Teoria

Para se estudar a convergência de uma série de potências representada por: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x-c)^n$,

recorre-se normalmente ao critério da razão ou D'Alembert: $R = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

- Se: $\lim_{n\to+\infty} R < 1 \Rightarrow$ a série é convergente;
- Se: $\lim_{n\to+\infty} R > 1 \Rightarrow$ a série é divergente;

Assim sendo, segue-se a aplicação do critério para o caso geral: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x-c)^n$

$$\lim_{n\to+\infty} R < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} \cdot |(x-c)|^{n+1}}{a_n \cdot |(x-c)|^n} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} \cdot |(x-c)|^n \cdot |(x-c)|^1}{a_n \cdot |(x-c)|^n} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} \cdot |(x-c)|^1}{a_n} < 1 \Leftrightarrow |x-c| \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow |x-c| \cdot \frac{\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}}{\lim_{n\to+\infty} a_n} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-c| \cdot \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} < \lim_{n\to+\infty} a_n \Leftrightarrow |x-c| < \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Sabendo que: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = R$, sendo **R** o raio.

Então: $|x-c| < R \Leftrightarrow x-c < R \wedge x-c > -R \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x < c+R \wedge x > c-R \Rightarrow x \in \left]c-R; c+R\right[$$

A série é convergente dentro do intervalo. Nos extremos terá que se efectuar um estudo individual para cada um deles para se concluir alguma coisa quanto à convergência.

Em alternativa a todos estes cálculos, sempre que é pedido um estudo de convergência, podemos aplicar o seguinte:

i) Identificar no somatório o valor de: a_n;

ii) Identificar no somatório o valor de: c;

iii) Determinar o valor do raio, através de:

$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, sendo convergente dentro do intervalo: $x \in \left]c-R;c+R\right[$ [1] e estudar posteriormente a convergência ou divergência nos pontos extremos.

1. Determine o intervalo de convergência de cada uma das seguintes séries de potências:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}$

R:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cdot(x-0)^n \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{2^n} \\ c = 0 \end{array}\right\}$$

Aplicando então a fórmula do raio teremos que:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{2^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^n\cdot 2^1}{2^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}|2| = 2$$

[1] Regra válida apenas quando $(x-c)^n$, ou seja, *se o expoente for diferente de* **n** *então temos que seguir o processo de cálculo normal referido na teoria desta resolução.*

Logo, a série converge para o intervalo:

$x \in \left]c-R; c+R\right[\equiv x \in \left]0-2; 0+2\right[\equiv x \in \left]-2; 2\right[$

Estudando agora os pontos extremos do intervalo teremos que:

Para: $x = -2$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \Rightarrow$ Sabendo que a regra diz que a série só converge para $x = c = 0$, neste caso. Sendo: $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ então a série é divergente.

Para: $x = 2$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1^n \Rightarrow$ Sabendo que a regra diz que a série só converge para $x = c = 0$, neste caso. Sendo: $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ então a série é divergente.

Conclusão: $x \in \left]-2; 2\right[$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$

R:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot (x-0)^n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ c = 0 \end{array} \right\}$$

Aplicando então a fórmula do raio teremos que:

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}{\frac{(-1)^{(n+1)+1}}{(n+1)+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n}+\frac{1}{n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}1+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{+\infty}=1$$

Logo, a série converge para o intervalo:

$$x\in\left]c-R;c+R\right[\equiv x\in\left]0-1;0+1\right[\equiv x\in\left]-1;1\right[$$

Estudando agora os pontos extremos do intervalo teremos que:

Para: $x=-1$

$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n}\Rightarrow$ [2]Esta série implica a aplicação do critério de Riemann: $\sum\frac{1}{n^a}$, onde neste caso $a=1$, o que significa que a série é divergente.

Para: $x=1$

$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\Rightarrow$ Esta série alternada implica a aplicação do teorema de Leibnitz: $a_{n+1}\le a_n\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{n}{n\cdot(n+1)}\le\frac{n+1}{n\cdot(n+1)}$

Se, por exemplo: $n=1$. Então teremos que: $\frac{1}{1\cdot(1+1)}<\frac{1+1}{1\cdot(1+1)}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\frac{2}{2}\Leftrightarrow 0{,}5<1$

[2] $(-1)^{2n+1}$ passa a ser apenas (-1) porque o expoente $(2n+1)$ representa os números impares, o que significa que, independentemente do valor que **n** assumir, teremos sempre números impares no expoente.

Isto justifica como verdadeira a proposição: $\frac{n}{n\cdot(n+1)} \leq \frac{n+1}{n\cdot(n+1)}$, logo a série é convergente para este extremo em particular, ou seja, o intervalo é fechado neste extremo.

Conclusão: $x \in \left]-1;1\right]$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$

R:

Como o expoente de x é 2n, logo diferente de n, então teremos que recorrer ao tradicional critério da razão, pelo que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{[2\cdot(n+1)]!}\cdot x^{2\cdot(n+1)}}{\frac{2^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\cdot 2^1\cdot(2n)!\cdot x^{2n+2}}{2^n\cdot(2n+2)!\cdot x^{2n}} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\cdot 2^1\cdot(2n)!\cdot x^{2n}\cdot x^2}{2^n\cdot(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!\cdot x^{2n}} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2^1\cdot x^2}{(2n+2)\cdot(2n+1)} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2^1\cdot x^2}{[2\cdot(n+1)]\cdot(2n+1)} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{(n+1)\cdot(2n+1)} < 1 \Leftrightarrow^{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2\cdot\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot(2n+1)} < 1 \Leftrightarrow x^2\cdot\frac{1}{+\infty} < 1 \Leftrightarrow x^2\cdot 0 < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 \rightarrow \text{Verdade}$$

Logo a série é convergente em $x \in \Re$.

[3] Uma vez que a variável do limite é o **n**, então podemos tratar $\mathbf{x^2}$ como uma constante e por conseguinte podemos passar essa constante para fora do limite.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{3n}} \cdot (x+4)^n$

R:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{3n}} \cdot (x+4)^n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n = \dfrac{n^2}{2^{3n}} \\ c = -4, \text{ pq a forma geral é (x - c) e aqui está (x + c), isto é, (x - (-c))} \end{array} \right\}$$

Aplicando então a fórmula do raio teremos que:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{n^2}{2^{3n}}}{\frac{(n+1)^2}{2^{3(n+1)}}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{3n+3}}{2^{3n} \cdot (n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{3n} \cdot 2^3}{2^{3n} \cdot (n+1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \cdot 2^3}{(n+1)^2} = 2^3 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 2^3 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} =$$

$$= 2^3 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = 2^3 \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{+\infty} + \frac{1}{+\infty^2}} = 2^3 \cdot \frac{1}{1+0+0} = 2^3 \cdot 1 = 8$$

Logo, a série converge (absolutamente) para o intervalo:

$x \in \left]c - R; c + R\right[\equiv x \in \left]-4-8; -4+8\right[\equiv x \in \left]-12; +4\right[$

Estudando agora os pontos extremos do intervalo teremos que:

Para: $x = -12$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^{3n}}\cdot(-12+4)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{8^n}\cdot(-8)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{8^n}\cdot(-1)^n\cdot 8^n=\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\cdot(-1)^n\Rightarrow \text{Teorema de}$$

Leibnitz: $a_{n+1}\le a_n \Leftrightarrow (n+1)^2\le n^2 \Leftrightarrow n^2+2n+1\le n^2 \Leftrightarrow 2n+1\le 0 \Rightarrow$ é divergente;

Para: $x=4$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^{3n}}\cdot(4+4)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{8^n}\cdot(8)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}n^2 \Rightarrow \text{Teorema de Leibnitz:}$$

$a_{n+1}\le a_n \Leftrightarrow (n+1)^2\le n^2 \Leftrightarrow n^2+2n+1\le n^2 \Leftrightarrow 2n+1\le 0 \Rightarrow$ é divergente;

Conclusão: $x\in \left]-12;4\right[$

2. **Sabendo que** $\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ **quando** $x\in\left]-1;1\right[$**, e usando diferenciação na alínea a) e integração e substituição na alínea b), determine representações em série de potências das funções:**

a) $\frac{1}{(1-x)^2}$

R:

$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(-\frac{1}{1-x}\right)'=\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}\right)'=-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^{n-1}\right)'=$ Este passo só é possível quando $x\in\left]-1;1\right[$ e quando a série é absolutamente convergente. $=-\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1).\left(x^{(n-1)-1}\right)=-\sum_{n=1}^{+\infty}-(1-n).\left(x^{n-2}\right)=$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(1-n).\left(x^{n-2}\right)$$

b) $\ln(1+x)$

R:

$$\ln(1+x) = P\left(\frac{1}{1+x}\right) = P\left(\frac{1}{1-(-x)}\right)$$

Seja: $u = x \Rightarrow du = -dx$, logo teremos que:

$P\left(\frac{1}{1-(-x)}\right) = P\left(\frac{-1}{1-u}\right) = -P\left(\frac{1}{1-u}\right) = -P\sum_{n=1}^{+\infty} u^{n-1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} Pu^{n-1} =$ Este passo só é possível porque $-1 < x < 1$, isto é, $-1 < u < 1$ e quando a série é absolutamente convergente. $= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1+1}}{n-1+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)\cdot\frac{(-1)^n \cdot x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n}$

3. Determine os desenvolvimentos em série de potências das funções seguintes numa vizinhança de $c \in \Re$:

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - x + 1, \text{com}: \ c = 1$

R:

Da teoria sabemos que: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x-c)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n$ e também sabemos que: $x = c$, ou seja, neste caso: $x = 1$, logo teremos que calcular antes de mais as derivadas de f (x) e os respectivos valores:

$f(x) = x^3 + 4x^2 - x + 1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 1^3 + 4\cdot 1^2 - 1 + 1 = 5$

$f^{i}(x) = 3x^2 + 8x - 1 \quad \Rightarrow \quad f^{i}(1) = 3\cdot 1^2 + 8\cdot 1 - 1 = 10$

$f^{ii}(x) = 6x + 8 \quad \Rightarrow \quad f^{ii}(1) = 6\cdot 1 + 8 = 14$

$f^{iii}(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad f^{iii}(1) = 6$

$f^{iv}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f^{iv}(1) = 0$

……… ………

Posto isto teremos que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n = \frac{f^{0}(1)}{0!} \cdot (x-1)^0 + \frac{f^{i}(1)}{1!} \cdot (x-1)^1 + \frac{f^{ii}(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{f^{iii}(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 =$$

$$= \frac{f(1)}{1} \cdot 1 + \frac{f^{i}(1)}{1} \cdot (x-1) + \frac{f^{ii}(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{f^{iii}(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 =$$

$$= 5 + 10 \cdot (x-1) + \frac{14}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{6}{3!} \cdot (x-1)^3$$

b) $f(x) = \cos(x), \text{com}: \ \text{c} = \frac{p}{2}$

R:

Da teoria sabemos que: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x-c)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n$ e também sabemos que: $x = c$, ou seja, neste caso: $x = \frac{p}{2}$, logo teremos que calcular antes de mais as derivadas de f (x) e os respectivos valores:

$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{p}{2}\right) = \cos\left(\frac{p}{2}\right) = 0$$

$$f^{i}(x) = -sen(x) \quad \Rightarrow \quad f^{i}\left(\frac{p}{2}\right) = -sen\left(\frac{p}{2}\right) = -1$$

$$f^{ii}(x) = -\cos(x) \quad \Rightarrow \quad f^{ii}\left(\frac{p}{2}\right) = -\cos\left(\frac{p}{2}\right) = 0$$

$$f^{iii}(x) = sen(x) \quad \Rightarrow \quad f^{iii}\left(\frac{p}{2}\right) = sen\left(\frac{p}{2}\right) = 1$$

$$f^{iv}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{iv}\left(\frac{p}{2}\right) = \cos\left(\frac{p}{2}\right) = 0$$

$$f^{v}(x) = -sen(x) \quad \Rightarrow \quad f^{v}\left(\frac{p}{2}\right) = -sen\left(\frac{p}{2}\right) = -1$$

$$f^{vi}(x) = -\cos(x) \quad \Rightarrow \quad f^{vi}\left(\frac{p}{2}\right) = -\cos\left(\frac{p}{2}\right) = 0$$

$$f^{vii}(x) = sen(x) \quad \Rightarrow \quad f^{vii}\left(\frac{p}{2}\right) = sen\left(\frac{p}{2}\right) = 1$$

Posto isto teremos que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n =$$

$$= f\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{f^{i}\left(\frac{p}{2}\right)}{1!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^1 + \frac{f^{ii}\left(\frac{p}{2}\right)}{2!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{f^{iii}\left(\frac{p}{2}\right)}{3!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^3 + \frac{f^{iv}\left(\frac{p}{2}\right)}{4!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^4 +$$

$$+ \frac{f^{v}\left(\frac{p}{2}\right)}{5!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^5 + \frac{f^{vi}\left(\frac{p}{2}\right)}{6!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^6 + \frac{f^{vii}\left(\frac{p}{2}\right)}{7!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^7 + \ldots =$$

$$= 0 + \frac{(-1)}{1!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^1 + 0 + \frac{1}{3!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^3 + 0 + \frac{(-1)}{5!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^5 + 0 + \frac{1}{7!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^7 + \ldots =$$

$$= -\frac{1}{1!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^1 + \frac{1}{3!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^3 - \frac{1}{5!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^5 + \frac{1}{7!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^7 + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)^n$$

4. Determine aplicando os desenvolvimentos limitados conhecidos de ordem n, das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{arcsen(x^2)}{x}$, até: n = 9

R:

Consultando o formulário vemos que:

$$arcsen(x) = x + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{3}{40} \cdot x^5 + \frac{5}{112} \cdot x^7 + \frac{35}{1152} \cdot x^9 + \ldots$$

Substituindo então o valor de **x** por $\mathbf{x^2}$ teremos que:

$$arcsen(x^2) = (x^2) + \frac{1}{6} \cdot (x^2)^3 + \frac{3}{40} \cdot (x^2)^5 + \frac{5}{112} \cdot (x^2)^7 + \frac{35}{1152} \cdot (x^2)^9 + \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow arcsen(x^2) = (x^2) + \frac{1}{6} \cdot x^6 + \frac{3}{40} \cdot x^{10} + \frac{5}{112} \cdot x^{14} + \frac{35}{1152} \cdot x^{18} + \ldots$$

Substituindo agora este desenvolvimento em **f (x)**, teremos o seguinte:

$$f(x) = \frac{arcsen(x^2)}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x^2) + \frac{1}{6} \cdot x^6 + \frac{3}{40} \cdot x^{10} + \frac{5}{112} \cdot x^{14} + \frac{35}{1152} \cdot x^{18} + \ldots}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{6} \cdot x^5 + \frac{3}{40} \cdot x^9 + \frac{5}{112} \cdot x^{13} + \frac{35}{1152} \cdot x^{17} + \ldots \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{6} \cdot x^5 + \frac{3}{40} \cdot x^9 + R_9(x),$$

porque se quer só até à ordem 9.

b) $f(x) = \dfrac{x}{sen(x)}$, até : n = 4

R:

Consultando o formulário vemos que:

$$sen(x) = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \frac{1}{9!} \cdot x^9 - \ldots$$

Substituindo agora este desenvolvimento em **f (x)**, teremos o seguinte:

$$f(x) = \frac{x}{sen(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \frac{1}{9!} \cdot x^9 - \ldots} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{3!}\cdot x^2+\frac{1}{5!}\cdot x^4-\frac{1}{7!}\cdot x^6+\frac{1}{9!}\cdot x^8-\ldots} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{3!}\cdot x^2+\frac{1}{5!}\cdot x^4+R_4(x)}$$

c) $f(x)=\log\left(x^2+3\right)$, até : $\mathrm{n}=8$

R:

Consultando o formulário, e admitindo que: $\log \equiv \ln$, vemos que:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{1}{5}\cdot x^5-\frac{1}{6}\cdot x^6+\frac{1}{7}\cdot x^7-\frac{1}{8}\cdot x^8+\ldots$$

Para aplicar o desenvolvimento anterior teremos que transformar $\ln\left(x^2+3\right)$ em algo semelhante a $\ln(1+x)$, pelo que teremos que efectuar a seguinte operação:

$$\ln\left(x^2+3\right)=\ln\left[3\cdot\left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{3}\right)\right]=\ln 3+\ln\left(\frac{x^2}{3}+1\right)=\ln 3+\ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right)$$

Substituindo então o valor de **x** por $\frac{x^2}{3}$ teremos que:

$$\ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right)=\left(\frac{x^2}{3}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x^2}{3}\right)^3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^2}{3}\right)^4+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x^2}{3}\right)^5-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x^2}{3}\right)^6+\ldots\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right)=\left(\frac{x^2}{3}\right)-\frac{1}{6}\cdot x^4+\frac{1}{9}\cdot x^6-\frac{1}{12}\cdot x^8+R_8(x)$$

5. Determine aplicando os desenvolvimentos limitados conhecidos de ordem n das seguintes funções e calcule o respectivo intervalo de convergência:

a) $f(x)=\frac{sen(x)}{x}$ **e** $x\neq 0$

R:

Consultando o formulário, podemos ver que o desenvolvimento em série para o **sen (x)** é dado por:

$$sen(x)=x-\frac{1}{3!}\cdot x^3+\frac{1}{5!}\cdot x^5-\frac{1}{7!}\cdot x^7+\frac{1}{9!}\cdot x^9-...$$

Ora, por aplicação directa na função **f (x)** teremos que:

$$f(x)=\frac{x-\frac{1}{3!}\cdot x^3+\frac{1}{5!}\cdot x^5-\frac{1}{7!}\cdot x^7+\frac{1}{9!}\cdot x^9-...}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{x}-\frac{\frac{1}{3!}\cdot x^3}{x}+\frac{\frac{1}{5!}\cdot x^5}{x}-\frac{\frac{1}{7!}\cdot x^7}{x}+\frac{\frac{1}{9!}\cdot x^9}{x}-...\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=1-\frac{1}{3!}\cdot x^2+\frac{1}{5!}\cdot x^4-\frac{1}{7!}\cdot x^6+\frac{1}{9!}\cdot x^8-...$$

Transformando agora a série obtida anteriormente num somatório teremos o seguinte:

- O termo **x** está elevado a números pares, o que implica que no somatório deveremos ter: x^{2n};

- O termo factorial progride de acordo com os números impares, pelo que no somatório também deveremos ter: $(2n+1)!$ ou $(2n-1)!$, *isto dependendo se o **n** começa em **0** ou em **1**, respectivamente*;

- Como a série alterna entre o sinal positivo e o negativo teremos que garantir também essa mudança de sinal adoptando o seguinte: $(-1)^n$, *sendo que quando* **n** *for impar temos o sinal negativo e quando for par temos o sinal positivo*;

- Fazendo agora a junção destes elementos teremos o seguinte somatório:

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x} = \sum_{n=?}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n?1)!} \text{ e } x \neq 0$$

- Agora temos que escolher o ponto de partida para **n**, isto é, se começa em **0**, em **1**, etc. Observando novamente a série, vemos que o primeiro termo é **1**, o segundo é $-\frac{1}{3!} \cdot x^2$, etc. logo podemos concluir que $n = 0$ e $(2n+1)!$ são os termos mais adequados ao somatório pelo que finalmente teremos:

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} \text{ e } x \neq 0$$

Para determinar o intervalo de convergência, com base no teorema $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x-c)^n$, vamos assinalar antes de mais os valores de $\mathbf{a_n}$ e **c**, para posteriormente calcular com base neles o **R** (raio):

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \\ c = 0 \end{array} \right\}$$

Assim sendo o raio R será:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \Leftrightarrow R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{[2(n+1)+1]!}} \right| \Leftrightarrow R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{[2(n+1)+1]!}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}\Leftrightarrow R=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+3)\cdot(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n+0)!}{(2n+1)\cdot(2n+0)!}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R=\lim_{n\to+\infty}(2n+3)\cdot(2n+2)\Leftrightarrow R=\lim_{n\to+\infty}\left(4n^2+10n+6\right)=+\infty$$

Logo teremos que: $x\in\left]c-R;c+R\right[\equiv x\in\left]0-\infty;0+\infty\right[\equiv x\in\left]-\infty;+\infty\right[\Rightarrow x\in\Re\setminus\{0\}$

b) $f(x)=\dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ **e** $x\neq 0$

R:

Consultando o formulário, podemos ver que o desenvolvimento em série para $\mathbf{e^x}$ é dado por:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}\cdot x^2+\frac{1}{3!}\cdot x^3+\frac{1}{4!}\cdot x^4+\frac{1}{5!}\cdot x^5+\frac{1}{6!}\cdot x^6+\ldots$$

Substituindo então o valor de **x** por $\mathbf{x^2}$ teremos que:

$$e^{x^2}=1+\left(x^2\right)+\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2\right)^2+\frac{1}{3!}\cdot\left(x^2\right)^3+\frac{1}{4!}\cdot\left(x^2\right)^4+\frac{1}{5!}\cdot\left(x^2\right)^5+\frac{1}{6!}\cdot\left(x^2\right)^6+\ldots$$

Assim sendo para $e^{x^2}-1$ teremos:

$$e^{x^2}-1=\left(1+\left(x^2\right)+\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2\right)^2+\frac{1}{3!}\cdot\left(x^2\right)^3+\frac{1}{4!}\cdot\left(x^2\right)^4+\frac{1}{5!}\cdot\left(x^2\right)^5+\frac{1}{6!}\cdot\left(x^2\right)^6+\ldots\right)-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2}-1=\left(x^2\right)+\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2\right)^2+\frac{1}{3!}\cdot\left(x^2\right)^3+\frac{1}{4!}\cdot\left(x^2\right)^4+\frac{1}{5!}\cdot\left(x^2\right)^5+\frac{1}{6!}\cdot\left(x^2\right)^6+\ldots\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2}-1=x^2+\frac{1}{2!}\cdot x^4+\frac{1}{3!}\cdot x^6+\frac{1}{4!}\cdot x^8+\frac{1}{5!}\cdot x^{10}+\frac{1}{6!}\cdot x^{12}+\ldots$$

Ora, por aplicação directa na função **f (x)** teremos que:

$$f(x)=\frac{x^2+\frac{1}{2!}\cdot x^4+\frac{1}{3!}\cdot x^6+\frac{1}{4!}\cdot x^8+\frac{1}{5!}\cdot x^{10}+\frac{1}{6!}\cdot x^{12}+\ldots}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=x+\frac{1}{2!}\cdot x^3+\frac{1}{3!}\cdot x^5+\frac{1}{4!}\cdot x^7+\frac{1}{5!}\cdot x^9+\frac{1}{6!}\cdot x^{11}+\ldots\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}\ \text{ e }\ x\neq 0$$

Para determinar o intervalo de convergência, com base no teorema $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\cdot(x-c)^n$, vamos assinalar antes de mais os valores de $\mathbf{a_n}$ e **c**, para posteriormente calcular com base neles o **R** (raio):

$$f(x)=\frac{e^{x^2}-1}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}\Rightarrow\begin{Bmatrix}a_n=\frac{1}{n!}\\ c=0\end{Bmatrix}$$

Assim sendo o raio R será:

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\Leftrightarrow R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right|\Leftrightarrow R=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\Leftrightarrow R=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\cdot n!}{n!}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R=\lim_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$$

Logo teremos que: $x\in\left]c-R;c+R\right[\equiv x\in\left]0-\infty;0+\infty\right[\equiv x\in\left]-\infty;+\infty\right[\Rightarrow x\in\Re\setminus\{0\}$

c) $f(x)=\dfrac{arctg(-x)}{x}$ **e** $x\neq 0$

R:

Consultando o formulário, podemos ver que o desenvolvimento em série para **arctg (x)** é dado por:

$$arctg(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-...$$

Substituindo então o valor de **x** por **-x** teremos que:

$$arctg(-x)=-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^9}{9}+...$$

Ora, por aplicação directa na função **f (x)** teremos que:

$$f(x)=\frac{-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^9}{9}+...}{x}\Leftrightarrow f(x)=-1+\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{5}+\frac{x^6}{7}-...\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n}}{(2n+1)};x\neq 0$$

Como o expoente de **x** é **2n**, logo diferente de **n**, então teremos que recorrer ao tradicional critério da razão, pelo que:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{[2\cdot(n+1)+1]}\cdot x^{2\cdot(n+1)}}{\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\cdot x^{2n}}\right|<1\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(2n+3)}\cdot x^{2n+2}}{\frac{1}{(2n+1)}\cdot x^{2n}}<1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)\cdot x^{2n}\cdot x^2}{(2n+3)\cdot x^{2n}}<1\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)\cdot x^2}{(2n+3)}<1\Leftrightarrow[4]$$

[4] Uma vez que a variável do limite é o **n**, então podemos tratar x^2 como uma constante e por conseguinte podemos passar essa constante para fora do limite.

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)}{(2n+3)} < 1 \Leftrightarrow x^2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2n}{n}+\frac{3}{n}\right)} < 1 \Leftrightarrow x^2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(2+\frac{3}{n}\right)} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \frac{\left(2+\frac{1}{+\infty}\right)}{\left(2+\frac{3}{+\infty}\right)} < 1 \Leftrightarrow x^2 \cdot \frac{(2+0)}{(2+0)} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x < \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x < 1 \wedge x > -1$$

Logo a série é convergente em $x \in [-1;1] \setminus \{0\}$.

6. Aplicando os desenvolvimentos limitados conhecidos, calcule:

a) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

R:

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{6!}-\ldots = \frac{1}{2!}-\frac{0^2}{4!}+\frac{0^3}{6!}-\ldots = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2\times1} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x} \cdot \left(\cot g(x) - \frac{1}{x}\right)$

R:

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x} \cdot \left(\cot g(x) - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0} \frac{1}{x} \cdot \left(\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\ldots\right)-\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\ldots\right) = \lim_{x\to0} \left(-\frac{x}{3x}-\frac{x^3}{45x}-\frac{2x^5}{945x}-\ldots\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{3} - \frac{x^2}{45} - \frac{2x^4}{945} - \ldots \right) = -\frac{1}{3}$$

c) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{sen^2(x)}{x^4} \right)$

R:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{sen^2(x)}{x^4} \right) =$$

d) $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$

R: