Teoria de apoio à resolução

- **Definição de transformada de Laplace:** $L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-s\cdot t} \cdot f(t)\, dt = \lim_{a\to+\infty} \int_0^{a} e^{-s\cdot t} \cdot f(t)\, dt$

- **Propriedade da Linearidade:** $L\{A\cdot f_1(t) + B\cdot f_2(t)\} = A\cdot L\{f_1(t)\} + B\cdot L\{f_2(t)\}$

- **Propriedade da Translação:** $L\{e^{a\cdot t} \cdot f(t)\} = F(s-a),\ \text{sendo que}: F(s) = L\{f(t)\}$

- **Propriedade da Transformada do Produto:** $L\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} F(s);\ F(s) = L\{f(t)\}$

- **Várias**:

→ $L\{u_a(t)\} = \frac{e^{-a\cdot s}}{s}, \quad com:\ u_a(t) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 < t < a \\ 1 & se \quad t > a \end{cases}$

→ $L\{u_a(t)\cdot f(t-a)\} = F(s)\cdot e^{-a\cdot s}, \quad com:\ F(s) = L\{f(t)\}$

1. Use a definição para determinar a transformada de Laplace das seguintes funções:

a) $f(t)=1$

R:

Sabendo que a definição de transformada de Laplace é dada por:

$$L\{f(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-s\cdot t}\cdot f(t)\,dt=\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} e^{-s\cdot t}\cdot f(t)\,dt$$

Então teremos que:

$$f(t)=1\Rightarrow L\{1\}=\int_0^{+\infty} e^{-s\cdot t}\cdot 1\,dt=\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} e^{-s\cdot t}\cdot 1\,dt=\text{☼}$$

Cálculos Auxiliares	$\int_0^{a}\underbrace{e^{-s\cdot t}}_{e^u\Rightarrow\left\{\begin{matrix}u=-s\cdot t\\ u'=-s\end{matrix}\right\}}\cdot 1\,dt=-\frac{1}{s}\cdot\int_0^{a}\underbrace{-s}_{u'}\cdot\underbrace{e^{-s\cdot t}}_{e^u}\,dt=-\frac{1}{s}\cdot\left[e^{-s\cdot t}\right]_0^a=-\frac{1}{s}\cdot\left[e^{-s\cdot a}-e^{-s\cdot 0}\right]=$ $=-\frac{1}{s}\cdot\left[e^{-s\cdot a}-1\right]=-\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot a}+\frac{1}{s}$

Substituindo o resultado obtido em ☼, teremos que:

$$\text{☼}=\lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot a}+\frac{1}{s}\right)=\lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot a}\right)+\frac{1}{s}$$

Verificando agora a forma como poderá variar o limite teremos que:

Se: $s=0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{0}\cdot e^{-0\cdot a}\to$ Impossível de resolver;

Se: $s<0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{-s}\cdot e^{-(-s)\cdot a}=\frac{e^{s\cdot a}}{s}\to+\infty$

Se: $s>0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot a}=-\frac{1}{s\cdot e^{s\cdot a}}\to 0$

Assim sendo, teremos então que: $L\{1\}=\frac{1}{s},\quad s>0$

b) $h(t) = sen(bt)$

R:

Sabendo que a definição de transformada de Laplace é dada por:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-s\cdot t}\cdot f(t)\,dt = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} e^{-s\cdot t}\cdot f(t)\,dt$$

Então teremos que:

$$h(t) = sen(bt) \Rightarrow L\{sen(bt)\} = \int_0^{+\infty} e^{-s\cdot t}\cdot sen(bt)\,dt = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} e^{-s\cdot t}\cdot sen(bt)\,dt = ☼$$

