Sinais e Sistemas

2ª aula – Sistemas de tempo contínuo e tempo discreto

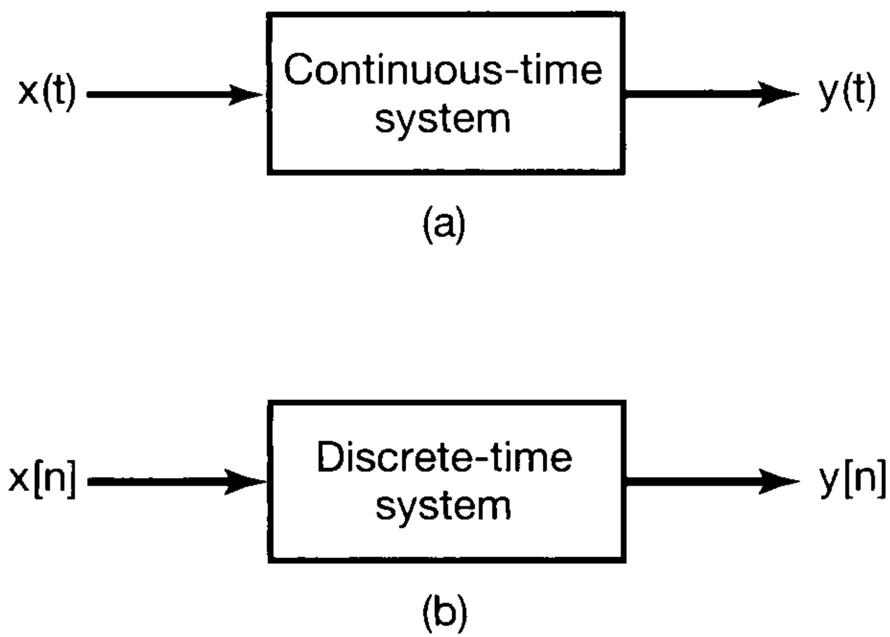
Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Introdução

- Os sistemas físicos, no sentido mais amplo, são uma interconexão de componentes, dispositivos ou subsistemas
- Um sistema pode ser visto como um processo no qual sinais de entrada são transformados pelo sistema resultando em outros sinais de saída
- Um sistema de tempo contínuo é um sistema no qual são aplicados sinais de entrada contínuos no tempo, resultando sinais contínuos no tempo na saída

Introdução

- Um sistema de tempo discreto, transforma entradas discretas no tempo em saídas discretas no tempo

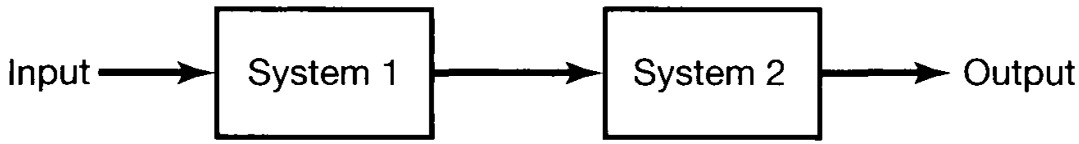


Introdução

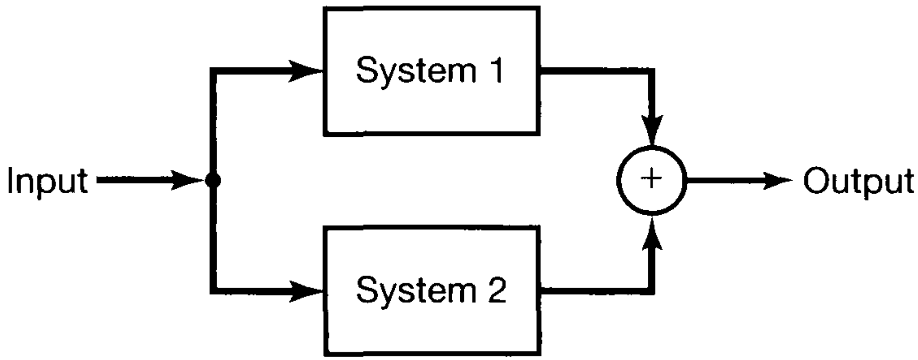
- Exemplo - Modelo simples para o saldo de uma conta bancária de mês para mês:
  - $y[n] = 1.01\, y[n - 1] + x[n]$
    - $x[n]$ -> depósito líquido (depósitos menos levantamentos)
    - $1.01\, y[n - 1]$ -> representa o juro mensal

- Interligações entre sistemas (exemplo):
  - Sistema de áudio, que envolve a interligação de um receptor de rádio, um leitor de CD com um amplificador a um ou mais alto-falantes

