

IV. Dinâmica da partícula

- 4.1. Introdução
- 4.2. Quantidade de movimento
- 4.3. Leis de Newton
 - 4.3.1. Primeira lei de Newton
 - 4.3.1.1. Referenciais inerciais
 - 4.3.2. Segunda lei de Newton
 - 4.3.3. Terceira lei de Newton
- 4.4. Tipos de forças
 - 4.4.1. Força gravítica
 - 4.4.2. Força electromagnética
 - 4.4.3. Força nuclear forte
 - 4.4.4. Força nuclear fraca
- 4.5. Forças de contacto
 - 4.5.1. Reacção normal
 - 4.5.2. Força de atrito
 - 4.5.2.1. Forças de atrito estático e dinâmico: coeficientes de atrito
- 4.6. Resolução de exercícios. Exemplos

4.1. Introdução

O objectivo da Dinâmica é o estudo da relação entre um movimento, ou, mais precisamente, entre as alterações a um movimento, e as causas dessas alterações. Um movimento rectilíneo e uniforme de uma partícula não requer nenhuma interacção entre a partícula e o exterior para se manter. Mas, para o modificar, isto é, para lhe fazer variar a velocidade, seja em grandeza ou direcção, a partícula tem que ser submetida à acção do que se designa por uma força, que lhe provocará uma aceleração, isto é uma mudança no seu estado de movimento.

4.2. Momento linear ou quantidade de movimento

A quantidade de movimento de uma partícula, é definida como

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Esta é uma grandeza física muito importante pois combina os dois elementos que caracterizam o estado dinâmico da partícula: a sua massa e a sua velocidade.

4.3. Leis de Newton

Aristóteles (384-322 a.c.)

“O corpo em movimento estaciona quando a força que o impele cessa de agir.”

Aristóteles, *Mecânica*

Galileu (1564 - 1642)

“... qualquer velocidade comunicada a um corpo será mantida enquanto as causas externas de aceleração ou retardamento estiverem ausentes, condição que só é encontrada em planos horizontais; se os planos forem inclinados para baixo, estará sempre presente uma causa de aceleração; e se inclinados para cima, um retardamento; disto se conclui que o movimento ao longo de um plano horizontal é perpétuo; pois se a velocidade for uniforme não poderá ser diminuída, e muito menos ser destruída.”

Galileu, *Duas Ciências Novas*

O que é “visível” numa força é o seu efeito: a alteração do movimento. Assim para estudar as forças, é necessário observar o movimento resultante das acções dessas forças.

Força:

- É uma interacção entre corpos físicos.
- Provoca alterações na velocidade desses corpos.

A experiência quotidiana sugere que a força é uma grandeza vectorial (**intensidade, direcção e sentido**).

4.3.1. Primeira Lei de Newton

Newton (1642 - 1727)

“ Uma força actuante é uma acção exercida sobre um corpo, de modo a mudar-lhe o estado, seja de repouso, seja de movimento uniforme e em linha recta.

Esta força consiste apenas na acção; e não permanece no corpo depois que a acção passa. Porque o corpo mantém cada novo estado adquirido em razão da *vis inertiae* - da força da inércia. As forças actuantes são de diferentes origens, como as que vêm da percussão, da pressão, da atracção centrípeta.”

Newton, *Principia*

Define os conceitos de força e inércia

Primeira lei de Newton (ou lei da inércia)

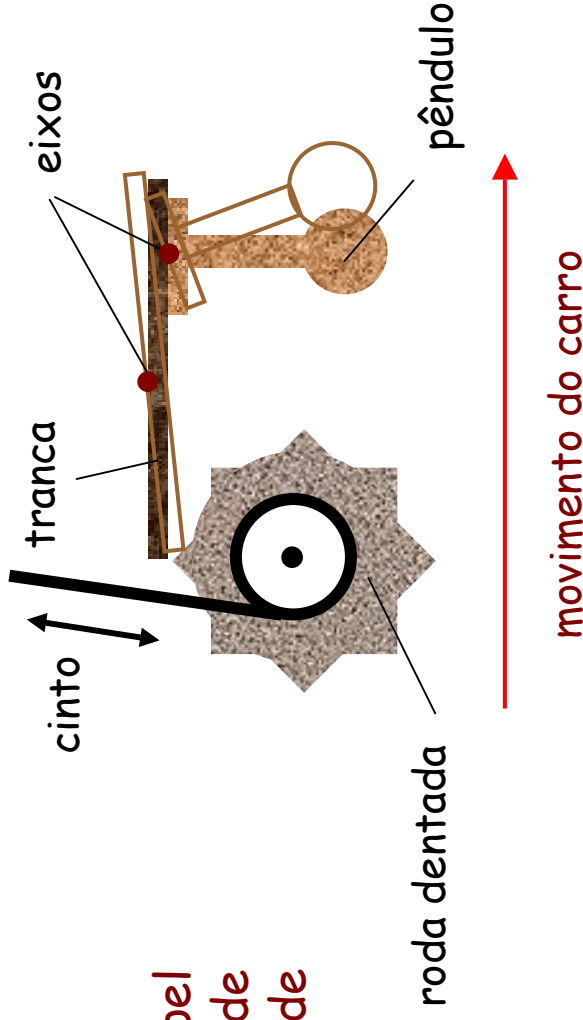
Quando a resultante das forças que actuam num objecto for nula, esse objecto permanece num estado de repouso ou num estado de movimento rectilíneo e uniforme.

... da 1ª lei de Newton, podemos concluir que:

- **repouso** ou **movimento uniforme** são estados naturais de um corpo, isto é, estados que somente se modificam se a resultante das forças que actuam no corpo for não nula.
- os objectos têm tendência para permanecer em repouso ou em movimento rectilíneo uniforme. Esta tendência é referida como **inércia**.
- do ponto de vista físico **não existe diferença** entre repouso e movimento com velocidade constante.

Aplicação:

A inércia tem um papel fundamental no mecanismo de funcionamento dos cintos de segurança.



4.3.1.1. Referenciais Inerciais

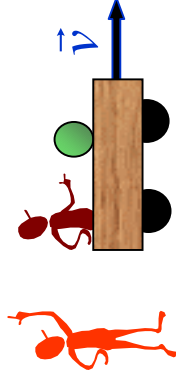
“Quando a resultante das forças que actuam num objecto for nula, esse objecto permanece num estado de repouso ou num estado de movimento rectilíneo e uniforme”.



escolha de um referencial

Para descrever um movimento é necessário escolher um referencial. Essa descrição fica irremediavelmente ligada ao referencial escolhido.

Suponhamos dois observadores, o **vermelho em repouso** e o **castanho em movimento**, que observam a **bola**.



\vec{v} constante:

Não há forças aplicadas e a bola move-se com velocidade, \vec{v} , constante

\Rightarrow é válida a 1ª lei de Newton



Não há forças aplicadas e a bola permanece em repouso

\Rightarrow é válida a 1ª lei de Newton

\vec{v} aumenta:

Há uma força aplicada ao carrinho que aumenta a sua velocidade e a bola tende a manter a velocidade devido à inércia

\Rightarrow é válida a 1ª lei de Newton



Não há forças aplicadas e a bola inicia um movimento

\Rightarrow não é válida a 1ª lei de Newton



Conclusão:

As leis de Newton não são válidas em todos os referenciais.

- São referenciais inerciais aqueles em que é válida a 1ª lei de Newton.
- Qualquer referencial que se mova com velocidade constante em relação a um referencial inercial é também um referencial inercial.

Devido à sua rotação e à sua interacção com o sol e os outros planetas, a Terra é um referencial acelerado. De facto a aceleração resultante dos seu movimentos de rotação e de translação é cerca de 0.01 m/s^2 . Assim, um referencial ligado à superfície da terra pode, sem grande erro (em muitos casos), ser considerado um referencial de inércia.

Importante

Movimento e repouso são conceitos relativos. Portanto, quando enunciarmos a lei da inércia devemos sempre indicar o sistema de referência.

4.3.2. Segunda Lei de Newton

Newton (1642 - 1727)

“A mudança de movimento é proporcional à força motriz impressa, e se faz segundo a linha recta pela qual se imprime essa força.

