Teoria

Sabendo da teoria que: $W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$, é a expressão que permite determinar o trabalho útil realizado pela força para deslocar uma determinada partícula. Então vamos agora começar por decompor o vector $\vec{F}$, para depois substituir o respectivo valor na expressão que traduz o trabalho útil:

$$\vec{F} = [F_1(x;y)]\vec{i} + [F_2(x;y)]\vec{j} \Leftrightarrow \vec{F} = [F_1(x;y); F_2(x;y)].$$

O trajecto percorrido pela partícula é dado pela parametrização da curva L, isto significa que teremos: $r = \left\{\begin{array}{l} x = j(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\},\ a \le t \le b$

Esta parametrização implica o seguinte: $\vec{F} = \left(F_1[j(t);y(t)]; F_2[j(t);y(t)]\right)$

É sabido ainda que: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{dj(t)}{dt} = j'(t) \\ y = \dfrac{dy(t)}{dt} = y'(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v} = [j'(t);y'(t)]$

Então a expressão final para o cálculo do trabalho será:

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} \Leftrightarrow W = \int_a^b [F_1(j(t);y(t)) \cdot j'(t) + F_2(j(t);y(t)) \cdot y'(t)]dt$$

1. Calcule os seguintes integrais curvilíneos:

a) $\int_C (x \cdot y)dx + (y - x)dy$ **ao longo das linhas e entre os pontos:** $A(0;0)$ **e** $B(1;1)$**.**

i) $y = x$

R:

Atendendo ao que é referido na teoria:

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} \Leftrightarrow W = \int_L \vec{F} \cdot (\vec{v}dt) \Leftrightarrow W = \int_a^b [F_1(j(t);y(t)) \cdot j'(t) + F_2(j(t);y(t)) \cdot y'(t)]dt \Leftrightarrow ✪$$

Assim sendo, vamos agora determinar cada um dos elementos a substituir na expressão ✪, pelo que: $\int_C (x \cdot y)dx + (y - x)dy \Rightarrow \vec{F} = \begin{cases} [F_1(x;y)] = x \cdot y \\ [F_2(x;y)] = y - x \end{cases}$

Uma vez que o trajecto percorrido pela partícula é: $y = x$, então a respectiva parametrização será: $r = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} j'(t) = (t)' = 1 \\ y'(t) = (t)' = 1 \end{cases}$

Uma vez que **y** depende de **x** ($y = x$), então o intervalo de valores para **t** será dado pelas coordenadas em **x** de cada um dos pontos: $\overset{A_X}{\overbrace{0}} \leq t \leq \overset{B_X}{\overbrace{1}}$

Então teremos agora que: $\vec{F} = \begin{cases} [F_1(j(t);y(t))] = t \cdot t \\ [F_2(j(t);y(t))] = t - t \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = \begin{cases} [F_1(j(t);y(t))] = t^2 \\ [F_2(j(t);y(t))] = 0 \end{cases}$

Logo:

$$✪ \Leftrightarrow W=\int_0^1\left[t^2\cdot 1+0\cdot 1\right]dt \Leftrightarrow W=\int_0^1\left[t^2\right]dt \Leftrightarrow W=\left[\frac{t^{2+1}}{2+1}\right]_0^1 \Leftrightarrow W=\left[\frac{1^3}{3}\right]=\frac{1}{3}$$

ii) $y=x^2$

R:

Atendendo ao que é referido na teoria:

$$W=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} \Leftrightarrow W=\int_L \vec{F}\cdot\left(\vec{v}dt\right) \Leftrightarrow W=\int_a^b\left[F_1\left(j(t);y(t)\right)\cdot j'(t)+F_2\left(j(t);y(t)\right)\cdot y'(t)\right]dt \Leftrightarrow ✪$$

Assim sendo, vamos agora determinar cada um dos elementos a substituir na expressão ✪, pelo que: $\int_C (x\cdot y)dx+(y-x)dy \Rightarrow \vec{F}=\begin{cases}\left[F_1(x;y)\right]=x\cdot y\\ \left[F_2(x;y)\right]=y-x\end{cases}$

Uma vez que o trajecto percorrido pela partícula é: $y=x^2$, então a respectiva parametrização será: $r=\begin{cases}x=t\\ y=t^2\end{cases} \Rightarrow \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\begin{cases}j'(t)=(t)'=1\\ y'(t)=\left(t^2\right)'=2t\end{cases}$

Uma vez que **y** depende de **x** ($y=x^2$), então o intervalo de valores para **t** será dado pelas coordenadas em **x** de cada um dos pontos: $\overbrace{0}^{A_X}\le t\le \overbrace{1}^{B_X}$

Então teremos agora que: $\vec{F}=\begin{cases}\left[F_1\left(j(t);y(t)\right)\right]=t\cdot t^2\\ \left[F_2\left(j(t);y(t)\right)\right]=t^2-t\end{cases} \Leftrightarrow \vec{F}=\begin{cases}\left[F_1\left(j(t);y(t)\right)\right]=t^3\\ \left[F_2\left(j(t);y(t)\right)\right]=t^2-t\end{cases}$

