Sinais e Sistemas

Transformada de *Fourier* de Tempo Discreto
DTFT
(2ª parte)

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Introdução

- Nesta aula concluímos o estudo da Transformada de *Fourier* em Tempo Discreto – DTFT
- Vamos considerar várias propriedades adicionais, das quais se destacam as propriedades da convolução e da multiplicação, semelhantes às discutidas para o caso contínuo
- Finalmente, a DTFT será aplicada ao estudo de sistemas caracterizados por equações às diferenças com coeficientes lineares

Propriedades da DTFT

- **Teorema de *Parseval***:
- Se $x[n]$ e $X(e^{j\omega})$ constituirem um par de DTFT, então:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

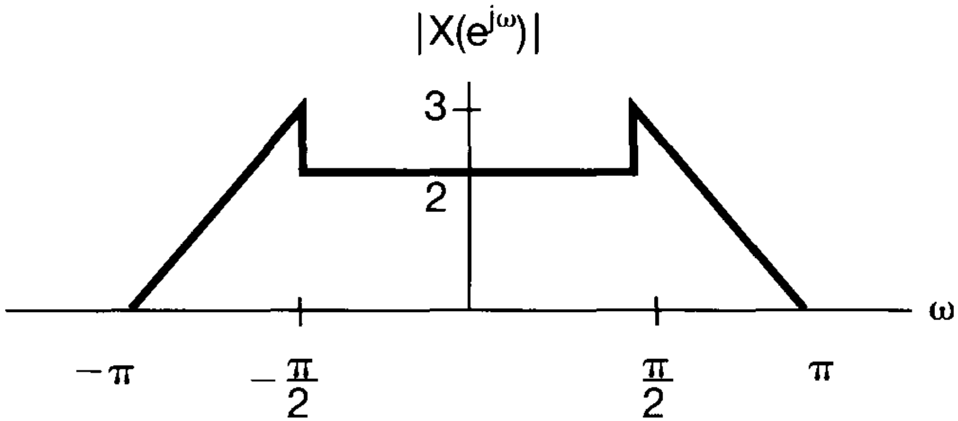
- A quantidade do lado esquerdo da equação é a energia total no sinal $x[n]$
- O T. *Parseval* mostra que essa energia também pode ser calculada pela integração da energia por unidade de frequência -> $X(e^{j\omega})/2\pi$ durante um intervalo de 2π de frequências distintas de tempo discreto

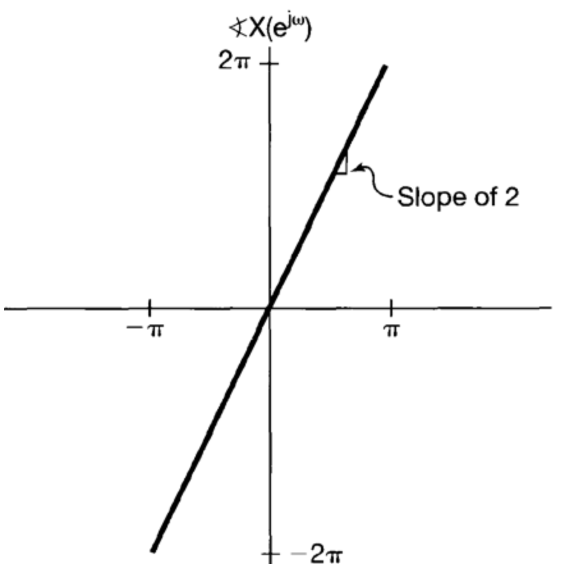
Propriedades da DTFT

- **Teorema de *Parseval*:**
- Fazendo a analogia com o caso de tempo contínuo, $|X(e^{j\omega})|^2$ é referido como a densidade espectral de energia do sinal $x[n]$
- Observar também que a equação de *Parseval* é a equivalente à dos sinais aperiódicos da relação de *Parseval*, para sinais periódicos:
  – a potência média de um sinal periódico é igual à soma das potências médias dos seus componentes harmónicos individuais

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 10
- Considere a sequência $x[n]$ cuja DTFT é representada na figura abaixo, no intervalo $-\pi \le \omega \le \pi$
- Determinar se, no domínio do tempo, $x[n]$ é periódico, real, par e de energia finita





