1. Sabendo que $x = t^2 + sen(t)$ **e** $y = \ln t + t^3$**, determine** $\frac{dz}{dt}$**, sendo :**

a) $z = x^2 + 4y^3$

R:

Antes de mais vamos começar por representar o diagrama de derivadas da função:

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r, dash] & t \\ z \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\ & y \arrow[r, dash] & t \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\right)$$ [1]

Calculando agora cada uma das derivadas teremos que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 + 4y^3\right)'_x = 2x$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(t^2 + sen(t)\right)'_t = \left(t^2\right)'_t + \left(sen(t)\right)'_t = 2t + \cos(t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 + 4y^3\right)'_y = 12y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\ln(t) + t^3\right)'_t = \left(\ln(t)\right)'_t + \left(t^3\right)'_t = \frac{(t)'_t}{t} + 3t^2 = \frac{1}{t} + 3t^2$$

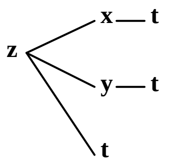
[1] $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ são derivadas totais porque **x** e **y** apenas dependem de t.

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\Leftrightarrow\frac{\partial z}{\partial t}=\left(2x\cdot\left(2t+\cos(t)\right)\right)+\left(12y^2\cdot\left(\frac{1}{t}+3t^2\right)\right)$$

b) $z=\frac{x+y}{4t}$

R:

Antes de mais vamos começar por representar o diagrama de derivadas da função:



$$\frac{\partial z}{\partial t}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)+\frac{dz}{dt}$$

Calculando agora cada uma das derivadas teremos que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x+y}{4t}\right)'_x=\frac{1}{4t}\cdot(x+y)'_x=\frac{1}{4t}\cdot 1=\frac{1}{4t}$$

$$\frac{dx}{dt}=\left(t^2+sen(t)\right)'_t=\left(t^2\right)'_t+\left(sen(t)\right)'_t=2t+\cos(t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x+y}{4t}\right)'_y=\frac{1}{4t}\cdot(x+y)'_y=\frac{1}{4t}\cdot 1=\frac{1}{4t}$$

$$\frac{dy}{dt}=\left(\ln(t)+t^3\right)'_t=\left(\ln(t)\right)'_t+\left(t^3\right)'_t=\frac{(t)'_t}{t}+3t^2=\frac{1}{t}+3t^2$$

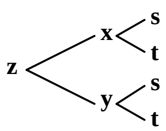
$$\frac{dz}{dt}=\left(\frac{x+y}{4t}\right)'_t=\left(\frac{1}{t}\right)'_t\cdot\frac{x+y}{4}=\left(-\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{x+y}{4}=-\frac{x+y}{4t^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}\Leftrightarrow\frac{\partial z}{\partial t}=\left(\frac{1}{4t}\cdot(2t+\cos(t))\right)+\left(\frac{1}{4t}\cdot\left(\frac{1}{t}+3t^2\right)\right)+\left(-\frac{x+y}{4t^2}\right)$$

2. Se $z=\cos(x^2y)$**, onde** $x=s^3t^2$ **e** $y=s^2+\frac{1}{t}$**, calcule** $\frac{\partial z}{\partial s}$ **e** $\frac{\partial z}{\partial t}$**.**

R:

Antes de mais vamos começar por representar o diagrama de derivadas da função:



$$\frac{\partial z}{\partial s}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

Calculando agora cada uma das derivadas teremos que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\cos(x^2y)\right)'_x=-\left(x^2y\right)'_x\cdot sen(x^2y)=-2xy\cdot sen(x^2y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\cos(x^2y)\right)'_y=-\left(x^2y\right)'_y\cdot sen(x^2y)=-x^2\cdot sen(x^2y)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\left(s^3t^2\right)'_s=3s^2t^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial s}=\left(s^2+\frac{1}{t}\right)'_s=2s$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\left(s^3t^2\right)'_t=2s^3t$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(s^2 + \frac{1}{t} \right)_t' = -\frac{1}{t^2}$$

Logo teremos que:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial s} = \left(-2xy \cdot sen\left(x^2 y\right) \cdot 3s^2 t^2 \right) + \left(-x^2 \cdot sen\left(x^2 y\right) \cdot 2s \right)$$

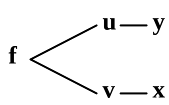
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial t} = \left(-2xy \cdot sen\left(x^2 y\right) \cdot 2s^3 t \right) + \left(-x^2 \cdot sen\left(x^2 y\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2} \right) \right)$$

3. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}\left(y^2; x^2\right)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}\left(y^2; x^2\right)$ supondo que f admite derivadas parciais contínuas.

R:

Admitindo que temos uma função: $f(u;v)$, onde: $u = y^2$ e $v = x^2$

Então o diagrama de derivadas da função será dado por:



Logo teremos que as respectivas derivadas serão:

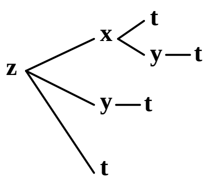
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2\right) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dy} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{d}{dy}\left(y^2\right) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y$$

4. Sendo $z = txy^2$**, onde** $x = t + \ln\left(y + t^2\right)$ **e** $y = e^t$**, calcule** $\frac{\partial z}{\partial t}$ **e** $\frac{dz}{dt}$**.**

R:

Antes de mais vamos começar por representar o diagrama de derivadas da função:



$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial z}{\partial t}$$

Calculando agora cada uma das derivadas teremos que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(txy^2\right)'_x = ty^2 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(txy^2\right)'_y = 2txy \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \left(txy^2\right)'_t = xy^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(t + \ln\left(y + t^2\right)\right)'_t = (t)'_t + \left(\ln\left(y + t^2\right)\right)'_t = 1 + \frac{\left(y + t^2\right)'_t}{y + t^2} = 1 + \frac{2t}{y + t^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(e^t\right)'_t = (t)'_t \cdot e^t = e^t$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \left(t + \ln\left(y + t^2\right)\right)'_y = (t)'_y + \left(\ln\left(y + t^2\right)\right)'_y = \frac{\left(y + t^2\right)'_y}{y + t^2} = \frac{1}{y + t^2}$$

Logo teremos que:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial z}{\partial t} \Leftrightarrow$$

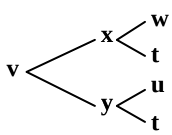
$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = \left(ty^2 \cdot \left(1 + \frac{2t}{y+t^2} \right) \right) + \left(ty^2 \cdot \frac{1}{y+t^2} \cdot e^t \right) + \left(2txy \cdot e^t \right) + xy^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = \left(ty^2 \cdot \left(1 + \frac{2t}{y+t^2} \right) \right) + \left(\frac{ty^2 \cdot e^t}{y+t^2} \right) + \left(2txy \cdot e^t \right) + xy^2$$

