Análise Matemática B

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica
1º ano

Funções de Várias Variáveis - Derivadas Parciais

Derivadas parciais de funções de duas variáveis

Definição 1: Seja $z = f(x, y)$ definida num aberto $D \subset \mathbb{R}$ e um ponto $(x_0, y_0) \in D$. As derivadas parciais de f em ordem a x e a y no ponto (x_0, y_0) são dadas por:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Nota: Outras notações usuais para derivadas parciais, por exemplo em ordem a x, quando $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y) = f'_x(x, y) = f_1(x, y) = D_x f(x, y) = D_1 f(x, y).$$

Exemplo 1: Para $f(x,y) = xy + y^2$ calcule $\partial f(1,2)/\partial x$ e $\partial f(1,2)/\partial y$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(1,2)}{\partial x} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,2) - f(1,2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)(2) + 2^2 - ((1)(2) + 2^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2
\end{aligned}$$

Derivadas parciais de funções de duas variáveis

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(1,2)}{\partial y} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1,2+h)-f(1,2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1)(2+h)+(2+h)^2-((1)(2)+2^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(5+h) = 5.
\end{aligned}
$$

Derivadas parciais de funções de duas variáveis

Definem-se da mesma forma que na (**Definição 1**) as derivadas parciais de funções de três ou mais variáveis. Especificamente, mantêm-se constantes todas as variáveis menos uma, em relação à qual faz-se a derivação.
Assim, dada a função $f(x, y, z)$ podemos calcular $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} \\
\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} \\
\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}
\end{aligned}$$

Exemplo 2: Se $w = xy^2z^3$, determine $\partial w/\partial y$.

Considerando x e z constantes e derivando em relação a y obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial(xy^2z^3)}{\partial y} = xz^3\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = xz^3(2y) = 2xyz^3.$$

Exemplo 3: Se $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, determine $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$.

Usando a regra do quociente, considerando y constante e derivando em relação a x, obtemos f_1 e similarmente f_2,

Derivadas parciais de funções

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - (x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{(x^2+y^2)(1+0)-(x+y)(2x+0)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - (x+y)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{(x^2+y^2)(0+1)-(x+y)(0+2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3: Determine as derivadas parciais de primeira ordem da seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y - y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\frac{\partial}{\partial x}[3x^2y-y](x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial x}[x^2+y^2](3x^2y-y)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Derivadas parciais de funções

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{6xy(x^2+y^2)-2x(3x^2y-y)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{6xy^3+2xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Derivadas parciais de funções

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^4-3x^2y^2-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{-h}{h^2} = \text{não existe} & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Derivadas de ordem superior
Se f é função de duas variáveis x e y, então f_x e f_y são também funções de duas variáveis; podemos, pois, considerar as suas derivadas parciais de 1^{a} ordem, que serão as derivadas parciais de 2^{a} ordem de f. A ordem de derivação é indicada da esquerda para a direita. Assim, f_{yx} indica que primeiro se derivada em ordem à variável y e depois em ordem a x

$$f_{yx} = f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Derivadas parciais de funções

Definição 2: Uma função f diz-se de classe C^1 num subconjunto aberto A do seu domínio se f admitir derivadas parciais f_x e f_y contínuas em A e escreve-se $f \in C^1(A)$.

Esta definição pode ser generalizada para $f \in C^k(A)$, $k \in \mathbb{N}$, se as derivadas parciais até à ordem k forem contínuas em A.

Derivadas parciais de funções

Teorema de Schwarz: Se existirem f_x, f_y e f_{xy} numa vizinhança de (x_0, y_0) e se f_{xy} for contínua nesse ponto, então também existe $f_{yx}(x_0, y_0)$ e

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Exemplo 4: Determine as derivadas de segunda ordem da função $f(x, y) = x \ln y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\ln y) = 0; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\ln y) = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}$$

Funções diferenciáveis

Definição 3: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D um conjunto aberto e $(x_0, y_0) \in D$. A função f diz-se diferenciável no ponto (x_0, y_0) se existirem constantes A e B independentes de h e k tais que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \alpha_1 h + \alpha_2 k$$

onde α_1 e α_2 tendem para zero com h e k.

