Álgebra Linear

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Exame - $\boxed{\text{A}}$

23 janeiro 2017 Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ Número: ________

I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) *ou falsa* (F)*, assinalando a opção conveniente.*

As respostas incorretamente assinaladas têm cotação negativa.

Questão 1. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

	V	F
a) car $A = 2$.	○	○
b) $A^2 = I_3$.	○	○
c) A é equivalente por linhas à matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.	○	○
d) O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem apenas a solução nula.	○	○
e) 0 é valor próprio de A.	○	○

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear cuja matriz associada é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

	V	F
a) $\det A = -5$.	○	○
b) $f(1, 0, -1, 0) = (0, -2, 0, -2)$.	○	○
c) f é injetiva.	○	○
d) $\dim \operatorname{Im} f = 3$.	○	○
e) O vetor $\mathbf{u} = (5, 14, 4, 23)$ pertence ao espaço imagem de f.	○	○

Questão 3. Considere a matriz $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & k-1 \\ 1 & -1 & k+2 \end{pmatrix}$, com $k \in \mathbb{R}$.

	V	F
a) Se $k \neq -5$, então A_k é invertível.	○	○
b) As colunas da matriz A_1 são linearmente independentes.	○	○
c) $(1, 2, 3) \in \mathcal{N}(A_1)$.	○	○
d) O complemento algébrico do elemento na posição $(3, 2)$ da matriz A_0 é 5 .	○	○
e) O elemento na linha 2 coluna 3 da matriz A_0^{-1} é igual a $\frac{1}{2}$.	○	○

Questão 4. Considere o sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = \beta \\ 2x + \alpha z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, z, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

	V	F
a) O sistema é possível e determinado para $\alpha \neq 3$.	○	○
b) Se $\alpha = 0$ e $\beta = 4$, a única solução do sistema é $(0, -1, 1)$.	○	○
c) O sistema é possível e indeterminado para $\alpha = 3$ e $\beta = 1$.	○	○
d) Se $\alpha = 3$, o sistema homogéneo associado tem grau de indeterminação 1.	○	○
e) Se $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, o sistema é impossível.	○	○

II

Responda às questões deste grupo numa folha de teste.

Questão 1. Seja S o subespaço do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores

$$\mathbf{u} = (1, 2, 1, 3),\ \mathbf{v} = (3, 8, 11, 11),\ \mathbf{w} = (1, 3, 5, 4),\ \mathbf{z} = (2, 3, -2, 5).$$

a) Verifique se os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ são linearmente independentes.

b) Determine uma base de S.

c) Diga, justificando, se $S = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 7x - 4y + z = 0\right\}$.

d) Indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Questão 2. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule P^{-1}, usando o método de Gauss-Jordan e verifique que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Justifique, sem efetuar quaisquer cálculos, que 1 e 2 são valores próprios de A, com multiplicidades algébricas 2 e 1, respetivamente. O que pode dizer sobre as correspondentes multiplicidades geométricas? Justifique.

c) Indique quais os valores próprios da matriz $(A - 2I_3)^3$.

Questão 3.

a) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear injetiva e sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$. Mostre que $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ são vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^m$.

b) Apresente, caso exista, uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Nuc} f$.

Cotação: I - 10 valores; II - 1) 4 valores; 2) 4 valores; 3) 2 valores .