Propriedades da DTFT

- Exemplo – 10
- Solução:
- Periodicidade no domínio do tempo implica a DTFT ser zero, excepto para impulsos localizados em vários múltiplos inteiros da frequência fundamental
  - Logo $x[n]$ não é periódico
- A partir das propriedades de simetria das TF, sabemos que uma sequência $x[n]$ real deve ter a amplitude da DTFT par e fase ímpar
  - Portanto, $x[n]$ é real

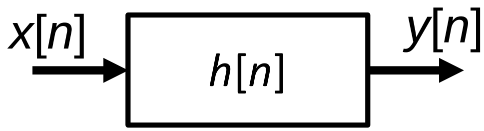
Propriedades da DTFT

- Exemplo – 10
- Solução:
- Se $x[n]$ é uma função par, então, pelas propriedades de simetria dos sinais reais, $X(e^{j\omega})$ deve ser real e par
  - Como $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|.e^{j2\omega}$, $X(e^{j\omega})$ não é uma função com valor real. Consequentemente, $x[n]$ não é par (ver Exemplo – 2)
- Para testar a propriedade de energia finita, podemos usar a relação de *Parseval*
  - Da figura conclui-se que a integração de $|X(e^{j\omega})|^2$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ resulta num valor finito - $x[n]$ possui energia finita

Propriedades da DTFT

- **Propriedade da Convolução:**
- Se $x[n]$, $h[n]$ e $y[n]$ forem a entrada, resposta ao impulso e saída, respectivamente, de um sistema LTI, de modo que:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$



- então:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- onde $X(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$, e $Y(e^{j\omega})$ são as DTFTs de $x[n]$, $h[n]$ e $y[n]$, respectivamente

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 11
- Considere um sistema de LTI com resposta impulsional:

$$h[n] = \delta[n - n_0].$$

- A resposta em frequência é dada por:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}$$

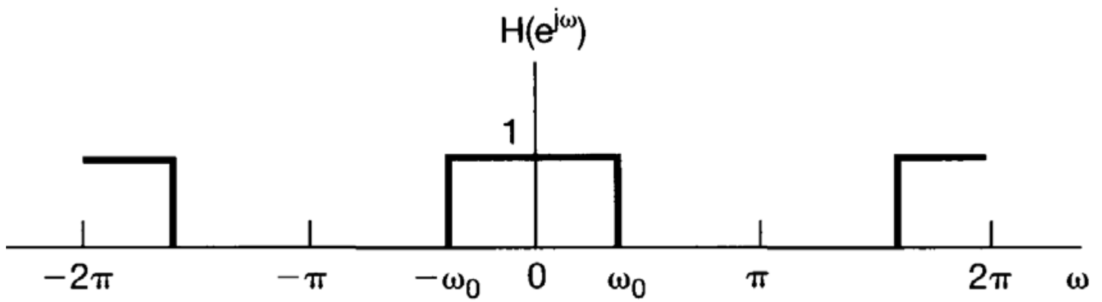
- Assim, para qualquer entrada $x[n]$ com a DTFT $X(e^{j\omega})$, a a DTFT da saída é dada por:

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

- O resultado deste exemplo é também consistente com a propriedade de deslocamento no tempo

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 12
- Considere o filtro passa-baixo ideal em tempo discreto, cuja resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ está ilustrada abaixo:

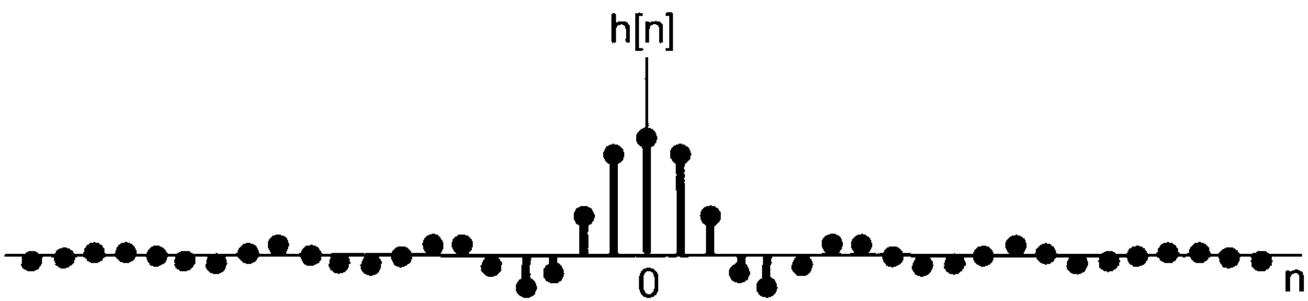


- Como a resposta ao impulso e a resposta em frequência de um sistema LTI são um par de DTFT, determina-se a resposta impulsional do LPF ideal através da resposta em frequência, usando a equação de síntese da DTFT