Teorema: Se f é diferenciável em (x_0, y_0), então:

a) f é contínua em (x_0, y_0);

b) $f(x, y)$ admite derivadas parciais de 1^{a} ordem em (x_0, y_0) e tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = B.$$

Nota: Se alguma das alíneas $a)$ e $b)$ do teorema acima não se verificar, a função f não é diferenciável no ponto (x_0, y_0), dado que o teorema define uma condição necessária de diferenciabilidade da função f no ponto (x_0, y_0).

Exemplo 5: Verifique se a seguinte função é diferenciável no ponto $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^4 + y^4 & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$, a função não é contínua no ponto $(0,0)$.

Logo a função não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Funções diferenciáveis

Teorema: Se f admite derivadas parciais de 1^{a} ordem numa vizinhança de (x_0, y_0) e uma delas for contínua em (x_0, y_0), então f é diferenciável em (x_0, y_0).

Nota: É importante salientar que o recíproco não é verdadeiro, isto é, a função f pode ser diferenciável no ponto (x_0, y_0) e contudo as suas derivadas parciais de 1^{a} ordem não serem contínuas nesse ponto.

Exemplo 6: Verifique se a função $f(x, y) = 2x^2y^2 + x^2 + 2x^3$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

As derivadas parciais são $f_x(x, y) = 4xy^2 + 2x + 6x^2$ e $f_y(x, y) = 4x^2y$, que são funções definidas e contínuas em $\mathbb{R}^2$. Assim, pelo teorema anterior, concluímos que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Diferenciais

Seja f uma função real de duas variáveis reais.

Definição 4: Supondo que f é uma função diferenciável no ponto (x_0, y_0) podemos escrever:

$$\triangle f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) + \alpha_1 h + \alpha_2 k$$

A parte $hf'_x((x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0)$ é designada como primeiro diferencial da função em (x_0, y_0) e podemos escrever

$$df(x_0, y_0) = hf'_x((x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0).$$

Identificando h com dx e k com dy obtemos,

$$df(x_0, y_0) = f'_x((x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

Podemos então escrever que:

$$\triangle f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \alpha_1 h + \alpha_2 k.$$

Assim,

$$\triangle f(x_0,y_0) = f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) \approx df(x_0,y_0)$$

e

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + \triangle f(x_0,y_0) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)$$

Quando h e k tendem para zero, df tende para $\triangle f$.

Exemplo 7: Calcule um valor aproximado de $(0.98)^{2.03}$.

Podemos considerar que $f(x,y) = x^y$ no ponto $(0.98, 2.03)$. Pretendemos determinar um valor aproximado de $f(0.98, 2.03) = f(1-0.02, 2+0.03)$ com $(x_0,y_0) = (1,2)$, $dx = -0.02$ e $dy = 0.03$. Usando a expressão

$$f(x_0+h,y_0+k) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0),$$

obtemos,

$$f(1-0.02, 2+0.03) \approx f(1,2) + df(1,2) = 1 + df(1,2),$$

Diferenciais

$$df(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)dy = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(-0.02) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(0.03).$$

Calculemos as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 0$$

Então, podemos escrever que $df(1,2) = 2(-0.02) + 0(0.03) = -0.04$. A aproximação pretendida para

$$(0.98)^{2.03} \approx 1 - 0.04 = 0.96.$$

sendo o seu valor real de $0.959818\cdots$.

Derivadas de funções compostas

Regra de derivação da função composta: Seja h uma função composta de uma só variável definida como $h = fog$. Se g é diferenciável em x_0 e f é diferenciável em $g(x_0)$, a função $h = fog$ é diferenciável em x_0 e

$$h'(x_0) = (fog)'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)$$

Teorema 1: Suponha que $z = f(x, y)$ é uma função diferenciável de x e y, com $x = g(t)$ e $y = h(t)$ funções diferenciáveis de t. Então $z = u(t) = f(g(t), h(t))$ é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Exemplo 8: Seja $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ com $x = 2t + 1$ e $y = t^3$, obtenha dz/dt.

