Sinais e Sistemas

Representação de Sinais periódicos em Séries de *Fourier* – 2ª parte

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Série Trigonométrica de *Fourier*

- Foi mostrado na aula anterior (slides 39 a 43), que sen$\omega_0 t$, sen$2\omega_0 t$, ..., formam um conjunto ortogonal em qualquer intervalo (t_0, $t_0+2\pi/\omega_0$)
- No entanto, esse conjunto não é completo, pois também deveriam ser incluídas as funções co-seno. Assim, uma expansão mais geral seria (para $t_0 \leq t \leq t_0 + 2\pi/\omega_0$):

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \ldots + b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega_0 t + \ldots$$

Série Trigonométrica de *Fourier*

- Usando-se uma notação mais compacta fica:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(n.\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n.\omega_0 t)]$$

- para $t_0 \leq t \leq t_0 + 2\pi/\omega_0$ onde: $T = 2\pi/\omega_0$
- Os coeficientes a_n e b_n devem obedecer a:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).dt \qquad a_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).\cos(n\omega_0 t)dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(n\omega_0 t).dt} \qquad b_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{sen}^2(n\omega_0 t).dt}$$

Série Trigonométrica de *Fourier*

- O valor a_0 corresponde ao valor médio ou componente DC de $f(t)$ no intervalo $(t_0, t_0 + T)$
- Como os integrais nos denominadores valem $T/2$ (verificar), então:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt$$

Série Trigonométrica de *Fourier*

- É possível mostrar ainda que a série trigonométrica de *Fourier* também pode ser escrita na forma:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n.\omega_0 t + \varphi_n)$$

- onde:

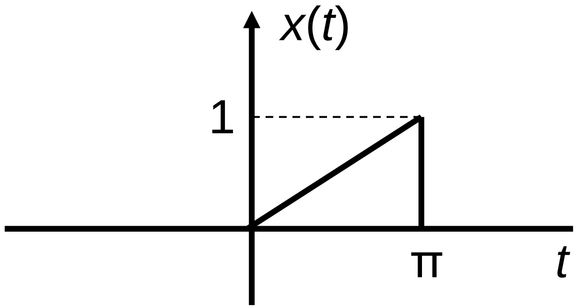
$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

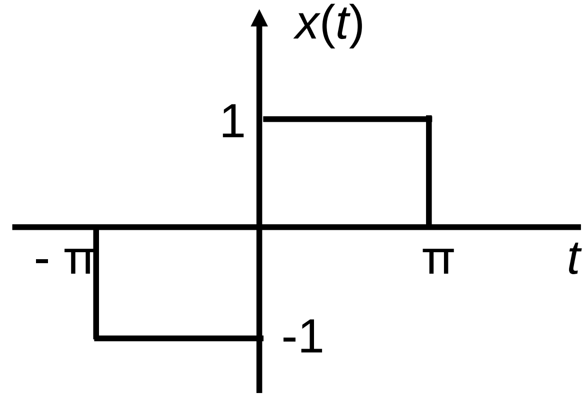
$$\varphi_n = -tg^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

- Importante ressaltar que a expansão é garantida somente dentro do intervalo (t_0, $t_0 + T$)

Série Trigonométrica de *Fourier*

- Trabalho para casa:
  - Efectuar as aproximações, usando a STF, das funções dadas pelos gráficos seguintes:





  - Para as 2 situações traçar um gráfico (usando software à escolha) da aproximação com 1, 2 e 20 termos.

PRIMITIVAÇÃO POR PARTES

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx,$$

sendo F uma primitiva de f.

Série de *Fourier-Legendre*

- Um conjunto de polinómios de *Legendre* $\{P_n(x)\}$, forma um conjunto completo de funções no intervalo $-1 \leq t \leq +1$
- Tais polinómios são:
  - $P_0(t) = 1$
  - $P_1(t) = t$
  - $P_2(t) = 3/2.t^2 - 1/2$
  - $P_3(t) = 5/2.t^3 - 3/2.t$
  - ...