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 12
- Em particular, usando –π ≤ ω ≤ π como o intervalo de integração na equação de síntese, vemos através da figura que:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin\omega_c n}{\pi n}$$



Propriedades da DTFT

- Exemplo – 13
- Considere um sistema LTI com resposta ao impulso:

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

- com |α| < 1, e suponha que a entrada do sistema é:

$$x[n] = \beta^n u[n]$$

- com |β| < 1. Calculando as DTFTs de *h*[*n*] e *x*[*n*], temos:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \qquad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})}$$

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 13
- Para determinar a transformada inversa de $Y(e^{j\omega})$ recorre-se ao método de frações parciais

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\beta e^{-j\omega}} \qquad A = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \qquad B = -\frac{\beta}{\alpha-\beta}$$

- Através da propriedade linearidade, podemos obter a transformada inversa por inspeção:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^n u[n] \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^{n+1}u[n] - \beta^{n+1}u[n]]. \end{aligned}$$

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 13
- Se α = β a expansão em frações parciais não é válida. Neste caso:

$$Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)^2$$

- A expressão anterior pode ser escrita como:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{j}{\alpha} e^{j\omega} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$$

- Podemos usar a propriedade da diferenciação e do par:

$$\alpha^n u[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 13
- Forma-se assim o par:

$$n\alpha^n u[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$$

- Tendo ainda em conta o factor $e^{j\omega}$ na equação, aplica-se a propriedade do deslocamento no tempo e obtém-se:

$$(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} je^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$$

- Atendendo agora ao factor 1/α:

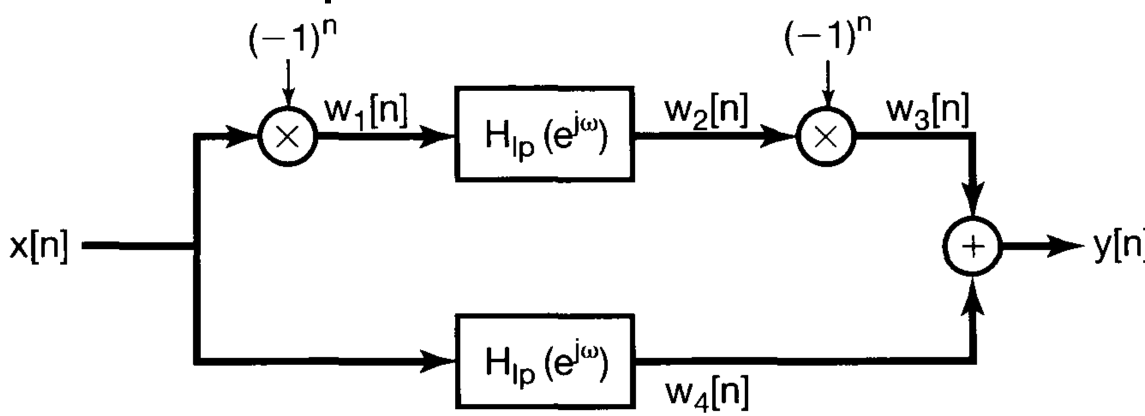
$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n+1]$$

- Como n + 1 = 0 em n = -1, fica:

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 14
- Considere o sistema mostrado abaixo com entrada $x[n]$ e a saída $y[n]$
- Os sistemas LTI da figura com resposta em frequência $H_{lp}(e^{j\omega})$ são LPFs ideais com frequência de corte π/4 e ganho 1 na banda passante



Propriedades da DTFT

- Exemplo – 14
- Considere-se, em primeiro lugar, o ramo superior para se obter $W_1(e^{j\omega})$, considerando que $(-1)^n = e^{j\pi n}$, deste modo: $w_1[n] = e^{j\pi n}.x[n]$

$$W_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$$

- Através da propriedade da convolução:

$$W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j(\omega-\pi)})$$

- Como $w_3[n] = e^{j\pi n}.w_2[n]$, podemos aplicar novamente a propriedade da translação na frequência para obter:

$$W_3(e^{j\omega}) = W_2(e^{j(\omega-\pi)}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j(\omega-2\pi)})$$