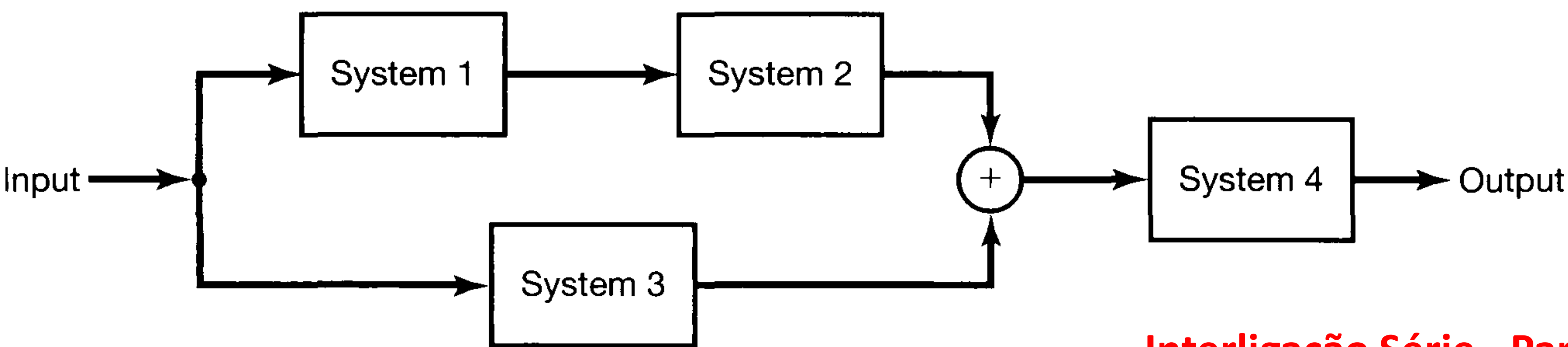
Interligações entre sistemas



Interligação Série



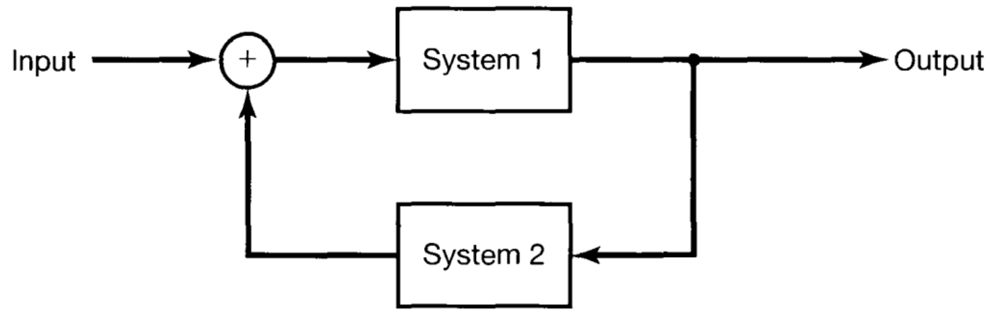
Interligação Paralelo



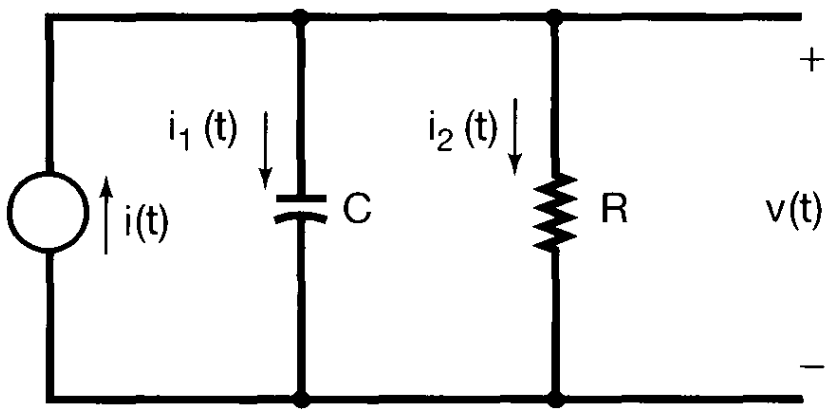
Interligação Série - Paralelo

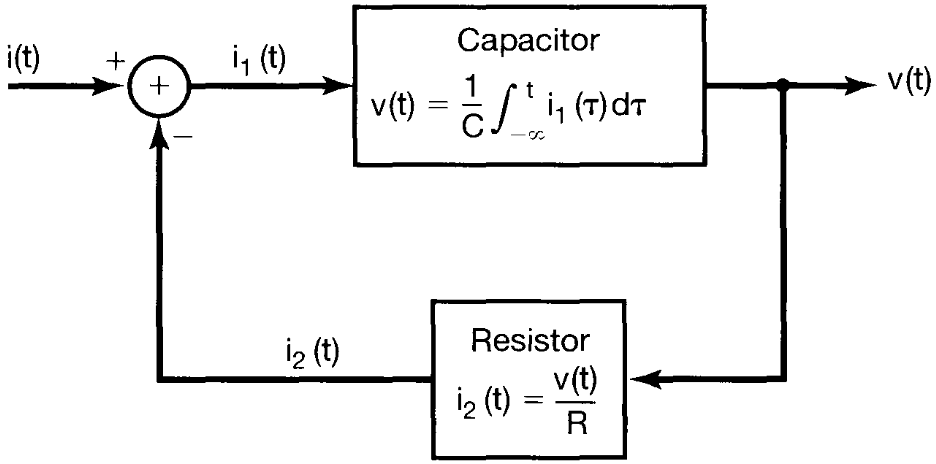
Interligações entre sistemas

- Interligação com realimentação (*feedback*)



- Exemplo:





Propriedades básicas dos sistemas

- Sistemas com e sem memória

- Um sistema é chamado sem memória ou estático se a saída $y(t)$, num determinado instante, depender da entrada $x(t)$ apenas naquele instante, i.e., não depende de entradas anteriores nem posteriores. No caso contrário, o sistema é dito com memória ou dinâmico

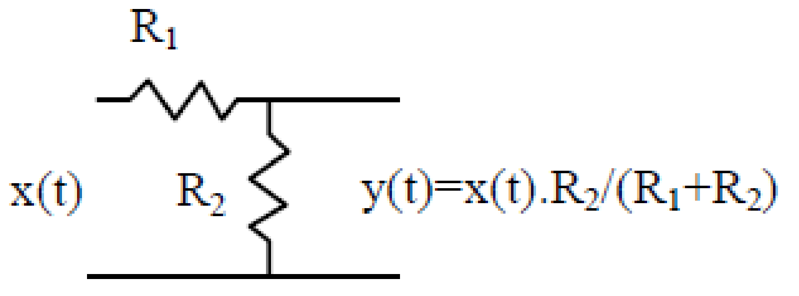
Ex: O sistema identidade $y(t) = x(t)$, é um exemplo de sistema sem memória pois uma saída num determinado instante t_0, $y(t_0)$, depende apenas do valor da entrada nesse mesmo instante, isto é, de $x(t_0)$

Propriedades básicas dos sistemas

- Sistemas com e sem memória (cont.)

Ex: Um sistema especificado por $y(t) = x(t - 1) + 2x(t + 2)$, constitui um sistema com memória, pois a saída no instante $t_2 = 2s$, por exemplo, depende das entradas em $t_1 = 1s$ e em $t_3 = 4s$

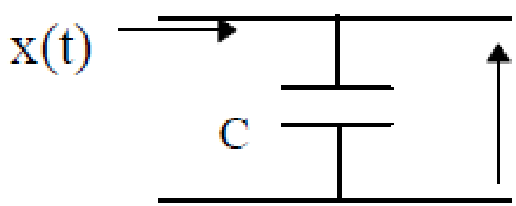
Ex: Um exemplo prático de sistema sem memória é o divisor resistivo:



Propriedades básicas dos sistemas

- Sistemas com e sem memória (cont.)

