Investigação Operacional

Modelos de Programação Linear

Engenharia Comunicações (MIECom)

José António Oliveira
http://dps.uminho.pt/pessoais/zan

Universidade do Minho - Escola de Engenharia
Departamento de Produção e Sistemas

Autoria

- Este conjunto de slides contém slides da autoria do Doutor Filipe Alvelos (falvelos@dps.uminho.pt) do Departamento de Produção e Sistemas da Universidade do Minho,


Programação Linear – Modelos

Filipe Pereira e Alvelos
falvelos@dps.uminho.pt
www.dps.uminho.pt/pessoais/falvelos

Modelação Matemática

As técnicas e algoritmos abordados neste curso destinam-se a estruturar e a solucionar os modelos quantitativos que podem ser expressos matematicamente.

Os principais modelos de IO são denominados de Programação Matemática e constituem uma das mais importantes variedades dos modelos quantitativos.

Programação é entendida no sentido de planeamento, e não no sentido da "programação" computacional. A Programação Matemática irá implicar programação computacional, uma vez que o número de variáveis de decisão e restrições é enorme na prática.

Modelação Matemática

O campo da Programação Matemática é enorme e suas técnicas são de grande utilidade na solução de problemas de optimização.

O processo de modelagem matemática, em si, pouco varia, contudo as técnicas de solução acabaram agrupadas em várias subáreas como:

- Programação Linear
- Programação Não-linear
- Programação Inteira

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Características do Modelo de PL

Modelo básico – serve para a compreensão de todos os outros modelos da Programação Matemática.

Os conceitos de base serão estendidos aos outros modelos, concedendo suporte a estudos mais avançados.

Uma outra vantagem do modelo PL está na extraordinária eficiência dos algoritmos de solução hoje existentes, disponibilizando alta capacidade de cálculo e podendo ser facilmente implementado até mesmo através de folhas de cálculo e com o auxílio de computadores pessoais.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Características do Modelo de PL

Os modelos de Programação Linear são um tipo especial de modelos de optimização. Para que um determinado sistema possa ser representado por meio de um modelo de PL, ele deve possuir as seguintes características:

- Proporcionalidade
- Não Negatividade
- Divisibilidade
- Aditividade
- Separabilidade

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Proporcionalidade

A quantidade de recurso consumido por uma dada actividade deve ser proporcional ao nível dessa actividade na solução final do problema.

O custo de cada actividade é proporcional ao nível de operação da actividade.

Um termo x_i^2 na função objectivo ou numa restrição viola este pressuposto.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Não Negatividade

Deve ser sempre possível desenvolver uma dada actividade em qualquer nível não negativo;

Divisibilidade

Qualquer proporção de um dado recurso deve poder ser (sempre) utilizado.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Aditividade

O custo total é a soma das parcelas associadas a cada actividade.

Um termo do tipo produto $(x_i.x_j)$ viola este pressuposto.

Separabilidade

Pode-se identificar de forma separada o custo (ou consumo de recursos) específico das operações de cada actividade.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Formulação algébrica geral – forma mista

$$\text{Otimizar } x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq d_i \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = d_i \quad i = p+1, p+2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, q$$

$$x_j \in \Re, j = q+1, q+2, \ldots, n$$

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Formulação algébrica geral

Optimizar representa aqui a:

- maximização
- minimização

$$\text{Otimizar } x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq d_i \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = d_i \quad i = p+1, p+2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, q$$

$$x_j \in \Re, \ j = q+1, q+2, \ldots, n$$

M = {1, 2, ..., m}, o conjunto dos índices das restrições do problema;
N = {1, 2, ..., n} o conjunto dos índices das variáveis.

