Universidade do Minho(DMA)  
Novembro 2012

Cálculo  
Teste Modelo (90 minutos)

Nome ______________________________________________

Número ____________________ Curso ____________________

**1.** Determinar o conjunto solução:

1. $|2x-1| = x+1$.
2. $\cos(x) > \frac{1}{2}$.
3. $|\tan(x)| > 1$.

**2.** Considere a sucessão $u_{i+1} = \dfrac{(u_i+1)^2}{u_i}$ com $u_1 = 1$.

1. Mostrar por indução que $u_i > 0$ para qualquer $i \in \mathbb{N}$.
2. Mostrar que a sucessção é crescente.
3. Mostrar por indução que $u_i \geq i$ e deduzir o limite a sucessão.

**3.** Determinar o domínio e contradominio das funções seguintes

1. $f(x) = [\sin(x^2)]^2$.
2. $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$.
3. $f(x) = \ln(|x|-1)$.

**4.** Determinar os limites seguintes (quando existir)

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{9-17x}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x+1}} x$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\sin(x)}{\ln(x)}$.

solução

**1.1** temos considerar três casos

- Se $2x-1=0$, seja $x=1/2$ então a relação não faz sentido.
- Se $2x-1<0$, temos a relação $-2x+1=x+1$ seja $x=0<1/2$. A solução é eligivel.
- Se $2x-1<0$, temos a relação $2x-1=x+1$ seja $x=2>1/2$. A solução é também eligivel.

En conclusão, o conjunto solução é $S=\{0,2\}$.
**1.2** No intervalo $]-\pi,\pi]$, a relação $\cos(x)>\frac{1}{2}$ significa que $x\in]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}[$. Com a periodicidade, concluimos que

$$S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi[.$$

**1.3** no intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ a condição $|\tan(x)|>1$ implica que $x\in]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$. A periodicidade da função $\tan$ é $\pi$ então o conjunto solução é

$$S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big(]-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\frac{\pi}{4}+k\pi[\bigcup]\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[\Big).$$

**2.1** Seja $\mathcal{H}(i)=\{u_i>0\}$ a hipotese de recorrência. Podemos verificar que temos $\mathcal{H}(1)$. Agora supomos que $\mathcal{H}(i)$ é verdadeira, então $\frac{1}{u_i}>0$ e $u_i+1>0$. Temos finalmente $u_{i+1}=\frac{(u_i+1)^2}{u_i}>0$, seja $\mathcal{H}(i+1)$ está certa. Concluimos que para qualquer $i\in\mathbb{N}$, $\mathcal{H}(i)$ é verdadeira.
**2.2** Calculamos a diferença entre dois termos sucessivos

$$u_{i+1}-u_i=\frac{(u_i+1)^2}{u_i}-u_i=\frac{(u_i+1)^2-u_i^2}{u_i}=\frac{2u_i+1}{u_i}>0.$$

Concluimos que a sucessão é estritamente crescente.
**2.3** Seja $\mathcal{H}(i)=\{u_i\geq i\}$ a hipotese de recorrência. Podemos verificar que temos $\mathcal{H}(1)$ proque $u_1=1\leq 1$. gora supomos que $\mathcal{H}(i)$ é verdadeira, então $u_i\geq i$ seja $u_i+1\geq i+1$ e $(u_i+1)^2\geq(i+1)(u_i+1)\geq(i+1)u_i$. Como $u_i>0$ deduzimos que

$$u_{i+1}=\frac{(u_i+1)^2}{u_i}\geq\frac{u_i(i+1)}{u_i}=i+1.$$

Mostramos assim que $\mathcal{H}(i+1)$ está certa e concluimos que para qualquer $i$, $u_i\geq i$.
**2.4** Seja a sucessão $v_i=i$. Mostramos que $u_i\geq v_i$. Como $\lim\limits_{i\to\infty}v_i=+\infty$ deduzimos que $\lim\limits_{i\to\infty}u_i=+\infty$.
**3.1** $D_f=\mathbb{R}$, $CD_f=[0,1]$.
**3.2** $D_f=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi[$, $CD_f=[0,+\infty]$.
**3.3** $|x|-1>0$ seja $D_f=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $CD_f=\mathbb{R}$.
**4.1** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{9-17x}=-\dfrac{2}{17}$.
**4.2** $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x+1}}x=0$
**4.3** $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sin(x)}{\ln(x)}=-\infty$.