5. Sabendo que $v = x + y^2$ **;** $x = \int_0^t \cos(w)dw$ **e** $y = \arccos(u) + sen(t)$**. Calcule** $\frac{\partial v}{\partial t}$ **e** $\frac{\partial v}{\partial u}$**.**

R:

Antes de mais vamos começar por representar o diagrama de derivadas da função:



$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial u} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right)$$

Calculando agora cada uma das derivadas teremos que:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(x + y^2 \right)'_x = 1 \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \left(x + y^2 \right)'_y = 2y$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\int_0^t \cos(w)dw \right)'_t =^{2} (t)'_t \cdot \cos(t) - (0)'_t \cdot \cos(0) = 1 \cdot \cos(t) - 0 \cdot 1 = \cos(t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\arccos(u) + sen(t) \right)'_t = \left(sen(t) \right)'_t = (t)'_t \cdot \cos(t) = \cos(t)$$

[2] $\frac{d}{dx}\left[\int_{j(x)}^{y(x)} f(t)dt \right] = \frac{d}{dx}[y(x)] \cdot f[y(x)] - \frac{d}{dx}[j(x)] \cdot f[j(x)]$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\left(\arccos(u)+sen(t)\right)'_u=\left(\arccos(u)\right)'_u \overset{3}{=} (u)'_u\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

Assim sendo teremos então que:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Leftrightarrow\frac{\partial v}{\partial t}=\left(1\cdot\cos(t)\right)+\left(2y\cdot\cos(t)\right)\Leftrightarrow\frac{\partial v}{\partial t}=\cos(t)+\left(2y\cdot\cos(t)\right)$$

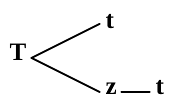
$$\frac{\partial v}{\partial u}=\left(\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\Leftrightarrow\frac{\partial v}{\partial u}=\left(2y\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right)$$

6. Considere que a temperatura T num certo líquido depende da profundidade z e do tempo t, através da fórmula $T=e^{-t}\cdot z$.

a) Determine a taxa de variação da temperatura relativamente ao tempo, num ponto que se move no líquido, de modo que no instante t se encontre ao nível de profundidade $z=f(t)$.

R:

Sabendo que a variação da temperatura relativamente ao tempo é dada por: $\partial T/\partial t$, então e antes de mais, vamos começar por representar o diagrama de derivadas da função:



$$\frac{dT}{dt}=\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial T}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right)$$

[3] $\left(\arccos(u)\right)'=u'\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)$

Calculando agora cada uma das derivadas teremos que:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\left(e^{-t}\cdot z\right)_t'= z\cdot\left(-t\right)_t'\cdot\left(e^{-t}\right)=-z\cdot e^{-t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial z}=\left(e^{-t}\cdot z\right)_z'=\left(e^{-t}\right)\cdot\left(z\right)_z'=e^{-t}$$

Logo teremos que:

$$\frac{dT}{dt}=\left(-z\cdot e^{-t}\right)+\left(e^{-t}\cdot\frac{dz}{dt}\right)\Leftrightarrow\frac{dT}{dt}=e^{-t}\cdot\left(-z+\frac{dz}{dt}\right)$$

b) Calcule a taxa de variação da temperatura considerada na alínea anterior quando $f(t)=e^t$.

R:

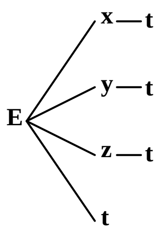
Sabendo que: $f(t)=e^t\Rightarrow z=e^t$; Então: $\frac{dz}{dt}=\left(e^t\right)_t'=\left(t\right)_t'\cdot\left(e^t\right)=e^t$

Logo teremos que: $\frac{dT}{dt}=e^{-t}\cdot\left(-z+\frac{dz}{dt}\right)\Leftrightarrow\frac{dT}{dt}=e^{-t}\cdot\left(-e^t+e^t\right)\Leftrightarrow\frac{dT}{dt}=0$

7. Considere que a força E de um corpo eléctrico no espaço varia com a posição (x;y;z) e com o tempo t, através da fórmula $E = f(x; y; z; t)$. Determine a taxa de variação da força E, relativamente ao tempo, quando essa força é medida ao longo da hélice $x = sen(t)$, $y = \cos(t)$ e $z = t$.

R:

Antes de mais vamos começar por representar o diagrama de derivadas da função:



$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{\partial E}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\partial E}{\partial t}$$

Calculando agora cada uma das derivadas teremos que:

$$\frac{dx}{dt} = (sen(t))'_t = (t)'_t \cdot \cos(t) = \cos(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = (\cos(t))'_t = -(t)'_t \cdot sen(t) = -sen(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = (z)'_t = 1$$

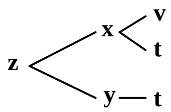
Logo teremos que:

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{\partial E}{\partial x}\cdot\cos(t)\right) - \left(\frac{\partial E}{\partial y}\cdot sen(t)\right) + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\cdot 1\right) + \frac{\partial E}{\partial t} = \left(\frac{\partial E}{\partial x}\cdot\cos(t)\right) - \left(\frac{\partial E}{\partial y}\cdot sen(t)\right) + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right) + \frac{\partial E}{\partial t}$$

8. Considere os seguintes dados:

8.1.Seja $z = f(x;y)$**, onde** $x = 2v + \ln(t)$ **e** $y = \frac{1}{t}$**.**

Antes de mais vamos começar por representar o diagrama de derivadas da função:



a) Calcule: $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$**.**

R:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) \overset{4}{=} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) = ¤$$

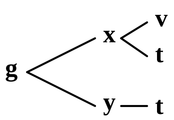
Sabendo do enunciado que: $x = 2v + \ln(t)$, então teremos que:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (2v + \ln(t))'_v = (2v)'_v + (\ln(t))'_v = 2 + 0 = 2$$

Pelo que, por substituição em ¤ implicará o seguinte:

$$¤ \ = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 2\right) = 2\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = ¤$$

Admitindo que: $\frac{\partial z}{\partial x} = g(x;y) \qquad \Rightarrow$



[4] Pela observação do esquema apresentado no início da resolução temos o seguinte desenvolvimento.

Logo, substituindo em ¤ implicará o seguinte:

$$¤ = 2\cdot\frac{\partial}{\partial v}(g) =^{5} 2\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) = ¤\ ¤$$

Sabendo do enunciado que: $x = 2v + \ln(t)$, então teremos que:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (2v + \ln(t))'_v = (2v)'_v + (\ln(t))'_v = 2 + 0 = 2$$

Substituindo em ¤ ¤ implicará o seguinte:

$$¤\ ¤ = 2\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot 2\right) = 4\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = ¤¤$$

Uma vez que se admitiu que: $\frac{\partial z}{\partial x} = g(x;y)$, então teremos agora que:

$$¤¤ = 4\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 4\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[5] Pela observação do segundo esquema apresentado temos o novo desenvolvimento.

b) Calcule: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial t}$**.**

R:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) \overset{6}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) = ¤$$

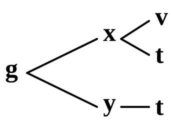
Sabendo do enunciado que: $x = 2v + \ln(t)$, então teremos que:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (2v + \ln(t))'_v = (2v)'_v + (\ln(t))'_v = 2 + 0 = 2$$

Pelo que, por substituição em ¤ implicará o seguinte:

$$¤ \quad = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 2\right) = 2\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = ¤$$

Admitindo que: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = g(x;y) \qquad \Rightarrow$



Logo, substituindo em ¤ implicará o seguinte:

$$¤ = 2\cdot\frac{\partial}{\partial t}(g) \overset{7}{=} 2\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) = ¤ \ ¤$$

---

[6] Pela observação do esquema apresentado no início da resolução temos o seguinte desenvolvimento.

