Aviso

Estas páginas **NÃO** constituem uma sebenta.

São apenas notas que complementam **algumas** das matérias leccionadas, no ano lectivo 2005/2006, nas aulas de Análise de Circuitos da Licenciatura em Engenharia de Comunicações.

Há **matérias importantes** que fazem parte do programa, foram leccionadas e **não aparecem nestas notas**.

Todas as matérias que foram leccionadas são amplamente tratadas na **bibliografia recomendada**.

Apresentação

A capacidade de analisar circuitos eléctricos – que são o suporte tecnológico das telecomunicações actuais – é indispensável a qualquer licenciado em Engenharia de Comunicações.

Nesta disciplina introduzem-se alguns métodos básicos de análise de circuitos eléctricos de corrente contínua e de corrente alternada sinusoidal.

Objectivos da Disciplina

Analisar um circuito eléctrico é reconhecer as leis físicas que são impostas ao circuito por cada um dos seus componentes, as leis físicas que são impostas aos componentes pelo próprio circuito e os efeitos – em cada componente e na globalidade do circuito – da coexistência dessas leis. Em concreto, depois de frequentar a disciplina os alunos deverão ser capazes de:

- analisar o estado estacionário de circuitos eléctricos de corrente contínua alimentados por fontes lineares de energia;
- analisar o estado transitório de circuitos RC e RL de primeira ordem;
- analisar o estado estacionário de circuitos de corrente alternada sinusoidal monofásica com resistências, condensadores e bobinas;
- calcular a tensão, a corrente e a potência em jogo em cada elemento de um circuito eléctrico;
- calcular o valor máximo, o valor mínimo e o valor médio de um sinal eléctrico;
- calcular o período, a frequência e o valor eficaz de um sinal eléctrico periódico;
- calcular a amplitude, a frequência e a fase de cada harmónico de um sinal periódico previamente decomposto em Série de Fourier;
- calcular o desfasamento entre sinais alternados sinusoidais com a mesma frequência.

Pré-requisitos

Para obter um rendimento satisfatório nas aulas de Análise de Circuitos, os alunos devem possuir conhecimentos elementares de electricidade e também de cálculo diferencial e integral. Recomenda-se que tenham frequentado, previamente, as disciplinas de Física e Análise Matemática I.

Programa

1. Circuitos Resistivos

- Resistência de um circuito;
- Resistências em série;
- Resistências em paralelo;
- Divisor de tensão;
- Divisor de corrente.

2. Fontes Lineares de Energia

- Fonte ideal de tensão;
- Fonte ideal de corrente;
- Fontes ideais em série;
- Fontes ideais em paralelo;
- Fontes reais;
- Aproximação de uma fonte de energia a uma fonte ideal de tensão ou a uma fonte ideal de corrente;
- Fontes independentes e fontes dependentes;
- Transferência máxima de potência de uma fonte para uma carga resistiva.

3. Métodos de Análise de Circuitos

- Leis de Kirchoff;
- Método das Correntes Fictícias;
- Método das Tensões Nodais;
- Princípio da Sobreposição;
- Teorema de Thévenin;
- Teorema de Norton.

4. Sinais

- Sinais constantes;
- Sinais variáveis no tempo;
- Valores característicos de sinais;
- Fenómenos transitórios e regime permanente;
- Análise de Fourier.

5. Dispositivos de Armazenamento de Energia

- Condensador;
- Bobina;
- Circuitos com resistências e condensadores;
- Circuitos com resistências e bobinas;
- Constante de tempo de um circuito.

6. Circuitos de Corrente Alternada Monofásica

- Desfasamento entre duas grandezas alternadas sinusoidais;
- Fasor;
- Resistência, indutância e capacitância;
- Impedância;
- Potências activa, reactiva e aparente;
- Factor de potência;
- Tensões, correntes e potências em circuitos de corrente alternada com resistências, condensadores e bobinas.

Elementos de Estudo

- Meireles, Vítor; ***Circuitos Eléctricos;*** LIDEL – Edições técnicas, LDA, Outubro de 2001.
- Scott, Donald E.; ***An Introduction to Circuit Analysis – A Systems Approach;*** McGraw-Hill, 1987.
- Hayt, William e Kemmerly, J.; ***Engineering Circuit Analysis;*** McGraw Hill, 1987.
- Boylstead, Robert L.; ***Introductory Circuit Analysis (8ª ed.);*** Prentice Hall, 1997.
- Nilsson, James W. e Riedel, Susan A.; ***Electric Circuits (5ª ed.);*** Addison-Wesley, 1996.

Método de Avaliação

A avaliação da aprendizagem faz-se por exame final.

Exigência nas Aulas e na Avaliação

- A matéria não é muita e **o grau de exigência é elevado**.
- Ser-se-á **muito exigente** quanto a **conceitos básicos**.
- Há algumas **condições suficientes de reprovação**.

Regente:	*João Sena Esteves*
E-mail:	*sena@dei.uminho.pt*
Telefone:	*Ext. 3386*
Horário de atendimento:	*Segunda-Feira, das 16h às 18h*
Local de atendimento:	*Gabinete B2-034*

1. Tensão e Corrente

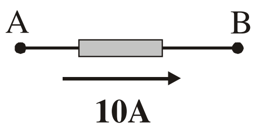
A **tensão eléctrica** (**U**) mede-se em **volt** (**V**).

A **intensidade de corrente eléctrica** (**I**) mede-se em **ampère** (**A**).

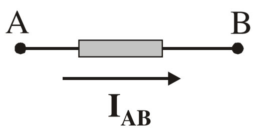
Diz-se (porque é verdade...) que:

- uma **tensão *existe entre* dois pontos**;
- uma **corrente *passa* num condutor ou num componente** de um circuito.

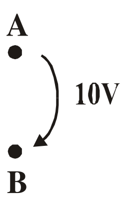
Para tensões e correntes **constantes**...



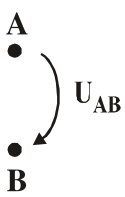
1. A seta indica o **sentido verdadeiro da corrente** que atravessa o receptor.
2. Dentro do receptor, a corrente vai do terminal A para o terminal B.
3. A corrente que atravessa o receptor tem um valor de 10A.



1. A seta indica o **sentido positivo da corrente** que atravessa o receptor.
2. Se, dentro do receptor, a corrente for do terminal A para o terminal B, então o sentido positivo coincide com o sentido real da corrente que atravessa o receptor e $I_{AB}>0$.



1. A seta indica o **sentido verdadeiro da tensão** existente entre o ponto A e o ponto B.
2. O potencial no ponto A é mais elevado que potencial no ponto B.
3. Entre o ponto A e o ponto B existe uma diferença de potencial de 10V.

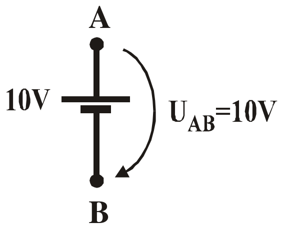


1. A seta indica o **sentido positivo da tensão** existente entre o ponto A e o ponto B.
2. Se o potencial no ponto A for mais elevado que o potencial no ponto B, então o sentido positivo coincide com o sentido real da tensão entre A e B e $U_{AB}>0$.

2. Fonte Ideal de Tensão

Uma **fonte ideal de tensão (constante)** possui **sempre a mesma tensão** entre os seus terminais, independentemente da corrente que debita ou do instante considerado.

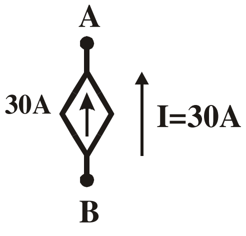
- O sentido e o valor da corrente dependem do circuito ao qual se liga a fonte.
- Uma fonte ideal de tensão **em vazio** é atravessada por uma **corrente nula**.



3. Fonte Ideal de Corrente

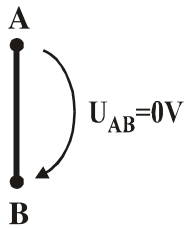
Uma **fonte ideal de corrente (constante)** debita **sempre a mesma corrente**, independentemente da tensão que existe entre os seus terminais ou do instante considerado.

- O sentido e o valor da tensão dependem do circuito ao qual se liga a fonte.
- Uma fonte ideal de corrente **curto-circuitada** possui uma **tensão nula** entre os seus terminais.

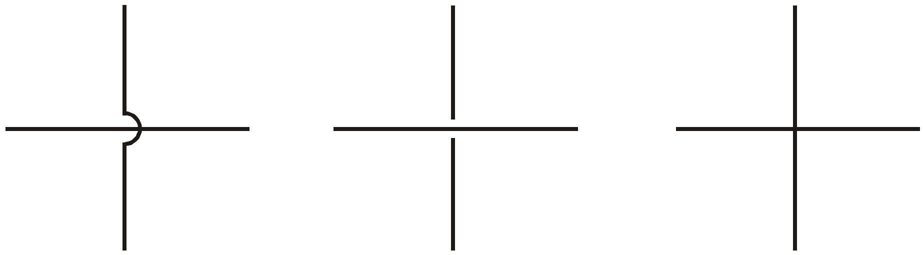


4. Condutor Ideal

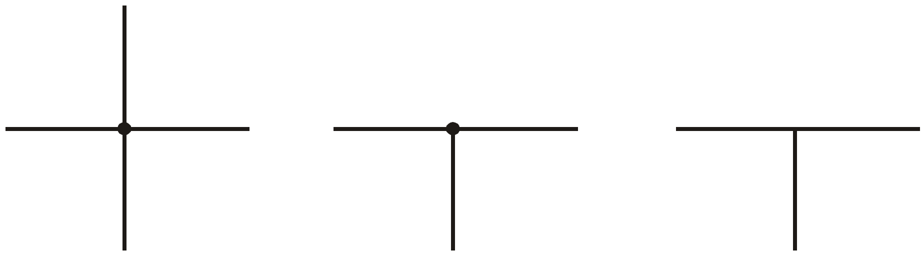
Um **condutor ideal** mantém uma **tensão de 0V entre os seus terminais**, independentemente do valor e do sentido da corrente que o atravessa. Todos os seus pontos estão **sempre ao mesmo potencial**.



Representação de dois **condutores ideais isolados** um do outro:

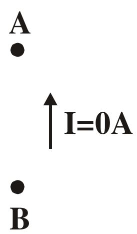


Representação de dois **condutores ideais ligados** um ao outro:



5. Circuito Aberto

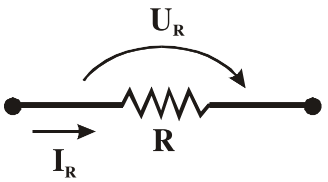
Um **circuito aberto entre dois pontos** é atravessado por uma **corrente de 0A**, independentemente do valor e do sentido da tensão que existe entre esses pontos.



6. Resistência e Lei de Ohm

Uma **resistência** é atravessada por uma **corrente que é proporcional à tensão** aplicada entre os seus terminais, ou seja

$$\boxed{\frac{U_R}{I_R} = \text{constante}}$$



A **resistência eléctrica** (**R**) mede-se em **ohm** (**Ω**). Para os sentidos de U_R e de I_R indicados na figura, R é dada por

$$\boxed{R = \frac{U_R}{I_R}}$$ Lei de Ohm

A **Lei de Ohm** aplica-se **exclusivamente às resistências** (em particular, não se aplica às fontes ideais de tensão).

Um **condutor ideal** pode ser visto como uma **resistência de valor nulo**

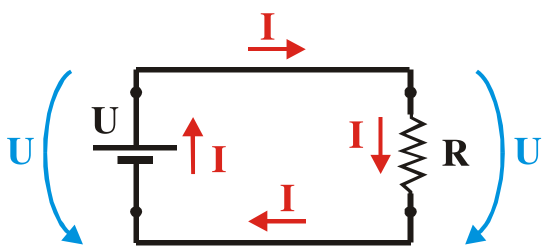
- como R=0, então a tensão entre os terminais do condutor ideal é nula, independentemente do valor e do sentido da corrente que o percorre.

Um **circuito aberto entre dois pontos** pode ser visto como uma **resistência de valor infinito**

- como $R = \infty$, então a corrente que a atravessa é nula, independentemente do valor e do sentido da tensão que existe entre os seus terminais.

Em qualquer resistência de valor finito não nulo

- a **corrente** flui **sempre** do terminal de **potencial mais alto** para o terminal de **potencial mais baixo**;
- o **valor da corrente** depende do **valor da tensão** aplicada aos seus terminais;
- se não houver tensão aos seus terminais, a corrente é nula;
- se não for atravessada por nenhuma corrente, a tensão aos seus terminais é nula.



- **dentro da resistência**, a corrente flui do terminal de **potencial mais alto** para o terminal de **potencial mais baixo**;
- **fora da fonte**, a corrente flui do terminal de **potencial mais alto** para o terminal de **potencial mais baixo**;
- **dentro da fonte**, a corrente flui do terminal de **potencial mais baixo** para o terminal de **potencial mais alto**.

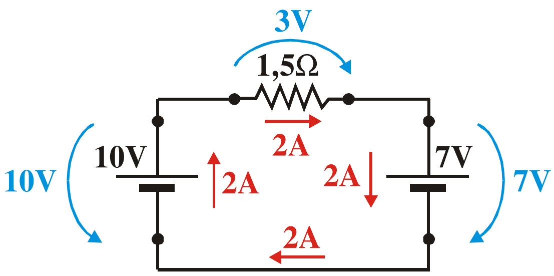
7. Energia e Potência

Um componente de um circuito **recebe energia do circuito** se, dentro desse componente, a corrente fluir do terminal de **potencial mais alto** para o terminal de **potencial mais baixo**.

Um componente de um circuito **fornece energia ao circuito** se, dentro desse componente, a corrente fluir do terminal de **potencial mais baixo** para o terminal de **potencial mais alto**.

A **potência em jogo num componente de um circuito** é a derivada em ordem ao tempo da energia recebida ou fornecida pelo componente ao circuito. O seu valor é igual ao produto do valor da **tensão** que existe entre terminais desse componente pelo valor da **corrente** que o atravessa.

Exemplo



- **dentro da resistência**, a corrente flui do terminal de **potencial mais alto** para o terminal de **potencial mais baixo**, por isso a resistência **recebe energia do circuito**.

  Potência em jogo na **resistência**: $P = 3 \cdot 2 = 6W$

- **dentro da fonte de 10V**, a corrente flui do terminal de **potencial mais baixo** para o terminal de **potencial mais alto**, por isso a fonte **fornece energia ao circuito**.

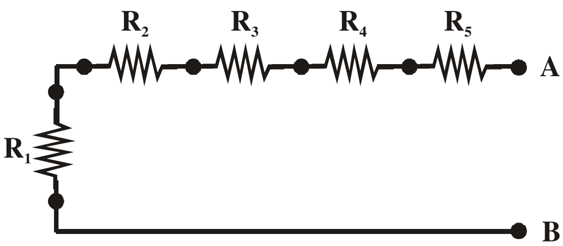
  Potência em jogo na **fonte de 10V**: $P = 10 \cdot 2 = 20W$

- **dentro da fonte de 7V**, a corrente flui do terminal de **potencial mais alto** para o terminal de **potencial mais baixo**, por isso a fonte **recebe energia do circuito**.

  Potência em jogo na **fonte de 7V**: $P = 7 \cdot 2 = 14W$

8. Série Eléctrica e Paralelo Eléctrico

Dois componentes estão **em série** quando são atravessados pela **mesma corrente**.

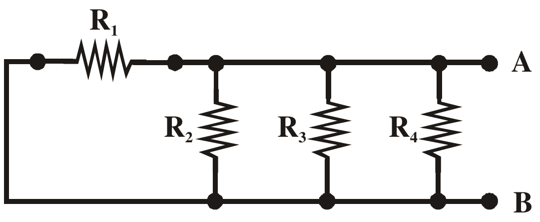


R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 estão em série.

R_{AB} (resistência medida entre os terminais A e B) é **superior à maior das resistências**, e aumenta se se colocar mais alguma resistência em série com as outras.

$$R_{AB} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = \sum_{i=1}^{5} R_i$$

Dois componentes estão **em paralelo** quando estão submetidos à **mesma tensão**.



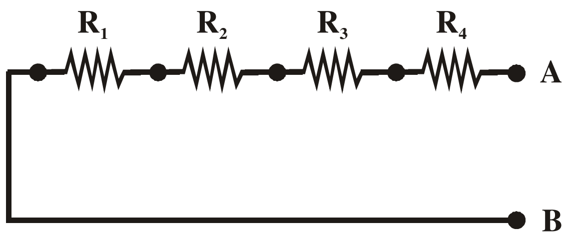
R_1, R_2, R_3 e R_4 estão em paralelo.

R_{AB} (resistência medida entre os terminais A e B) é **inferior à menor das resistências**, e diminui se se colocar mais alguma resistência em paralelo com as outras.

$$R_{AB} = R_1 \mathbin{//} R_2 \mathbin{//} R_3 \mathbin{//} R_4$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{R_i}}$$

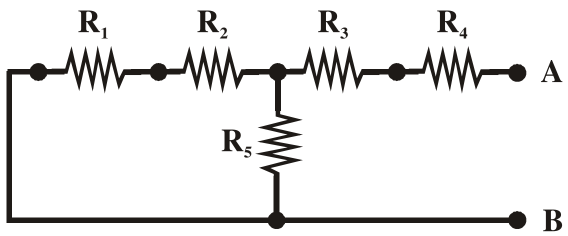
- Dois componentes em série podem não ter nenhum terminal comum.



R_1 e R_4 estão em série mas não possuem nenhum terminal comum.

$$R_{AB} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

- Dois componentes com um terminal comum podem não estar em paralelo e também não estar em série.



R_1 está em série com R_2

R_3 está em série com R_4

R_2 não está em série com R_3

R_2 não está em série com R_5

R_5 está em paralelo com a série formada por R_1 e R_2

$$R_{AB} = [(R_1 + R_2) \mathbin{//} R_5] + R_3 + R_4$$

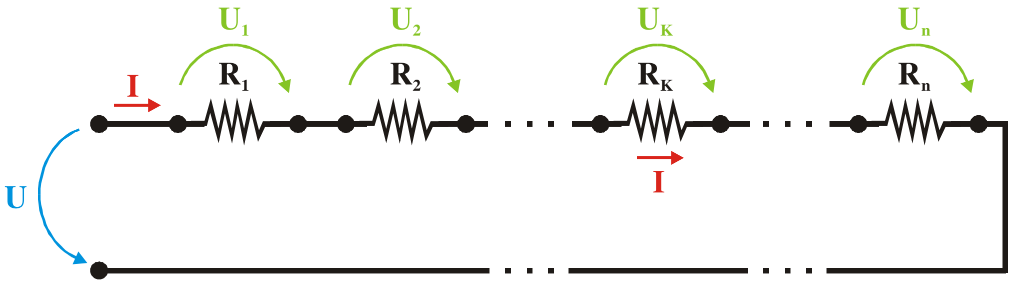
- Uma **fonte ideal de tensão**:
  - **pode estar em vazio** (ou seja, colocada em série com um circuito aberto);
  - **não pode ser curto-circuitada** (ou seja, colocada em paralelo com um condutor ideal);
  - **pode** ser colocada **em série** com **uma ou mais fontes ideais de tensão**, independentemente dos valores das tensões das outras fontes;
  - **só pode** ser colocada **em paralelo** com outra fonte ideal de tensão que possua uma **tensão de igual valor** aos seus terminais.

- Uma **fonte ideal de corrente**:
  - **pode ser curto-circuitada**;
  - **não pode estar em vazio**;
  - **pode** ser colocada **em paralelo** com **uma ou mais fontes ideais de corrente**, independentemente dos valores das correntes das outras fontes;
  - **só pode** ser colocada **em série** com outra fonte ideal de corrente que debite uma **corrente de igual valor**;
  - apresenta nos seus terminais uma **tensão** cujos **sentido** e **valor dependem do circuito alimentado pela fonte**.

Dualidade...

Tensão	**Série**	**Em vazio (circuito aberto)**
Corrente	**Paralelo**	**Em curto-circuito**

9. Divisor de Tensão



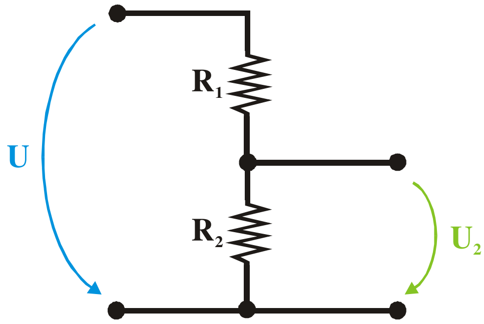
$$
\begin{aligned}
U &= U_1 + U_2 + \ldots + U_k + \ldots + U_n \\
&= R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + \ldots + R_k \cdot I + \ldots + R_n \cdot I \\
&= (R_1 + R_2 + \ldots + R_k + \ldots + R_n) \cdot I \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} R_i \right) \cdot I
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{U}{\sum_{i=1}^{n} R_i}$$

$$U_k = R_k \cdot I$$

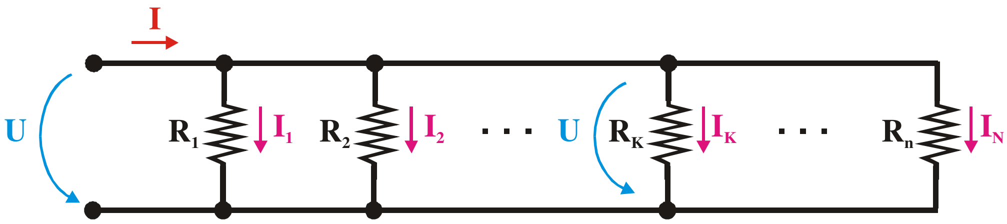
$$\Rightarrow \quad I = \frac{U_k}{R_k}$$

$$\boxed{U_k = \frac{R_k}{\sum_{i=1}^{n} R_i} \cdot U}$$



$$\boxed{U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U}$$

10. Divisor de Corrente



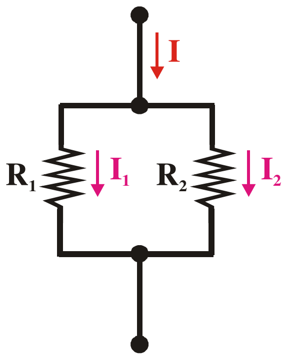
$$
\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 + \ldots + I_k + \ldots + I_n \\
&= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \ldots + \frac{U}{R_k} + \ldots + \frac{U}{R_n} \\
&= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_k} + \ldots + \frac{1}{R_n} \right) \cdot U \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \right) \cdot U
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{I}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

$$I_k = \frac{1}{R_k} \cdot U$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{I_k}{\frac{1}{R_k}}$$

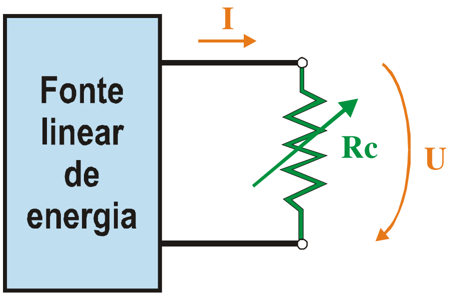
$$\boxed{I_k = \frac{\frac{1}{R_k}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} \cdot I}$$

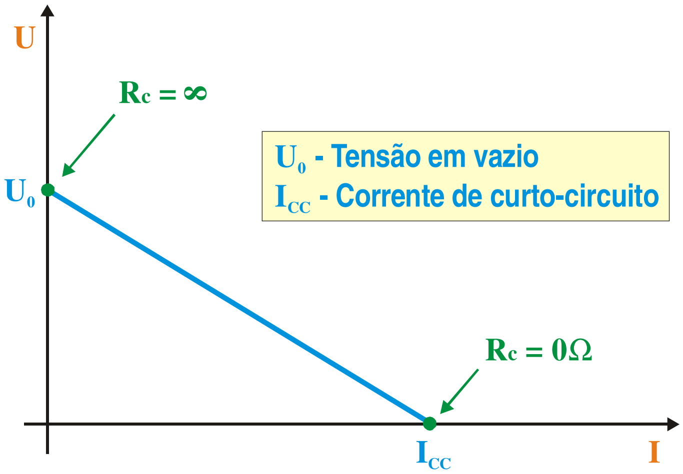


$$\boxed{I_2 = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \cdot I} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I}$$

11. Fontes Lineares de Energia

Numa **fonte linear de energia**, a característica U=f(I) é uma recta.

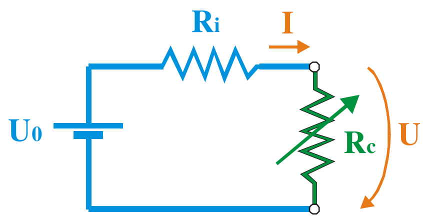




11.1 Equivalente de Thévenin de uma Fonte Linear de Energia

- A característica **U=f(I)** corresponde à equação:

$$\boxed{U = U_0 - \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I} \qquad \frac{U_0}{I_{CC}} = R_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = U_0 - R_i \cdot I}$$



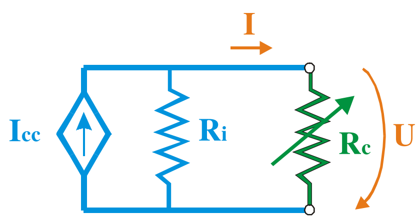
- A partir do modelo equivalente obtêm-se as equações **U=f(R$_c$)** e **I=f(R$_c$)**:

$$\boxed{\begin{array}{l} U = \dfrac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 \\ I = \dfrac{U_0}{R_i + R_C} \end{array}}$$

11.2 Equivalente de Norton de uma Fonte Linear de Energia

- A característica **I=f(U)** corresponde à equação:

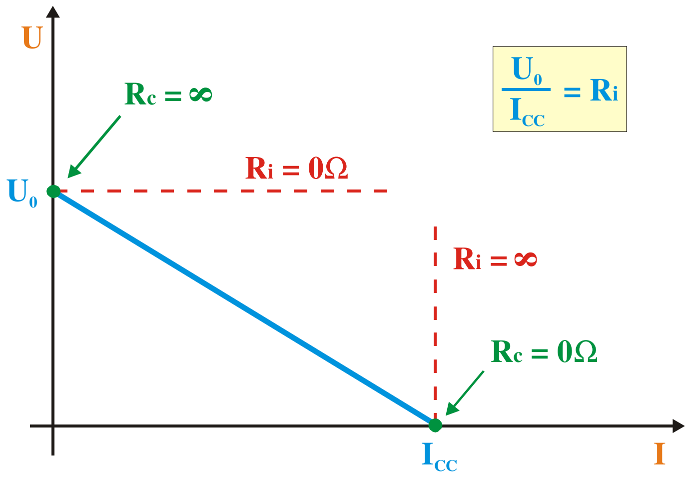
$$\boxed{I = I_{CC} - \frac{U}{\frac{U_0}{I_{CC}}}} \qquad \frac{U_0}{I_{CC}} = R_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = I_{CC} - \frac{U}{R_i}}$$



- A partir do modelo equivalente obtêm-se as equações **I=f(R$_c$)** e **U=f(R$_c$)**:

$$\boxed{\begin{array}{l} I = \dfrac{R_i}{R_i + R_C} \cdot I_{CC} \\ U = \dfrac{R_i \cdot R_C}{R_i + R_C} \cdot I_{CC} \end{array}}$$

11.3 Aproximação de Uma Fonte de Energia a Uma Fonte Ideal de Tensão ou a Uma Fonte Ideal de Corrente



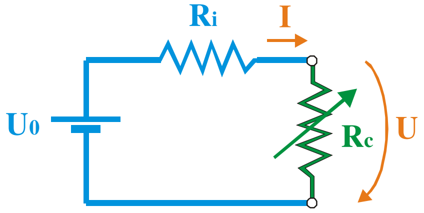
- Fonte ideal de tensão ($I_{CC} = \infty$)

$$\boxed{\frac{U_0}{I_{CC}} = R_i = 0\Omega}$$

- Fonte ideal de corrente ($U_0 = \infty$)

$$\boxed{\frac{U_0}{I_{CC}} = R_i = \infty}$$

- Fonte real

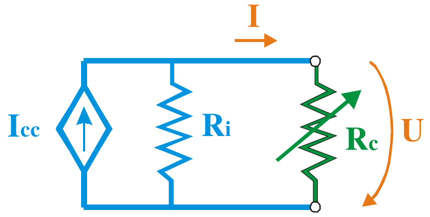


$$\boxed{\begin{aligned} U &= \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 \\ I &= \frac{U_0}{R_i + R_C} \end{aligned}}$$

$$\boxed{R_c >> R_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} U &\approx U_0 \\ I &\approx \frac{U_0}{R_C} \end{aligned}}$$

Se $R_C >> R_i$ a fonte aproxima-se de uma fonte ideal de tensão, uma vez que U varia pouco com R_C.

- Fonte real



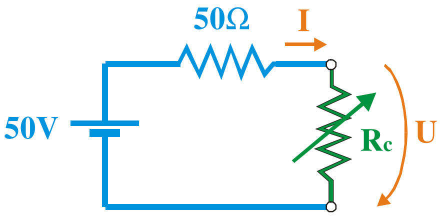
$$\boxed{\begin{aligned} I &= \frac{R_i}{R_i + R_C} \cdot I_{CC} \\ U &= \frac{R_i \cdot R_C}{R_i + R_C} \cdot I_{CC} \end{aligned}}$$

$$\boxed{R_c << R_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} I &\approx I_{CC} \\ U &\approx R_C I_{CC} \end{aligned}}$$

Se $R_C << R_i$ a fonte aproxima-se de uma fonte ideal de corrente, uma vez que I varia pouco com R_C.

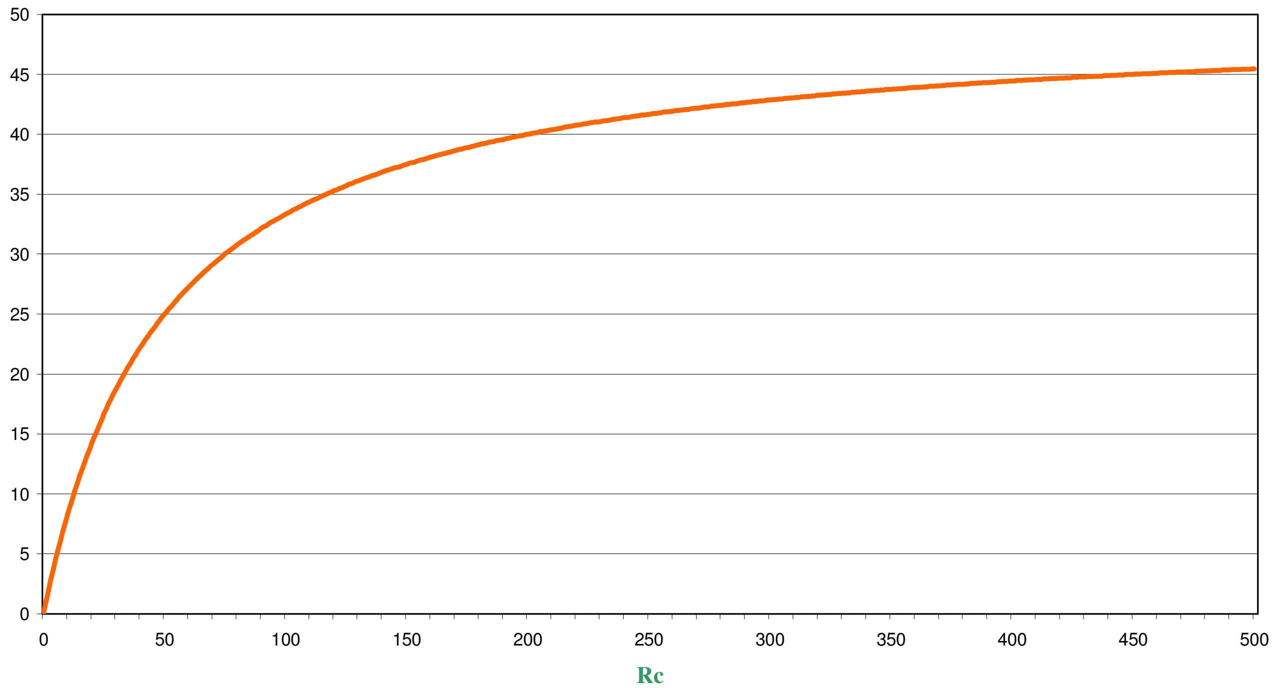
Exemplo:

$$\begin{array}{l} U_0 = 50V \\ R_i = 50\Omega \end{array}$$

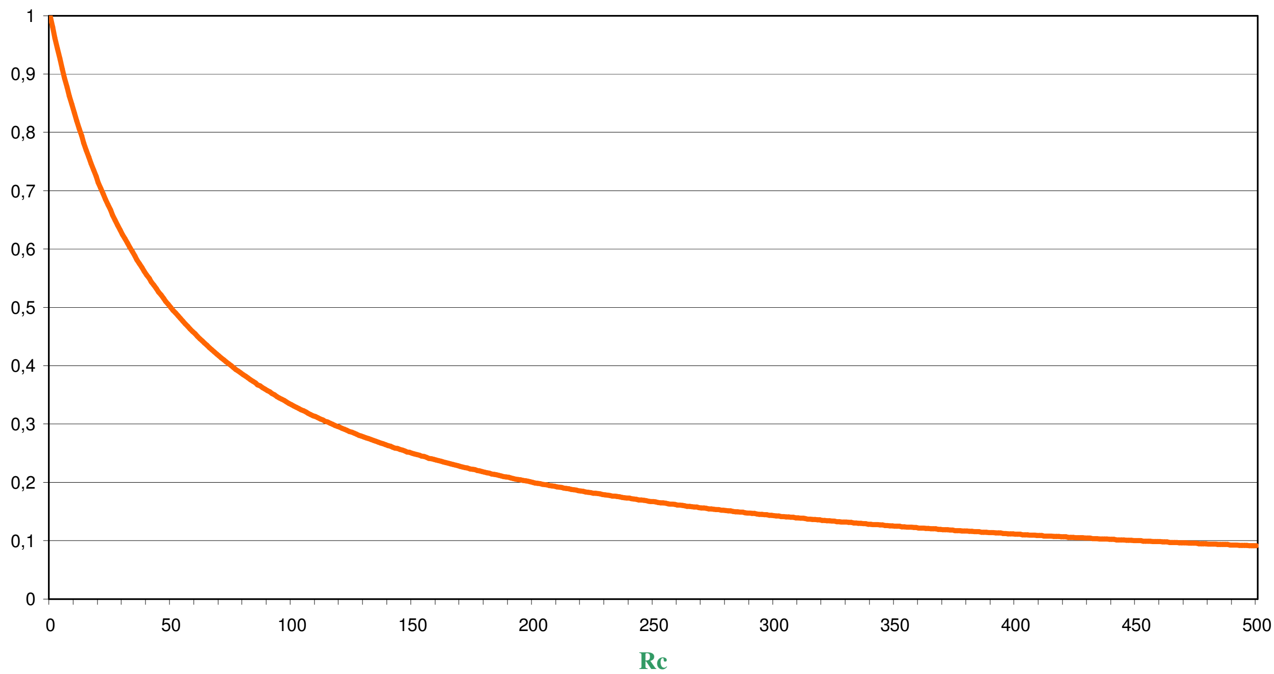


$$\begin{cases} U = \dfrac{R_C}{50 + R_C} \cdot 50 \\ I = \dfrac{50}{50 + R_C} \end{cases}$$

U = f(Rc)



I = f(Rc)



$$\boxed{0{,}5\Omega \le R_C \le 5\Omega}$$

$$\boxed{R_C = 0{,}5\Omega}$$

$$U_{0,5\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{0{,}5}{50+0{,}5} \cdot 50 = 0{,}495\text{V}$$

$$I_{0,5\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{50}{50+0{,}5} = 0{,}990\text{A}$$

$$\boxed{R_C = 5\Omega}$$

$$U_{5\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{5}{50+5} \cdot 50 = 4{,}545\text{V}$$

$$I_{5\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{50}{50+5} = 0{,}909\text{A}$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 0,5Ω para 5Ω:

$$\frac{U_{5\Omega} - U_{0,5\Omega}}{U_{0,5\Omega}} = \frac{4{,}545 - 0{,}495}{0{,}495} = 8{,}182 = 818{,}2\%$$

$$\frac{I_{5\Omega} - I_{0,5\Omega}}{I_{0,5\Omega}} = \frac{0{,}909 - 0{,}990}{0{,}990} = -0{,}082 = -8{,}2\%$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 5Ω para 0,5Ω:

$$\frac{U_{0,5\Omega} - U_{5\Omega}}{U_{5\Omega}} = \frac{0{,}495 - 4{,}545}{4{,}545} = -0{,}891 = -89{,}1\%$$

$$\frac{I_{0,5\Omega} - I_{5\Omega}}{I_{5\Omega}} = \frac{0{,}990 - 0{,}909}{0{,}909} = 0{,}089 = 8{,}9\%$$

- A fonte aproxima-se mais de uma **fonte ideal de corrente** do que de uma fonte ideal de tensão porque a variação relativa da corrente é menor.

$$\boxed{25\Omega \le R_C \le 100\Omega}$$

$$\boxed{R_C = 25\Omega}$$

$$U_{25\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{25}{50+25} \cdot 50 = 16{,}666\text{V}$$

$$I_{25\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{50}{25+50} = 0{,}666\text{A}$$

$$\boxed{R_C = 100\Omega}$$

$$U_{100\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{100}{50+100} \cdot 50 = 33{,}333\text{V}$$

$$I_{100\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{50}{50+100} = 0{,}333\text{A}$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 25Ω para 100Ω:

$$\frac{U_{100\Omega} - U_{25\Omega}}{U_{25\Omega}} = \frac{33{,}333 - 16{,}666}{16{,}666} = 1{,}000 = 100{,}0\%$$

$$\frac{I_{100\Omega} - I_{25\Omega}}{I_{25\Omega}} = \frac{0{,}333 - 0{,}666}{0{,}666} = -0{,}500 = -50{,}0\%$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 100Ω para 25Ω:

$$\frac{U_{25\Omega} - U_{100\Omega}}{U_{100\Omega}} = \frac{16{,}666 - 33{,}333}{33{,}333} = -0{,}500 = -50{,}0\%$$

$$\frac{I_{25\Omega} - I_{100\Omega}}{I_{100\Omega}} = \frac{0{,}666 - 0{,}333}{0{,}333} = 1{,}000 = 100{,}0\%$$

- A fonte aproxima-se igualmente mal de uma fonte ideal de corrente e de uma fonte ideal de tensão.

$$\boxed{400\Omega \le R_C \le 500\Omega}$$

$$\boxed{R_C = 400\Omega}$$

$$U_{400\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{400}{50+400} \cdot 50 = 44{,}444\text{V}$$

$$I_{400\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{50}{50+400} = 0{,}111\text{A}$$

$$\boxed{R_C = 500\Omega}$$

$$U_{500\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{500}{50+500} \cdot 50 = 45{,}455\text{V}$$

$$I_{500\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{50}{50+500} = 0{,}091\text{A}$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 400Ω para 500Ω:

$$\frac{U_{500\Omega} - U_{400\Omega}}{U_{400\Omega}} = \frac{45{,}455 - 44{,}444}{44{,}444} = 0{,}023 = 2{,}3\%$$

$$\frac{I_{500\Omega} - I_{400\Omega}}{I_{400\Omega}} = \frac{0{,}091 - 0{,}111}{0{,}111} = -0{,}180 = -18{,}0\%$$

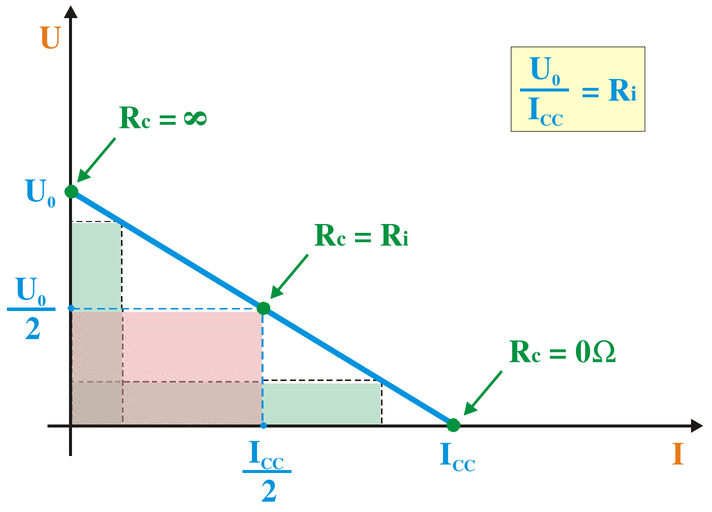
Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 500Ω para 400Ω:

$$\frac{U_{400\Omega} - U_{500\Omega}}{U_{005\Omega}} = \frac{44{,}444 - 45{,}455}{45{,}455} = -0{,}022 = -2{,}2\%$$

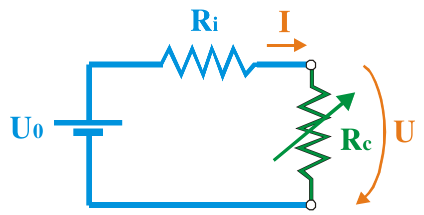
$$\frac{I_{400\Omega} - I_{500\Omega}}{I_{500\Omega}} = \frac{0{,}111 - 0{,}091}{0{,}091} = 0{,}219 = 21{,}9\%$$

- A fonte aproxima-se mais de uma **fonte ideal de tensão** do que de uma fonte ideal de corrente porque a variação relativa da tensão é menor.

