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

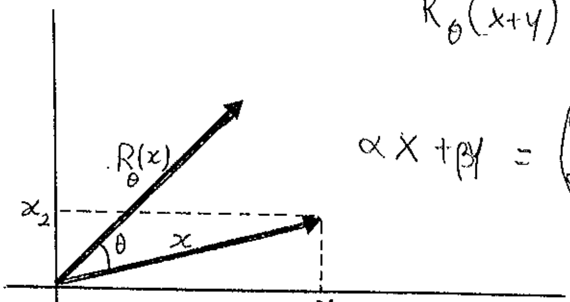
$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad R_\theta(x) = \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta - x_2 \mathrm{sen}\theta \\ x_1 \mathrm{sen}\theta + x_2 \cos\theta \end{pmatrix}.$$

A demonstração de que R_θ é uma transformação linear fica como exercício.

Observe-se na figura seguinte que se x representa um vector do plano, $R_\theta(x)$ é o vector obtido de x por rotação de um ângulo θ no sentido directo.

$$R_\theta(x+y) = \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + \beta y_1)\cos\theta - (\alpha x_2 + \beta y_2)\mathrm{sen}\theta \\ (\alpha x_1 + \beta y_1)\mathrm{sen}\theta + (\alpha x_2 + \beta y_2)\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\alpha X + \beta Y = \begin{pmatrix} \alpha X_1 + \beta Y_1 \\ \alpha X_2 + \beta Y_2 \end{pmatrix}$$



$$\alpha R_\theta(x) = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta - x_2 \mathrm{sen}\theta \\ x_1 \mathrm{sen}\theta + x_2 \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\beta R_\theta(y) = \beta \begin{pmatrix} y_1 \cos\theta - y_2 \mathrm{sen}\theta \\ y_1 \mathrm{sen}\theta + y_2 \cos\theta \end{pmatrix}$$

A matriz associada à transformação linear definida é dada por

$$(\, R_\theta(e_1) \quad R_\theta(e_2)\,).$$

Como $R_\theta(e_1) = R_\theta(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \mathrm{sen}\theta \end{pmatrix}$ e $R_\theta(e_2) = R_\theta(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ a matriz é

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora a transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definida pela matriz

$$R_\theta(e_1) = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$1 \times 2 = (1 \times 2) \times 2 \times 1$

$\cos\theta$

$\mathrm{sen}\theta$

Se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$Sx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

$$R_\theta(e_2) = a_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geometricamente Rx é a reflexão de x no plano XOY.

$-\mathrm{sen}\theta \qquad \cos\theta$

Outro aspecto da "identificação" entre matrizes e transformações lineares é a relação entre a álgebra das transformações lineares e a álgebra de matrizes.

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vectoriais reais e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ e $S : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ transformações lineares. Define-se a soma das duas transformações como sendo a transformação de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ dada por

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x), \quad \forall x \in \mathcal{V}.$$

Facilmente se verifica que $T + S$ é uma transformação linear.

Sejam A e B as matrizes das transformações lineares T e S respectivamente, em relação às mesmas bases determinadas em $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$. Então a matriz da transformação linear $T + S$ em relação às bases referidas é igual a $A + B$.

Seja $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma transformação linear e α um número real. Define-se produto do número α por T e representa-se por αT, como sendo a transformação de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ dada por

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x), \quad \forall x \in \mathcal{V}.$$

Prova-se facilmente que αT é uma transformação linear.

Além disso se A é a matriz da transformação linear T em relação a determinadas bases de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, a matriz associada à transformação linear αT, em relação às mesmas bases de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ é αA.

Sejam $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ espaços vectoriais reais e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ e $S : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ transformações lineares. A aplicação de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ representada por $S \circ T$ e definida por

$$(S \circ T)(x) = S(T(x)), \qquad \forall x \in \mathcal{V},$$

tem o nome de transformação composta (ou transformação produto).

Facilmente se verifica que a transformação composta de duas transformações lineares é uma transformação linear.

Seja A a matriz da transformação linear T em relação às bases $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathcal{V}$ e $u_1, \ldots, u_m$ de $\mathcal{U}$, e seja B a matriz da trnaformação linear S em relação às bases $u_1, \ldots, u_m$ de $\mathcal{U}$ e $w_1, \ldots, w_p$ de $\mathcal{W}$. Prova-se que a matriz da transformação linear $S \circ T$ em relação às bases referidas de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ é BA.

$T : V \to U \qquad S : U \to W$

$A \; [v_1 \quad v_n] \qquad B \; [u_1 \ldots u_n]$

$u_1 \ldots u_n \qquad w_1 \ldots w_n$

2.4 Exercícios

1. Prove que são espaços vectoriais:

   (a) O conjunto $\mathbb{R}^n$ algebrizado com a adição e com a multiplicação por um número real definidas no Apêndice A.

   (b) O conjunto P_n dos polinómios de grau menor ou igual a n com coeficientes reais, algebrizado por meio da adição de polinómios e da multiplicação de um polinómio por um número real.

   (c) O conjunto $C([a, b])$ das funções reais contínuas em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com as operações definidas por

$$\forall f, g \in C([a, b]),\ (f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in [a, b].$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in C([a, b]),\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \qquad x \in [a, b].$$

$S \circ T$

BA

2. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$

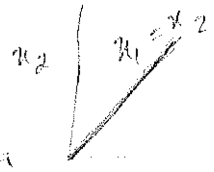
$$B = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$$

   (a) Prove que B é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$$

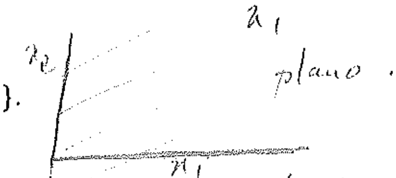
5 $\left\{ A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{21} = 0 \right\}$



(b) Geometricamente o que representa $\mathcal{B}$? recta

3. Seja $\mathcal{E}$ o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathcal{E} = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}.$$



(a) Identifique geometricamente $\mathcal{E}$.

(b) Verifique se $\mathcal{E}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$. não $\alpha < 0$ então $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$ $\alpha x_1 \leq 0$

4. Prove que o subconjunto de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ formado pelas matrizes simétricas de ordem 2 é um subespaço vectorial. $A = A^T$ adição de $A + B$ ainda é simétrica.

5. Identifique o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gerado pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} \leftarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A = A^T$ $B = B^T$ $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$

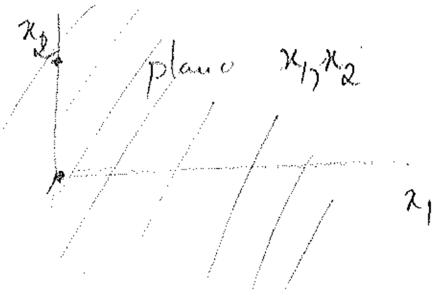
$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$

6. (a) Prove que o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos vectores cuja terceira componente é nula

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}\},$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) Identifique geométricamente esse subespaço.



7. Verifique se as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

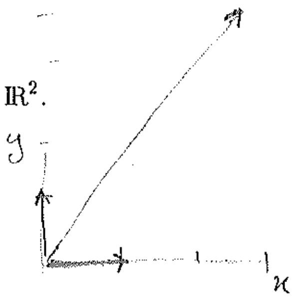
são linearmente independentes.

8. Considere os vectores $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

(a) Escreva x como combinação linear de e_1 e e_2.
Represente graficamente e_1, e_2 e x.

(b) Considere os vectores

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ e } f_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Escreva x como combinação linear de f_1 e f_2.
Represente graficamente f_1, f_2 e x.

$\forall v$

$v = \alpha_1 v_1$

9. Prove que qualquer conjunto de vectores dum espaço vectorial que contenha o vector nulo é linearmente dependente. $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p 0 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ α_p não tem que ser $= 0$ $\alpha_p \in \mathbb{R}$

10. Seja $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto de vectores que geram o espaço V. Seja $v \in V$. Prove que $S_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, v\}$ também gera V.

porque $x + \alpha 0 =$
$x + \alpha(x + 0) - \alpha x$
$= x + \alpha x - \alpha x$
$= x$.
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

11. Prove que os vectores

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 3 \text{ e lin. ind}$$

constituem uma base de $\mathbb{R}^3$.

$$* \quad \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \alpha+\beta-\gamma\end{pmatrix}$$

12. Verifique que as matrizes

$$I_{11} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, I_{12} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, I_{21} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, I_{22} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$ 4 e lin. ind.

foram um base de $\mathbb{R}^{2\times2}$. Qual a dimensão de $\mathbb{R}^{2\times2}$? 4.

13. Prove que

$$1, x, x^2, \ldots, x^n,$$

$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots + \alpha_{n+1} x^n = 0$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$

constituem uma base do espaço P_n dos polinómios de coeficientes reais de grau $\leq n$. Qual a dimensão de P_n? $\to n+1$

14. Verifique que as funções definidas em $[a, b]$ por

$$1, x, x^2, \ldots, x^n,$$

formam um conjunto de $n+1$ vectores linearmente independentes do espaço $C([a, b])$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Qual a dimensão de $C([a, b])$? $\to n+1$

15. Determine uma base e a dimensão do subespaço $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ apresentado no exercício 2. $\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$ $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \to$ base. dimensão 1.

16. Determine uma base e a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^4$

$x_4 = x_1 + x_2 - x_3$

$$\mathcal{U} = \{x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}.$$ dim 3 $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \alpha+\beta-\gamma\end{pmatrix} *$

17. Apresente uma base e indique a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^{2\times2}$ formado pelas matrizes:

(a) simétricas de ordem 2. $\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ dim = 2.

(b) triangulares superiores de ordem 2. $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ dim = 2

$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ dim = 1 $\leftarrow$ (c) diagonais de ordem 2.

18. Prove que num espaço de dimensão finita n $(n \geq 1)$ qualquer vector do espaço é escrito de maneira única como combinação linear dos vectores duma dada base do espaço.

(*Obs.: Os coeficientes da combinação linear são chamados as coordenadas do vector em relação a essa base.*)

19. (a) Determine as coordenadas do vector

$$x = \begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$$

em relação à base e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$. $1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(b) Verifique que os vectores

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

formam uma base de $\mathbb{R}^3$.
Determine as coordenadas do vector x, dado na alínea anterior, relativamente a esta base.

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$

$-\alpha_2 = -4$ $\quad \alpha = 1$

$-\alpha_3 = 2$ $\quad \alpha_2 = 4$

$\alpha_3 = 2$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \overset{26}{\alpha_3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\\ -\alpha_2\\ -\alpha_3\end{pmatrix}$$

$\alpha_1 + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(1-x^2) = 0 + 0x + 0x^2$

$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) - \alpha_2 x - \alpha_3 x^2 = 0 \qquad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_1 = 0$

$\alpha_1 + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(1-x^2) = 1 - 4x + 2x^2$

20. (a) No espaço P_2 dos polinómios de coeficientes reais de grau ≤ 2, determine as coordenadas de

$$p(x) = 1 - 4x + 2x^2$$

relativamente à base $1, x, x^2$. $(1, -4, 2)$

(b) Verifique que os polinómios definidos por

$$1, 1-x, 1-x^2,$$

l. in. e são 3.

constituem uma base de P_2.

