Universidade do Minho

Departamento de Produção e Sistemas

Escola de Engenharia

Exercícios Resolvidos

MÉTODOS NUMÉRICOS C

Mestrado Integrado em Engenharia das Comunicações

Isabel Espírito Santo
Lino Costa

Versão 7.6: 2011/jun/05

Título: Exercícios resolvidos para Métodos Numéricos C do Mestrado Integrado em Engenharia das Comunicações

Autores: Isabel Espírito Santo e Lino Costa

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia
Universidade do Minho

Conteúdo

Parte I

Exercícios

1 Erros e números

1.1 Com base no limite superior do erro absoluto no cálculo da expressão

$$f(\pi, \sqrt{3}, \sqrt{2}) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{\pi^2 + \sqrt{2}},$$

e sabendo que são usados os seguintes valores aproximados

$$\pi = 3.1416, \quad \sqrt{3} = 1.732 \;\; e \;\; \sqrt{2} = 1.4142,$$

quantos algarismos significativos tem o valor calculado de f?

1.2 O perímetro P de um triângulo rectângulo de hipotenusa h e e com um dos ângulos agudos α, pode ser dado pela expressão

$$P = (\mathrm{sen}(\alpha) + \cos(\alpha))\, h.$$

Supondo que $\alpha = 0.34$ rad, qual o erro absoluto com que se deve medir h, de valor aproximado 16.7 m, para que o erro absoluto em P não exceda 0.5?

determinação de η?

1.3 Uma corrente eléctrica atravessa uma resistência (R) de 20Ω. A resistência foi medida com um erro relativo que não excede 0.01. A intensidade da corrente (I) é 3.00 ± 0.01 A. Sabendo que a tensão da corrente é dada por $V = RI$, determine um limite superior do erro absoluto no calculo da tensão da corrente. Quantos algarismos significativos garante para o valor calculado da tensão?

1.4 Tomando $\overline{\sqrt{2}} = 1.41$, $\overline{\sqrt{3}} = 1.73$ e $\overline{\pi} = 3.14$:

a) Calcule um limite superior do módulo do erro absoluto que se comete no cálculo de $N = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\pi}$.

b) Com quantas casas decimais exactas devem ser tomados os valores aproximados de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π para obter uma aproximação de N com 3 casas decimais exactas?

1.5 Seja

$$A = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

a área de um hexágono regular de lado a. Seja 1m o valor aproximado para o lado do hexágono. Considerando um valor aproximado de $\sqrt{3}$ com quatro algarismos significativos, com que aproximação se deve medir o lado de modo a que o limite superior do erro absoluto no cálculo da área não exceda 100cm^2?

1.6 Pretende-se calcular a área de um círculo, de raio aproximadamente igual a 25 cm, com erro absoluto que em módulo não excede 0.5 cm^2. Com que aproximação se deve medir o raio do círculo e quantos algarismos significativos se devem usar no valor aproximado de π?

1.7 O rendimento η de um transformador depende da potência de entrada z, da potência de saída a e da perda de potência b, pelas relações:

$$\eta = \frac{a}{z} = \frac{a}{a+b}$$

Podem medir-se z e a a menos de 1%, enquanto que o erro na medida de b pode ser de 20%, sendo η cerca de 0.95. Qual das relações usaria para a

2 Sistemas de equações lineares

2.1 Um engenheiro supervisiona a produção de 3 modelos de automóveis. Para a sua produção, são necessários 3 tipos de materiais: metal, tecido e plástico. As quantidades para produzir um carro de cada modelo são:

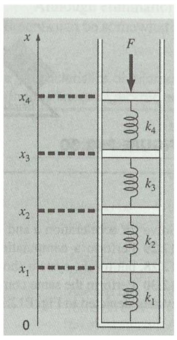
	metal (kg./carro)	tecido(kg./carro)	borracha(Kg./carro)
‘Jeep’	2.71	4.11	2.69
‘coupé’	1.63	2.44	1.64
‘V6’	0.32	0.19	0.36

Existem em *stock*, respectivamente 38.48, 56.69, 38.54 kg. de metal, tecido e borracha. Quantos automóveis podem ser produzidos com a quantidade de *stock* existente?

Resolva o sistema por um método directo e estável usando 4 casas decimais nos cálculos.

2.2 Considere a figura representando um sistema de 4 molas ligadas em série sujeito a uma força F de 2000 Kg. Numa situação de equilíbrio, as equações força-balanço deduzidas definem inter-relações entre as molas:

$$\begin{cases} k_2(x_2 - x_1) & = k_1 x_1 \\ k_3(x_3 - x_2) & = k_2(x_2 - x_1) \\ k_4(x_4 - x_3) & = k_3(x_3 - x_2) \\ F & = k_4(x_4 - x_3) \end{cases}$$



em que $k_1 = 150$, $k_2 = 50$, $k_3 = 75$ e $k_4 = 225$ são as constantes das molas (kg/s^2).

Resolva o sistema pelo método EGPP, usando 5 casas decimais nos cálculos.

2.3 Considere os três sistemas e equações lineares

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule as três soluções de uma só vez, usando um método directo e estável.

2.4 Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 = 2 \\ 0.5x_1 + x_2 + 0.5x_3 = 2 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

a) Use o método da eliminação de Gauss com pivotagem parcial para calcular a sua solução.

b) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes.

2.5 Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.0x_3 = 12.6 \\ 0.6x_1 + 0.9x_2 + 2.8x_3 = 10.8 \\ 2.0x_1 + 1.0x_2 + 1.1x_3 = 4.0 \end{cases}$$

a) Calcule a inversa da matriz dos coeficientes por um método directo e estável.

b) Resolva o sistema por um método directo e estável.

2.6 Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 \\ 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 \end{pmatrix}$$

e o vector $b = (14.6,\ -11.4,\ 14.0,\ -0.9)^T$.

a) Resolva o sistema correspondente por um método directo e estável.

b) Calcule o determinante da matriz A por um método directo e estável.

c) Calcule A^{-1} usando o método de eliminação de Gauss com pivotagem parcial.

3 Equações não lineares

3.1 Localize através do método gráfico os zeros das funções não lineares em x,

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$;

b) $f(x) = \sin x + x - 2$;

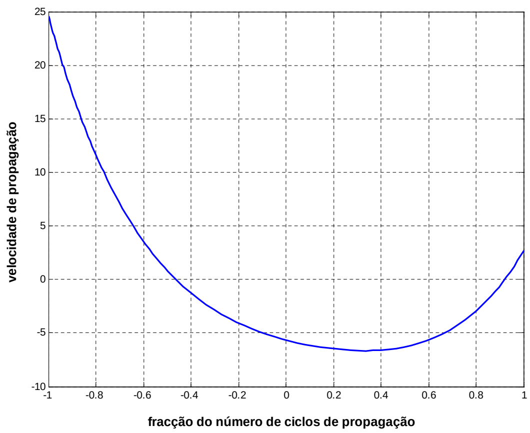
c) $f(x) = e^x + x - 1$;

d) $f(x) = x + \ln x$.

3.2 A função

$$a(x) = 2.02x^5 - 1.28x^4 + 3.06x^3 - 2.92x^2 - 5.66x + 6.08$$

é utilizada num estudo do comportamento mecânico de materiais, representando $a(x)$ o comprimento da fissura e x (> 0) uma fracção do número de ciclos de propagação.



Pretende-se saber para que valores de x a velocidade de propagação da fissura é nula. Utilize um método que não recorre ao cálculo de derivadas, usando no critério de paragem $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ ou no máximo três iterações. Use seis casas decimais nos cálculos.

3.3 Um certo equipamento de 20000 euros vai ser pago durante 6 anos. O pagamento anual é de 4000 euros. A relação entre o custo do equipamento P, o pagamento anual A, o número de anos n e a taxa de juro i é a seguinte:

$$A = P \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

Utilize o método que não recorre à derivada para determinar a taxa de juro utilizada nos cálculos. O valor da taxa de juro pertence ao intervalo $[0.05, 0.15]$. Use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.005$. Use seis casas decimais nos cálculos.

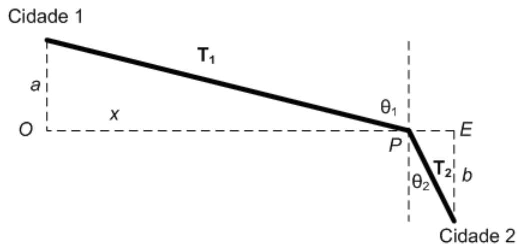
3.4 O volume v de um líquido num tanque esférico de raio r está relacionado com a profundidade h do líquido da seguinte forma:

$$v = \frac{\pi h^2(3r-h)}{3}.$$

a) Calcule, utilizando um método que não recorre ao cálculo de derivadas, a profundidade h, num tanque de raio $r=1$ para um volume de 0.5. Utilize para aproximação inicial o intervalo $[0.25, 0.5]$. Faça 3 iterações e use seis casas decimais nos cálculos.

b) Repita os cálculos, nas mesmas condições da alínea anterior, mas utilizando para aproximação inicial o intervalo $[2.5, 3]$. Comente os resultados e analise a viabilidade da solução encontrada.

3.5 Considere duas cidades localizadas como se mostra na figura. Uma petrolífera pretende construir uma conduta que ligue as duas cidades. Devido às diferenças no terreno, o custo para construir a conduta será C_1 milhões de euros por quilómetro para o troço $\mathbf{T}_1$ e C_2 milhões de euros por quilómetro para o troço $\mathbf{T}_2$. Para tornar a construção mais económica, o ponto P de intersecção dos dois troços deve estar localizado de modo a que $C_1 \text{sen}\theta_1 = C_2 \text{sen}\theta_2$.



(a) Usando a informação da figura e escrevendo esta equação em função de x (a distância de O a P), mostre que se obtém

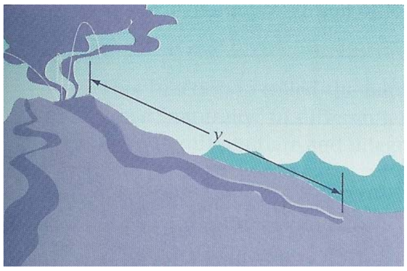
$$C_2^2(L-x)^2(a^2+x^2) = C_1^2x^2(b^2+(L-x)^2),$$

sendo L a distância de O a E.

(b) Resolva a equação considerando $a=3$, $b=1$, $L=4$, $C_1=1$ e $C_2=2$. Utilize o método de Newton e a aproximação inicial $x_1 = 3.75$ e $n_{\max} = 2$. Apresente uma estimativa do erro relativo. Use seis casas decimais nos cálculos.

3.6 A figura representa um vulcão em erupção. A relação entre a distância y (milhas) percorrida pela lava e o tempo t (horas) é dada por:

$$y = 7\ (2 - 0.9^t).$$

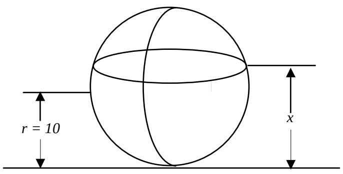


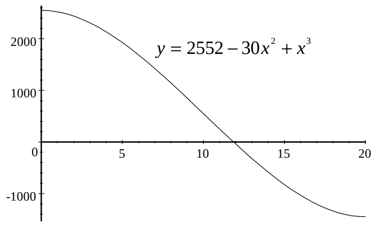
Existe uma aldeia no sopé da montanha a uma distância de $y = 10$. O gabinete de protecção civil advertiu os moradores da aldeia de que a lava chegaria às suas casas em menos de 6 horas. Calcule utilizando um método iterativo que recorre ao cálculo de derivadas o instante de tempo em que a lava do vulcão atinge a aldeia.

Considere $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$ ou no máximo três iterações. Use seis casas decimais nos cálculos.

`Nota:` $(a^x)' = a^x \ln(a)$, para a constante.

3.7 Uma bola esférica de raio $r = 10$ cm feita de uma substância cuja densidade é $\rho = 0.638$, foi colocada num recipiente com água.





Usando o método iterativo de Newton, calcule a distância x da parte submersa da bola sabendo que

$$f(x) \equiv \frac{\pi \left(x^3 - 3x^2 r + 4r^3 \rho\right)}{3} = 0.$$

Pare o processo iterativo quando o critério de paragem for verificado para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$, ou ao fim de três iterações. Use o método de Newton e seis casas decimais nos cálculos.

3.8 Num colector solar, um balanço de energia na placa absorvente e na placa de vidro produz o seguinte sistema de equações não lineares nas temperaturas absolutas da placa absorvente (x_1) e da placa de vidro (x_2)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1^4 + 0.068x_1 - x_2^4 - 0.058x_2 & = & 0.015 \\ x_1^4 + 0.058x_1 - 2x_2^4 - 0.117x_2 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Considerando a seguinte aproximação inicial $(x_1, x_2)_1 = (0.3, 0.3)$, implemente duas iterações do método de Newton. Apresente uma estimativa do erro relativo da aproximação calculada. Use seis casas decimais nos cálculos.

3.9 Considere o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{c} -x_2 + 2x_1^n = 4 \\ -x_2 - x_2^m - x_1 = 8 \end{array}\right.$$

em que n e m são parâmetros.

Considere $m = 3$ e $n = 2$. Resolva o sistema utilizando para aproximação inicial o ponto $x_1 = (1, -2)^T$. Para o critério de paragem use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ (ou no máximo duas iterações). Use seis casas decimais nos cálculos.

3.10 Existe um par de valores que anula as primeiras derivadas parciais da função de duas variáveis

$$f(x, y) = -e^{-x} + y^2 - 2x + 2y.$$

Usando um método iterativo, e a partir da aproximação inicial $(x, y)_1 = (-1, 1)$, determine esse par de modo que a estimativa do erro relativo da aproximação calculada não exceda 0.05 (duas iterações). Use seis casas decimais nos cálculos.

3.11 Usando o método de Newton, determine um dos pontos de intersecção da circunferência

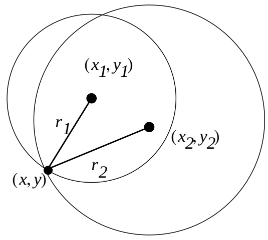
$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

com a hipérbole

$$x_1^2 - x_2^2 = 1.$$

Considere os valores iniciais $(x_1, x_2)_1 = (1.5, 0.5)$ e para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$ ou no máximo duas iterações. Use seis casas decimais nos cálculos.

3.12 Em problemas de navegação, é necessário encontrar a posição de um ponto (x, y), através dos valores das distâncias r_1 e r_2 a dois pontos de posição conhecida (x_1, y_1) e (x_2, y_2), como mostra a figura.



a) Formule o problema como um sistema de equações não lineares em função das coordenadas do ponto (x, y).

b) Considerando $(x_1, y_1) = (10, 10)$, $(x_2, y_2) = (10, -10)$, $r_1 = 14$ e $r_2 = 16$, calcule as coordenadas do ponto (x, y) através do método iterativo de Newton considerando a aproximação inicial $(x, y)_1 = (0, 0)$. Apresente o valor ao fim de duas iterações com a correspondente estimativa do erro relativo. Use seis casas decimais nos cálculos.