Cálculos Auxiliares	$\int_0^a \underbrace{e^{-s\cdot t}}_{u}\cdot\underbrace{sen(bt)}_{v'}\,dt = [u\cdot v]_0^a - \int_0^a u'v\,dt =$
$u = e^{-s\cdot t} \Rightarrow u' = -s\cdot e^{-s\cdot t}$ $v' = sen(bt) \Rightarrow$ $\Rightarrow v = \int sen(bt)dt =$ $= -\frac{1}{b}\cdot\int -b\cdot sen(bt)dt =$ $= -\frac{1}{b}\cdot\cos(bt)$ $v' = \cos(bt) \Rightarrow$ $\Rightarrow v = \int \cos(bt)dt =$ $= \frac{1}{b}\cdot\int b\cdot\cos(bt)dt =$ $= \frac{1}{b}\cdot sen(bt)$	$= \left[e^{-s\cdot t}\cdot\left(-\frac{1}{b}\cdot\cos(bt)\right)\right]_0^a - \int_0^a -s\cdot e^{-s\cdot t}\cdot\left(-\frac{1}{b}\cdot\cos(bt)\right)dt =$ $= \left[-\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot\cos(bt)\right]_0^a - \frac{s}{b}\cdot\int_0^a \underbrace{e^{-s\cdot t}}_{u}\cdot\underbrace{\cos(bt)}_{v'}\,dt =$ [1] $= \left[-\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot\cos(bt)\right]_0^a - \frac{s}{b}\cdot\left[\left[\underbrace{e^{-s\cdot t}}_{u}\cdot\underbrace{\frac{sen(bt)}{b}}_{v}\right]_0^a - \int_0^a \underbrace{-s\cdot e^{-s\cdot t}}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{1}{b}\cdot sen(bt)}_{v}\,dt\right] =$ $= \left[-\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot\cos(bt)\right]_0^a - \frac{s}{b}\cdot\left[\left[\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot sen(bt)\right]_0^a + \frac{s}{b}\cdot\int_0^a e^{-s\cdot t}\cdot sen(bt)\,dt\right] =$ $= \left[-\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot\cos(bt)\right]_0^a - \frac{s}{b}\cdot\left[\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot sen(bt)\right]_0^a - \frac{s^2}{b^2}\cdot\int_0^a e^{-s\cdot t}\cdot sen(bt)\,dt = \ldots$

Conforme se pode verificar trata-se da integração de uma função cíclica, que assume alternadamente integrais em função do $sen(bt)$ e do $\cos(bt)$, logo teremos que:

[1] Tem que se proceder a uma nova integração por partes.

Cálculos Auxiliares

$$\int_0^a e^{-s\cdot t}\cdot sen(bt)\,dt=\left[-\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot\cos(bt)\right]_0^a-\frac{s}{b}\cdot\left[\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot sen(bt)\right]_0^a-\frac{s^2}{b^2}\cdot\int_0^a e^{-s\cdot t}\cdot sen(bt)\,dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a e^{-s\cdot t}\cdot sen(bt)\,dt+\frac{s^2}{b^2}\cdot\int_0^a e^{-s\cdot t}\cdot sen(bt)\,dt=\left[-\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot\cos(bt)\right]_0^a-\frac{s}{b}\cdot\left[\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot sen(bt)\right]_0^a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{s^2}{b^2}\right)\cdot\int_0^a e^{-s\cdot t}\cdot sen(bt)\,dt=\left[-\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot\cos(bt)\right]_0^a-\frac{s}{b}\cdot\left[\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot sen(bt)\right]_0^a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b^2+s^2}{b^2}\right)\cdot\int_0^a e^{-s\cdot t}\cdot sen(bt)\,dt=\left[-\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot\cos(bt)\right]_0^a-\frac{s}{b}\cdot\left[\frac{e^{-s\cdot t}}{b}\cdot sen(bt)\right]_0^a=$$

$$=\frac{\left[-\frac{e^{-s\cdot a}}{b}\cdot\cos(ba)-\left(-\frac{e^{-s\cdot 0}}{b}\cdot\cos(b\cdot 0)\right)\right]-\frac{s}{b}\cdot\left[\frac{e^{-s\cdot a}}{b}\cdot sen(ba)-\frac{e^{-s\cdot 0}}{b}\cdot sen(b\cdot 0)\right]}{\frac{b^2+s^2}{b^2}}=$$

$$=\frac{\left[-\frac{e^{-s\cdot a}}{b}\cdot\cos(ba)+\frac{1}{b}\right]-\frac{s}{b}\cdot\left[\frac{e^{-s\cdot a}}{b}\cdot sen(ba)\right]}{\frac{b^2+s^2}{b^2}}=\frac{-\frac{e^{-s\cdot a}}{b}\cdot\cos(ba)+\frac{1}{b}-\frac{s\cdot e^{-s\cdot a}}{b^2}\cdot sen(ba)}{\frac{b^2+s^2}{b^2}}=$$

$$=\frac{-\frac{e^{-s\cdot a}}{b}\cdot\left(\cos(ba)+\frac{s}{b}\cdot sen(ba)\right)+\frac{1}{b}}{\frac{b^2+s^2}{b^2}}=\frac{-\frac{e^{-s\cdot a}}{b}\cdot\left(\cos(ba)+\frac{s}{b}\cdot sen(ba)\right)}{\frac{b^2+s^2}{b^2}}+\frac{\frac{1}{b}}{\frac{b^2+s^2}{b^2}}=$$

$$=-\frac{b^2\cdot e^{-s\cdot a}}{b\cdot\left(b^2+s^2\right)}\cdot\left(\cos(ba)+\frac{s}{b}\cdot sen(ba)\right)+\frac{b^2}{b\cdot\left(b^2+s^2\right)}=$$

$$=-\frac{b\cdot e^{-s\cdot a}}{b^2+s^2}\cdot\left(\cos(ba)+\frac{s}{b}\cdot sen(ba)\right)+\frac{b}{b^2+s^2}$$

