Exercícios 2.85. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 e^y$.

1. Determine o valor máximo e o valor mínimo da derivada direccional de f em $(-2, 0)$ e indique os vectores unitários $\hat{u}$ e $\hat{v}$ que tornam a derivada direccional em $(-2, 0)$ máxima e mínima, respectivamente.

2. Determine os vectores unitários $\hat{u}$ tais que $D_{\hat{u}} f(-2, 0) = 0$.

3. A base de uma certa montanha é representada por uma região R no plano $x0y$ considerada ao nível do mar. A altitude z sobre o ponto (x, y) de R é dada por $z = 2000 - 0,02x^2 - 0,04y^2$, sendo x, y e z expressos em metros. Considera-se que o eixo positivo $0x$ tem a direcção Este e que o eixo positivo $0y$ tem a direcção Norte. Um alpinista está no ponto $(-20, 5, 1991)$.

   (a) Se o alpinista pretender seguir para Oeste, ele sobe ou desce?

   (b) Se o alpinista pretende seguir para nordeste, ele sobe ou desce? Indique a taxa de variação da altitude a que se encontra o alpinista.

   (c) Diga qual a direcção que o alpinista deve escolher para

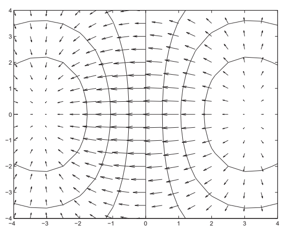
   (i) ascender mais rapidamente; (ii) percorrer um caminho plano.

4. Considere uma placa de metal aquecida tal que em cada ponto (x, y) a temperatura é dada por $T(x, y) = 80 - 20xe^{-\frac{1}{20}(x^2+y^2)}$. Um insecto está no ponto $(2, 1)$.

   (a) O insecto desloca-se na direcção do ponto $(1, -2)$. Qual a taxa de variação da temperatura nessa direcção?

   (b) Em que direcção se deve mover o insecto para se aquecer o mais rapidamente possível? Qual a variação da temperatura nessa direcção?

   (c) Observe o campo de vectores gradientes de T e tire conclusão acerca da temperatura da placa.



2.8 Máximos e Mínimos

Definição 2.86. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $P_0 \in D$.

1. Diz-se que f tem um **máximo relativo** (ou **local**) $f(P_0)$ se existe uma bola aberta B centrada em P tal que, para todo o $P \in B \cap D$, se tem $f(P) \leq f(P_0)$.

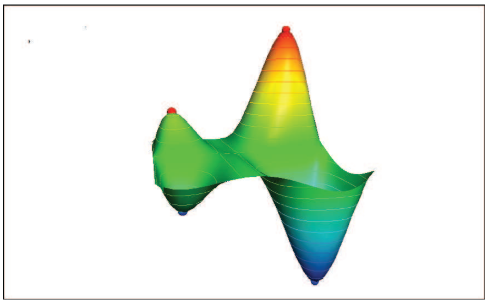
2. Diz-se que f tem **máximo absoluto** $f(P_0)$ se, para todo o $P \in D$, se tem $f(P) \leq f(P_0)$.

3. Diz-se que f tem um **mínimo relativo** (ou **local**)$f(P_0)$ se existe uma bola aberta B centrada em P_0 tal que, para todo o $P \in B \cap D$, se tem $f(P) \geq f(P_0)$.

4. Diz-se que f tem **mínimo absoluto** $f(P_0)$ se, para todo o $P \in D$, se tem $f(P) \geq f(P_0)$.

5. Os mínimos relativos e os máximos relativos de uma função f dizem-se **extremos relativos** de f.

6. O mínimo absoluto e o máximo absoluto de uma função f dizem-se **extremos absolutos** de f.



Exemplos 2.87. A função $f : D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 4\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$

tem máximo absoluto $f(0, 0) = 2$, pois para qualquer$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)} \leq \sqrt{4} = 2 = f(0, 0)$.

A função f tem mínimo absoluto 0, pois

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)} \geq 0$$

e f toma o valor 0 nos pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

1. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sin(xy)$ tem máximo absoluto 1, pois para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \sin(xy) \leq 1 = f(1, \frac{\pi}{2}).$$

A função f tem mínimo absoluto -1, pois para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \sin(xy) \geq -1$$

e $f(-1, \frac{\pi}{2}) = -1$, por exemplo.