Ex: A relação entre a tensão e a corrente num condensador representa um sistema com memória, pois a tensão depende não só da corrente no instante atual *t*, mas também de todos os valores de correntes desde - ∞ até *t*:



$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

Ex: Um exemplo de um sistema discreto com memória é um acumulador ou somador:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k],$$

Propriedades básicas dos sistemas

- Invertibilidade e sistemas inversos

- Um sistema é chamado inversível se entradas distintas levam a saídas distintas. Sabendo a saída, determina-se a entrada de maneira única

Ex: Sistema inversível: $y(t) = 2x(t)$, cujo sistema inverso é: $z(t) = y(t) / 2 = x(t)$

Ex: Sistema não-inversível: $y(t) = x^2(t)$. Para uma saída, há ambiguidade nas entradas. À saída $y = 4$, correspondem as entradas $x = -2$ ou $x = +2$

Propriedades básicas dos sistemas

- Invertibilidade e sistemas inversos
  - O conceito de invertibilidade é importante em muitos contextos:
    - Ex: Sistemas de codificação em telecomunicações
    - O sinal a transmitir é previamente aplicado como entrada num sistema chamado codificador
    - Existem muitas razões para codificar (encriptar, controlar erros, etc)
  - Nos casos em que a codificação não tem perdas (*lossless coding*), a entrada de um codificador deve ser possível de ser recuperada de forma exacta através da sua saída, i.e., o codificador deve ser inversível

Propriedades básicas dos sistemas

- Sistemas causais

- Um sistema é causal ou realizável se a saída no instante *t* depende apenas de valores da entrada para instantes de tempo menores ou igual a *t*, ou seja, a saída não pode depender de valores futuros da entrada

Ex: Sistema causal: $y(t) = x(t) + x(t-2)$

Ex: Sistema não causal: $y(t) = x(t+1)$

Propriedades básicas dos sistemas

- Sistemas causais
  - Todos os sistemas físicos são causais.
  - Um filtro ideal é um sistema não-causal ou não-realizável fisicamente, e portanto não pode ser implementado com componentes reais. No projeto de um filtro prático, procura-se uma aproximação para um filtro ideal, mas respeitando-se o princípio da causalidade.
  - A causalidade é importante quando se trabalha com sistemas que operam em tempo real, como em sistemas de comunicações e sistemas de controlo

Propriedades básicas dos sistemas

- Sistemas causais
  - Em aplicações onde não é necessário processamento em tempo real, podem aparecer sistemas não causais
  - Por exemplo, em sinais gravados (e.g. voz, imagem), podemos utilizar toda a informação armazenada para determinar uma saída num determinado instante, o que pode ser considerado uma operação não-causal
  - Um sistema causal também é normalmente referido como não antecipativo - a saída não antecipa valores futuros da entrada

Propriedades básicas dos sistemas

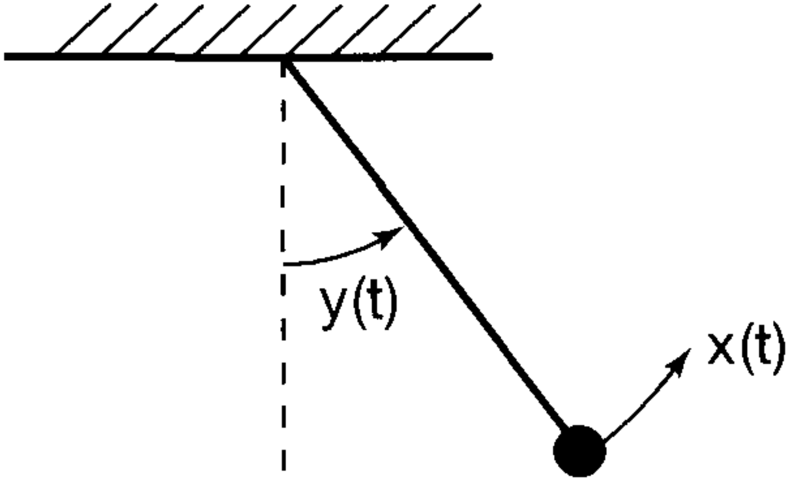
- Estabilidade

-Um sistema estável é aquele onde pequenas entradas (de baixa amplitude) produzem saídas que não divergem

-Uma outra definição é que entradas limitadas produzam saídas limitadas (BIBO - *Bounded Input Bounded Output*)

Propriedades básicas dos sistemas

- Estabilidade
  - Exemplo: Pêndulo



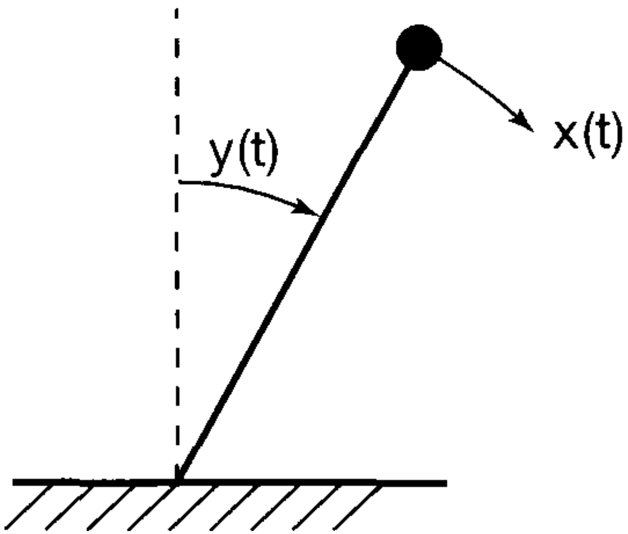
  - A entrada $x(t)$ é a força aplicada e a saída é o desvio angular $y(t)$ a partir da vertical

Propriedades básicas dos sistemas

- Estabilidade
  - A gravidade aplica uma força que tende a retornar o pêndulo à posição vertical
  - As perdas por atrito devidas ao arrasto tendem a desacelerá-lo
  - Consequentemente, se uma pequena força $x(t)$ for aplicada, a deflexão resultante da vertical também será pequena

Propriedades básicas dos sistemas

- Estabilidade
  - Exemplo: Pêndulo invertido



  - A entrada $x(t)$ é a força aplicada e a saída é o desvio angular $y(t)$ a partir da vertical

Propriedades básicas dos sistemas

- Estabilidade
  - No caso do pêndulo invertido, o efeito da gravidade é aplicar uma força que tende a aumentar o desvio da vertical
  - Deste modo, uma pequena força aplicada produz uma grande deflexão vertical, fazendo com que o pêndulo tombe, apesar das forças de retardo devido ao atrito
  - O pêndulo é o exemplo de um sistema estável, enquanto que o pêndulo invertido é o exemplo de um sistema instável

Propriedades básicas dos sistemas

- Estabilidade
  – É muito mais fácil provar que um sistema não é estável, do que o contrário, uma vez que basta apresentar um único contra-exemplo para comprovar a negação.
  – Para provar que um dado sistema é estável (ou sem memória, ou inversível, ou causal, etc), devem-se apresentar argumentos que sejam válidos para todos os instantes de tempo e para todos os sinais de entrada possíveis e imagináveis.