Determine as coordenadas do polinómio p, dado na alínea anterior, relativamente a esta base.

21. (a) Mostre que os vectores

$x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}x+y\\y-z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

constituem um sistema de geradores de $\mathbb{R}^2$.

(b) Retire vectores, entre os dados, para obter uma base de $\mathbb{R}^2$.

22. (a) Mostre que os vectores

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

formam uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$,

$$\mathcal{U} = \{x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_3\}. \qquad \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

(b) Qual a dimensão de $\mathcal{U}$? 2

(c) Junte vectores aos da alínea a) para obter uma base de $\mathbb{R}^4$. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

23. Considere as seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$:

(a) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad S(x) = -x$. reflexão relativamente a todos os eixos.

(b) $H_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad H_\lambda(x) = \lambda x$.

(c) $P_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad P_x\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix}$. projecção no eixo OX.

(d) $R_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad R_\alpha\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1 cos\alpha - x_2 sen\alpha\\x_1 sen\alpha + x_2 cos\alpha\\x_3\end{pmatrix}$.

Em cada caso:

i. Identifique a transformação linear e represente graficamente um vector de $\mathbb{R}^3$ e o seu transformado.

ii. Calcule a matriz da transformação linear (relativa à base $\{e_1, e_2, e_3\}$).

iii. Calcule o transformado do vector $(1 \quad 1 \quad 1)^T$.

(a) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-x\\-y\\-z\end{pmatrix}$

(a) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$

Capítulo 3

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

"Quatro possoas contribuiram para formar a somma de 660 moedas: a primeira deu o dobro do que deu a segunda; a segunda deu 3 moedas mais que a terceira; e esta deu metade do que deu a quarta.
Pergunta-se quanto deu cada huma."

Joze Anastacio da Cunha, Principios Mathematicos.

Chegamos agora ao problema da resolução de sistemas de equações lineares. Por várias vezes, nos capítulos anteriores, fizemos referência à notação matricial para representar sistemas de equações e vamos agora conhecer as vantagens do seu uso.

3.1 Definição

Consideremos o seguinte sistema de m equações lineares nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \qquad (3.1)$$

O sistema (3.1) pode ser escrito em forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

ou,em notação matricial condensada,

$$Ax = b, \qquad (3.2),$$

361

onde $A = (a_{ij})$ designa a matriz dos coeficientes de ordem $m \times n$, sendo a_{ij} o coeficiente na equação i da incógnita x_j; $x = (x_i)$ denota o vector das incógnitas e $b = (b_i)$ o vector dos termos independentes.

Definição 3.1 *Se b em $Ax = b$ fôr um vector nulo o sistema diz-se homogéneo.*

Consideremos os seguintes exemplos de sistemas de equações lineares.

Exemplo 3.1.Dado o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

vamos calcular a sua solução.

Da primeira eqação obtemos $x_1 = -x_2$. Substituindo na segunda equação vem $2(-x_2) - x_2 = 3$. Logo

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}. \quad \text{det.}$$

O sistema dado tem solução única.

Exemplo 3.2. Consideremos agora o sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \end{cases}. \quad \text{imp.}$$

Da primeira equação obtemos $x_1 = x_2$. Substituindo na segunda equação vem, $x_1 + x_1 = 1$. Donde, das duas primeiras equações resulta $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 1/2$. Porem, se substituirmos estes valores na terceira equação $2 \times (1/2) - (1/2) = (1/2) \neq 1$. Assim o sistema dado não tem solução.

Exemplo 3.3. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

Resolvendo a primeira equação em ordem a x_1 obtemos $x_1 = 1 + x_2 - x_3$. Substituindo na segunda equação vem $(1 + x_2 - x_3) + 2x_2 - 2x_3 = 1$ donde,

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Então, qualquer vector da forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{ind.}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ é solução do sistema dado. Este tem uma infinidade de soluções.

Definição 3.2 *Um sistema de equações lineares diz-se possível se tem uma ou mais soluções. Diz-se impossível caso contrário.*

Definição 3.3 *Um sistema de equações lineares possível diz-se determinado se tem uma e uma só solução. Diz-se indeterminado se tem mais de uma solução.*

O sistema do exemplo 3.1. é possível determinado. O sistema do exemplo 3.2. impossível. O sistema do exemplo 3.3. é possível indeterminado.

Note-se que um sistema de equações lineares homogéneo é sempre possível pois $x = (0)$ é uma solução.

Na secção seguinte são estabelecidas condições para que um sistema tenha solução.

3.2 Existência e unicidade de solução

Para apresentar as condições para que um sistema de equações $Ax = b$ tenha solução teremos de fazer uso do conceito de característica duma matriz.

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ real.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Podemos pensar nas colunas de A como vectores de $\mathbb{R}^m$. Geram, portanto, um subespaço de $\mathbb{R}^m$ e a dimensão desse subespaço é o numero máximo de colunas linearmente independentes de A.

Definição 3.4 *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Designemos por $R(A)$ o subespaço gerado pelas colunas de A. A dimensão do espaço $R(A)$ chama-se característica de A e representa-se por $c(A)$.*

De modo análogo podemos pensar nas linhas de A como vectores de $\mathbb{R}^n$. Como tal geram um subespaço de $\mathbb{R}^n$ que representaremos por $R(A^T)$, que coincide com o espaço gerado pelas colunas da matriz transposta de A.

Definição 3.5 *As seguintes operações são designadas por operações elementares sobre linhas (colunas) duma matriz:*

O1 : Troca de duas linhas (colunas);

O2 : Multiplicação de todos os elementos duma linha (coluna) por um número diferente de zero;

O3 : Substituição duma linha (coluna) pela sua soma com outra multiplicada por um número.

Teorema 3.1 *Seja A uma matriz. O numero máximo de linhas (colunas) linearmente independentes de A não é alterado se sobre A se realizarem operações elementares sobre linhas ou colunas.*

Demonstração: Fica como exercício. □

Provaremos em seguida um importante resultado. A demonstração desse resultado é construtiva no sentido em que define um processo de cálculo da característica de uma matriz.

Teorema 3.2 *Seja A uma matriz. O numero máximo de linhas linearmente independentes de A é igual ao numero máximo de colunas linearmente independentes.*

Demonstração: Começaremos por provar que se A fôr uma matriz de ordem $m \times n$, não nula, realizando sobre A operações elementares é possível transformar A numa matriz com a forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} & \alpha_{2,k+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{kk} & \alpha_{k,k+1} & \dots & \alpha_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

sendo $\alpha_{ii} \neq 0$ para $i = 1, \ldots, k$, $(k \leq n)$, e podendo deixar de existir as linhas de zeros.

Uma vez que (3.4) resultará de A por operações elementares, então o número máximo de linhas linearmente independentes da matriz em (3.4) é o mesmo de A.

Seja então a matriz A de (3.3).

Se $a_{11} = 0$ por troca de linhas ou colunas leva-se à posição $(1,1)$ um elemento de A não nulo. Se $A \neq 0$ esse elemento existe. A matriz A é depois transformada na matriz

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \ldots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix},$$

onde,

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - (\frac{a_{i1}}{a_{11}})a_{1j}, \qquad (i = 2, \ldots, m; j = 2, \ldots, n).$$

Isto é, cada linha i de A, para $i \geq 2$, é substituída pela sua diferença com a primeira linha multiplicada por (a_{i1}/a_{11}), (note-se que $a_{11} \neq 0$).

Se $a_{22}^{(1)} = 0$ por troca de linhas ou colunas coloca-se na posição $(2,2)$ um elemento não nulo que se encontre no bloco

$$\begin{pmatrix} a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m2}^{(1)} & \ldots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Se não existir, a matriz $A^{(1)}$ terá a forma (3.4) com $k = 1$. Se $a_{22}^{(1)} \neq 0$, a matriz $A^{(1)}$ é depois transformada na matriz

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \ldots & a_{mn}^{(2)} \end{pmatrix},$$

onde,

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - (\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}})a_{2j}^{(1)}, \qquad (i = 3, \ldots, m; j = 3, \ldots, n).$$

Isto é, a linha i de $A^{(1)}$, para $i \geq 3$, é substituida pela sua diferença com a segunda linha multiplicada por $(a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)})$.

E o processo continua até se obter uma matriz

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2k}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{kk}^{(k-1)} & \ldots & a_{kn}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

podendo não existir as linhas de zeros $(k = m)$. Então $A^{(k)}$ tem a forma (3.4).

Vamos agora provar que as primeiras k linhas de $A^{(k)}$ são linearmente independentes.

A combinação linear nula,

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1k} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + \ldots + \gamma_k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{kk}^{(k-1)} \\ \vdots \\ a_{kn}^{(k-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

implica,

$$\begin{cases} \gamma_1 a_{11} = 0 \\ \gamma_1 a_{12} + \gamma_2 a_{22}^{(1)} = 0 \\ \ldots \\ \gamma_1 a_{1k} + \ldots + \gamma_k a_{kk}^{(k-1)} = 0 \end{cases}. \tag{3.5}$$

Dado que $a_{11} \neq 0$, da primeira equação de (3.5) vem $\gamma_1 = 0$. Substituindo na segunda equação, e uma vez que $a_{22}^{(1)} \neq 0$ vem $\gamma_2 = 0$. E assim sucessivamente até à equação k donde se tira $\gamma_k = 0$. Estes valores $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0, \ldots, \gamma_k = 0$, são a única solução de (3.5). Consequentemente, as primeiras k linhas de $A^{(k)}$ são linearmente independentes. E não há mais do que k porque então seria incluída pelo menos uma linha nula. Logo, o número máximo de linhas linearmente independentes de $A^{(k)}$ (e consequentemente) de A é k.

De modo análogo se prova que as primeiras k colunas de $A^{(k)}$ são linearmente independentes. Para provar que não há mais do que k consideremos novamente a matriz $A^{(k)}$.

Se substituirmos cada coluna i, para $i \geq 2$, pela sua diferença com a primeira coluna multiplicada por (a_{1i}/a_{11}) resulta a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2k}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{kk}^{(k-1)} & \ldots & a_{kn}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Depois substituimos cada coluna i, $i \geq 3$,pela sua diferença com a segunda coluna multiplicada por $(a_{2i}^{(1)}/a_{22}^{(1)})$, e assim sucessivamente, até obtermos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{kk}^{(k-1)} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Concluimos que a matriz (3.6) não tem mais do que k colunas linearmente independentes. Dado que foi obtida de $A^{(k)}$ por operações elementares sobre colunas tem-se que o numero máximo de colunas linearmente independentes de $A^{(k)}$ é k. Mas $A^{(k)}$ foi obtida de A por operações elementares. Então, o numero máximo de colunas linearmente independentes de A é k, e igual ao numero máximo de linhas linearmente independentes. □

Da demonstração do teorema 3.2 também se conclui que se uma matriz tiver a forma (3.4) sendo $\alpha_{ii} \neq 0$, $(i = 1, \ldots, k)$, então a sua característica é k. Além disso, dada uma matriz não nula, para calcular a sua característica, pode-se por operações elementares sobre linhas e colunas "reduzi-la" à forma (3.4).