[7] Pela observação do segundo esquema apresentado temos o novo desenvolvimento.

Sabendo do enunciado que: $x = 2v + \ln(t)$ e $y = \dfrac{1}{t}$, então teremos que:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (2v + \ln(t))'_t = (2v)'_t + (\ln(t))'_t = 0 + \frac{(t)'_t}{t} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{t}\right)'_t = \frac{(1)'_t \cdot t - 1 \cdot (t)'_t}{t^2} = -\frac{1}{t^2}$$

Substituindo em ¤ ¤ implicará o seguinte:

$$¤\ ¤ = 2 \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{1}{t} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\right) = \frac{2}{t} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{2}{t^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}\ ¤¤$$

Uma vez que se admitiu que: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = g(x; y)$, então teremos agora que:

$$¤¤ = \frac{2}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{2}{t^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{2}{t} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{2}{t^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

c) Calcule: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

R:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) =^{8} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\right) = ¤$$

[8] Pela observação do esquema apresentado no início da resolução temos o seguinte desenvolvimento.

Sabendo do enunciado que: $x = 2v + \ln(t)$ e $y = \dfrac{1}{t}$, então teremos que:

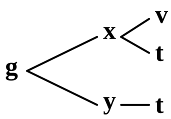
$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(2v + \ln(t)\right)'_t = (2v)'_t + \left(\ln(t)\right)'_t = 0 + \frac{(t)'_t}{t} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{t}\right)'_t = \frac{(1)'_t \cdot t - 1 \cdot (t)'_t}{t^2} = -\frac{1}{t^2}$$

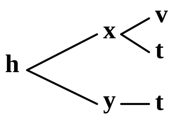
Pelo que, por substituição em ¤ implicará o seguinte:

$$¤ \;= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{1}{t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{1}{t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{1}{t^2}\right) = ¤$$

Admitindo que: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = g(x;y)$ $\Rightarrow$



Admitindo que: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = h(x;y)$ $\Rightarrow$



Logo, substituindo em ¤ implicará o seguinte:

$$¤ = \frac{\partial}{\partial t}\left(g\cdot\frac{1}{t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(h\cdot\frac{1}{t^2}\right) = \text{[9]}\left[\frac{\partial g}{\partial t}\cdot\frac{1}{t} + g\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\right)\right] - \left[\frac{\partial h}{\partial t}\cdot\frac{1}{t^2} + h\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right] =$$

[9] Aqui aplica-se a derivada da multiplicação em ambos os termos: $(uv)' = u'v + uv'$

$$=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{t}+g\cdot\left(t^{-1}\right)_t'-\left(\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{t^2}+h\cdot\left(t^{-2}\right)_t'=$$

$$=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{t}+g\cdot\left(-1\cdot t^{-1-1}\right)-\left(\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{t^2}+h\cdot\left(-2\cdot t^{-2-1}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{t}+g\cdot\left(-t^{-2}\right)-\left(\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{t^2}+h\cdot\left(-2\cdot t^{-3}\right)= ¤\ ¤$$

Sabendo do enunciado que: $x=2v+\ln(t)$ e $y=\frac{1}{t}$, então teremos que:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\left(2v+\ln(t)\right)_t'=\left(2v\right)_t'+\left(\ln(t)\right)_t'=0+\frac{(t)_t'}{t}=\frac{1}{t}$$

$$\frac{dy}{dt}=\left(\frac{1}{t}\right)_t'=\frac{(1)_t'\cdot t-1\cdot(t)_t'}{t^2}=-\frac{1}{t^2}$$

Substituindo em ¤ ¤ implicará o seguinte:

$$¤\ ¤=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{1}{t}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right)\cdot\frac{1}{t}+g\cdot\left(-t^{-2}\right)-\left(\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{1}{t}+\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right)\cdot\frac{1}{t^2}+h\cdot\left(-2\cdot t^{-3}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\left(-\frac{1}{t^3}\right)\right)+g\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)-\left(\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{1}{t^3}+\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\left(-\frac{1}{t^4}\right)\right)+h\cdot\left(-\frac{2}{t^3}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\left(-\frac{1}{t^3}\right)\right)+g\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)-\left(\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{1}{t^3}+\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\left(-\frac{1}{t^4}\right)\right)+h\cdot\left(-\frac{2}{t^3}\right)= ¤¤$$

Uma vez que se admitiu que: $\frac{\partial z}{\partial x}=g(x;y)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}=h(x;y)$, então teremos agora que: ¤¤

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^3}\right)\right)+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{t^3}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^4}\right)\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(-\frac{2}{t^3}\right)=$$

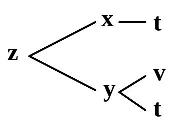
$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\left(-\frac{1}{t^3}\right)\right)+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot\frac{1}{t^3}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\left(-\frac{1}{t^4}\right)\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(-\frac{2}{t^3}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{1}{t^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{1}{t^3}\right)-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{1}{t^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot\frac{1}{t^3}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{t^4}\right)-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{2}{t^3}=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{1}{t^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{1}{t^3}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{1}{t^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot\frac{1}{t^3}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{t^4}-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{2}{t^3}$$

8.2.Seja $z=f(x;y)$**, onde** $x=4t^2$ **e** $y=t+sen(v)$**.**

Antes de mais vamos começar por representar o diagrama de derivadas da função:



a) Calcule: $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$**.**

R:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=^{10}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)= ¤$$

[10] Pela observação do esquema apresentado no início da resolução temos o seguinte desenvolvimento.