$A = \{a_{ij}\} \equiv$ matriz de restrições;
$a_j \equiv$ j-ésima coluna de A;
$x = (x_j)$, j ∈ N / vetor coluna de n componentes;
$c = (c_j)$, j ∈ N / vetor linha de n componentes;
$d = (d_i)$, i ∈ M / vetor coluna de m componentes.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Forma canónica

$$\text{Otimizar } x_0 = cx$$

sujeito a:

$$Ax \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} d$$

$$x \geq 0$$

Forma estandardizada/padrão

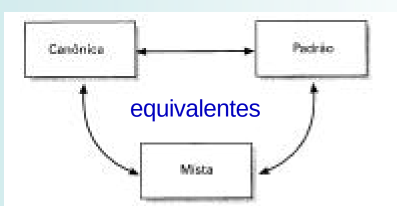
$$\text{Otimizar } x_0 = cx$$

sujeito a:

$$Ax = d$$

$$x \geq 0$$

$$d \geq 0$$



PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Forma matricial

- Vector (coluna) de variáveis de decisão, x, dimensão n.
- Vector (linha) de coeficientes da função objectivo, c, dimensão n.
- Matriz dos coeficientes das variáveis de decisão nas restrições, A, dimensão $m \times n$.
- Vector (coluna) dos termos independentes, b, de dimensão m.
- Escalar z.
- Notar que A, b e c são parâmetros do problema e x são variáveis.

$$Max / Min\ z = cx$$

$$sujeito\ a:$$

$$Ax \circ b$$

$$Ix \geq 0$$

Vector de sinais. Cada elemento corresponde a: $\leq, =, \geq$

Matriz identidade de dimensão n.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Um mesmo modelo de PL, composto pelo conjunto de equações anteriormente apresentadas, pode, sem qualquer perda para suas propriedades matemáticas, ser reescrito em cada uma das formas básicas. Esse processo de tradução é realizado através das seguintes operações elementares:

- mudança no critério de optimização
- transformação de uma variável
- transformação de desigualdades em igualdades (vice versa)

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Operação 1:

mudança no critério de optimização, ou seja, transformação de maximização para minimização e vice versa. Essa mudança pode ser realizada através da seguinte propriedade:

$$Maximizar\left(f\left(x\right)\right) \text{ corresponde } Minimizar\left(-f\left(x\right)\right)$$

$$Minimizar\left(f\left(x\right)\right) \text{ corresponde } Maximizar\left(-f\left(x\right)\right)$$

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Operação 2:

transformação de uma variável livre ($x \in \Re$), em variável não negativa. Nesse caso, a mudança exigirá a substituição da variável em transformação por duas variáveis auxiliares, ambas maiores ou iguais a zero, mas cuja soma é igual à variável original, ou seja:

$$x_n = x_n^1 - x_n^2 \text{ e } x_n^1 \geq 0,\ x_n^2 \geq 0$$

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Operação 3a:

transformação de desigualdades em igualdades e vice-versa. Nessa situação, temos dois casos a examinar:

- Caso de transformação de restrições de menor ou igual em restrições de igualdade

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq b$$

  - Para transformá-la numa restrição de igualdade podemos, introduzir uma variável de folga capaz de "completar" a desigualdade, o que permite representar a restrição da seguinte forma:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} = b, \qquad x_{n+1} \geq 0$$

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Operação 3b:

transformação de desigualdades em igualdades e vice-versa. Nessa situação, temos dois casos a examinar:

- Caso de transformação de restrições de maior ou igual em restrições de igualdade

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq b$$

  - Para transformá-la em uma restrição de igualdade podemos introduzir uma variável de folga com valor negativo capaz de "completar" a desigualdade, passando a representar a restrição da seguinte forma:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_{n+1} = b, \qquad x_{n+1} \geq 0$$

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Passos para a Formulação de um PPL

- Definição das actividades
  - Após a análise do problema, são definidas as actividades que o compõem. Associada a cada actividade deve ser adoptada uma unidade de medida.
- Definição dos recursos
  - Considerando os inputs disponíveis dentro de cada actividade, determinam-se os recursos que são usados e produzidos.
- Cálculo dos coeficientes de consumo / produção
  - É indispensável estabelecer claramente como as actividades e os recursos estão relacionados em termos de recursos necessários por unidade de actividade produzida.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Passos para a Formulação de um PPL (cont)

- Determinação das condições externas
  - Considerando que os recursos são limitados, cumpre determinar a quantidade de cada recurso disponível para o processo modelado. Essas são as denominadas condições externas do modelo.
- Formalização do Modelo
  - Consiste em associar quantidades não negativas a cada uma das actividades, escrever as equações de balanceamento e indicar o uso de cada recurso.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Terminologia

