DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

Função de Probabilidade

Uma função pode servir como função de probabilidade de uma variável aleatória discreta X se e só se os seus valores $f(x)$ satisfazem as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0$ para qualquer valor do seu domínio;
2. $\sum f(x) = 1$ onde o somatório se estende a todos os valores no seu domínio.

Exemplos…

Exemplos

1. Qual a probabilidade de, no jogo da roleta, se obter o número 13?

2. Como gerar uma sequência de números aleatórios?

(por exemplo: 10480 15011 01536 02011 81647 91646)

Uniforme

Uma variável aleatória X segue uma distribuição uniforme discreta se e só se a sua distribuição de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{k} \qquad \begin{array}{l} x = x_1, x_2, \ldots, , x_k \\ x_i \neq x_j, i \neq j \end{array}$$

$$\mu = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \qquad \sigma^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \mu\right)^2$$

Exemplos…

Exemplos

1. Uma moeda é lançada 4 vezes. Qual a probabilidade de obter exactamente uma cara?

2. Um dado é lançado 10 vezes. Qual a probabilidade de obter exactamente 3 ases?

3. Uma caixa contém 1 ficha vermelha e 9 azuis. 5 fichas são retiradas sucessivamente com reposição. Qual a probabilidade de obter exactamente duas fichas vermelhas?

V V A A A	1/10	1/10	9/10	9/10	9/10
A V A A V	9/10	1/10	9/10	9/10	1/10

(…)

Todas as combinações possíveis: $C^n{}_x$

Binomial

- Variável dicotómica: masculino ou feminino; vida ou morte, doente ou são; fuma ou não fuma; sucesso ou falha.

- Acontecimentos mutuamente exclusivos, independentes com uma probabilidade de sucesso p.

Exemplo…

Exemplos

Assuma que a proporção de fumadores na população geral é de 30%. Suponha que duas pessoas são seleccionadas aleatoriamente da população. Quais são os resultados possíveis da variável aleatória X, o número de pessoas que fumam? Quais as respectivas probabilidades?

1ª Pessoa	2ª Pessoa	Prob.	Nº Fumadores
0	0	$(1-p)(1-p)$	0
1	0	$p(1-p)$	1
0	1	$(1-p)p$	1
1	1	pp	2

Nº Fumadores	Prob.
0	0.49
1	0.42
2	0.09

Binomial

Uma variável aleatória X segue uma distribuição binomial se e só se a sua distribuição de probabilidade é dada por

$$f\left(x;n,p\right)=C_x^n p^x\left(1-p\right)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ldots,n$$

$$\mu=np \qquad\qquad \sigma^2=np\left(1-p\right)$$

Binomial

- Número fixo de tentativas n, cada uma com um de dois resultados mutuamente exclusivos.
- Os resultados são independentes.
- A probabilidade de sucesso p é constante em cada tentativa.

Exemplo…

Exemplo

3. Uma caixa contém 1 ficha vermelha e 9 azuis. 5 fichas são retiradas sucessivamente com reposição. Qual a probabilidade de obter exactamente duas fichas vermelhas?

n=5, x=2, p=0.1

$$f(x;n,p) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

$$P(X=2) = C_2^5 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(1-\frac{1}{10}\right)^{5-3} = 0.0729$$

Exemplo…

Exemplo

Seja X uma variável aleatória que representa o número de pessoas portadoras da doença de Gaucher na população portuguesa. A probabilidade de um indivíduo ser portador é 0.00043.

Suponha que pretende saber, numa determinada região com 10000 indivíduos, quantos serão portadores da doença de Gaucher.

Poisson

Seja X uma variável aleatória que representa o número de ocorrências num dado intervalo (número de acidentes, número de chamadas telefónicas, número de defeitos).

A variável X pode assumir qualquer valor entre zero e infinito.

Seja λ uma constante que representa o número médio de ocorrências de um acontecimento num dado intervalo.

Poisson

Uma variável aleatória X segue a distribuição de Poisson se e só se a sua distribuição de probabilidade é dada por

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu = \lambda \qquad \sigma^2 = \lambda$$

Poisson

- A probabilidade da ocorrência de um único evento num dado intervalo é proporcional ao comprimento do intervalo.

- Teoricamente, dentro de um único intervalo podem ocorrer um número infinito de eventos.

- Os eventos ocorrem de forma independente, quer dentro do mesmo intervalo quer em intervalos consecutivos.

Exemplo…

Exemplo

Seja X uma variável aleatória que representa o número de pessoas portadoras da doença de Gaucher na população portuguesa. A probabilidade de um indivíduo ser portador é 0.00043.

Suponha que pretende saber, numa determinada região com 10000 indivíduos, quantos serão portadores da doença de Gaucher.

Exemplo…

Exemplo

$$\lambda = np$$

$$\lambda = (10000)(0.00043) = 4.3$$

$$P(X=0) = \frac{e^{-4.3}(4.3)^0}{0!} = 0.0136$$

$$P(X=1) = \frac{e^{-4.3}(4.3)^1}{1!} = 0.0583$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-4.3}(4.3)^2}{2!} = 0.1254$$

$$P(X=3) = \frac{e^{-4.3}(4.3)^3}{3!} = 0.1798$$

$$P(X=4) = \frac{e^{-4.3}(4.3)^4}{4!} = 0.1933$$

$$P(X=5) = \frac{e^{-4.3}(4.3)^5}{5!} = 0.1662$$

$$P(X=6) = \frac{e^{-4.3}(4.3)^6}{6!} = 0.1191$$

$$P(X=7) = \frac{e^{-4.3}(4.3)^7}{7!} = 0.0732$$

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 0.0710$$

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

Exemplos

Exemplos

Seleccionar um ponto de amostragem do asfalto de uma dada estrada.

Escolher um número real entre 0 e 1.

Uma fábrica produz folhas de cartão com uma espessura uniforme entre 0.8 e 1.2 cm. Qual a percentagem de folhas abaixo de 1 cm?

Uniforme

Uma variável aleatória contínua segue a distribuição uniforme se e só se a sua função densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{\beta + \alpha}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$$

Exemplo…

Exemplo

Uma fábrica produz folhas de cartão com uma espessura uniforme entre 0.8 e 1.2 cm. Qual a percentagem de folhas abaixo de 1 cm?

$$P(X<1)=\int_{0.8}^{1}\frac{1}{1.2-0.8}dx=\frac{1}{0.4}x\Big|_{0.8}^{1}=\frac{0.2}{0.4}=0.5$$

Exemplos…

Exemplos

Um componente electrónico requer, em média, uma reparação de 2 em 2 anos. Qual a probabilidade de que funcione por pelo menos 3 anos?

Sabendo que o componente dura há já dois anos, qual a probabilidade de funcionar durante mais um ano?

