Folha 7A – Derivação sob o sinal de integral, áreas de regiões planas

1. Determine uma função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e uma constante $k \in \mathbb{R}$ tais que
$$\int_k^x f(t)\,dt = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Determine a derivada da função definida por:

   (a) $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\,dt,\ \forall x \in \mathbb{R}^+;$

   (b) $f(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} \operatorname{sen}(u + e^u)\,du,\ \forall x \in \mathbb{R}^+.$

3. Determine a área da região plana limitada pelas curvas de equações:

   (a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

   (b) $x = 0,\quad x = 1,\quad y = 3x,\quad y = -x^2 + 4;$

   (c) $x = 0,\quad x = \dfrac{\pi}{2},\quad y = \operatorname{sen} x,\quad y = \cos x;$

   (d) $y = 0,\quad x = -\ln 2,\quad x = \ln 2,\quad y = \operatorname{sh} x.$

4. Estabeleça um integral (ou uma soma de integrais) que dê a área de cada uma das seguintes regiões planas:

   (a) $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge\ 0 \leq y \leq x\big\};$

   (b) $B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| \leq 1\big\};$

   (c) $C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq 3 \ \wedge\ y \geq x^2 - 4x + 3 \ \wedge\ y \leq -x^2 + 5x - 4\big\}.$