

1. Mostre que: $h(x) = e^x - e^{-x}$ **é uma solução do problema de valores iniciais:**

$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$. **Averigúe se:** $i(x) = e^x + e^{-x}$ **é uma solução do mesmo problema.**

R:

Como temos a equação diferencial: $\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$, então vamos começar por determinar as derivadas até à segunda ordem da função: $y = h(x) = e^x - e^{-x}$, para posteriormente se substituir o resultado obtido para cada uma na equação diferencial dada.

- $y = h(x) = e^x - e^{-x}$
- $\frac{dy}{dx} = h'(x) = (e^x - e^{-x})' = \underbrace{(e^x)'}_{(e^u)' = u' \cdot e^u} - \underbrace{(e^{-x})'}_{(e^u)' = u' \cdot e^u} = e^x - (-e^{-x}) = e^x + e^{-x}$
- $\frac{d^2 y}{dx^2} = h''(x) = (e^x + e^{-x})' = \underbrace{(e^x)'}_{(e^u)' = u' \cdot e^u} + \underbrace{(e^{-x})'}_{(e^u)' = u' \cdot e^u} = e^x + (-e^{-x}) = e^x - e^{-x}$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$ teremos que:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0 \Leftrightarrow (e^x - e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Verificada a} \\ \text{identidade} \end{array} \right\}$$

Já se verificou que a função é explícita. Agora, falta verificar se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$, pelo que:

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow h(0) = 0 \Leftrightarrow e^0 - e^{-0} = 0 \Leftrightarrow e^0 - \frac{1}{e^0} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \text{Verifica}$$

$$y'(0) = 2 \Leftrightarrow h'(0) = 2 \Leftrightarrow e^0 + e^{-0} = 2 \Leftrightarrow e^0 + \frac{1}{e^0} = 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{1} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \rightarrow \text{Verifica}$$

Repetindo o mesmo procedimento para $i(x) = e^x + e^{-x}$, teremos que:

- $y = i(x) = e^x + e^{-x}$
- $\frac{dy}{dx} = i'(x) = (e^x + e^{-x})' = \underbrace{(e^x)'}_{(e^u)' = u' \cdot e^u} + \underbrace{(e^{-x})'}_{(e^u)' = u' \cdot e^u} = e^x + (-e^{-x}) = e^x - e^{-x}$
- $\frac{d^2y}{dx^2} = i''(x) = (e^x - e^{-x})' = \underbrace{(e^x)'}_{(e^u)' = u' \cdot e^u} - \underbrace{(e^{-x})'}_{(e^u)' = u' \cdot e^u} = e^x - (-e^{-x}) = e^x + e^{-x}$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \Leftrightarrow (e^x + e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{Verificada a} \\ \text{identidade} \end{cases}$$

Já se verificou que a função é explícita. Agora, falta verificar se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$, pelo que:

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow i(0) = 0 \Leftrightarrow e^0 + e^{-0} = 0 \Leftrightarrow e^0 + \frac{1}{e^0} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{1} = 0 \Leftrightarrow 2 \neq 0 \rightarrow \text{Não Verifica}$$

$$y'(0) = 2 \Leftrightarrow i'(0) = 2 \Leftrightarrow e^0 - e^{-0} = 2 \Leftrightarrow e^0 - \frac{1}{e^0} = 2 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1} = 2 \Leftrightarrow 0 \neq 2 \rightarrow \text{Não Verifica}$$

- 2. Sabendo que toda a solução da equação diferencial:** $\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$, **pode ser escrita na forma:** $f(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$, **onde** c_1 **e** c_2 **são constantes arbitrárias, determine qual deverá ser o valor de** c_1 **e** c_2 **por forma a que** $f(x)$ **seja uma solução do problema de valores iniciais:** $\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$, $y(0) = 1$ **e** $y'(0) = 2$.

R:

Para se determinarem os valores de c_1 e c_2 , conforme é pedido, teremos que recorrer aos valores iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$. Sabendo que: $y(x) = f(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$.

Então:

$$y'(x) = f'(x) = (c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x})' \Leftrightarrow y'(x) = \left[\underbrace{(c_1)'}_{=0} \cdot e^x + c_1 \cdot \underbrace{(e^x)'}_{=e^x} \right] + \left[\underbrace{(c_2)'}_{=0} \cdot e^{-x} + c_2 \cdot \underbrace{(e^{-x})'}_{=-e^{-x}} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x}$$

Assim sendo e por substituição teremos agora que:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{-0} = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 2 \Leftrightarrow c_1 \cdot e^0 - c_2 \cdot e^{-0} = 2$$

Logo teremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{-0} = 1 \\ c_1 \cdot e^0 - c_2 \cdot e^{-0} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = 1 \\ c_1 \cdot 1 - c_2 \cdot 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ (1 - c_2) - c_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ 1 - 2c_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ c_2 = \frac{2-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{2} \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Este exercício termina por aqui porque no enunciado é afirmado que toda a solução da equação diferencial: $\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$, pode ser escrita na forma: $f(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$, onde c_1 e c_2 são as constantes que se acabaram de calcular.