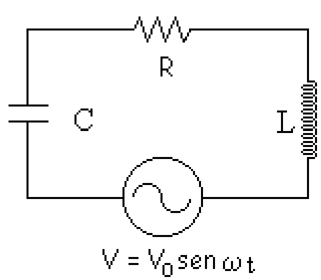
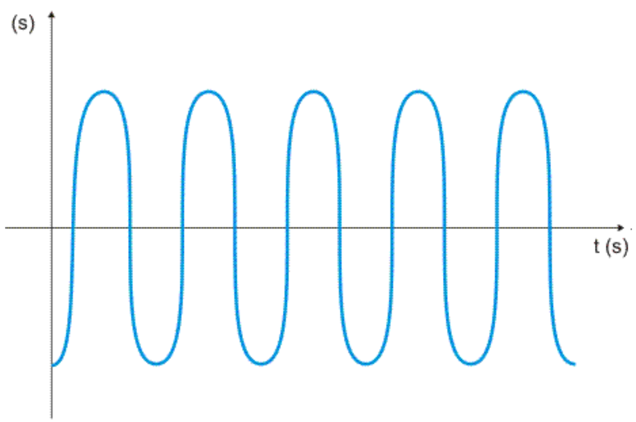
7. Circuitos de Corrente Alternada (AC)

Universidade do Minho





Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

- **Descrevemos os princípios básicos dos circuitos AC simples.**

- Análise de circuitos em série simples com resistências (R), condensadores (C), e indutores (L), isoladamente ou em combinação, alimentados por uma fonte de voltagem sinusoidal.
- Vamos usar o facto de R, C e L terem respostas lineares: a corrente alternada instantânea (AC) em cada um deles é proporcional à voltagem alternada instantânea no componente.
- Quando a voltagem (V) alternada aplicada for sinusoidal, a corrente em cada componente também será sinusoidal, mas não necessariamente em fase com a voltagem aplicada.
- Quando a corrente numa **bobina** (***indutor***) altera-se com o tempo, há uma fem (força electro-motriz) induzida na bobina, conforme a **Lei de Faraday**.

A **fem auto-induzida numa bobina** define-se pela expressão:

$$\boxed{\varepsilon = -L\frac{di}{dt}}$$

Onde ***L*** é a **indutância** da bobina

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

- A **Indutância** é uma medida de oposição dum componente do circuito (neste caso a bobina) à variação da corrente.

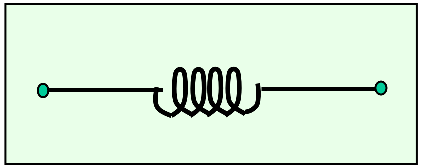
$$\text{SI} \rightarrow \text{henry (H)} \qquad 1H = 1\,\frac{V \cdot s}{A}$$

- A indutância de qualquer bobina (solenóide, bobina toroidal) é dada pela expressão

$$\boxed{L = \frac{N\phi_m}{I}}$$

- Onde **I** é a corrente, ϕ_m é o fluxo magnético através da bobina, e N o número total de espiras.

- A indutância de um componente de um circuito depende da geometria do componente.

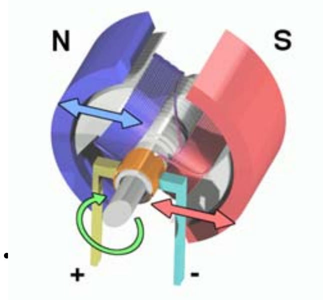


Indutor (bobina)

7.1. Fontes de AC e Fasores

•Circuito de corrente alternada (AC): uma combinação de componentes (R,L,C) e um gerador que proporciona AC.

•Pela rotação duma espira num campo magnético com velocidade angular (ω) constante, induz-se uma **voltagem alternada** (fem) sinusoidal na espira.



•Esta voltagem instantânea é dada por: $\boxed{\upsilon = V_m \sin \omega t}$

V_m: voltagem de pico do gerador de AC ou amplitude da voltagem.

•A frequência angular é: $\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$

f: frequência linear da fonte, T: período ($f \rightarrow$ Hz (ciclos por segundo); $\omega \rightarrow$ rad/s)

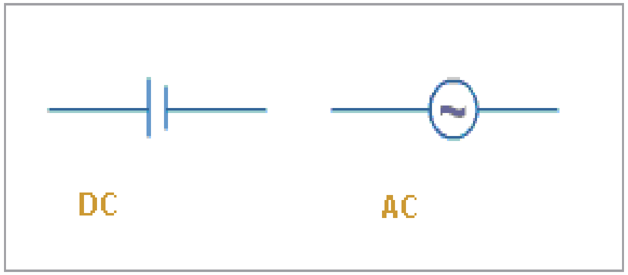
Em Portugal, na rede eléctrica f=50 Hz

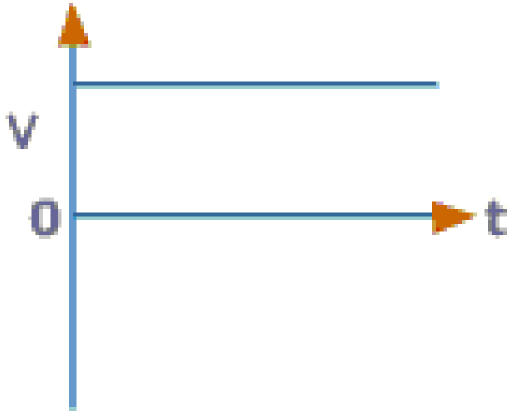
AC/DC??

