Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
Departamento de Física e Matemática

Apontamentos de Apoio às Aulas de

Cálculo II

Engenharia Biomédica
2011/2012

João Cardoso

Índice

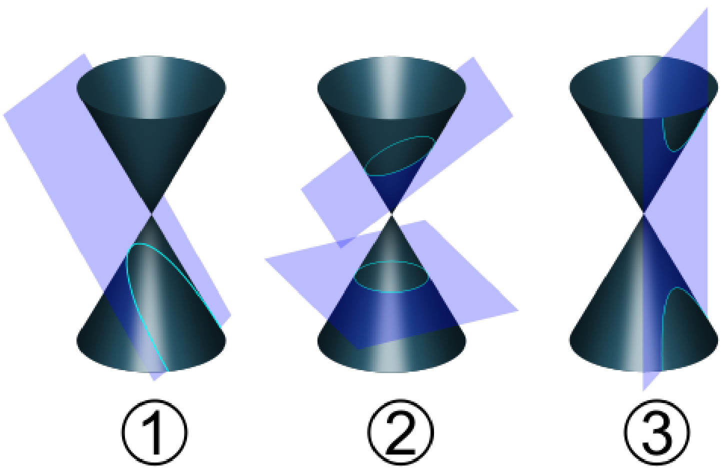
Capítulo 1

Funções de várias variáveis e suas derivadas

1.1 Cónicas

- Por **cónicas** entendem-se as curvas definidas no plano através de uma equação do 2º grau da forma
$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0\ ,$$
onde $A \neq 0$ ou $B \neq 0$

- Do ponto de vista geométrico, as cónicas resultam da intersecção de um plano com um cone, conforme exemplificado na figura abaixo. Na intersecção 1 podemos ver uma parábola, em 2 uma elipse (que inclui como caso particular a circunferência) e em 3 uma hipérbole.

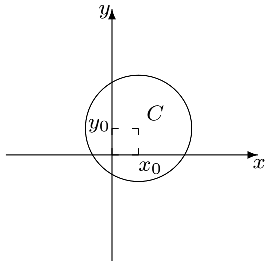


- Nesta disciplina interessam-nos, em particular, as cónicas que apresentam eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados.

- Equações reduzidas das cónicas mencionadas no ponto anterior:

(A) **Circunferência** de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r

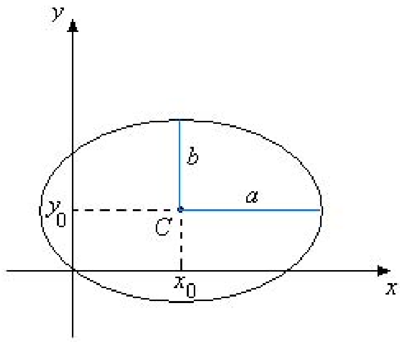
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$



(B) **Elipse** de centro $C(x_0, y_0)$ e semieixos a e b

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

(Nota: quando $a = b$, a elipse é uma circunferência)



(C) **Hipérbole** de centro $C(x_0, y_0)$ e semieixos a e b

1º caso

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

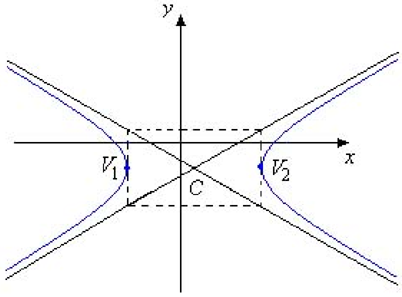
Vértices:

$V_1(x_0 - a, y_0)$

$V_2(x_0 + a, y_0)$

Assímptotas:

$$y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$$

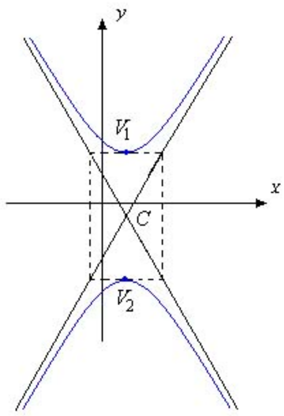


<u>2º caso</u>

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$$

Vértices:
$V_1(x_0, y_0 + b)$
$V_2(x_0, y_0 - b)$

Assímptotas:
$$x - x_0 = \pm\frac{b}{a}(y - y_0)$$

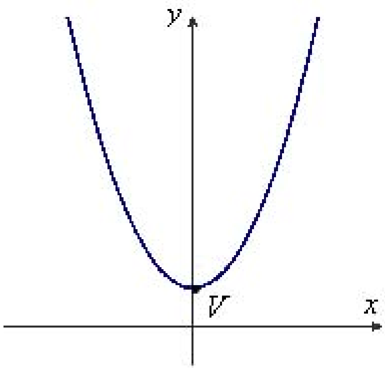


(D) **Parábola**

<u>1º caso</u>

$$(x-x_0)^2 = \alpha(y-y_0)$$

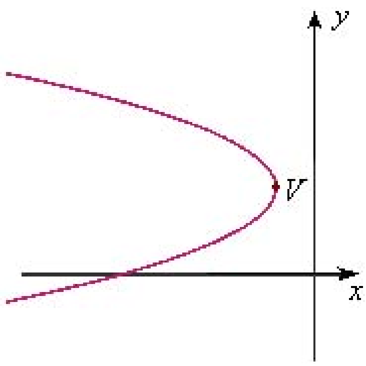
Vértice da parábola: $V(x_0, y_0)$



<u>2º caso</u>

$$(y-y_0)^2 = \beta(x-x_0)$$

Vértice da parábola: $V(x_0, y_0)$



- Dada uma parábola da forma $y = ax^2 + bx + c$, é fácil calcular as coordenadas do seu vértice recorrendo às derivadas. Isto é possível porque o vértice corresponde a um ponto de máximo ou mínimo da parábola. Para exemplificar, consideremos a parábola de equação
$$y = x^2 + 4x - 3,$$
em que a derivada y' é dada por $y' = 2x+4$. Igualando a zero, $y' = 0$, isto é, $2x+4 = 0$,

obtemos a abcissa do vértice $x = -2$. A ordenada do vértice é

$$y(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 3 = -7.$$

As coordenadas do vértice são portanto $V(-2, -7)$.

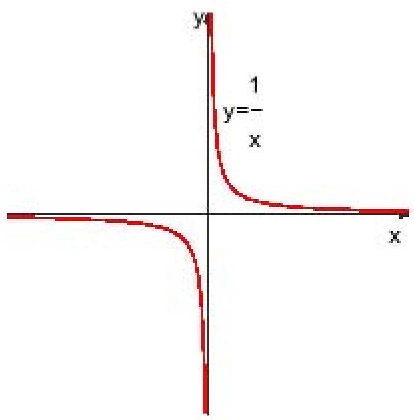
- Para representar graficamente elipses, hipérboles e algumas parábolas usando uma ferramenta gráfica (calculadora ou computador), é necessário decompô-las em duas partes, por forma a que cada parte corresponda ao gráfico de uma função $y = f(x)$. Por exemplo, a circunferência

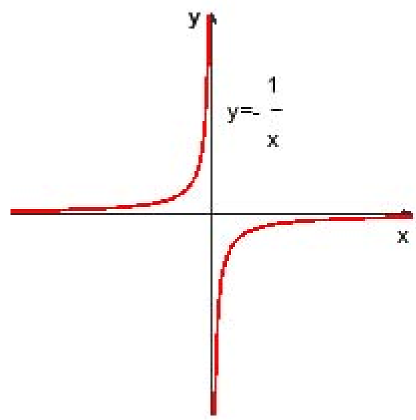
$$x^2 + y^2 = 1$$

corresponde à reunião dos gráficos das funções

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

- Uma cónica importante cujos eixos de simetria não são paralelos aos eixos coordenados é a hipérbole $\quad xy = k, \quad$ ou seja, $\quad y = \dfrac{k}{x}$, com $k \neq 0$





Exercício 1.1.1 *Identificar as seguintes curvas e representá-las geometricamente. Nas alíneas (a) e (b) encontrar duas funções $y = f(x)$ cuja reunião dos gráficos corresponda à cónica dada.*

(a) $x^2 + 2y^2 = 1$

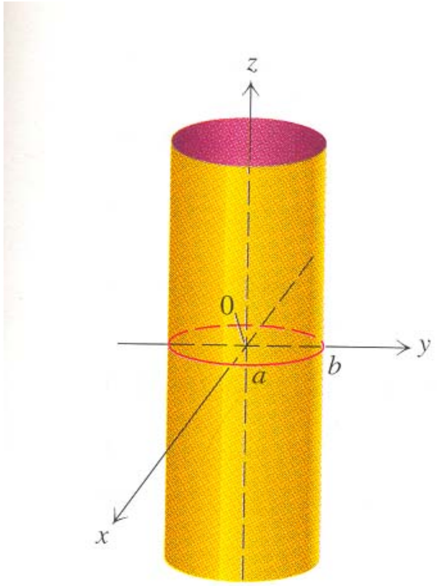
(b) $x^2 - 4y^2 = 9$

(c) $y = x^2 + 2x - 1$

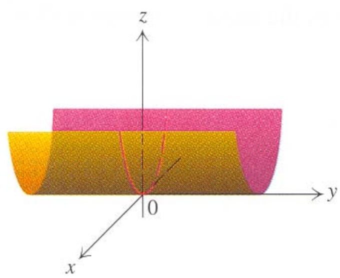
1.2 Quádricas

Definição. Seja C uma curva plana e L uma recta não contida no plano de C. A superfície gerada por uma linha paralela a L quando esta se move ao longo de C e paralelamente a L designa-se por **cilindro**.

Exemplo 1
Seja L o eixo dos zz e C a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ contida no plano xOy. Quando uma recta paralela a L se move ao longo da curva C, obtemos o cilindro circular:
$x^2 + y^2 = a^2$ (no espaço)

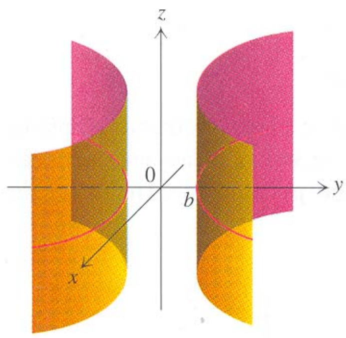


Exemplo 2
Suponhamos agora que L é o eixo dos yy e C a parábola $z = x^2$ contida no plano xOz. À superfície obtida pelo movimento de uma linha paralela a L ao longo de C corresponde o cilindro parabólico.



Exemplo 3
O cilindro elíptico obtém-se considerando C como sendo uma elipse (no plano) e L como um dos eixos perpendiculares a esse plano.

Exemplo 4
O cilindro hiperbólico obtém-se considerando C como sendo uma hipérbole (no plano) e L como um dos eixos coordenados.



Definição 1.2.1 *Designamos por quádrica uma superfície em $\mathbb{R}^3$ definida por uma equação do segundo grau da forma*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

- As superfícies contempladas nos exemplos 1–4 (cilindro circular, cilindro parabólico, cilindro elíptico e cilindro hiperbólico) são exemplos de quádricas. Outros exemplos são apresentados a seguir.

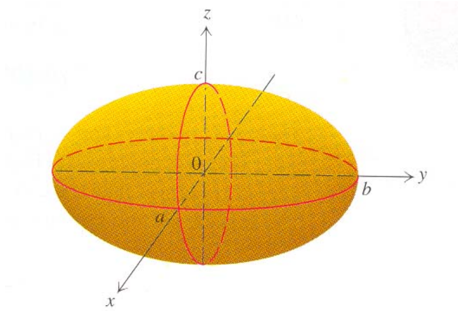
- Equações do tipo
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$
representam quádricas com planos de simetria paralelos aos planos coordenados (xOy, xOz, yOz). Como exemplos, vejamos primeiramente as quádricas cuja equação reduzida é da forma
$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Temos, por isso, os casos (A), (B) e (C) que a seguir se apresentam.

(Caso A)

A equação $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

representa um elipsóide.



Exercício 1.2.2

(a) *Qual é a intersecção do elipsóide com:*

  (i) os eixos coordenados?

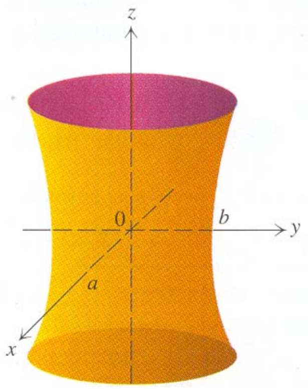
  (ii) os planos coordenados?

(b) *Que superfície conhecida se obtém quando se considera $a = b = c$ na equação do elipsóide?*

(Caso B)

A equação $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

representa um hiperbolóide de uma folha.



Note-se que para o caso de um hiperbolóde de uma folha tem-se que:

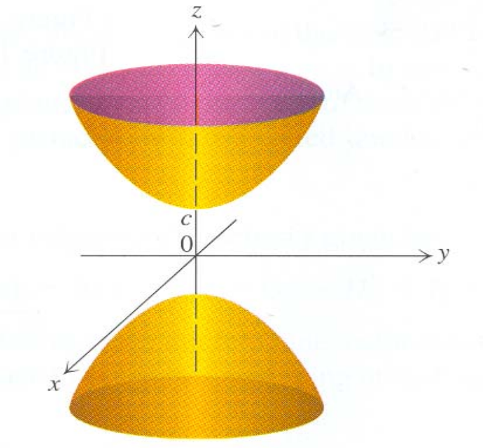
- a intersecção com o eixo dos xx ocorre em $\pm a$ e com o eixo dos yy em $\pm b$, não intersectando o eixo dos zz.
- a intersecção com o plano coordenado xOy corresponde a uma elipse, ao passo que da intersecção com o plano coordenado xOz (tal como yOz) resulta uma hipérbole.
- Se o sinal negativo estiver na primeira ou na segunda parcela da equação precedente, então dá-se uma mudança correspondente no eixo do hiperbolóide.

(Caso C)

A equação

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

representa um hiperbolóide de duas folhas.



Note-se que para o caso de um hiperbolóide de duas folhas tem-se que:

- a intersecção com o plano coordenado xOy é vazia;
- a intersecção com o plano coordenado xOz (tal como yOz) corresponde a uma hipérbole.
- Se os dois sinais negativos estiverem noutras duas parcelas da equação precedente, então haverá uma mudança correspondente no eixo da hiperbolóide.

• Uma equação da forma

$$\pm\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \pm \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

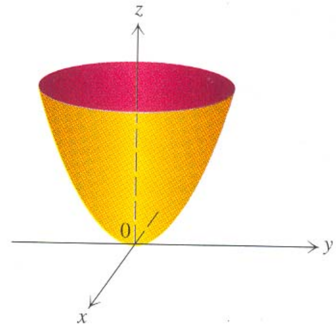
corresponde a uma quádrica análoga às anteriores (patentes em (A), (B) e (C)) mas com centro no ponto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) (não estando por isso necessariamente centrada na origem)

• Outros exemplos de quádricas igualmente importantes são: o parabolóide elíptico, o parabolóide hiperbólico e o cone elíptico.

(I)

O parabolóide elíptico,

tem por equação $\quad z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



- A intersecção do parabolóide elíptico (do tipo do anteriormente apresentado) com o plano de equação $z = z_0$, $(z > 0)$ corresponde a uma elipse.
- Da sua intersecção com o plano xOz (bem como com o plano yOz) resulta uma parábola.

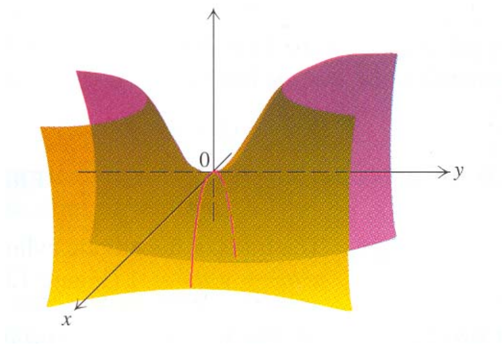
(II)

O parabolóide hiperbólico,

(também designado por sela)

tem por equação

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

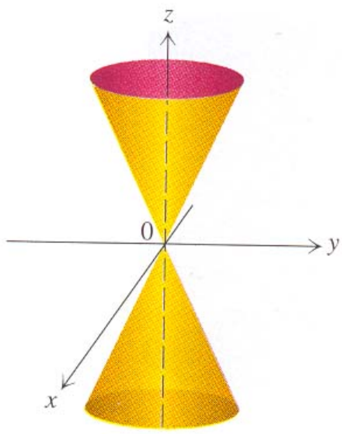


- A intersecção do parabolóide hiperbólico (do tipo do anteriormente apresentado) com o plano xOy corresponde a uma hipérbole.
- Da sua intersecção com o plano xOz (bem como com o plano yOz) resulta uma parábola.

(III)

O cone elíptico, tem por equação

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



- A intersecção do cone elíptico (do tipo do anteriormente apresentado) com os planos que não passam na origem pode ser uma elipse (ou, como caso particular desta, a circunferência), uma parábola ou uma hipérbole. Ou seja, as intersecções são as conhecidas cónicas.
- Note–se ainda que se $a = b$, o cone é circular.

Exercício 1.2.3 *Descrever as seguintes superfícies (se possível, representá-las geometricamente):*

(a) $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 25$

(b) $x^2 - 4y^2 + z^2 = 1$

Tabela 1

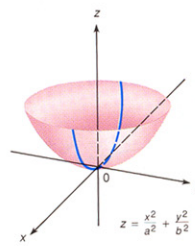
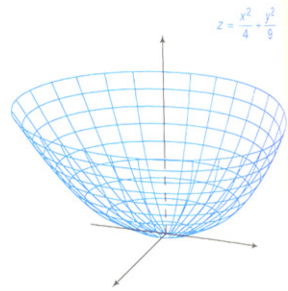
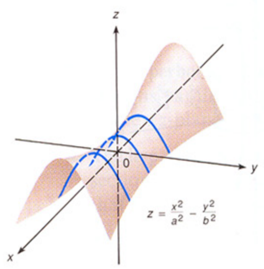
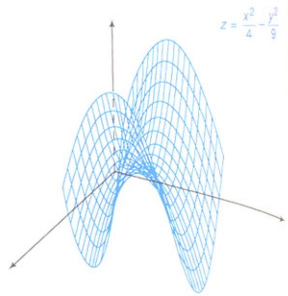
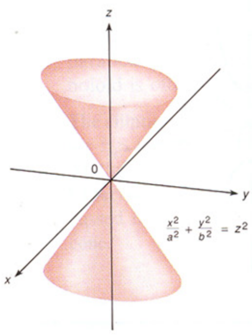
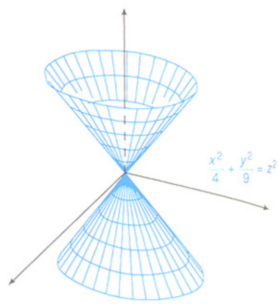
Nome da Superficie e equaçao tipica	Grafico Tipico	Grafico desenhado por computador
Paraboloide Eliptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$		
Paraboloide hiperbolico (ou superficie de sela) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$		
Cone Eliptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$		

Figura 1.1 Quadro resumo de algumas quádricas importantes.