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 14
- Como a DTFT é periódica com o período 2π:

$$W_3(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega})$$

- Aplicando a propriedade da convolução ao ramo inferior, obtém-se:

$$W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

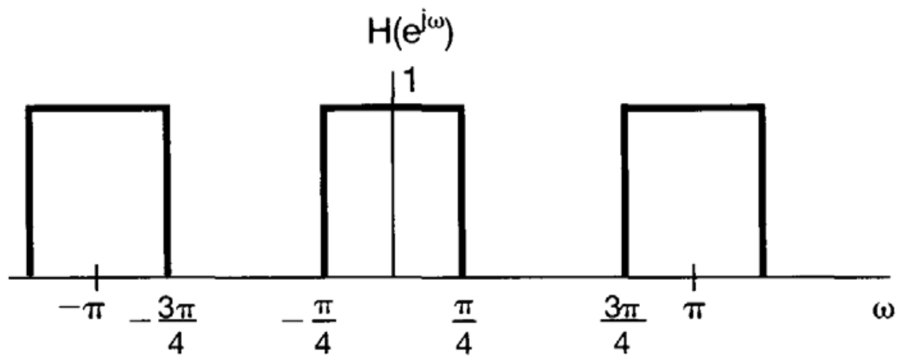
- A partir da propriedade de linearidade, obtém-se:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= W_3(e^{j\omega}) + W_4(e^{j\omega}) \\ &= [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 14
- Assim, a resposta global do sistema é dada por:

$$H(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]$$

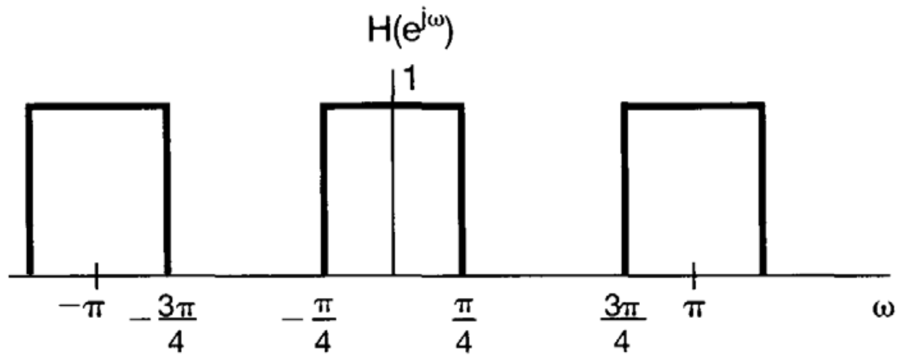


- Como vimos no Exemplo – 7 (aula anterior), $H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$ é a resposta em frequência de um filtro passa-alto ideal

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 14

$$H(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]$$



- O sistema global deixa passar as frequências baixas e as altas e “corta” as frequências entre essas duas bandas
- O filtro é chamado de *stop-band*, onde a banda de corte é a região entre: $\pi/4 < |\omega| < 3\pi/4$

Propriedades da DTFT

- **Propriedade da Multiplicação:**
- Esta propriedade é muito útil no contexto da amostragem e em aplicações de telecomunicações
- Considere-se $y[n]$ igual ao produto de $x_1[n]$ e $x_2[n]$, com as DTFTs $Y(e^{j\omega})$, $X_1(e^{j\omega})$ e $X_2(e^{j\omega})$ correspondentes. Então:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]x_2[n]e^{-j\omega n}$$

- Como:

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta$$ ------ Equação de Síntese

Propriedades da DTFT

- **Propriedade da Multiplicação:**
- Então:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta\right\} e^{-j\omega n}$$

- Trocando a ordem da soma e integração, obtém-se:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]e^{-j(\omega-\theta)n}\right]d\theta$$

- O resultado do somatório entre [.] é de $X_2(e^{j(\omega-\theta)})$ e a eq. anterior fica:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

Propriedades da DTFT

- **Propriedade da Multiplicação:**
- A equação anterior corresponde a uma convolução periódica de $X_1(e^{j\omega})$ e $X_2(e^{j\omega})$, e o integral nesta equação pode ser calculado em qualquer intervalo de comprimento 2π
- A forma usual da convolução (na qual o integral varia de -∞ a +∞) é frequentemente chamada de convolução aperiódica para se distinguir da convolução periódica
- O mecanismo da convolução periódica é ilustrado no exemplo seguinte