11.4 Transferência Máxima de Potência de Uma Fonte para Uma Carga Resistiva



$$\begin{cases} U = \dfrac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 \\ I = \dfrac{U_0}{R_i + R_C} \end{cases} \Rightarrow P = U \cdot I = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 \cdot \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{R_C}{(R_i + R_C)^2} \cdot U_0^2$$



$$\frac{dP}{dR_C} = 0 \Rightarrow \frac{(R_i + R_C)^2 - 2 \cdot R_C \cdot (R_i + R_C)}{(R_i + R_C)^4} \cdot U_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{R_i^2 + 2 \cdot R_i \cdot R_C + R_C^2 - 2 \cdot R_i \cdot R_C - 2 \cdot R_C^2}{(R_i + R_C)^4} \cdot U_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{R_i^2 - R_C^2}{(R_i + R_C)^4} \cdot U_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow R_C = R_i$$

$$R_C < R_i \Rightarrow R_i^2 - R_C^2 > 0 \Rightarrow \frac{dP}{dR_c} > 0$$

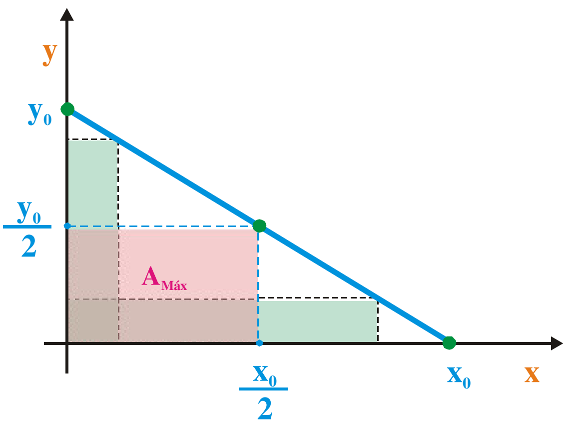
$$R_C > R_i \Rightarrow R_i^2 - R_C^2 < 0 \Rightarrow \frac{dP}{dR_c} < 0$$

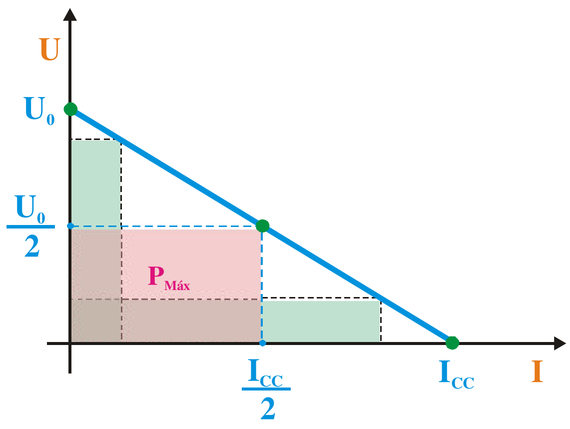
Conclusão: a **potência em R_C é máxima** quando $R_C = R_i$

Nessas circunstâncias:

$$\begin{cases} U = \dfrac{R_i}{R_i + R_i} \cdot U_0 = \dfrac{U_0}{2} \\ I = \dfrac{U_0}{R_i + R_i} = \dfrac{U_0}{2 \cdot R_i} = \dfrac{I_{CC}}{2} \end{cases}$$

Demonstração geométrica...





$$\begin{cases} A = x \cdot y \\ y = y_0 - \frac{y_0}{x_0} \cdot x \end{cases} \Rightarrow A = y_0 \cdot x - \frac{y_0}{x_0} \cdot x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow y_0 - 2 \cdot \frac{y_0}{x_0} \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_0}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{y_0}{2}$$

$$x < \frac{x_0}{2} \Rightarrow y_0 - 2 \cdot \frac{y_0}{x_0} \cdot x > 0$$

$$x > \frac{x_0}{2} \Rightarrow y_0 - 2 \cdot \frac{y_0}{x_0} \cdot x < 0$$

Conclusão: o **valor máximo de A** ocorre no ponto de coordenadas

$$\begin{cases} x = \frac{x_0}{2} \\ y = \frac{y_0}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = U \cdot I \\ U = U_0 - \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I \end{cases} \Rightarrow P = U_0 \cdot I - \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I^2$$

$$\frac{dP}{dI} = 0$$

$$\Rightarrow U_0 - 2 \cdot \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{I_{CC}}{2}$$

$$\Rightarrow U = \frac{U_0}{2}$$

$$I < \frac{I_{CC}}{2} \Rightarrow U_0 - 2 \cdot \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I > 0$$

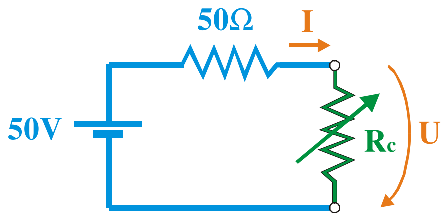
$$I > \frac{I_{CC}}{2} \Rightarrow U_0 - 2 \cdot \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I < 0$$

Conclusão: o **valor máximo de P** ocorre no ponto de coordenadas

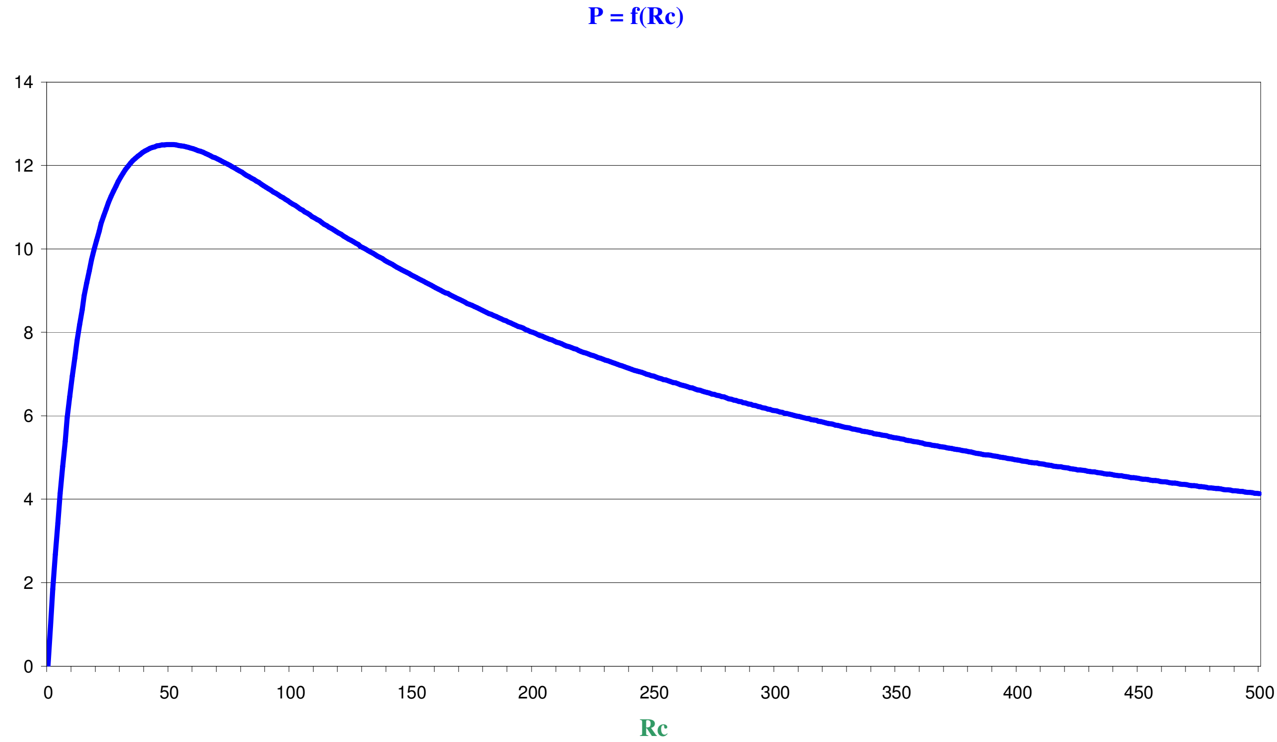
$$\begin{cases} I = \frac{I_0}{2} \\ U = \frac{U_0}{2} \end{cases}$$

Exemplo:

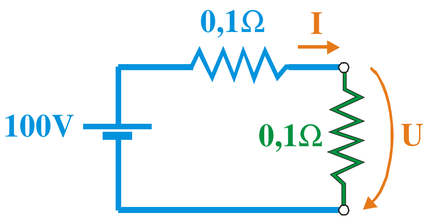
$$\begin{array}{|l|}\hline U_0 = 50\text{V} \\ R_i = 50\Omega \\ \hline\end{array}$$



$$\begin{cases} U = \dfrac{R_C}{50+R_C}\cdot 50 \\[2ex] I = \dfrac{50}{50+R_C} \end{cases} \Rightarrow \quad P = \frac{2500\cdot R_C}{(50+R_C)^2}$$



A **transferência máxima de potência** de uma fonte para uma carga **nem sempre é desejável!**



$$U = \frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}1}\cdot 100 = 50\text{V} \quad (\text{apenas metade de } 100\text{V})$$

$$I = \frac{100}{0{,}1+0{,}1} = 500\text{A} \qquad (!...)$$

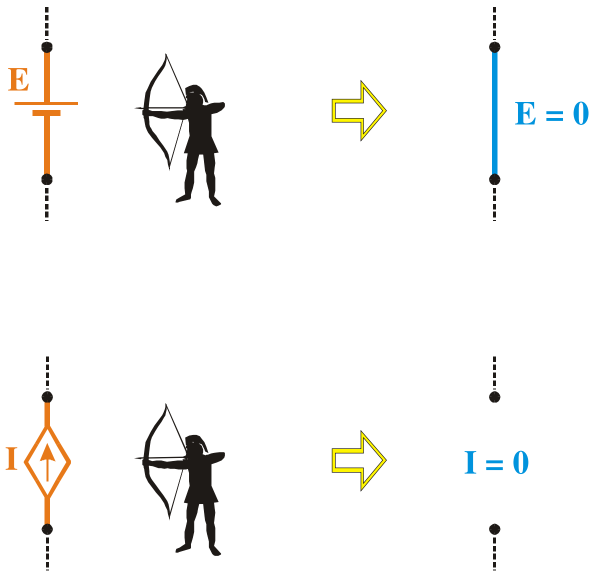
12. Fontes Independentes e Fontes Dependentes

Numa **fonte ideal independente**, o valor da grandeza que a caracteriza (tensão ou corrente) não depende do circuito no qual a fonte se insere.

Numa **fonte ideal dependente** (ou **controlada**) o valor da grandeza que a caracteriza (tensão ou corrente) é determinado (ou controlado) por uma tensão ou corrente existente no circuito em que a fonte se insere.

13. Desactivação de Fontes Independentes

Desactivar uma fonte ideal independente corresponde a anular a grandeza (tensão ou corrente) que caracteriza essa fonte.



14. Desactivação de Fontes Dependentes

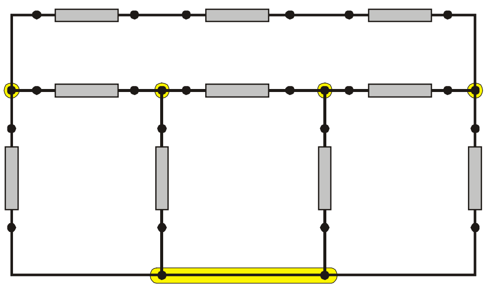
A grandeza (tensão ou corrente) que caracteriza uma fonte ideal dependente só pode ser anulada por actuação sobre a tensão ou corrente que determina essa grandeza.

15. Ramos, Nós e Malhas de Um Circuito

Um ***ramo*** de um circuito é constituído por **um componente** (que não seja um condutor ideal) ou um **conjunto de componentes ligados em série**. Os seus terminais estão ligados aos ***nós*** do circuito.

Um ***nó*** de um circuito é um ponto (ou um conjunto de pontos com o mesmo potencial eléctrico) onde estão ligados **três ou mais ramos**.

Uma ***malha*** de um circuito é um **conjunto de componentes** ligados entre si formando um **circuito electricamente fechado**.



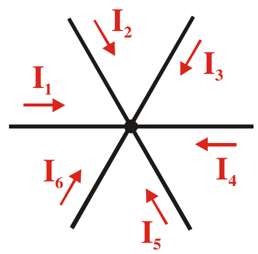
Este circuito tem:

- 7 ramos
- 5 nós
- Quantas malhas?...

16. Leis de Kirchoff

Lei dos Nós: o somatório de todas as correntes que confluem num nó é nulo.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} I_i = 0}$$

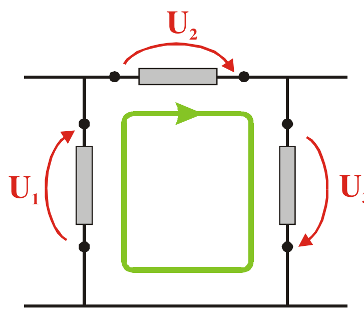


Lei das Malhas: o somatório de todas as tensões consideradas num mesmo sentido ao longo de uma malha é nulo.

Antes de escrever a equação de uma malha é preciso determinar:

- o sentido com que se irá percorrer a malha;
- o ponto de partida/chegada;
- se se consideram positivas as quedas ou as subidas de tensão.

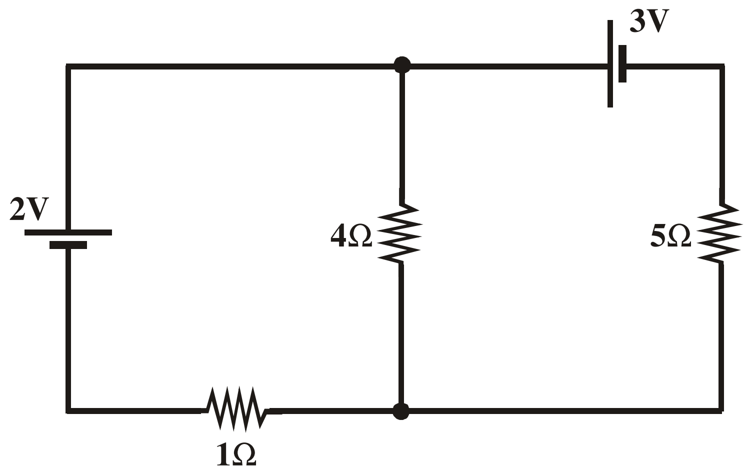
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} U_i = 0}$$



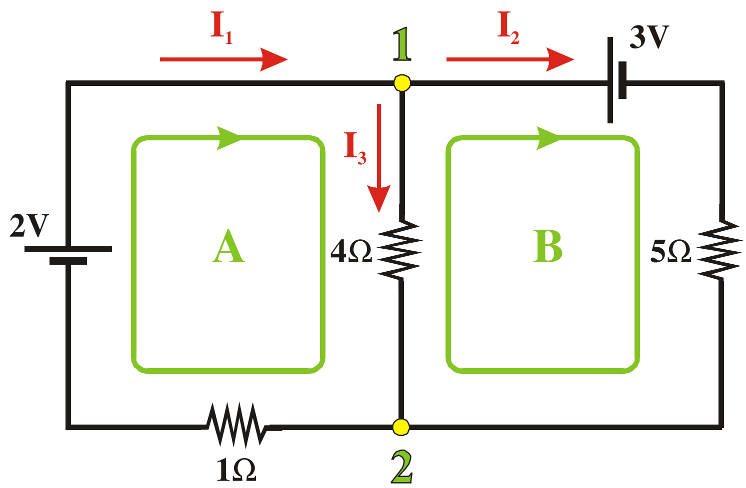
Algoritmo para calcular as correntes nos ramos de um circuito usando as Leis de Kirchoff

1. Identificar os **R ramos** e **N nós** do circuito;
2. Arbitrar o **sentido positivo da corrente em cada ramo**;
3. Identificar **R – (N – 1) malhas independentes** e escrever as respectivas equações, recorrendo à **Lei das Malhas**;
4. Escrever as equações de **N – 1 nós**, recorrendo à **Lei dos Nós**;
5. Resolver um **sistema de equações (de ordem R)** para obter as correntes nos ramos do circuito.

Exemplo: Determinar as correntes nos ramos do circuito.



Resolução:



$$\text{Resolver o sistema} \begin{cases} 4 \cdot I_3 + 1 \cdot I_1 - 2 = 0 & \text{(malha A)} \\ 3 + 5 \cdot I_2 - 4 \cdot I_3 = 0 & \text{(malha B)} \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0 & \text{(nó 1)} \end{cases}$$

17. Método das Correntes Fictícias

Algoritmo para determinar as correntes nos ramos de um circuito usando correntes fictícias

1. Identificar **R – (N – 1) malhas independentes** no circuito.

2. Atribuir **uma corrente fictícia a cada malha** escolhida.

   - Em cada ramo do circuito deve passar, pelo menos, uma corrente fictícia.
   - O número de correntes fictícias requerido é igual a R – (N – 1).
   - Uma corrente fictícia só é a corrente de um ramo se essa corrente fictícia for a única corrente nesse ramo.
   - Não se pode atribuir a mesma combinação de correntes fictícias a ramos diferentes.
     - Em particular: Se uma corrente fictícia é a única corrente num ramo, então essa corrente fictícia não pode ser a única corrente noutro ramo.
   - Num ramo com uma fonte ideal de corrente só deve passar uma corrente fictícia.

3. Escrever directamente o valor das correntes fictícias que passam nas fontes ideais de corrente.

4. Escrever as **equações das malhas que não contêm fontes ideais de corrente**.

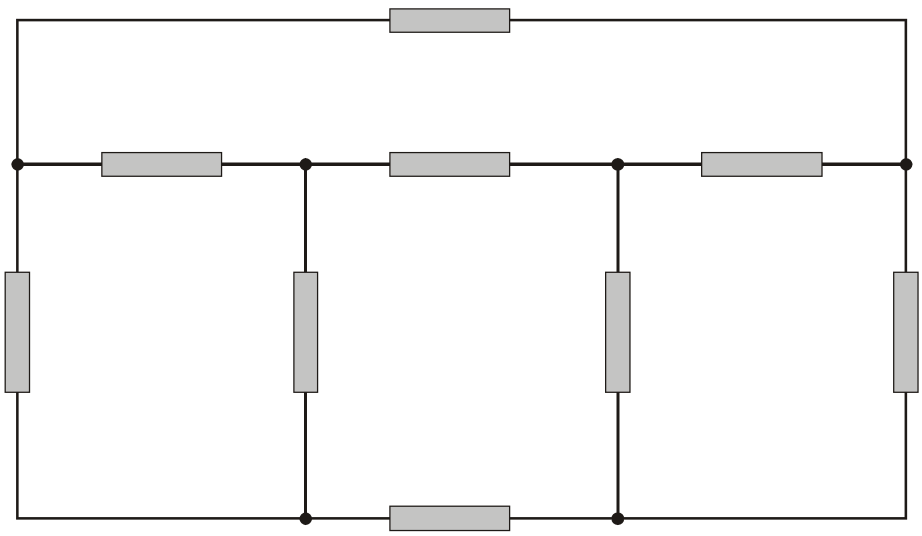
5. Resolver um **sistema de equações de ordem R – (N – 1) – C** para determinar todas as correntes fictícias.

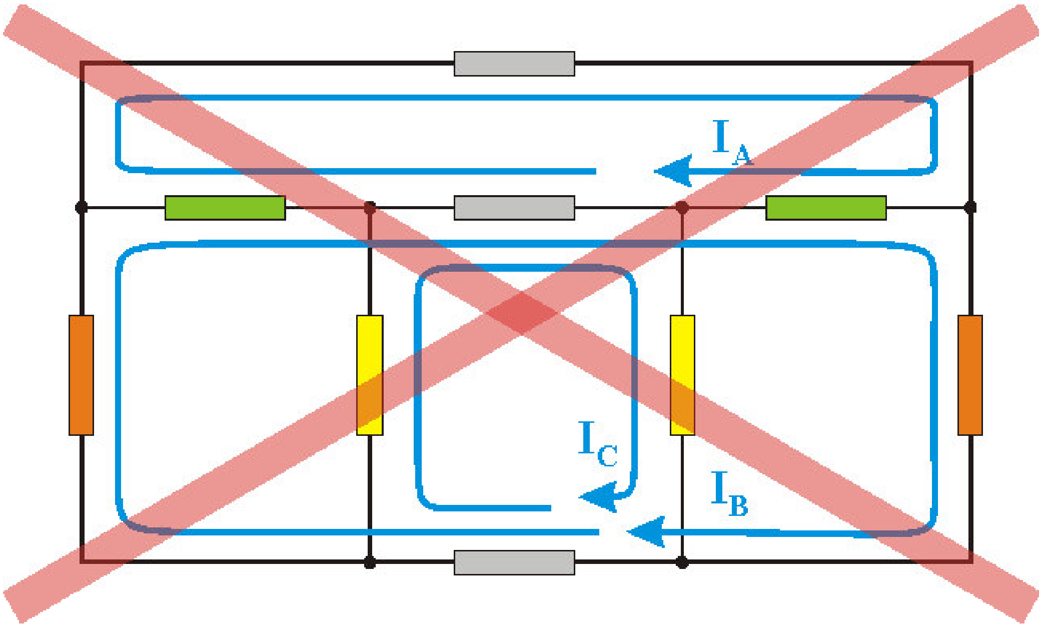
6. Calcular as **correntes nos ramos** a partir das correntes fictícias.

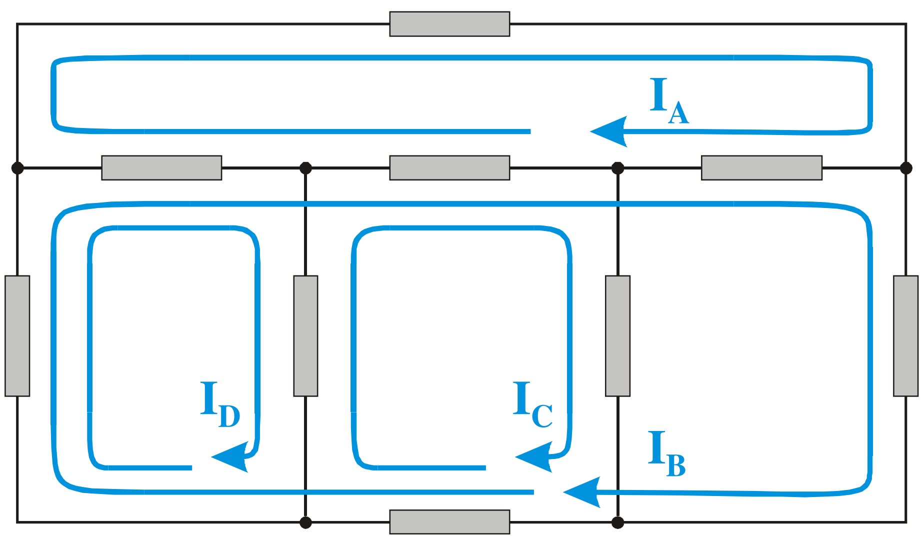
R – número de ramos;

N – número de nós;

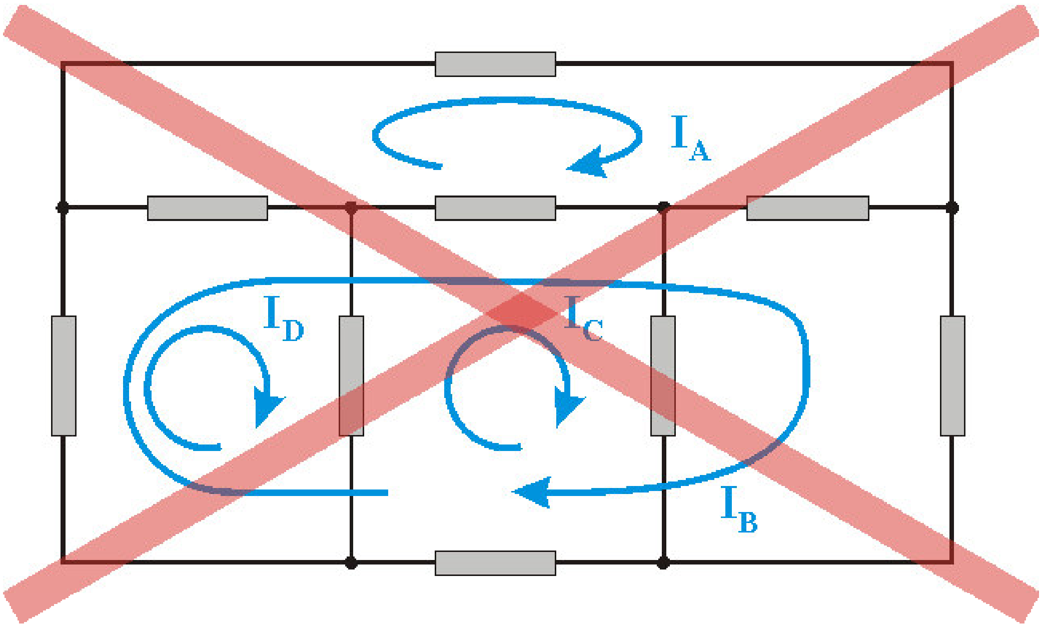
C – número de ramos com fontes ideais de corrente.

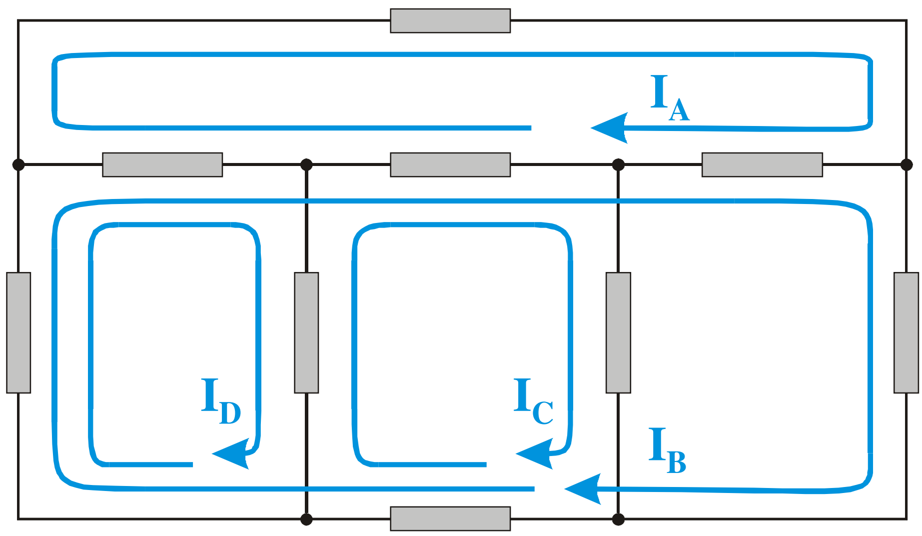



I_A
I_C
I_B

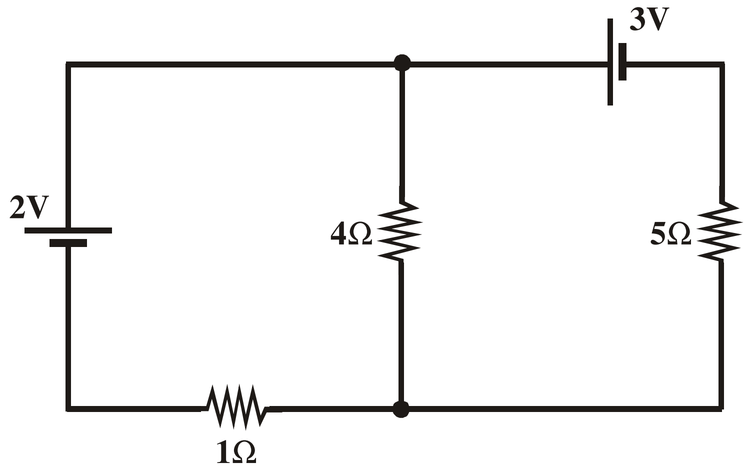

I_A
I_D
I_C
I_B

Sugestão relativa ao desenho das setas correspondentes a cada corrente fictícia.

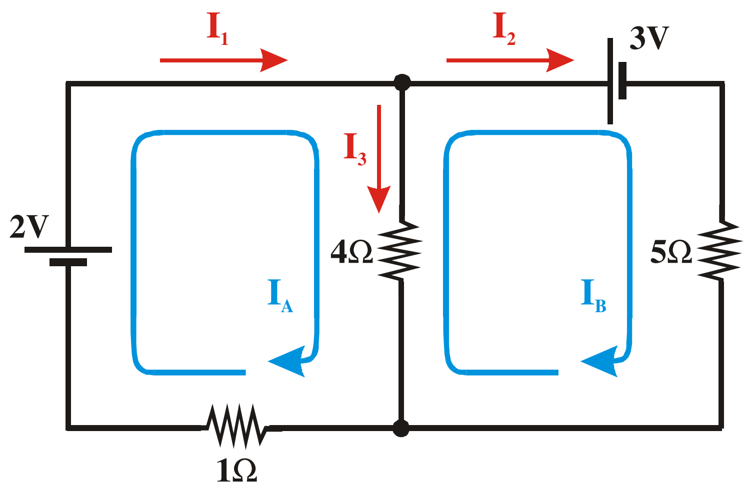




Exemplo: Determinar as correntes nos ramos do circuito.



Resolução:



1. Resolver o sistema $\begin{cases} 4\cdot(I_A - I_B) + 1\cdot I_A - 2 = 0 & \text{(malha A)} \\ 3 + 5\cdot I_B + 4\cdot(I_B - I_A) = 0 & \text{(malha B)} \end{cases}$

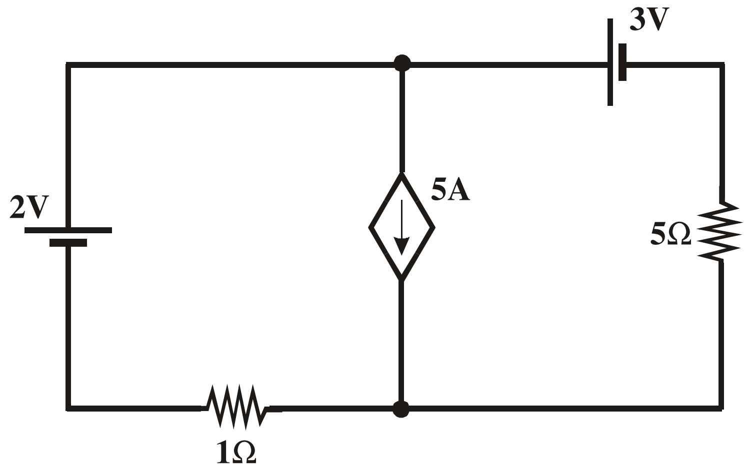
2. Calcular as correntes nos ramos a partir das correntes fictícias:

$$I_1 = I_A$$

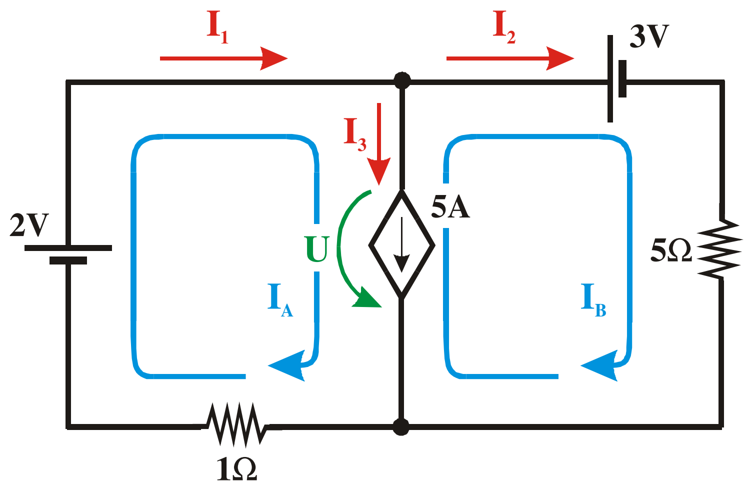
$$I_2 = I_B$$

$$I_3 = I_A - I_B$$

Exemplo: Determinar as correntes nos ramos do circuito.