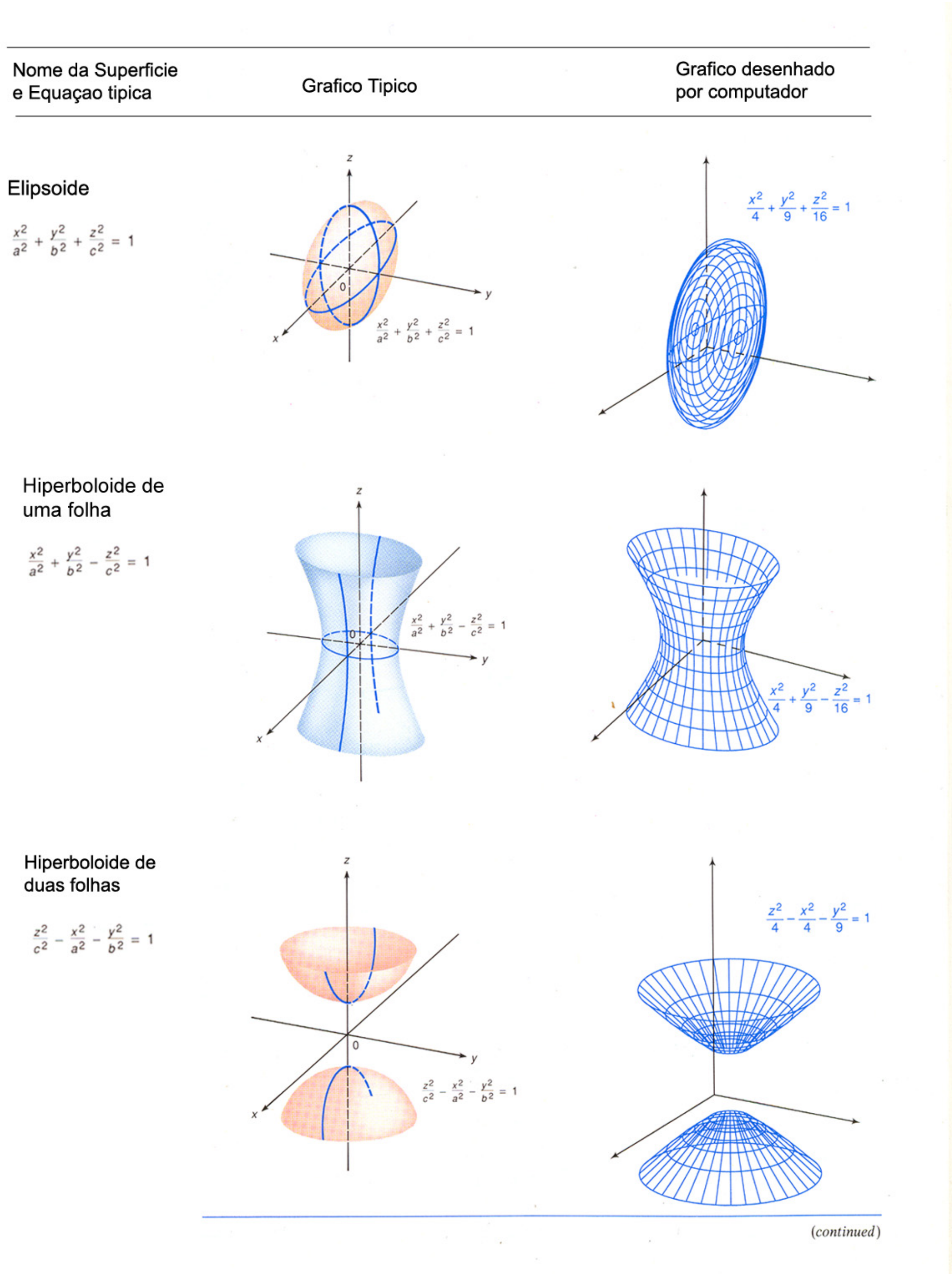
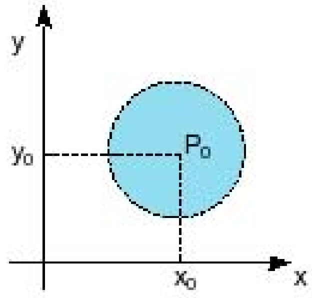


Figura 1.2 Quadro resumo de algumas quádricas importantes.

1.3 Breves noções de topologia em $\mathbb{R}^n$

Círculo aberto de centro $P_0(x_0, y_0)$ e raio r:

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$



Definição 1.3.1 *Seja R uma região do plano xOy.*

(i) $P_0(x_0, y_0)$ *diz-se* **ponto interior** *de R se existir um círculo aberto centrado em P_0 que esteja contido em R. O conjunto de todos os pontos interiores de R designa-se por* **interior de R**.

(ii) $P_0(x_0, y_0)$ *diz-se* **ponto fronteiro** *de R se todo o círculo aberto centrado em P_0 contiver simultaneamente pontos de R e pontos que não pertencem a R. O conjunto de todos os pontos fronteiros de R designa-se por* **fronteira de R**.

(iii) Uma região diz-se ***aberta*** *se coincidir com o seu interior e diz-se* ***fechada*** *se contiver todos os seus pontos fronteiros.*

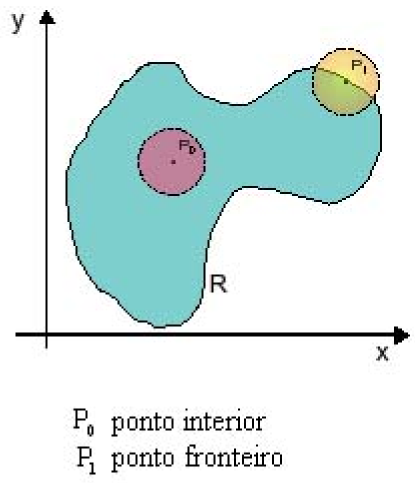


Figura 1.3 Ponto interior e ponto fronteiro de uma região em $\mathbb{R}^2$

- No espaço $\mathbb{R}^3$, em vez de *círculo aberto* considerar-se-á a *bola aberta*:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}$$

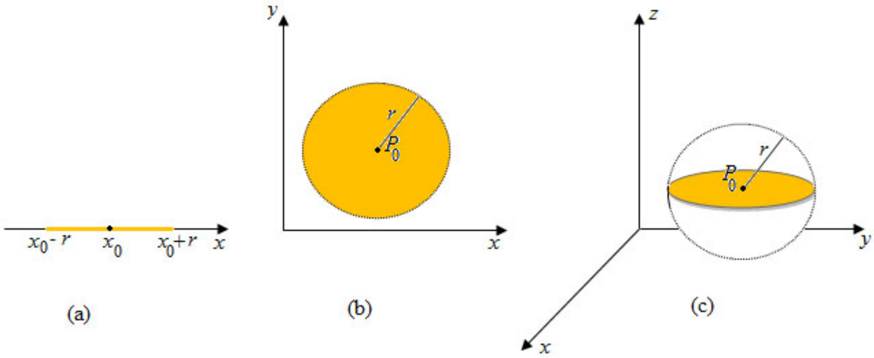


Figura 1.4: (a) Intervalo aberto em $\mathbb{R}$ (extremos do intervalo não incluídos), (b) círculo aberto em $\mathbb{R}^2$ (circunferência não incluída), (c) bola aberta em $\mathbb{R}^3$ (não inclui a superfície esférica).

com centro em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e raio r.

- As definições de interior, fronteira, aberto e fechado no espaço $\mathbb{R}^3$ são análogas às definições anteriores, desde que se substitua "*círculo aberto*" por "*bola aberta*".

Exercício 1.3.2 *Relativamente às regiões que a seguir se apresentam, determine o interior, a fronteira e averigue se é aberta ou fechada.*

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 > 0\}$

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geqslant 1\}$

1.4 Funções de duas variáveis: domínios, gráficos e curvas de nível

Funções de duas variáveis

$$\underbrace{D}_{} \subset \mathbb{R}^2 \qquad \begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & z = f(x, y) \end{array}$$

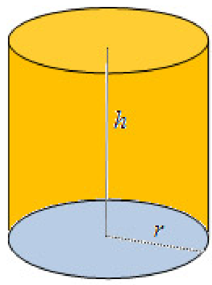
$\uparrow$ domínio de f

- $x,\ y \longrightarrow$ são variáveis independentes (variáveis de entrada);
- $z \longrightarrow$ variável dependente (de saída).

Exemplos:

1. Considere-se o volume de um cilindro circular recto de altura h e raio da base r, o qual é dado por:

   $V = \pi r^2 h = f(r,h)$ com $r,h \geqslant 0$

   As variáveis de entrada são:

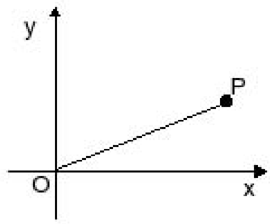
   r: raio da base

   h: altura

   Por exemplo, se $h=5$ e $r=2$, então tem-se
   $V = f(2,5) = \pi \times 2^2 \times 5 = 20\pi$

2. A distância da origem a qualquer ponto do plano é descrita por:

   $$d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

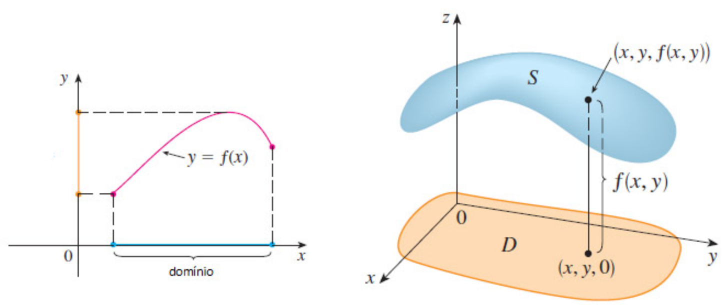
   Por exemplo, se $x=3$ e $y=4$, então
   $d(3,4) = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

O **gráfico** de uma função de duas variáveis $z = f(x,y)$ é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y), \text{ com } (x,y) \in D\}.$$

Geralmente, G é uma superfície tridimensional (3-D) em $\mathbb{R}^3$.

Na figura seguinte, à esquerda, está o gráfico de uma função real de variável real; à direita, o gráfico de uma função real de duas variáveis.



Definição 1.4.1
Sejam $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, $c \in \mathbb{R}$. Chama-se **curva de nível** *de f em c ao conjunto (não vazio) de pontos $(x,y) \in D$ tais que $f(x,y) = c$. Ou seja, uma curva de nível é a*

curva correspondente à projecção no plano xOy da linha que resulta da intersecção do plano de equação $z = c$ com o gráfico de f.

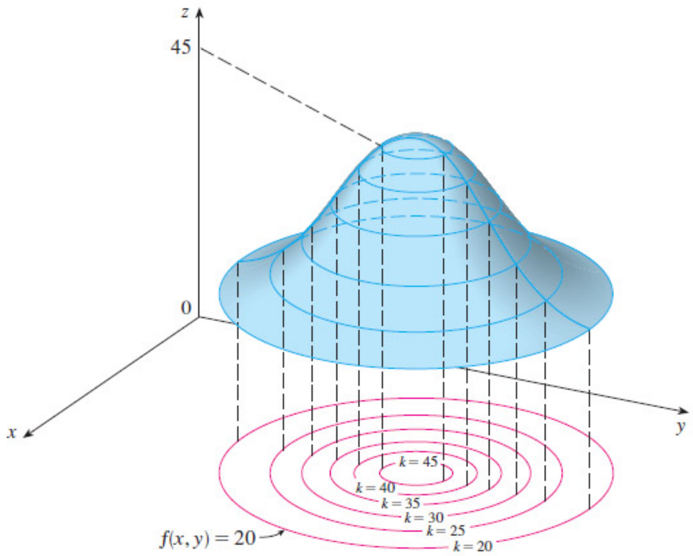


Figura 1.5 Gráfico de uma função e respectivas curvas de nível.

Exemplo 1.4.2 *Na figura seguinte estão representados o gráfico e as curvas de nível da função $f(x,y) = e^{-0.1(x^2+2y^2-2x)} + \cos x$ (ambos obtidos em Matlab).*

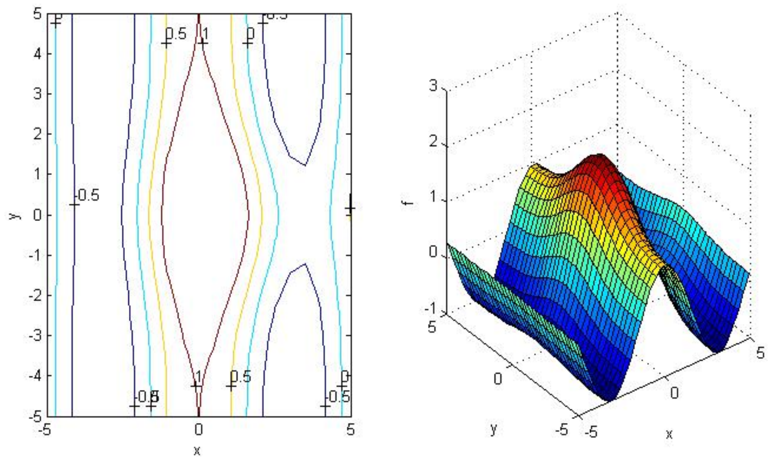


Figura 1.6

• É vulgar a utilização de curvas de nível nos mapas topográficos, isto é, nos mapas em que se pretende mostrar o relevo da superfície terrestre (ver Figura 1.7). Nestes mapas, x e y representam a longitude e a latitude e z representa a altitude (ou profundidade). Aqui

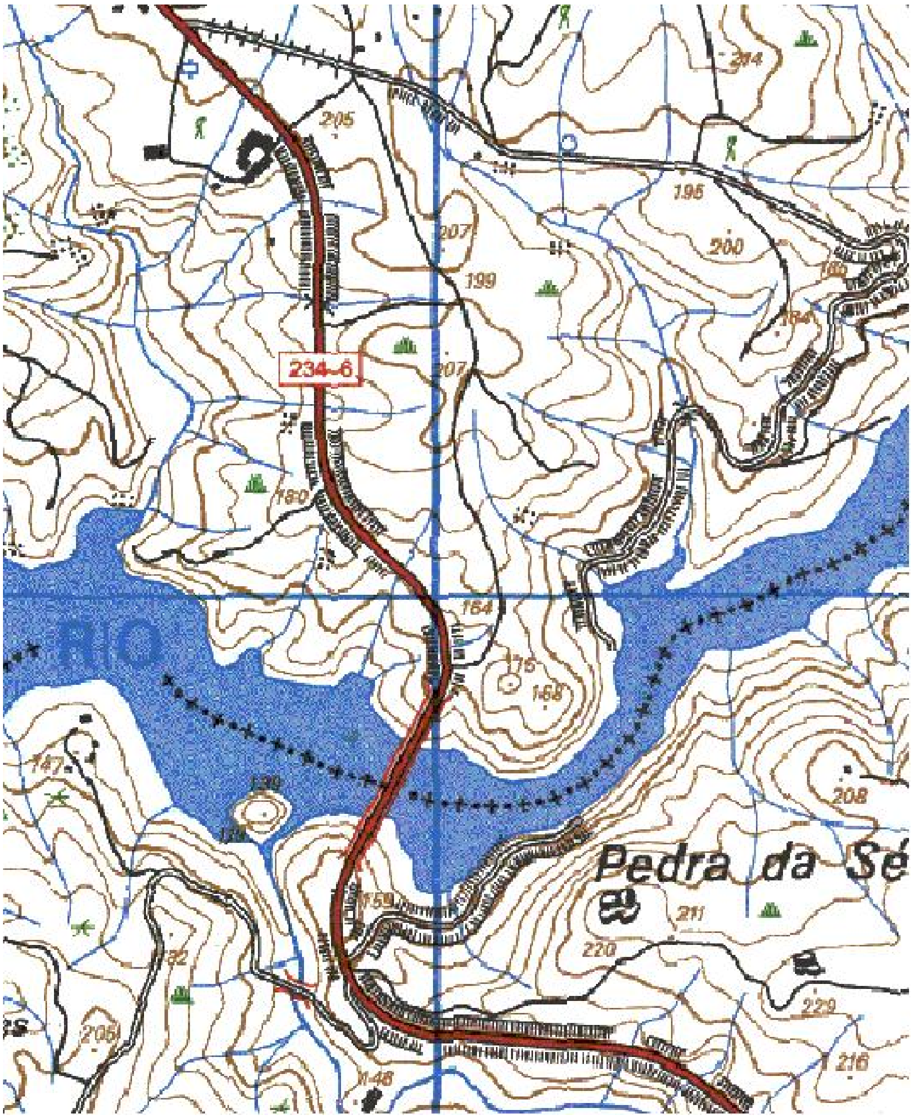


Figura 1.7 Mapa com curvas de nível duma região junto ao rio Mondego.

o gráfico da função $z = f(x, y)$ pode ser visto como caracterizando o relevo da superfície terrestre. Para se obter uma boa ilusão tridimensional, é usual escolher valores de c que sejam igualmente espaçados. Muito espaço entre as curvas de nível significa que z está a variar de forma lenta, enquanto que pouco espaço significa que a variação é rápida.

Também se podem usar as curvas de nível para localizar num mapa os pontos que tenham a mesma temperatura (curvas isotérmicas) ou pontos com a mesma pressão atmosférica (curvas isotérmicas).

Exercício 1.4.3 *Determinar o domínio das seguintes funções e fazer a sua representação geométrica.*

(a) $z = \sqrt{y - x^2}$

(b) $z = \dfrac{1}{xy}$

Exercício 1.4.4 *Determinar duas curvas de nível e o gráfico das seguintes funções:*

(a) $z = \sqrt{y - x^2}$

(b) $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$

1.5 Funções de três ou mais variáveis: domínios e superfícies de nível

$$\underbrace{D}_{\uparrow \text{ domínio de } f} \subset \mathbb{R}^3 \qquad\qquad f: \begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & w = f(x,y,z) \end{array}$$

- $x, \ y, \ z \longrightarrow$ são variáveis independentes (variáveis de entrada);
- $w \longrightarrow$ variável dependente (de saída).

Exemplo 1.5.1 *A distância de um ponto $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ à origem é um exemplo de uma função de três variáveis:*

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

O **gráfico** de $w = f(x, y, z)$ é o subconjunto de $\mathbb{R}^4$

$$G = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = f(x, y, z), \text{ com } (x, y, z) \in D\}.$$

• Os gráficos de funções de três variáveis são constituídos por pontos da forma $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, onde $w = f(x, y, z)$, e portanto não é possível esboçá-los no espaço tridimensional. No entanto, é possível estudar o comportamento da função através da análise das chamadas superfícies de nível.

Definição 1.5.2
Chama-se **superfície de nível** *de uma função f de três variáveis ao conjunto (não vazio) dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para os quais f tem um valor constante $c \in \mathbb{R}$, i.e, $f(x, y, z) = c$.*

Exercício 1.5.3 *Determinar o domínio das seguintes funções:*

(a) $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(b) $w = xy \ln(z)$

Exercício 1.5.4 *Determinar duas superfícies de nível da função* $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Função de n variáveis

$$D \subset \mathbb{R}^n \qquad \begin{array}{rrcl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}$$

Exemplo 1.5.5 *A temperatura de um ponto* P *da superfície da terra no instante* t*:*

$$T = f(x, y, z, t)$$

depende de 4 variáveis: latitude, longitude, altitude e instante.

1.6 Limites

Consideremos uma função f definida num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$, isto é,

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

e sejam:

– $P(x_0, y_0)$ um ponto interior ou fronteiro de D

– L um número real

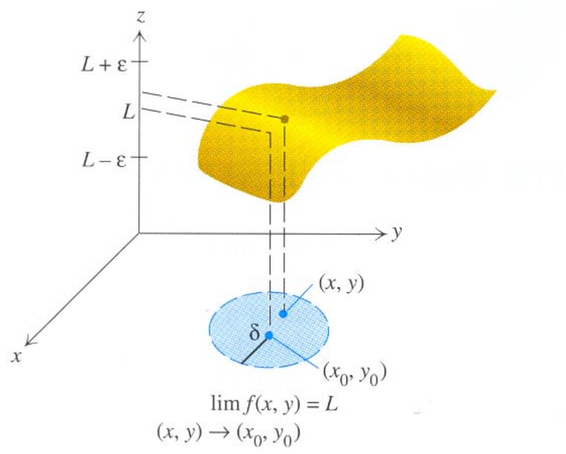
Definição 1.6.1

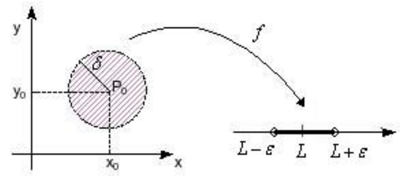
Diz-se que o limite de $f(x, y)$ *quando* (x, y) *tende para* (x_0, y_0) *é* L*, e escreve-se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L,$$

se, para cada número $\varepsilon > 0$*, existe um número correspondente* $\delta > 0$ *tais que se* $(x, y) \in D \wedge \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ *então* $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

Note-se que $|f(x, y) - L|$ é a distância entre $f(x, y)$ e o número L e $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ é a distância entre os pontos (x, y) e (x_0, y_0). Assim, O valor de $|f(x, y) - L|$ é tão pequeno quanto se queira desde que a distância $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ seja suficientemente pequena.