3.13 A concentração de um poluente num lago depende do tempo t e é dada por

$$C(t) = 70e^{\beta t} + 20e^{\omega t}.$$

Efectuaram-se duas medições da concentração que foram registadas na seguinte tabela

t	1	2
$C(t)$	27.5702	17.6567

Utilize o método de Newton para determinar β e ω. Considere a aproximação inicial $(\beta, \omega)_1 = (-1.9, -0.15)$, efectue duas iterações e apresente uma estimativa do erro relativo.

4 Polinómio interpolador de Newton

4.1 Dada a tabela de valores de uma função $f(x)$

x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.8	1.0
$f(x_i)$	0	1	1	2	2	3	3	4

a) Pretende-se aproximar $f(0.6)$ usando um polinómio de grau 3. Use a fórmula interpoladora de Newton baseada em diferenças divididas.

b) Estime o erro de truncatura cometido na alínea anterior.

c) Estime $f(0.6)$ usando todos os pontos da tabela.

4.2 A tabela seguinte apresenta a população dos Estados Unidos da América (em milhões) de 1940 e 1980.

ano	1940	1950	1960	1970	1980
população	132.165	151.326	179.323	203.302	226.542

a) Construa o polinómio interpolador de Newton de grau 4 para estimar a população no ano 1965.

b) A população em 1930 foi 123.203. Qual a precisão do valor calculado na alínea a)?

4.3 Os registos efectuados numa linha de montagem são os seguintes:

n^o de unidades	1	3	4	6	7	10
horas necessárias	2	3	4	5	6	10

a) Tendo sido recebidos pedidos para a montagem de 2 unidades e 8 unidades, use interpolação cúbica para estimar o tempo (em horas) necessário para satisfazer cada pedido.

b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido na alínea anterior para cada um dos pedidos.

4.4 Considere a seguinte tabela de uma função polinomial

x	-1	0	1	2	3	4
$p(x)$	-1	-3	-1	5	15	29

Sem recorrer à expressão analítica de $p(x)$:

a) mostre que $p(x)$ é um polinómio interpolador de grau 2.

b) determine $p(10)$.

4.5 Considere a tabela de valores da função $f(x)$

x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	a	2	4	b

Determine a e b por forma a que o polinómio interpolador de Newton que aproxima f seja de grau 3, com coeficiente do termo de maior grau igual à unidade e coeficiente do termo de menor grau igual a zero. Escreva o polinómio.

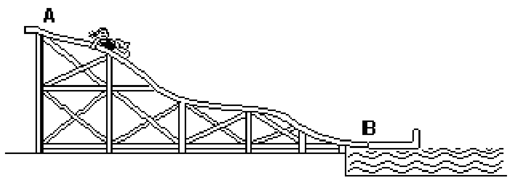
5 Integração numérica

5.1 Considere o erro de truncatura da fórmula do rectângulo, baseada em a, de Newton-Cotes

$$e_R = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta), \quad \eta \in [a, b]$$

para aproximar o integral $\int_a^b f(x)dx$. Deduza a fórmula do erro de truncatura da correspondente fórmula composta.

5.2 A figura mostra uma pessoa que desliza, sem atrito, do alto de um escorrega (ponto A), acoplando-se a um carrinho que se encontra em repouso no ponto B. A partir deste instante, a pessoa e o carrinho movem-se juntos na água até parar.



a) Sabendo que a velocidade do conjunto pessoa-carrinho imediatamente após o acoplamento é 4 m/s e que a velocidade, v, em cada instante t na água é dada pela tabela seguinte, calcule (usando todos os pontos da tabela) a distância percorrida na água pelo conjunto pessoa-carrinho até parar.

t	0.0	0.3	0.6	0.8	1.0	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2
v	4.0	3.9	3.7	3.5	3.3	2.9	2.5	2.0	1.25	0.75	0.0

b) Estime o erro de truncatura cometido na alínea anterior.

c) Seleccione o maior número possível de pontos da tabela por forma a obter um conjunto de pontos igualmente espaçados, e calcule a mesma distância usando uma única fórmula composta de integração no intervalo $[0, 4.2]$.

5.3 Na tabela seguinte são apresentados registos pontuais das vendas de um produto que foi lançado no início do ano de 2009. A variável x representa a semana (de 2009).

x_i	1	2	3	4	5	7	9	11	13	15	16	17	18	19
$v(x_i)$	10	9	8	8	8	6	5	5	4	4	4	4	3	1

a) Calcule a melhor aproximação ao integral $\int_1^{19} v(x)dx$, com base em toda a informação fornecida na tabela sobre $v(x)$.

b) Estime o erro de truncatura cometido com a aproximação obtida na alínea anterior no intervalo $[5, 15]$.

c) Seleccione o maior número possível de pontos da tabela para calcular uma aproximação ao integral da alínea a), usando só uma fórmula composta de integração no intervalo $[1, 19]$.

5.4 Uma corrida de *dragsters* tem duas fases distintas: na primeira fase, a mais curta, o movimento do carro é perfeitamente não determinístico, dependendo das derrapagens e da forma como o condutor consegue dominar o carro. Na segunda fase, o carro tem um movimento muito rápido, cuja aceleração está perfeitamente definida.

Considere-se a prova do condutor Don Nase de duração 7.5 s. Na primeira fase os valores da aceleração em cada instante encontram-se na tabela:

t_i	0	0.5	1	1.5
$a(t_i)$	0	0.35	0.55	0.9

Na segunda fase da corrida a aceleração é definida pela seguinte expressão:

$$a(t) = 0.5t^2 - 0.15t \quad \text{para} \quad t \in [1.5, 7.5].$$

a) Estime a velocidade na primeira fase da corrida, utilizando a fórmula de integração mais adequada.

b) Estime a velocidade na segunda fase da corrida, utilizando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura em valor absoluto inferior a 0.3.

c) Estime o erro de truncatura cometido na alínea a).

5.5 A resposta de um transdutor a uma onda de choque causada por uma explosão é dada pela função $F(t) = 8e^{-t\frac{I(a)}{\pi}}$ para $t \geq a$, em que

$$I(a) = \int_1^2 f(x,a)dx \qquad \text{com } f(x,a) = \frac{e^{ax}}{x}.$$

Calcule $I(1)$ usando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura inferior a 0.05.

5.6 Considere a seguinte função dada pela tabela

x_i	1	1.15	1.3	1.45	1.6	1.75	1.9
$f(x_i)$	a	16.8	19.4	22	b	27.6	30.7

e seja $I = \int_1^{1.9} f(x)\,dx$. Ao utilizar as fórmulas compostas de Simpson e dos três oitavos foram obtidas as seguintes aproximações a I, respectivamente $S(0.15) = 20.005$ e $3/8(0.15) = 20.030625$. Determine os valores de a e b. Use 6 casas decimais nos cálculos.

5.7 Considere a seguinte tabela da função $f(x)$

x_i	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	0.0000	0.8415	0.9093

a) Determine um valor aproximado de $I = \int_0^2 f(x)dx$, usando a fórmula composta do trapézio com $h = 1$.

b) Sabendo que um valor aproximado de I, usando a fórmula composta do trapézio com $h = 0.5$ é $T(0.5) = 1.2667$, determine uma nova aproximação de I, usando a fórmula composta de Simpson com $h = 0.5$.

5.8 Admita que, para acções de uma determinada empresa cotada na bolsa de Nova Iorque, o lucro anual por acção, depois de impostos, é representado por x (US \$), uma variável aleatória que tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{27}(9x - 6x^2 + x^3), & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{para outros valores de } x. \end{cases}$$

a) Calcule, numericamente, a probabilidade $PROB$ do lucro anual ser um valor menor do que 1 ou maior do que 2.5 ($PROB = P(x \leq 1) + P(x \geq 2.5)$).

Use a fórmula composta do trapézio para calcular essa probabilidade por forma a que o erro total de truncatura seja inferior a 0.02. Assuma que os erros das duas parcelas são iguais.

Nota: $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

b) Relativamente à primeira parcela para o cálculo de $PROB$, se tivesse usado a fórmula composta de Simpson com o mesmo valor de h que usou na alínea anterior, iria obter um erro menor, ou seja uma melhor aproximação ao valor de $P(x \leq 1)$? Justifique a resposta.

6 Aproximação dos mínimos quadrados

6.1 Um carro inicia a sua marcha num dia frio de inverno e um aparelho mede o consumo de gasolina verificado no instante em que percorreu x Km. Os resultados obtidos foram:

x (Km)	0	1.25	2.5	3.75	5	6.25
$f(x)$ (l Km^{-1})	0.260	0.208	0.172	0.145	0.126	0.113

Construa um modelo quadrático, para descrever o consumo de gasolina em função da distância percorrida, usando a técnica dos mínimos quadrados.

6.2 A tabela seguinte contém os registos efectuados dos valores médios da radiação solar numa região de Portugal:

mês (x_i)	J(1)	F(2)	M(3)	A(4)	M(5)	J(6)	J(7)	A(8)	S(9)	O(10)	N(11)	D(12)
Radiação	122	-	188	-	-	270	-	-	-	160	-	120

Ajuste o modelo

$$M(x) = c_1 x + c_2 \text{sen}(x)$$

aos valores da tabela, no sentido dos mínimos quadrados, e use o modelo encontrado para prever a radiação média no mês de Agosto.

6.3 A resistência de um certo fio (de uma certa substância), $f(x)$, varia com o diâmetro desse fio, x. A partir de uma experiência registaram-se os seguintes valores:

x_j	1.5	2.0	3.0	4.0
f_j	4.9	3.3	2.0	1.5

Foram sugeridos os seguintes modelos para ajustar os valores de $f(x)$, no sentido dos mínimos quadrados:

i uma recta

ii o modelo linear $M(x, c_1, c_2) = \dfrac{c_1}{x} + c_2 x$

a) Calcule a recta.

b) Calcule o modelo $M(x)$.

c) Qual dos modelos escolheria? Justifique a sua resposta.

6.4 Um sistema simples de comunicações pode ser representado por um transmissor e um receptor. O transmissor recebe um símbolo, m, e modula o sinal a transmitir, $s_m(t)$, num canal com ruído. O receptor recebe o sinal modulado com o ruído adicionado, $y(t)$, e prevê qual foi o símbolo transmitido. Neste sistema simples suponha que o transmissor apenas transmite dois sinais

$$s_1(t) = 0.2\alpha_1 \sin(20\pi t) + 0.2\beta_1 \sin(22\pi t)$$
$$s_2(t) = 0.2\alpha_2 \sin(20\pi t) + 0.2\beta_2 \cos(20\pi t)$$

a) Transmitindo o primeiro sinal ($s_1(t)$) e fazendo uma análise ao transmissor, observaram-se os seguintes valores:

t_i	0.11	0.52	0.79
s_{1i}	-3.1127	0.0625	3.0351

Determine os valores de α_1 e β_1, no sentido dos mínimos quadrados.

b) Suponha que $\alpha_1 = -10$, $\beta_1 = -10$, $\alpha_2 = 10$ e $\beta_2 = 10$. Sabendo que o receptor recebeu o sinal indicado na tabela seguinte, determine qual foi o sinal transmitido (isto é, aquele que se ajusta melhor ao sinal recebido, no sentido dos mínimos quadrados).

t_i	0.1	0.45	0.63
$y(t_i)$	1.9963	-2.0100	1.2742

6.5 Uma companhia de gás sugeriu um modelo do tipo

$$M(x; c_1, c_2) = c_1 x^2 + c_2 \frac{1}{x}$$

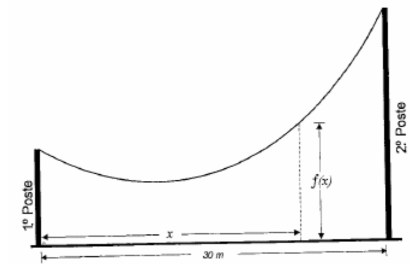
para estimar o consumo de gás em qualquer altura do ano. No sentido dos mínimos quadrados e considerando a amostra de 6 pontos,

mês	1	3	4	6	9	12
consumo de gás	20.0	7.5	6.5	7.0	10.0	A

a) Comece por apresentar o sistema de equações lineares que deve construir para calcular os parâmetros c_1 e c_2, em função de A.

b) Considerando $A = 15.0$ apresente o modelo sugerido.

6.6 Um fio está suspenso entre dois postes. A distância entre os postes é de 30 metros. A distância do fio ao solo $f(x)$, em metros, depende de x como mostra a figura. A tabela mostra 5 valores conhecidos de f.



x_i	0	8	12	16	20
$f(x_i)$	15.43	10.2	10.2	11.86	15.43

a) Calcule a parábola que melhor se ajusta aos valores de $f(x_i)$ no sentido dos mínimos quadrados e determine a distância do fio ao solo quando $x = 10$.

b) A partir da parábola da alínea anterior, verifique se $x = 10$ é o ponto em que a distância do fio ao solo é mínima.

c) Determine os coeficientes c_1 e c_2 do modelo

$$M(x; c_1, c_2) = c_1 e^{1-0.1x} + c_2 e^{0.1x-1}$$

que melhor se ajusta à função $f(x)$ de acordo com

$$min_{c_1,c_2} \sum_{i=1}^{5} (f(x_i) - M(x_i; c_1, c_2))^2.$$

6.7 Pretende-se ajustar o modelo linear

$$M(x; c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{-x} + c_2 x + c_3$$

à função $f(x)$ dada pela tabela

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1.4	0	0.75	2.3

no sentido dos mínimos quadrados. Determine os coeficientes do modelo apresentado. Apresente uma estimativa para $f(0.5)$.

6.8 Considere as seguintes observações relativas à função f

x_i	-3	0	2	5
f_i	-10	a	0	b

Determine a e b sabendo que a aproximação polinomial de grau 1 dos mínimos quadrados é $p_1(x) = -4 + 2x$. Use 6 casas decimais nos cálculos.

7 Optimização não linear sem restrições

7.1 Dada a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ calcule os seus pontos estacionários e classifique-os.

7.2 Na cidade de Ulam Bator surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença foi descrita pela fórmula

$$P(t) = e^{0.4t - 0.01t^2}$$

onde $P(t)$ representa a percentagem de pessoas doentes e t é o tempo em dias.

Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule o pior momento da epidemia identificando a percentagem de doentes nesse momento. Inicie o processo iterativo com $t_1 = 30$ dias. Considere ainda $\delta = 2$, $M = 0.05$ e $\varepsilon = 0.1$ (duas iterações). Use 4 casas decimais nos cálculos.

