Complementos de Análise Matemática B/C

MIECOM, MIEEICOM, MIEMAT

Exame de Recurso

Duração: 2 horas (1ª + 2ª Parte)

Nome: ____________________ N.º ________ Curso: ________

Realização de (assinalar apenas uma das opções): 1ª Parte (1 hora) ☐ 2ª Parte (1 hora) ☐ 1ª + 2ª Parte (2 horas) ☐

Indique todos os cálculos que efectuar.

1ª Parte

1.
a) Mostre que a relação

$$2xy^2 + 2x + 4y = 4$$

verifica formalmente o PVI

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{y^2+1}{xy+1}, \quad y(0) = 1;$$

b) Considere a EDO

$$-x\frac{dy}{dx} + 2y = -x^4 \ln x, \quad x > 0.$$

Classifique a EDO e determine uma família de soluções.

2.
a) Use o método de redução de ordem para determinar a solução geral da EDO

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6x\frac{dy}{dx} + 12y = 0, \quad x > 0,$$

sabendo que $y = x^3$ é uma solução desta equação diferencial;

b) Determine uma solução particular da EDO

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = -50x + 10\cos 2x,$$

sabendo que 0 e -1 são raízes da equação característica associada à EDO

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0.$$

Indique todos os cálculos que efectuar.

2ª Parte

3.

a) Determine a transformada de Laplace da função

$$g(t)=\begin{cases} t^2, & 0<t<1 \\ -t^2, & t\geq 1 \end{cases}.$$

Indique, justificando, o domínio de $G(s)$;

b) Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$H(s)=\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+4}+\frac{1}{s},$$

explicitando o resultado obtido por ramos.

c) Determine, usando a transformada de Laplace, a solução do sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-y=e^{-t} \\ \dfrac{dx}{dt}+x+2\dfrac{dy}{dt}-y=e^{t} \end{cases}$$

com $x(0)=-1$ e $y(0)=1$.

4.

a) Mostre que $\lambda=-1$ é um valor próprio do PVF

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0,\quad \frac{dy}{dx}(0)-y(0)=0,\quad \frac{dy}{dx}(2)-y(2)=0$$

e determine a respectiva função própria;

b) Determine a solução do seguinte problema

$$u(x,t)\ :\ \begin{cases} u_t=u_{xx}+u, & 0<x<\pi,\ \ t>0, \\ u(x,0)=2, & 0<x<\pi, \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t>0, \end{cases}$$

sabendo que o PVF

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda X=0,\ \ X(0)=0,\ \ X(l)=0,$$

admite como valores próprios e funções próprias:

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\ \ X_n(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\ \ n\in\mathbb{N}.$$