**1. Verifique se as funções $f(x)$ são soluções das equações diferenciais dadas.**

**a)** $f(x)=\frac{g}{24m}x^4,\ m\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}gx^2$ **qualquer que seja o intervalo real considerado.**

**R:**

Vamos começar por determinar o domínio da função, e em seguida determinar as derivadas e respectivos domínios que terão que ser substituídas na equação diferencial dada:

- $y=f(x)=\frac{g}{24m}x^4 \Rightarrow D_f=\Re$

- $\frac{dy}{dx}=f'(x)=\left(\frac{g}{24m}\underbrace{x^4}_{(u^\alpha)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'}\right)'=\frac{g}{24m}\cdot\left(4\cdot x^{4-1}\cdot(x)'\right)=\frac{4g}{24m}x^3=\frac{g}{6m}x^3\Rightarrow D_{f'}=\Re$

- $\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=\left(\frac{g}{6m}\underbrace{x^3}_{(u^\alpha)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'}\right)'=\frac{g}{6m}\cdot\left(3\cdot x^{3-1}\cdot(x)'\right)=\frac{3g}{6m}x^2=\frac{g}{2m}x^2\Rightarrow D_{f''}=\Re$

Assim sendo, por substituição em: $m\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}gx^2$ teremos que:

$$m\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}gx^2\Leftrightarrow m\frac{g}{2m}x^2=\frac{1}{2}gx^2\Leftrightarrow\frac{g}{2}x^2=\frac{1}{2}gx^2\Leftrightarrow\frac{1}{2}gx^2=\frac{1}{2}gx^2\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Verificada a}\\ \text{identidade}\end{matrix}\right\}$$

**b)** $f(x)=\sqrt{1-x^2},\ y\frac{dy}{dx}+x=0$ **no intervalo** $I=\left]-1;1\right[$**.**

**R:**

Vamos começar por determinar o domínio da função, e em seguida determinar a derivada e respectivo domínio que terá que ser substituída na equação diferencial dada:

- $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow D_f=\{x\in\Re:1-x^2\geq 0\}\Rightarrow -1\leq x\leq 1\Rightarrow D_f=[-1;1]$

- $\frac{dy}{dx}=f'(x)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\left[\underbrace{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{(u^\alpha)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'}\right]'=\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(1-x^2\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=$

$$= -\frac{2x}{2\cdot\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow D_{f'} = \left\{x\in\Re : 1-x^2>0\right\} \Rightarrow -1<x<1 \Rightarrow D_{f'} = \left]-1;1\right[$$

Assim sendo, por substituição em: $y\frac{dy}{dx}+x=0$ teremos que:

$$y\frac{dy}{dx}+x=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+x=0 \Leftrightarrow -x+x=0 \Leftrightarrow 0=0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Verificada a}\\ \text{identidade}\end{array}\right\}$$

**c)** $f(x)=\left(x^3+c\right)e^{-3x}$, $\frac{dy}{dx}+3y=3x^2e^{-3x}$ **no intervalo** $I=\Re$**, onde** $c$ **é uma constante arbitrária.**

**R:**

Vamos começar por determinar o domínio da função, e em seguida determinar a derivada e respectivo domínio que terá que ser substituída na equação diferencial dada:

- $y=f(x)=\left(x^3+c\right)e^{-3x} \Rightarrow D_f=\Re$

- $$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\left[\underbrace{\left(x^3+c\right)\cdot e^{-3x}}_{(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'}\right]' = \left(x^3+c\right)'\cdot e^{-3x}+\left(x^3+c\right)\cdot\left(\underbrace{e^{-3x}}_{\left(e^u\right)'=u'\cdot e^u}\right)' =$$

$$=3x^2\cdot e^{-3x}+\left(x^3+c\right)\cdot(-3x)'\cdot e^{-3x} = 3x^2\cdot e^{-3x}+\left(x^3+c\right)\cdot(-3)\cdot e^{-3x} =$$

$$=3x^2\cdot e^{-3x}+\left(-3x^3-3c\right)\cdot e^{-3x} = \left(3x^2-3x^3-3c\right)\cdot e^{-3x} \Rightarrow D_{f'}=\Re$$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{dy}{dx}+3y=3x^2e^{-3x}$ teremos que:

$$\frac{dy}{dx}+3y=3x^2e^{-3x} \Leftrightarrow \left[\left(3x^2-3x^3-3c\right)\cdot e^{-3x}\right]+3\cdot\left[\left(x^3+c\right)\cdot e^{-3x}\right]=3x^2e^{-3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(3x^2-3x^3-3c\right)\cdot e^{-3x}\right]+\left[\left(3x^3+3c\right)\cdot e^{-3x}\right]=3x^2e^{-3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2\cdot e^{-3x}-3x^3\cdot e^{-3x}-3c\cdot e^{-3x}+3x^3\cdot e^{-3x}+3c\cdot e^{-3x}=3x^2e^{-3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2\cdot e^{-3x}=3x^2e^{-3x} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Verificada a}\\ \text{identidade}\end{array}\right\}$$