Série de *Fourier-Legendre*

- O termo geral das funções anteriores é:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

- Pode ser verificado que:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(t).P_n(t).dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2m+1}, & m = n \end{cases}$$

- Então, *f*(*t*) pode ser expressa em termos da série de polinómios de *Legendre* no intervalo: -1 ≤ *t* ≤ +1

Série de *Fourier-Legendre*

$$f(t) = C_0 P_0(t) + C_1 P_1(t) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(t)$$

- onde C_n obedece a:

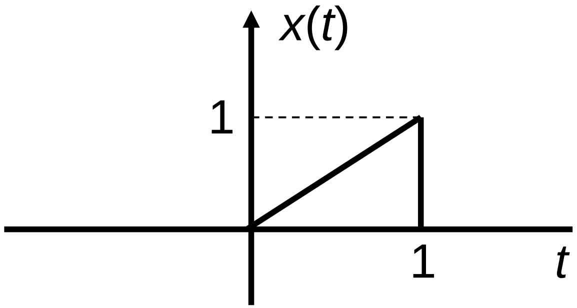
$$C_n = \frac{\int_{-1}^{+1} f_1(t).P_n(t).dt}{\int_{-1}^{+1} P_n^2(t).dt}$$

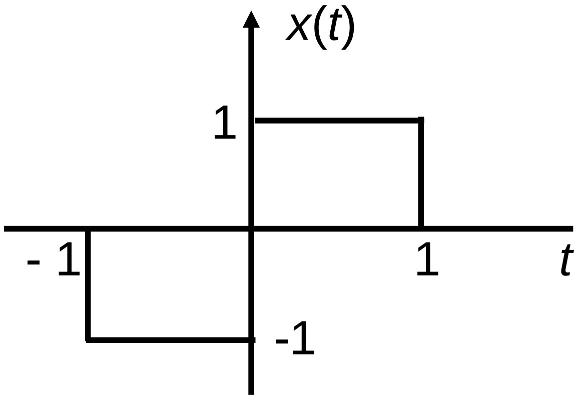
- e, finalmente:

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f_1(t).P_n(t).dt$$

Série de *Fourier-Legendre*

- Trabalho para casa:
  - Efectuar as aproximações, usando a SFL, das funções dadas pelos gráficos seguintes:





  - Para as 2 situações traçar um gráfico (usando software à escolha) da aproximação com 1, 2 e 20 termos.

Primitivação por partes

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx,$$

sendo F uma primitiva de f.

Série exponencial de *Fourier*

- Conforme foi visto na última aula, as funções exponenciais complexas também formam um conjunto, $\{e^{jn\omega_0 t}\}$, para (n = 0, ±1, ± 2, ...), que é ortogonal e completo no intervalo:
  - $t_0 \le t \le t_0 + 2\pi/\omega_0$
- Ou seja:

$$\int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} (e^{jn\omega_0 t}).(e^{jm\omega_0 t})^* dt = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\omega_0} = T, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Série exponencial de *Fourier*

- Portanto, uma função $f(t)$ pode ser expandida em série:

$$f(t) = C_0 + C_1.e^{j\omega_0 t} + C_2.e^{j2\omega_0 t} + \ldots + C_{-1}.e^{-j\omega_0 t} + C_{-2}.e^{-j2\omega_0 t} + \ldots$$

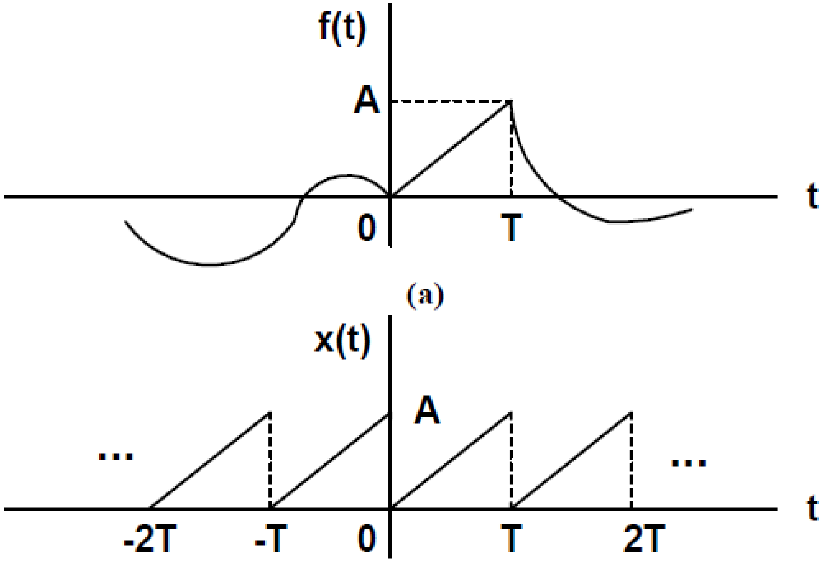
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n.e^{jn\omega_0 t}$$

