1. Para cada alínea que se segue, verifique que a equação diferencial dada não é exacta, que $\mu(x;y)$ é um factor integrante e, com base nisso, obtenha uma família de soluções.

a) $\left(x^2-y+1\right)+\left(x^3-3xy+2x\right)y'=0 \quad ; \quad \mu(y)=e^{3y}$

R:

- **Verificar se a equação é exacta:**

$$\left(x^2-y+1\right)+\left(x^3-3xy+2x\right)y'=0 \Leftrightarrow \left(x^2-y+1\right)+\left(x^3-3xy+2x\right)\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-3xy+2x\right)\frac{dy}{dx}=-\left(x^2-y+1\right) \Leftrightarrow \left(x^3-3xy+2x\right)dy=-\left(x^2-y+1\right)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x^2-y+1\right)}_{M(x;y)}dx+\underbrace{\left(x^3-3xy+2x\right)}_{N(x;y)}dy=0$$

Logo: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2-y+1\right)=-1 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^3-3xy+2x\right)=3x^2-3y+2x \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$ → A equação não é exacta.

- **Verificar que $\mu(x;y)$ é um factor integrante:**

Para esta situação é dito no enunciado que: $\mu(y)=e^{3y}$. Assim sendo, multiplicando este factor pela equação teremos que: $\underbrace{e^{3y}\cdot\left(x^2-y+1\right)}_{M(x;y)}dx+\underbrace{e^{3y}\cdot\left(x^3-3xy+2x\right)}_{N(x;y)}dy=0$

Logo:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[e^{3y}\cdot\left(x^2-y+1\right)\right]=\left(e^{3y}\right)'_y\cdot\left(x^2-y+1\right)+e^{3y}\cdot\left(x^2-y+1\right)'_y=3\cdot e^{3y}\cdot\left(x^2-y+1\right)+e^{3y}\cdot(-1)= \\ \quad =e^{3y}\cdot\left(3x^2-3y+3\right)-e^{3y}=e^{3y}\cdot\left[\left(3x^2-3y+3\right)-1\right]=e^{3y}\cdot\left(3x^2-3y+2\right) \\ \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[e^{3y}\cdot\left(x^3-3xy+2x\right)\right]=\left(e^{3y}\right)'_x\cdot\left(x^3-3xy+2x\right)+e^{3y}\cdot\left(x^3-3xy+2x\right)'_x=e^{3y}\cdot\left(3x^2-3y+2\right) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ → A equação é exacta.

Como a equação é exacta, então $\mu(y) = e^{3y}$ é um factor integrante.

- **Família de soluções:**

Para determinar uma família de soluções teremos que: $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = e^{3y} \cdot \left(x^2 - y + 1\right) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = e^{3y} \cdot \left(x^3 - 3xy + 2x\right) \end{cases}$$

Primitivando agora em ordem a x teremos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{3y} \cdot \left(x^2 - y + 1\right) \Rightarrow P_x\left(e^{3y} \cdot \left(x^2 - y + 1\right)\right) = e^{3y} \cdot P_x\left(x^2 - y + 1\right) =$$

$$= e^{3y} \cdot \left[P_x\left(x^2\right) - y \cdot P_x(1) + P_x(1)\right] = e^{3y} \cdot \left[\frac{x^{2+1}}{2+1} - y \cdot x + x\right] + \phi(y) = e^{3y} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - y \cdot x + x\right) + \phi(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x; y) = e^{3y} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - xy + x\right) + \phi(y)$$

Substituindo $F(x; y) = e^{3y} \cdot \left(\dfrac{x^3}{3} - xy + x\right) + \phi(y)$ no outro ramo do sistema, e derivando em seguida em ordem a y, iremos ter que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{3y} \cdot \left(x^3 - 3xy + 2x\right) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{3y} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - xy + x\right) + \phi(y)\right] = e^{3y} \cdot \left(x^3 - 3xy + 2x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(e^{3y}\right)_y' \cdot \left(\frac{x^3}{3} - xy + x\right) + e^{3y} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - xy + x\right)_y'\right] + \phi'(y) = e^{3y} \cdot \left(x^3 - 3xy + 2x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[3e^{3y}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-xy+x\right)+e^{3y}\cdot(-x)\right]+\phi'(y)=e^{3y}\cdot\left(x^3-3xy+2x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[e^{3y}\cdot\left(\frac{3x^3}{3}-3xy+3x\right)-e^{3y}\cdot x\right]+\phi'(y)=e^{3y}\cdot\left(x^3-3xy+2x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[e^{3y}\cdot\left(x^3-3xy+3x\right)-e^{3y}\cdot x\right]+\phi'(y)=e^{3y}\cdot\left(x^3-3xy+2x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[e^{3y}\cdot\left(\left(x^3-3xy+3x\right)-x\right)\right]+\phi'(y)=e^{3y}\cdot\left(x^3-3xy+2x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{3y}\cdot\left(x^3-3xy+2x\right)+\phi'(y)=e^{3y}\cdot\left(x^3-3xy+2x\right)\Leftrightarrow\phi'(y)=0\Rightarrow\phi(y)=P_y(0)\Leftrightarrow\phi(y)=k$$

