Exercícios de MATLAB

1 Introdução ao MATLAB

1.1 Escreva os seguintes vetores ou matrizes:

a) $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

c) um vetor linha com os números naturais menores ou iguais a 10;

d) um vetor linha com os números pares naturais menores ou iguais a 12;

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

1.2 Com base na matriz A da pergunta anterior, verifique o que resulta dos seguintes comandos:

a) `B=A(2:3,1:2)`;

b) `C=A(:,1:2)`;

c) `D=[A;4 4 4]`;

d) `E=D([2 4],:)`;

e) `F=[0:3:9;2:2:8;5:5:20]`.

1.3 Gere as seguintes matrizes:

a) a matriz identidade 5×5;

b) uma matriz 3×3 com elementos aleatórios entre 0 e 1;

c) uma matriz 4×3 com elementos aleatórios entre -1 e 1;

d) uma matriz nula 2×3;

e) uma matriz 2×2 com todos os elementos iguais a 1;

f) uma matriz 10×10 com todos os elementos iguais a 10;

g) uma matriz com os elementos da diagonal da matriz A da pergunta 1 e os restantes iguais a zero.

1.4 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, a matriz B que consiste numa matriz de dimensão 3×3, com todos os elementos iguais a um, o vetor $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e o vetor $b = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Efetue as seguintes operações.

a) $A + B$;

b) $A \times B$;

c) o produto de cada um dos elementos de a por b;

d) o produto de cada um dos elementos de A por B.

1.5 Escreva um programa que lê dois números e escreve a sua soma e o seu produto.

1.6 Escreva um programa que lê uma sequência de n números e escreve a sua soma e o seu produto.

1.7 Escreva um programa que lê dois números e escreve o maior deles.

2 Sistemas de equações lineares

2.1 Resolva os seguintes sistemas através de um método direto e estável.

a) $$\begin{cases} 4x_1 + 13x_2 + 2x_3 = -15 \\ -8x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6.5x_2 + 5.5x_3 = -3 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3.0001x_2 = 0.9999 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3.0001x_2 = 2 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} -30x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 10 \\ 10x_1 - 2.9999x_2 - 2.9999x_3 = -3.3333 \\ 6x_1 - 6x_2 - 20x_3 = 10 \end{cases}$$

2.2 Calcule o determinante e a inversa das seguintes matrizes:

a) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3.0001 \end{pmatrix}$$

b) $$B = \begin{pmatrix} -602.9 & -0.4762 & 301.0 \\ -248.8 & -0.1048 & 124.2 \\ -200.6 & 0 & 101.7 \end{pmatrix}$$

c) $$C = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

2.3 Considere a matriz A e o vetor b.

$$\begin{pmatrix} 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 \\ 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 14.6 \\ -11.4 \\ 14.0 \\ -0.9 \end{pmatrix}.$$

a) Resolva o sistema correspondente por um método direto e estável.

b) Calcule o determinante de A por um método direto e estável.

c) Calcule A^{-1} usando o método de eliminação de Gauss com pivotagem parcial.

2.4 Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 & = & 10 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 & = & 15 \\ x_1 - 2x_2 + 8x_3 + x_4 & = & 8 \\ -x_3 + 9x_4 + 2x_5 & = & 10 \\ x_1 + x_2 - x_4 + 7x_5 & = & 8 \end{cases}$$

a) Resolva o sistema por EGPP.

b) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes.

c) Calcule a inversa da matriz dos coeficientes.

3 Interpolação polinomial – polinómio interpoador de Newton

3.1 Dada a tabela de valores de uma função $f(x)$,

x_i	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
f_i	0.0639	0.0800	0.0988	0.1203	0.1442	0.1714	0.2010	0.2330	0.2673	0.3036	0.3414

Para aproximar $f(5.44)$,

a) apresente o polinómio interpolador de grau 2 baseado em diferenças divididas;

b) com base no polinómio anterior, estime $f(5.44)$;

c) apresente o polinómio interpolador de grau 5 baseado em diferenças divididas;

d) com base no polinómio anterior, estime $f(5.44)$;

e) apresente o polinómio interpolador de grau 10 baseado em diferenças divididas;

f) com base no polinómio anterior, estime $f(5.44)$.

3.2 Considere a tabela seguinte de 12 valores de $f(x)$.

x_i	0.00	0.30	0.50	0.70	0.90	1.00	1.20	1.50	1.60	1.75	2.00	2.10
f_i	0.0000	0.2955	0.4794	0.6442	0.7833	0.8415	0.9320	0.9975	0.9996	0.9840	0.9093	0.8632

Para aproximar $f(1.57)$

a) apresente o polinómio interpolador baseado em diferenças divididas usando quatro pontos;

b) com base no polinómio anterior, estime $f(1.57)$;

c) apresente o polinómio interpolador baseado em diferenças divididas usando seis pontos;

d) com base no polinómio anterior, estime $f(1.57)$;

e) apresente o polinómio interpolador baseado em diferenças divididas usando 12 pontos;

f) com base no polinómio anterior, estime $f(1.57)$;

g) represente graficamente os pontos e todos os polinómios calculados.