Exponencial

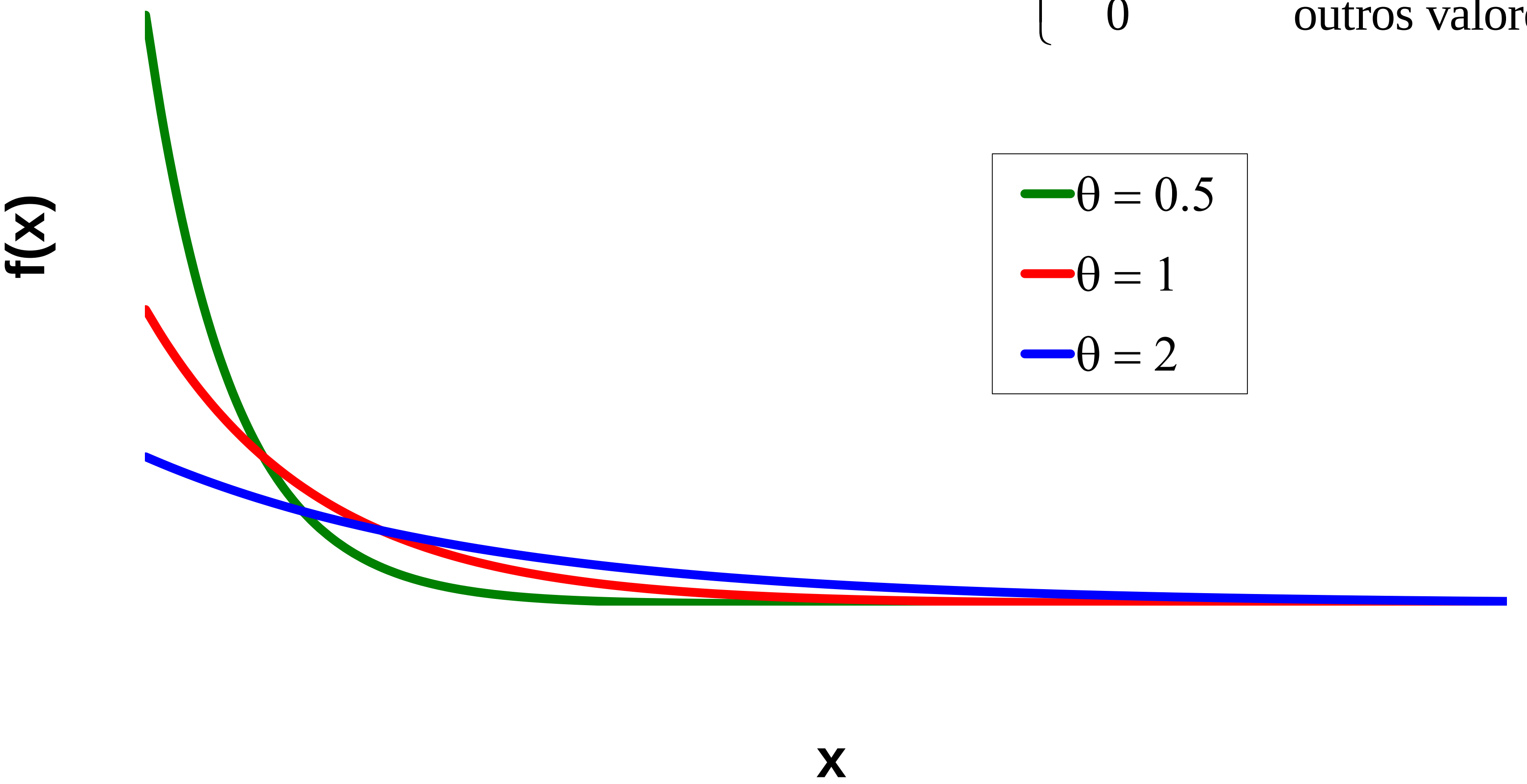
Uma variável aleatória segue a distribuição exponencial se e só se a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & x > 0, \theta > 0 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

$$\mu = \theta \qquad \sigma^2 = \theta^2$$

Exponencial

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & x > 0, \theta > 0 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$



Exemplo…

Exemplo

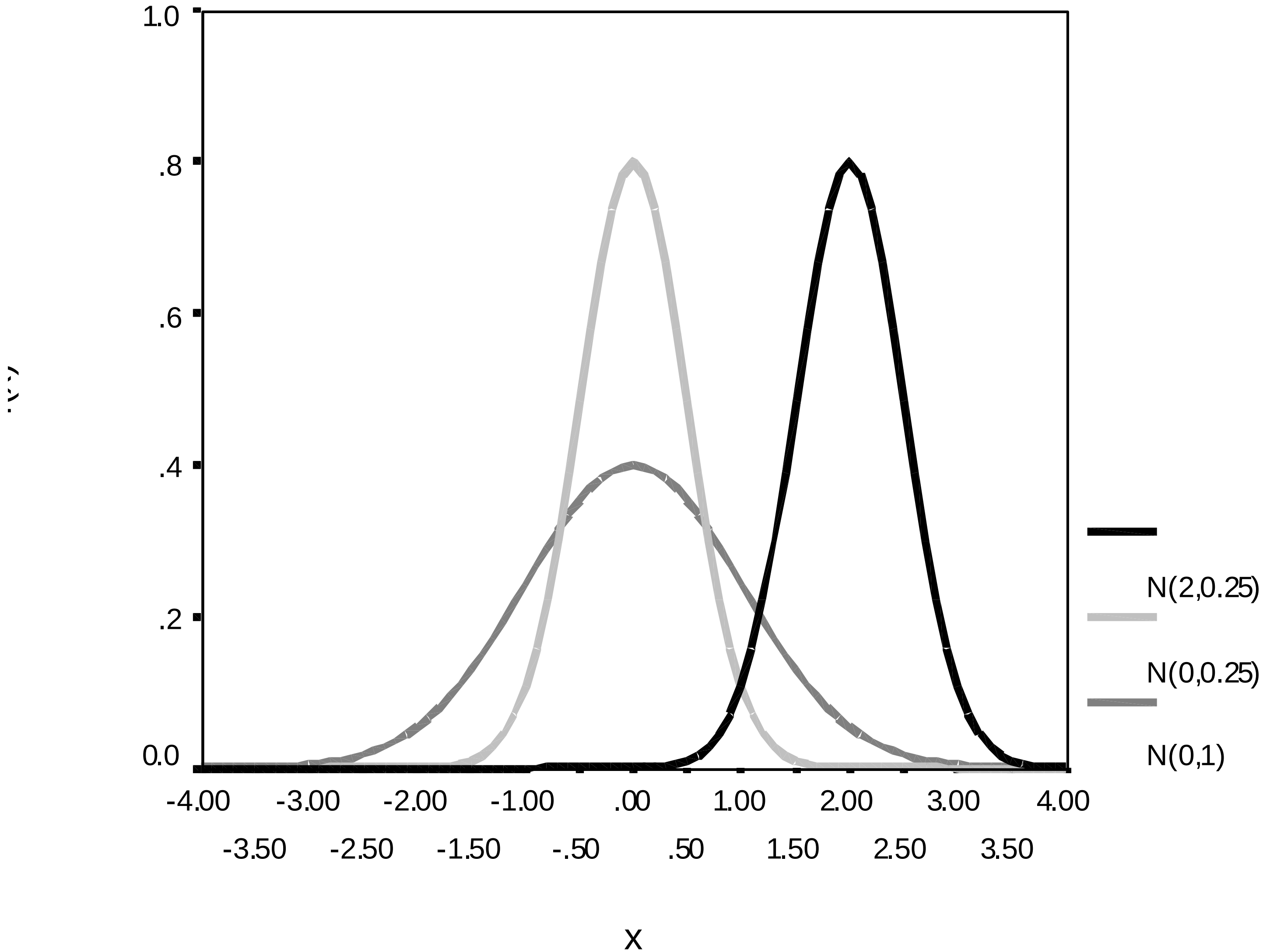
Um componente electrónico requer, em média, uma reparação de 2 em 2 anos. Qual a probabilidade de que funcione por pelo menos 3 anos?

$$P(X>3)=1-P(X<3)=1-\int_0^3 \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx=1-\left(-e^{-\frac{x}{2}}\right)\Big|_0^3=e^{-\frac{3}{2}}=0.2231$$