2.8.1 Extremos Livres

Definição 2.88. Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $P_0 \in D$. Se as derivadas parciais de 1ª ordem de f são nulas em P_0 ou pelo menos uma delas não existe, então P_0 diz-se um **ponto crítico** de f.

Exemplo 2.89. Determinemos os pontos críticos da função $f(x, y) = 1 - x^2 + xy$:
A função f tem derivadas parciais

$$f_x(x, y) = -2x + y, \qquad f_y(x, y) = x.$$

Assim, os pontos críticos de f são as soluções do sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

ou seja, $(x, y) = (0, 0)$. O único ponto crítico de f é $(0, 0)$.

Proposição 2.90 (Primeiro teste da derivada)**.** Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $(a_1, \ldots, a_n)$ um ponto interior de D. Suponhamos que f tem derivadas parciais de 1ª ordem em $(a_1, \ldots, a_n)$. Se f tem um extremo local em $(a_1, \ldots, a_n)$ então $\nabla f(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$.

Definição 2.91. Se f é diferenciável num ponto P_0, $\nabla f(P_0) = \vec{0}$ e qualquer bola aberta centrada em P_0 contém pontos P tais que $f(P) < f(P_0)$ e pontos Q tais que $f(Q) > f(P_0)$, o ponto P_0 diz-se **ponto sela**.

Exercícios 2.92.

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14.$$

   Mostre que $(1, 3)$ é ponto crítico de f e $f(1, 3)$ é o mínimo absoluto de f.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$. Mostre que $(0, 0)$ é ponto crítico de f mas $f(0, 0)$ não é extremo local de f.

Proposição 2.93 (Teste da segunda derivada)**.** Sejam D um aberto e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha-se que f tem derivadas parciais de 2ª ordem contínuas em D. Seja (a, b) um ponto crítico de f (isto é, tem-se $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$). Seja

$$\begin{aligned} d = \begin{vmatrix} f_{x^2}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ & \\ f_{yx}(a,b) & f_{y^2}(a,b) \end{vmatrix} &= f_{x^2}(a,b) f_{y^2}(a,b) - f_{xy}(a,b) f_{yx}(a,b) \\ &= f_{x^2}(a,b) f_{y^2}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2. \end{aligned}$$

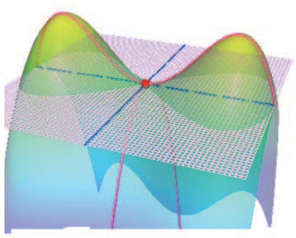
1. Se $d > 0$ e $f_{x^2}(a, b) > 0$ então $f(a, b)$ é mínimo local.
2. Se $d > 0$ e $f_{x^2}(a, b) < 0$ então $f(a, b)$ é máximo local.
3. Se $d < 0$ então $f(a, b)$ não é máximo local nem mínimo local.

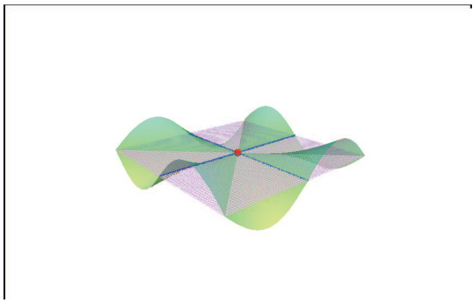
Observação 2.94.

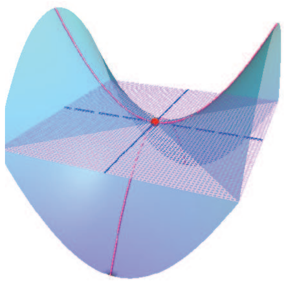
1. Os pontos (a, b) que verificam a condição 3. do Teorema anterior são pontos sela.

2. Se $d = 0$ na proposição anterior, temos um caso duvidoso: $f(a,b)$ pode ou não ser extremo local.
3. A matriz $\begin{bmatrix} f_{x^2}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{y^2}(a,b) \end{bmatrix}$ diz-se **matriz Hessiana** de f em (a,b).

As figuras seguintes são gráficos de funções com ponto sela.