- para $t_0 \leq t \leq t_0 + 2\pi/\omega_0$, onde:

$$C_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).(e^{jn\omega_0 t})^* dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} (e^{jn\omega_0 t}).(e^{jn\omega_0 t})^* .dt} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Representação de uma função periódica pela série de *Fourier*

- Até agora representou-se a função $f(t)$ pela série de *Fourier* no intervalo $t_0 < t < t_0 + T$
- Fora desse intervalo $f(t)$ e a série não precisam ser iguais ($t_0 = 0$):



Representação de uma função periódica pela série de *Fourier*

- Se uma função $x(t)$ for periódica, conforme o gráfico anterior, pode-se mostrar que a representação da série complexa:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n . e^{jn\omega_0 t}$$

- se aplica para todo o intervalo $-\infty < t < +\infty$
- Neste caso, basta observar o comportamento de $x(t)$ para $t_0 < t < t_0 + T$, sendo $x(t)$ periódica com período $T = 1/f_0$

Representação de uma função periódica pela série de *Fourier*

- A exponencial complexa é periódica. Se $x(t)$ também for com período T a expressão anterior é válida para o intervalo -∞ < t < +∞
- Para $x(t)$ peródica:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(nf_0).e^{jn2\pi f_0 t} \quad \text{para } -\infty < t < \infty$$

- onde:

$$c(nf_0) = C_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-jn2\pi f_0 t}dt$$

Representação de uma função periódica pela série de *Fourier*

- Exemplo: Considerar um sinal periódico $x(t)$ com período $T_0 = 2\pi/\omega_0$
- Como visto anteriormente, este sinal pode ser representado pela série infinita:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Mostrar que, inversamente, todo sinal escrito na forma dessa série é periódico

Representação de uma função periódica pela série de *Fourier*

- Para demonstrar, basta calcular:

$$x(t+T_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0(t+T_0)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}.e^{jn\omega_0 T_0}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}.e^{jn2\pi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}=x(t)$$

- O que mostra que a série infinita representa o sinal periódico $x(t)$
- Esta Série designa-se por <u>Série de *Fourier* Exponencial Complexa</u>, ou simplesmente <u>Série de *Fourier* Complexa</u> do sinal $x(t)$

Espectro de frequências discreto

- Os coeficientes C_k são os coeficientes da série de *Fourier* do sinal periódico $x(t)$, também chamados de coeficientes espectrais de $x(t)$
- Medem a contribuição de cada exponencial complexa nas frequências múltiplas (harmónicas) da frequência fundamental - ω_0

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)\, e^{jn2\pi f_0 t} \qquad \text{(equação de síntese)}$$

$$c(nf_0) = C_n = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t).e^{-jn2\pi f_0 t} dt \qquad \text{(equação de análise)}$$

Espectro de frequências discreto

- Cada C_n revela o conteúdo de $x(t)$ em cada frequência $n.f_0$
- O conjunto $\{C_n\}$ chama-se: espectro de linhas ou espectro de frequência discreto de $x(t)$
- Os coeficientes são, em geral, funções complexas de n ou $n.f_0$
- Quando $n = 0$, C_0 representa o valor médio do sinal $x(t)$

$$c(0) = C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)dt$$

Espectro de frequências discreto

- Propriedades dos coeficientes C_n:
  - Se a função $x(t)$ é real, então $x^*(t) = x(t)$. Deste modo:

$$C_n^* = \left(\frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t).e^{-jn2\pi f_0 t} dt \right)^* = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t).e^{\,jn2\pi f_0 t} dt = C_{-n}$$