Logo:

$$✪ \Leftrightarrow W=\int_0^1\left[t^3\cdot 1+\left(t^2-t\right)\cdot 2t\right]dt \Leftrightarrow W=\int_0^1\left[t^3+2t^3-2t^2\right]dt \Leftrightarrow W=\left[\frac{t^{3+1}}{3+1}+2\frac{t^{3+1}}{3+1}-2\frac{t^{2+1}}{2+1}\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W=\left[\frac{1^4}{4}+2\cdot\frac{1^4}{4}-2\cdot\frac{1^3}{3}\right] \Leftrightarrow W=\left[\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-\frac{2}{3}\right] \Leftrightarrow W=\left[\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right] \Leftrightarrow W=\left[\frac{3\cdot 3-2\cdot 4}{12}\right] \Leftrightarrow W=\frac{1}{12}$$

iii) $y^2=x$

R:

Atendendo ao que é referido na teoria:

$$W=\int_L \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} \Leftrightarrow W=\int_L \vec{F}\cdot\left(\vec{v}dt\right) \Leftrightarrow W=\int_a^b\left[F_1\left(j\,(t);y\,(t)\right)\cdot j\,'(t)+F_2\left(j\,(t);y\,(t)\right)\cdot y\,'(t)\right]dt \Leftrightarrow ✪$$

Assim sendo, vamos agora determinar cada um dos elementos a substituir na expressão ✪, pelo que: $\int_C (x\cdot y)dx+(y-x)dy \Rightarrow \vec{F}=\begin{cases}\left[F_1(x;y)\right]=x\cdot y\\ \left[F_2(x;y)\right]=y-x\end{cases}$

Uma vez que o trajecto percorrido pela partícula é: $y^2=x$, então a respectiva parametrização será: $r=\begin{cases}y=t\\ x=t^2\end{cases} \Rightarrow \vec{v}=\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}=\begin{cases}j\,'(t)=\left(t^2\right)'=2t\\ y\,'(t)=(t)'=1\end{cases}$

Uma vez que **x** depende de **y** ($y^2=x$), então o intervalo de valores para **t** será dado pelas coordenadas em **y** de cada um dos pontos: $\overbrace{0}^{A_Y}\le t\le \overbrace{1}^{B_Y}$

Então teremos agora que: $\vec{F} = \begin{cases} [F_1(j(t);y(t))] = t^2 \cdot t \\ [F_2(j(t);y(t))] = t - t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = \begin{cases} [F_1(j(t);y(t))] = t^3 \\ [F_2(j(t);y(t))] = t - t^2 \end{cases}$

Logo:

$$✪ \Leftrightarrow W = \int_0^1 \left[t^3 \cdot 2t + \left(t - t^2\right) \cdot 1\right] dt \Leftrightarrow W = \int_0^1 \left[2t^4 + t - t^2\right] dt \Leftrightarrow W = \left[2\frac{t^{4+1}}{4+1} + \frac{t^{1+1}}{1+1} - \frac{t^{2+1}}{2+1}\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W = \left[2 \cdot \frac{1^5}{5} + \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right] \Leftrightarrow W = \left[\frac{2 \cdot 6 + 1 \cdot 15 - 1 \cdot 10}{30}\right] \Leftrightarrow W = \frac{17}{30}$$

iv) $y = x^3$

R:

Atendendo ao que é referido na teoria:

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} \Leftrightarrow W = \int_L \vec{F} \cdot \left(\vec{v} dt\right) \Leftrightarrow W = \int_a^b \left[F_1(j(t);y(t)) \cdot j'(t) + F_2(j(t);y(t)) \cdot y'(t)\right] dt \Leftrightarrow ✪$$

Assim sendo, vamos agora determinar cada um dos elementos a substituir na expressão ✪, pelo que: $\int_C (x \cdot y) dx + (y - x) dy \Rightarrow \vec{F} = \begin{cases} [F_1(x;y)] = x \cdot y \\ [F_2(x;y)] = y - x \end{cases}$

Uma vez que o trajecto percorrido pela partícula é: $y = x^3$, então a respectiva parametrização será: $r = \begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} j'(t) = (t)' = 1 \\ y'(t) = \left(t^3\right)' = 3t^2 \end{cases}$

Uma vez que **y** depende de **x** ($y = x^3$), então o intervalo de valores para **t** será dado pelas coordenadas em **x** de cada um dos pontos: $\overbrace{0}^{A_X} \le t \le \overbrace{1}^{B_X}$

Então teremos agora que: $\vec{F} = \begin{cases} [F_1(j(t);y(t))] = t \cdot t^3 \\ [F_2(j(t);y(t))] = t^3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = \begin{cases} [F_1(j(t);y(t))] = t^4 \\ [F_2(j(t);y(t))] = t^3 - t \end{cases}$