- Solução: conjunto de valores atribuídos às variáveis de decisão.
- Solução não admissível: solução que não respeita (pelo menos) uma das restrições.
- Solução admissível: solução que respeita todas as restrições.
- Conjunto das soluções admissíveis: conjunto formado por todas as soluções admissíveis…
- Restrição redundante: restrição que não contribui para a definição do conjunto das soluções admissíveis.
- Valor de uma solução: valor da função objectivo (z) para a solução em causa.
- Solução óptima: solução que tem um valor maior (em maximização) / menor (em minimização) ou igual a qualquer solução admissível.
- Valor óptimo: valor de uma solução óptima.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Uma metalurgia deseja maximizar sua receita bruta. A Tabela ilustra a proporção de cada material na mistura para a obtenção das ligas passíveis de fabricação. O preço está cotado em UM (unidades monetárias) por tonelada da liga fabricada. As restrições de disponibilidade de matéria-prima também estão expressas em toneladas.

	Liga de **baixa** resistência	Liga de **alta** resistência	Disponibilidade de matéria-prima
Cobre	0,5	0,2	16 ton
Zinco	0,25	0,3	11 ton
Chumbo	0,25	0,5	15 ton
Preço de venda (UM/ton)	3000	5000	* ton. minério / ton. de liga

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Escolha da variável de decisão

Esta etapa é simples quando a função objectivo e as restrições estão directamente associadas às variáveis de decisão.

	Liga de <u>baixa</u> resistência	Liga de <u>alta</u> resistência	Disponibilidade de matéria-prima
Cobre	0,5	0,2	16 ton
Zinco	0,25	0,3	11 ton
Chumbo	0,25	0,5	15 ton
Preço de venda (UM/ton)	3000	5000	* ton. minério / ton. de liga

Quais são as incógnitas?

O que queremos decidir?

O que é que o agente de decisão quer saber?

+- cobre? +- zinco? +- chumbo?

Ganhar muito ou pouco?

Que parâmetros são variáveis e quais são fixos?

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

	Liga de <u>baixa</u> resistência	Liga de <u>alta</u> resistência	Disponibilidade de matéria-prima
Cobre	0,5	0,2	16 ton
Zinco	0,25	0,3	11 ton
Chumbo	0,25	0,5	15 ton
Preço de venda (UM/ton)	3000	5000	* ton. minério / ton. de liga

Escolha da variável de decisão

Quais são as incógnitas?

x_i? x_{LBaixa}? x_{LAlta}?

O que queremos decidir?

Níveis de produção das ligas (em toneladas)

O que é que o agente de decisão quer saber?

O plano óptimo de produção.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

	Liga de baixa resistência	Liga de alta resistência	Disponibilidade de matéria-prima
Cobre	0,5	0,2	16 ton
Zinco	0,25	0,3	11 ton
Chumbo	0,25	0,5	15 ton
Preço de venda (UM/ton)	3000	5000	* ton. matéria / ton. de liga

Função Objectivo

expressa em função das variáveis decisão

Maximizar ou minimizar?

Cada tonelada de liga baixa resistência contribui para o objectivo com quanto? E a de alta resistência?

$$Maximizar\ \ z = 3000x_{LBaixa} + 5000x_{LAlta}$$

z representa a receita bruta em UM em função da quantidade produzida em toneladas de ligas de baixa e alta resistência

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

	Liga de baixa resistência	Liga de alta resistência	Disponibilidade de matéria-prima
Cobre	0,5	0,2	16 ton
Zinco	0,25	0,3	11 ton
Chumbo	0,25	0,5	15 ton
Preço de venda (UM/ton)	3000	5000	* ton. matéria / ton. de liga

Restrições (tecnológicas)

expressa em função das variáveis decisão

Podemos produzir quanto?

O que condiciona a produção?

Matéria prima

Quanto há (em ton.)?

Cobre	$0.50x_{LBaixa} + 0.2x_{LAlta}$	$\leq$	16
Zinco	$0.25x_{LBaixa} + 0.3x_{LAlta}$	$\leq$	11
Chumbo	$0.25x_{LBaixa} + 0.5x_{LAlta}$	$\leq$	15

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Restrições de não-negatividade

A quantidade que vamos produzir pode ser negativa?