- Portanto, para $x(t)$ real:

$$C_n^* = C_{-n} \Rightarrow c^*(nf_0) = c(-nf_0)$$

- Chamada *Simetria Conjugada* ou *Simetria Hermitiana*

Espectro de frequências discreto

- Propriedades dos coeficientes C_n:
  - Se C_n é representado pela sua forma retangular ou polar:

$$C_n = \alpha_n + j\beta_n = |C_n| e^{j\arg[C_n]}$$

$$|C_n| = (\alpha_n^2 + \beta_n^2)^{1/2}$$

$$\arg[C_k] = \tan^{-1}\frac{\beta_n}{\alpha_n}$$

$$C_{-n} = \alpha_{-n} + j\beta_{-n} = C_n^* = \alpha_n - j\beta_n \qquad \alpha_n = \alpha_{-n}$$

$$|C_n| = |C_{-n}| \Rightarrow |c(nf_0)| = |c(-nf_0)| \qquad \beta_n = -\beta_{-n}$$

$$\arg[C_n] = -\arg[C_{-n}] \Rightarrow \arg[c(nf_0)] = -\arg[c(-nf_0)]$$

Espectro de frequências discreto

- Propriedades dos coeficientes C_n:
  - O gráfico de $|C_n|$ em função de n, ou nf_0, é chamado de espectro de magnitudes (amplitudes) de $x(t)$
    - no caso de $x(t)$ ser real, é uma função par
  - O gráfico de $\arg[C_n]$ em função de n, ou nf_0, é o espectro de fase
    - no caso de $x(t)$ ser real, é uma função ímpar

Espectro de frequências discreto

- Exercícios: Obter os coeficientes da série de *Fourier* complexa de:

a) $x(t) = 1 + \text{sen}\,\omega_0 t - 3\cos 3\omega_0 t$

b) $x(t) = 1 - 3\cos 0.6\pi t + 2\sin 1.2\pi t + \cos 2.1\pi t$

Espectro de frequências discreto

- Resolução:
- a) Usando a formula de Euler:

$$x(t) = 1 + \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} - 3\frac{e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t}}{2} =$$

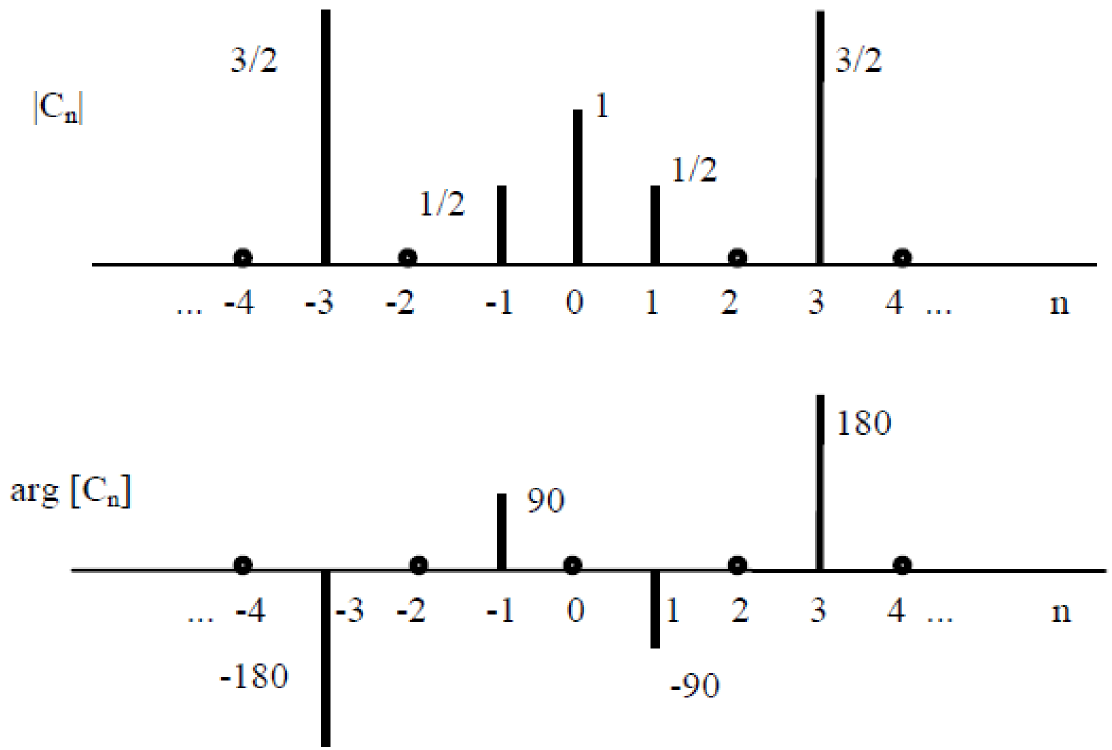
$$= -\frac{3}{2}e^{-j3\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t} + 1 + \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{3}{2}e^{j3\omega_0 t}$$