Substituindo o resultado obtido em ☼, teremos que:

$$☼=\lim_{a\to+\infty}\left[-\frac{b\cdot e^{-s\cdot a}}{b^2+s^2}\cdot\left(\cos(ba)+\frac{s}{b}\cdot sen(ba)\right)\right]+\frac{b}{b^2+s^2}$$

Verificando agora a forma como poderá variar o limite teremos que:

Se: $s=0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{b\cdot e^{-0\cdot\infty}}{b^2+0^2}\cdot\left(\cos(b\cdot\infty)+\frac{0}{b}\cdot sen(b\cdot\infty)\right)\rightarrow$ Impossível de resolver;

Se: $s<0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{b\cdot e^{-(-s)\cdot a}}{b^2+(-s)^2}\cdot\left(\cos(ba)-\frac{s}{b}\cdot sen(ba)\right)\rightarrow -\infty$

Se: $s>0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{b\cdot e^{-s\cdot a}}{b^2+s^2}\cdot\left(\cos(ba)+\frac{s}{b}\cdot sen(ba)\right)\rightarrow 0$

Assim sendo, teremos então que: $L\{sen(bt)\}=\frac{b}{b^2+s^2},\quad s>0$

c) $r(t)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad 0<t<1\\ t & \text{se} \quad t>1\end{cases}$

R:

Sabendo que a definição de transformada de Laplace é dada por:

$$L\{f(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-s\cdot t}\cdot f(t)\,dt=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-s\cdot t}\cdot f(t)\,dt$$

Então teremos que:

$$r(t)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad 0<t<1\\ t & \text{se} \quad t>1\end{cases}\Rightarrow L\{r(t)\}=\int_0^1 e^{-s\cdot t}\cdot 0\,dt+\int_1^{+\infty} e^{-s\cdot t}\cdot t\,dt=\lim_{a\to+\infty}\int_1^a e^{-s\cdot t}\cdot t\,dt=☼$$

Cálculos Auxiliares	$\int_0^a \underbrace{e^{-s\cdot t}}_{v'}\cdot\underbrace{t}_{u}\,dt=[u\cdot v]_1^a-\int_1^a u'v\,dt=\left[t\cdot\left(-\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot t}\right)\right]_1^a-\int_1^a 1\cdot\left(-\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot t}\right)dt=$
$u=t\Rightarrow u'=1$ $v'=e^{-s\cdot t}\Rightarrow$ $\Rightarrow v=-\frac{1}{s}\cdot\int\underbrace{-s}_{u'}\cdot\underbrace{e^{-s\cdot t}}_{e^u}dt=$ $=-\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot t}$	$=\left[-\frac{t}{s}\cdot e^{-s\cdot t}\right]_1^a+\frac{1}{s}\cdot\int_1^a e^{-s\cdot t}\,dt=\left[-\frac{t}{s}\cdot e^{-s\cdot t}\right]_1^a+\frac{1}{s}\cdot\left(-\frac{1}{s}\right)\cdot\int_1^a\underbrace{-s}_{u'}\cdot\underbrace{e^{-s\cdot t}}_{e^u}\,dt=$ $=\left[-\frac{t}{s}\cdot e^{-s\cdot t}\right]_1^a-\frac{1}{s^2}\cdot\left[e^{-s\cdot t}\right]_1^a=-\frac{a}{s}\cdot e^{-s\cdot a}-\left(-\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot 1}\right)-\frac{e^{-s\cdot a}}{s^2}+\frac{e^{-s\cdot 1}}{s^2}=$

	$=-\frac{a}{s}\cdot e^{-s\cdot a}+\frac{1}{s}\cdot e^{-s}-\frac{e^{-s\cdot a}}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s^2}=\left(-\frac{a}{s}-\frac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-s\cdot a}+\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-s}=$ $=\left(\frac{-s\cdot a-1}{s^2}\right)\cdot e^{-s\cdot a}+\left(\frac{s+1}{s^2}\right)\cdot e^{-s}$

Substituindo o resultado obtido em ☼, teremos que:

$$☼=\lim_{a\to+\infty}\left[\left(\frac{-s\cdot a-1}{s^2}\right)\cdot e^{-s\cdot a}\right]+\left(\frac{s+1}{s^2}\right)\cdot e^{-s}$$

