Folha 11B – Séries Numéricas (parte II).

1. Estude a natureza de cada uma das seguintes séries numéricas (em caso de convergência, especifique se é absoluta ou simples):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+\cos n}{3^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$ $(x \in \mathbb{R})$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}$; (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$; (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n+1)!}$.

2. Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes de termos positivos.

   Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{1+a_n}$.

3. Estude a natureza das séries de termos positivos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, sabendo que $\lim\limits_{n} \sqrt{n}\, a_n = 1$ e que $b_n \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. Estude a natureza da série de termos positivos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+b^n}$ nos seguintes casos:

   (a) $0 < a < b$; (b) $0 < b \leq a < 1$; (c) $1 \leq b \leq a$.

5. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série de termos positivos tal que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 u_n} = 3$.

   (a) Conclua, justificando, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente.

   (b) Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n} + \sum_{n=5}^{\infty} u_n$.

      i. Justifique que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + w_n)$ são convergentes.

      ii. Sendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 5$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} u_n = \frac{5}{4}$, determine a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + w_n)$.