Resolução:



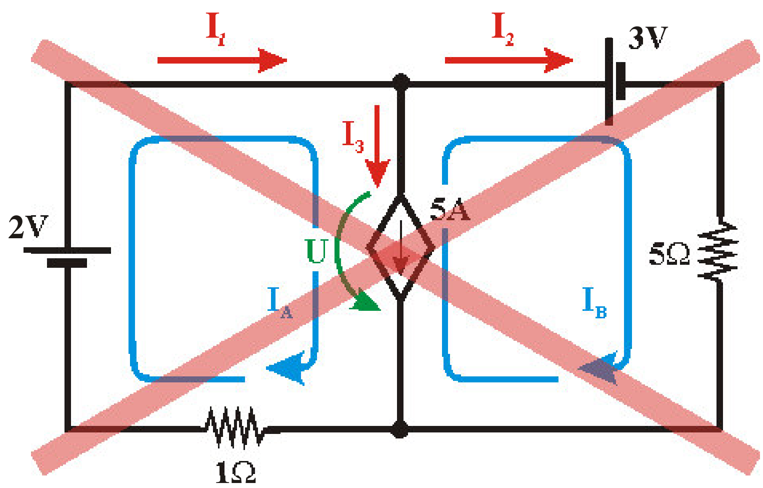
1. Considerar o sistema $\begin{cases} U + 1 \cdot I_A - 2 = 0 & \text{(malha A)} \\ 3 + 5 \cdot I_B - U = 0 & \text{(malha B)} \end{cases}$

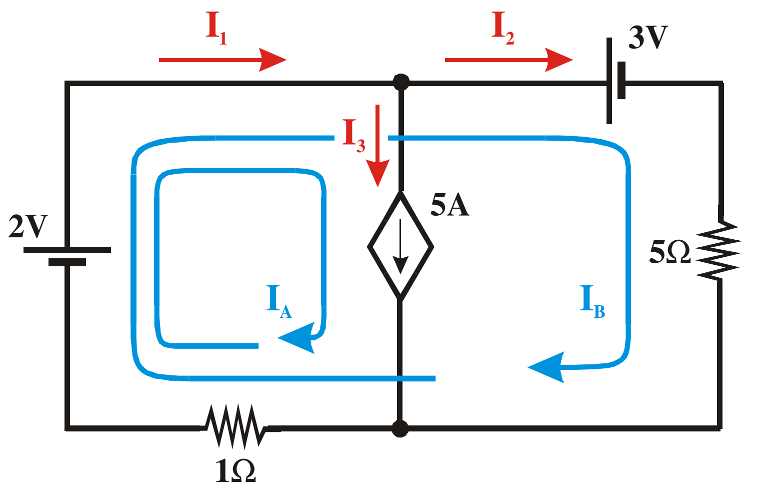
   Este sistema não se pode resolver porque possui três incógnitas e apenas duas equações. No entanto, $I_A - I_B = 5A$ pelo que se pode escrever – e resolver – um novo sistema de três incógnitas e **três equações**:

$$\begin{cases} U + 1 \cdot I_A - 2 = 0 & \text{(malha A)} \\ 3 + 5 \cdot I_B - U = 0 & \text{(malha B)} \\ I_A - I_B = 5A & \text{(fonte ideal de corrente)} \end{cases}$$

2. Calcular as correntes nos ramos a partir das correntes fictícias:

$$\left| \begin{array}{l} I_1 = I_A \\ I_2 = I_B \\ I_3 = I_A - I_B \end{array} \right.$$





1. Resolver o sistema $\begin{cases} I_A = 5A & \text{(malha A)} \\ 3 + 5 \cdot I_B + 1 \cdot (I_A + I_B) - 2 = 0 & \text{(malha B)} \end{cases}$

   Este sistema reduz-se a **uma única equação**:

$$3 + 5 \cdot I_B + 1 \cdot (5 + I_B) - 2 = 0$$

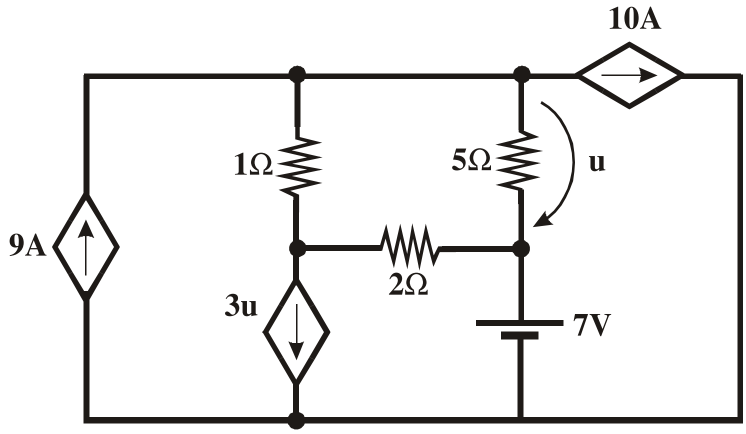
2. Calcular as correntes nos ramos a partir das correntes fictícias:

$$I_1 = I_A$$

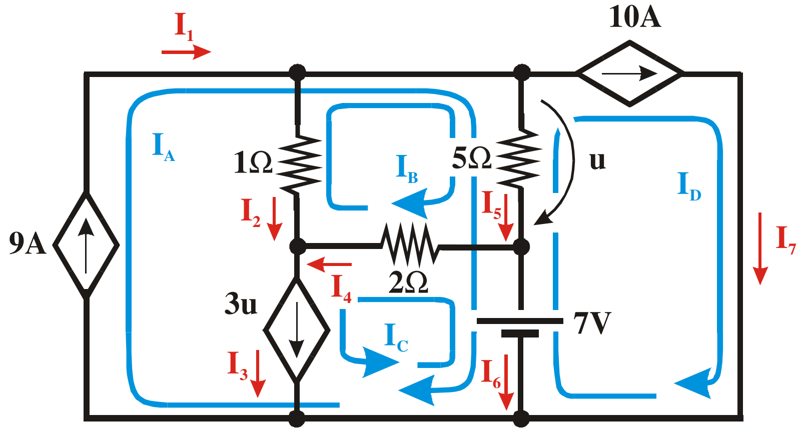
$$I_2 = I_B$$

$$I_3 = I_A - I_B$$

Exemplo: Determinar as correntes nos ramos do circuito.



Resolução:



1. Resolver o sistema
$$\begin{cases} I_A = 9A & \text{(malha A)} \\ I_C = 3u & \text{(malha C)} \\ I_D = 10A & \text{(malha D)} \\ 5\cdot(I_A + I_B - I_D) + 2(I_B + I_C) + 1\cdot I_B = 0 & \text{(malha B)} \\ u = 5\cdot(I_A + I_B + I_D) \end{cases}$$

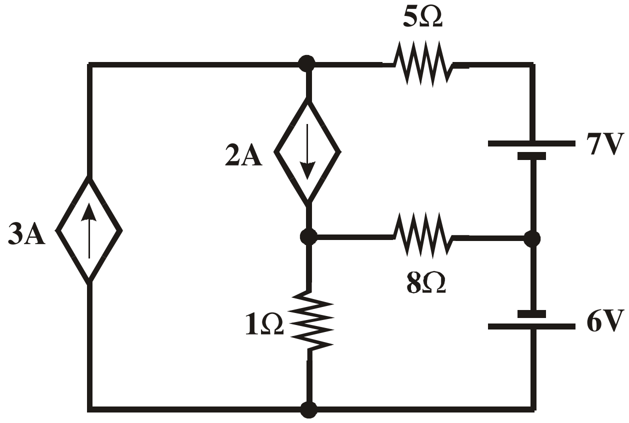
   Uma vez que $I_C = 3u = 3\cdot 5\cdot(9 + I_B + 10)$, o sistema reduz-se a **uma única equação**:

$$5\cdot(9 + I_B - 10) + 2(I_B + [15\cdot(9 + I_B + 10)]) + 1\cdot I_B = 0$$

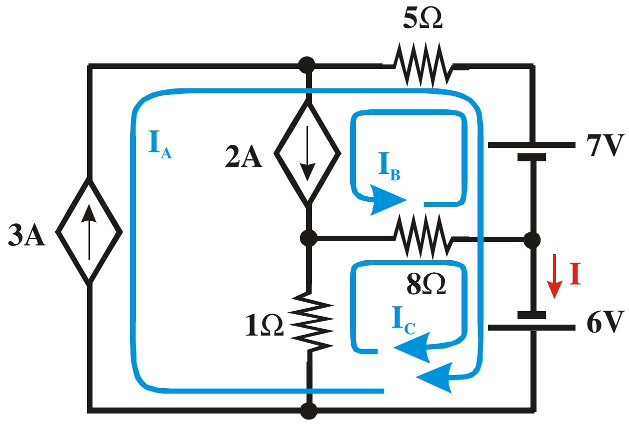
2. Calcular as correntes nos ramos a partir das correntes fictícias:

$$\begin{aligned} & I_1 = I_A \\ & I_2 = -I_B \\ & I_3 = I_C \\ & I_4 = I_B + I_C \\ & I_5 = I_A + I_B - I_C \\ & I_6 = I_A - I_C - I_D \\ & I_7 = I_D \end{aligned}$$

Exemplo: Determinar o valor da potência em jogo na fonte de 6V e verificar se essa fonte recebe ou fornece energia ao circuito.



Resolução:



1. Resolver o sistema $\begin{cases} I_A = 3A & \text{(malha A)} \\ I_B = 2A & \text{(malha B)} \\ 8\cdot(I_B + I_C) - 6 + 1\cdot I_C = 0 & \text{(malha C)} \end{cases}$

   Este sistema reduz-se a **uma única equação**:

   $$8\cdot(2 + I_C) - 6 + 1\cdot I_C = 0 \quad \Rightarrow \quad I_C = -\frac{10}{9} = -1{,}11A$$

2. Calcular I a partir das correntes fictícias:

   $$I = I_A + I_C = 3 - 1{,}11 = 1{,}89A$$

   $I > 0$, logo o sentido verdadeiro da corrente coincide com o sentido positivo arbitrado.

   Dentro da fonte de 6V, a corrente flui do terminal de **potencial mais baixo** para o terminal de **potencial mais alto**, por isso **a fonte fornece energia** ao circuito.

3. Calcular o valor da potência em jogo na fonte de 6V:

   $$P = 6\cdot I = 6\cdot 1{,}89 = 11{,}34W$$

18. Método das Tensões Nodais

Algoritmo para determinar as tensões nos nós de um circuito em relação a uma referência

1. Identificar os **N nós** do circuito.

2. Escolher cuidadosamente o nó onde colocar a **referência** (**REF**) **para os potenciais eléctricos** e numerar todos os outros nós.

   - Se possível, a **REF** deve ser colocada no **nó onde confluem mais ramos**, uma vez que não se escreve a equação de correntes que confluem neste nó.
   - Se houver **apenas um ramo só com fontes ideais de tensão**, a **REF** deve ser colocada num dos nós onde se liga esse ramo.
   - Se houver **vários ramos só com fontes ideais de tensão**...

     ... e todos esses ramos tiverem um **nó comum**, a **REF** deve ser colocada nesse nó.

     ... e todos esses ramos estiverem **em cascata**, a **REF** deve ser colocada num dos nós onde se liga um desses ramos.

     ... e esses ramos não tiverem **terminais comuns**, a **REF** deve ser colocada num dos nós onde se liga um desses ramos. Os dois nós de cada um dos outros ramos só com fontes ideais de tensão devem ser englobados num *super-nó*.

3. Arbitrar o **sentido positivo** para as **correntes nos ramos** que confluem em **nós de tensão desconhecida**.

   - Não se consideram as correntes que confluem nos nós de tensão conhecida.
   - Cuidado com a colocação das setas... (ver figura).

4. Escrever uma **equação de correntes** para **cada nó de tensão desconhecida**.

   - Não se escrevem equações nem para o nó de referência nem para os nós de tensão conhecida.
   - As incógnitas de cada equação são as tensões nodais.

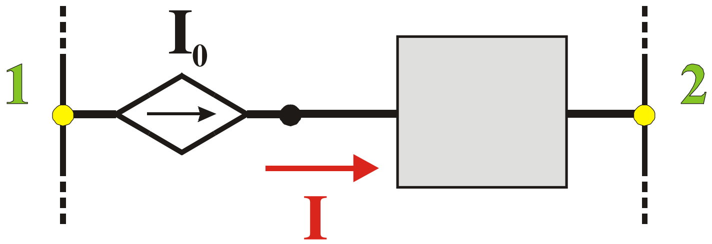
5. Escrever uma **equação de tensões** para cada super-nó considerado.

6. Resolver um **sistema de equações de ordem (N – 1) – T** para determinar as tensões nodais.

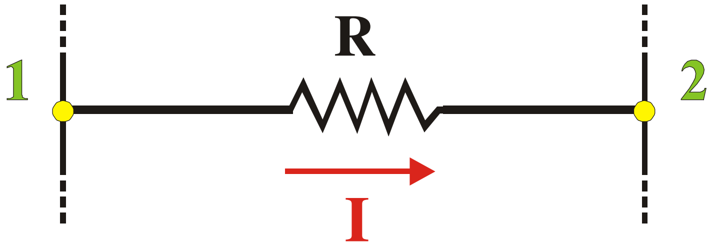
   - A **corrente de cada ramo** pode depois ser calculada em função das tensões nodais.

N – número de nós;

T – número de ramos **só** com fontes ideais de tensão que possuem um terminal comum ou estão em cascata.



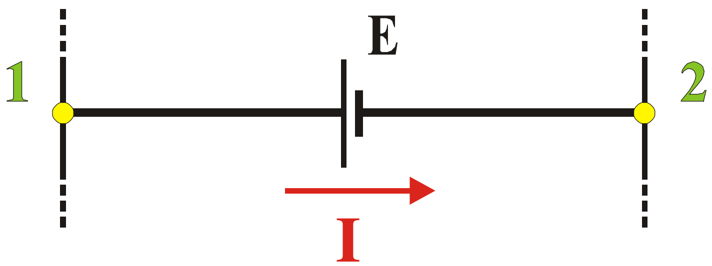
$$I = I_0 \quad \forall_{U_1, U_2}$$



$$I = \frac{U_1 - U_2}{R}$$

$$I = \frac{(U_1 - U_2) + E}{R}$$

$$I = \frac{(U_1 - U_2) - E}{R}$$



$$I = ?$$

$$U_1 - U_2 = E$$

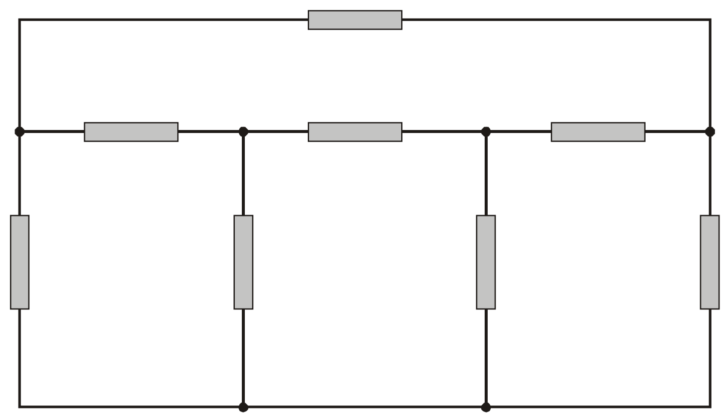
Exemplo: Relativamente ao circuito da figura:

a) Identificar os nós do circuito.

b) Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado para se poder calcular as tensões nos nós do circuito usando o Método das Tensões Nodais.

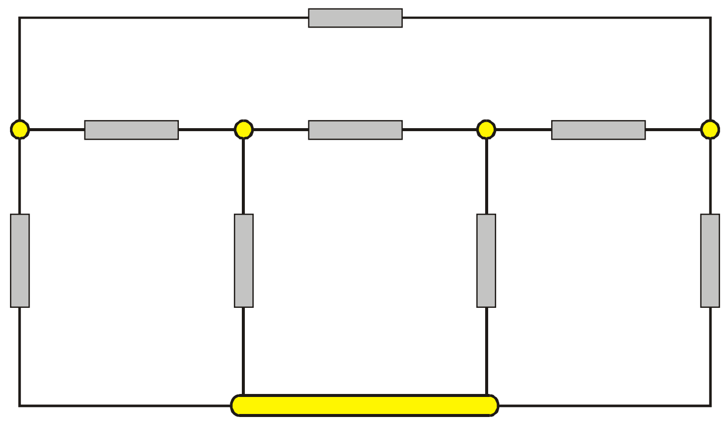
c) Numerar convenientemente os nós do circuito, tendo em vista o cálculo das respectivas tensões usando o Método das Tensões Nodais.

d) Indicar os sentidos positivos habitualmente considerados para as tensões nodais.

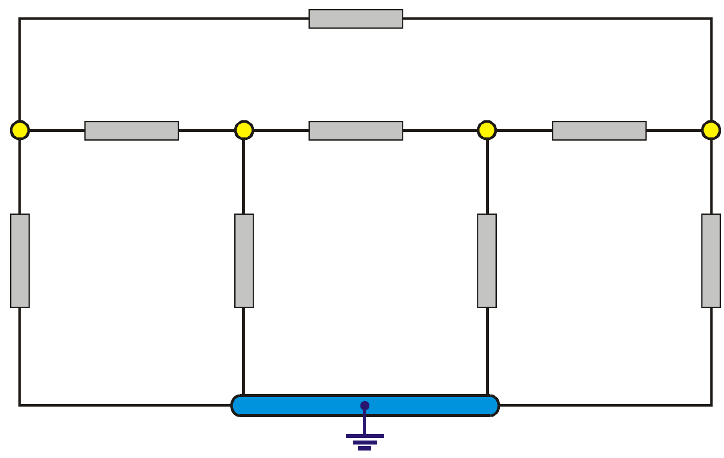


Resolução:

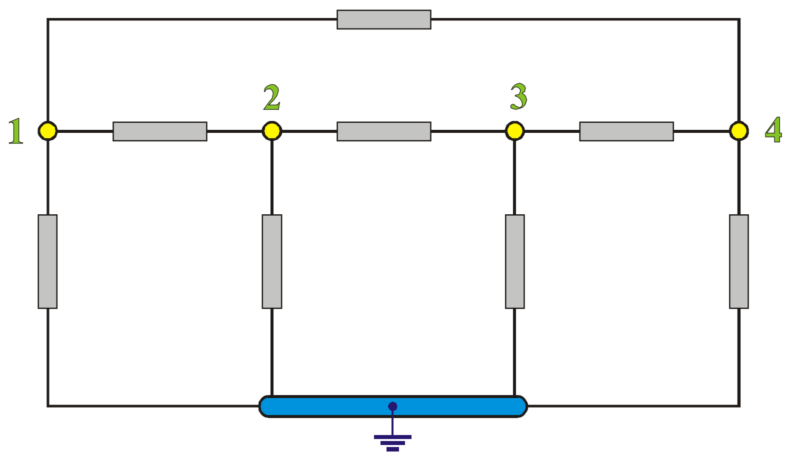
a) Identificar os nós do circuito.



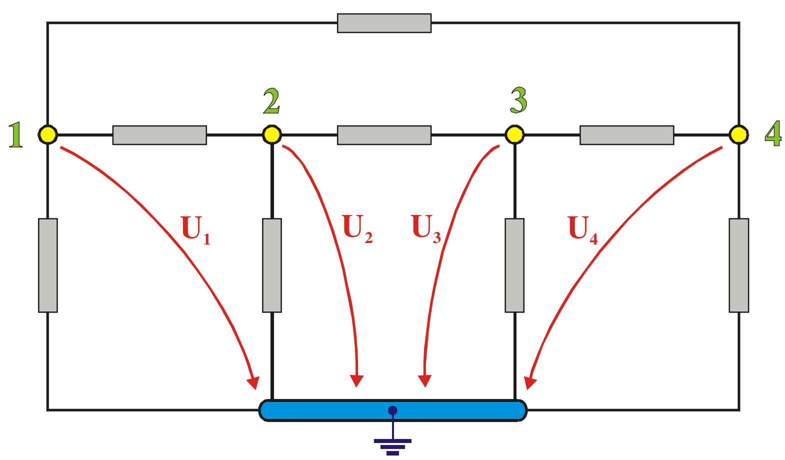
b) Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado para se poder calcular as tensões nos nós do circuito usando o Método das Tensões Nodais.



c) Numerar convenientemente os nós do circuito, tendo em vista o cálculo das respectivas tensões usando o Método das Tensões Nodais.

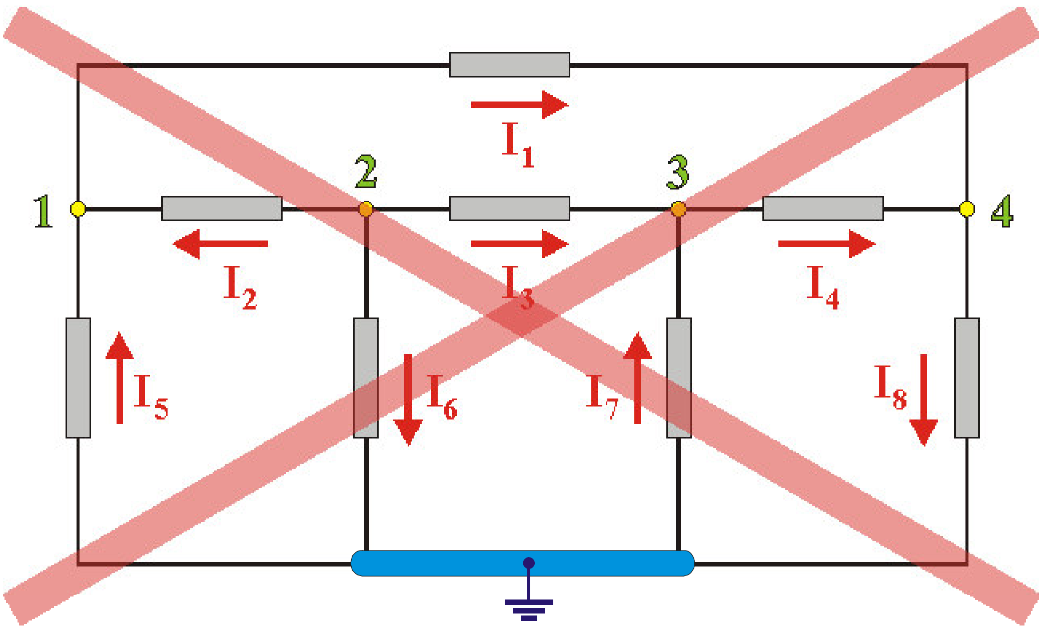


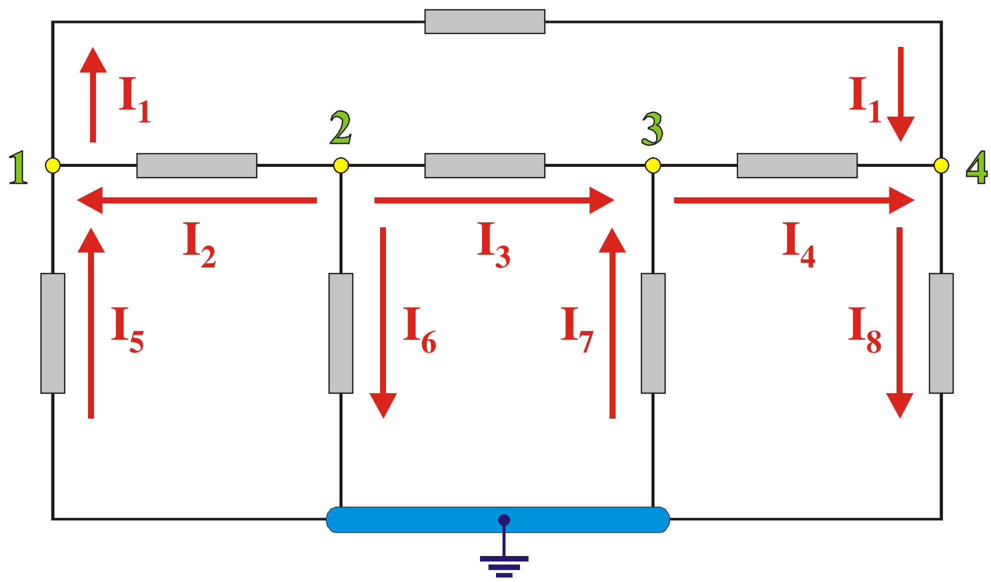
d) Indicar os sentidos positivos habitualmente considerados para as tensões nodais.



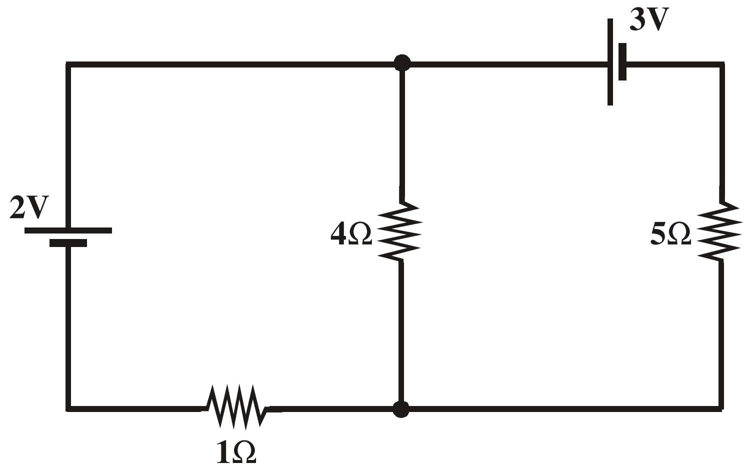
Sugestão relativa ao desenho das setas que indicam o sentido positivo da corrente em cada ramo:

Desenhar as setas junto dos nós e não a meio dos ramos, para evitar esquecer alguma corrente ao escrever a equação de correntes para cada nó.

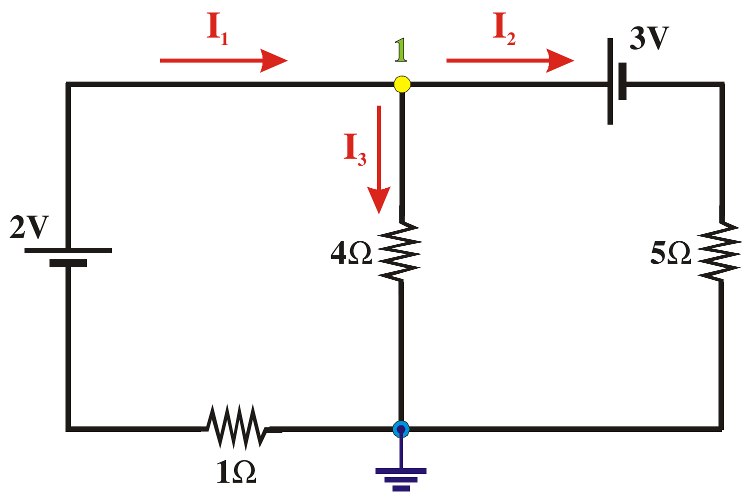




Exemplo: Recorrendo ao Método das Tensões Nodais, determinar as correntes nos ramos do circuito.



Tópicos de Resolução:



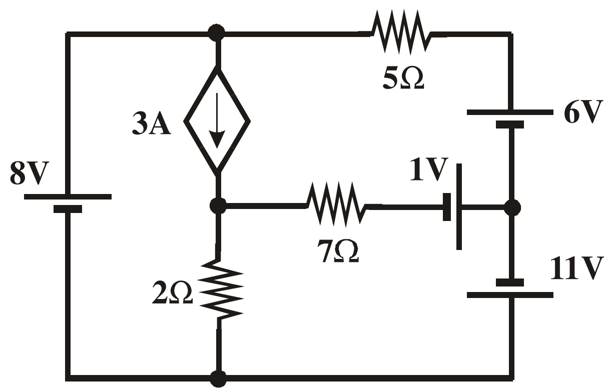
1. Para determinar U_1 (tensão do nó 1, relativamente à referência) resolver a equação $\boxed{I_1 - I_2 - I_3 = 0}$ tendo em conta que

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{(0 - U_1) + 2}{1} \\ I_2 = \dfrac{(U_1 - 0) - 3}{5} \\ I_3 = \dfrac{(U_1 - 0)}{4} \end{cases}$$

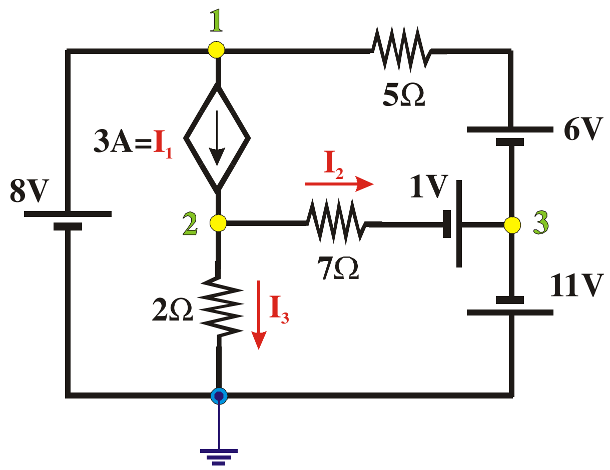
$$\boxed{\frac{(0 - U_1) + 2}{1} - \frac{(U_1 - 0) - 3}{5} - \frac{(U_1 - 0)}{4} = 0}$$

2. Calcular as correntes nos ramos a partir da tensão U_1.

Exemplo: Recorrendo ao Método das Tensões Nodais, determinar o valor da potência em jogo na fonte ideal de corrente. Verificar se essa fonte recebe ou fornece energia ao circuito.



Resolução:



1. Para determinar U_2 (tensão do nó 2, relativamente à referência) resolver a equação $\boxed{I_1 - I_2 - I_3 = 0}$ tendo em conta que

$$\begin{cases} I_1 = 3A \\ I_2 = \dfrac{(U_2 - U_3) + 1}{7} \\ I_3 = \dfrac{(U_2 - 0)}{2} \\ \\ U_1 = 8V \\ U_3 = -11V \end{cases}$$

$$\boxed{3 - \frac{[U_2 - (-11)] + 1}{7} - \frac{(U_2 - 0)}{2} = 0}$$

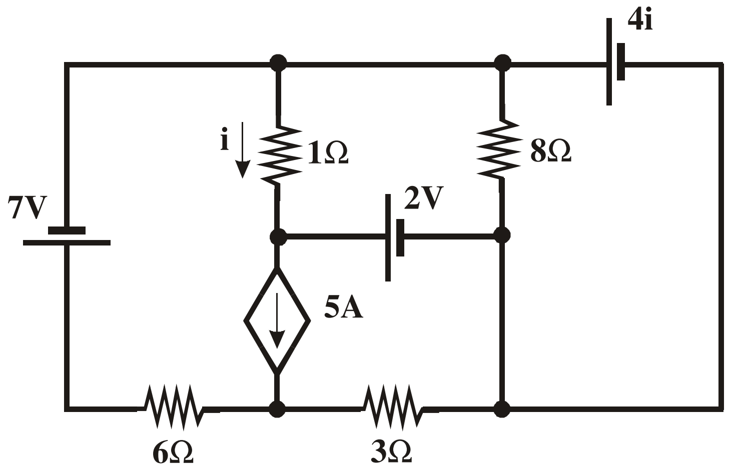
$$\Rightarrow \quad U_2 = 2V$$

Dentro da fonte de 3A, a corrente flui do terminal de **potencial mais alto** (8V) para o terminal de **potencial mais baixo** (2V), por isso **a fonte recebe energia** do circuito.

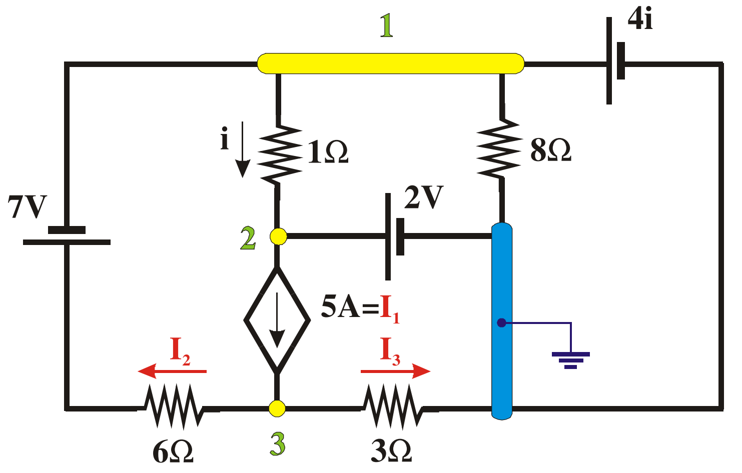
2. Calcular o valor da potência em jogo na fonte de 3A:

$$P = (U_1 - U_2) \cdot I_1 = (8 - 2) \cdot 3 = 18W$$

Exemplo: Recorrendo ao Método das Tensões Nodais, determinar o valor da potência em jogo na fonte ideal de corrente. Verificar se essa fonte recebe ou fornece energia ao circuito.



Resolução:



1. Para determinar U_3 (tensão do nó 3, relativamente à referência) resolver a equação $\boxed{I_1 - I_2 - I_3 = 0}$ tendo em conta que

$$\begin{cases} U_1 = 4i \\ i = \dfrac{U_1 - U_2}{1} \\ U_2 = 2V \\ I_1 = 5A \\ I_2 = \dfrac{(U_3 - U_1) - 7}{6} \\ I_3 = \dfrac{(U_3 - 0)}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = \dfrac{8}{3} = 2{,}67V \\ U_2 = 2V \\ \\ I_1 = 5A \\ I_2 = \dfrac{(U_3 - 2{,}67) - 7}{6} \\ I_3 = \dfrac{(U_3 - 0)}{3} \end{cases}$$

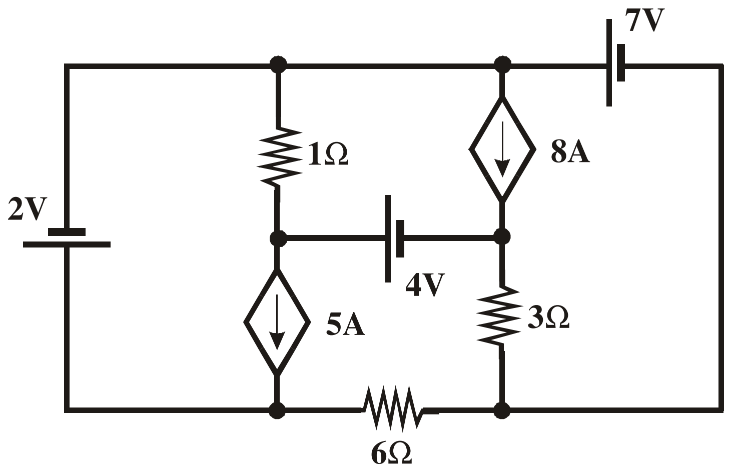
$$\boxed{5 - \frac{(U_3 - 2{,}67) - 7}{6} - \frac{(U_3 - 0)}{3} = 0}$$

$$\Rightarrow \quad U_3 = 13{,}22V$$

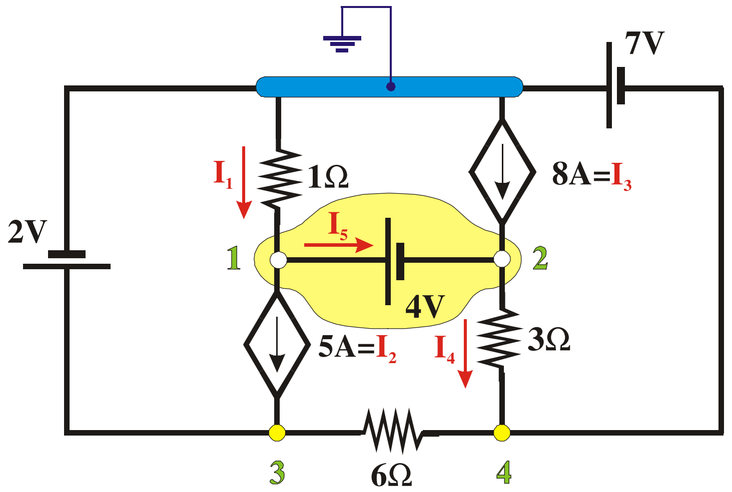
Dentro da fonte de 5A, a corrente flui do terminal de **potencial mais baixo** (2V) para o terminal de **potencial mais alto** (13,22V), por isso **a fonte fornece energia** ao circuito.

