CAPÍTULO 4

# LIMITE E CONTINUIDADE

## 4.1 Limite

### 4.1.1 Limites finitos laterais num ponto $x_0$

**Definição 4.1.1 (limite lateral finito à esquerda)**
Seja $f$ uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Supomos que existe $\tau > 0$ tal que o intervalo $]x_0 - \tau, x_0[\subset D_f$. A função $f$ admite limite lateral $\ell$, quando $x$ tende para $x_0$ pela esquerda se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in ]0, \tau[ \text{ tal que } x \in ]x_0 - \delta, x_0[ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Notamos $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ ou ainda $\lim\limits_{x_0^-} f = \ell$.

NOTA 4.1.1 Se existe $\tau > 0$ tal que $]x_0 - \tau, x_0[\subset D_f$ e $f(x) \leq \ell$ no intervalo podemos em certo casos, notar $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^-$ para indicar que $f(x)$ converge por valores inferiores a $\ell$.
Do mesmo modo, se $f(x) \geq \ell$ no intervalo $]x_0 - \tau, x_0[$ podemos notar $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^+$ para indicar que $f(x)$ converge por valores superiores de $\ell$.

**Definição 4.1.2 (limite lateral finito à direita)**
Seja $f$ uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Supomos que existe $\tau > 0$ tal que o intervalo $]x_0, x_0 + \tau[\subset D_f$. A função $f$ admite limite lateral $\ell$, quando $x$ tende para $x_0$ pela direita se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in ]0, \tau[ \text{ tal que } x \in ]x_0, x_0 + \delta[ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Notamos $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ ou ainda $\lim\limits_{x_0^+} f = \ell$.

NOTA 4.1.2 Se existe $\tau > 0$ tal que $]x_0, x_0 + \tau[\subset D_f$ e $f(x) \leq \ell$ no intervalo podemos em certo casos, notar $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^-$ para indicar que $f(x)$ converge por valores inferiores a $\ell$.

Do mesmo modo, se $f(x) \geq \ell$ no intervalo $]x_0, x_0 + \tau, x_0[$ podemos notar $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^+$ para indicar que $f(x)$ converge por valores superiores de $\ell$.

EXEMPLO 4.1.1 Seja a função sinal $\operatorname{sng}(x)$. Vamos determinar os limites laterais à esquerda e à direita. Para qualquer $x < 0$, temos $\operatorname{sng}(x) = -1$ então seja $\ell = -1$, se $x < 0$ claramente $|\operatorname{sng}(x) - (-1)| = 0$. Em conclusão $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$. Do mesmo modo, deduzimos que $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$.

EXEMPLO 4.1.2 Seja a função $f(x) = x - E(x)$. Mostrar que $\lim_{x \to 1^-} = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} = 0$.
Consideramos o intervalo $I = ]1/2, 1[$, então $I \subset D_f$ e $\forall x \in I$, $f(x) = x - 0 = x$.
Seja $\varepsilon > 0$ e escolhemos $\delta = \varepsilon$. Verificamos que se $x \in ]1/2, 1[ \cap ]1 - \delta, 1[$ então $|f(x) - 1| = |x - 1| \leq \delta = \varepsilon$. Concluimos que $\lim_{x \to 1^-} = 1$.
Consideramos agora o intervalo $I = ]1, 3/2[$, então $I \subset D_f$ e $\forall x \in I$, $f(x) = x - 1$.
Seja $\varepsilon > 0$ e escolhemos de novo $\delta = \varepsilon$. Verificamos que se $x \in ]1, 3/2[ \cap ]1, 1 + \delta[$ então $|f(x) - 0| = |(x - 1) - 0| \leq \delta = \varepsilon$. Concluimos que $\lim_{x \to 1^+} = 0$.

**Proposição 4.1.1**
Se uma função tem um limite lateral em $x_0^+$ ou $x_0^-$, este limite é único.

DEMONSTRAÇÃO. Supomos que temos dois limites $\ell$ e $\ell'$ em $x_0^-$ tal que $\ell \neq \ell'$. Seja $\varepsilon = |\ell - \ell'|/3 > 0$, então existe $\delta \in ]0, \tau[$ tal que se $x \in ]x_0, x_0 + \delta[$ temos $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Do mesmo modo existe $\delta' \in ]0, \tau[$tal que se $x \in ]x_0, x_0 + \delta'[$ temos $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$. Pomos $\delta'' = \min(\delta, \delta') > 0$ e se $x \in ]x_0, x_0 + \tau[ \cap ]x_0, x_0 + \delta''[$ temos ambos $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ e $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$. Com a desigualdade triangular deduzimos

$$|\ell - \ell'| = |\ell - f(x) + f(x) - \ell'| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|.$$

Obtemos então $|\ell - \ell'| < 0$ o que é impossível e concluimos que $\ell = \ell'$. $\square$

### 4.1.2 Limites laterais infinitos num ponto $x_0$

**Definição 4.1.3 (limite lateral infinito à esquerda)**
Seja $f$ uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Supomos que existe $\tau > 0$ tal que o intervalo $]x_0 - \tau, x_0[ \subset D_f$.

- A função $f$ tende para $+\infty$ quando $x$ tende para $x_0$ pela esquerda se

$$\forall M > 0,\ \exists \delta \in ]0, \tau[ \text{ tal que } x \in ]x_0 - \delta, x_0[ \ \Rightarrow\ f(x) > M.$$

  Notamos $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$.

- A função $f$ tende para $-\infty$ quando $x$ tende para $x_0$ pela esquerda se

$$\forall M > 0,\ \exists \delta \in ]0, \tau[ \text{ tal que } x \in ]x_0 - \delta, x_0[ \ \Rightarrow\ f(x) < -M.$$

  Notamos $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ ou ainda $\lim\limits_{x_0^-} f = -\infty$.