Verificando agora a forma como poderá variar o limite teremos que:

Se: $s=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{-0\cdot a-1}{0^2}\right)\cdot e^{-0\cdot a}\to$ Impossível de resolver;

Se: $s<0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{-(-s)\cdot a-1}{(-s)^2}\right)\cdot e^{-(-s)\cdot a}\to+\infty$

Se: $s>0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{-s\cdot a-1}{s^2}\right)\cdot e^{-s\cdot a}\to 0$

Assim sendo, teremos então que: $L\{r(t)\}=\left(\frac{s+1}{s^2}\right)\cdot e^{-s}, \quad s>0$

d) $g(t)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0<t<4 \\ 4 & \text{se} \quad 4<t<8 \\ 0 & \text{se} \quad t>8 \end{cases}$

R:

Sabendo que a definição de transformada de Laplace é dada por:

$$L\{f(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-s\cdot t}\cdot f(t)\,dt=\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} e^{-s\cdot t}\cdot f(t)\,dt$$

Então teremos que:

$$g(t)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0<t<4 \\ 4 & \text{se} \quad 4<t<8 \\ 0 & \text{se} \quad t>8 \end{cases} \Rightarrow L\{g(t)\}=\int_0^4 e^{-s\cdot t}\cdot 0\,dt+\int_4^8 e^{-s\cdot t}\cdot 4\,dt+\int_8^{+\infty} e^{-s\cdot t}\cdot 0\,dt=\int_4^8 e^{-s\cdot t}\cdot 4\,dt=$$

$$=4\cdot\left(-\frac{1}{s}\right)\cdot\int_4^8 \underbrace{-s}_{u'}\cdot\underbrace{e^{-s\cdot t}}_{e^u}\,dt=-\frac{4}{s}\cdot\left[e^{-s\cdot t}\right]_4^8=-\frac{4}{s}\cdot\left(e^{-8s}-e^{-4s}\right)$$

2. Utilize a propriedade da linearidade para determinar: $L\left\{5 \cdot sen(2t) + 9t^2\right\}$.

R:

Sabendo que a propriedade da linearidade para as transformadas de Laplace é dada por:

$$L\{A \cdot f_1(t) + B \cdot f_2(t)\} = A \cdot L\{f_1(t)\} + B \cdot L\{f_2(t)\}$$

Então:

$$L\left\{5 \cdot sen(2t) + 9t^2\right\} = 5 \cdot L\{sen(2t)\} + 9 \cdot L\left\{t^2\right\} \Leftrightarrow^{2} L\left\{5 \cdot sen(2t) + 9t^2\right\} = 5 \cdot \frac{2}{s^2 + 2^2} + 9 \cdot \frac{2!}{s^{2+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L\left\{5 \cdot sen(2t) + 9t^2\right\} = \frac{10}{s^2 + 4} + 9 \cdot \frac{2 \times 1}{s^3} \Leftrightarrow L\left\{5 \cdot sen(2t) + 9t^2\right\} = \frac{10}{s^2 + 4} + \frac{18}{s^3},\ s > 0$$

3. Utilize a propriedade da translação para determinar: $L\left\{e^{at} \cdot sen(bt)\right\}$.

R:

Sabendo que a propriedade da translação para as transformadas de Laplace é dada por:

$$L\left\{e^{a \cdot t} \cdot f(t)\right\} = F(s-a),\ \text{sendo que}: F(s) = L\{f(t)\}$$

Então: $L\left\{e^{at} \cdot \underbrace{sen(bt)}_{f(t)}\right\} = F(s-a)$

Antes de mais teremos que determinar: $F(s)$, pelo que teremos:

$$F(s) = L\{f(t)\} \Leftrightarrow F(s) = L\{sen(bt)\} \Leftrightarrow F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} \Rightarrow F(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

Logo teremos que: $L\left\{e^{at} \cdot sen(bt)\right\} = \dfrac{b}{(s-a)^2 + b^2}$

[2] Consultando o formulário temos que: $L\{sen(bt)\} = \frac{b}{s^2 + b^2}$, onde: $\{b = 2\}$ e que: $L\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, onde: $\{n = 2\}$

4. Utilize a propriedade da transformada do produto $t^n \cdot f(t)$ para determinar: $L\{t^2 \cdot \cos(at)\}$.

R:

Sabendo que a propriedade da transformada de um produto para as transformadas de Laplace é dada por: $L\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \cdot \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$, onde : $F(s) = L\{f(t)\}$