Assim sendo teremos então que:

$$F(x;y)=e^{3y}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-xy+x\right)+\phi(y)\Leftrightarrow F(x;y)=e^{3y}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-xy+x\right)+k,\quad k=0$$

Logo a família de soluções é dada por: $F(x;y)=C\Leftrightarrow e^{3y}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-xy+x\right)=C$

b) $\left(x^2y^3\right)dx+x\cdot\left(1+y^2\right)dy=0\quad;\quad\mu(x;y)=\dfrac{1}{xy^3}$

R:

- **Verificar se a equação é exacta:**

$$\underbrace{\left(x^2y^3\right)}_{M(x;y)}dx+\underbrace{x\cdot\left(1+y^2\right)}_{N(x;y)}dy=0$$

Logo: $\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^3\right)=3x^2y^2\\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot\left(1+y^2\right)\right)=1+y^2\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$ → A equação não é exacta.

- **Verificar que $\mu(x;y)$ é um factor integrante:**

Para esta situação é dito no enunciado que: $\mu(x;y)=\dfrac{1}{xy^3}$. Assim sendo, multiplicando este factor pela equação teremos que:

$$\frac{1}{xy^3}\cdot\left(x^2y^3\right)dx+\frac{1}{xy^3}\cdot x\cdot\left(1+y^2\right)dy=0\Leftrightarrow \underbrace{(x)}_{M(x;y)}dx+\underbrace{\left(\frac{1+y^2}{y^3}\right)}_{N(x;y)}dy=0,\quad y\neq 0$$

Logo: $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(x)=0\\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1+y^2}{y^3}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}\rightarrow$ A equação é exacta.

Como a equação é exacta, então $\mu(x;y)=\dfrac{1}{xy^3}$ é um factor integrante.

- **Família de soluções:**

Para determinar uma família de soluções teremos que: $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial x}=M\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=N\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial x}=x\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{1+y^2}{y^3}\end{array}\right\}$

Primitivando agora em ordem a x teremos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=x\Rightarrow P_x(x)=\frac{x^{1+1}}{1+1}+\phi(y)=\frac{x^2}{2}+\phi(y)\Rightarrow F(x;y)=\frac{x^2}{2}+\phi(y)$$

Substituindo $F(x;y)=\dfrac{x^2}{2}+\phi(y)$ no outro ramo do sistema, e derivando em seguida em ordem a y, iremos ter que:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1+y^2}{y^3}\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2}+\phi(y)\right)=\frac{1+y^2}{y^3}\Leftrightarrow\phi'(y)=\frac{1+y^2}{y^3}\Rightarrow\phi(y)=P_y\left(\frac{1+y^2}{y^3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi(y) = P_y\left(\frac{1}{y^3}\right) + P_y\left(\frac{y^2}{y^3}\right) \Leftrightarrow \phi(y) = P_y\left(\frac{1}{y^3}\right) + P_y\left(\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow \phi(y) = P_y\left(y^{-3}\right) + P_y\left(\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi(y) = \frac{y^{-3+1}}{-3+1} + \ln|y| + k \Leftrightarrow \phi(y) = \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| + k \Leftrightarrow \phi(y) = -\frac{1}{2 \cdot y^2} + \ln|y| + k$$

Assim sendo teremos então que:

$$F(x;y) = \frac{x^2}{2} + \phi(y) \Leftrightarrow F(x;y) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2y^2} + \ln|y| + k,\ k = 0$$

Logo a família de soluções é dada por: $F(x;y) = C \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2y^2} + \ln|y| = C \wedge y \neq 0$