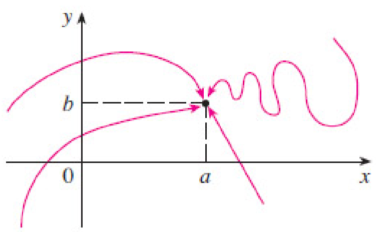


Observação importante:

Na expressão do limite de uma função real de variável real, $f(x)$, quando x tende para x_0, i.e, $\lim_{x \to x_0} f(x)$, x tende para x_0 de duas formas distintas:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Se $z = f(x, y)$ tal **não** acontece pois $P = (x, y)$ pode tender para $P_0 = (x_0, y_0)$ de um número infinito de maneiras. De facto, P pode tender para P_0 ao longo de qualquer curva contida em D. A figura que a seguir se apresenta ilustra o que se acaba de descrever.



Para existir o limite $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$, ele tem que ser o mesmo qualquer que seja o caminho que se considere de (x, y) para (x_0, y_0).

Se o limite segundo dois caminhos distintos for diferente então não existe $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$.

Os limites de funções com duas variáveis têm as mesmas propriedades das funções com uma só variável, no que diz respeito a somas, diferenças, produtos e quocientes. Também o teorema das funções enquadradas (por vezes chamado de teorema da sanduíche de fiambre) se estende a funções com duas variáveis.

Teorema 1.6.2 (Teorema das Funções Enquadradas)
Se numa certo círculo aberto D contendo (x_0, y_0) existem funções $g(x, y)$ e $h(x, y)$ tais que

$$h(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$$

para todo o $(x, y) \in D$ (excepto possivelmente para (x_0, y_0)), e se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x, y) = L,$$

então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Como consequências deste teorema, pode-se dizer que o produto de uma função limitada por um infinitésimo (função com limite igual a zero) é um infinitésimo.

• Procedimento para calcular limites em $\mathbb{R}^2$:

1. Verificar se o limite pode ser calculado directamente;

2. Se **1.** não se verificar, calcular os limites iterados

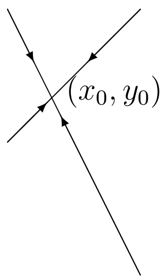
$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x, y)\right) \qquad \text{e} \qquad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x, y)\right)$$

Se estes limites são diferentes então não existe limite.

3. Se **1.** e **2.** não se verificarem, calcular os limites direccionais, i.e, segundo a trajectória dada pelas rectas de equação

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Se o $\lim_{x\to x_0} f\left(x, y_0 + m(x - x_0)\right)$ depende de m ou é diferente dos limites iterados, então não existe limite.



4. Se **1.**, **2.** e **3.** não se verificarem, calcular o limite segundo as trajectórias dadas pelas parábolas de equação

$$y - y_0 = k(x - x_0)^2.$$

Se o $\lim_{x\to x_0} f\left(x, y_0 + k(x - x_0)^2\right)$ depende de k ou é diferente dos limites obtidos em **1.** ou **2.**, então não existe limite.

5. Se todos os passos anteriores não permitirem concluir nada, pode-se colocar a hipótese de existir o limite. Quando o limite não pode ser calculado directamente, é necessário usar a definição de limite para mostrar a sua existência. Exceptuando os casos mais simples, a utilização da definição para mostrar a existência de limite é difícil e não muito usada do ponto de vista prático.
O teorema das funções enquadradas também é uma alternativa a considerar para mostrar que existe limite. Nestas situações, são úteis as seguintes desigualdades:

- $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$;
- $|x-x_0| \leq \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$;
- $x^2 \leq x^2+y^2$, $y^2 \leq x^2+y^2$;
- $|xy| \leq x^2+y^2$;
- $|x \pm y| \leq |x|+|y|$.

Exercício 1.6.3 *Calcular os seguintes limites:*

$$(a)\ \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{y^2-x^2}{2xy+2x^2} \qquad (b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad (c)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$$

1.7 Continuidade

Definição 1.7.1

(i) Uma função f diz-se **contínua** *no ponto (x_0,y_0) se*

(a) $(x_0,y_0) \in D$;

(b) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe;

(c) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

(ii) Se uma das condições anteriores não se verificar, diz-se que f é descontínua em (x_0,y_0).

(iii) Diz-se que uma função é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

- Por **função polinomial** entende-se toda a função cuja expressão analítica se escreve como uma soma finita de termos da forma Ax^ny^m, onde A é real e $m,n \in \mathbb{N}$.

- Uma **função racional** é o quociente entre duas funções polinomiais, isto é:

$$r(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

Exemplo 1.7.2

$p(x,y) = 5x^5y^2 + 12xy^9 + x + 4y - 16$ *(função polinomial)*

$$r(x,y) = \frac{8x^3y^7 - 7x^2y^4 + xy - 2y}{1 - 3y^3 + 7x^2y^2 + 18yx^7} \quad \textit{(função racional)}$$

Teorema 1.7.3

(i) *Todo o polinómio* $p(x,y)$ *é contínuo em* $\mathbb{R}^2$*;*

(ii) *Qualquer função racional* $r(x,y) = \dfrac{p(x,y)}{q(x,y)}$ *é contínua em todo o ponto* (x_0, y_0) *tal que* $q(x_0,y_0) \neq 0$. *É descontínua em* (x_0,y_0) *se* $q(x_0,y_0) = 0$.

(iii) *Se* f *e* g *são funções contínuas em* (x_0,y_0) *então* $f+g,\ f-g,\ fg,\ \frac{f}{g}\quad (g(x_0,y_0) \neq 0)$ *são funções contínuas em* (x_0,y_0).

(iv) *Se* f *é contínua em* (x_0,y_0) *e* g *é uma função contínua em* $f(x_0,y_0)$ *então a função composta* $h(x,y) = (gof)(x,y) = g\left(f(x,y)\right)$ *é contínua em* (x_0,y_0).

Exercício 1.7.4 *Averiguar se a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

1.8 Derivadas Parciais

• Seja f a função real dada por

$$\begin{array}{rccl} f: & D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & z = f(x,y) \end{array}$$

e seja $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto do seu domínio.

• Se fixarmos $y = y_0$, a função f passa a ser uma função com uma só variável independente, x, isto é,

$$f(x, y_0) = \phi(x)$$

onde ϕ é uma função real de variável real.

Se $\phi(x)$ for derivável no ponto $x = x_0$, então

$$\begin{aligned} \phi'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x_0+h)-\phi(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \end{aligned} \tag{1.1}$$

• Se fixarmos $x = x_0$, a função f passa a ser uma função com uma só variável independente, y:

$$f(x_0, y) = \psi(y)$$

onde ψ é uma função real de variável real.

Se $\psi(y)$ for derivável no ponto $y = y_0$, então

$$\begin{aligned} \psi'(y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\psi(y_0+h)-\psi(y_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Definição 1.8.1 [derivada parcial num ponto P_0]
O limite (1.1), se existir, designa-se por **derivada parcial de f em ordem a x no ponto** $P_0 = (x_0, y_0)$ *e escreve-se*

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(P_0) \qquad \textit{ou} \qquad f_x(P_0);$$

O limite (1.2), se existir, designa-se por **derivada parcial de f em ordem a y no ponto** $P_0 = (x_0, y_0)$ *e escreve-se*

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(P_0) \qquad \textit{ou} \qquad f_y(P_0);$$

Assim, se os limites existirem, temos

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\,(P_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\,(P_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} \end{aligned}}$$

Definição 1.8.2 [Derivadas Parciais - Caso Geral]
Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função real. Então as derivadas parciais de

f relativamente à primeira, segunda, ..., n-ésima variável, $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, são as funções reais de n variáveis que, no ponto $P_0 = (x_1, \ldots, x_n)$, são definidas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h\, e_j) - f(P_0)}{h}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

se o limite existir, onde $1 \leq j \leq n$ e $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ é o j-ésimo vector da base canónica de $\mathbb{R}^n$. O domínio da função $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ é o conjunto de valores, S, de $x \in \mathbb{R}^n$ onde o limite (1.3) existe.

• Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais

em ordem a x

$\rightarrow$ o gráfico de $z = f(x, y)$ é uma superfície;

$\rightarrow$ $y = y_0$ é a equação de um plano em $\mathbb{R}^3$;

$\rightarrow$ a intersecção do plano $y = y_0$ com a superfície do gráfico origina uma curva C que passa no ponto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. A recta tangente T_1 à curva C no ponto P tem declive

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \text{tg } \alpha\,,$$

onde α é o ângulo que a recta faz com OX (ver figura abaixo)

em ordem a y

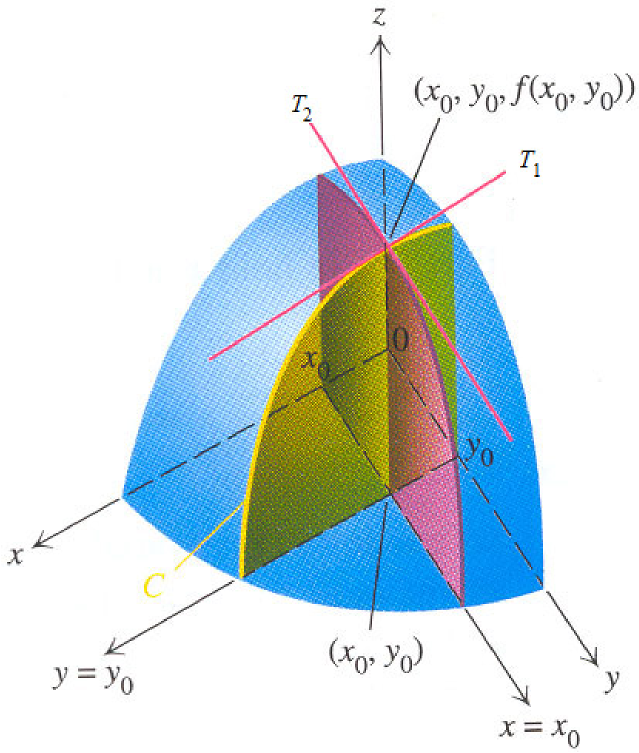
$\rightarrow$ o gráfico de $z = f(x, y)$ é uma superfície;

$\rightarrow$ $x = x_0$ é a equação de um plano em $\mathbb{R}^3$;

$\rightarrow$ a intersecção do plano $x = x_0$ com a superfície do gráfico origina uma curva C que passa no ponto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. A recta tangente T_2 à curva C no ponto P tem declive

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \text{tg } \beta,$$

onde β é o ângulo que a recta faz com OY (ver figura abaixo).



Definição 1.8.3 [Função Derivada]
Seja S o conjunto dos pontos onde a função $z = f(x,y)$ admite derivada parcial em ordem a x. A função de duas variáveis

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x} : S \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array}$$

designa-se por derivada parcial de f em ordem a x.

De modo análogo define-se a derivada parcial de f em ordem a y

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial y} : S \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \end{array}$$

Observação: (regra prática) Da definição de derivada parcial, podemos obter a seguinte regra para calcular as expressões analíticas das funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ obtém-se derivando f em ordem a x, considerando y como constante
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ obtém-se derivando f em ordem a y, considerando x como constante

Exercício 1.8.4 *Seja $f(x,y) = y \ln x$ e $P_0 = (2,2)$, determine*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$$

usando:
(a) a definição
(b) as regras de derivação

Exercício 1.8.5 *Considerando* $z = xye^{\sin(\pi xy)}$, *determine*

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

• As derivadas parciais de funções com mais de duas variáveis definem-se de modo análogo ao caso de duas variáveis (veja-se a definição 1.8.2). Tratam-se de derivadas em relação a uma das variáveis, enquanto que as restantes são mantidas constantes.

Exercício 1.8.6 *Determine as derivadas parciais da função*

$$w = x\sin(y + 3z)$$

1.9 Derivada parcial de ordem superior

• Se $y = f(x)$, então

$$y' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad , \quad y'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$$

Isto é, a $2^{\underline{a}}$ derivada de f é a derivada da $1^{\underline{a}}$ derivada de f. De modo análogo, para uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$, podemos derivar cada uma das "primeiras" derivadas parciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

em ordem a x e a y, por forma a obter as chamadas derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem.

Definição 1.9.1 [Derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem em $\mathbb{R}^2$]

- *Derivando duas vezes em ordem a* x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv f_{xx};$$

- *Derivando primeiro em ordem a* x *e depois em ordem a* y*:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv f_{xy};$$

- *Derivando primeiro em ordem a* y *e depois em ordem a* x*:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv f_{yx};$$

- *Derivando duas vezes em ordem a y*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv f_{yy};$$

OBSERVAÇÃO: *É usual designar as derivadas parciais f_{xy} e f_{yx} por* **derivadas mistas**.

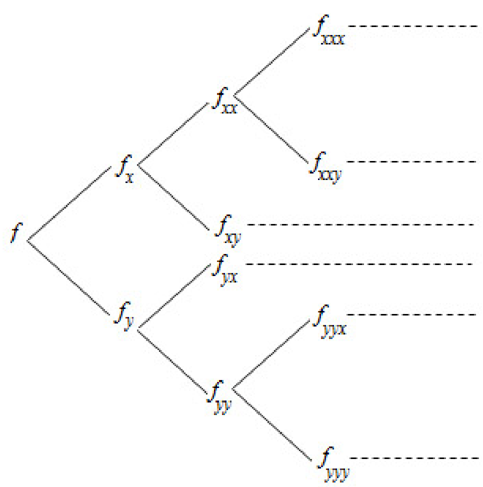
Exercício 1.9.2 *Seja $f(x,y) = x^3y^2 - xy^5$. Calcular as quatro derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem.*

• No exercício anterior é fácil verificar que as duas derivadas mistas (f_{xy} e f_{yx}) coincidem. O teorema seguinte indica as condições necesárias que devem ser satisfeitas para que esta igualdade se verifique.

Teorema 1.9.3 (Teorema de Schwarz) *Seja f uma função definida num círculo aberto D contendo o ponto (x_0, y_0). Se as funções f_{xy} e f_{yx} são ambas contínuas em D, então*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

OBSERVAÇÃO: As derivadas de ordem superior a 2 definem-se de modo análogo às de $2^{\underline{a}}$ ordem, como mostra na figura. Note-se que existem 2^n derivadas de ordem n.



1.10 Diferenciabilidade

• O símbolo Δf, designado **incremento de f**, representa a variação do valor de $f(x,y)$ quando (x,y) varia de uma posição inicial (x_0, y_0) para uma nova posição $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, isto é,

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Definição 1.10.1
Uma função f de duas variáveis diz-se **diferenciável em** (x_0, y_0) *se* $f_x(x_0, y_0)$ *e* $f_y(x_0, y_0)$ *existirem e for possível escrever o incremento Δf na forma*

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 tendem para zero quando Δx e Δy tendem para zero.

Diz-se que f é **diferenciável** *se for diferenciável em todos os pontos do seu domínio.*

Teorema 1.10.2 ***(Continuidade das derivadas parciais implica diferenciabilidade)*** *Se as derivadas parciais f_x e f_y de uma função $z = f(x, y)$ são contínuas numa região aberta R do plano, então f é diferenciável em todos os pontos de R.*

Teorema 1.10.3 (Diferenciabilidade implica continuidade) *Se uma função f é diferenciável em (x_0, y_0) então f é contínua em (x_0, y_0).*

NOTA: Em funções de uma só variável, os termos *derivável* e *diferenciável* são equivalentes; em funções de duas ou mais variáveis tal **não** acontece!

Exercício 1.10.4 *Seja* $f(x,y) = \begin{cases} 0 \quad , \quad xy \neq 0 \\ 1 \quad , \quad xy = 0 \end{cases}$

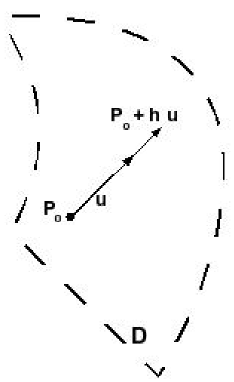
(a) Determinar $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *ao longo da recta $y = x$.*

(b) Averiguar se f é contínua na origem. Poder-se-á extrair alguma conclusão acerca da diferenciabilidade em $(0, 0)$?

(c) Mostrar que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *existem em $(0, 0)$. Será que este facto contradiz o Teorema 1.10.2?*

1.11 Derivadas Direccionais e Gradiente

Consideremos a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, com $z = f(x, y)$ e D aberto de $\mathbb{R}^2$,
um ponto $P_0 = (x_0, y_0) \in D$
e um vector unitário (versor) $\vec{u} = (u_1, u_2)$
tal que $||\vec{u}|| = 1$.



Como $P_0 \in \int(D) = D$, para h pequeno tem-se $P_0 + h\vec{u} \in D$

Definição 1.11.1 [Derivada Direccional]
Chama-se <u>derivada de f em P_0 na direcção do vector unitário $\vec{u}$</u> a

$$f_{\vec{u}}(P_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h\vec{u}) - f(P_0)}{h},$$

desde que o limite exista e seja **finito**.

• **Interpretação Geométrica da Derivada Direccional**

→ o gráfico de $z = f(x, y)$ é uma superfície; denotemo-la po S;

→ Se $z_0 = f(x_0, y_0)$ então o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ pertence a essa superfície;

→ o plano vertical que contém P e P_0 $(x_0, y_0, 0)$ e é paralelo a $\vec{u}$ intersecta a superfície dando origem à curva C. Nestas condições,

$$f_{\vec{u}}(P_0) = \text{tg}\alpha,$$

onde α é o ângulo que a recta T, tangente à curva C no ponto P faz com o vector unitário $\vec{u} = (a, b)$. A derivada direccional mede a variação (crescimento ou decrescimento) da função f na direcção de $\vec{u}$.

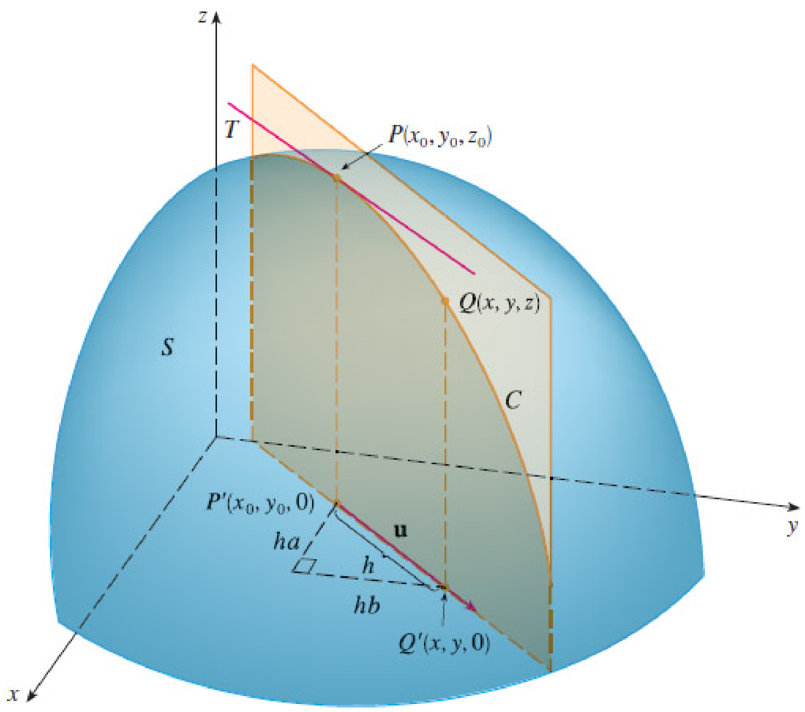


Figura 1.8

• A derivada direccional pode ser vista como uma generalização das derivadas parciais, pois:

$$\vec{i} \equiv \vec{e_1} = (1,0) \Rightarrow f_{\vec{i}}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$$

$$\vec{j} \equiv \vec{e_2} = (0,1) \Rightarrow f_{\vec{j}}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$$

Definição 1.11.2 [Gradiente]
Chama-se gradiente de $f(x,y)$ no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ ao vector

$$\boxed{\nabla f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\vec{j}}$$

Teorema 1.11.3
Se $f(x,y)$ for diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$, então

$$\boxed{f_{\vec{u}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{u}\ ,}$$

onde $\vec{u}$ é unitário.