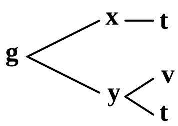
Sabendo do enunciado que: $y = t + sen(v)$, então teremos que:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = (t + sen(v))_v^{'} = (t)_v^{'} + (sen(v))_v^{'} = 0 + (v)_v^{'} \cdot \cos(v) = \cos(v)$$

Pelo que, por substituição em ¤ implicará o seguinte:

¤ $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos(v)\right) =$ ¤

Admitindo que: $\frac{\partial z}{\partial y} = g(x;y)$ $\Rightarrow$



Logo, substituindo em ¤ implicará o seguinte:

¤ $\frac{\partial}{\partial v}(g \cdot \cos(v)) =$ [11] $\frac{\partial g}{\partial v} \cdot \cos(v) + g \cdot \frac{\partial}{\partial v}(\cos(v)) = \left(\frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\right) \cdot \cos(v) + g \cdot (-sen(v)) =$

$= \left(\frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\right) \cdot \cos(v) + g \cdot (-sen(v)) =$ ¤ ¤

Sabendo do enunciado que: $y = t + sen(v)$, então teremos que:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = (t + sen(v))_v^{'} = (t)_v^{'} + (sen(v))_v^{'} = 0 + (v)_v^{'} \cdot \cos(v) = \cos(v)$$

[11] Aqui aplica-se a derivada da multiplicação em ambos os termos: $(uv)^{'} = u^{'}v + uv^{'}$

Substituindo em ¤ ¤ implicará o seguinte:

$$¤\ ¤ = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\cos(v)\right)\cdot\cos(v)+g\cdot(-sen(v))=\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\cdot\cos^2(v)+g\cdot(-sen(v))=¤¤$$

Uma vez que se admitiu que: $\frac{\partial z}{\partial y}=g(x;y)$, então teremos agora que:

$$¤¤=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\cos^2(v)-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot sen(v)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\cos^2(v)-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot sen(v)$$

b) Calcule: $\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial t}$**.**

R:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\overset{12}{=}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)=¤$$

Sabendo do enunciado que: $y=t+sen(v)$, então teremos que:

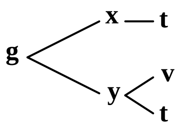
$$\frac{\partial y}{\partial v}=(t+sen(v))'_v=(t)'_v+(sen(v))'_v=0+(v)'_v\cdot\cos(v)=\cos(v)$$

Pelo que, por substituição em ¤ implicará o seguinte:

$$¤\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos(v)\right)=¤$$

[12] Pela observação do esquema apresentado no início da resolução temos o seguinte desenvolvimento.

Admitindo que: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = g(x; y)$ $\Rightarrow$



Logo, substituindo em ¤ implicará o seguinte:

$$¤\ \frac{\partial}{\partial t}(g \cdot \cos(v)) = {}^{13}\ \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \cos(v) + g \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\cos(v)) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\right) \cdot \cos(v) + g \cdot 0 =$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\right) \cdot \cos(v) = ¤\ ¤$$

Sabendo do enunciado que: $x = 4t^2$ e $y = t + sen(v)$, então teremos que:

$$\frac{dx}{dt} = \left(4t^2\right)'_t = 8t$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = (t + sen(v))'_t = (t)'_t + (sen(v))'_t = 1 + 0 = 1$$

Substituindo em ¤ ¤ implicará o seguinte:

$$¤\ ¤\ = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \cdot 8t + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot 1\right) \cdot \cos(v) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \cdot 8t + \frac{\partial g}{\partial y}\right) \cdot \cos(v) = ¤¤$$

---

13 Aqui aplica-se a derivada da multiplicação em ambos os termos: $(uv)' = u'v + uv'$

Uma vez que se admitiu que: $\frac{\partial z}{\partial y} = g(x;y)$, então teremos agora que:

$$¤¤\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot 8t + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right)\cdot \cos(v) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\cdot 8t + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\cdot \cos(v)$$

c) Calcule: $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$**.**

R:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) \stackrel{[14]}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right) = ¤$$

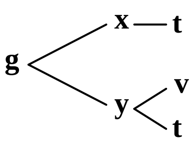
Sabendo do enunciado que: $x = 4t^2$ e $y = t + sen(v)$, então teremos que:

$$\frac{dx}{dt} = \left(4t^2\right)'_t = 8t \qquad ; \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \left(t + sen(v)\right)'_t = (t)'_t + \left(sen(v)\right)'_t = 1 + 0 = 1$$

Pelo que, por substituição em ¤ implicará o seguinte:

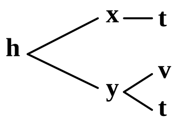
$$¤ \quad = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 8t + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot 1\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 8t + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = ¤$$

Admitindo que: $\frac{\partial z}{\partial x} = g(x;y)$ $\Rightarrow$



[14] Pela observação do esquema apresentado no início da resolução temos o seguinte desenvolvimento.

Admitindo que: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = h(x;y)$ $\Rightarrow$



Logo, substituindo em ¤ implicará o seguinte:

$$¤ = \frac{\partial}{\partial t}(g\cdot 8t + h) \overset{15}{=} \frac{\partial}{\partial t}(g\cdot 8t) + \frac{\partial}{\partial t}(h) = \left(\frac{\partial}{\partial t}(g)\cdot 8t + g\cdot\frac{\partial}{\partial t}(8t)\right) + \frac{\partial}{\partial t}(h) =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)\cdot 8t + g\cdot 8\right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right) = ¤\ ¤$$

Sabendo do enunciado que: $x = 4t^2$ e $y = t + sen(v)$, então teremos que:

$$\frac{dx}{dt} = \left(4t^2\right)'_t = 8t \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \left(t + sen(v)\right)'_t = (t)'_t + \left(sen(v)\right)'_t = 1 + 0 = 1$$

Substituindo em ¤ ¤ implicará o seguinte:

$$¤\ ¤ = \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot 8t + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot 1\right)\cdot 8t + g\cdot 8\right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\cdot 8t + \frac{\partial h}{\partial y}\cdot 1\right) =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot 8t + \frac{\partial g}{\partial y}\right)\cdot 8t + g\cdot 8\right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\cdot 8t + \frac{\partial h}{\partial y}\right) = ¤¤$$

[15] Aqui aplica-se a derivada da multiplicação em ambos os termos: $(uv)' = u'v + uv'$

Uma vez que se admitiu que: $\frac{\partial z}{\partial x} = g(x;y)$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = h(x;y)$, então teremos agora que:

$$¤¤ = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot 8t + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right)\cdot 8t + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot 8\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot 8t + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right) =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot 8t + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\cdot 8t + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot 8\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\cdot 8t + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot 64t^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cdot 8t + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot 8\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\cdot 8t + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

9. Seja f a função real definida por $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{5xy^3}{x^2+y^2} & \text{se: } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{se: } (x;y) = (0;0) \end{cases}$

a) Mostre que f admite derivadas parciais no ponto (0;0).

R:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{5xy^3}{x^2+y^2}\right)'_x = \left(\frac{(5xy^3)'_x \cdot (x^2+y^2) - (5xy^3)\cdot (x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2}\right) = \left(\frac{5y^3\cdot (x^2+y^2) - (5xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{5x^2y^3 + 5y^5 - 10x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right) = \left(\frac{5y^5 - 5x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{5y^3\cdot (y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Sabendo que: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h;y_0) - f(x_0;y_0)}{h}$, então no ponto (0;0) teremos que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h;0)-f(0;0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h;0)-f(0;0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{5h\cdot 0^3}{(h^2+0^2)}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

Assim sendo a derivada parcial em ordem a x será definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\begin{cases}\dfrac{5y^3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se}:(x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se}:(x;y)=(0;0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{5xy^3}{x^2+y^2}\right)'_y=\left(\frac{(5xy^3)'_y\cdot(x^2+y^2)-(5xy^3)\cdot(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2}\right)=\left(\frac{15xy^2\cdot(x^2+y^2)-(5xy^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{15x^3y^2+15xy^4-10xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right)=\left(\frac{15x^3y^2+5xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{5xy^2\cdot(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Sabendo que: $\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0;y_0+k)-f(x_0;y_0)}{k}$, então no ponto (0;0) teremos que:

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0;0+k)-f(0;0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(0;k)-f(0;0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{5\cdot 0\cdot k^3}{(0^2+k^2)}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

Assim sendo a derivada parcial em ordem a y será definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\begin{cases}\dfrac{5xy^2\cdot(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se}:(x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se}:(x;y)=(0;0)\end{cases}$$

b) Mostre que f é diferenciável no ponto (0;0).

R:

Como pedem para mostrar que é diferenciável então isso implica a utilização directa da definição de limite, pelo que teremos para a derivada em ordem a x:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in\Re^2\wedge 0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<d\Rightarrow\left|\frac{5y^3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}-0\right|<e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in\Re^2\wedge\sqrt{x^2+y^2}<d\Rightarrow\left|\frac{5y^3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right|<e$$

Logo:

$$\left|\frac{5y^3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right|=\frac{\left|5y^3\cdot(y^2-x^2)\right|}{\left|(x^2+y^2)^2\right|}=\frac{5\cdot(y^2-x^2)\cdot\left|y^3\right|}{(x^2+y^2)^2}\leq\frac{5\cdot(y^2+x^2)\cdot\left|y^3\right|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{5\cdot\left|y^3\right|}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{5\cdot\left|y\right|^2\cdot\left|y\right|}{x^2+y^2}=¤$$

Sabendo que: $|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$. Então teremos por substituição que:

$$¤\ =\frac{5\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\frac{5\cdot(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=5\cdot\sqrt{x^2+y^2}\leq ?$$

Sabendo da definição que: $\sqrt{x^2+y^2}<d$, então teremos por substituição que:

$?\leq 5\cdot d<e\ \Rightarrow d<\frac{e}{5}\Rightarrow$ Está então verificado que o limite da função é zero.

Conclusão: O limite existe logo a função é contínua no seu domínio porque se trata do quociente de duas funções polinomiais também elas continuas, logo é diferenciável.

Para a derivada em ordem a y, teremos então:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in\Re^2\wedge 0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<d\Rightarrow\left|\frac{5xy^2\cdot(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}-0\right|<e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in\Re^2\wedge\sqrt{x^2+y^2}<d\Rightarrow\left|\frac{5xy^2\cdot(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right|<e$$

Logo:

$$\left|\frac{5xy^2\cdot(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right|=\frac{\left|5xy^2\cdot(3x^2+y^2)\right|}{\left|(x^2+y^2)^2\right|}\leq\frac{\left|5xy^2\cdot(3x^2+3y^2)\right|}{\left|(x^2+y^2)^2\right|}=\frac{\left|5xy^2\cdot 3\cdot(x^2+y^2)\right|}{\left|(x^2+y^2)^2\right|}=$$

$$=\frac{15\cdot(x^2+y^2)\cdot\left|xy^2\right|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{15\cdot|x|\cdot|y|^2}{x^2+y^2}=¤$$

Sabendo que: $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ e que: $|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$. Então teremos por substituição que:

$$¤\ =\frac{15\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{x^2+y^2}=\frac{15\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=15\cdot\sqrt{x^2+y^2}\leq ?$$

Sabendo da definição que: $\sqrt{x^2+y^2}<d$, então teremos por substituição que:

$?\leq 15\cdot d<e\Rightarrow d<\frac{e}{15}\Rightarrow$ Está então verificado que o limite da função é zero.

Conclusão: O limite existe logo a função é contínua no seu domínio porque se trata do quociente de duas funções polinomiais também elas continuas, logo é diferenciável.

10. Considere a função $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{5xy^2}{x^2+y^2} & \text{se}: (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se}: (x;y)=(0;0)\end{cases}$

Estude-a quanto à diferenciabilidade em (0;0).

R:

Sabendo da teoria que uma função é *diferenciável se* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *forem funções continuas numa vizinhança do ponto (a;b)* – neste caso (0;0).

Assim sendo teremos que estudar a continuidade das derivadas parciais desta função pelo que teremos para a derivada em ordem a x que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{5xy^2}{x^2+y^2}\right)_x'=\left(\frac{(5xy^2)_x'\cdot(x^2+y^2)-(5xy^2)\cdot(x^2+y^2)_x'}{(x^2+y^2)^2}\right)=\left(\frac{5y^2\cdot(x^2+y^2)-(5xy^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{5x^2y^2+5y^4-10x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=\left(\frac{5y^4-5x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{5y^2\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Sabendo que: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h;y_0)-f(x_0;y_0)}{h}$, então no ponto (0;0) teremos que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h;0)-f(0;0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h;0)-f(0;0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{5h\cdot 0^2}{(h^2+0^2)}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

Assim sendo a derivada parcial em ordem a x será definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\begin{cases}\dfrac{5y^2\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se}: (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se}: (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

Estudando a continuidade da derivada parcial em ordem a x teremos:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in\Re^2 \wedge 0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<d \Rightarrow \left|\frac{5y^2\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}-0\right|<e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in\Re^2 \wedge \sqrt{x^2+y^2}<d \Rightarrow \left|\frac{5y^2\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right|<e$$

Logo:

$$\left|\frac{5y^2\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right|=\frac{\left|5y^2\cdot(y^2-x^2)\right|}{\left|(x^2+y^2)^2\right|}=\frac{5\cdot(y^2-x^2)\cdot\left|y^2\right|}{(x^2+y^2)^2}\leq\frac{5\cdot(y^2+x^2)\cdot\left|y^2\right|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{5\cdot|y|^2}{x^2+y^2}=¤$$

Sabendo que: $|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$. Então teremos por substituição que:

$$¤\ =\frac{5\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{x^2+y^2}=\frac{5\cdot(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=5\leq e$$

Conclusão: ?????

Comentário: Qual será a conclusão neste caso??