- a qual já se encontra na forma de soma de exponenciais complexas e, portanto:

$$C_0 = 1 \qquad C_{-1} = -C_1 = -\frac{1}{2j} \qquad C_{-3} = C_3 = -\frac{3}{2}$$

Espectro de frequências discreto

- Resolução:
- a) Gráficos de Módulo e Fase



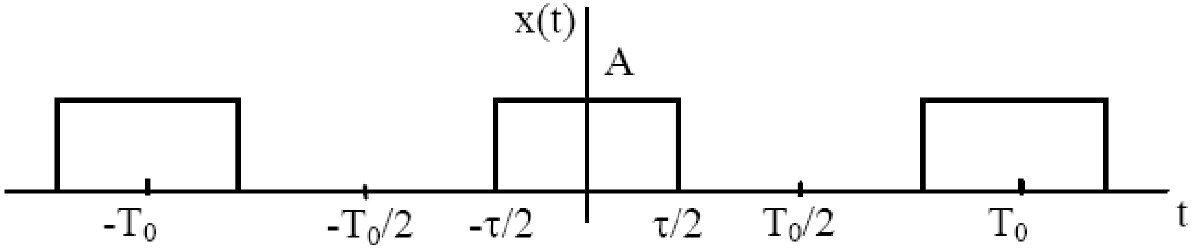
Espectro de frequências discreto

- Resolução:
- b) Devemos primeiro verificar se $x(t)$ é um sinal periódico. Observando as frequências dos sinais, chega-se à conclusão que a frequência fundamental é igual a $\omega_0 = 0.3\pi$, e as componentes sinusoidais correspondem àquelas nas frequências $2\omega_0$, $4\omega_0$ e $7\omega_0$
- Logo tem-se: $x(t) = 1 - 3\cos 2\omega_0 t + 2\sin 4\omega_0 t + \cos 7\omega_0 t$.

$C_0 = 1 \qquad C_{-2} = C_2 = -\frac{3}{2} \qquad C_{-4} = -C_4 = -\frac{1}{j} \qquad C_{-7} = C_7 = \frac{1}{2}$

Espectro de frequências discreto

- Exercício: Obter a série de *Fourier* e desenhar o espectro de frequências da forma de onda rectangular mostrada na figura seguinte:



- Num período, entre $-T_0/2$ e $T_0/2$, tem-se que:

$$x(t) = \begin{cases} A, -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 \end{cases}$$

Espectro de frequências discreto

- Resolução:

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-jn\omega_0 t}\,dt = -\frac{A}{T_0}\frac{e^{-jn\omega_0\tau/2} - e^{jn\omega_0\tau/2}}{jn\omega_0} = \frac{2jA\sin(n\omega_0\tau/2)}{jn\omega_0 T_0} = \frac{2A\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0 T_0}$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$

$$C_n = \frac{2A\tau}{T_0}\frac{.\sin[n(2\pi/T_0).\tau/2]}{n2\pi/T_0} = \frac{A\tau}{T_0}\frac{\sin(\pi n f_0\tau)}{\pi n f_0\tau} = \frac{A\tau}{T_0}\mathrm{sinc}(nf_0\tau) = Af_0\tau\,\mathrm{sinc}(nf_0\tau)$$

onde

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Espectro de frequências discreto

