Análise Matemática EE
1º ano, 2º semestre

Ficha complementar sobre derivadas de funções de várias variáveis

---

Funções reais de várias variáveis - Derivadas parciais

1. Mostre que a função $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$ satisfaz a equação diferencial $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial x} = -3(y+1) + 2x$.

2. A temperatura T de uma localidade do hemisfério norte depende da longitude x, da latitude y e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = T(x,y,t)$. Explique o significado das derivadas parciais $\dfrac{\partial T}{\partial x}$, $\dfrac{\partial T}{\partial y}$, $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

3. A área de um triângulo é dado por $A = \frac{1}{2}ab\sin C$, onde a, b são os comprimentos de dois lados do triângulo e C é a medida do ângulo entre os lados referidos. Para $a = 20$, $b = 30$ e $C = 30^o$, determine:

   (a) A taxa de variação da área do triângulo em relação ao comprimento a, quando b e C são constantes;

   Sol.: $\frac{15}{2}$

   (b) A taxa de variação da área do triângulo em relação ao comprimento C, quando a e b são constantes;

   Sol.: $150\sqrt{3}$

   (c) A taxa de variação do comprimento b em relação ao comprimento a, quando a área e C são constantes;

   Sol.: $-\frac{3}{2}$

4. Determine as inclinações das curvas de interseção da superfície $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$ com planos paralelos aos planos coordenados XOZ e YOZ que passam no ponto $P = (1,1,1)$.

   Sol.: A inclinação da curva de interseção da superfície dada com o plano XOZ é 6; A inclinação da curva de interseção da superfície dada com o plano YOZ é 8.

5. Determine a linearização $L(x,y)$ da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ em $(1,1)$.

6. Considere a função $f(x,y) = \sqrt{x} + \ln(\cos y)$.

   (a) Determine o domínio da função f.

   (b) Calcule um valor aproximado de $f(4.2, 0.2)$, usando diferenciais.

Funções reais de várias variáveis - gradiente e derivadas dirigidas

1. Considere as funções $f(x,y) = \exp(xy)$ e $g(x,y) = \sqrt{1 + xy^2}$. Determine:

   (a) O gradiente de f no ponto $(2,0)$ e de g no ponto $(2,-2)$.

   Sol.: $\vec{\nabla} f(2,0) = (0,2)$, $\quad \vec{\nabla} g(2,-2) = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$

   (b) A equação do plano tangente aos gráficos das funções f e g nos pontos considerados.

   Sol.: $2y - z + 1 = 0$, $\quad$ e $2x - 4y - 3z - 1 = 0$, respetivamente.

   (c) A equação da reta normal aos gráficos das funções f e g nos pontos considerados.

Sol.: $x = 2, y = 2(1-z)$, e $\frac{3(x-2)}{2} = \frac{3(y+2)}{-4} = \frac{z-3}{-1}$, respetivamente.

2. Mostre que as superfícies $x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0$ são tangentes no ponto $(2, 1, 1)$.

Sol.: Basta mostrar que têm o mesmo plano tangente no ponto considerado.

3. Mostre que as superfícies $xy + yz - 4zx = 0$ e $3z^2 - 5x + y = 0$ são ortogonais no ponto $(1, 2, 1)$.

Sol.: Basta mostrar que as normais às superfícies nesse ponto são ortogonais.

4. Calcule a taxa de variação das seguintes funções na direção do vetor $\vec{u}$, nos pontos indicados:

   (a) $f(x, y) = x^2y$, $\quad \vec{u} = (1, 2)$, no ponto $P = (-1, -1)$.

   Sol.: $D_{\vec{u}}f(-1, -1) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

   (b) $g(x, y) = x^2 + y^2$, onde $\vec{u}$ faz um ângulo de 60^o com o semi-eixo positivo do eixo OX, no ponto $P = (1, -2)$.

   Sol.: $D_{\vec{u}}g(1, -2) = 1 - 2\sqrt{3}$

   (c) $h(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, $\quad \vec{u} = (1, 1, 1)$, no ponto $P = (2, -3, 4)$.

