Análise Matemática B

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica
1º ano

Séries de potências

Séries de potências

Uma série infinita do tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$$

é designada por série de potências em x ou simplesmente série de potências. As constantes $a_0, a_1, a_3, \cdots$ são chamadas de coeficientes da série de potências e a constante a é designada por centro.
Uma série de potências em x centrada em $a = 0$ toma a forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

obtemos assim a ideia generalizada de um polinômio em x. Note que x é uma quantidade que pode variar tornando possível a soma da série ou não, isto é, convergente ou divergente. Por exemplo para $x = a$, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ é convergente e a sua soma é a_0.

Séries de potências

Vejamos o seguinte exemplo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$$

Para $x = 1$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow \text{ série convergente}$$

Para $x = 3$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{5}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n \rightarrow \text{série divergente}$$

Séries de potências

Organizando as ideias:

- Pensemos numa série de termos quaisquer, representada por $\sum u_n$, com u_n positivo, negativo ou nulo. Uma série de funções é representada por $\sum u_n(x)$ e uma série de potências por $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, como caso particular destas séries temos as séries de potências de x, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
- Como os critérios de convergência só se aplicam às séries de termos positivos, em qualquer dos casos acima indicados passamos à série dos módulos. Se a série dos módulos for convergente a série dos termos quaisquer (minorante), também é convergente.
- No caso das séries de potências, pretendemos saber para que valores de x as séries são convergentes. Ao conjunto I de valores de x, para os quais uma série é convergente, chama-se intervalo de convergência.

Séries de potências

Dada uma série de potências o seu intervalo de convergência I tem uma das seguintes formas:

- I é um intervalo limitado com centro a e pontos extremos $a - R$ e $a + R$ onde R é um número real positivo e designa o raio de convergência da série de potências.
- $I =]-\infty, +\infty[$ e neste caso $R = +\infty$.
- I consiste em um único número a e neste caso $R = 0$.

Séries de potências

Teorema Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$, verifica-se uma das seguintes condições:

i) A série converge para $x = a$;

ii) A série converge (absolutamente) para todo o número real x;

iii) Existe um número real positivo (R) tal que a série é absolutamente convergente para todos os valores de x para os quais $|x-a| < R$ e divergente para todos os valores de x para os quais $|x-a| > R$.

O raio de convergência da série de potências assume o valor

i) $R = 0$

ii) $R = +\infty$

iii) A série de potências converge num intervalo centrado em a e de raio R. No caso da série convergir nos pontos $x = a - R$ e $x = a + R$ o intervalo é fechado.

Séries de potências

Para determinarmos o raio de convergência de uma série vamos usar a série de módulos e aplicar um dos critérios de estudo da natureza das séries:

- Critério D'Alembert (ou critério da Razão)
- Critério de Cauchy (ou critério da Raíz)

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série dada de termos não-nulos.

- Critério D'Alembert (ou critério da Razão):
  - Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, então a série é absolutamente convergente.
  - Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ ou se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, então a série é divergente.
  - Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, então o teste nada conclui.

Séries de potências

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série dada.

- Critério de Cauchy (ou critério da Raíz):
  - Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, então a série é absolutamente convergente.
  - Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ ou se $\lim_{n\to\infty} = \sqrt[n]{|a_n|} + \infty$, então a série é divergente.
  - Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, então o teste nada conclui.

Séries de potências

Consideremos a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ e apliquemos à série dos módulos o critério D'Alembert ou o critério de Cauchy:

a) **Critério D'Alembert:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x-a|^{n+1}}{|a_n||x-a|^n} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x-a| < 1$$

Fazendo, $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{R}$ e substituindo na última expressão obtemos

$$\frac{1}{R}|x-a| < 1 \Leftrightarrow |x-a| < R \Leftrightarrow a-R < x < a+R.$$

R é o raio de convergência correspondente ao intervalo de convergência centrado em a

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

b) **Critério de Cauchy:**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x-a| < 1$$

Fazendo, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ e substituindo na na última expressão btemos

$$\frac{1}{R}|x-a| < 1 \Leftrightarrow |x-a| < R \Leftrightarrow a-R < x < a+R.$$

R é o raio de convergência correspondente ao intervalo de convergência centrado em a

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Nota: Para os extremos do intervalo de convergência, $x = a - R$ ou $x = a + R$, necessitamos de fazer o estudo das séries numéricas obtidas.

Exemplos: Determine o raio e o intervalo de convergência de cada uma das seguintes séries de potências:

a)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n} x^n = 0 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{3}{27}x^3 + \cdots$$

Para $x = 0$ a série é convergente. Para $x \neq 0$, vamos usar o critério D'Alembert com

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{3^n} x^n \quad \text{e} \quad a_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^{n+1}} x^{n+1}.$$

Assim,

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{3n} |x| = |x| \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{|x|}{3},$$

donde a série converge para $\frac{|x|}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < x < 3$. A série é divergente para $x < -3$ ou $x > 3$.