Propriedades básicas dos sistemas

- Invariância no tempo

  - Um sistema é invariante no tempo se o comportamento e as características do sistema são fixos ao longo do tempo

  - Um sistema variante no tempo é um sistema cujas características são alteradas com o tempo como, por exemplo, as alterações das propriedades de um circuito eletrónico quando a temperatura varia significativamente

Propriedades básicas dos sistemas

- Invariância no tempo
  - A propriedade da variação no tempo pode ser descrita de maneira muito simples em termos da linguagem de sinais e sistemas
  - Um sistema é invariante no tempo se um desvio temporal no sinal de entrada resultar num desvio temporal idêntico no sinal de saída
  - Consideremos o sistema de tempo contínuo definido por:
    - $y(t) = sen\,[x(t)]$

Propriedades básicas dos sistemas

- Invariância no tempo
  - Para verificar se o sistema é invariável no tempo, devemos determinar se a propriedade invariância do tempo é válida para qualquer entrada e qualquer mudança de tempo t_0
  - Se $x_1(t)$ for uma entrada arbitrária no sistema, e se:

$$y_1(t) = \sin\left[x_1(t)\right]$$

  - for a saída correspondente e se se considerar uma segunda entrada $x_2(t)$ que é obtida através de um desvio temporal de $x_1(t)$:

$$x_2(t) = x_1(t - t_0)$$

Propriedades básicas dos sistemas

- Invariância no tempo
  - A saída resultante será:

$$y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t - t_0)]$$

  - de forma semelhante:

$$y_1(t - t_0) = \sin[x_1(t - t_0)]$$

  - Como: $y_2(t) = y_1(t - t_0)$
  - O sistema é invariante

Propriedades básicas dos sistemas

- Linearidade
  - Um sistema linear é aquele onde se pode aplicar o teorema da sobreposição:
  - Se a entrada é uma combinação linear de diversos sinais, a saída será a combinação linear das respostas do sistema a cada um dos sinais de entrada
  - As duas propriedades que definem um sistema linear podem ser combinadas numa única expressão:
    - Tempo contínuo: $ax_1(t) + bx_2(t) \text{ --> } ay_1(t) + by_2(t)$
    - Tempo discreto: $ax_1[n] + bx_2[n] \text{ --> } ay_1[n] + by_2[n]$
      - *a* e *b* são constantes complexas

Propriedades básicas dos sistemas

- Linearidade
  - Exemplo de sistema linear
  - Considere um sistema S cuja entrada $x(t)$ e saída $y(t)$ são relacionadas por: $y(t) = tx(t)$
  - Para determinar se S é linear ou não, consideramos duas entradas arbitrárias $x_1(t)$ e $x_2(t)$:
    - $x_1(t) \dashrightarrow y_1(t) = tx_1(\mathrm{t})$
    - $x_2(t) \dashrightarrow y_2(t) = tx_2(\mathrm{t})$
  - Seja $x_3(t)$ uma combinação linear de $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Isto é:
    - $x_3(t) = ax_1\,(t) + bx_2(t)$

    - a e b são escalares arbitrários

Propriedades básicas dos sistemas

- Linearidade
  - Exemplo de sistema linear (cont.)
  - Se $x_3(t)$ é a entrada de *S*, a saída correspondente pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= t x_3(t) \\ &= t(a x_1(t) + b x_2(t)) \\ &= a t x_1(t) + b t x_2(t) \\ &= a y_1(t) + b y_2(t) \end{aligned}$$

  - em que se conclui que *S* é linear

Propriedades básicas dos sistemas

- Linearidade
  - Exemplo de sistema não linear
  - Vamos aplicar o procedimento de verificação de linearidade do exemplo anterior a outro sistema cuja entrada $x(t)$ e saída $y(t)$ são relacionadas por:

$$y(t) = x^2(t)$$

  - Definindo $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ como no exemplo anterior, temos:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$$

Propriedades básicas dos sistemas

- Linearidade
  - Exemplo de sistema não linear (cont.)
  - e também:

$$
\begin{aligned}
x_3(t) \rightarrow y_3(t) &= x_3^2(t) \\
&= (ax_1(t) + bx_2(t))^2 \\
&= a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \\
&= a^2 y_1(t) + b^2 y_2(t) + 2abx_1(t)x_2(t)
\end{aligned}
$$

  - Não é possível encontrar $x_1(t)$, $x_2(t)$, a e b de forma a que $y_3(t)$ seja igual a $ay_1(t) + by_2(t)$
  - O sistema S não é linear

Propriedades básicas dos sistemas

- Linearidade
  - Exercício: Dos seguintes sistemas quais são lineares?
  - a) $y(t) = sen\ [x(t)]$
  - b) $y(t) = x(t)\ .\ sen\ (t)$
  - c) $y(t) = ax(t) + b$

Propriedades básicas dos sistemas

- Exercícios para resolver em casa
  - Pagina 57 – Livro: *Signals and Systems*
  - Fim do capítulo 1

Sistemas Lineares e Invariantes

- Uma grande parte dos sistemas possuem a propriedade de serem Lineares e Invariantes no tempo:
  - LTI - *Linear Time-Invariant*
  - SLIT - *Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo*
- Uma das principais razões pelas quais os sistemas LTI são fáceis de analisar é porque em qualquer um deles se pode aplicar o teorema da sobreposição

Sistemas Lineares e Invariantes

- Como consequência, se pudermos representar a entrada de um sistema LTI em termos de uma combinação linear de um conjunto de sinais básicos, poderemos calcular a saída do sistema em função das respostas a esses mesmos sinais básicos
  - uma das características do impulso unitário, quer em tempo discreto quer em tempo contínuo, é que sinais genéricos podem ser representados como combinações lineares de impulsos atrasados