Nota. O cálculo da derivada direccional envolve sempre um vector unitário. Quando o vector dado $\vec{u}$ não for unitário, é necessário calcular o seu versor:

$$\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}.$$

Exercício 1.11.4 *Determine a derivada de $f(x,y) = x^2 + xy$ em $P_0 = (1,2)$ na direcção do vector $\vec{i} + \vec{j}$ usando*

(a) a definição;

(b) o gradiente.

• Das igualdades

$$f_{\vec{u}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{u} = ||\nabla f(P_0)||\,\underbrace{||\vec{u}||}_{=1}\cos\theta = ||\nabla f(P_0)||\cos\theta,$$

onde θ é o ângulo formado pelos vectores $\nabla f(P_0)$ e $\vec{u}$, obtemos o seguinte resultado

Teorema 1.11.5 [Propriedades da Derivada Direccional]

(i) A função f cresce mais rapidamente na direcção e sentido do seu gradiente.

Nessa direcção a derivada direccional atinge o seu valor máximo, que é dado por

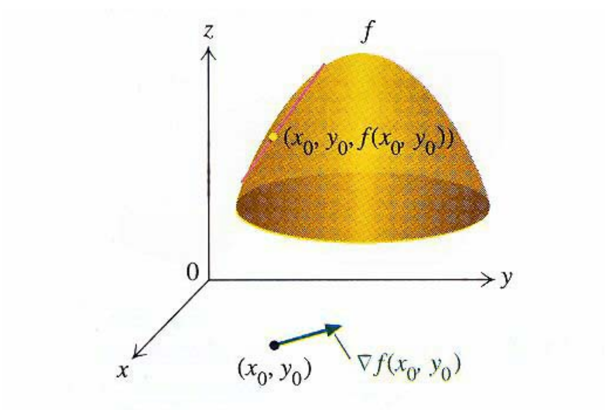
$$f_{\vec{u}}(P_0) = ||\nabla f(P_0)|| \cos 0 = ||\nabla f(P_0)||.$$

(ii) A função f decresce mais rapidamente na direcção e sentido contrário ao seu gradiente $(-\nabla f)$. Nessa direcção a derivada atinge o seu valor mínimo, que é dado por

$$f_{\vec{u}}(P_0) = ||\nabla f(P_0)|| \cos \pi = -||\nabla f(P_0)||.$$

(iii) Qualquer direcção $\vec{u}$ ortogonal ao gradiente é uma direcção de variação nula, porque $\theta = \frac{\pi}{2}$ e portanto

$$f_{\vec{u}}(P_0) = ||\nabla f(P_0)|| \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$



Exercício 1.11.6 *Determine as direcções nas quais* $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$

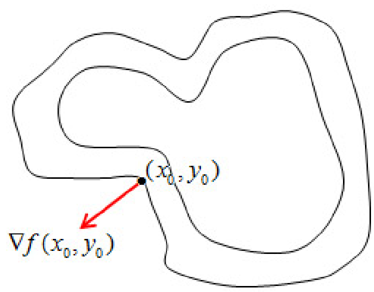
(a) cresce mais rapidamente no ponto $(1, 1)$*;*

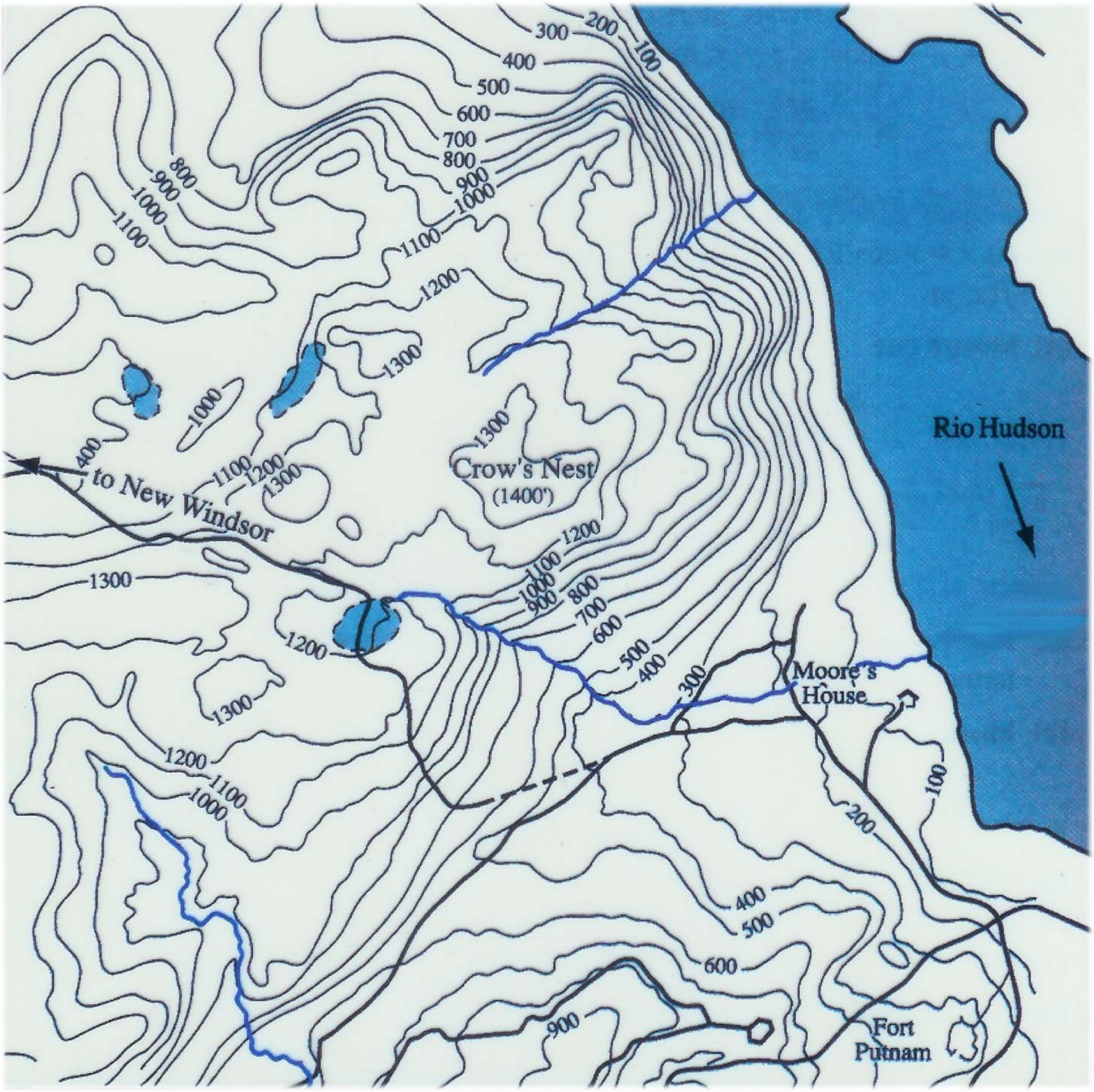
(b) decresce mais rapidamente no ponto $(1, 1)$*;*

(c) tem variação nula no ponto $(1, 1)$*.*

OBSERVAÇÃO: [GRADIENTE E CURVAS DE NÍVEL]

Em cada ponto (x_0, y_0) pode mostrar-se que o gradiente de f, $\nabla f(x_0, y_0)$, é um vector normal (isto é, perpendicular à recta tangente) à curva de nível que passa nesse ponto (Ver também Figura 1.9)





Os contornos da fortaleza West Point em Nova York mostram rios, os quais seguem os caminhos de maior inclinaçao, correndo perpendicularmente aos contornos.

Figura 1.9

Funções de 3 variáveis

- Sejam $f(x, y, z)$ uma função diferenciável e $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ um vector unitário;

  $\rightarrow$ o gradiente de f é: $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

  $\rightarrow$ a derivada direccional é:

$$f_{\vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3$$

• Escrevendo a derivada direccional na forma

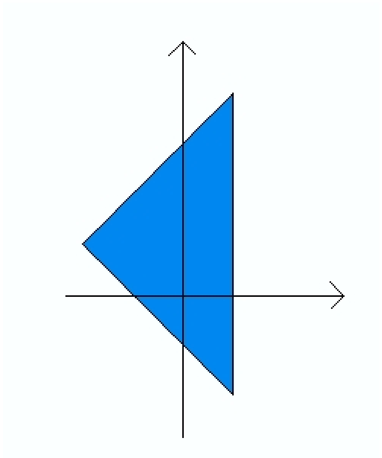
$$f_{\vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} = ||\nabla f||\ ||\vec{u}||\ \cos\theta,$$

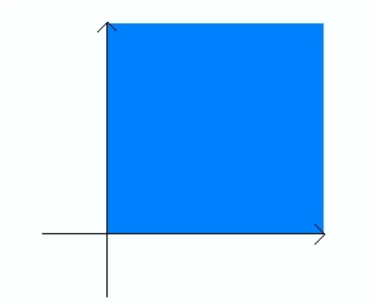
podemos concluir que

- f aumenta mais rapidamente na direcção e sentido de ∇f;
- f decresce mais rapidamente na direcção e sentido de $-\nabla f$;
- f não varia em qualquer direcção ortogonal a ∇f.

1.12 Máximos e Mínimos de Funções de Duas Variáveis

Definição 1.12.1
Uma região plana R diz-se **limitada** *se existir um círculo aberto que contenha essa região.*





Região Limitada   Região Não Limitada (1º Quadrante)

Teorema 1.12.2 *[dos valores extremos]*
Seja R uma região de $\mathbb{R}^2$ fechada e limitada e suponhamos que f é contínua em R. Então existem pontos P_0 e P_1 pertencentes a R tais que

$$m = f(P_0) \leq f(P) \leq f(P_1) = M,\ \forall\ P \in R$$

Os números m e M designam-se, respectivamente, por mínimo absoluto e máximo absoluto.

Definição 1.12.3 (máximo e mínimo local)
Seja f uma função definida numa vizinhança do ponto P_0.

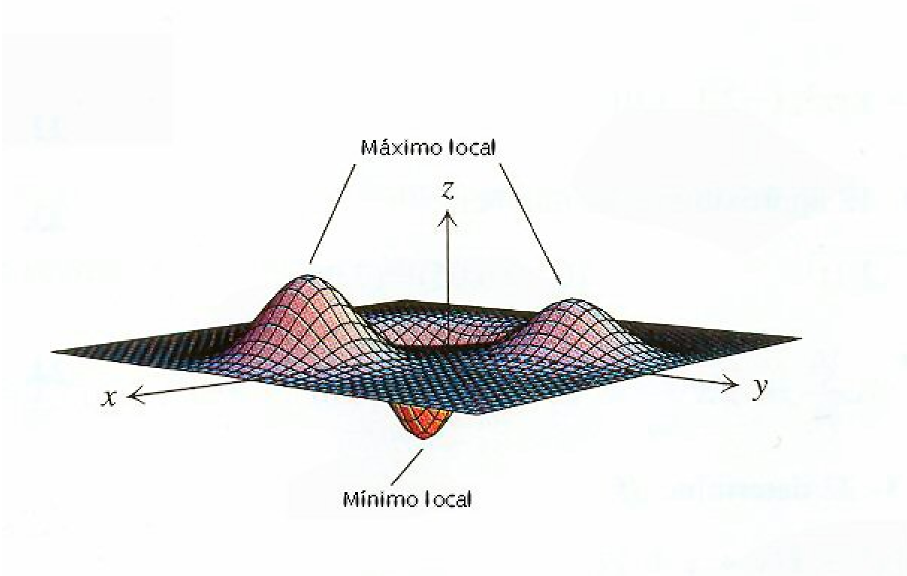
(i) *Diz-se que f tem um máximo local (ou relativo) em P_0 se existir uma vizinhança V_1 de P_0 tal que*

$$f(P) \leq f(P_0), \ \forall \ P \in V_1;$$

(ii) *Diz-se que f tem um mínimo local (ou relativo) em P_0 se existir uma vizinhança V_2 de P_0 tal que*

$$f(P) \geq f(P_0), \ \forall \ P \in V_2$$

(iii) *Se f tem um máximo local ou mínimo local em P_0, diz-se que P_0 é um ponto extremo de f.*



Teorema 1.12.4 (nos pontos extremos o gradiente é o vector nulo)
Seja $f(x, y)$ diferenciável em P_0 e suponhamos que P_0 é um ponto extremo de f. Então

$$\nabla f(P_0) = \vec{0},$$

i.e, $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$.

Demonstração. Vamos começar por definir a seguinte função com uma só variável:

$$h(x) = f(x, y_0).$$

Como $P_0(x_0, y_0)$ é um ponto extremo de f, isto significa que P_0 é um máximo ou mínimo local de f. Sendo assim,

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in V_1$$

ou

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in V_2,$$

onde V_1 e V_2 são vizinhanças de $P_0(x_0, y_0)$. Em particular,

$$\underbrace{f(x_0, y_0)}_{h(x_0)} \leq \underbrace{f(x, y_0)}_{h(x)}$$

ou

$$\underbrace{f(x_0, y_0)}_{h(x_0)} \geq \underbrace{f(x, y_0)}_{h(x)},$$

isto é, x_0 é um extremo de $h(x)$, donde

$$h'(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Do mesmo modo, definindo $g(y) = f(x_0, y)$, poder-se-á concluir que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, ficando concluída a demonstração. ■

Definição 1.12.5 (ponto crítico)
P_0 diz-se um ponto crítico de $f(x, y)$ se

- *f é diferenciável em P_0 e $\nabla f(P_0) = \vec{0}$;*

  ou

- *$P_0 \in D_f$ mas não existem $f_x(P_0)$ ou $f_y(P_0)$.*

Exercício 1.12.6 *Seja P_0 um ponto crítico de f e suponhamos que $f_x(P_0)$ e $f_y(P_0)$ existem. Qual a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ com $z_0 = f(x_0, y_0)$? Qual a sua posição relativa?*

Definição 1.12.7 (ponto de sela)
Se P_0 é um ponto crítico de $f(x, y)$ mas não é um ponto extremo de f, diz-se que P_0 é um ponto sela de f.

O teorema seguinte permite averiguar se um dado ponto crítico é um extremo de f.

Teorema 1.12.8 [Teste das derivadas de 2ª ordem]
Suponhamos que $f(x, y)$ e todas as suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem existem e são contínuas numa vizinhança de um ponto crítico P_0. Seja

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} \quad (\textit{Discriminante de } f)$$

(i) Se $D(P_0) > 0$ e $f_{xx}(P_0) > 0$ então f tem um mínimo local em P_0;

(ii) Se $D(P_0) > 0$ e $f_{xx}(P_0) < 0$ então f tem um máximo local em P_0;

(iii) Se $D(P_0) < 0$ então P_0 é um ponto sela de f;

(iv) Se $D(P_0) = 0$ nada se pode concluir.

Exercício 1.12.9 *Nas seguintes funções, averiguar se os pontos críticos são extremos.*
(a) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y + 5$
(b) $f(x, y) = 2x^3 - 24xy + 16y^3$

NOTA: Apesar do teste das derivadas de segunda ordem ser bastante importante na determinação dos extremos de funções de duas variáveis, convém notar que ele é inconclusivo se $D(x_0, y_0) = 0$ e também não se aplica a pontos onde as derivadas f_x e f_y não existem.

Exercício 1.12.10 *Determinar os pontos críticos das seguintes funções e averiguar se são pontos extremos de f. Determinar também (se existir) o plano tangente nos pontos da superfície correspondentes aos extremos e fazer a interpretação geométrica.*
(a) $f(x, y) = 1 + x^2 + 3y^2$
(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

1.12.1 Extremos Condicionados - Método dos Multiplicadores de Lagrange

- Nesta secção vamos resolver problemas dos seguintes dois tipos:
  - Problema dos extremos condicionados em funções de duas variáveis: **Maximizar ou Minimizar uma função f**(x, y) **sujeita a uma determinada condição g**$(x, y) = 0$.
  - Problema dos extremos condicionados em funções de três variáveis: **Maximizar ou Minimizar uma função f**(x, y, z) **sujeita a uma determinada condição g**$(x, y, z) = 0$**.**

- **1º Tipo: Duas variáveis**:

A condição $g(x, y) = 0$ representa uma curva C no plano xOy. Pretendemos determinar os extremos (designados por extremos condicionados) de $f(x, y)$ quando (x, y) varia sobre a curva C.

Teorema 1.12.11
Suponhamos que $f(x,y)$ e $g(x,y)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas num conjunto aberto contendo a curva C definida por $g(x,y)=0$ e que $\nabla g \neq \vec{0}$ em cada ponto de C. Se f tiver um extremo condicionado em C então esse extremo ocorre num ponto $(x_0,y_0)\in C$ onde os vectores $\nabla f(x_0,y_0)$ e $\nabla g(x_0,y_0)$ são paralelos, i.e, existe um número λ, chamado **multiplicador de Lagrange***, tal que*

$$\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0).$$

• **2º Tipo: Três variáveis**:

Para funções de três variáveis, pode ser estabelecido um teorema análogo ao anterior. Neste caso, os extremos condicionados de $f(x,y,z)$ ocorrem em pontos (x_0,y_0,z_0) da superfície $g(x,y,z)=0$, onde os gradientes são paralelos, i.e,

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0).$$

Exercício 1.12.12

(a) Em que ponto da circunferência $x^2+y^2=1$ é que o produto xy é máximo?

(b) Quais as dimensões que uma caixa rectangular, aberta em cima, de volume $960cm^3$, deverá ter por forma a que seja usado o mínimo de material possível no seu fabrico?

1.12.2 Máximos e Mínimos Absolutos em Regiões Fechadas e Limitadas

Teorema 1.12.13 *Se $f(x,y)$ tem um máximo ou um mínimo absoluto num ponto P_0 pertencente ao interior do seu domínio, então P_0 é um ponto crítico de f.*

Se $f(x,y)$ é contínua numa região fechada e limitada R, então o Teorema 1.12.2 garante a existência de um máximo absoluto e de um mínimo absoluto em R. Estes pontos extremos podem ocorrer na fronteira da região R ou no seu interior. Se o extremo absoluto ocorrer num ponto interior de R, pelo teorema anterior temos a garantia de que este ocorrerá num ponto crítico de f. Assim, para determinar os extremos absolutos de f numa região plana, fechada e limitada, R, podemos proceder da seguinte forma

1. Determinar os pontos críticos de f no interior da região R;

2. Determinar os pontos fronteiros de R onde podem ocorrer extremos;

3. Determinar o valor de $f(x, y)$ nos pontos obtidos nos passos anteriores. O maior destes valores é o máximo aboluto e o menor é o mínimo absoluto.

Exercício 1.12.14 *Determinar o máximo e o mínimo absoluto da função*

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

no triângulo fechado de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$ *e* $(0, 5)$.

1.13 Exercícios

Cónicas e Quádricas

1. Identifique o conjunto de pontos que verificam as seguintes equações. Se possível, faça a sua representação geométrica.