**d)** $f(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ **no intervalo** $I = \Re$**, onde** $c_1$ **e** $c_2$ **são constantes arbitrárias.**

**R:**

Vamos começar por determinar o domínio da função, e em seguida determinar as derivadas e respectivos domínios que terão que ser substituídas na equação diferencial dada:

- $y = f(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} \Rightarrow D_f = \Re$

- $$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \left(c_1 e^x - c_2 e^{-x}\right)' = \left[\underbrace{(c_1)'}_{=0} \cdot e^x + c_1 \cdot \underbrace{\left(e^x\right)'}_{=\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u}\right] - \left[\underbrace{(c_2)'}_{=0} \cdot e^{-x} + c_2 \cdot \underbrace{\left(e^{-x}\right)'}_{=\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u}\right] =$$

$$= \left[c_1 \cdot (x)' \cdot \left(e^x\right)\right] - \left[c_2 \cdot (-x)' \cdot \left(e^{-x}\right)\right] = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} \Rightarrow D_{f'} = \Re$$

- $$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \left(c_1 e^x + c_2 e^{-x}\right)' = \left[\underbrace{(c_1)'}_{=0} \cdot e^x + c_1 \cdot \underbrace{\left(e^x\right)'}_{=\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u}\right] + \left[\underbrace{(c_2)'}_{=0} \cdot e^{-x} + c_2 \cdot \underbrace{\left(e^{-x}\right)'}_{=\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u}\right] =$$

$$= \left[c_1 \cdot (x)' \cdot \left(e^x\right)\right] + \left[c_2 \cdot (-x)' \cdot \left(e^{-x}\right)\right] = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} \Rightarrow D_{f''} = \Re$$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \Leftrightarrow c_1 e^x - c_2 e^{-x} - \left(c_1 e^x - c_2 e^{-x}\right) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Verificada a} \\ \text{identidade} \end{Bmatrix}$$

**2. A função: $f(x)=\frac{x^2}{2}$ é uma solução da equação diferencial: $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}=1$? Em que intervalo da recta real?**

**R:**

Vamos começar por determinar o domínio da função, e em seguida determinar a derivada e respectivo domínio que terá que ser substituída na equação diferencial dada:

- $y = f(x)=\frac{x^2}{2} \Rightarrow D_f = \Re$

- $\frac{dy}{dx}= f'(x)=\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \left(\frac{1}{2}\cdot x^2\right)' = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)'}_{=0}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\left(x^2\right)'}_{\left(u^\alpha\right)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'} = \frac{1}{2}\cdot 2x = x \Rightarrow D_{f'} = \Re$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}=1$ teremos que:

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}(x)=1 \Leftrightarrow 1=1 \rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Verificada a}\\ \text{identidade}\end{matrix}\right\}$$

Daqui se conclui que a função $f(x)=\frac{x^2}{2}$ é solução da equação diferencial em todo o $\Re$.

**3. A função: $g(x) = x \cdot \ln(x)$ é uma solução da equação diferencial: $\frac{dy}{dx} = 1 + \ln(x)$? Em que intervalo da recta real?**

**R:**

Vamos começar por determinar o domínio da função, e em seguida determinar a derivada e respectivo domínio que terá que ser substituída na equação diferencial dada:

- $y = g(x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow D_g = \{x \in \Re : x > 0\} \Rightarrow D_g = ]0;+\infty[$

- $\frac{dy}{dx} = g^{'}(x) = (x \cdot \ln(x))^{'} = \underbrace{(x)^{'}}_{=1} \cdot \ln(x) + x \cdot \underbrace{(\ln(x))^{'}}_{(\ln(u))^{'} = \frac{u'}{u}} = \ln(x) + x \cdot \frac{(x)^{'}}{x} = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow D_{g^{'}} = \{x \in \Re : x > 0\} \Rightarrow D_{g^{'}} = ]0;+\infty[$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{dy}{dx} = 1 + \ln(x)$ teremos que:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) + 1 = 1 + \ln(x) \rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Verificada a} \\ \text{identidade} \end{Bmatrix}$$

Daqui se conclui que a função $g(x) = x \cdot \ln(x)$ é solução da equação diferencial em $]0;+\infty[$.