7.3 Uma empresa precisa de usar x_1 horas de equipamento ao preço (unitário) de 6 unidades monetárias (u.m.) e x_2 horas de mão-de-obra ao preço (unitário) de 4 u.m. para colocar no mercado um certo número fixo de produtos. As horas utilizadas de equipamento e mão-de-obra verificam a relação

$$x_1^2 + x_1 x_2 = 2500.$$

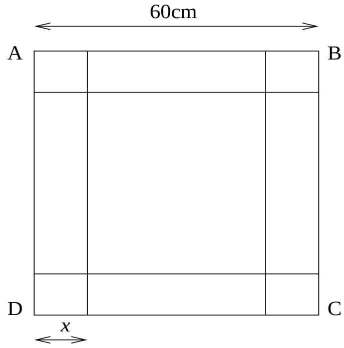
Calcule x_1 e x_2 de modo a minimizar os custos da empresa.

a) Comece por formular esta situação como um problema de optimização sem restrições de uma só variável (por exemplo, em função de x_1).

b) Resolva o problema resultante usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática). Na implementação do DSC inicie o processo iterativo com a aproximação inicial $x_1 = 50$. Use $\delta = 5$, $\varepsilon = 0.05$ e $M = 0.1$.

   Com a aproximação calculada identifique os valores obtidos para as duas variáveis e o custo mínimo.

7.4 $[ABCD]$ representa uma cartolina quadrada de lado 60 cm. Pretende-se montar uma caixa de volume máximo cortando em cada canto um quadrado de lado x, como mostra a figura.

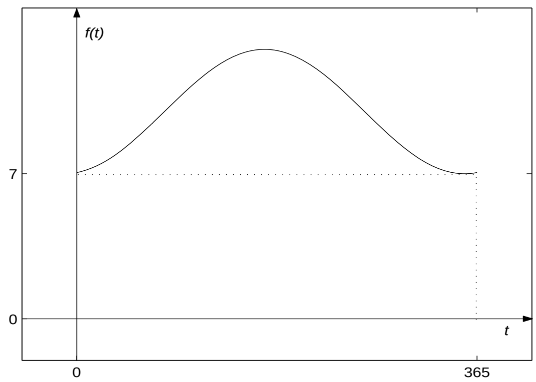


Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule x. Use duas casas decimais nos cálculos e inicie o processo iterativo com $x_1 = 5$. Considere ainda $\delta = 1$, $M = 0.5$ e $\varepsilon = 0.5$ (duas iterações).

7.5 A função

$$f(t) = 10 + 3\,sen(\frac{2\pi}{365}(t - 80))$$

dá o número de horas com luz do dia numa certa região do país.



O dia 1 de Janeiro corresponde a $t = 0$. Determine o dia do ano (t) em que o número de horas com luz do dia é máximo, usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática). Use 2 casas decimais nos cálculos, $\pi = 3.14$ e inicie o processo iterativo com $t_1 = 200$. Considere ainda $\delta = 10$, $M = 0.1$ e $\varepsilon = 2$ (duas iterações). Use radianos nos cálculos.

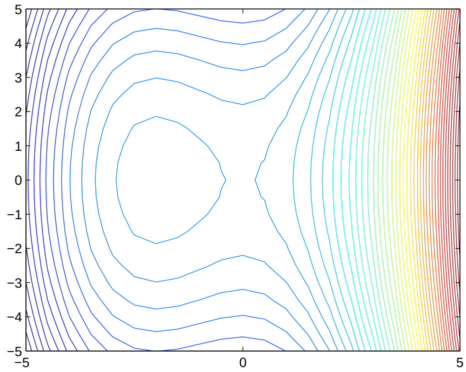
7.6 Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_1)^2 + x_1 x_2$$

verifique se tem maximizantes, minimizantes e/ou pontos sela.

7.7 Considere a função

$$f\left(x,y\right)=3x^2-y^2+x^3$$



Mostre que a função dada tem um máximo local em $(-2,0)$; tem um ponto sela em $(0,0)$; e não tem mínimos.

7.8 Dada a função $f:R^3\rightarrow R$ definida por

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=5x_1^2+2x_2^2+x_3^4-32x_3+6x_1x_2+5x_2$$

verifique que ela tem apenas um ponto estacionário. Classifique-o.

7.9 Mostre que qualquer ponto da linha $x_2-2x_1=0$ é um mínimo de $f:R^2\rightarrow R$ definida por

$$f\left(x_1,x_2\right)=4{x_1}^2-4x_1x_2+x_2^2.$$

7.10 Considere a função

$$f(x_1,x_2)=-\sin(x_1-1)-x_2^4.$$

Implemente, no máximo, duas iterações do método de segurança de Newton para determinar o máximo da função $f(x_1,x_2)$. Considere $\eta=10^{-6}$, $\mu=10^{-6}$, $\varepsilon=1$ e $x^{(1)}=(1,1)^T$.

7.11 A soma de três números (x_1,x_2 e x_3) positivos é igual a 40. Determine esses números de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima.

Use a relação da soma para colocar x_3 em função das outras 2 variáveis. Formule o problema como um problema de optimização sem restrições.

A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (10, 10)$, use o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$) para calcular esses números, considerando no critério de paragem os seguintes valores $\varepsilon = 0.001$ (duas iterações). Na condição de Armijo tome $\mu = 0.001$.

7.12 Uma empresa fabrica e comercializa dois tipos de computadores portáteis. O custo de fabrico de cada um deles decresce à medida que o número de unidades produzidas aumenta e é dado pelas seguintes relações empíricas:

$$c_1 = 5 + \frac{1500}{x_1} \qquad c_2 = 7 + \frac{2500}{x_2},$$

em que x_1 e x_2 são o número de unidades de cada um dos portáteis produzidos. O custo de reparação e manutenção do equipamento usado para a produção depende do número total de portáteis produzidos e é dado pela seguinte equação:

$$r = (x_1 + x_2)[0.2 + 2.3 \times 10^{-5}(x_1 + x_2) + 5.3 \times 10^{-9}(x_1 + x_2)^2].$$

O preço de venda dos computadores é tanto menor quanto maior for o número de unidades produzidas, de acordo com as seguintes relações:

$$p_1 = 15 - 0.001x_1 \qquad p_2 = 25 - 0.0015x_2$$

a) Formule o problema de optimização que consiste em determinar quantas unidades de cada computador a firma deve produzir de modo a maximizar os lucros.

b) Desprezando os custos de reparação e manutenção ($r = 0$), resolva o problema usando o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$). Considere a seguinte aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (20, 30)$ e $\varepsilon = 0.001$. Na condição de Armijo tome $\mu = 0.001$.

c) Com base na aproximação calculada na alínea anterior ao número de computadores produzidos, a empresa terá lucro?

7.13 Três estações eléctricas vão fornecer vão fornecer a uma certa região da forma mais económica possível. Os custos individuais de operação de cada uma das estações são dados por

$$f_1 = 0.1 + 0.25x$$
$$f_2 = 0.08 + 0.12y + 0.00125y^2$$
$$f_3 = 0.05 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3$$

em que x, y e z são as energias fornecidas pelas três estações (em MWatt). Determine os valores de x, y e z que minimizam o custo total a ser fornecida for de 100 MWatt, recorrendo ao método de segurança de Newton.

Como valores iniciais use $(x, y)^{(1)} = (30, 50)$, no critério de paragem considere $\varepsilon = 0.05$ e tome $\eta = 0.0001$. Como estratégia de procura unidimensional utilize o critério de Armijo com $\mu = 0.01$. Use a relação relacionada com a energia a fornecer para eliminar uma das variáveis, por exemplo, $x = 100 - y - z$.

7.14 Numa situação monopolista, o rendimento de uma empresa face à venda de um produto ou serviço depende do nível de produção z. O rendimento é uma função crescente de z mas tende em direcção a uma assímptota assim que o mercado fica saturado.

Considere a seguinte função rendimento

$$R(z) = z^2/(1 + z^2)$$

que depende da produção z dada por $z = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, em que x_1 representa o capital e x_2 o trabalho.

Supondo que a função lucro é dada por

$$\pi(x_1, x_2) = R(z) - 0.04x_1 - 0.06x_2$$

calcule o lucro máximo que a empresa pode ter. Use o método quasi-Newton (com fórmula BFGS). Como aproximação inicial considere o ponto $(2, 1)$. Use na paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.1$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

7.15 Suponha que pretendia representar um número A positivo na forma de um produto de quatro factores positivos x_1, x_2, x_3 e x_4. Para $A = 2401$, determine esses factores de tal forma que a sua soma seja a menor possível.

Formule o problema como um problema de optimização sem restrições em função das 3 variáveis x_1, x_2 e x_3.

A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2, x_3)^{(1)} = (6, 7, 5)$, use o método quasi-Newton (com fórmula DFP), para calcular esses factores. Na paragem do processo iterativo use $\varepsilon = 0.1$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

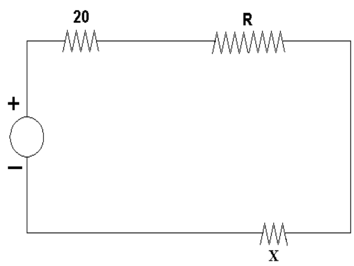
7.16 O lucro, em milhares de euros, da colocação de um sistema eléctrico é dado por

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = 20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$$

em que x_1 e x_2 designam, respectivamente, o custo da mão de obra e do material. Calcule o lucro máximo usando o método quasi-Newton baseado na fórmula DFP, considerando na paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.0001$. Tome a seguinte aproximação inicial $(0, 0)$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

7.17 Considere um circuito eléctrico em que existem duas resistências variáveis, R e X. O valor médio da energia do circuito é dado por

$$P = \frac{10^4 R}{(R+20)^2 + X^2}.$$



Determine os valores de R e X para os quais se obtém uma energia de saída máxima. Use o método quasi-Newton (fórmula DFP) e os valores iniciais $(R, X)^{(1)} = (10, 5)$. Considere $\mu = 0.001$ e $\varepsilon = 0.5$.

7.18 Calcule o máximo da seguinte função não diferenciável

$$f(x_1, x_2) = -|x_1x_2| - x_2^2$$

usando o método de Nelder-Mead. Inicie o processo iterativo com o seguinte simplex:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon = 0.5$ ou $n_{\max} = 4$.

7.19 Calcule o mínimo da função $f(x)$ definida por

$$f(x_1, x_2) = \max\left((x_1-1)^2, x_1^2 + 4(x_2-1)^2\right)$$

implementando o método de Nelder-Mead, tomando para conjunto inicial os vectores

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

e $\varepsilon = 0.5$.

7.20 Considere um sistema de duas molas em que é aplicada uma força de deformação P com duas componentes P_1 e P_2. Pretende-se determinar os deslocamentos x_1 e x_2 das molas que minimizam a energia potencial total EP, definida pela seguinte expressão:

$$EP(x_1, x_2) = \frac{1}{2}K_1\left(\sqrt{x_1^2 + (l_1 - x_2)^2} - l_1\right)^2 + \frac{1}{2}K_2\left(\sqrt{x_1^2 + (l_2 - x_2)^2} - l_2\right)^2 - P_1x_1 - P_2x_2.$$

Sabendo que as características do sistema são: $l_1 = 10$, $l_2 = 10$, $K_1 = 8$, $K_2 = 1$, $P_1 = 5$ e $P_2 = 5$, resolva o problema através do método de Nelder-Mead com $\varepsilon = 0.5$ (ou duas iterações). Considere os seguintes pontos iniciais: $(5, 2)$, $(3.25, 2.5)$ e $(0, 0)$.

Parte II

Resolução

1 Erros e números

1.1 Começa-se por estabelecer o erro absoluto cometido na representação de cada variável, bem como o intervalo onde esse número está compreendido.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \delta_\pi & = & 0.00005 \\ \delta_{\sqrt{3}} & = & 0.0005 \\ \delta_{\sqrt{2}} & = & 0.00005 \end{array}\right. \qquad \text{e} \qquad I = \left\{\begin{array}{lclcl} 3.14155 & \leq & \pi & < & 3.14165 \\ 1.7315 & \leq & \sqrt{3} & < & 1.7325 \\ 1.41415 & \leq & \sqrt{2} & < & 1.41425. \end{array}\right.$$

De seguida calculam-se as derivadas parciais da função f em ordem a cada uma das variáveis envolvidas.

$$\frac{\partial f}{\partial \pi} = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{2} - \pi^2\right)}{\left(\pi^2 + \sqrt{2}\right)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\pi^2 + \sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \sqrt{2}} = -\frac{2\pi\sqrt{3}}{\left(\pi^2 + \sqrt{2}\right)^2}$$

Calcula-se um majorante das derivadas parciais, tendo em conta o intervalo onde cada uma das variáveis é definida. No caso da derivada parcial em ordem a π aparece uma diferença no numerador, que se pretende que seja o maior possível em módulo. Por esta razão, a diferença deve ser também a maior possível em módulo. Para que isso aconteça, a parcela de maior valor, π^2, deve ser o maior possível, bem como deve acontecer o contrário com a parcela de menor valor, $\sqrt{2}$. Nos restantes casos, basta garantir os maiores valores das variáveis em numerador e os menores em denominador.

$$M_\pi = \left|\frac{2 \times 1.7325\left(1.41415 - 3.14165^2\right)}{\left(3.14155^2 + 1.41415\right)^2}\right| = 0.2301293854$$

$$M_{\sqrt{3}} = \left|\frac{2 \times 3.14165}{3.14155^2 + 1.41415}\right| = 0.5568580292$$

$$M_{\sqrt{2}} = \left|-\frac{2 \times 3.14165 \times 1.7325}{\left(3.14155^2 + 1.41415\right)^2}\right| = 0.08550163496.$$

Pela fórmula fundamental dos erros vem

$$\delta_f \leq M_\pi \delta_\pi + M_{\sqrt{3}}\delta_{\sqrt{3}} + M_{\sqrt{2}}\delta_{\sqrt{2}} =$$

$$= 0.2301293854 \times 0.00005 + 0.5568580292 \times 0.0005 + 0.08550163496 \times 0.00005 =$$

$$= 2.942105656 \times 10^{-4}$$

Arredonda-se o erro absoluto por excesso, de forma a que o primeiro dígito do erro seja 5,

$$\delta_f \leq 0.0005,$$

e calcula-se o valor aproximado de f,

$$f(\pi, \sqrt{3}, \sqrt{2}) \approx 0.964431631.$$

Alinham-se os dois valores, já na mesma base, pelo ponto decimal

$$\begin{aligned} f(\pi, \sqrt{3}, \sqrt{2}) = &\quad 0.964\mathbf{4}31631 \\ \delta_f \leq &\quad 0.000\mathbf{5} \end{aligned}$$

e o número de algarismos significativos é 3. Ou seja, $f(\pi, \sqrt{3}, \sqrt{2}) = 0.964$.

1.2 Começa-se por estabelecer o erro absoluto cometido na representação de cada variável, bem como o intervalo onde esse número está compreendido. Neste caso não se conhece δ_h, no entanto pode estabelecer-se um intervalo com base no valor aproximado conhecido. Assim,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \delta_\alpha & = & 0.005 \\ \delta_h & = & ? \end{array} \right. \quad \text{e} \quad I = \left\{ \begin{array}{lcccl} 0.335 & \leq & \alpha & < & 0.345 \\ 16.65 & \leq & h & < & 16.75. \end{array} \right.$$

De seguida, calculam-se as derivadas parciais de P em ordem a cada uma das variáveis envolvidas, α e h.

