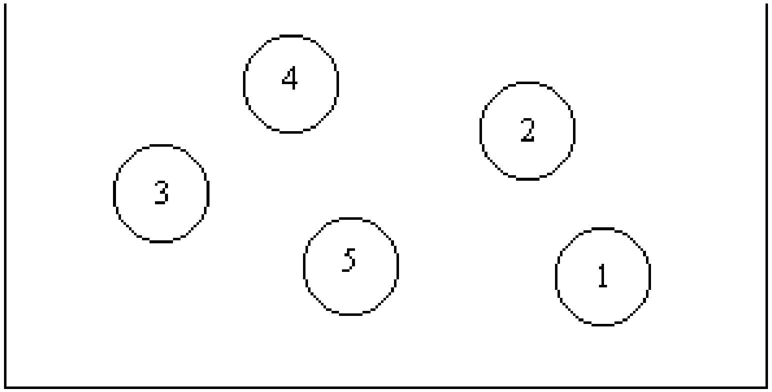
Universidade do Minho

ESPERANÇA MATEMÁTICA

Esperança Matemática

Exemplo

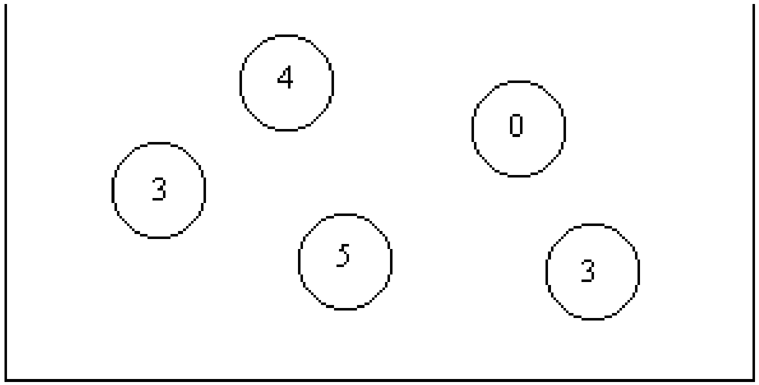
Considere uma urna que contem 5 fichas idênticas, numeradas de 1 a 5. As fichas são mexidas de forma aleatória e é retirada uma, sendo registado o seu valor, após o que é novamente introduzida na urna. O jogo é repetido 25 vezes. Qual o valor esperado da soma dos valores registados em cada ficha retirada?



Esperança Matemática

Exemplo

Considere o exemplo anterior, agora com as fichas apresentadas na figura. Qual o valor esperado da soma dos valores registados em cada ficha retirada?



Esperança Matemática

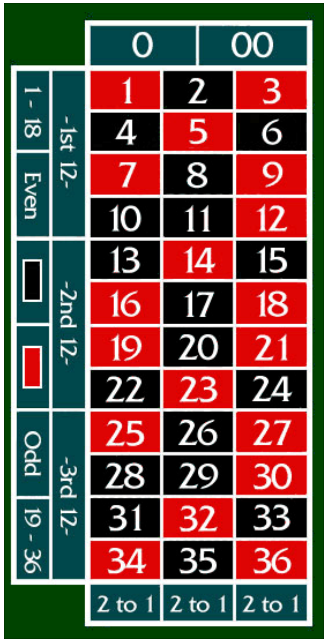
Exemplo

No jogo da roleta existem 36 números, inscritos, alternadamente, em casas vermelhas e negras. Além destes 36 números existem ainda duas casas, de cor verde, com 0 e 00 inscritos.

Neste jogo existe a possibilidade de apostar na cor negra ou na cor vermelha. A ocorrência da cor escolhida dá direito a um prémio igual ao montante apostado. Caso ocorra uma das casas verdes, a banca recolhe tudo o que está em cima das mesas, isto é, nenhuma aposta sai vitoriosa.

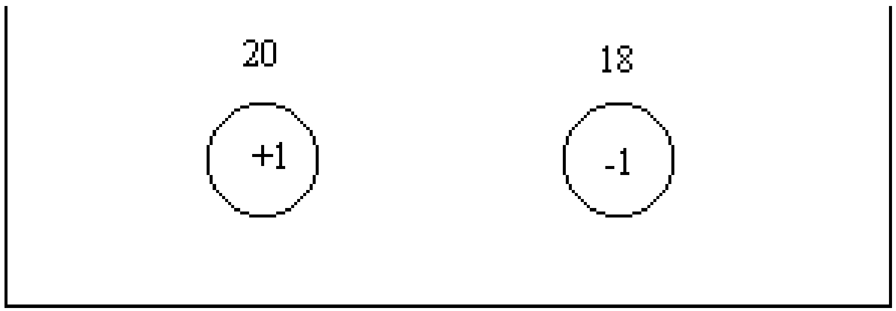
Suponha que um jogador pode apostar exactamente 1000 euros e o decide fazer na cor preta.

Calcule o valor esperado do ganho por parte da banca.