   (a) $x^2 + y^2 - 5 = 0$ (b) $x + y^2 = 0$ (c) $x^2 + y + 2 = 0$
   (d) $x^2 + y^2 - 2x + y - 3 = 0$ (e) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$ (f) $4x^2 + y^2 - 4 = 0$
   (g) $x^2 - y^2 - 4 = 0$ (h) $2x^2 + y^2 - 8 = 0$ (i) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y - 5 = 0$

2. Representar as curvas do exercício anterior na calculadora gráfica.

3. Identifique as superfícies definidas por:

   (a) $5x^2 + 3y^2 = 4z$ (b) $5x^2 - 3y^2 = 4z$ (c) $5x^2 + 5y^2 = -4z$
   (d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (e) $x^2 - y^2 - z^2 = 4$ (f) $-x^2 + y^2 + z^2 = 4$
   (g) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (h) $x^2 + y^2 = 4$ (i) $x^2 - y^2 = 4$
   (j) $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ (k) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2x - y - 3 = 0$ (l) $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 4z + 6 = 0$

Domínios e gráficos de funções reais de várias variáveis reais

4. Para cada uma das seguintes funções, (1) determine o seu domínio e faça a sua representação geométrica, (2) determine o interior e a fronteira do domínio e (3) averigue se o domínio é fechado ou aberto:

   (a) $f(x, y) = y - x$ (b) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$ (c) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$
   (d) $f(x, y) = y/x^2$ (e) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$ (f) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
   (g) $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$ (h) $f(x, y) = \arcsin(y - x)$ (i) $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$

5. Apresente um esboço das curvas de nível e do gráfico das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = y^2$ (b) $f(x, y) = 4 - y^2$ (c) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
   (d) $f(x, y) = x + y + 1$ (e) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ (f) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

6. Esboce duas superfícies de nível para cada uma das funções:

   (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (b) $f(x, y, z) = x + z$ (c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

Limites e continuidade

7. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi/2,0)} \frac{\cos y + 1}{y - \sin x}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$ (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1}$

8. Calcule o limite na origem.

(a) $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2 + y^2}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{yx^2}{(y + x^2)^2}$ (e) $f(x,y,z) = \dfrac{x + y - z}{4x - y}$ (f) $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{y^2 + x^2}$

(g) $f(x,y,z) = \dfrac{yx^2 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2}$

9. Estude quanto à continuidade.

(a) $f(x,y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x + y}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (d) $f(x,y) = \begin{cases} 1 - x & \text{se} \quad y \geq 0 \\ -2 & \text{se} \quad y < 0 \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x - \sin y}{x-y} & \text{se} \quad x \neq y \\ 1 & \text{se} \quad x = y \end{cases}$

Sugestão: Na alínea (f) transforme $\sin x - \sin y$ num produto de senos e cossenos.

10. Determine uma função $g(x)$ de modo que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x-y} & \text{se} \quad x \neq y \\ g(x) & \text{se} \quad x = y \end{cases}$$

seja contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

11. Nas seguintes funções, defina $f(0,0)$ de maneira que f se estenda a uma função contínua na origem.

(a) $f(x,y) = \dfrac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x| + |y|}$

Derivadas Parciais; Derivadas Parciais de Ordem Superior

12. Para cada uma das seguintes funções, calcule as suas derivadas parciais nos pontos indicados:

(a) $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$; $(2, -3)$

(b) $f(x,y,z) = xy^2 \sin z$; $(-1, 2, 0)$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $(0,0)$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2 + 4y^3} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $(0,0)$

13. Mostre que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ tem derivadas parciais no ponto $(0,0)$ mas não é contínua nesse ponto. Que conclusão pode tirar?

14. Determine as derivadas parciais de primeira ordem de cada função.

(a) $f(x,y) = 2xy - 4y$ (b) $f(x,y) = \cos(xy)$ (c) $f(x,y) = \text{arctg}\,\frac{x}{y}$

(d) $f(x,y,z) = \dfrac{x^3y^2}{z}$ (e) $f(x,y,z) = x - \sqrt{y^2+z^2}$ (f) $f(x,y) = x\,e^{\sqrt{xy}}$

(g) $f(x,y) = x^2 \ln(1+x^2+y^2)$ (h) $f(x,y) = x^y$ (i) $f(x,y,z) = \text{arctg}\,(x^2+y^2+z^2)$

(j) $f(x,y) = e^{3x-y}\cos(xy)$

15. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Mostre que as derivadas mistas no ponto $(0,0)$ não coincidem, isto é, $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

(b) Explique onde falha a aplicação do Teorema de Schwarz no ponto $(0,0)$.

16. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

(a) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = 0$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = 1$.

(b) Explique porque é que o Teorema de Schwarz não pode ser aplicado a esta função no ponto $(0,0)$.

17. A equação de Laplace 3-D

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

é satisfeita pelas distribuições de temperatura no estado estacionário $T(x,y,z)$ no espaço, pelos potenciais gravitacionais e pelos potenciais electrostáticos. A equação de Laplace 2-D

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

obtida por eliminação do termo $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ da equação anterior, descreve potenciais e distribuições de temperatura no plano, no estado estacionário. Averigue se as seguintes funções satisfazem uma equação de Laplace.

(a) $f(x,y) = \ln(x^2+y)$ (b) $f(x,y,z) = e^{3x+4y}\cos(5z)$

(c) $f(x,y) = e^{-2y}\cos(2x)$ (d) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

18. Seja $z = x^c e^{-y/x}$, onde c é uma constante. Determine o valor de c por forma a que seja satisfeita a seguinte equação:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Derivadas Direccionais e Gradiente

19. Determine o gradiente da função no ponto dado e esboce o gradiente em conjunto com a curva de nível que passa pelo ponto.

(a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2),\ (1,1)$ (b) $f(x,y) = y - x^2,\ (-1,0)$ (c) $f(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2},\ (\sqrt{2},1)$

20. Determine a derivada da função em P_0 na direcção de $\vec{u}$.

(a) $f(x,y) = 2xy - 3y^2,\ P_0(5,5),\ \vec{u} = (4,3)$

(b) $f(x,y) = 2x^2 + y^2,\ P_0(-1,1),\ \vec{u} = (3,-4)$

(c) $f(x,y,z) = xy + yz + zx,\ P_0(1,-1,2),\ \vec{u} = (3,6,-2)$

(d) $f(x,y,z) = 3e^x \cos yz,\ P_0(0,0,0),\ \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

21. Determine as direcções nas quais as funções crescem e decrescem mais rapidamente e nas quais não há variação em P_0. Determine o valor da derivada nessas direcções.

(a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2,\ P_0(-1,1)$ (b) $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\sin y,\ P_0(1,0)$
(c) $f(x,y,z) = xe^y + z^2,\ P_0(1,\ln 2,1/2)$ (d) $f(x,y,z) = \ln xy + \ln yz + \ln xz,\ P_0(1,1,1)$

22. Faça um esboço da curva $f(x,y) = c$ juntamente com ∇f e a recta tangente no ponto dado. Escreva também uma equação para a recta tangente.

(a) $x^2 + y^2 = 4,\ (\sqrt{2},\sqrt{2})$ (b) $x^2 - y = 1,\ (\sqrt{2},1)$

23. Será que existe uma direcção $\vec{u}$ na qual a taxa de variação de $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ em $P(1,2)$ é igual a 14? Justifique.

24. Será que existe uma direcção $\vec{u}$ na qual a taxa de variação da temperatura $T(x,y,z) = 2xy - yz$ (temperatura em graus Celsius, distância em pés) em $P(1,-1,1)$ é igual a -3^oC/pés? Justifique.

25. A temperatura no ponto (x,y) de uma placa de metal é
$$T(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$
Encontre a direcção de maior crescimento do calor a partir do ponto $(3,4)$.

26. A derivada de $f(x,y)$ em $P_0(1,2)$ na direcção de $\vec{i} + \vec{j}$ é $2\sqrt{2}$ e na direcção de $-2\vec{j}$ é -3. Qual é a derivada de f na direcção de $-\vec{i} - 2\vec{j}$? Justifique.

27. A derivada de $f(x,y,z)$ num ponto P é maior na direcção de $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Nessa direcção, o valor da derivada é $2\sqrt{3}$. Determine:

    (a) $\nabla f(P)$

    (b) a derivada de f em P na direcção de $\vec{i} + \vec{j}$

28. Mostre que:

    (a) $\nabla(kf) = k\nabla f$, (k constante)

    (b) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

    (c) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

    (d) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f + f\nabla g}{g^2}$

Extremos e Pontos de Sela

29. Para cada uma das seguintes funções, determine os extremos locais e os pontos de sela:

    (a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$ (b) $f(x,y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$
    (c) $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$ (d) $f(x,y) = 9x^3 + y^3/3 - 4xy$
    (e) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$ (f) $f(x,y) = \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y}$

30. Em cada uma das seguintes funções, o discriminante $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ é zero na origem, de modo que o teste das derivadas de segunda ordem é inconclusivo. Averigue se a função tem um máximo, um mínimo ou nenhum dos dois na origem.

    (a) $f(x,y) = x^2y^2$ (b) $f(x,y) = 1 - x^2y^2$ (c) $f(x,y) = xy^2$

31. Considere a função $f(x,y) = x^2 + kxy + y^2$.

    (a) Mostre que $(0,0)$ é um ponto crítico de f qualquer que seja o valor de k.

    (b) Indique os valores de k para os quais

        (i) a função tem um ponto de sela na origem;

        (ii) a função tem um mínimo local em $(0,0)$;

        (iii) o teste das segundas derivadas é inconclusivo.

32. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, determine:

    (a) o valor máximo de $f(x,y) = 49 - x^2 - y^2$ sobre a recta $x + 3y = 10$.

    (b) pontos da curva plana $x^2 + xy + y^2 = 1$ que estão mais próximos e mais afastados da origem.

    (c) as dimensões que uma lata cilíndrica circular recta fechada, de volume $16\pi cm^3$, deverá ter por forma a que a área da sua superfície seja mínima.

(d) as dimensões do rectângulo, com lados paralelos aos eixos coordenados, de área máxima que pode ser inscrito na elipse $x^2/16 + y^2/9 = 1$.

33. Determine

    (a) os pontos da superfície $xyz = 1$ que estão mais próximos da origem.

    (b) os valores máximos e mínimos da função $f(x, y, z) = x - 2y + 5z$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

34. Uma lata cilíndrica, aberta no topo, tem volume V. Determine o raio que a lata deverá ter por forma a que a área da sua superfície seja mínima.

35. Pretende-se construir um tanque rectangular, aberto no topo, com volume $25m^3$. Determine as dimensões que o tanque deverá ter por forma a que seja gasta a menor quantidade de material na sua construção.

36. Para cada uma das seguintes funções, determine os extremos absolutos nos conjuntos indicados:

    (a) $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ na região triangular fechada e limitada pelas rectas $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$ no primeiro quadrante.

    (b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ na região rectangular $0 \leq x \leq 5$, $-3 \leq y \leq 0$.

    (c) $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$ na região rectangular $1 \leq x \leq 3$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$.

37. Para cada uma das seguintes funções, determine os extremos absolutos nas regiões indicadas.

    (a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3$; $x^2 + y^2 \leq 4$

    (b) $f(x, y) = xy$; $2x^2 + y^2 \leq 4$

38. Uma placa circular plana, com o formato da região $x^2 + y^2 \leq 1$, é aquecida de tal modo que a temperatura no ponto (x, y) é $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Determine as temperaturas nos pontos mais quentes e mais frios da placa.

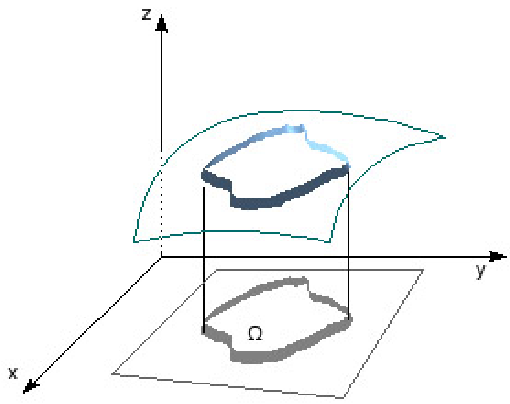
Capítulo 2

Integrais Múltiplos

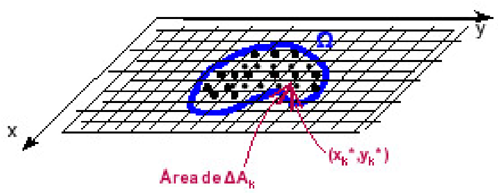
2.1 Definição de Integral Duplo

PROBLEMA:

Dada uma região Ω do plano xOy, limitada, determinar o volume, V, do sólido formado por todos os pontos compreendidos entre a região Ω e a superfície $z = f(x, y)$, onde f é contínua e não negativa em Ω.



• Considere-se um rectângulo no plano contendo a região Ω o qual será subdividido em vários sub-rectângulos não necessariamente iguais (*grelha*). Suponhamos que o número de sub-rectângulos inteiramente contidos em Ω é n e que a área do k-ésimo sub-rectângulo é ΔA_k. Os sub-rectângulos não completamente contidos em Ω não são considerados.



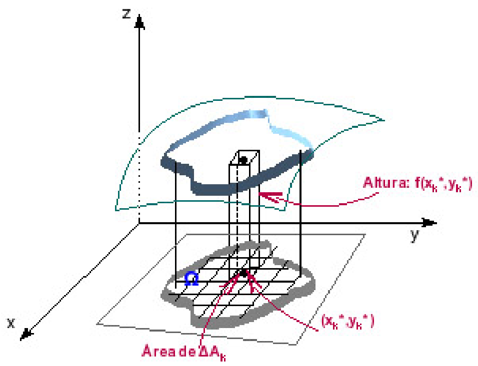
• Em cada sub-rectângulo escolha-se um ponto. Seja $(x_k^\star, y_k^\star)$ o ponto correspondente ao k-ésimo sub-rectângulo. O produto

$$f(x_k^\star, y_k^\star)\Delta A_k$$

é o volume do paralelipípedo com área de base ΔA_k e altura $f(x_k^\star, y_k^\star)$ (ver figura abaixo). Logo, a soma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^\star, y_k^\star)\Delta A_k$$

aproxima o valor do volume V, objectivo a atingir.



Ao efectuar esta aproximação para o valor de V, cometem-se dois tipos de erro:

- A face de cima do paralelipípedo é plana e geralmente a superfície $z = f(x, y)$ não o é;
- Os sub-rectângulos em que a região R é subdividida podem não preencher completamente essa região.

Mas, se o processo anterior for repetido para um número de subdivisões de Ω de forma que o comprimento e a largura dos sub-rectângulos das bases se aproximem de zero, podemos afirmar que os dois tipos de erro anteriormente referidos tenderão para zero. Assim, o **volume exacto** é

$$V = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^\star, y_k^\star)\Delta A_k.$$

Definição 2.1.1

Chama-se **integral duplo** *de $f(x,y)$ sobre a região Ω ao número*

$$\int\int_\Omega f(x,y)\ dA = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^\star, y_k^\star)\Delta A_k.$$

• Assim, o volume V que pretendíamos determinar é dado por

$$V = \int\int_\Omega f(x,y)\ dA\ .$$

• No exposto até ao momento supusemos que f é contínua e não negativa em Ω. Se $f(x,y)$ assumir valores positivos e negativos na região Ω, então o integral duplo representa a diferença de dois volumes (*QUAIS?*).

Um valor positivo para o integral duplo significa que há um maior volume acima da região Ω do que abaixo;

Um valor negativo para o integral duplo significa que há um maior volume abaixo da região Ω do que acima;

Um valor nulo para o integral duplo significa que os dois volumes são iguais.

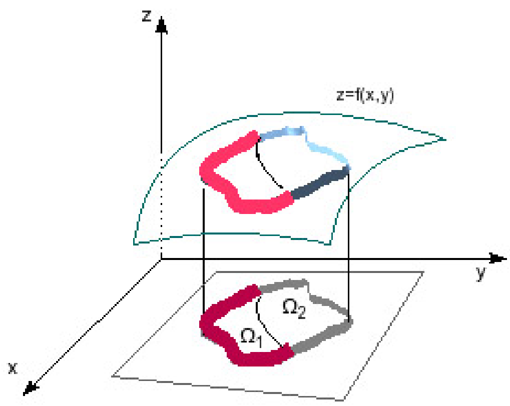
Propriedades do integral duplo

1. $\displaystyle\int\int_{\Omega} cf(x,y)\ dA = c \int\int_{\Omega} f(x,y)\ dA,\ \forall\ c \in \mathbb{R}.$

2. $\displaystyle\int\int_{\Omega}[\ f(x,y) \pm g(x,y)]\ dA = \int\int_{\Omega} f(x,y)\ dA\ \pm \int\int_{\Omega} g(x,y)\ dA.$

3. Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (reunião disjunta, isto é, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$) então

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)\ dA = \int\int_{\Omega_1} f(x,y)\ dA\ + \int\int_{\Omega_2} f(x,y)\ dA.$$



2.2 Cálculo do Integral Duplo

• Exceptuando os casos mais simples, em geral não é viável do ponto de vista prático usar a definição para calcular o integral duplo, sendo por isso necessário recorrer a outras técnicas. Ir-se-à aqui abordar em primeiro lugar o cálculo de integrais duplos sobre rectângulos e posteriormente sobre uma região mais geral.

Cálculo do integral duplo em rectângulos

Definição 2.2.1
Chamam-se integrais iterados aos seguintes integrais

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\ dx\right]\ dy;$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ dy\right]\ dx.$$

Exercício 2.2.2 *Calcular os seguintes integrais iterados:*
(a) $\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy)\, dydx$
(b) $\int_1^2 \int_0^3 (1+8xy)\, dxdy$

Teorema 2.2.3 [Teorema de Fubini] (1ª versão)
Seja R o rectângulo definido por $a \le x \le b,\ c \le y \le d$. Se $f(x,y)$ é contínua neste rectângulo então

$$\boxed{\begin{aligned}\int\int_R f(x,y)\ dA &= \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx\end{aligned}}$$

Exercício 2.2.4

(a) *Calcular* $\int\int_\Omega y^2 x\, dA$ *sobre o rectângulo*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leqslant x \leqslant 2\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

(b) *Usando integrais duplos, determinar o volume do sólido limitado superiormente pelo plano $z = 4 - x - y$ e inferiormente pelo rectângulo*

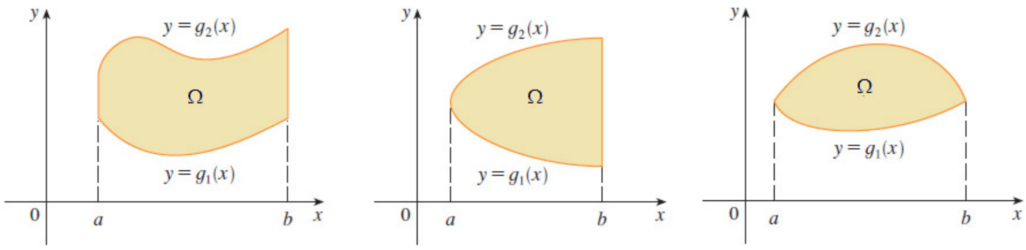
$$0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 2.$$

Cálculo do integral duplo em regiões não rectangulares

Ir-se-ão considerar dois tipos de regiões no plano:
(A) **Regiões do Tipo I**

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\}$$

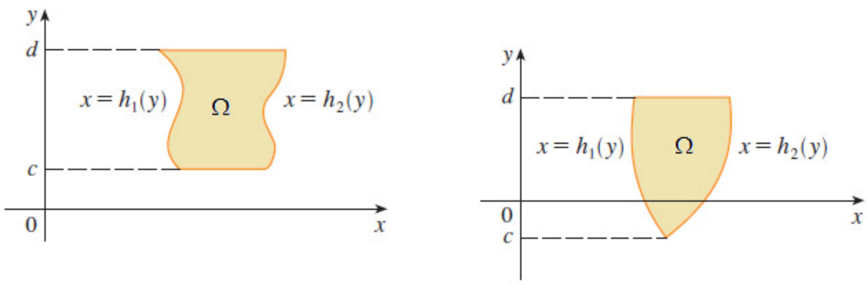
tais que $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são contínuas em $[a,b]$ (ver figura).



(B) Regiões do Tipo II

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ c \leq y \leq d\}$$

tais que $h_1(y)$ e $h_2(y)$ são contínuas em $[c, d]$ (ver figura).



Teorema 2.2.5 **[Teorema de Fubini] (2ª versão - mais forte***)*
Seja $f(x, y)$ contínua na região Ω.

- *Se Ω é do tipo I então*

$$\boxed{\int\int_\Omega f(x,y)\ dA \quad = \quad \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy\ dx}$$

- *Se Ω é do tipo II então*

$$\boxed{\int\int_\Omega f(x,y)\ dA \quad = \quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\ dx\ dy}$$

Observação:
Para melhor calcular o integral duplo deve primeiro esboçar a região Ω.