- Resolução:
- Para o caso particular de $T_0 = 1/f_0 = 4\tau$, fica:
  - $C_k = A/4 \text{ sinc}(n/4)$

- Seguindo a convenção adotada desde o início, na qual se considera a amplitude uma grandeza positiva, sendo o sinal negativo levado em conta através do ângulo de fase de $\pm180^0$, obtém-se os gráficos de módulo e fase

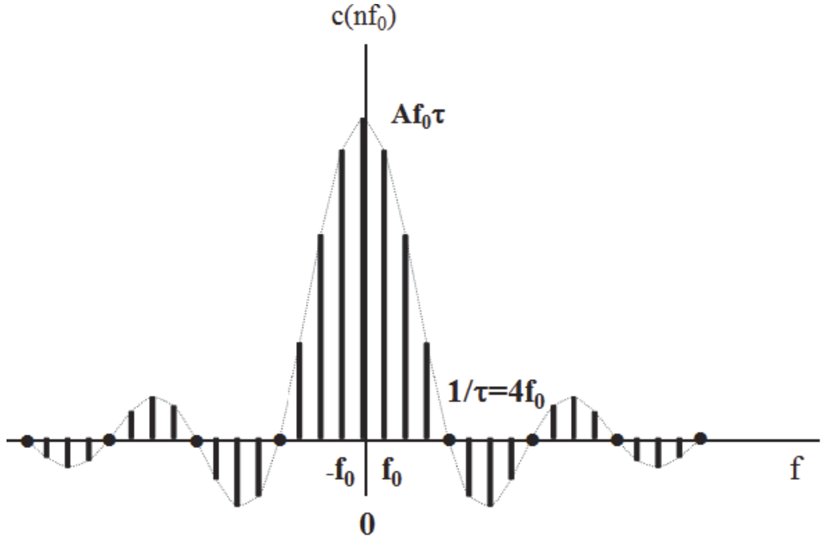
Espectro de frequências discreto

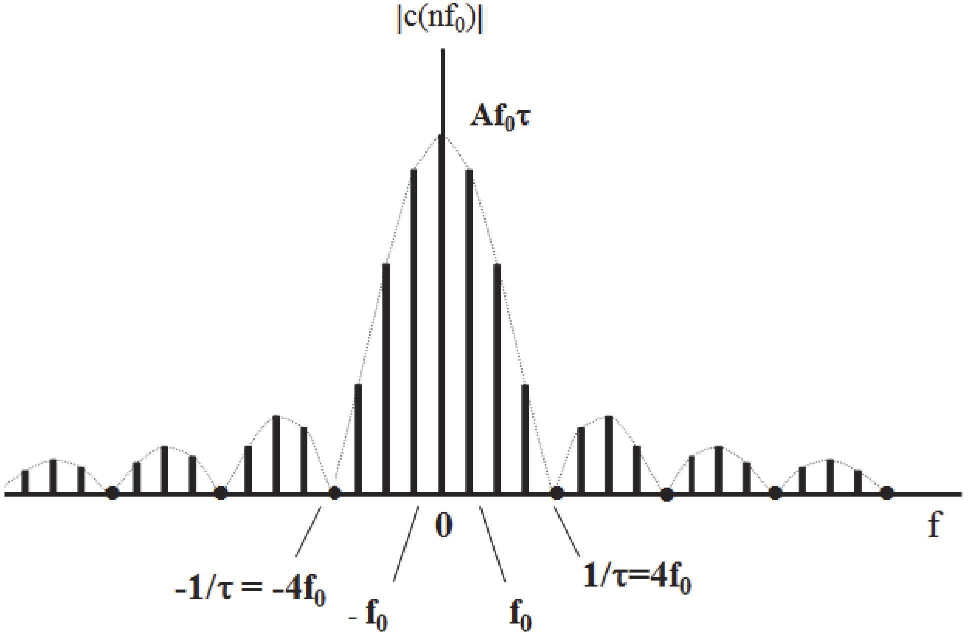
- Resolução:
- Para o caso particular de $T_0 = 1/f_0 = 4\tau$, fica:
  - $C_k = A/4 \text{ sinc}(n/4)$

