Universidade do Minho MIECOM
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise Matemática B

— folha 5 — Integrais de Linha — 2011'12 —

1. Faça um esboço das curvas C com as seguintes parametrizações:

   (a) $\vec{r}(t) = (t, t^2)$, com $t \in [0, 2]$;

   (b) $\vec{r}(t) = (2t, 4t^2)$, com $t \in [0, 1]$;

   (c) $\vec{r}(t) = (-\frac{t}{2} + 1, t + 2)$, com $t \in \mathbb{R}$;

   (d) $\vec{r}(t) = (-\frac{t}{2} + 1, t + 2)$, com $t \in [-1, 2]$;

   (e) $\vec{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, com $t \in [0, 2\pi]$;

   (f) $\vec{r}(t) = (2\cos t, \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

2. Encontre uma parametrização para cada uma das seguintes curvas, nos sentidos indicados:

   (a) Circunferência de centro (0,0) e raio 2 percorrida em sentido horário;

   (b) Circunferência de centro (0,0) e raio 2 percorrida em sentido anti-horário;

   (c) O segmento de recta no plano desde o ponto $(1, 2)$ até ao ponto $(-2, 1)$;

   (d) O segmento de recta no espaço desde o ponto $(1, 2, 0)$ até ao ponto $(-2, 1, 3)$.

3. Considere as curvas com as seguintes parametrizações:

   (a) $\vec{r}(t) = (3t^2, t^3 + 1)$, com $t \in \mathbb{R}$;

   (b) $\vec{r}(t) = (3\operatorname{sen}(t^2) - 1, 3\cos(t^2))$, com $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$;

   (c) $\vec{r}(t) = (3\operatorname{sen}^2 t, \cos t - 1, t^2)$, com $t \in \mathbb{R}$;

   (d) $\vec{r}(t) = (t^2, \pi^2)$, com $t \in \mathbb{R}$.

   Para cada uma das curvas apresentadas, determine:

   i) O vector velocidade $\vec{r}'(t)$;

   ii) A velocidade $||\vec{r}'(t)||$;

   iii) Os tempos t em que ocorre uma paragem da partícula.

4. Determine os integrais de linha $\int_C \vec{F} d\vec{r}$, quando:

   (a) $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ e C é o segmento de recta do ponto $(0,0)$ até ao ponto $(3,3)$;

   (b) $\vec{F}(x,y) = -y \operatorname{sen} x\vec{i} + \cos x\vec{j}$ e C é a parábola $y = x^2$ desde o ponto $(0,0)$ até ao ponto $(2,4)$;

   (c) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + (x+2z^2)\vec{j} + 4yz\vec{k}$ e $C = C_1 + C_2$ onde C_1 é o segmento de recta do ponto $(1,1,0)$ até ao ponto $(0,0,0)$ e C_2 é o segmento de recta do ponto $(0,0,0)$ até ao ponto $(0,0,\sqrt{2})$;

   (d) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + (x+2z^2)\vec{j} + 4yz\vec{k}$ e C é um arco de circunferência, no plano $y = x$, desde o ponto $(1,1,0)$ até ao ponto $(0,0,\sqrt{2})$;

   (e) $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ e C é a curva que percorre a parábola $y = x^2$ desde o ponto $(0,0)$ até ao ponto $(1,1)$ e, depois, percorre o segmento de reta desde o ponto $(1,1)$ até ao ponto $(0,0)$;

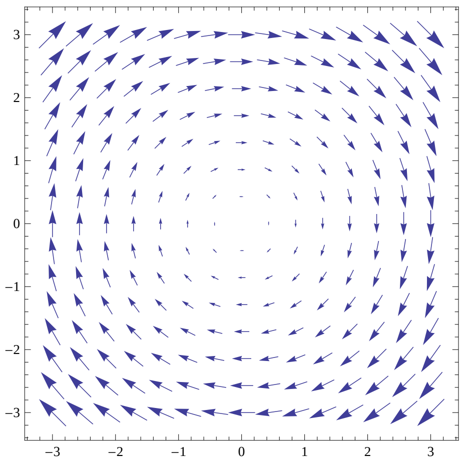
   (f) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + (xz - y)\vec{k}$ e C é o segmento de reta que une o ponto $(0,0,0)$ ao ponto $(1,2,4)$.

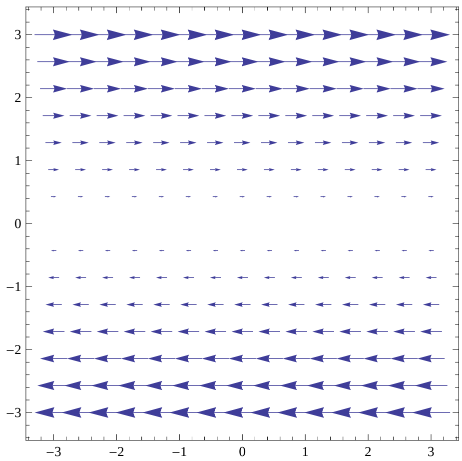
5. Para cada um dos campos de vectores que se segue, represente uma curva orientada cujo integral de linha ao longo dessa curva seja:

   (a) positiva;

   (b) negativa;

   (c) zero.





6. Considere a função real $f(x,y,z) = x\operatorname{sen} z + yx$.

   (a) Determine $\vec{F} = \nabla f$;

   (b) Determine $\displaystyle\int_C \vec{F} d\vec{r}$, onde $\vec{r}(t) = \left(\operatorname{sen}^2(t), \dfrac{4t}{\pi}, \cos^2 t\right)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

7. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$, sobre uma partícula que se desloca, em sentido horário, ao longo da circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1. O campo de forças $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ é conservativo? Justifique.

8. Utilize o Teorema de Green para calcular $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ em que $\vec{F}(x,y) = y^2\vec{i} + x\vec{j}$ e a curva C, parametrizada no sentido direto, delimita:

   (a) o quadrado cujos vértices são: $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$;

   (b) o quadrado cujos vértices são: $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,-2)$, $(0,2)$;

   (c) o círculo de raio 2 e centro na origem.

9. Use o Teorema de Green para determinar a área de uma circunferência de raio $R > 0$.