Logo:

$$✪ \Leftrightarrow W = \int_0^1 \left[t^4 \cdot 1 + \left(t^3 - t\right) \cdot 3t^2\right] dt \Leftrightarrow W = \int_0^1 \left[t^4 + 3t^5 - 3t^3\right] dt \Leftrightarrow W = \left[\frac{t^{4+1}}{4+1} + 3\frac{t^{5+1}}{5+1} - 3\frac{t^{3+1}}{3+1}\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W = \left[\frac{1^5}{5} + 3 \cdot \frac{1^6}{6} - 3 \cdot \frac{1^4}{4}\right] \Leftrightarrow W = \left[\frac{1}{5} + \frac{3}{6} - \frac{3}{4}\right] \Leftrightarrow W = \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right] \Leftrightarrow W = \left[\frac{4 \cdot 1 + 10 \cdot 1 - 3 \cdot 5}{20}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W = -\frac{1}{20}$$

b) $\int_L (x)dx + (y)dy + (y + x - 1)dz$ **onde L é o segmento de recta que une os pontos: (1;1;1) e (2;3;4).**

R:

Admitindo que: $\begin{Bmatrix} A = (1;1;1) \\ B = (2;3;4) \end{Bmatrix}$, então teremos que: $\vec{AB} = B - A = (2;3;4) - (1;1;1) = (1;2;3)$

Sabendo que a equação paramétrica de uma recta é dada por: $(x;y;z) = (x_0;y_0;z_0) + t \cdot (\vec{AB}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x;y;z) = (1;1;1) + t \cdot (1;2;3) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{Bmatrix}$$

$$A = \begin{Bmatrix} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 = 1 + t \\ 1 = 1 + 2t \\ 1 = 1 + 3t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{Bmatrix} \qquad B = \begin{Bmatrix} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2 = 1 + t \\ 3 = 1 + 2t \\ 4 = 1 + 3t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{Bmatrix}$$

Desta forma se pode concluir que: $\overset{A}{\overbrace{0}} \le t \le \overset{B}{\overbrace{1}}$

Ora, sabendo ainda que: $\begin{Bmatrix} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{ \frac{dx}{dt} = 1; \frac{dy}{dt} = 2; \frac{dz}{dt} = 3 \right\}$

Então: $\int_L (x)dx + (y)dy + (y + x - 1)dz = \int_0^1 [(1+t) \cdot 1 + (1+2t) \cdot 2 + (1 + 2t + 1 + t - 1) \cdot 3]dt =$

$$= \int_0^1 [1 + t + 2 + 4t + 3 + 6t + 3 + 3t - 3]dt = \int_0^1 [14t + 6]dt = \left[14 \cdot \frac{t^{1+1}}{1+1} + 6 \cdot t\right]_0^1 = \left[14 \cdot \frac{1^2}{2} + 6 \cdot 1\right] = 13$$

2. Calcule os integrais curvilíneos:

a) $\int_L \frac{ds}{x-y}$ **onde L é o segmento de recta que une os pontos:** $A(0;-2)$ **e** $B(4;0)$**.**

R:

Uma vez que: $\begin{cases} A=(0;-2) \\ B=(4;0) \end{cases}$, então teremos que: $\vec{AB}=B-A=(4;0)-(0;-2)=(4;2)$

Sabendo que a equação paramétrica de uma recta é dada por: $(x;y)=(x_0;y_0)+t\cdot\left(\vec{AB}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x;y)=(0;-2)+t\cdot(4;2)\Leftrightarrow\begin{cases} x=0+4t \\ y=-2+2t \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=4t \\ y=2t-2 \end{cases}$$

$$A=\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 0=4t \\ -2=2t-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=0 \\ t=0 \end{cases} \qquad B=\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 4=4t \\ 0=2t-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=1 \\ t=1 \end{cases}$$

Desta forma se pode concluir que: $\overset{A}{\overbrace{0}}\leq t\leq\overset{B}{\overbrace{1}}$

Ora, sabendo ainda que: $\begin{cases} x=4t \\ y=2t-2 \end{cases}\Rightarrow\left\{\frac{dx}{dt}=4;\frac{dy}{dt}=2\right\}$

E que: $ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt\Leftrightarrow ds=\sqrt{(4)^2+(2)^2}dt\Leftrightarrow ds=\sqrt{20}dt$

Então:

$$\int_L \frac{ds}{x-y} = \int_0^1 \frac{\sqrt{20}}{4t-(2t-2)}dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{20}}{2t+2}dt = \sqrt{20}\cdot\int_0^1 \frac{1}{2t+2}dt =^1 \sqrt{20}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\int_0^1 (2)\cdot\frac{1}{2t+2}dt =$$

$$= \frac{\sqrt{20}}{2}\cdot\left[\ln(2t+2)\right]_0^1 = \frac{\sqrt{20}}{2}\cdot\left[\ln(2\cdot 1+2)-\ln(2\cdot 0+2)\right] = \frac{\sqrt{20}}{2}\cdot\left[\ln(4)-\ln(2)\right] = \frac{\sqrt{20}}{2}\cdot\ln(2)$$

b) $\int_L (x-y)ds$ **onde L é a circunferência:** $x^2+y^2=2\cdot a\cdot x$**.**