3.3 A velocidade de ascensão de um foguetão, $v(t)$, é conhecida para diferentes tempos conforme a seguinte tabela. Esta velocidade pode ser estimada a partir de um polinómio interpolador de grau três.

t(s)	0	5	10	15	20	30
$v(t)$(m/s)	0	106.8	227.04	362.78	517.35	901.67

a) Cacule o polinómio e estime a velocidade do foguetão para $t = 8$ s.

b) Represente graficamente os pontos o polinómio calculado.

3.4 Considere um reservatório de água com 2.1 m de altura. No início, o reservatório está cheio de água. Num certo instante, abre-se a a válvula e o reservatório começa a ser esvaziado. A altura (em metros) de água do reservatório, t horas depois de este ter começado a ser esvaziado, é dada por $h(t)$, de acordo com a tabela

instante, t_i	0	1	4	7	8	10	14
altura de água, $\mathrm{h(t)}_i$	2.1	2.0	1.8	1.5	1.4	1.1	0

Pretende estimar-se a altura de água no reservatório ao fim de 5h.

a) apresente o polinómio interpolador de grau 2 baseado em diferenças divididas;

b) com base no polinómio anterior, estime $f(5)$;

c) apresente o polinómio interpolador de grau 5 baseado em diferenças divididas;

d) com base no polinómio anterior, estime $f(5)$;

e) apresente o polinómio interpolador de grau 6 baseado em diferenças divididas;

f) com base no polinómio anterior, estime $f(5)$.

g) represente graficamente os pontos e todos os polinómios calculados.

4 Splines

4.1 Considerando a função $f(x)$ dada pela tabela

x_i	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
f_i	0.0639	0.0800	0.0988	0.1203	0.1442	0.1714	0.2010	0.2331	0.2673	0.3036	0.3414

qual o valor aproximado da função no ponto $x = 5.45$

a) usando uma 'spline' cúbica natural?

$s_3(x) =$

$f(5.45) \approx s_3(5.45) =$

b) usando uma 'spline' cúbica completa?

$s_3(x) =$

$f(5.45) \approx s_3(5.45) =$

4.2 De uma tabela de logaritmos obteve-se o seguinte quadro de valores.

x_i	1	1.5	2	3	3.5
$\ln(x_i)$	0	0.4055	0.6931	1.0986	1.2528

a) Usando uma função 'spline' cúbica natural calcule uma aproximação a $\ln(2.5)$.

$s_3(x) =$

$f(2.5) \approx s_3(2.5) =$

b) Repita a alínea anterior, mas agora usando uma 'spline' cúbica completa.

$s_3(x) =$

$f(2.5) \approx s_3(2.5) =$

4.3 Foram registados os consumos de combustível $f(x_i)$, de um automóvel a arrancar em determinados instantes, x_i (em segundos).

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	3.6	6.6	9.6	9.8	10
f_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.7	0.8

a) Usando uma função 'spline' cúbica natural calcule o consumo no instante de tempo $x_i = 5$ s.

$s_3(x) =$

$f(5) \approx s_3(5) =$

b) Repita a alínea anterior, mas agora usando uma 'spline' cúbica completa.

$s_3(x) =$

$f(5) \approx s_3(5) =$

5 Integração numérica

5.1 Dada a tabela de valores da função $f(x)$

x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0
f_i	-4271	-2522	-499	1795	4358	7187	10279	13633	17247

Calcule a melhor aproximação ao integral

$$\int_{0.0}^{4.0} f(x)dx$$

usando toda a informação da tabela.

5.2 Calcule uma aproximação ao integral

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx.$$

5.3 Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x)$:

x_i	-1.0	-0.95	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.2	0.6	1.0	1.4
f_i	-1.000	-0.05	1.00	0.980	0.95	0.900	0.850	0.200	-0.500	-2.000

a) Calcule numericamente $\int_{-1.0}^{1.4} f(x)dx$ usando todos os pontos da tabela.

b) Calcule o mesmo integral usando um valor de h constante, deixando de fora o menor número possível de pontos.

5.4 A função $F(t)$ surge na determinação da tensão à superfície de um líquido que rodeia uma bolha esférica de gás:

$$F(t) = \int_0^t \frac{P(x)}{Q(x)}dx, \quad \text{para } 0 \le t \le 1$$

em que

$$P(x) = 3 + 3x + x^2$$
$$Q(x) = 3 + 6x + 6x^2 + 2x^3.$$

Determine $F(1)$.