Como esta família de soluções foi determinada para a equação resultante da aplicação do factor integrante, sob o pressuposto de que $y \neq 0$*, então de forma a conseguirmos garantir que nenhuma solução se perdeu nessa transformação da equação vamos agora verificar se* $y = 0$ *poderá ser solução da equação inicial, sendo que antes de mais teremos que dividir todos os membros dessa equação por* dx*:*

$$\left(x^2y^3\right)\frac{dx}{dx} + x \cdot \left(1 + y^2\right)\frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx} \Leftrightarrow \left(x^2y^3\right) + x \cdot \left(1 + y^2\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

Logo: $y = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(x^2 \cdot 0^3\right)}_{=0} + \underbrace{x \cdot \left(1 + 0^2\right)\underbrace{\frac{d0}{dx}}_{=0}}_{=0} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Como se verifica a identidade $0 = 0$, então $y = 0$, também é solução. Isto significa a família de soluções será a seguinte:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2y^2} + \ln|y| = C \wedge y = 0$$

c) $\left(\frac{sen(y)}{y}-2e^{-x}\cdot sen(x)\right)dx+\left(\frac{\cos(y)+2e^{-x}\cdot\cos(x)}{y}\right)dy=0 \quad ; \quad \mu(x;y)=y\cdot e^{x}$

R:

- **Verificar se a equação é exacta:**

$$\underbrace{\left(\frac{sen(y)}{y}-2e^{-x}\cdot sen(x)\right)}_{M(x;y)}dx+\underbrace{\left(\frac{\cos(y)+2e^{-x}\cdot\cos(x)}{y}\right)}_{N(x;y)}dy=0$$

$$\text{Logo:}\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{sen(y)}{y}-2e^{-x}\cdot sen(x)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{sen(y)}{y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(2e^{-x}\cdot sen(x)\right)=\\
=\left(\frac{\overbrace{(sen(y))'_y}^{=\cos(y)}\cdot y-sen(y)\cdot\overbrace{(y)'_y}^{=1}}{y^2}\right)=\left(\frac{\cos(y)\cdot y-sen(y)}{y^2}\right)\\
\\
\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(y)+2e^{-x}\cdot\cos(x)}{y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(y)}{y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2e^{-x}\cdot\cos(x)}{y}\right)=\\
=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\cdot 2e^{-x}\cdot\cos(x)\right)=\frac{1}{y}\cdot\left[\left(2e^{-x}\right)'_x\cdot\cos(x)+2e^{-x}\cdot(\cos(x))'_x\right]=\\
=\frac{1}{y}\cdot\left[-2e^{-x}\cdot\cos(x)+2e^{-x}\cdot(-sen(x))\right]=\frac{2e^{-x}}{y}\cdot(-\cos(x)-sen(x))
\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ → A equação não é exacta.

- **Verificar que $\mu(x;y)$ é um factor integrante:**

Para esta situação é dito no enunciado que: $\mu(x;y)=y\cdot e^{x}$. Assim sendo, multiplicando este factor pela equação teremos que:

$$y\cdot e^{x}\cdot\left(\frac{sen(y)}{y}-2\cdot e^{-x}\cdot sen(x)\right)dx+y\cdot e^{x}\cdot\left(\frac{\cos(y)+2\cdot e^{-x}\cdot\cos(x)}{y}\right)dy=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y \cdot e^{x} \cdot sen(y)}{y} - 2 \cdot e^{-x} \cdot y \cdot e^{x} \cdot sen(x) \right) dx + \left(e^{x} \cdot \cos(y) + e^{x} \cdot 2 \cdot e^{-x} \cdot \cos(x) \right) dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{x} \cdot sen(y) - 2 \cdot \underbrace{e^{-x+x}}_{e^{0}=1} \cdot y \cdot sen(x) \right) dx + \left(e^{x} \cdot \cos(y) + 2 \cdot \underbrace{e^{-x+x}}_{e^{0}=1} \cdot \cos(x) \right) dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(e^{x} \cdot sen(y) - 2y \cdot sen(x) \right)}_{M(x;y)} dx + \underbrace{\left(e^{x} \cdot \cos(y) + 2 \cdot \cos(x) \right)}_{N(x;y)} dy = 0$$

Logo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{x} \cdot sen(y) - 2y \cdot sen(x) \right) = \left(e^{x} \cdot sen(y) \right)_{y}^{'} - \left(2y \cdot sen(x) \right)_{y}^{'} = e^{x} \cdot \cos(y) - 2sen(x) \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{x} \cdot \cos(y) + 2 \cdot \cos(x) \right) = \left(e^{x} \cdot \cos(y) \right)_{x}^{'} + \left(2 \cdot \cos(x) \right)_{x}^{'} = e^{x} \cdot \cos(y) - 2sen(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \rightarrow$ A equação é exacta.