Exemplo 3.4. Calculemos a característica de

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Primeiro a matriz dada é transformada na matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Depois obtem-se

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde a característica da matriz dada é 2.

Definição 3.6 *Consideremos o sistema* (3.1). *A matriz*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

de ordem $m \times (n+1)$ será representada também por (Ab) e é chamada matriz ampliada do sistema. A $A = (a_{ij})$ chama-se matriz simples do sistema.

Teorema 3.3 *O sistema $Ax = b$ tem solução se e só se*

$$c(Ab) = c(A).$$

Demonstração: Note-se que o sistema (3.1) pode ser escrito como se segue

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (3.7)$$

Deste modo se existir $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ verificando (3.7) então b é combinação linear das colunas de A, portanto b pertence ao espaço gerado pelas colunas de A donde $R(Ab) = R(A)$(justifique!) e consequentemente $dim(R(Ab)) = dim(R(A))$ e $c(Ab) = c(A)$.

Reciprocamente, note-se que $R(A) \subseteq R(Ab)$. Se admitirmos $c(A) = c(Ab)$, isto é, $dimR(A)) = dim(R(Ab))$ ter-se-á $R(A) = R(Ab)$. Donde b pertence ao espaço gerado pelas colunas de A, e portanto b é combinação linear das colunas de A, isto é

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + y_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3.8)$$

O vector $y = (y_i)$ cujas componentes verificam (3.8) é solução de (3.1). □

m lin ind da A

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

m linhas lin ind de Ab

logo $c(A) = c(Ab)$

Corolário 3.1 *Seja $Ax = b$ um sistema de m equações lineares em n incógnitas. Se $c(A) = m$ o sistema tem sempre solução.*

Vimos então, em que condições um sistema tem solução. Em seguida estabeleceremos condições para que a solução dum sistema possível seja única.

Teorema 3.4 *Seja y uma solução de $Ax = b$. Então qualquer solução deste sistema pode ser escrita na forma*

$$x = y + z, \tag{3.9}$$

onde z é uma solução do sistema homogéneo

$A(y+z) = Ay + Az = b$

$$Ax = 0, \tag{3.10}$$

e reciprocamente, se y é solução de $Ax = b$ também $x = y + z$ o é.

Demonstração: Se x é solução de $Ax = b$ então $A(x-y) = Ax - Ay = b - b = 0$, logo $x - y$ é solução do sistema homogéneo (3.10). Fazendo $z = x - y$ resulta $x = y + z$. Reciprocamente, seja z uma solução de (3.10) e y uma solução de $Ax = b$. Temos, $Ax = A(y + z) = Ay + Az = b + 0 = b$, e portanto x é tambem solução de $Ax = b$. □

Corolário 3.2 *O sistema $Ax = b$ se fôr possível, tem solução única se e só se o sistema homogéneo $Ax = 0$ não admite soluções alem da solução trivial $x = (0)$.*

Teorema 3.5 *Um sistema homogéneo de m equações em n incógnitas $Ax = 0$ tem solução além da trivial se e só se $c(A) < n$.*

Demonstração: Suponhamos que $y = (y_i) \in R^n$ é solução não nula de $Ax = 0$. Então tem-se

$$y_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + y_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

com algum $y_i \neq 0$. Então, as n colunas de A são linearmente dependentes, donde $c(A) < n$.

Reciprocamente, se $c(A) < n$ as colunas de A são linearmente dependentes, isto é, existe uma combinação linear nula (3.11) com algum $y_i \neq 0$. Então o vector não nulo

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

é solução, não nula, de $Ax = 0$. □

Corolário 3.3 *Seja $Ax = 0$ um sistema linear homogéneo de m equações lineares em n incógnitas. Se $m < n$ o sistema admite soluções além da trivial $x = (0)$.*

Sumariando tem-se

$c(A) \leq m$

$c(A) < n$ $\quad$ $m < n$

$c(A) \leq m < n$

Teorema 3.6 *Se $Ax = b$ é um sistema de m equações lineares em n incógnitas, tal que,*

$$c(A) = c(Ab) = r,$$

então:

i) Se $r = n$, $Ax = b$ é determinado;

ii)Se $r < n$, $Ax = b$ é indeterminado. □

Os resultados obtidos serão usados para se estabelecerem condições necessárias e suficientes para que uma matriz quadrada seja invertível.

Teorema 3.7 *Seja A uma matriz de ordem n. Então as seguintes asserções são equivalentes:*

i) A é invertível;

ii) $Ax = 0$ não tem soluções alem da nula;

iii)$c(A) = n$.

Demonstração: Para provar $i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii)$, provaremos que $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$.

Se A é invertível, existe A^{-1}. Multiplicando à esquerda ambos os membros de $Ax = 0$ por A^{-1}, obtemos

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 \Rightarrow (A^{-1}A)x = 0 \Rightarrow Ix = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Que $ii) \Rightarrow iii)$ resulta do teorema 3.5.

Provemos que $iii) \Rightarrow i)$. Para que A seja invertível tem de existir uma matriz X tal que $AX = XA = I_n$. Comecemos por obter uma matriz X tal que

$$AX = I_n. \tag{3.12}$$

Fraccionando X [1] por colunas, $X = (\, x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n \,)$, temos substituindo em (3.12)

$$A\,(\, x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n \,) = (\, e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n \,),$$

donde,

$$(\, Ax_1 \quad Ax_2 \quad \ldots \quad Ax_n \,) = (\, e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n \,),$$

e,

$$\begin{cases} Ax_1 = e_1 \\ Ax_2 = e_2 \\ \ldots \\ Ax_n = e_n \end{cases}, \tag{3.13}$$

representa n sistemas de n equações lineares em n incógnitas. Por hipótese, $c(A) = n$, logo todos os sistemas em (3.13) tem solução única,

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

respectivamente. Portanto existe $X = (\, x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n \,)$ verificando (3.12).

Provemos agora que se $AX = I_n$ e $c(A) = n$ então tambem $XA = I_n$ e portanto A é invertível e $A^{-1} = X$.

Para isso notemos que se B é uma matriz de ordem n e se $c(A) = n$ então

$$AB = O \Rightarrow B = O. \tag{3.14}$$

[1] Ver Apêndice B.

Com efeito, considerando B fraccionada por colunas

$$AB = A\,(\,b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n\,) = (\,Ab_1 \quad Ab_2 \quad \ldots \quad Ab_n\,)\,.$$

Para que $AB = O$ teriamos

$$\begin{cases} Ab_1 = 0 \\ Ab_2 = 0 \\ \ldots \\ Ab_n = 0 \end{cases}. \qquad (3.15)$$

Dado que $c(A) = n$, cada um dos sistemas homogéneos em (3.15) admite apenas a solução nula e portanto

$$b_1 = 0, b_2 = 0, \ldots, b_n = 0,$$

logo $B = O$. Note-se que se (3.14) for verdadeiro sob a condição $c(A) = n$,também

$$B \neq O \Rightarrow AB \neq O. \qquad (3.16)$$

Provemos então que se $c(A) = n$ e $AX = I_n$, se tem $XA = I_n$. Com efeito, se fosse

$$XA \neq I_n$$

então $(XA - I_n) \neq O$, e de (3.16)

$$A(XA - I_n) \neq O,$$

ou,$AXA - AI_n \neq O$, isto é $(AX)A \neq A$, e $I_nA \neq A$ o que não pode ser verdadeiro. □

3.3 Sistemas triangulares

Nesta secção serão apresentados métodos para resolver sistemas triangulares.

Este caso especial será considerado em primeiro lugar porque os algoritmos de resolução são relativamente simples. Além disso os que serão introduzidos mais tarde para resolver sistemas lineares, caso geral, pressupõem a capacidade de resolver sistemas triangulares.

Consideremos o seguinte sistema de n equações lineares em n incógnitas, cuja matriz dos coeficientes é triangular superior invertível.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (3.17)$$

De acordo com a hipótese formulada tem-se $a_{ii} \neq 0, \ (i = 1, \ldots, n)$.

Da última equação de (3.17) obtem-se

$$x_n = b_n / a_{nn}.$$

Substituindo o valor calculado para x_n na penúltima equação vem

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1}.$$

E assim sucessivamente até se obter

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n)/a_{11}.$$

Este método é chamado método de substituição inversa.

Exemplo 3.5. Dado o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \quad x_3 + \ 4\,x_4 = 5 \\ \quad -4x_2 + 1.5x_3 + \quad x_4 = -0.5 \\ \qquad\qquad 0.25x_3 + 1.5x_4 = 1.25 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_4 = \ 1 \end{cases},$$

por substituição inversa calcula-se

$$x_4 = 1,$$

$$x_3 = (1.25 - 1.5 \times 1)/0.25 = -1.0,$$

$$x_2 = (-0.5 - 1.5 \times (-1.0) - 1)/(-4) = 0.0,$$

$$x_1 = (5 - 2 \times 0.0 - (-1.0) - 4 \times 1)/(2.0) = 1.0.$$

Algoritmo 3.1. Método de substituição inversa.

Cálculo da solução de $Ax=b$, onde A é uma matriz triangular superior invertível

$x_n \leftarrow b_n/a_{nn}$

para i **de** $n-1$ **até** 1 **fazer**

$\quad x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j)/a_{ii}$

Um sistema de equações cuja matriz dos coeficientes é triangular inferior invertível pode ser resolvido dum modo similar.

Algoritmo 3.2. Método de substituição directa.

Cálculo da solução de $Ax=b$, onde A é uma matriz triangular inferior invertível

$x_1 \leftarrow b_1/a_{11}$

para i **de** 2 **até** n **fazer**

$\quad x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j)/a_{ii}$

3.4 Método de eliminação de Gauss

O método de eliminação de Gauss é baseado numa "redução" do sistema dado a um sistema equivalente cuja matriz dos coeficientes é triangular superior. Este pode ser facilmente resolvido por substituição inversa.

Tal redução é definida por uma sequência de operações elementares sobre as equações do sistema.

São operações elementares as seguintes: troca de duas equações, multiplicação duma equação por um número diferente de zero e substituição duma equação pela sua soma com outra multiplicada por um número.

Não é difícil provar o seguinte:

Teorema 3.8 *Seja $\tilde{A}x = \tilde{b}$ um sistema que resulta da realização duma sequência finita de operações elementares sobre as equações de $Ax = b$. Então os sistemas $Ax = b$ e $\tilde{A}x = \tilde{b}$ são equivalentes.*

Na demonstração do teorema que se segue é descrito o algoritmo do método de eliminação de Gauss.