R:

Antes de mais vamos determinar a equação da circunferência:

$$x^2+y^2=2\cdot a\cdot x \Leftrightarrow x^2+y^2-2\cdot a\cdot x=0 \Leftrightarrow \left(x^2-2\cdot a\cdot x+y^2\right)+a^2=0+a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2+y^2=a^2 \Rightarrow Circunferência\begin{cases} Centro \rightarrow (a;0) \\ Raio \rightarrow \sqrt{a^2}=a \end{cases}$$

Para uma qualquer circunferência a parametrização a fazer será: $\begin{cases} x-x_0 = r\cdot\cos q \\ y-y_0 = r\cdot sen q \end{cases}$

Então teremos para este caso particular, onde: $\begin{cases} 0\le r\le a \\ 0\le q\le 2p \end{cases}$ [2] que:

---

[1] Derivada do tipo: $\left(\ln(u)\right)' = \frac{u'}{u}$ → teremos então que rearranjar o integral multiplicando e dividindo por 2 para se poder aplicar isto.

[2] **ATENÇÃO**!!! **As regras utilizadas nas transformações de coordenadas não são aplicáveis nos integrais curvilíneos**. Isto significa que ρ e θ são sempre valores fixos. De notar que: θ = t.

$$\begin{cases} x-x_0 = r\cdot\cos q \\ y-y_0 = r\cdot sen q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-a = a\cdot\cos q \\ y-0 = a\cdot sen q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a+a\cdot\cos q \\ y = a\cdot sen q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a\cdot sen q \\ \dfrac{dy}{dt} = a\cdot\cos q \end{cases}$$

Logo: $ds = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \Leftrightarrow ds = \sqrt{(-a\cdot sen q)^2 + (a\cdot\cos q)^2}\,dt \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow ds = \sqrt{a^2\cdot\underbrace{(sen^2 q+\cos^2 q)}_{=1}}\,dt \Leftrightarrow ds = \sqrt{a^2}\,dt \Leftrightarrow ds = (a)dt$$

Assim sendo teremos finalmente que:

$$\int_L (x-y)ds = \int_0^{2p}(a+a\cdot\cos(t)-a\cdot sen(t))\cdot(a)dt = \int_0^{2p} a\cdot(1+\cos(t)-sen(t))\cdot(a)dt =$$

$$= a^2\cdot\int_0^{2p}(1+\cos(t)-sen(t))dt = a^2\cdot[t+sen(t)-(-\cos(t))]_0^{2p} =$$

$$= a^2\cdot\left[\left(2p+\underbrace{sen(2p)}_{=0}+\underbrace{\cos(2p)}_{=1}\right)-\left(0+\underbrace{sen(0)}_{=0}+\underbrace{\cos(0)}_{=1}\right)\right] = 2pa^2$$

3. Calcule o trabalho W realizado pelo campo de forças: $\vec{F}(x;y)=\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\vec{e}_1-\left(\frac{1}{2}y\right)\cdot\vec{e}_2$ **quando uma partícula se desloca ao longo:**

a) De uma circunferência determinada pela função vectorial:

$\vec{r}(t)=(2\cdot\cos(t))\cdot\vec{e}_1+(2\cdot sen(t))\cdot\vec{e}_2$ **e** $x^2+y^2=4$**.**

R:

Atendendo ao que é referido na teoria:

$$W=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}\Leftrightarrow W=\int_L \vec{F}\cdot(\vec{v}dt)\Leftrightarrow W=\int_a^b\left[F_1(j(t);y(t))\cdot j'(t)+F_2(j(t);y(t))\cdot y'(t)\right]dt\Leftrightarrow ✪$$

Assim sendo, vamos agora determinar cada um dos elementos a substituir na expressão ✪, pelo que: $\vec{F}(x;y)=\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\vec{e}_1-\left(\frac{1}{2}y\right)\cdot\vec{e}_2\Rightarrow\vec{F}=\begin{cases}[F_1(x;y)]=\frac{1}{2}x\\ [F_2(x;y)]=-\frac{1}{2}y\end{cases}$

Uma vez que o trajecto percorrido pela partícula já está dado no enunciado sob a sua forma paramétrica: $\vec{r}(t)=(2\cdot\cos(t))\cdot\vec{e}_1+(2\cdot sen(t))\cdot\vec{e}_2\Rightarrow r=\begin{cases}x=2\cdot\cos(t)\\ y=2\cdot sen(t)\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\begin{cases}j'(t)=(2\cdot\cos(t))'=-2\cdot sen(t)\\ y'(t)=(2\cdot sen(t))'=2\cdot\cos(t)\end{cases}$$