Então: $L\left\{ \underbrace{t^2}_{n=2} \cdot \underbrace{\cos(at)}_{f(t)} \right\} = (-1)^2 \cdot \dfrac{d^2}{ds^2} F(s) = \dfrac{d^2}{ds^2} F(s)$

Antes de mais teremos que determinar: $F(s)$, para posteriormente se calcularem as suas derivadas até à ordem $n = 2$:

$$F(s) = L\{f(t)\} \Leftrightarrow F(s) = L\{\cos(at)\} \Leftrightarrow^{3} F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

Então: $\dfrac{d}{ds} F(s) = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2 + a^2}\right) = \dfrac{(s)'_s \cdot (s^2 + a^2) - (s) \cdot (s^2 + a^2)'_s}{(s^2 + a^2)^2} = \dfrac{s^2 + a^2 - 2s^2}{(s^2 + a^2)^2} = \dfrac{a^2 - s^2}{(s^2 + a^2)^2}$

$$\frac{d^2}{ds^2} F(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds} F(s)\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{a^2 - s^2}{(s^2 + a^2)^2}\right) = \frac{(a^2 - s^2)'_s \cdot (s^2 + a^2)^2 - (a^2 - s^2) \cdot \left((s^2 + a^2)^2\right)'_s}{\left((s^2 + a^2)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{-2s \cdot (s^2 + a^2)^2 - (a^2 - s^2) \cdot 2 \cdot (s^2 + a^2)^{2-1} \cdot (s^2 + a^2)'_s}{(s^2 + a^2)^4} =$$

$$= \frac{2s \cdot (s^2 + a^2) \cdot \left(-(s^2 + a^2) - 2 \cdot (a^2 - s^2)\right)}{(s^2 + a^2)^4} = \frac{2s \cdot (-s^2 - a^2 - 2a^2 + 2s^2)}{(s^2 + a^2)^3} = \frac{2 \cdot s^3 - 6 \cdot s \cdot a^2}{(s^2 + a^2)^3}$$

Logo teremos que: $L\{t^2 \cdot \cos(at)\} = \dfrac{2s^3 - 6sa^2}{(s^2 + a^2)^3}$

---

[3] Consultando o formulário temos que: $L\{\cos(bt)\} = \dfrac{s}{s^2 + b^2}$, onde : $\{b = a\}$

5. Determine as transformadas de Laplace das seguintes funções:

a) $a(t)=t+\cos(t)-3\cdot sen(t)$

R:

Recorrendo ao formulário temos que:

- $L\{t\}\Rightarrow L\{t^n\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, onde: $n=1\Rightarrow L\{t^1\}=\dfrac{1!}{s^{1+1}}\Leftrightarrow L\{t\}=\dfrac{1}{s^2}$

- $L\{\cos(t)\}\Rightarrow L\{\cos(b\cdot t)\}=\dfrac{s}{s^2+b^2}$, onde: $b=1\Rightarrow L\{\cos(1\cdot t)\}=\dfrac{s}{s^2+1^2}\Leftrightarrow L\{\cos(t)\}=\dfrac{s}{s^2+1}$

- $L\{sen(t)\}\Rightarrow L\{sen(b\cdot t)\}=\dfrac{b}{s^2+b^2}$, onde: $b=1\Rightarrow L\{sen(1\cdot t)\}=\dfrac{1}{s^2+1^2}\Leftrightarrow L\{sen(t)\}=\dfrac{1}{s^2+1}$

Assim sendo teremos então que: $L\{a(t)\}=L\{t\}+L\{\cos(t)\}-3\cdot L\{sen(t)\}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow L\{a(t)\}=\frac{1}{s^2}+\frac{s}{s^2+1}-3\cdot\frac{1}{s^2+1}\Leftrightarrow L\{a(t)\}=\frac{1}{s^2}+\frac{s-3}{s^2+1}$$

b) $b(t)=\begin{Bmatrix}0 & \text{se} & 0<t<5\\ -3 & \text{se} & t>5\end{Bmatrix}$

R:

Uma vez que o ponto de “salto” da função é $t=5$, então: $b(t)=f(t-5)\cdot u_5(t)$☼

Também se sabe da teoria que: $u_a(t)=\begin{Bmatrix}0 & se & 0<t<a\\ 1 & se & t>a\end{Bmatrix}\Rightarrow u_5(t)=\begin{Bmatrix}0 & se & 0<t<5\\ 1 & se & t>5\end{Bmatrix}$

Ora, como a função dada não está nesta forma geral teremos que a reescrever:

$$\begin{Bmatrix}0 & \text{se} & 0<t<5\\ -3 & \text{se} & t>5\end{Bmatrix}=-3\cdot\underbrace{\begin{Bmatrix}0 & \text{se} & 0<t<5\\ 1 & \text{se} & t>5\end{Bmatrix}}_{u_5(t)}=-3\cdot u_5(t)$$◊

Igualando agora ☼ a ◊ teremos que: $f(t-5)\cdot u_5(t)=-3\cdot u_5(t)\Leftrightarrow f(t-5)=-3$, então teremos:

$$L\{u_5(t)\cdot f(t-5)\}=L\{-3\cdot u_5(t)\}=-3\cdot L\{u_5(t)\}=-3\cdot\frac{e^{-5\cdot s}}{s}$$

c) $c(t)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad 0<t<5 \\ t-3 & \text{se} \quad t\geq 5\end{cases}$

R:

Uma vez que o ponto de "salto" da função é $t=5$, então: $c(t)=f(t-5)\cdot u_5(t)$☼

Também se sabe da teoria que: $u_a(t)=\begin{cases}0 & se \quad 0<t<a \\ 1 & se \quad t>a\end{cases} \Rightarrow u_5(t)=\begin{cases}0 & se \quad 0<t<5 \\ 1 & se \quad t>5\end{cases}$

Ora, como a função dada não está nesta forma geral teremos que a reescrever:

$$\begin{cases}0 & \text{se} \quad 0<t<5 \\ t-3 & \text{se} \quad t\geq 5\end{cases} = (t-3)\cdot\underbrace{\begin{cases}0 & \text{se} \quad 0<t<5 \\ 1 & \text{se} \quad t>5\end{cases}}_{u_5(t)} = (t-3)\cdot u_5(t)\Diamond$$

Igualando agora ☼ a ◊ teremos que: $f(t-5)\cdot u_5(t)=(t-3)\cdot u_5(t) \Leftrightarrow f(t-5)=(t-3) \Leftrightarrow$☼☼

Fazendo agora a mudança de variável: $x=t-5 \Leftrightarrow t=x+5$, teremos por substituição em ☼☼:

☼☼$\Leftrightarrow f((x+5)-5)=(x+5)-3 \Leftrightarrow f(x)=x+2 \Rightarrow f(t)=t+2$

Recorrendo agora ao formulário teremos que substituir todos os valores determinados na seguinte expressão:

$$L\{u_a(t)\cdot f(t-a)\}=L\{f(t)\}\cdot e^{-a\cdot s} \Leftrightarrow L\{u_5(t)\cdot f(t-5)\}=L\{t+2\}\cdot e^{-5\cdot s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L\{u_5(t)\cdot f(t-5)\}=\left[\underbrace{L\{t\}}_{=\frac{1}{s^2}}+2\cdot\underbrace{L\{1\}}_{=\frac{1}{s}}\right]\cdot e^{-5\cdot s} \Leftrightarrow L\{u_5(t)\cdot f(t-5)\}=\left[\frac{1}{s^2}+2\cdot\frac{1}{s}\right]\cdot e^{-5\cdot s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L\{u_5(t)\cdot f(t-5)\}=\left[\frac{2s+1}{s^2}\right]\cdot e^{-5\cdot s} \Rightarrow L\{c(t)\}=\left[\frac{2s+1}{s^2}\right]\cdot e^{-5\cdot s}$$

d) $d(t)=\begin{cases}4 & \text{se} \quad 0<t<2\\ -4 & \text{se} \quad t\geq 2\end{cases}$

R:

Uma vez que o ponto de "salto" da função é $t=2$, então: $d(t)=f(t-2)\cdot u_2(t)$

Também se sabe da teoria que: $u_a(t)=\begin{cases}0 & se \quad 0<t<a\\ 1 & se \quad t>a\end{cases} \Rightarrow u_2(t)=\begin{cases}0 & se \quad 0<t<2\\ 1 & se \quad t>2\end{cases}$

Ora, como a função dada não está nesta forma geral teremos que a reescrever:

$$\begin{cases}4 & \text{se} \quad 0<t<2\\ -4 & \text{se} \quad t\geq 2\end{cases} = \underbrace{4+\begin{cases}0 & \text{se} \quad 0<t<2\\ (-4)-4 & \text{se} \quad t\geq 2\end{cases}}_{\substack{\text{Adiciona-se e subtrai-se 4 ao sistema por forma}\\ \text{a manter-se equivalente ao anterior.}}} = 4+\begin{cases}0 & \text{se} \quad 0<t<2\\ -8 & \text{se} \quad t\geq 2\end{cases} =$$

$$=4+(-8)\cdot\underbrace{\begin{cases}0 & \text{se} \quad 0<t<2\\ 1 & \text{se} \quad t\geq 2\end{cases}}_{u_2(t)} = 4-8\cdot u_2(t)$$