Teorema 3.9 *Seja $Ax = b$ um sistema determinado de n equações em n incógnitas. Então é possível, realizando uma sequência finita de operações elementares sobre equações transformá-lo num sistema equivalente cuja matriz dos coeficientes é triangular superior.*

Demonstração: Note-se que operações "equivalentes" podem ser realizadas sobre linhas da matriz ampliada do sistema. Assim se simplificará a notação na descrição do método.

A transformação da matriz dos coeficientes de $Ax = b$ numa matriz triangular superior far-se-á por uma sequência de chamados passos de redução.

Seja então a matriz ampliada do sistema $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Primeiro passo de redução: se $a_{11} \neq 0$ cada linha i, $(i = 2, 3, \dots, n)$, de (3.18) é substituida pela sua diferença com a primeira linha multiplicada por

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}.$$

Após completado o primeiro passo de redução em (3.18) obtem-se

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

sendo

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}, \qquad (i = 2, \dots, n; j = 2, \dots, n),$$

$$b_i^{(1)} = b_i - m_{i1}b_1, \qquad (i = 2, \dots, n).$$

Segundo passo de redução: Se $a_{22}^{(1)} \neq 0$, cada linha i, $(i = 3, 4, \dots, n)$, de (3.19), é substituída pela sua diferença com a segunda linha multiplicada por

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Após o segundo passo de redução obtem-se

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix},$$

sendo

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2}a_{2j}^{(1)}, \qquad (i = 3, 4, \ldots, n; j = 3, 4, \ldots, n),$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2}b_2^{(1)}, \qquad (i = 3, 4, \ldots, n).$$

E assim sucessivamente, até, após completar o passo de redução $n-1$ se tem,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

matriz ampliada do sistema,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad \ldots \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}, \tag{3.21}$$

que é equivalente a $Ax = b$. O sistema (3.21) é resolvido por substituição inversa.

Os números m_{ij} são chamados os *multiplicadores*.

Os números $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(n-1)}$ são chamados os *pivots*.

Se no início do passo k se tem $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ selecciona-se $a_{jk}^{(k-1)} \neq 0 (j > k)$ e trocam-se as linhas j e k. Se o sistema tem solução única tal troca é possível. □

Exemplo 3.6. Vamos usar o método de eliminação de Gauss para resolver

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}.$$

Após o primeiro passo de redução obtem-se a seguinte matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 1.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 2 & -0.5 & 1 & 1.5 \\ 0 & -2 & 0.5 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

No fim do segundo passo de redução tem-se

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 1.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.25 & 1.5 & 1.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & -0.5 & -0.25 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, completado o terceiro passo de redução,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 1.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.25 & 1.5 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por substituição inversa calcula-se

$$x_4 = 1, \qquad x_3 = -1, \qquad x_2 = 0, \qquad x_1 = 1.$$

Algoritmo 3.3. Método de Eliminação de Gauss.

Resolução do sistema determinado $Ax = b$, sendo A de ordem n

para k **de** 1 **até** $n-1$ **fazer**

  para i **de** $k+1$ **até** n **fazer**

    $m_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$

    para j **de** $k+1$ **até** n **fazer**

      $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ik}a_{kj}$

    $b_i \leftarrow b_i - m_{ik}b_k$

$x_n \leftarrow b_n/a_{nn}$

Para i **de** $n-1$ **até** 1 **fazer**

  $x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j)/a_{ii}$

Uma variante do método de eliminação de Gauss consiste em, no passo de redução k, ($k = 1, 2, \ldots, n$), "reduzir" a zero todos os elementos da matriz dos coeficientes, na coluna k e fora da diagonal, usando a linha k como linha redutora. Tal conduzirá a um sistema de equações cuja matriz dos coeficientes é diagonal e que é facilmente resolvido. Este método é chamado método de Gauss-Jordan. Como envolve maior quantidade de cálculo que o método de eliminação de Gauss para resolver um sistema de equações, não o usaremos para tal fim.

Exemplo 3.7. Consideremos o sistema de equações

$$\begin{cases} -1.414214x_1 + 2\ x_2 = 1 \\ x_1 - 1.414214x_2 + x_3 = 1 \\ 2\ x_2 - 1.414214x_3 = 1 \end{cases}$$

e calculemos a sua solução usando o método de eliminação de Gauss.

Tem-se após o primeiro passo de redução [2]

$$\begin{pmatrix} -1.414214 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -0.0000009 & 1 & 1.707107 \\ 0 & 2 & -1.414214 & 1 \end{pmatrix},$$

e ao fim do segundo passo de redução

$$\begin{pmatrix} -1.414214 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -0.0000009 & 1 & 1.707107 \\ 0 & 0 & 2222221. & 3793572. \end{pmatrix}.$$

Por substituição inversa obtem-se

$$x_3 = 1.707108,$$

$$x_2 = 1.111111,$$

$$x_1 = 0.864241.$$

[2] As operações aritméticas foram feitas com uma máquina de calcular que representa números com 7 dígitos.

A solução exacta é

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1.707107\ldots.$$

Passamos a justificar os maus resultados obtidos.

No segundo passo de redução o pivot -0.0000009 originou um multiplicador 2222222. Para obter o novo elemento da matriz dos coeficientes na posição $(3,3)$ calculou-se

$$-1.414214 + 2222222 \times 1 = 2222221.$$

Como os cálculos foram efectuados representando números com sete dígitos ocorreu um erro absoluto de arredondamento [3] de 0.414214. Relativamente ao valor deste coeficiente o erro é pequeno, mas relativamente à grandeza dos outros coeficientes, termos independentes e solução o erro é grande e irá influenciar muito o resultado obtido.

Para evitar este problema deveria ter-se escolhido um pivot que originasse um multiplicador pequeno em valor absoluto.

Exemplo 3.8. Consideremos novamente o sistema dado no exemplo anterior.

Após o primeiro passo de redução, e antes de iniciar o segundo, troquemos as linhas 2 e 3.

Vem

$$\begin{pmatrix} -1.414214 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1.414214 & 1 \\ 0 & -0.0000009 & 1 & 1.707107 \end{pmatrix}.$$

Com o pivot 2 obtem-se o multiplicador $m_{32} = 0.0000005$. Donde resulta

$$\begin{pmatrix} -1.414214 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1.414214 & 1 \\ 0 & 0 & 0.9999992 & 1.707108 \end{pmatrix}.$$

Por substituição inversa obtem-se

$$x_3 = 1.707109,$$

$$x_2 = 1.707109,$$

$$x_1 = 1.707109.$$

As técnicas que permitem assegurar que os pivots são escolhidos de modo que os multiplicadores sejam em módulo inferiores a um chamam-se técnicas de escolha de pivot.

Na chamada *escolha parcial de pivot*, no inicio do passo de redução k, é escolhido para pivot o elemento a_{pk} tal que

$$|a_{pk}| = \max_{k \le i \le n} (|a_{ik}|).$$

Se $p \neq k$ as linhas p e k são trocadas entre si.

Na *escolha total de pivot*, no inicio do passo de redução k é escolhido para pivot o elemento a_{pr} tal que

$$|a_{pr}| = \max_{\substack{k \le i \le n \\ k \le j \le n}} (|a_{ij}|).$$

[3] Ver Apêndice C.

Se $p \neq k$ as linhas p e k são trocadas entre si. Se $r \neq k$ as colunas r e k são trocadas entre si (mas de modo a obter um sistema equivalente).

A acumulação de erros de arredondamento é menor quando se usa escolha total de pivot. Porem o esforço computacional é bastante maior. Na prática é preferido o uso da escolha parcial de pivot que produz, em geral, bons resultados.

Em certos casos a resolução dum sistema por eliminação Gaussiana pode ser feita sem ocorrerem trocas de linhas (ou colunas) (algoritmo 3.3). São por exemplo, os sistemas cuja matriz dos coeficientes é definida positiva[4] ou, o caso da matriz dos coeficientes cuja transposta é estritamente diagonal dominante.

Algoritmo 3.4. Método de eliminação de Gauss com escolha parcial de pivot

Cálculo da solução do sistema $Ax=b$ de n equações em n incógnitas

para k **de** 1 **até** $n-1$ **fazer**

  $pivot \leftarrow a_{p,k}$ [*tal que* $|a_{pk}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}|$]

  para i **de** 1 **até** n **fazer**

    $a_{ki} \leftrightarrow a_{pi}$

  $b_k \leftrightarrow b_p$

  para i **de** $k+1$ **até** n **fazer**

    $mult \leftarrow a_{i,k}/pivot$

    para j **de** $k+1$ **até** n **fazer**

      $a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - mult \times a_{k,j}$

    $b_i \leftarrow b_i - mult \times b_k$

$x_n \leftarrow b_n/a_{n,n}$

para i **de** $n-1$ **até** 1 **fazer**

  $x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j)/a_{i,i}$

Muitas aplicações dão origem a sistemas de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é tridiagonal (em geral de grande dimensão). Nesse caso é mais conveniente usar uma notação diferente para os coeficientes.

Um sistema tridiagonal de n equações pode ser escrito na forma

$$\begin{pmatrix} d_1 & u_1 & & & & \\ l_2 & d_2 & u_2 & & & \\ & l_3 & d_3 & u_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & u_{n-1} \\ & & & & l_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

O seguinte algoritmo apresenta uma extensão do método de eliminação de Gauss para sistemas tridiagonais quando não há necessidade de efectuar escolha de pivot.

[4] Uma matriz real simétrica A, de ordem n, diz-se definida positiva se $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \Rightarrow x^T A x > 0$.

Algoritmo 3.5. Método de eliminação de Gauss para sistemas tridiagonais

Cálculo da solução do sistema $Ax=b$, como em (3.22)

para k **de** 1 **até** $n-1$ **fazer**

$m \leftarrow l_{k+1}/d_k$

$d_{k+1} \leftarrow d_{k+1} - mu_k$

$b_{k+1} \leftarrow b_{k+1} - mb_k$

$x_n \leftarrow b_n/d_n$

para k **de** $n-1$ **até** 1 **fazer**

$x_k \leftarrow (b_k - u_k x_{k+1})/d_k$

se A admite inversa A^{-1} então

$AX = XA = I$

X inversa

3.5 Cálculo da inversa duma matriz

Se A é uma matriz de ordem n invertível, a sua inversa verifica

$$AX = I_n, \tag{3.23}$$

$XA = AX$

$X(AX) = (AX)X$

$X = X$ ✓

onde I_n denota a matriz identidade de ordem n.

Escrevendo X e I_n fraccionadas por colunas tem-se

$$A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix},$$

ou,

$$\begin{pmatrix} Ax_1 & Ax_2 & \dots & Ax_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}.$$

Donde

$$\begin{cases} Ax_1 = e_1 \\ Ax_2 = e_2 \\ \dots \\ Ax_n = e_n \end{cases} \tag{3.24}$$

Consequentemente, a coluna i da matriz inversa de A é a solução do sistema $Ax_i = e_i$, que tem solução única uma vez que A é invertível. Assim, para calcular a inversa podem resolver-se os n sistemas de equações em (3.24). Note-se que estes sistemas tem todos a mesma matriz dos coeficientes.