Esperança Matemática

Exemplo



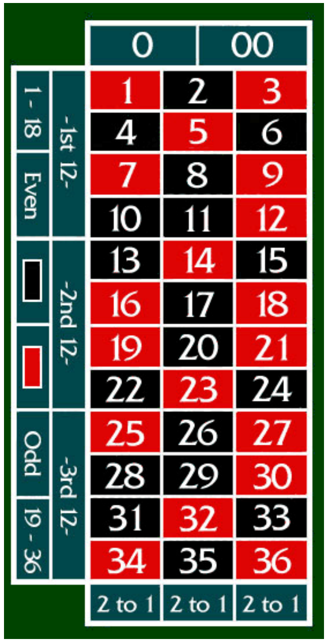
$$E[X] = (-1)\frac{18}{38} + (+1)\frac{20}{38} = \frac{2}{38} = 0.055$$

O valor esperado do ganho é 1000€ x 0.055 = 55€

Esperança Matemática

Exemplo

Na roleta, existe também a possibilidade de apostar num de três grupos de 12 números. Se um jogador apostar numa das três colunas de 12 números e sair um desses números recebe um prémio igual ao dobro do que apostou. Caso ocorra uma das casas verdes, a banca recolhe tudo o que está em cima das mesas, isto é, nenhuma aposta sai vitoriosa.

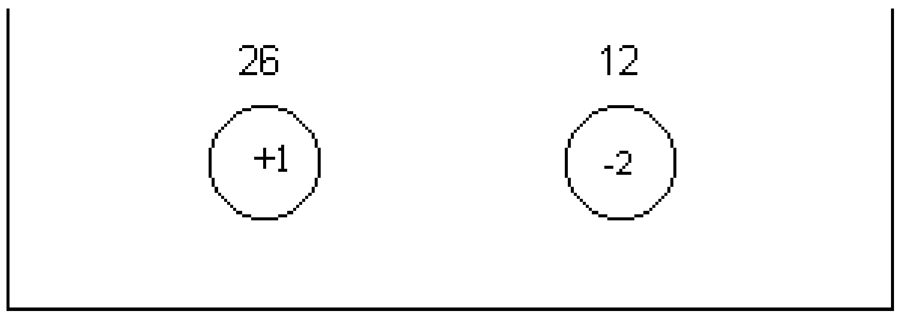


Suponha agora que o jogador pretende apostar exactamente 1000 euros e o decide fazer na primeira coluna de 12 números.

Calcule o valor esperado do ganho por parte da banca nesta situação.

Esperança Matemática

Exemplo



$$E[X] = (-2)\frac{12}{38} + (+1)\frac{26}{38} = \frac{2}{38} = 0.055$$

O valor esperado do ganho é 1000€ x 0.055 = 55€

Valor Esperado

- Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ o valor da sua distribuição de probabilidade em x, o valor esperado da variável aleatória

$$\boxed{E[X] = \sum_x x\, f(x)}$$

- Se X é uma variável contínua e $f(x)$ o valor da sua função densidade de probabilidade em x, o valor esperado da variável aleatória

$$\boxed{E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx}$$

Valor Esperado

Exemplo

Um conjunto de 12 televisores contém 2 com defeito. Deste conjunto, 3 são escolhidos aleatoriamente. Quantos televisores com defeito são esperados?

x	0	1	2
f(x)	6/11	9/22	1/22

$$f(x) = \frac{C_x^2 C_{3-x}^{10}}{C_3^{12}} \qquad x = 0, 1, 2$$

$$E[X] = 0\frac{6}{11} + 1\frac{9}{22} + 2\frac{1}{22} = \frac{1}{2}$$

Valor Esperado

- Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ o valor da sua distribuição de probabilidade em x, o valor esperado da variável aleatória $g(X)$ é

$$\boxed{E\left[g\left(X\right)\right]=\sum_{x} g\left(x\right)f\left(x\right)}$$

- Se X é uma variável aleatória contínua e $f(x)$ o valor da sua função densidade de probabilidade em x, o valor esperado da variável aleatória $g(X)$ é

$$\boxed{E\left[g\left(X\right)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} g\left(x\right)f\left(x\right)dx}$$

Propriedades

1. $$\boxed{E\left[aX+b\right]=aE\left[X\right]+b \qquad a,b \text{ constantes}}$$

$$E\left[aX\right]=aE\left[X\right]$$

$$E\left[b\right]=b$$

2. $$\boxed{E\left[\sum_{i=1}^{n}c_i g_i\left(X\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}c_i E\left[g_i\left(X\right)\right] \qquad c_i \text{ constantes}}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}c_i X_i\right]=E\left[c_1X_1+\ldots+c_nX_n\right]=$$

$$=c_1E[X_1]+\ldots+c_nE[X_n]=\sum_{i=1}^{n}c_iE\left[X\right]$$

Variância

- Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ o valor da sua distribuição de probabilidade em x, a variância da variável aleatória

$$\boxed{\sigma^2 = Var\left[X\right] = \sum_x \left(x-\mu\right)^2 f\left(x\right)}$$