Do mesmos modo podemos definir o limite à direita.

## Definição 4.1.4 (limite lateral infinito à direita)

Seja $f$ uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Supomos que existe $\tau > 0$ tal que o intervalo $]x_0, x_0 + \tau[ \subset D_f$.

- A função $f$ tende para $+\infty$ quando $x$ tende para $x_0$ pela direita se

$$\forall M > 0,\ \exists \delta \in ]0, \tau[ \text{ tal que } x \in ]x_0, x_0 + \delta[ \ \Rightarrow\ f(x) > M.$$

  Notamos $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$.

- A função $f$ tende para $-\infty$ quando $x$ tende para $x_0$ pela direita se

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > \in ]0, \tau[ \text{ tal que } x \in ]x_0, x_0 + \delta[ \ \Rightarrow\ f(x) < -M.$$

  Notamos $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ ou ainda $\lim\limits_{x_0^+} f = -\infty$.

Exemplo 4.1.3 Seja a funão $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Determinar os limites laterais no ponto 1.
Podemos verificar que o intervalo $]-\infty, 1[ \subset D_f$. Seja $M > 0$ e definimos $\delta = \frac{1}{M}$ então se $x \in ]1-\delta, 1[$, temos $x - 1 \in ]-\delta, 0[$, quer dizer

$$\frac{1}{1-x} < -\frac{1}{\delta} = -M.$$

Concluimos assim que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.
Agora o intervalo $]1, +\infty[ \subset D_f$ e de novo definimos $\delta = \frac{1}{M}$. Se $x \in ]1, 1+\delta[$, temos $x - 1 \in ]0, \delta[$, quier dizer

$$\frac{1}{1-x} > \frac{1}{\delta} = M.$$

Concluimos assim que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

### 4.1.3 Limites laterais finitos em $\pm\infty$

**Definição 4.1.5 (limite finito em $-\infty$)**
Seja $f$ uma função e supomos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o intervalo $]-\infty, \alpha[\subset D_f$. A função $f$ tende para $\ell \in \mathbb{R}$ quando $x$ tende para $-\infty$ se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A < \alpha \text{ tal que } x < A \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Notamos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ ou ainda $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$.

**Definição 4.1.6 (limite finito em $+\infty$)**
Seja $f$ uma função e supomos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o intervalo $]\alpha, +\infty[\subset D_f$. A função $f$ tende para $\ell \in \mathbb{R}$ quando $x$ tende para $-\infty$ se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > \alpha \text{ tal que } x > A \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Notamos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou ainda $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

Exemplo 4.1.4 Seja a função $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$. Determinar os limites em $\pm\infty$.
Vamos mostrar que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$. Por isso notando que $]1, +\infty[\subset D_f$, seja $\varepsilon > 0$ e pomos $M = \frac{1}{\varepsilon} + 1$. Observamos que

$$\frac{x}{1-x} = \frac{x-1+1}{1-x} = -1 - \frac{1}{x-1}$$

e obtemos $|f(x) - (-1)| = \frac{1}{x-1} > 0$. Se $x > M$ então $x - 1 > M - 1 = \frac{1}{\varepsilon}$ e deduzimos que

$$\frac{1}{x-1} < \varepsilon.$$

Em conclusão, para qualquer $\varepsilon$, determinamos um $M$ tal que se $x > M$ temos $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ que permite afirmar que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.
Mostramos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ do mesmo modo.

**Proposição 4.1.2**
Se uma função tem um limite finito em $+\infty$ ou $+\infty$, este limite é único.

### 4.1.4 Limites laterais infinitos em $\pm\infty$

**Definição 4.1.7 (limite lateral infinito em $-\infty$)**
Sejam $f$ uma função e supomos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o intervalo $]-\infty, \alpha[\subset D_f$.

- A função $f$ tende para $+\infty$ quando $x$ tende para $-\infty$ se

$$\forall M > 0,\ \exists A < \alpha \text{ tal que } x < A \ \Rightarrow\ f(x) > M.$$

Notamos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

- A função $f$ tende para $-\infty$ quando $x$ tende para $-\infty$ se

$$\forall M > 0,\ \exists A < \alpha \text{ tal que } x < A \ \Rightarrow\ f(x) < -M.$$

Notamos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ou ainda $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

**Definição 4.1.8 (limite lateral infinito em $+\infty$)**
Sejam $f$ uma função e supomos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o intervalo $]\alpha, +\infty[\subset D_f$.

- A função $f$ tende para $+\infty$ quando $x$ tende para $+\infty$ se

$$\forall M > 0,\ \exists A > \alpha \text{ tal que } x > A \ \Rightarrow\ f(x) > M.$$

Notamos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- A função $f$ tende para $-\infty$ quando $x$ tende para $+\infty$ se

$$\forall M > 0,\ \exists A > \alpha \text{ tal que } x > A \ \Rightarrow\ f(x) < -M.$$

Notamos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ou ainda $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

Exemplo 4.1.5 Seja a função $f(x) = x^2$. Mostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Notamos que $]1, +\infty[\subset D_f$ e para qualquer $M > 0$ pomos $A = \max(M, 1)$. Se $x > A$ então $x^2 > A^2 > A > M$, seja $f(x) > M$. Concluimos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

### 4.1.5 Limites finitos num ponto $x_0$

**Definição 4.1.9 (limite finito em $x_0$)**
Seja $f$ uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Supomos que existe $\tau > 0$ tal que o conjunto $]x_0 - \tau, x_0[\cup]x_0, x_0 + \tau[\subset D_f$. A função $f$ tende para $\ell$, quando $x$ tende para $x_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in ]0, \tau[ \text{ tal que } x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, x \neq x_0 \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Notamos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou ainda $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