Se fôr usada eliminação, para não repetir operações elementares sobre a matriz dada, o processo de eliminação é aplicado à matriz

$$\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix},$$

o que corresponde a resolver "simultaneamente" os n sistemas.

Verifica-se que os métodos de eliminação de Gauss ou Gauss-Jordan requerem o mesmo número de operações aritméticas quando usados para determinar a inversa duma matriz.

Exemplo 3.9. Vamos usar o método de Gauss-Jordan para calcular a inversa de

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

ao fim do primeiro passo de redução obtem-se

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1.5 & 1 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Após o segundo passo de redução tem-se

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1.75 & 4.5 & 0.75 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1.5 & 1 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 1.5 & 0.25 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & -0.5 & -0.25 & -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E depois do terceiro passo de redução

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -6 & -1 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -8 & -2 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 1.5 & 0.25 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

E finalmente,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donde a inversa da matriz dada é

$$\begin{pmatrix} -0.5 & -1.5 & -0.5 & 3 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.6 Sistemas indeterminados

Consideremos o seguinte sistema de m equações em n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{3.25}$$

cuja matriz ampliada representaremos por (Ab).

Os resultados dos teoremas 3.3, 3.4 e 3.5 podem ser resumidos com se segue:

Sistema $Ax = b$

Se $c(A) \neq c(Ab)$ *sistema impossível*	
Se $c(A) = c(Ab)$	Se $c(A) < n$ *sistema indeterminado*
sistema possível	Se $c(A) = n$ *sistema determinado*

Exemplo 3.10. Dado o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \quad 3 \quad x_3 = 1 \\ 2x_1 + kx_2 + \quad 6 \quad x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + (k-3)x_3 = 0 \end{cases}, \qquad k \in R.$$

Vamos ver para que valores de k o sistema tem solução e para esses valores de k calcular a solução.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix} \to$$

(Se $k+4=0$ então)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \textit{ sistema impossível}$$

(Se $k+4 \neq 0$ então) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & k & \frac{k}{k+4} \end{pmatrix} \to$$

(Se $k=0$ então) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \textit{ sistema indeterminado}$$

(Se $k \neq 0$ então) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & k & \frac{k}{k+4} \end{pmatrix} \textit{ sistema determinado}$$

Concluindo, se $k \neq 0$ e $k \neq -4$ o sistema é possivel determinado. Se $k = 0$ o sistema é indeterminado.

Então se ($k \neq 0$ e $k \neq -4$) tem-se

$$x_3 = \frac{1}{k+4},$$

$$x_2 = \frac{4}{k+4},$$

$$x_1 = \frac{k+9}{k+4}.$$

Se $k=0$ tem-se a matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

que representa o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_2 = 4 \end{cases}.$$

Por substituição inversa

$$x_2 = 1,$$

$$x_1 = 1 - 3x_3 + 2 \times 1,$$

isto é

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 3x_3 \\ x_2 = 1 \end{cases}. \tag{3.27}$$

O valor de x_3 sendo arbitrário representemo-lo por α. A solução (3.27) pode ser reescrita na forma:

$$x_1 = 3 - 3\alpha$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = \alpha$$

ou,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

Em (3.28) a solução está escrita como soma duma solução particular do sistema (3.26) com a solução geral do sistema homogéneo associado (recorde-se o teorema 3.4).

Exemplo 3.11. Resolvamos o sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 6 \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 \phantom{{}+2x_4} + x_5 = 1 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 4 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -7 & 3 & 0 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 4 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & -0.7 & -0.7 \end{pmatrix}$$

Esta última é a matriz ampliada do sistema que segue que é equivalente ao dado.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 6 \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ -10x_3 + 4x_4 + x_5 = -9 \\ 0.2x_4 - 0.7x_5 = -0.7 \end{cases}$$

Vamos resolvê-lo por substituição inversa.

$$x_4 = \frac{-0.7 + 0.7x_5}{0.2} = -3.5 + 3.5x_5$$

$$x_3 = \frac{-9 - x_5 - 4(-3.5 + 3.5x_5)}{-10} = -0.5 + 1.5x_5$$

$$x_2 = 2 + x_5 - (-3.5 + 3.5x_5) - 3(-0.5 + 1.5x_5) = 7 - 7x_5$$

$$x_1 = 6 - 2x_5 + 4(-3.5 + 3.5x_5) - 3(-0.5 + 1.5x_5) + (7 - 7x_5) = 0.5 + 0.5x_5$$

Ou finalmente designando $x_5 = \alpha$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 7 \\ -0.5 \\ -3.5 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0.5 \\ -7 \\ 1.5 \\ 3.5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.7 Sistemas homogéneos. Núcleo duma matriz.

Teorema 3.10 *Seja*

$$Ax = 0, \tag{3.29}$$

um sistema homogéneo de m equações em n incógnitas, onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. O conjunto de soluções deste sistema constitui um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: As soluções de $Ax = 0$ são vectores de $\mathbb{R}^n$. De acordo com a definição de subespaço dum espaço linear, teremos que provar que se x e y são soluções de $Ax = 0$ tambem $x + y$ o é, e se $\alpha \in \mathbb{R}$, então αx é solução de $Ax = 0$.

Sejam então x e y soluções de $Ax = 0$. Calculemos $A(x + y)$.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0.$$

Donde $x + y$ satisfaz (3.29). Calculemos agora $A(\alpha x)$.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha(Ax) = \alpha 0 = 0.$$

E αx é tambem solução de (3.29). □

Exemplo 3.12. Determinemos as soluções do sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \quad + x_4 = 0 \\ \quad 2x_2 + x_3 \quad = 0 \end{cases}. \tag{3.30}$$

Por substituição inversa obtem-se

$$x_2 = \frac{-1}{2} x_3 = -0.5x_3,$$

$$x_1 = -x_4 + (-0.5x_3) = -x_4 - 0.5x_3.$$

Os valores de x_3 e x_4 são arbitrários. Designemos $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$. Resulta:

$$x_1 = -0.5\alpha - \beta$$

$$x_2 = -0.5\alpha$$

$$x_3 = \alpha$$

$$x_4 = \beta$$

ou,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donde, qualquer solução de (3.30) se pode escrever como combinação linear dos vectores

$$\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathbb{R}^4$. Estes vectores são linearmente independentes e geram o subespaço das soluções de (3.30). São por isso uma base desse subespaço e a dimensão desse subespaço é 2.

Exemplo 3.13. Verifiquemos se os vectores do seguinte conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes.

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\}.$$

Consideremos a combinação linear nula,

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

e calculemos para que valores de α_1, α_2 e α_3 ela é satisfeita.

Reescrevendo (3.31) tem-se o sistema homogéneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde,

$$\alpha_2 = \frac{4\alpha_3}{2} = 2\alpha_3$$
$$\alpha_1 = -2\alpha_3$$

Designando $\alpha_3 = k$ vem,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O que significa que a combinação linear (3.31) se anula também para valores de α_1, α_2 e α_3 não simultaneamente nulos. Consequentemente os vectores dados são linearmente dependentes tendo-se, por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 3.7 *Seja A uma matriz real de ordem $m \times n$. O subespaço de $\mathbb{R}^n$ formado pelas soluções do sistema homogéneo $Ax = 0$ chama-se núcleo ou espaço nulo de A e representa-se por $N(A)$.*

Pode provar-se, Noble [11], o seguinte

Teorema 3.11 *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. O espaço nulo de A é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n - c(A)$.*$\square$

Exemplo 3.14. O núcleo da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é o subespaço de $\mathbb{R}^6$ formado pelos vectores $x = (x_i)$ de $\mathbb{R}^6$ que verificam

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A dimensão de $N(A)$ é 2 e os vectores

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

formam uma base de $N(A)$.

3.8 Exercícios

1. Resolva os sistemas seguintes por substituição inversa.

   ✓(a) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_3 = 3 \end{cases}$

   ✓(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ -3x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ 2x_3 + 5x_4 = -3 \\ -7x_4 = -7 \end{cases}$

✓2. Calcule a solução do sistema

$$\begin{cases} 3x_1 & = -6 \\ -4x_1 + 3x_2 & = 11 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 & = 1 \end{cases}$$

✓3. Use o método de eliminação de Gauss para resolver os sistemas

   (a) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 1.5 \\ x_1 - x_2 = 0.25 \end{cases}$

* matriz banda (largura da banda $2k+1$)

$|i-j| > k \Rightarrow a_{ij} = 0$

$k = 1 \rightarrow$ matriz diagonal

17×4 ; $4 \times 16 + 4$; $(16+1) \times 4$.

(b) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 \quad = 3 \\ \quad 4x_2 \quad + x_4 = 4 \\ \quad\quad 2x_3 + x_4 = -4 \\ -2x_1 + x_2 \quad + 4x_4 = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -16 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 0 & 26 \\ 0 & 6 & -3 & 68 \end{pmatrix}$$

$2b = 26 \Rightarrow b = 13$

$6b - 3c = 68$

$6 \times 13 - 3c = 68$

$c = \dfrac{-68 + 6 \times 13}{3}$

$c = \dfrac{10}{3}$

$a - 13 + 10/3 = -16$

$a = -16 + 29/3$

$a = \dfrac{-48+29}{3} = \dfrac{-19}{3}$

4. Calcule I_1, I_2, I_3 e I_4 sendo

$$\begin{cases} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 = 9 \\ I_1 \quad - 2I_3 + 7I_4 = 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 = 8 \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 = 10 \end{cases}$$

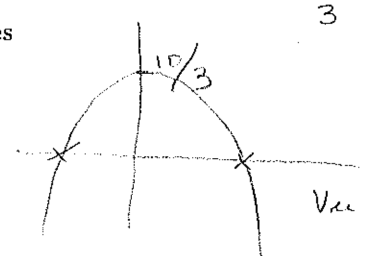
5. Resolva o sistema tridiagonal *

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0.25 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0.50 \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 0.75 \\ -x_3 + 4x_4 - x_5 = 0.50 \\ -x_4 + 4x_5 = 0.25 \end{cases}$$

(*Obs.: Note que os elementos nulos fora da banda se mantêm nulos durante o processo de eliminação.*)

6. Escreva o vector $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ como combinação linear dos vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



Ver pontos

7. Determine a equação da parábola

$$y = ax^2 + bx + c$$

$y = -19/3\, x^2 + 13x + 10/3$.

que passa nos pontos $Q = (-1, -16)$, $R = (1, 10)$ e $S = (2, -4)$. Represente-a graficamente.

8. Determine o polinómio de grau 3,

$$h_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad 0 \le x \le 1,$$

que satisfaz

$$\begin{aligned} h_3(0) &= 1 \\ h_3(1) &= 0, \\ h_3'(0) &= 0, \\ h_3'(1) &= 0. \end{aligned}$$

9. Calcule a inversa das seguintes matrizes

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Calcule a inversa da matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Seja a matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule A^{-1}.