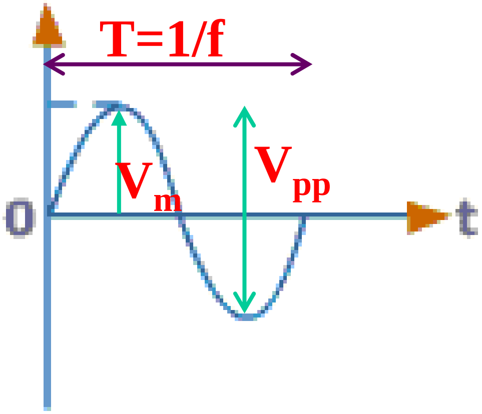
Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

Universidade do Minho

AC/DC







Corrente contínua (DC)

Corrente alternada (AC)

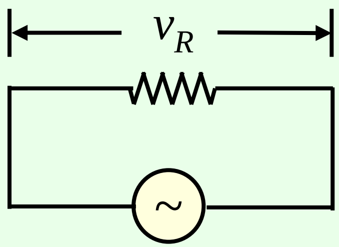
Objectivo primordial do capítulo - exemplo: Suponha que tem um gerador de AC ligado a um circuito com componentes R, L e C em série; se a V_m e a f do gerador forem dadas, e os valores de R, L e C também, achar a corrente resultante, caracterizada pela amplitude e pela fase.

A fim de simplificar esta análise temos que construir graficamente um **diagrama de fasores**: as grandezas oscilatórias (corrente, voltagem) são representadas por vectores giratórios (no sentido anti-horário) no plano complexo, os **fasores**.

•O comprimento do fasor representa a amplitude (valor máximo) da grandeza;

•A projecção do fasor no eixo real representa o valor instantâneo da grandeza.

7.2. Resistências num Circuito AC



$\upsilon = V_m.\sin(\omega.t)$

- A soma algébrica instantânea da elevação do potencial, e do abaixamento do potencial, na malha do circuito deve ser nula (Lei das malhas de Kirchhoff) $\Rightarrow$

$$\boxed{\Sigma\upsilon_i = 0 \Leftrightarrow \upsilon - \upsilon_R = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\upsilon = \upsilon_R = V_m.\sin\omega t}} \quad (1)$$

υ_R: queda instantânea de voltagem na resistência (R).

A corrente instantânea:
$$\boxed{i_R = \frac{\upsilon}{R} = \frac{V_m}{R}\sin\omega t = I_m \sin\omega t} \quad (2)$$

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{R}}$$ $\rightarrow$ corrente de pico (máximo)

(1) e (2) $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{\upsilon_R = I_m\, R \sin\omega t}}$

i_R e υ_R variam, ambos de uma forma sinusoidal (com *sin ωt*) e atingem os valores máximos (picos) num mesmo instante ⇒ as duas grandezas estão em fase.

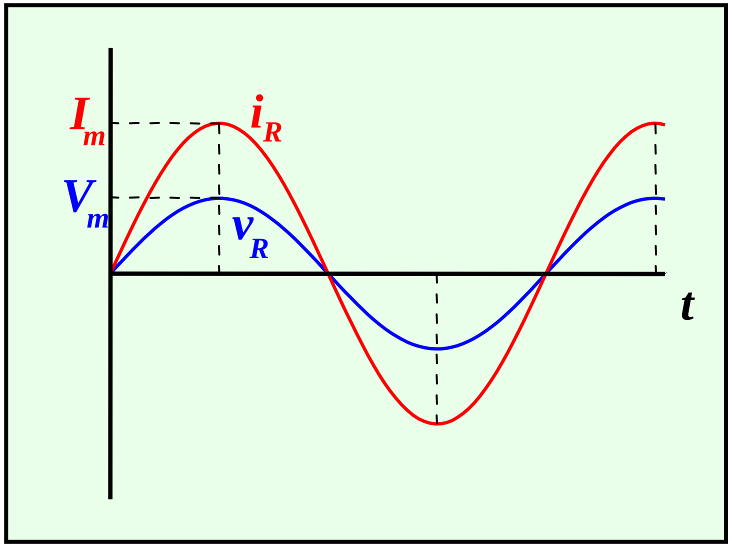


Gráfico da voltagem e da corrente em função do tempo

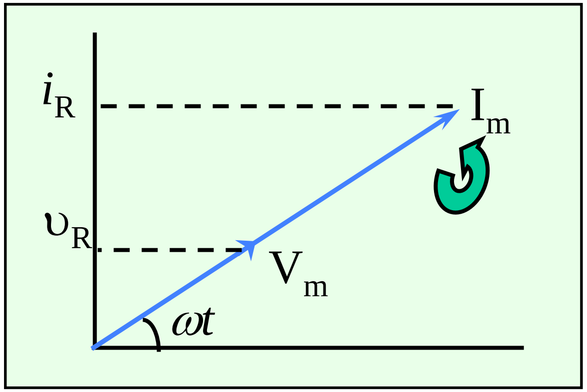


Diagrama de fasores. As projecções de ***I_m* e *V_m* (fasores)** no eixo vertical representam os ***valores instantâneos*** de i_R e υ_R.

