Ficha 1: Função

1.1 Generalidades

Definição 1.1 *Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função f definida em A de valores em B é uma relação tal que para cada $x \in A$ associamos um único $y = f(x) \in B$. Dizemos que o y é a imagem do elemento (objeto) x pela função f.*
O conjuntos A e B chamam-se respetivamente conjunto de partida e conjunto de chegada.

Seja $E \subset A$ um subconjunto,

$$f(E) = \{B \ni y = f(x) \text{ tal que } x \in E\}.$$

chama-se imagem de E pela função f.

Exemplo 1.1 Seja $f(x) = x^2$ e $E = \{-4\} \cup [-1, 1] \cup]2, 3[$, então $f(E) = [0, 1] \cup]4, 9[\cup \{16\}$.

Definição 1.2 *Notamos por $D_f \subset \mathbb{R}$ o maior domínio onde f está definida. O conjunto $CD_f = \{y = f(x);\ x \in D_f\}$ chama-se contradomínio.*

Nota 1.1 Usa também a notação D'_f para o contradomínio mas esta notação pode ser confundida com $D_{f'}$ que é o domínio da derivada.

Exemplo 1.2 Seja a função $f(x) = x^2$, o seu domínio é $\mathbb{R}$ enquanto o contradominio é $[0, +\infty[$. Temos ambos $f(-2) = f(2) = 4$ então 4 é a imagem de 2 e -2 enquanto -2 e 2 são os antecedentes de 4.

Cuidado. Uma função pode ter uma expressão analítica e portanto não existir. Por exemplo consideramos a função $f(x) = \sqrt{-|x| - 1}$, podemos verificar que nenhum valore é eligível então $D_f = \emptyset$, quer dizer que a função não existe na prática (apenas simbolicamente).

Definição 1.3 *Seja f uma função de valores reais e D_f o seu domínio. Notamos por*

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in D_f\}$$

o gráfico (ou curva representativa) da função f.

Nota 1.2 Uma curva corresponde a uma função desde que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a reta vertical que passa pelo ponto $(x, 0)$ não corta o gráfico (zero interseção) se $x \notin D_f$, ou corta apenas uma vez o gráfico se $x \in D_f$.

Exemplo 1.3 Podemos também definir uma função por ramos onde a expressão é diferente em função do intervalo. Por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \sin(x) & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{se } x \in [1, 4], \\ \frac{1}{x} & \text{se } x^2 < 1. \end{cases}$$

Definição 1.4 (paridade) *Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio.*

- *f é uma função par em E se $\forall x \in E$, $-x \in E$ e $\forall x \in E$, $f(-x) = f(x)$.*
- *f é uma função ímpar em E se $\forall x \in E$, $-x \in E$ e $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$.*

Definição 1.5 (período) *Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio. A função f é periódica de período T em E se $\forall x \in E$, $x + T \in E$ e $\forall x \in E$, $f(x+T) = f(x)$.*

Definição 1.6 (monotonia) *Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio.*

- *A função é crescente se $\forall x, y \in E$, $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.*
- *A função é estritamente crescente se $\forall x, y \in E$, $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.*
- *A função é decrescente se $\forall x, y \in E$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.*
- *A função é estritamente decrescente se $\forall x, y \in E$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.*

Uma função crescente ou decrescente num conjunto E diz-se monótona em E. Determinar os intervalos de monotonia de uma função f consiste em determinar os intervalos de D_f onde f é crescente ou decrescente.

NOTA 1.3 É muito importante precisar o conjunto E. Por exemplo, a funcção $f(x) = x^2$ é crescente em $E = [0, +\infty[$ mas decrescente em $]-\infty, 0]$. Além de mais, nem é crescerente nem é decrescente em $\mathbb{R}$.

Definição 1.7 (limitada) *Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio.*

- *m é um minorante de f em E se $\forall x \in E$, $f(x) \geq m$*
- *f admite um mínimo m em E se existe $x_m \in E$ tal que $\forall x \in E$, $f(x) \geq m = f(x_m)$.*
- *M é um majorante de f em E se $\forall x \in E$, $f(x) \leq M$*
- *f admite um máximo M em E se existe $x_M \in E$ tal que $\forall x \in E$, $f(x) \leq M = f(x_M)$.*

Uma função majorada e minorada é limitada.

Proposição 1.1
Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio. O mínimo e o máximo, quando exitem são únicos.

