Teste 6ª f.ª 1/07 às 9:30h

Processamento Digital de Sinal

Miniteste 2

Estimação espectral

1. Considere um sistema LTI, cuja entrada é ruído branco de média nula e variância σ_x^2, caracterizado pela seguinte equação de diferenças

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

1.0 a) Explique sucintamente o que significa um processo ruído branco e diga quais os parâmetros que o caracterizam. Determine a sequência de autocovariância do processo x[n].

1.0 b) Supondo que dispõe apenas de N amostras do processo x[n], determine a estimativa e a polarização da sequência de autocovariância do processo.

1.0 c) Determine, no contexto da alínea anterior, uma estimativa para a densidade espectral de potência do processo x[n], justificando o método usado.

1.0 d) Considere M=0 e b_0=1 e determine uma estimativa para a densidade espectral de potência de y[n], admitindo que possui uma amostra de N pontos e que não conhece os parâmetros de x[n].

1.0 e) Estabeleça, no contexto da alínea anterior um conjunto de equações lineares que lhe permita calcular os coeficientes a_k.

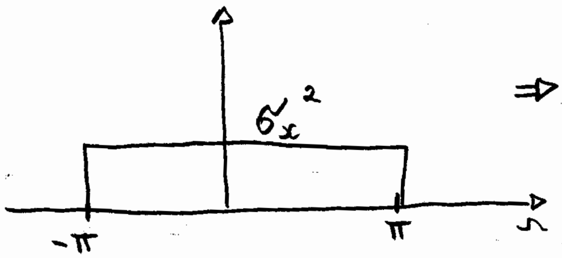
1.0 f) Determine a densidade espetral de potência cruzada das sequências x[n] e y[n] ($P_{xy}(\Omega)$)

6.0

↳ dei um valor de bónus pois isto deveria ser para 5.0

1a) Um processo de ruído branco é um tipo particular do processo estocástico. É um processo estocástico onde as variáveis são não correlatadas.

Parâmetros: · densidade espectral de potência que não dependem da frequência (igual em todas as frequências)



$$\Rightarrow \phi_{xx}[m] = \mathcal{F}^{-1}\{P_{xx}(\Omega)\} = \sigma_x^2\,\delta[m]$$

$$\phi_{xx}[m] = \mathcal{E}\{x[n]\,x^*[n+m]\}$$

Sequência de autocovariância

$$\gamma_{xx}[m] = E\{(x[n] - m_x)(x^*[n+m] - m_x)\} = \phi_{xx}[m] = \sigma_x^2\,\delta[m]$$

A sequência de autocovariância é a dispersão dos valores em torno da média.

b) Supondo que dispõe de N amostras do processo $x[n]$, determine a estimativa e a polarização da sequência de autocovariância do processo.

Estimativa da sequência de autocovariância: $c_{xx}[m] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,x[n+m]$

Polarização $\quad B = \gamma_{xx}[m] - E\{c_{xx}[m]\}$

$$E\{c_{xx}[m]\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\,x[n+m]\right\} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} \underbrace{E\{x[n]\,x[n+m]\}}_{\phi_{xx}[m] = \gamma_{xx}[m]} =$$

$$= \frac{1}{N}\underbrace{\sum_{n=0}^{N-|m|-1}}_{N-|m|} \gamma_{xx}[m] =$$

$$= \frac{1}{N}\,\underbrace{\frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} \gamma_{xx}[m]}_{\gamma_{xx}[m]} = \frac{N-|m|}{N}\,\gamma_{xx}[m]$$

$$B = \gamma_{xx}[m]\left[1 - \frac{N-|m|}{N}\right] = \frac{|m|}{N}\,\gamma_{xx}[m]$$

...dade espectral de potência é a T.F. da sequência de autocorrelação.

$$C_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\, x^*[n+m]$$

$$I_N(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{xx}[m]\, e^{-j\Omega m}$$ $\rightarrow$ Este estimador não é consistente porque a sua variância não tende para zero à medida que $N \rightarrow \infty$

d

[-

A solução é usar o método de Bartlet $\rightarrow$ média de periodogramas

1º Dividir os dados em K segmentos $K \cdot N' \Rightarrow N' = \frac{N}{K}$

2º Para cada segmento determinar $I_{N_K}(\Omega) = \frac{1}{N/K} \sum C_{xx}[m]\, e^{-j\Omega m}$

3º $I_N(\Omega) = \frac{1}{N'} \sum_{K=0}^{N'} I_{N_K}(\Omega)$ $\rightarrow$ Estimativa ± consistente (menos variância do periodograma)

d) $$Y[n] = \sum_{K=1}^{N} a_K\, Y[n-K] + x[n]$$

estimativa para $P_{YY}(\Omega)$

Usamos o método da máxima entropia (MEM)

$$\hat{Y}[n] = \sum_{K=1}^{N} a_K\, Y[n-K] \rightarrow \varepsilon = \hat{Y}[n] - Y[n] = x[n] \text{ (ruído branco)}$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow Y[n]$$

$$P_{YY}(\Omega) = |H(\Omega)|^2 P_{xx}(\Omega)$$

$$Y[n] = \sum_{K=1}^{N} a_K\, Y[n-K] + x[n]$$

$$Y(\Omega) = \sum_{K=1}^{N} a_K\, Y(\Omega)\, e^{-jK\Omega} + X(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - \sum_{K=1}^{N} a_K\, e^{-jK\Omega}}$$

$$\varepsilon^2 = E\{(Y[n]-\hat{Y}[n])^2\} = E\{(Y[n]-\hat{Y}[n])(Y[n]-\hat{Y}[n])\} =$$

$$= E\{Y[n](Y[n]-\hat{Y}[n]) - \underset{\text{Dados}}{\hat{Y}[n]}\,\underbrace{(Y[n]-\hat{Y}[n])}_{\text{Erro}}\}$$

$$\phi_{YY}(0) - \sum_{i=1}^{N} \phi_{YY}[n-i]$$

$$E\{Y[n](Y[n] - \sum_{k=1}^{m} a_k Y[n-k]) =$$

$$= E\{Y[n]Y[n]\} - \underbrace{E\{Y[n]a_1 Y[n-1]\}}_{a_1 \phi_{YY}[1]} - \underbrace{E\{Y[n]a_2 Y[n-2]\}}_{a_2 \phi_{YY}[2]} \dots \to a_N \phi_{YY}[n-N]$$

$$\xrightarrow{X} \boxed{LTI} \xrightarrow{Y}$$

$$P_{YY} = |H(\Omega)|^2 \underline{P_{XX}} \to \phi_{YY}(0) - \sum_{i=1}^{N} \phi_{YY}[n-1]$$

$$P_{YY}(\Omega) = \frac{\phi_{YY}(0) - \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{YY}[n-k]}{\left|1 - \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-jk\Omega}\right|^2}$$

e) $$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k Y[n-k]$$

$$\phi_{xx}[k] = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_{xx}[k-i]$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}[0] & \phi_{xx}[1] & \dots & \phi_{xx}[N-1] \\ \phi_{xx}[1] & \phi_{xx}[0] & \dots & \phi_{xx}[N-2] \\ \vdots & \vdots & & \\ \phi_{xx}[N-1] & \phi_{xx}[N-2] & \dots & \phi_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{xx}[1] \\ \phi_{xx}[2] \\ \vdots \\ \phi_{xx}[N] \end{bmatrix}$$

f) $P_{xy}(\Omega) = TF\{\phi_{xy}[m]\}$

$\phi_{xy}[m] = E\{x[n]\, y^*[n+m]\}$

$\to$ LTI $\to$ $\underbrace{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]}$

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$

$y[n] = \sum_{R=-\infty}^{+\infty} h[R]\, x[n-R]$

$$\phi_{xy}[m] = \phi_{yx}[m] = E\{y[n]\, x^*[n+m]\} =$$

$$= E\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]\, x^*[n+m]\right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E\{x[k]\, x^*[n+m]\}\, h[n-k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[n+m-k]\, h[n-k]$$

<u>Fazendo mudança de variável</u> $k \to R$ com $R = n-k$

$$\phi_{xy}[m] = \sum_{R=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[R+m]\, h[R]$$

Se tivessemos $R-m$ então:

$$P_{xy}(\Omega) = P_{xx}(\Omega)\, H(\Omega)$$

$$TF\{\phi_{xx}[R+m]\} = TF\{\phi_{xx}[R-m]\}\, e^{jk2m}$$

$$P_{xy}(\Omega) = TF\{\phi_{xx}[m]\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}[m]\, e^{-j\Omega m} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{R=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[R+m]\, h[R]\, e^{j\Omega m} =$$

$e^{j\Omega R}$

$$= \sum_{R=-\infty}^{+\infty} h[R] \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[R+m]\, e^{-j\Omega m}\, \boxed{e^{-j\Omega R}} =$$

$$= \underbrace{\sum_{R=-\infty}^{+\infty} h[R]\, e^{j\Omega R}}_{H^*(\Omega)} \; \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[R+m]\, e^{-j\Omega(R+m)}}_{P_{xx}(\Omega)}$$