- ! O valor médio da corrente sobre um ciclo é nulo: a corrente mantém-se num sentido (+) durante o mesmo intervalo de tempo que se mantém no sentido oposto (-) ⇒ O sentido da corrente não tem efeito sobre o comportamento do R no circuito.

Universidade do Minho

Efeito térmico

Universidade do Minho

- Qualitativamente: as colisões entre os electrões de condução de corrente e os átomos fixos da resistência (R) provocam um aumento da sua temperatura, que depende do valor da corrente, mas é independente da direcção da corrente.
- Quantitativamente: taxa de conversão da energia eléctrica em calor numa R é a sua **potência instantânea** $\boxed{\mathbf{P = \mathit{i}^2 \cdot R}}$; i: corrente instantânea na R.
- $\mathbf{P \propto \mathit{i}^2} \Rightarrow$ não faz diferença se a corrente for contínua (DC) ou alternada (AC), ou seja se o sinal (+) ou (-) for associado a $\boldsymbol{i}$.

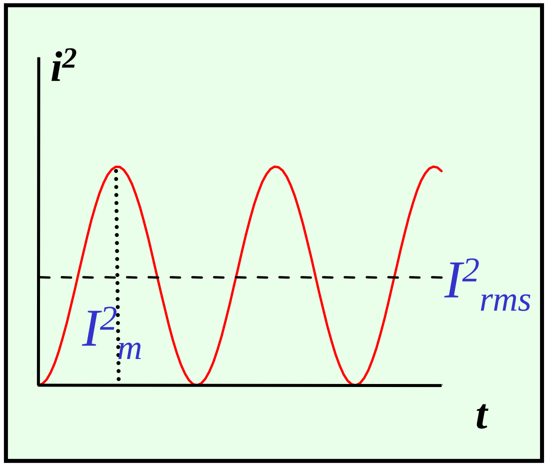
! O efeito térmico provocada por uma corrente alternada com $\mathbf{I_m}$ não é o mesmo que o provocado por uma corrente contínua com o mesmo valor, dado que a corrente alternada somente tem o I_{max} durante um pequeno instante de tempo durante um ciclo ***>> importante para poupança energética***.

Importante num circuito AC é o **valor médio da corrente** ou **corrente média quadrática (*rms*)**.

A corrente média quadrática (rms ou eficaz) é a raiz quadrada da média dos quadrados da corrente **(é este valor que é registado mo multímetro!)**

O quadrado da corrente varia com $\sin^2 \omega t$, e pode-se mostrar que o valor médio de i^2 é $I^2_m/2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} I_{rms} &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707\, I_m \\ I^2_{rms} &= \frac{I^2_m}{2} \end{aligned}}$$



<u>Exemplo:</u> Uma corrente AC com $I_m = 2$ A libertará o mesmo calor numa R do que uma corrente DC de $0,707 \cdot 2 = 1,414$ A

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

A potência média dissipada num R com uma corrente AC é:

$$\boxed{P_{med} = I_{rms}^2 R} \qquad R = \frac{V_{rms}}{I_{rms}}$$

A voltagem média quadrática (ou eficaz): $\boxed{V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0,707 V_m}$

! Quando se fala em medir a voltagem alternada de 220V duma tomada eléctrica, fala-se na realidade de V_{rms} de 220V $\Rightarrow$ $V_m = 311{,}1$ V

! Usaremos valores eficazes (*rms*) ao discutir as correntes e voltagens alternadas.

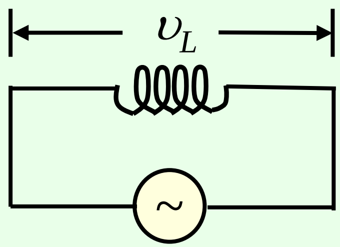
! Os amperímetros e voltímetros de AC são projectados para ler os valores *eficazes (rms)*

Se forem usados os valores *eficazes*, muitas equações terão a mesma forma que as equações nos circuitos DC

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

	Voltagem	Corrente
Valor instantâneo	υ	i
Valor máximo (pico)	$\mathbf{V_m}$	$\mathbf{I_m}$
Valor médio quadrático (ou eficaz)	$\mathbf{V_{rms}(V_{\mathit{ef}})}$	$\mathbf{I_{rms}(I_{\mathit{ef}})}$

7.3. Indutores num Circuito AC



$\upsilon = V_m \cdot \sin(\omega . t)$

υ_L: queda instantânea de voltagem no indutor (bobina).

