Ficha 5: Primitivas

5.1 Definição e propriedades

Definição 5.1 *Seja f uma função definida num intervalo $I \subset D_f$. Uma função F, definida no intervalo I, é uma primitiva de f se F é derivável em I e $F'(x) = f(x)$.*

Notação 5.1 *Existem várias notações para uma primitiva F da função f: $\mathcal{P}f$ ou $\displaystyle\int f(x)dx$*

Proposição 5.1
Seja f uma função definida num intervalo $I \subset D_f$. Suponhamos que existem duas primitivas F e G de f então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + C$.
Seja $x_0 \in I$ tal que $F(x_0) = 0$, então dizemos que Pf é a primitiva que se anula em x_0 (desta vez temos a unicidade da primitiva).

EXEMPLO 5.1 Seja $f(x) = \cos(2x)$ então a função $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + 3.14$ é uma primitiva de f.

Cuidado com esta notação porque não temos unicidade da primitiva. Em consequência o operador "primitivação "$f \to \mathcal{P}f$ faz sentido apenas para funções que diferem de uma constante.

Proposição 5.2
Sejam f e g duas funções que admitem uma primitiva em I então para qualquer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{P}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{P}f + \mu \mathcal{P}g.$$

Teorema 5.1
Seja f uma função contínua num intervalo $I \subset D_f$. Então f admite uma primitiva.

5.2 Técnicas de primitivação

Primitivas imediatas. As primitivas imediatas são aquelas que vêm de funções com derivadas previamente conhecidas. De facto a tabela das derivadas fornece também a tabela das primitivas.

EXEMPLO 5.2 Determinar uma primitiva de $f(x) = \cos(2\pi x)$.
Como $[\sin(2\pi x)]' = 2\pi\cos(2\pi x)$ deduzimos que $\frac{1}{2\pi}[\sin(2\pi x)]' = \cos(2\pi x)$ e finalmente $\int f(x)\,d\boldsymbol{x} = \mathcal{P}f(x) = \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$ é uma primitiva de f.

Primitivas por substituição de variáveis. Em algumas situações, é necessário realizar um troca de variável para termos uma primitiva imediata. Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo I e $\phi(t)$ uma bijeção derivável de J sobre I. Então temos a fórmula

$$\int f(x)\ dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\ dt.$$

Fazemos a substituição da variável x pela variável t

Exemplo 5.3 Determinar uma primitiva de $\sqrt{1-x^2}$ usando a mundança de variável $x = \phi(t) = \sin(t)$.
Consideramos x como uma função de t e escrevemos $\frac{dx}{dt} = x'(t) = \sin'(t) = \cos(t)$. Deduzimos assim $dx = \cos(t)dt$. Por outro lado, usando a substituição temos $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$. Aplicando a fórmula

$$\int \sqrt{1-x}\,d\boldsymbol{x} = \int \cos(t)\cos(t)\ dt = \int \frac{\cos(2t)+1}{2}\ dt = \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} = \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} + \frac{t}{2}$$

e deduzimos a primitiva $\mathcal{P}(\sqrt{1-x^2}) = \frac{x}{2}\cos(\arcsin(x)) + \frac{1}{2}\arcsin(x)$.

Uma outra técnica muito prática para realizar a troca de variável é a seguinte.

Proposição 5.3
Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a,b]$ e supomos que podemos escrever f como $f(x) = g(u(x))u'(x)$. Se a função $u \to g(u)$ admite uma primitiva $G(u)$ então $\mathcal{P}f(x) = G(u(x))$.

Nota 5.1 Substituimos a variável x pela variável u. Cuidado, temos um abuso de notação visto que u é ao mesmo tempo uma função de t é uma variável de g.

Exemplo 5.4 Seja $f(t) = \cos^{14}(t)\sin(t)$. Podemos reescrever esta expressão como $f(t) = g(u(t))u'(t)$ onde $g(u) = u^{14}$ e $u(t) = -\cos(t)$. Como $G(u) = \mathcal{P}g(u) = \frac{u^{15}}{15}$, concluimos então que $Pf = -\frac{\cos^{15}(t)}{15}$.

Primitivação por partes. Sejam u e v duas funções deriváveis, então sabemos que $(uv)' = u'v + uv'$. Primitivando esta última relação deduzimos a fórmula de primitivação por partes

$$\int u'(x)v(x)\ dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\ dx.$$

Exemplo 5.5 Usando a técnica de primitiva por partes, determine uma primitiva de $f(x) = xe^{2x+1}$.
Se escolhemos $u'(x) = e^{2x+1}$ é $v(x) = x$ então $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$ e $v = 1$. Aplicando a fórmula de primitivação por partes deduzimos

$$\int xe^{2x+1} = x\frac{1}{2}e^{2x+1} - \int \frac{1}{2}e^{2x+1}\ dx == x\frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{4}e^{2x+1}.$$

Nota que as outras primitivas se deduzem com uma constante adicional.

5.3 Primitivas de funções racionais

Chamamos a atenção que uma fração racional é uma função da forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ onde P e Q são polinómios constituidos por monómios da forma $a_i x^i$ em que o grau do polinómio P (notado deg(P) por "degree") corresponde ao grau mais elevado dos monómios.

Divisão Euclidiana

Definição 5.2 *Sejam P e Q dois polinónios. A fração racional $\frac{P}{Q}$ é irredutível se deg(P) <deg(Q) e as raizes de P são diferentes das raízes de Q, i.e. $Z_P \cap Z_Q = \emptyset$.*

Proposição 5.4 (divisão Euclidiana)
Sejam N e Q dois polinómios então existe sempre um polinómio E e um polinómio P com deg(P) <deg(Q) tal que

$$\frac{N}{Q} = E + \frac{P}{Q}.$$

Esta expressão chama-se "redução de fração "onde $\frac{P}{Q}$ é uma fração irredutível.

A técnica é baseada na divisão euclidiana de um polínomio. Damos aqui um exemplo simples.

Exemplo 5.6 Seja a fração racional $\frac{N}{Q}$ com $N = x^3 + 4x^2 + x - 1$, $Q = x^2 - 3$, podemos escrever

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x - 1}{x^2 - 3} = x + 4 + \frac{4x + 11}{x^2 - 3},$$

onde a fração é irreductível.

Decomposição em elementos simples

Definição 5.3 *Os elementos (frações) simples são da forma*

- *Elemento simples de tipo I (raiz simples):*

$$\frac{A}{(ax+b)^n}, \quad a \neq 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

- *Elemento simples de tipo II:*

$$\frac{AX + B}{(ax^2 + bx + c)^n}, \quad b^2 - 4ac < 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

Nota 5.2 Cuidado no segundo caso. Quando $4b^2 - 4ac \geq 0$, não é um elemento simples de tipo II (nem tipo I).

Proposição 5.5 (Decomposição em elementos simples)
Sejam P e Q dois polinómios tal a fração racional $\frac{P}{Q}$ seja irredutível. Então podemos sempre decompor a fração racional numa soma de elementos simples.

Apresentamos vários cenários onde propomos algumas técnicas de decomposição.

Exemplo 5.7 (Por identificação) Decompor em elementos simples a fração $F(x) = \dfrac{x+4}{(x-1)(x+2)}$.
Escrevemos a decomposição com elementos simples da forma

$$F(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

onde devemos determinar A_1, A_2 usando a identificação

$$\frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

Em primeiro lugar multiplicamos a expressão por $x-1$

$$F(x)(x-1) = \frac{x+4}{x+2} = A_1 + \frac{A_2(x-1)}{x+2}.$$

Depois avaliamos a expressão em $x = 1$ o que dá o coeficiente A_1

$$\frac{1+4}{1+2} = A_1 + \frac{A_2(1-1)}{1+2} = A_1 = \frac{5}{3}.$$

Do mesmo modo, multiplicamos a expressão por $x+2$ que avaliamos no ponto $x = -2$.

$$F(x)(x+2) = \frac{x+4}{x-1} = A_2 + \frac{A_1(x+2)}{x-1}.$$

Obtemos assim o segundo coeficiente $A_2 = -\frac{2}{3}$.
Deduzimos finalmente a decomposição em elementos simples

$$F(x) = \frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = \frac{5/3}{x-1} - \frac{3/2}{x+2}.$$

Exemplo 5.8 (Por anulação) Consideramos de novo a igualdade

$$\frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

① Multicando com $x-1$ temos $\dfrac{x+4}{x+2} = A_1 + \dfrac{A_2(x-1)}{x+2}$. Usando o valor $x = 1$ como valor de anulação deduzimos $A_1 = \frac{5}{3}$.
② Multicando com $x+2$ temos $\dfrac{x+4}{x-1} = \dfrac{A_1(x+2)}{x-1} + A_2$. Usando o valor $x = -2$ como valor de anulação deduzimos $A_2 = -\frac{2}{3}$.
Concluimos como no exemplo anterior.

Exemplo 5.9 (Usando os limites) Decompor em elementos simples a fração $F(x) = \dfrac{x+4}{(x+2)(x-1)^2}$.
Escrevemos a decomposição com elementos simples da forma

$$F(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2}$$

onde devemos determinar A_1, A_2, A_3 usando a identificação

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2}$$

Em primeiro lugar multiplicamos a expressão por $x+2$

$$F(x)(x+2) = \frac{x+4}{(x-1)^2} = \frac{A_1(x+2)}{x-1} + \frac{A_2(x+2)}{(x-1)^2} + A_3.$$

Depois avaliamos a expressão em $x = -2$ o que dá o coeficiente $A_3 = \frac{2}{9}$.
Agora multiplicamos F por $x-1$ e obtemos

$$F(x)(x-1) = \frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = A_1 + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{2}{9}\frac{(x-1)}{x+2}.$$

Tomando o limite em $+\infty$ deduzimos que

$$\lim_{+\infty} \frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = A_1 + \lim_{+\infty} \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{2}{9}\lim_{+\infty}\frac{(x-1)}{x+2} \Longrightarrow 0 = A_1 + \frac{2}{9}$$

e deduzimos que $A_1 = -\frac{2}{9}$.
Finalmente, escolhendo o valor $x = 0$ temos

$$F(0) = \frac{0+4}{(0+2)(0-1)^2} = -\frac{2}{9}\frac{1}{0-1} + \frac{A_2}{(0-1)^2} + \frac{2}{9}\frac{1}{0+2}$$

e deduzimos $2 = \frac{2}{9} + A_2 + \frac{1}{9}$ de onde tiramos $A_2 = \frac{5}{3}$. Em conclusão temos a decomposição em elementos simples

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-1)^2} = -\frac{2/9}{x-1} + \frac{5/3}{(x-1)^2} + \frac{2/9}{x+2}.$$

Primitivação Quando se trata de uma fração racional, usamos uma redução da fração com a divisão euclidiana, se for necessario, depois efetuamos uma decomposição em elementos simples. Finalmente, determinamos uma primitiva de cada termo da decomposição.

Exemplo 5.10 Determinar um primitiva da função racional $f(x) = \dfrac{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3}$.
① A divisão euclidiana dá $\dfrac{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3} = x - 1 - \dfrac{x^2-2x-5}{x^3+3x^2+x+3}$.
② Notando que $x^3+3x^2+x+3 = (x+3)(x^2+1)$, temos a decomposição $\dfrac{x^2-2x-5}{x+3)(x^2+1)} = \dfrac{1}{x+1} - 2x^2 + 1$.
③ Determinamos uma primitiva com

$$\int f(x) = \int (x-1) + \int \frac{1}{x+1} - \int 2x^2 + 1 = \frac{x^2}{2} - x + \ln(|x+1|) - 2\arctan(x).$$

5.4 Exercícios

Exercício 1 Determinar as primitivas (imediatas) das funções seguintes.

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{e^{1+4x}}$, $\quad f(x) = xe^2 + 2e^x$, $\quad f(x) = 15e^{1+4x}$,
2. $f(x) = \dfrac{2}{(1-4x)^{1/3}}$, $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{12-5x}}{\sqrt[3]{5x-12}}$, $\quad f(x) = \sqrt{(12-3x)^7}$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-2x^2}}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x+4x^2}}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-8}}$, $\quad f(x) = \dfrac{5}{4x^2+9}$,
5. $f(x) = \cos(3-2x)$, $\quad f(x) = \sin(17-5x)$, $\quad f(x) = \sqrt{1+[\sinh(x)]^2}$,
6. $f(x) = 2\tan^2(2x) - 3$, $\quad f(x) = \cos(\pi x) + 2 + [\tan(x)]^2$, $\quad f(x) = 1 + \sin^2(x)$,
7. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$, $\quad f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, $\quad f(x) = \sin^2(3x-1)$.

Exercício 2 Determinar as primitivas das funções seguintes usando uma substituição de função.

1. $f(x) = \dfrac{x}{1+4x^2}$, $\quad f(x) = \dfrac{5x^2}{2x^3-6}$, $\quad f(x) = \dfrac{2x^3}{x^4-1}$, $\quad f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2+3x^2}}$,
2. $f(x) = 3x^2e^{1+x^3}$, $\quad f(x) = xe^{x^2}$, $\quad f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$, $\quad f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[6]{1+4x^2}}$
3. $f(x) = 12\sin(3x)\big[\cos(3x)\big]^7$, $\quad f(x) = \cos(2x)e^{\sin(2x)}$, $\quad f(x) = \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$,
4. $f(x) = 2x\ln(4)4^{x^2}$.

Exercício 3 Determinar as primitivas das funções seguintes usando uma técnica de primitivação por partes.

1. $f(x) = x\cos(2\pi x)$, $\quad f(x) = x^2\sin(x)$, $\quad f(x) = x\arctan(x)$, $\quad f(t) = t^2\ln(t)$,
2. $f(t) = (1+t^2)\ln(2t)$, $\quad f(x) = \ln(x)$, $\quad f(x) = x\exp(2x)$, $\quad f(t) = \frac{1+x^2}{e^x}$.

Exercício 4 Determinar as primitivas das funções racionais seguintes usando a divisão euclidiana e a decomposição em elementos simples quando necessário.

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x-2)}$, $\quad f(x) = \dfrac{-2x+3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{(x+2)(x^2+1)}$,

2. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{(2x-1)^3}$, $\quad f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$, $\quad f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+3x-2}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

Solução 1

1. *(i)* $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}$, *(ii)* $f(x)=-\dfrac{1}{4e^{1+4x}}$, *(iii)* $f(x)=x^2e^2/2+2e^x$, *(iv)* $\dfrac{15}{4}e^{1+4x}$
2. *(i)* $-\dfrac{3}{4}(1-4x)^{2/3}$, *(ii)* $\dfrac{6}{35}(12-5x)^{\frac{7}{6}}$, *(iii)* $-\frac{2}{27}\sqrt{(12-3x)^9}$,
3. *(i)* $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(x)$, *(ii)* $\dfrac{1}{2}\arctan(2x)$, *(iii)* $\dfrac{1}{2}\operatorname{arg\,sinh}(2x)$, *(iv)* $\dfrac{1}{2}\ln|1+2x|$
4. *(i)* $\arcsin(x/3)$, *(ii)* $\operatorname{arg\,cosh}(x/3)$, *(iii)* $\operatorname{arg\,cosh}\big((x-1)/3\big)$, *(iv)* $\dfrac{15}{18}\arctan(2x/3)$,
5. *(i)* $\dfrac{1}{2}\sin(2x-3)$, *(ii)* $\dfrac{1}{5}\cos(5x-17)$, *(iii)* $\sinh(x)$,
6. *(i)* $\tan(2x)-5$, *(ii)* $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}+x+\tan(x)$, *(iii)* $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{\sin(2x)}{4}$,
7. *(i)* $-\dfrac{\cos(2x)}{4}$, *(ii)* $-\dfrac{\sin(2x)}{2}$, *(iii)* $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin(6x-2)}{12}$.

Solução 2

1. *(i)* $\dfrac{1}{8}\ln|1+4x^2|$, *(ii)* $\dfrac{5}{6}\ln|2x^3-6|$, *(iii)* $\dfrac{1}{2}\ln|x^4-1|$, *(iv)* $\dfrac{1}{3}\sqrt{2+3x^2}$,
2. *(i)* e^{1+x^3}, *(ii)* $\frac{1}{2}e^{x^2}$, *(iii)* $f(x)=2\sqrt{1+e^x}$, *(iv)* $\dfrac{3}{20}\sqrt[6]{(1+4x^2)^5}$
3. *(i)* $=-\dfrac{1}{2}\big[\cos(3x)\big]^8$, *(ii)* $\dfrac{1}{2}e^{\sin(2x)}$, *(iii)* $\dfrac{1}{2}\ln|1+\cos^2(x)|$, *(iv)* 4^{x^2}.

Solução 3

1. *(i)* $x\dfrac{\sin(2\pi x)}{2\pi}+\dfrac{\cos(2\pi x)}{(2\pi)^2}$, *(ii)* $(2-x^2)\cos(x)+2x\sin(x)$,
   (iii) $(x^2+1)\arctan(x)-x$, *(iv)* $\dfrac{t^3}{9}\Big(3\ln(t)-1\Big)$,
2. *(i)* $(t+\dfrac{t^3}{3})\ln(2t)-t-\dfrac{t^3}{9}$, *(ii)* $x\ln(x)-x$, *(iii)* $\dfrac{2x-1}{4}\exp(2x)$, *(iv)* $-\dfrac{1+x^2+2x+3}{e^x}$.

Solução 4

1. *(i)* $f(x) = \frac{-3}{x-1} + \frac{5}{x-2}$ *e* $\int f(x)dx = -3\ln|x-1| + 5\ln|x-2|$,

   (ii) $f(x) = \frac{5/2}{x+1} - \frac{7}{x+2} + \frac{9/2}{x+3}$ *e* $\int f(x)dx = 5/2\ln|x+1| - 7\ln|x+2| + 9/2\ln|x+3|$,

   (iii) $f(x) = -\frac{2/5}{x+1} + \frac{7x+11}{5(x^2+1)}$ $\int f(x)dx = -2/5\ln|x+1| + 2/10\ln(x^2+1) + 11/5\arctan(x)$,

2. *(i)* $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{(2x-1)^3} = \frac{x-1}{(2x-1)^2} = -\frac{1/2}{2x-1} - \frac{1/2}{(2x-1)^2}$ *e* $\int f(x)dx = -1/4\ln|2x-1| + \frac{1/4}{(2x-1)}$,

   (ii) Divisão polynomial $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} = x - \frac{4}{(x-2)(x+2)} = x - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$ *e* $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2\ln|x-2| - 2\ln|x+2|$.

   (iii) Fazer anulação com $x = -1$*, depois o limite , a seguir usar valores* $x = 1$ *e* $x = 0$*. Obtemos* $f(x) = \frac{5/2}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{-x/2+1/2}{x^2+1}$, $\int f(x)dx = 5/2\ln|x+1| + \frac{4x}{x+1} - 1/4\ln(x^2+1) + 1/2\arctan(x)$.