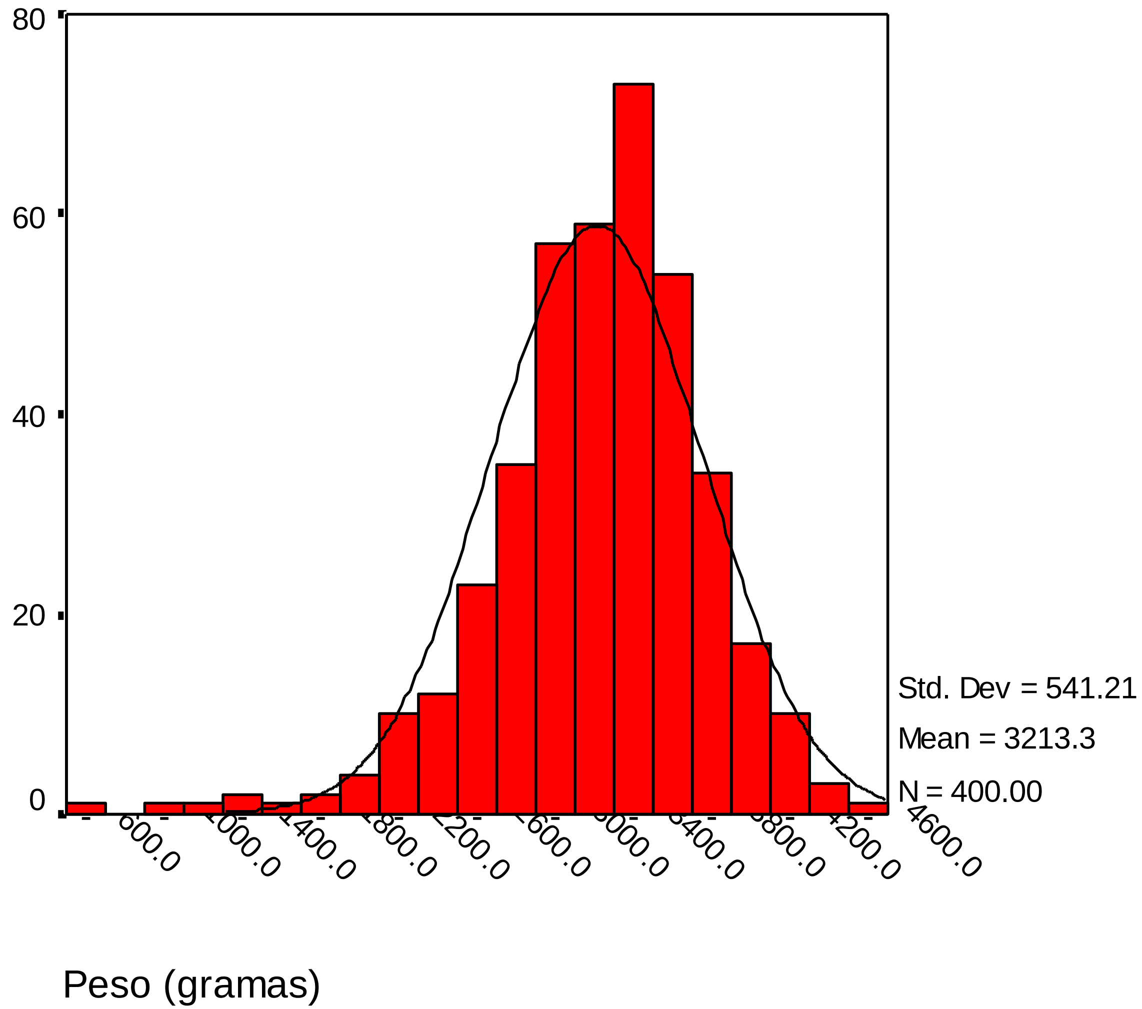
Sabendo que o componente dura há já dois anos, qual a probabilidade de funcionar durante mais um ano?

$$P(X>3\,|\,X>2)=\frac{P(X>3\cap X>2)}{P(X>2)}=\frac{P(X>3)}{P(X>2)}=\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{2}{2}}}=e^{-\frac{1}{2}}=0.6065$$

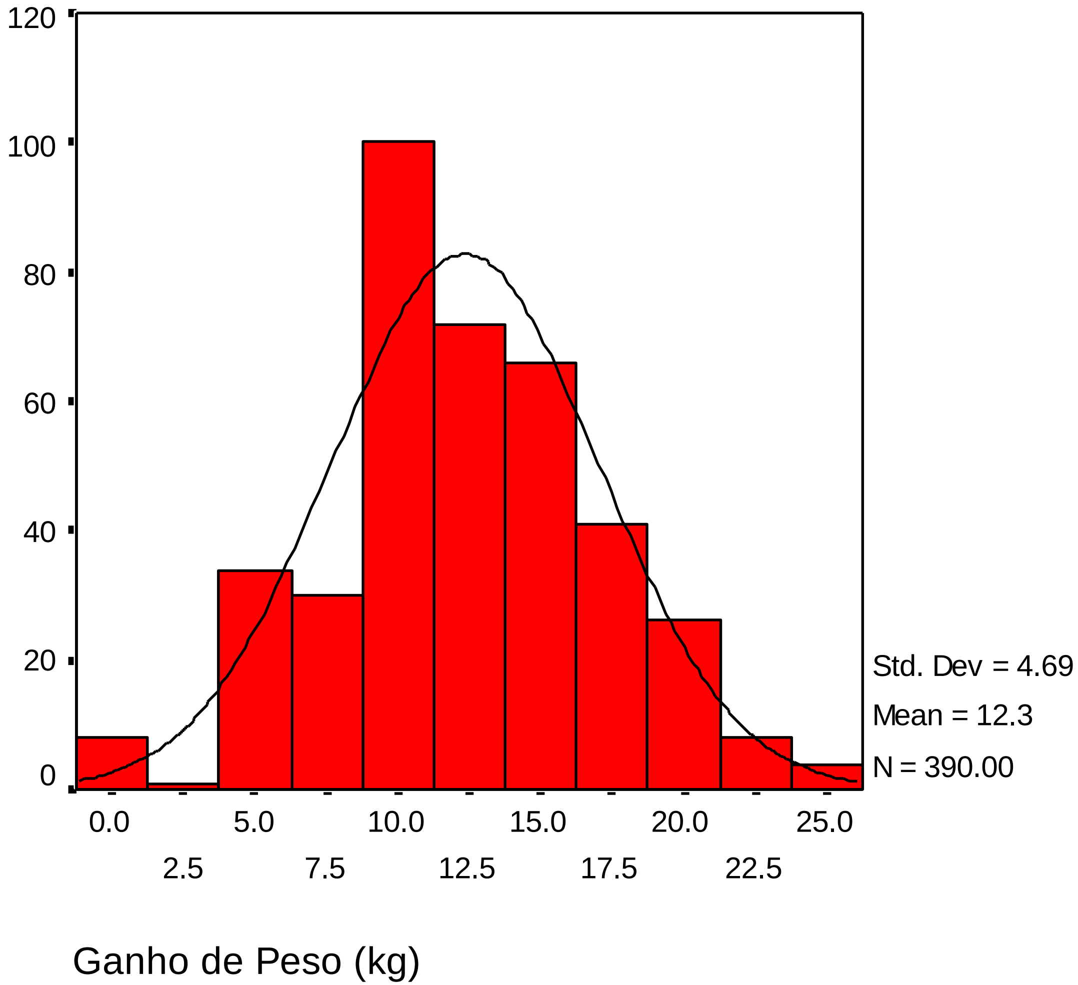
Normal


1.0
.8
.6
.4
.2
0.0
-4.00
-3.00
-2.00
-1.00
.00
1.00
2.00
3.00
4.00
-3.50
-2.50
-1.50
-.50
.50
1.50
2.50
3.50
X
N(2,0.25)
N(0,0.25)
N(0,1)