$\Rightarrow$ Lei das malhas: $\Sigma\upsilon_i = 0 \Leftrightarrow \upsilon + \upsilon_L = 0$,

$$\boxed{V_m \sin\omega t - L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow L\frac{di}{dt} = V_m \sin\omega t} \qquad (1)$$

Lei de Faraday)

A integração dá a corrente em função do tempo:

$$\boxed{i_L = \frac{V_m}{L}\int \sin\omega t \, dt = -\frac{V_m}{\omega L}\cos\omega t}$$

dado que: $-\cos\omega t = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_L = \frac{V_m}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$ (2)

Comparando com 1 $\Rightarrow$ a corrente do circuito está *fora de fase* com a voltagem na bobine, com um atraso de $\pi/2$ rad, ou 90°

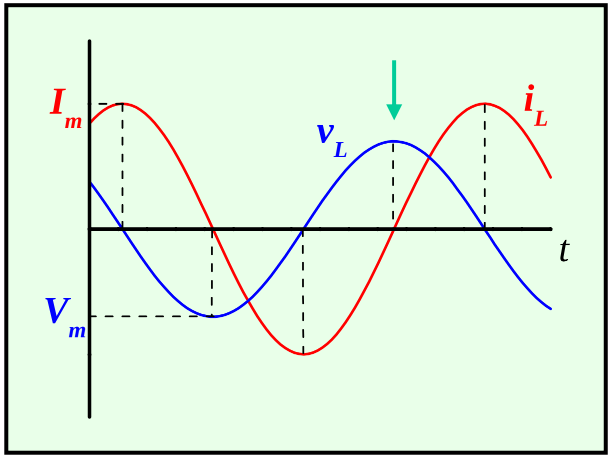
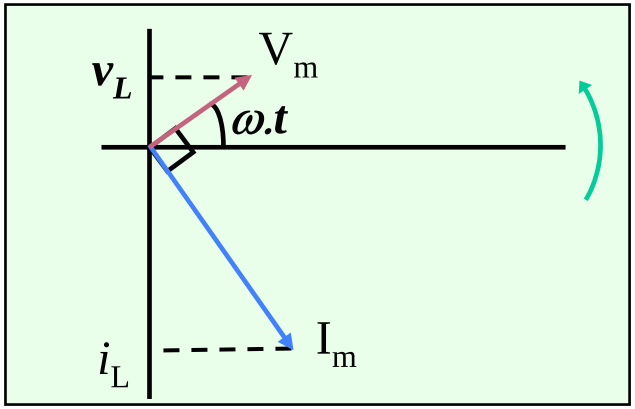


Diagrama de fasores:



υ_L atinge V_m (pico) num instante que está um quarto do período de oscilação antes de i_L atingir I_m

Quando a υ aplicada for sinusoidal, i_L segue a υ_L com um atraso de 90°

! $\upsilon_L \propto di/dt \Rightarrow \upsilon_L$ é maior quando i estiver a variar com maior rapidez. $i(t)$ é uma curva sinusoidal $\Rightarrow$ di/dt (declive) é máximo sempre que a curva $i(t)$ passar pelo zero $\Rightarrow \upsilon_L$ atinge o máximo V_m sempre que $i_L = 0$

$$\boxed{i_L = \frac{V_m}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (2)$$

Da Eq. (2) $\Rightarrow$ $$\boxed{I_m = \frac{V_m}{\omega L} = \frac{V_m}{X_L}} \quad (3)$$

- $\boxed{X_L = \omega L}$ é a **impedância indutiva (**ou reactância indutiva**)**

I_{rms} é dada por uma expressão semelhante à (3) com V_m substituída por V_{rms}

$$X_L = \frac{V_{rms}}{I_{rms}} = \frac{V_m}{I_m}$$

! O conceito de **impedância** é usado a fim de não ser confundido com o de resistência.

A impedância distingue-se da resistência porque introduz uma diferença de fase entre υ e i.

•Circuito puramente resistivo $\Rightarrow$ i e υ em fase

•Circuito puramente indutivo $\Rightarrow$ i segue υ com uma diferença de fase de 90°

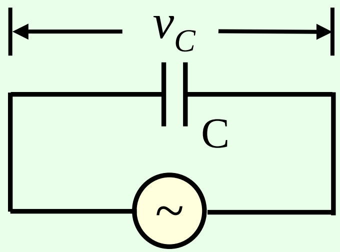
$$i_L = \frac{V_m}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_m}{X_L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Com 1 e 3 $\Rightarrow$ $\boxed{\upsilon_L = V_m \cdot sen\,\omega t = I_m \cdot X_L \cdot sen\,\omega t}$

Pode ser visto como a Lei de Ohm dum circuito indutivo. X_L tem a unidade SI de resistência (impedância) $\Rightarrow$ o Ohm (Ω).

A impedância dum indutor aumenta com a frequência. Nas frequências mais elevadas ***i*** varia mais rapidamente, o que provoca um aumento da **fem** induzida associada a uma certa $\mathbf{I_m}$.

7.4. Condensadores num Circuito AC



$v = V_m \cdot \sin(\omega . t)$

- Lei das malhas: $\Sigma \upsilon_i = 0 \Leftrightarrow \upsilon - \upsilon_c = 0$

$$\boldsymbol{\upsilon = \upsilon_c = V_m \text{ sen } \omega t}$$

- υ_c: queda instantânea de voltagem no condensador.

$$v_c = \frac{Q(t)}{C} \rightarrow Q(t) = CV_m sin\, \omega t \qquad (1)$$

Uma vez que ***i = dQ/dt*** $\Rightarrow$ a derivação de (1) dá a corrente instantânea

$$\boxed{i_C = \frac{dQ}{dt} = \omega C V_m \cos \omega t = \omega C V_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

dado que: $\cos \omega t = sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

- Vemos que a corrente do circuito <u>não</u> está em fase com a voltagem aos terminais do condensador.

$$i_C = \omega C V_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{X_C} V_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

i_C está com uma diferença de fase de 90° em antecipação à υ_C.