Exercício 2.2.6

(a) Determinar o volume do sólido limitado superiormente pela superfície $z = x^2 + y^2$ e inferiormente pela região $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

(b) Calcular $\int\int_\Omega (2x - y^2)\ dA$ sobre a região triangular limitada pelas curvas $y = -x + 1$, $y = x + 1$ e $y = 3$.

(c) Invertendo a ordem de integração, calcule o integral definido no exercício anterior.

2.3 Aplicações do Integral Duplo

Problema: Seja $f(x, y)$ uma função definida numa região fechada Ω do plano xOy. Pretende-se determinar a área da porção da superfície $z = f(x, y)$ cuja projecção no plano xOt é a região Ω.

Teorema 2.3.1 (Área de uma superfície tridimensional)
Se $f(x, y)$ tem derivadas parciais de $1^{\underline{a}}$ ordem contínuas numa região fechada Ω do plano xOy então a área S da porção da superfície $z = f(x, y)$, cuja projecção no plano xOy é Ω, é dada por

$$S = \int\int_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Exercício 2.3.2

(a) *Estabeleça o integral que permite calcular a área de superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.*

(b) *Mostre que o cálculo da área de uma região plana Ω, através de integrais duplos, pode ser efectuado através da fórmula*

$$\text{Área de } \Omega = \int\int_{\Omega} dA.$$

- **Lâmina** - objecto plano, fino

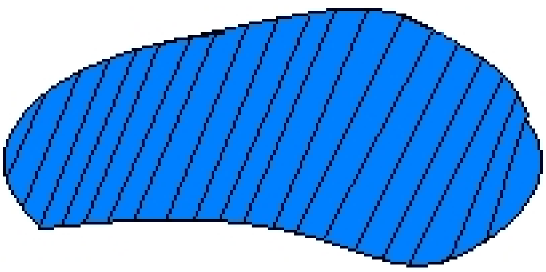


Figura 2.1 Lâmina

◇ Lâmina homogénea - composição e estrutura estão distribuídas uniformemente;
◇ Lâmina não homogénea - caso contrário;
◇ Densidade $\delta = \frac{M}{A}$ de uma lâmina homogénea de massa M e área A;
◇ Numa lâmina não homogénea a densidade em cada ponto é dada por uma função $\delta(x, y)$, chamada função densidade.

◇ <u>**Massa de uma lâmina**</u> Considere-se uma lâmina com função densidade $\delta(x,y)$, contínua, ocupando uma região R no plano XOY. Então a sua massa total é

$$M = \int\int_R \delta(x,y)\ dA.$$

◇ <u>**Primeiro momento da lâmina em relação ao eixo XX**</u>

$$M_x = \int\int_R y\delta(x,y)\ dA$$

◇ <u>**Primeiro momento da lâmina em relação ao eixo YY**</u>

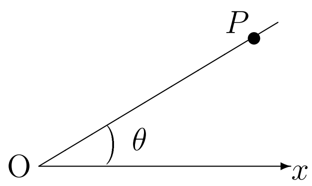
$$M_y = \int\int_R x\,\delta(x,y)\ dA$$

◇ <u>**Centro de gravidade da lâmina**</u>

$$\text{ponto } (\overline{x},\overline{y}) \text{ onde } \begin{cases} \bullet\ \overline{x} = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{\int\int_R x\delta(x,y)\ dA}{\int\int_R \delta(x,y)}\ dA \\[2ex] \bullet\ \overline{y} = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{\int\int_R y\delta(x,y)\ dA}{\int\int_R \delta(x,y)}\ dA \end{cases}$$

2.4 Coordenadas polares

- Para definir a posição de um ponto P do plano em coordenadas polares, temos de considerar no plano
  - um ponto O (polo)
  - uma semirecta emergente de O (eixo polar)



  A posição do ponto P fica definida pelo par (r,θ) onde
  - r corresponde à distância de O a P
  - θ corresponde ao ângulo formado pela semirecta OP e o eixo polar

  - As **coordenadas polares** de P representam-se por (r,θ) onde $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$
  - Convenciona-se que as coordenadas polares de O são $(0,\theta)$

- Sejam (x,y) as coordenadas cartesianas de um ponto P no referencial xOy.

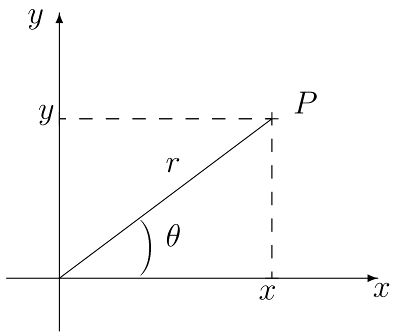
  Então as coordenadas polares de P no sistema de pólo O e eixo polar Ox são tais que:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

- Se (r, θ) representam as coordenadas polares de P, então as coordenadas cartesianas de P são dadas por:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\text{sen}(\theta) \end{cases}$$



Convém notar que, num sistema de coordenadas polares, a equação

$$r = f(\theta)$$

onde f é uma função de θ positiva ($f(\theta) > 0$), representa uma curva.

Exercício 2.4.1

(a) Dado o ponto $P\left(3, \dfrac{\pi}{6}\right)$ *em coordenadas polares, representá-lo em coordenadas cartesianas.*

(b) Dado o ponto $P(3, \sqrt{3})$ *em coordenadas cartesianas, determinar as suas coordenadas polares.*

(c) Dada a curva $r = 2$ *em coordenadas polares, determinar a sua equação cartesiana.*

(d) Dada a curva $r = \theta$ *em coordenadas polares, representá-la geometricamente.*

• Uma das vantagens do sistema de coordenadas polares é a representação de certas curvas através de expressões muito mais simples do que no sistema de coordenadas cartesianas. O caso mais conhecido é o da circunferência centrada na origem, cuja equação em coordenadas polares é $r = a$, enquanto que em coordenadas cartesianas é $x^2 + y^2 = a^2$. Outro exemplo é o cardióide (Figura 2.3), cuja equação em coordenadas polares é $r = a(1 - cos\theta)$ e em coordenadas cartesianas é

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Existem muitas outras curvas em que é vantajoso trabalhar em coordenadas polares: espiral de Arquimedes, lemniscata, etc.

2.5 Integrais duplos em Coordenadas Polares

Definição 2.5.1

Chama-se <u>*região polar simples*</u> *a uma região do plano limitada pelos raios* $\theta = \alpha$ *e* $\theta = \beta$ *e pelas curvas polares contínuas* $r = r_1(\theta)$ *e* $r = r_2(\theta)$*, onde*

$$\alpha \leq \beta \;\; e \;\; \beta - \alpha \leq 2\pi \;\;,\;\; 0 \leq r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$$

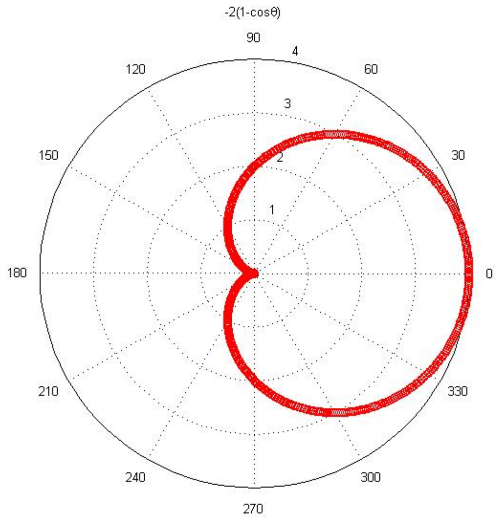


Figura 2.2 Cardióide de equação $r = -2(1 - \cos\theta)$

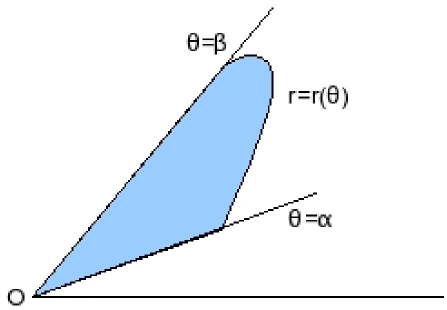


Figura 2.3 Exemplo de uma região polar simples

• O cálculo de integrais duplos em coordenadas cartesianas pode, por vezes, tornar-se difícil (veja-se, por exemplo, o exercício 2.3.2). Muitos destes integrais podem tornar-se mais simples se usarmos coordenadas polares.

• A passagem de um integral duplo em coordenadas cartesianas para um integral duplo em coordenadas polares pode ser feita através da seguinte fórmula

$$\int\int_\Omega f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\ drd\theta,$$

onde $\alpha, \beta, g_1(\theta), g_2(\theta)$ são obtidos através da representação de Ω em coordenadas polares. Note-se que estamos a assumir que Ω é uma região polar simples.

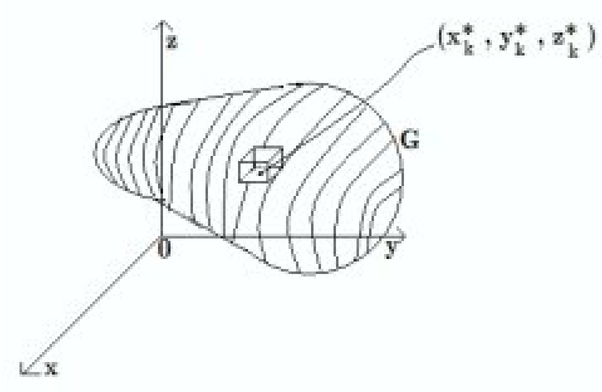
Exercício 2.5.2 *Sendo Ω o círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$, para determinar a área de superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, obtivemos o seguinte integral*

$$S = \int\int_\Omega \frac{2a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\ dA$$

(ver resolução do exercício 2.3.2). Calcule o seu valor usando coordenadas polares.

2.6 Integral Triplo

• Seja G uma região limitada e fechada no espaço e seja $f(x, y, z)$ uma função contínua em G. Dividindo G em vários paralelipípedos pequenos, com lados paralelos aos planos coordenados, e numerando os que estão dentro de G de 1 a n considere ΔV_k o volume do k - ésimo paralelipípedo e $(x_k^\star, y_k^\star, z_k^\star)$ um ponto do seu interior. Se considerarmos a soma



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^\star, y_k^\star, z_k^\star)\Delta V_k$$

então

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int\int\int_G f(x, y, z)\ dV$$

chama-se **integral triplo** de $f(x, y, z)$ sobre a região do espaço G.

• **Volume:** Se $f(x, y, z) = 1$ então

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}\ \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k,$$

logo

$$\lim_{n\to S_n} = \int\int\int_G dV = \text{volume de } G.$$

Assim, o cálculo do volume de um sólido através de integrais triplos pode ser efectuado através da fórmula

$$\text{Volume de } G = \int\int\int_G dV.$$

Os integrais triplos satisfazem propriedades análogas às dos integrais duplos.

2.6.1 Cálculo de Integrais Triplos

• O caso mais simples é aquele em que G é um paralelipípedo com faces paralelas aos planos coordenados, ou seja,

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}.$$

Se $f(x,y,z)$ for contínua em G então

$$\int\int\int_G f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\ dzdydx.$$

A ordem de integração pode ser alterada (há mais 5 possibilidades!)

Suponhamos agora que G é uma região do espaço, fechada e limitada, tal que qualquer recta paralela ao eixo dos ZZ que passe por um ponto interior não intersecte a fronteira em mais de dois pontos. Designando por $z = h_2(x,y)$ a superfície fronteira superior, $z = h_1(x,y)$ a superfície fronteira inferior e Ω a região do plano XOY em que G se projecta, teremos

$$\int\int\int_G f(x,y,z)\ dV = \int\int_\Omega \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA.$$

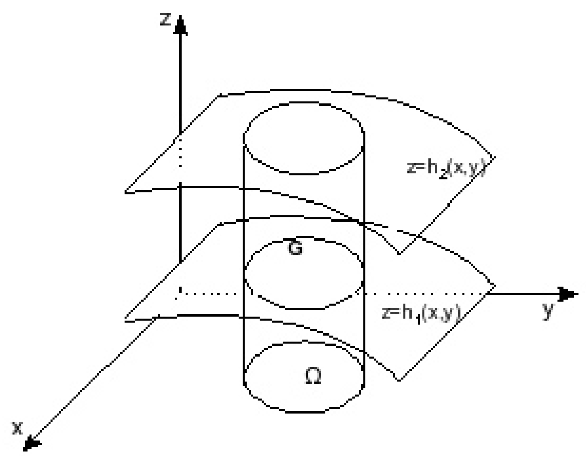


Figura 2.4 Ω é a projecção de G no plano XOY

• Para certas regiões, pode ser preferível calcular integrais triplos em ordem a x ou a y, em primeiro lugar. Por exemplo, se o sólido G é limitado à esquerda por $y = h_1(x,z)$ e à direita por $y = h_2(x,z)$ então

$$\int\int\int_G f(x,y,z)\ dV = \int\int_\Omega \left[\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,y,z)\ dy\right]\ dA,$$

onde Ω é a projecção de G no plano XOZ.

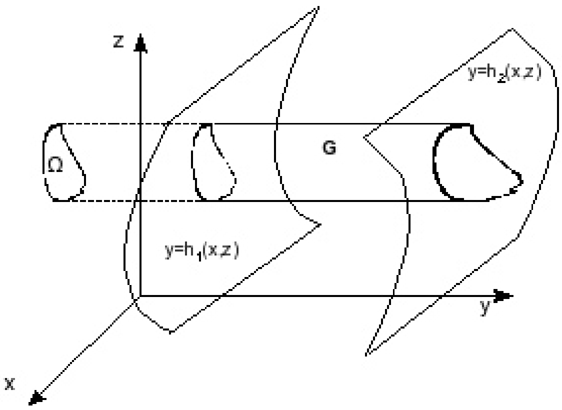


Figura 2.5 Ω é a projecção de G no plano XOZ

- Se o sólido G é limitado por $x = h_1(y,z)$ e por $x = h_2(y,z)$ então

$$\int\int\int_G f(x,y,z)\, dV = \int\int_\Omega \left[\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z)\, dx\right] dA,$$

onde Ω é a projecção de G no plano YOZ.

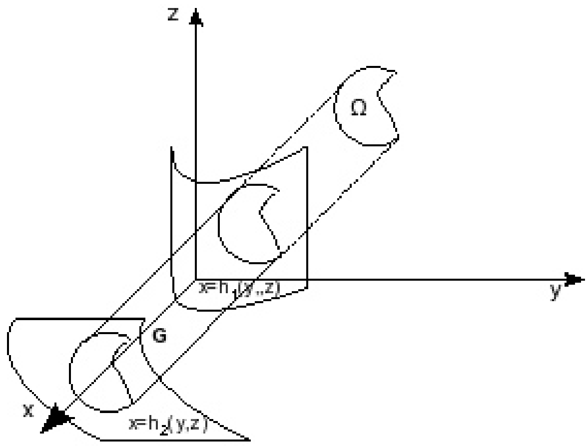


Figura 2.6 Ω é a projecção de G no plano YOZ

Exercício 2.6.1 *Determinar:*

(a) $\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} \int_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}} y\, dzdydx$;

(b) O volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ *e pelos planos* $z = 1$ *e* $x + z = 5$;

(c) $\int\int\int_G z\, dV$, *onde* G *é a fatia do sólido cilíndrico* $y^2 + z^2 \leq 1$, *cortada pelos planos* $y = x$ *e* $x = 0$, *situada no* $1^{\underline{o}}$ *octante.*

2.6.2 Aplicações do Integral Triplo

Seja G um sólido tridimensional e $\delta(x, y, z)$ a função densidade de G, que se supõe ser contínua.

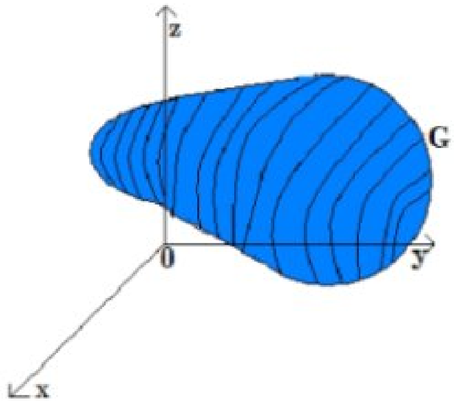


Figura 2.7 Sólido

◇ **Volume de G**

$$V_G = \int\int\int_G dV.$$

◇ **Massa de G**

$$M = \int\int\int_G \delta(x, y, z)\, dV.$$

◇ **Centro de gravidade de G**

$$\text{ponto } (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \text{ onde } \begin{cases} \bullet\ \overline{x} = \dfrac{1}{M} = \displaystyle\int\int\int_G x\,\delta(x, y, z)\, dV \\ \bullet\ \overline{y} = \dfrac{1}{M} = \displaystyle\int\int\int_G y\,\delta(x, y, z)\, dV \\ \bullet\ \overline{z} = \dfrac{1}{M} = \displaystyle\int\int\int_G z\,\delta(x, y, z)\, dV \end{cases}$$

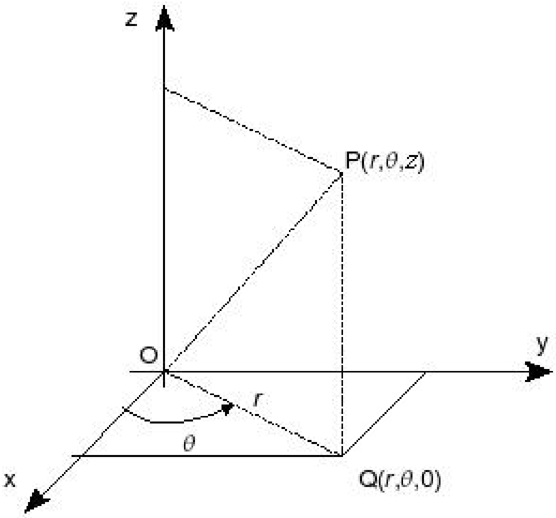
2.6.3 Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P do espaço é definido por

$$P(r, \theta, z)$$

onde

– $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi[$
– r e θ são, aliás, as coordenadas polares da projecção ortogonal de P sobre o plano xOy
– z é a coordenada vertical cartesiana, também conhecida por *cota*.