Exercício 2.95. Para cada uma das funções seguintes, determine os pontos críticos e verifique se algum dos pontos críticos é extremante local da função.

(a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$;

(b) $g(x,y) = y^2 - x^2$;

(c) $h(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$.

2.8.2 Extremos Absolutos

Definição 2.96. 1. O ponto $a \in \mathbb{R}^n$ diz-se **ponto fronteiro** de $S \subseteq \mathbb{R}^n$ quando, qualquer que seja $r \in \mathbb{R}^+$, se tem

$$B(a,r) \cap S \neq \emptyset, \qquad B(a,r) \cap (\mathbb{R}^n \backslash S) \neq \emptyset.$$

2. A **fronteira** de $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é o conjunto dos pontos fronteiros de S e denota-se por $fr(S)$.
3. Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **fechado** se S contém a sua fronteira $fr(S)$.
4. Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existe uma bola (aberta ou fechada) que contém S.

Exemplos 2.97. 1. Todos os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ são pontos de fronteira do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$. O conjunto A é fechado e é limitado.

2. Os pontos do plano $y = 2$ são pontos da fronteira do conjunto $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y \geq 2\}$. O conjunto B é fechado e não é limitado.

3. Se $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$ então $fr(S) = S$. O conjunto S é fechado e não é limitado.

4. A fronteira de $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ é o conjunto

$$fr(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}.$$

O conjunto T não é fechado nem limitado.

Teorema 2.98 (Teorema de Weierstrass)**.** Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e limitado. Se a função $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua então f tem um máximo e um mínimo absolutos em A, isto é, existem $u, v \in A$ tais que

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq f(u), \quad f(x) \geq f(v).$$

Exemplo 2.99. A função $f(x, y) = x^3 - ye^{x^4 y^7}$, definida em

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 4\}$$

é uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado, logo f atinge em A um valor máximo e um valor mínimo.

Para determinar os extremos absolutos de uma função contínua $f : A \to \mathbb{R}$, onde A é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$ (com $n = 2$ ou $n = 3$), procedemos da seguinte forma:

(1.) Calculamos os pontos críticos de f no conjunto dos pontos interiores de A.

(2.) Determinamos os candidatos a extremos de f na fronteira de A.

(3.) Listamos os valores de f nos pontos críticos determinados em (1.) e os candidatos a extremos de f obtidos em (2.). O maior valor da lista será o máximo absoluto de f em A e o menor valor será o mínimo absoluto de f em A.

Exemplo 2.100. Determinemos os extremos absolutos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ na região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Note-se que A é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ fechado e limitado e que f uma função contínua em A. Pelo Teorema de Weierstrass, f tem máximo absoluto e mínimo absoluto em A.

(1.) A função f tem derivadas parciais

$$f_x(x, y) = 2x - 1 \qquad f_y(x, y) = 4y,$$

logo o único ponto crítico de f é o ponto $(\frac{1}{2}, 0)$, que é ponto interior de A.

(2.) Se (x, y) é um ponto da fronteira de A então $y^2 = 4 - x^2$ e $x \in [-2, 2]$. Assim,

$$f(x, y) = x^2 + 2(4 - x^2) - x = -x^2 - x + 8.$$

Seja $g(x) = -x^2 - x + 8,\ x \in [-2, 2]$. A função g é derivável e

$$g'(x) = -2x - 1,\ x \in [-2, 2].$$

Ora,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Portanto os candidatos a extremos de g são $g(-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{33}{4}$, $g(-2) = 6$ e $g(2) = 2$.

(3.) Os candidatos a extremos de f são $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$, $g(2) = f(2, 0) = 2$ e

$$g(-\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4}) = f(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}) = \frac{33}{4}, \quad g(-2) = f(-2, 0) = 6.$$

Assim, o máximo absoluto de f em A é $\frac{33}{4}$ e o mínimo absoluto de f em A é $-\frac{1}{4}$.

Exemplo 2.101. Determinemos os extremos absolutos da função $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^2$ na região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq -\frac{x^2}{2}\}$.

Note-se que A é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ fechado e limitado e que f é uma função contínua em A. Pelo Teorema de Weierstrass, f tem máximo absoluto e mínimo absoluto em A.

