Departamento de Matemática e Aplicações

30 /03/ 2016

Duração: 90 minutos

1º Teste de Análise Matemática EE

Nome: ____________________ Nr.: __________ Curso:

GRUPO I (3,6 valores)

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correta no quadrado correspondente.

1. Qual das seguintes funções vectoriais descreve um **segmento de recta** no plano?

☐ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R};$

$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = \cos t \\ y+1 = \cos t \end{cases} \Rightarrow \boxed{x-1 = -y+1}$
com $\cos t \in [-1,1]$

☐ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases}, t \in]1, +\infty[;$

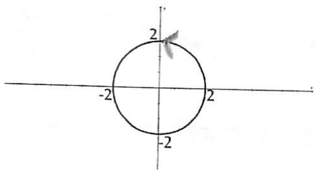
☒ $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R};$

☐ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t^2 \end{cases}, t \in]1, 3[.$

2. Considere a curva esboçada na figura, percorrida no **sentido indicado**. Qual das expressões descreve a curva com o sentido indicado?

$t=0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (2,0)$

$t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow (0,2)$



☐ $\begin{cases} x = 2 + \cos t \\ y = 2 + \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi];$

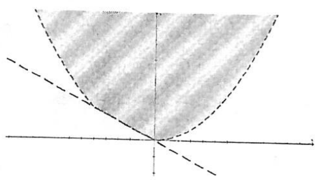
☒ $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi];$

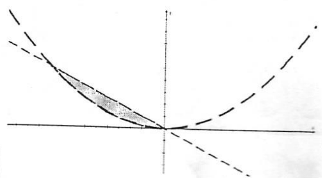
☐ $\begin{cases} x = 2 + 2\sin t \\ y = 2 + 2\cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi];$

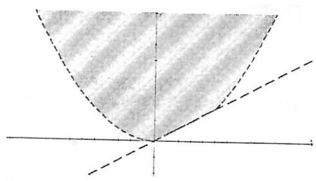
☐ $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$

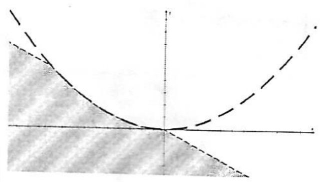
3. Considere a função real de duas variáveis reais $f(x, y) = \dfrac{\ln(x + y)}{\sqrt{y - x^2}}$. Qual das seguintes figuras descreve o domínio de f?

$x+y>0 \quad \wedge \quad y-x^2>0 \Leftrightarrow$
$y>-x \quad \wedge \quad y>x^2$

☒ 

☐ 

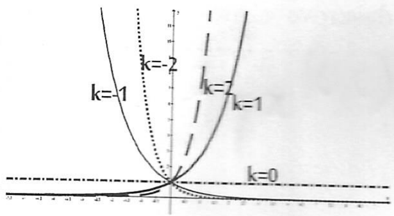
☐ 

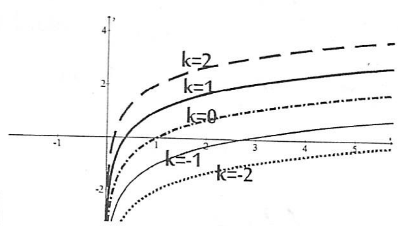
☐ 

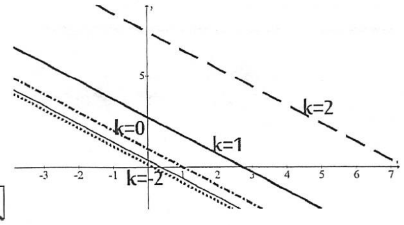
4. As curvas de nível do gráfico da função $f(x, y) = \ln(x + y)$ são da forma

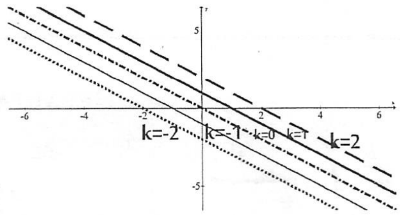
$\ln(x+y) = k \Leftrightarrow x+y = e^k$
$y = e^k - x$

$k=0 \Rightarrow y = 1-x$
$k=1 \Rightarrow y = e-x$
$k=2 \Rightarrow y = e^2-x$

☐ 

☐ 

☒ 

☐ 

5. Considere o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-y}{y+x^2}\right)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2-y}{y+x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-y}{y+x^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y}{y} = -1$

- ☐ O limite existe e é igual a zero;
- ☒ O limite não existe porque os limites iterados dão valores diferentes;
- ☐ O limite não existe porque o valor do limite calculado por $y = x^2$, dá diferente de zero;
- ☐ Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

6. Qual das seguintes funções reais é contínua em $(0,0)$?

☐ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$; → n tem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f$

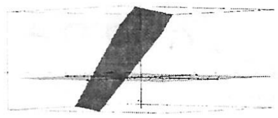
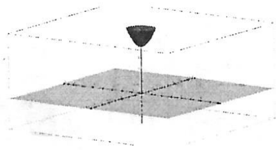
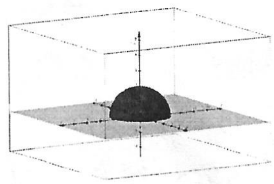
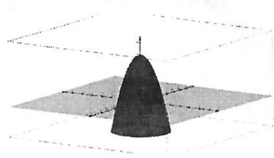
☐ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$; → limite é zero $(x,y)\to(0,0)$

☐ $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f = 0$

☒ $f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

GRUPO II (1,6 valores)

1. Na tabela seguinte, faça a correspondência entre a função e o respectivo gráfico.

1. $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$	1. d	a) 
2. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$	2. c)	b) 
3. $f(x,y) = 4 + x^2 + y^2$	3. b)	c) 
4. $f(x,y) = 4 + x + y$	4. a)	d) 

GRUPO III

(14,8 valores)

Apresente todos os cálculos efetuados.

1. Considere a função vetorial $\vec{r}(t) = \begin{cases} x = 2 + \cos^2 t \\ y = 3t^2 - 1 \end{cases}$, com $t \in \mathbb{R}$, que descreve o movimento de uma partícula no plano XOY.

   (a) Determine o vetor velocidade da partícula no instante $t = \frac{\pi}{4}$.

$\vec{R}'(t) = (-2\,\text{sent}.\cos t,\ 6t)$

$\vec{R}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-1,\ \frac{3\pi}{2}\right)$

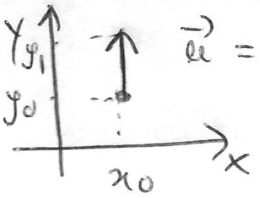
(b) Determine uma equação da reta tangente à curva $\vec{r}(t)$ no instante $t = \frac{\pi}{4}$.

Reta tangente será $(x,y) = \vec{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) + t\vec{R}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

$\vec{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3\pi^2}{16} - 1\right)$.

Assim $(x,y) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3\pi^2}{16} - 1\right) + t\left(-1, \frac{3\pi}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

(c) Determine o(s) instante(s) e ponto(s) da curva onde a reta tangente à curva é vertical. Justifique.



$\vec{u} = (x_0, y_1) - (x_0, y_0) = (0, y_1 - y_0)$

A reta tangente é vertical quando a 1ª coordenada é zero

$\vec{R}'(t) = (-2\,\text{sen}\,t \cos t, 6t)$

A reta tangente é vertical quando $-2\,\text{sen}\,t . \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Os pontos da curva onde isso acontece são $(x,y) = \vec{R}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \left(2 + \cos^2\left(\frac{k\pi}{2}\right), \frac{3k^2\pi^2}{4} - 1\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

2. Considere a função real definida em $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{3x - 4y}{e^{2x^2}}$.

(a) Determine $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, se existir.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{4}{e^{2x^2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -4$$

(b) Determine $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, se existir.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{4}{e^{2x^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-4e^{-2x^2}\right) = \frac{16x}{e^{2x^2}}$$

$$f''_{yx}(0,0) = 0.$$

(c) Verifique se a função f é solução da equação diferencial $f''_{yx} + 4xf'_y = 0$ para $x \neq 0$.

$$f''_{yx} = \frac{16x}{e^{2x^2}}$$

$$f'_y = \frac{-4}{e^{2x^2}}$$

$$f''_{yx} + 4x f'_y = \frac{16x}{e^{2x^2}} + 4x\left(-\frac{4}{e^{2x^2}}\right) =$$

$$= \frac{16x}{e^{2x^2}} - \frac{16x}{e^{2x^2}} = 0$$

3. A temperatura no dia 30 de Março de 1901, às 14h, na localidade Esilana varia da forma $T(x, y) = -0,01x + 0,02y$ onde x representa a latitude e y a longitude. As coordenadas de Esilana são $x = 30^o$ e $y = 40^o$.

(a) Qual a taxa de variação instantânea da temperatura, relativamente à latitude em Esilana, à hora indicada? Qual o significado desse valor?

A taxa de variação instantânea da temperatura relativamente à latitude é dada por $T'_x = -0,01$.

Significa que nas condições indicadas, se a latitude variar h^o então a temperatura varia $-0,01h^o$.

(b) A temperatura aumenta ou diminui à medida que a longitude aumenta em Esilana, à hora indicada? Justifique a sua resposta.

Como a taxa de variação instantânea da temperatura relativamente à longitude é $T'_y = 0,02$, significa que se a longitude aumentar h ($h>0$), então a temperatura aumenta $0,02.h$.