Se toda a força produz algum movimento, uma força dupla produzirá um movimento duplo e uma tripla um triplo, quer essa força se imprima conjuntamente e de uma vez só, quer seja impressa gradual e sucessivamente. E esse movimento, pode ser orientado para a mesma direcção que a força geratriz, se o corpo se movia antes, ou se acrescenta a seu movimento, caso concorde com ele, ou se subtrai dele, caso lhe seja contrário, ou, sendo oblíquo, ajunta-se-lhe obliquamente, compondo-se com ele segundo a determinação de ambos.”

Newton, *Principia*

Segunda lei de Newton (ou lei fundamental da dinâmica)

A segunda lei define assim a força, \vec{F} , como a causa da alteração do movimento, de tal forma que, se uma força \vec{F} actuar sobre uma partícula, a sua quantidade de movimento, $\vec{p} = m\vec{v}$, sofre uma alteração tal que

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

unidade SI: $\text{Kg.m/s}^2 = \text{newton (N)}$

Admite-se que todas as forças causam o mesmo efeito, quer actuem isoladas ou em conjunto com outras forças - Princípio da independência das forças.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Equação fundamental da dinâmica

No caso geral temos:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

No caso de a massa, m , ser constante, temos:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad \left(\frac{dm}{dt} = 0\right)$$

Obtemos assim a forma mais conhecida da 2ª lei de Newton:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Os problemas típicos da dinâmica são:

- (1) conhecidas as forças determinar as características do movimento e,
- (2) o inverso, isto é, deduzir do movimento as forças existentes.

4.3.3. Terceira Lei de Newton

Newton (1642 - 1727)

“ A uma acção sempre se opõe uma reacção igual, ou seja, as acções de dois corpos um sobre o outro sempre são iguais e se dirigem a partes contrárias.

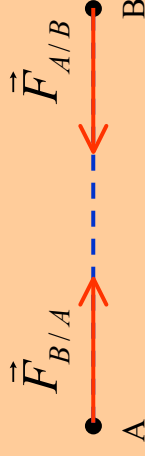
Tudo quanto impele ou atrai o outro, é do mesmo modo impellido ou atraído por ele. Se alguém aperta com o dedo uma pedra, seu dedo será apertado pela pedra. Se o cavalo puxa uma pedra amarrada numa corda, o cavalo também será, igualmente, puxado pela pedra, pois a corda esticada dos dois lados, tanto levará, pelo esforço a relaxar-se, o cavalo para a pedra, como esta para o cavalo, e tanto impedirá o progresso de um quanto promover o do outro. Se um corpo, batendo num outro, mudar por sua força, de qualquer modo, o movimento dele, também mudará, sofrendo por sua vez, por força do outro, a mesma mudança em seu movimento, num sentido oposto ao do outro (devido à igualdade da pressão mútua). Por essas acções, tornam-se iguais não as mudanças de velocidades, mas as dos movimentos (a saber, nos corpos não impedidos de outro modo). Com efeito, porque os movimentos mudam igualmente, as mudanças das velocidades, feitas da mesma forma em direcções opostas, são reciprocamente proporcionais aos corpos.”

Newton, *Principia*

Terceira lei de Newton (ou lei de ação-reacção)

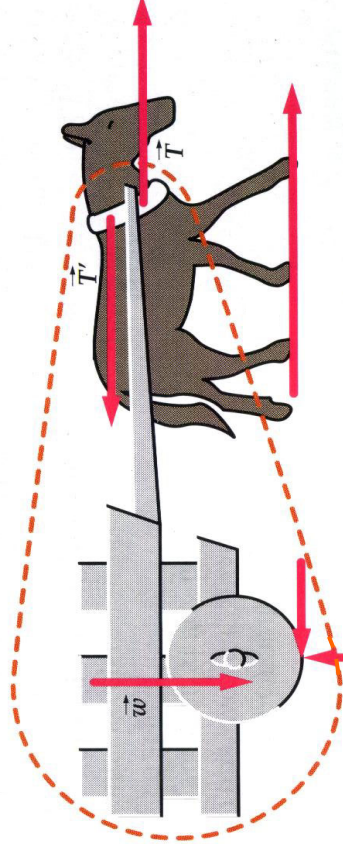
Quando dois corpos interagem, a força que um corpo exerce no outro é igual em módulo, e de sentido contrário, à força que o segundo corpo exerce no primeiro.

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$



Exemplo:

Um cavalo recusa-se a puxar uma carroça invocando que: "de acordo com a terceira lei de Newton, qualquer que seja a força que eu faça na carroça, a carroça exercerá uma força igual mas de sentido contrário em mim, assim sendo, a resultante será nula, e eu não terei possibilidade de movimentar a carroça." Que comentário merece este raciocínio?



T' - força que a carroça exerce no cavalo.

T - força que o cavalo exerce na carroça

4.4. Tipos de forças

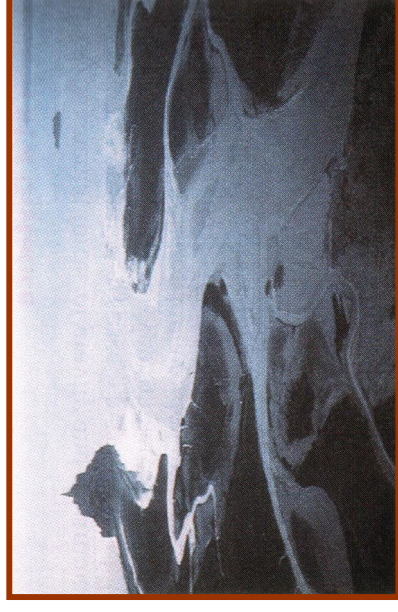
Forças fundamentais

- forças **gravíticas** (relativamente fracas)
- forças **electromagnéticas** (relativamente fortes)
- forças **nucleares fortes** (mantêm a coesão do núcleo)
- forças **nucleares fracas** (interacção a curta distância)

4.4.1. Força gravítica

A força exercida pelo sol mantém os planetas na sua órbita. Da mesma forma a força exercida pela terra sobre a lua mantém esta numa órbita quase circular em torno da terra.

As marés, têm origem na força gravitacional exercida pelo sol e pela lua nos oceanos terrestres.



*Monte de Saint-Michel (França)
transforma-se numa ilha quando a
maré sobe.*

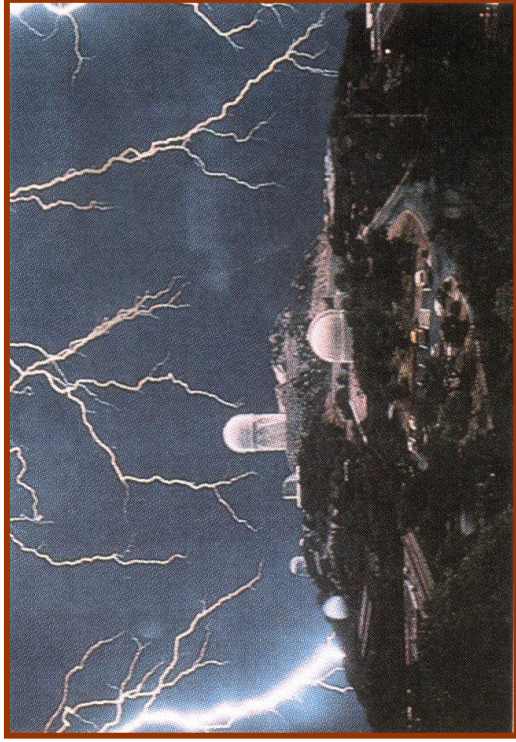
4.4.2. Força electromagnética

A força electromagnética inclui duas forças, a eléctrica e a magnética.

Um exemplo típico de uma força eléctrica é a de atracção entre pedaços de papel e uma barra de plástico.

A força magnética entre um electroímã e limalha de ferro aparece quando cargas eléctricas se movem.

A razão entre a intensidade da força electrostática de repulsão entre dois prótons e a força de atracção gravítica entre os mesmos dois prótons é cerca de 10^{36} .