   Sol.: $D_{\vec{u}}h(2, -3, 4) = -\frac{61\sqrt{3}}{432}$

5. Em eletrostática, a força P de atração entre duas partículas de cargas opostas é dada por $P = k\frac{R}{|R|^3}$ (lei de Coulomb), onde k é uma constante real e $R = (x, y, z)$.

   Mostre que, para $f = -\frac{k}{|R|}$, tem-se $\vec{\nabla} f = P$.

6. Considere a função $f(x, y) = \exp(y - \frac{1}{x})$, o vetor $\vec{u} = (2, -3)$ e o ponto $P = (-\frac{1}{2}, -1)$.

   (a) Determine $D_{\vec{u}}f(P)$.

   (b) Indique uma direção segundo a qual a taxa de variação da função f no ponto P é nula. Justifique.

   (c) Considere o gráfico da função f. Escreva a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-\frac{1}{2}, -1, f(-\frac{1}{2}, -1))$.

7. Em que direções a derivada dirigida de $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no ponto $(1, 1)$ é nula?

   Sol.: Nas direções $\vec{u} = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

8. Considere a função $f(x, y) = xy$ e o ponto $(2, 0)$.

   (a) Em que direções a taxa de variação de f no ponto indicado é -1?

   Sol.: Nas direções $\vec{u} = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, direções que fazem 120^o com o vetor gradiente.

   (b) Em que direções a taxa de variação de f no ponto indicado é -3?

   Sol.: Em nenhuma direção.

   (c) Em que direções a taxa de variação de f no ponto indicado é -2?

   Sol.: Na direção oposta à direção do vetor gradiente, $\vec{u} = (0, -1)$.

9. Seja $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (representa a distância de um ponto do espaço à origem). Mostre que o vetor gradiente é o vetor unitário com a mesma direção do vetor que une a origem ao ponto (x, y, z).

10. O potencial elétrico V num ponto (x, y) é dado por $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

    (a) Determine a taxa de variação no ponto $(3, 4)$ na direção do ponto $(2, 6)$.

    Sol.: $\frac{\sqrt{5}}{25}$.

    (b) Mostre que, num ponto (a, b), o potencial elétrico varia mais rapidamente ao longo das retas que ligam o ponto (a, b) à origem.

    Sol.: A função V tem taxa de variação máxima na direção do vetor gradiente $\vec{u} = \frac{1}{a^2+b^2}(a, b)$ - vetor que tem a direção do vetor que une (a, b) à origem.

11. Seja $h(x, y) = 2\exp(-x^2) + \exp(-3y^2)$ a função que representa a altura de uma montanha na posição (x, y).

    Em que direção a partir do ponto $(1, 0)$ se deve caminhar, de modo a escalar a montanha mais rapidamente?

    Sol.: Na direção do vetor $\vec{u} = (-\frac{4}{e}, 0)$.

12. Suponha que a temperatura T em cada ponto (x, y) do plano XOY é dada pela expressão $T(x, y) = xy^2 + 6x + 3$. Determina a taxa de variação da temperatura (graus/metro) em $(1, 2)$ sabendo que o ponto se move para norte. (Considere a rosa dos ventos como o referencial cartesiano).

13. Considere a função $f(x, y) = -x^2 - 9y^2$.

    (a) Represente as curvas de nível $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = -1$ e $f(x, y) = -10$.

    (b) Na representação da alínea anterior, represente o ponto $(1, 1)$ e o vetor gradiente da função f nesse ponto.

    (c) Relativamente à última alínea, qual a relação entre o vetor gradiente e a curva de nível à qual o ponto pertence?

14. A temperatura T em cada ponto (x, y) do plano XOY é dada pela expressão $T(x, y) = x^2 - 2y^2$.

    (a) Esboce um diagrama de curvas isotérmicas (curvas onde a temperatura é constante).

    Sol.: Para $k \neq 0$, as curvas são hipérboles de vértices $(\pm\sqrt{k}, 0)$ ou $(0, \pm\frac{\sqrt{k}}{2})$.
    Para k=0, as curvas são as retas $y = \pm\frac{x}{\sqrt{2}}$.

    (b) Uma formiga encontra-se na posição $(2, -1)$. Que direção deve ela seguir para arrefecer o mais depressa possível?