Normal


80
60
40
20
0
Std. Dev = 541.21
Mean = 3213.3
N = 400.00
600.0
1000.0
1400.0
1800.0
2200.0
2600.0
3000.0
3400.0
3800.0
4200.0
4600.0
Peso (gramas)

NORMAL


120
100
80
60
40
20
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
22.5
25.0
Std. Dev = 4.69
Mean = 12.3
N = 390.00
Ganho de Peso (kg)

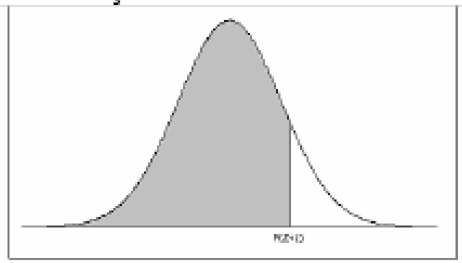
Normal

Uma variável aleatória X segue uma distribuição normal se e só se a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ \sigma > 0 \end{array}$$

Normal

Distribuição Normal



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019	0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048	1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064	1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084	1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143	1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183	1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233	1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294	1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367	1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455	1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559	2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681	2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823	2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985	2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170	2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379	2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611	2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867	2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148	2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451	2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776	3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121	3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483	3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859	3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247	3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641	3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Exemplo…

Exemplo

As classificações de um exame de admissão a um colégio seguem uma distribuição normal de média 500 e desvio padrão 100. Determine a probabilidade de um estudante ter classificação:

a) superior a 650;

b) inferior a 250;

c) entre 325 e 675.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$X \sim N(500, 100^2) \qquad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

a)

$$P\left(X > 650\right) = 1 - P(X \leq 650) = 1 - P(Z \leq \frac{650-500}{100}) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

Exemplo…

Exemplo

b)

$$P\left(X<250\right)=P(Z<\frac{250-500}{100})=P(Z<-2.5)=0.0062$$

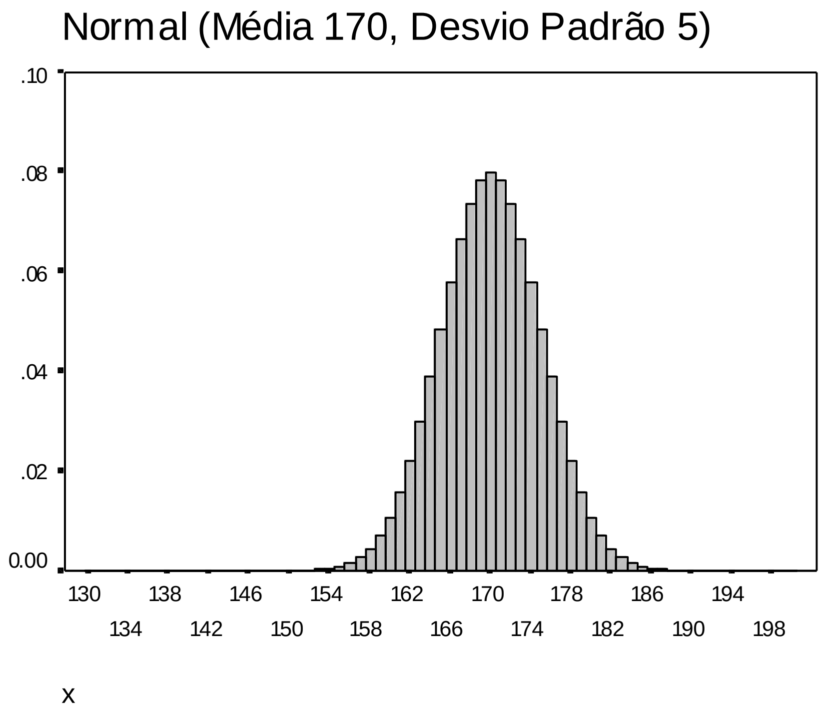
c)

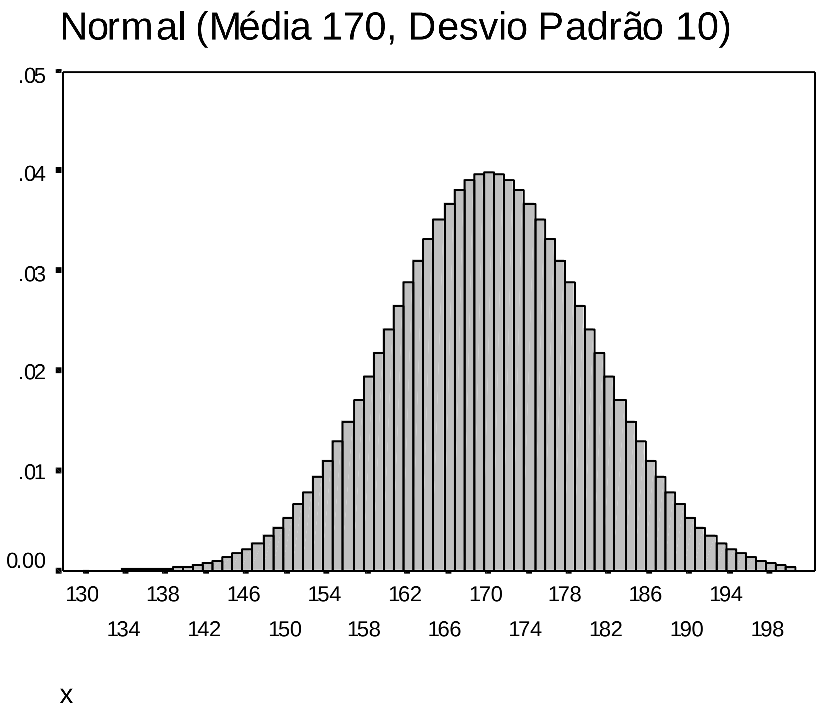
$$P\left(325<X<675\right)=P(X<675)-P(X\leq 325)=$$

$$=P(X<\frac{675-500}{100})-P(X\leq\frac{325-500}{100})=$$

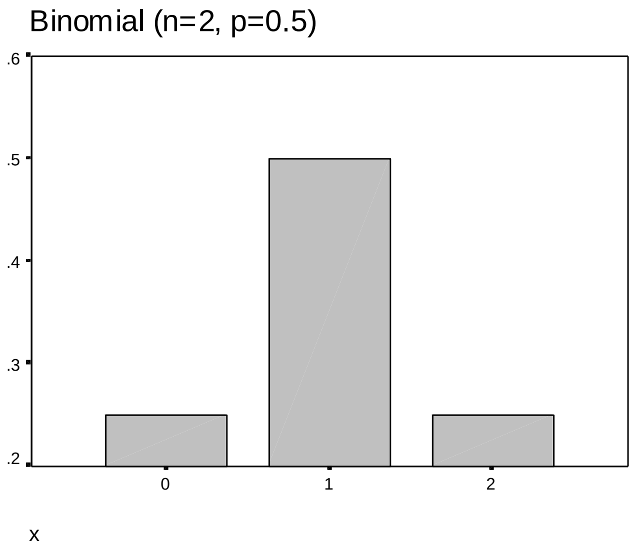
$$=P(Z<1.75)-P(Z\leq -1.75)=0.9599-0.0401=0.9198$$