Na maioria dos problemas reais as variáveis só podem assumir valores nulos ou não negativos. São exemplos típicos variáveis que englobam peso, espaço, número de itens, configurações, pessoas etc. Eventualmente podemos dar sentido a valores negativos de tempo, unidades monetárias etc. Contudo, os valores negativos das variáveis podem ser eliminados por convenientes transformações de variáveis.

$$x_{LBaixa}, \quad x_{LAlta} \geq 0$$

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Modelo

$$\text{Maximizar } z = 3.000x_1 + 5.000x_2$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 &\leq 16 \\ 0{,}25x_1 + 0{,}3x_2 &\leq 11 \\ 0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 &\leq 15 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Problema da fábrica de móveis

Uma grande fábrica de móveis dispõe em stock 250 metros de tábuas, 600 metros de pranchas e 500 metros de painéis de aglomerado. A fábrica normalmente oferece uma linha de móveis composta por um modelo de escrivaninha, uma mesa de reunião, um armário e uma prateleira. Cada tipo de móvel consome uma certa quantidade de matéria prima, conforme a Tabela. A escrivaninha é vendida por 100 unidades monetárias (u.m.), a mesa por 80 u.m., o armário por 120 u.m. e a prateleira por 20 u.m. Pede-se para exibir um modelo de Programação Linear que maximize a receita com a venda dos móveis.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Problema da fábrica de móveis

	Quantidade de material em metros consumidos por unidade de produto				***Disponibilidade do Recurso (m)***
	Escrivaninha	Mesa	Armário	Prateleira	
Tábua	1	1	1	4	250
Prancha	0	1	1	2	600
Painéis	3	2	4	0	500
Valor de Revenda (u.m.)	100	80	120	20	

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Problema da fábrica de móveis

$x_i \equiv$ quantidade em unidades a serem produzidas do produto escrivaninha (i = 1), mesa (i = 2), armário (i = 3), prateleira (i = 4).

z = Maximizar $\{f(x) = 100x_1 + 80x_2 + 120x_3 + 20x_4\}$
Receita bruta em unidades monetárias em função do número de unidades produzidas de cada tipo de móvel.

a) Restrição associada à disponibilidade de tábuas:
$x_1 + x_2 + x_3 + 4\,x_4 \leq 250$

b) Restrição associada à disponibilidade de pranchas:
$x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 600$

c) Restrição associada à disponibilidade de painéis:
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 500$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Problema da dieta

- Problema: determinar dieta diária com menor custo possível que cumpra determinados requisitos nutritivos.
- Requisitos nutritivos diários:
  - exactamente 3000 calorias;
  - pelo menos 100 gramas de proteínas.
- Alimentos disponíveis A, B e C, com preços e composição nutritiva dados na tabela.

	Calorias / unidade de alimento	Proteínas (gramas / unidade de alimento)	Custo (€ / unidade de alimento)
A	1000	20	10
B	1000	50	10
C	3000	50	20

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Problema da dieta

x_j – quantidade do alimento j a ingerir diariamente, $j = 1,2,3.$

$$
\begin{aligned}
&Min\ z = 10x_1 + 10x_2 + 20x_3\\
&s.a:\\
&1000x_1 + 1000x_2 + 3000x_3 = 3000\\
&20x_1 + 50x_2 + 50x_3 \geq 100\\
&x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

- Problema geral
- Pretende-se determinar em que quantidades misturar n ingredientes de forma a obter um produto, que cumpra um conjunto de requisitos relativamente a m substâncias. É conhecido a composição de cada ingrediente relativamente a cada substância: quantidade da substância i contida numa unidade do ingrediente j (a_{ij}, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$). No produto final, cada substância tem de ter exactamente uma determinada quantidade, uma quantidade mínima ou máxima (b_i, $i=1,\dots,m$). É ainda conhecido o preço unitário de cada ingrediente (c_j, $j=1,\dots,n$). Pretende-se que o custo do produto seja o menor possível.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Problema da dieta (geral)

x_j – quantidade do ingrediente j a utilizar no produto, $j = 1,\dots,n$

$$
\begin{aligned}
&Min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\\
&s.a:\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{cases} \geq b_i \text{, se é imposta uma quantidade mínima da substância } i \\ = b_i \text{, se é imposta uma quantidade exacta da substância } i \\ \leq b_i \text{, se é imposta uma quantidade máxima da substância } i \end{cases} ,\ i = 1,\dots,m\\
&x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Problema da dieta (geral)

Nota: O problema da dieta foi o primeiro problema de "grande dimensão" de Programação Linear a ser resolvido (1947). O modelo construído tinha 9 (in)equações (nutrientes) e 77 variáveis (alimentos).