Assim sendo teremos então que:

$$L\{u_2(t)\cdot f(t-2)\} = L\{4-8\cdot u_2(t)\} = L\{4-8\cdot u_2(t)\} = 4\cdot L\{1\}-8\cdot L\{u_2(t)\} \overset{4}{=} \frac{4}{s}-8\cdot\frac{e^{-2\cdot s}}{s}$$

[4] Consultando o formulário temos que: $L\{1\}=\frac{1}{s}$ e que: $L\{u_a(t)\}=\frac{e^{-a\cdot s}}{s}$

e) $e(t)=\begin{cases} sen(t) & \text{se} \quad 0<t<\pi \\ e^{-t} & \text{se} \quad t\geq\pi \end{cases}$

R:

Uma vez que o ponto de "salto" da função é $t=\pi$, então: $e(t)=f(t-\pi)\cdot u_\pi(t)$

Também se sabe da teoria que: $u_a(t)=\begin{cases} 0 & se \quad 0<t<a \\ 1 & se \quad t>a \end{cases} \Rightarrow u_\pi(t)=\begin{cases} 0 & se \quad 0<t<\pi \\ 1 & se \quad t>\pi \end{cases}$

Ora, como a função dada não está nesta forma geral teremos que a reescrever:

$$\begin{cases} sen(t) & \text{se} \quad 0<t<\pi \\ e^{-t} & \text{se} \quad t\geq\pi \end{cases} = \underbrace{sen(t)+\begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0<t<\pi \\ \left(e^{-t}\right)-sen(t) & \text{se} \quad t\geq\pi \end{cases}}_{\substack{\text{Adiciona-se e subtrai-se } sen(t) \text{ ao sistema por forma} \\ \text{a manter-se equivalente ao anterior.}}} =$$

$$= sen(t)+\left(e^{-t}-sen(t)\right)\cdot\underbrace{\begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0<t<\pi \\ 1 & \text{se} \quad t\geq\pi \end{cases}}_{u_\pi(t)} = sen(t)+\left(e^{-t}-sen(t)\right)\cdot u_\pi(t)$$

Assim sendo teremos então que:

$$L\{u_\pi(t)\cdot f(t-\pi)\}=L\left\{sen(t)+\left(e^{-t}-sen(t)\right)\cdot u_\pi(t)\right\}=L\left\{sen(t)+e^{-t}\cdot u_\pi(t)-sen(t)\cdot u_\pi(t)\right\}=$$

$$=L\{sen(t)\}+L\left\{e^{-t}\cdot u_\pi(t)\right\}-L\{sen(t)\cdot u_\pi(t)\}=☼$$

Cálculos Auxiliares
• $u_\pi(t)\cdot f(t-\pi)=e^{-t}\cdot u_\pi(t)\Leftrightarrow f\underbrace{(t-\pi)}_{x=t-\pi\Leftrightarrow t=x+\pi}=e^{-t}\Rightarrow f(x)=e^{-(x+\pi)}\Rightarrow f(t)=e^{-(t+\pi)}\Rightarrow$ $\Rightarrow L\{u_a(t)\cdot f(t-a)\}=L\{f(t)\}\cdot e^{-a\cdot s}\Leftrightarrow L\{u_\pi(t)\cdot f(t-\pi)\}=L\left\{e^{-(t+\pi)}\right\}\cdot e^{-\pi\cdot s}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow L\{u_\pi(t)\cdot f(t-\pi)\}=L\left\{e^{-(t+\pi)}\right\}\cdot e^{-\pi\cdot s}$??????????????????????????????????

f) $g(t)=\begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0<t<3 \\ t-4 & \text{se} \quad 3<t<7 \\ 0 & \text{se} \quad t\geq 7 \end{cases}$

R:

Uma vez que os pontos de "salto" da função são $t=3$ e $t=7$, então:

$g(t)=f_1(t-3)\cdot u_3(t)+f_2(t-7)\cdot u_7(t)$☼

Também se sabe da teoria que: $u_a(t)=\begin{cases} 0 & se \quad 0<t<a \\ 1 & se \quad t>a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3(t)=\begin{cases} 0 & se \quad 0<t<3 \\ 1 & se \quad t>3 \end{cases} \\ u_7(t)=\begin{cases} 0 & se \quad 0<t<7 \\ 1 & se \quad t>7 \end{cases} \end{cases}$