Uma vez que se trata de uma circunferência, então: $0\le t\le 2p$

Então teremos agora que:

$$\vec{F}=\begin{cases}[F_1(j(t);y(t))]=\frac{1}{2}\cdot(2\cdot\cos(t))\\ [F_2(j(t);y(t))]=-\frac{1}{2}\cdot(2\cdot sen(t))\end{cases}\Leftrightarrow \vec{F}=\begin{cases}[F_1(j(t);y(t))]=\cos(t)\\ [F_2(j(t);y(t))]=-sen(t)\end{cases}$$

Logo:

$$✪\Leftrightarrow W=\int_0^{2p}[\cos(t)\cdot(-2\cdot sen(t))+(-sen(t))\cdot 2\cdot\cos(t)]dt\Leftrightarrow W=\int_0^{2p}[-4\cdot\cos(t)\cdot sen(t)]dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W=-4\cdot\int_0^{2p}\left[\underbrace{\cos(t)}_{u'}\cdot\underbrace{sen(t)}_{u^a}\right]dt\Leftrightarrow W=-4\cdot\left[\frac{sen^{1+1}(t)}{1+1}\right]_0^{2p}\Leftrightarrow W=-4\cdot\left[\frac{sen^2(2p)}{2}-\frac{sen^2(0)}{2}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W=-4\cdot\left[\frac{0}{2}-\frac{0}{2}\right]\Leftrightarrow W=0$$

b) Da elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ superior, percorrida no sentido dos ponteiros do relógio.

R:

Atendendo ao que é referido na teoria:

$$W=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}\Leftrightarrow W=\int_L \vec{F}\cdot(\vec{v}dt)\Leftrightarrow W=\int_a^b[F_1(j(t);y(t))\cdot j'(t)+F_2(j(t);y(t))\cdot y'(t)]dt\Leftrightarrow ✪$$

Assim sendo, vamos agora determinar cada um dos elementos a substituir na expressão ✪, pelo que: $\vec{F}(x;y)=\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\vec{e}_1-\left(\frac{1}{2}y\right)\cdot\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{F}=\begin{Bmatrix}[F_1(x;y)]=\frac{1}{2}x\\ [F_2(x;y)]=-\frac{1}{2}y\end{Bmatrix}$

Uma vez que o trajecto percorrido pela partícula é a parte superior de uma elipse, então teremos que proceder à sua parametrização sabendo que a equação de uma qualquer elipse é dada por: $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$

Logo a parametrização que se aplica para estes casos será a seguinte: $\begin{Bmatrix}\frac{x-x_0}{a}=r\cdot\cos q\\ \frac{y-y_0}{b}=r\cdot sen q\end{Bmatrix}$

Onde: $\begin{Bmatrix}r=1\\ 0\le q\le 2p\end{Bmatrix}$[3] e $|J|=a\cdot b\cdot r$

Ora, no enunciado é dado que:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$ → Elipse com centro (0;0), raio 1 e $\begin{Bmatrix}a=2\\ b=3\end{Bmatrix}$

Aplicando isto ao caso que se está a estudar nesta alínea, teremos então que:

$$\begin{Bmatrix}\frac{x-0}{2}=1\cdot\cos q\\ \frac{y-0}{3}=1\cdot sen q\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=2\cdot\cos q\\ y=3\cdot sen q\end{Bmatrix}^{4}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=-2\cdot\cos q\\ y=3\cdot sen q\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

[3] Quando se trata de elipses, ρ é sempre igual a 1.

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} j\,'(t) = (-2\cdot\cos(q))' = 2\cdot sen(q) \\ y\,'(t) = (3\cdot sen(q))' = 3\cdot\cos(t) \end{cases}$$

Então teremos agora que:

$$\vec{F} = \begin{cases} [F_1(j\,(t);y\,(t))] = \frac{1}{2}\cdot(-2\cdot\cos(t)) \\ [F_2(j\,(t);y\,(t))] = -\frac{1}{2}\cdot(3\cdot sen(t)) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = \begin{cases} [F_1(j\,(t);y\,(t))] = -\cos(t) \\ [F_2(j\,(t);y\,(t))] = -\frac{3}{2}\cdot sen(t) \end{cases}$$

Logo, como se pretende apenas metade da elipse então: $0 \le t \le p$:

$$✪ \Leftrightarrow W = \int_0^p \left[-\cos(t)\cdot 2\cdot sen(t) - \frac{3}{2}\cdot sen(t)\cdot 3\cdot\cos(t)\right]dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W = \int_0^p \left[-2\cdot\cos(t)\cdot sen(t) - \frac{9}{2}\cdot sen(t)\cdot\cos(t)\right]dt \Leftrightarrow W = \int_0^p \left[\cos(t)\cdot sen(t)\cdot\left(-2-\frac{9}{2}\right)\right]dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W = -\frac{13}{2}\cdot\int_0^p \left[\underbrace{\cos(t)}_{=u'}\cdot\underbrace{sen(t)}_{u^a}\right]dt \Leftrightarrow W = -\frac{13}{2}\cdot\left[\frac{sen^{1+1}(t)}{1+1}\right]_0^p \Leftrightarrow W = -\frac{13}{2}\cdot\left[\frac{sen^2(p)}{2} - \frac{sen^2(0)}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W = -\frac{13}{2}\cdot\left[\frac{0}{2} - \frac{0}{2}\right] \Leftrightarrow W = 0$$

4 Uma vez que se pretende apenas a região superior da elipse, percorrida no sentido dos ponteiros do relógio então temos que reescrever a parametrização em x da forma que se vê.