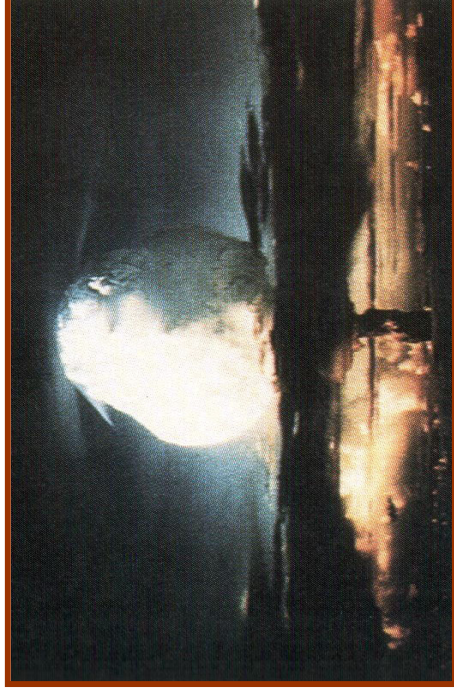


Os relâmpagos durante uma trovoadá resultam da existência de forças electromagnéticas

4.4.3. Força nuclear forte

A força nuclear forte ocorre entre partículas elementares denominados hádrons, que incluem os prótons e neutrões.

A sua magnitude resulta da interacção entre as diferentes partículas que formam o núcleo e diminui rapidamente com a distância.



Explosão de uma bomba de hidrogénio.

4.4.4. Força nuclear fraca

As forças de interacção fraca, que têm também um curto alcance, ocorrem entre léptões (que incluem electrões e múões).

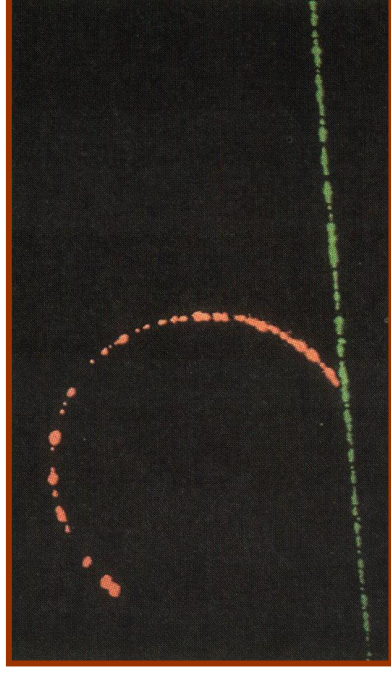


Ilustração de uma interacção entre um múão (verde) e um electrão (vermelho).

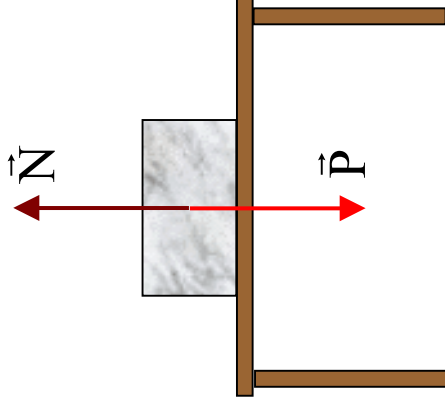
4.5. Forças de “contacto”

Todas as outras forças de que vulgarmente se fala, tais como a **força de atrito**, a **força elástica** de uma mola, a **tensão numa corda**, etc., são manifestações macroscópicas de forças incluídas numa das quatro categorias referidas.

4.5.1. Reacção normal

O peso do bloco puxa-o para baixo, empurrando-o contra as moléculas da superfície da mesa.

A mesa resiste a esta compressão e exerce no bloco uma força, dirigida para cima.



A **força de reacção normal** ou simplesmente **reacção normal**, \vec{N} , é uma componente da força que a superfície exerce num objecto com o qual está em contacto, cujas direcção é sempre perpendicular à direcção da superfície.

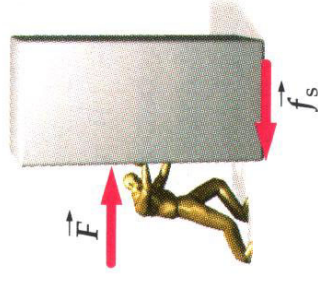
4.5.2. Força de atrito

Quando um objecto está em contacto com uma superfície, para além da força normal, existe uma força com uma direcção paralela à superfície denominada força de atrito.

depende

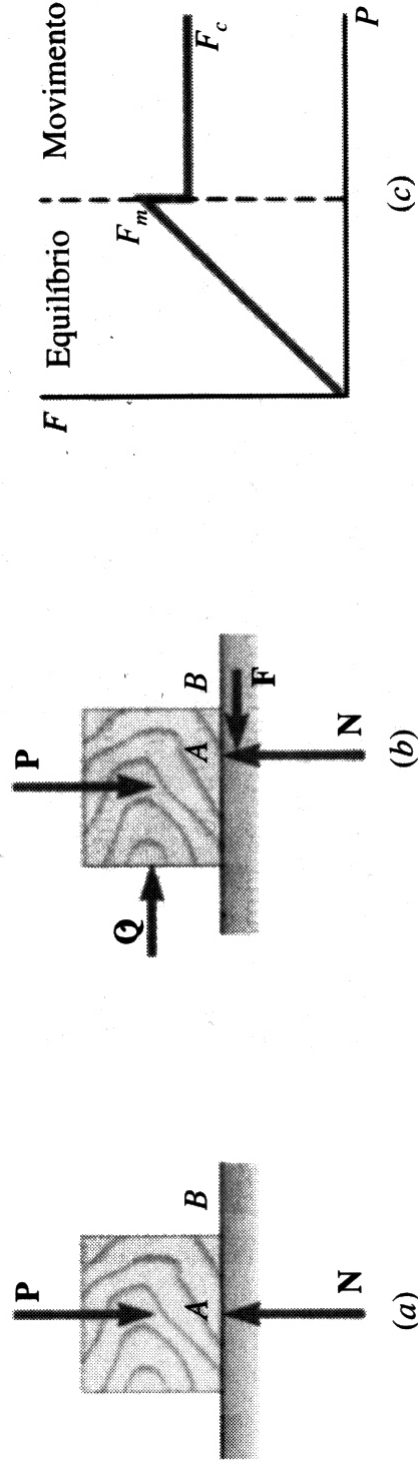
- natureza das superfícies em contacto
- rugosidade das superfícies
- velocidade relativa

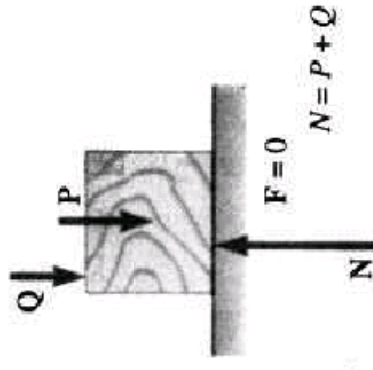
Quando o homem empurra o bloco, as forças que actuam na direcção do movimento são a força \vec{F} , aplicada pelo homem, e a força de atrito, \vec{f}_s , entre o bloco e o chão.



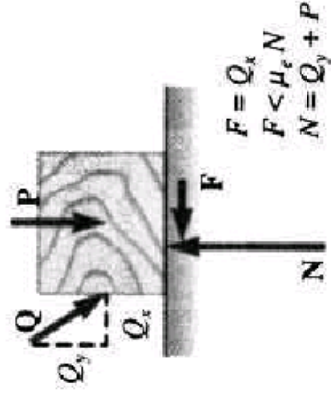
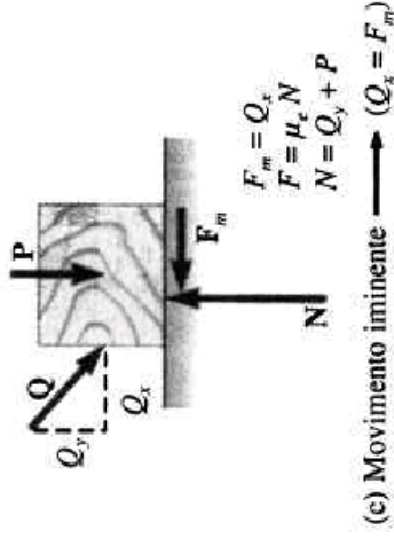
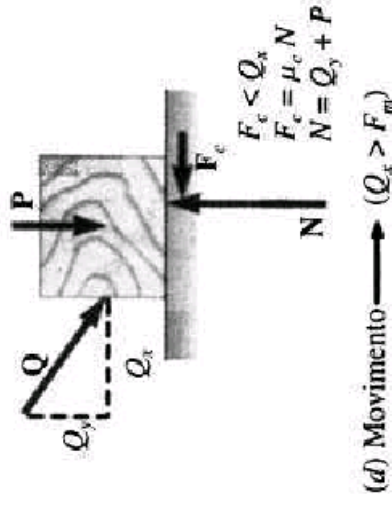
4.5.2.1. Forças de atrito estático e dinâmico: coeficientes de atrito

Experimentalmente verifica-se que só existe uma força de atrito se houver possibilidade de movimento relativo entre as superfícies.