Nota 4.1.3 Temos a equivalência

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell.$$

Nota 4.1.4 Uma outra definição equivalente do limite é: a função $f$ tende para $\ell$ quando $x$ tende para $x_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in ]0, \tau[ \text{ tal que } |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Exemplo 4.1.6 Seja a função $f(x) = x^2$, mostrar que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.
Consideramos o intervalo $I = ]1, 3[\subset D_f$ e seja $\varepsilon > 0$. Se $x \in I$, temos

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| \leq 5|x-2|.$$

Agora escolhamos $\delta = \min(\varepsilon/5, 1)$, deduzimos que se $|x - 2| < \delta$ então

$$|f(x) - 4| \leq 5|x-2| < 5\delta \leq 5(\varepsilon/5) = \varepsilon.$$

Concluimos que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

**Proposição 4.1.3 (limite e sucessão em $x_0$)**

- Supomos que temos $\lim\limits_{x_0^-} f = \ell$ então para qualquer sucessão $(u_i)$ tal que $u_i < x_0$ e $\lim\limits_{i \to \infty} u_i = x_0$ temos
$$\lim_{i \to \infty} f(u_i) = \ell.$$
- Supomos que temos $\lim\limits_{x_0^+} f = \ell$ então para qualquer sucessão $(u_i)$ tal que $u_i > x_0$ e $\lim\limits_{i \to \infty} u_i = x_0$ temos
$$\lim_{i \to \infty} f(u_i) = \ell.$$
- Supomos que temos $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ então para qualquer sucessão $(u_i)$ tal que $\lim\limits_{i \to \infty} u_i = x_0$ temos
$$\lim_{i \to \infty} f(u_i) = \ell.$$

Exemplo 4.1.7 Mostrar que a função $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ não admite limite em $0^+$.
Consideramos as duas sucessções $u_i = \frac{1}{2i\pi}$ $v_i = \frac{1}{\pi+2i\pi}$. Podemos verificar que $u_i$ e $v_i$ têm termos positivos com limites

$$\lim_{i\to\infty} u_i = \lim_{i\to\infty} v_i = 0.$$

Se a função $f$ fosse continua em $0^+$ então deveríamos ter

$$\lim_{i\to+\infty} f(u_i) = \lim_{i\to+\infty} f(v_i).$$

Por um lado calculamos $f(u_i) = \cos(2i\pi) = 1$ enquanto $f(v_i) = \cos(\pi + 2i\pi) = -1$. Deduzimos que

$$\lim_{i\to+\infty} f(u_i) = 1, \qquad \lim_{i\to+\infty} f(v_i) = -1.$$

Concluimos que a função não tem limite em $0^+$.

**Proposição 4.1.4 (limite e sucessão em $\pm\infty$)**

- Supomos que temos $\lim_{-\infty} f = \ell$ então para qualquer sucessão $(u_i)$ tal que $\lim_{i\to\infty} u_i = +\infty$ temos

$$\lim_{i\to\infty} f(u_i) = \ell.$$

- Supomos que temos $\lim_{+\infty} f = \ell$ então para qualquer sucessão $(u_i)$ tal que $\lim_{i\to\infty} u_i = +\infty$ temos

$$\lim_{i\to\infty} f(u_i) = \ell.$$

Exemplo 4.1.8 Mostrar que a função $\cos(x)$ não admite limite em $+\infty$.
Consideramos as duas sucessções $u_i = 2i\pi$ $v_i = \pi + 2i\pi$. Podemos verificar que $u_i$ e $v_i$ são termos positivos com limites

$$\lim_{i\to\infty} u_i = \lim_{i\to\infty} v_i = +\infty.$$

Se a função $f$ fosse continua em $+\infty$ então deveríamos ter

$$\lim_{i\to+\infty} f(u_i) = \lim_{i\to+\infty} f(v_i).$$

Por um lado calculamos $f(u_i) = \cos(2i\pi) = 1$ enquanto $f(v_i) = \cos(\pi + 2i\pi) = -1$. Deduzimos que

$$\lim_{i\to+\infty} f(u_i) = 1, \qquad \lim_{i\to+\infty} f(v_i) = -1.$$

Concluimos que a função não tem limite em $+\infty$.

## 4.2 Propriedades dos limites

### 4.2.1 Aritmética das limites

Distingimos 5 tipos de limites: em $x_0^-$ (pela esquerda) em $x_0^+$ (pela direita), em $x_0$ (conjunção dos casos $x_0^+$ e $x_0^-$) assim que em $-\infty$ e em $+\infty$. A informação determinante para determinar

o limite da soma, do produto ou do quociente de duas funções é o valor do limite de cada função. Que o limite seja considerado em $x_0^+$ ou em $-\infty$ não tem importância.
Apresentamos nas tabelas seguinte a aritmética dos limites onde $\lim f$ e $\lim g$ representam indeferamente os limites em $x_0^-$, $x_0^+$, $x_0$, $-\infty$ ou $+\infty$.
Recordamos que o símbolo $\star$ significa que não podemos diretamente determinar o limite.

| $\lim g$ \ $\lim f$ | $-\infty$ | $\ell$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\star$ |
| $\ell'$ | $-\infty$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $\star$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

Soma de limites $f+g$.

| $\lim g$ \ $\lim f$ | $-\infty$ | $\ell < 0$ | $\ell = 0$ | $\ell > 0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\star$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell' < 0$ | $+\infty$ | $\ell\ell'$ | $0$ | $\ell\ell'$ | $-\infty$ |
| $\ell' = 0$ | $\star$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\star$ |
| $\ell' > 0$ | $-\infty$ | $\ell\ell'$ | $0$ | $\ell\ell'$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\star$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

Produto de limites $fg$.

| $\lim g$ \ $\lim f$ | $-\infty$ | $\ell < 0$ | $\ell = 0$ | $\ell > 0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $\star$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\star$ |
| $\ell' < 0$ | $+\infty$ | $\ell/\ell'$ | $0$ | $\ell/\ell'$ | $-\infty$ |
| $\ell' = 0$ | $\star$ | $\star$ | $\star$ | $\star$ | $\star$ |
| $\ell' > 0$ | $-\infty$ | $\ell/\ell'$ | $0$ | $\ell/\ell'$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $\star$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\star$ |

Quociente de limites $f/g$.