12. Use o método de eliminação de Gauss com escolha parcial de pivot para resolver os sistemas

(a) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x_3 + x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = -5 \end{cases}$

13. Resolva os seguintes sistemas com matriz dos coeficientes banda simétrica.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{\pi^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

14. Determine para que valores de $\lambda \in R$ o sistema seguinte tem solução e nesses casos calcule-a.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

15. Calcule os valores de w para os quais o vector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \end{pmatrix}$$

pertence ao espaço gerado pelos vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

16. Resolva os seguintes sistemas indeterminados escrevendo a sua solução geral como soma duma solução particular do sistema com a solução geral do sistema homogéneo "associado".

(a) $$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = -3 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 16x_4 = -15 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

17. Resolva os seguintes sistemas homogéneos

(a) $$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

18. Determine uma base e a dimensão do subespaço de R^4 formado pelas soluções do sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

19. (a) Determine uma base e a dimensão do subespaço de R^3

$$\Pi = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}.$$

(b) Geometricamente que representa Π?

20. Determine uma base e a dimensão do núcleo das matrizes

(a) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Capítulo 4

DETERMINANTES

"And how many hours a day did you do lessons?" said Alice, in a hurry to change the subject.

"Ten hours the first day" said the Mock Turtle: "nine the next, and so on."

"What a curious plan!" exclaimed Alice.

"That's the reason they're called lessons", the Gryphon remarked: "because they lessen from day to day."

L. Carroll, Alice's Adventures in Wonderland.

O determinante duma matriz quadrada é um número. Historicamente foi já dado grande relevo ao assunto dos determinantes. E, na verdade, os determinantes podem ser usados para discutir e resolver sistemas de equações lineares e para calcular valores próprios de matrizes, os dois problemas numéricos em álgebra linear mais importantes face às aplicações. No entanto constatou-se que os mesmos problemas podem ser resolvidos de modo mais eficiente sem necessidade de recorrer aos determinantes. Apesar da importância que este assunto ainda tem por outras aplicações já não lhe é atribuída a grande enfâse que teve no passado.

4.1 Definição

Seja A uma matriz de ordem n. O determinante de A representa-se por $det(A)$ ou $|A|$ e é (um número) definido por

$$\text{se } n = 1, \text{ isto é } A = (a_{11}), \text{ então } det(A) = a_{11},$$

$$\text{se } n > 1 \text{ então,}$$

$$det(A) = a_{11}det(M_{11}) - a_{12}det(M_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}det(M_{1n}), \quad (4.1)$$

onde M_{1j} denota a matriz de ordem $n-1$ obtida de A retirando-lhe a linha 1 e a coluna j.

Exemplo 4.1. Calculemos o determinante da matriz de ordem 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tem-se $det(A) = 2 \times 3 - 1 \times (-4) = 10$.

381

Exemplo 4.2. Consideremos agora a matriz de ordem 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tem-se,

$$det(A) = 1 \times det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - 0 \times det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 1 \times det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 1 \times [1 \times 3 - (-1) \times (-2)] - 0 + 1 \times [2 \times (-2) - 1 \times 0] = 1 - 0 - 4 = -3.$$

Definição 4.1 *Seja A uma matriz de ordem n. Ao*

$$det(M_{ij})$$

chama-se menor do elemento a_{ij} de A [1]. *A*

$$(-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

chama-se complemento algébrico do elemento a_{ij} de A.

Exemplo 4.3 Dada a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

o complemento algébrico do elemento 6 que está na segunda linha, terceira coluna, é

$$(-1)^{2+3} det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -(1 \times 8 - 2 \times 7) = 6.$$

Recordemos que, por definição, o valor do determinante duma matriz pode ser expresso por um desenvolvimento segundo os elementos da primeira linha da matriz e respectivos complementos algébricos. Porém, pode provar-se, Noble [11], que o valor do determinante duma matriz pode também ser obtido a partir dum desenvolvimento similar segundo qualquer linha ou coluna da matriz.

Teorema de Laplace . Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n. Então,

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} det(M_{kj}), \qquad (1 \leq k \leq n),$$

ou,

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} det(M_{il}), \qquad (1 \leq l \leq n).\square$$

[1] M_{ij} denota a matriz de ordem $n-1$ obtida de A retirando-lhe a linha i e a coluna j.

Exemplo 4.4. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

tem-se

$$det(A) = (-1)^{1+1} \times 1 \times det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + 0 + 0 +$$

$$+(-1)^{4+1} \times 1 \times det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 20 + 0 + 0 - 2 = 18.$$

4.2 Propriedades

As propriedades 4.1 a 4.6 que seguem, provam-se facilmente usando o teorema de Laplace.

Propriedade 4.1 *Se D é uma matriz diagonal de ordem n,*

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & d_n \end{pmatrix},$$

então $det(D) = d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_n$. Consequentemente, $det(I_n) = 1$.

Propriedade 4.2 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz triangular de ordem n. Então $det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}$.*

Exemplo 4.5. Dadas as matrizes

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tem-se

$$det(D) = 2 \times (-1) \times 4 = -8,$$

$$det(L) = 1 \times 1 \times 1 = 1,$$

$$det(U) = 4 \times (-1) \times 0 \times 1 = 0.$$

Propriedade 4.3 *Seja A uma matriz de ordem n. Então $det(A^T) = det(A)$.*

Propriedade 4.4 *Se todos os elementos duma linha ou duma coluna duma matriz A são nulos, $det(A) = 0$.*

Propriedade 4.5 *Se B resulta de A por multiplicação dos elementos duma linha ou coluna de A por um número α, então $det(B) = \alpha det(A)$.*

Propriedade 4.6 *Se A é uma matriz de ordem n, $det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$.*

Propriedade 4.7 *Se B resulta de A por troca de duas linhas ou duas colunas, então $det(B) = -det(A)$.*

Demonstração: Em Noble [11].

Propriedade 4.8 *Seja A uma matriz de ordem n. Se A tem duas linhas ou duas colunas iguais, $det(A) = 0$.*

Demonstração: Seja $det(A)$ o valor do determinante de A. Troquemos entre si as duas linhas (ou colunas) que são iguais. Da propriedade 4.7. resulta que o valor do determinante da matriz resultante é $-det(A)$. Como a matriz não se alterou vem $det(A) = -det(A)$, logo $det(A) = 0$.

Propriedade 4.9 *Seja A uma matriz de ordem n. Se a matriz B resulta de A adicionando a uma linha (coluna) um múltiplo de outra linha (coluna), então $det(B) = det(A)$.*

Demonstração: Em Steinberg [14].

Propriedade 4.10 *Sejam A e B matrizes de ordem n. Então*

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Demonstração: Em Stewart [16].

Propriedade 4.11 *Seja A uma matriz de ordem n. A é não singular se e só se $det(A) \neq 0$.*

Demonstração: Suponhamos A não singular.
Então de $AA^{-1} = I_n$ segue-se $det(AA^{-1}) = det(I_n)$, ou, $det(A)det(A^{-1}) = 1$, logo $det(A) \neq 0$.

Para provar que $det(A) \neq 0$ implica A não singular admitamos que A é singular. Então o sistema $Ax = 0$ tem solução não trivial. Seja x uma solução não nula. Seja U uma matriz não singular cuja primeira coluna é x (justifique que existe tal matriz). Então a primeira coluna de AU é nula, logo pela propriedade 4.4, $det(AU) = 0$. Mas $det(AU) = det(A)det(U)$. Como U é não singular $det(U) \neq 0$, donde seria $det(A) = 0$. □

Note-se que se A é não singular

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

det $A \neq 0 \Rightarrow A$ ñ singular

A singular $\Rightarrow$ det$A = 0$

$Ax = 0$ solução ñ nula

4.3 Cálculos com determinantes → não sai no mini-teste

Vamos começar por ver como o determinante duma matriz pode ser eficientemente calculado usando eliminação Gaussiana.

O valor do determinante duma matriz não se altera se sobre ela fôr realizada a operação elementar que consiste na substituição duma linha pela sua soma com outra multiplicada por um número. O valor do determinante 'muda' de sinal se forem trocadas duas linhas.

Consequentemente, se por uma sequência finita destas duas operações elementares a matriz A fôr transformada numa matriz $U = (u_{ij})$ triangular superior, então

$$det(A) = (-1)^l u_{11} u_{22} \dots u_{nn},$$

onde l denota o número de trocas de linhas efectuadas.

Deste modo o processo de redução de eliminação Gaussiana pode ser usado para calcular o valor do determinante duma matriz [2].

Exemplo 4.6 Calculemos o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tem-se

$$det(A) = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 4 & -2 \\ & & & 4.5 \end{pmatrix}.$$

Donde

$$det(A) = 1 \times 1 \times 4 \times 4.5 = 18.$$

O seguinte teorema descreve a chamada *Regra de Cramer* para resolver sistemas de equações.

Teorema 4.1 *Seja $Ax = b$ um sistema de n equações em n incógnitas. Então,*
i) Se $det(A) \neq 0$ o sistema $Ax = b$ tem solução única;
ii)Se $det(A) \neq 0$ a solução $x = (x_i)$ pode ser obtida de

$$x_i = \frac{det(A^{(i)})}{det(A)}, \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{4.2}$$

onde $A^{(i)}$ denota a matriz que resulta de A substituindo a coluna i pelo vector b dos termos independentes.

[2] Para um comentário sobre a eficiência deste método leia o Apêndice D.

Demonstração: Em Steinberg [14].□

Exemplo 4.7. Vamos usar a Regra de Cramer para resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ \quad\quad x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 \quad\quad = -1 \end{cases}.$$

Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

então,

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tem-se, $det(A) = -4$, $det(A^{(1)}) = -4$, $det(A^{(2)}) = 0$, $det(A^{(3)}) = 4$, donde

$$x_1 = -4/(-4) = 1, \qquad x_2 = 0/(-4) = 0, \qquad x_3 = 4/(-4) = -1.$$

Determinantes também podem ser usados para calcular a inversa duma matriz.

Definição 4.2 *Seja A uma matriz de ordem n. Seja A_{ij} o complemento algébrico do elemento a_{ij} de A. A transposta da matriz quadrada de ordem n cujo elemento na posição (i, j) é A_{ij}, chama-se matriz adjunta de A e representa-se por $Adj(A)$, isto é,*

$$Adj(A) = (A_{ij})^T.$$

$\rightarrow (-1)^{i+j} det$

$M_{ij} = a'_{ij}$

Exemplo 4.8. Calculemos a adjunta da matriz A_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} \overset{a_{11}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$[a'_{ij}] = (-1)^{i+j} det\ M_{ij}$.

$a'_{11} = (-1)^{1+1} det\ M_{11}$.