(a) Não há forças de atrito

(b) Não há movimento ($Q_x < F_m$)(c) Movimento iminente $\longrightarrow (Q_x = F_m)$ (d) Movimento $\longrightarrow (Q_x > F_m)$

O módulo da força de atrito estático, f_e , pode ter qualquer valor entre zero e um valor máximo:

$$f_e \leq f_e^{\text{máx}}$$

$$f_e^{\text{máx}} = \mu_e N$$

coeficiente de atrito estático

módulo da força normal

(quantidade adimensional que depende da natureza das superfícies em contacto)

O módulo da força de atrito cinético, f_c , é:

$$f_c = \mu_c N$$

coeficiente de atrito cinético

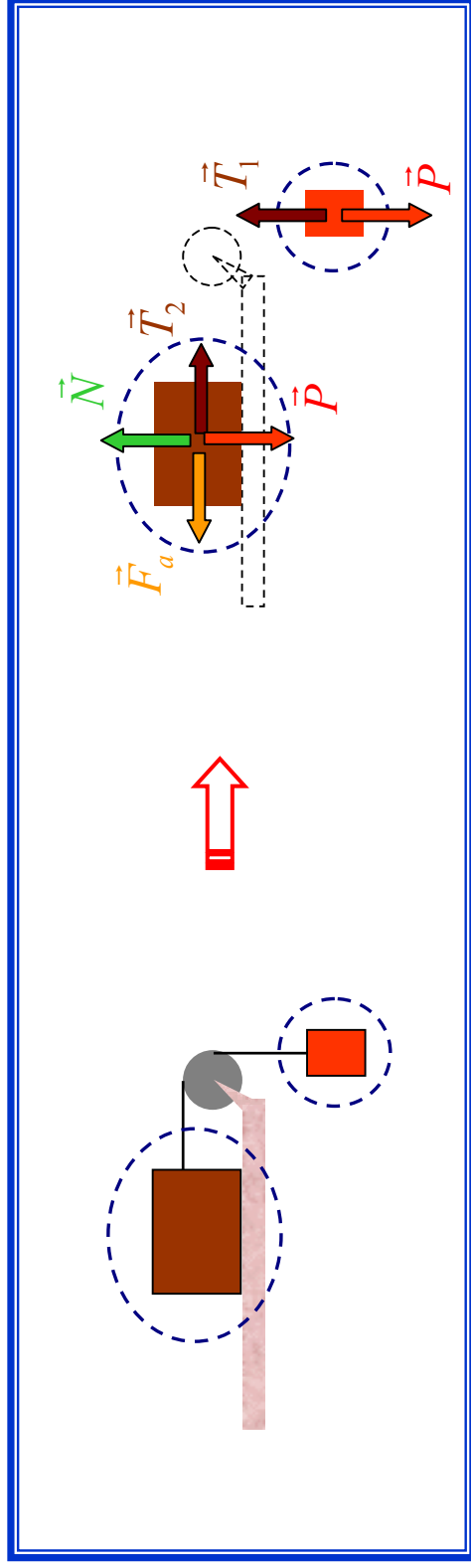
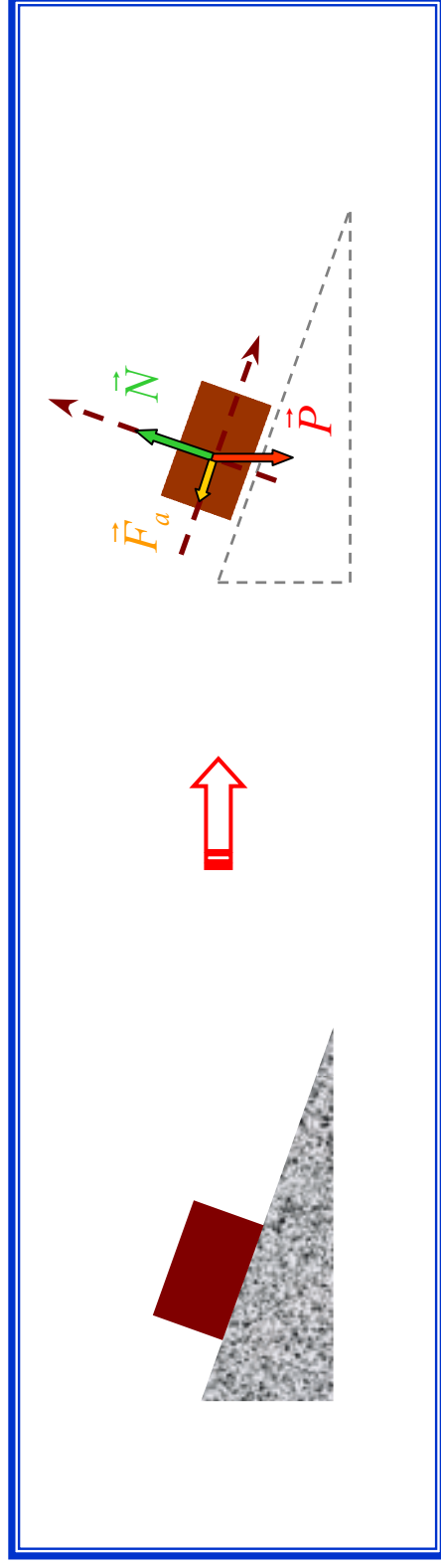
(quantidade adimensional que depende da natureza das superfícies em contacto)

Valores aproximados de coeficientes de atrito

material	μ_e	μ_c
aço/aço	0.7	0.6
vidro/vidro	0.9	0.4
teflon/aço	0.04	0.04
borracha/cimento molhado	1.0	0.8
borracha/cimento seco	1.0	0.8
ski/neve (0 °C)	0.1	0.05

4.6. Resolução de exercícios. Exemplos.

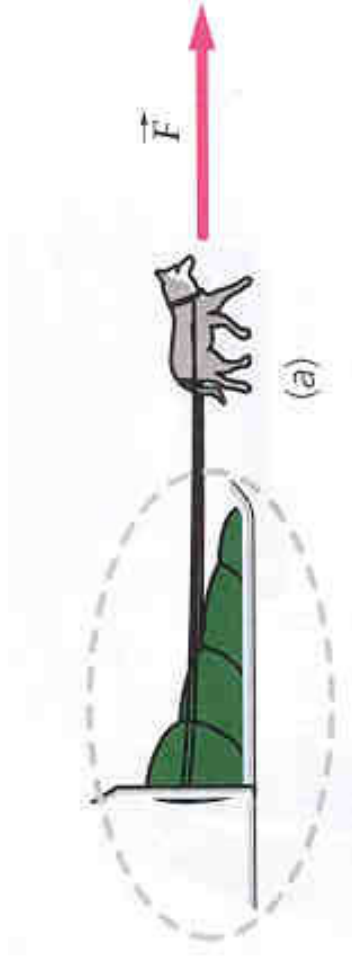
Diagramas do corpo livre



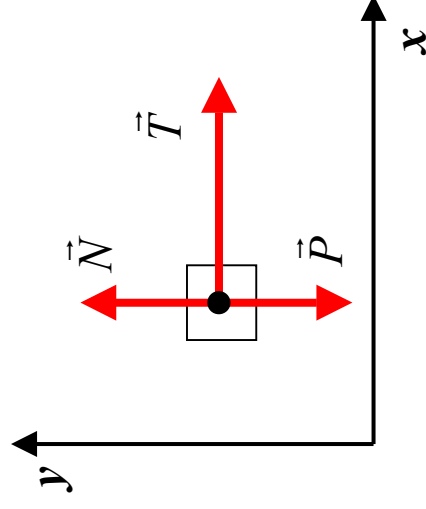
Diagramas do corpo livre

Exemplo:

Imagine um trenó, assente sobre uma superfície gelada, a ser puxado. O cão puxa a corda atada ao trenó com uma força F . A corda, sob tensão, puxa então o trenó. **Quais as forças que actuam no trenó?**



- o primeiro passo para resolver o problema é isolar o sistema a ser analisado: neste caso o **trenó**.
- segunda fase, é esquematizar quais as forças que actuam no sistema considerado, ou seja **desenhar o diagrama do corpo livre**.

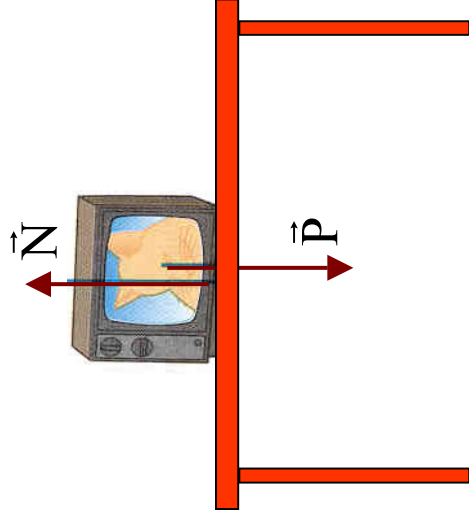


Exemplo

Caracterize as forças que actuam sobre:

- 1 - uma televisão em cima da mesa
- 2 - um bloco sobre um plano inclinado
- 3 - um livro em cima da mesa pressionado por uma mão que exerce uma força F .
- 4 - uma cesta ($m = 2 \text{ Kg}$) a ser levantada do chão por uma força $F = 5 \text{ N}$.

1 - Forças que actuam na TV:



O peso: $\vec{P} = m\vec{g}$

E a reacção normal: \vec{N}

Como a TV está parada, temos:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{N} = 0$$

$$\vec{N} = -\vec{P} \Leftrightarrow |\vec{N}| = mg$$

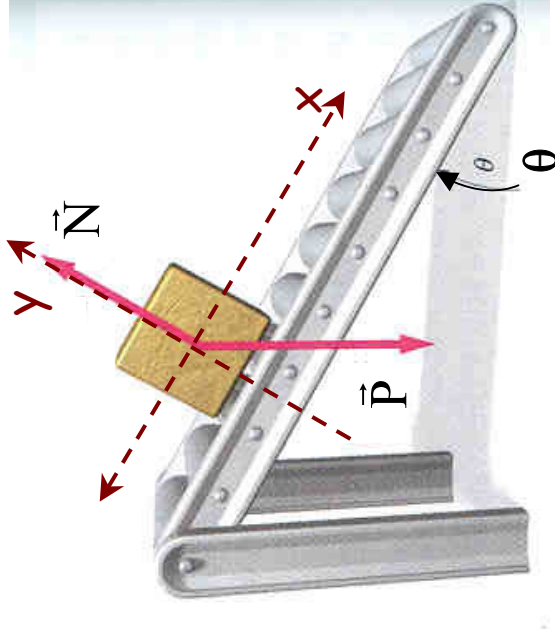
2 - As forças aplicadas ao bloco são, mais uma vez:

O peso: $\vec{P} = m\vec{g}$

E a reacção normal: \vec{N}

Aplicando a 2ª lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_x = m \times a_x \\ -P_y + N = m \times a_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = \frac{mg \times \sin \theta}{m} = g \times \sin \theta \\ N = mg \times \cos \theta \end{cases}$$

3 - Forças que actuam no livro:

O peso:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

A força exercida pela mão:

$$\vec{F}$$

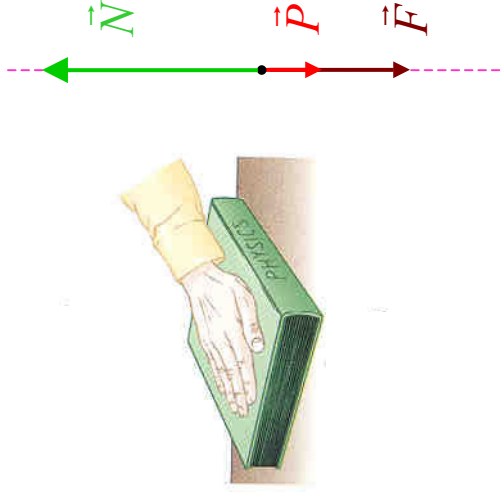
E a reacção normal:

$$\vec{N}$$

O livro está em repouso, logo:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = 0$$

$$\vec{N} = -\vec{P} - \vec{F} \Leftrightarrow |\vec{N}| = |m\vec{g}| + |\vec{F}|$$



4 - Forças que actuam no cesto:

O peso:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

A força exercida pela mão:

$$\vec{F}$$

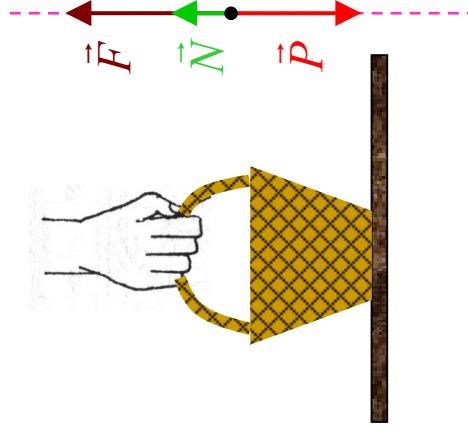
E a reacção normal:

$$\vec{N}$$

O livro está em repouso, logo:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = 0$$

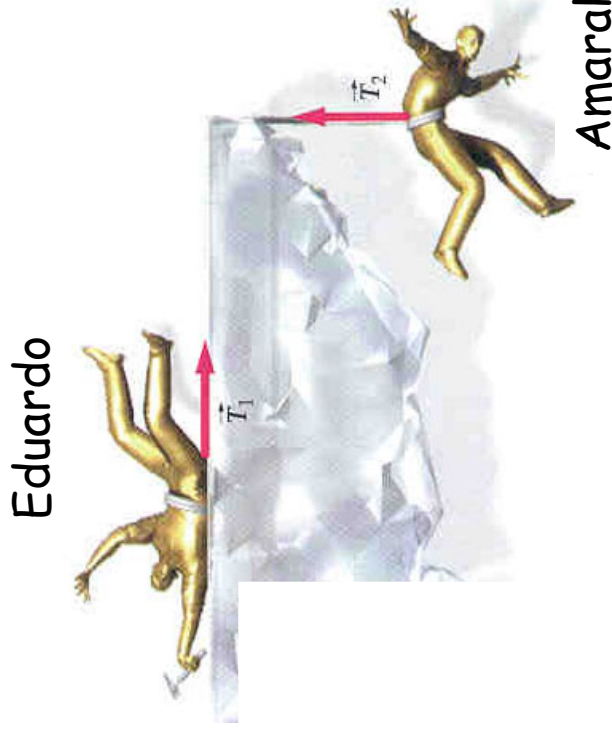
$$\vec{N} = -\vec{P} - \vec{F} \Leftrightarrow |\vec{N}| = -|m\vec{g}| + |\vec{F}|$$





• Problemas com mais que um objecto

Exemplo:

O Amaral cai acidentalmente e fica pendurado na beira de um rochedo gelado. Felizmente, encontrava-se preso, por uma corda, ao Eduardo. Antes do Eduardo conseguir cravar o seu martelo no gelo, desliza mas continua atado ao Amaral. Qual a aceleração de cada um dos alpinistas ?



Aplicando a 2ª lei de Newton:

Eduardo:		XX:	$\sum F_x = m^e a_x^e \Leftrightarrow T_1 = m^e a_x^e$
		YY:	$\sum F_y = m^e a_y^e \Leftrightarrow N - m^e g = 0$
Amaral:		YY:	$\sum F_y = m^a a_y^a \Leftrightarrow -T_2 + m^a g = m^a a_y^a$

Uma vez que o Eduardo e o Amaral estão ligados pela corda ($T_1 = T_2$, se se desprezar a massa da corda) os módulos das suas acelerações serão iguais, então:

$$m^e a = m^a g - m^a a \Leftrightarrow a = \frac{m^a g}{m^e + m^a}$$

Exercício Imagine que está a participar na construção da estação espacial europeia e que empurra uma caixa de massa m_1 , com uma força F . Esta caixa está em contacto com outra de massa m_2 . Qual é a aceleração das caixas? Qual a intensidade da força exercida por uma caixa sobre a outra?

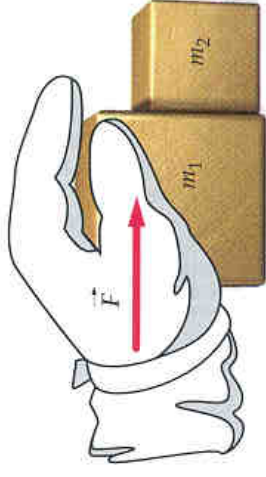
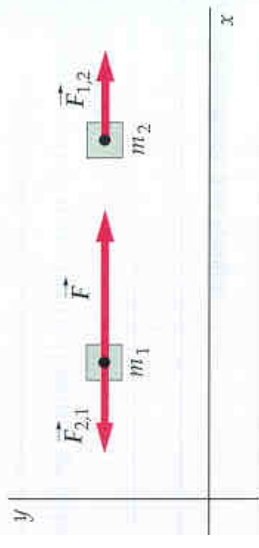


diagrama do corpo livre



➡ Pela 3ª lei de Newton: $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$

➡ Aplicando o princípio da 2ª lei de Newton às duas caixas:

caixa 1: $F - F_{2/1} = m_1 a_1$

caixa 2 : $F_{1/2} = m_2 a_2$

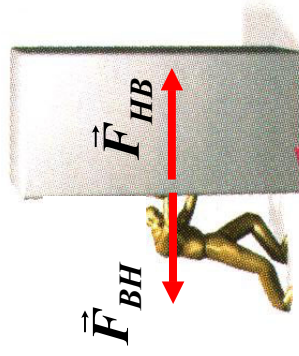
e uma vez que $a_1 = a_2 = a$ obtemos:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

e $F_{1/2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F$

Exemplo 2:

Suponha que um homem, com uma massa 80 Kg, tenta empurrar um bloco com a massa de 200 Kg, sobre o gelo. A intensidade da força que o homem exerce no bloco é de 100 N. Qual aceleração do homem e do bloco?



$$\vec{a}_b = \frac{\vec{F}_{HB}}{m_b} = \frac{100 \hat{i}}{200} = 0.5 \hat{i} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$\vec{a}_h = \frac{\vec{F}_{BH}}{m_h} = \frac{-100 \hat{i}}{80} = -1.25 \hat{i} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Exemplo 3:

Um astronauta ($m = 80\text{kg}$) está no espaço afastado da sua nave. Felizmente tem um motor propulsor que lhe garante uma força constante F durante 3s, durante esses 3 s o astronauta percorre 225m. Calcule a intensidade da força F .

Exemplo 4:

Uma partícula, inicialmente em repouso fica sujeita à acção de uma força $F=2t$ (SI). Calcule as expressões da aceleração, da velocidade e da posição da partícula em função do tempo.

Exemplo 5:

Uma partícula (massa 0.4kg) está sujeita simultaneamente à acção de duas forças

$$\text{e } \vec{F}_1 = 2\hat{i} - 4\hat{j} \text{ (N)} \quad \vec{F}_2 = -2\hat{i} + 3t\hat{j} \text{ (N)}$$

Se a partícula está em repouso na origem no instante $t=0$, calcule o vector posição da partícula e a velocidade no instante $t=1.6s$.

Exemplo 6:

Um comboio parte de uma estação acelerando durante algum tempo até atingir uma velocidade constante v . No tecto do comboio está suspenso um pêndulo.

Como seria descrito o comportamento do pêndulo por um observador dentro do comboio?

E se o observador estiver fora do comboio?

forças de atrito exemplo: movimento de um automóvel (início):



Um carro move-se a 30m/s, numa estrada horizontal. O coeficiente de atrito entre os pneus e a estrada é $\mu_{\text{est}}=0.5$ e $\mu_{\text{cin}}=0.3$. Quanto tempo o carro anda até parar se:

- se o carro trava sem bloquear as rodas?
- se o carro trava bloqueando as rodas?

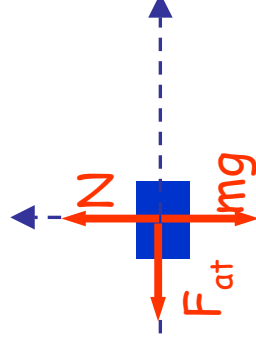
• Diagrama do corpo livre:

• vamos admitir que $a=\text{constante}$, então:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x \Delta x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x = -\frac{v_0^2}{2a_x}$$

• aplicando a 2ª lei de Newton:

$\sum F_x = ma_x$	$-\mu_{\text{est}}N = ma_x$	$a_x = -\mu_{\text{est}}g = -4.90m/s^2$
$\sum F_y = ma_y$	$N - mg = 0$	$N = mg$



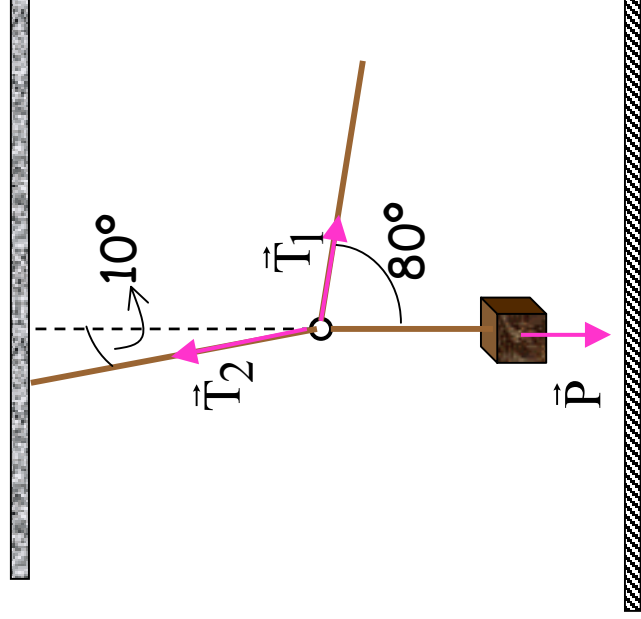
• substituindo:
$$A_x = -\frac{v_0^2}{2a_x} = \frac{30^2}{2 \times 4.90} = 91.8m$$

• se bloquear as rodas:
$$\sum F_x = ma_x \quad - \mu_{\text{cin}} N = ma_x \quad a_x = -\mu_{\text{cin}} g = -2.94m/s^2$$

$$\Rightarrow A_x = 153m$$

• Condição de equilíbrio de uma partícula

Primeira lei de Newton ou lei da inércia: Quando a resultante das forças que actuam num objecto for nula, esse objecto permanece num estado de repouso ...



Exemplo:

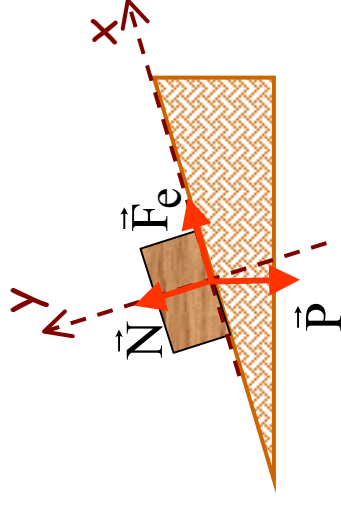
Um bloco com o peso de 3150 N está suspenso numa corda, como se mostra na figura. Qual o valor das tensões nas cordas?

Diz-se que uma partícula está em equilíbrio de translação se a soma de todas as forças que actuam sobre ela for zero, isto é:

Condição de equilíbrio

$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \sum \vec{F}_y = 0 \quad \sum \vec{F}_z = 0$$

Exemplo: Um bloco de massa m está em repouso num plano inclinado. Qual será a inclinação a partir da qual o bloco começa a deslizar?



Exemplo:

Um automóvel, num teste de embate frontal, embate num muro a uma velocidade de 100 Km/h.

- a) quanto tempo demora o carro a imobilizar-se?
- b) qual é aceleração?



Exemplo: movimento circular uniforme

Imagine-se uma partícula a descrever um movimento circular uniforme. A partícula percorre um círculo de raio R num determinado intervalo de tempo T .

Recorde-se que:

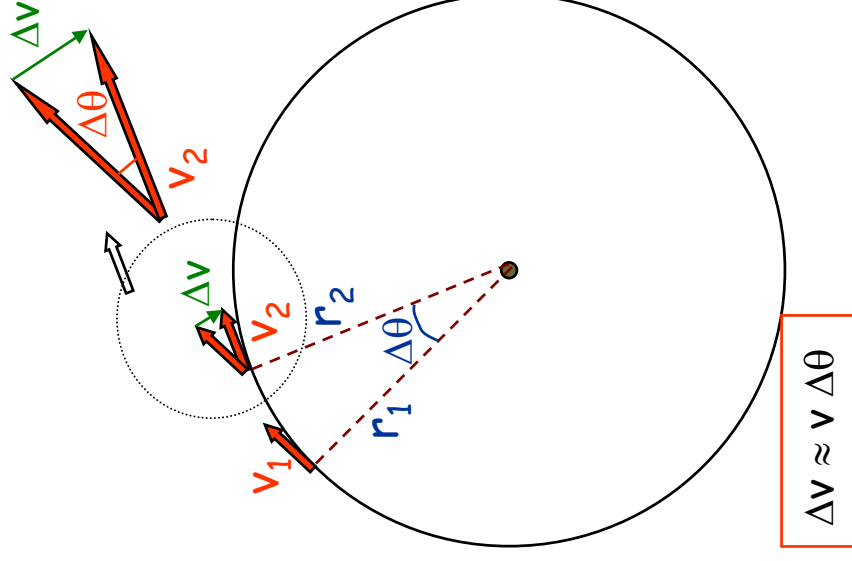
Período do movimento: T

$$\text{velocidade: } v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\text{vel. angular: } \omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = v/r$$

Se o intervalo de tempo considerado for muito pequeno, o ângulo também é pequeno e:

$$\Delta s \approx r \Delta \theta$$



mas se o intervalo de tempo considerado é muito pequeno :

$$\mathbf{a} \cong \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \frac{v \cdot \Delta \theta}{\Delta t} \quad \text{como} \quad \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = w \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = v \cdot w$$

mas $w = \frac{v}{r}$, então :

$a = \frac{v^2}{r}$, quando $\Delta t \rightarrow 0$ este termo é sempre perpendicular à

trajectória (ver figura).

• Movimento curvilíneo

Se a massa for constante:

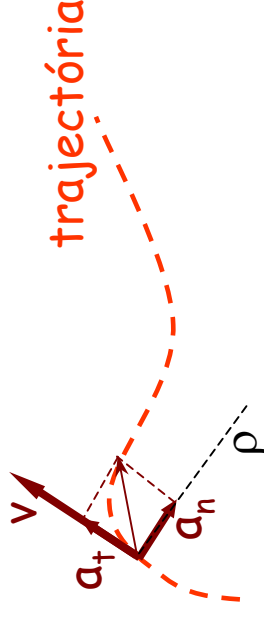
$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_t + \vec{a}_n)$$

em que :

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \quad \text{e} \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m \frac{dv}{dt} \hat{e}_t + m \frac{v^2}{\rho} \hat{e}_n$$

responsável
pela mudança
de módulo

responsável
pela mudança
de direcção



Se $F_t = 0 \Rightarrow$ O movimento é uniforme (v constante)

Se $F_n = 0 \Rightarrow$ O movimento é rectilíneo

Exemplo:

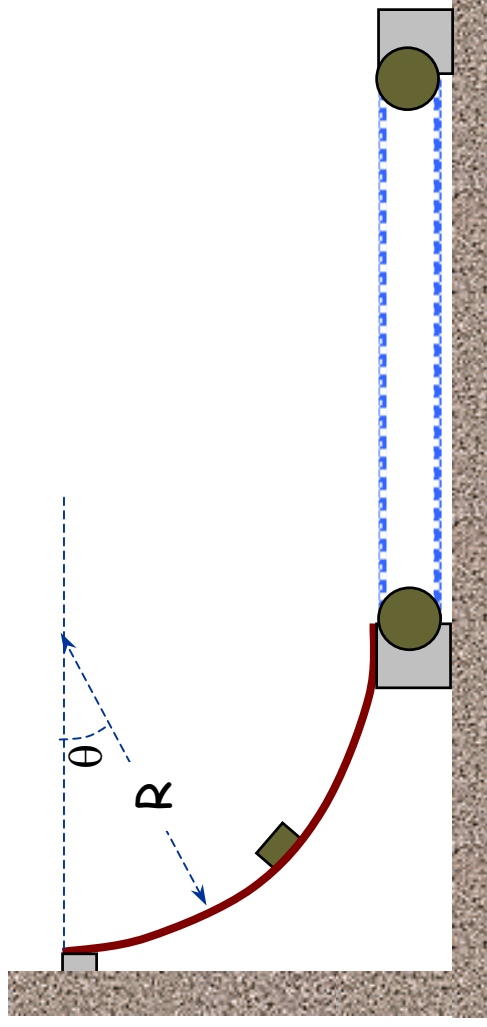
Uma moeda é colocada num disco horizontal que faz 3 rotações em 3.14s.

- a) Qual a velocidade da moeda quando se mantém sem escorregar a 5cm do centro?
- b) Qual a força de atrito que actua em a) se a massa da moeda for 2.0g
- c) Qual o coeficiente de atrito estático entre a moeda e o disco se a moeda só escorregar quando estiver a mais de 10cm do centro?

Exemplo(**):

Objectos pequenos são deixados cair numa calha curvilínea de raio R como mostra a figura. Os objectos escorregam sem atrito ao longo da calha até uma passadeira rolante.

- a) Determine a expressão da força de contacto normal entre a calha e cada um dos objectos, em termos do ângulo θ .
- b) Qual deveria ser a velocidade angular da roldana de raio r , a fim de evitar que os objectos escorreguem na passadeira rolante ao serem transferidos para esta.



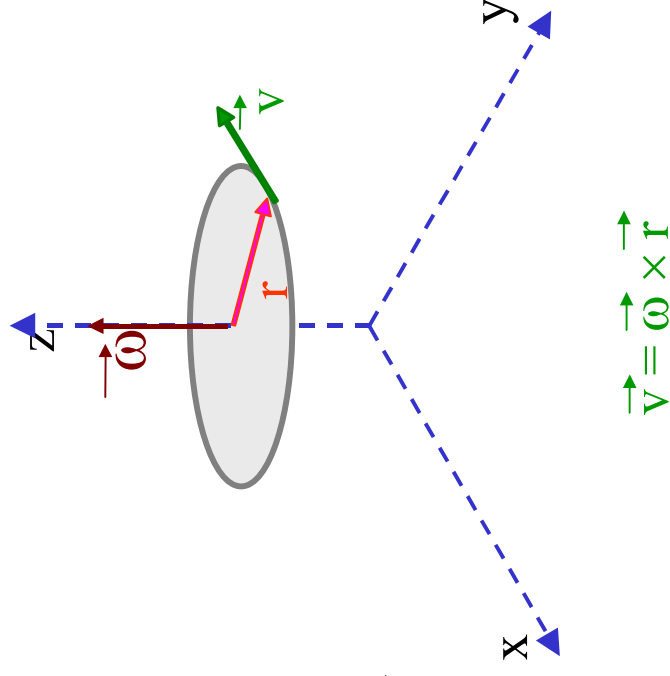
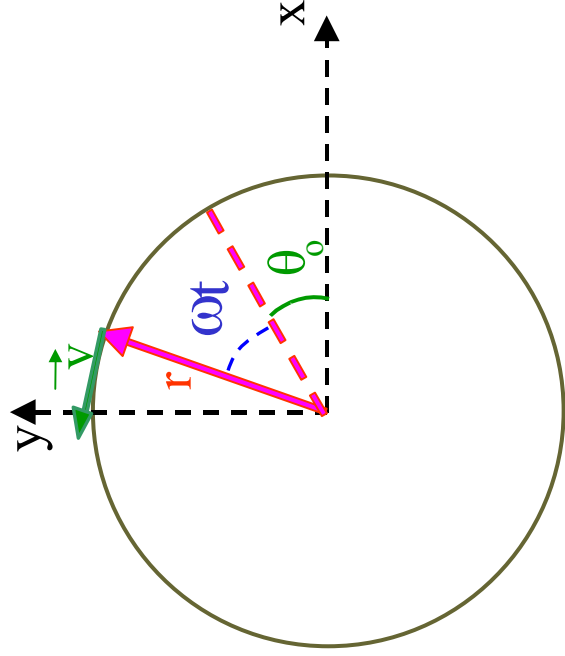
Exemplo(curvas inclinadas):