Sistemas Lineares e Invariantes

- Estas propriedades permitem desenvolver uma teoria que permite caracterizar um sistema LTI em função da sua resposta ao impulso unitário
- A representação da resposta de um sistema ao impulso unitário é designada por convolução
  - No caso de tempo discreto corresponde a um somatório – *Convolution Sum*
  - Em tempo contínuo corresponde a um integral – *Convolution Integral*

Convolução de sinais

- A convolução entre dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é definida pelo integral:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) d\tau$$

- O integral de convolução é executado em relação à variável muda τ, sendo t considerada como constante.
- O resultado da convolução resulta sempre numa função temporal

Convolução de sinais

- A operação convolução usa normalmente a notação simplificada $x_1(t)*x_2(t) = x_1*x_2(t)$ para indicar que a função resultante x_1*x_2 depende de t
- Consideram-se agora as funções $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$. A partir da definição, podem ser demonstradas as seguintes propriedades:
  - a) Propriedade Comutativa:

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) \cdot x_1(t-\tau) d\tau .$$

Convolução de sinais

- Propriedades da convolução (cont.):
  - b) Propriedade Associativa:

$$x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$$

  - c) Propriedade Distributiva:

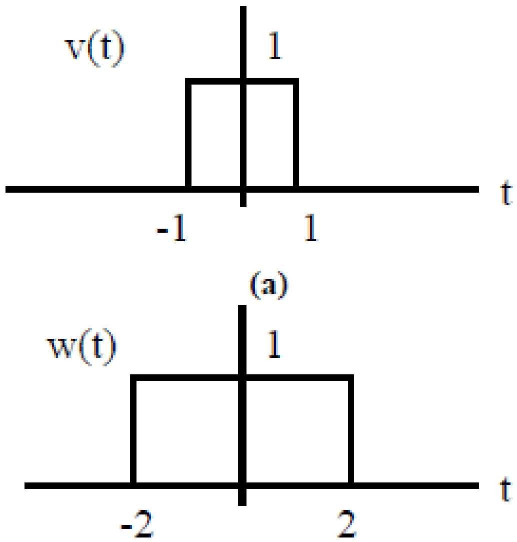
$$x_1 * (x_2 + x_3) = (x_1 * x_2) + (x_1 * x_3)$$

  - d) Derivada do produto:

$$\frac{d}{dt}(x_1 * x_2) = x_1 * \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_1}{dt} * x_2$$

Convolução de sinais

- Exemplo: - Calcular a convolução $v*w(t)$ para os sinais $v(t)$ e $w(t)$ descritos por:



- $v(t) = u(t+1) - u(t-1)$
- $w(t) = u(t+2) - u(t-2)$

- Assim:
- $v(\tau).w(t-\tau) = [u(\tau+1)-u(\tau-1)] . [u(t-\tau+2)-u(t-\tau-2)]$

Convolução de sinais

- Aplicando a definição:

$$v * w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda+1).u(t-\lambda+2).d\lambda - \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda+1).u(t-\lambda-2).d\lambda -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda-1).u(t-\lambda+2).d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda-1).u(t-\lambda-2).d\lambda$$

Como $u(\lambda+1) = \begin{cases} 0, & \lambda < -1 \\ 1, & \lambda > -1 \end{cases}$ e $u(\lambda-1) = \begin{cases} 0, & \lambda < 1 \\ 1, & \lambda > 1 \end{cases}$, então

$$v * w(t) = \int_{-1}^{+\infty} u(t-\lambda+2).d\lambda - \int_{-1}^{+\infty} u(t-\lambda-2).d\lambda - \int_{1}^{+\infty} u(t-\lambda+2).d\lambda$$

$$+ \int_{1}^{+\infty} u(t-\lambda-2).d\lambda$$

Também $u(t-\lambda+2) = \begin{cases} 0, & \lambda > t+2 \\ 1, & \lambda < t+2 \end{cases}$ e $u(t-\lambda-2) = \begin{cases} 0, & \lambda > t-2 \\ 1, & \lambda < t-2 \end{cases}$

Convolução de sinais

- Então:

$$\int_{-1}^{\infty} u(t-\lambda+2).d\lambda = \int_{-1}^{t+2} d\lambda = t+3 \text{ desde que t+2>-1, i.e., t >-3,}$$

$$\int_{-1}^{\infty} u(t-\lambda-2).d\lambda = \int_{-1}^{t-2} d\lambda = t-1 \text{ desde que t-2>1, i.e., t >1,}$$

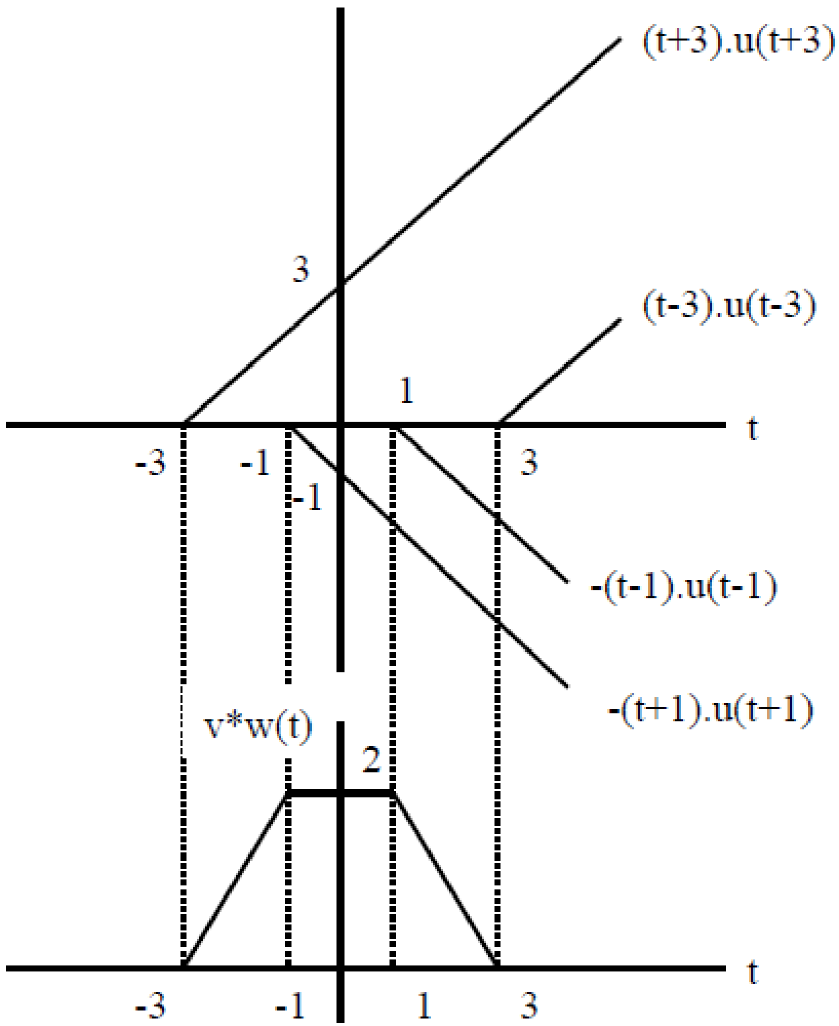
$$\int_{1}^{\infty} u(t-\lambda+2).d\lambda = \int_{1}^{t+2} d\lambda = t+1 \text{ desde que t+2>1, i.e., t >-1 e}$$