4. Calcule o trabalho W realizado pelo campo de forças:

$\vec{F}(x;y;z)=\left(ax^3\right)\cdot\vec{i}+\left(bzy^2\right)\cdot\vec{j}+\left(cx^2y\right)\cdot\vec{k}\ (a;b;c\in\Re)$ **quando a partícula se desloca no segmento de recta que une o ponto A(3;2;1) ao ponto B(0;0;0).**

R:

Sabendo que a equação paramétrica de uma qualquer recta é dada por:

$$(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+t\cdot\left(\vec{AB}\right)$$

E que: $\vec{AB}=B-A=(0;0;0)-(3;2;1)=(-3;-2;-1)$

Então: $(x;y;z)=(0;0;0)+t\cdot(-3;-2;-1)\Leftrightarrow(x;y;z)=(-3t;-2t;-t)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3t\\y=-2t\\z=-t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=-3\\y'=-2\\z'=-1\end{cases}$

$$A=\begin{cases}x=3\\y=2\\z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3=-3t\\2=-2t\\1=-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t=-1\\t=-1\end{cases}\qquad B=\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=-3t\\0=-2t\\0=-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\t=0\\t=0\end{cases}$$

Donde se pode concluir que: $-1\le t\le 0$

Assim sendo teremos então que: $\vec{F}(x;y;z)=\left(ax^3\right)\cdot\vec{i}+\left(bzy^2\right)\cdot\vec{j}+\left(cx^2y\right)\cdot\vec{k}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\vec{F}=\begin{cases}\left[F_1\left(j(t);y(t)\right)\right]=a\cdot(-3t)^3\\\left[F_2\left(j(t);y(t)\right)\right]=b\cdot(-t)\cdot(-2t)^2\\\left[F_3\left(j(t);y(t)\right)\right]=c\cdot(-3t)^2\cdot(-2t)\end{cases}=\begin{cases}\left[F_1\left(j(t);y(t)\right)\right]=-27at^3\\\left[F_2\left(j(t);y(t)\right)\right]=-4bt^3\\\left[F_3\left(j(t);y(t)\right)\right]=-18ct^3\end{cases}$$

E que: $\vec{v} = \begin{Bmatrix} x' = -3 \\ y' = -2 \\ z' = -1 \end{Bmatrix}$

Posto isto teremos que:

$$W = \int_a^b \dot{F} \cdot \left(\dot{v} \cdot dt\right) \Leftrightarrow W = \int_{-1}^{0} \left[\left(-27at^3 \cdot (-3)\right) + \left(-4bt^3 \cdot (-2)\right) + \left(-18ct^3 \cdot (-1)\right)\right] dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W = \int_{-1}^{0} \left[81at^3 + 8bt^3 + 18ct^3\right] dt \Leftrightarrow W = \left[81a \cdot \frac{t^{3+1}}{3+1} + 8b \cdot \frac{t^{3+1}}{3+1} + 18c \cdot \frac{t^{3+1}}{3+1}\right]_{-1}^{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W = -\left[81a \cdot \frac{(-1)^4}{4} + 8b \cdot \frac{(-1)^4}{4} + 18c \cdot \frac{(-1)^4}{4}\right] \Leftrightarrow W = -\left[\frac{81a}{4} + \frac{8b}{4} + \frac{18c}{4}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W = -\frac{81a}{4} - 2b - \frac{18c}{4}$$

5. Considere os campos de vectores $\vec{F}$ em $\Re^2$ dados. Verifique que $\vec{F}$ é um campo conservativo e determine um potencial para $\vec{F}$.

a) $\vec{F}(x;y) = (6x + 6y^2 + 7)\cdot \vec{e_1} + (12xy + 1)\cdot \vec{e_2}$**.**

R:

Para provar que o campo é conservativo basta verificar que: $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, pelo que teremos:

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(6x + 6y^2 + 7) = \frac{\partial}{\partial x}(12xy + 1) \Leftrightarrow 12y = 12y \Rightarrow$ Está então provado que $\vec{F}$ é um campo conservativo.

Para determinar o potencial f teremos que:

$$\vec{F}(x;y) = \vec{\nabla}_f(x;y) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = F_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 6y^2 + 7 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 12xy + 1 \Rightarrow f(x;y) = \int (12xy + 1)dy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ---------------- \\ f(x;y) = 12x\frac{y^{1+1}}{1+1} + y + j(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -------------- \\ f(x;y) = 6xy^2 + y + j(x) \end{cases} \Rightarrow \frac{df}{dx}(x;y) = 6y^2 + j'(x)$$

Igualando agora esta derivada que se calculou à derivada presente no sistema de equações, teremos que:

$$6y^2 + j'(x) = 6x + 6y^2 + 7 \Leftrightarrow j'(x) = 6x + 7 \Leftrightarrow j(x) = \int (6x + 7)dx \Leftrightarrow j(x) = 6\frac{x^{1+1}}{1+1} + 7x + C \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow j(x) = 3x^2 + 7x + C$

Substituindo agora este valor obtido em: $f(x;y) = 6xy^2 + y + j(x)$, teremos:

$f(x;y) = 6xy^2 + y + 3x^2 + 7x + C$ → Equação do potencial de $\vec{F}$.

b) $\vec{F}(x;y) = \left(\sec^2 x + y^2\right) \cdot \vec{e}_1 + (2xy + 3) \cdot \vec{e}_2$**.**

R:

Para provar que o campo é conservativo basta verificar que: $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, pelo que teremos:

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\sec^2 x + y^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 3) \Leftrightarrow 2y = 2y \Rightarrow$ Está então provado que $\vec{F}$ é um campo conservativo.

Para determinar o potencial f teremos que:

$$\vec{F}(x;y) = \vec{\nabla}_f(x;y) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = F_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \sec^2 x + y^2 \Rightarrow f(x;y) = \int \left(\sec^2 x + y^2\right) dx \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 3 \end{cases} \Leftrightarrow^{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x;y) = tg(x) + xy^2 + j(y) \\ --------------- \end{cases} \Rightarrow \frac{df}{dy}(x;y) = 2xy + j'(y)$$

[5] Esta primitiva é dada por: $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

Igualando agora esta derivada que se calculou à derivada presente no sistema de equações, teremos que:

$$2xy + j'(y) = 2xy + 3 \Leftrightarrow j'(y) = 3 \Leftrightarrow j(y) = \int 3dy \Leftrightarrow j(y) = 3y + C$$

Substituindo agora este valor obtido em: $f(x;y) = 3x^2 + 6xy^2 + j(y)$, teremos:

$f(x;y) = 3x^2 + 6xy^2 + 3y + C$ → Equação do potencial de $\vec{F}$.

6. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{r}(t) = (e^t \cdot sen(t)) \cdot \vec{e}_1 + (e^t \cdot \cos(t)) \cdot \vec{e}_2$ com $t \in [0;p]$ e $\vec{F}$ é um campo de vectores definido na pergunta 5.

R:

É sabido da teoria que quando: $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \text{ é campo conservativo} \\ f \text{ é o potencial de } \vec{F} \end{array} \right\}$ para um determinado $\vec{r}(t)$ conhecido e $t \in [a;b]$, então teremos: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla}_f \cdot d\vec{r} = f[r(b)] - f[r(a)]$

Para este caso em particular sabemos que, para a questão 5.a), por exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \text{ é campo conservativo} \\ f = 6xy^2 + y + 3x^2 + 7x \end{array} \right\}$$

Onde: $\vec{r}(t) = (e^t \cdot sen(t)) \cdot \vec{e}_1 + (e^t \cdot \cos(t)) \cdot \vec{e}_2 \Leftrightarrow \vec{r}(t) = (e^t \cdot sen(t); e^t \cdot \cos(t))$

E: $t \in [0;p]$

Assim sendo teremos que: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla}_f \cdot d\vec{r} = f[r(p)] - f[r(0)] =$ ☆

Vamos começar por determinar o valor de $\vec{r}(t)$, seguido do valor de $f[r(t)]$, para $t \in [0;p]$:

$$\vec{r}(0) = \left(e^0 \cdot sen(0); e^0 \cdot \cos(0)\right) \Leftrightarrow \vec{r}(0) = (1 \cdot 0; 1 \cdot 1) \Leftrightarrow \vec{r}(0) = (0;1) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f[r(0)] = f[0;1] = 6 \cdot 0 \cdot 1^2 + 1 + 3 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 = 1$$

$$\vec{r}(p) = \left(e^p \cdot sen(p); e^p \cdot \cos(p)\right) \Leftrightarrow \vec{r}(p) = \left(e^p \cdot 0; e^p \cdot (-1)\right) \Leftrightarrow \vec{r}(p) = \left(0; -e^p\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f[r(p)] = f\left[0; -e^p\right] = 6 \cdot 0 \cdot \left(-e^p\right)^2 + \left(-e^p\right) + 3 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 = -e^p$$

Então por substituição directa em ☆ teremos que: $= f[r(p)] - f[r(0)] = -e^p - 1$

7. Calcule o seguinte integral curvilíneo: $\int_L (x \cdot y + x + y)dx + (x \cdot y + x - y)dy$ **onde L é dada pela:**

a) Elipse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

R:

Como se trata de uma curva fechada, então podemos aplicar directamente o teorema de Green: $\int_L F_1(x;y)dx + F_2(x;y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy$

