Teoria dos Circuitos e Fundamentos de Electrónica

Método dos Nós

Teresa Mendes de Almeida
TeresaMAlmeida@ist.utl.pt

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

DEEC
Área Científica de Electrónica

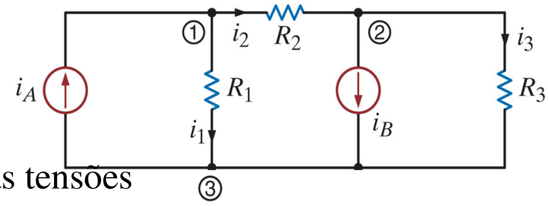
Março de 2008

Matéria

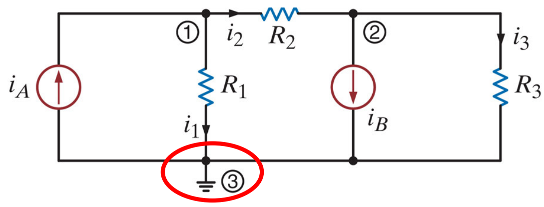
- **Análise Nodal**
- **Método dos Nós**
  - nó de referência
  - equações KCL
  - resolução de sistema matricial de equações
- **Aplicação do Método dos Nós**
  - Circuitos com fontes de corrente
  - Circuitos com fontes de tensão
    - super-nó
  - Circuitos com fontes dependentes
- **Exemplos de aplicação**

Análise Nodal

- **Em circuitos lineares pouco complexos**
  - a análise do circuito feita com base na
  - escrita de um conjunto de equações
    - Lei de Ohm
    - Leis de Kirchhoff das correntes e das tensões

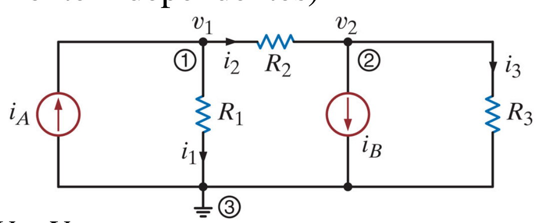


- **Em circuitos resistivos lineares mais complexos**
  - convém utilizar um método sistemático de análise
    - sempre os mesmos procedimentos – qualquer que seja o circuito
    - pode ser usado em programas de análise de circuitos
- **Análise Nodal**
  - considerar como incógnitas as tensões nos nós: V1 V2 e V3
  - escolher um nó como referência
    - **V3 = 0V**
    - V1 e V2 ficam determinadas relativamente a V3



Método dos Nós

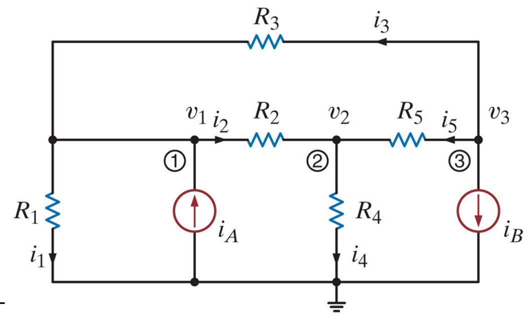
- **Método sistemático de análise nodal**
- **Para um circuito linear com N nós**
  - escolher um nó para referência (ground) ⇔ 0V
    - um bom critério: escolher um nó onde liguem muitos ramos
  - incógnitas – são as tensões nos restantes N-1 nós
  - escrever equações KCL para todos os nós menos para o nó de referência
    - N-1 equações KCL (são eq. linearmente independentes)
- **Circuito com 3 nós**
  - nó 3 – referência ⇔ 0V
  - 2 equações a 2 incógnitas (V1,V2)



- Nó 1 $\quad I_A = I_1 + I_2 \quad \Leftrightarrow \quad I_A = \dfrac{V_1 - 0}{R_1} + \dfrac{V_1 - V_2}{R_2} \quad \Leftrightarrow \quad I_A = G_1(V_1 - 0) + G_2(V_1 - V_2)$
- Nó 2 $\quad I_2 = I_B + I_3 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{V_1 - V_2}{R_2} = I_B + \dfrac{V_2 - 0}{R_3} \quad \Leftrightarrow \quad G_2(V_1 - V_2) = I_B + G_3(V_2 - 0)$

