

Complementos de Análise Matemática – Exame da Época Especial

Mestrado Integrados: ECOM, EEIEC, EMAT, EMEC

Duração: 2h

1. cotação: a) 1,0 valores, b) 2,25 valores**a)** Indique condições para que a EDO de variáveis separáveis $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ seja linear, onde $f(x, y) \neq 0$.**b)** Considere a equação diferencial:

$$2x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = -5x^2 e^{1/x}.$$

Determine a respectiva solução geral.

2. cotação: a) 1,0 valores, b) 2,25 valores

Considere o PVI:

$$[(x + y) \cos x + \sin x] dx + \sin x dy = 0, \quad y(0) = 0.$$

a) A equação diferencial dada é de variáveis separáveis? Justifique.**b)** Determine a solução do PVI dado.

$$\text{Nota: } \int z \sin z = \sin z - z \cos z, \quad \int z \cos z = \cos z + z \sin z$$

3. cotação: a) 1,0 valores, b) 2,5 valores**a)** Considere a equação $\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y = 0$. Determine a sua solução geral sabendo que a função e^{-x} é uma solução da EDO.**b)** Determine uma solução de $\frac{d^2 y}{dx^2} - y = -e^{-x} - 2e^{3x}$ usando o método dos coeficientes indeterminados e mostre que a solução obtida verifica a equação diferencial dada.

Complementos de Análise Matemática – Exame da Época Especial

Mestrado Integrados: ECOM, EEIEC, EMAT, EMEC

Duração: 2h

4. cotação: a) 1,0 valores, b) 2,25 valores**a)** Determine a transformada de Laplace da seguinte função: $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < 3\pi, \\ \cos t, & t \geq 3\pi. \end{cases}$ **b)** Determine a solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - y + 2x = e^t + e^{-t} \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = -e^{-t} \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad x(0) = 1,$$

usando a transformada de Laplace.

5. cotação: a) 1,25 valores, b) 2,0 valores**a)** Considere o seguinte PVF: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + (1 - \lambda)y = 0$, $y(0) + \frac{dy}{dx}(0) = 0$, $y(\pi) + \frac{dy}{dx}(\pi) = 0$.Averigúe se para $\lambda = 0$ o PVF dado tem solução não trivial, explicitando-a caso exista.**b)** Considere o seguinte PVF: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + (1 - \lambda)y = 0$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.Averigúe se para $\lambda < 0$ o PVF dado tem solução não trivial, explicitando-a caso exista.**6.** cotação: a) 2,25 valores, b) 1,25 valores**a)** Determine a solução do seguinte problema usando o método de separação de variáveis:

$$u = u(x, t): \begin{cases} u_x + \frac{1}{\cos t} u_t = u, & x > 0, \quad t > \pi, \\ u(x, \pi) = 3e^x - e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

b) Determine a solução do seguinte problema usando séries de Fourier:

$$-2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx), \quad 0 < x < 2\pi.$$