6 Equações e sistemas não lineares

6.1 Calcule um zero da função

$$f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2,$$

usando $x^{(1)} = 2$.

6.2 Resolva a seguinte equação não linear

$$\cos(x) - \cos(3.1x) = 0.$$

Considere

a) $x^{(1)} = -1$;

b) $x^{(1)} = 1$;

c) $x^{(1)} = -10$;

d) $x^{(1)} = 10$.

6.3 Resolva o seguinte sistema de equações não lineares nas variáveis x_1 e x_2.

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = 2x_1 \\ \cos\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right) = 2x_2 \end{cases}$$

a) Considere uma aproximação inicial $x^{(1)} = (0,0)^T$;

b) Repita com $x^{(1)} = (1,2)^T$

6.4 Determine a solução do sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2^2 + x_2 = 0 \\ e^{x_3} - 1 = 0 \end{cases}$$

usando como aproximação inicial o vetor $x^{(1)} = (1,1,-1)^T$.

7 Mínimos quadrados

7.1 Considere a seguinte tabela:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
f_i	1.000	1.221	1.492	1.882	2.226	2.718	3.320	4.056

Com base nos mínimos quadrados:

a) Escreva um polinómio de grau 3.

b) qual a aproximação para o ponto $x = 0.5$, usando o polinómio da alínea anterior?

c) qual o resíduo do erro?

7.2 A docente responsável pela UC de MN&ONL registou, para 8 alunos, os resultados obtidos num teste e a respetiva classificação final obtida.

teste	1.2	1.75	1.1	2.0	0.5	0.8	1.0	1.5
classificação final	16	18	16	19	10	11	14	16

a) Determine, no sentido dos mínimos quadrados, a reta que melhor aproxima os dados da tabela.

b) Qual o resíduo do erro obtido?

c) Qual será a classificação previsível para um aluno que tenha neste teste uma classificação de 1.6?

7.3 Considerem-se as seguintes funções de aproximação

$$M(x) = c_1 + c_2\cos(x) + c_3\sin(x)$$

$$N(x) = c_1 e^x + c_1\frac{1}{x}$$

$$O(x) = c_1 + c_2 x + \frac{c_3}{x}$$

$$Q(x) = c_1 x + c_2 e^x$$

a) Calcule os coeficientes dos vários modelos (e construa-os) que melhor se ajustam à função $f(x)$ dada pela tabela seguinte, no sentido dos mínimos quadrados.

x_i	-1.00	-0.95	-0.85	-0.80	0.20	0.50	0.90
f_i	-1.00	-0.05	0.90	1.00	0.90	0.50	-0.30

b) Estime $f(0.6)$ para cada um deles.

c) Indique o resíduo para cada um dos modelos.

d) Qual dos modelos é melhor, no sentido dos mínimos quadrados? Justifique.

8 fminunc

8.1 Escreva os seguintes vetores ou matrizes:

8.2 Resolva o problema *Aluffi-Pentini*,

$$\min_x f(x) \equiv 0.25x_1^4 - 0.5x_1^2 + 0.1x_1 + 0.5x_2^2,$$

considerando o valor inicial $(-1, 0.5)$,

a) usando o método quasi-Newton sem fornecer as primeiras derivadas da função objectivo.

b) usando o método quasi-Newton com procura unidimensional, fornecendo as primeiras derivadas da função objectivo.

c) usando o método de Newton com regiões de confiança, fornecendo as primeiras derivadas da função objectivo.

d) usando o método de Newton com regiões de confiança, fornecendo as primeiras e segundas derivadas da função objectivo.

8.3 No planeamento da produção de dois produtos, uma determinada companhia espera obter lucros iguais a P:

$$P(x_1, x_2) = \alpha_1(1 - e^{-\beta_1 x_1}) + \alpha_2(1 - e^{-\beta_2 x_2}) + \alpha_3(1 - e^{-\beta_3 x_1 x_2}) - x_1 - x_2,$$

em que x_1 é a quantia gasta para produzir e promover o produto 1, x_2 é a quantia gasta para produzir e promover o produto 2 e os α_i e β_i são constantes definidas. P, x_1 e x_2 estão em unidades de 10^5 euros. Calcule o lucro máximo para as seguintes condições:

$$\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 4,\ \alpha_3 = 1,\ \beta_1 = 1.2,\ \beta_2 = 1.5,\ \text{ e } \beta_3 = 1.$$

(a) Resolva o problema usando o método quasi-Newton sem fornecer as primeiras derivadas da função objectivo. Considere a aproximação inicial $(1, 1)$.

(b) Resolva o problema usando o método quasi-Newton com procura unidimensional, fornecendo as primeiras derivadas da função objectivo. Considere a aproximação inicial da alínea anterior.