2. Calcular o valor da potência em jogo na fonte de 5A: $P = (U_3 - U_2) \cdot I_1 = [13{,}22 - (-2)] \cdot 5 = 76{,}1W$

Exemplo: Recorrendo ao Método das Tensões Nodais, determinar o valor da potência em jogo na fonte de 4V. Verificar se essa fonte recebe ou fornece energia ao circuito.



Resolução:



1. Para determinar U_1 (tensão do nó 1, relativamente à referência) resolver a equação $\boxed{I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0}$ tendo em conta que

$$\begin{cases} U_3 = 2V \\ U_4 = -7V \\ U_1 - U_2 = 4V \\ \\ I_1 = \dfrac{0 - U_1}{1} = -U_1 \\ I_2 = 5A \\ I_3 = 8A \\ I_4 = \dfrac{U_2 - U_4}{3} = \dfrac{U_1 + 3}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{-U_1 - 5 + 8 - \frac{U_1 + 3}{3} = 0} \quad \Rightarrow \quad U_1 = 1{,}5V$$

2. Para determinar I_6 resolver a equação $\boxed{I_1 - I_2 - I_6 = 0}$ tendo em conta que:

$$\begin{cases} I_1 = -U_1 = -1{,}5A \\ I_2 = 5A \end{cases}$$

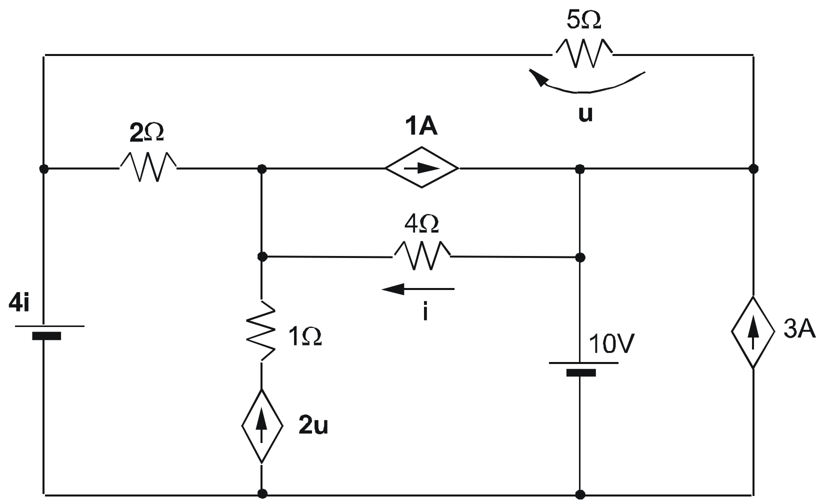
$$\boxed{-1{,}5 - 5 - I_6 = 0} \quad \Rightarrow \quad I_6 = -6{,}5A$$

Dentro da fonte de 4V, a corrente flui do terminal de **potencial mais baixo** para o terminal de **potencial mais alto** por isso **a fonte fornece energia** ao circuito.

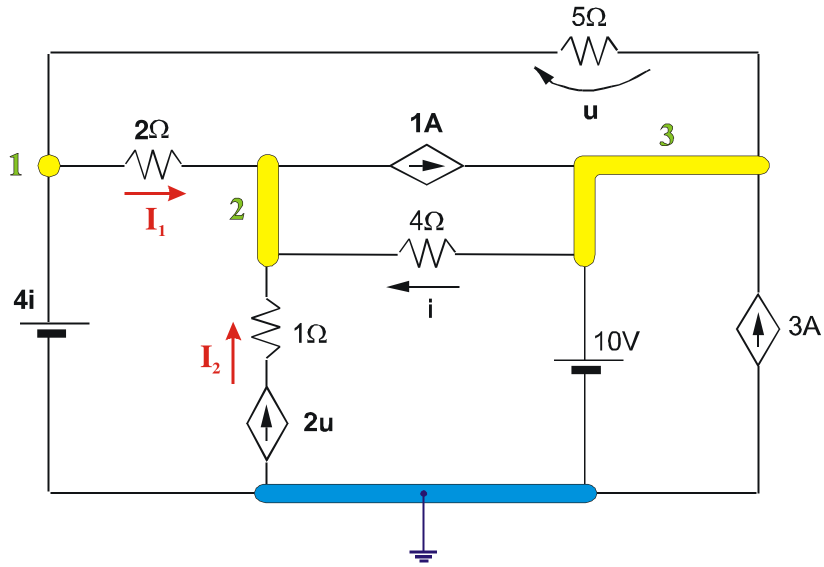
3. Calcular o valor da potência em jogo na fonte de 4V:

$$P = 4 \cdot |I_6| = 4 \cdot 6{,}5 = 26W$$

Exemplo: Recorrendo ao Método das Tensões Nodais, determinar o valor da potência em jogo na fonte de 1A. Verificar se essa fonte recebe ou fornece energia ao circuito.



Resolução:



1. Para determinar U_2 (tensão do nó 2, relativamente à referência) resolver a equação $\boxed{I_1 + I_2 + i = 0}$ tendo em conta que

$$\begin{cases} U_1 = 4i \\ U_3 = 10V \\ i = \dfrac{U_3 - U_2}{4} = \dfrac{10 - U_2}{4} \\ u = 5 \cdot (U_3 - U_1) = 5 \cdot (10 - 4i) = 5 \cdot U_2 \\ I_1 = \dfrac{U_1 - U_2}{2} = \dfrac{4i - U_2}{2} = \dfrac{4 \cdot \left(\dfrac{10 - U_2}{4}\right) - U_2}{2} = 5 - U_2 \\ I_2 = 2 \cdot u = 10 \cdot U_2 \end{cases}$$

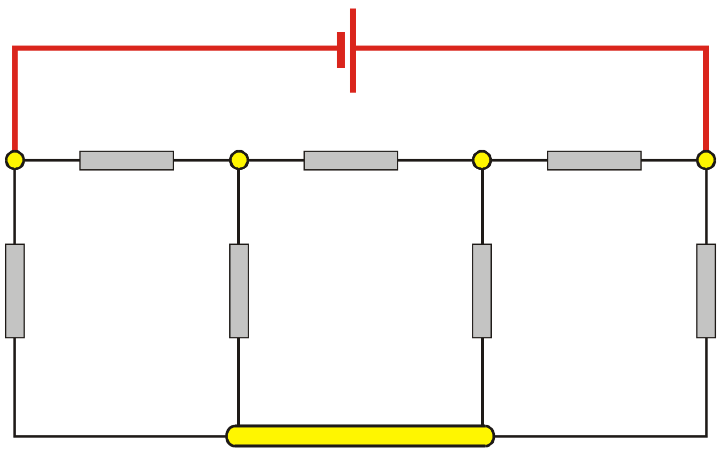
$$\boxed{5 - U_2 + 10 \cdot U_2 + \frac{10 - U_2}{4} = 0}$$

$$\Rightarrow \quad U_2 = -0{,}86V$$

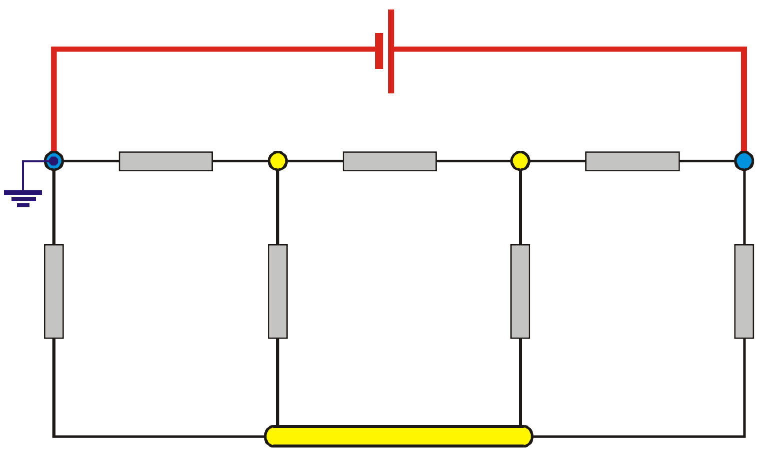
Dentro da fonte de 1A, a corrente flui do terminal de **potencial mais baixo** (-0,86V) para o terminal de **potencial mais alto** (10V), por isso **a fonte fornece energia** ao circuito.

2. Calcular o valor da potência em jogo na fonte de 1A: $P = (U_3 - U_2) \cdot 1 = [10 - (-0{,}86)] \cdot 1 = 10{,}86W$

Exemplo: Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado, tendo em vista o cálculo das tensões nos nós do circuito usando o Método das Tensões Nodais.

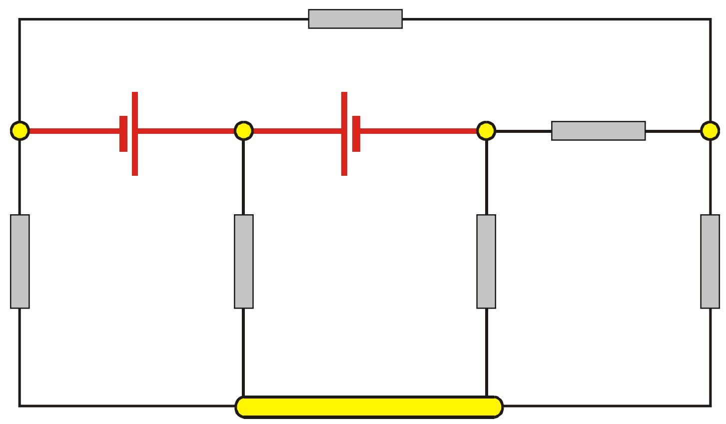


Resolução:

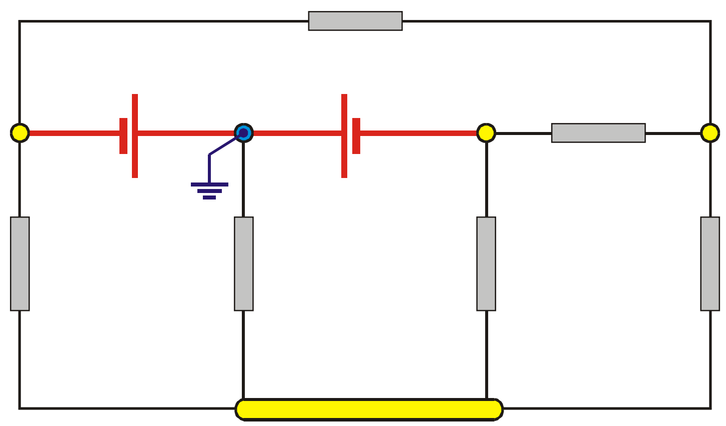


A referência fica igualmente bem escolhida se for colocada em qualquer um dos nós a azul.

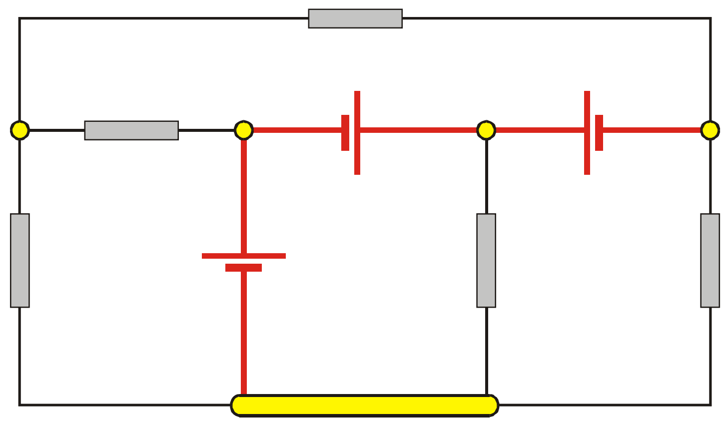
Exemplo: Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado, tendo em vista o cálculo das tensões nos nós do circuito usando o Método das Tensões Nodais.



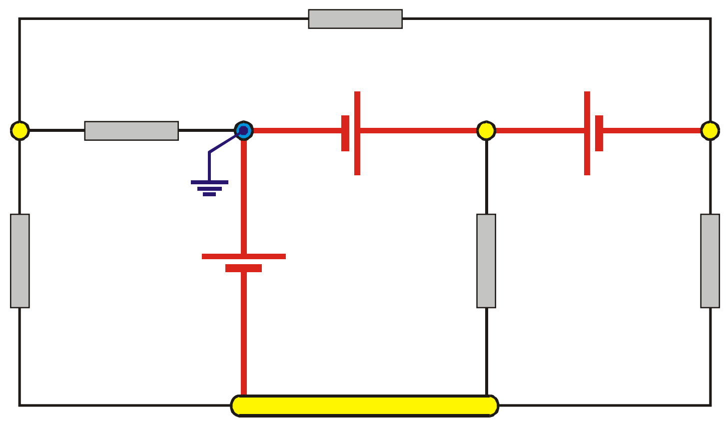
Resolução:



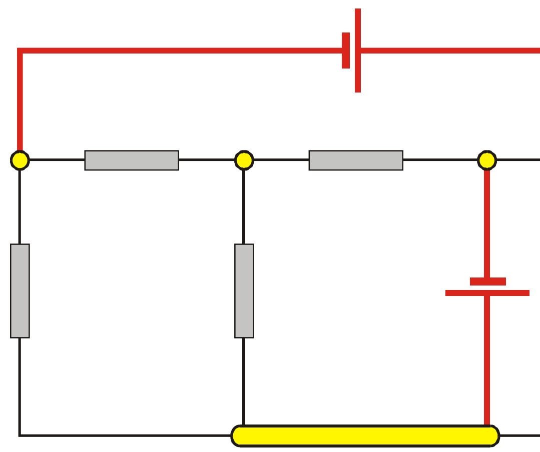
Exemplo: Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado, tendo em vista o cálculo das tensões nos nós do circuito usando o Método das Tensões Nodais.



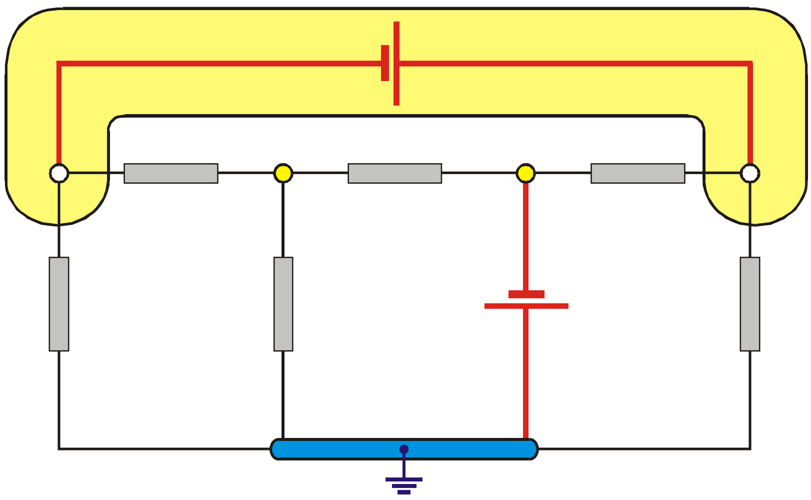
Resolução:



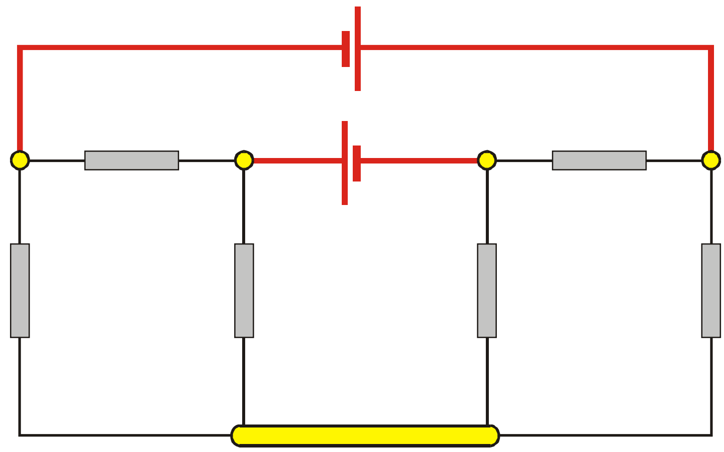
Exemplo: Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado, tendo em vista o cálculo das tensões nos nós do circuito usando o Método das Tensões Nodais.



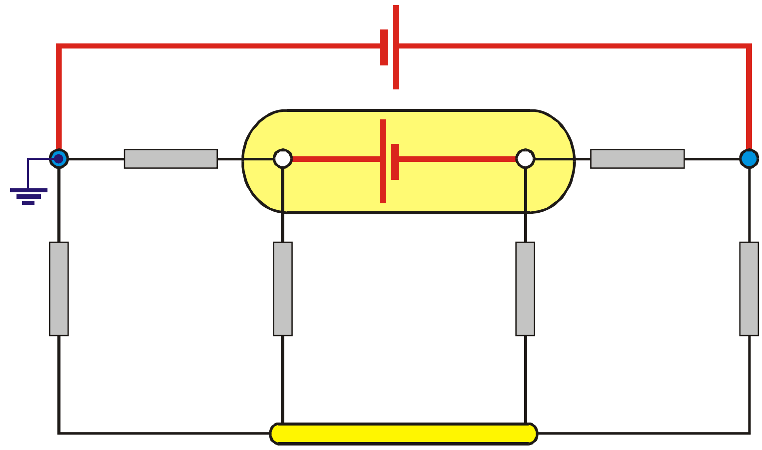
Resolução:

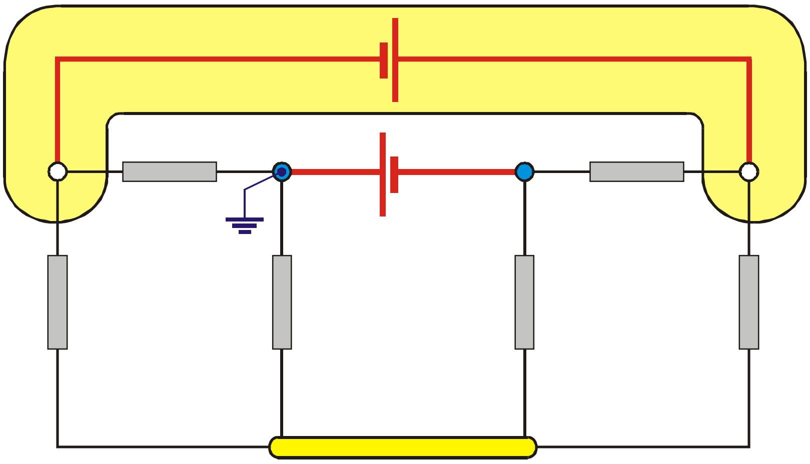


Exemplo: Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado, tendo em vista o cálculo das tensões nos nós do circuito usando o Método das Tensões Nodais.



Resolução:





A referência fica igualmente bem escolhida se for colocada em qualquer um dos nós a azul.

19. Princípio da Sobreposição

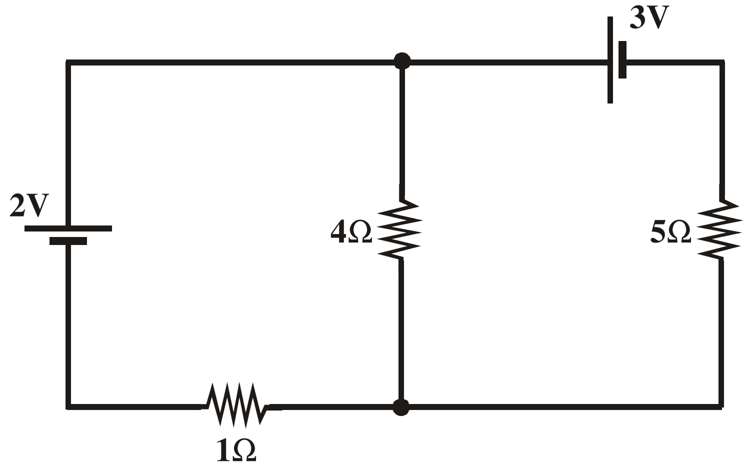
A ***corrente*** *que atravessa um componente de um circuito linear é igual à* ***soma algébrica das correntes*** *produzidas independentemente por cada fonte nesse componente.*

A ***tensão*** *existente entre os terminais de um componente de um circuito linear é igual à* ***soma algébrica das tensões*** *produzidas independentemente por cada fonte nesse componente.*

Quando se recorre ao Princípio da Sobreposição verifica-se que:

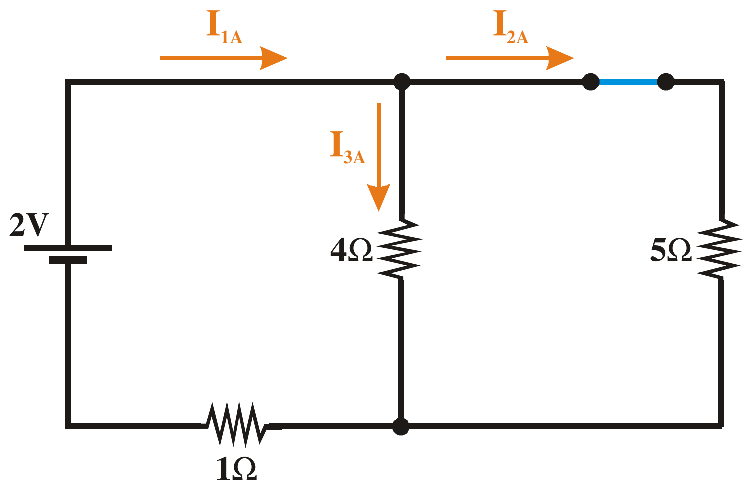
- o circuito a analisar dá origem a um **conjunto de circuitos** em número que pode chegar a ser igual ao **número de fontes** do circuito original.
- a **potência total** num componente de um circuito:
    - **não é a soma das potências** produzidas independentemente por cada fonte do circuito nesse componente;
    - tem de ser calculada recorrendo à **corrente** que atravessa esse componente e/ou à **tensão** que existe nos seus terminais.

Exemplo: Recorrendo ao Princípio da Sobreposição, determinar as correntes nos ramos do circuito.

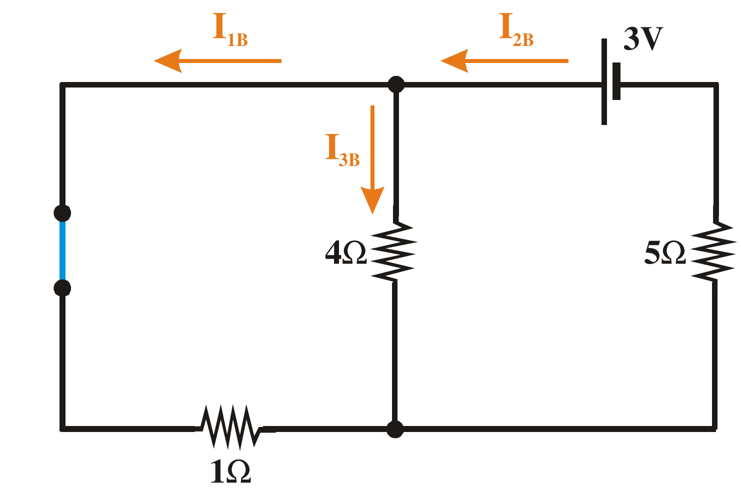


Tópicos de Resolução:

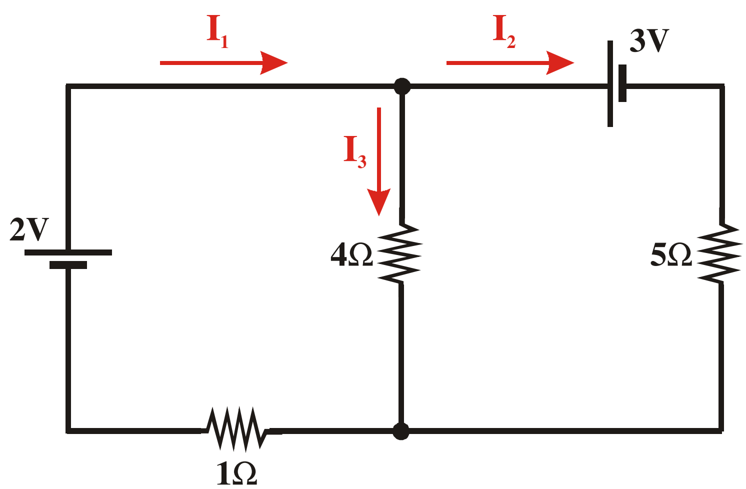
1. Calcular as correntes devidas à fonte de 2V.



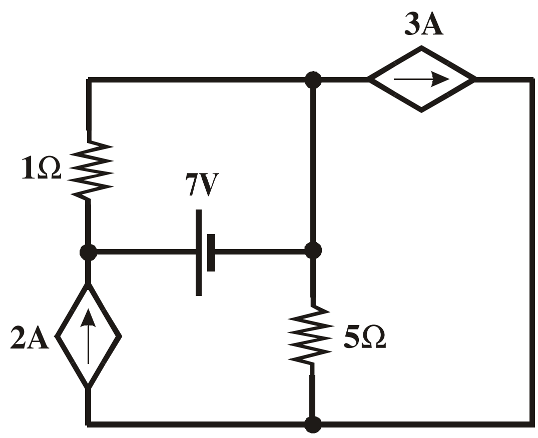
2. Calcular as correntes devidas à fonte de 3V.



3. Calcular as correntes totais.

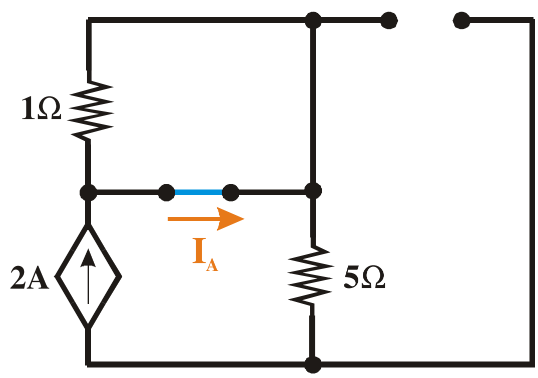


Exemplo: Recorrendo ao Princípio da Sobreposição, determinar o valor da potência em jogo na fonte ideal de tensão.

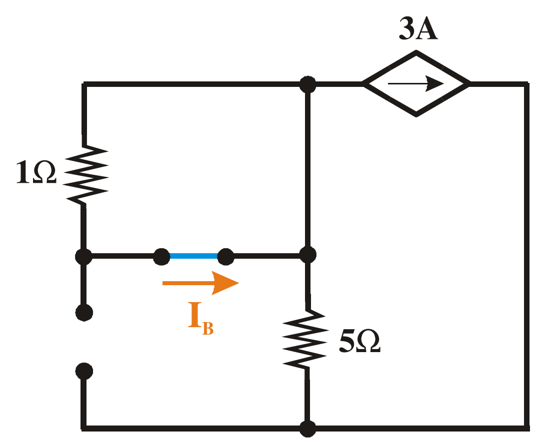


Tópicos de Resolução:

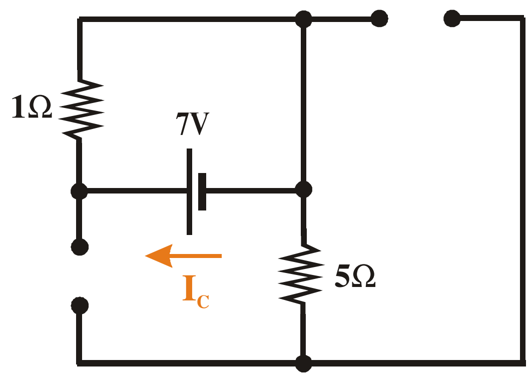
1. Calcular a corrente que passa na fonte de 7V devido à fonte de 2A.



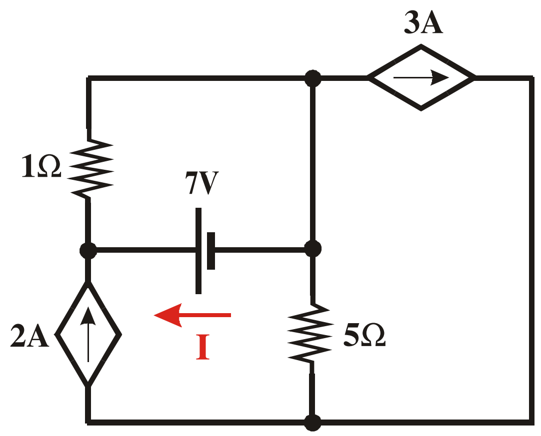
2. Calcular a corrente que passa na fonte de 7V devido à fonte de 3A.



3. Calcular a corrente que passa na fonte de 7V devido à própria fonte de 7V.

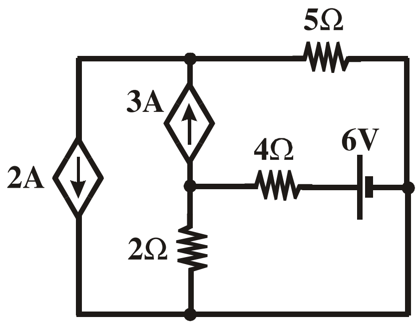


4. Calcular a corrente total que passa na fonte de 7V.



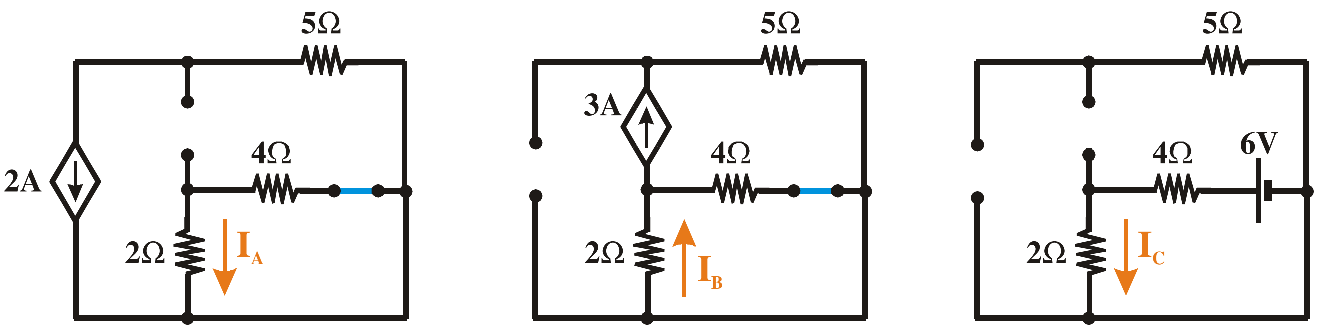
5. Calcular o valor da potência em jogo na fonte de 7V.

Exemplo: Recorrendo ao Princípio da Sobreposição, determinar o valor da potência dissipada na resistência de 2Ω.

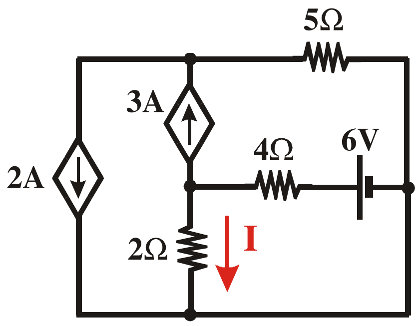


Tópicos de Resolução:

1. Calcular, na resistência de 2Ω, a corrente devida a cada uma das fontes.

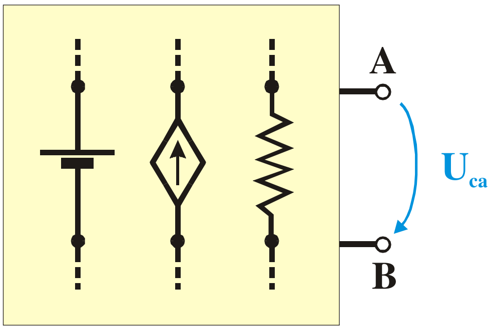


2. Calcular, na resistência de 2Ω, a corrente total.

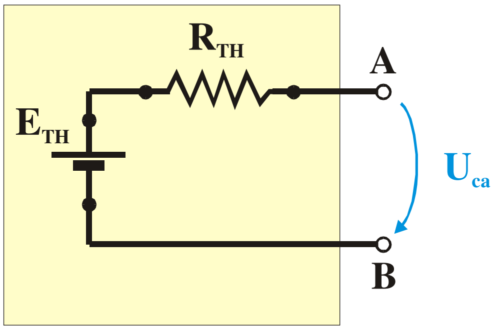


3. Calcular o valor da potência dissipada na resistência de 2Ω.

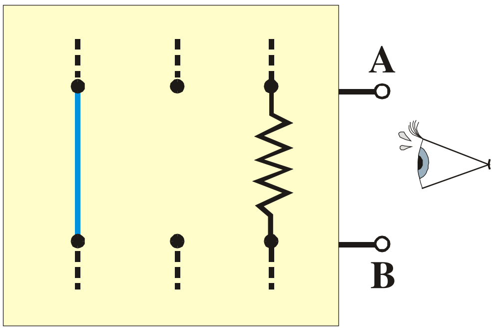
20. Teorema de Thévenin



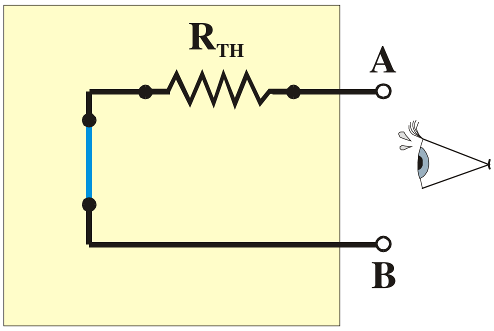
$$\boxed{U_{ca} = E_{TH}}$$



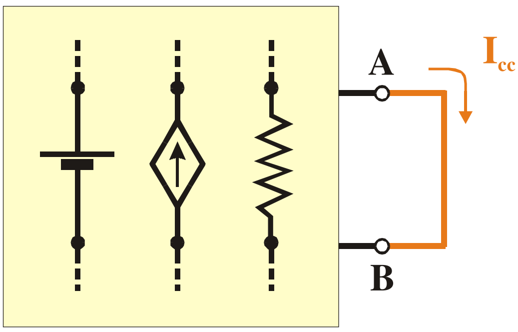
$$\boxed{U_{ca} = E_{TH}}$$



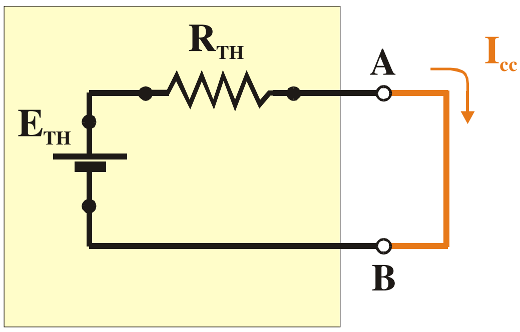
$$\boxed{R_{AB} = R_{TH}}$$



$$\boxed{R_{AB} = R_{TH}}$$

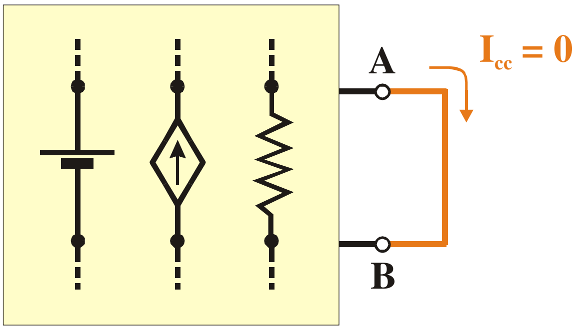


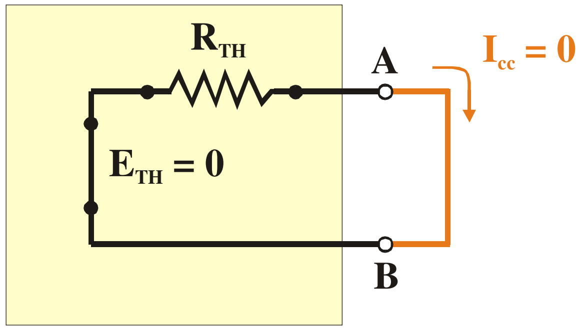
$$\boxed{I_{cc} = \frac{E_{TH}}{R_{TH}}}$$



$$\boxed{I_{cc} = \frac{E_{TH}}{R_{TH}}}$$

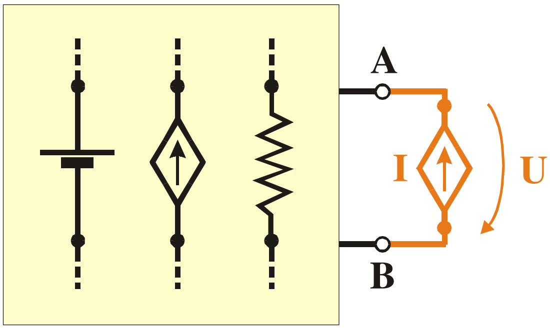
$$\boxed{E_{TH} = 0}$$

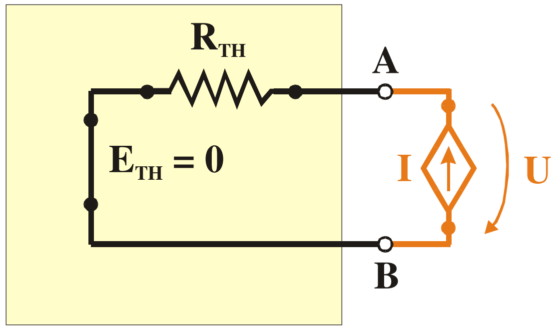




$$\boxed{I_{cc} = 0}$$

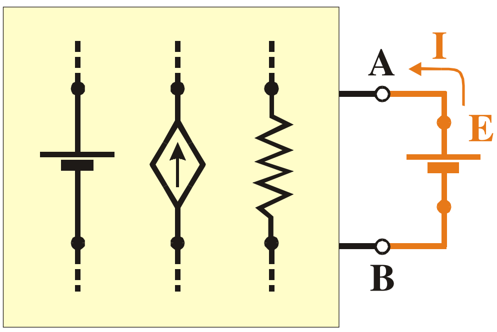
$$\boxed{I_{cc} = 0}$$

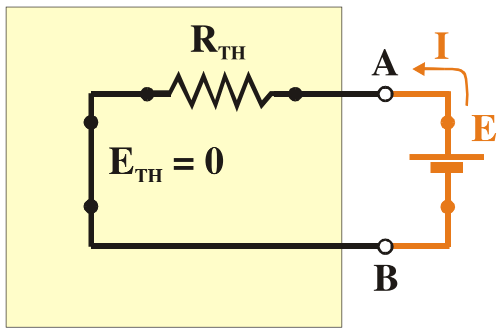




$$\boxed{R_{TH} = \frac{U}{I}}$$

$$\boxed{R_{TH} = \frac{U}{I}}$$

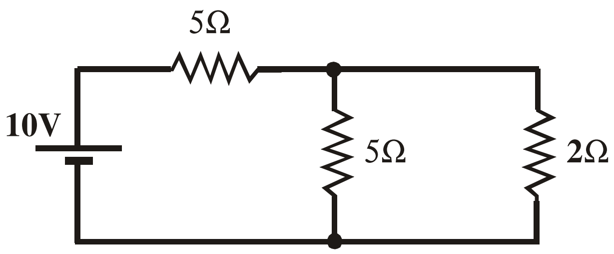




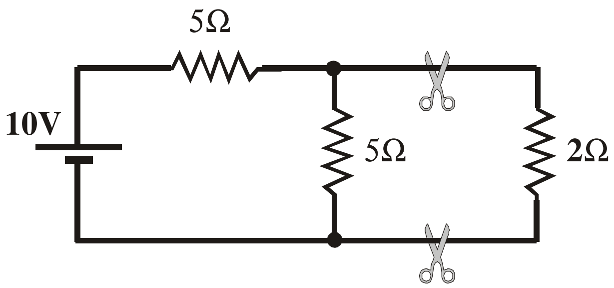
$$\boxed{R_{TH} = \frac{E}{I}}$$

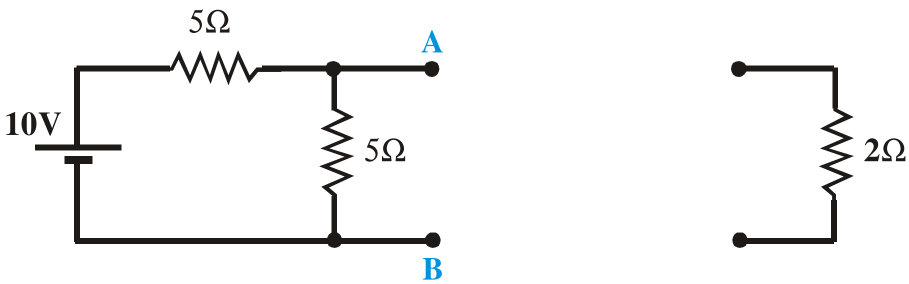
$$\boxed{R_{TH} = \frac{E}{I}}$$

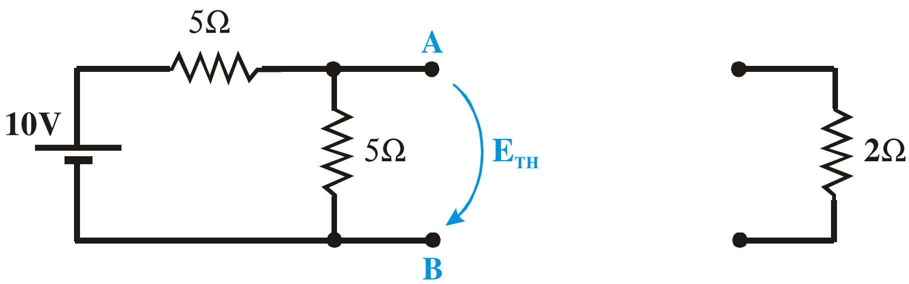
Exemplo: Recorrendo ao Teorema de Thévenin, determinar o valor da tensão presente nos terminais da resistência de 2Ω.

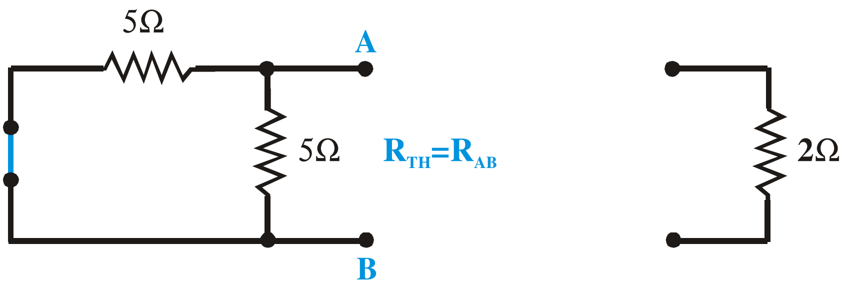


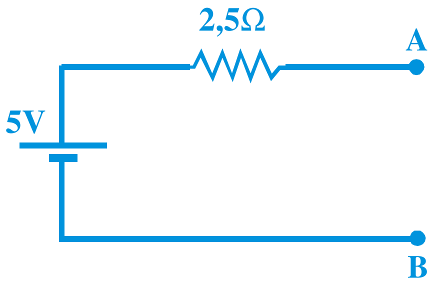
Tópicos de Resolução:

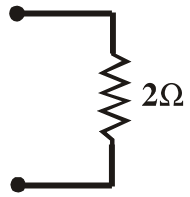


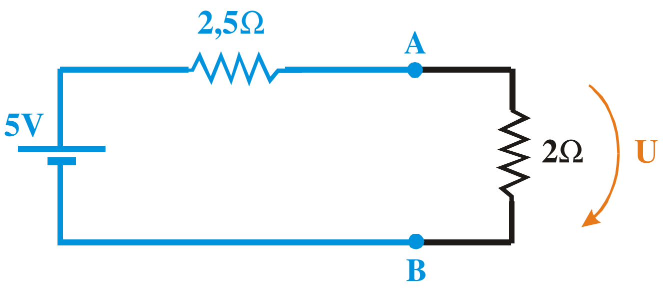




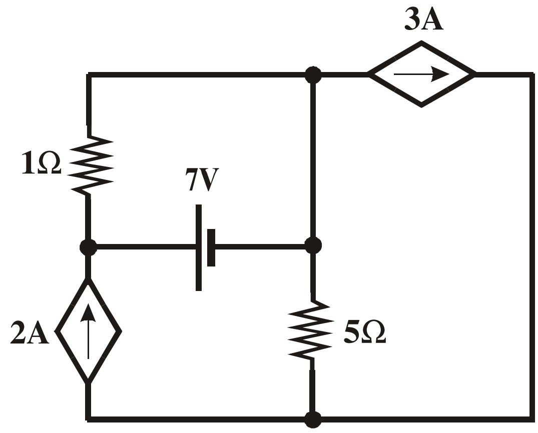



2,5Ω
A
5V
B

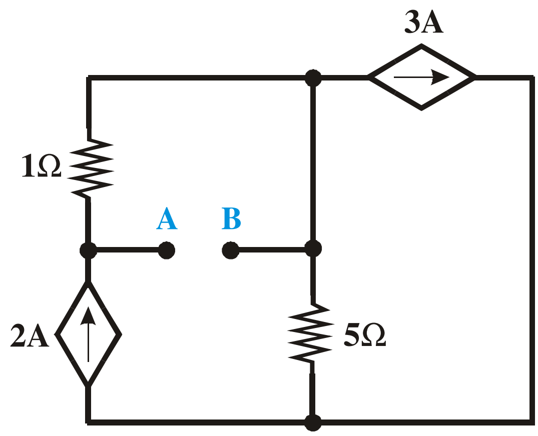

2Ω

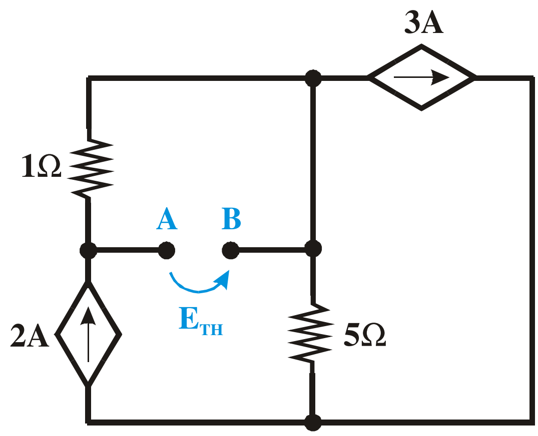

2,5Ω
A
5V
2Ω
U
B

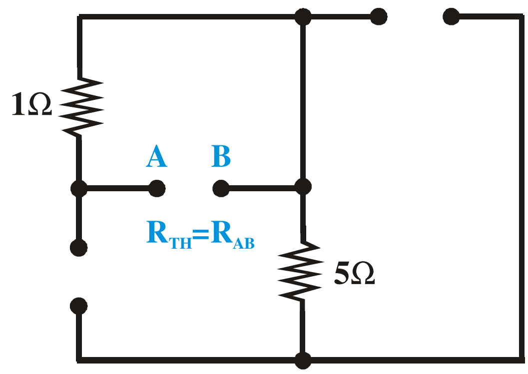
Exemplo: Recorrendo ao Teorema de Thévenin, determinar o valor da potência em jogo na fonte ideal de tensão.

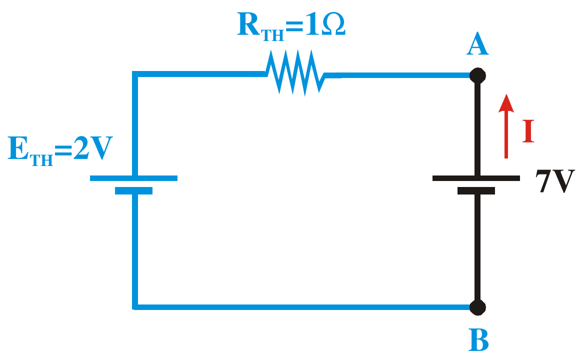


Tópicos de Resolução:

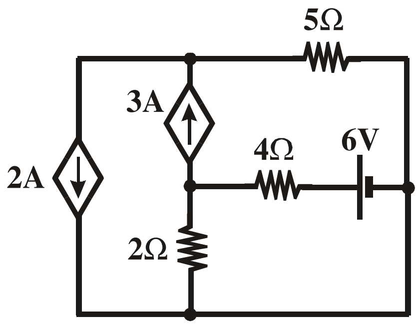




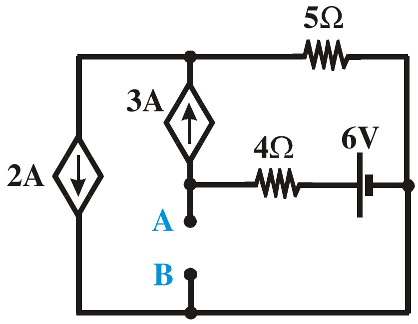

1Ω
A
B
RTH=RAB
5Ω

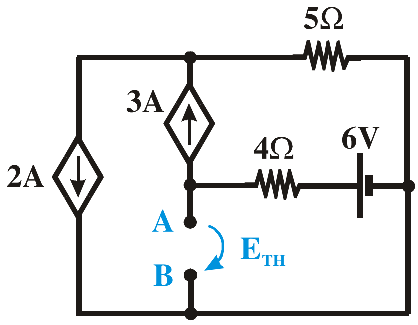

RTH=1Ω
A
ETH=2V
I
7V
B

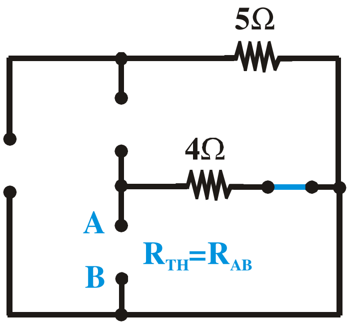
Exemplo: Recorrendo ao Teorema de Thévenin, determinar o valor da potência dissipada na resistência de 2Ω.

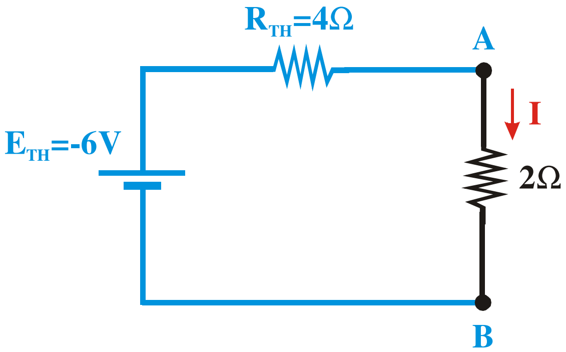


Tópicos de Resolução:

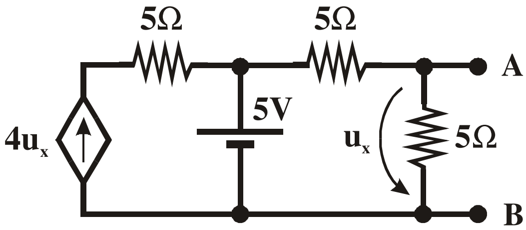




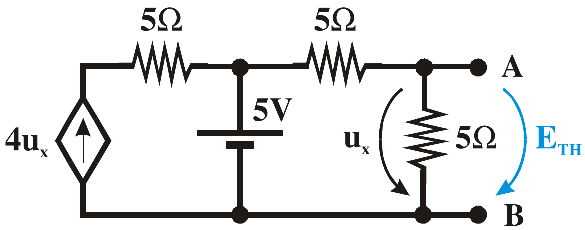

5Ω
4Ω
A
B
$R_{TH}=R_{AB}$

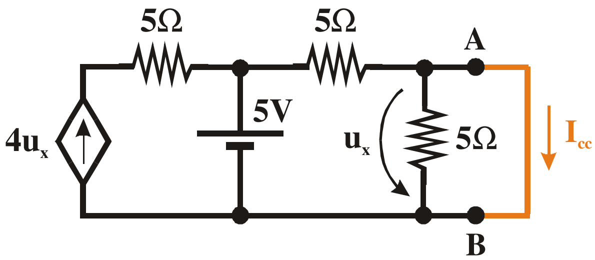

$R_{TH}=4\Omega$
A
I
$E_{TH}=-6V$
2Ω
B

Exemplo: Determinar o equivalente de Thévenin do circuito representado, relativamente aos terminais A e B.

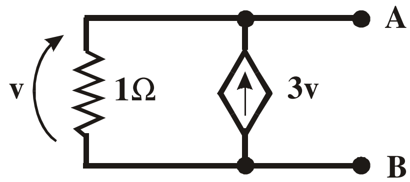


Tópicos de Resolução:

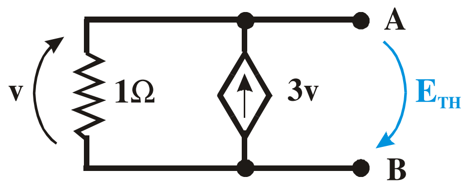


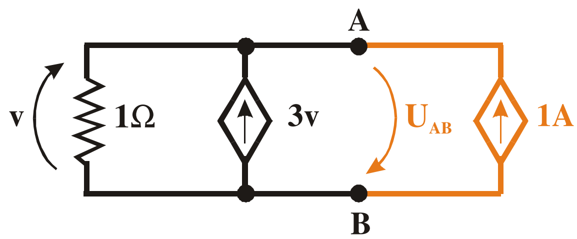


Exemplo: Determinar o equivalente de Thévenin do circuito representado, relativamente aos terminais A e B.

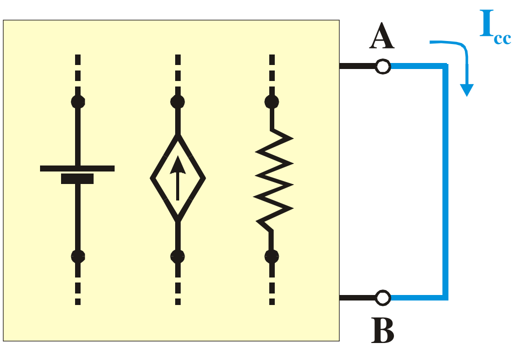


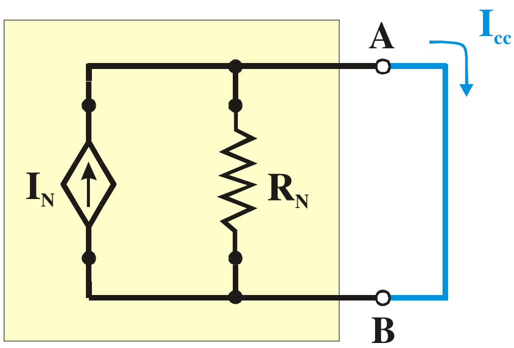
Tópicos de Resolução:



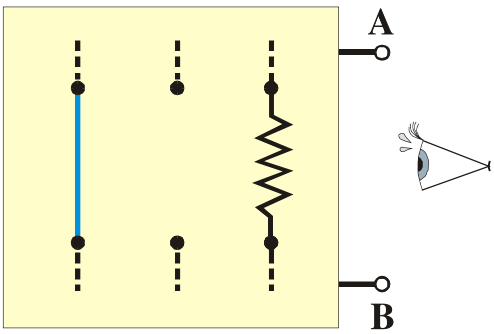


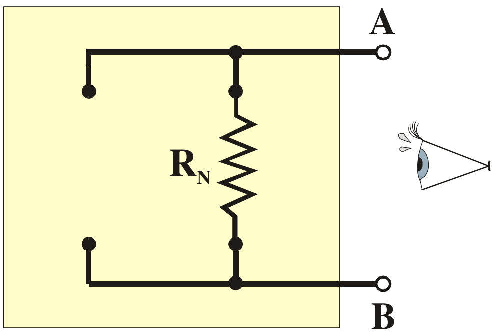
21. Teorema de Norton



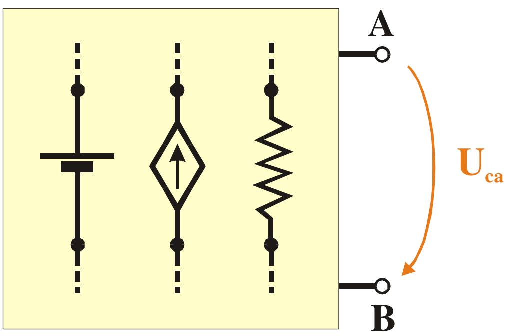


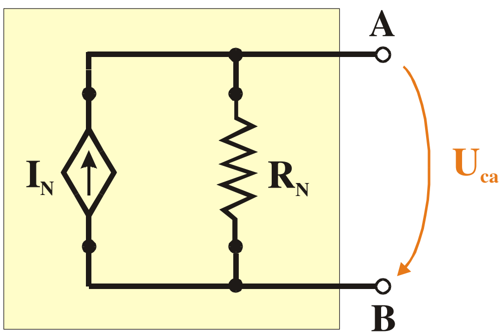
$$\boxed{I_{cc} = I_N}$$ $$\boxed{I_{cc} = I_N}$$





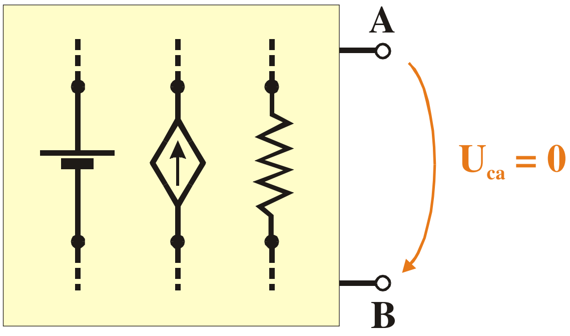
$$\boxed{R_{AB} = R_N}$$ $$\boxed{R_{AB} = R_N}$$

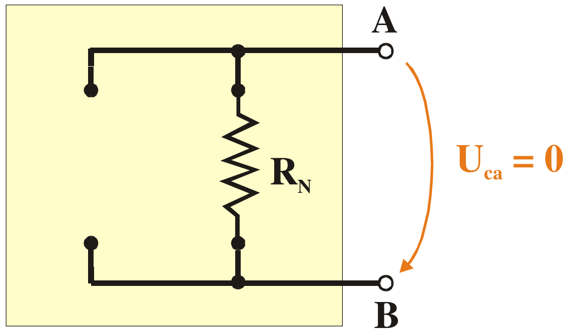




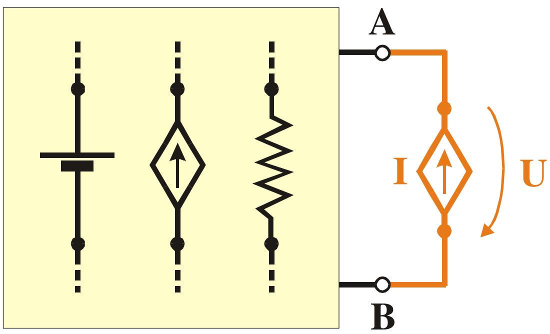
$$\boxed{U_{ca} = R_N \cdot I_N}$$ $$\boxed{U_{ca} = R_N \cdot I_N}$$

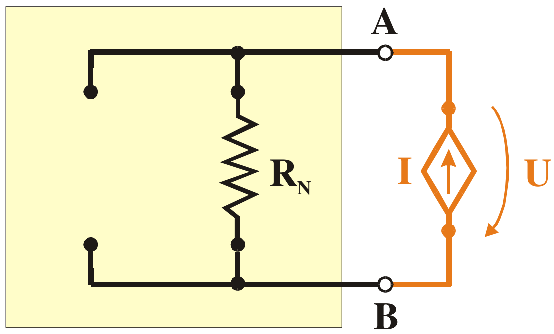
$$\boxed{I_N = 0}$$



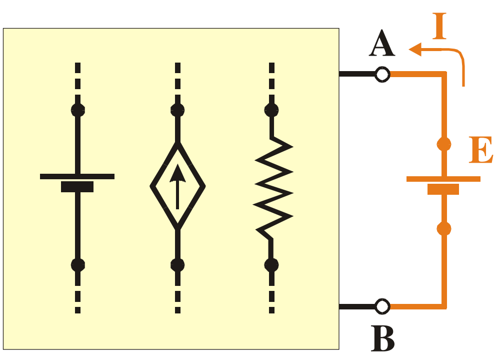


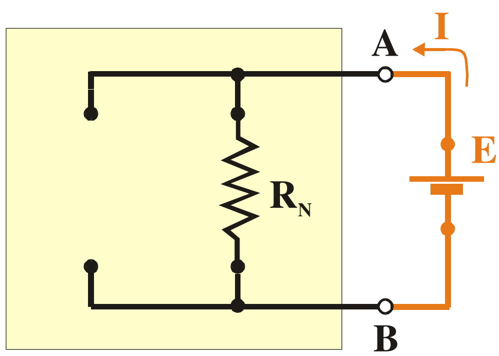
$$\boxed{U_{ca} = 0} \qquad \boxed{U_{ca} = 0}$$





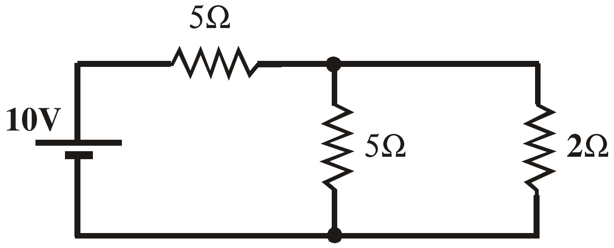
$$\boxed{R_N = \frac{U}{I}} \qquad \boxed{R_N = \frac{U}{I}}$$



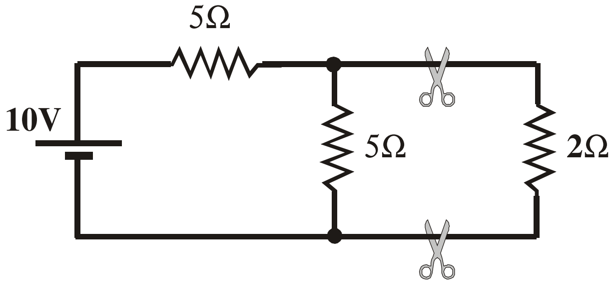


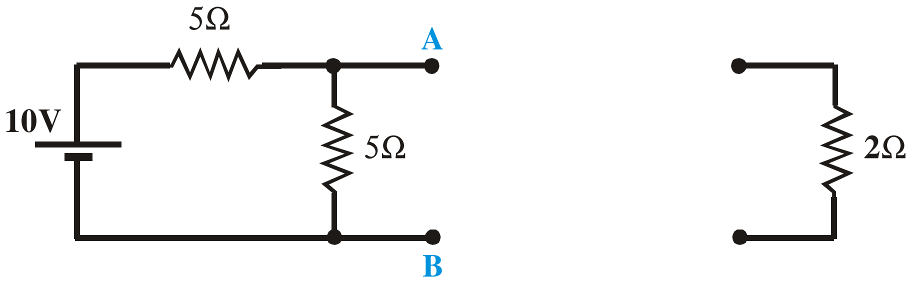
$$\boxed{R_N = \frac{E}{I}} \qquad \boxed{R_N = \frac{E}{I}}$$

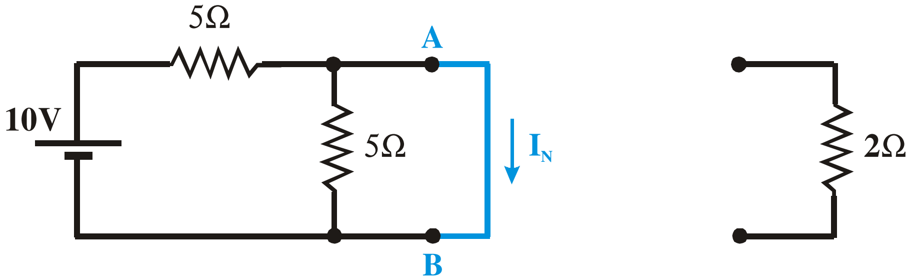
Exemplo: Recorrendo ao Teorema de Norton, determinar o valor da corrente que atravessa a resistência de 2Ω.

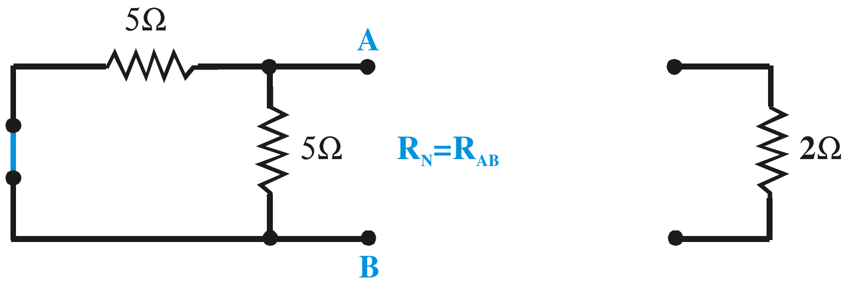


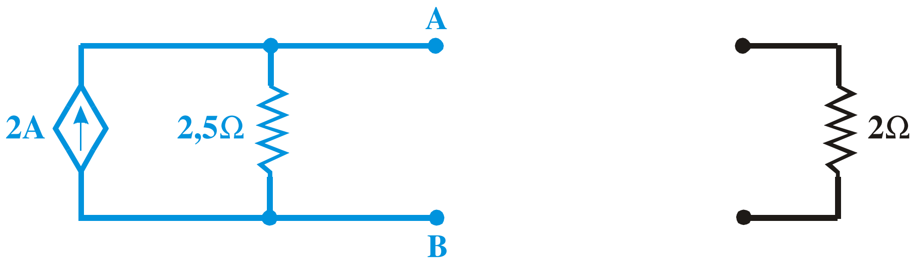
Tópicos de Resolução:

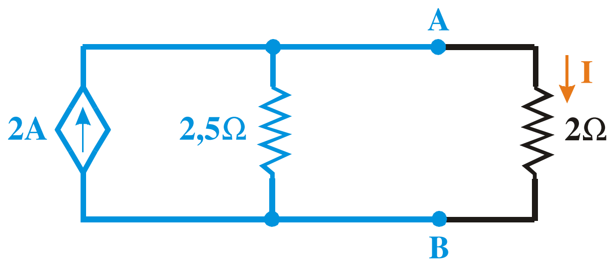




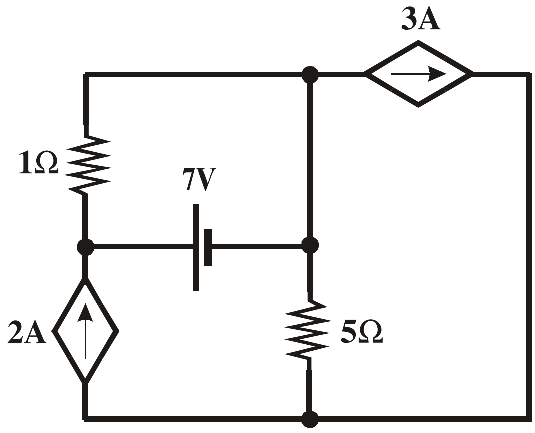




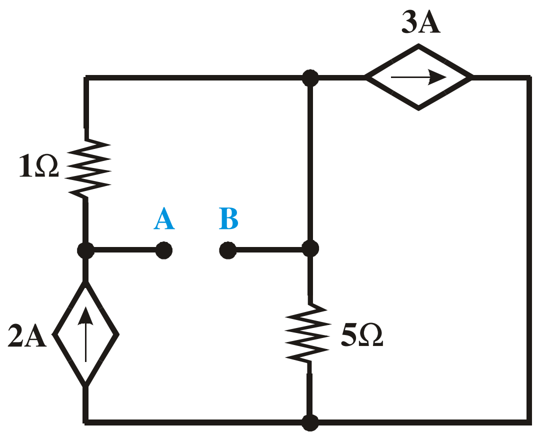

A
2A
2,5Ω
B
2Ω

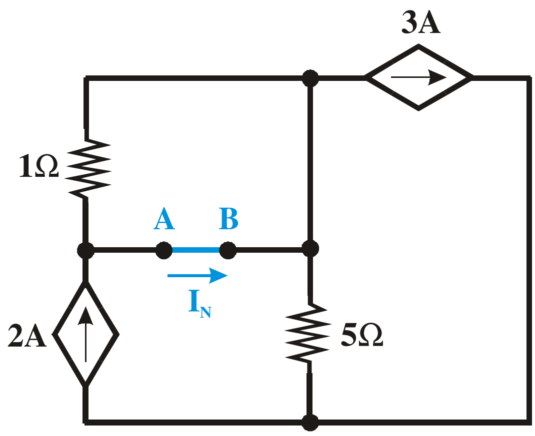

A
I
2A
2,5Ω
2Ω
B

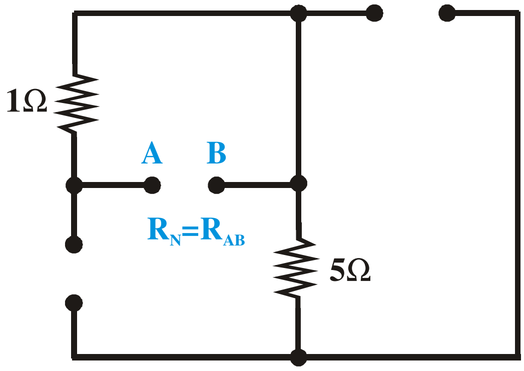
Exemplo: Recorrendo ao Teorema de Norton, determinar o valor da potência em jogo na fonte ideal de tensão.



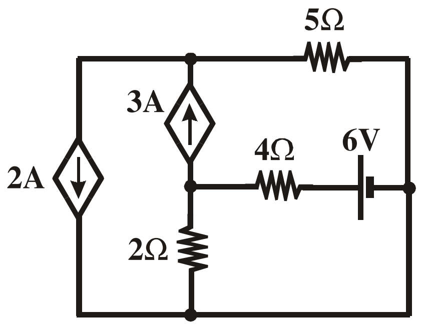
Tópicos de Resolução:



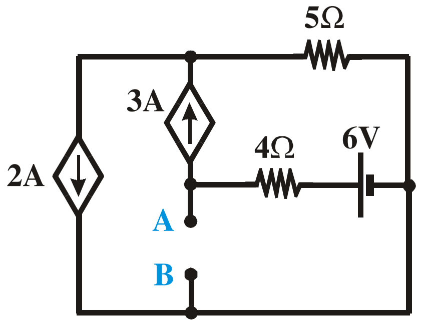


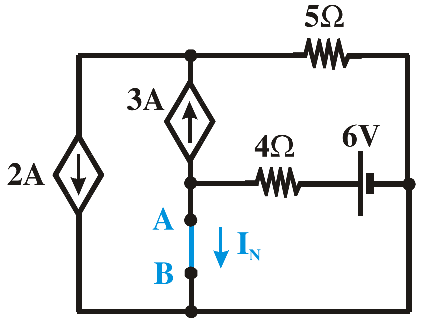

1Ω
A
B
$R_N = R_{AB}$
5Ω

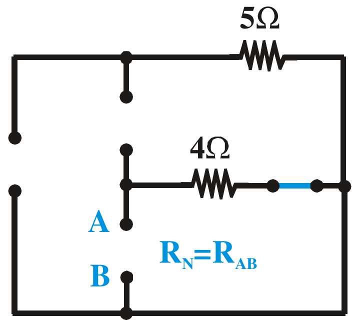
Exemplo: Recorrendo ao Teorema de Norton, determinar o valor da potência dissipada na resistência de 2Ω.



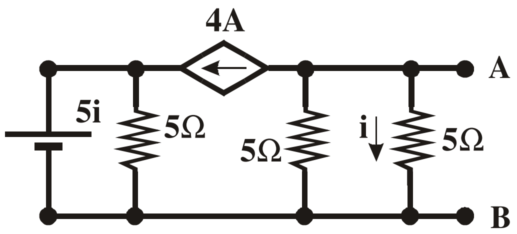
Tópicos de Resolução:



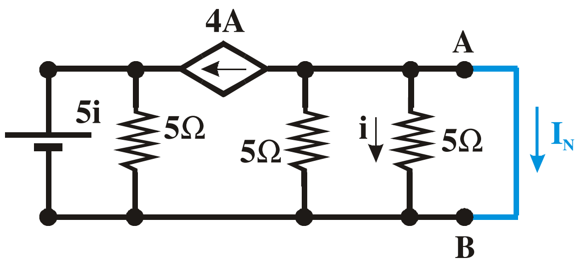


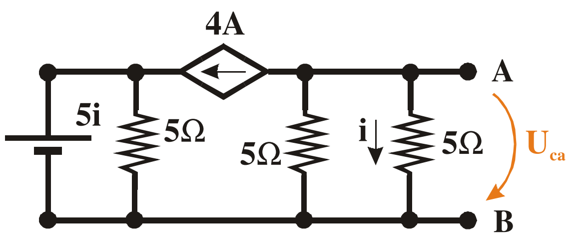


Exemplo: Determinar o equivalente de Norton do circuito representado, relativamente aos terminais A e B.