NOTA 4.2.1 As tabelas para os limites de funções são exatamente as mesmas que as tabelas de limite de sucessões.

### 4.2.2 Enquadramento de limite

Neste parágrafo, usamos as notações introduzidas nas seções anteriores. Em particular $\tau$ é o número real positivo usado nas definições dos limites em $x_0$ enquanto $\alpha$ é o número real usado nas definições dos limites em $\pm\infty$.

**Proposição 4.2.1**
Sejam $f$ e $g$ duas funções e $x_0 \in \mathbb{R}$ e supomos que $\lim\limits_{x_0^-} f = \ell$, $\lim\limits_{x_0^-} g = \ell'$. Se $\forall x \in ]x_0 - \tau, x_0[$ temos $f(x) \leq g(x)$ então $\ell \leq \ell'$.

Nota 4.2.2 Se $\forall x \in ]x_0 - \tau, x_0[$ temos $f(x) < g(x)$ (desigualdade estrita) não podemos concluir que $\ell < \ell'$ mas apenas $\ell \leq \ell'$.

Nota 4.2.3 Temos uam propriedade semelhante em $x_0^+$ se $\forall x \in ]x_0, x_0 + \tau[$ temos $f(x) \leq g(x)$ ou em $x_0$ se $\forall x \in ]x_0 - \tau, x_0 + \tau[$ temos $f(x) \leq g(x)$.

Nota 4.2.4 Temos uma propriedade semelhante em $+\infty$ se $\forall x \in ]\alpha, +\infty[$ temos $f(x) \leq g(x)$ ou em $-\infty$ se $\forall x \in ] - \infty, \alpha[$ temos $f(x) \leq g(x)$.

**Proposição 4.2.2**

Sejam $f$, $g$, $h$ três funções de valores reais, $x_0 \in \mathbb{R}$ e supomos que $\lim\limits_{x_0^-} f = \ell$, $\lim\limits_{x_0^-} g = \ell$.

Se $\forall x \in ]x_0 - \tau, x_0[$ temos $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ então $h$ converge em $x_0$ pela direita e temos $\lim\limits_{x_0^-} h = \ell$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 \in ]0, \tau[$ tal que $x \in ]x_0 - \delta_1, x_0[$ temos $|f(x) - \ell| < \varepsilon/4$. Do mesmo modo, existe $\delta_2 \in ]0, \tau[$ tal que $x \in ]x_0 - \delta_2, x_0[$ temos $|g(x) - \ell| < \varepsilon/4$. Seja $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, temos

$$|h(x) - \ell| = |h(x) - f(x) + f(x) - \ell| \leq h(x) - f(x) + |f(x) - \ell|,$$

e do outro lado

$$|h(x) - \ell| = |h(x) - g(x) + g(x) - \ell| \leq g(x) - h(x) + |g(x) - \ell|.$$

Fazendo a soma temos

$$\begin{aligned} 2|h(x) - \ell| &\leq g(x) - f(x) + |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell| \\ &\leq (g(x) - \ell) + (\ell - f(x)) + |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell| \\ &\leq 2|f(x) - \ell| + 2|g(x) - \ell| \\ &\leq 2|f(x) - \ell| + 2|g(x) - \ell| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluimos assim que $\lim\limits_{x_0^-} h = \ell$. $\square$

Nota 4.2.5 Se $\forall x \in ]x_0 - \tau, x_0[$ temos $f(x) < h(x) < g(x)$ (desigualdade estrita) temos a mesma conclusão.

Nota 4.2.6 Temos uma propriedade semelhante em $x_0^+$ se $\forall x \in ]x_0, x_0 + \tau[$ temos $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ou em $x_0$ se $\forall x \in ]x_0 - \tau, x_0 + \tau[$ temos $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.

Nota 4.2.7 Temos uma propriedade semelhante em $+\infty$ se $\forall x \in ]\alpha, +\infty[$ temos $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ou em $-\infty$ se $\forall x \in ] - \infty, \alpha[$ temos $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.

**Proposição 4.2.3**
Sejam $f$ e $g$ duas funções e $x_0 \in \mathbb{R}$ e supomos que $\lim\limits_{x_0^-} f = +\infty$. Se $\forall x \in ]x_0 - \tau, x_0[$ temos $f(x) \leq g(x)$ então $\lim\limits_{x_0^-} g = +\infty$. Do mesmo modo, supomos que que $\lim\limits_{x_0^-} f = -\infty$. Se $\forall x \in ]x_0 - \tau, x_0[$ temos $f(x) \geq g(x)$ então $\lim\limits_{x_0^-} g = -\infty$.

NOTA 4.2.8 Temos uma propriedade semelhante em $x_0^+$ se $\forall x \in ]x_0, x_0 + \tau[$ temos $f(x) \leq g(x)$ ou em $x_0$ se $\forall x \in ]x_0 - \tau, x_0 + \tau[$ temos $f(x) \leq g(x)$.

