Ficha 6: Exercício 6

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} & , \quad t > 0 \ , \ 0 < x < \pi \\ w(t,0) = 0 \ , \ w(t,\pi) = 0 & , \quad t > 0 \\ w(0,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{5} \frac{\operatorname{sen}\left((2n+1)x\right)}{2n+1} & , \quad 0 < x < \pi \end{cases} \tag{3}$$

Vamos procurar soluções não nulas da forma $w(x,t) = X(x)T(t)$ para a equação diferencial parcial e condições de fronteira (que são homogéneas). Substituindo na equação diferencial, obtemos:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade, válida para qualquer $t > 0$ e $0 < x < \pi$, é equivalente ao sistema seguinte

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & \text{para } 0 < x < \pi \\ T'(t) = \lambda T(t) & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

onde λ é um número real.

Das condições de fronteira, $w(t,0) = w(t,\pi) = 0$, resulta que as soluções não nulas da equação diferencial parcial da forma $T(t)X(x)$ devem verificar

$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o problema de valores próprios (para $x \in [0,\pi]$),

$$X'' - \lambda X = 0 \quad ; \quad X(0) = X(\pi) = 0, \tag{4}$$

obtém-se

$$\lambda_n = -n^2 \quad , \quad X_n(x) = \operatorname{sen}(nx) \quad , \quad \text{com } n = 1,2,3,\ldots$$

Substituindo os valores de λ — para os quais se obteve soluções não nulas de (4) — na equação para T, obtém-se:

$$T' = -n^2 T \quad ; \quad \text{com } n = 0,1,2,3,\ldots$$

A solução geral desta equação é $T(t) = De^{-n^2 t}$; para cada $n = 0,1,2,3,\ldots$ podemos, a menos de combinação linear, tomar

$$T_n(t) = e^{-n^2 t}.$$

As soluções da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira são (a menos de produto por uma constante) funções da forma:

$$w_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-n^2 t}\operatorname{sen}(nx) \quad , \quad \text{com } n = 1,2,3,\ldots$$

Procuramos agora uma solução formal do problema (2) que seja uma sobreposição das soluções acima obtidas; isto é:

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t}\operatorname{sen}(nx)$$

Utilizando a condição inicial do problema (2),

$$w(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2k+1}\operatorname{sen}\left((2k+1)x\right),$$

resulta que:

$$\begin{array}{lll} A_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} & \text{para} & k \in \{1,2,3,4,5\} \\ A_n = 0 & \text{para} & n \notin \{3,5,7,9,11\} \end{array}$$

Assim sendo, a solução de (1) é:

$$u(x,t) = v(x) + w(t,x) = -x^3 + \pi^2 x + \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)^2 t} \operatorname{sen}\left((2k+1)x\right)$$