NOTA 1.4 A função $f(x) = x^2$ tem 0 como mínimo e 1 como máximo em $[-1, 1]$. Podemos notar que existem dois pontos ($x = -1$ e $x = 1$) que conduzem ao mesmo máximo.
A função $f(x) = x^2$ não admite majorante no conjunto $E = [5, +\infty[$.

EXEMPLO 1.4 Seja a função $f(x) = \sin(x)$. A função não admite nem um mínimo nem um máximo no conjunto $E =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ porque $-\frac{\pi}{2} \notin E$ e $\frac{\pi}{2} \notin E$.

NOTA 1.5 Mínimo, mínimo absoluto ou mínimo global têm exatamente o mesmo significado. Portanto, neste curso usamos de preferência a expressão mínimo global em oposição a mínimo local (ver capítulo sobre as derivadas) enquanto a palavra **absoluto** é reservada as situação onde se trata do sinal (valor absoluto, convergência absoluta).

NOTA 1.6 Existe também a noção de supremo de E que é o mínimo dos majorantes e de ínfimos de E como o máximo dos minorante, sejam

- supremo: $\sup(E) = \min\{x \in \mathbb{R},\ x \text{ majorante de } E\}$
- ínfimos: $\inf(E) = \max\{x \in \mathbb{R},\ x \text{ minorante de } E\}$

Por exemplo $\sup[3,4] = \sup]3,4[= 4$, enquanto temos $\inf(\mathbb{R}^-) = -\infty$.

Definição 1.8 *Seja f uma função e D_f o seu domínio. Dizemos que $x \in D_f$ é um zero (ou uma raiz) da função se $f(x) = 0$. Notamos por $\mathcal{Z}_f = \{x \in D_f;\ f(x) = 0\}$ o conjunto dos zeros da função f.*

EXEMPLO 1.5 Os zeros da função $f(x) = x^2 - 1$ são -1, 1 e temos $\mathcal{Z}_f = \{-1, 1\}$.

Definição 1.9 (soma, produto) *Sejam f e g duas funções e $E \subset D_f \cap D_g$. A função soma em E é definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in E$ enquanto a função produto é dada por $(fg)(x) = f(x)g(x)$.*

Definição 1.10 (quociente) *Sejam f e g duas funções e $E \subset D_f \cap D_g$* **tal que** *$\forall x \in E$, $g(x) \neq 0$. Definimos a função quociente por*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

EXEMPLO 1.6 A função quociente $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ é bem definida desde que $\cos(x) \neq 0$, seja $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.11 (composta) *Sejam f e g duas funções.*

- *O conjunto $E \subset D_f$ é compatível para a composta se $f(E) \subset D_g$.*
- *Se E é compatível, definimos a função composta $h = g \circ f$ em E por*

$$\forall x \in E,\ h(x) = (g \circ f)(x) = g\Big(f(x)\Big).$$

EXEMPLO 1.7 A principal dificuldade na composta de funções é determinar qual é o maior domínio $E \subset D_f$ compatível para a composta. Por exemplo se $f(x) = x^2 - 1$ e $g(y) = \ln(y)$ como $D_g =]0, +\infty[$ temos escolher E tal que $f(E) \subset]0, +\infty[$ quer dizer procurar os $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 1 > 0$. O maior conjunto compatível é finalmente $E =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

1.2 Exemplos de funções

Definição 1.12 *Seja $a, b \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = ax + b$ chama-se função afim. O caso $a = 0$ corresponde à função constante.*

Definição 1.13 *Para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$, a função $x \to x^i$ chama-se monómio de grau i. Um polinómio de grau n é constituido por monómios de grau $i \leq n$ tal que*

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

onde a_0, a_1, ..., a_n são os coeficientes reais do polinómio.
O quociente $h = \dfrac{f}{g}$ de dois polinómios, f e g chama-se função racional.

Exemplo 1.8 A função $f(x) = x^3$ é um monómio de grau 3 e $g(x) = 3 - 4x^4 - 12x^5$ é um polinómio de grau 5. Finalmente obtemos a fração racional $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{4x^3}{3 - 4x^4 - 12x^5}$.

Proposição 1.2
Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$. Notamos por $E(x) = n$ a parte inteira de x. Além de mais, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $E(x + 1) = E(x) + 1$.

Exemplo 1.9 $E(1.21) = 1$, $E(-1.21) = -2$. Existe outro tipo de arredondamento na literatura e também em programação, como o Matlab, tal que 'round', 'floor', 'ceil' and 'trunc'.

Exercício 1.1 Seja a função $f(x) = x - E(x)$ então f é periódica de período 1 e $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$.