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = (\cos\alpha - \sin\alpha)h \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial h} = \sin\alpha + \cos\alpha$$

Calcula-se um majorante das derivadas parciais, tendo em conta o intervalo onde cada uma das variáveis é definida. Uma vez que α pertence ao primeiro quadrante, a função $\sin\alpha$ é crescente e a função $\cos\alpha$ é decrescente. No cálculo de M_α, para maximizar a diferença, a maior parcela toma o maior valor possível, que neste caso corresponde a $\cos\alpha \approx 0.94$, e o contrário para a menor parcela, que corresponde a $\sin\alpha \approx 0.33$. Tendo estas considerações em conta, calcula-se um majorante das derivadas parciais, tendo em atenção o intervalo onde cada uma das variáveis é definida.

$$M_\alpha = |(\cos(0.335) - \sin(0.335)) \times 16.75| = 10.311989$$

$$M_h = |\sin(0.345) + \cos(0.335)| = 1.282607$$

Pela fórmula fundamental dos erros vem

$$\delta_P \leq \delta_\alpha M_\alpha + \delta_h M_h.$$

Pretende-se que $\delta_P \leq 0.5$, ou seja, $\delta_\alpha M_\alpha + \delta_h M_h \leq 0.5$.

$$0.005 \times 10.311989 + \delta_h \times 1.282607 \leq 0.5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \delta_h \leq 0.349632.$$

1.3 Começa-se por estabelecer o erro absoluto cometido na representação de cada variável, bem como o intervalo onde esse número está compreendido. Uma vez que o erro relativo da resistência não excede 0.01, então

$$\frac{\delta_R}{R} = 0.01 \Leftrightarrow \delta_R = 0.2.$$

$$\begin{cases} \delta_R & = & 0.2 \\ \delta_I & = & 0.01 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad I = \begin{cases} 19.8 & \leq & R & < & 20.2 \\ 2.99 & \leq & I & < & 3.01 \end{cases}$$

De seguida calculam-se as derivadas parciais da função $V = RI$ em ordem a cada uma das variáveis envolvidas.

$$\frac{\partial V}{\partial R} = I, \quad \frac{\partial V}{\partial I} = R.$$

Calcula-se um majorante das derivadas parciais, tendo em conta o intervalo onde cada uma das variáveis é definida. No caso da derivada parcial em ordem a R, para que seja o maior possível em módulo, I deve ser o maior possível. Enquanto que no caso da derivada parcial em ordem a I, para que seja o maior possível em módulo, R deve ser o maior possível. Assim,

$$M_R = 3.01, \quad M_I = 20.2.$$

Pela fórmula fundamental dos erros vem

$$\delta_V \leq \delta_R M_R + \delta_I M_I =$$

$$= 0.2 \times 3.01 + 0.01 \times 20.2 = 0.804 \times 10^0.$$

Arredonda-se o erro absoluto por excesso, de forma a que o primeiro dígito do erro seja 5,

$$\delta_V \leq 0.5 \times 10^1,$$

e calcula-se o valor aproximado de V,

$$V = RI \approx 20 \times 3 = 60.$$

Alinham-se os dois valores, já na mesma base, pelo ponto decimal

$$\begin{array}{rl} V = & 6.\mathbf{0} \times 10^1 \\ \delta_V \leq & 0.\mathbf{5} \times 10^1 \end{array}$$

Logo, garante-se para o cálculo de V um algarismo significativo. O valor calculado para a tensão é

$$V = RI = 0.6 \times 10^2.$$

1.4 a) Assumindo que $x = \overline{\sqrt{2}}$, $y = \overline{\sqrt{3}}$ e $z = \overline{\pi}$, começa-se por estabelecer o erro absoluto cometido na representação de cada uma destas variáveis, bem como o intervalo onde esse número está compreendido.

$$\begin{cases} \delta_x & = & 0.005 \\ \delta_y & = & 0.005 \\ \delta_z & = & 0.005 \end{cases} \quad \text{e} \quad I = \begin{cases} 1.405 & \leq & x & < & 1.415 \\ 1.725 & \leq & y & < & 1.735 \\ 3.135 & \leq & z & < & 3.145 \end{cases}$$

De seguida, calculam-se as derivadas parciais da função $f = \frac{y-x}{z}$ em ordem a cada uma das variáveis envolvidas.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x-y}{z^2}.$$

Para todas as derivadas parciais, quanto menor for o valor de z em módulo, maior será o seu valor em módulo. Na derivada parcial em ordem a z, tem ainda que se maximizar o numerador. Para isso, a diferença $x - y$ deve ser a maior possível em módulo, o que acontece quando o maior valor (y) toma o maior possível e o menor valor (x) toma o menor valor possível. Logo,

$$M_x = \left| -\frac{1}{3.135} \right| = 0.3189792663,$$
$$M_y = \left| \frac{1}{3.135} \right| = 0.3189792663,$$
$$M_z = \left| \frac{1.405 - 1.735}{3.135^2} \right| = 0.03357676488$$

Pela fórmula fundamental dos erros vem

$$\begin{aligned} \delta_f &\leq \delta_x M_x + \delta_y M_y + \delta_z M_z = \\ &= 0.005 \times 0.3189792663 + 0.005 \times 0.3189792663 + 0.005 \times 0.03357676488 \\ &= 0.003021908 \\ &\leq 0.5 \times 10^{-2}. \end{aligned}$$

b) Dado que $\delta_f \leq 0.0005$, assumindo $\delta_x = \delta_y = \delta_z = \delta$, vem

$$\delta \times (M_x + M_y + M_z) \leq 0.0005 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \leq \frac{0.0005}{0.671535297} = 0.0007445625001.$$

Logo, são necessárias pelo menos 3 casas decimais ($\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0.0005 \leq \delta$).

1.5 O valor aproximado de $\sqrt{3}$, com quatro algarismos significativos, é de $\sqrt{3} = 1.732$. Pretende-se saber qual a aproximação que se deve tomar na medição do valor de a (que tem um valor aproximado de $a = 1$m), de tal forma que o limite superior do erro δ_A não ultrapasse $100\text{cm}^2 = 0.01\text{m}^2$. Tal implica conhecer um limite superior para o valor de δ_a que se desconhece. De seguida, pode-se estabelecer o erro absoluto cometido na representação de das variáveis, bem como o intervalo onde esse número está compreendido.

$$\begin{cases} \delta_{\sqrt{3}} & = & 0.0005 \\ \delta_a & = & ? \end{cases} \qquad \text{e} \qquad = \begin{cases} 1.7315 & \leq & \sqrt{3} & < & 1.7325 \\ 1 - \delta_a & \leq & a & < & 1 + \delta_a \end{cases}$$

De seguida calculam-se as derivadas parciais da expressão de A em ordem a cada uma das variáveis envolvidas.

$$\frac{\partial A}{\partial \sqrt{3}} = \frac{3a^2}{2}, \qquad \frac{\partial A}{\partial a} = 3a\sqrt{3}.$$

Logo, os majorantes das derivadas parciais em relação a cada uma das variáveis, serão

$$M_{\sqrt{3}} = \frac{3(1+\delta_a)^2}{2} \text{ e } M_a = 3(1+\delta_a) \times 1.7325.$$

Pela fórmula fundamental dos erros vem

$$\begin{aligned} \delta_{\sqrt{3}} M_{\sqrt{3}} + \delta_a M_a &\leq 0.01 \\ 0.0005 \times \frac{3(1+\delta_a)^2}{2} + \delta_a \times 3(1+\delta_a) \times 1.7325 &\leq 0.01 \\ \delta_a &\leq 0.00177603 \end{aligned}$$

NOTA: despreza-se a parte negativa da solução.

Logo, deve medir-se o lado com um erro inferior a 0.00177603 (4 algarismos significativos $\Rightarrow \delta_a = 0.0005 \leq 0.00177603$).

1.6 Começa-se por estabelecer o erro absoluto cometido na representação de cada variável, bem como o intervalo onde esse número está compreendido. Sabendo que a área do círculo é

$$A = \pi r^2,$$

$$\begin{cases} \delta_r &= 0.5 \\ \delta_\pi &= ? \end{cases} \quad \text{e} \quad I = \begin{cases} 24.5 & \leq & r & < & 25.5 \\ 3.135 & \leq & I & < & 3.145 \end{cases}$$

De seguida calculam-se as derivadas parciais da área em ordem a cada uma das variáveis envolvidas.

$$\frac{\partial A}{\partial \pi} = r^2, \quad \frac{\partial A}{\partial r} = 2\pi r.$$

Calcula-se um majorante das derivadas parciais, tendo em conta o intervalo onde cada uma das variáveis é definida. No caso da derivada parcial em ordem a π, para que seja o maior possível em módulo, r deve ser o maior possível. No caso da derivada parcial em ordem a r, para que seja o maior possível em módulo, ambos r e π devem ser o maior possível.

$$M_\pi = 650.25, \quad M_r = 160.395.$$

Considerando $\delta_\pi = \delta_r = \delta$, pela fórmula fundamental dos erros vem

$$\begin{aligned} \delta M_\pi + \delta M_r &\leq 0.5 \\ 650.25\delta + 160.395\delta &\leq 0.5 \end{aligned}$$

$$\delta \leq 0.000617928008.$$

Logo, o raio deve ser medido com um erro inferior a 0.000617928008 e para valor aproximado de π deve-se usar no mínimo 4 algarismos significativos ($\delta_\pi = 0.0005$).

1.7 Começa-se por estabelecer o erro absoluto cometido na representação de cada variável, bem como o intervalo onde esse número está compreendido.

$$\begin{cases} \delta_a &= 0.01a \\ \delta_b &= 0.2b \\ \delta_z &= 0.01z \end{cases} \quad \text{e} \quad I = \begin{cases} 0.99a \leq a < 1.01a \\ 0.8b \leq b < 1.2b \\ 0.99z \leq z < 1.01z. \end{cases}$$

De seguida calculam-se as derivadas parciais da função η em ordem a cada uma das variáveis envolvidas.

Começando pela primeira fórmula de η, a que se chamará de ora em diante $\eta_1 = \dfrac{a}{z}$,

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial a} = \frac{1}{z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial z} = -\frac{a}{z^2}.$$

Calcula-se um majorante das derivadas parciais, tendo em conta o intervalo onde cada uma das variáveis é definida.

$$M_a = \left|\frac{1}{0.99z}\right| = \frac{1}{0.99z}, \text{ uma vez que os valores de } a \text{ e } z \text{ são positivos.}$$

$$M_z = \left|-\frac{1.01a}{(0.99z)^2}\right| = \frac{1.01a}{0.99^2 z^2}, \text{ pela mesma razão.}$$

Pela fórmula fundamental dos erros vem

$$\begin{aligned}
\delta_{\eta_1} &= \delta_a M_a + \delta_z M_z = \\
&= \frac{0.01a}{0.99z} + \frac{0.01z \times 1.01a}{0.99^2 z^2} = \\
&= \frac{0.01a}{0.99z} + \frac{0.0101a}{0.99^2 z} = \\
&= \frac{(0.01 \times 0.99 + 0.0101)a}{0.99^2 z} = \\
&= \frac{0.02}{0.9801}\frac{a}{z} = 0.020406081\eta = 0.020406081 \times 0.95 = \\
&= 0.019385777.
\end{aligned}$$

Prosseguindo com o mesmo raciocínio, agora para a segunda fórmula, $\eta_2 = \frac{a}{a+b}$, calculam-se as derivadas parciais

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial a} = \frac{b}{(a+b)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial b} = -\frac{a}{(a+b)^2}.$$

Calcula-se um majorante das derivadas parciais, tendo em conta o intervalo onde cada uma das variáveis é definida.

$M_a = \left|\frac{1.2b}{(0.99a+0.8b)^2}\right| = \frac{1.2b}{(0.99a+0.8b)^2}$, uma vez que os valores de a e b são positivos.

$$M_b = \left|-\frac{1.01a}{(0.99a+0.8b)^2}\right| = \frac{1.01a}{(0.99a+0.8b)^2}, \text{ pela mesma razão.}$$

Pela fórmula fundamental dos erros vem

$$\begin{aligned}
\delta_{\eta_2} &= \delta_a M_a + \delta_b M_b = \\
&= \frac{0.01a \times 1.2b}{(0.99a+0.8b)^2} + \frac{0.2b \times 1.01a}{(0.99a+0.8b)^2} = \\
&= \frac{0.214ab}{(0.99a+0.8b)^2}
\end{aligned}$$

Sabendo que $\eta = \dfrac{a}{a+b} = 0.95$, então $a = 0.95a + 0.95b$, logo, $a = 19b$. Substituindo na expressão anterior,

$$\delta_{\eta_2} = \frac{0.214 \times 19b \times b}{(0.99 \times 19b + 0.8b)^2} = \frac{4.066b^2}{384.5521b^2} = 0.01057334.$$

Uma vez que $\delta_{\eta_1} > \delta_{\eta_2}$, a segunda fórmula é a mais adequada para determinar η.

2 Sistemas de equações lineares

2.1

$$\begin{cases} 2.71x_1 & + & 1.63x_2 & + & 0.32x_3 & = & 38.48 \\ 4.11x_1 & + & 2.44x_2 & + & 0.19x_3 & = & 56.69 \\ 2.69x_1 & + & 1.64x_2 & + & 0.36x_3 & = & 38.54 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2.71 & 1.63 & 0.32 & | & 38.48 \\ 4.11 & 2.44 & 0.19 & | & 56.69 \\ 2.69 & 1.64 & 0.36 & | & 38.54 \end{pmatrix} \underset{1 \leftrightarrow 2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4.11 & 2.44 & 0.19 & | & 56.69 \\ 2.71 & 1.63 & 0.32 & | & 38.48 \\ 2.69 & 1.64 & 0.36 & | & 38.54 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ m_{21} = -0.6594 \\ m_{31} = -0.6545 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4.11 & 2.44 & 0.19 & | & 56.69 \\ 0 & 0.0211 & 0.1947 & | & 1.0986 \\ 0 & 0.0430 & 0.2356 & | & 1.4364 \end{pmatrix} \underset{2 \leftrightarrow 3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4.11 & 2.44 & 0.19 & | & 56.69 \\ 0 & 0.0430 & 0.2356 & | & 1.4364 \\ 0 & 0.0211 & 0.1947 & | & 1.0986 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \\ m_{32} = -0.4907 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4.11 & 2.44 & 0.19 & | & 56.69 \\ 0 & 0.0430 & 0.2356 & | & 1.4364 \\ 0 & 0 & 0.0791 & | & 0.3938 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 4.11x_1 & + & 2.44x_2 & + & 0.19x_3 & = & 56.69 \\ & & 0.0430x_2 & + & 0.2356x_3 & = & 1.4364 \\ & & & & 0.0791x_3 & = & 0.3938 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 & = & 4.9785 & \approx & 5 \\ x_2 & = & 6.1271 & \approx & 6 \\ x_1 & = & 9.9255 & \approx & 10 \end{cases}$$

Verificação:

- Metal: $10 \times 2.71 + 6 \times 1.63 + 5 \times 0.32 = 38.48$
- Tecido: $10 \times 4.11 + 6 \times 2.44 + 5 \times 0.19 = 56.69$
- Borracha: $10 \times 2.69 + 6 \times 1.64 + 5 \times 0.36 = 38.54$

Solução: Podem ser produzidos 10 'Jeep', 6 'Coupé' e 5 'V6'.

2.2

$$\begin{cases} 50x_2 - 50x_1 - 150x_1 = 0 \\ 75x_3 - 75x_2 - 50x_2 + 50x_1 = 0 \\ 225x_4 - 225x_3 - 75x_3 + 75x_2 = 0 \\ 2000 - 225x_4 + 225x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 200x_1 & -50x_2 & & & = & 0 \\ 50x_1 & -125x_2 & +75x_3 & & = & 0 \\ & 75x_2 & -300x_3 & +225x_4 & = & 0 \\ & & 225x_3 & -225x_4 & = & -2000 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 200 & -50 & 0 & 0 & | & 0 \\ 50 & -125 & 75 & 0 & | & 0 \\ 0 & 75 & -300 & 225 & | & 0 \\ 0 & 0 & 225 & -225 & | & -2000 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ m_{21} = -0.25 \\ m_{31} = 0 \\ m_{41} = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 200 & -50 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -112.5 & 75 & 0 & | & 0 \\ 0 & 75 & -300 & 225 & | & 0 \\ 0 & 0 & 225 & -225 & | & -2000 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \\ m_{32} = 0.66667 \\ m_{42} = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 200 & -50 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -112.5 & 75 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -249.99998 & 225 & | & 0 \\ 0 & 0 & 225 & -225 & | & -2000 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \longrightarrow \\ \\ m_{43} = 0.9 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 200 & -50 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -112.5 & 75 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -249.99998 & 225 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22.5 & | & -2000 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} 200x_1 & -50x_2 & & & = & 0 \\ & -112.5x_2 & +75x_3 & & = & 0 \\ & & -249.99998x_3 & +225x_4 & = & 0 \\ & & & -22.5x_4 & = & -2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 & = & 88.88889 \\ x_3 & = & 80.00001 \\ x_2 & = & 53.33334 \\ x_1 & = & 13.33334 \end{cases}$$

Solução: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (13.33334, 53.33334, 80.00001, 88.88889)$.

2.3

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 & | & 4 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & | & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & | & 8 & 8 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & | & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \longrightarrow \\ m_{21} = -0.25 \\ m_{31} = -0.75 \\ m_{41} = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 & | & 4 & 9 & 4 \\ 0 & 1.5 & -1.25 & 0.75 & | & 1 & -1.25 & 1 \\ 0 & -2.5 & 1.25 & 6.25 & | & 5 & 1.25 & -10 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & | & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \longrightarrow \\ 2 \leftrightarrow 3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 & | & 4 & 9 & 4 \\ 0 & -2.5 & 1.25 & 6.25 & | & 5 & 1.25 & -10 \\ 0 & 1.5 & -1.25 & 0.75 & | & 1 & -1.25 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & | & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \longrightarrow \\ \\ m_{32} = 0.6 \\ m_{42} = 0.8 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 & | & 4 & 9 & 4 \\ 0 & -2.5 & 1.25 & 6.25 & | & 5 & 1.25 & -10 \\ 0 & 0 & -0.5 & 4.5 & | & 4 & -0.5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & | & 13 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \longrightarrow \\ 3 \leftrightarrow 4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 & | & 4 & 9 & 4 \\ 0 & -2.5 & 1.25 & 6.25 & | & 5 & 1.25 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & | & 13 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -0.5 & 4.5 & | & 4 & -0.5 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \longrightarrow \\ \\ m_{43} = 0.1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 & | & 4 & 9 & 4 \\ 0 & -2.5 & 1.25 & 6.25 & | & 5 & 1.25 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & | & 13 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5.3 & | & 5.3 & 0 & -5.3 \end{pmatrix}$$

Sistema 1:

$$\begin{cases} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 4 \\ & - & 2.5x_2 & + & 1.25x_3 & + & 6.25x_4 & = & 5 \\ & & & & 5x_3 & + & 8x_4 & = & 13 \\ & & & & & & 5.3x_4 & = & 5.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 & = & 1 \\ x_3 & = & 1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_1 & = & 1 \end{cases}$$

Sistema 2:

$$\begin{cases} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 9 \\ & - & 2.5x_2 & + & 1.25x_3 & + & 6.25x_4 & = & 1.25 \\ & & & & 5x_3 & + & 8x_4 & = & 5 \\ & & & & & & 5.3x_4 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 & = & 0 \\ x_3 & = & 1 \\ x_2 & = & 0 \\ x_1 & = & 2 \end{cases}$$

Sistema 3:

$$\begin{cases} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 4 \\ & - & 2.5x_2 & + & 1.25x_3 & + & 6.25x_4 & = & -10 \\ & & & & 5x_3 & + & 8x_4 & = & -3 \\ & & & & & & 5.3x_4 & = & -5.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 & = & -1 \\ x_3 & = & 1 \\ x_2 & = & 2 \\ x_1 & = & -1 \end{cases}$$

Solução:

Sistema 1: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1)$

Sistema 2: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 1, 0)$

Sistema 3: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 2, 1, -1)$

2.4 a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & | & 2 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & | & 2 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ m_{21} = -0.5 \\ m_{31} = -0.5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & | & 2 \\ 0 & 0.75 & 0.25 & | & 1 \\ 0 & 0.25 & 0.75 & | & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \\ \longrightarrow \\ m_{32} = -0.333333 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & | & 2 \\ 0 & 0.75 & 0.25 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0.666667 & | & 0.666667 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 & + & 0.5x_2 & + & 0.5x_3 & = & 2 \\ & & 0.75x_2 & + & 0.25x_3 & = & 1 \\ & & & & 0.666667x_3 & = & 0.666667 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Solução: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$.

b) $\det(A) = (-1)^0 \times 1 \times 0.75 \times 0.666667 = 0.5$.

2.5 a)

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 1.4 & 3.0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.9 & 2.8 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2.0 & 1.0 & 1.1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{1 \leftrightarrow 3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 1.1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & 0.9 & 2.8 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 1.4 & 3.0 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ m_{21} = -0.3 \\ m_{31} = -0.4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 1.1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.6 & 2.47 & | & 0 & 1 & -0.3 \\ 0 & 1.0 & 2.56 & | & 1 & 0 & -0.4 \end{pmatrix} \underset{2 \leftrightarrow 3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 1.1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.0 & 2.56 & | & 1 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0.6 & 2.47 & | & 0 & 1 & -0.3 \end{pmatrix} \underset{m_{32} = -0.6}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 1.1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.0 & 2.56 & | & 1 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0.934 & | & -0.6 & 1 & -0.06 \end{pmatrix}$$

1^a coluna de A^{-1}

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2.0x_1 & + & x_2 & + & 1.1x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2.56x_3 & = & 1 \\ & & & & 0.934x_3 & = & -0.6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 = -0.642398 \\ x_2 = 2.644540 \\ x_1 = -0.968951 \end{array} \right.$$

2^a coluna de A^{-1}

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2.0x_1 & + & x_2 & + & 1.1x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2.56x_3 & = & 0 \\ & & & & 0.934x_3 & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 1.070664 \\ x_2 = -2.740899 \\ x_1 = 0.781584 \end{array} \right.$$

3^a coluna de A^{-1}

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2.0x_1 & + & x_2 & + & 1.1x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2.56x_3 & = & -0.4 \\ & & & & 0.934x_3 & = & -0.06 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 = -0.064240 \\ x_2 = -0.235546 \\ x_1 = 0.653105 \end{array} \right.$$

Solução:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.968951 & 0.781584 & 0.653105 \\ 2.644540 & -2.740899 & -0.235546 \\ -0.642398 & 1.070664 & -0.064240 \end{pmatrix}$$

b) Como a matriz A já foi transformada na matriz triangular superior U por EGPP, basta fazer as mesmas operações no vector dos termos independentes b.

$$\begin{pmatrix} 12.6 \\ 10.8 \\ 4.0 \end{pmatrix} \underset{1 \leftrightarrow 3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4.0 \\ 10.8 \\ 12.6 \end{pmatrix} \underset{\substack{m_{21} = -0.3 \\ m_{31} = -0.4}}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 4.0 \\ 9.6 \\ 11 \end{pmatrix} \underset{2 \leftrightarrow 3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4.0 \\ 11 \\ 9.6 \end{pmatrix} \underset{m_{32} = -0.6}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 4.0 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2.0x_1 + x_2 + 1.1x_3 = 4.0 \\ \qquad\quad x_2 + 2.56x_3 = 11 \\ \qquad\qquad 0.934x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_3 = 3.211991 \\ x_2 = 2.777303 \\ x_1 = -1.155247 \end{cases}$$

Solução: $(x_1, x_2, x_3) = (13.02569594, -26.50107067, 10.226988073)$.

2.6 a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 & 14.6 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 & -11.4 \\ 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 & -0.9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \longrightarrow \\ 1 \leftrightarrow 3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 & -11.4 \\ 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 & 14.6 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 & -0.9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ m_{21} = 0.7 \\ m_{31} = -0.8 \\ m_{41} = -0.3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ 0 & 0.8 & 3.1 & 0.2 & -1.6 \\ 0 & 2.0 & 0.5 & 0.2 & 3.4 \\ 0 & 0.4 & 5.9 & 0 & -5.1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \longrightarrow \\ 2 \leftrightarrow 3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ 0 & 2.0 & 0.5 & 0.2 & 3.4 \\ 0 & 0.8 & 3.1 & 0.2 & -1.6 \\ 0 & 0.4 & 5.9 & 0 & -5.1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ m_{32} = -0.4 \\ m_{42} = -0.2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ 0 & 2.0 & 0.5 & 0.2 & 3.4 \\ 0 & 0 & 2.9 & 0.12 & -2.96 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & -5.78 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \longrightarrow \\ 3 \leftrightarrow 4 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ 0 & 2.0 & 0.5 & 0.2 & 3.4 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & -5.78 \\ 0 & 0 & 2.9 & 0.12 & -2.96 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \longrightarrow \\ \\ m_{43} = -0.5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & 14.0 \\ 0 & 2.0 & 0.5 & 0.2 & 3.4 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & -5.78 \\ 0 & 0 & 0 & 0.14 & -0.07 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3.0x_1 & + & 5.0x_2 & - & 4.0x_3 & + & 6.0x_4 & = & 14.0 \\ & & 2.0x_2 & + & 0.5x_3 & + & 0.2x_4 & = & 3.4 \\ & & & & 5.8x_3 & - & 0.04x_4 & = & -5.78 \\ & & & & & & 0.14x_4 & = & -0.07 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_4 = -0.5 \\ x_3 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{array}\right.$$

Solução: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, -1, -0.5)$

b) $\det A = (-1)^3 \times 3 \times 2 \times 5.8 \times 0.14 = -4.872$

c) Como já se transformou a matriz A na matriz U na alínea a) por EGPP, basta aplicar o mesmo procedimento à matriz I.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{1 \leftrightarrow 3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ m_{21} = 0.7 \\ m_{31} = -0.8 \\ m_{41} = -0.3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.7 & 0 \\ 1 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 & 1 \end{pmatrix} \underset{2 \leftrightarrow 3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 1 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ m_{32} = -0.4 \\ m_{42} = -0.2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0.8 & 0 \\ -0.4 & 1 & 1.02 & 0 \\ -0.2 & 0 & -0.14 & 1 \end{pmatrix} \underset{3 \leftrightarrow 4}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0.8 & 0 \\ -0.2 & 0 & -0.14 & 1 \\ -0.4 & 1 & 1.02 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \longrightarrow \\ \\ m_{43} = -0.5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0.5 & 0.2 & | & 1 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 5.8 & -0.04 & | & -0.2 & 0 & -0.14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.14 & | & -0.3 & 1 & 1.09 & -0.5 \end{array}\right)$$

1^a coluna de A^{-1}

$$\begin{cases} 3.0x_1 + 5.0x_2 - 4.0x_3 + 6.0x_4 = 0 \\ 2.0x_2 + 0.5x_3 + 0.2x_4 = 1 \\ 5.8x_3 - 0.04x_4 = -0.2 \\ 0.14x_4 = -0.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = -2.142857 \\ x_3 = -0.049261 \\ x_2 = 0.726601 \\ x_1 = 3.009031 \end{cases}$$

2^a coluna de A^{-1}

$$\begin{cases} 3.0x_1 + 5.0x_2 - 4.0x_3 + 6.0x_4 = 0 \\ 2.0x_2 + 0.5x_3 + 0.2x_4 = 0 \\ 5.8x_3 - 0.04x_4 = 0 \\ 0.14x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 7.142857 \\ x_3 = 0.049261 \\ x_2 = -0.726601 \\ x_1 = -13.009031 \end{cases}$$

3^a coluna de A^{-1}

$$\begin{cases} 3.0x_1 + 5.0x_2 - 4.0x_3 + 6.0x_4 = 1 \\ 2.0x_2 + 0.5x_3 + 0.2x_4 = -0.8 \\ 5.8x_3 - 0.04x_4 = -0.14 \\ 0.14x_4 = 1.09 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 7.785714 \\ x_3 = 0.029557 \\ x_2 = -1.185961 \\ x_1 = -13.222084 \end{cases}$$

4^a coluna de A^{-1}

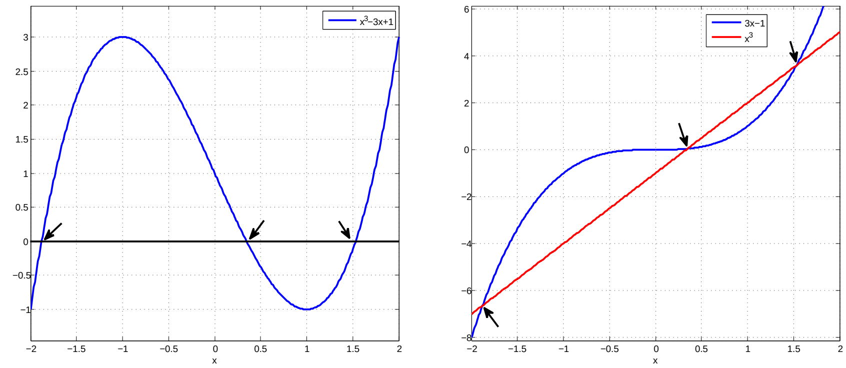
$$\begin{cases} 3.0x_1 + 5.0x_2 - 4.0x_3 + 6.0x_4 = 0 \\ 2.0x_2 + 0.5x_3 + 0.2x_4 = 0 \\ 5.8x_3 - 0.04x_4 = 1 \\ 0.14x_4 = -0.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = -3.571429 \\ x_3 = 0.147783 \\ x_2 = 0.320197 \\ x_1 = 6.806240 \end{cases}$$

Solução:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3.009031 & -13.009031 & -13.222084 & 6.806240 \\ 0.726601 & -0.726601 & -1.185961 & 0.320197 \\ -0.049261 & 0.049261 & 0.029557 & 0.147783 \\ -2.142857 & 7.142857 & 7.785714 & -3.571429 \end{pmatrix}$$

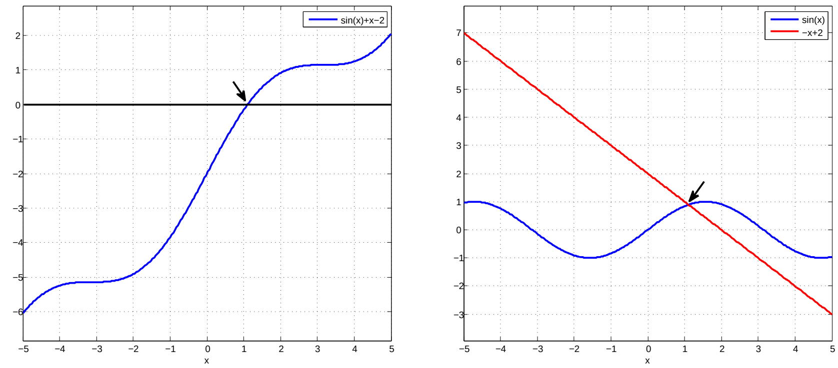
3 Equações não lineares

3.1 a) $x^3 - 3x + 1 = 0$



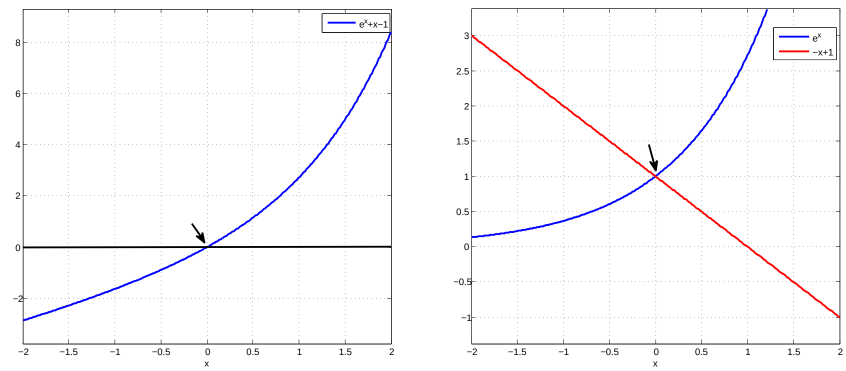
$x \approx -2$, $x \approx 0.5$ e $x \approx 1.5$.

b) $\sin x + x - 2 = 0$



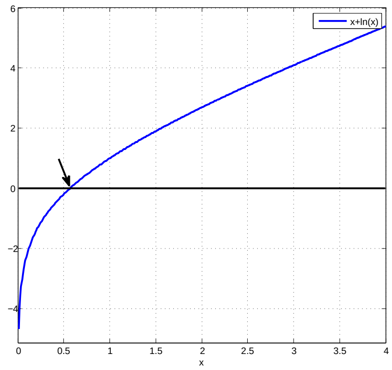
$x \approx 1$.

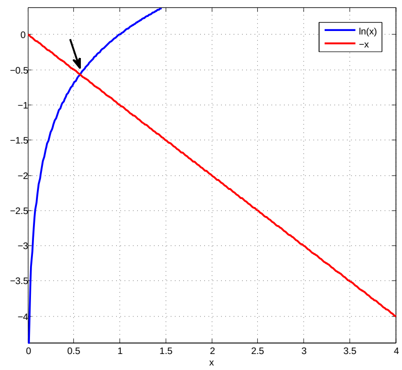
c) $e^x + x - 1 = 0$



$x \approx 0$.

d) $x + \ln x = 0$





$x \approx 0.5.$

3.2 A velocidade é a primeira derivada do comprimento da fissura $a(x)$, isto é, $a'(x) \equiv f(x)$. Pretende-se $f(x) = 0$ com

$$f(x) = 10.1x^4 - 5.12x^3 + 9.18x^2 - 5.84x - 5.66.$$

- **1ª iteração** $(k = 2)$

  $x_1 = 0.8, \quad f(x_1) = -2.94128$

  $x_2 = 1, \quad f(x_2) = 2.66$

  $$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} = 0.905022$$

  Critério de Paragem

  $f(x_3) = -0.445866$

  $|f(x_3)| \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.445866 \leq 0.01 \quad$ (falso)

  `Nota:` Como esta condição falha, não há necessidade de verificar a outra (erro relativo da aproximação).

- **2ª iteração** $(k = 3)$

  $x_2 = 1, \quad f(x_2) = 2.66$

  $x_3 = 0.905022, \quad f(x_3) = -0.445866$

  $$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_2)f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2)} = 0.918657$$

Critério de Paragem

$f(x_4) = -0.053709$

$|f(x_4)| \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.053709 \leq 0.01 \quad \text{(falso)}$

- **3ª iteração** $(k = 4)$

$x_3 = 0.905022, \quad f(x_3) = -0.445866$

$x_4 = 0.918657, \quad f(x_4) = -0.053709$

$$x_5 = x_4 - \frac{(x_4 - x_3)f(x_4)}{f(x_4) - f(x_3)} = 0.920524$$

Critério de Paragem

$f(x_5) = -0.001314$

$|f(x_5)| \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.001314 \leq 0.01 \quad \text{(verdadeiro)}$

`Nota:` Uma vez que se verifica esta condição, para o processo iterativo poder terminar tem que se verificar também a outra.

$$\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0.002028 \leq \varepsilon_1 \quad \text{(verdadeiro)}$$

Uma vez que se verificam ambas as condições do critério de paragem, o processo iterativo termina com $x \approx 0.920524$ e $f(x) \approx -0.001314$.

3.3 Substituindo os valores de P, A e n, vem

$$4000 = 20000\frac{i(1+i)^6}{(1+i)^6 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad 20000\frac{i(1+i)^6}{(1+i)^6 - 1} - 4000 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5i(1+i)^6}{(1+i)^6 - 1} - 1 = 0$$

Logo,

$$f(i) = \frac{5i(1+i)^6}{(1+i)^6 - 1} - 1.$$

- **1ª iteração** $(k = 2)$

$i_1 = 0.05, \quad f(i_1) = -0.014913$

$i_2 = 0.15, \quad f(i_2) = 0.321185$

$$i_3 = i_2 - \frac{(i_2 - i_1)f(i_2)}{f(i_2) - f(i_1)} = 0.054437$$

Critério de Paragem

$f(i_3) = -0.000891$

$|f(i_3)| \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.000891 \leq 0.005 \quad \text{(verdadeiro)}$

`Nota:` Uma vez que se verifica esta condição, para o processo iterativo poder terminar tem que se verificar também a outra.

$$\frac{|i_3 - i_2|}{|i_3|} \leq \varepsilon_1 \Leftrightarrow 1.755479 \leq 0.005 \quad \text{(falso)}$$

- **2ª iteração** $(k = 3)$

$i_2 = 0.15, \quad f(i_2) = 0.321185$

$i_3 = 0.054437, \quad f(i_3) = -0.000891$

$$i_4 = i_3 - \frac{(i_3 - i_2)f(i_3)}{f(i_3) - f(i_2)} = 0.054701$$

Critério de Paragem

$f(i_4) = -0.000054$

$|f(i_4)| \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.000054 \leq 0.005 \quad \text{(verdadeiro)}$

`Nota:` Uma vez que se verifica esta condição, para o processo iterativo poder terminar tem que se verificar também a outra.

$$\frac{|i_4 - i_3|}{|i_4|} \leq \varepsilon_1 \Leftrightarrow 0.004826 \leq 0.005 \quad \text{(verdadeiro)}$$

Uma vez que se verificam ambas as condições do critério de paragem, o processo iterativo termina com $i \approx 0.054701$ e $f(i) \approx 0.000054$.

3.4 Substituindo os valores de r e v, vem

$$f(x) = \frac{\pi h^2(3 - h)}{3} - 0.5.$$

a) - **1ª iteração** $(k = 2)$

$x_1 = 0.25, \quad f(x_1) = -0.320013$

$x_2 = 0.5, \quad f(x_2) = 0.154498$

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} = 0.418601$$

- **2ª iteração** $(k = 3)$

  $x_2 = 0.5, \quad f(x_2) = 0.154498$

  $x_3 = 0.418601, \quad f(x_3) = -0.026321$

  $$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_2)f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2)} = 0.430450$$

- **3ª iteração** $(k = 4)$

  $x_3 = 0.418601, \quad f(x_3) = -0.026321$

  $x_4 = 0.430450, \quad f(x_4) = -0.001424$

  $$x_5 = x_4 - \frac{(x_4 - x_3)f(x_4)}{f(x_4) - f(x_3)} = 0.431128$$

$x \approx 0.431128.$

b)

- **1ª iteração** $(k = 2)$

  $x_1 = 2.5, \quad f(x_1) = 2.772492$

  $x_2 = 3, \quad f(x_2) = -0.5$

  $$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} = 2.923606$$

- **2ª iteração** $(k = 3)$

  $x_2 = 3, \quad f(x_2) = -0.5$

  $x_3 = 2.923606, \quad f(x_3) = 0.183794$

  $$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_2)f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2)} = 2.944140$$

- **3ª iteração** $(k = 4)$

  $x_3 = 2.923606, \quad f(x_3) = 0.183794$

  $x_4 = 2.944140, \quad f(x_4) = -0.007045$

  $$x_5 = x_4 - \frac{(x_4 - x_3)f(x_4)}{f(x_4) - f(x_3)} = 2.944958$$

$x \approx 2.944958.$

A segunda solução não tem significado físico uma vez que a altura máxima que o líquido poderá ter é $2r = 2$.

3.5 a) Com base na informação da figura,

- $\sin(\theta_1) = \dfrac{x}{\mathbf{T}_1}$
- $\sin(\theta_2) = \dfrac{L-x}{\mathbf{T}_2}$
- $\mathbf{T}_1 = \sqrt{a^2+x^2}$
- $\mathbf{T}_2 = \sqrt{(L-x)^2+b^2}$

Pretende-se que $C_1\sin(\theta_1) = C_2\sin(\theta_2)$. Assim, vem

$$\begin{aligned} C_1\sin(\theta_1) = C_2\sin(\theta_2) &\quad\Leftrightarrow\\ C_1\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = C_2\frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+b^2}} &\quad\Leftrightarrow\\ \frac{C_1^2x^2}{a^2+x^2} = \frac{C_2^2(L-x)^2}{(L-x)^2+b^2} &\quad\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$C_2^2(L-x)^2(a^2+x^2) = C_1^2x^2\left((L-x)^2+b^2\right), \quad \text{como se pretendia mostrar.}$$

b) Substituindo na equação anterior $a=3$, $b=1$, $L=4$, $C_1=1$ e $C_2=2$, vem

$$\begin{aligned} 2^2(4-x)^2(3^2+x^2) = 1^2x^2\left((4-x)^2+1^2\right) &\Leftrightarrow\\ 4(16-8x+x^2)^2(9+x^2) - x^2(16-8x+x^2+1) = 0 &\Leftrightarrow\\ 576+64x^2-288x-32x^3+36x^2+4x^4-17x^2+8x^3-x^4 = 0 &\Leftrightarrow\\ 3x^4-24x^3+83x^2-288x+576 = 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x) = 3x^4-24x^3+83x^2-288x+576.$$

A primeira derivada de $f(x)$ é

$$f'(x) = 12x^3-72x^2+166x-228.$$

- **1ª iteração** $(k = 1)$

  $x_1 = 3.75, \quad f(x_1) = -9.175781, \quad f'(x_1) = -45.1875$

  $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3.546940$

- **2ª iteração** $(k = 2)$

  $x_2 = 3.546940, \quad f(x_2) = 2.555819, \quad f'(x_2) = -69.544957$

  $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 3.583691$

Ao fim da segunda iteração, $x \approx 3.583691$ e o erro relativo é

$$\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.010255.$$

3.6 Substituindo o valor de y, vem

$$f(t) = 7(2 - 0.9^t) - 10.$$

A primeira derivada de $f(t)$ é

$$f'(t) = -7 \times 0.9^t \ln(0.9).$$

- **1ª iteração** $(k = 1)$

  $t_1 = 6, \quad f(t_1) = 0.279913, \quad f'(t_1) = 0.391950$

  $t_2 = t_1 - \dfrac{f(t_1)}{f'(t_1)} = 5.285845$

  Critério de Paragem

  $f(t_2) = -0.010800$

  $|f(t_2)| \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.010800 \leq 0.001 \quad \text{(falso)}$

  `Nota:` Como esta condição falha, não há necessidade de verificar a outra (erro relativo da aproximação).

- **2ª iteração** $(k = 2)$

  $t_2 = 5.285845, \quad f(t_2) = -0.0108004, \quad f'(t_2) = 0.422580$

  $t_3 = t_2 - \dfrac{f(t_2)}{f'(t_2)} = 5.311402$

Critério de Paragem $f(t_3) = -0.000015$

$|f(t_3)| \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.000015 \leq 0.001 \quad \text{(verdadeiro)}$

`Nota:` Uma vez que se verifica esta condição, para o processo iterativo poder terminar tem que se verificar também a outra.

$\dfrac{|t_3 - t_2|}{|t_3|} \leq \varepsilon_1 \Leftrightarrow 0.004812 \leq 0.001 \quad \text{(falso)}$

- **3ª iteração** $(k = 3)$

  $t_3 = 5.311402, \quad f(t_3) = -0.000015, \quad f'(t_3) = 0.421444$

  $t_4 = t_3 - \dfrac{f(t_3)}{f'(t_3)} = 5.311438$

  Critério de Paragem $f(t_4) = 0.000000$

  $|f(t_3)| \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.000000 \leq 0.001 \quad \text{(verdadeiro)}$

  `Nota:` Uma vez que se verifica esta condição, para o processo iterativo poder terminar tem que se verificar também a outra.

  $\dfrac{|t_4 - t_3|}{|t_4|} \leq \varepsilon_1 \Leftrightarrow 0.000007 \leq 0.001 \quad \text{(verdadeiro)}$

  Uma vez que se verificam ambas as condições do critério de paragem, o processo iterativo termina com $t \approx 5.311438$h e $f(t) \approx 0.000000$.

3.7 Substituindo os valores de r e ρ e simplificando, vem

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552.$$

A primeira derivada de $f(x)$ é

$$f'(x) = 3x^2 - 60x.$$

- **1ª iteração** $(k = 1)$

  $x_1 = 10, \quad f(x_1) = 552, \quad f'(x_1) = -300$

  $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 11.84$

  Critério de Paragem

  $f(x_2) = 6.229504$

  $|f(x_2)| \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 6.229504 \leq 0.001 \quad \text{(falso)}$

  `Nota:` Como esta condição falha, não há necessidade de verificar a outra (erro relativo da aproximação).

- **2ª iteração** $(k = 2)$

  $x_2 = 11.84, \quad f(x_2) = 6.229504, \quad f'(x_2) = -289.8432$

  $$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 11.861493$$

  Critério de Paragem

  $f(x_3) = 0.002464$

  $|f(x_3)| \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.0002464 \leq 0.001 \quad \text{(falso)}$

  `Nota:` Como esta condição falha, não há necessidade de verificar a outra (erro relativo da aproximação).

- **3ª iteração** $(k = 3)$

  $x_3 = 11.861493, \quad f(x_3) = 0.002464, \quad f'(x_3) = -289.604531$

  $$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 11.861502$$

  Critério de Paragem

  $f(x_4) = 0.000143$

  $|f(x_4)| \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.000143 \leq 0.001 \quad \text{(verdadeiro)}$

  `Nota:` Uma vez que se verifica esta condição, para o processo iterativo poder terminar tem que se verificar também a outra.

  $$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} \leq \varepsilon_1 \Leftrightarrow 0.000001 \leq 0.001 \quad \text{(verdadeiro)}$$

Uma vez que se verificam ambas as condições do critério de paragem, o processo iterativo termina com $x \approx 11.861502$ e $f(x) \approx 0.000143$.

3.8

$$\begin{cases} x_1^4 + 0.068x_1 - x_2^4 - 0.058x_2 & = & 0.015 \\ x_1^4 + 0.058x_1 - 2x_2^4 - 0.117x_2 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^4 + 0.068x_1 - x_2^4 - 0.058x_2 - 0.015 & = & 0 \\ x_1^4 + 0.058x_1 - 2x_2^4 - 0.117x_2 & = & 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^4 + 0.068x_1 - x_2^4 - 0.058x_2 - 0.015 \\ x_1^4 + 0.058x_1 - 2x_2^4 - 0.117x_2 \end{pmatrix}, \quad J(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 + 0.068 & -4x_2^3 - 0.058 \\ 4x_1^3 + 0.058 & -8x_2^3 - 0.117 \end{pmatrix}$$

- **1ª iteração** $(k = 1)$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix}, \quad f(x_1) = \begin{pmatrix} -0.012 \\ -0.0258 \end{pmatrix}, \quad J(x_1) = \begin{pmatrix} 0.176 & -0.166 \\ 0.166 & -0.333 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema linear $J(x_1)\Delta_1 = -f(x_1)$ por EGPP para calcular Δ_1:

$$\left(\begin{array}{ccc} 0.176 & -0.166 & | & 0.012 \\ 0.166 & -0.333 & | & 0.0258 \end{array}\right) \underset{m_{21} = -0.943182}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc} 0.176 & -0.166 & | & 0.012 \\ 0 & -0.176432 & | & 0.014482 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} -0.009237 \\ -0.082083 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0.290763 \\ 0.217917 \end{pmatrix}$$

- **2ª iteração** $(k = 2)$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0.290763 \\ 0.217917 \end{pmatrix}, \quad f(x_2) = \begin{pmatrix} -0.002975 \\ -0.005995 \end{pmatrix}, \quad J(x_2) = \begin{pmatrix} 0.166328 & -0.099394 \\ 0.156328 & -0.199787 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema linear $J(x_2)\Delta_2 = -f(x_2)$ por EGPP para calcular Δ_2:

$$\left(\begin{array}{ccc} 0.166328 & -0.099394 & | & 0.002975 \\ 0.156328 & -0.199787 & | & 0.005995 \end{array}\right) \underset{m_{21} = -0.939878}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 0.166328 & -0.099394 & | & 0.002975 \\ 0 & -0.106369 & | & 0.003199 \end{array}\right) \longrightarrow \Delta x_2 = \begin{pmatrix} -0.000086 \\ -0.030075 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = x_2 + \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0.290677 \\ 0.187842 \end{pmatrix}$$

Erro relativo

$$\frac{\|\Delta_2\|_2}{\|x_3\|_2} = 0.086900$$

$$x \approx \begin{pmatrix} 0.290677 \\ 0.187842 \end{pmatrix}.$$

3.9 Substituindo m e n, vem

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_1^2 &= 4 \\ -x_2 - x_2^3 - x_1 &= 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + 2x_1^2 - 4 &= 0 \\ -x_2 - x_2^3 - x_1 - 8 &= 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 + 2x_1^2 - 4 \\ -x_2 - x_2^3 - x_1 - 8 \end{pmatrix}, \quad J(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 & -1 \\ -1 & -1 - 3x_2^2 \end{pmatrix}$$

- **1ª iteração** $(k = 1)$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad J(x_1) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -13 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema linear $J(x_1)\Delta_1 = -f(x_1)$ por EGPP para calcular Δ_1:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & | & 0 \\ -1 & -13 & | & -1 \end{pmatrix} \underset{m_{21}=0.25}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & -1 & | & 0 \\ 0 & -13.25 & | & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0.018868 \\ 0.075472 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta_1 = \begin{pmatrix} 1.018868 \\ -1.924528 \end{pmatrix}$$

Critério de Paragem

$$f(x_2) = \begin{pmatrix} 0.000712 \\ 0.033742 \end{pmatrix}$$

$\|f(x_2)\|_2 \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.033749 \leq 0.01$ (falso)

`Nota:` Como esta condição falha, não há necessidade de verificar a outra (erro relativo da aproximação).

- **2ª iteração** $(k = 2)$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1.018868 \\ -1.924528 \end{pmatrix}, \quad f(x_2) = \begin{pmatrix} 0.000712 \\ 0.033742 \end{pmatrix}, \quad J(x_2) = \begin{pmatrix} 4.075472 & -1 \\ -1 & -12.111424 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema linear $J(x_2)\Delta_2 = -f(x_2)$ por EGPP para calcular Δ_2:

$$\begin{pmatrix} 4.075472 & -1 & | & -0.000712 \\ -1 & -12.111424 & | & -0.033742 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ m_{21} = 0.245370 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4.075472 & -1 & | & -0.000712 \\ 0 & -12.356794 & | & -0.033917 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0.000499 \\ 0.002745 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = x_2 + \Delta_2 = \begin{pmatrix} 1.019367 \\ -1.921783 \end{pmatrix}$$

Critério de Paragem

$$f(x_3) = \begin{pmatrix} 0.000001 \\ 0.000041 \end{pmatrix}$$

$\|f(x_3)\| \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.000041 \leq 0.01 \quad$ (verdadeiro)

`Nota:` Uma vez que se verifica esta condição, para o processo iterativo poder terminar tem que se verificar também a outra.

$\dfrac{\|\Delta x_2\|_2}{\|x_3\|_2} \leq \varepsilon_1 \Leftrightarrow 0.001283 \leq 0.01 \quad$ (verdadeiro)

Uma vez que se verificam ambas as condições do critério de paragem, o processo iterativo termina com $x \approx (1.019367, -1.921783)^T$.

3.10

$$\begin{cases} e^{-x} - 2 & = & 0 \\ 2y + 2 & = & 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-x} - 2 \\ 2y + 2 \end{pmatrix}, \quad J(x,y) = \begin{pmatrix} -e^{-x} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **1ª iteração** $(k = 1)$

$$(x_1, y_1) = (-1, 1), \quad f(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 0.718282 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad J(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} -2.718282 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema linear $J(x_1, y_1)\Delta_1 = -f(x_1, y_1)$ por EGPP para calcular Δ_1:

$$\begin{pmatrix} -2.718282 & 0 & | & -0.718282 \\ 0 & 2 & | & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0.264241 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + \Delta_1 = \begin{pmatrix} -0.735759 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Critério de paragem

$$\frac{\|\Delta_1\|_2}{\|(x_2, y_2)\|_2} \leq 0.05 \Leftrightarrow 1.624944 \leq 0.05 \qquad \text{(falso)}$$

- **2ª iteração** $(k = 2)$

$$(x_2, y_2) = (-0.735759, -1), \quad f\,(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 0.0.087065 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J\,(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} -2.087065 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema linear $J(x_2, y_2)\Delta_2 = -f(x_2, y_2)$ por EGPP para calcular Δ_2:

$$\begin{pmatrix} -2.087065 & 0 & | & -0.087065 \\ 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0.041717 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(x_3, y_3) = (x_2, y_2) + \Delta_2 = \begin{pmatrix} -0.694042 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Critério de paragem

$$\frac{\|\Delta_2\|_2}{\|(x_3, y_3)\|_2} \leq 0.05 \Leftrightarrow 0.034272 \leq 0.05 \qquad \text{(verdadeiro)}$$

$(x, y) \approx (-0.694042, -1)$.

3.11

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 &= 2 \\ x_1^2 - x_2^2 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 &= 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad J(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

- **1ª iteração** $(k = 1)$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad f(x_1) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad J(x_1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema linear $J(x_1)\Delta_1 = -f(x_1)$ por EGPP para calcular Δ_1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & | & -0.5 \\ 3 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \underset{m_{21}=-1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & -0.5 \\ 0 & -2 & | & -0.5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta_1 = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

Critério de Paragem

$$f(x_2) = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\|f(x_2)\| \le \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.125 \le 0.05$ (falso)

`Nota:` Como esta condição falha, não há necessidade de verificar a outra (erro relativo da aproximação).

- **2ª iteração** $(k = 2)$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}, \quad f(x_2) = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J(x_2) = \begin{pmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 2.5 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema linear $J(x_2)\Delta_2 = -f(x_2)$ por EGPP para calcular Δ_2:

$$\begin{pmatrix} 2.5 & 1.5 & | & -0.125 \\ 2.5 & -1.5 & | & 0 \end{pmatrix} \underset{m_{21}=-1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2.5 & 1.5 & | & -0.125 \\ 0 & -3 & | & 0.125 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} -0.025 \\ -0.041667 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = x_2 + \Delta_2 = \begin{pmatrix} 1.225 \\ 0.708333 \end{pmatrix}$$

Critério de Paragem

$$f(x_3) = \begin{pmatrix} 0.002361 \\ -0.001111 \end{pmatrix}$$

$$\|f(x_3)\| \leq \varepsilon_2 \Leftrightarrow 0.002609 \leq 0.05 \quad \text{(verdadeiro)}$$

`Nota:` Uma vez que se verifica esta condição, para o processo iterativo poder terminar tem que se verificar também a outra.

$$\frac{\|\Delta x_2\|_2}{\|x_3\|_2} \leq \varepsilon_1 \Leftrightarrow 0.034339 \leq 0.05 \quad \text{(verdadeiro)}$$

Uma vez que se verificam ambas as condições do critério de paragem, o processo iterativo termina com $x \approx (1.225, 0.708333)^T$.

3.12 a)

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 & = & r_1^2 \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 & = & r_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - r_1^2 & = & 0 \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - r_2^2 & = & 0 \end{cases}$$

b) Substituindo x_1, y_1, x_2, y_2, r_1 e r_2, vem

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} (x-10)^2 + (y-10)^2 - 196 \\ (x-10)^2 + (y+10)^2 - 256 \end{pmatrix}, \quad J(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-10) & 2(y-10) \\ 2(x-10) & 2(y+10) \end{pmatrix}$$

- **1ª iteração** $(k=1)$

$$(x_1, y_1) = (0,0), \quad f(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -56 \end{pmatrix}, \quad J(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} -20 & -20 \\ -20 & 20 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema linear $J(x_1, y_1)\Delta_1 = -f(x_1, y_1)$ por EGPP para calcular Δ_1:

$$\begin{pmatrix} -20 & -20 & | & -4 \\ -20 & 20 & | & 56 \end{pmatrix} \underset{m_{21}=-1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -20 & -20 & | & -4 \\ 0 & 40 & | & 60 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} -1.3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + \Delta_1 = \begin{pmatrix} -1.3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

- **2ª iteração** ($k = 2$)

$$(x_2, y_2) = (-1.3, 1.5), \quad f(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 3.94 \\ 3.94 \end{pmatrix}, \quad J(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} -22.6 & -17 \\ -22.6 & 23 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema linear $J(x_2, y_2)\Delta_2 = -f(x_2, y_2)$ por EGPP para calcular Δ_2:

$$\begin{pmatrix} -22.6 & -17 & | & -3.94 \\ -22.6 & 23 & | & -3.94 \end{pmatrix} \underset{m_{21}=-1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -22.6 & -17 & | & -3.94 \\ 0 & 40 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0.174336 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(x_3, y_3) = (x_2, y_2) + \Delta_2 = \begin{pmatrix} -1.125664 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Erro relativo

$$\frac{\|\Delta_2\|_2}{\|(x_3, y_3)\|_2} = 0.092959$$

$(x, y) \approx (-1.125664, 1.5)$.

3.13

$$\begin{cases} 70e^{\beta} + 20e^{\omega} &= 27.5702 \\ 70e^{2\beta} + 20e^{2\omega} &= 17.6567 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 70e^{\beta} + 20e^{\omega} - 27.5702 &= 0 \\ 70e^{2\beta} + 20e^{2\omega} - 17.6567 &= 0 \end{cases}$$

$$f(\beta, \omega) = \begin{pmatrix} 70e^{\beta} + 20e^{\omega} - 27.5702 \\ 70e^{2\beta} + 20e^{2\omega} - 17.6567 \end{pmatrix}, \quad J(\beta, \omega) = \begin{pmatrix} 70e^{\beta} & 20e^{\omega} \\ 140e^{2\beta} & 40e^{2\omega} \end{pmatrix}$$

- **1ª iteração** $(k = 1)$

$$(\beta_1, \omega_1) = (-1.9, -0.15), \quad f(\beta_1, \omega_1) = \begin{pmatrix} 0.113763 \\ -1.274382 \end{pmatrix}, \quad J(x_1) = \begin{pmatrix} 10.469803 & 17.214160 \\ 3.131908 & 29.632729 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema linear $J(\beta_1, \omega_1)\Delta_1 = -f(\beta_1, \omega_1)$ por EGPP para calcular Δ_1:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10.469803 & 17.214160 & -0.113763 \\ 3.131908 & 29.632729 & 1.274382 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ m_{21} = -0.299137 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10.469803 & 17.214160 & -0.113763 \\ 0 & 24.483337 & 1.308413 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} -0.098732 \\ 0.053441 \end{pmatrix}$$

$$(\beta_2, \omega_2) = (\beta_1, \omega_1) + \Delta_1 = \begin{pmatrix} -1.998732 \\ -0.096559 \end{pmatrix}$$

- **2ª iteração** $(k = 2)$

$$(\beta_2, \omega_2) = (-1.998732, -0.096559), \quad f(\beta_2, \omega_2) = \begin{pmatrix} 0.074416 \\ 0.116344 \end{pmatrix},$$

$$J(\beta_2, \omega_2) = \begin{pmatrix} 9.485490 & 18.159127 \\ 2.570700 & 32.975388 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema linear $(\beta_2, \omega_2)\Delta_2 = -f(\beta_2, \omega_2)$ por EGPP para calcular Δ_2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9.485490 & 18.159127 & -0.074416 \\ 2.570700 & 32.975388 & -0.116344 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ m_{21} = -0.271014 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9.485490 & 18.159127 & -0.074416 \\ 0 & 28.054010 & -0.096176 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} -0.001283 \\ -0.003428 \end{pmatrix}$$

$$(\beta_3, \omega_3) = (\beta_2, \omega_2) + \Delta_2 = \begin{pmatrix} -2.000015 \\ -0.099987 \end{pmatrix}$$