Foi dispendido um esforço de 120 homem.dia.

Hoje, um problema de PL de grande dimensão é um problema com **centenas de milhares de (in)equações e centenas de milhares de variáveis**!

É corrente resolverem-se problemas com milhares de (in)equações e variáveis em poucos segundos. A evolução não se deveu apenas ao desenvolvimento dos computadores, mas também ao notável desenvolvimento da teoria.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Problema de transportes

Uma empresa de distribuição pretende transportar um determinado produto de três locais onde está disponível (A, B e C) para outros três locais (1, 2, e 3). Nos locais A, B e C estão disponíveis 20, 30 e 40 unidades do produto, respectivamente. Nos locais 1, 2 e 3 são necessárias 15, 25 e 50 unidades, respectivamente. Na tabela em baixo, apresentam-se os custos de transportar uma unidade entre cada local origem e cada local destino. Pretende-se determinar as quantidades a enviar entre cada local origem e cada local destino de forma a minimizar o custo total de transporte.

	1	*2*	*3*
A	9	5	4
B	8	2	3
C	4	5	8

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Problema de transportes

x_{ij} – quantidade a transportar de i para j, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$.

$$Min\ z = 9x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} + 8x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + 4x_{31} + 5x_{32} + 8x_{33}$$

s.a:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 40$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 25$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50$$
$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3, j = 1,2,3.$$

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Problema de transportes

Problema geral

Parâmetros: n origens; m destinos; a_i oferta da origem i, $i=1,\ldots,n$; b_j procura do destino j, $j=1,\ldots,m$; c_{ij} custo unitário de transporte entre i e j, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$.

Pretende-se determinar de que forma transportar as unidades das origens para os destinos de forma a minimizar o custo total.

Nota: é frequente a utilização de modelos de transportes em problemas em que não há o transporte de um bem físico.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Problema de transportes

x_{ij} − quantidade a transportar de i para $j, i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m.$

$$Min\, z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$s.a:$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i, i = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq b_j, j = 1,\ldots,m$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m$$

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Leituras aconselhadas

Secções 3.1 a 3.5 de

F. Hillier, G. Lieberman, "Introduction to Operations Research", 7th edition, McGraw-Hill, 2001.

PROGRAMAÇÃO LINEAR - PL

Links

R.E. Bixby, M. Fenelon, Z. Gu, E. Rothberg, R. Wunderling, MIP: theory and practice - closing the gap, in: M.J.D. Powell, S. Scholtes (Eds.), System Modelling and Optimization Methods, Theory and Applications, Kluwer, 2000, 19-49.

G. Dantzig, "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, 1963.

G. Dantzig, "The Diet Problem", Interfaces, Volume 20, Number 4, Jul/Aug 1990 pp:43-47.
http://www.interfaces.smeal.psu.edu

e-optimization.community (entrevista com G. Dantzig).
http://www.e-optimization.com/directory/trailblazers/dantzig/

F. Hillier, G. Lieberman, "Introduction to Operations Research", 7th edition, McGraw-Hill, 2001.

A. Guimarães Rodrigues, "Investigação Operacional", Universidade do Minho, 1993.

G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey, "Integer and Combinatorial Optimization", John Wiley and Sons, 1999.

M. Ramalhete, J. Guerreiro, A. Magalhães, "Programação Linear, Vol. 1", McGraw-Hill, 1984.

H. P. Williams, "Model Building in Mathematical Programming", John Wiley and Sons, 4th edition, 1999.

D. Wright, Animated Linear Programming Applet.
http://www.cs.stedwards.edu/~wright/linprog/AnimaLP.html