

1. Mostre que: $y = 2x \cdot e^{x-1}$ **é uma solução do problema de valores de fronteira:**

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad y(0) = 0 \text{ e } y(1) = 2.$$

R:

Como este exercício pede para mostrar que a função é uma solução do problema de valores de fronteira, então teremos que começar por determinar as derivadas da função até à segunda ordem, para posteriormente se substituírem os valores obtidos na equação diferencial:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Assim sendo teremos então que:

- $y = 2x \cdot e^{x-1}$
- $\frac{dy}{dx} = (2x \cdot e^{x-1})' = \underbrace{(2x \cdot e^{x-1})'}_{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} = \underbrace{(2x)'}_{=2} \cdot e^{x-1} + 2x \cdot \underbrace{(e^{x-1})'}_{(e^u)' = u' \cdot e^u} = 2 \cdot e^{x-1} + 2x \cdot e^{x-1} = e^{x-1} \cdot (2 + 2x)$
- $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\underbrace{e^{x-1} \cdot (2 + 2x)}_{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} \right] = \underbrace{(e^{x-1})'}_{(e^u)' = u' \cdot e^u} \cdot (2 + 2x) + e^{x-1} \cdot \underbrace{(2 + 2x)'}_{=2} = e^{x-1} \cdot (2 + 2x) + 2 \cdot e^{x-1} = e^{x-1} \cdot (4 + 2x)$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$ teremos que:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \cdot (4 + 2x) - 2 \cdot (e^{x-1} \cdot (2 + 2x)) + (2x \cdot e^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x-1} \cdot (4 + 2x) - (e^{x-1} \cdot (4 + 4x)) + (2x \cdot e^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4e^{x-1} + 2x \cdot e^{x-1} - 4e^{x-1} - 4x \cdot e^{x-1} + 2x \cdot e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4e^{x-1} + 4x \cdot e^{x-1} - 4e^{x-1} - 4x \cdot e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Verificada a} \\ \text{identidade} \end{array} \right\}$$

Já se verificou que a função é explícita. Agora, falta verificar se $y(0)=0$ e $y(1)=2$, pelo que:

$$y(0)=0 \Leftrightarrow 2 \cdot 0 \cdot e^{0-1} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \text{Verifica}$$

$$y(1)=2 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 \cdot e^{1-1} = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 \cdot e^0 = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \rightarrow \text{Verifica}$$

2. Mostre que: $v(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$ **é uma solução do problema de valores de fronteira:** $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$, $y(0) = 1$ e $y(\pi) = -1$. **Averigúe se:** $u(x) = -\cos(x) - \operatorname{sen}(x)$ **é uma solução do mesmo problema.**

R:

Como este exercício pede para mostrar que a função é uma solução do problema de valores de fronteira, então teremos que começar por determinar as derivadas da função até à segunda ordem, para posteriormente se substituírem os valores obtidos na equação diferencial:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0.$$

Assim sendo teremos então que:

- $y = v(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [\cos(x) + \operatorname{sen}(x)] = -(x)' \cdot \operatorname{sen}(x) + (x)' \cdot \cos(x) = -\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$
- $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (-\operatorname{sen}(x) + \cos(x)) = -\cos(x) - \operatorname{sen}(x)$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$ teremos que:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0 \Leftrightarrow (-\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) + (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Verificada a} \\ \text{identidade} \end{array} \right\}$$

Já se verificou que a função é explícita. Agora, falta verificar se $y(0) = 1$ e $y(\pi) = -1$, pelo que:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\cos(0)}_{=1} + \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{=0} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \rightarrow \text{Verifica}$$

$$y(\pi) = -1 \Leftrightarrow \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{=0} = -1 \Leftrightarrow -1 = -1 \rightarrow \text{Verifica}$$

Para o caso em que: $u(x) = -\cos(x) - \sin(x)$, teremos então que repetir novamente o procedimento anterior pelo que:

- $y = u(x) = -\cos(x) - \sin(x)$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[-\cos(x) - \sin(x)] = -(-\sin(x)) - \cos(x) = \sin(x) - \cos(x)$
- $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\sin(x) - \cos(x)) = \cos(x) - (-\sin(x)) = \cos(x) + \sin(x)$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \Leftrightarrow (\cos(x) + \sin(x)) + (-\cos(x) - \sin(x)) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{Verificada a} \\ \text{identidade} \end{cases}$$

Já se verificou que a função é explícita. Agora, falta verificar se $y(0) = 1$ e $y(\pi) = -1$, pelo que:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{-\cos(0)}_{=-1} - \underbrace{\sin(0)}_{=0} = 1 \Leftrightarrow -1 \neq 1 \rightarrow \text{Não Verifica}$$

$$y(\pi) = -1 \Leftrightarrow \underbrace{-\cos(\pi)}_{=-(-1)=1} - \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -1 \Leftrightarrow 1 \neq -1 \rightarrow \text{Não Verifica}$$

- 3. Sabendo que toda a solução da equação diferencial: $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$ pode ser escrita na forma: $u(x) = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, determine qual deverá ser o valor de c_1 e c_2 por forma a que $u(x)$ seja uma solução do problema de valores de fronteira: $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$, $y(0) = 0$ e $y'(\pi) = -1$.**

R:

Para se determinarem os valores de c_1 e c_2 , conforme é pedido, teremos que recorrer aos valores iniciais $y(0) = 0$ e $y'(\pi) = -1$. Sabendo que: $y(x) = u(x) = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Então: } y'(x) = u'(x) &= (c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x))' \Leftrightarrow y'(x) = (c_1 \cdot \cos(x))' + (c_2 \cdot \sin(x))' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y'(x) = -c_1 \cdot \sin(x) + c_2 \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

Assim sendo e por substituição teremos agora que:

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} + c_2 \cdot \underbrace{\sin(0)}_{=0} = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$y'(\pi) = -1 \Leftrightarrow -c_1 \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} + c_2 \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} = -1 \Leftrightarrow c_2 = 1$$

Este exercício termina por aqui porque no enunciado é afirmado que toda a solução da equação diferencial: $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$, pode ser escrita na forma: $u(x) = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)$, onde c_1 e c_2 são as constantes que se acabaram de calcular.

4. Sabendo que toda a solução da equação diferencial: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$ **pode ser escrita na forma:** $y(x) = c_1 + c_2 \cdot x^2$, **onde** c_1 **e** c_2 **são constantes arbitrárias, mostre que o problema de valores de fronteira:** $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$, $y(1) = 1$ **e** $y(-1) = 1$ **não tem solução única.**

R:

Para se determinarem os valores de c_1 e c_2 , conforme é pedido, teremos que recorrer aos valores iniciais $y(1) = 1$ e $y(-1) = 1$, sendo $y(x) = c_1 + c_2 \cdot x^2$.

Assim sendo e por substituição teremos agora que:

$$y(1) = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 \cdot 1^2 = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 1$$

$$y(-1) = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 \cdot (-1)^2 = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 1$$

Daqui se pode concluir que: $c_1 + c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1 - c_1$

Logo por substituição: $y(x) = c_1 + c_2 \cdot x^2 \Leftrightarrow y(x) = c_1 + (1 - c_1) \cdot x^2$

Este exercício termina por aqui porque existirão tantas soluções quantos os valores que c_1 assumir.

5. Sabendo que toda a solução da equação diferencial: $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$ pode ser escrita na forma: $y(x) = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, mostre que o problema de valores de fronteira: $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$, $y(0) = 1$ e $y(\pi) = 5$ não tem solução.

R:

Para se determinarem os valores de c_1 e c_2 , conforme é pedido, teremos que recorrer aos valores iniciais $y(0) = 1$ e $y(\pi) = 5$, sendo $y(x) = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)$.

Assim sendo e por substituição teremos agora que:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} + c_2 \cdot \underbrace{\sin(0)}_{=0} = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$$

$$y(\pi) = 5 \Leftrightarrow c_1 \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + c_2 \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = 5 \Leftrightarrow c_1 = -5$$

Daqui se pode concluir que não existe solução porque c_1 não pode assumir simultaneamente os valores 1 e -5.