    Sol.: Na direção dos vetores $\pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

    (c) Se a formiga se deslocar nessa direção a uma velocidade $|\vec{v}| = k$, qual é taxa de variação da temperatura relativamente ao tempo?

    Sol.: A taxa de variação é $4k\sqrt{2}$.

    (d) Se a formiga se deslocar na direção do vetor $\vec{u} = (-1, -2)$ à mesma velocidade $|\vec{v}| = k$, qual é taxa de variação da temperatura relativamente ao tempo?

    Sol.: A taxa de variação é $-\frac{12k\sqrt{5}}{5}$.

15. Um barco navega na direção nordeste a uma velocidade de $20Km/h$. Supondo que a temperatura desce $0.2^oC/Km$ na direção norte e desce $0.3^oC/Km$ na direção este.

    Qual a taxa de variação da temperatura relativamente ao tempo que o barco observa? (Sug.: Considere que o barco parte da origem do referencial).

Sol.: A temperatura desce a uma taxa de $5\sqrt{2}^o C/h$.

Funções reais de várias variáveis - diferenciais

1. Determine o diferencial total das funções indicadas:

   (a) $z = x^3y + x^2y^2 + xy^3$

   Sol.: $dz = (3x^2y + 2xy^2 + y^3)dx + (x^3 + 2x^2y + 3xy^2)dy$.

   (b) $z = \sin y - y \cos x$

   Sol.: $dz = (\sin y - y\cos x)dx + (x\cos y - \sin x)dy$.

2. Considerando a primeira alínea do exercício anterior,

   (a) Determine o diferencial da função no ponto $(1, 0)$ e no ponto $(0, 1)$.

   (b) Em qual dos pontos da alínea anterior, uma variação da variável x não provoca uma alteração do valor da função?

3. Usando diferenciais, indique como determinar um valor aproximado de $f(x_0 + dx, y_0 + dy)$ onde f é uma função diferenciável no seu domínio e (x_0, y_0) um ponto desse domínio.

4. Determine aproximações lineares das seguintes funções nos pontos indicados:
   a) $f(x, y) = x^2y^3$ em $(3.1, 0.9)$ b) $g(x, y) = \sin(\pi x + \ln y)$ em $(0.01, 1.05)$

   Sol.: a) $f(3.1, 0.9) \approx 6.9$ b) $g(0.01, 1.05) \approx 2.61$

5. Usando diferenciais, calcule um valor aproximado de:
   a) $(0.99 \exp(0.02))^8$ b) $2.05 \times \exp(-3.92 + 2.05^2)$

   Sol.: a) $(0.99 \exp(0.02))^8 \approx 1.08$ b) $2.05 \times \exp(-3.92 + 2.05^2) \approx 2.61$

6. Mediu-se um cone circular e obteve-se 10cm para o raio da base e 25cm para a altura, com um possível erro de 0.1cm em cada uma das medidas. Use diferenciais para estimar o erro máximo ao calcular o volume do cone.

   Sol.: Para $V(r, h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$ o erro máximo é de 20π.

7. Uma indústria vai produzir 10000 caixas fechadas de papelão, com dimensões 3cm, 4cm e 5cm. O custo do papelão a ser usado é de 5 cêntimos por cm^2. Se as máquinas usadas para cortar os pedaços de papelão têm um possível erro de 0.05cm em cada dimensão, encontre o máximo erro possível na estimativa do custo do papelão, usando diferenciais.

   Sol.: Para $C(x, y, z) = 5(2xy + 2xz + 2yz)$ o erro máximo por cada caixa é de 12 cêntimos e o erro máximo total é de 1200 euros.

8. Calcule o valor aproximado da variação da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 6cm e 8cm, quando o cateto maior é diminuído de 1/8cm e o cateto menor é aumentado de 1/4cm.

   Sol.: A hipotenusa aumenta aproximadamente, 1/20cm.

9. A potência consumida numa resistência elétrica é dada por $P = \frac{E^2}{R}$watts. Se $E = 200$volts e $R = 8$ohms, qual o valor aproximado da variação da potência se E é diminuído de 5 volts e R é dimuinuído de $0,2$ohm?