Exemplo de aplicação

- **Calcular as tensões nodais V1, V2, V3**
  - Circuito tem 4 nós
  - nó 4 – nó de referência (ground) ⇔ 0V
  - incógnitas: V1, V2, V3
  - escrever eq. KCL para nós 1, 2, 3



$$I_A + I_3 = I_1 + I_2 \quad \Leftrightarrow \quad I_A + \frac{V_3 - V_1}{R_3} = \frac{V_1 - 0}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2}$$

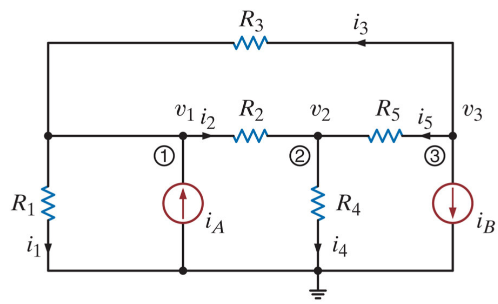
$$I_2 + I_5 = I_4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V_1 - V_2}{R_2} + \frac{V_3 - V_2}{R_5} = \frac{V_2 - 0}{R_4}$$

$$0 = I_3 + I_5 + I_B \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{V_3 - V_1}{R_3} + \frac{V_3 - V_2}{R_5} + I_B$$

  - resolver sistema de 3 equações a 3 incógnitas
- **E se apenas for pedido para calcular as correntes I1 e I5, pode usar-se o método dos nós?**
  - também se pode usar método nodal e calcular V1, V2, V3
  - depois calculam-se as correntes a partir das tensões nodais

Exemplo de aplicação

- **Resolver sistema de equações**



$$\begin{cases} I_A + \dfrac{V_3 - V_1}{R_3} = \dfrac{V_1 - 0}{R_1} + \dfrac{V_1 - V_2}{R_2} \\ \dfrac{V_1 - V_2}{R_2} + \dfrac{V_3 - V_2}{R_5} = \dfrac{V_2 - 0}{R_4} \\ 0 = \dfrac{V_3 - V_1}{R_3} + \dfrac{V_3 - V_2}{R_5} + I_B \end{cases}$$

- **Equação matricial**

$$\left[\frac{1}{R}\right] \times [V] = [I]$$

$$\underbrace{[G]}_{(N-1)\times(N-1)} \times \underbrace{[V]}_{(N-1)\times 1} = \underbrace{[I]}_{(N-1)\times 1}$$

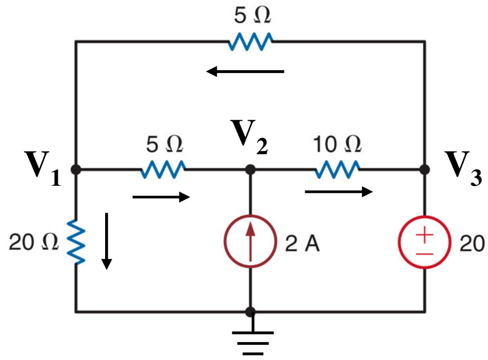
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} \\ \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_A \\ 0 \\ I_B \end{bmatrix}$$

Vector das Incógnitas

  - resolução
    - inversão matriz, regra de Cramer, ...
    - máquina calcular, programa de cálculo, ...

Método Nodal

- **No exemplo anterior só há fontes de corrente independentes...**
- **E se o circuito tiver fontes de tensão?**
  - não se podem escrever eq. KCL para os 2 nós onde fonte de tensão ligada
    - não se sabe qual a corrente que passa na fonte de tensão!
  - escreve-se equação imposta pela fonte de tensão



- **Nó 1: KCL** $\frac{V_3 - V_1}{5} = \frac{V_1 - 0}{20} + \frac{V_1 - V_2}{5}$
- **Nó 2: KCL** $\frac{V_1 - V_2}{5} + 2 = \frac{V_2 - V_3}{10}$
- **Nó 3: ~~KCL~~** $V_3 - 0 = 20 \Leftrightarrow V_3 = 20V$
- **Incógnita V3 fica logo determinada**
- **Quando há fontes de tensão**
  - uma boa escolha para nó de referência é um dos nós onde fonte de tensão está ligada – tensão no outro nó fica logo determinada

