Análise Matemática II (LEGI, MIEM) **FCTUC**

Frequência (1h30m) - 7/4/2010

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio e a apresentação dos cálculos efectuados.

---

1. Seja f uma função definida por $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$.
   (a) Determine e esboce o domínio de f.
   (b) Identifique e esboce o gráfico de f.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} - y, & \text{se } x \neq 0 \\ -y, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.
   (a) Verifique se f é contínua nos pontos $(\dfrac{1}{\pi}, 1)$ e $(0,1)$.
   (b) Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem de f no ponto $(\dfrac{1}{\pi}, 1)$.
   (c) Sabendo que f é diferenciável no ponto $(\dfrac{1}{\pi}, 1)$, indique uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(\dfrac{1}{\pi}, 1, -1)$.

3. A empresa *Gelattino* confecciona um gelado de cone de baunilha. O cone produzido tem $12cm$ de altura e $3cm$ de raio da base. O volume de um cone de altura h e raio da base r é dado por
$$V(h,r) = \frac{\pi}{3} h r^2.$$
   (a) Determine o diferencial dV para os valores de altura e raio da base dados.
   (b) Num lote de 100 gelados deste tipo, foi escolhido um ao acaso e foram medidos a altura e raio da base do cone correspondente. Os valores obtidos foram $\tilde{h} = 12,01cm$ e $\tilde{r} = 2,999cm$. Usando a alínea anterior, determine uma aproximação, $\tilde{V}$, para o volume deste cone de gelado.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais contínuas. A derivada direccional de f no ponto $(1,2)$ é máxima na direcção e sentido do vector $(-3,-4)$. Sabendo que valor máximo da derivada direccional em $(1,2)$ é 10, determine:
   (a) uma direcção, a partir do ponto $(1,2)$, em que a função f é constante.
   (b) o valor da derivada direccional de f no ponto $(1,2)$ e na direcção $(3,4)$.

5. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = \begin{cases} 1 + x + y, & \text{se } x \neq y; \\ 1, & \text{se } x = y. \end{cases}$
   (a) Determine, usando a definição, $D_v g(0,0)$, sendo v qualquer vector unitário de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calcule o gradiente de g no ponto $(0,0)$.
   (c) Diga, justificando, se g é ou não diferenciável no ponto $(0,0)$.