Análise Matemática B

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica
1º ano

Funções de Várias Variáveis

Funções de várias variáveis

Neste tópico vamos generalizar o conceito de funções de uma única variável real. Em termos práticos situações de funções com várias variáveis são frequentes. Por exemplo, a pressão de um gás depende da sua temperatura e do seu volume; o poder de compra de uma pessoa depende do seu salário mas também das deduções específicas e do número de pessoas dependentes; a frequência de um circuito sintonizador depende da sua capacitancia, da sua temperatura e do seu volume.

Definição: Uma função real de duas variáveis reais é uma relação que transforma num único número real z cada par ordenado (x, y) de número reais de um certo conjunto D, chamado de domínio da função. Escrevemos então que $z = f(x, y)$.

Nota:Para n=2, $z = f(x, y)$ e para n=3 representamos por $w = f(x, y, z)$. Na equação $z = f(x, y)$, z é a variável dependente e x e y são as variáveis independentes. Ao conjunto de todos os valores possíveis de z é chamado imagem da função f.

Exemplo 1: Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

b) $f(x,y) = 1 - x - (y/2)$.

Exemplo 2: Encontre e esboce o domínio de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{y}$.

Nota: Se uma função f de várias variáveis está definida por uma equação ou fórmula, então entende-se por domínio de f o conjunto de todas as n-uplas de variáveis independentes para as quais a equação ou fórmula são possíveis.

Limite de uma função de duas variáveis

Definição 1: Seja f uma função de duas variáveis e seja o ponto (x_0, y_0) no plano xy. Suponha que existe um disco circular de raio positivo, de modo que qualquer ponto do interior do círculo, exceto possivelmente o centro (x_0, y_0), pertença ao domínio de f. Dizemos que o limite quando (x,y) tende para (x_0, y_0) é o número L, e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = L$$

sabendo que, para cada número positivo ε, existe um número positivo δ tal que $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ para qualquer $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ e a distância entre (x,y) e (x_0, y_0) seja menor que δ.

Nota: A condição apresentada na definição pode ser apresentada como: para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \quad \text{implica} \quad |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Limite de uma função de duas variáveis

Exemplo 3: Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \left(4xy^2 + 3xy - \dfrac{3x^2}{x+y}\right) = 21$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[e^{\sin(3x^2+y)+\cos(2xy)}\right] = e$

Nota: No limite de uma função de duas variáveis, isto é, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, devemos supor que o ponto (x,y) se aproxima do ponto (a,b) não apenas pela direita ou pela esquerda, mas também por qualquer outra direção. Uma regra para provar a não existência de um particular limite é mostrar que $f(x,y)$ tende para dois limites diferentes quando (x,y) tende para (a,b) por direções diferentes.

Exemplo 4: Considere a função $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{3x^2+3y^2}$.

a) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende para $(0,0)$ ao longo de cada um dos seguintes caminhos: (i) eixo dos xx; (ii) eixo dos yy; (iii) a recta $y=x$; (iv) a parábola $y=x^2$.

b) O limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe? Em caso afirmativo qual o seu valor?

Limite de uma função de duas variáveis

Exemplo 5: Considere a função $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

a) Calcule o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende para $(0, 0)$ ao longo de cada um dos seguintes caminhos: (i) eixo dos xx; (ii) eixo dos yy; (iii) a recta $y = x$; (iv) a parábola $y = x^2$.

b) O limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe? Em caso afirmativo qual o seu valor?

Limite de uma função de duas variáveis

Exemplo 6: Considere a função f definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{x}\right) y^2 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende para $(0,0)$ ao longo da recta $y = mx$;
b) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende para $(0,0)$ ao longo da parábola $x = y^2$;
c) O limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe?

Exemplo 7: Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (3x+2y) = 7$ usando a Definição 1.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Necessitamos de encontrar $\delta > 0$ tal que $|3x+2y-7| < \varepsilon$ sempre que $0 < (x-1)^2 + (y-2)^2 < \delta^2$. Por outro lado observemos que

$$\begin{aligned} |3x+2y-7| &= |3x-3+2y-4| \leq |3x-3| + |2y-4| \\ & |3(x-1)| + |2(y-2)| \leq 3|x-1| + 2|y-2| \end{aligned}$$

considerando, se $3|x-1| < \varepsilon/2$ e $2|y-2| < \varepsilon/2$, então

$$|3x+2y-7| \leq 3|x-1| + 2|y-2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

A condição $3|x-1| < \varepsilon/2$ é equivalente a $9(x-1)^2 < \varepsilon^2/4$, ou $(x-1)^2 < \varepsilon^2/36$ e a condição $2|y-2| < \varepsilon/2$ é equivalente a $4(y-2)^2 < \varepsilon^2/4$, ou $(y-2)^2 < \varepsilon^2/16$, teremos $|3x+2y-7| < \varepsilon$.

Exemplo 7:(cont.) Assim, escolhemos $\delta = \varepsilon/6$ reparemos que se

$$0 < (x-1)^2 + (y-2)^2 < \delta^2 = \varepsilon^2/36,$$

então

$$(x-1)^2 < (x-1)^2 + (y-2)^2 < \delta^2 = \varepsilon^2/36$$

e

$$(y-2)^2 < (x-1)^2 + (y-2)^2 < \delta^2 = \varepsilon^2/36;$$

assim, $(x-1)^2 < \varepsilon^2/36$ e $(y-2)^2 < \varepsilon^2/36$, ou seja $|3x + 2y - 7| < \varepsilon$ como queriamos provar.

Continuidade de uma função de duas variáveis

Definição 2: Suponha que f é uma função de duas variáveis e que o ponto (x_0, y_0) seja o centro de um disco circular de raio positivo contido no domínio de f. Dizemos que f é contínua em (x_0, y_0) se

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Exemplo 8: Verifique se as funções dadas são contínuas nos pontos indicados.

a) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy$ em $(2,-3)$.

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

em $(0,0)$, ao longo do eixo dos xx e ao longo da recta $y = x$.