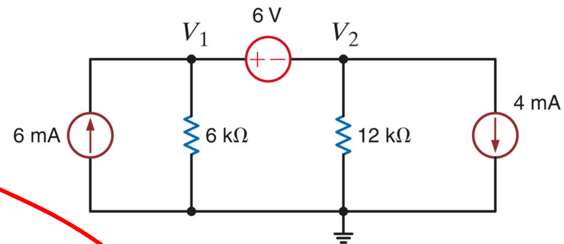
Método Nodal

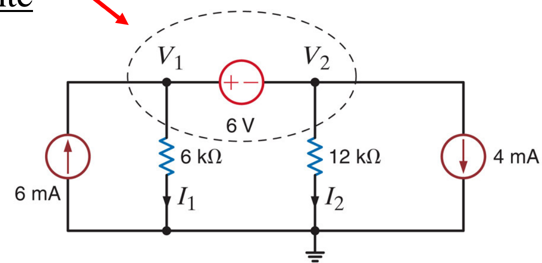
- **E se fonte de tensão não estiver ligada ao nó de referência?**
- **Considera-se um super-nó**
  - superfície fechada
    - fonte de tensão
    - nós onde está ligada
  - escreve-se eq. da tensão imposta pela fonte

    $V_1 - V_2 = 6$
  - escreve-se eq. KCL para super-nó

    $6mA = I_1 + I_2 + 4mA$

    $6m = \frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{12k} + 4m \Leftrightarrow 6 = \frac{V_1}{6} + \frac{V_2}{12} + 4$



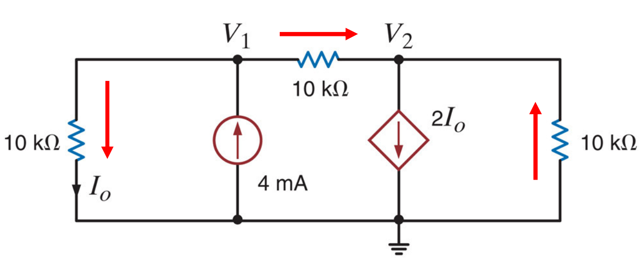


$$\begin{cases} V_1 - V_2 = 6 \\ 2V_1 + V_2 = 24 \end{cases}$$

  - escrevem-se eq. KCL para restantes nós
    - como num circuito sem fontes de tensão
  - resulta igualmente um sistema de (N-1) equações a (N-1) incógnitas

Método Nodal

- **E se existirem fontes dependentes?**
  - escrevem-se equações como nos casos anteriores
    - tratam-se fontes dependentes como se fez anteriormente nas fontes independentes
  - acrescenta-se uma equação auxiliar que
    - relaciona variável de controlo da fonte dependente
    - com tensões nodais
      - são as únicas incógnitas do sistema matricial
- **Nó 1: KCL** $4m = \frac{V_1 - 0}{10k} + \frac{V_1 - V_2}{10k}$
- **Nó 2: KCL** $\frac{V_1 - V_2}{10k} + \frac{0 - V_2}{10k} = 2I_O$
- **Eq. auxiliar:** $I_O = \frac{V_1}{10k}$

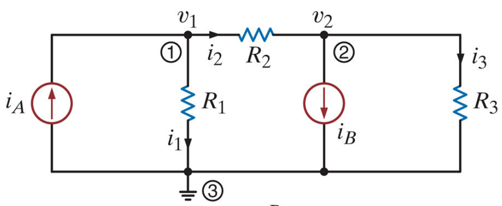


- **Sistema final de equações só tem por incógnitas as tensões nodais**

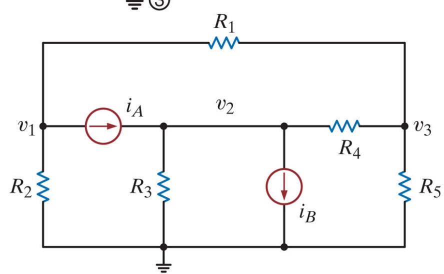
$$\begin{cases} 2V_1 - V_2 = 40 \\ V_1 + 2V_2 = 0 \end{cases}$$