Exercício 2.6.2 *Representar graficamente as seguintes condições dadas em coordenadas cilíndricas:*
(a) $r = c,\ c > 0$
(b) $\theta = c$
(c) $z = c$
(d) $r_1 \leqslant r \leqslant r_2,\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,\ z_1 \leqslant z \leqslant z_2$

•Mudança de coordenadas cilíndricas para cartesianas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

• Mudança de coordenadas cartesianas para cilíndricas

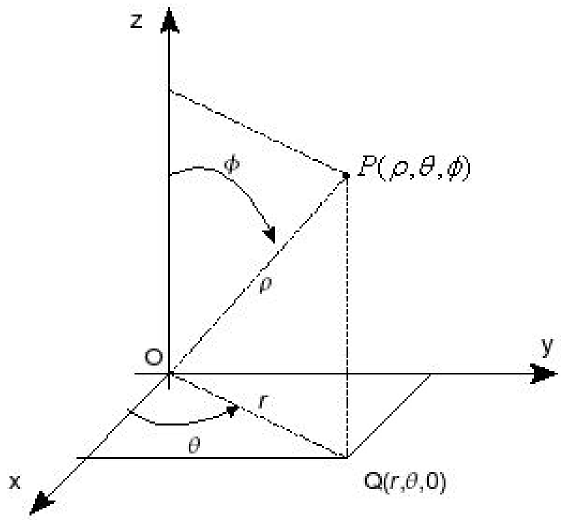
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \text{se} \quad x \neq 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{se} \quad x = 0 \wedge y > 0 \\ \theta = \frac{3\pi}{2}, \quad \text{se} \quad x = 0 \wedge y < 0 \\ z = z \end{cases}$$

• No sistema de coordenadas esféricas, um ponto P do espaço é definido por

$$P = (\rho, \theta, \phi)$$

onde

– $\rho \geqslant 0$ é a distância entre P e a origem
– $\theta \in [0, 2\pi[$ é o mesmo θ das coordenadas cilíndricas
– $\phi \in [0, \pi]$ é o ângulo formado por $\overrightarrow{OP}$ e o semi–eixo positivo dos zz



•Mudança de coordenadas esféricas para cartesianas

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

• Mudança de coordenadas cartesianas para esféricas

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \phi &= \arccos(z/\rho) \ \in [0, \pi] \\ \cos\theta &= \tfrac{x}{\rho \sin\phi} \\ \sin\theta &= \tfrac{y}{\rho \sin\phi}, \quad \theta \in [0, 2\pi[\end{aligned}$$

Exercício 2.6.3 *Representar graficamente as seguintes condições dadas em coordenadas esféricas:*

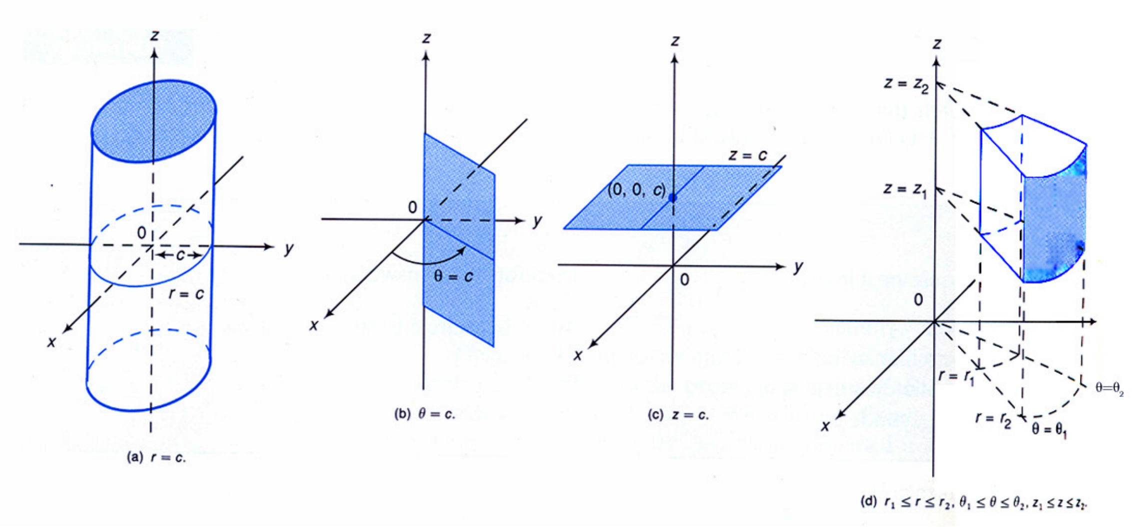
(a) $\rho = c, \quad (c > 0)$

(b) $\theta = c, \quad (0 \leqslant c \leqslant 2\pi)$

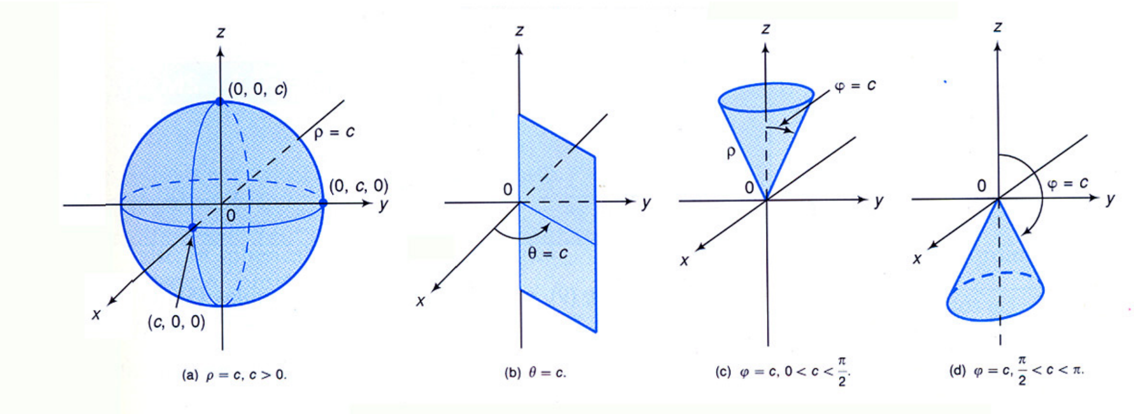
(c) $\phi = c, \quad (0 \leqslant c \leqslant \pi)$

(d) $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2,\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,\ \phi_1 \leqslant \phi \leqslant \phi_2$

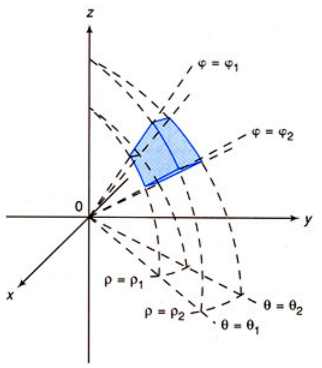
Figuras relativas ao exercício 2.6.2:



Figuras relativas ao exercício 2.6.3:



Figuras relativas ao exercício 2.6.3:



2.6.4 Integrais Triplos em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

As coordenadas cilíndricas são da forma (r, θ, z), onde $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi[$;
Algumas superfícies tridimensionais que têm equação simples em coordenadas cilíndricas são:

- $r = r_1$ cilindro vertical, de raio r_1, centrado no eixo dos ZZ;
- $\theta = \theta_1$ semiplano vertical, que faz um ângulo de θ_1 radianos com a parte positiva do eixo dos XX ;
- $z = z_1$ plano horizontal contendo $(0, 0, 1)$.

Teorema 2.6.4
Seja G uma região do espaço cuja representação em coordenadas cilíndricas é feita através das seguintes desigualdades

$$\begin{array}{ll} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 & (\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi) \\ 0 \leq g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta) & \\ h_1(r,\theta) \leq z \leq h_2(r,\theta), & \end{array}$$

com g_1, g_2, h_1, h_2 funções com derivada de $1^{\underline{a}}$ ordem contínua. Se $f(x, y, z)$ é contínua em G então

$$\int\int\int_G f(x,y,z)\ dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r,\theta)}^{h_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\ r\ dz\, dr\, d\theta$$

As coordenadas esféricas de um ponto são (ρ, θ, ϕ), onde $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ e $\phi \in [0, \pi]$. Algumas superfícies do espaço que têm equação simples em coordenadas esféricas são:

- $\rho = \rho_1$ esfera de centro em $(0, 0, 0)$ e raio ρ_1;
- $\theta = \theta_1$ semiplano vertical, que faz um ângulo de θ_1 radianos com a parte positiva do eixo dos XX (como nas coordenadas cilíndricas);
- $\phi = \phi_1$ cone circular com vértice na origem; eixo ZZ.

Teorema 2.6.5
Seja G uma região do espaço cuja representação em coordenadas esféricas é feita através das seguintes desigualdades

$$\begin{array}{ll} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 & (\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi) \\ 0 \leq g_1(\theta) \leq \phi \leq g_2(\theta) \leq \pi & \\ h_1(\theta,\phi) \leq \rho \leq h_2(\theta,\phi), & \end{array}$$

com g_1, g_2, h_1, h_2 funções com derivada de $1^{\mathbf{a}}$ ordem contínua. Se $f(x, y, z)$ é contínua em G então

$$\int\int\int_G f(x,y,z)\ dV =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(\theta,\phi)}^{h_2(\theta,\phi)} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\ \rho^2\sin\phi\ d\rho d\phi d\theta$$

2.7 Exercícios

Integrais duplos

1. Determine o valor dos seguintes integrais duplos.

   (a) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{y}{x}\, dA$ com $\Omega = \{(x,y) : 1 \le x \le e,\ 0 \le y \le 1\}$

   (b) $\displaystyle\iint_\Omega \cos(x+y)\, dA$ com $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi\}$

   (c) $\displaystyle\iint_R x\cos(x+y)\, dA$ onde R é a região triangular de vértices (π,π), $(\pi,0)$ e $(0,0)$

   (d) $\displaystyle\iint_R y\, dA$ onde $R = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$

   (e) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{\ln y}\, dA$ onde $R = \{(x,y) : 2 \le y \le 3,\ 0 \le x \le \frac{1}{y}\}$

2. Em cada alínea apresente um esboço da região de integração e calcule o valor do integral.

   (a) $\displaystyle\int_1^4\int_{\sqrt{y}}^{y} x^2y^3\, dx\, dy$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{4-2x} x+y\, dy\, dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} xy\, dy\, dx$ (d) $\displaystyle\int_1^2\int_0^{1/x} xe^{xy}\, dy\, dx$

3. Determine a região de integração e inverta a ordem de integração.

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\, dy\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^e\int_0^{\ln x} f(x,y)\, dy\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$

4. Calcule invertendo a ordem de integração.

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3)\, dx\, dy$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_1^2 e^{y/x}\, dx\, dy + \int_1^2\int_y^2 e^{y/x}\, dx\, dy$ (c) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$

5. Calcule a **área da região plana** definida por cada conjunto de condições.

   (a) $y = x, \quad y = -x^2+x+1, \quad -1 \le x \le 1$

   (b) $y = e^{|x|}, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad y = 0$

   (c) $y = x+1, \quad y = x-1, \quad y = -x+1, \quad y = -x-1$

6. Calcule a **área da superfície tridimensional** definida por:

   (a) Parte do cilindro $y^2+z^2 = 9$ que está acima do rectângulo $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ -3 \le y \le 3\}$.

   (b) Parte do plano $2x+2y+z = 8$ que está no primeiro octante $(x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$

   (c) Parte do parabolóide $z = 1-x^2-y^2$ que está acima do plano xOy.

7. Escreva o(s) integral(is) duplo(s) na forma iterada que lhe permite(m) calcular o volume dos seguintes sólidos.

(a) Sólido limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e inferiormente pelo triângulo do plano xOy delimitado pelas rectas $y = x$, $x = 0$ e $x + y = 2$.

(b) Sólido cuja base é a região do plano xOy delimitada pela parábola $y = 4 - x^2$ e pela recta $y = 3x$ e cujo topo é limitado pelo plano $z = x + 4$.

(c) Sólido resultante da intersecção do primeiro octante com a superfície $z = 4 - x^2 - y$.

(d) Sólido limitado superiormente pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente pelo plano $z = 1 - y$.

(e) Sólido limitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e inferiormente pelo plano $z = 1$.

Integrais duplos em Coordenadas Polares

8. Dados os seguintes pontos em coordenadas polares, determine as suas coordenadas cartesianas:

   (a) $(2, 0)$ (b) $(3, \pi/6)$

9. Dados os seguintes pontos em coordenadas cartesianas, determine as suas coordenadas polares:

   (a) $(2, 0)$ (b) $(1, \sqrt{3})$

10. Represente em coordenadas polares o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ definido pelas seguintes equações cartesianas:

    (a) $y = 2$ (b) $y = \sqrt{3}\,x$ (c) $x^2 + y^2 = 16$ (d) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

11. Faça um esboço do conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas polares satisfazem a equação $r = f(\theta)$, com $f(\theta) \geq 0$.

    (a) $r = 2|\cos\theta|, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$

    (b) $r = \sin(2\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2;$

    (c) $r = 2 + \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

12. Esboce a região do plano determinada em coordenadas polares pelas seguintes desigualdades:

    (a) $1 \leq r \leq 2, \quad \cos(\theta) \leq 0;$

    (b) $r^2 \leq 4, \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};$

    (c) $r \leq 3\sin(\theta), \quad r \geq 1 + \sin(\theta);$

    (d) $r \leq 2\cos(\theta), \quad r \leq 2\sin(\theta);$

13. Usando coordenadas polares, calcule os seguintes integrais duplos:

(a) $\displaystyle\int\int_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$, onde Ω é o círculo $x^2+y^2 \leq 1$;

(b) $\displaystyle\int\int_{\Omega} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dA$, onde Ω é o sector do primeiro quadrante limitado por $y=0$, $y=x$ e $x^2+y^2=9$.

14. Usando coordenadas polares, calcule os seguintes integrais iterados:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\, dy\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy$

(c) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2+y^2)\, dx\, dy$

Integrais Triplos

15. Determine o valor dos seguintes integrais triplos.

(a) $\displaystyle\int\int\int_G x^2+5y^2-z\ dV$, onde $G=\{(x,y,z): 0\leq x\leq 2 \wedge -1\leq y\leq 1 \wedge 2\leq z\leq 3\}$

(b) $\displaystyle\int\int\int_G xyz\ dV$, onde $G=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leq 1 \wedge x\geq 0 \wedge y\geq 0 \wedge z\geq 0\}$

(c) $\displaystyle\int\int\int_G \frac{1}{(x+1)^2}\ dV$, onde $G=\{(x,y,z): x\geq 0 \wedge y\geq 0 \wedge z\geq 0 \wedge x+y+z=1\}$

(d) $\displaystyle\int\int\int_G y\ dV$, onde G é o sólido limitado pelo plano $z=y$, o plano xOy e o cilindro parabólico $y=1-x^2$.

16. Nas alíneas seguintes, utilize integrais triplos para calcular o volume do sólido.

(a) O sólido contido no primeiro octante que é limitado pelos planos coordenados e pelo plano $3x+6y+4z=12$.

(b) O sólido limitado pela superfície $y=x^2$ e os planos $y+z=4$ e $z=0$.

17. Faça um esboço do sólido cujo volume é dado pelo integral.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{y+1} dz\, dy\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y} dz\, dy\, dx$

18. Usando integrais triplos, determine o volume do elipsóide $x^2+4y^2+9z^2=36$.

19. Mude as coordenadas de um sistema para outro conforme especificado em cada alínea:

(a) $(3,\pi/6,-1)$; cilíndricas para cartesianas;

(b) $(2,2\pi/3,4)$; cilíndricas para cartesianas;

(c) $(2,2,-4)$; cartesianas para cilíndricas;

(d) $(-2,2\sqrt{3},-4)$; cartesianas para cilíndricas;

(e) $(3,\pi/3,\pi/4)$; esféricas para cartesianas;

(f) $(2, 7\pi/3, 2\pi/3)$; esféricas para cartesianas;

(g) $(-1, 1, -\sqrt{2})$; cartesianas para esféricas;

(h) $(2, -\sqrt{3}, 4)$; cartesianas para esféricas.

20. Escreva a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ em coordenadas cilíndricas e esféricas.

21. Escreva a equação $r^2 \cos(2\theta) = z^3$ em coordenadas cartesianas.

22. Escreva a equação $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ em coordenadas cilíndricas e esféricas.

23. Escreva a equação $\rho \sin \phi = 1$ em coordenadas cartesianas.

24. Esboce a região de $\mathbb{R}^3$ determinada em coordenadas cilíndricas pelas seguintes desigualdades:

    (a) $r^2 \leq z \leq 4$;

    (b) $0 \leq r \leq 2\sin(\theta), \quad 0 \leq z \leq 3$.

25. Esboce a região de $\mathbb{R}^3$ determinada em coordenadas esféricas pelas seguintes desigualdades:

    (a) $1 \leq \rho \leq 3$;

    (b) $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}, \quad 0 \leq \rho \leq 2$.

26. Utilize coordenadas cilíndricas para calcular o integral triplo

    (a) de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ na região S dada pelas desigualdades $0 \leq r \leq 4$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ e $-1 \leq z \leq 1$;

    (b) de $f(x,y,z) = \sin(x^2 + y^2)$ onde S é o cilindro de altura 4 com base dada pela circunferência de raio 1, centro $(0,0,-1)$ e totalmente contida no plano $z = -1$.

27. Usando coordenadas cilíndricas, calcule:

    (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+y^2} dz\,dy\,dx$

    (b) $\displaystyle\iiint_S x^2 + y^2 \,dV$, onde S representa o sólido limitado pela superfície $x^2 + y^2 = 2z$ e pelo plano $z = 2$.

    (c) $\displaystyle\iiint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$ onde S é o cilindro definido por $x^2 + y^2 \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

28. Utilize coordenadas esféricas para calcular:

    (a) o volume da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$.

    (b) o volume do sólido definido pela condição $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

(c) $\iiint_G dV$, onde G representa o sólido limitado por duas esferas de centro na origem e raio a e b, respectivamente, com $0 < a < b$.

29. Utilize coordenadas cilíndricas ou esféricas para calcular:

(a) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a^2-x^2-y^2} x^2 \; dz\, dy\, dx \;\; (a > 0)$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \; dz\, dy\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 \; dz\, dx\, dy$

(d) $\displaystyle\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \; dz\, dx\, dy$

Capítulo 3

Análise Vectorial

3.1 Integrais de Linha

3.1.1 Equações paramétricas de uma curva

- Quando uma partícula se move no espaço durante um certo intervalo de tempo I podemos pensar nas coordenadas da partícula como uma função do tempo:

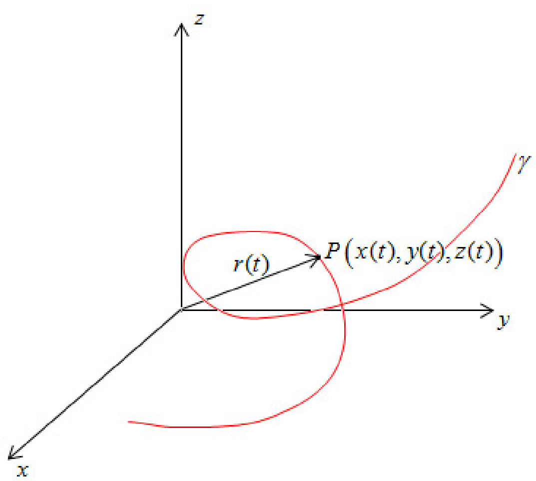
$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ t \in I. \tag{3.1}$$

Os pontos

$$(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))\,,\ \ t \in I$$

formam uma curva γ no espaço, chamada trajetória da partícula. As equações (3.1) são chamadas *equações paramétricas* da curva γ, e podem ser representadas na forma vetorial

$$r(t) = \overrightarrow{OP} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}.$$



- No instante t, $r(t)$ é o vector posição da partícula. Diz-se também que $r(t)$ é uma parametrização da curva γ.

- **Exemplo 3.1.1** Vejamos alguns exemplos de curvas representadas por equações paramétricas:

  1. **Circunferência** (no plano xOy)

  $$r(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}, \quad t \in [0,\, 2\pi]$$

  Trata-se da circunferência de centro em $(0,0)$ e raio a, cuja equação em coordenadas cartesianas é $x^2 + y^2 = a^2$.

  2. **Elipse** (no plano xOy)

  $$r(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}, \quad t \in [0,\, 2\pi]$$

  Trata-se da elipse de centro em $(0,0)$ e equação cartesiana $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

  3. Uma curva $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, no plano xOy admite a parametrização $x = t,\ y = f(t)$, isto é,

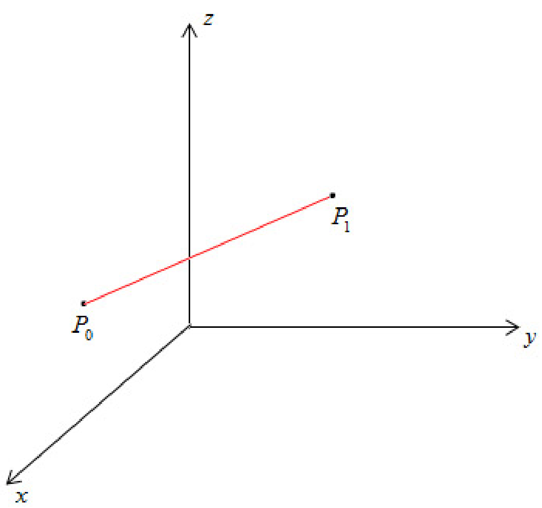
  $$r(t) = t\,\vec{i} + f(t)\,\vec{j}, \quad t \in [a,\, b].$$

  4. **Segmento de Reta**
  Dados dois pontos no espaço P_0 e P_1, uma parametrização do segmento de reta $[P_0P_1]$ é

  $$r(t) = (1-t)P_0 + tP_1, \quad (0 \le t \le 1).$$

  Nesta parametrização o segmento é percorrido no sentido P_0 para P_1. Se o segmento for percorrido no sentido P_1 para P_0 então a parametrização é

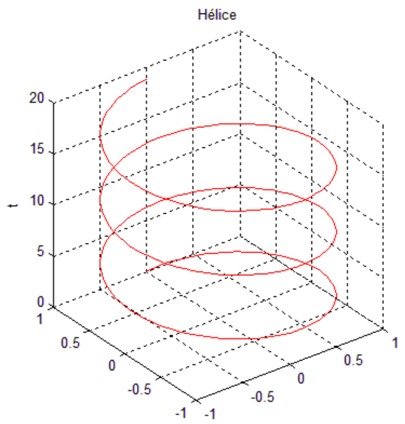
  $$r(t) = tP_0 + (1-t)P_1, \quad (0 \le t \le 1).$$



5. **Hélice Elíptica**

$$r(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j} + ct\,\vec{k}, \quad t \in [t_0,\, t_1]$$

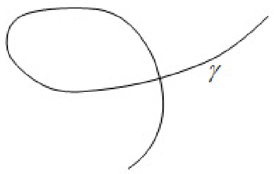
Se $a = b$, a hélice é circular.