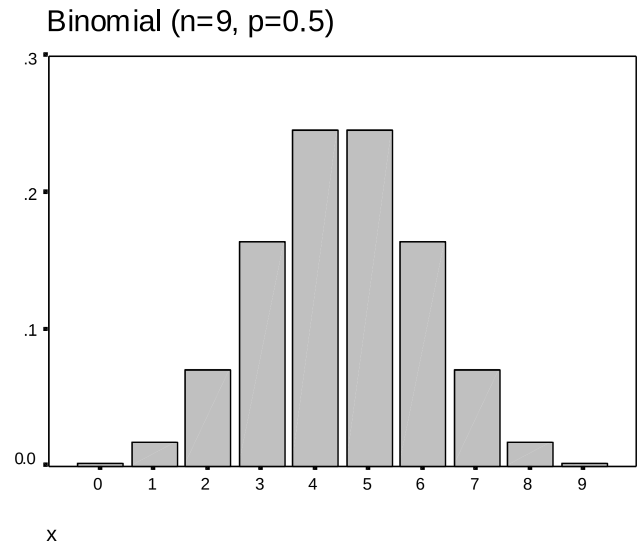
Normal

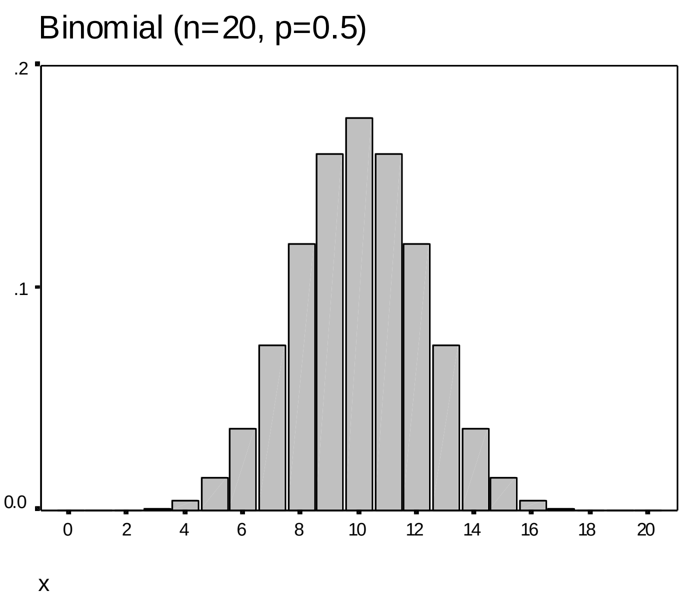

Normal (Média 170, Desvio Padrão 5)
.10
.08
.06
.04
.02
0.00
130
134
138
142
146
150
154
158
162
166
170
174
178
182
186
190
194
198
X


Normal (Média 170, Desvio Padrão 10)
.05
.04
.03
.02
.01
0.00
130
134
138
142
146
150
154
158
162
166
170
174
178
182
186
190
194
198
X

Aproximações







Correcção de Yates

$$P(X \leq x) \approx P(X < x + 0.5)$$

$$P(Y \geq y) \approx P(Y > y - 0.5)$$

Exemplo…

Exemplo

Sabe-se que 30% dos estudantes de uma determinada universidade frequentaram colégios particulares. Assuma uma amostra aleatória de 50 estudantes.

a) Qual a probabilidade de exactamente 10 dos estudantes seleccionados terem frequentado um colégio particular?

b) Qual a probabilidade de 20 ou mais dos estudantes seleccionados terem frequentado um colégio particular?

c) Qual a probabilidade de o número de estudantes provenientes de colégios particulares estar entre 10 e 20 inclusive?

a) $X \sim Bi(n, p)$

$X \sim Bi(50, 0.3)$

$$\begin{cases} np = 50 \cdot 0.3 = 15 > 5 \\ n(1-p) = 50 \cdot (1-0.3) = 35 > 5 \end{cases}$$

$\mu = n \cdot p = 15$ $\qquad \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 10.5$

Exemplo…

Exemplo

$$X' \sim N(15, 10.5) \qquad Z = \frac{X' - 15}{\sqrt{10.5}} \sim N(0,1)$$

$$P(X = 10) = P(X \leq 10) - P(X < 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 9) =$$