$$\int_{-1}^{\infty} u(t-\lambda-2).d\lambda = \int_{1}^{t-2} d\lambda = t-3 \text{ desde que t-2>1, i.e., t >3.}$$

- Portanto, a expressão final da convolução é:

$$v * w(t) = (t+3).u(t+3) - (t-1).u(t-1) - (t+1).u(t+1) + (t-3).u(t-3)$$

Convolução de sinais



Convolução de sinais

- Conforme se observa no exemplo anterior, o gráfico da convolução $v*w(t)$ tem largura final igual à soma das larguras das funções individuais $v(t)$ e $w(t)$

- Este resultado também se aplica para funções $v(t)$ e $w(t)$ arbitrárias, indicando que a operação de convolução produz um alargamento temporal

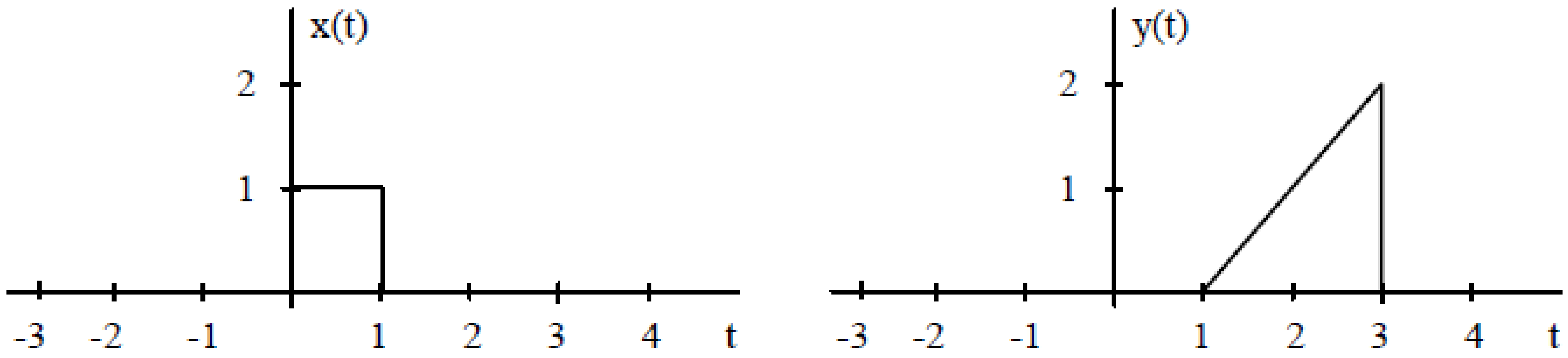
- Além disso, a função resultante torna-se mais "suave" que as funções individuais

Convolução de sinais

- Embora esta operação possa ser executada analiticamente (em alguns poucos casos e com certa dificuldade) ou numericamente, torna-se interessante discutir o processo de determinação gráfica, o qual pode simplificar sensivelmente os cálculos
  - *Convolução gráfica*

Convolução de sinais

- Ex: - Executar a convolução dos sinais $x(t)$ e $y(t)$

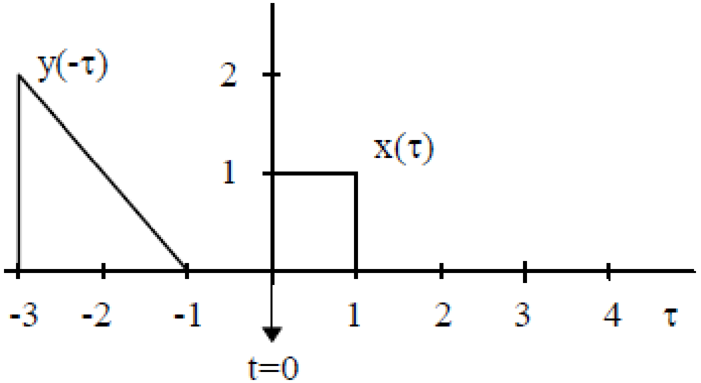


- A convolução entre $x(t)$ e $y(t)$ é dada por:

$$c(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau)\, d\tau$$

Convolução de sinais

- Para cada instante de tempo *t*, o sinal *c*(*t*) é o integral (área) do sinal que é obtido da multiplicação de *x*(*τ*) por *y*(*t* - *τ*)
- Como se está integrando em *τ*, deve-se realizar em *y* uma inversão seguida de um deslocamento de *t*
- Os sinais *x*(*τ*) e *y*(-*τ*), para *t* = 0:

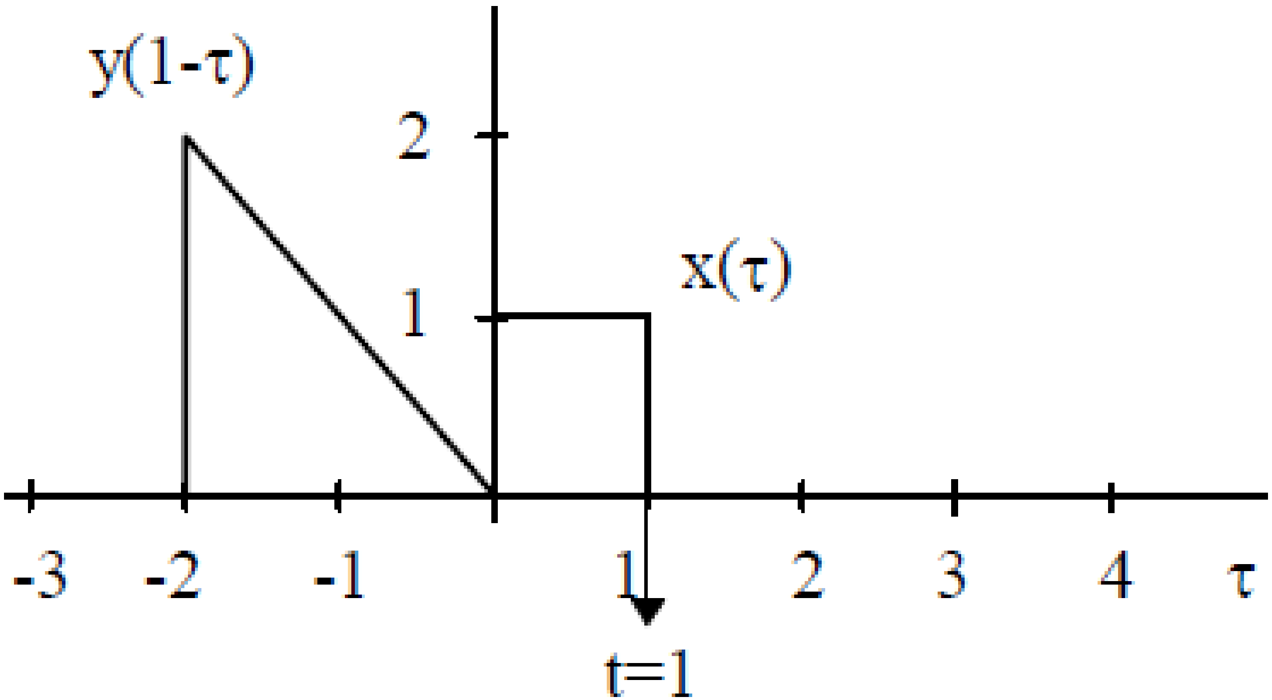


Convolução de sinais

- Observa-se facilmente que a multiplicação entre as funções é igual a zero, e portanto $c(t=0) = 0$
- Para $t < 0$, $y(t-\tau)$ é deslocado para a esquerda, então $c(t) = 0$
- Para $t > 0$, nota-se que a multiplicação entre $x(\tau)$ e $y(t-\tau)$ será igual a zero (x e y não se vão sobrepor) até o instante $t = 1$, e portanto, $c(t)=0$ para $t < 1$

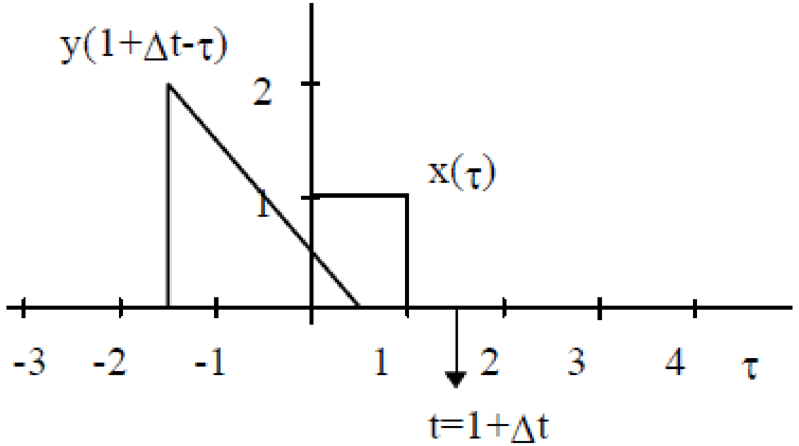
Convolução de sinais

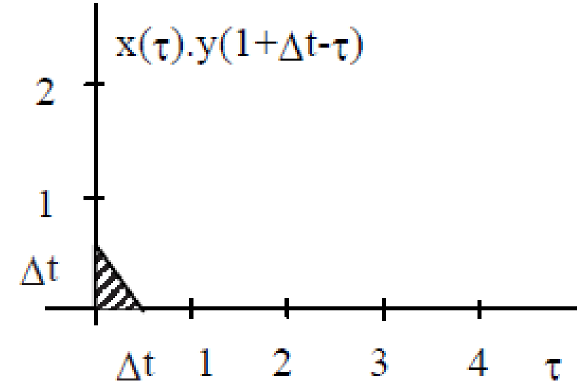
- No instante *t* = 1, tem-se a figura abaixo:



Convolução de sinais

- No instante $t = 1 + \Delta t$, a multiplicação entre x e y não será mais zero, conforme esquematizado nas figuras abaixo:





- a área sombreada é igual ao valor de $c(t = 1 + \Delta t)$, que é igual a $(\Delta t)^2/2$. Para $1 \leq t \leq 2$, tem-se que y está a se sobrepor a x

Convolução de sinais

- Deste modo:

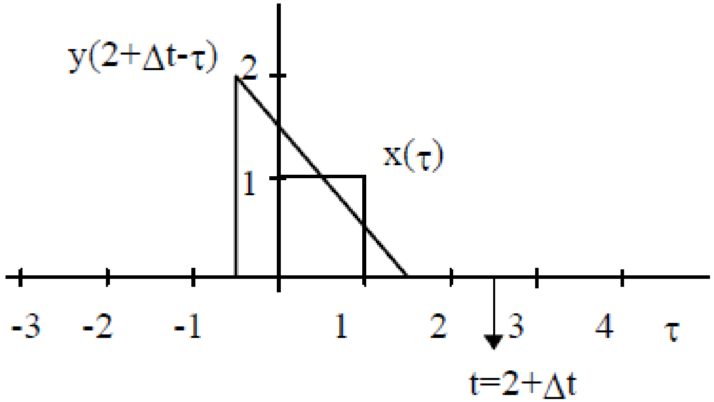
$$c(t = 1 + \Delta t) = \frac{\Delta t^2}{2} \; , \; 0 \le \Delta t \le 1$$