Imagine que tem que escolher o pavimento para uma curva de raio 600 m. Qual deve ser o coeficiente de atrito entre o pavimento e os pneus, para que a curva possa ser percorrida com velocidade de 80 km/h?

Se a curva se situar numa zona em que seja provável a formação de gelo, como deveria ser projectada a curva?

• Movimento circular

- deslocamento angular $\Rightarrow \theta - \theta_o$ (rad)
- velocidade angular $\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \hat{k}$ (rad/s)
- aceleração angular $\Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{k}$ (rad/s²)



Exemplo:

Um disco roda em torno de um ponto central, com uma velocidade angular constante. Qual será a posição ocupada por uma partícula de poeira situada no bordo do disco em cada instante?

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{constante} \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega dt \Leftrightarrow \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

em
coordenadas
cartesianas

$$x = r \cos [\omega (t - t_0) + \theta_0]$$

$$y = r \sin [\omega (t - t_0) + \theta_0]$$

- O movimento de uma partícula descrevendo uma trajetória circular com velocidade angular constante é um movimento periódico.
- O tempo necessário para a partícula descrever uma volta completa (uma revolução) é chamado período do movimento - T -.
- Ao número de revoluções que a partícula descreve por unidade de tempo (em cada segundo) chama-se frequência do movimento - v -.

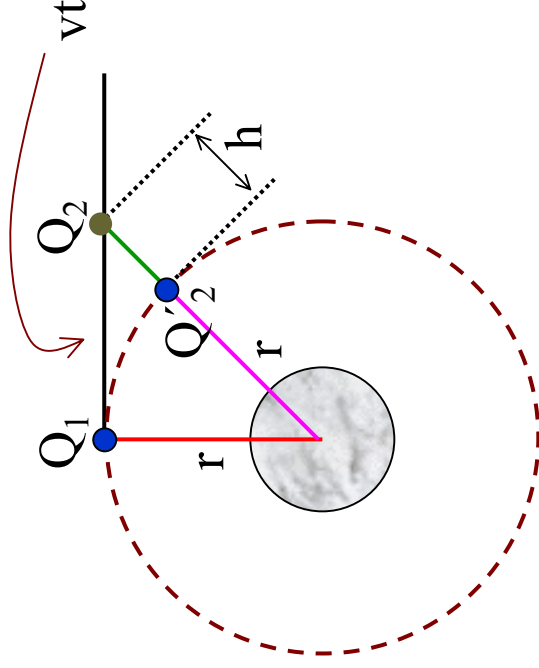
Exemplo:

Um satélite é colocado numa órbita circular em volta da Terra, movendo-se com uma velocidade constante a uma altitude de 200 Km, **porque é que o satélite não cai?**

A uma altitude de 200 Km a força gravítica no satélite é aproximadamente igual à que se exerceria se ele estivesse na superfície da Terra.

Se o satélite não acelerasse, mover-se-ia entre os pontos Q_1 e Q_2 , durante um tempo t . No entanto o satélite chega ao ponto Q'_2 , traçando uma órbita circular. Ou seja o satélite "caiu" uma distância h .

Se t for pequeno Q_2 e Q'_2 situam-se sobre a mesma linha radial.



para t muito pequeno $\Rightarrow r \ll h$, então:

$$(r + h)^2 = (vt)^2 + r^2 \Leftrightarrow h(2r + h) = v^2 t^2$$

$$2rh \cong v^2 t^2 \Leftrightarrow h = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{r} \cdot t^2$$

• Movimento circular com aceleração constante

Exercício:

Um disco roda em torno de um ponto central, com uma aceleração angular constante. Qual será a velocidade e a posição de uma partícula de poeira situada no bordo do disco em cada instante?

➔ Cálculo da velocidade angular:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \text{constante} &\Rightarrow \int_{\vec{\omega}_o}^{\vec{\omega}} d\vec{\omega} = \int_{t_o}^t \vec{\alpha} dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_o + \vec{\alpha}(t - t_o)\end{aligned}$$

➔ Cálculo da posição:

sabe-se que:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow d\theta = \omega dt$$

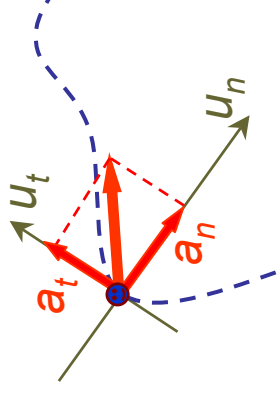
substituindo ω , e integrando:

$$\Leftrightarrow \int_{\theta_o}^{\theta} d\theta = \int_{t_o}^t [\omega_o + \alpha(t - t_o)] dt \Leftrightarrow \theta = \theta_o + \omega_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\alpha(t^2 - t_o^2)$$

Geralmente quando se estuda um movimento a análise do problema simplifica-se quando se decompõe o vector **aceleração em duas componentes** - uma **normal** e outra **tangente** à trajectória:

$$\vec{a} = a_n \hat{u}_n + a_t \hat{u}_t$$

$$|\vec{a}|^2 = a_n^2 + a_t^2$$



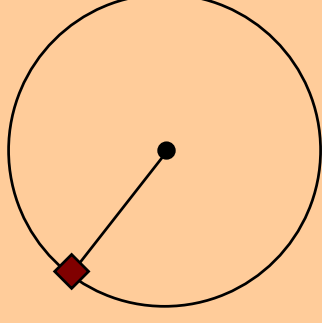
Exemplo - Movimento circular vertical:

Vamos imaginar uma pedra a girar, descrevendo uma circunferência no plano vertical, presa por um fio.

Quais são as forças que actuam na pedra?
Como variam?

Qual a condição para que a pedra descreva o círculo?

Qual é a tensão máxima no fio?



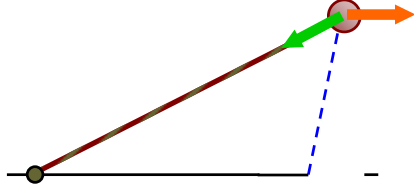
Exemplo - pêndulo cónico:

Agora a pedra gira, com o módulo da velocidade constante, no plano horizontal, suspensa por um fio que faz um ângulo θ com a vertical.

Quais são as forças que actuam na pedra?

Qual é a aceleração da pedra?

Qual é a tensão no fio?

**Exemplo:**

Num teste de derrapagem, um BMW 530i, era capaz de viajar numa pistas circular de 45.7 m de raio em 15.2 s sem derrapar.

- Qual a velocidade linear média do carro.
- Supondo esta velocidade constante, qual a aceleração centrípeta a que o automóvel fica sujeito.
- Qual o valor mínimo que deve ter coeficiente de atrito estático para que o carro não derrape?

Exemplo:

No circuito Belga de Spa-Francorchamps, um dos circuito mais rápidos da Fórmula 1, existem curvas com um raio de 3 Km que os pilotos fazem a cerca de 280 Km/h. Nestas condições qual é aceleração a que um piloto fica sujeito?

Força de atrito estático e força de atrito cinético