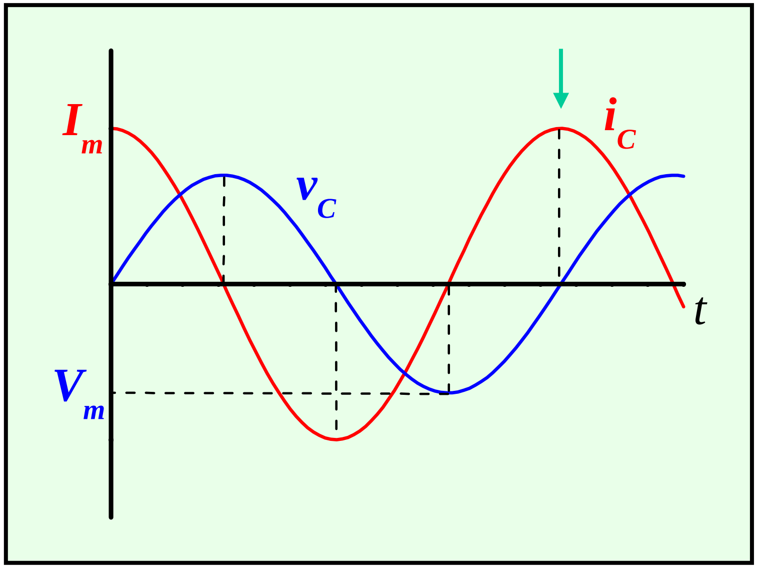
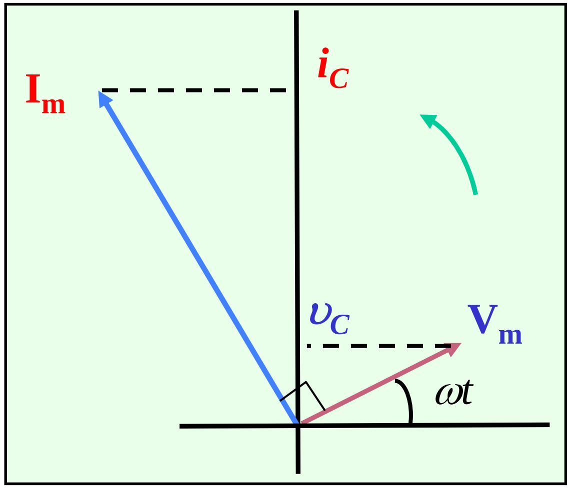


Diagrama de fasores:

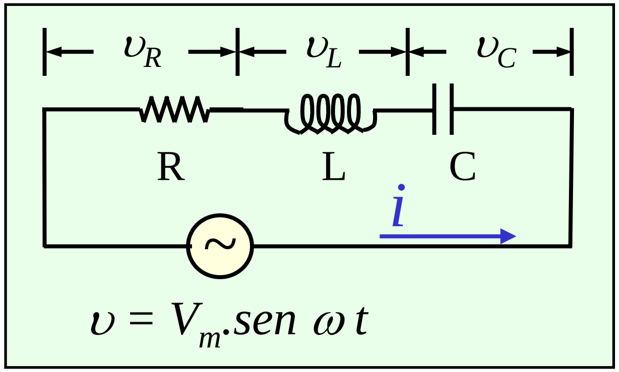


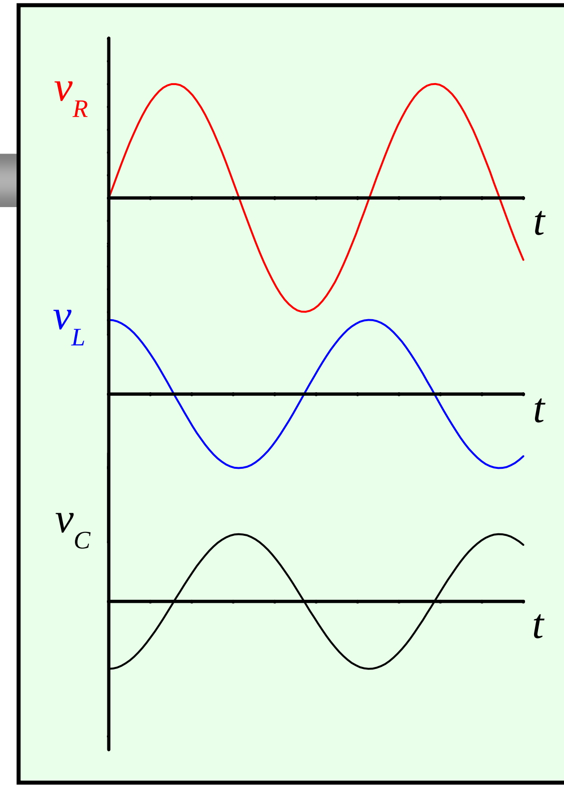
i_C atinge I_m (pico) um quarto de ciclo mais cedo que o instante em que a υ_C atinge V_m

Quando a fem aplicada for sinusoidal, a corrente num condensador está avançada de 90° relativamente à voltagem no C.