NOTA 4.2.9 Temos uma propriedade semelhante em $+\infty$ se $\forall x \in ]\alpha, +\infty[$ temos $f(x) \leq g(x)$ ou em $-\infty$ se $\forall x \in ] - \infty, \alpha[$ temos $f(x) \leq g(x)$.

## 4.3 Limites de revelo

Existem numerosas situações onde não podemos determinar os limite com as tabelas. Contudo existe uma lista de limites de revelo que correspondem aos casos mais usuais onde este cálculo já foi realizado.

### 4.3.1 Limites com função potência

- Se $\alpha > 0$, $\lim\limits_{+\infty} x^\alpha = +\infty$.
- Se $\alpha < 0$, $\lim\limits_{+\infty} x^\alpha = 0^+$.
- Se $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{-\infty} x^{2k} = +\infty$ e $\lim\limits_{-\infty} x^{2k-1} = -\infty$.
- Se $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{-\infty} x^{-2k} = 0^+$ e $\lim\limits_{-\infty} x^{1-2k} = 0^-$.

EXEMPLO 4.3.1 Os limites correspondem aos protótipos seguintes $\sqrt{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x^3$, $x^{-3}$.

### 4.3.2 Limites com função exponencial

- $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0^+$, $\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$.
- Se $\alpha > 0$, $\lim\limits_{+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0^+$.
- Se $\alpha < 0$, $\lim\limits_{+\infty} x^\alpha e^x = +\infty$.

### 4.3.3 Limite com função logarítmo

- $\lim_{0^-} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{+\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Se $\alpha < 0$, $\lim_{+\infty} x^\alpha \ln(x) = 0^+$.
- Se $\alpha > 0$, $\lim_{0^+} x^\alpha \ln(x) = 0^-$.

### 4.3.4 Limite com função trigonométrica

- $\lim_{0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
- $\lim_{0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Os limites com funções tan ou cot deduzem-se a partir destes dois limites elementares.

## 4.4 Comparação assintótica

**Definição 4.4.1 (Comparação assintótica equivalente)**
Sejam duas funções $f$ e $g$ definidas num intervalo $]a, b[$.
As duas funções são assintóticamente equivalentes pela esquerda no ponto $a$ se

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \qquad \text{Notação: } f(x) \underset{a^+}{\sim} g(x).$$

As duas funções são assintóticamente equivalentes pela direita no ponto $b$ se

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \qquad \text{Notação: } f(x) \underset{b^-}{\sim} g(x).$$

Do mesmo modo vamos definir uma comparação assintótica equivalente no infinito.

**Definição 4.4.2**
Sejam duas funções $f$ e $g$ definidas num intervalo $]a, +\infty[$.
As duas funções são assintóticamente equivalentes em $+\infty$ se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \qquad \text{Notação: } f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x).$$

NOTA 4.4.1 Temos uma definição identica em $-\infty$.

EXEMPLO 4.4.1 Mostrar que a função $f(x) = x^2 + \exp(-x) + \sqrt{x}$ é assintóticamente equivalente à $x^2$ em $+\infty$.
Seja $g(x) = x^2$ e temos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{e^{-x}}{x^2} + x^{-\frac{3}{2}}.$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{3}{2}} = 0$ deduzimos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

**Definição 4.4.3 (Comparação assintótica infinitésima)**
Sejam duas funções $f$ e $g$ definidas num intervalo $]a, b[$.
A função $f$ é $o-$ pequeno relativo de $g$ pela esquerda no ponto $a$ se

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \qquad \text{Notação: } f(x) \underset{a^+}{=} o(g(x)).$$

A função $f$ é $o-$ pequeno relativo de $g$ pela direita no ponto $b$ se

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \qquad \text{Notação: } f(x) \underset{b^-}{=} o(g(x)).$$

Do mesmo modo vamos definir uma comparação assintótica infinitésima no infinito.

**Definição 4.4.4**
Sejam duas funções $f$ e $g$ definidas num intervalo $]a, +\infty[$.
A função $f$ é $o-$ pequeno relativo de $g$ em $+\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \qquad \text{Notação: } f(x) \underset{+\infty}{=} o(g(x)).$$

NOTA 4.4.2 Temos uma definição identica em $-\infty$.

EXEMPLO 4.4.2 Mostrar que a função $f(x) = x^2 + \exp(-x) + \sqrt{x}$ é $o$-pequeno relativo a função $x^3$ em $+\infty$.
Seja $g(x) = x^2$ e temos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}\left[1 + \frac{e^{-x}}{x^2} + x^{-\frac{3}{2}}\right].$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{3}{2}} = 0$ deduzimos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ e concluimos que $f(x) \underset{+\infty}{=} o(g(x))$.

### 4.4.1 Propriedades

**Proposição 4.4.1**
Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f$, $g$, $h$ três funções definidas em $]a, b[$.

Se $f(x) \underset{a^+}{\sim} g(x)$ e $g(x) \underset{a^+}{\sim} h(x)$ então $f(x) \underset{a^+}{\sim} h(x)$.

Se $f(x) \underset{a^+}{\sim} g(x)$ e $g(x) \underset{a^+}{=} o(h(x))$ então $f(x) \underset{a^+}{=} o(h(x))$.

Se $f(x) \underset{a^+}{=} o(g(x))$ e $g(x) \underset{a^+}{=} o(h(x))$ então $f(x) \underset{a^+}{=} o(h(x))$.

Nota 4.4.3 Temos propriedades identicas em $b^-$, $+\infty$ e $-\infty$.

**Proposição 4.4.2**
Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f$, $g$, $h$ três funções definidas em $]a, b[$.

Se $f(x) \underset{a^+}{\sim} h(x)$ e $g(x) \underset{a^+}{\sim} h(x)$ então $f(x) + g(x) \underset{a^+}{\sim} h(x)$.

