Universidade do Minho
Departamento de Física

Física A

M. I. Engª de Comunicações

TESTE - RESOLUÇÃO
28/01/2011

Parte 1

1. Resp.: **[E]**

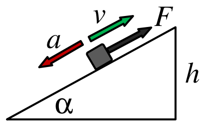
Just.: $W(\vec{F}) = \Delta E_c$; $W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -\|\vec{F}\|\|\Delta\vec{r}\|$; $\Delta E_c = E_{c,f} - E_{c,i} = -E_{c,i}$;
portanto $-\|\vec{F}\|\|\Delta\vec{r}\| = -E_{c,i} \Leftrightarrow \|\Delta\vec{r}\| = E_{c,i}/\|\vec{F}\|$ é a mesma para ambos.

Nota:
O trabalho realizado por uma força num deslocamento A→B é $W_{A\rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Neste caso a força é constante e portanto aquele integral reduz-se a $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\|\|\overrightarrow{AB}\| \cos\theta$, sendo θ o angulo definido por aqueles dois vectores. Uma vez que a força é contrária ao deslocamento temos $\theta = \pi$. A variação da energia cinética é a mesma para ambos os objectos, uma vez que ambos se movem com a mesma enercia cinética inicial, acabando por parar por acção da força aplicada.
(Evidentemente que os dois objectos se movem inicialmente com velocidades distintas, já que as suas massas são diferentes. Por outro lado, a aceleração que sofrem por acção da força aplicada também será diferente....)

2. Resp.: **[D]**

Just.: $W_{tot} = W(\vec{F}) + W(\vec{F}_g)$; $W_{tot} = W(\vec{F}_{res}) = -m\|\vec{a}\|\|\Delta\vec{r}\|$, $W(\vec{F}_g) = -mg\|\Delta\vec{r}\| \sin\alpha$

$$W(\vec{F}) = mg\|\Delta\vec{r}\| \left(\sin\alpha - \frac{\|\vec{a}\|}{g}\right) = 80 \times 5{,}0 \left(\sin 30° - \frac{1{,}47}{9{,}8}\right)$$



Nota:
As forças que actuam no fardo são a força $\vec{F}$ exercida pelo homem, a força gravítica e a reacção exercida pelo plano que, na ausência de atrito, apenas tem a componente normal, e portanto realiza um trabalho nulo no deslocamento do fardo. Pela segunda Lei de Newton, a resultante destas forças é $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$, sendo m a massa e $\vec{a}$ a aceleração do fardo, que é constante e contária ao deslocamento (o movimento é retardado). O trabalho realizado pela força gravítica é simétrico da variação da energia potencial gravítica $\Delta E_p = mgh$, onde $h = \|\Delta\vec{r}\| \sin\alpha$, sendo α a inclinação do plano. A soma deste trabalho com o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ exercida pelo homem, é o trabalho total realizado sobre o corpo.

3. Resp.: **[C]**

Just.: $P = \frac{W}{\Delta t}$; $W = \Delta E_m = Mgh$; $M = 20 \times 60{,}0$ kg; $h = 5$ m; $\Delta t = 60$ s

Nota:
A energia fornecida, por minuto, pelo tapete rolante é o trabalho que realiza ao deslocar 20 pessoas para o piso 5,0 m acima. Esse trabalho corresponde à variação da energia mecânica do sistema formado pelas 20 pessoas.

4. Resp.: **[C] [D]**

Just.: $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p$; $\Delta E_c = W^{total} = W^{ext} + W^{int}$; $W^{int} = W^{cons} + W^{n.cons}$

$\Delta E_p = -W^{cons}$ portanto $\Delta E_m = W^{ext} + W^{n.cons}$

Nota:
Uma força externa faz variar a energia mecânica de um sistema através da realização de trabalho sobre o mesmo. Portanto, a energia mecânica do sistema não se conserva se a resultante das forças externas que sobre ele actuam realizar trabalho não nulo. Por outro lado, mesmo sendo nulo o trabalho realizado pelas forças externas que actuam no sistema, teremos $\Delta E_m = W^{n.cons}$, e portanto a sua energia mecânica apenas se conservará se as forças não conservativas do sistema realizarem trabalho nulo.