Tem-se,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.2 *Seja A uma matriz de ordem n. Então,*
i) A é invertível se e só se $det(A) \neq 0$;
ii)Se A é invertível, então

$$A^{-1} = (\frac{1}{det(A)})Adj(A).$$

$(\lambda - 1)(a\lambda^2 + b\lambda + c)$ $\quad (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 3\lambda - 1) = 0$.

$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda - a\lambda^2 - b\lambda - c$

$a\lambda^3 + (b-a)\lambda^2 + (c-b)\lambda - c = 0$

Demonstração: Em Noble [11].□ $\quad a = -1 \quad b + 1 = 4 \quad c - b = -4$

$b = 3$ $\quad c = -1$.

Exemplo 4.9. Calculemos pelo método da adjunta, a inversa da matriz do exemplo anterior. Tem-se

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & -1 & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Sobre a eficiência destes métodos sugerimos a leitura do Apêndice D.

4.4 Exercícios

1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

   (a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

   (b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

   (c) $\begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{pmatrix}$.

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

   (e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Determine os valores de λ para os quais se tem

$$det(A - \lambda I_3) = 0.$$

3. Determine para que valores de x se verifica

$$det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 0.$$

4. Escreva o valor do determinante de cada uma das matrizes seguintes sem realizar cálculo numérico.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Calcule

(a) $det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(b) $det \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 4 \\ 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

(c) $det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Seja A uma matriz de ordem n tal que $det(A) = 1$. Escreva a que é igual

(a) $det(-A)$.

(b) $det(3A)$.

(c) $det(A^{-1}$.

(d) $det(P^{-1}AP)$.

7. Calculando o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix},$$

verifique que ela é invertível se e só se $a \neq b$.

8. Seja A uma matriz de ordem n cuja soma dos elementos de cada linha é igual a zero. Justifique que $det(A) = 0$.

(*Obs. : Se x é um vector com n componentes todas iguais a 1 note que* $Ax = 0$.)

$det(AA^T) = 1 \quad det\, A\, det\, A^T = 1$

9. Prove que se R é uma matriz ortogonal então $det(R)$ é igual a 1 ou a -1.

$(det\, A)^2 = 1$

10. Calcule usando eliminação Gaussiana o determinante de cada uma das matrizes seguintes:

$det\, A = \pm 1$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Calcule o determinante da matriz seguinte usando primeiro o teorema de Laplace e depois eliminação Gaussiana,

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 16 & 8 & -10 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

A matriz é invertível?

12. Use a regra de Cramer para resolver os sistemas

(a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$

13. Use o método da adjunta para calcular a inversa de:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(*Obs.: Note que a matriz é simétrica.*)

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(*Obs.: Note que a matriz é triangular superior.*)

14. Prove que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

onde $\Delta = ad - bc \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \mathrm{Adj}\, A = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det A = a \times d - b \times c$$

$$\mathrm{Adj}\, A = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Capítulo 5

Valores e vectores próprios

"I guess this is not so obvious, but it is true - you cannot turn the earth in a way that moves every point."

G. Strang, Linear Algebra and Its Applications.

O número e a variedade das aplicações que requerem o conhecimento de valores e vectores próprios duma matriz, fazem deste problema, a par do da resolução de sistemas de equações lineares, os dois mais importantes problemas numéricos em álgebra linear.

5.1 Definições básicas

Definição 5.1 *Seja A uma matriz complexa de ordem n. Então $x \in C^n$ é vector próprio de A associado ao valor próprio $\lambda \in C$ se e só se*

$$x \neq 0 \qquad e \qquad Ax = \lambda x.$$

Representaremos o conjunto dos valores próprios de A por $\lambda(A)$.

Exemplo 5.1. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2 é valor próprio de A e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ um vector próprio associado ao valor próprio 2. Pois

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

439

Um vector próprio está associado apenas a um valor próprio, mas, a um valor próprio estão associados uma infinidade de vectores próprios. Pois, se x é vector próprio associado ao valor próprio λ de A, então $x \neq 0$ e $Ax = \lambda x$. Mas αx ($\alpha \neq 0$) verifica

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x),$$

logo αx é também vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

O seguinte teorema fornece um processo de cálculo dos valores próprios duma matriz.

Teorema 5.1 *Seja A uma matriz complexa de ordem n. Então $\lambda \in C$ é valor próprio de A se e só se $(A - \lambda I)$ é singular.*

Demonstração: Provemos, primeiro, a condição necessária. Se λ é valor próprio de A, então por definição,

$$Ax = \lambda x \qquad \text{para algum} \qquad x \neq 0. \tag{5.1}$$

Mas (5.1) é equivalente a

$$(A - \lambda I)x = 0 \qquad \text{para algum} \qquad x \neq 0. \tag{5.2}$$

Ora (5.2) refere um sistema homogéneo com soluções além da nula. Isso implica $c(A - \lambda I) < n$ e portanto $(A - \lambda I)$ é singular.

Reciprocamente, se $(A - \lambda I)$ é singular, então o sistema homogéneo

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

tem soluções alem da trivial e essas soluções (não nulas) satisfazem $Ax - \lambda Ix = 0$,isto é, $Ax = \lambda x$.□

Porém $(A - \lambda I)$ é singular se e só se

$$det(A - \lambda I) = 0. \tag{5.3}$$

Então, os valores próprios de A são as raízes da equação (5.3).

Definição 5.2 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A*

$$det(A - \lambda I) = 0,$$

chama-se equação característica de A.

Exemplo 5.2.Dada a matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a sua equação característica é $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 3) = 0$. Os valores próprios da matriz são as raízes da sua equação característica, tendo-se neste caso

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = (3/2) + (\sqrt{3}/2)i, \qquad \lambda_3 = (3/2) - (\sqrt{3}/2)i.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)-6\right]$$

$$= (1-\lambda)\left(4-5\lambda+\lambda^2-6\right) = 0$$

Definição 5.3 *Seja A uma matriz de ordem n. Ao polinómio de grau n em λ,*

$$det(A - \lambda I),$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2-5\lambda-2\right)=0$$

chama-se polinómio característico de A.

Se A é uma matriz quadrada de ordem n, prova-se que o seu polinómio característico é de grau n. Os valores próprios de A são os zeros do seu polinómio característico e A terá n valores próprios. Os valores próprios complexos com parte imaginária não nula duma matriz complexa ocorrem em pares conjugados.

Se um valor próprio de uma matriz ocorre k vezes diz-se que tem multiplicidade k. Se $k = 1$ é um valor próprio simples, e se $k > 1$ é um valor próprio múltiplo.

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2}$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\lambda = 1 \qquad \lambda = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$$

$$\lambda = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$$

Exemplo 5.3. Calculemos um vector próprio associado ao valor próprio 7 da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por definição, um vector próprio $x \in C^3$, associado ao valor próprio 7 da matriz A, satisfará $(A - 7I)x = 0$, com $x \neq 0$. Isto é, o sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donde,

$$x_3 = 0$$

$$x_1 = \frac{2x_2 - 4 \times 0}{-4} = -0.5x_2.$$

$$\begin{cases} \cancel{x} + 2y + 3z = \cancel{x} \\ \cancel{y} + 2z = y \\ 3x + 4z = z \end{cases}$$

Ou, designando $x_2 = \alpha$,

$$x_1 = -0.5\alpha$$

$$x_2 = \alpha$$

$$x_3 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ 2z = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Consequentemente, qualquer vector que possa ser escrito na forma

$$\alpha \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

com $\alpha \neq 0$, é vector próprio associado ao valor próprio 7 de A.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.2 Algumas propriedades

Teorema 5.2 *Seja A uma matriz complexa de ordem n. Seja λ um valor próprio de A e x um vector próprio associado ao valor próprio λ de A.Então:*

i)Se $\alpha \in C$ e $\alpha \neq 0$, $\alpha\lambda$ é um valor próprio de αA e x um vector próprio correspondente.

ii)Se $p \in C$, $\lambda - p$ é um valor próprio de $A - pI$ e x um vector próprio correspondente.

iii)Se A é não singular então $\lambda \neq 0$. λ^{-1} é valor próprio de A^{-1} e x um vector próprio correspondente.

$Ax = \lambda x$

$(\alpha A)x = (\alpha\lambda)x$

$(A - pI)x = Ax - px = \lambda x - px = (\lambda - p)x$

Demonstração: i) e ii) ficam como exercício.

Note-se que se $\lambda = 0$ então do teorema 5.1 A é singular. Também se A é não singular $\lambda \neq 0$. Assim

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (\lambda^{-1}A^{-1})Ax = (\lambda^{-1}A^{-1})\lambda x \Rightarrow \lambda^{-1}Ix = (\lambda^{-1}\lambda)A^{-1}x.$$

Donde

$$A^{-1}x = \lambda^{-1}x. \ \square$$

Teorema 5.3 *Seja A uma matriz de ordem n e A^T a sua transposta. Então, se λ é valor próprio de A tambem é valor próprio de A^T e reciprocamente. Isto é*

$$\lambda(A) = \lambda(A^T).$$

Demonstração: Note-se que os polinómios característicos de A e A^T são idênticos,

$$det(A - \lambda I) = det(A - \lambda I)^T = det(A^T - \lambda I).$$

$\square$

Teorema 5.4 *Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz diagonal ou triangular, $\lambda(A) = \{a_{ii} : i = 1, \ldots, n\}$.*

Demonstração: Resulta de (5.3), teorema 5.1 e propriedades 4.1 e 4.2.$\square$

Exemplo 5.4. Consideremos a matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3 é valor próprio de multiplicidade 3, 4 é valor próprio de multiplicidade 2.

Teorema 5.5 *Se x_1 e x_2 são vectores próprios duma matriz A, correspondendo aos valores próprios λ_1 e λ_2 respectivamente, e se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então x_1 e x_2 são linearmente independentes.*

Demonstração: Consideremos a combinação linear nula

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0. \tag{5.4}$$

Multiplicando ambos os membros de (5.4) à esquerda por A tem-se

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = A.0,$$

$$\alpha_1(Ax_1) + \alpha_2(Ax_2) = 0,$$

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 = 0.$$

De (5.4) vem $\alpha_1 x_1 = -\alpha_2 x_2$, donde

$$\lambda_1(-\alpha_2 x_2) + \alpha_2 \lambda_2 x_2 = 0,$$

ou,

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_2 x_2 = 0. \tag{5.5}$$

Como por hipótese $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tem-se $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ e dado que $x_2 \neq 0$ então (5.5) implica $\alpha_2 = 0$. Mas, sendo $\alpha_2 = 0$, de (5.4) resulta $\alpha_1 x_1 = 0$, isto é, $\alpha_1 = 0$.□

Corolário 5.1 *Vectores próprios associados a valores próprios distintos duma matriz são linearmente independentes.*

5.3 Matrizes semelhantes

Definição 5.4 *Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Então, se existe uma matriz P de ordem n, invertível, tal que*

$$B = P^{-1}AP, \tag{5.6}$$

A e B dizem-se semelhantes.