**4. Determine o valor da constante $\beta$ para que a função: $\varphi(x) = x^{\beta}$ seja solução da equação: $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ no intervalo $I = ]0;+\infty[$.**

**R:**

Vamos começar por determinar o domínio da função, e em seguida determinar as derivadas e respectivos domínios que terão que ser substituídas na equação diferencial dada:

- $y = \varphi(x) = x^{\beta} \Rightarrow D_f = \Re$

- $\dfrac{dy}{dx} = \varphi'(x) = \underbrace{\left(x^{\beta}\right)'}_{\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'} = \beta \cdot x^{\beta-1} \cdot (x)' = \beta \cdot x^{\beta-1} \Rightarrow D_{f'} = \Re$

- $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(x) = \underbrace{\left(\beta \cdot x^{\beta-1}\right)'}_{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} = \underbrace{(\beta)'}_{=0} \cdot x^{\beta-1} + \beta \cdot \underbrace{\left(x^{\beta-1}\right)'}_{\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'} = \beta \cdot (\beta - 1) \cdot x^{(\beta-1)-1} \cdot (x)' =$

  $= \left(\beta^2 - \beta\right) \cdot x^{\beta-2} \Rightarrow D_{f''} = \Re$

Assim sendo, por substituição em: $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ teremos que:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left[\left(\beta^2 - \beta\right) \cdot x^{\beta-2}\right] - 4x \cdot \left(\beta \cdot x^{\beta-1}\right) + 4 \cdot \left(x^{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\beta^2 - \beta\right) \cdot x^{\beta-2+2}\right] - 4 \cdot \left(\beta \cdot x^{\beta-1+1}\right) + 4 \cdot \left(x^{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\beta^2 - \beta\right) \cdot x^{\beta}\right] - 4 \cdot \left(\beta \cdot x^{\beta}\right) + 4 \cdot \left(x^{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\beta^2 - \beta - 4 \cdot \beta + 4\right) \cdot x^{\beta} = 0 \Leftrightarrow \left(\beta^2 - 5\beta + 4\right) \cdot x^{\beta} = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 5\beta + 4 = 0 \wedge x^{\beta} \neq 0 \text{ [1]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \wedge x^{\beta} \neq 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \wedge x^{\beta} \neq 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{5 \pm 3}{2} \wedge x^{\beta} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = \dfrac{5+3}{2} = 4 \\ \beta = \dfrac{5-3}{2} = 1 \end{array} \right\} \wedge x^{\beta} \neq 0$$

[1] A formula resolvente para uma equação do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$ é dada por: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

**5. Mostre que: $y = x \cdot \ln(x)$ verifica formalmente a equação diferencial: $x\dfrac{dy}{dx} = x + y$ mas não é uma solução explícita desta equação diferencial no intervalo $]-1;1[$ .**

**R:**

Vamos começar por determinar o domínio da função, e em seguida determinar a derivada e respectivo domínio que terá que ser substituída na equação diferencial dada:

- $y = f(x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow D_f = \{x \in \Re : x > 0\} \Rightarrow D_f = ]0;+\infty[$

- $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = (x \cdot \ln(x))' = \underbrace{(x)'}_{=1} \cdot \ln(x) + x \cdot \underbrace{(\ln(x))'}_{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}} = \ln(x) + x \cdot \dfrac{(x)'}{x} = \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow D_{f'} = \{x \in \Re : x > 0\} \Rightarrow D_{f'} = ]0;+\infty[$

Assim sendo, por substituição em: $x\dfrac{dy}{dx} = x + y$ teremos que:

$$x\frac{dy}{dx} = x + y \Leftrightarrow x \cdot (\ln(x) + 1) = x + x \cdot \ln(x) \Leftrightarrow x \cdot \ln(x) + x = x + x \cdot \ln(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \ln(x) + x - x - x \cdot \ln(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Verificada a} \\ \text{identidade} \end{Bmatrix}$$

Daqui se conclui que a função $y = x \cdot \ln(x)$ verifica formalmente a equação diferencial, mas não é uma solução explicita dessa equação porque o intervalo $]-1;1[$ não é um sub-intervalo de $]0;+\infty[$ .