Exemplos de aplicação

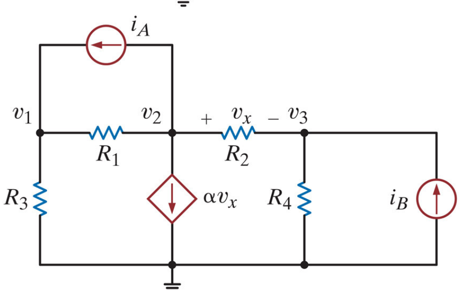
- **Calcular tensões nodais e correntes nas resistências usando o método dos nós**
    - IA=1mA, IB=4mA
    - R1=12kΩ, R2=R3=6kΩ



    - IA=4mA, IB=2mA
    - R1=R2=2kΩ, R3=R4=4kΩ, R5=1kΩ



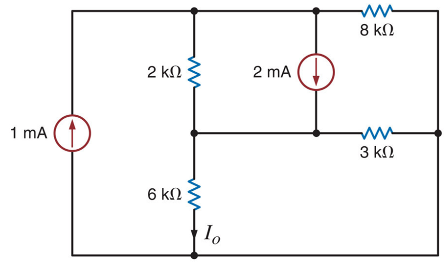
    - IA=2mA, IB=4mA
    - R1=1kΩ, R2=R3=2kΩ, R4=4kΩ
    - α=2

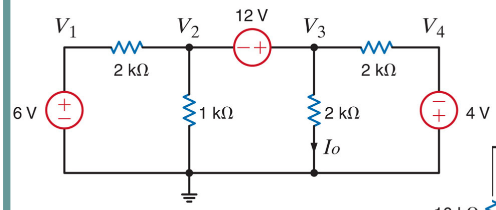


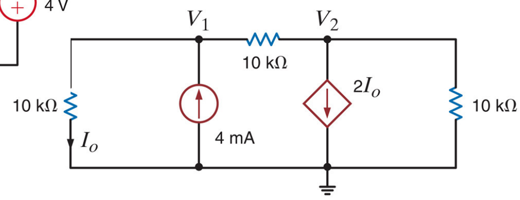
- **No fim pode-se fazer verificação**
  - KCL nos nós – permite verificar cálculos

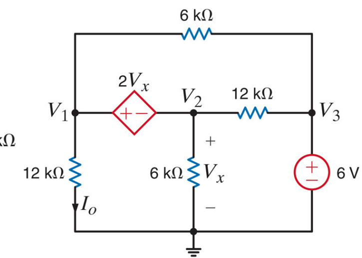
Exemplos de aplicação

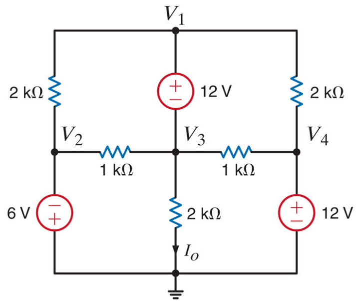
- **Usar método nodal para calcular I_O**
  - escrever equação matricial
  - resolver para tensões nodais
  - calcular I_O

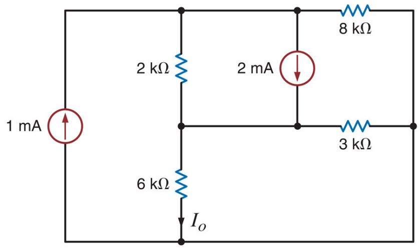


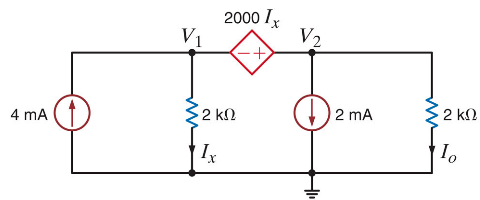












Exemplos de aplicação

- **Usar método nodal para calcular V_O**