(1.) A função f tem derivadas parciais

$$f_x(x, y) = 2x + 2xy, \qquad f_y(x, y) = x^2 + 2y.$$

Determinemos as soluções do sistema $\begin{cases} fx(x, y) & = 0 \\ f_y(x, y) & = 0 \end{cases}$:

$$\begin{cases} 2x + 2xy = 0 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 + y) = 0 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0 \vee (x = \sqrt{2},\ y = -1) \vee (x = -\sqrt{2},\ y = -1)$$

Então os pontos críticos são $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -1)$ e $(-\sqrt{2}, -1)$. Estes pontos pertencem à fronteira de A (se forem pontos onde a função tem extremos, também serão encontrados em (2.).

(2.) A fronteira de A é $A_1 \cup A_2$ com $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2, -2 \leq x \leq 2\}$ e

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{x^2}{2}, -2 \leq x \leq 2\}.$$

• Seja $(x, y) \in A_1$. Então $f(x, y) = f(x, -2) = -x^2 + 4, \quad -2 \leq x \leq 2$. Seja $g(x) = -x^2 + 4,\ x \in [-2, 2]$. A função g é derivável e $g'(x) = -2x$. Ora,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Portanto os candidatos a extremos de g são $g(0) = 4$ e $g(-2) = 0 = g(2)$.

- Seja $(x, y) \in A_2$. Então $f(x, y) = f(x, -\frac{x^2}{2}) = x^2 - \frac{x^4}{4}, \quad -2 \leq x \leq 2.$

Seja $h(x) = x^2 - \frac{x^4}{4}$, $x \in [-2, 2]$. A função h é derivável e $h'(x) = 2x - x^3$. Ora,

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \sqrt{2} \ \vee \ x = -\sqrt{2}.$$

Portanto os candidatos a extremos de h são $h(0) = 0$, $h(-\sqrt{2}) = 1 = h(\sqrt{2})$ e $h(2) = 0 = h(-2)$.

(3.) Os candidatos a extremos de f são 0, 1 e 4. Assim, o máximo absoluto de f em A é 4 e o mínimo absoluto de f em A é 0.

2.8.3 Extremos Condicionados

Sejam f e g funções reais definidas num conjunto aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. A determinação dos extremos de $f(x, y)$ quando (x, y) não percorre livremente o aberto A mas tem que satisfazer $g(x, y) = 0$ é um problema de **extremos condicionados**. Este problema estende-se naturalmente ao caso em que f é uma função de três variáveis definida num aberto e se pretende calcular os extremos de f em conjuntos de pontos que satisfazem uma ou duas condições da forma $g(x, y, z) = 0$.

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e seja C um subconjunto de D. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Denotamos por $f_{|C}$ a função de domínio C tal que $f_{|C}(P) = f(P)$, para todo o $P \in C$. A função $f_{|C}$ diz-se **restrição** de f a C.

Teorema 2.102 (Multiplicadores de Lagrange). Sejam D um aberto de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou $n = 3$) e $f, g : D \to \mathbb{R}$ funções com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em D. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos $P \in D$ tais que $g(P) = 0$ e seja $P_0 \in \mathcal{C} \cap D$. Suponhamos que o gradiente de g em P_0, $\nabla g(P_0)$, é não nulo.

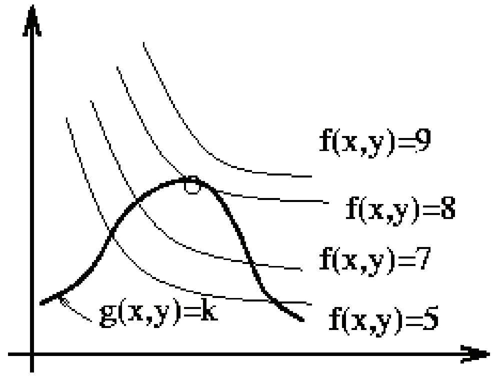
Se $f_{|\mathcal{C}}$ tem um extremo local em P_0 então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que a função

$$F(P) = f(P) - \lambda g(P), \quad P \in D,$$

tem um ponto crítico em P_0.

O número λ diz-se **multiplicador de Lagrange**.

Na figura seguinte estão representadas algumas curvas de nível de uma função f e uma curva de equação $g(x, y) = k$.