Como a equação é exacta, então $\mu(x;y) = y \cdot e^{x}$ é um factor integrante.

- **Família de soluções:**

Para determinar uma família de soluções teremos que: $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = e^{x} \cdot sen(y) - 2y \cdot sen(x) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = e^{x} \cdot \cos(y) + 2 \cdot \cos(x) \end{cases}$$

Primitivando agora em ordem a x teremos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x \cdot sen(y) - 2y \cdot sen(x) \Rightarrow P_x\left(e^x \cdot sen(y) - 2y \cdot sen(x)\right) =$$

$$= P_x\left(e^x \cdot sen(y)\right) - P_x\left(2y \cdot sen(x)\right) = sen(y) \cdot \underbrace{P_x\left(e^x\right)}_{e^x} - 2y \cdot \underbrace{P_x\left(sen(x)\right)}_{-\cos(x)} =$$

$$= sen(y) \cdot e^x - 2y \cdot \left(-\cos(x)\right) + \phi(y) = sen(y) \cdot e^x + 2y \cdot \cos(x) + \phi(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x;y) = sen(y) \cdot e^x + 2y \cdot \cos(x) + \phi(y)$$

Substituindo $F(x;y) = sen(y) \cdot e^x + 2y \cdot \cos(x) + \phi(y)$ no outro ramo do sistema, e derivando em seguida em ordem a y, iremos ter que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^x \cdot \cos(y) + 2 \cdot \cos(x) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(sen(y) \cdot e^x + 2y \cdot \cos(x) + \phi(y)\right) = e^x \cdot \cos(y) + 2 \cdot \cos(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(y) \cdot e^x + 2 \cdot \cos(x) + \phi'(y) = e^x \cdot \cos(y) + 2 \cdot \cos(x) \Leftrightarrow \phi'(y) = 0 \Rightarrow \phi(y) = P_y(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi(y) = k$$

Assim sendo teremos então que:

$$F(x;y) = sen(y) \cdot e^x + 2y \cdot \cos(x) + \phi(y) \Leftrightarrow F(x;y) = sen(y) \cdot e^x + 2y \cdot \cos(x) + k, \quad k = 0$$

Logo a solução será: $F(x;y) = C \Leftrightarrow sen(y) \cdot e^x + 2y \cdot \cos(x) = C$

2. Considere a equação diferencial: $\left(y^2+2xy\right)dx - x^2dy = 0$

a) Mostre que esta equação não é exacta.

R:

Este tipo de equações só são exactas quando: $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Sabendo que: $\underbrace{\left(y^2+2xy\right)}_{M(x;y)}dx\underbrace{-x^2}_{N(x;y)}dy=0$, teremos então que:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2+2xy\right)=2y+2x\\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-x^2\right)=-2x\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$$ → A equação não é exacta.

b) Multiplique a equação por: $y^n, n\in \mathbb{Z}$, e determine n por forma a que a nova equação seja exacta.

R:

Vamos começar por multiplicar y^n pela equação, para posteriormente derivar cada uma das suas parcelas e em seguida igualar os resultados obtidos para determinar o valor de n:

$$y^n\cdot\left(y^2+2xy\right)dx-y^n\cdot x^2dy=0\Leftrightarrow\underbrace{\left(y^{n+2}+2xy^{n+1}\right)}_{M(x;y)}dx\underbrace{-x^2\cdot y^n}_{N(x;y)}dy=0$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^{n+2}+2xy^{n+1}\right)=(n+2)\cdot y^{(n+2)-1}+2x\cdot(n+1)\cdot y^{(n+1)-1}=(n+2)\cdot y^{n+1}+2x\cdot(n+1)\cdot y^n\\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-x^2\cdot y^n\right)=-2x\cdot y^n\end{array}\right\}$$