Ora, como a função que é dada no enunciado não está nesta forma geral teremos que a reescrever:

$$\begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0<t<3 \\ t-4 & \text{se} \quad 3<t<7 \\ 0 & \text{se} \quad t\geq 7 \end{cases} = 2+\underbrace{\begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0<t<3 \\ (t-4)-2 & \text{se} \quad 3<t<7 \end{cases}}_{\substack{\text{Adiciona-se e subtrai-se 2 ao sistema por forma} \\ \text{a manter-se equivalente ao anterior.}}} =$$

$$=\underbrace{2+(t-6)}_{(t-4)}\cdot\underbrace{\begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0<t<3 \\ 1 & \text{se} \quad t>3 \end{cases}}_{u_3(t)} \underbrace{-(t-4)\cdot u_7(t)}_{\substack{\text{Subtrai-se } (t-4) \text{ pq no 3º} \\ \text{membro do sistema temos 0.}}} = 2+(t-6)\cdot u_3(t)-(t-4)\cdot u_7(t) \lozenge$$

Igualando agora ☼ a ◊ teremos que:

$$f_1(t-3)\cdot u_3(t)+f_2(t-7)\cdot u_7(t)=2+(t-6)\cdot u_3(t)-(t-4)\cdot u_7(t) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(t-3)\cdot u_3(t)=(t-6)\cdot u_3(t) \\ f_2(t-7)\cdot u_7(t)=(t-4)\cdot u_7(t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(t-3)=t-6 \\ f_2(t-7)=t-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$☼☼

Fazendo agora as mudanças de variável: $x=t-3 \Leftrightarrow t=x+3$ e $x=t-7 \Leftrightarrow t=x+7$, teremos por substituição em ☼☼:

☼☼ $\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f_1(x)=(x+3)-6 \\ f_2(x)=(x+7)-4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f_1(x)=x-3 \\ f_2(x)=x+3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_1(t)=t-3 \\ f_2(t)=t+3 \end{Bmatrix}$

Assim sendo teremos então que:

$f(t)=2+(t-6)\cdot u_3(t)-(t-4)\cdot u_7(t) \Rightarrow L\{g(t)\}=L\{2\}+L\{(t-3)\cdot u_3(t)\}-L\{(t-7)\cdot u_7(t)\} \Leftrightarrow$ □

Recorrendo agora ao formulário, $L\{u_a(t)\cdot f(t-a)\}=L\{g(t)\}\cdot e^{-a\cdot s}$, teremos que:

- $L\{u_3(t)\cdot f(t-3)\}=L\{f_1(t)\}\cdot e^{-3\cdot s} \Leftrightarrow L\{u_3(t)\cdot f(t-3)\}=L\{t-3\}\cdot e^{-3\cdot s} \Leftrightarrow$

  $$\Leftrightarrow L\{u_3(t)\cdot f(t-3)\}=\left[\underbrace{L\{t\}}_{=\frac{1}{s^2}}-3\cdot\underbrace{L\{1\}}_{=\frac{1}{s}}\right]\cdot e^{-3\cdot s} \Leftrightarrow L\{u_3(t)\cdot f(t-3)\}=\left[\frac{1}{s^2}-3\cdot\frac{1}{s}\right]\cdot e^{-3\cdot s}$$

- $L\{u_7(t)\cdot f(t-7)\}=L\{f_2(t)\}\cdot e^{-7\cdot s} \Leftrightarrow L\{u_7(t)\cdot f(t-7)\}=L\{t+3\}\cdot e^{-7\cdot s} \Leftrightarrow$

  $$\Leftrightarrow L\{u_7(t)\cdot f(t-7)\}=\left[\underbrace{L\{t\}}_{=\frac{1}{s^2}}+3\cdot\underbrace{L\{1\}}_{=\frac{1}{s}}\right]\cdot e^{-7\cdot s} \Leftrightarrow L\{u_7(t)\cdot f(t-7)\}=\left[\frac{1}{s^2}+3\cdot\frac{1}{s}\right]\cdot e^{-7\cdot s}$$

Substituindo estes valores obtidos em □, teremos que:

□ $\Leftrightarrow L\{g(t)\}=L\{2\}+\left[\frac{1}{s^2}-3\cdot\frac{1}{s}\right]\cdot e^{-3\cdot s}-\left[\frac{1}{s^2}+3\cdot\frac{1}{s}\right]\cdot e^{-7\cdot s} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow L\{g(t)\}=2\cdot\underbrace{L\{1\}}_{=\frac{1}{s}}+\left[\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s}\right]\cdot e^{-3\cdot s}-\left[\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}\right]\cdot e^{-7\cdot s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L\{g(t)\}=2\cdot\frac{1}{s}+\left[\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s}\right]\cdot e^{-3\cdot s}-\left[\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}\right]\cdot e^{-7\cdot s}$$