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 15
- Considere o problema de encontrar a DTFT $X(e^{j\omega})$ de um sinal $x[n]$, que é o produto de dois outros sinais, isto é:

$$x[n] = x_1[n]x_2[n]$$

- onde:

$$x_1[n] = \frac{\sin(3\pi n/4)}{\pi n} \qquad x_2[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

- A partir da propriedade de multiplicação, sabemos que $X(e^{j\omega})$ é a convolução periódica de $X_1(e^{j\omega})$ e $X_2(e^{j\omega})$, onde o integral pode ser avaliado em qualquer intervalo de comprimento 2π

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 15
- Escolhendo o intervalo: -π < Θ < π, obtém-se:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

- A equação anterior assemelha-se à convolução aperiódica, excepto pelo facto de que a integração é limitada ao intervalo -π < Θ < π
- No entanto, podemos converter a equação numa convolução comum, definindo:

$$\hat{X}_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} X_1(e^{j\omega}) & \text{for } -\pi < \omega \leq \pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 15
- Substituíndo $X_1(e^{j\omega})$ na equação por $\widehat{X}_1(e^{j\omega})$ e sabendo que $\widehat{X}_1(e^{j\omega})$ é zero para $|\Theta| > \pi$, fica:

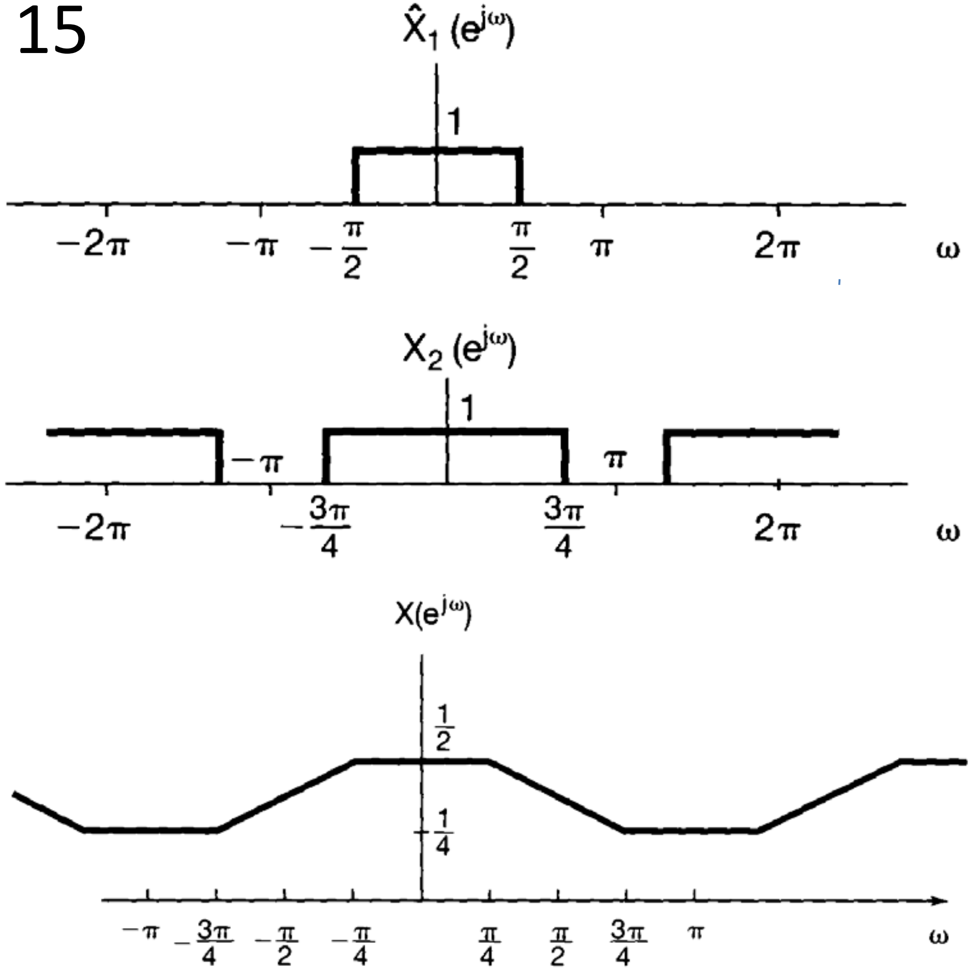
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