Vamos agora igualar os resultados obtidos:

$$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}\Leftrightarrow(n+2)\cdot y^{n+1}+2x\cdot(n+1)\cdot y^n=-2x\cdot y^n\Leftrightarrow(n+2)\cdot y^{n+1}+2x\cdot(n+1)\cdot y^n+2x\cdot y^n=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(n+2)\cdot y^n\cdot y+2x\cdot(n+1)\cdot y^n+2x\cdot y^n=0\Leftrightarrow y^n\cdot\left[(n+2)\cdot y+2x\cdot(n+1)+2x\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+2)\cdot y + 2x\cdot(n+1) + 2x = \frac{0}{y^n} \Leftrightarrow (n+2)\cdot y + 2x\cdot[(n+1)+1] = 0 \Leftrightarrow (n+2)\cdot y + 2x\cdot(n+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+2)\cdot[y+2x] = 0 \Leftrightarrow (n+2) = \frac{0}{y+2x} \Leftrightarrow n = -2$$

c) Resolva a equação que se obtém quando se multiplica a equação acima pelo factor integrante obtido em b).

R:

$$\left\{\begin{array}{l} n=-2 \\ \left(y^{n+2}+2xy^{n+1}\right)dx - x^2\cdot y^n dy = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(y^{-2+2}+2xy^{-2+1}\right)dx - x^2\cdot y^{-2}dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y^0+2xy^{-1}\right)dx - x^2\cdot y^{-2}dy = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(1+2xy^{-1}\right)}_{M(x;y)}dx \underbrace{-x^2\cdot y^{-2}}_{N(x;y)}dy = 0$$

Para determinar uma família de soluções, ou seja, resolvendo a equação resultante da multiplicação do factor integrante teremos que: $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = M \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 1+2xy^{-1} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -x^2\cdot y^{-2} \end{array}\right\}$

Primitivando agora em ordem a x teremos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1+2xy^{-1} \Rightarrow P_x\left(1+2xy^{-1}\right) = P_x(1) + 2y^{-1}\cdot P_x(x) = x + 2y^{-1}\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + \phi(y) = x + x^2\cdot y^{-1} + \phi(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x;y) = x + x^2\cdot y^{-1} + \phi(y)$$

Substituindo $F(x;y) = x + x^2\cdot y^{-1} + \phi(y)$ no outro ramo do sistema, e derivando em seguida em ordem a y, iremos ter que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x^2\cdot y^{-2} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x + x^2\cdot y^{-1} + \phi(y)\right) = -x^2\cdot y^{-2} \Leftrightarrow x^2\cdot(-1)\cdot y^{-1-1} + \phi'(y) = -x^2\cdot y^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 \cdot y^{-2} + \phi'(y) = -x^2 \cdot y^{-2} \Leftrightarrow \phi'(y) = 0 \Rightarrow \phi(y) = P_y(0) \Leftrightarrow \phi(y) = k$$

Assim sendo teremos então que:

$$F(x;y) = x + x^2 \cdot y^{-1} + \phi(y) \Leftrightarrow F(x;y) = x + x^2 \cdot y^{-1} + k, \quad k = 0$$

Logo a solução será: $F(x;y) = C \Leftrightarrow x + x^2 \cdot y^{-1} = C$

d) Mostre que: $y = 0$ é uma solução da equação não exacta, mas que não é solução da equação obtida quando esta é multiplicada pelo factor integrante obtido em b).

R:

Para se mostrar o que aqui é pedido, temos que antes de mais dividir todos os membros por dx, e só depois substituir o y por 0, em cada uma das situações descritas no enunciado:

- **Equação não exacta:**

$$(y^2 + 2xy)dx - x^2 dy = 0 \Leftrightarrow (y^2 + 2xy)\frac{dx}{dx} - x^2 \frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx} \Leftrightarrow (y^2 + 2xy) - x^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

Logo: $y = 0 \Rightarrow \underbrace{(0^2 + 2 \cdot x \cdot 0)}_{=0} - x^2 \frac{d0}{\underbrace{dx}_{=0}} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow y = 0$ é solução neste caso.

- **Equação resultante da multiplicação pelo factor integrante:**

$$(1 + 2xy^{-1})dx - x^2 \cdot y^{-2} dy = 0 \Leftrightarrow (1 + 2xy^{-1})\frac{dx}{dx} - x^2 \cdot y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx} \Leftrightarrow (1 + 2xy^{-1}) - x^2 \cdot y^{-2} \frac{dy}{dx} = 0$$

Logo: $y = 0 \Rightarrow \left(1 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{0}\right) - x^2 \cdot \frac{1}{0^2} \cdot \frac{d0}{dx} = 0 \rightarrow y = 0$ não é solução neste caso porque se verifica uma impossibilidade do tipo $1/0$.