Impedância capacitiva $\Rightarrow$ $$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

7.5. Circuitos RLC em Série





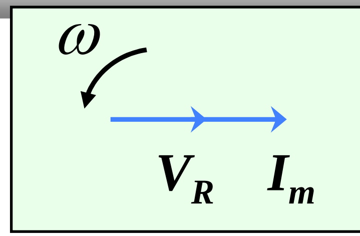
i **=** $\mathbf{I_m}$***.sin(ωt - φ)***; φ é o ângulo de fase entre a corrente do circuito e a voltagem da fonte aplicada.

- Objectivo: determinar φ e $\mathbf{I_m}$. Teremos que construir e analisar o diagrama de fasores do circuito.

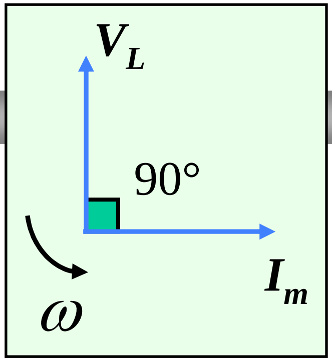
! Todos os componentes estão em **série** no circuito ⇒ **a corrente alternada (*i*) é sempre a mesma (mesma amplitude e fase) em todos os pontos do circuito. ⇒ a voltagem em cada componente terá amplitude e fase diferente.**

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

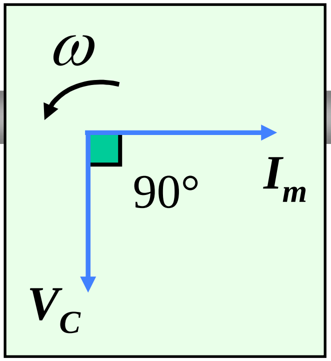
Construção dos Diagramas de fasores:



Resistência



Indutor



Condensador

1

Voltagem → em fase / avanço de 90° / atraso de 90° com a corrente

As quedas instantâneas de voltagem são:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_R &= \mathbf{I_m R}\ \mathit{sin}\ (\omega t-\phi) = \mathbf{V_R}\ \mathit{sen}\ (\omega t-\phi) \\ \upsilon_L &= \mathbf{I_m X_L}\ \mathit{sin}\ (\omega t+\pi/2-\phi) = \mathbf{V_L}\ \cos\ (\omega t-\phi) \\ \upsilon_C &= \mathbf{I_m X_C}\ \mathit{sin}\ (\omega t-\pi/2-\phi) = -\mathbf{V_C}\ \cos\ (\omega t-\phi) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{i = I_m \sin(\omega t-\phi)}$$

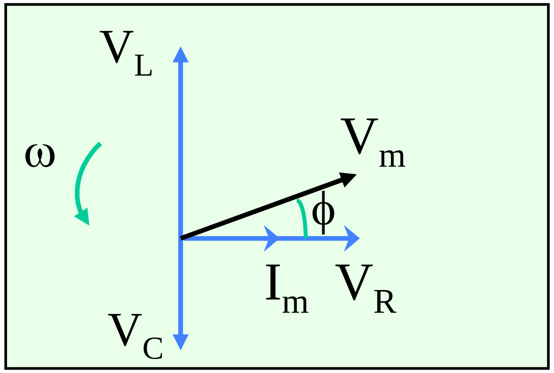
$V_R = I_m R$; $V_L = I_m X_L$; $V_C = I_m X_C$ são as voltagens de pico (máximos) aos terminais de cada componente.

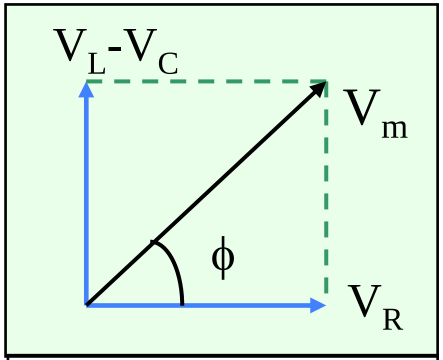
! A voltagem instantânea υ nos três componentes obedece a:

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_R + \upsilon_L + \upsilon_C}$$

É mais simples efectuar a soma usando o diagrama de fasores 2

A corrente em cada componente é a mesma, ***i* (t)** $\Rightarrow$ pela combinação dos três fasores 1 :





2

Soma vectorial das voltagens

$$\tan\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R}$$

! A soma vectorial das amplitudes das voltagens $\mathbf{V_R}$, $\mathbf{V_L}$, $\mathbf{V_C}$ é igual a um fasor cujo comprimento é o pico da voltagem aplicada, $\mathbf{V_m}$, e que faz um ângulo ϕ com o fasor da corrente $\mathbf{I_m}$.