Definição 1.14 (Módulo) *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, definimos o módulo de x, notado por $|x|$, a quantidade*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Definimos a função sinal $sng(x) = \frac{x}{|x|}$ para $x \neq 0$ e $sng(0) = 0$.

Nota 1.7 Uma outra definição do módulo é $|x| = \max\{-x, x\}$. Deste última definição, é facil verificar que se $|x| = 0$ então $x = 0$.

Proposição 1.3
Seja $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. temos as equivalencias seguintes

- $|x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha \Leftrightarrow x \in]-\alpha, \alpha[$.
- $|x| > \alpha \Leftrightarrow x < -\alpha$ *ou* $x > \alpha \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\alpha[\cup]\alpha, +\infty[$.
- $|x| \leq \beta \Leftrightarrow -\beta \leq x \leq \beta \Leftrightarrow x \in [-\beta, \beta]$.
- $|x| \geq \beta \Leftrightarrow x \leq -\beta$ *ou* $x \geq \beta \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\beta] \cup [\beta, +\infty[$.

Exercício 1.2 Determinar os x tal que $|2x-3|<1$.
A relação $|2x-3|<1$ é equivalente á $-1<2x-3<1$, quer dizer $-1+3<2x<1+3$, seja ainda $1<x<2$. Conclusão $x\in]1,2[$.

Exercício 1.3 Determinar os x tal que $|-3x+5|\geq 1$.
A relação $|-3x+5|\geq 1$ é equivalente á $-3x+5\leq -1$ ou $-3x+5\geq 1$. A primeira desigualde dá $-3x\leq -1-5$, seja ainda $x\geq 2$. Do mesmo modo temos $-3x+5\geq 1$, seja ainda $x\leq \frac{4}{3}$. Conclusão $x\in]-\infty,\frac{4}{3}]\cup[2,+\infty[$.

Proposição 1.4
Sejam $x,y\in\mathbb{R}$. Então temos ① $x\leq |x|$, ② $|xy|=|x||y|$, ③ $|x+y|\leq|x|+|y|$, ④ $|x|-|y|\leq|x-y|$, ⑤ $2|xy|\leq x^2+y^2$.

Podemos verificar a propriedade: $\min(0,x)=-\max(0,-x)$ seja $g(x)=-f(-x)$. Verificamos também $x=\min(0,x)+\max(0,x)$ e $|x|=\max(0,x)-\min(0,x)$.

Exercício 1.4 Mostrar que para qualquer $\varepsilon>0$, $X,Y\in\mathbb{R}$, temos $|XY|\leq\frac{\varepsilon}{2}X^2+\frac{1}{2\varepsilon}Y^2$.

1.3 Exercícios

Exercício 1 Determinar majorantes, minorantes, máximo e mínimo dos conjuntos seguintes quando existir

1. $[0,1]$, $\quad[-1,5]\cap]2,7[$, $\quad\mathbb{R}^+\setminus[10,100]$, $\quad\mathcal{Z}(x^3-x)$.
2. $\{x\in\mathbb{R},\ x^2+2x-3<1\}$, $\quad\{x\in\mathbb{R},\ |x-1|<1\}\cap\{x\in\mathbb{R},\ |x+1|>2\}$.
3. $\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\}$, $\quad D_f$ com $f(x)=\sqrt{1-3x^2}$, $\quad CD_f$ com $f(x)=\sin(2\pi x)$.

Exercício 2 Determinar a paridade e a periodicidade das funções seguintes

1. $f(x)=\sin(x)$ em $[0,2\pi]$, $\quad f(x)=\sin(x)$ em $]-\pi,\pi[$, $\quad f(x)=E(x)$ em $\mathbb{R}$.
2. $f(x)=\sin(\pi x)$ em $\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\sin(x-1)$ em $\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\sin(x)\cos(x)$ em $\mathbb{R}$.

Exercício 3 Seja a função $f(x)=x-E(x)$. Desenhar o gráfico de f no intervalo $[-2,2]$. Determinar o domínio e contradominio de f. Mostrar que f é periódica de periódo $T=1$ no seu domínio.

Exercício 4 Usando $(x+y)^2$ e $(x-y)^2$, mostrar que $2|xy|\leq x^2+y^2$. Usando $|x+y|\leq|x|+|y|$, mostrar que $|x|-|y|\leq|x-y|$.

Exercício 5 Determinar o conjunto solução:

1. $|5x-1|<4$, $\quad|-3x-4|\geq 1$, $\quad||x|-1|>2$.