Para a derivada em ordem a y teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{5xy^2}{x^2+y^2}\right)'_y=\left(\frac{(5xy^2)'_y\cdot(x^2+y^2)-(5xy^2)\cdot(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2}\right)=\left(\frac{10xy\cdot(x^2+y^2)-(5xy^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{10x^3y+10xy^3-10xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{10x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

Sabendo que: $\lim_{k\to 0}\dfrac{f(x_0;y_0+k)-f(x_0;y_0)}{k}$, então no ponto (0;0) teremos que:

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0;0+k)-f(0;0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(0;k)-f(0;0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{5\cdot 0\cdot k^2}{(0^2+k^2)}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

Assim sendo a derivada parcial em ordem a y será definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\begin{cases}\dfrac{10x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{se: } (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se: } (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

Estudando a continuidade da derivada parcial em ordem a y teremos:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in\Re^2\wedge 0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<d\Rightarrow\left|\frac{10x^3y}{(x^2+y^2)^2}-0\right|<e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in\Re^2\wedge\sqrt{x^2+y^2}<d\Rightarrow\left|\frac{10x^3y}{(x^2+y^2)^2}\right|<e$$

Logo:

$$\left|\frac{10x^3y}{(x^2+y^2)^2}\right|=\frac{|10x^3y|}{|(x^2+y^2)^2|}\leq\frac{10\cdot|x|\cdot|x|^2\cdot|y|}{(x^2+y^2)^2}=¤$$

Sabendo que: $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ e que: $|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$. Então teremos por substituição que:

¤ $= \dfrac{10 \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \cdot \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \dfrac{15 \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot \left(x^2+y^2\right) \cdot \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} =$

$= 10 \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \leq ?$

Sabendo da definição que: $\sqrt{x^2+y^2} < d$, então teremos por substituição que:

$? \leq 10 \cdot d^2 < e \Rightarrow d < \sqrt{\dfrac{e}{10}} \Rightarrow$ Está então verificado que o limite da função é zero.

Conclusão: O limite existe logo a função é contínua no seu domínio porque se trata do quociente de duas funções polinomiais também elas continuas, logo é diferenciável.

11. Calcule a diferencial df das seguintes funções:

a) $f(x;y) = x^2 + 3xy + y^2$**.**

R:

Sabendo da teoria que a diferencial é dada por: $df(x_0;y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) \cdot dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0) \cdot dy$

Então teremos agora que determinar as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) = \left(x_0^2 + 3x_0y_0 + y_0^2\right)'_x = 2x_0 + 3y_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0) = \left(x_0^2 + 3x_0y_0 + y_0^2\right)'_y = 3x_0 + 2y_0$$

Logo a diferencial será:

$$df(x_0;y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)\cdot dy \Leftrightarrow df(x_0;y_0)=(2x_0+3y_0)\cdot dx+(3x_0+2y_0)\cdot dy$$

b) $f(x;y;z)=xy\cdot \arccos\left(\frac{z}{x}\right)$[16].

R:

Sabendo da teoria que a diferencial é dada por:

$$df(x_0;y_0;z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)\cdot dy+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)\cdot dz$$

Então teremos agora que determinar as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)=\left(x_0y_0\cdot \arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right)\right)'_x=(x_0y_0)'_x\cdot \arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right)+x_0y_0\cdot\left(\arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right)\right)'_x=$$

$$=y_0\cdot \arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right)+x_0y_0\cdot\left(-\frac{\left(\frac{z_0}{x_0}\right)'_x}{\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2}}\right)=y_0\cdot \arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right)+x_0y_0\cdot\left(-\frac{\frac{(z_0)'_x\cdot x_0-z_0\cdot (x_0)'_x}{x_0^{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2}}\right)=$$

$$=y_0\cdot \arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right)+x_0y_0\cdot\left(-\frac{\frac{-z_0}{x_0^{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2}}\right)=y_0\cdot \arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right)+x_0y_0\cdot\left(-\frac{(-z_0)}{x_0^2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2}}\right)=$$

16 $(\arccos(u))'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$= y_0 \cdot \arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right) + \left(\frac{y_0 z_0}{x_0 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0; z_0) = \left(x_0 y_0 \cdot \arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right)\right)_y^{'} = x_0 \cdot \arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0; y_0; z_0) = \left(x_0 y_0 \cdot \arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right)\right)_z^{'} = x_0 y_0 \cdot \left(\arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right)\right)_z^{'} = x_0 y_0 \cdot \left(-\frac{\left(\frac{z_0}{x_0}\right)_z^{'}}{\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2}}\right) =$$

$$= x_0 y_0 \cdot \left(-\frac{\frac{x_0}{x_0^{\ 2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2}}\right) = x_0 y_0 \cdot \left(-\frac{\frac{1}{x_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2}}\right) = x_0 y_0 \cdot \left(-\frac{1}{x_0 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2}}\right) =$$

$$= \left(-\frac{y}{\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2}}\right)$$

Logo a diferencial será:

$$df(x_0; y_0; z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0; z_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0; z_0) \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0; y_0; z_0) \cdot dz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow df(x_0;y_0;z_0)=\left[y_0\cdot\arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right)+\frac{y_0z_0}{\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2}}\right]\cdot dx+\left(x_0\arccos\left(\frac{z_0}{x_0}\right)\right)\cdot dy-\left[\frac{y}{\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2}}\right]\cdot dz$$

12. Usando diferenciais, obtenha uma aproximação da variação da função real definida em 9.), quando (x;y) varia de (1;2) para (1,03;1,99).

R:

Sendo a função existente na alínea 9.): $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{5xy^3}{x^2+y^2} & \text{se}:(x;\ y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se}:(x;\ y)=(0;0)\end{cases}$

E sabendo da teoria que a aproximação de funções de variável real é dada por:

$f(x+dx;y+dy)\approx df(x_0;y_0)+f(x_0;y_0)$, onde: $df(x_0;y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)\cdot dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)\cdot dy$

Então, quando (x;y) varia de (1;2) para (1,03;1,99) teremos que:

$$\begin{cases}dx=1{,}03-1=0{,}03=\dfrac{3}{100}\\ dy=1{,}99-2=-0{,}01=-\dfrac{1}{100}\end{cases}\Rightarrow f(1+0{,}03;2-0{,}01)\approx df(1;2)+f(1;2)\Leftrightarrow ¤$$

Antes de mais, podemos determinar o valor da função no ponto pedido pelo que:

$$f(1;2)=\frac{5\cdot1\cdot2^3}{1^2+2^2}=\frac{5\cdot8}{1+4}=\frac{40}{5}=8$$

Vamos então determinar a diferencial: $df(1;2)=\frac{\partial f}{\partial x}(1;2)\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}(1;2)\cdot dy \Leftrightarrow$ ¤

Ora, já é sabido o vabr de cada uma das variáveis parciais pois foram determinadas na alínea 9.a), pelo que poderemos calcular directamente o valor dessas derivadas para o ponto pedido:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\frac{5y^3\cdot\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(1;2)=\frac{5\cdot2^3\cdot\left(2^2-1^2\right)}{\left(1^2+2^2\right)^2}=\frac{5\cdot8\cdot(4-1)}{(1+4)^2}=\frac{120}{25}=\frac{24}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\frac{5xy^2\cdot\left(3x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(1;2)=\frac{5\cdot1\cdot2^2\cdot\left(3\cdot1^2+2^2\right)}{\left(1^2+2^2\right)^2}=\frac{5\cdot4\cdot(3+4)}{(1+4)^2}=\frac{140}{25}=\frac{28}{5}$$

Substituindo então em ¤, teremos o seguinte:

$$df(1;2)=\frac{24}{5}\cdot\frac{3}{100}+\frac{28}{5}\cdot\left(-\frac{1}{100}\right)\Leftrightarrow df(1;2)=\frac{72}{500}-\frac{28}{500}\Leftrightarrow df(1;2)=\frac{44}{500}=\frac{11}{125}=0{,}088$$

Substituindo então os respectivos valores em ¤ , teremos: $f(1{,}03;1{,}99)\approx0{,}088+8\approx8{,}088$

13. Usando diferenciais, calcule um valor aproximado para:

a) $\sqrt{9(1{,}85)^2+(8{,}1)^2}$ **.**

R:

Antes de mais temos que obter uma função a partir da expressão dada, pelo que teremos:

$$\sqrt{9(1{,}85)^2+(8{,}1)^2} \Rightarrow f(x;y)=\sqrt{9x^2+y^2}$$

Atendendo agora aos valores presentes na expressão concluímos que: $\begin{cases} 1{,}85 \cong 2 \Rightarrow x_0 = 2 \\ 8{,}1 \cong 8 \Rightarrow y_0 = 8 \end{cases}$

Sabendo da teoria que a aproximação de funções de variável real é dada por:

$f(x+dx;y+dy)\approx df(x_0;y_0)+f(x_0;y_0)$, onde: $df(x_0;y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)\cdot dy$

Então, quando (x;y) varia de (2;8) para (1,85;8,1) teremos que:

$$\begin{cases} dx = 1{,}85-2=-0{,}15=-\frac{15}{100} \\ dy = 8{,}1-8=0{,}1=\frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow f(2-0{,}15;8+0{,}1)\approx df(2;8)+f(2;8) \Leftrightarrow$$

Antes de mais, podemos determinar o valor da função no ponto pedido pelo que:

$$f(2;8)=\sqrt{9\cdot 2^2+8^2}=\sqrt{9\cdot 4+64}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

Vamos então determinar a diferencial: $df(2;8) = \frac{\partial f}{\partial x}(2;8)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(2;8)\cdot dy \Leftrightarrow$ ¤

Agora teremos que determinar cada uma das derivadas parciais, para posteriormente calcularmos o seu valor no ponto pedido:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \left(\sqrt{9x^2+y^2}\right)'_x = \left(\left(9x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_x = \frac{1}{2}\cdot\left(9x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(9x^2+y^2\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(9x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 18x = \frac{18x}{2\cdot\left(9x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{9x}{\sqrt{9x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2;8) = \frac{9\cdot 2}{\sqrt{9\cdot 2^2+8^2}} = \frac{18}{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \left(\sqrt{9x^2+y^2}\right)'_y = \left(\left(9x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_y = \frac{1}{2}\cdot\left(9x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(9x^2+y^2\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(9x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y = \frac{2y}{2\cdot\left(9x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{\sqrt{9x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2;8) = \frac{8}{\sqrt{9\cdot 2^2+8^2}} = \frac{8}{10}$$

Substituindo então em ¤, teremos o seguinte:

$$df(2;8) = \frac{18}{10}\cdot\left(-\frac{15}{100}\right) + \frac{8}{10}\cdot\frac{1}{10} \Leftrightarrow df(2;8) = -\frac{270}{1000} + \frac{8}{100} \Leftrightarrow df(2;8) = -\frac{270}{1000} + \frac{80}{1000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow df(2;8) = -\frac{190}{1000} = -\frac{19}{100} = -0{,}19$$

Substituindo então os respectivos valores em ¤ , teremos: $f(1{,}85;8{,}1) \approx -0{,}19 + 10 \approx 9{,}81$

b) $\ln\left(1{,}01^3 + 0{,}02^6\right)$.

R:

Antes de mais temos que obter uma função a partir da expressão dada, pelo que teremos:

$$\ln\left(1{,}01^3 + 0{,}02^6\right) \Rightarrow f(x;y) = \ln\left(x^3 + y^6\right)$$

Atendendo agora aos valores presentes na expressão concluímos que: $\begin{cases} 1{,}01 \cong 1 \Rightarrow x_0 = 1 \\ 0{,}02 \cong 0 \Rightarrow y_0 = 0 \end{cases}$

Sabendo da teoria que a aproximação de funções de variável real é dada por:

$f(x+dx; y+dy) \approx df(x_0; y_0) + f(x_0; y_0)$, onde: $df(x_0; y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)\cdot dy$

Então, quando (x;y) varia de (1;0) para (1,01;0,02) teremos que:

$$\begin{cases} dx = 1{,}01 - 1 = 0{,}01 = \dfrac{1}{100} \\ dy = 0{,}02 - 0 = 0{,}02 = \dfrac{2}{100} \end{cases} \Rightarrow f(1 + 0{,}01; 0 + 0{,}02) \approx df(1;0) + f(1;0) \Leftrightarrow ¤$$

Antes de mais, podemos determinar o valor da função no ponto pedido pelo que:

$$f(1;0) = \ln\left(1^3 + 0^6\right) = \ln(1) = 0$$

Vamos então determinar a diferencial: $df(1;0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1;0)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1;0)\cdot dy \Leftrightarrow ¤$

Agora teremos que determinar cada uma das derivadas parciais, para posteriormente calcularmos o seu valor no ponto pedido:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \left(\ln\left(x^3 + y^6\right)\right)'_x = \frac{\left(x^3 + y^6\right)'_x}{x^3 + y^6} = \frac{3x^2}{x^3 + y^6} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1;0) = \frac{3 \cdot 1^2}{1^3 + 0^6} = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \left(\ln\left(x^3 + y^6\right)\right)'_y = \frac{\left(x^3 + y^6\right)'_y}{x^3 + y^6} = \frac{6y^5}{x^3 + y^6} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1;0) = \frac{6 \cdot 0^2}{1^3 + 0^6} = 0$$

Substituindo então em ¤, teremos o seguinte:

$$df(1;0) = 3 \cdot \frac{1}{100} + 0 \cdot \frac{2}{100} \Leftrightarrow df(1;0) = \frac{3}{100} \Leftrightarrow df(1;0) = 0{,}03$$

Substituindo então os respectivos valores em ¤ , teremos: $f(1{,}01;0{,}02) \approx 0{,}03 + 0 \approx 0{,}03$

c) $3{,}05^2 \times 2{,}01^4 \times 1{,}001^3$.