$$= P(X' \leq 10.5) - P(X' \leq 9.5) = P(Z \leq -1.39) - P(Z \leq -1.70) =$$

$$= 0.0823 - 0.0446 = 0.0377$$

b) $P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leq 19) =$

$$= 1 - P(X' \leq 19.5) = 1 - P(Z \leq 1.39) = 1 - 0.9177 = 0.0823$$

c) $P(10 < X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 10) =$

$$= P(X' \leq 20.5) - P(X' \leq 10.5) = P(Z \leq 1.70) - P(Z \leq -1.39) =$$

$$= 0.9544 - 0.0823 = 0.8721$$

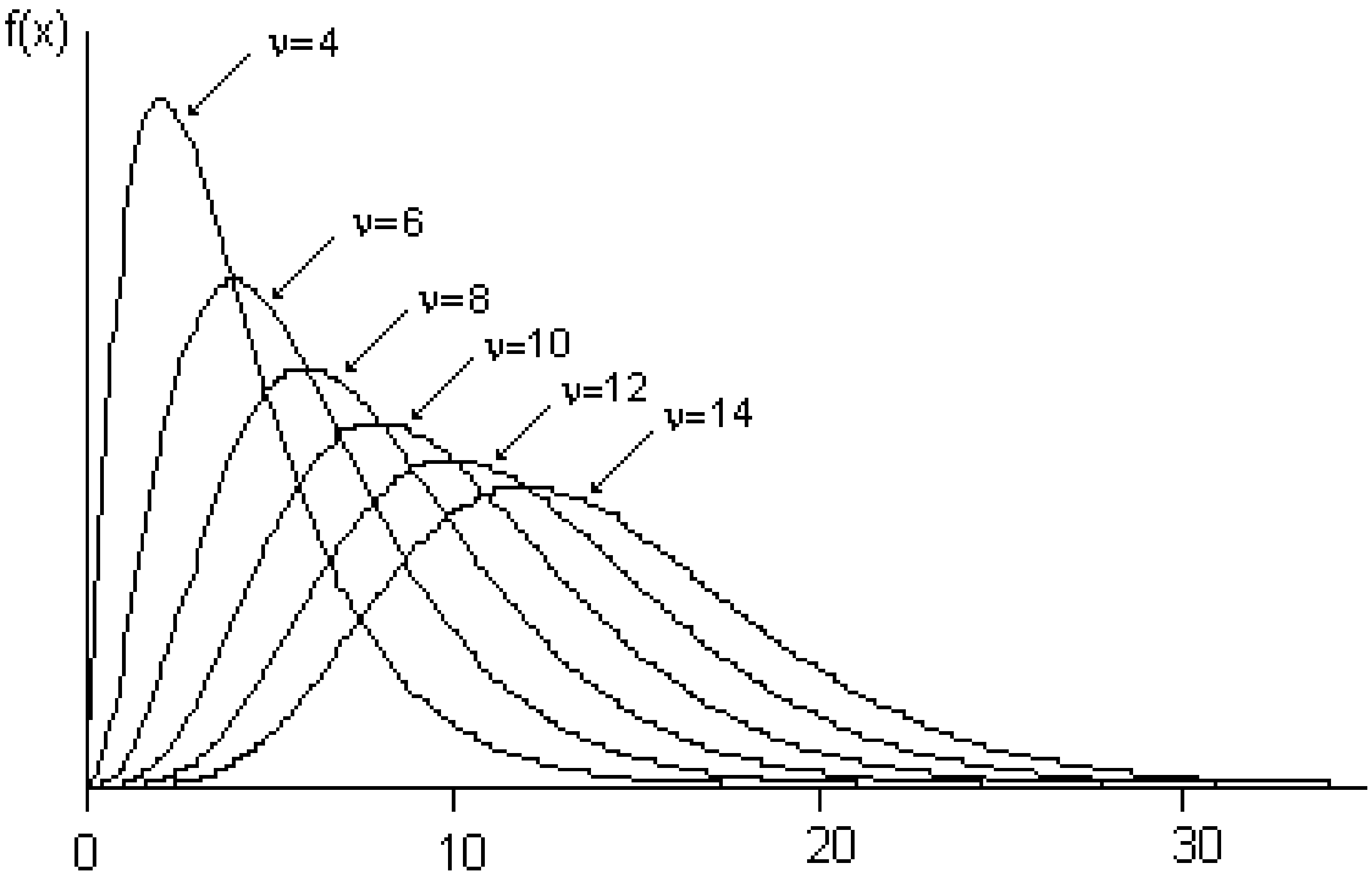
Qui-quadrado

Uma variável aleatória segue a distribuição de Qui-quadrado com graus de liberdade, se a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\nu/2\right)}x^{\frac{\nu-2}{2}}e^{-x/2} & x>0\\ 0 & \text{outros valores}\end{cases}$$

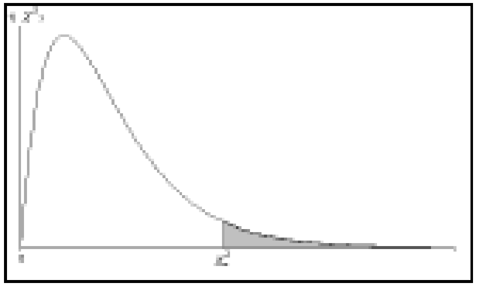
$$\mu=\nu \qquad \sigma^2=2\nu$$

Qui-quadrado



Qui-quadrado

Distribuição de Qui-Quadrado



g.l.	0,995	0,990	0,975	0,950	0,050	0,025	0,010	0,005
1	0,000	0,000	0,001	0,004	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,647	2,180	2,733	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	36,415	39,364	42,980	45,558
25	10,520	11,524	13,120	14,611	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,878	14,573	16,151	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	41,337	44,461	48,278	50,994
29	13,121	14,256	16,047	17,708	42,557	45,722	49,588	52,335
30	13,787	14,953	16,791	18,493	43,773	46,979	50,892	53,672
40	20,707	22,164	24,433	26,509	55,758	59,342	63,691	66,766
50	27,991	29,707	32,357	34,764	67,505	71,420	76,154	79,490
60	35,534	37,485	40,482	43,188	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	45,442	48,758	51,739	90,531	95,023	100,425	104,215
80	51,172	53,540	57,153	60,391	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,196	61,754	65,647	69,126	113,145	118,136	124,116	128,299
100	67,328	70,065	74,222	77,929	124,342	129,561	135,807	140,170

Qui-quadrado

- Se X segue uma distribuição normal padrão, então X^2 segue a distribuição de Qui-Quadrado com 1 grau de liberdade.

- Se X_1, X_2, ...,X_n são variáveis aleatórias independentes que seguem uma distribuição de Qui-Quadrado com ν_1, ν_2,..., ν_n, graus de liberdade, então

$$Y = \sum X_i$$

  segue a distribuição de Qui-Quadrado com $\nu_1+\nu_2+...+ \nu_n$, graus de liberdade.

QUI-QUADRADO

Se $\bar{x}$ e s^2 são a média e a variância de uma amostra aleatória de tamanho n de uma população normal com média μ e desvio padrão σ, então

1. $\bar{x}$ e s^2 são independentes,
2. a variável aleatória $(n-1)s^2/\sigma^2$ segue uma distribuição de Qui-Quadrado com n-1 graus de liberdade.

t-Student

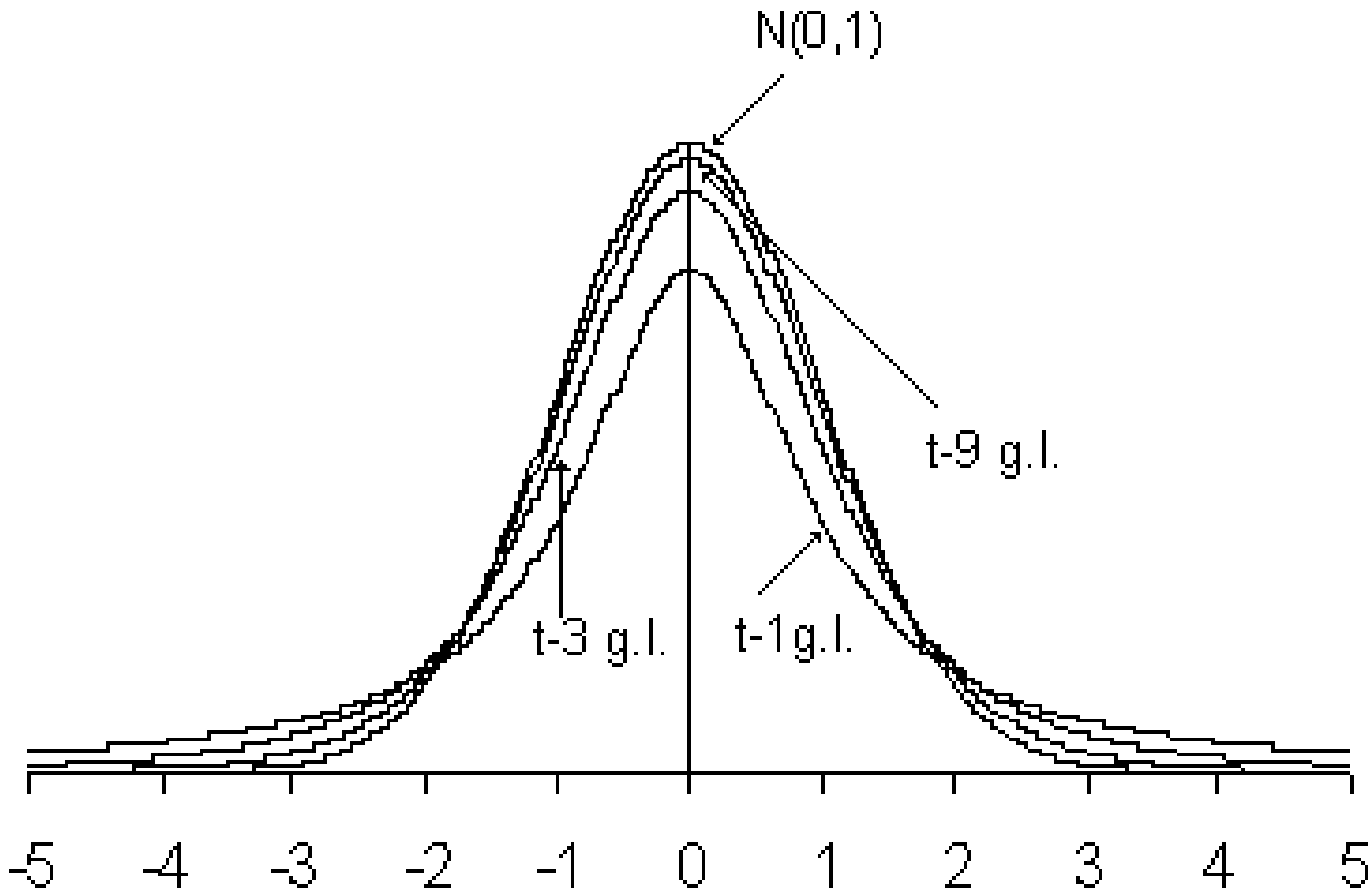
Se y e z são variáveis aleatórias independentes, y com uma distribuição de Qui-quadrado com graus de liberdade e z uma distribuição normal padrão, então a distribuição de

$$t = \frac{z}{\sqrt{y/\nu}}$$

é dada por

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad -\infty < t < \infty$$

t-Student



t-Student

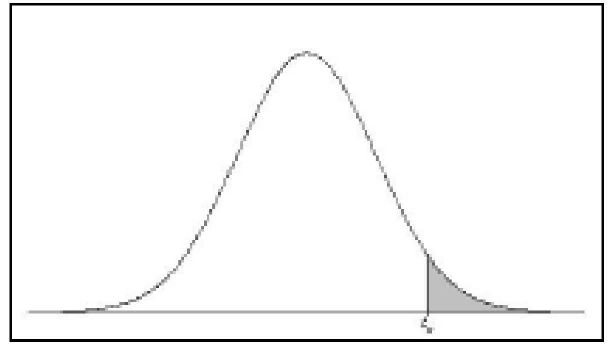
Se $\overline{x}$ e s^2 são a média e a variância de uma amostra aleatória de tamanho n de uma população normal com média μ e desvio padrão σ, então

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

segue uma distribuição t-Student com n-1 graus de liberdade.

T-Student

Distribuição de t - Student



g.l.	0,25	0,15	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005
1	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,681	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,679	1,045	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	0,677	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Distribuição F

Se U e V são variáveis aleatórias independentes seguindo distribuições de Qui-Quadrado com ν_1 e ν_2 graus de liberdade, então

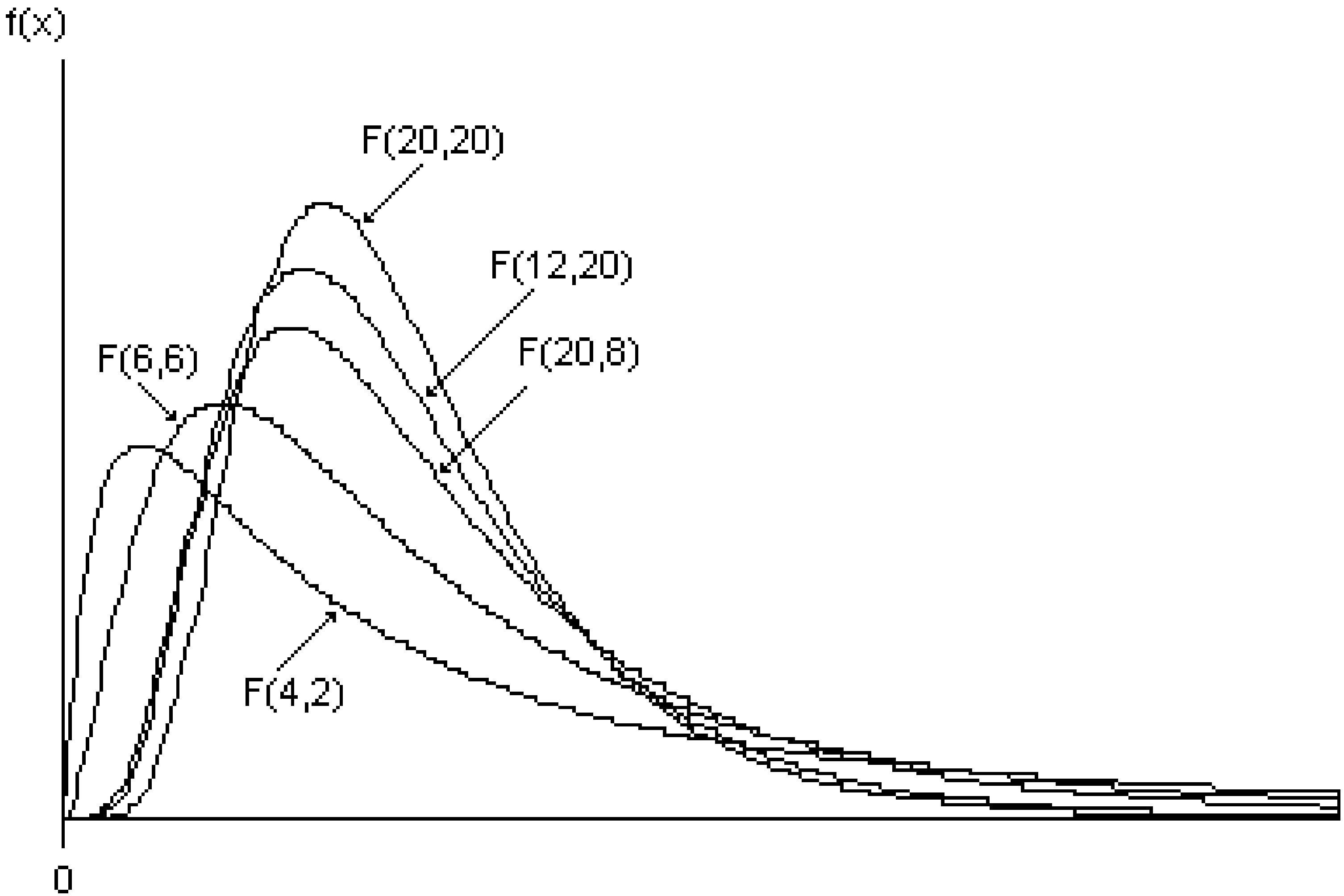
$$x = \frac{U/\nu_1}{V/\nu_2}$$

é uma variável aleatória seguindo a distribuição F com ν_1 e ν_2 graus de liberdade.

Distribuição F

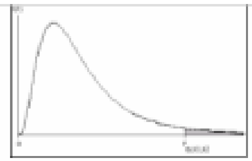
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)}\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)x^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1+\dfrac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)} & x>0\\ 0 & \text{outros valores}\end{cases}$$