2. $|2x-1| = x+1$, $\quad |2x-1| \leq x-6$, $\quad |x-1| \geq 2x-3$.

3. $|(x+2)(x-1)| < x-1$, $\quad |(x-1)^2 - x^2| > 1$, $\quad \left|\frac{x+2}{x-1}\right| < 1$, $\quad |x^2-1| \geq 3$.

Exercício 6 Determinar o domínio e contradominio das funções seguintes

1. $f(x) = [\sin(x^2)]^2$, $\quad f(x) = \sqrt{\tan(x)}$, $\quad f(x) = \ln(|x|-1)$.
2. $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 2)$, $\quad f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)$, $\quad f(x) = \ln\left(x^2 + \sqrt{x-1}\right)$.
3. $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x}\right)$, $\quad f(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$, $\quad f(x) = \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)$.

Exercício 7 Determinar o domínio da função composta h=$g \circ f$ com

1. $f(x) = \ln(x)$, $g(y) = \sqrt{y}$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(y) = \ln(y)$.
3. $f(x) = x^2 - 1$, $g(y) = \ln(y-1)$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $g(y) = \dfrac{1}{\cos(y)}$.

Solução 1

1. *(i) Minorante$\leq$Min$= 0$ e 1=Max$\leq$Majorante, (ii) Minorante$\leq$Min$= -1$ e $7 \leq$Majorante e não existe Max, (iii) Minorante$\leq= 0$ e não há Min não há Max não há Majorante, (iv) $\mathcal{Z}(x^3 - x) = \{-1, 0, 1\}$ Minorante$\leq$Min$= -1$ e 1=Max$\leq$Majorante.*

2. *(i) Minorante$\leq -1-\sqrt{5}$ e $-1+\sqrt{5} \leq$Majorante, não há Max nem Min , (ii) $S =]1, 2[$ Minorante≤ 1 e $2 \leq$Majorante, não há Max nem Min ,*

3. *(i) Minorante≤ 0 e 1=Max$\leq$Majorante, não há Min , (ii) $D_f =]-\infty, -1/\sqrt{3}] \cup [1/\sqrt{3}, +\infty[$, não há majorante,minorante, Min, Max, (iii) $DC_f = [-1, 1]$,Minorante$\leq$Min$= -1$ e 1=Max $\leq$Majorante.*

Solução 2

1. *(i) Não há paridade nem periodicidade, (ii) impar, não periódica, (iii) Não há paridade nem periodicidade.*

2. *(i) impar, periodico $T = 1$, (ii) Não há paridade, periodico $T = 2\pi$, (iii) impar, periodico $T = \pi$.*

Solução 3

$D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = [0, 1[$, temos $f(x+1) = f(x)$.

Solução 4

(i) substrair as duas relações. (ii) usar $z = x - y$.

Solução 5

1. *(i) $S =]-3/5, 1[$, (ii) $S =]-\infty, -5/3[\cup]-1, +\infty[$, (iii) $S =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.*

2. *(i)* $S=\{0,2\}$, *(ii)* $S=\emptyset$, *(iii)* $S=]-\infty,2]$.

3. *(i)* $S=\emptyset$, *(ii)* $S=]-\infty,0[\cup]1/2,+\infty[$, *(iii)* $S=]-\infty,-1[$, *(iv)* $S=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$.

Solução 6

1. *(i)* $D(f)=\mathbb{R}$, $CD(f)=[0,1]$, *(ii)* $D(f)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[0+k\pi,\pi/2+k\pi]$, $CD(f)=[0,+\infty[$, *(iii)* $D(f)=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $CD(f)=\mathbb{R}$.

2. *(i)* $D(f)=]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$, $CD(f)=\mathbb{R}$, *(ii)* $D(f)=\mathbb{R}^*\setminus\{1/(1+2k),k\in\mathbb{Z}^*\}$, $CD(f)=\mathbb{R}$, *(iii)* $D(f)=[1,+\infty[$, $CD(f)=[0,+\infty[$.

3. *(i)* $D(f)=[0,+\infty[\setminus\{1+2k,\ k\in\mathbb{N}_0\}$, $CD(f)=\mathbb{R}$, *(ii)* $D(f)=[2,+\infty]$, $CD(f)=[0,+\infty[$, *(iii)* $D(f)=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $CD(f)=[0,\pi/2[$.

Solução 7

1. $D(g\circ f)=[1,+\infty[$.

2. $D(g\circ f)=]0,+\infty[$.

3. $D(g\circ f)=]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$.

4. $D(g\circ f)=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{\pi/2+k\pi}-1,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.