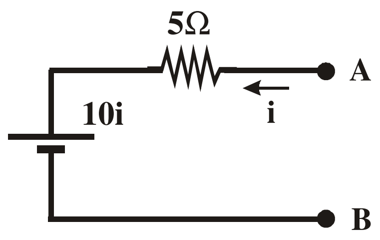


Tópicos de Resolução:

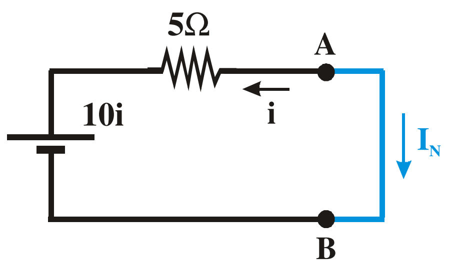


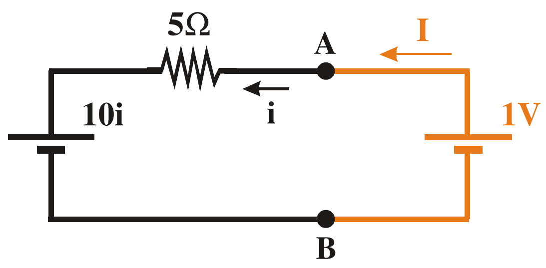


Exemplo: Determinar o equivalente de Norton do circuito representado, relativamente aos terminais A e B.

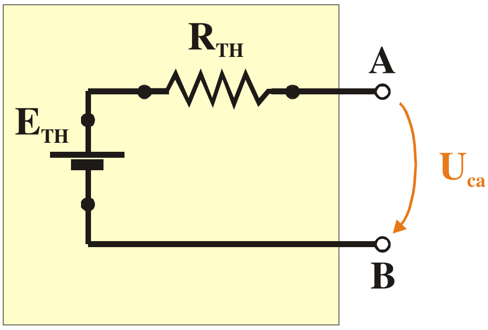


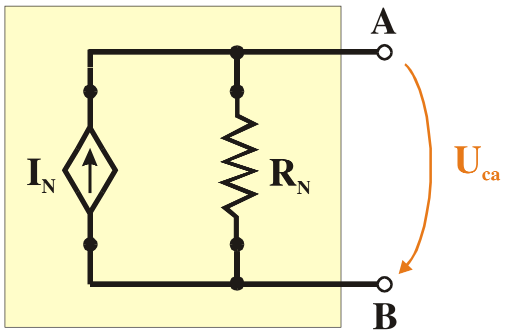
Tópicos de Resolução:





22. Equivalente de Thévenin / Equivalente de Norton

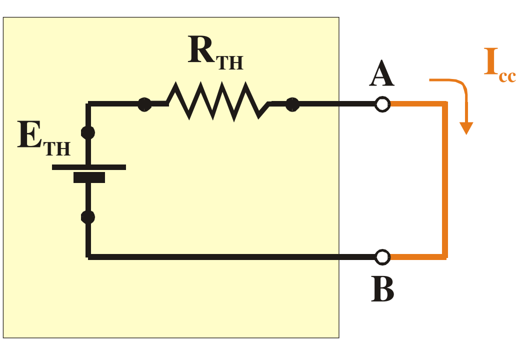


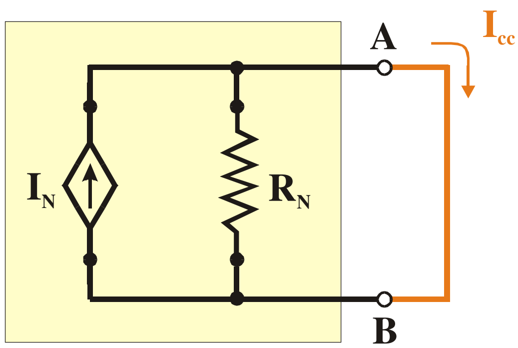


$$\boxed{U_{ca} = E_{TH}}$$

$$\boxed{U_{ca} = R_N \cdot I_N}$$

$$\boxed{E_{TH} = R_N \cdot I_N}$$

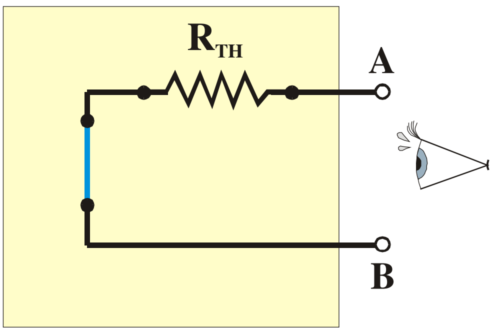


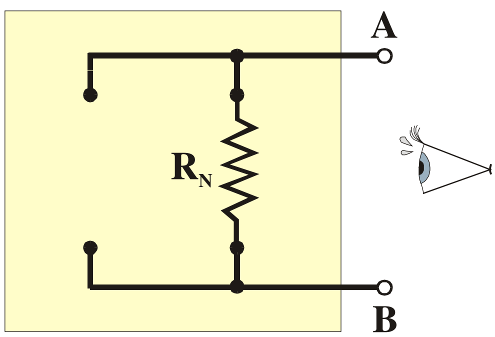


$$\boxed{I_{cc} = \frac{E_{TH}}{R_{TH}}}$$

$$\boxed{I_{cc} = I_N}$$

$$\boxed{I_N = \frac{E_{TH}}{R_{TH}}}$$





$$\boxed{R_{AB} = R_{TH}}$$

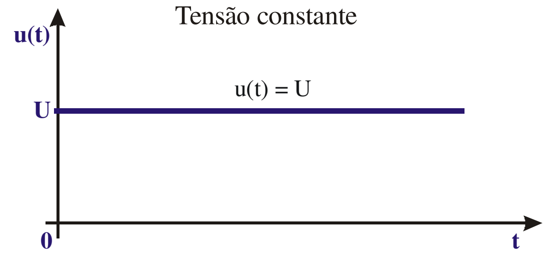
$$\boxed{R_{AB} = R_N}$$

$$\boxed{R_{TH} = R_N}$$

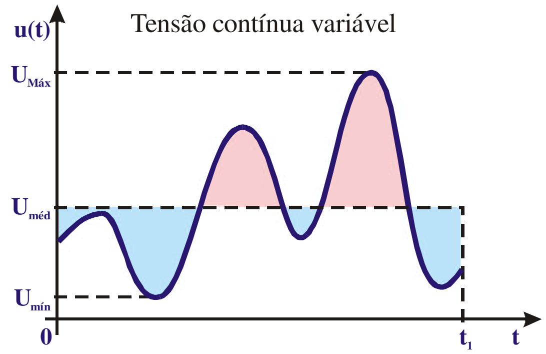
23. Sinais

Sinais: tensões ou correntes que evoluem ao longo do tempo (são funções do tempo).

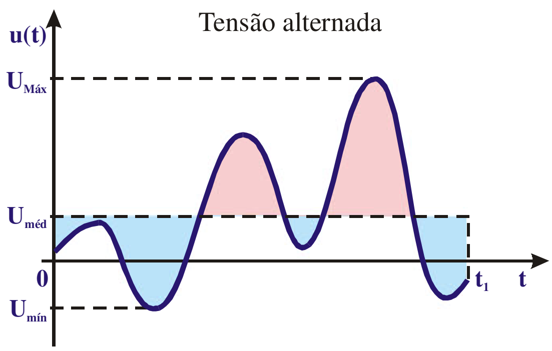
- **Sinais Contínuos**
  - **Constantes [U, I]**

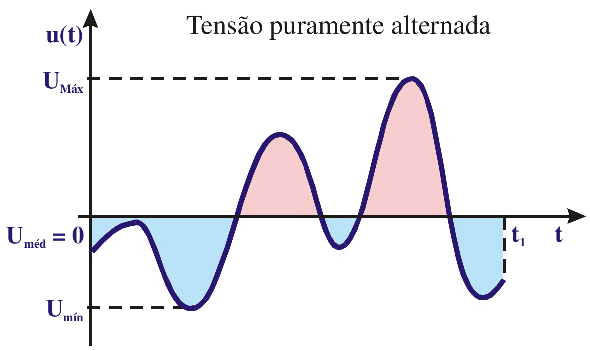


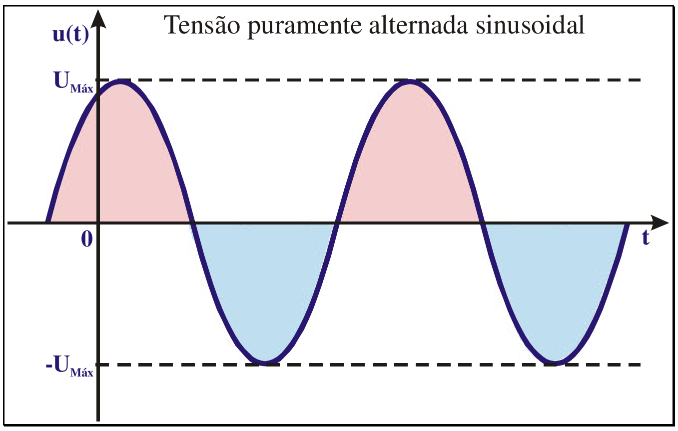
  - **Variáveis [u(t), i(t)]**



- **Sinais Alternados [u(t), i(t)]**







Nota: a soma das **áreas a azul** é igual à soma das **áreas a rosa**.

Valor máximo: $S_{Máx}$

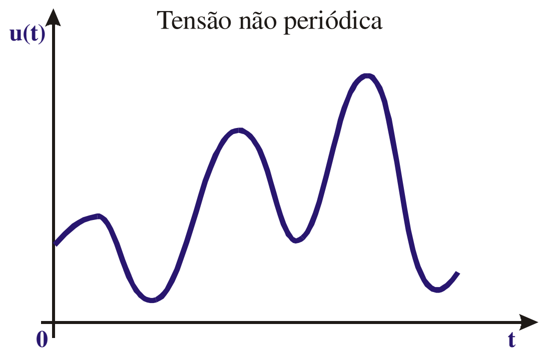
Valor mínimo: $S_{mín}$

Valor médio: $S_{méd}$

$$\boxed{S_{méd} = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} s(t)\cdot dt}$$

Os sinais **não constantes** podem ser:

- **Não periódicos** (ou aperiódicos)

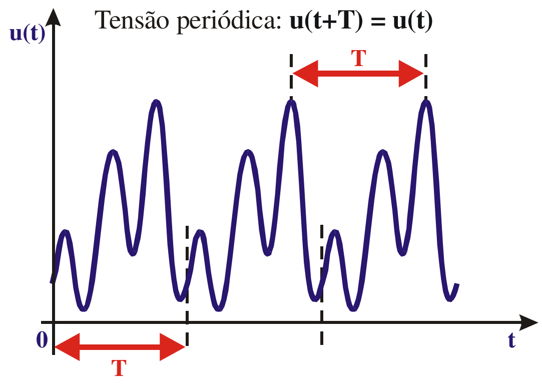


- **Periódicos**

Sinal periódico: sinal que se repete a cada **T** segundos.

O **período (T)** é o menor intervalo de tempo que um sinal periódico pode ser deslocado para produzir um sinal idêntico a si própria. Mede-se em **segundos (s)**.

A **frequência (f)**, medida em **hertz (Hz)**, é o número de períodos que ocorrem num segundo.



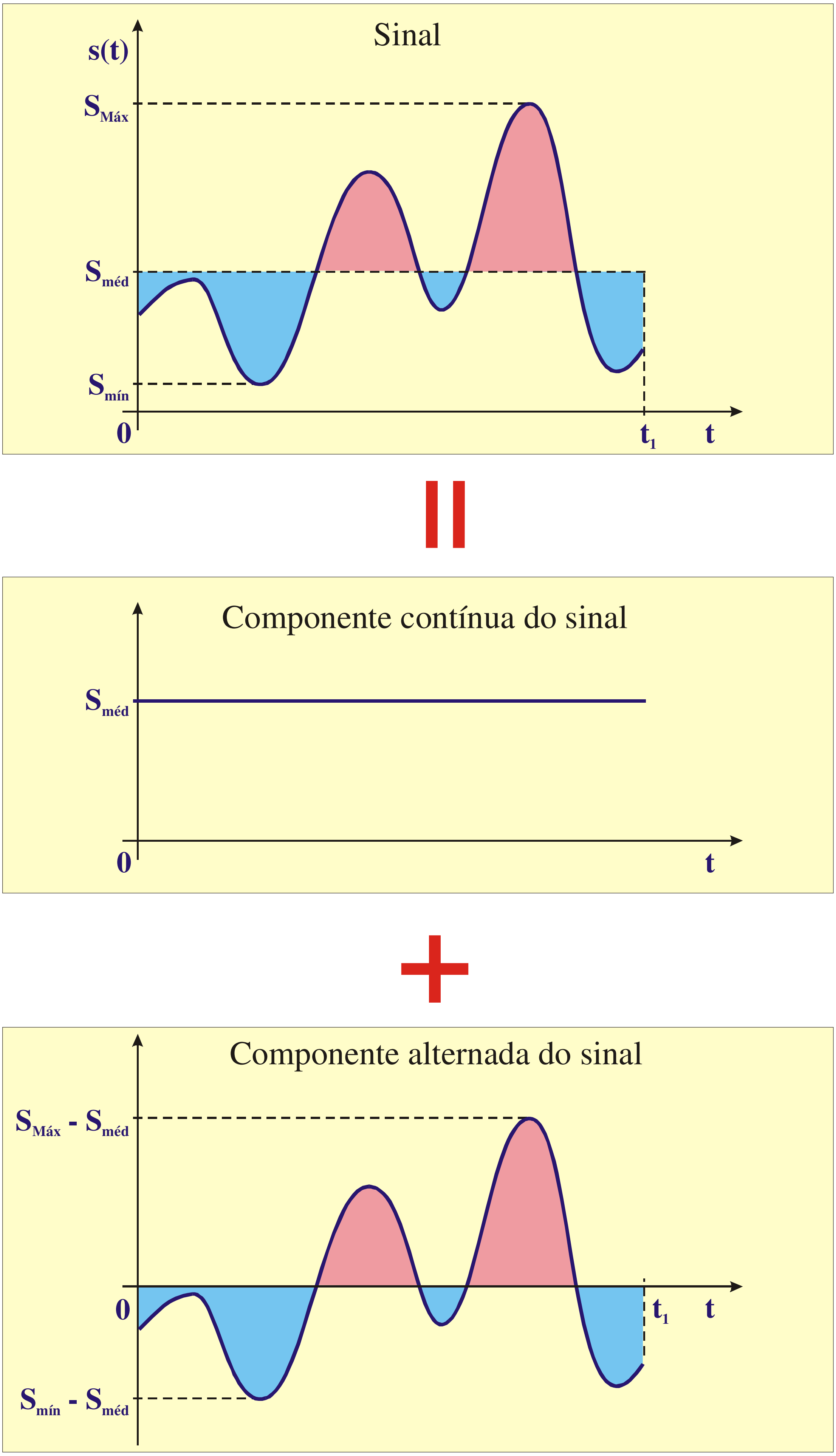
$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

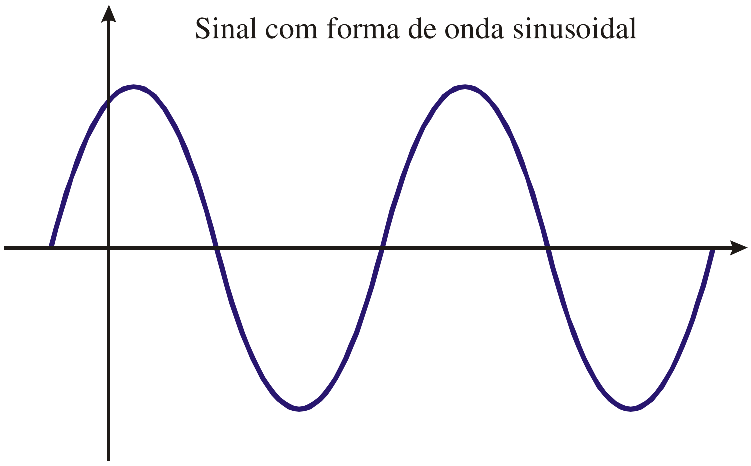
Valor médio de um sinal periódico

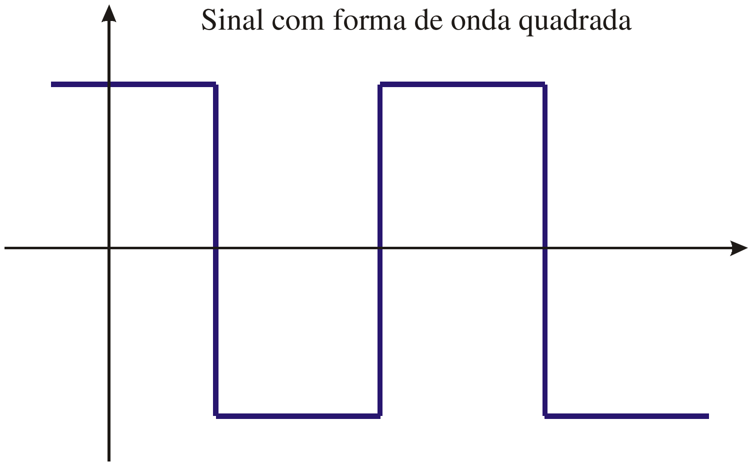
$$\boxed{S_{méd} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cdot dt \qquad \forall t_0}$$

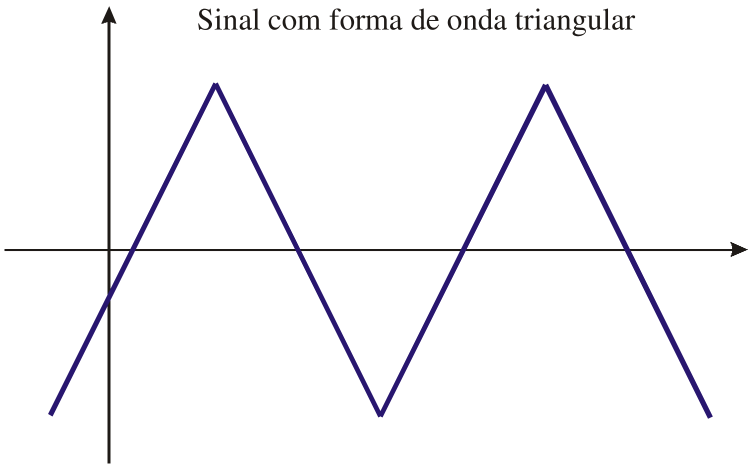
Valor eficaz de um sinal periódico

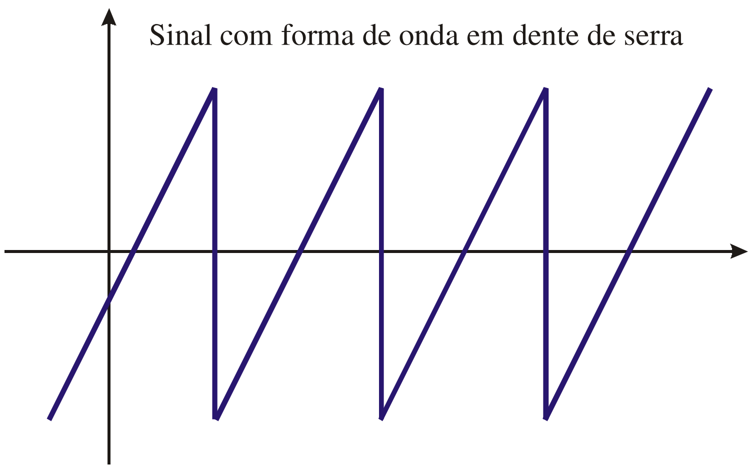
$$\boxed{S = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\cdot dt} \qquad \forall t_0}$$


Sinal
s(t)
S Máx
S méd
S mín
0
t1
t
Componente contínua do sinal
S méd
0
t
Componente alternada do sinal
S Máx - S méd
0
t1
t
S mín - S méd


Sinal com forma de onda sinusoidal


Sinal com forma de onda quadrada


Sinal com forma de onda triangular

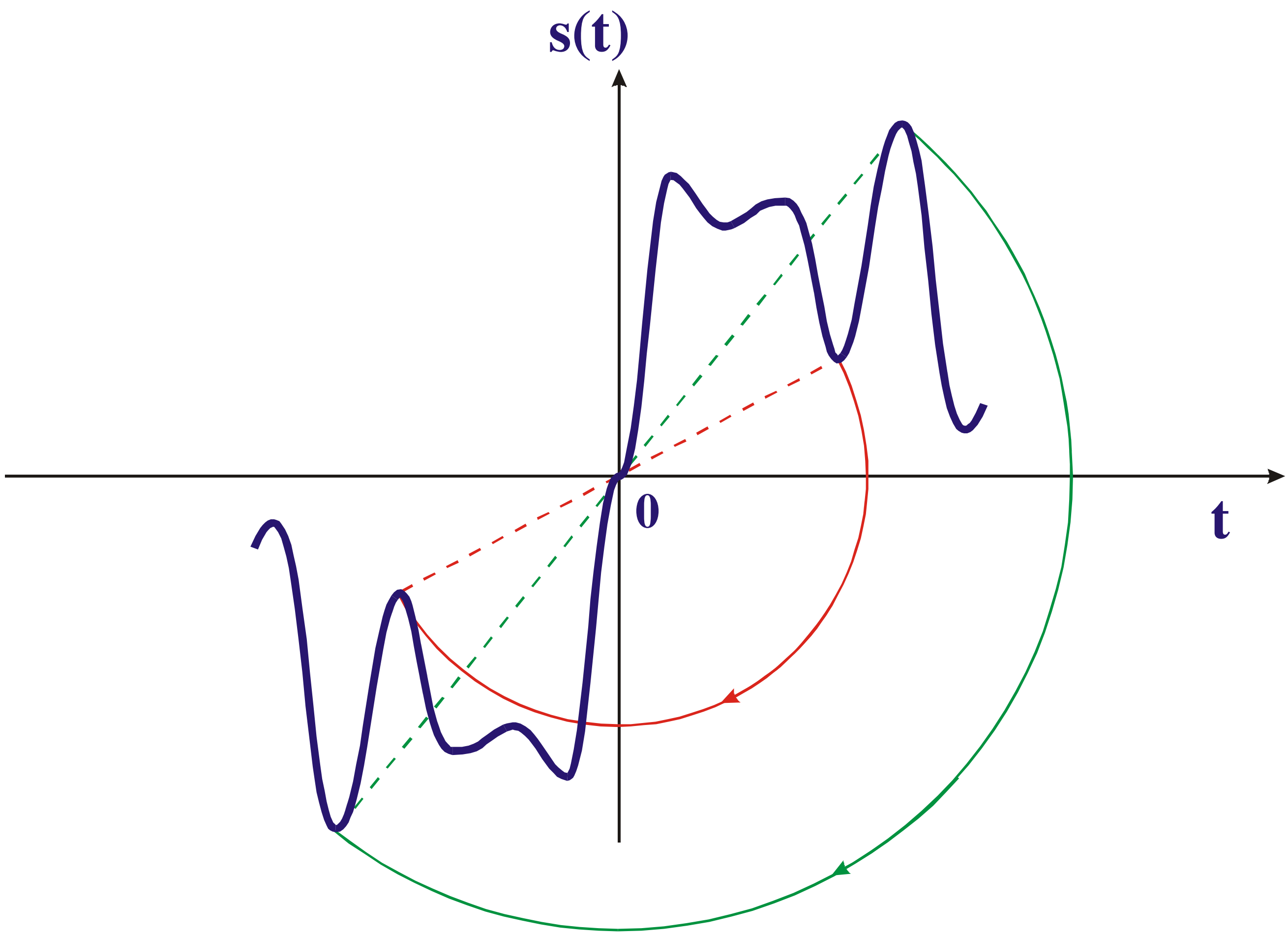

Sinal com forma de onda em dente de serra

23.1 Sinais com simetria de função ímpar

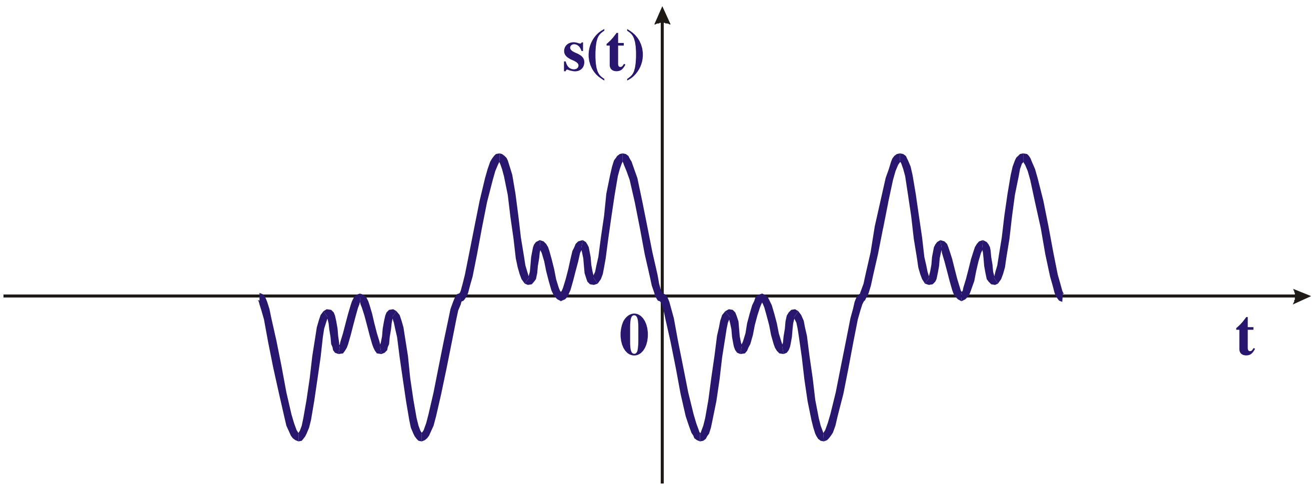
Uma função é ímpar se

f(t) = -f(-t)

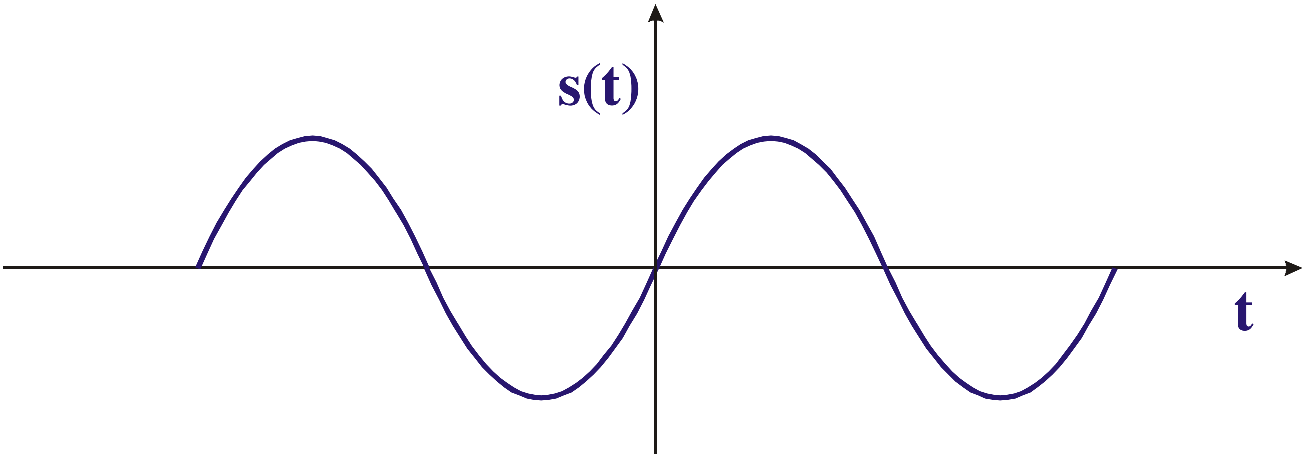
Sinal não periódico

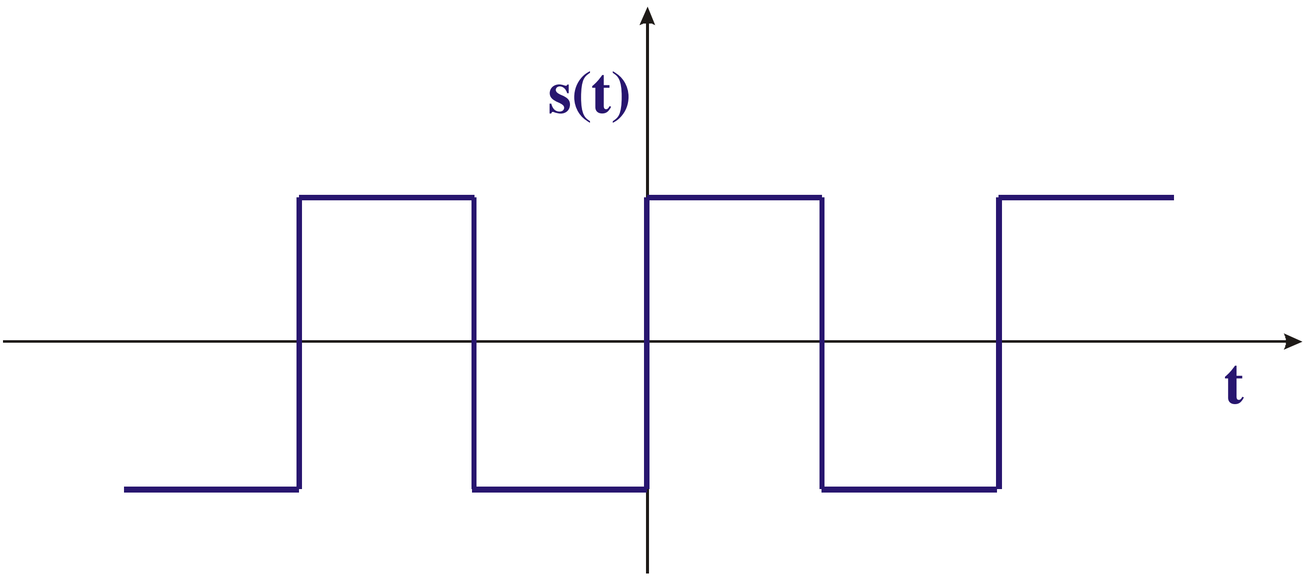


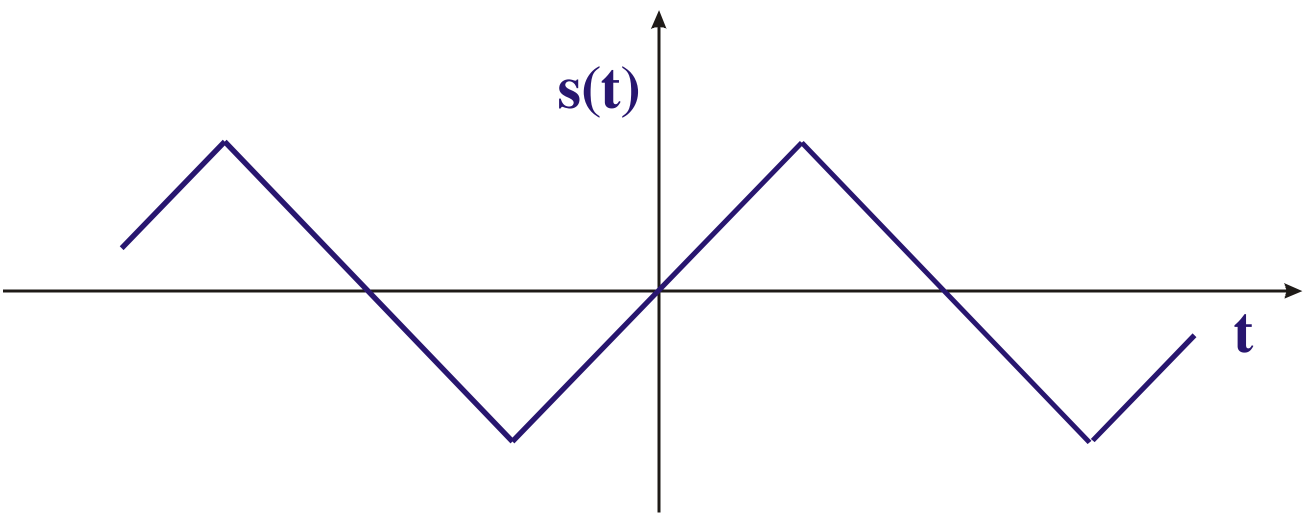
Sinal periódico



23.1.1 Sinais periódicos com simetria de função ímpar



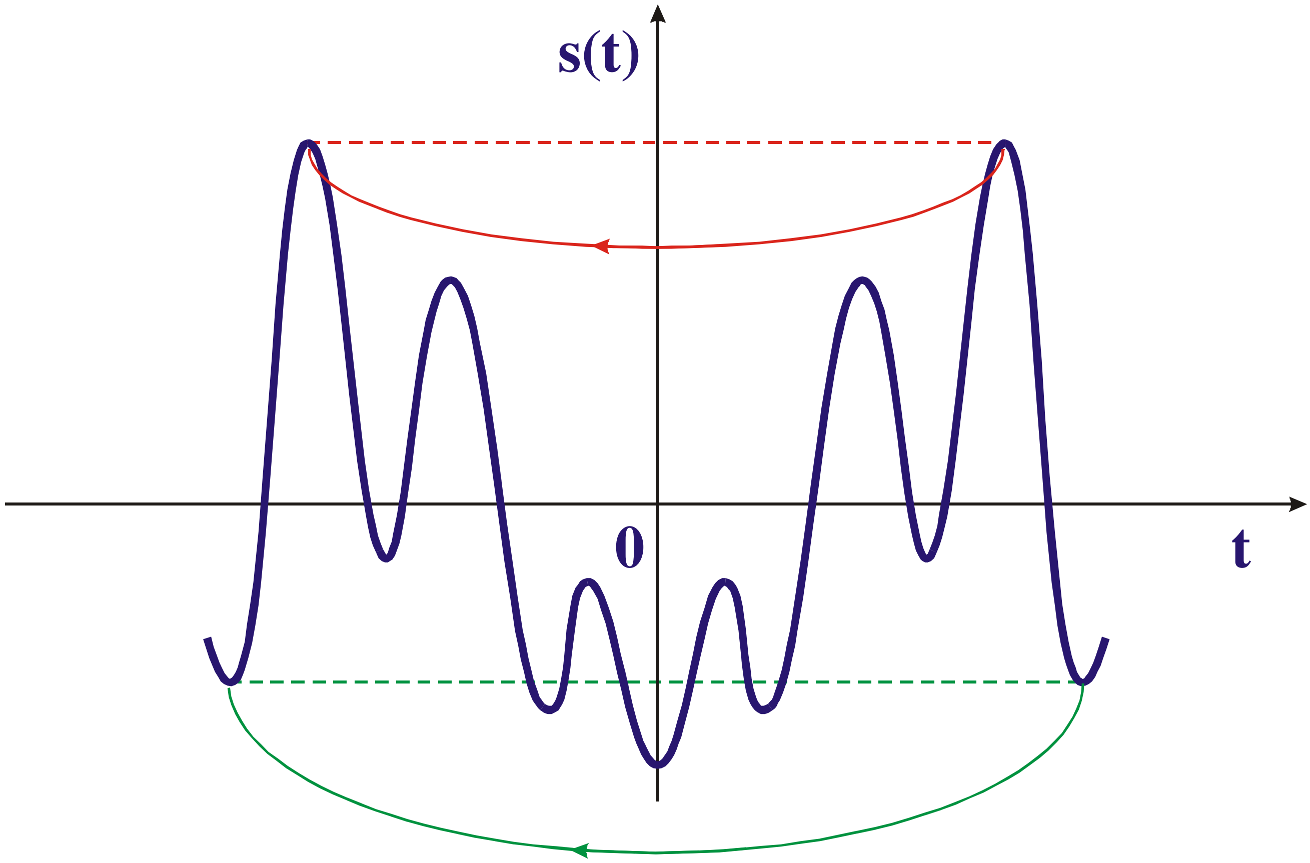




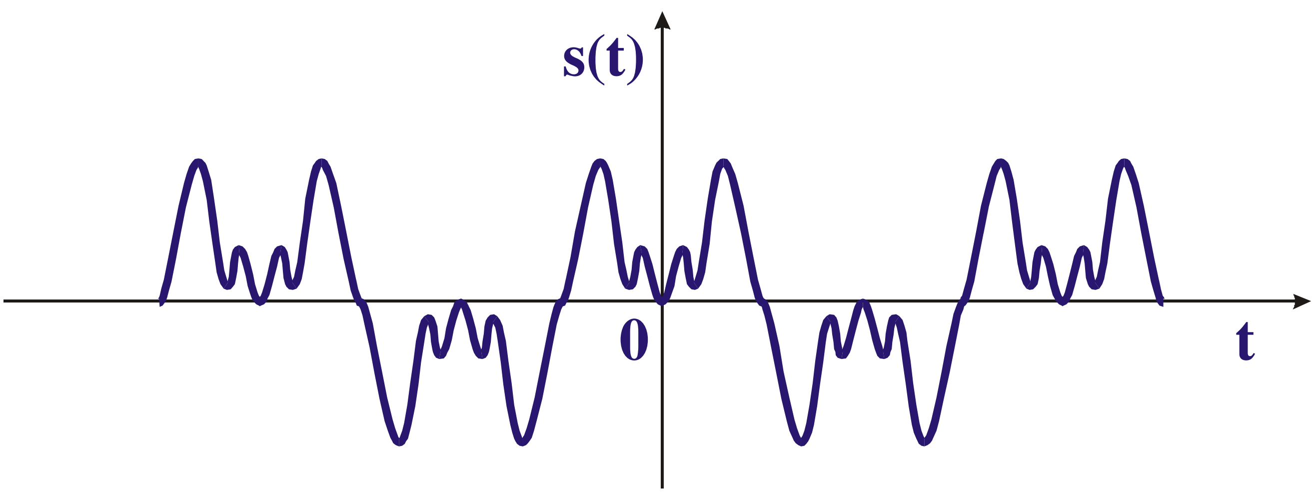
23.2 Sinais com simetria de função par

Uma função é par se **f(t) = f(-t)**

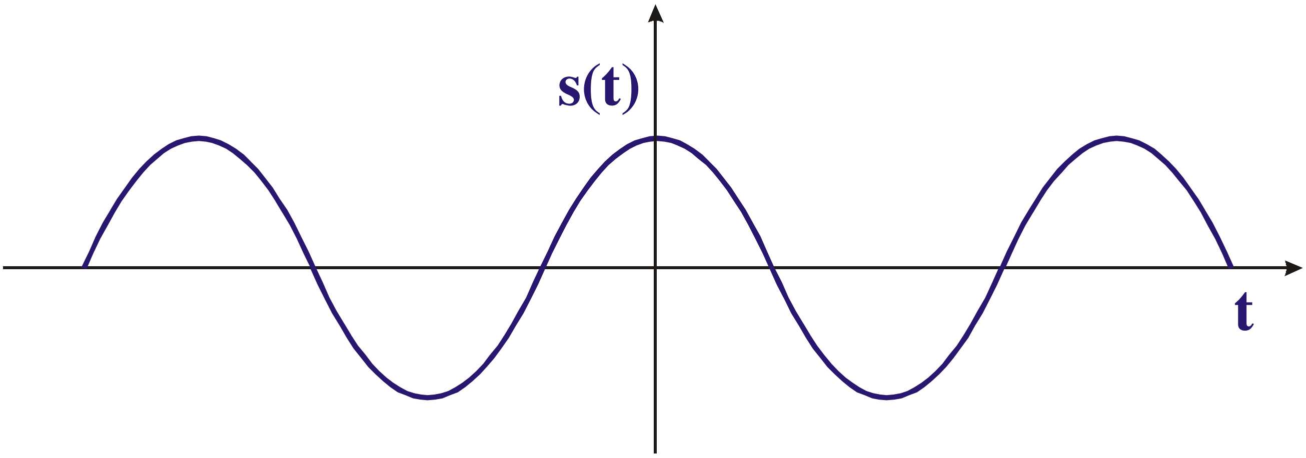
Sinal não periódico

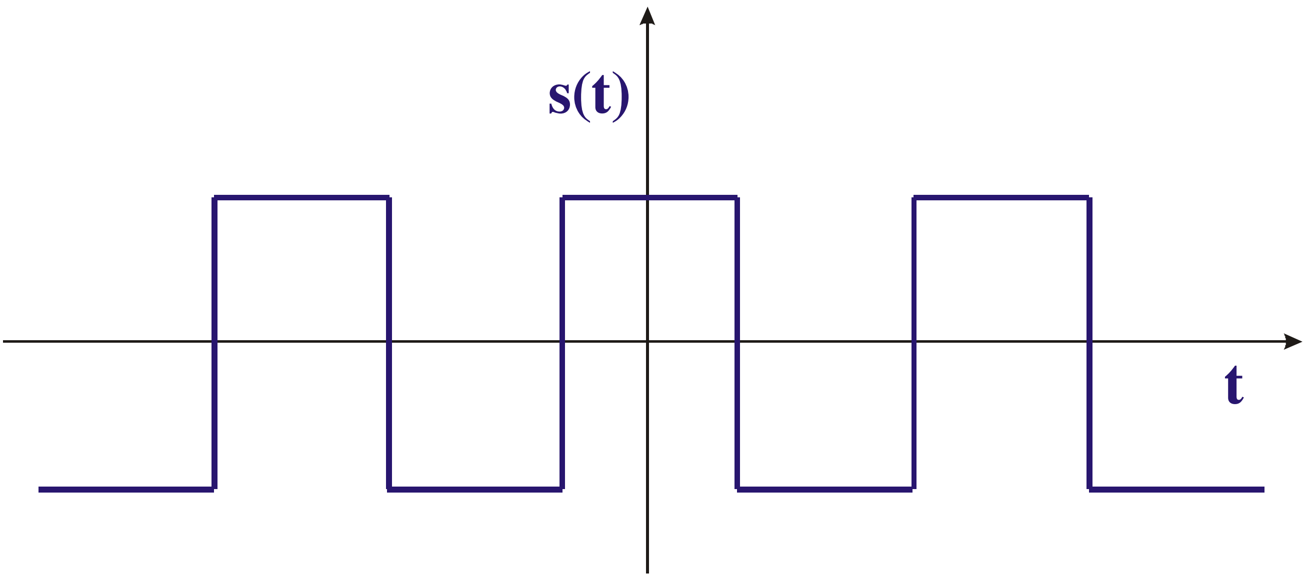


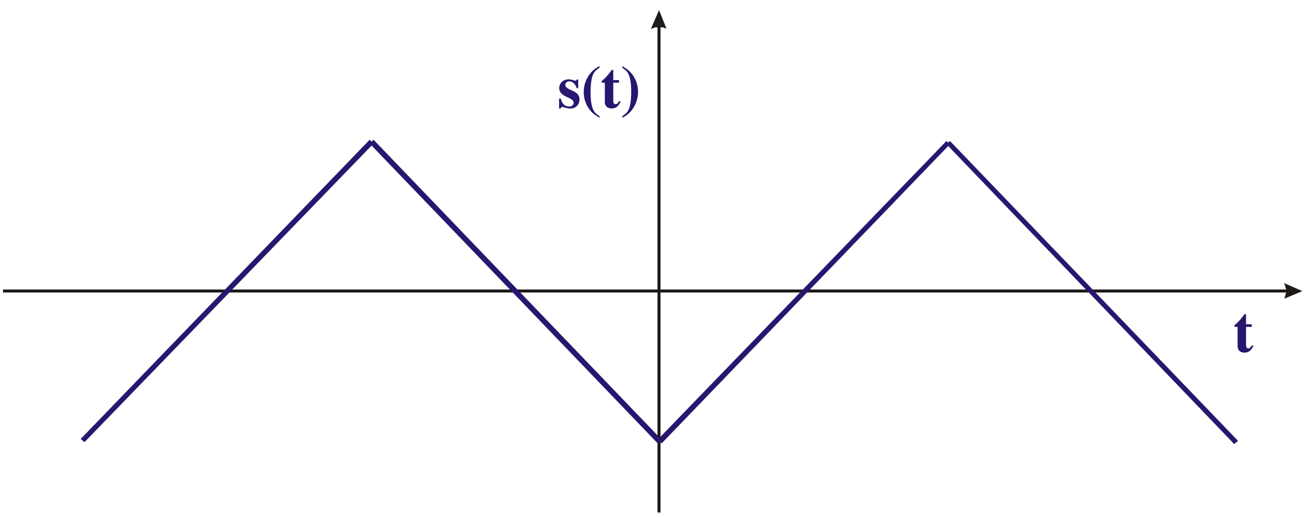
Sinal periódico



23.2.1 Sinais periódicos com simetria de função par



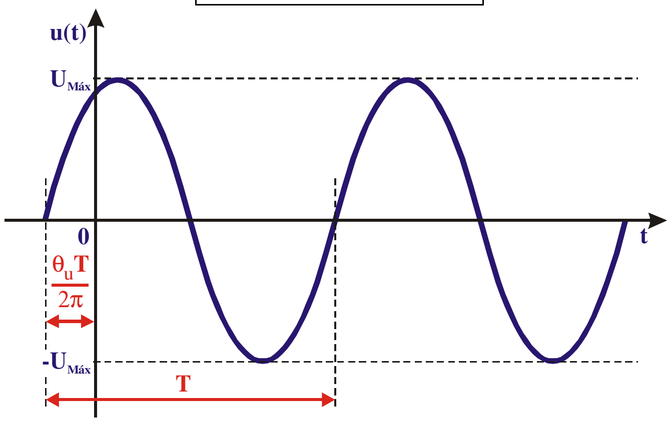




23.3 Sinal Puramente Alternado Sinusoidal

Para uma **tensão**

$$u(t) = U_{Máx} \cdot sen(\omega t + \theta_u)$$



- **Amplitude**: $\mathbf{U_{Máx}}$ [V]
- **Período**: **T** [s]
- **Frequência**: **f** [Hz]
- **Fase**: $\boldsymbol{\theta_u}$ [rad]
- **Frequência angular**: $\boldsymbol{\omega = 2\pi f}$ [rad/s]
- **Valor médio: 0V**

$$U_{méd} = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} s(t) \cdot dt = 0V$$

- **Valor eficaz: U** [V]

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) \cdot dt} = \frac{U_{Máx}}{\sqrt{2}}$$

Exemplo: rede eléctrica.

$$\begin{cases} U = 230V \\ f = 50Hz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{Máx} = \sqrt{2} \cdot U = \sqrt{2} \cdot 230 \cong 325V \\ T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 20ms \end{cases}$$

Exemplo: Determinar o valor eficaz da tensão u(t) tal que

$$\boxed{u(t) = U_{Máx} \operatorname{sen}\omega t}$$

Resolução:

O que se pretende é calcular: $U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\cdot dt}$

Recordar que...

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_1} \operatorname{sen}^2 ax \cdot dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}2ax}{4a}\right]_{x_0}^{x_1}\\ &\operatorname{sen}[a(x_0+T)] = \operatorname{sen}(ax_0)\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
U &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\cdot dt}\\
&= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (U_{Máx}\operatorname{sen}\omega t)^2\cdot dt}\\
&= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{sen}^2\omega t\cdot dt}\\
&= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\cdot\left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\omega t}{4\omega}\right]_{t_0}^{t_0+T}}\\
&= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\cdot\left[\left(\frac{t_0+T}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\omega(t_0+T)}{4\omega}\right) - \left(\frac{t_0}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\omega t_0}{4\omega}\right)\right]}\\
&= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\cdot\left[\frac{t_0}{2} + \frac{T}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\omega(t_0+T)}{4\omega} - \frac{t_0}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\omega t_0}{4\omega}\right]}\\
&= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\cdot\left[\frac{T}{2}\right]}\\
&= \frac{U_{Máx}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Exemplo: Determinar o valor eficaz da tensão u(t) tal que

$$\boxed{u(t) = U_{Máx}\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta)}$$

Resolução:

O que se pretende é calcular: $U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\cdot dt}$

Recordar que...

$$\mathrm{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \mathrm{sen}\alpha\cdot\mathrm{sen}\beta$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sen}^2(\omega t+\theta)\\
&= \frac{1}{2}\cdot[1-\cos 2(\omega t+\theta)]\\
&= \frac{1}{2}\cdot[1-\cos(2\omega t+2\theta)]\\
&= \frac{1}{2}\cdot[1-(\cos 2\omega t\cdot\cos 2\theta - \mathrm{sen}2\omega t\cdot\mathrm{sen}2\theta)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\cdot dt}\\
&= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} [U_{Máx}\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta)]^2\cdot dt}\\
&= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{sen}^2(\omega t+\theta)\cdot dt}\\
&= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left(\frac{1}{2}\cdot[1-(\cos 2\omega t\cdot\cos 2\theta-\mathrm{sen}2\omega t\cdot\mathrm{sen}2\theta)]\right)\cdot dt}\\
&= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{2T}\cdot\left[\int_{t_0}^{t_0+T}1\cdot dt - \int_{t_0}^{t_0+T}\cos 2\omega t\cdot\cos 2\theta\cdot dt + \int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{sen}2\omega t\cdot\mathrm{sen}2\theta\cdot dt\right]}\\
&= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{2T}\cdot\left[T - \cos 2\theta\cdot\underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T}\cos 2\omega t\cdot dt}_{=0} + \mathrm{sen}2\theta\cdot\underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{sen}2\omega t\cdot dt}_{=0}\right]}\\
&= \frac{U_{Máx}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

23.4 Análise de Fourier

Qualquer sinal periódico de período $\mathbf{T=1/f_0}$, gerado por uma fonte fisicamente realizável, pode ser decomposto na soma de um sinal constante com um número infinito de sinais sinusoidais cujas frequências são **multiplos inteiros de** $\mathbf{f_0}$ (ou seja, $\mathbf{2f_0}$, $\mathbf{3f_0}$, $\mathbf{4f_0}$, ...).

Série de Fourier de um sinal periódico de período $\mathbf{T=1/f_0=2\pi/\omega_0}$:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right]$$

$$= \underbrace{a_0}_{h_0(t)} + \underbrace{\left[a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + b_1 \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t)\right]}_{h_1(t)} + \underbrace{\left[a_2 \cdot \cos(2\omega_0 t) + b_2 \cdot \operatorname{sen}(2\omega_0 t)\right]}_{h_2(t)} + \underbrace{\left[a_3 \cdot \cos(3\omega_0 t) + b_3 \cdot \operatorname{sen}(3\omega_0 t)\right]}_{h_3(t)} + \ldots$$

- $\mathbf{h_k(t)}$ – **harmónico de ordem k** de s(t).

$$\boxed{h_k(t) = a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \operatorname{sen}(k\omega_0 t)\,,\ \text{em que } \omega_0 = 2\pi f_0}$$

Nota: a soma de quaisquer dois sinais alternados sinusoidais de frequência f_0 é também um sinal alternado sinusoidal de frequência f_0.

  $\mathbf{h_0(t)}$ – **harmónico de ordem zero** (valor médio de s(t)) = $\mathbf{a_0}$;

  $\mathbf{h_1(t)}$ – **primeiro harmónico** (termo fundamental de s(t));

  $\mathbf{h_2(t)}$ – **segundo harmónico**;

  $\mathbf{h_3(t)}$ – **terceiro harmónico**;

  ...

- $\mathbf{f_0}$ [Hz] - **frequência fundamental de s(t)** (frequência de $h_1(t)$), determinada por **T, período fundamental de s(t)**.

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{T}} \qquad \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}}$$

- $\mathbf{2f_0}$, $\mathbf{3f_0}$, $\mathbf{4f_0}$, ... [Hz] - **frequências harmónicas de** $\mathbf{f_0}$ (frequências de $h_2(t)$, $h_3(t)$, $h_4(t)$ ...). As frequências harmónicas são **múltiplos inteiros de** $\mathbf{f_0}$.

- $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_k}$ e $\mathbf{b_k}$ [mesmas unidades de s(t)] - **coeficientes de Fourier.**

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cdot dt \qquad \forall t_0}$$

$\mathbf{a_0}$ é o **valor médio de s(t)** (ou harmónico de ordem zero).

$$\boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cdot \cos(k\omega_0 t)\cdot dt \qquad \forall t_0}$$

Se o sinal tiver **simetria de função ímpar**: $\boxed{s(t) = -s(-t) \ \Rightarrow\ a_k = 0\ ,\forall k}$

$$\boxed{b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cdot \operatorname{sen}(k\omega_0 t)\cdot dt \qquad \forall t_0}$$

Se o sinal tiver **simetria de função par**: $\boxed{s(t) = s(-t) \ \Rightarrow\ b_k = 0\ ,\forall k}$

O **harmónico de ordem k** é dado por

$$h_k(t) = a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \mathrm{sen}(k\omega_0 t)$$

e é possível provar que

$$a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \mathrm{sen}(k\omega_0 t) = A_k \mathrm{sen}(k\omega_0 t + \theta_k)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\theta_k = \mathrm{arctg}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$$

Então, pode escrever-se

$$\boxed{h_k(t) = A_k \mathrm{sen}(k\omega_0 t + \theta_k)}$$

- **A_k - amplitude do harmónico de ordem k**.
- **θ_k - fase do harmónico de ordem k**.

e a **Série de Fourier** de um sinal periódico de período **$T=1/f_0=2\pi/\omega_0$** pode tomar a forma:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \mathrm{sen}(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$= \underbrace{a_0}_{h_0(t)} + \underbrace{A_1 \cdot \mathrm{sen}(\omega_0 t + \theta_1)}_{h_1(t)} + \underbrace{A_2 \cdot \mathrm{sen}(2\omega_0 t + \theta_2)}_{h_2(t)} + \underbrace{A_3 \cdot \mathrm{sen}(3\omega_0 t + \theta_3)}_{h_3(t)} + \ldots$$

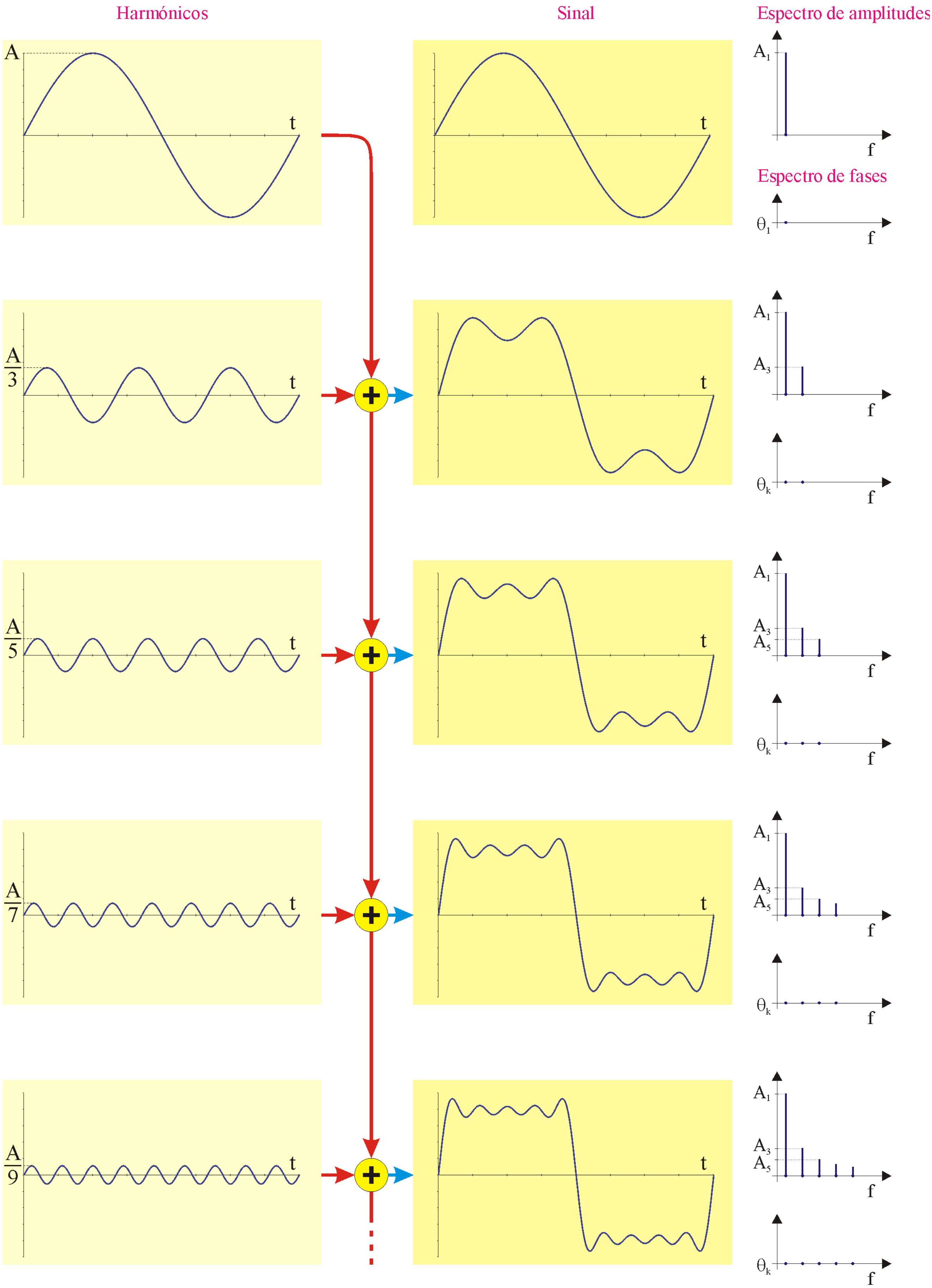
Espectro de amplitudes:

- Gráfico onde se representa a amplitude **A_k** do harmónico **k**, para cada frequência **kf_0** (k=1, 2, 3, ...).

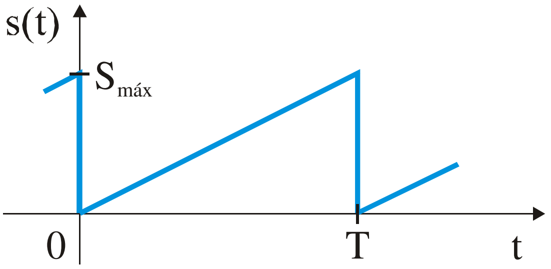
Espectro de fases:

- Gráfico onde se representa a fase **θ_k** do harmónico **k**, para cada frequência **kf_0** (k=1, 2, 3, ...).

Exemplo: composição de sinusóides para obter uma onda quadrada.



Alguns exemplos de desenvolvimento em Série de Fourier...



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

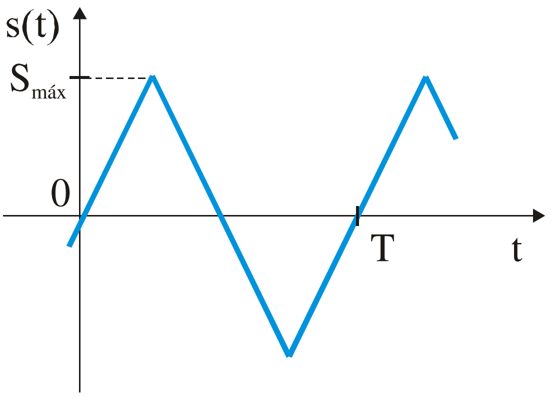
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{S_{máx}}{T}\cdot t\cdot dt = \frac{S_{máx}}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{S_{máx}}{T}\cdot t\cdot \cos(k\omega_0 t)\cdot dt = 0 \qquad \forall k$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{S_{máx}}{T}\cdot t\cdot \mathrm{sen}(k\omega_0 t)\cdot dt = -\frac{S_{máx}}{k\pi}$$

$$s(t) = \frac{S_{máx}}{2} - \frac{S_{máx}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot \mathrm{sen}(n\omega_0 t)\right]$$

$$= \frac{S_{máx}}{2} - \frac{S_{máx}}{\pi}\cdot\left[\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{sen}(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\cdot \mathrm{sen}(3\omega_0 t) + \frac{1}{4}\cdot \mathrm{sen}(4\omega_0 t) + \ldots\right]$$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0 \qquad \forall k$$

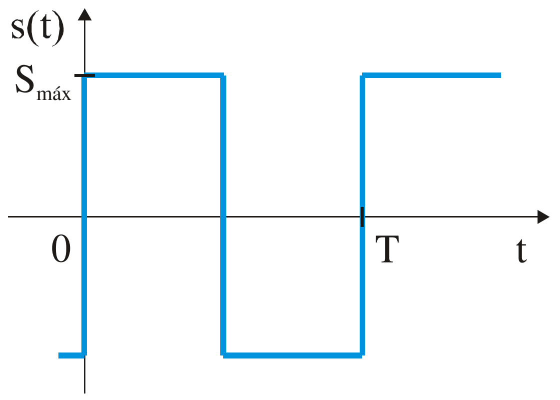
$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} s(t)\cdot \mathrm{sen}(k\omega_0 t)\cdot dt$$

$$= \frac{8}{T}\int_0^{T/4} \frac{4\cdot S_{máx}}{T}\, t\cdot \mathrm{sen}(k\omega_0 t)\cdot dt$$

$$= \frac{8\cdot S_{máx}}{k^2\pi^2}\cdot \mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad \text{(k ímpar)}$$

$$s(t) = \frac{8\cdot S_{máx}}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}\cdot \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot \mathrm{sen}(n\omega_0 t)\right]$$

$$= \frac{8\cdot S_{máx}}{\pi^2}\cdot\left[\mathrm{sen}(\omega_0 t) - \frac{1}{9}\cdot \mathrm{sen}(3\omega_0 t) + \frac{1}{25}\cdot \mathrm{sen}(5\omega_0 t) - \frac{1}{49}\cdot \mathrm{sen}(7\omega_0 t) + \ldots\right]$$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0 \qquad \forall k$$

$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} S_{máx} \cdot \mathrm{sen}(k\omega_0 t)\cdot dt$$

$$= \frac{4\cdot S_{máx}}{k\pi} \quad \text{(k ímpar)}$$

$$s(t) = \frac{4\cdot S_{máx}}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot \mathrm{sen}(n\omega_0 t)\right]$$

$$= \frac{4\cdot S_{máx}}{\pi}\cdot\left[\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\cdot\mathrm{sen}(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\cdot\mathrm{sen}(5\omega_0 t) + \frac{1}{7}\cdot\mathrm{sen}(7\omega_0 t) + \ldots\right]$$

24. Somar Duas Tensões Alternadas Sinusoidais Com a Mesma Frequência

24.1 Recorrendo à matemática (rigoroso mas complexo...)

$$u_1 = U_{M1} \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \theta_1)$$
$$u_2 = U_{M2} \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \theta_2)$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= U_{M1} \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \theta_1) + U_{M2} \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \theta_2) \\ &= U_{M1} \cdot \mathrm{sen}\omega t \cdot \cos\theta_1 + U_{M1} \cdot \cos\omega t \cdot \mathrm{sen}\theta_1 + U_{M2} \cdot \mathrm{sen}\omega t \cdot \cos\theta_2 + U_{M2} \cdot \cos\omega t \cdot \mathrm{sen}\theta_2 \\ &= \mathrm{sen}\omega t \cdot \left(U_{M1} \cdot \cos\theta_1 + U_{M2} \cdot \cos\theta_2\right) + \cos\omega t \cdot \left(U_{M1} \cdot \mathrm{sen}\theta_1 + U_{M2} \cdot \mathrm{sen}\theta_2\right) \end{aligned}$$

Façamos:

$$U_{M1} \cdot \cos\theta_1 + U_{M2} \cdot \cos\theta_2 = U_M \cdot \cos\theta$$
$$U_{M1} \cdot \mathrm{sen}\theta_1 + U_{M2} \cdot \mathrm{sen}\theta_2 = U_M \cdot \mathrm{sen}\theta$$

portanto

$$U_M = \sqrt{\left(U_{M1} \cdot \cos\theta_1 + U_{M2} \cdot \cos\theta_2\right)^2 + \left(U_{M1} \cdot \mathrm{sen}\theta_1 + U_{M2} \cdot \mathrm{sen}\theta_2\right)^2}$$
$$\mathrm{tg}\theta = \frac{U_{M1} \cdot \mathrm{sen}\theta_1 + U_{M2} \cdot \mathrm{sen}\theta_2}{U_{M1} \cdot \cos\theta_1 + U_{M2} \cdot \cos\theta_2}$$

$$u = U_M \cdot \left(\mathrm{sen}\omega t \cdot \cos\theta + \cos\omega t \cdot \mathrm{sen}\theta\right)$$

finalmente

$$u = U_M \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \theta)$$

Duas grandezas alternadas sinusoidais com a mesma frequência podem...

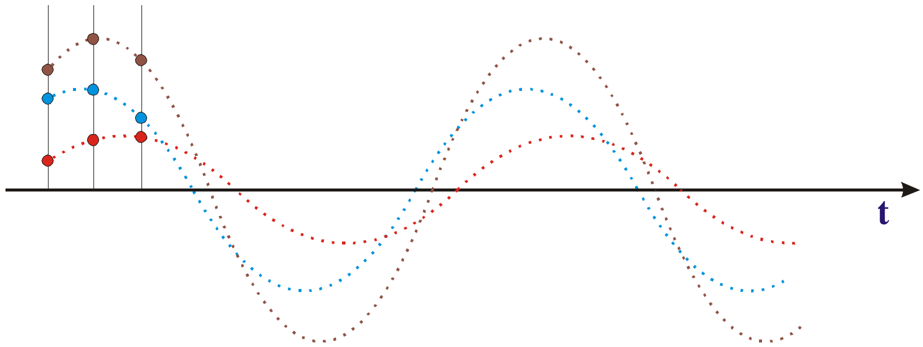
- ... estar **em fase:** $\theta_1 = \theta_2$ (caso particular);
- ... estar **em oposição de fase:** $|\theta_1 - \theta_2| = \pi$ (caso particular);
- ... **não estar** em fase e **não estar** em oposição de fase (**caso geral**).

Se u_1 e u_2 não estiverem em fase, então, $U_{M1} + U_{M2} \neq U_M$

ou seja: em geral, ao somar duas grandezas alternadas sinusoidais...

$$\boxed{2+2 \neq 4} \; !!!$$

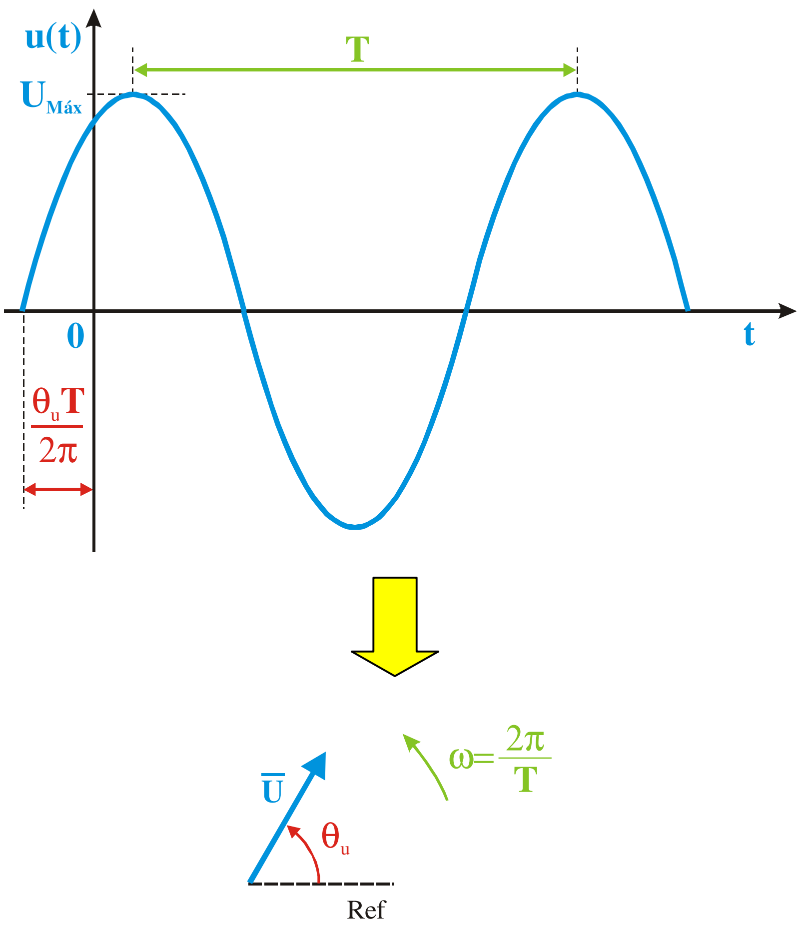
24.2 Recorrendo a gráficos (simples mas pouco rigoroso...)



24.3 Recorrendo a Fasores (rigoroso e simples!)

24.3.1 Obter um fasor a partir de uma sinusóide...

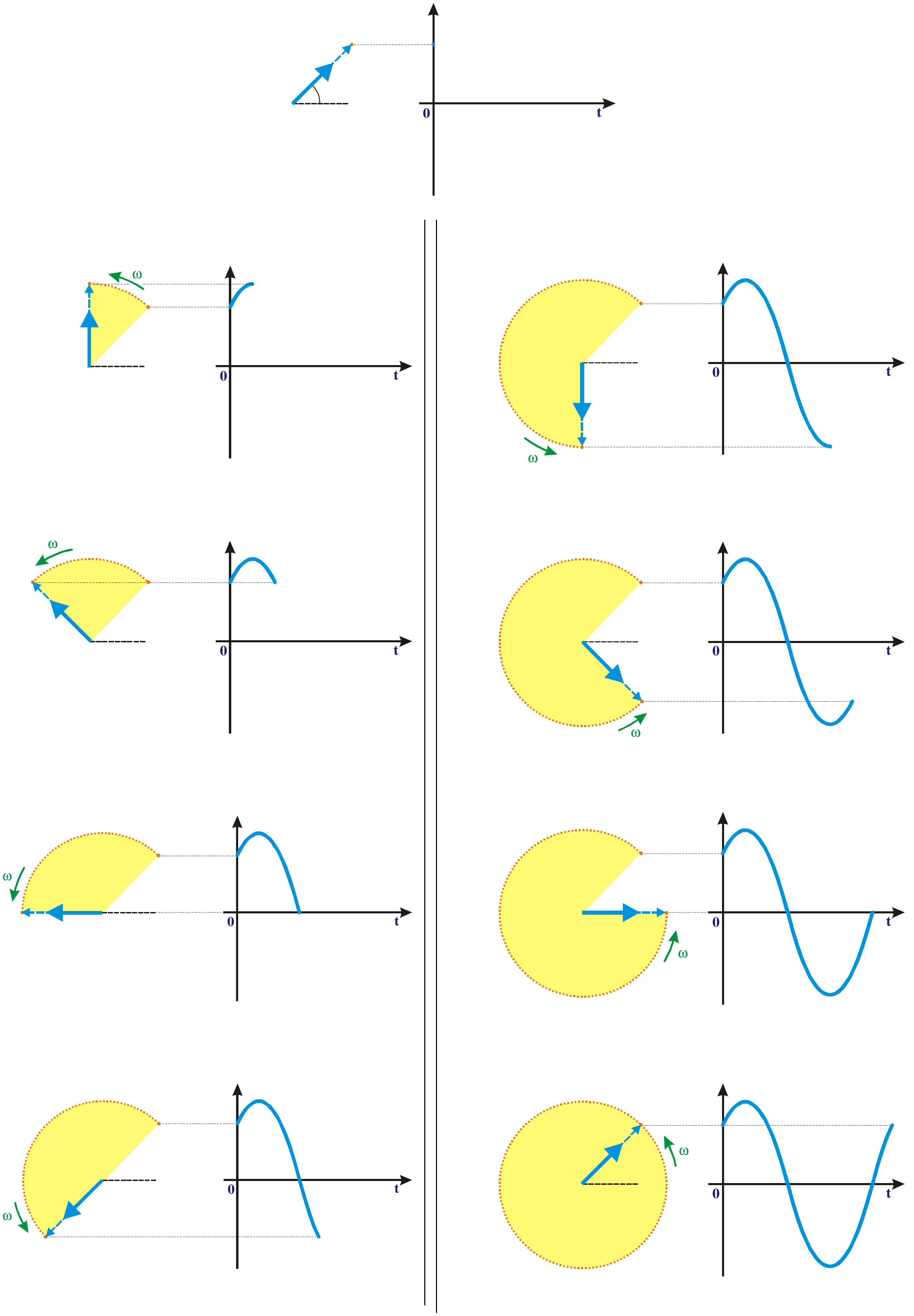
$$\boxed{u(t) = U_{Máx} \cdot sen(\omega t + \theta_u)}$$



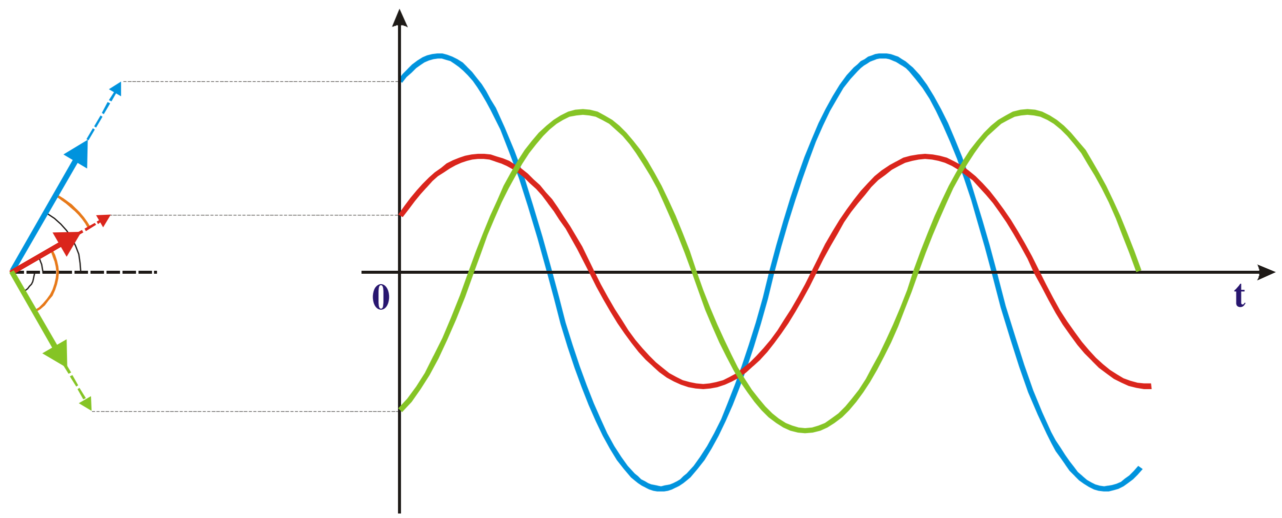
$$\overline{U}\,(U, \theta_u)$$

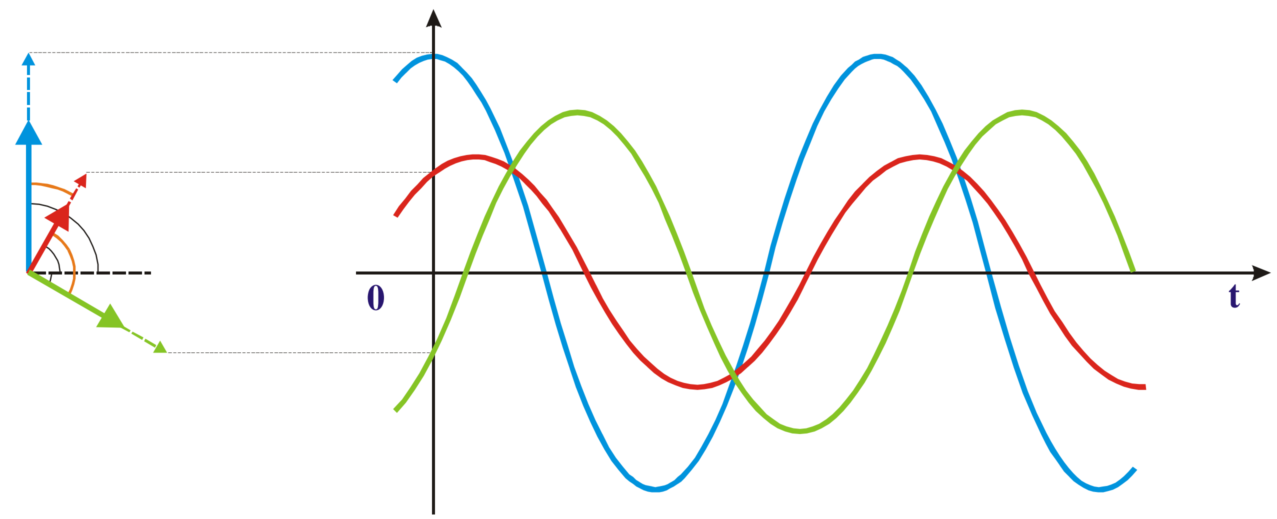
$$U = \frac{U_{Máx}}{\sqrt{2}}$$

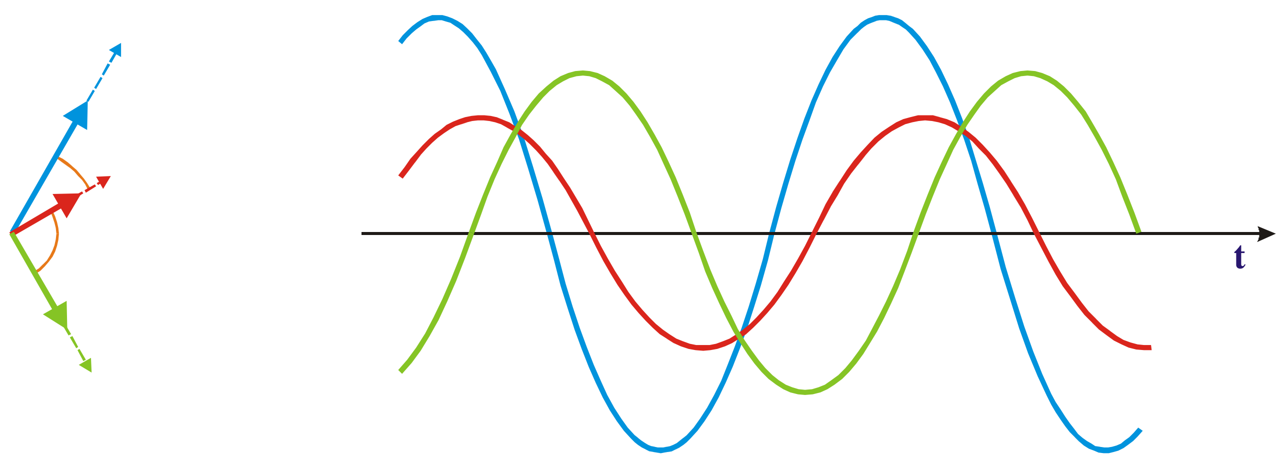
24.3.2 Obter uma sinusóide a partir de um fasor



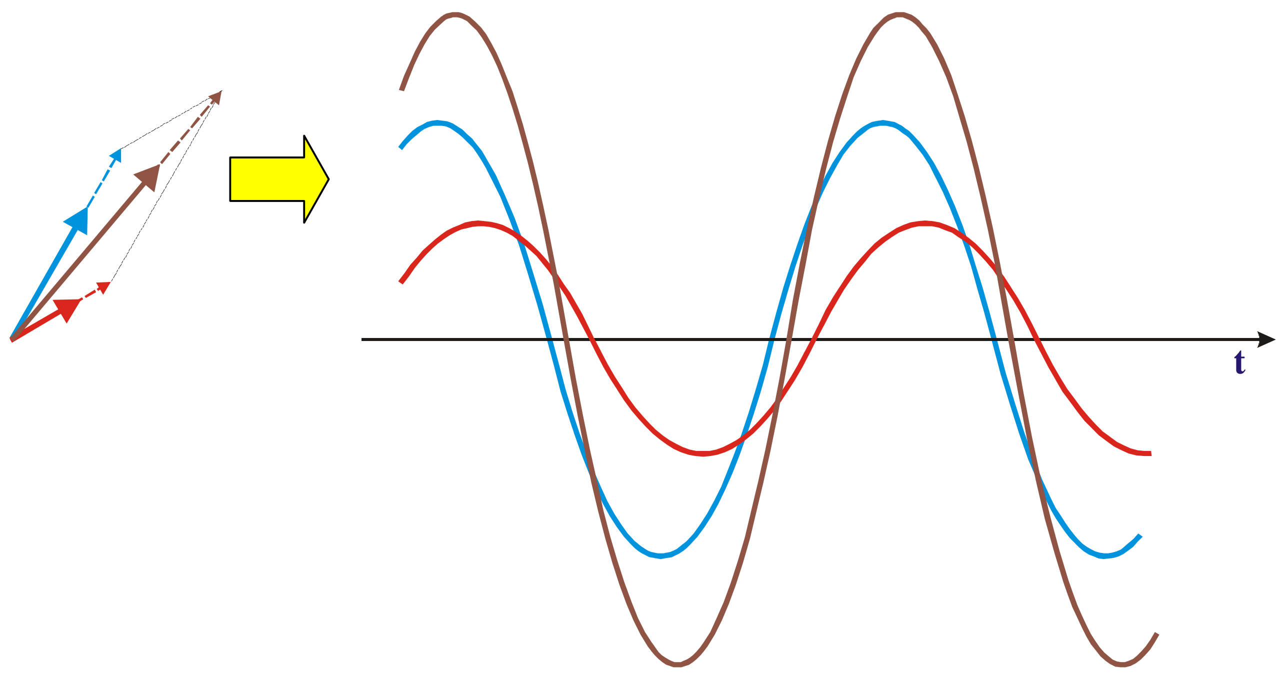
24.3.3 Os ângulos entre fasores não mudam quando se muda a referência!







24.3.4 Somar duas grandezas alternadas sinusoidais com a mesma frequência a partir da soma de dois fasores, recorrendo à regra do paralelogramo



25. Diagrama Fasorial e Impedância de Um Receptor

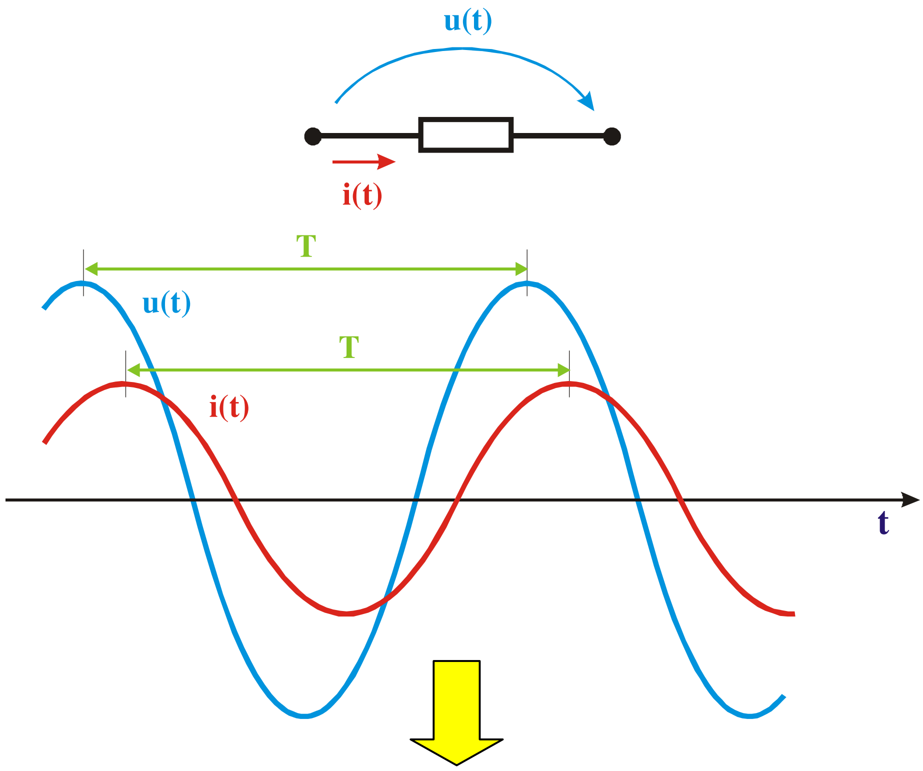
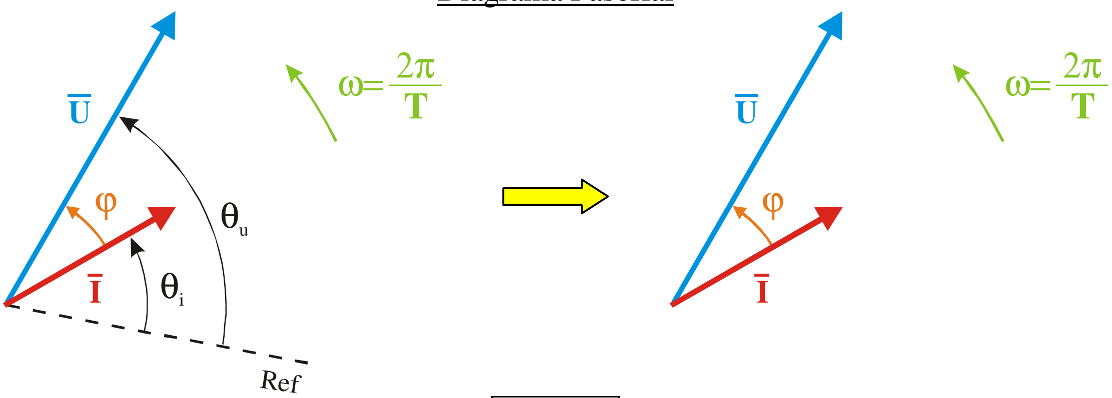
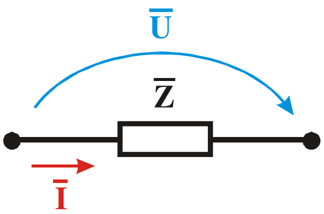


Diagrama Fasorial



$$\boxed{\varphi = \theta_u - \theta_i}$$

- Cada diagrama fasorial é constituído por **dois**: um para tensões e outro para correntes (**duas escalas diferentes**).
- No exemplo da figura, a tensão está avançada em relação à corrente, independentemente da referência utilizada.
- O ângulo φ não depende da referência, que pode ser omitida.

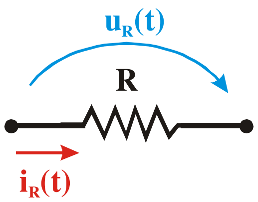


$$\begin{cases} \overline{U}\ (U, \theta_u) \\ \overline{I}\ (I, \theta_i) \end{cases} \rightarrow \boxed{\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}}\ \textbf{Impedância} \qquad \overline{Z}\ (Z, \varphi) \rightarrow \begin{cases} Z = \dfrac{U}{I} \quad [\Omega] \\ \varphi = \theta_u - \theta_i \end{cases}$$

$\overline{Z}$ **não é um fasor!**

$\overline{Z}$ é um **número complexo** que expressa a relação entre os fasores $\overline{U}$ e $\overline{I}$.

Resistência Ideal



Lei de Ohm: $\boxed{u_R(t) = R \cdot i_R(t)}$

R - **Resistência eléctrica**

Unidade: **ohm (Ω)**

Se $i_R(t)$ for tal que

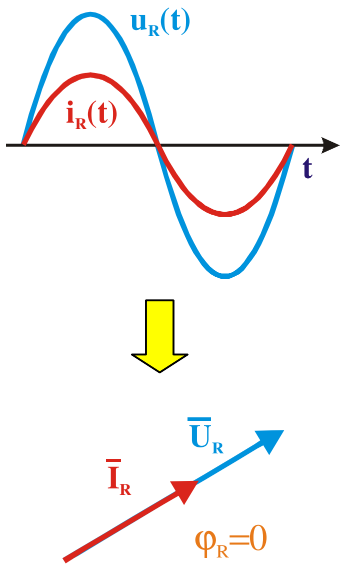
$$i_R(t) = \sqrt{2} \cdot I_R \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_i)$$

então, aplicando a lei de Ohm

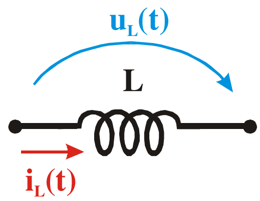
$$u_R(t) = R \cdot \sqrt{2} \cdot I_R \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_i)$$

pelo que

$$\begin{cases} U_R = R \cdot I_R \Rightarrow Z_R = \dfrac{U_R}{I_R} = R \\ \theta_u = \theta_i \quad \Rightarrow \quad \varphi_R = 0 \end{cases}$$



Bobina Ideal



$$\boxed{u_L(t) = L \cdot \frac{d[i_L(t)]}{dt}}$$

L - **Coeficiente de auto-indução**

Unidade: **henry (H)**

Se $i_L(t)$ for tal que

$$i_R(t) = \sqrt{2} \cdot I_R \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_i)$$

então,

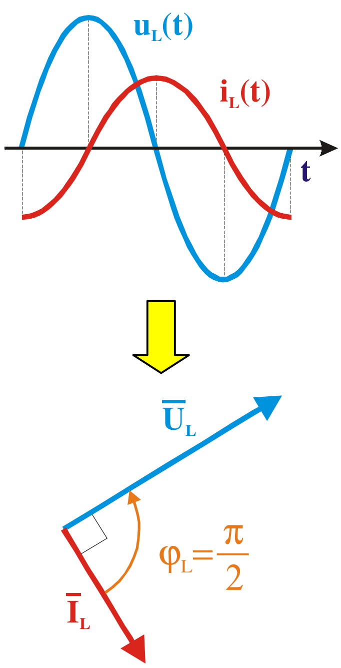
$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \cdot \sqrt{2} \cdot I_L \cdot \frac{d[\text{sen}(\omega t + \theta_i)]}{dt} \\ &= L \cdot \sqrt{2} \cdot I_L \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \theta_i) \\ &= \sqrt{2} \cdot \omega L \cdot I_L \cdot \text{sen}\left(\omega t + \theta_i + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

pelo que

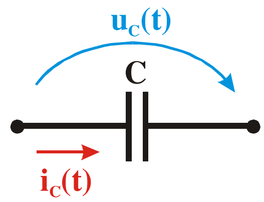
$$\begin{cases} U_L = \omega L \cdot I_L \Rightarrow Z_L = \dfrac{U_L}{I_L} = \omega L \\ \theta_u = \theta_i + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_L = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

ωL - **Indutância**

Unidade: **ohm (Ω)**



Condensador Ideal



$$\boxed{i_C(t) = C \cdot \frac{d[u_C(t)]}{dt}}$$

C - **Capacidade**

Unidade: **farad (F)**

Se $u_C(t)$ for tal que

$$u_C(t) = \sqrt{2} \cdot U_C \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_u)$$

então,

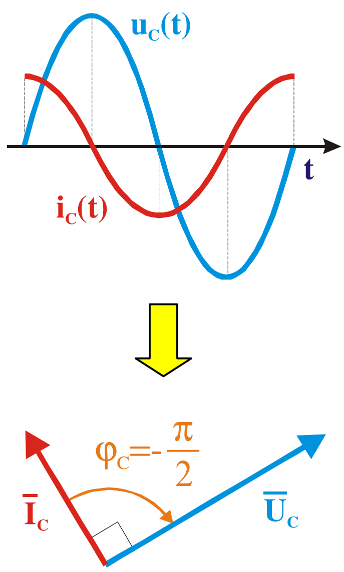
$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \cdot \sqrt{2} \cdot U_C \cdot \frac{d[\text{sen}(\omega t + \theta_u)]}{dt} \\ &= C \cdot \sqrt{2} \cdot U_C \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \theta_u) \\ &= \sqrt{2} \cdot \omega C \cdot U_C \cdot \text{sen}\left(\omega t + \theta_u + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{cases} I_C = \omega C \cdot U_C \Rightarrow Z_C = \dfrac{U_C}{I_C} = \dfrac{1}{\omega C} \\ \theta_i = \theta_u + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_C = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

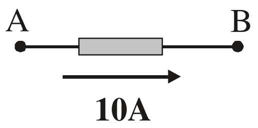
$\dfrac{1}{\omega C}$ - **Capacitância**

Unidade: **ohm (Ω)**

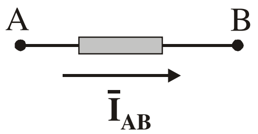


26. Tensões e Correntes Alternadas Sinusoidais: Notações

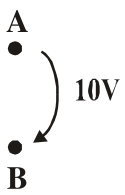
Para tensões e correntes **alternadas sinusoidais**...



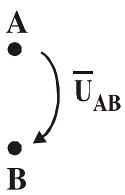
1. A seta indica o **sentido positivo da corrente** que atravessa o receptor.
2. A **corrente que atravessa o receptor** tem um **valor eficaz de 10A**. Também pode significar que o **valor nominal corrente do receptor é de 10A** (valor eficaz).
3. Quando, dentro do receptor, a corrente vai do terminal A para o terminal B, então o sentido positivo coincide com o sentido real da corrente que atravessa o receptor e o valor instantâneo da corrente é positivo..



1. A seta indica o **sentido positivo da corrente** que atravessa o receptor.
2. A corrente que atravessa o receptor tem um **valor eficaz I_{AB}**.
3. Quando, dentro do receptor, a corrente vai do terminal A para o terminal B, então o sentido positivo coincide com o sentido real da corrente que atravessa o receptor e o valor instantâneo da corrente é positivo.



1. A seta indica o **sentido positivo da tensão** existente entre o ponto A e o ponto B.
2. A **tensão que existe entre o ponto A e o ponto B tem um valor eficaz 10V**. Também pode significar que o **valor nominal da tensão que existe entre o ponto A e o ponto B é de 10V** (valor eficaz).
3. Quando o potencial no ponto A é mais elevado que o potencial no ponto B, então o sentido positivo coincide com o sentido real da tensão entre A e B e o valor instantâneo da tensão é positivo.



1. A seta indica o **sentido positivo da tensão** existente entre o ponto A e o ponto B.
2. A tensão que existe entre o ponto A e o ponto B tem um **valor eficaz U_{AB}**.
3. Quando o potencial no ponto A é mais elevado que o potencial no ponto B, então o sentido positivo coincide com o sentido real da tensão entre A e B e o valor instantâneo da tensão é positivo.

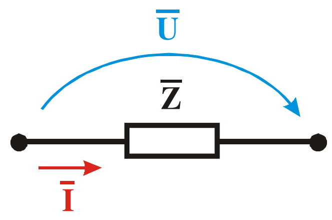
$\cancel{\bar{I}_{AB} = 10A}$ $\cancel{\bar{U}_{AB} = 230V}$

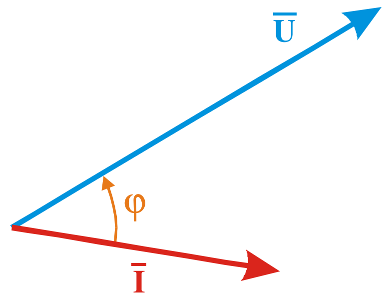
$I_{AB} = 10A$ $U_{AB} = 230V$

27. Circuitos Equivalentes de Um Receptor Monofásico

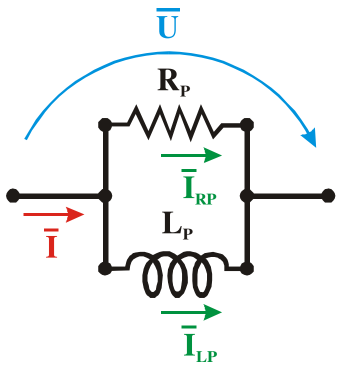
Exemplo com um receptor indutivo...

Receptor monofásico



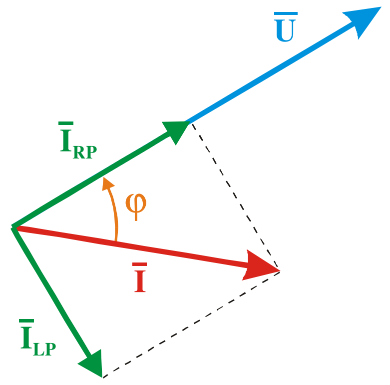


Circuito equivalente com o número mínimo de componentes em paralelo

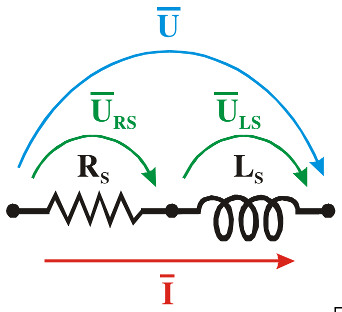


$$R_P = \frac{U}{I_{RP}}$$

$$\omega L_P = \frac{U}{I_{LP}}$$

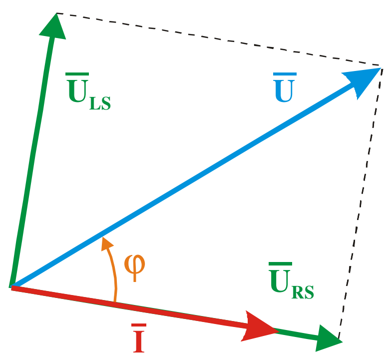


Circuito equivalente com o número mínimo de componentes em série

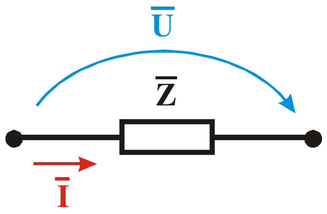


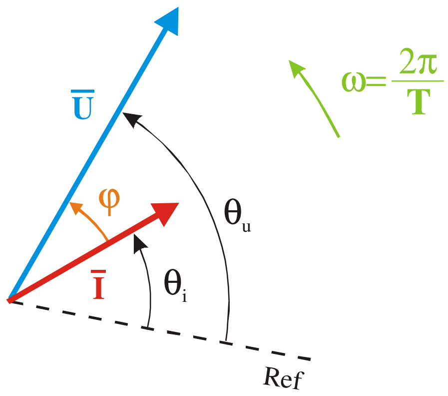
$$R_S = \frac{U_{RS}}{I}$$

$$\omega L_S = \frac{U_{LS}}{I}$$



28. Impedância, Resistência e Reactância





A **impedância** $\overline{Z}$ é um **número complexo** dado por $\boxed{\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}}$ e que fica determinado por:

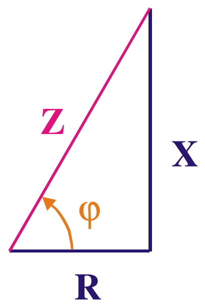
- um **escalar Z [Ω]** (**módulo ou valor da impedância**) e um **ângulo φ** (**argumento da impedância**) tais que

$$\boxed{Z = \frac{U}{I}}$$

$$\boxed{\varphi = \theta_u - \theta_i}$$

- um **escalar R [Ω]** (**resistência** – componente real da impedância) e um **escalar X [Ω]** (**reactância –** componente imaginária da impedância) tais que

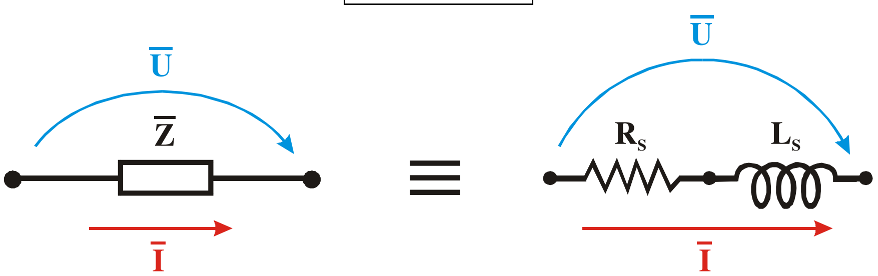
$$\boxed{\begin{aligned} R &= Z \cdot \cos\varphi \\ X &= Z \cdot \operatorname{sen}\varphi \end{aligned}}$$



$$\boxed{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{R}{Z} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{X}{R} \end{aligned}}$$

R e **X** são os parâmetros do circuito equivalente, com o número mínimo de componentes em série, de um receptor monofásico. Para um receptor indutivo:

$$\boxed{\begin{aligned} R &= R_S = \frac{U_{RS}}{I} \\ X &= \omega L_S = \frac{U_{LS}}{I} \end{aligned}}$$

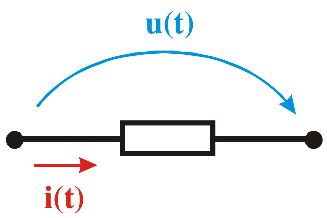


29. Potências

29.1 Potência instantânea num receptor monofásico

Potência instantânea: **p(t) [W]** $\boxed{p(t)=\frac{dw(t)}{d(t)}}$ **w(t) [J]**: energia absorvida pelo receptor.

- Para um receptor monofásico submetido a uma tensão alternada sinusoidal u(t):



$$\begin{cases} u(t)=U_{Máx}\cdot \text{sen}(\omega t) \\ i(t)=I_{Máx}\cdot \text{sen}(\omega t-\varphi) \end{cases} \rightarrow \boxed{p(t)=u(t)\cdot i(t)}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)\cdot i(t) \\ &= U_{Máx}\cdot \text{sen}(\omega t)\cdot I_{Máx}\cdot \text{sen}(\omega t-\varphi) \\ &= U_{Máx}\cdot I_{Máx}\cdot \frac{1}{2}\cdot[\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)] \\ &= \underbrace{\frac{U_{Máx}}{\sqrt{2}}}_{U}\cdot\underbrace{\frac{I_{Máx}}{\sqrt{2}}}_{I}\cdot[\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)] \\ &= UI\cdot\cos\varphi-UI\cdot\cos(2\omega t-\varphi) \\ &= \underbrace{UI\cdot\cos\varphi}_{\substack{\text{Valor médio}\\ \text{(constante)}}}+\underbrace{UI\cdot\cos(2\omega t-\varphi+\pi)}_{\substack{\text{Componente alternada}\\ \text{(valor médio=0)}}} \end{aligned}$$

Resistência:

$\varphi=0 \Rightarrow \cos\varphi=1$

$$\boxed{p(t)=UI+UI\cdot\cos(2\omega t+\pi)}$$

Verifica-se sempre que $p(t)\geq 0$

Valor médio de p(t) é positivo

Bobina ideal:

$\varphi=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi=0$

$$\boxed{\begin{aligned} p(t)&=UI\cdot\cos\left(2\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \\ &=-UI\cdot\text{sen}(2\omega t)\end{aligned}}$$

Valor médio de p(t) é nulo

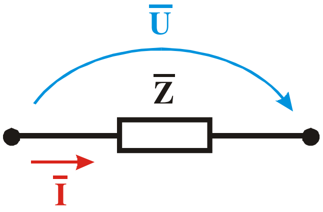
Condensador ideal:

$\varphi=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi=0$

$$\boxed{\begin{aligned} p(t)&=UI\cdot\cos\left(2\omega t+\frac{3\pi}{2}\right) \\ &=UI\cdot\text{sen}(2\omega t)\end{aligned}}$$

Valor médio de p(t) é nulo

29.2 Potências activa, reactiva e aparente num receptor monofásico

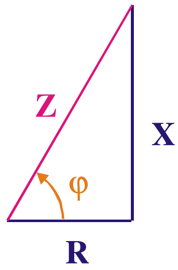


Recordar

$$\overline{Z}(Z,\varphi) \leftrightarrow \overline{Z}(R,X)$$

$$Z = \frac{U}{I}$$

$$R = Z \cdot \cos\varphi$$
$$X = Z \cdot \text{sen}\varphi$$



Potência activa: **P** [W] $\boxed{P = UI \cdot \cos\varphi}$ $\boxed{P \geq 0}$

- Também chamada **potência real** ou **potência verdadeira**, a potência activa é o **valor médio da potência instantânea**.
- Como $Z = \frac{U}{I}$, então pode escrever-se $\boxed{P = ZI^2 \cdot \cos\varphi}$

  $\boxed{P = \frac{U^2}{Z} \cdot \cos\varphi}$
- Além disso, como $R = Z \cdot \cos\varphi$, então $\boxed{P = RI^2}$

Potência reactiva: **Q** [VAr] $\boxed{Q = UI \cdot \text{sen}\varphi}$

Q > 0 se **φ > 0** (receptor indutivo)
Q = 0 se **φ = 0** (receptor resistivo)
Q < 0 se **φ < 0** (receptor capacitivo)

- Como $Z = \frac{U}{I}$, então pode escrever-se $\boxed{Q = ZI^2 \cdot \text{sen}\varphi}$

  $\boxed{Q = \frac{U^2}{Z} \cdot \text{sen}\varphi}$
- Além disso, como $X = Z \cdot \text{sen}\varphi$, então $\boxed{Q = XI^2}$

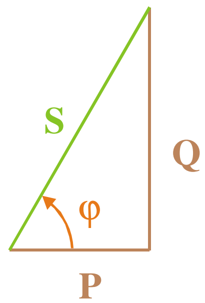
Potência aparente: **S** [VA] $\boxed{S = UI}$

Factor de potência: **fp** $\boxed{fp = \frac{P}{S}}$

- É o factor pelo qual é necessário multiplicar a potência aparente para se obter a potência activa.
- No **caso particular** de **um receptor monofásico**: $fp = \frac{P}{S} = \frac{UI \cdot \cos\varphi}{UI} = \cos\varphi$

29.3 Relação entre as potências activa, reactiva e aparente num receptor monofásico

$$\left.\begin{aligned} P^2+Q^2 &= (UI)^2\cdot\cos^2\varphi+(UI)^2\cdot\operatorname{sen}^2\varphi \\ &= (UI)^2\cdot\underbrace{\left(\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi\right)}_{1} \\ &= (UI)^2 \\ &= S^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad S=\sqrt{P^2+Q^2}$$



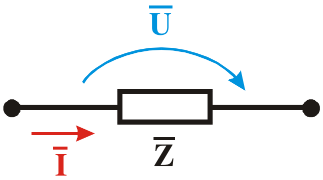
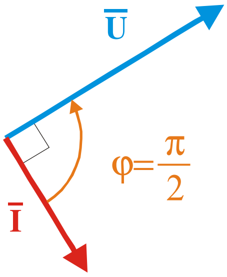
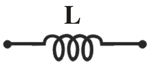
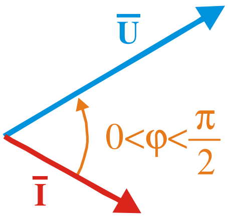
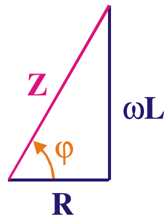
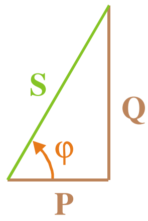
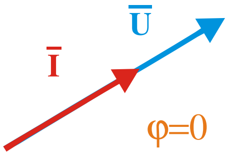
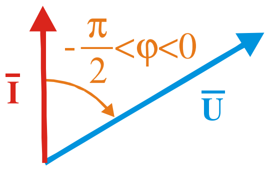
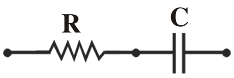
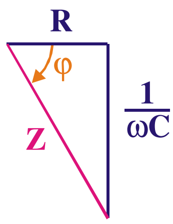
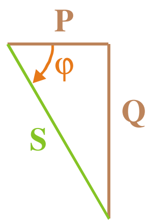
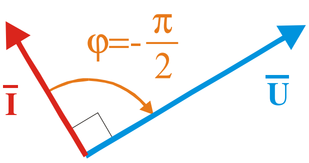
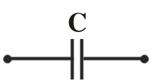
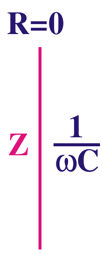
29.4 Potências activa, reactiva e aparente num conjunto de n receptores monofásicos

Potência activa: **P_{conj}** [W] $\boxed{P_{conj}=\sum_{i=1}^{n}P_i}$

Potência reactiva: **Q_{conj}** [VAr] $\boxed{Q_{conj}=\sum_{i=1}^{n}Q_i}$

Potência aparente: **S_{conj}** [VA] $\boxed{S_{conj}=\sqrt{P_{conj}^2+Q_{conj}^2}}$ Importante: $\boxed{S_{conj}\neq\sum_{i=1}^{n}S_i}$

Factor de potência: **fp_{conj}** $\boxed{fp_{conj}=\frac{P_{conj}}{S_{conj}}}$

	Circuito equivalente com o número mínimo de componentes em série	$\boxed{\bar{Z}(Z,\varphi)\leftrightarrow\bar{Z}(R,X)}$ $\boxed{Z=\frac{U}{I}}$ $\boxed{\begin{matrix}R=Z\cdot\cos\varphi\\X=Z\cdot\text{sen}\varphi\end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix}P=UI\cdot\cos\varphi\\Q=UI\cdot\text{sen}\varphi\\S=UI\end{matrix}}$ $\boxed{S=\sqrt{P^2+Q^2}}$
		 $\boxed{Z=\omega L}$	 $\boxed{S=Q}$
		 $\boxed{Z=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$	 $\boxed{S=\sqrt{P^2+Q^2}}$
		 $\boxed{Z=R}$	 $\boxed{S=P}$
		 $\boxed{Z=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$	 $\boxed{S=\sqrt{P^2+Q^2}}$
		 $\boxed{Z=\frac{1}{\omega C}}$	 $\boxed{S=Q}$