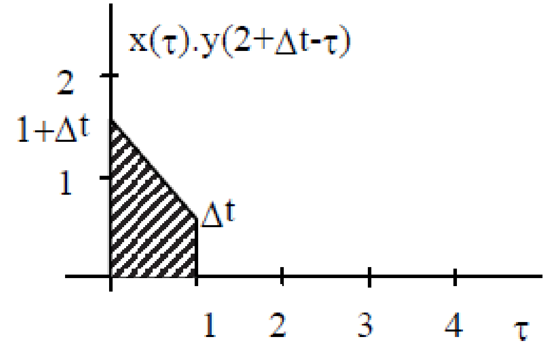
- ou, na variável *t*:

$$c(t) = \frac{(t-1)^2}{2} \; , \; 1 \le t \le 2$$

Convolução de sinais

- Para $t = 2 + \Delta t$, a ponta do triângulo começa a "sair" do quadrado, e os sinais ficam:



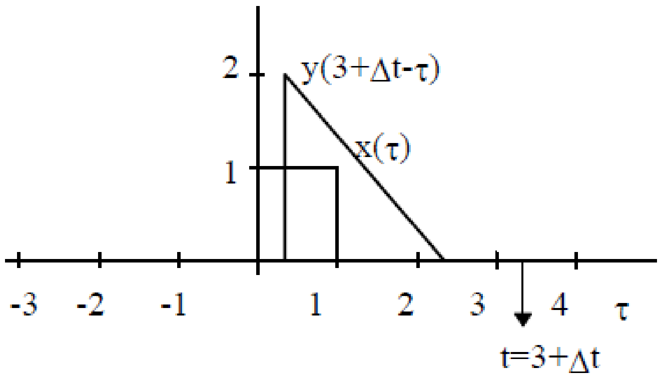


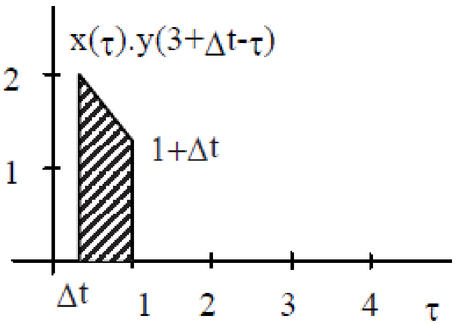
- e a região sombreada tem área:

$$\frac{1+2\Delta t}{2}\,,\ 2 \le t = (2+\Delta t) \le 3 \quad \text{e em } t\text{:} \quad c(t) = t - \frac{3}{2}\,,\ 2 \le t \le 3$$

Convolução de sinais

- Para $t = 3 + \Delta t$ os sinais ficam:





- área sombreada começa a diminuir, com valor:

$$\frac{(2+1+\Delta t)(1-\Delta t)}{2} = \frac{3-2\Delta t-\Delta t^2}{2},\ 3 \le t = (3+\Delta t) \le 4$$

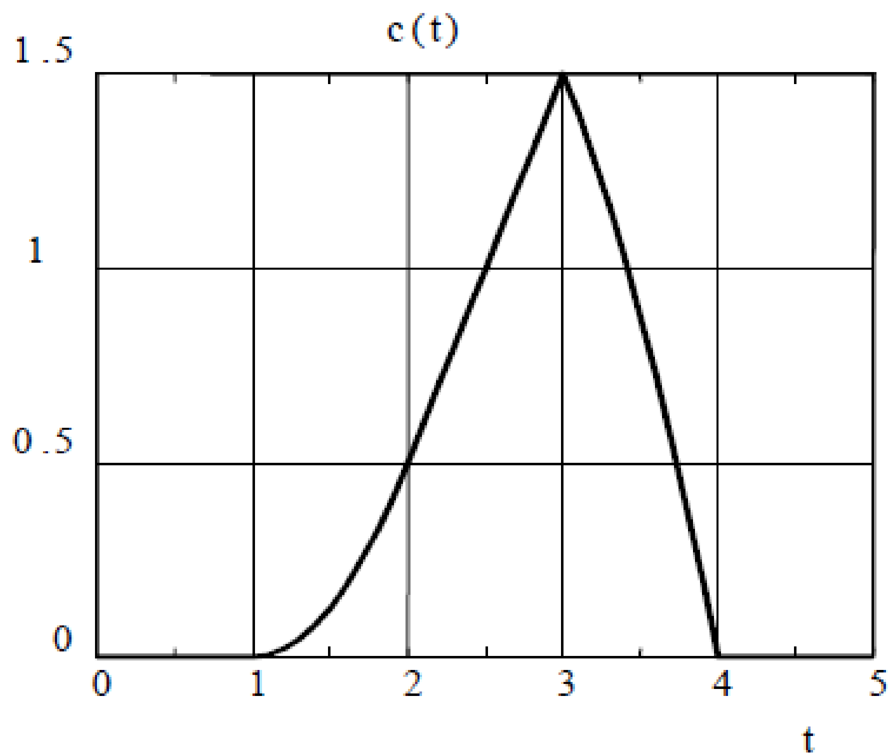
- ou:

$$c(t) = \frac{4t - t^2}{2},\ 3 \le t \le 4$$

Convolução de sinais

- Depois de $t > 4$ os sinais não mais se sobrepõem, e $c(t) = 0$ para $t > 4$
- Resumindo:

$$c(t) = \begin{cases} 0 & , t < 1 \\ \dfrac{(t-1)^2}{2} & , 1 \le t \le 2 \\ t - \dfrac{3}{2} & , 2 \le t \le 3 \\ \dfrac{4t - t^2}{2} & , 3 \le t \le 4 \\ 0 & , t > 4 \end{cases}$$



Convolução de sinais

- A função impulso unitário δ(*t*) apresenta a importante propriedade relacionada com a amostragem
- Uma outra propriedade importante é obtida considerando-se a convolução:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau$$

- Como já foi visto, o integral acima é igual ao valor da função *x*(*τ*) em *τ* = *t*, ou seja:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau = x(t)$$

Convolução de sinais

- O resultado é que a convolução de um sinal com um impulso é igual à própria função
- Esta propriedade é denominada de replicação
- Se o impulso estiver deslocado de t_0:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - t_0 - \tau)\, d\tau = x(t - t_0)$$

- ou seja, faz-se um deslocamento de t_0 na função $x(t)$

Bibliografia

- Oppenheim, A.V. , Willsky, A.S. and Young, I.T., Signals and Systems, Prentice- Hall Signal Processing Series, 1983
- Isabel Lourtie, Sinais e Sistemas, Escolar Editora, 2007 (2ª edição)