**Séries - Teoremas**

# 1 Teorema 1.

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes, então as séries $\sum c\, a_n$ (sendo $c$ uma constante) e $\sum(a_n \pm b_n)$ também são convergentes

a. $\sum c\, a_n = c \sum a_n$

b. $\sum(a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$ ,

# 2 Testes de convergência:

## 2.1 Teorema 2 (Teste da divergência)

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ não existe ou se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum a_n$ é divergente.

## 2.2 Teorema 3 (Teste da integral)

Seja $\sum a_n$ uma série com termos positivos e seja $f(x)$ a função que resulta quando $k$ for substituído por $x$ no termo geral da série. Se $f$ é decrescente e contínua no intervalo $[a, +\infty)$, então

a. Se $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é convergente, $\sum a_n$ é convergente

b. Se $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é divergente, $\sum a_n$ é divergente

### 2.2.1 Estimativa do erro para o teste da integral

Se $f(n) = a_n$ uma função contínua, positiva e decrescente para $x \geq n$ e $\sum a_n$ é convergente. O erro de truncamento $R_n$ satisfaz

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx \tag{1}$$

### 2.2.2 p-séries

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$

## 2.3 Teorema 3 (Teste da comparação)

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries com termos positivos,

a. Se $\sum b_n$ é convergente e $a_n \leq b_n$ para todo $n > N_o$, então $\sum a_n$ é convergente

b. Se $\sum b_n$ é divergente e $a_n \geq b_n$ para todo $n > N_o$, então $\sum a_n$ é divergente

### 2.3.1 Teorema 4 (Teste da comparação dos limites)

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries com termos positivos, se

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \tag{2}$$

onde $c$ é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

### 2.3.2 Estimativa do erro para o teste de comparação

Sejam $\sum a_n$ com erro $R_n$ e $\sum b_n$ com erro $T_n$, séries convergentes com termos positivos e $a_n \leq b_n$ para todo $n > N_o$, então $S_n \leq T_n$

## 2.4 Teorema 5 (Teste de séries alternadas)

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ........(a_n > 0) \tag{3}$$

satisfaz

a. $a_{n+1} \leq a_n$ , para todo $n$

b. $\lim_{x \longrightarrow \infty} a_n = 0$ ,

a série é convergente.

### 2.4.1 Estimativa do erro para o teste de séries alternadas

Se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ satisfaz

a. $a_{n+1} \leq a_n$ , para todo $n$

b. $lim_{x \longrightarrow \infty} a_n = 0$ ,

então $|R_n| \leq a_{n+1}$

## 2.5 Teorema 6 (Teste da razão)

### 2.5.1 Definição

uma série $\sum a_n$ é chamada de absolutamente convergente se a série de valores absolutos$\sum |a_n|$ é convergente.

### 2.5.2 Teorema

seja a série $\sum a_n$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L\,, \tag{4}$$

a. Se $L < 1$, então a série é absolutamente convergente (e portanto convergente)

b. Se $L > 1$ ou $L = \infty$, então a série é divergente

c. Se $L = 1$ o teste da razão é inconclusivo.

## 2.6 Teorema 7 (Teste da raiz)

seja a série $\sum a_n$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = L\,, \tag{5}$$

a. Se $L < 1$, então a série é absolutamente convergente (e portanto convergente)

b. Se $L > 1$ ou $L = \infty$, então a série é divergente

c. Se $L = 1$ o teste da razão é inconclusivo.

# 3 Séries de potências

## 3.1 Definição

Seja $x_0$ uma constante, uma série da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k = c_0 + c_1\,(x-x_0) + c_2\,(x-x_0)^2 + c_3\,(x-x_0)^3 + ..... \tag{6}$$

é chamada de séries de potências em $x - x_0$. Em particular se $x_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,x^k = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + c_3\,x^3 + ..... \tag{7}$$

é chamada apenas de série de potências. Se ela for convergente, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ na região $|x-x_0| < R$, sendo $R$ o raio de convergência.

## 3.2 Teorema 6

Para uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$, exatamente uma das seguintes afirmativas é verdadeira:

a. A série converge somente em $x = x_0$.

b. A série converge absolutamente para todo $x$.

c. Existe um número positivo $R$, chamado de raio de convergência tal que a série converge para $|x-x_0| < R$ e diverge para $|x-x_0| > R$.

## 3.3 Definição

O intervalo de convergência é o conjunto de todos os valores de $x$ para o qual a série de potências converge.

## 3.4 Teorema 7

Se a série de potências $\sum c_n(x-x_0)^n$ tem raio de convergência $R > 0$ então a função $f$ definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ é diferenciável no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1} \tag{8}$$

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

os raios de convergência em ambos dos casos é $R$.

# 4 Séries de Taylor y Maclaurin

## 4.1 Definição

Se uma função $f$ tiver derivadas de todas as ordens em $x_0$,então chamamos a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{9}$$

se série de Taylor para $f$ em torno de $x = x_0$. No caso especial em que $x = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \tag{10}$$

é chamada de série de Maclaurin para $f$.

## 4.2 Definição

Se função $f$ puder ser diferenciada $n$ vezes em $x_0$, define-se o n-énesimo polinômio de Taylor para $f$ em torno de $x = x_0$, como sendo

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \tag{11}$$

se série de Taylor para $f$ em torno de $x = x_0$. No caso especial em que $x = 0$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \tag{12}$$

é chamada de polinômio de Maclaurin para $f$.

## 4.3 Teorema de Taylor

Se uma função $f$ for diferenciável até a ordem $n + 1$ em um intervalo aberto $I$ contendo $x_0$ , então para cada $x$ em $I$ existe um número $c$ entre $x$ e $a$ tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) \tag{13}$$

onde $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$

## 4.4 Teorema

Se $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, a igualdade

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \tag{14}$$

é verdadeira num ponto $x$ se e somente se $\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ($R_n$ é chamado de resto)

## 4.5 Teorema (teorema da estimativa do resto)

Se a função $f$ pode ser diferenciada $n + 1$ vezes num intervalo $I$ contendo o ponto $x_0$ e se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para todo $x$ em $I$, então

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \tag{15}$$

para todo $x$ em $I$.