Se $f(x) \underset{a^+}{\sim} h(x)$ e $g(x) \underset{a^+}{=} o(h(x))$ então $f(x)g(x) \underset{a^+}{=} o(h(x))$.

Nota 4.4.4 Cuidade! Se $f(x) \underset{a^+}{=} o(g(x))$ e $f(x) \underset{a^+}{=} o(h(x))$ podemos dizer nada entre $g$ e $h$.

## 4.5 Continuidade

### 4.5.1 Definição e propriedades elementares

**Definição 4.5.1 (continuidade a esquerda)**
Seja $f$ uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Supomos que existe $\tau > 0$ tal que o intervalo $]x_0 - \tau, x_0] \subset D_f$. A função $f$ é contínua a esquerda no ponto $x_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in ]0, \tau[ \text{ tal que } x \in ]x_0 - \delta] \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**Definição 4.5.2 (continuidade a direita)**
Seja $f$ uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Supomos que existe $\tau > 0$ tal que o intervalo $[x_0, x_0 + \tau[\subset D_f$. A função $f$ é contínua no ponto $x_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in ]0, \tau[ \text{ tal que } x \in [x_0, x_0 + \delta[ \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

EXEMPLO 4.5.1 Seja a função $f(x) = \sqrt{x}$, temos $D_f = [0, +\infty[$ e $f(0) = 0$. Para qualquer $\varepsilon > 0$ seja $\delta = \min(\varepsilon^2, 1) > 0$ e se $x \in [0, \delta[$ então $\sqrt{x} \in [0, \varepsilon[$. Deduzimos ue $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$ e concluimos que a função é continua a direita.

**Definição 4.5.3 (continuidade )**
Seja $f$ uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Supomos que existe $\tau > 0$ tal que o intervalo $]x_0 - \tau, x_0 + \tau[\subset D_f$. A função $f$ é contínua no ponto $x_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in ]0, \tau[ \text{ tal que } x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

NOTA 4.5.1 Podemos reescrever a definição da continuidade no ponto $x_0$ como

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in ]0, \tau[ \text{ tal que } |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

EXEMPLO 4.5.2 A função $f(x) = x^2$ é contínua no ponto $x = 2$ porque mostramos que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 = (2)^2 = f(2).$$

Vamos considerar a noção de continuidade nos intervalos $I$ do tipo $]a, b[$, $[a, b[, ]a, b]$, $[a, b]$ onde $a < b$.

**Definição 4.5.4**
Sejam $f$ uma função e $I \subset D_f$ um intervalo. A funcão $f$ é contínua em $I$ se para qualquer $x_0 \in ]a, b[$ $f$ é continua em $x_0$. Além de mais se

- caso $a \in I$, temos $\lim\limits_{a^+} f = f(a)$,
- caso $b \in I$, temos $\lim\limits_{b^-} f = f(b)$.

**Notação 4.5.1**
Notamos por $C^0(I)$ o conjunto das funções contínuas em $I$.

Exemplo 4.5.3 Consideramos o intervalo $I = ]0,1[$, $f$ é contínua em $I$ se para qualquer $x_0 \in I$ temos $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$. No caso do intervalo $[0,1]$, devemos acrescentar com $\lim\limits_{0^+} = f(0)$ e $\lim\limits_{1^-} = f(1)$.

Nota 4.5.2 Estendemos a definição de continuidade num domínio $E$ quando o conjunto é a reunião finita de intervalos.

### Proposição 4.5.1

Sejam $f$ e $g$ duas funções contínuas em $x_0$. As funções $f+g$, $f-g$ e $fg$ são contínuas em $x_0$. Além de mais, se $g(x_0) \neq 0$, a função $\dfrac{f}{g}$ é contínua em $x_0$.
Sejam $f$ contínua em $x_0$ e $g$ contínua em $b = f(x_0)$. Então $g \circ f$ é contínua em $x_0$.

Nota 4.5.3 As propriedades são ainda verdadeiras com a continuidade à direita e à esquerda.

### Proposição 4.5.2

Consideramos duas funções $f$ e $g$ contínuas num intervalo $I \subset D_f \cap D_g$

- Se $f$ e $g$ são contínuas em $I$ então $f+g$, $f-g$ e $fg$ são contínuas em $I$.
- se $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$, a função $\dfrac{f}{g}$ é contínua em $I$.

Exemplo 4.5.4 A função $x \to x$ é contínua em $\mathbb{R}$ então para qualquer $i$ a função $x^i = x \times x \times .... \times x \times x$ é contínua em $\mathbb{R}$ (raciocínio por indução). Deduzimos assim que os polinómios são funções contínuas em $\mathbb{R}$ como soma e produto de funções contínuas em $\mathbb{R}$.

### Proposição 4.5.3

Sejam $f$ e $g$ duas funções contínuas respetivamente no intervalo $I \subset D_f$ e no intervalo $J \subset D_g$. Supomos que o critério de compatibilidade para a composta seja verificado, seja $f(I) \subset J$ então a função composta $g \circ f$ é contínua em $I$.

Exemplo 4.5.5 As funções $x^2$ e sin são contínua e $\mathbb{R}$ então a função $\sin(x^2)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

### Proposição 4.5.4

Sejam $f$ uma função contínua no intervalo $I \subset D_f$ e $(u_i)$ uma sucessão de pontos de $I$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} = x_0 \in I$. Então a sucessão $v_i = f(u_i)$ é convergente e temos

$$\lim_{i\to\infty} v_i = \lim_{i\to\infty} f(u_i) = f\left(\lim_{i\to\infty} u_i\right) = f(x_0).$$

EXEMPLO 4.5.6 Seja a sucessão $u_i = \frac{i}{i+1}$ e a sucessão $v_i = \sin(\pi u_i)$. Como $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = 1$, deduzimos que a sucessão $(v_i)$ converge e $\lim\limits_{i\to\infty} v_i = \sin(\pi) = 0$.