É necessário fazer estudo da natureza da série para
$|x| = 3 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3$.

$$|a_n| = \left|(-1)^n \frac{n}{3^n} x^n\right| = \frac{n}{3^n}|x|^n = \frac{n}{3^n}3^n = n,$$

Como $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ a série diverge nos pontos $|x| = 3$.
Conclusão: A série converge no intervalo aberto $]-3, 3[$.

b)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-4)^n}{n!} = 1 + (x-4) + \frac{1}{2}(x-4)^2 + \cdots \,; \quad I =]-\infty, +\infty[.$$

c)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n!)(x+1)^n = 1 + (x+1) + 2(x+1)^2 + 6(x+1)^3 + \cdots \,; \quad I = \{-1\}.$$

Representação de funções como séries de potências

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ uma função com domínio igual ao intervalo de convergência da série de potências. No caso de termos uma soma finita sabemos que é possível diferenciar termo a termo, pelo que neste caso temos

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$$

somos levados a pensar que podemos determinar a derivada de f, diferenciando termo a termo a expressão acima, isto é,

$$\begin{aligned} D_x f(x) &= D_x a_0 + D_x a_1(x-a) + D_x a_2(x-a)^2 + D_x a_3(x-a)^3 + \cdots \\ &= 0 + a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

De modo análogo podemos pensar que a integral $\int f(x)dx$ pode ser obtida através da integração termo a termo, ou seja

Representação de funções como séries de potências

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int a_o dx + \int a_1(x-a)dx + \int a_2(x-a)^2dx + \int a_3(x-a)^3dx + \cdots \\ &= \left[a_0(x-a) + \tfrac{a_1}{2}(x-a)^2 + \tfrac{a_2}{3}(x-a)^3 + \tfrac{a_3}{4}(x-a)^4 + \cdots\right] + C\end{aligned}$$

Prova-se que estes ”cálculos” são possíveis no intervalo $]a-R, a+R[$, onde R é o raio de convergência da série.

Observemos que ao diferenciarmos ou integrarmos uma série do tipo $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ obtemos novas séries de potências:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} D_x[a_n(x-a)^n] = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-a)^{n-1}$$

ou

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int a_n(x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + C$$

Representação de funções como séries de potências

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, onde a série de potências tem raio de convergência R, podemos estabelecer as seguintes propriedades da função f e da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$:

Propriedades:

I) A função f é contínua no intervalo $]a-R, a+R[$.

Representação de funções como séries de potências

II) As três séries de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} D_x[a_n(x-a)^n] = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int a_n (x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

têm todas o mesmo raio de convergência R.

Representação de funções como séries de potências

III) Para $|x-a| < R$,

$$f'(x) = D_x\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-a)^{n-1}.$$

IV) Para $|x-a| < R$,

$$\int f(x)dx = \int\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + C.$$

V) Para $|x-a| < R$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n\right] dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n (x-a)^n dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (b-a)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Representação de funções como séries de potências

Vejamos alguns exemplos ilustrativos da aplicação das propriedades dadas.

Exemplo 1: Determine $D_x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots)$.

- Observemos que $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$ representa uma série de potências cujo raio de convergência é $R = 1$.
- Pelas propriedades II e III temos,

$$D_x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots) = 0 + 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \cdots$$

- $D_x\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n\right] dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^{n-1}$ para $|x| < 1$.

Exemplo 2: Determine $\displaystyle\int (1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots)dx$ para $|x|<1$.

- Usando a propriedade IV obtemos,
$\displaystyle\int (1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots)dx = (x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots)+C$
-
$$\int \left[\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n\right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{k+1} + C \quad \text{para} \quad |x|<1.$$

Exemplo 3: A série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ é convergente no intervalo $]-1,1[$. Reparemos que a soma $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ para $|x| < 1$ representa uma série geométrica cuja soma é possível ser calculada. No intervalo $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Observemos que a soma da série é dada por

$$S = \lim_{n\to\infty} \left(1 \times \frac{1-x^n}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x}.$$

pois $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, quando $x \in]-1,1[$.

Exemplo 4: Sabendo que $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ quando $|x| < 1$, determine a representação em série de potências de x das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{1+x}$

b) $\dfrac{1}{1+x^2}$

c) $\dfrac{1}{3-x}$

d) $\dfrac{2}{x^2-4x+3}$

e) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Exemplo 5: Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$ para $|x-2| < 1$. Determine $f'(x)$ como uma série infinita.

Para $|x-2| < 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n(x-2)^{n-1}}{\sqrt{n}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{n} (x-2)^{n-1} \end{aligned}$$

Exemplo 6: Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(x+3)^{2n}}{(2n)!}$, determine uma representação de $\int_{-3}^{x} f(t)dt$ como uma série de potências.

Pelo critério D'Alembert a série de potências dada tem raio de convergência $R = +\infty$, pelo que $f(x)$ é definida para todos os valores de x. Assim, temos que

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{x} f(t)dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-3}^{x} (-1)^n \frac{(t+3)^{2n}}{(2n)!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+3)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+3)^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$