Distribuição F



Distribuição F

Distribuição F



g.l.		ν_1 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
ν_2 1	10%	39,864	49,500	53,593	55,833	57,240	58,204	58,906	59,439	59,857	60,195	60,705	61,220	61,740	62,002	62,265	62,529	62,794	63,061	63,328
	5%	161,446	199,499	215,707	224,583	230,160	233,988	236,767	238,884	240,543	241,882	243,905	245,949	248,016	249,052	250,096	251,144	252,196	253,254	254,313
	2,5%	647,793	799,482	864,151	899,599	921,835	937,114	948,203	956,643	963,279	968,634	976,725	984,874	993,081	997,272	1001,405	1005,596	1009,787	1014,036	1018,256
	1%	4052,185	4999,340	5403,534	5624,257	5763,955	5858,950	5928,334	5980,954	6022,397	6055,925	6106,682	6156,974	6208,662	6234,273	6260,350	6286,427	6312,970	6339,513	6365,590
2	10%	8,526	9,000	9,162	9,243	9,293	9,326	9,349	9,367	9,381	9,392	9,408	9,425	9,441	9,450	9,458	9,466	9,475	9,483	9,491
	5%	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,329	19,353	19,371	19,385	19,396	19,412	19,429	19,446	19,454	19,463	19,471	19,479	19,487	19,496
	2,5%	38,506	39,000	39,166	39,248	39,298	39,331	39,356	39,373	39,387	39,398	39,416	39,431	39,448	39,457	39,465	39,473	39,481	39,489	39,498
	1%	98,502	99,000	99,164	99,251	99,302	99,331	99,357	99,375	99,390	99,397	99,419	99,433	99,448	99,455	99,466	99,477	99,484	99,491	99,499
3	10%	5,538	5,462	5,391	5,343	5,309	5,285	5,266	5,252	5,240	5,230	5,216	5,200	5,184	5,176	5,168	5,160	5,151	5,143	5,134
	5%	10,128	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,887	8,845	8,812	8,785	8,745	8,703	8,660	8,638	8,617	8,594	8,572	8,549	8,527
	2,5%	17,443	16,044	15,439	15,101	14,885	14,735	14,624	14,540	14,473	14,419	14,337	14,253	14,167	14,124	14,081	14,036	13,992	13,947	13,902
	1%	34,116	30,816	29,457	28,710	28,237	27,911	27,671	27,489	27,345	27,228	27,052	26,872	26,690	26,597	26,504	26,411	26,316	26,221	26,125
4	10%	4,545	4,325	4,191	4,107	4,051	4,010	3,979	3,955	3,936	3,920	3,896	3,870	3,844	3,831	3,817	3,804	3,790	3,775	3,761
	5%	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999	5,964	5,912	5,858	5,803	5,774	5,746	5,717	5,688	5,658	5,628
	2,5%	12,218	10,649	9,979	9,604	9,364	9,197	9,074	8,980	8,905	8,844	8,751	8,657	8,560	8,511	8,461	8,411	8,360	8,309	8,257
	1%	21,198	18,000	16,694	15,977	15,522	15,207	14,976	14,799	14,659	14,546	14,374	14,198	14,019	13,929	13,838	13,745	13,652	13,558	13,463
5	10%	4,060	3,780	3,619	3,520	3,453	3,405	3,368	3,339	3,316	3,297	3,268	3,238	3,207	3,191	3,174	3,157	3,140	3,123	3,105
	5%	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,772	4,735	4,678	4,619	4,558	4,527	4,496	4,464	4,431	4,398	4,365
	2,5%	10,007	8,434	7,764	7,388	7,146	6,978	6,853	6,757	6,681	6,619	6,525	6,428	6,329	6,278	6,227	6,175	6,123	6,069	6,015
	1%	16,258	13,274	12,060	11,392	10,967	10,672	10,456	10,289	10,158	10,051	9,888	9,722	9,553	9,466	9,379	9,291	9,202	9,112	9,021
6	10%	3,776	3,463	3,289	3,181	3,108	3,055	3,014	2,983	2,958	2,937	2,905	2,871	2,836	2,818	2,800	2,781	2,762	2,742	2,722
	5%	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099	4,060	4,000	3,938	3,874	3,841	3,808	3,774	3,740	3,705	3,669
	2,5%	8,813	7,260	6,599	6,227	5,988	5,820	5,695	5,600	5,523	5,461	5,366	5,269	5,168	5,117	5,065	5,012	4,959	4,904	4,849
	1%	13,745	10,925	9,780	9,148	8,746	8,466	8,260	8,102	7,976	7,874	7,718	7,559	7,396	7,313	7,229	7,143	7,057	6,969	6,880
7	10%	3,589	3,257	3,074	2,961	2,883	2,827	2,785	2,752	2,725	2,703	2,668	2,632	2,595	2,575	2,555	2,535	2,514	2,493	2,471
	5%	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677	3,637	3,575	3,511	3,445	3,410	3,376	3,340	3,304	3,267	3,230
	2,5%	8,073	6,542	5,890	5,523	5,285	5,119	4,995	4,899	4,823	4,761	4,666	4,568	4,467	4,415	4,362	4,309	4,254	4,199	4,142
	1%	12,246	9,547	8,451	7,847	7,460	7,191	6,993	6,840	6,719	6,620	6,469	6,314	6,155	6,074	5,992	5,908	5,824	5,737	5,650
8	10%	3,458	3,113	2,924	2,806	2,726	2,668	2,624	2,589	2,561	2,538	2,502	2,464	2,425	2,404	2,383	2,361	2,339	2,316	2,293
	5%	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,500	3,438	3,388	3,347	3,284	3,218	3,150	3,115	3,079	3,043	3,005	2,967	2,928
	2,5%	7,571	6,059	5,416	5,053	4,817	4,652	4,529	4,433	4,357	4,295	4,200	4,101	3,999	3,947	3,894	3,840	3,784	3,728	3,670
	1%	11,259	8,649	7,591	7,006	6,632	6,371	6,178	6,029	5,911	5,814	5,667	5,515	5,359	5,279	5,198	5,116	5,032	4,946	4,859
9	10%	3,360	3,006	2,813	2,693	2,611	2,551	2,505	2,469	2,440	2,416	2,379	2,340	2,298	2,277	2,255	2,232	2,208	2,184	2,159
	5%	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,230	3,179	3,137	3,073	3,006	2,936	2,900	2,864	2,826	2,787	2,748	2,707
	2,5%	7,209	5,715	5,078	4,718	4,484	4,320	4,197	4,102	4,026	3,964	3,868	3,769	3,667	3,614	3,560	3,505	3,449	3,392	3,333
	1%	10,562	8,022	6,992	6,422	6,057	5,802	5,613	5,467	5,351	5,257	5,111	4,962	4,808	4,729	4,649	4,567	4,483	4,398	4,311
10	10%	3,285	2,924	2,728	2,605	2,522	2,461	2,414	2,377	2,347	2,323	2,284	2,244	2,201	2,178	2,155	2,132	2,107	2,082	2,055
	5%	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,135	3,072	3,020	2,978	2,913	2,845	2,774	2,737	2,700	2,661	2,621	2,580	2,538
	2,5%	6,937	5,456	4,826	4,468	4,236	4,072	3,950	3,855	3,779	3,717	3,621	3,522	3,419	3,365	3,311	3,255	3,198	3,140	3,080
	1%	10,044	7,559	6,552	5,994	5,636	5,386	5,200	5,057	4,942	4,849	4,706	4,558	4,405	4,327	4,247	4,165	4,082	3,996	3,909
11	10%	3,225	2,860	2,660	2,536	2,451	2,389	2,342	2,304	2,274	2,248	2,209	2,167	2,123	2,100	2,076	2,052	2,026	2,000	1,972
	5%	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896	2,854	2,788	2,719	2,646	2,609	2,570	2,531	2,490	2,448	2,405
	2,5%	6,724	5,256	4,630	4,275	4,044	3,881	3,759	3,664	3,588	3,526	3,430	3,330	3,226	3,173	3,118	3,061	3,004	2,944	2,883
	1%	9,646	7,206	6,217	5,668	5,316	5,069	4,886	4,744	4,632	4,539	4,397	4,251	4,099	4,021	3,941	3,860	3,776	3,690	3,603

DISTRIBUIÇÃO F

Se s_1^2 e s_2^2 são as variâncias de variáveis aleatórias independentes de dimensão n_1 e n_2 de populações normais com variâncias σ_1^2 e σ_2^2 , então

$$F = \frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 s_1^2}{\sigma_1^2 s_2^2}$$

é uma variável aleatória seguindo a distribuição F com n_1-1 e n_2-1 graus de liberdade.