Ora: $\int_L (x \cdot y + x + y)dx + (x \cdot y + x - y)dy \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1(x;y) = x \cdot y + x + y \\ F_2(x;y) = x \cdot y + x - y \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x;y) = (x \cdot y + x + y)'_y = x + 1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x;y) = (x \cdot y + x - y)'_x = y + 1 \end{Bmatrix}$$

Agora teremos que determinar os limites que definem a região D, pelo que:

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow$ Elipse de centro (0;0), raio $\sqrt{1} = 1$ e $\begin{Bmatrix} a = 2 \\ b = 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le q \le 2p \end{Bmatrix}$

A parametrização a seguir será a seguinte: $\begin{Bmatrix} \frac{x - x_0}{a} = r \cdot \cos q \\ \frac{y - y_0}{b} = r \cdot sen q \end{Bmatrix}$ e $|J| = a \cdot b \cdot r$

Pelo que: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-0}{2}=r\cdot\cos q \\ \dfrac{y-0}{3}=r\cdot sen q \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2\cdot r\cdot\cos q \\ y=3\cdot r\cdot sen q \end{array}\right\}$ e $|J|=a\cdot b\cdot r=2\cdot 3\cdot r=6\cdot r$

Então finalmente teremos que:

$$\iint_D\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D\left(y+1-(x+1)\right)dxdy=\iint_D(y-x)dxdy=$$

$$=\int_0^1\int_0^{2p}\left[3\cdot r\cdot sen q-2\cdot r\cdot\cos q\right]\cdot(6\cdot r)dqdr=\int_0^1\int_0^{2p}r\cdot\left[3\cdot sen q-2\cdot\cos q\right]\cdot(6\cdot r)dqdr=$$

$$=\int_0^1 6\cdot r^2\cdot\int_0^{2p}\left[3\cdot sen q-2\cdot\cos q\right]dqdr=\int_0^1 6\cdot r^2\cdot\left[-3\cdot\cos q-2\cdot sen q\right]_0^{2p}dr=$$

$$=\int_0^1 6\cdot r^2\cdot\left[\left(-3\cdot\underbrace{\cos(2p)}_{=1}-2\cdot\underbrace{sen(2p)}_{=0}\right)-\left(-3\cdot\underbrace{\cos(0)}_{=1}-2\cdot\underbrace{sen(0)}_{=0}\right)\right]dr=$$

$$=\int_0^1 6\cdot r^2\cdot[-3+3]dr=\int_0^1 6\cdot r^2\cdot[0]dr=\int_0^1(0)dr=0$$

b) Da circunferência: $x^2 + y^2 = 2x$**.**

R:

Como se trata de uma curva fechada, então podemos aplicar directamente o teorema de Green: $\int_L F_1(x;y)dx + F_2(x;y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy$

Ora: $\int_L (x \cdot y + x + y)dx + (x \cdot y + x - y)dy \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1(x;y) = x \cdot y + x + y \\ F_2(x;y) = x \cdot y + x - y \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x;y) = (x \cdot y + x + y)'_y = x + 1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x;y) = (x \cdot y + x - y)'_x = y + 1 \end{Bmatrix}$$

Agora teremos que determinar os limites que definem a região D, pelo que:

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + y^2 = 0 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Circunferência de centro (1;0) e raio $\sqrt{1} = 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le q \le 2p \end{Bmatrix}$

A parametrização a seguir será a seguinte: $\begin{Bmatrix} x - x_0 = r \cdot \cos q \\ y - y_0 = r \cdot senq \end{Bmatrix}$ e $|J| = r$

Pelo que: $\begin{Bmatrix} x - 1 = r \cdot \cos q \\ y - 0 = r \cdot senq \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 1 + r \cdot \cos q \\ y = r \cdot senq \end{Bmatrix}$ e $|J| = r$

Então finalmente teremos que:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D \left(y + 1 - (x+1) \right) dxdy = \iint_D (y - x) dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2p} [r \cdot senq - (1 + r \cdot \cos q)] \cdot (r) dq dr = \int_0^1 r \cdot [r \cdot (-\cos q) - q - r \cdot senq]_0^{2p} dr =$$

$$= \int_0^1 r \cdot \left[\left(r \cdot \left(-\underbrace{\cos(2p)}_{=1} \right) - 2p - r \cdot \underbrace{sen(2p)}_{=0} \right) - \left(r \cdot \left(-\underbrace{\cos(0)}_{=1} \right) - 0 - r \cdot \underbrace{sen(0)}_{=0} \right) \right] dr =$$

$$= \int_0^1 r \cdot [(r \cdot (-1) - 2p - 0) - (r \cdot (-1) - 0 - 0)] dr = \int_0^1 r \cdot [-r - 2p + r] dr = \int_0^1 r \cdot [-2p] dr =$$

$$= -2p \cdot \int_0^1 r \cdot dr = -2p \cdot \left[\frac{r^{1+1}}{1+1} \right]_0^1 = -2p \cdot \left[\frac{1^2}{2} \right] = -p$$