Pelo triângulo na Figura:

$$V_m = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(I_m R)^2 + (I_m X_L - I_m X_C)^2}$$

(A) $$\boxed{V_m = I_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$; $\mathbf{X_L = \omega L; X_C = 1/\omega C}$

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}}$$

A impedância (Z) do circuito RLC é: $\boxed{Z \equiv \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$ SI: Ohm (Ω)

$\Rightarrow$ (A) $\rightarrow$ $\boxed{\mathbf{V_m = I_m Z}}$ $\Rightarrow$ ***Generalização da Lei de Ohm para AC***

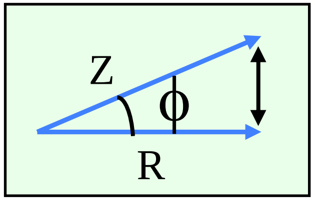
Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

$$Z = \frac{V_m}{I_m}; Z = \frac{V_{rms}}{I_{rms}}$$

- **! A corrente no circuito depende da R, L, C e ω**

Se eliminamos o factor comum **I_m** de cada fasor da Figura 2

⇒ **triângulo de impedância.**



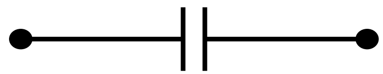
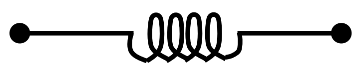
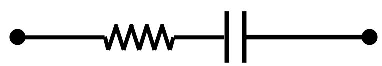
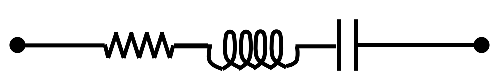
$\}$ $\mathbf{X_L - X_C}$ ⇒ $$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$i = I_m \sin(\omega t - \phi)$$

- Quando $X_L > X_C$ (**frequências altas**) ⇒ $\phi > 0$, a ***i*** segue a υ aplicada.
- Se $X_L < X_C$ (**frequências baixas**) ⇒ $\phi < 0$, ***i*** precede a υ aplicada.
- Quando $X_L = X_C$ ⇒ $\phi = 0$, $Z = R$ e $I_m = V_m/R$

A frequência a que se verifica esta última condição é a frequência de ressonância.

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

Componentes do Circuito	Impedância, Z	Ângulo de Fase, ϕ
R 	R	0º
C 	X_C	-90º
L 	X_L	+90º
R C 	$\sqrt{R^2 + X_C^2}$	Negativo, entre –90° e 0°
R L 	$\sqrt{R^2 + X_L^2}$	Positivo, entre 0° e 90°
R L C 	$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	Negativo se $X_C > X_L$ Positivo se $X_C < X_L$

No circuito RLC podemos exprimir a potência instantânea, P, como:

$$\mathbf{P = \mathit{i}\cdot\upsilon = I_m\sin(\omega t - \phi)\cdot V_m\sin(\omega t)} \qquad (1)$$

$$\mathbf{= I_m V_m \sin(\omega t)\cdot\sin(\omega t - \phi)}$$

! Função complicada do tempo sem muita utilidade prática.

Interessa, em geral: a **potência média** em um ou mais ciclos $\Rightarrow$

$$\sin(\omega t - \phi) = \sin(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\phi)\cos(\omega t) \rightarrow \qquad (1)$$

$$\mathbf{P = I_m V_m \sin^2(\omega t)\cdot\cos(\phi) - I_m V_m \sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t)\cdot\sin(\phi)}$$

Toma-se a média de P sobre o tempo durante um ou mais ciclos (I_m, V_m, ϕ e ω constantes).

- Média de $\sin^2(\omega t).\cos(\phi)$ $\rightarrow$ ½ $\cos(\phi)$
- Média de $\underbrace{\sin(\omega t).\cos(\omega t)}_{½.\sin(2\omega t)}.\sin(\phi)$ $\rightarrow$ 0

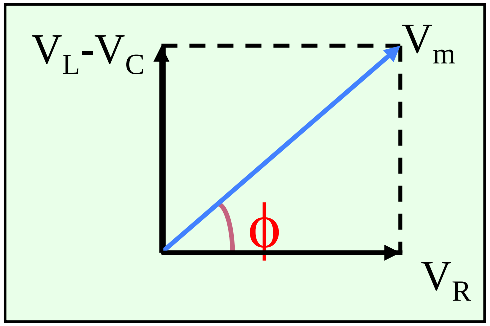
$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}; I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

⇒ **Potência média ou potência activa eficaz dissipada:**

$$P_{med} = \tfrac{1}{2} I_m . V_m . \cos\phi$$

$$= I_{rms} . V_{rms} . \cos\phi$$

factor de potência



⇒ A queda máxima de voltagem na resistência é: $V_R = V_m \cos\phi = I_m . R$ →

$$\boxed{\cos\phi = I_m R / V_m}$$

$$P_{méd} = I_{rms} V_{rms} \cos\phi = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)\frac{I_m R}{V_m} = \tfrac{1}{2} I_m^2 R$$

$$\boxed{P_{méd} = I_{rms}^2 R}$$

! A potência média proporcionada pelo gerador é dissipada como calor na R. (como em DC)

! **Não há perda de potência num indutor ideal ou num condensador ideal**.