(c) Resolva novamente o problema mas seleccione agora o método de Newton com regiões de confiança.

8.4 Suponha que pretendia representar um número positivo A na forma de um produto de quatro factores positivos x_1, x_2, x_3, x_4. Para $A = 2401$, determine esses factores de tal forma que a sua soma seja a menor possível.

Formule o problema como um problema de optimização sem restrições em função das três variáveis x_1, x_2 e x_3.

A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2, x_3)^{(1)} = (6, 7, 5)$, use o método quasi-Newton (com fórmula DFP), para calcular esses factores. Na paragem do processo iterativo use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.0001$.

8.5 Resolva o problema *Epistatic Michalewicz*

$$\min_x f(x) \equiv -\sum_{i=1}^{n} \sin(y_i) \left(\sin\left(\frac{i y_i^2}{\pi} \right) \right)^{2m}$$

$$y_i = \begin{cases} x_i \cos(\theta) - x_{i+1} \sin(\theta), & i = 1, 3, 5, \ldots, < n \\ x_i \sin(\theta) + x_{i+1} \cos(\theta), & i = 2, 4, 6, \ldots, < n \\ x_i & i = n \end{cases}$$

pelo método quasi-Newton (sem fornecer derivadas) para $n = 5$ e para $n = 10$. Considere $\theta = \frac{\pi}{6}$, $m = 10$ e o valor inicial

$$x^{(1)} = \begin{cases} 2, & i = 1, 3, 5, \ldots, \leq n \\ 1, & i = 2, 4, 6, \ldots, \leq n \end{cases}$$

8.6 Considere o problema *Griewank*

$$\min_x f(x) \equiv 1 + \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \prod_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}} \right).$$

Resolva-o pelo método quasi-Newton com fórmula DFP para $n = 10$ e $n = 25$. Considere o valor inicial $x^{(1)} = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

9 fminsearch

9.1 Resolva o problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)$$

com $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_2 - 1|\}$. Como aproximação inicial considere o ponto $(1, 1)$.

9.2 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) \equiv \max\{x_1^2 + x_2^4, (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2, 2e^{-x_1 + x_2}\}.$$

A partir da aproximação inicial $x = (1, -0.1)^T$, calcule a solução, usando o método mais adequado. Repita o processo com a seguinte aproximação inicial $x = (2, 2)^T$.

Resolva novamente o problema a partir de $x = (-10, -10)^T$.

Com qual das aproximações iniciais o processo exigiu menos cálculos da função objectivo?

9.3 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \equiv n \left(\max_{1 \leq i \leq n} x_i \right) - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Para $n = 2$ e a partir da aproximação inicial $x_i = i - (\frac{n}{2} + 0.5)$, $i = 1, \ldots, n$, calcule a solução.

Repita a resolução considerando agora $n = 5$ e TolX= 10^{-20}. Resolva ainda acrescentando a opção MaxFunEvals=10000. Acrescente ainda a opção MaxIter=10000. Comente os resultados.

9.4 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \equiv \prod_{i=1}^{n} x_i - \left(\min_{1 \leq i \leq n} x_i \right).$$

Para $n = 2$ e a partir da aproximação inicial $x_i = i - (\frac{n}{2} + 0.5)$, $i = 1, \ldots, n$, calcule a solução.

Repita a resolução considerando agora $n = 5$ e MaxFunEvals= 5000.

9.5 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) \equiv \max\left\{x_1^2 + x_2^2,\ x_1^2 + x_2^2 + \omega(-4x_1 - x_2 + 4),\ x_1^2 + x_2^2 + \omega(-x_1 - 2x_2 + 6)\right\}.$$

A partir da aproximação inicial $x = (-1, 5)^T$, calcule a solução, usando o método mais adequado e considerando $\omega = 500$. A partir da mesma aproximação inicial, volte a resolver o problema, mas agora fazendo $\omega = 1000$.

Repita mais uma vez considerando $\omega = 1500$.

Para que valor de ω, o processo iterativo é mais eficiente?

9.6 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x \in \mathbb{R}^4} f(x) \equiv \max_{1 \leq i \leq 21} |u_i(x)|$$

em que

$$u_i(x) = x_4 - (x_1 t_i^2 + x_2 t_i + x_3)^2 - \sqrt{t_i}$$

para $1 \leq i \leq 21$.

A partir da aproximação inicial $x_i = 1$, $i = 1, \ldots, 4$, calcule a solução, usando o método mais adequado e os seguintes valores $t_i = 0.25 + 0.75(i-1)/20$, $i = 1, \ldots, 21$.

Repita o processo mas agora considere os seguintes parâmetros $t_i = 0.2i$, $i = 1, \ldots, 21$.