R:

Antes de mais temos que obter uma função a partir da expressão dada, pelo que teremos:

$$3{,}05^2 \times 2{,}01^4 \times 1{,}001^3 \Rightarrow f(x;y;z) = x^2 \cdot y^4 \cdot z^3$$

Atendendo agora aos valores presentes na expressão concluímos que: $\begin{cases} 3{,}05 \cong 3 \Rightarrow x_0 = 3 \\ 2{,}01 \cong 2 \Rightarrow y_0 = 2 \\ 1{,}001 \cong 1 \Rightarrow z_0 = 1 \end{cases}$

Sabendo da teoria que a aproximação de funções de variável real é dada por:

$f\left(x+dx;y+dy;z+dz\right)\approx df\left(x_0;y_0;z_0\right)+f\left(x_0;y_0;z_0\right)$, onde:

$$df\left(x_0;y_0;z_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0;y_0;z_0\right)\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0;y_0;z_0\right)\cdot dy+\frac{\partial f}{\partial z}\left(x_0;y_0;z_0\right)\cdot dz$$

Então, quando (x;y;) varia de (3;2;1) para (3,05;2,01;1,001) teremos que:

$$\left\{\begin{array}{l} dx=3,05-3=0,05=\dfrac{5}{100} \\ dy=2,01-2=0,01=\dfrac{1}{100} \\ dz=1,001-1=0,001=\dfrac{1}{1000} \end{array}\right\}\Rightarrow f\left(3+0,05;2+0,01;1+0,001\right)\approx df\left(3;2;1\right)+f\left(3;2;1\right)\Leftrightarrow ¤$$

Antes de mais, podemos determinar o valor da função no ponto pedido pelo que:

$$f\left(3;2;1\right)=3^2\cdot 2^4\cdot 1^3=144$$

Vamos então determinar a diferencial:

$$df\left(3;2;1\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(3;2;1\right)\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\left(3;2;1\right)\cdot dy+\frac{\partial f}{\partial z}\left(3;2;1\right)\cdot dz\Leftrightarrow ¤$$

Agora teremos que determinar cada uma das derivadas parciais, para posteriormente calcularmos o seu valor no ponto pedido:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y;z)=\left(x^2\cdot y^4\cdot z^3\right)'_x = 2x\cdot y^4\cdot z^3 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(3;2;1)= 2\cdot 3\cdot 2^4\cdot 1^3 = 96$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y;z)=\left(x^2\cdot y^4\cdot z^3\right)'_y = x^2\cdot 4y^3\cdot z^3 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(3;2;1)= 3^2\cdot 4\cdot 2^3\cdot 1^3 = 288$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x;y;z)=\left(x^2\cdot y^4\cdot z^3\right)'_z = x^2\cdot y^4\cdot 3z^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(3;2;1)= 3^2\cdot 2^4\cdot 3\cdot 1^2 = 432$$

Substituindo então em ¤, teremos o seguinte:

$$df(3;2;1)=96\cdot\frac{5}{100}+288\cdot\frac{1}{100}+432\cdot\frac{1}{1000}\Leftrightarrow df(3;2;1)=\frac{480}{100}+\frac{288}{100}+\frac{432}{1000}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow df(3;2;1)=\frac{768}{100}+\frac{432}{1000}\Leftrightarrow df(3;2;1)=\frac{7680}{1000}+\frac{432}{1000}=\frac{8112}{1000}=8{,}112$$

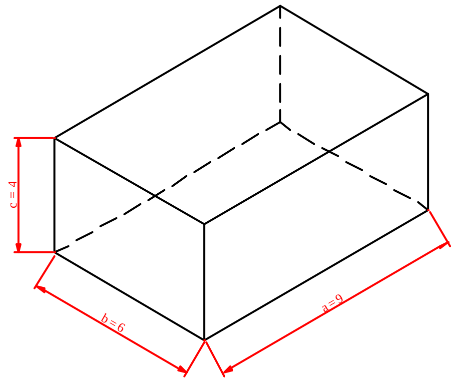
Substituindo então os respectivos valores em ¤ , teremos:

$$f(3{,}05;2{,}01;1{,}001)\approx 8{,}112+144\approx 152{,}112$$

14. As dimensões de uma caixa rectangular variam de 9; 6 e 4 para 9,02; 5,97 e 4,01 respectivamente.

a) Obtenha por meio de equações diferenciais uma aproximação da variação do volume.

R:



Conforme se sabe, o volume de uma caixa rectangular (paralelepípedo) é dado pela seguinte equação:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Pelo que a função que traduzirá a expressão do volume será: $f(x;y;z) = x \cdot y \cdot z$

Atendendo agora aos valores presentes na expressão concluímos que: $\left\{\begin{matrix} 9{,}02 \cong 9 \Rightarrow x_0 = 9 \\ 5{,}97 \cong 6 \Rightarrow y_0 = 6 \\ 4{,}01 \cong 4 \Rightarrow z_0 = 4 \end{matrix}\right\}$

Sabendo da teoria que a aproximação de funções de variável real é dada por:

$f(x+dx;y+dy;z+dz) \approx df(x_0;y_0;z_0) + f(x_0;y_0;z_0)$, onde:

$$df(x_0;y_0;z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)\cdot dz$$

Então, quando (x;y;z) varia de (9;6;4) para (9,02;5,97;4,01) teremos que:

$$\left\{\begin{array}{l} dx = 9{,}02 - 9 = 0{,}02 = \dfrac{2}{100} \\ dy = 5{,}97 - 6 = -0{,}03 = -\dfrac{3}{100} \\ dz = 4{,}01 - 4 = 0{,}01 = \dfrac{1}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow f(9+0{,}02;6-0{,}03;4+0{,}01) \approx df(9;6;4) + f(9;6;4) \Leftrightarrow ¤$$

Antes de mais, podemos determinar o valor da função no ponto pedido pelo que:

$$f(9;6;4) = 9 \cdot 6 \cdot 4 = 216$$

Vamos então determinar a diferencial:

$$df(9;6;4) = \frac{\partial f}{\partial x}(9;6;4) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(9;6;4) \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(9;6;4) \cdot dz \Leftrightarrow ¤$$

Agora teremos que determinar cada uma das derivadas parciais, para posteriormente calcularmos o seu valor no ponto pedido:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y;z) = (x \cdot y \cdot z)'_x = y \cdot z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(9;6;4) = 6 \cdot 4 = 24$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y;z) = (x \cdot y \cdot z)'_y = x \cdot z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(9;6;4) = 9 \cdot 4 = 36$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x;y;z) = (x \cdot y \cdot z)'_z = x \cdot y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(9;6;4) = 9 \cdot 6 = 54$$

Substituindo então em ¤, teremos o seguinte:

$$df(9;6;4) = 24 \cdot \frac{2}{100} + 36 \cdot \left(-\frac{3}{100}\right) + 54 \cdot \frac{1}{100} \Leftrightarrow df(9;6;4) = \frac{48}{100} + \left(-\frac{108}{100}\right) + \frac{54}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow df(9;6;4) = -\frac{6}{100} = -0{,}06$$

Substituindo então os respectivos valores em ¤ , teremos:

$$f(9{,}02;5{,}97;4{,}01) \approx -0{,}06 + 216 \approx 215{,}94$$

b) Encontre a variação exacta deste volume.

Comentário: Não sei o que é pretendido nesta alínea.

R: