Ficha nº6

1. Fórmula de Taylor

1. $f(x,y) = xy^2$; ponto $(1,2)$

$$P_2(x,y) = f(1,2) + f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2) + \frac{1}{2!}\Big[f''_{x^2}(1,2)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,2)(x-1)(y-2) + f''_{y^2}(1,2)(y-2)^2\Big]$$

$f(x,y) = xy^2$ $\qquad$ $f(1,2) = 4$

$f'_x(x,y) = y^2$ $\qquad$ $f'_x(1,2) = 4$

$f'_y(x,y) = 2xy$ $\qquad$ $f'_y(1,2) = 4$

$f''_{x^2}(x,y) = 0$ $\qquad$ $f''_{x^2}(1,2) = 0$

$f''_{xy}(x,y) = 2y$ $\qquad$ $f''_{xy}(1,2) = 4$

$f''_{y^2}(x,y) = 2x$ $\qquad$ $f''_{y^2}(1,2) = 2$

Assim,

$$P_2(x,y) = 4 + 4(x-1) + 4(y-2) + \frac{1}{2}\Big[8(x-1)(y-2) + 2(y-2)^2\Big]$$

$$P_2(x,y) = 4 + 4(x-1) + 4(y-2) + 4(x-1)(y-2) + (y-2)^2.$$

2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad$ $(1,2) \to$ ponto

$f(1,2) = \sqrt{5}$

$f'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad$ $f'_x(1,2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$f'_y(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad$ $f'_y(1,2) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$f''_{x^2}(x,y) = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad$ $f''_{x^2}(1,2) = \dfrac{4\sqrt{5}}{25}$

$f''_{y^2}(x,y) = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad$ $f''_{x^2}(1,2) = \dfrac{1}{5\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{25}$

$f''_{xy}(x,y) = \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad$ $f''_{xy}(1,2) = \dfrac{-2}{5\sqrt{5}} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$

$$P_2(x,y) = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{5}(x-1) + \frac{2\sqrt{5}}{5}(y-2) + \frac{1}{2}\left[\frac{4\sqrt{5}}{25}(x-1)^2 - \frac{4\sqrt{5}}{25}(x-1)(y-2) + \frac{\sqrt{5}}{25}(y-2)^2\right]$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\left[5 + (x-1) + 2(y-2) + \frac{1}{5}\left[2(x-1)^2 - 2(x-1)(y-2) + \frac{1}{2}(y-2)^2\right]\right]$$

$$\sqrt{(1.02)^2+(1.97)^2} = f(1.02, 1.97) \approx P_2(1.02, 1.97)$$

E $\quad P_2(1.02, 1.97) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[5 + (0.02) + 2(-0.03) + \dfrac{1}{5}\left[2(0.02)^2 + 2\times 0.02\times 0.03 + \dfrac{1}{2}(-0.03)^2\right]\right]$

$$f(1.02, 1.97) \approx P_2(1.02, 1.97) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[4.96049\right]$$

3. a) $f(x,y) = \dfrac{1}{2+x-2y}$ grau 3 $(2,1)$

$f(2,1) = \dfrac{1}{2+2-2} = \dfrac{1}{2}$

$f'_x(x,y) = -\dfrac{1}{(2+x-2y)^2}$ $\qquad f'_x(2,1) = -\dfrac{1}{4}$

$f'_y(x,y) = \dfrac{2}{(2+x-2y)^2}$ $\qquad f'_y(2,1) = \dfrac{1}{2}$

$f''_{x^2}(x,y) = \dfrac{2}{(2+x-2y)^3}$ $\qquad f''_{x^2}(2,1) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

$f''_{y^2}(x,y) = \dfrac{8}{(2+x-2y)^3}$ $\qquad f''_{y^2}(2,1) = \dfrac{8}{8} = 1$

$f''_{xy}(x,y) = \dfrac{-4}{(2+x-2y)^3}$ $\qquad f''_{xy}(2,1) = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2}$

$f'''_{x^3}(x,y) = \dfrac{-6}{(2+x-2y)^4}$ $\qquad f'''_{x^3}(2,1) = -\dfrac{6}{16} = -\dfrac{3}{8}$

$f'''_{x^2y}(x,y) = \dfrac{-12}{(2+x-2y)^4}$ $\qquad f'''_{x^2y}(2,1) = \dfrac{-12}{16} = -\dfrac{3}{4}$

$f'''_{y^3}(x,y) = \dfrac{48}{(2+x-2y)^4}$ $\qquad f'''_{y^3}(2,1) = \dfrac{48}{16} = 3$

$f'''_{y^2x}(x,y) = \dfrac{-24}{(2+x-2y)^4}$ $\qquad f'''_{y^2x}(2,1) = \dfrac{-24}{16} = -\dfrac{3}{2}$

$$P_3(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}(y-2) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(x-2)^2 - (x-2)(y-1) + (y-1)^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[-\frac{3}{8}(x-2)^3 - \frac{9}{4}(x-2)^2(y-1) - \frac{9}{2}(x-2)(y-1)^2 + 3(y-1)^3\right].$$

3 b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ grau 3 $(1,0)$

$f(1,0) = 0$

$f'_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$ $\qquad f'_x(1,0) = 2$

$f'_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$ $\qquad f'_y(1,0) = 0$

$f''_{x^2}(x,y) = \dfrac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad f''_{x^2}(1,0) = -2$

$f''_{xy}(x,y) = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad f''_{xy}(1,0) = 0$

$f''_{y^2}(x,y) = \dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad f''_{y^2}(1,0) = 2$

$f'''_{x^3}(x,y) = \dfrac{4x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ $\qquad f'''_{x^3}(1,0) = 4$

$f'''_{x^2y}(x,y) = \dfrac{4y[3x^2-y^2]}{(x^2+y^2)^3}$ $\qquad f'''_{x^2y}(1,0) = 0$

$f'''_{y^3}(x,y) = \dfrac{-4y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ $\qquad f'''_{y^3}(1,0) = 0$

; $f'''_{y^2x}(x,y) = \dfrac{4x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} \Rightarrow f'''_{y^2x}(1,0) = -4$

$P_3(x,y) = 0 + 2(x-1) + \frac{1}{2}\left[-2(x-1)^2 + 2(y^2)\right] + \frac{1}{3!}\left[4(x-1)^3 - 3\times 4(x-1)y^2\right]$

$P_3(x,y) = 2(x-1) - (x-1)^2 + y^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 + 2(x-1)y^2$

3. c) $f(x,y)=\int_0^{x+y^2} e^{-t^2}\,dt$ grau 3 $(0,0)$

$f(0,0)=\int_0^0 e^{-t^2}\,dt=0$

$f'_x(x,y)=e^{-(x+y^2)^2}$ $\quad f'_x(0,0)=e^{-0}=1$

$f'_y(x,y)=2y\,e^{-(x+y^2)^2}$ $\quad f'_y(0,0)=0$

$f''_{x^2}(x,y)=-2(x+y^2)\,e^{-(x+y^2)^2}$ $\quad f''_{x^2}(0,0)=0$

$f''_{y^2}(x,y)=2e^{-(x+y^2)^2}-2y\cdot 2\cdot 2y\,(x+y^2)\cdot e^{-(x+y^2)^2}$ $\quad f''_{y^2}(0,0)=2$

$f''_{xy}(x,y)=-4y\,(x+y^2)\,e^{-(x+y^2)^2}$ $\quad f''_{xy}(0,0)=0$

$f'''_{x^3}(x,y)=-2e^{-(x+y^2)^2}+2(x+y^2)^2\,e^{-(x+y^2)^2}$ $\quad f'''_{x^3}(0,0)=-2$

$f'''_{y^3}(x,y)=-8y\,(x+y^2)\,e^{-(x+y^2)^2}-8\left[2y\,(x+y^2)\,e^{-(x+y^2)^2}+y^2\cdot 2y\,e^{-(x+y^2)^2}-y^2(x+y^2)\cdot 4y\,(x+y^2)\cdot e^{-(x+y^2)^2}\right]$

$f'''_{y^3}(0,0)=0$

$f'''_{x^2y}=-2\left[2y\,e^{-(x+y^2)^2}-(x+y^2)^2\,4y\,e^{-(x+y^2)^2}\right]$ $\quad f'''_{x^2y}(0,0)=0$

$f'''_{y^2x}=2\left[-2(x+y^2)\,e^{-(x+y^2)^2}-4y\,e^{-(x+y^2)^2}+8y\,(x+y^2)^2\,e^{-(x+y^2)^2}\right]$

$f'''_{y^2x}(0,0)=0$

$P_3(x,y)=0+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}\left(-2x^3\right)=x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$

3 d) $f(x,y) = \frac{\operatorname{sen} x}{y}$ grau 2 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ (6)

$f(\pi/2, 1) = 1$

$f'_x(x,y) = \frac{\cos x}{y}$ $f'_x(\pi/2, 1) = 0$

$f'_y(x,y) = -\frac{\operatorname{sen} x}{y^2}$ $f'_y(\pi/2, 1) = -1$

$f''_{x^2}(x,y) = \frac{-\operatorname{sen} x}{y}$ $f''_{x^2}(\pi/2, 1) = -1$

$f''_{y^2}(x,y) = \frac{2 \operatorname{sen} x}{y^3}$ $f''_{y^2}(\pi/2, 1) = 2$

$f''_{xy}(x,y) = -\frac{\cos x}{y^2}$ $f''_{xy}(\pi/2, 1) = 0$

$$P_2(x,y) = 1 - (y-1) + \frac{1}{2!}\left[-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2(y-1)^2\right] =$$

$$P_2(x,y) = 1 - (y-1) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + (y-1)^2.$$

~~Ex~~

Extremos livres

1.a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

$$\begin{cases} f'_x = 2x + y + 1 = 0 \\ f'_y = x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 - 2x \\ x + 2(-1-2x) - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{—} \\ -3x - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 + 2 = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

1 Ptº crítico $(-1,1)$

Classificar o ptº crítico

$f''_{x^2} = 2$; $f''_{y^2} = 2$; $f''_{xy} = 1$

$$H(-1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$|H(-1,1)| = 3 > 0$, logo $(-1,1)$ é extremante.

Como $f''_{x^2}(-1,1) = 2 > 0$, $(-1,1)$ é ~~maximizante~~ minimizante local, logo $f(-1,1) = 0$ é mínimo local da função.

1.b) $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 6axy$

se $a \neq 0$

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2 - 6ay = 0 \\ f'_y = 6y^2 - 6ax = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{x^2}{a} \\ 6\frac{x^4}{a^2} - 6ax = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{—} \\ 6x\left(\frac{x^3}{a^2} - a\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{—} \\ x = 0 \vee x^3 = a^3 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{—} \\ x = 0 \vee x = a \end{cases}$$

se $x = 0 \Rightarrow y = 0$ $(0,0)$

se $x = a \Rightarrow y = a$ (a,a)

Quando $\underline{\underline{a \neq 0}}$, f tem dois ptºs críticos $(0,0)$ e (a,a)

$f''_{x^2} = 12x$

$f''_{y^2} = 12y$

$f''_{xy} = -6a$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -6a \\ -6a & 0 \end{bmatrix}$$

$|H(0,0)| = -36a^2 < 0$, logo $(0,0)$ é ptº de sela de f.

$$H(a,a)=\begin{bmatrix}12a & -6a\\ -6a & 12a\end{bmatrix}$$

$|H(a,a)| = 108a^2>0$

logo f tem um extremo local em (a,a)

- Se $a>0$, $f''_{x^2}(a,a)>0$ e $f(a,a)=-2a^3$ é mínimo local de f.
- se $a<0$, $f''_{x^2}(a,a)<0$ e $f(a,a)=-2a^3$ é máximo local de f.

Quando $a=0$, f ~~tb~~ tem um ptº crítico $(0,0)$ que é caso duvidoso ~~ptº de sela~~.

pois $|H(0,0)|=-36a^2=0$.

1.c) $f(x,y,z)=2x^2+y^2+4z^2$

$f'_x=4x=0$ $\quad$ $(0,0,0)$ é ptº crítico

$f'_y=2y=0$

$f'_z=8z=0$

$$H(0,0,0)=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{bmatrix}$$

$f''_{x^2}=4$

$f''_{y^2}=2$

$f''_{z^2}=8$

$f''_{xy}=f''_{xz}=f''_{yz}=0$

Como $|H(0,0,0)|=64$, $\begin{vmatrix}4&0\\0&2\end{vmatrix}=8$ e $f''_{x^2}(0,0,0)=4$

têm todos o mesmo sinal, então

f tem um mínimo local em $(0,0,0)$

$f(0,0,0)=0$

1.d) $f(x,y)=x^2y^2-2xy$

$$\begin{cases}f'_x=2xy^2-2y=0\\ f'_y=2yx^2-2x=0\end{cases}\quad\begin{cases}2y(xy-1)=0\\ \text{---}\end{cases}\quad\begin{cases}y=0 \quad\vee\quad xy=1\\ \end{cases}$$

se $y=0 \Rightarrow \begin{cases}\text{---}\\ x=0\end{cases}$ $\quad(0,0)$

se $xy=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{x}$ (com $x\neq0$)

$$\begin{cases}\text{---}\\ 2\frac{1}{x}x^2-2x=0\end{cases}\quad\begin{cases}\\ 0x=0\end{cases}\quad\text{(indeterminação)}$$

pt^{os} críticos $(0,0)$ e $\{(x,\frac{1}{x}) : x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$

Classificar os pt^{os} críticos:

- $\{(x,\frac{1}{x}) : x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ $\rightarrow$ consideramos caso duvidoso. Ainda é necessário estudar melhor.

- $(0,0)$

$f''_{x^2} = 2y^2$

$f''_{y^2} = 2x^2$

$f''_{xy} = 4xy - 2$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$|H(0,0)| = -4 < 0$, logo $(0,0)$ é pt^o de sela.

e) $f(x,y) = (x-y)^2 - x^4 - y^4$

$f'_x = 2(x-y) - 4x^3 = 0$

$f'_y = -2(x-y) - 4y^3 = 0$

$$\begin{cases} x-y = 2x^3 \\ x-y = -2y^3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^3 = -2y^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 = -y^3 \end{cases}$$

em $\mathbb{R}$, $x^3 = -y^3 \Leftrightarrow x = -y$

$$\begin{cases} x = -y \\ -2(-2y) - 4y^3 = 0 \end{cases} \begin{cases} \text{———} \\ 4y - 4y^3 = 0 \end{cases} \begin{cases} 4y(1-y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \vee y = 1 \vee y = -1$$

se $y = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad (0,0)$

se $y = 1 \Rightarrow x = -1$ $\quad (-1,1)$

se $y = -1 \Rightarrow x = 1$ $\quad (1,-1)$

pt^{os} críticos: $(0,0)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$

Classificar os pt^{os} críticos

$f''_{x^2} = 2 - 12x^2$

$f''_{y^2} = 2 - 12y^2$

$f''_{xy} = -2$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$|H(0,0)| = 4 - 4 = 0$ (nada se pode concluir sobre o pt^o $(0,0)$)

Extr. livres

$$H(-1,1) = \begin{bmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} = H(1,-1)$$

$|H(-1,1)| = |H(1,-1)| = 96 > 0$. logo $(-1,1)$ e $(1,-1)$ são extremantes locais de f.

Como $f''_{x^2}(1,-1) = f''_{x^2}(-1,1) = -10 < 0$ então $f(-1,1) = 2 = f(1,-1)$ é máximo local de f.

f) $f(x,y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4$

$$\begin{cases} f'_x = -8xy + 12x^3 = 0 \\ f'_y = 2y - 4x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{---} \\ y = 2x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} -16x^3 + 12x^3 = 0 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^3 = 0 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ é ptº crítico de f.

$f''_{x^2} = -8y + 36x^2$

$f''_{xy} = -8x$

$f''_{y^2} = 2$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad |H(0,0)| = 0$$

Como $|H(0,0)| = 0$, nada se pode concluir com este teste.

g) $f(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$

$f'_x = 2y - 6x = 0$
$f'_y = 2x - 4y = 0$
$\begin{cases} x = y = 0 \end{cases}$ pt° crítico é $(0,0)$

$f''_{x^2} = -6$
$f''_{y^2} = -4$
$f''_{xy} = -2$

$H(0,0) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

$|H(0,0)| = 20 > 0$, logo há um extremo local em $(0,0)$

e $f(0,0) = 10$ é um máximo local de f pois $f''_{x^2}(0,0) = -6 < 0$.

h) $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$

$f'_x = 4x(x^2+y^2-1) = 0$
$f'_y = 4y(x^2+y^2-1) = 0$
$\begin{cases} x = 0 \quad \vee \quad x^2+y^2 = 1 \end{cases}$

se $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 4y(y^2-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \vee y = \pm 1$

$(0,0)$ $(0,1)$ $(0,-1)$

se $x^2+y^2 = 1$ $\begin{cases} \text{———} \\ 0y = 0 \end{cases}$ indeterminação

pt°s críticos: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ e a curva $x^2+y^2=1$

Considera-se caso duvidoso.

$f''_{x^2} = 4(3x^2+y^2-1)$
$f''_{y^2} = 4(3y^2+x^2-1)$
$f''_{xy} = 8xy$

$H(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

$|H(0,0)| = 16 > 0$, $(0,0)$ é extremante local.

Como $f''_{x^2}(0,0) = -4 < 0$, $(0,0)$ é maximizante local

$f(0,0) = 10$ é máximo local.

Extr. livres

$$H(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$|H(0,1)| = 0$

Em $(0,1)$, nada se pode concluir sobre o comportamento de f.

$$H(0,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$|H(0,-1)| = 0 \rightarrow$ também nada se pode concluir.

Nota: pontos estão também na curva $x^2+y^2=1$.

i) $f(x,y) = \frac{9}{4}y^2 - 3x^2y + x^4 - x^5$

$$\begin{cases} f'_x = -6xy + 4x^3 - 5x^4 = 0 \\ f'_y = \frac{9}{2}y - 3x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{—} \\ y = \frac{2}{3}x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} -6x\left(\frac{2}{3}x^2\right) + 4x^3 - 5x^4 = 0 \\ \text{—} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x^3 + 4x^3 - 5x^4 = 0 \\ \text{—} \end{cases} \quad \begin{cases} -5x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \qquad\qquad y = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ pt° crítico.

$f''_{x^2} = -6y + 12x^2 - 20x^3$

$f''_{y^2} = \frac{9}{2}$

$f''_{xy} = -6x$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

$|H(0,0)| = 0$ Em $(0,0)$, nada se pode concluir sobre o comportamento de f.

j) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x+y)^2$

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 4(x+y) = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 4(x+y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 = x+y \\ \text{—} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 4y^3 - 4x^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{—} \\ y = x \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 = 2x \\ \text{—} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^2-2) = 0 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \lor x = \sqrt{2} \lor x = -\sqrt{2} \\ \end{cases}$$

$(0,0)$ $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

Extr. livres

$$f''_{x^2} = 12x^2-4 \qquad H(0,0)=\begin{bmatrix}-4 & -4\\ -4 & -4\end{bmatrix} \qquad |H(0,0)|=0 \to$$ caso duvidoso em $(0,0)$

$$f''_{y^2}=12y^2-4$$

$$f''_{xy}=-4 \qquad H(\sqrt{2},\sqrt{2})=\begin{bmatrix}20 & -4\\ -4 & 20\end{bmatrix} \qquad |H(\sqrt{2},\sqrt{2})|=416>0$$

existe extremo local em $(\sqrt{2},\sqrt{2})$

Como $f''_{x^2}(\sqrt{2},\sqrt{2})=20>0$ existe mínimo local em $(\sqrt{2},\sqrt{2})$

$f(\sqrt{2},\sqrt{2})=2^2+2^2-2(2\sqrt{2})^2=-8$ é mínimo local.

De modo idêntico, existe mínimo local em ~~$f(-\sqrt{2},-\sqrt{2})=-8$~~ $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

2. $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+10-2x+\cos^2 z-8y$

$$\begin{aligned}\phi'_x &= 2x-2=0\\ \phi'_y &= 2y-8=0\\ \phi'_z &= -2.\operatorname{sen} z.\cos z=0\end{aligned} \quad \begin{cases} x=1\\ y=4\\ \operatorname{sen} z=0 \vee \cos z=0\end{cases} \quad z=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Pt^o críticos $\left(1,4,\frac{k\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

$$\phi''_{x^2}=2$$

$$\phi''_{y^2}=2 \qquad H(x,y,z)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2(\cos^2 z-\operatorname{sen}^2 z)\end{bmatrix}$$

$$\phi''_{z}=-2(\cos^2 z-\operatorname{sen}^2 z)$$

$$\phi''_{xy}=\phi''_{xz}=\phi''_{yz}=0$$

$$|H(x,y,z)|=-8(\cos^2 z-\operatorname{sen}^2 z)$$

$$\left|H\left(1,4,\frac{k\pi}{2}\right)\right|=-8\left(\cos^2\frac{k\pi}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2}\right)$$

se k par $\Rightarrow -8(1-0)=-8 \to$ ñ há extremo.

se k ímpar $\Rightarrow -8(0-1)=8 \to$ Como os determinantes são todos positivos, então há mínimo local em P.

<u>Extr. livres</u>

$\left(1,4,\frac{k\pi}{2}\right)$ com k par → são pontos de sela

$\left(1,4,\frac{k\pi}{2}\right)$ com k ímpar são minimizantes locais de f.

4. $\begin{cases} u'_t = x \cdot u(x,t) \\ u'_x = t \cdot u(x,t) \end{cases}$ $\quad u(0,c) = 1$ $\quad \left\{ \right.$ função u com estas características.

~~Determinar ptos críticos~~ Verificar ~~quais~~ se $(0,c)$ é extremante local:

$$\begin{cases} u'_t(0,c) = 0 \times u(0,c) = 0 \times 1 = 0. \\ u'_x(0,c) = 0 \times u(0,c) = 0 \times 1 = 0 \end{cases}$$

logo $(0,c)$ é ptº crítico.

$$u''_{t^2} = \left(x \cdot u(x,t)\right)'_t = x \cdot u'_t(x,t) = x\left(x \cdot u(x,t)\right) = x^2 \cdot u(x,t)$$

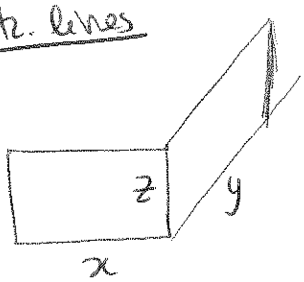
$$u''_{x^2} = \left(t \cdot u(x,t)\right)'_x = t \cdot u'_x(x,t) = t\left(t \cdot u(x,t)\right) = t^2 \cdot u(x,t)$$

$$u''_{xt} = \left(x \cdot u(x,t)\right)'_x = u(x,t) + x \cdot u'_x(x,t) = u(x,t) + xt \cdot u(x,t)$$
$$= u(x,t)\left(1 + xt\right)$$

$$H(0,c) = \begin{bmatrix} u''_{x^2}(0,c) & u''_{xt}(0,c) \\ u''_{tx}(0,c) & u''_{t^2}(0,c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \times 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$|H(0,0)| = -1 < 0$ logo $(0,c)$ é ptº de sela.

5. <u>extr. livres</u>



Volume V : $xyz = V \Leftrightarrow z = \frac{V}{xy}$

Encontrar mínimo da função que representa a área da superfície $f(x,y,z)$

$$f(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy$$

$$f(x,y) = \frac{2xV}{xy} + \frac{2yV}{xy} + xy = \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} + xy$$

$$f'_x = \frac{-2V}{x^2} + y = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{2V}{x^2} \\ \text{—} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{—} \\ \frac{-2V}{\frac{4V^2}{x^4}} + x = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{—} \\ -\frac{x^4}{2V} + x = 0 \end{array} \right.$$

$$f'_y = \frac{-2V}{y^2} + x = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{—} \\ x\left(\frac{-x^3}{2V} + 1\right) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ x = 0 \vee x^3 = 2V \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt[3]{2V} \right.$$

se $x = 0 \Rightarrow$ impossível

se $x = \sqrt[3]{2V} \Rightarrow y = \frac{2V}{\sqrt[3]{(2V)^2}} = \sqrt[3]{\frac{(2V)^3}{(2V)^2}} = \sqrt[3]{2V}$

pt^o crítico $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$

$$f''_{x^2} = \frac{4V}{x^3} \qquad H\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \left|H\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)\right| = 3 > 0$$

$$f''_{y^2} = \frac{4V}{y^3}$$

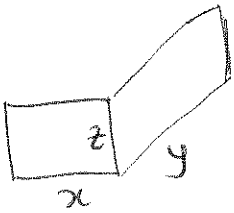
e $f''_{x^2}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = 2 > 0$

$$f''_{xy} = 1$$

logo $f\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = \frac{10V}{\sqrt[3]{2V}}$ é mínimo da área

para $x = \sqrt[3]{2V}$, $y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \sqrt[3]{\frac{V}{2}}$.

6.



Volume V : $xyz = V$

Custo do material para fazer a caixa :

$2(xy + 2xz + 2yz) + xy + 2xz + 2yz$

Má interpretação

$C(x,y,z) = 3xy + 2xz + 2yz$

$C(x,y) = 3xy + \frac{2xV}{xy} + \frac{2yV}{xy} = 3xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$

$C'_x = 3y - \frac{2V}{x^2} = 0$

$C'_y = 3x - \frac{2V}{y^2} = 0$

$\begin{cases} y = \frac{2V}{3x^2} \\ 3x - \frac{9x^4}{2V} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{———} \\ 3x\left(1 - \frac{3x^3}{2V}\right) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \\ x = 0 \vee x^3 = \frac{2V}{3} \end{cases}$

$x = 0$ impossível para o problema.

$x = \sqrt[3]{\frac{2V}{3}} = y$

Ptº crítico $\left(\sqrt[3]{\frac{2V}{3}}, \sqrt[3]{\frac{2V}{3}}\right)$

$C''_{x^2} = \frac{4V}{x^3}$

$C''_{y^2} = \frac{4V}{y^3}$

$C''_{xy} = 3$

$H\left(\sqrt[3]{\frac{2V}{3}}, \sqrt[3]{\frac{2V}{3}}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Como $\left|H\left(\sqrt[3]{\frac{2V}{3}}, \sqrt[3]{\frac{2V}{3}}\right)\right| = 27 > 0$

e $C''_{x^2}(\ ,\ ) = 6 > 0$

logo o mínimo é atingido quando

$x = \sqrt[3]{\frac{2V}{3}}$ $y = \sqrt[3]{\frac{2V}{3}}$, $z = \sqrt[3]{\frac{9V}{4}}$

Extremos condicionados

1.a) $f(x,y) = \log xy$ com $2x+3y=5$ $\quad xy \neq 0$

$$L(\lambda,x,y) = \log xy + \lambda(2x+3y-5)$$

$$L'_x = \frac{y}{xy} + 2\lambda = 0 \qquad \begin{cases} \frac{1}{x} + 2\lambda = 0 \\ \frac{1}{y} + 3\lambda = 0 \\ 2x+3y-5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{3\lambda} \\ -\frac{2}{2\lambda} - \frac{3}{3\lambda} - 5 = 0 \end{cases}$$

$$L'_y = \frac{x}{xy} + 3\lambda = 0$$

$$L'_\lambda = 2x+3y-5=0$$

$$\begin{cases} - \\ - \\ -\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ \\ -\frac{2}{\lambda} - 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5}{4} \quad \wedge y = \frac{5}{6} \\ \uparrow \\ \lambda = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Ptº crítico de L : $\left(-\frac{2}{5}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$

$L''_{\lambda^2} = 0 \quad L''_{\lambda x} = 2 \quad L''_{\lambda y} = 3$

$L''_{x^2} = -\frac{1}{x^2} \quad L''_{xy} = 0$

$L''_{y^2} = -\frac{1}{y^2}$

$$H\left(-\frac{2}{5}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -\frac{16}{25} & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{36}{25} \end{bmatrix}$$

$$\left|H\left(-\frac{2}{5}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)\right| = -2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -\frac{36}{25} \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -\frac{16}{25} \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times 2 \times \left(-\frac{36}{25}\right) + 3 \times 3 \times \frac{16}{25} > 0$$

$\left(-\frac{2}{5}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$ é maximizante ~~[illegible]~~

$$f\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) = \log\left(\frac{25}{24}\right)$$

1.b) $f(x,y)=xy$ sob a condição $x^2+y^2=2a^2$

$$L(\lambda,x,y)=xy+\lambda(x^2+y^2-2a^2)$$

$$\begin{cases} L'_\lambda = x^2+y^2-2a^2=0 \\ L'_x = y+2x\lambda=0 \\ L'_y = x+2y\lambda=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{—} \\ y=-2x\lambda \\ x-4x\lambda^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} = \\ = \\ x(1-4\lambda^2)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ \\ x=0 \vee \lambda^2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Se $x=0 \Rightarrow \begin{cases} 0+y^2-2a^2=0 \\ y=0 \\ \text{—} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a^2=0 \end{cases}$ Só se $a=0$.

Mas se $a=0$, $x^2+y^2=0$ é apenas um ponto.

Se $\lambda=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ y+x=0 \\ \text{—} \end{cases} \begin{cases} \text{—} \\ y=-x \\ \text{—} \end{cases} \begin{cases} x^2+x^2=2a^2 \\ = \\ = \end{cases} \begin{cases} x^2=a^2 \Leftrightarrow x=\pm a \\ \\ \end{cases}$

$\left(\frac{1}{2},a,-a\right)$ $\left(\frac{1}{2},-a,a\right)$

Se $\lambda=-\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ y-x=0 \\ \text{—} \end{cases} \begin{cases} \text{—} \\ y=x \\ \text{—} \end{cases} \begin{cases} 2x^2=2a^2 \\ \\ \end{cases} \begin{cases} x=\pm a \\ \\ \end{cases}$

$\left(-\frac{1}{2},a,a\right)$ $\left(-\frac{1}{2},-a,-a\right)$

$L''_{\lambda^2}=0$ $L''_{\lambda x}=2x$ $L''_{\lambda y}=2y$

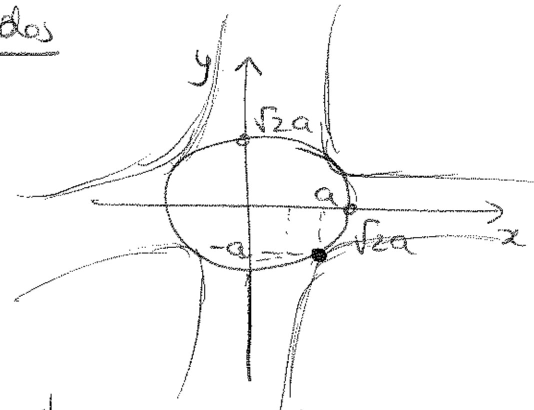
$L''_{x^2}=2\lambda$ $L''_{xy}=1$

$L''_{y^2}=2\lambda$

$$H\left(\frac{1}{2},a,-a\right)=\begin{bmatrix} 0 & 2a & -2a \\ 2a & 1 & 1 \\ -2a & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left|H\left(\frac{1}{2},a,-a\right)\right| = -16a^2<0$$

$\left(\frac{1}{2},a,-a\right)$ é minimizante.

Extr. condicionados



Os pontos críticos são pontos onde as curvas de nível $xy=k$, $k\in\mathbb{R}$ são tangentes à curva $x^2+y^2=2a^2$.

$$H\left(\frac{1}{2},-a,a\right)=\begin{bmatrix}0 & -2a & 2a\\ -2a & 1 & 1\\ 2a & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$\left|H\left(\frac{1}{2},-a,a\right)\right|=-16a^2<0$

$\left(\frac{1}{2},-a,a\right)$ é minimizante.

$$H\left(-\frac{1}{2},a,a\right)=\begin{bmatrix}0 & 2a & 2a\\ 2a & -1 & 1\\ 2a & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$\left|H\left(-\frac{1}{2},a,a\right)\right|=16a^2>0$, logo $\left(-\frac{1}{2},a,a\right)$ é maximizante

$$H\left(-\frac{1}{2},-a,-a\right)=\begin{bmatrix}0 & -2a & -2a\\ -2a & -1 & 1\\ -2a & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$\left|H\left(-\frac{1}{2},-a,-a\right)\right|=16a^2$

logo $\left(-\frac{1}{2},-a,-a\right)$ é maximizante

Assim $(-a,a)$ e $(a,-a)$ são os pontos da curva $x^2+y^2=2a^2$ onde f atinge o seu mínimo $f(-a,a)=f(a,-a)=-a^2$

(a,a) e $(-a,-a)$ são os pontos da curva $x^2+y^2=2a^2$ onde f atinge o seu máximo $f(a,a)=f(-a,-a)=a^2$.

c) $f(x,y)=x^2+y^2$ sob a condição $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

$$L(\lambda,x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1\right)$$

$L'_\lambda=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1=0$

$L'_x=2x+\frac{\lambda}{2}=0$

$L'_y=2y+\frac{\lambda}{3}=0$

$$\begin{cases}-\frac{\lambda}{8}-\frac{\lambda}{18}-1=0\\ x=-\frac{\lambda}{4}\\ y=-\frac{\lambda}{6}\end{cases}\qquad\begin{cases}-\frac{9\lambda}{72}-\frac{4\lambda}{72}-1=0\\ =\\ \end{cases}\qquad\begin{cases}-\frac{13\lambda}{72}=1\\ =\\ \end{cases}$$

Extr. cond.

6

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{72}{13} \\ x = \dfrac{18}{13} \\ y = \dfrac{12}{13} \end{cases}$$

$\left(-\frac{72}{13}, \frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right) = \left(-\frac{72}{13}, \frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right)$

$L''_{\lambda^2} = 0 \quad L''_{\lambda x} = \frac{1}{2} \quad L''_{\lambda y} = \frac{1}{3}$

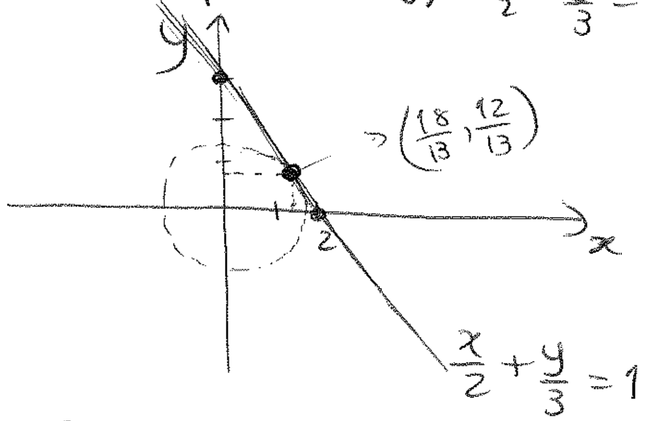
$L''_{x^2} = 2 \quad L''_{xy} = 0$

$L''_{y^2} = 2$

$$H\left(-\frac{72}{13}, \frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1/2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left|H\left(-\frac{72}{13}, \frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right)\right| = -\frac{5}{6} < 0$$

Em $\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right)$ há um mínimo da função f para todos os pontos (x,y): $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$



$\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right)$ é o ponto de tangência entre a recta $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ e uma curva de nível $x^2+y^2=k$, neste caso,

$$x^2+y^2 = \frac{468}{169} = \frac{36}{13}$$

2. $z = x+2y \qquad x^2+y^2=5$

$$L(\lambda, x, y) = x+2y + \lambda\left(x^2+y^2-5\right)$$

$$\begin{cases} L'_\lambda = x^2+y^2-5=0 \\ L'_x = 1+2x\lambda = 0 \\ L'_y = 2+2y\lambda = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}-5=0 \\ x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5}{4\lambda^2}-5=0 \\ \text{——} \\ \text{——} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda^2 = \frac{1}{4} \\ \text{——} \\ \text{——} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \vee \lambda = -\frac{1}{2} \\ \\ \end{cases}$$

se $\lambda = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ $\quad \left(\frac{1}{2}, -1, -2\right)$

se $\lambda = -\frac{1}{2}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ $\quad \left(-\frac{1}{2}, 1, 2\right)$

$L''_{\lambda^2} = 0 \quad L''_{\lambda x} = 2x \quad L''_{\lambda y} = 2y$

$L''_{x^2} = 2\lambda \quad L''_{xy} = 0$

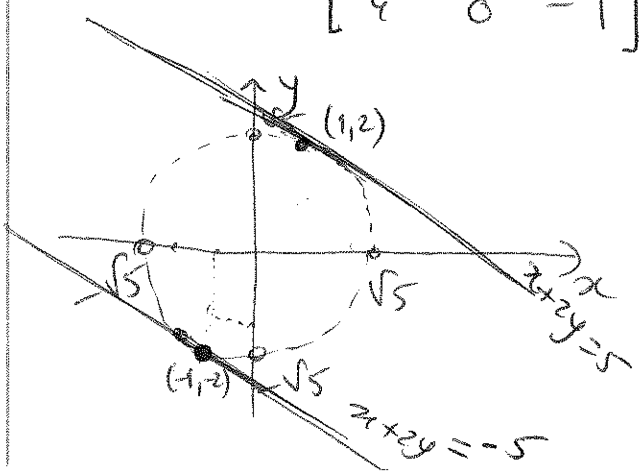
$L''_{y^2} = 2\lambda$

$$H\left(\frac{1}{2},-1,-2\right) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left|H\left(\frac{1}{2},-1,-2\right)\right| = -20 < 0$$

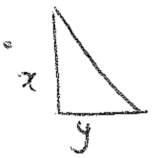
Há mínimo em $\left(\frac{1}{2},-1,-2\right)$

$$H\left(-\frac{1}{2},1,2\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \left|H\left(-\frac{1}{2},1,2\right)\right| = 20 > 0$$

Há máximo em $\left(-\frac{1}{2},1,2\right)$



~~Aqui~~ são pontos onde a curva $x^2+y^2=5$ é tangente às curvas de nível $x+2y=k$,
Neste caso $x+2y=5$
e $x+2y=-5$.

3. 

Função a extremar: $f(x,y) = \frac{xy}{2}$

Equação de ligação $x^2+y^2=16$

$$L(\lambda,x,y) = \frac{xy}{2} + \lambda\,(x^2+y^2-16)$$

$$\left.\begin{array}{l} L'_x = \frac{y}{2} + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = \frac{x}{2} + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2+y^2 = 16 \end{array}\right\}$$

A única solução que interessa ao problema dado é $\left(-\frac{1}{4}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$

$L''_{\lambda^2} = 0 \quad L''_{\lambda x} = 2x \quad L''_{\lambda y} = 2y$

$L''_{x^2} = 2\lambda \quad L''_{xy} = \frac{1}{2}$

$L''_{y^2} = 2\lambda$

$$H\left(-\tfrac{1}{4}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 4\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Como $\left|H\left(-\frac{1}{4}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)\right| \overset{=64}{>0}$, então $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ maximiza a função $f(x,y) = \frac{xy}{2}$ quando $x^2+y^2=16$

O triângulo retângulo de área máxima é o que tem os catetos iguais a $2\sqrt{2}$.

4. a) $L(\lambda,x,y,z) = x^2+3y^2+5z^2+\lambda\,(2x+3y+5z-100)$

$$\left.\begin{array}{l} L'_x = 2x+2\lambda = 0 \\ L'_y = 6y+3\lambda = 0 \\ L'_z = 10z+5\lambda = 0 \\ L'_\lambda = 2x+3y+5z = 100 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = -\frac{\lambda}{2} \\ z = -\frac{\lambda}{2} \\ -2\lambda - \frac{3}{2}\lambda - \frac{5}{2}\lambda = 100 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{50}{3} \end{array}$$

$$x = \frac{50}{3}, \quad y = \frac{25}{3}, \quad z = \frac{25}{3}$$

$L''_{\lambda^2} = 0 \quad L''_{\lambda x} = 2 \quad L''_{\lambda y} = 3 \quad L''_{\lambda z} = 5$

$L''_{x^2} = 2 \quad L''_{xy} = 0 \quad L''_{xz} = 0$

$L''_{y^2} = 6 \quad L''_{yz} = 0$

$L''_{z^2} = 10$

$$H\left(\frac{50}{3}, \frac{50}{3}, \frac{25}{3}, \frac{25}{3}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Como os determinantes são todos negativos, há um mínimo local em $\left(\frac{50}{3}, \frac{25}{3}, \frac{25}{3}\right)$.

b) $L(\lambda, x, y, z) = x + y + z + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right)$

$$\begin{cases} L'_x = 1 - \frac{\lambda}{x^2} = 0 \\ L'_y = 1 - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \\ L'_z = 1 - \frac{\lambda}{z^2} = 0 \\ L'_\lambda = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y = \pm z \\ x = \pm y \end{matrix}$$

$\lambda = 9$ e $x = y = z = 3$ $\quad (9, 3, 3, 3)$

$\lambda = 1$ e $x = y = -z = 1$ $\quad (1, 1, 1, -1)$

$\lambda = 1$ e $x = -y = z = 1$ $\quad (1, 1, -1, 1)$

$\lambda = 1$ e $x = -y = -z = 1$ $\quad (1, -1, 1, 1)$

$L''_{\lambda^2} = 0 \quad L''_{\lambda x} = -\frac{1}{x^2} \quad L''_{\lambda y} = -\frac{1}{y^2} \quad L''_{\lambda z} = -\frac{1}{z^2}$

$L''_{x^2} = \frac{2}{x^3} \quad L''_{xy} = 0 \quad L''_{xz} = 0$

$L''_{y^2} = \frac{2}{y^3} \quad L''_{yz} = 0$

$L''_{z^2} = \frac{2}{z^3}$

8

$$H(\lambda, x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2} & -\frac{1}{z^2} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{2\lambda}{x^3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{y^2} & 0 & \frac{2\lambda}{y^3} & 0 \\ -\frac{1}{z^2} & 0 & 0 & \frac{2\lambda}{z^3} \end{bmatrix}$$

Há mínimo local em $(9,3,3,3)$ e nos outros pontos não há extremo.

c) $L(\lambda,x,y,z) = x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-9)$

$$\begin{aligned} L'_x &= 1+2\lambda x = 0 \\ L'_y &= -2+2\lambda y = 0 \\ L'_z &= 2+2\lambda z = 0 \\ L'_\lambda &= x^2+y^2+z^2 = 9 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{1}{2\lambda} \\ y &= \frac{1}{\lambda} \\ z &= -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} &+ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2} \end{aligned} \right.$$

$\left(\frac{1}{2}, -1, 2, -2\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 1, -2, 2\right)$

No ponto $\left(\frac{1}{2}, -1, 2, -2\right)$ há um mínimo local

No ponto $\left(-\frac{1}{2}, 1, -2, 2\right)$ há um máximo local.

5. Função a extremar $f(x,y,z) = xyz$

Equação de ligação $x+y+z=k$

$L(\lambda,x,y,z) = xyz+\lambda(x+y+z-k)$

Pt.º crítico $\left(-\frac{k^2}{9}, \frac{k}{3}, \frac{k}{3}, \frac{k}{3}\right)$

Neste ponto há um máximo local.

Assim, $k = \frac{k}{3}+\frac{k}{3}+\frac{k}{3}$.

6 - $L(\lambda, x, y, z) = ax^2 + by^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

pt^{os} críticos $(-b, 0, 1, 0)$ $(-b, 0, -1, 0)$
$(-a, 1, 0, 0)$ $(-a, -1, 0, 0)$

Há máximo local em $(-b, 0, 1, 0)$
Nos outros há um mínimo local.

7 - Função a extremar $f(x, y, z) = z$
Que com duas equações de ligação. Matéria não abordada nas aulas.

8 - Função a extremar $f(x, y, z) = x + y - z^2$
Equação de ligação $x^2 - y^2 + z = R$

$L(\lambda, x, y, z) = x + y - z^2 + \lambda(x^2 - y^2 + z - R)$
pt^{o} crítico $\left(2R, -\frac{1}{4R}, \frac{1}{4R}, R\right)$ onde ñ há extremo.

9 - Função a extremar $f(x, y, z) = xyz$
eq. de ligação $2xy + 2yz + 2zx = 24$
$xy + yz + zx = 12$

$L(\lambda, x, y, z) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - 12)$
Pelos dados do problema apenas interessa o pto crítico $(-1, 2, 2, 2)$ onde há um máximo local.

$R = 0 \rightarrow$ solução que n̄ interessa

$R = -\frac{2}{\lambda} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{8\pi}{\lambda} + 2\pi h - 4\pi h = 0 \\ = \end{cases} \begin{cases} -2\pi\left(\frac{4}{\lambda} + h\right) = 0 \Leftrightarrow h = -\frac{4}{\lambda} = 2R \\ = \end{cases}$

$\begin{cases} = \\ = \\ 2\pi R^3 - 16\pi = 0 \end{cases} \begin{cases} \\ R^3 = 8 \Leftrightarrow R = 2 \wedge h = 4 \end{cases} \quad \lambda = -\frac{4}{h} = -1$

$(-1, 2, 4)$

$L''_{\lambda^2} = 0 \quad L''_{\lambda R} = 2\pi R h \quad L''_{\lambda h} = \pi R^2$

$L''_{R^2} = 4\pi + 2\pi h \lambda \quad L''_{Rh} = 2\pi + 2\pi R \lambda$

$L''_{h^2} = 0$

$$H(-1,2,4) = \begin{bmatrix} 0 & 16\pi & 4\pi \\ 16\pi & -4\pi & -2\pi \\ 4\pi & -2\pi & 0 \end{bmatrix}$$

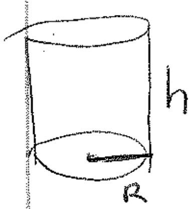
$|H(-1,2,4)| = -16 \times 8\pi - 16 \times 4\pi =$

$= -64\pi < 0$

logo $R = 2$ dm e $h = 4$ dm minimizam o custo da produção

Uma empresa pretende fabricar embalagens de forma cilíndrica com um volume de 16π dm^3. No sentido de minimizar os custos, a superfície total da embalagem deve ser o menor possível. Determine a altura e o raio da base da embalagem por forma a que o custo de produção seja o menor possível.

Função a extremar: $f(R,h) = 2\pi R^2 + 2\pi R h$



Eq. de ligação: $\pi R^2 h = 16\pi$

$$L(\lambda, R, h) = 2\pi R^2 + 2\pi R h + \lambda(\pi R^2 h - 16\pi)$$

$$\begin{aligned} L'_R &= 4\pi R + 2\pi h + 2\pi R h \lambda = 0 \\ L'_h &= 2\pi R + \lambda \pi R^2 = 0 \\ L'_\lambda &= \pi R^2 h - 16\pi = 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} \text{——} \\ \pi R(2 + \lambda R) = 0 \Leftrightarrow R = 0 \vee R = -\frac{2}{\lambda} \\ \text{——} \end{cases}$$

$R = 0 \to$ solução $\bar{q}$ $\bar{n}$ interesse

$$R = -\frac{2}{\lambda} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{8\pi}{\lambda} + 2\pi h - 4\pi h = 0 \\ \text{——} \\ \text{——} \end{cases} \quad \begin{cases} -2\pi\left(\frac{4}{\lambda} + h\right) = 0 \Leftrightarrow h = -\frac{4}{\lambda} = 2R \\ \text{——} \\ \text{——} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{——} \\ \text{——} \\ 2\pi R^3 - 16\pi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ R^3 = 8 \Leftrightarrow \cancel{R = 2\sqrt[3]{2}} \end{cases} \quad \begin{matrix} h = 4 \\ R = 2 \end{matrix} \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2}\right)$$

$$L''_{\lambda^2} = 0 \qquad L''_{\lambda R} = 2\pi R h \qquad L''_{\lambda h} = \pi R^2$$

$$L''_{R^2} = 2\pi + 2\pi h \lambda \qquad L''_{Rh} = 2\pi + 2\pi \lambda R$$

$$L''_{h^2} = 0.$$