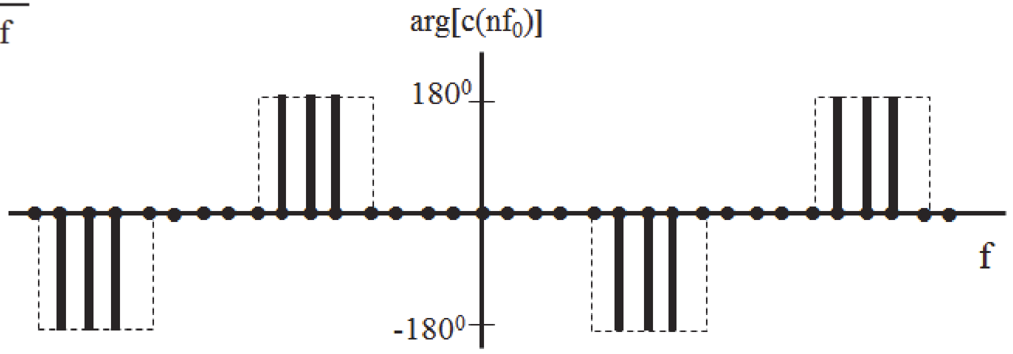
- Seguindo a convenção adotada desde o início, na qual se considera a amplitude uma grandeza positiva, sendo o sinal negativo levado em conta através do ângulo de fase de $\pm 180^0$, obtém-se os gráficos de módulo e fase

Espectro de frequências discreto

- Resolução:







Existência da Série de *Fourier*

- Para determinar os coeficientes da série de *Fourier* do sinal *x*(*t*), utilizamos as equações:

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t).e^{-jn2\pi f_0 t} dt \qquad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn2\pi f_0 t}$$

- No integral, o problema que pode existir é este divergir: $C_n \to \infty$
- No somatório, mesmo os coeficientes sendo finitos, a série pode não convergir para *x*(*t*)

Existência da Série de *Fourier*

- Sendo:

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{jn2\pi f_0 t}$$

- o factor de erro:

$$\varepsilon_N = \int_{<T_0>} |x(t) - x_N(t)|^2 dt$$

- pode não tender para zero à medida que *N* tende para infinito - $x_N(t)$ não tende para $x(t)$

Existência da Série de *Fourier*

- Uma condição suficiente para a convergência da série de *Fourier* é que o sinal tenha energia finita num período:

$$\int_{<T_0>} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

- Esta condição garante que a maioria dos sinais práticos podem ser representados pela Série de *Fourier*

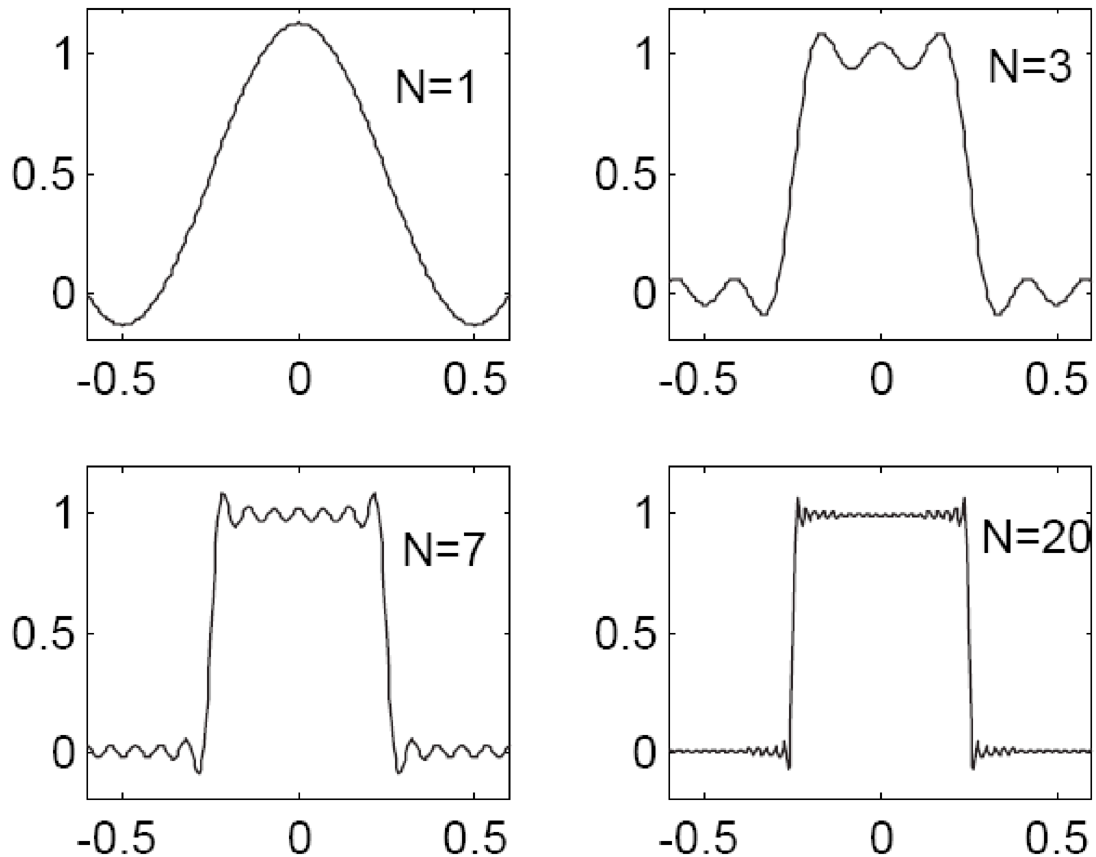
Fenómeno de *Gibbs*

- Considere-se uma onda quadrada periódica com amplitude unitária e frequência fundamental ω_0
- A sua representação em termos da série de *Fourier* é:

$$x_N(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi}\cos\omega_0 t - \frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_0 t + \frac{2}{5\pi}\cos 5\omega_0 t + \ldots + (-1)^{N-1}\frac{2}{(2N-1)\pi}\cos(2N-1)\omega_0 t$$

Fenómeno de *Gibbs*

- Gráficos de $x_N(t)$ para N = 1, 3, 7 e 20



Fenómeno de *Gibbs*

- À medida que N cresce, a frequência das oscilações (*ripple*) aumenta: $x_N(t)$ -> $x(t)$
- No entanto, próximo da descontinuidade, o *ripple* fica mais estreito mas a amplitude não diminui, ficando em cerca de 9% do valor da descontinuidade
- Este é o chamado fenómeno de *Gibbs*
  - ocorre sempre que se tem descontinuidades na função representada pela série

Fórmula de *Parseval* e distribuição de potência

- Como já foi visto, todo sinal periódico limitado é um sinal de potência
- Podemos representar um sinal periódico por uma Série de *Fourier*
- Ideia: Obter uma relação entre a potência média e os coeficientes da série do sinal

Fórmula de *Parseval* e distribuição de potência

- A potência média é dada por:

$$P_m = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t).x^*(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn2\pi f_0 t}\right).x^*(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\left[\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x^*(t)e^{jn2\pi f_0 t}dt\right] =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\left[\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} .x(t)e^{-jn2\pi f_0 t}dt\right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n.C_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} | C_n |^2$$

$$P_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n.C_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} | C_n |^2$$

  – estabelece que a potência média do sinal *x*(*t*) é igual à soma dos módulos dos coeficientes ao quadrado - $|C_n|^2$

Bibliografia

- Oppenheim, A.V. , Willsky, A.S. and Young, I.T., Signals and Systems, Prentice- Hall Signal Processing Series, 1983