**Proposição 4.5.5**
Seja $f$ uma função contínua em $x_0$ tal que $f(x_0) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in ]x_0-\delta, x_0+\delta]$ temos $f(x) > 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$. Então existe $\delta \in ]0, \tau[$ tal que se $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ temos $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = f(x_0)/2$. Do outro lado podemos escrever

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) \geq f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| \geq f(x_0)/2 > 0$$

e concluimos que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. □

NOTA 4.5.4 Temos um resultado semelhante com a derivada à direita (resp. derivada à esquerda) onde $f(x) > 0$ num intervalo da forma $[x_0, x_0 + \delta[$ (resp. $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$) onde $\delta > 0$.

O resultado está certo também se $f(x_0) < 0$ e deduzimos o corolário seguinte.

**Corolário 4.5.1**
Seja $f$ ume função continua em $x_0$ tal que $f(x_0) \neq 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in ]x_0-\delta, x_0+\delta]$ temos $f(x) \neq 0$.

## 4.6 Função contínua de relevo

Damos aqui uma lista de funções contínuas com o respetivo domínio de continuidade.

- As funções $\min(0, x)$, $\max(0, x)$ e $|x|$ são contínuas em $\mathbb{R}$.
- A função $E(x)$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- Se $\alpha > 0$, a função $x^\alpha$ é contínua em $[0, +\infty[$.
- Se $\alpha < 0$, a função $x^\alpha$ é contínua em $]0, +\infty[$.
- Se $k \in \mathbb{N}$, a função $x^k$ é contínua em $\mathbb{R}$ enquanto a função $x^{-k}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

EXEMPLO 4.6.1 Os casos correspondem aos prototipos seguintes $\sqrt{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x^3$, $x^{-3}$.

- A função $e^x$ é contínua em $\mathbb{R}$.
- A função $\ln(x)$ é contínua em $]0, +\infty[$.
- As funções trigonométricas $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são contínuas em $\mathbb{R}$.

### 4.6.1 Como mostrar que uma função e continua?

Usamos as funções de base onde temos os domínios de continuidade.

Exemplo 4.6.2 Determinar o domínio de continuidade da função $f(x) = \ln(1 - |x|)$.
A função ln é contínua no intervalo $E = ]0, +\infty[$ enquanto a função $1 - |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$. O critério de compatibilidade pela composta implica que devemos ter $1 - |x| > 0$ seja $x \in ]-1, 1[$. Invocando o teorema da composta de funções contínuas, obtemos que $f(x)$ é contínua no intervalo $]-1, 1[$.

Exemplo 4.6.3 Determinar o domínio de continuidade da função $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
As funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são contínuas em $\mathbb{R}$. Do outro lado $\cos(x) \neq 0$ se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Invocando o teorema do quociente de função continua, concluimos que $\tan(x)$ é contínua se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

## 4.7 Os teoremas sobre as funções contínuas

Enunciamos o lema fundamental.

**Lema 4.7.1 (Weierstrass)**
Seja $f$ uma função e $I = [a, b] \subset D_f$ um intervalo limitado fechado tal que $f$ é contínua em $I$. Então $f(I)$ é um intervalo limitado fechado $[c, d]$ .

Nota 4.7.1 Este lema é muito complicado a desmontrar onde é necessario usar ferramentas teóricas sofisticadas tal que conjunto compacto, extração de subsucessão, noção de supremo e ínfimo, noção de conexidade.
Este resultado implica em particular que a função seja sobrejectiva de $[a, b]$ em $[c, d]$.

Do lema precedente deduzimos os três principais teoremas de Análise.

**Teorema 4.7.1 (Weierstrass)**
Sob as hipóteses do lema, a função $f$ atinge os seus extremos, quer dizer existem $x_c, x_d \in [a, b]$ tal que $f(x_c) = c$ e $f(x_d) = d$.

**Teorema 4.7.2 (valores intermédios)**
Sob as hipóteses do lema, para qualquer $y \in [c, d]$, existe sempre um $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = y$.

NOTA 4.7.2 Por outras palavras, qualquer valor do intervalo $[c, d]$ é atingível pela função $f$ no intervalo $I$.

**Teorema 4.7.3 (Bolzano)**
Sob as hipoteses do lema, se $f(a)f(b) \leq 0$ então existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = 0$.

NOTA 4.7.3 Não temos únicidade do ponto $x_0$ que anula $f$. Por exemplo, consideramos a função $f(x) = x(x^2 - 1)$ no intervalo $[-2, 2]$, temos $f(-2) = -2$ e $f(2) = 2$ então temos a certeza que existe $x_0 \in [-2, 2]$ tal que $f(x_0) = 0$. Aqui verificamos que os pontos $-1$, $0$ e $1$ são convinientes.

### 4.7.1 Continuidade uniforme

**Definição 4.7.1**
Seja $f$ uma função e $I \subset D_f$ um intervalo. $f$ é uniformemente contínua em $I$ se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x, y \in I,\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

É claro que uma função uniformemente contínua em $I$ é contínua em $I$ mas a recíproca é falsa no caso geral. Portanto temos o teorema seguinte

**Teorema 4.7.4 (Heine)**
Se $f$ é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ então $f$ é uniformemente contínua.

DEMONSTRAÇÃO. A prova é baseada no teorema de Bolzano-Weierstrass onde precisamos extrair um subsucessção convergente de $[a, b]$. $\square$
Este teorema tem muitas aplicações. Por exemplo é essencial na construção do integral de Riemann.