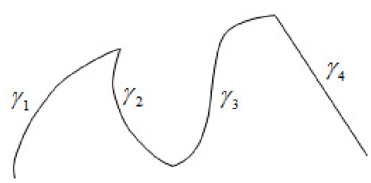
- Se $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são deriváveis em I então a derivada de $r(t)$ define-se por

$$r'(t) = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}.$$

Seja γ uma curva no espaço. Uma parametrização $r(t)$ de γ diz-se *regular* se a sua derivada $r'(t)$ existir, for contínua em I e $r'(t) \neq \vec{0}$, para todo o $t \in I$. Diz-se que $r(t)$ é *seccionalmente regular* se for possível decompô-la num número finito de parametrizações regulares. Uma curva diz-se regular (respetivamente, seccionalmente regular) se admitir uma parametrização regular (resp., seccionalmente regular).



Curva regular



Curva seccionalmente regular

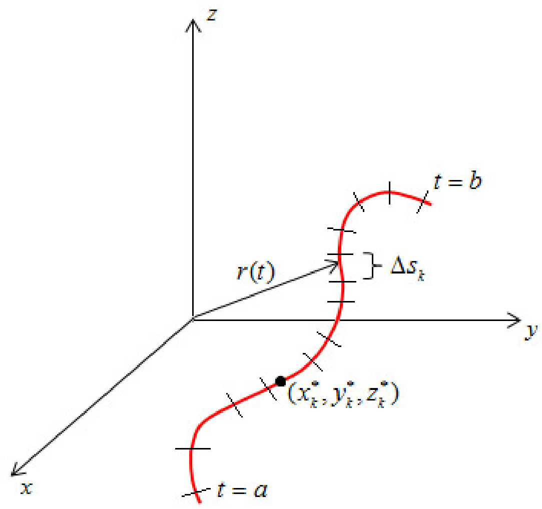
3.1.2 Definição e Propriedades do Integral de Linha

- Suponhamos que γ é uma curva regular definida através da parametrização regular

$$r(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

e que $f(x, y, z)$ é uma função cujo domínio contém γ. Vamos dividir γ num número finito (digamos, n) de subarcos, $s_1, s_2 \ldots, s_n$, tendo cada um comprimento Δs_k. Em cada subarco, escolha-se um ponto $(x_k^\star, y_k^\star, z_k^\star)$ e forme-se a soma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k.$$



- Ao limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ chama-se *integral de linha* de f sobre a curva γ de a até b e escreve-se

$$\int_\gamma f(x, y, z)\ ds = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

  Da definição resultam as seguintes propriedades:

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\ ds = \alpha \int_\gamma f\ ds + \beta \int_\gamma g\ ds,$$

  onde α e β são constantes, e

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\ ds = \int_{\gamma_1} f\ ds + \int_{\gamma_2} f\ ds,$$

  onde γ_1 e γ_2 são regulares e $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \phi$.

- **Nota.** Se $f(x, y, z) = 1$, então o integral de linha é o comprimento do arco da curva γ que vai de $t = a$ a $t = b$:

$$\text{Comprimento} = \int_\gamma ds.$$

- Como é sabido, uma curva pode admitir mais do que uma parametrização. O teorema seguinte diz que, se forem satisfeitas certas condições, o integral de linha não depende da parametrização considerada.

Teorema 3.1.2 *Se f é contínua nos pontos da curva γ e se γ é regular ou seccionalmente regular então o integral de linha não depende da representação paramétrica de γ.*

3.1.3 Cálculo do Integral de Linha

- Se γ for uma curva regular entre $t = a$ e $t = b$ e se $f(x, y, z)$ for contínua, podemos usar o seguinte procedimento para calcular o integral de linha de f sobre γ:

  1. Encontrar uma parametrização regular de γ:

  $$r(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}, \quad t \in [a, b].$$

  2. Usar a igualdade seguinte, que transforma o integral de linha num integral simples:

  $$\int_\gamma f(x, y, z)\; ds = \int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\; dt$$

- Se γ for uma curva no plano xOy, o integral de linha calcula-se de modo análogo. Neste caso, $z(t) = 0$ e f é uma função de duas variáveis $f(x, y)$.

Exercício 3.1.3 Para cada uma das seguintes curvas γ e funções $f(x, y, z)$, calcular $\int_\gamma f(x, y, z)\, ds$.

(a) γ é a parte de uma hélice definida por

$$r(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}, \quad (0 \le t \le \pi)$$

e $f(x, y, z) = xy + z^3$.

(b) γ é constituída pelo segmento de recta que vai da origem ao ponto $P_0(1, 1, 0)$ e pelo segmento que vai deste ponto a $P_1(1, 1, 1)$ e $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$.

(c) γ é a circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio 1, e $f(x, y) = 1 - x^2$.

3.1.4 Aplicações do Integral de Linha

- **Comprimento de um arco**
  Seja $\widehat{AB}$ o arco da curva γ (regular) que vai de $t = a$ até $t = b$. Vimos atrás que

  $$\text{comprimento de } \widehat{AB} = \int_{\widehat{AB}} ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\; dt$$

- **Massa de um fio**

  $$M = \int_\gamma \delta(x, y, z)\; ds,$$

  onde $\delta(x, y, z)$ representa a função densidade (massa por unidade de comprimento) de um fio distribuída ao lingo de uma curva regular γ.

- **Primeiro momento de inércia em relação aos eixos coordenados**

$$M_{yz} = \int_\gamma x\delta(x,y,z)\ ds, \quad M_{xz} = \int_\gamma y\delta(x,y,z)\ ds, \quad M_{xy} = \int_\gamma z\delta(x,y,z)\ ds.$$

- **Coordenadas do centro de massa**

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

3.2 Campos Vectoriais

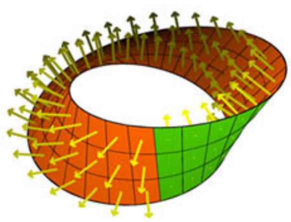
3.2.1 Definição, exemplos e interpretação física

- **Definição.**

  (i) Sejam M e N funções de duas variáveis definidas numa região R do plano. Chama-se campo vectorial sobre R à função
  $F(x,y) = M(x,y)\,\vec{i} + N(x,y)\,\vec{j}$. (no plano)

  (ii) Sejam M, N e P funções de três variáveis definidas numa região Q do espaço. Chama-se campo vectorial sobre Q à função
  $F(x,y,z) = M(x,y,z)\,\vec{i} + N(x,y,z)\,\vec{j} + P(x,y,z)\,\vec{k}$. (no espaço)

- Campos vectoriais são funções que associam um vector a cada ponto de uma região do plano ou do espaço.



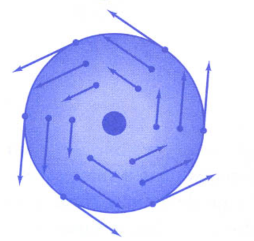
- **Exemplos.**

  1. O gradiente é um um exemplo de campo vectorial. Por exemplo, se
  $f(x,y) = x^2 + y^2$
  $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$,
  então

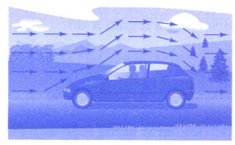
$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,\vec{i} + f_y(x,y)\,\vec{j} = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$
é um campo vectorial no plano e
$\nabla g(x,y,z) = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$
é um campo vectorial no espaço.

2. Os campos de velocidades descrevem os movimentos de um sistema de partículas. Por exemplo, a figura abaixo à esquerda mostra o campo vectorial determinado pela rotação de uma roda em torno do seu eixo. Note que os vectores são maiores nos pontos mais afastados do eixo.

Campo vetorial



Rotação da roda.

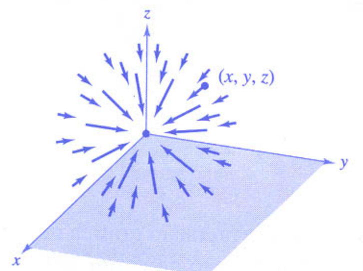


Campo vetorial do fluxo do ar.

Os campos de velocidades podem ser também definidos pelo fluxo de um fluido num recipiente ou pelo fluxo do ar em redor de um objecto em movimento (figura à direita acima).

3. Os campos gravitacionais são definidos pela **Lei da Gravitação de Newton**, que diz que a força de atracção exercida sobre uma partícula de massa m_1 localizada em (x,y,z) por uma outra partícula de massa m_2 localizada na origem $(0,0,0)$ é dada por

$$F(x,y,z) = \frac{-g m_1 m_2}{x^2+y^2+z^2}\,\vec{u},$$



m_1 localizada em (x, y, z).
m_2 localizada em $(0, 0, 0)$.

Campo de força gravitacional.

onde g é a constante de gravidade e $\vec{u}$ é um vector unitário na direcção da origem para o ponto (x,y,z). Na figura pode-se observar que a intensidade de $F(x,y,z)$ é a mesma em todos os pontos equidistantes da origem.

4. Os campos de força eléctrica são definidos pela **Lei de Coulomb**, que diz que a força exercida sobre uma partícula com carga eléctrica q_1 localizada em (x,y,z) por uma outra partícula com carga eléctrica q_2 localizada na origem $(0,0,0)$ é dada por

$$F(x,y,z) = \frac{c\,q_1 q_2}{x^2+y^2+z^2}\,\vec{u},$$

onde c é uma constante que depende de q_1 e q_2 e também das unidades escolhidas para medir a distância entre as partículas.

- Um campo vectorial é constituído por um número infinito de vectores e, portanto, não é possível fazer um esboço de *todo* o campo vectorial. Assim, sempre que se pretenda fazer a sua representação geométrica, devemos ter algum cuidado na escolha dos vectores representativos, por forma a evidenciar as características mais importantes do campo.

- **Exercício 3.2.1** Faça um esboço dos seguintes campos vectoriais:

  (a) $F(x,y) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$

  (b) $v(x,y,z) = (16 - x^2 - y^2)\,\vec{k}$, onde $x^2 + y^2 \leq 16$.

3.2.2 Campos vectoriais conservativos. Rotacional

- **Definição.**
  Diz-se que um campo vectorial F é conservativo se existir uma função diferenciável f tal que $F = \nabla f$. A função f designa-se por função potencial.

- **Exemplo.**
  Os campos gravitacionais são conservativos. De facto, seja

$$f(x,y,z) = \frac{-c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

onde $c = -gm_1m_2$. Como,

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{cx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{i} + \frac{cy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{j} + \frac{cz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{k}\\ &= \frac{c}{x^2+y^2+z^2}\,\frac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ &= \frac{-gm_1m_2}{x^2+y^2+z^2}\,\vec{u},\end{aligned}$$

verifica-se que $F = \nabla f$.

- Tal como os campos gravitacionais, também os campos eléctricos são conservativos. O termo "conservativo" vem da lei da conservação de energia. Esta lei diz que a soma das energias cinética e potencial de uma partícula que se move num campo de força conservativo é constante. (A energia cinética da partícula é devida ao movimento e a energia potencial é devida à sua posição no campo de força.)

- **Teorema.**(Teste dos campos conservativos no plano)
Sejam M e N funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas num disco aberto R. O campo vectorial $F(x,y) = M\,\vec{i} + N\,\vec{j}$ é conservativo se e só se
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

- **Exercício 3.2.2**
Averigue se os seguintes campos vectoriais (no plano) são conservativos. Em caso afirmativo, determine uma função potencial.
  (a) $F(x,y) = x^2y\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$.
  (b) $F(x,y) = 2xy\,\vec{i} + (x^2 - y)\,\vec{j}$.

- **Definição.** Chama-se rotacional de $F(x,y,z) = M\,\vec{i} + N\,\vec{j} + P\,\vec{k}$ a
$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F(x,y,z) &= \nabla \times F(x,y,z)\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}\end{aligned}$$

- Se $\operatorname{rot} F = \vec{0}$, então F é chamado irrotacional.

- A notação usada na definição de rotacional vem do facto de podermos interpretar o gradiente ∇f como o resultado do operador diferencial actuando sobre f. Assim, podemos usar o símbolo de determinante para ajudar a memorizar a fórmula que dá o rotacional:
$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F(x,y,z) &= \nabla \times F(x,y,z)\\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ M & N & P\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}\end{aligned}$$

- O rotacional de um campo vectorial 3-D é um vector que está relacionado com a densidade de circulação, isto é, com a circulação por unidade de área. O rotacional também é usado para ver se um campo vectorial 3-D é conservativo ou não.

- **Teorema.**(Teste dos campos conservativos no espaço)
Sejam M, N e P funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa bola aberta no espaço. O campo vectorial $F(x,y,z) = M\,\vec{i} + N\,\vec{j} + P\,\vec{k}$ é conservativo se e só se
$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \vec{0},$$

isto é, se e só se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z}, \ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

- **Exercício 3.2.3**
  Mostre que o campo vectorial (no espaço)

  $$F(x, y, z) = 2xy\,\vec{i} + (x^2 + z^2)\,\vec{j} + 2yz\,\vec{k}$$

  é conservativo. Determine uma função potencial.

3.2.3 Divergente de um campo vectorial

- **Definição.**

  (i) O divergente de $F(x, y) = M\,\vec{i} + N\,\vec{j}$ é
  $\operatorname{div} F(x, y) = \nabla \cdot F(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$. (no plano)

  (ii) O divergente de $F(x, y, z) = M\,\vec{i} + N\,\vec{j} + P\,\vec{k}$ é
  $\operatorname{div} F(x, y, z) = \nabla \cdot F(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$. (no espaço)

- Se $\operatorname{div} F = 0$, então F é dito não divergente.

- A notação de produto escalar usada na definição de divergente vem do facto de se considerar ∇ como um operador diferencial.

- O divergente de um campo vectorial é uma função escalar. Em termos físicos, pode ser visto como um tipo de derivada de F, já que para campos vectoriais representando velocidades de partículas em movimento, o divergente mede a taxa de escoamento de partículas por unidade de volume num ponto. Na hidrodinâmica (estudo dos movimentos dos fluidos), o campo de velocidades que não é divergente é chamado incompressível. No estudo de electricidade e magnetismo, o campo vectorial que não é divergente é chamado solenoidal.

- **Exercício 3.2.4**
  Determine o divergente do campo vectorial

  $$F(x, y, z) = x^3y^2z\,\vec{i} + x^2z\,\vec{j} + x^2y\,\vec{k}$$

  no ponto $(2, 1, -1)$.

- **Teorema.**(Relação entre divergente e rotacional)
  Se M, N e P são funções com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então o campo vectorial $F(x, y, z) = M\,\vec{i} + N\,\vec{j} + P\,\vec{k}$ verifica

  $$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0.$$

3.3 Exercícios

Integrais de Linha

1. Calcule o integral de linha para a função e a curva indicadas.

   (a) $f(x,y) = 1 + xy^2$; segmento de recta representado por $x(t) = t$ e $y(t) = 2t$ com $t \in [0,1]$.

   (b) $f(x,y) = x^3/y$; curva $y = x^2/2$, $0 \le x \le 2$

   (c) $f(x,y) = x + y$; curva $x^2 + y^2 = 4$ no primeiro quadrante de $(2,0)$ a $(0,2)$.

   (d) $f(x,y,z) = \dfrac{e^{-z}}{x^2+y^2}$; curva $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ e $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$; curva $r(t) = (4\cos t)\,\vec{i} + (4\sin t)\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}$, $-2\pi \le t \le 2\pi$

   (f) $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$; curva $\gamma_1 \cup \gamma_2$, onde
   $\gamma_1 :\quad r(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}, \quad 0 \le t \le 1$
   $\gamma_2 :\quad r(t) = \vec{i} + \vec{j} + t\,\vec{k}, \quad 0 \le t \le 1$

2. Considere a função $f(x,y) = 1 - x^2$ e a curva γ dada pela equação $x^2 + y^2 = 1$. Calcule $\displaystyle\int_\gamma f\,ds$ para as seguintes representações paramétricas de γ.

   (a) $F(t) = (\sin t, \cos t)$ com $t \in [0, 2\pi]$

   (b) $C(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

   (c) $X(t) = C(2\pi - t)$, $t \in [0, 2\pi]$

3. Calcule a massa do arame dado pela equação $x^2 + y^2 = 1$, com $x \in [0,1]$, cuja função densidade é $\delta(x,y) = 2(1 - x^2)$.

4. Um fio de densidade $\delta(x,y,z) = 15\sqrt{y+2}$ está ao longo da curva $r(t) = (t^2 - 1)\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}$, $-1 \le t \le 1$. Determine o seu centro de massa e esboce a curva juntamente com o centro de massa.

5. Determine a massa de um arame que está ao longo da curva $r(t) = (t^2-1)\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}$, $-1 \le t \le 1$, com densidade $\delta = (3/2)t$.

Campos Vectoriais

6. Faça um esboço de vários vectores representativos dos seguintes campos vectoriais.

   (a) $F(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ (b) $F(x,y) = x\,\vec{i} - y\,\vec{j}$
   (c) $F(x,y) = 4x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ (d) $F(x,y,z) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

7. Determine o campo gradiente para as seguintes funções escalares (isto é, determine o campo vectorial conservativo para a função potencial).

   (a) $f(x,y) = 5x^2 + 3xy + 10y^2$ (b) $f(x,y,z) = z - ye^{x^2}$

8. Averigue se os seguintes campos vectoriais são conservativos. Em caso afirmativo determine uma função potencial.

   (a) $F(x,y) = 5y^2(3y\,\vec{i} - x\,\vec{j})$ (b) $F(x,y) = 2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$
   (c) $F(x,y) = \frac{1}{y^2}(y\,\vec{i} - 2x\,\vec{j})$ (d) $F(x,y) = xe^{x^2y}(2y\,\vec{i} + x\,\vec{j})$

9. Averigue se os seguintes campos vectoriais são conservativos. Em caso afirmativo determine uma função potencial.

   (a) $F(x,y,z) = \sin y\,\vec{i} - x\cos y\,\vec{j} + \vec{k}$ (b) $F(x,y,z) = e^z(y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + \vec{k})$
   (c) $F(x,y,z) = e^z(y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + xy\vec{k})$

10. Determine o divergente dos seguintes campos vectoriais no ponto dado.

    (a) $F(x,y,z) = xyz\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, $(1,2,1)$

    (b) $F(x,y,z) = e^x \sin y\,\vec{i} - e^x \cos y\,\vec{j}$, $(0,0,3)$

11. Para os seguintes campos vectoriais, determine $\operatorname{rot}(F \times G)$ e $\operatorname{div}(F \times G)$.

    (a) $F(x,y,z) = \vec{i} + 2x\,\vec{j} + 3y\,\vec{k}$, $G(x,y,z) = x\,\vec{i} - y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

    (b) $F(x,y,z) = x\,\vec{i} - z\,\vec{k}$, $G(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$

12. Sejam $F(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ e $f(x,y,z) = \|F(x,y,z)\|$.

    (a) Mostre que $\nabla(\ln f) = \frac{F}{f^2}$.

    (b) Mostre que $\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{F}{f^3}$.

    (c) Chama-se *Laplaciano* ao operador diferencial

    $$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

    e *equação de Laplace* a

    $$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

    Qualquer função que satisfaça esta equação é chamada *harmónica.* Mostre que $1/f$ é harmónica.