Suponhamos que as funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ têm derivadas parciais de 1^{a} ordem contínuas num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e que $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ em D. Seja $\mathcal{C} = \{(x,y) \in D : g(x,y) = 0\}$. Para determinar os candidatos a extremos condicionados de f, resolvemos o sistema de equações

$$\begin{cases} F_x(x,y) = 0 \\ F_y(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

para x, y e λ.

(*) Para cada ponto (x,y) obtido, calculamos $f(x,y)$.

Se $f_{|C}$ tiver máximo, então esse máximo é o maior valor obtido em (*). Se $f_{|C}$ tiver mínimo, então esse mínimo é o menor valor obtido em (*).

Exemplos 2.103. 1. Determinemos os candidatos a extremos da função $f(x,y) = x^2 + 4y^3, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$ sobre a elipse $x^2 + 2y^2 = 1$.

Seja $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$. As derivadas parciais f_x, f_y, g_x e g_y existem e são contínuas pois

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = 12y^2, \quad g_x(x,y) = 2x, \quad g_y(x,y) = 4y.$$

Além disso, $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, e $(0,0)$ não é um ponto da elipse $x^2 + 2y^2 = 1$. O sistema

$$\begin{cases} 2x - \lambda(2x) = 0 \\ 12y^2 - \lambda(4y) = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

tem soluções

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{7}}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ \lambda = 1 \end{cases}, \text{ e } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{7}}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Como $f(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$, $f(1,0) = 1 = f(-1,0)$, $f(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$,

$$f(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{25}{27} = f(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3}),$$

tem-se que o máximo de f na elipse (caso exista) é $f(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$ e o mínimo de f na elipse (caso exista) é $f(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$.

A função f é contínua e o conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$$

é um conjunto limitado e fechado. Pelo Teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo absolutos sobre a elipse.

2. Determinemos os extremos da função $f(x,y,z) = xyz, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sobre o elipsóide $x^2 + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{3} = 1$.

Seja
$$g(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} - 1, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$
Procuramos os extremos de f no conjunto $g(x,y,z) = 0$. Ora,
$$f_x(x,y,z) = yz, \quad f_y(x,y,z) = xz, \quad f_z(x,y,z) = xy$$
e
$$g_x(x,y,z) = 2x, \quad g_y(x,y,z) = \frac{y}{6}, \quad g_z(x,y,z) = \frac{2z}{3},$$
portanto as derivadas parciais f_x, f_y, f_z, g_x, g_y, g_z são contínuas em $\mathbb{R}^3$. Além disso, $\nabla g(x,y,z) \neq (0,0,0)$ para todo o $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$, e $(0,0,0)$ não é um ponto do elipsóide $x^2 + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{3} = 1$.

Resolvamos o sistema $\begin{cases} yz - \lambda(2x) = 0 \\ xz - \lambda(\frac{y}{6}) = 0 \\ xy - \lambda(\frac{2z}{3}) = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} - 1 = 0 \end{cases}$

O sistema anterior tem soluções $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2\sqrt{3} \\ z = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2\sqrt{3} \\ z = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$,
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\sqrt{3} \\ \lambda = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \sqrt{3} \\ \lambda = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = -2 \\ z = -1 \\ \lambda = -\sqrt{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = -2 \\ z = 1 \\ \lambda = \sqrt{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = 2 \\ z = -1 \\ \lambda = \sqrt{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = 2 \\ z = 1 \\ \lambda = -\sqrt{3} \end{cases}$,
$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = -2 \\ z = -1 \\ \lambda = \sqrt{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = -2 \\ z = 1 \\ \lambda = \sqrt{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = 2 \\ z = -1 \\ \lambda = -\sqrt{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = 2 \\ z = 1 \\ \lambda = \sqrt{3} \end{cases}$.

Se $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$ então $f(x,y,z) = 0$. Nos outros casos,
$$f(x,y,z) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou} \quad f(x,y,z) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Então o máximo de f no elipsóide (caso exista) é $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ e o mínimo de f no elipsóide (caso exista) é $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Note-se que f é contínua e o conjunto $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{3} = 1\}$ é um conjunto limitado e fechado. Pelo Teorema de Weierstras, existem máximo e mínimo absolutos de f no conjunto C.