- Se X é uma variável contínua e $f(x)$ o valor da sua função densidade de probabilidade em x, a variância da variável aleatória

$$\boxed{\sigma^2 = Var\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x-\mu\right)^2 f\left(x\right)dx}$$

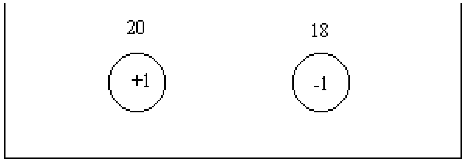
$$\boxed{Var\left[X\right] = E[X^2] - \left(E[X]\right)^2}$$

Esperança Matemática

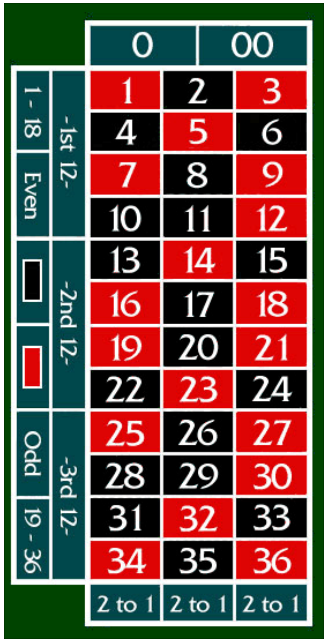
Exemplo

Calcule a variância para cada uma das situações:

a. O jogador aposta exactamente 1000 euros na cor preta.



$$E\left[X\right]=0.055$$



$$E\left[X^2\right]=(-1)^2\frac{18}{38}+(+1)^2\frac{20}{38}=\frac{38}{38}=1$$

$$Var\left[X\right]=E[X^2]-\left(E[X]\right)^2=1-\left(0.055\right)^2=0.997$$

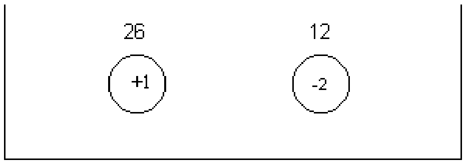
A variância do ganho é 1000^2€ x 0.997 = 997000€

O desvio padrão do ganho é 998.499€

Esperança Matemática

Exemplo

b. o jogador aposta exactamente 1000 euros na primeira coluna de 12 números.



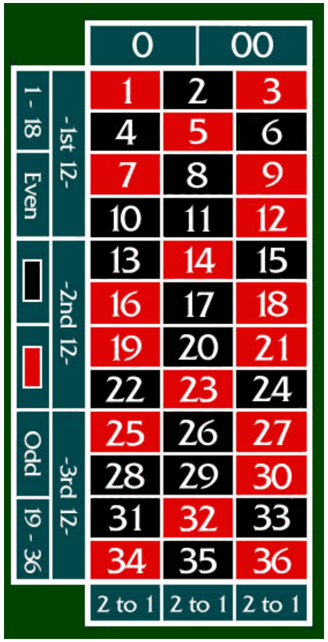
$$E\left[X\right]=0.055$$

$$E\left[X^2\right]=(-2)^2\frac{12}{38}+(+1)^2\frac{26}{38}=\frac{37}{19}=1.947$$

$$Var\left[X\right]=E[X^2]-\left(E[X]\right)^2=1.947-\left(0.055\right)^2=1.944$$

A variância do ganho é 1000^2€ x 1.944 = 1944000€

O desvio padrão do ganho é 1394.274€



Propriedades

1. $$\boxed{Var\left[aX+b\right]=a^2Var\left[X\right] \qquad a,b \text{ constantes}}$$

$$Var\left[aX\right]=a^2Var\left[X\right]$$

$$Var\left[b\right]=0$$

2. $$\boxed{Var\left[X_1 \pm X_2\right]=Var\left[X_1\right]+Var\left[X_2\right]\pm 2Cov\left[X_1,X_2\right]}$$

$$Cov\left[X_1,X_2\right]=E\left[X_1-\mu_1\right]E\left[X_2-\mu_2\right]=E\left[X_1X_2\right]-E\left[X_1\right]E\left[X_2\right]$$

$$Var\left[X_1 \pm X_2\right]=Var\left[X_1\right]+Var\left[X_2\right] \quad \text{se } X_1,X_2 \text{ independentes}$$

Valor Esperado

Exemplo

Considere a seguinte função densidade de probabilidade para a variável aleatória X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+1) & 2 < x < 4 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

Calcule E[X], E[X^2] e Var[X].

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{2}^{4} x\frac{1}{8}(x+1)dx = \frac{1}{8}\int_{2}^{4}(x^2+x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{64}{3}+8-\frac{8}{3}-2\right) = \frac{37}{12}$$

Valor Esperado

Exemplo

$$E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_2^4 x^2 \frac{1}{8}(x+1)dx = \frac{1}{8}\int_2^4 (x^3 + x^2)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{1}{8}\left(64 + \frac{64}{3} - 4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{59}{6}$$

$$Var\left[X\right] = E[X^2] - \left(E[X]\right)^2 = \frac{59}{6} - \left(\frac{37}{12}\right)^2 = \frac{47}{144}$$