### 4.7.2 Continuidade e função recíproca

**Proposição 4.7.1**
Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ tal que $f$ é estritamente monotóna. Então $f$ é uma bijeção de $[a, b]$ sobre $f(I) = [c, d]$. Em particular, $f$ admite uma função reciproca $f^{-1}$ de $[c, d]$ sobre $[a, b]$.

Demonstração. A continuidade no intervalo fechado limitado $[a, b]$ garante que a função é sobrejectiva enquanto a monotónia estrita implica que a função é injetiva. Concluimos assim que $f$ é bijetiva. □

Exemplo 4.7.1 A função sin é contínua, estritamente crescente em $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sobre $J = [-1, 1]$ então é uma bijeção.

Temos uma proposição recíproca

## Proposição 4.7.2 (continuidade função reciproca)

Sejam $f$ uma função bijetiva do intervalo $I = [a, b]$ sobre um intervalo $J = [c, d]$ e supomos que $f$ contínua em $I$. Então

1. $c = \min(f(a), f(b))$, $d = \max(f(a), f(b))$;
2. $f$ é estritamente monótona em $I$;
3. $f$ e $f^{-1}$ têm a mesma monotonia (ambas crescentes ou decrescentes)
4. a função reciproca $f^{-1}$ é contínua em $J$.

Demonstração. Vamos mostrar os resultados em três etapas.
(1) Supomos que $f(a) \leq f(b)$, a injetividade implica que $f(a) < f(b)$ porque $a \neq b$ implica $f(a) \neq f(b)$. Vamos mostrar que para qualquer $x \in [a, b]$ temos $f(x) \in [f(a), f(b)]$. Supomos que existe $x_0 \in ]a, b[$ tal que $f(x_0) > f(b)$ então o teorema dos valores intermédios (a função é contínua) implica que existe $x_1 \in ]a, x_0[$ tal que $f(x_1) = \frac{f(x_0)+f(b)}{2}$. Do mesmo modo existe $x_2 \in ]x_0, b[$ tal que $f(x_2) = \frac{f(x_0)+f(b)}{2}$. Obtemos assim dois pontos $x_1 \neq x_2 \in ]a, b[$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ o que contradiz o facto que $f$ é injetiva. Em conclusão, temos que $f(x) \leq f(b)$. Mostramos com um raciocínio semelhante que $f(x) \geq f(a)$ e finalmente temos $f(x) \in [f(a), f(b)]$.
Se agora supomos que $f(a) > f(b)$, obtemos esta vez que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \in [f(b), f(a)]$. Das duas ocorrências deduzimos o ponto (1).
(2) Consideramos de novo o caso $f(a) \leq f(b)$, já sabemos que devemos ter $f(a) < f(b)$ com a injetividade. Seja $x, y \in [a, b]$ tal que $x < y$ e supomos que $f(x) \geq f(y)$. A injectividade implica que $f(x) \neq f(y)$ e temos $f(x) > f(y)$. Se aplicamos o ponto (1) ao intervalo $[a, y]$, temos que $f(x) \leq \max(f(a), f(y))$ mas visto que $f(x) > f(y)$ deduzimos que $f(x) \leq f(a)$. Do outro lado aplicamos o ponto (1) ao intervalo $[a, b]$, temos $f(x) \in [f(a), f(b)]$ o que implica $f(x) \geq f(a)$. Obtemos assim que $f(x) = f(a)$ e o critério de injetividade dá $x = a$. Agora temos uma contradição com o facto que $f(y) < f(x) = f(a)$ e $f(y) \in [f(a), f(b)]$. Concluimos que necessariamente $f(x) < f(y)$, quer dizer a função é estritamente crescente. O caso $f(a) > f(b)$ trata-se do mesmo modo para mostrar que a função é estritamente decrescente.
(3) Supomos que $f$ crescente de $[a, b]$ sobre $[f(a), f(b)]$. Seja $y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$ tal que $y_1 < y_2$. Da bijetividade, sabemos que existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Se $x_1 \geq x_2$ concluimos (por caso de $f$ estritamente crescente) que $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ e temos uma contradição visto que $y_1 < y_2$. En conclusão $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$ e $f^{-1}$ estritamente crescente.
(4) Considermos aqui o caso de uma função crescente em $[a, b]$, vamos em primeiro provar que para qualquer $y_0 \in ]f(a), f(b)]$ a função $f^{-1}$ é contínua a esquerda. Por isso consideramos $\varepsilon > 0$ e $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Como $y_0 \in ]f(a), f(b)]$, então $x_0 \in ]a, b]$ e existe $\varepsilon' \in ]0, \varepsilon[$ tal que $]x_0 - \varepsilon', x_0] \subset ]a, b]$, seja ainda (com a monotonia de $f$) $f(x_0 - \varepsilon') < f(x_0) = y_0$. Pomos $\delta = y_0 - f(x_0 - \varepsilon') > 0$, para qualquer $y \in ]y_0 - \delta, y_0]$, temos com monotonia de $f$

$$x_0 - \varepsilon' = f^{-1}(y_0 - \delta) < f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_0) = x_0.$$

Concluimos que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $y \in ]y_0 - \delta, y_0]$ temos $f^{-1}(y) \in ]f^{-1}(y_0) - \varepsilon, f^{-1}(y_0)]$ e a função $f^{-1}$ é contínua pela esquerda.
Com um raciocínio muito semelhante, provamos que para qualquer $y_0 \in [f(a), f(b)[$, $f^{-1}$ é continua à direita e comcluimos que $f^{-1}$ é continua em $[f(a), f(b)]$. $\square$

NOTA 4.7.4 O principal argumento que usamos nesta prova é que a imagem de um intervalo aberto (resp. fechado) é aberto (resp. fechado).