- $X(e^{j\omega})$ é $1/2\pi$ vezes a convolução aperiódica do impulso retangular $\widehat{X}_1(e^{j\omega})$ com a onda quadrada periódica $X_2(e^{j\omega})$

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 15



Propriedades da DTFT

- **Sistemas caracterizados por Equações às Diferenças com Coeficientes Lineares:**
- Uma equação às diferenças linear de coeficientes constantes para um sistema LTI com entrada $x[n]$ e saída $y[n]$ tem a forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- A classe de sistemas descritos por estas equações às diferenças é bastante importante e útil

Propriedades da DTFT

- **Sistemas caracterizados por Equações às Diferenças com Coeficientes Lineares:**
- Vamos aproveitar várias das propriedades da DTFT para determinar a resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ de um sistema LTI descrito por esta equação
- Para tal serão utilizadas as propriedades da convolução, linearidade e translação no tempo da DTFT
- Sejam $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$ e $H(e^{j\omega})$ as DTFTs da entrada $x[n]$, saída $y[n]$ e resposta de impulso $h[n]$, respectivamente

Propriedades da DTFT

- **Sistemas caracterizados por Equações às Diferenças com Coeficientes Lineares:**
- Através da propriedade da convolução da DTFT, temos que:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

- Aplicando a DTFT nos dois lados da equação e usando as propriedades de linearidade e da translação no tempo, obtemos a expressão:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

Propriedades da DTFT

- **Sistemas caracterizados por Equações às Diferenças com Coeficientes Lineares:**
- ou, de forma equivalente:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

- Comparando esta equação com o caso da Transformada de *Laplace* nota-se que o quociente entre polinómios, em tempo discreto é dado pela variável $e^{j\omega}$ em vez de *S*
- A resposta em frequência dum sistema LTI especificada por uma equação às diferenças pode ser obtida por inspeção

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 16
- Considere o sistema LTI, causal, caracterizado pela equação à diferença:

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

- com $|a| < 1$. A resposta em frequência do sistema é dada por:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

- Este resultado é o mesmo do Exemplo - 1, da sequência $u[n]$. Assim, a resposta impulsional do sistema é:

$$h[n] = a^n u[n]$$

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 17
- Considere o sistema LTI, causal, caracterizado pela equação à diferença:

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

- A resposta em frequência do sistema é dada por:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$$

- Como primeiro passo para obter a resposta ao impulso, factoriza-se o denominador:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}.$$

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 17
- Usando agora o método das frações parciais, fica:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

- A transformada inversa de cada termo pode ser obtida por inspeção, em que o resultado é:

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 18
- Considere o sistema LTI do exemplo anterior com a entrada seguinte:

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

- Para determinar *y*[*n*]

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \left[\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}\right]\left[\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right]$$

$$= \frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-e\omega})^2}$$

Propriedades da DTFT

- Exemplo – 18
- Usando agora o método das frações parciais, fica:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{B_{11}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B_{12}}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{B_{21}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

- Resolvendo fica:

$$B_{11} = -4, \quad B_{12} = -2, \quad B_{21} = 8$$

- e:

$$Y(e^{j\omega}) = -\frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

- Consultando a tabela de pares de DFTTs, fica:

$$y[n] = \left\{-4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} u[n]$$

Propriedades da DTFT

- Exercício – 1
- Use a Equação de Análise para determinar as DTFTs:

- a) $(1/2)^{n-1}.u[n-1]$

- b) $(1/2)^{|n-1|}$

Propriedades da DTFT

- Exercício – 1
- Resolução:
- a)

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^{n-1} e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^{n} e^{-j\omega(n+1)} \\
&= e^{-j\omega} \frac{1}{(1-(1/2)e^{-j\omega})}
\end{aligned}$$

Propriedades da DTFT

- Exercício – 1
- Resolução:
- b)

Resultado da alínea a)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} (1/2)^{-(n-1)}e^{-j\omega n} + \sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^{n-1}e^{-j\omega n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{0} (1/2)^{-(n-1)}e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^{(n+1)}e^{j\omega n} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-(1/2)e^{j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-(1/2)e^{j\omega}} + e^{-j\omega}\frac{1}{(1-(1/2)e^{-j\omega})} = \frac{0.75e^{-j\omega}}{1.25-\cos\omega}$$