   Sol.: O valor aproximado da variação é -125 watts.

Funções reais de várias variáveis - derivadas de funções compostas

1. Em cada alínea, considere que f é uma função diferenciável de uma variável.

   (a) Seja $z = f(x^2 + y^2)$. Verifique que $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

   (b) Seja $z = f(\frac{x+y}{x-y})$. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

   (c) Seja $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

2. Utilize dois métodos diferentes para calcular:

   (a) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ quando $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad x = \exp(st)$, e $y = 1 + s^2 \cos t$.

   Sol.: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{s(x\exp(st) - sy\sin t)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ quando $z = \arctan(\frac{u}{v})$, $\quad u = 2x + y$, e $v = 3x - y$.

   Sol.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2v - 3u}{v^2 + u^2}$.

3. Supondo que, em cada caso, f possui derivadas parciais contínuas, calcule:

   a) $\dfrac{\partial}{\partial x} f(2y, 3x)$ $\qquad$ b) $\dfrac{\partial}{\partial t} f(st^2, s^2 + t)$

   Sol.: a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3\dfrac{\partial f}{\partial v}$ onde $v = 3x$, $\quad$ b) $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 2st\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}$ onde $u = st^2$ e $v = s^2 + t$.

4. Sejam u e v duas funções reais tais que:

$$v(s,t) = v(x + cy, x) = u(x,y) \text{ onde } s = x + cy,\ t = x \quad (c \in \mathbb{R})$$

   Transforme a equação diferencial $\dfrac{\partial u}{\partial y} = c\dfrac{\partial u}{\partial x}$ na equação mais simples $\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$.

5. Sendo $z = \ln(x + y)$ com $x = 2u - v$ e $y = 2v - u$, determine a expressão de $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ e de $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

   Sol.: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = -\dfrac{1}{(x+y)^2} = -\dfrac{1}{(u+v)^2}$.

6. Aplique a regra da cadeia para a função $f(x,y) = \frac{x^2}{2+\cos y}$ e o caminho $\vec{c}(t) = (t, 1 - t^2, \cos t)$.

   Sol.: $\frac{df}{dt} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{c}\,'(t)$.

7. Considere a função real $f(x,y) = x.g(u) + y.g(v)$ onde $u = 2x - y$ e $v = -x + 3y$ e g uma função real de variável real, diferenciável no seu domínio. Determine as expressões $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

8. Mostre que $f(ax + by, bx - ay)$, com a, b constantes reais, é uma função harmónica, sabendo que $f(u,v)$ é uma função harmónica.

   Recorde que uma função $f(s,t)$ diz-se uma **função harmónica** se possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas numa região do plano e que aí satisfaça a equação de Laplace: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.

9. A altura de um cone circular reto é 15cm e aumenta na razão de $0,2cm/min$. O raio da base é 10cm e diminui na razão de $0,3cm/min$.. Qual a taxa de variação do volume por minuto? (Nota: o volume do cone é $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$, onde x representa o raio e y a altura do cone.)

Sol.: $-\frac{70}{3}\pi cm^3/min.$

Funções vetoriais de várias variáveis - Matrizes jacobianas

1. Determine a matriz jacobiana das seguintes funções:

   (a) $\vec{f}(x,y) = (\exp(x+y) + y, y^2 x)$

   Sol.: $D\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} (f_1)'_x & (f_1)'_y \\ (f_2)'_x & (f_2)'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x+y) & \exp(x+y)+1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}.$

   (b) $\vec{f}(x,y) = (x^2 + \cos y, y \exp x)$

   Sol.: $D\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} (f_1)'_x & (f_1)'_y \\ (f_2)'_x & (f_2)'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -\sin y \\ y\exp x & \exp x \end{pmatrix}.$

   (c) $\vec{f}(x,y,z) = (z\exp x, -y\exp z)$

   Sol.: $D\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} (f_1)'_x & (f_1)'_y & (f_1)'_z \\ (f_2)'_x & (f_2)'_y & (f_2)'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\exp x & 0 & \exp x \\ 0 & -\exp z & -y\exp z \end{pmatrix}.$