5. Resp.: **[C]**

Just.: $A = \frac{x_{máx} - x_{min}}{2}$; $\frac{1}{2}T = 0{,}25$ s; $\omega = \frac{2\pi}{T}$;

6.

6.1. Resp.: **[B]**

Just.: $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$, $K = \frac{\|\vec{F}\|}{|\Delta l|}$. Para $\|\vec{F}\| = Mg$, tem-se $\Delta l = 9{,}0 \times 10^{-3}$m, portanto

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mg/\Delta l}{M}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{9{,}0 \times 10^{-3}}}$$

Nota:
A frequência angular de um sistema bloco-mola com determinada constante elástica K, depende do valor da massa M do bloco, através de $\omega_0 = \sqrt{K/M}$. No entanto, neste caso, a dependência na massa do bloco está traduzida no valor da deformação Δl que o bloco produz na mola. Evidentemente, para a mesma mola (mesmo K), outro valor de M produziria uma deformação diferente, e portanto uma frequência angular diferente. Mas uma vez especificado o valor de Δl, fica perfeitamente determinada a frequência angular do sistema, isto é, o seu valor já não depende de qualquer outro factor

6.2. Resp.: **[D]**

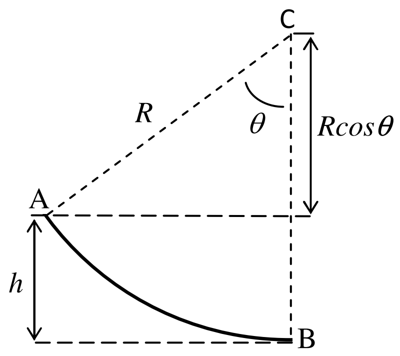
Just.: $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}$, $\gamma = \frac{b}{2M}$. Para b=$2M\omega_0$ temos $\gamma = \omega_0$ e então $\omega = 0$ rad/s

Nota:
A situação descrita corresponde a uma situação de amortecimento crítico ($\gamma = \gamma_c = \omega_0$).

Parte 2

1. $R = 12{,}0\ \mathrm{m}$; $\Delta s = \widehat{AB} = 10{,}1\ \mathrm{m}$
$m = 25\ \mathrm{kg}$
$v_A = 0\ \mathrm{m/s}$

1.a)



$h = R - R\cos\theta = R(1-\cos\theta)$,

$\theta = \frac{\Delta s}{R} \Leftrightarrow \theta = \frac{10{,}1}{12{,}0} = 0{,}842\ rad$

$h = 4{,}0\ \mathrm{m}$

1.b)
Na descida, as forças que actuam na criança são a força gravítica e a reacção exercida pelo escorrega.

Na ausência de atrito, a única força que realiza trabalho naquele deslocamento é a força gravítica, que é conservativa, portanto há conservação da energia mecânica: $\Delta E_m = 0$

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Delta E_c = E_p(B) - E_p(A) = mgh_B - mgh_A = mgh$$

$$\Delta E_m = 0 \Leftrightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \Leftrightarrow v_B^2 = 2gh \Leftrightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

$$v_B = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 4{,}0} = 8{,}9\ \mathrm{m/s}$$

1.c)
$v_B = 6{,}2\ \mathrm{m/s}$

A energia mecânica perdida na descida devido à fricção (atrito) transforma-se em energia térmica do sistema, ou seja, $\Delta E_{term} = -\Delta E_m$

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p \Leftrightarrow \Delta E_m = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh$$

$$\Delta E_{term} = -\Delta E_m \Leftrightarrow \Delta E_{term} = -25{,}0 \times \left(\frac{1}{2} \times 6{,}2^2 - 9{,}8 \times 4{,}0\right) = 499{,}5\ \mathrm{J}$$

1.d)
A variação da energia mecânica do sistema é igual ao trabalho realizado pela força de atrito que o escorrega exerce na criança: $W_{A\to B}(\vec{F}_a) = \Delta E_m$

Por definição, $W_{A\to B}(\vec{F}_a) = \int_A^B \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -\int_A^B F_a ds$

(Nota: $\vec{F}_a \cdot d\vec{r} = \|\vec{F}_a\| \|d\vec{r}\| \cos\pi = -F_a ds$, onde $F_a = \|\vec{F}_a\|$ e $ds = \|d\vec{r}\|$)

O que se pretende é a intensidade média da força de atrito exercida pelo escorrega no deslocamento $A \to B$. Portanto substituímos F_a pelo seu valor médio $F_{a,méd}$ (valor constante ao longo do deslocamento):

$$W_{A\to B}(\vec{F}_a) = -\int_A^B F_{a,méd} ds = -F_{a,méd} \int_A^B ds = -F_{a,méd}(s_B - s_A) = -F_{a,méd} \Delta s$$

Tem-se então: $F_{a,méd} = -\frac{W_{A\to B}(\vec{F}_a)}{\Delta s}$, $W_{A\to B}(\vec{F}_a) = \Delta E_m$

$$F_{a,méd} = -\frac{\Delta E_m}{\Delta s} \Leftrightarrow F_{a,méd} = \frac{499{,}5}{10{,}1} = 44{,}5 \text{ N}$$

(Nota: a criança também exerce sobre o escorrega uma força de atrito que é exactamente igual e oposta àquela a que está sujeita (são par acção-reacção!). No entanto, esta força que a criança exerce no escorrega (que também faz parte do sistema!) não foi tomada em conta nestas alíneas porque não realiza trabalho.... Porquê?)

2.

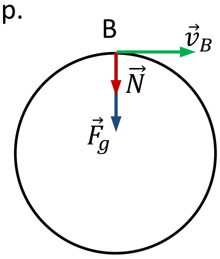
2.a)

Aqui o sistema em análise é o objecto.

Forças que actuam no objecto enquanto percorre a calha: força gravítica, $\vec{F}_g$, reacção normal, $\vec{N}$, e força de atrito, $\vec{F}_a$, ambas exercidas pela calha, mas esta última apenas a partir da saída do loop.

Enquanto houver contacto entre o objecto e a calha temos $\|\vec{N}\| > 0$

Para garantir que o objecto não perca nunca o contacto com a calha, basta garantir que não o perca no ponto mais crítico da trajectória: o ponto de altura máxima do loop.



Analisamos então o percurso circular.

Aplicando a 2ª Lei de Newton ao objecto, tem-se:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}_g + \vec{N} = m\vec{a}$$

Sendo a trajectória circular, é conveniente usar coordenadas intrínsecas.

No ponto mais alto do loop, ponto B, a reacção normal tem a direcção e o sentido da força gravítica, apontando ambas para o centro da curvatura, isto é, neste ponto, ambas têm apenas componente normal, resultando da segunda lei de Newton:

$$\|\vec{F}_g\| + \|\vec{N}_B\| = m a_{n_B} \Leftrightarrow \|\vec{N}_B\| = m(a_{n_B} - g)$$

Impôr que haja contacto entre o objecto e a calha é o mesmo que impôr $\|\vec{N}_B\| > 0$, e portanto

$$a_{n_B} > g \Leftrightarrow \frac{v_B^2}{R} > g \Leftrightarrow v_B^2 > Rg$$

Então, para que o objecto não abandone a calha, terá de chegar ao ponto B com velocidade de módulo superior a $\sqrt{Rg}$.

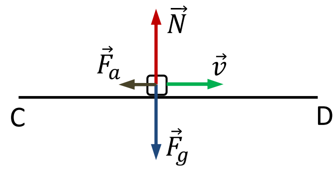
Determinamos a velocidade com que o objecto chega a B recorrendo ao princípio da conservação da energia. De facto, no percurso A→B a única força que realiza trabalho é a força gravítica, conservativa, pelo que se tem $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$

Uma vez que o objecto parte do repouso (em A): $\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2} m v_B^2$.

Por outro lado $\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = mgh_B - mgh_A = -mgy$

Então $\frac{1}{2} m v_B^2 = mgy \Longleftrightarrow v_B^2 = 2gy$

E impondo a condição anterior resulta: $2gy > Rg \Longleftrightarrow y > \frac{R}{2}$



2.b)

Troço horizontal à saída do looping (trajecto C→D): $\mu = 0{,}5$

Neste percurso há atrito entre o objecto e a calha e a energia mecânica da esfera não se conserva: $\Delta E_m = W_{C \to D}(\vec{F}_a)$.

Temos uma situação de atrito cinético (o corpo desliza sobre a calha): $\|\vec{F}_a\| = \mu \|\vec{N}\|$

Aqui a calha é horizontal: da 2ª Lei de Newton tem-se $\|\vec{N}\| = \|\vec{F}_g\|$, portanto $\|\vec{F}_a\| = \mu mg$

Então $\vec{F}_a$ é uma força constante e

$$W_{C\to D}(\vec{F}_a) = \int_C^D \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = \vec{F}_a \cdot \int_C^D d\vec{r} = \vec{F}_a \cdot \overrightarrow{CD} = -\|\vec{F}_a\| \|\overrightarrow{CD}\| = -\mu mgd,$$

sendo $d = \overline{CD}$ a distância percorrida até parar.

Para determinar d podemos usar o Teorema do trabalho-energia, aplicando-o ao percurso total do objecto: $\Delta E_c = W_{A\to D}^{\text{total}}$:

$$W_{A\to D}^{\text{total}} = W_{A\to D}(\text{todas as forças})$$

$W_{A\to D}(\vec{F}_g) = -\Delta E_p = -(E_p(D) - E_p(A)) = -(mgh_D - mgh_A) = mg(2R + y)$

$W_{A\to D}(\vec{F}_a) = W_{A\to C}(\vec{F}_a) + W_{C\to D}(\vec{F}_a) = 0 + (-\mu mgd) = -\mu mgd$

($W_{A\to D}(\vec{N}) = 0$, evidentemente.)

$$\Delta E_c = E_c(D) - E_c(A) = 0$$

pois o objecto parte do repouso em A, e pára no ponto D.

Portanto $W_{A\to D}^{\text{total}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad mg(2R + y) - \mu mgd = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{2R+y}{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad d = 2(2R + y)$

3.

$m = 100$ g=0,1 kg

$E_p = 20x^2$

3.a)

Aquela energia potencial corresponde à de um oscilador com um MHS em torno de $x = 0$ ($E_p = \frac{1}{2}Kx^2$), com $K = 2 \times 20 = 40$ N/m

A frequência angular natural do sistema é $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{40}{0,1}} = 20,0$ rad/s

E o período do movimento é $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{20,0} = \frac{\pi}{10}$ s

3.b)

Equação geral para um MHS em torno de $x = 0$:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Condições iniciais: $x(0) = 0,0$ m, $v(0) = 2,0$ m/s

A velocidade do oscilador em cada instante t é $v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi)$

As condições iniciais permitem determinar a amplitude A e a fase inicial φ:

$x(0) = 0,0 \Leftrightarrow A\cos(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \cos(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

$v(0) = 2,0 \Leftrightarrow -\omega_0 A\sin(\varphi) = 2,0 \Leftrightarrow A\sin(\varphi) = -\frac{2,0}{\omega_0} \Leftrightarrow A = -\frac{0,1}{\sin(\varphi)}$

Como a amplitude é positiva, $\sin(\varphi)$ terá de ser negativo. Então $A = 0,1$ m, e $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad

Portanto, a expressão que nos dá a posição da partícula em cada instante é:

$$x(t) = 0,1\cos\left(20,0t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (SI)$$

3.c)

Expressão para um MHS amortecido

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$$

onde γ é o coeficiente de amortecimento. A amplitude das oscilações amortecidas decresce exponencialmente com o tempo de acordo com $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$

A amplitude reduz-se a 1/10 do seu valor inicial ao fim de três oscilações, portanto:

$$A(t = 3T) = \frac{1}{10}A_0 \Leftrightarrow A_0 e^{-\gamma 3T} = \frac{1}{10}A_0 \Leftrightarrow e^{-\gamma 3T} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow e^{\gamma 3T} = 10 \Leftrightarrow \gamma 3T = \ln 10$$

$$\gamma = \frac{\ln 10}{3T} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\ln 10}{3 \times \frac{\pi}{10}} \Leftrightarrow \gamma = 2,44 \text{ s}^{-1}$$

A constante de amortecimento do meio é $b = 2m\gamma \Leftrightarrow b = 2 \times 0,1 \times 2,44 = 0,489$ kg s^{-1}

A frequência angular do sistema amortecido é $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Leftrightarrow \omega = 19,85$ rad/s