Propriedades da DTFT

- Exercício – 2
- Use a Equação de Síntese para determinar as DTFTs inversas de:

- a) $X_1(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\{2\pi\delta(\omega - 2\pi k) + \pi\delta(\omega - \frac{\pi}{2} - 2\pi k) + \pi\delta(\omega + \frac{\pi}{2} - 2\pi k)\}$

- b) $X_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2j, & 0 < \omega \leq \pi \\ -2j, & -\pi < \omega \leq 0 \end{cases}$

Propriedades da DTFT

- Exercício – 2
- Resolução:
- a)

$$
\begin{aligned}
x_1[n] &= (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\
&= (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} [2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - \pi/2) + \pi\delta(\omega + \pi/2)]e^{j\omega n}d\omega \\
&= e^{j0} + (1/2)e^{j(\pi/2)n} + (1/2)e^{-j(\pi/2)n} \\
&= 1 + \cos(\pi n/2)
\end{aligned}
$$

Propriedades da DTFT

- Exercício – 2
- Resolução:
- b)

$$
\begin{aligned}
x_2[n] &= (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\
&= -(1/2\pi)\int_{-\pi}^{0} 2je^{j\omega n}d\omega + (1/2\pi)\int_{0}^{\pi} 2je^{j\omega n}d\omega \\
&= (j/\pi)\left[-\frac{1-e^{-jn\pi}}{jn} + \frac{e^{jn\pi}-1}{jn}\right] \\
&= -(4/(n\pi))\sin^2(n\pi/2)
\end{aligned}
$$

Propriedades da DTFT

- Exercício – 3
- Use a tabela das propriedades das DTFTs para calcular:

- a) $x_1[n] = x[1 - n] + x[-1 - n]$

- b) $x_2[n] = (x^*[-n] + x[n])/2$

- c) $x_3[n] = (n - 1)^2 . x[n]$

Propriedades da DTFT

- Exercício – 3
- Resolução:
- a)

$$x[-n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{-j\omega})$$

$$x[-n+1] \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega n} X(e^{-j\omega})$$

$$x[-n-1] \xleftrightarrow{FT} e^{j\omega n} X(e^{-j\omega})$$

$$x_1[n] = x[-n+1] + x[-n-1] \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega n} X(e^{-j\omega}) + e^{j\omega n} X(e^{-j\omega})$$

$$\xleftrightarrow{FT} 2X(e^{-j\omega})\cos\omega$$

Propriedades da DTFT

- Exercício – 3
- Resolução:
- b)

$$x[-n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega})$$

$$x^*[-n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} X^*(e^{j\omega})$$

$$x_2[n] = (1/2)(x^*[-n] + x[n]) \quad \overset{FT}{\longleftrightarrow} \quad (1/2)(X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega}))$$

$$\overset{FT}{\longleftrightarrow} \quad \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$$

Propriedades da DTFT

- Exercício – 3
- Resolução:
- c)

$$n x[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$n^2 x[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} -\frac{d^2X(e^{j\omega})}{d\omega^2}$$

$$x_3[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} -\frac{d^2X(e^{j\omega})}{d\omega^2} - 2j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} + X(e^{j\omega})$$

Propriedades da DTFT

- Exercício – 4
- Considere um sistema LTI causal descrito pela equação às diferenças:
  - $y[n] + 1/2y[n-1] = x[n]$
- a) Determine a resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ do sistema
- b) Qual é a resposta do sistema para cada uma das seguintes entradas:
- i) $x[n] = (1/2)^n.u[n]$
- ii) $x[n] = \delta[n] + (1/2).\delta[n-1]$

Propriedades da DTFT

- Exercício – 4
- Resolução:
- a) $$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$
- b) i) $$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right] \\ &= \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1/2}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

$$y[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Propriedades da DTFT

- Exercício – 4
- Resolução:

- b) ii)

$$X(e^{j\omega}) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}$$

$$Y(e^{j\omega}) = 1$$

$$y[n] = \delta[n]$$

Bibliografia

- Oppenheim, A.V. , Willsky, A.S. and Young, I.T., Signals and Systems, Prentice- Hall Signal Processing Series, 1983