SÉRIES NUMÉRICAS

1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+...

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+... \quad ?$$

Definição 1:

Seja a_n uma sucessão de números reais. Chama-se série numérica de termo geral a_n à sucessão de termo geral $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Representa-se por $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dizemos que uma série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é **convergente** quando a sucessão S_n das somas parciais for convergente para limite finito. Caso contrário diz-se **divergente**.

Designa-se por S a soma da série quando é convergente. $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

EXEMPLO 1:

1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+...

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{se n par} \\ 0 & \text{se n ímpar} \end{cases}$$

Logo a sucessão S_n é divergente.

EXEMPLO 2:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+...=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\\ &=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+...+\frac{1}{2^n}\\ &=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\\ &=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$$

PROPRIEDADES

À série $\sum_{n=1}^{+\infty} ba^n$ chamamos **série geométrica de primeiro termo b e razão** $r = a$. A sucessão associada é $S_n = b + ba + ba^2 + ba^3 + ... + ba^n$. Assim, $S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$.

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} b\frac{1-a^n}{1-a}:$$

$$S = \frac{b}{1-a} \text{ se } |a| < 1$$

$$S = \infty \text{ se } |a| > 1$$

A série diverge se $|a| = 1$.

Logo, a série é convergente apenas se $-1 < a < 1$, e a sua soma será $\frac{b}{1-a}$.

EXEMPLO 3: Discuta a convergência da série

(a) $a+1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+...+\frac{1}{a^n}+...$ com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{8^n}{(a+1)^{3n}}$

EXEMPLO 4: Calcule as somas parciais das seguintes séries e a soma das que são convergentes:

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-2n}$

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{7^n}$

Consideremos a série numérica do tipo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+...$$

A uma série destas chama-se **série de Mengoli** ou série telescópica. A sucessão associada correspondente é $(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+...+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_0$. Logo a série é convergente se e só se existir $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$, e a soma da série será dada por

$S=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n-a_0$.

TEOREMA 1: Se as séries numéricas $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ são convergentes então:

(a) a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ é convergente e tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$;

(b) a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda a_n$ é convergente e tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda a_n=\lambda\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

EXEMPLO 5: Discuta a convergência da série:

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+3)}$

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\times 2^n + n(n+1)}{2^n n(n+1)}$

EXEMPLO 6: Calcule a soma da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{4n^2-1}$.

CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

CRITÉRIO GERAL DE CAUCHY:

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais. É condição necessária e suficiente para que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ seja convergente que: $\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : (n \geq p,\ n,k \in \mathbb{N}) \Rightarrow |S_{n+k} - S_n| < \delta$.

EXEMPLO 7: A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Repare que $|S_{2n} - S_n| = |a_{n+1} + ... + a_{2n}| = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

TEOREMA 2: Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ (condição necessária).

COROLÁRIO: Se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ não existe, ou, existindo, $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

EXEMPLO 8: A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+3}{n+7}\right)^{n-7}$ é divergente.

Porque $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n+7}\right)^{n-7} = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{n+7}\right)^{n+7}\right)^{(n-7)/(n+7)} = e^{-4} \neq 0$

TEOREMA 3: Se $a_n \geq 0$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se e só se S_n é uma sucessão limitada superiormente.

TEOREMA 4 (1º CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO):

Se $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ e $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então:

(i) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente.

(ii) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

EXEMPLO 9: Estude a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

Repare que $\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{1}{n+1}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ que é divergente. Logo a série dada é divergente.

TEOREMA 5 (2º CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO):

Se $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}$, então:

(i) se $\lambda \neq 0$, então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são da mesma natureza.

(ii) se $\lambda = 0$, então

(a) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente.

(b) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

Se $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = +\infty$, então:

(i) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

(ii) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente.

TEOREMA 6 (CRITÉRIO DE CAUCHY OU DA RAIZ):

Se $a_n \geq 0$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda \in \mathbb{R}$, então:

(i) se $\lambda < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

(ii) se $\lambda > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

(iii) se $\lambda = 1$, nada se pode concluir excepto quando, a partir de certa ordem, $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ caso em que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

EXEMPLO 10: A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{n+1}{3n} \right)^n$ é convergente.

TEOREMA 7 (CRITÉRIO DE D'ALEMBERT OU DA RAZÃO):

Se $a_n \geq 0$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \in \mathbb{R}$, então:

(i) se $\lambda < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

(ii) se $\lambda > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

(iii) se $\lambda = 1$, nada se pode concluir excepto quando, a partir de certa ordem, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ caso em que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

EXEMPLO 11: A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n}{n!n^n}$ é convergente.

TEOREMA 8 (CRITÉRIO DE RAABE):

Se $a_n \geq 0$ e $\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right] = \lambda \in \mathbb{R}$

(i) se $\lambda > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

(ii) se $\lambda < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

(iii) se $\lambda = 1$, nada se pode concluir excepto quando, a partir de certa ordem, $n\left[\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right] < 1$ caso em que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

TEOREMA 9 (DE CUNHA-BOLZANO-CAUCHY):

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se e somente se para todo o ε positivo existir uma ordem n_0 tal que para quaisquer m superior a n_0 e p natural se tenha $\left|a_m + a_{m+1} + ... + a_{m+p}\right| < \varepsilon$.

TEOREMA 10:

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|a_n\right|$ é convergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.