Teorema 5.6 *Sejam A e B matrizes complexas de ordem n. Seja P não singular. Então λ é valor próprio de A sendo x um vector próprio associado, se e só se λ é valor próprio de $(P^{-1}AP)$ com vector próprio associado $(P^{-1}x)$.*

Demonstração: Como P é não singular, se $x \neq 0$ então $P^{-1}x \neq 0$ e reciprocamente.

caso contrário!
$P(P^{-1}x) = 0$ $x = 0$

Consideremos $Ax = \lambda x$. Tem-se

$$P^{-1}Ax = P^{-1}\lambda x,$$

e,

$$P^{-1}A(PP^{-1})x = \lambda P^{-1}x,$$

Finalmente,

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}x) = \lambda(P^{-1}x). \ \square$$

Deste teorema podemos concluir que se A e B são matrizes semelhantes então $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Exemplo 5.5. Consideremos as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e calculemos $P^{-1}AP$. Como se pode verificar

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tem-se

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donde os valores próprios de A são -2 e 4, sendo este último de multiplicidade 2.

5.4 Vectores ortogonais

Definição 5.5 *Sejam x e y vectores de C^n. Ao número representado por (x, y) e dado por*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i,$$

chama-se produto interno de x e y.

Definição 5.6 *Sejam x e y vectores não nulos de C^n. Se $(x, y) = 0$ diz-se que x e y são ortogonais.*

Definição 5.7 *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vectores não nulos de C^n. Se*

$$(x_i, x_j) = 0 \quad \text{quando} \quad i \neq j, \quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, m),$$

os vectores dizem-se mutuamente ortogonais.

Exemplo 5.7. Os vectores

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

são mutuamente ortogonais.

Teorema 5.7 *Se $x_1, x_2, \ldots, x_m$ formarem um conjunto de vectores de C^n não nulos e mutuamente ortogonais, então são linearmente independentes.*

Demonstração: Consideremos a combinação linear nula

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = 0. \tag{5.7}$$

Seleccionemos x_k sendo $1 \leq k \leq m$ e calculemos

$$x_k{}^H(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m) = x_k{}^H 0,$$

ou,

$$\alpha_1 x_k{}^H x_1 + \alpha_2 x_k{}^H x_2 + \ldots + \alpha_k x_k{}^H x_k + \ldots + \alpha_m x_k{}^H x_m = 0,$$

ou,

$$\alpha_k {x_k}^H x_k = 0,$$

visto que, sendo os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_m$ mutuamente ortogonais, se tem ${x_k}^H x_i = (x_k, x_i) = 0$ para $k \neq i$. Uma vez que, por hipótese, $x_k \neq 0$, tem-se ${x_k}^H x_k \neq 0$, logo

$$\alpha_k {x_k}^H x_k = 0 \qquad \text{se e só se} \qquad \alpha_k = 0.$$

O processo pode ser repetido para cada vector x_k, $k = 1, \ldots, m$, concluindo-se que se (5.7) se verifica, então $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. □

Definição 5.8 *Se x é um vector de C^n ao número real não negativo representado por $\|x\|$ e definido por*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

dá-se o nome de norma do vector x.

Se $\|x\| = 1$ o vector x diz-se normalizado.

5.5 Matrizes reais e simétricas e matrizes hermitianas

Nesta secção enunciaremos algumas propriedades dos valores e vectores próprios de matrizes hermitianas e de matrizes reais e simétricas. Tais matrizes ocorrem frequentemente em aplicações.

Teorema 5.8 *Os valores próprios duma matriz hermitiana são numeros reais.*

Demonstração : em Steinberg [14].□

Corolário 5.2 *Os valores próprios duma matriz real e simétrica são numeros reais.*

Teorema 5.9 *Vectores próprios duma matriz hermitiana associados a valores próprios distintos são ortogonais.*

Demonstração: em Steinberg [14].□

Corolário 5.3 *Vectores próprios duma matriz real e simétrica associados a valores próprios distintos são ortogonais.*

Finalmente, prova-se, Steinberg [14]:

Teorema 5.10 *Se A é uma matriz hermitiana, de ordem n, com valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, não necessariamente distintos, então existe uma matriz unitária U tal que $U^H A U = D$, sendo D uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são os valores próprios de A.* □

Teorema 5.11 *Se A é uma matriz real e simétrica, de ordem n, com valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, não necessariamente distintos, então existe uma matriz ortogonal U tal que $U^T A U = D$, sendo D uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são os valores próprios de A.* □

5.6 Discos de Gerschgorin

Na secção 5.1 provámos que os valores próprios duma matriz de ordem n são os zeros do seu polinómio característico, um polinómio de grau n. Mas, para $n \geq 3$ é pouco prático calcular esse polinómio e, ainda, as suas raízes. Frequentemente, em muitas aplicações, é suficiente conhecer apenas uma região do espaço $\mathbb{R}$ (ou C) onde os valores próprios se encontram. Em tais casos o método descrito em seguida é util.

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz complexa de ordem n. Então os valores próprios de A estão na união dos discos

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i, \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{5.8}$$

sendo

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Aos discos (5.8) chamam-se discos de Gerschgorin.

Demonstração: De $Ax = \lambda x$ escrevemos

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

ou,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j + a_{ii} x_i = \lambda x_i, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

donde,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j = (\lambda - a_{ii}) x_i, \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{5.9}$$

Seja x_k a componente de x tal que

$$|x_k| = \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_j|\}. \tag{5.10}$$

Note-se que, sendo $x \neq 0$, então $x_k \neq 0$.

Dividindo ambos os membros da equação k de (5.9) por x_k,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} \frac{x_j}{x_k} = \lambda - a_{kk}.$$

Ou,

$$|\lambda - a_{kk}| = |\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} \frac{x_j}{x_k}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|}.$$

De (5.10) vem $|x_j|/|x_k| \leq 1$ para $j = 1, \ldots, n$, logo

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|. \tag{5.11}$$

Como o valor de k não pode ser determinado à priori conclui-se que os valores próprios de A pertencem à união dos discos de centro em a_{kk} e raio $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$ para $k = 1, \ldots, n$. $\square$

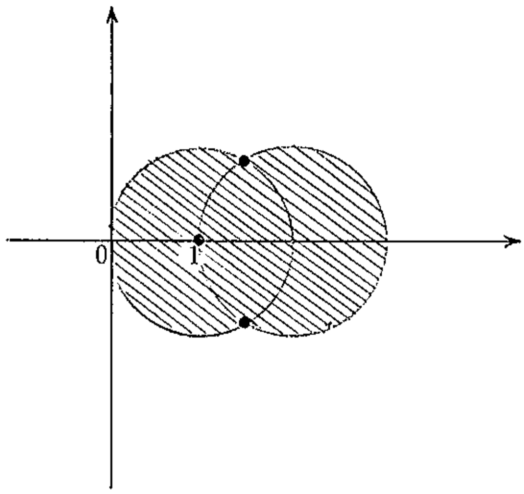
Exemplo 5.8. Consideremos a matriz introduzida no exemplo 5.2,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os seus discos de Gerschgorin são

$$|\lambda - 2| \leq 1$$
$$|\lambda - 1| \leq 1$$
$$|\lambda - 1| \leq 0.$$

A figura seguinte representa graficamente os discos de Gerschgorin de A, bem como os seus valores próprios.



5.7 Exercícios

1. Calcule os valores próprios das matrizes

   (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. det $(A - \lambda I) = 0$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(f) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Substitua a terceira linha pela sua soma com a segunda multiplicada por -2 transformando-a numa matriz triangular superior U.

(b) Calcule os valores próprios de A e de U e verifique que as matrizes não têm o mesmo conjunto de valores próprios.

3. (a) Determine vectores próprios associados a cada um dos valores próprios da matriz A dada no exercício anterior.

(b) Indique uma base para cada um dos subespaços associados aos valores próprios de A. V. p 2

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $x = y = -z$

$\begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ base

4. Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule os valores próprios de A indicando a sua multiplicidade.

(b) Calcule vectores próprios associados a cada um dos valores próprios de A.

5. Seja A uma matriz de ordem 3 com valores próprios $-1, 1$ e 2. Indique os valores próprios duma matriz B relacionada com A do modo seguinte:

(a) $B = 2A$. $2\times -1,\ 2\times 1,\ 2\times 2 = -2, 2, 4$

(b) $B = -A$. $1, -1, -2$

(c) $B = A - I_3$. $1-1,\ -1-1,\ 2-1 = 0, -2, 1$

(d) $B = A + pI_3$. $1+1,\ -1+1,\ 2+1 = 2, 0, 3$

(e) $B = A^{-1}$. $-1, 1, 1/2$

(f) $B = A^T$. $-1, 1, 2$

$AA^T = A^TA = I$

$Ax = \lambda x$

$A^T y = \lambda y$

$A^T x = \lambda^{-1} x$

$(A^T x)^T = \lambda^{-1} x^T \qquad x^T A = \lambda^{-1} x^T$

6. (a) Prove que os valores próprios duma matriz ortogonal (ou unitária) tem módulo igual a 1.

(*Obs.: Note que se λ é valor próprio de A então $A^T x = \lambda^{-1}x$ e $Ay = \lambda y$. De $(A^T x)^T = \lambda^{-1}x^T$ vem $x^T A y = \lambda^{-1}x^T y$.*)

(b) Calcule os valores próprios de

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$x^T A x = \lambda^{-1} x^T x$

$x^T \lambda x = \lambda^{-1} x^T x$

$\lambda x^T x = \lambda^{-1} x^T x$

$\lambda = \lambda^{-1}$

$\lambda^2 = 1$

$\lambda = \pm 1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

7. Dê exemplo duma matriz diagonal ou triangular de ordem 5 com um valor próprio de multiplicidade igual a dois e três valores próprios simples.

8. Dê exemplo duma matriz diagonal ou triangular com um valor próprio real e um par de valores próprios complexos conjugados.

9. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dada a matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calcule C^{-1}.

Determine $C^{-1}AC$ e escreva os valores próprios de A.

10. Calcule os valores próprios da matriz simétrica ortogonal $I_3 - uu^T$ onde $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(*Obs.: Note que os valores próprios são números reais de módulo 1, isto é, iguais a 1 ou a* -1.)

11. Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifique que a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ o & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

é ortogonal.

(b) Calcule P^TAP.

(c) Do resultado da alínea anterior escreva os valores próprios de A.

12. Calcule vectores próprios normalizados associados a cada um dos valores próprios de

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Designando por U a matriz cujas colunas são os vectores próprios calculados verifique que

$$U^TAU = D,$$

sendo D uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são os valores próprios de A.

13. Determine e represente graficamente os discos de Gerschgorin das matrizes

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

14. Conhecidos os discos de Gerschgorin das matrizes A, B e C do exercício anterior pode tirar alguma conclusão sobre a invertibilidade destas matrizes?

15. Localize os valores próprios das seguintes matrizes simétricas.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & \\ -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

16. Prove que uma matriz estritamente diagonal dominante é não singular.