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(2) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(3t^2) \\
&= \frac{2x + 3t^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2(2t+1) + 3t^2(t^3)}{\sqrt{(2t+1)^2 + (t^3)^2}} = \frac{3t^5 + 4t + 2}{\sqrt{t^6 + 4t^2 + 4t + 1}}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 9: Seja $z = f(x, y)$ onde $f(x, y) = e^{xy}$ $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \sin t$, encontre dz/dt.

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= ye^{xy}(-\sin t) + xe^{xy}(\cos t) \\
&= \sin te^{\cos t \sin t}(-\sin t) + \cos te^{\cos t \sin t}(\cos t) \\
&= (\cos^2 t - \sin^2 t)e^{\cos t \sin t} = \cos 2te^{\cos t \sin t}.
\end{aligned}
$$

Derivadas de funções compostas

Nota: Esta regra de derivação pode ser facilmente generalizada para funções com mais de duas variáveis. Considerando $w = f(x_1, \dots, x_n)$ uma função de n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ e cada uma dessas variáveis é, por sua vez, função de uma variável t, então

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

note-se que a função w dada em termos de $x_1, \dots, x_n$ é diferenciável e que as derivadas $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$ existem.

Derivadas de funções compostas

Exemplo 10: Seja $w = \ln \dfrac{x^2 y^2}{4z^3}$, $x = e^t$, $y = \sec t$ e $z = \cot t$. Determine dw/dt.

Considerando $w = 2\ln x + 2\ln y - 3\ln z - \ln 4$, obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2}{x} = \frac{2}{e^t}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2}{y} = \frac{2}{\sec t}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{3}{z} = \frac{-3}{\cot t}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{2}{e^t}e^t + \frac{2}{\sec t}\sec t \tan t + \frac{-3}{\cot t}(-\csc^2 t) = 2 + 2\tan t + 3\sec t \csc t. \end{aligned}$$

Derivadas de funções compostas

Teorema 2: Suponha que $z = f(x,y)$ é uma diferenciável de x e y, com $x = u(s,t)$ e $y = v(s,t)$ funções diferenciáveis de s e t. Então $z = w(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$ é uma função diferenciável de s e t, e

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Exemplo 11: Sendo $z)\sin(x^2 - y)$ com $x = e^s + t^2$ e $y = 3s^2 + \ln t$, para $t > 0$. Determine $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(2x\cos(x^2 - y)e^x - \cos(x^2 - y)6s\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left((2xe^s - 6s)\cos(x^2 - y)\right).
\end{aligned}$$

Derivadas de funções compostas

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} &= \left[\frac{\partial}{\partial t}(2xe^s - 6s)\right]\cos(x^2 - y) + \left[\frac{\partial}{\partial t}(\cos(x^2 - y)\right](2xe^s - 6s) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} &= 2e^s \frac{\partial}{\partial t}(x)\cos(x^2 - y) - \frac{\partial}{\partial t}(x^2 - y)\sin(x^2 - y)(2xe^s - 6s) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} &= 2e^s 2t\cos(x^2 - y) - (2x2t - \tfrac{1}{t})\sin(x^2 - y)(2xe^s - 6s) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} &= 4te^s\cos(x^2 - y) - (4xt - \tfrac{1}{t})\sin(x^2 - y)(2xe^s - 6s) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} &= 4te^s\cos[(e^s + t^2)^2 - 3s^2 - \ln t] + \\
&+ \left(\tfrac{1}{t} - 4(e^s + t^2)t\right)\sin[(e^s + t^2)^2 - 3s^2 - \ln t][(2(e^s + t^2)e^s - 6s)]
\end{aligned}
$$