- (Ex.: o condensador é carregado e descarregado duas vezes durante cada ciclo ⇒ há fornecimento de carga ao condensador durante dois quartos do ciclo, e há o retorno da carga à fonte de voltagem, durante os outros dois quartos. ⇒ **A potência média proporcionada pela fonte é nula**. Logo um condensador num circuito de AC não dissipa energia.)
- (Analogamente para o indutor)

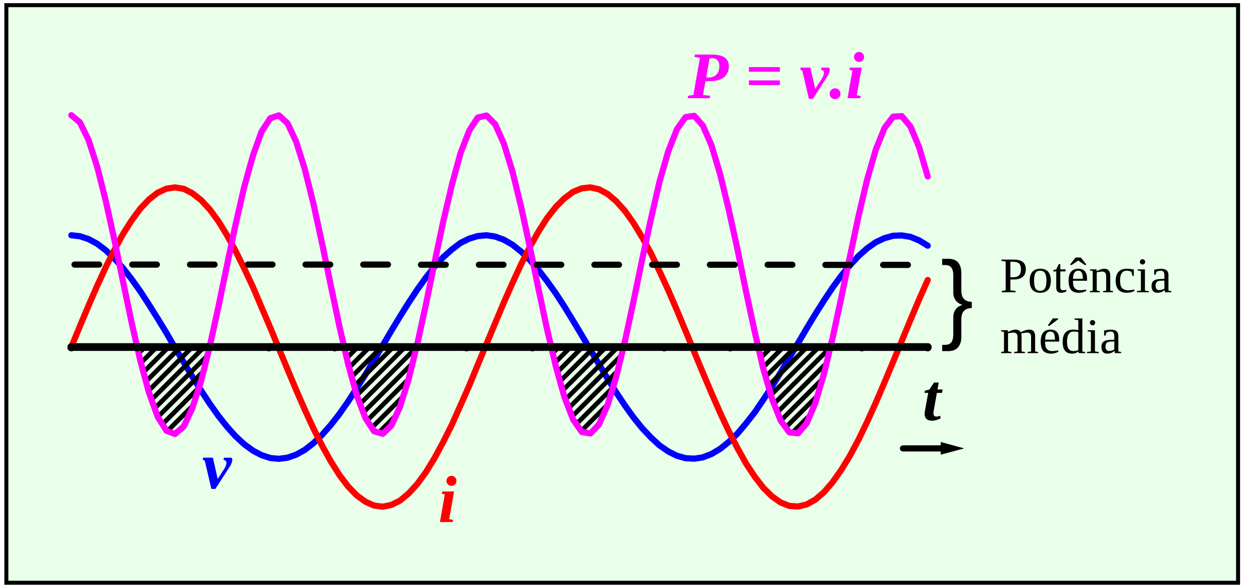
A potência que se transmite entre a fonte e o circuito que não é dissipada:

Potência reactiva: $\boxed{P_{react} = I_{rms}.V_{rms}.\mathrm{sen}(\phi)}$

$$P_{méd} = P_{act} = I_{rms}.V_{rms}.\cos\phi$$

Puramente resistivo $\Rightarrow \phi = 0, \cos\phi = 1$

$\Rightarrow \boxed{P_{max} = I_{rms}.V_{rms}}$ Potência máxima (máx. amplitude)



Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

7.7. Ressonância num Circuito RLC em Série.

- Um circuito RLC está em **ressonância** quando a corrente tem o seu valor de pico (ver pag. 21/24).

- Em geral $$\boxed{I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}}}$$

! $Z = Z(\omega) \Rightarrow I_{rms} = I_{rms}(\omega)$

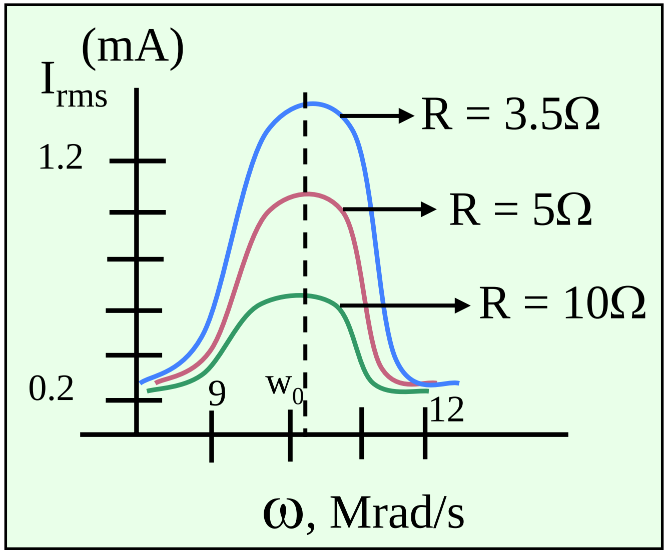
A corrente atinge o seu valor máximo quando $\mathbf{X_L = X_C \Rightarrow Z = R}$

A frequência ω_0 a que isso ocorre é a **frequência de ressonância do circuito**:

$$X_L = X_C \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

ω_0 também corresponde à frequência natural de oscilação do circuito LC.

- **Nesta frequência a corrente está em fase com a voltagem instantânea aplicada pela fonte de corrente alternada.**



$L = 5\ \mu H$

$C = 2\ nF$

$V = 5\ mV$

$\boxed{\omega_0 = 10^7\ rad/s}$ $\forall R$

Curvas mais estreitas e altas quando R diminui.

$I_{rms} \rightarrow \infty$, $R \rightarrow 0$ (teoria!!)

Os circuitos reais têm sempre uma certa resistência que limita o valor da corrente.

- Os sistemas mecânicos também exibem ressonâncias: sistema massa-mola.
- Actuando na ω_0, a amplitude das oscilações aumenta com o tempo.