Erro relativo

$$\frac{\|\Delta_2\|_2}{\|(\beta_3, \omega_3)\|_2} = 0.001828$$

4 Polinómio interpolador de Newton

4.1 a) Para estimar $f(0.6)$ usando um polinómio de grau 3 são necessários 4 pontos. A tabela das diferenças divididas para os 4 pontos mais próximos de 0.6 é

x_i	f_i	dd1	dd2	dd3
0.3	2			
		0		
0.4	2		50	
		10		-150
0.5	3		-25	
		0		
0.8	3			

$$p_3(x) = 2 + 50(x - 0.3)(x - 0.4) - 150(x - 0.3)(x - 0.4)(x - 0.5).$$

A aproximação para $f(0.6)$ é

$$f(0.6) \approx p_3(0.6) = 4.1.$$

b) Tem de se acrescentar à tabela anterior o ponto mais próximo do ponto interpolador que ainda não tenha sido usado no cálculo do polinómio, por exemplo, $x = 1$. Poder-se-ia usar também o ponto $x = 0.2$, já que está à mesma distância do ponto interpolador.

x_i	f_i	dd1	dd2	dd3	dd4
0.3	2				
		0			
0.4	2		50		
		10		-150	
0.5	3		-25		**297.619047**
		0		58.333333	
0.8	3		10		
		5			
1.0	4				

O erro de truncatura é dado por

$$
\begin{aligned}
|e_3| &\leq |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3))| \times |dd4| \\
&= |(0.6 - 0.3)(0.6 - 0.4)(0.6 - 0.5)(0.6 - 0.8))| \times 297.619047 = 0.357143
\end{aligned}
$$

c) A tabela de diferenças divididas com todos os pontos é

x_i	f_i	dd1	dd2	dd3	dd4	dd5	dd6	dd7
0	0							
		10						
0.1	1		-50					
		0		333.333333				
0.2	1		50		-1666.666667			
		10		-333.333333		6666.666667		
0.3	2		-50		1666.666667		-12748.015873	
		0		333.333333		-3531.746032		18204.365079
0.4	2		50		805.555556		5456.349206	
		10		-150		1378.968254		
0.5	3		-25		297.619047			
		0		58.333333				
0.8	3		10					
		5						
1.0	4							

$$
\begin{aligned}
p_7(x) &= 10x - 50x(x - 0.1) + 333.333333x(x - 0.1)(x - 0.2) \\
&\quad - 1666.666667x(x - 0.1)(x - 0.2)(x - 0.3) \\
&\quad + 6666.666667x(x - 0.1)(x - 0.2)(x - 0.3)(x - 0.4) \\
&\quad - 12748.015873x(x - 0.1)(x - 0.2)(x - 0.3)(x - 0.4)(x - 0.5) \\
&\quad + 18204.365079x(x - 0.1)(x - 0.2)(x - 0.3)(x - 0.4)(x - 0.5)(x - 0.8).
\end{aligned}
$$

A aproximação para $f(0.6)$ é

$$f(0.6) \approx p_7(0.6) = 7.2$$

4.2 a) Para construir o polinómio interpolador de Newton de grau 4 são necessários 5 pontos. A tabela das diferenças divididas para os 5 pontos é

x_i	f_i	dd1	dd2	dd3	dd4
1940	132.165				
		1.9161			
1950	151.326		0.04418		
		2.7997		-0.002142	
1960	179.323		-0.02009		0.000067
		2.3979		0.000547	
1970	203.302		-0.003695		
		2.324			
1980	226.542				

$$
\begin{aligned}
p_4(x) = {} & 132.165 + 1.9161(x-1940) + 0.04418(x-1940)(x-1950) - \\
& - 0.002142(x-1940)(x-1950)(x-1960) + \\
& + 0.000067(x-1940)(x-1950)(x-1960)(x-1970)
\end{aligned}
$$

A aproximação para $f(1965)$ é

$$f(1965) \approx p_4(1965) = 191.990625$$

b) Acrescentando o valor à tabela de diferenças divididas

x_i	f_i	dd1	dd2	dd3	dd4	dd5
1940	132.165					
		1.9161				
1950	151.326		0.04418			
		2.7997		-0.002142		
1960	179.323		-0.02009		0.000067	
		2.3979		0.000547		**0.000002**
1970	203.302		-0.003695		0.000044	
		2.324		-0.000338		
1980	226.542		0.006431			
		2.06678				
1930	123.203					

$|e_4| \leq |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)| \times |dd5| = 140625 \times 0.000002 = 0.28125$

4.3 a) Para construir o polinómio interpolador de Newton de grau 3 (interpolação cúbica) são necessários 4 pontos. A tabela das diferenças divididas para os 4 pontos quando $x = 2$ é

x_i	f_i	dd1	dd2	dd3
1	2			
		0.5		
3	3		0.1667	
		1		-0.0667
4	4		-0.1667	
		0.5		
6	5			

$$p_3(x) = 2 + 0.5(x-1) + 0.1667(x-1)(x-2) - 0.0667(x-1)(x-3)(x-4)$$

A aproximação para $f(2)$ é

$$f(2) \approx p_4(2) = 2.1999$$

A tabela das diferenças divididas para os 4 pontos quando $x = 8$ é

x_i	f_i	dd1	dd2	dd3
4	4			
		0.5		
6	5		0.1667	
		1		-0.0139
7	6		0.0833	
		1.3333		
10	10			

$$p_3(x) = 4 + 0.5(x-4) + 0.1667(x-4)(x-6) - 0.0139(x-4)(x-6)(x-7)$$

A aproximação para $f(8)$ é

$$f(8) \approx p_4(8) = 7.2224$$

b) Acrescentando o valor mais próximo do ponto interpolador que ainda não foi usado à tabela de diferenças divididas, para $x = 2$ vem

x_i	f_i	dd1	dd2	dd3	dd4
1	2				
		0.5			
3	3		0.1667		
		1		-0.0667	
4	4		-0.1667		**0.0250**
		0.5		0.0834	
6	5		0.1667		
		1			
7	6				

$$|e_3| \leq |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)| \times |dd4| = 8 \times 0.0250 = 0.2.$$

Para $x = 8$ vem

x_i	f_i	dd1	dd2	dd3	dd4
4	4				
		0.5			
6	5		0.1667		
		1		-0.0139	
7	6		0.0833		**-0.0139**
		1.3333		0	
10	10		0.0833		
		1			
3	3				

$$|e_3| \leq |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)| \times |dd4| = 16 \times 0.0139 = 0.2224.$$

4.4 a) A tabela das diferenças divididas é

x	$p(x)$	dd1	dd2
-1	-1		
		-2	
0	-3		2
		2	
1	-1		2
		6	
2	5		2
		10	
3	15		2
		14	
4	29		

Como as diferenças divididas de 2ª ordem, logo, $p(x)$ é um polinómio interpolador de 2º grau.

b) Para determinar $p(10)$, recorre-se à tabela das diferenças divididas

x	$p(x)$	dd1	dd2
-1	-1		
		-2	
0	-3		2
		2	
1	-1		2
		6	
2	5		2
		10	
3	15		2
		14	
4	29		2
		$\frac{29-p(10)}{4-10}$	
10	$p(x)$		

$$\frac{14-\frac{29-p(10)}{4-10}}{3-10}=2 \Leftrightarrow \frac{-84-29+p(10)}{42}=2 \Leftrightarrow -113+p(10)=84 \Leftrightarrow p(10)=197$$

4.5 A tabela das diferenças divididas é

x_i	f_i	dd1	dd2	dd3
0	a			
		$2-a$		
1	2		$\frac{a-1}{3}$	
		1		$\frac{b-a-4}{12}$
3	4		$\frac{b-5}{3}$	
		$b-4$		
4	b			

$$\begin{aligned}p_3(x) &= a+(x-0)(2-a)+(x-0)(x-1)\frac{a-1}{3}+(x-0)(x-1)(x-3)\frac{b-a-4}{12}\\ &= a+x(2-a)+x(x-1)\frac{a-1}{3}+x(x-1)(x-3)\frac{b-a-4}{12}\end{aligned}$$

Como o coeficiente de maior grau de $p_3(x)$ é igual à unidade, então

$$\frac{b-a-4}{12} = 1 \Leftrightarrow b-a-4 = 12 \Leftrightarrow b-a = 16$$

Como o coeficiente de menor grau de $p_3(x)$ é igual a zero, então

$$a = 0 \quad \text{e} \quad b = 16$$

O polinómio de grau 3 é

$$p_3(x) = 2x - 0.333333x(x-1) + x(x-1)(x-3)$$

5 Integração numérica

5.1 O espaçamento entre n pontos no intervalo $[a,b]$ é

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1}\left\{\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx\right\}$$

Para cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$, o erro de truncatura da fórmula do rectângulo,

$$e_{R_j} = \frac{h^2}{2}f'(\eta), \quad \eta_j \in [x_j, x_{j+1}]$$

Somando o erros, obtém-se

$$\begin{aligned}
e_{CR_j} &= \sum_{j=0}^{n-1}\left\{\frac{h^2}{2}f'(\eta_j)\right\} \\
&= \frac{h^2}{2}\left\{f'(\eta_0) + f'(\eta_1) + \ldots + f'(\eta_{n-1})\right\} \\
&= \frac{h}{2} \times \frac{b-a}{n} \times f'(\eta) \times n \\
&= \frac{h}{2} \times (b-a) \times f'(\eta), \quad \eta \in [a,b]
\end{aligned}$$

5.2 a)

$$\int\limits_0^{4.2} v(t)dt = \underbrace{\int\limits_0^{0.6} v(t)dt}_{h=0.3,\, n=2,\, \mathbf{S}} + \underbrace{\int\limits_{0.6}^{1.2} v(t)dt}_{h=0.2,\, n=3,\, \mathbf{3/8}} + \underbrace{\int\limits_{1.2}^{4.2} v(t)dt}_{h=0.6,\, n=5,\, \mathbf{T}}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{0.3}{3}(4 + 4 \times 3.9 + 3.7) + \frac{3}{8} \times 0.2(3.7 + 3 \times 3.5 + 3 \times 3.3 + 2.9) + \\
&\quad + \frac{0.6}{2}(2.9 + 2 \times 2.5 + 2 \times 2.0 + 2 \times 1.25 + 2 \times 0.75 + 0.0) \\
&= 2.33 + 2.025 + 4.77 = 9.125
\end{aligned}$$

b)

$$|e| = |e_S| + |e_{3/8}| + |e_T|$$

- **Simpson - [0,0.6]**

t	v	dd1	dd2	dd3	dd4
0.0	4.0				
		-0.3333			
0.3	3.9		-0.5557		
		-0.6667		-0.1386	
0.6	3.7		-0.6666		**1.0909**
		-1		0.9523	
0.8	3.5		0		
		-1			
1.0	3.3				

$$|e_S| = \frac{0.3^4}{180}(0.6 - 0) \times 1.0909 \times 4! = 0.0007$$

- **três oitavos - [0.6,1.2]**

t	v	dd1	dd2	dd3	dd4
0.3	3.9				
		-0.6667			
0.6	3.7		-0.6666		
		-1		0.9523	
0.8	3.5		0		**-10.3173**
		-1		-8.3333	
1.0	3.3		-5		
		-2			
1.2	2.9				

$$e_{3/8}| = \frac{0.2^4}{80}(1.2 - 0.6) \times 10.3173 \times 4! = 0.0030$$

- **trapézio - [1.2,4.2]**

t	v	dd1	dd2
1.2	2.9		
		-0.6667	
1.8	2.5		-0.1388
		-0.8333	
2.4	2.0		**-0.3473**
		-1.25	
3.0	1.25		**0.3473**
		-0.8333	
3.6	0.75		**0.3473**
		-1.25	
4.2	0.0		

$$|e_T| = \frac{0.6^2}{12}(4.2 - 1.2) \times 0.3473 \times 2! = 0.0625$$

$$|e| = 0.0007 + 0.0030 + 0.0625 = 0.0622$$

c) Para usar uma única fórmula de integração, os seguintes pontos igualmente espaçados devem ser seleccionados

t	0.0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2
v	4.0	3.7	2.9	2.5	2.0	1.25	0.75	0.0

$$\left.\begin{array}{l} h = 0.6 \\ n = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ trapézio}$$

$$\int_0^{4.2} v(t)dt \approx \frac{0.6}{2}(4+2\times3.7+2\times2.9+2\times2.5+2\times2.0+2\times1.25+2\times0.75+0.0) = 9.06$$

5.3 a)

$$\int_{1}^{19} v(x)dx = \underbrace{\int_{1}^{5} v(x)dx}_{h=1,\,n=4,\,\mathbf{S}} + \underbrace{\int_{5}^{15} v(x)dx}_{h=2,\,n=5,\,\mathbf{T}} + \underbrace{\int_{15}^{19} v(x)dx}_{h=1,\,n=4,\,\mathbf{S}}$$

$$\approx \frac{1}{3}(10+4\times 9+2\times 8+4\times 8+8)+\frac{2}{2}(8+2\times 6+2\times 5+2\times 5+2\times 4+4)+$$
$$+\frac{1}{3}(4+4\times 4+2\times 4+4\times 3+1)$$

$$= 32+52+13.666667 = 99.666667$$

b) **Trapázio - [5,15]**

x_i	v_i	dd1	dd2
5	8		
		-1	
7	6		**0.125**
		-0.5	
9	5		**0.125**
		0	
11	5		**-0.125**
		-0.5	
13	4		**0.125**
		0	
15	4		

$$|e_T| = \frac{2^2}{12}(15-5)\times 0.125\times 2! = 0.833333$$

c) Para usar uma única fórmula de integração, os seguintes pontos igualmente espaçados devem ser seleccionados

x_i	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$v(x_i)$	10	8	8	6	5	5	4	4	4	1

$$\left.\begin{array}{l} h=2 \\ n=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{três oitavos}$$

$$\int_1^{19} v(x)dx \approx \frac{3}{8}\times 2(10+3\times 8+3\times 8+2\times 6+3\times 5+3\times 5+2\times 4+3\times 4+3\times 4+1) = 99.75$$

5.4 a) Para

$$\left.\begin{array}{l} h=0.5 \\ n=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{três oitavos}$$

$$\int_0^{1.5} a(t)dt \approx \frac{3}{8}\times 0.5(0+3\times 0.35+3\times 0.55+0.9) = 0.675$$

b) $|e_T| < 0.3 \Leftrightarrow \frac{h^2}{12}(b-a)M_2 < 0.3, \quad \left|f''_{[a,b]}\right| \leq M_2$ (majorante)

$f(t) = 0.5t^2 - 0.15t$

$f'(t) = t - 0.15$

$f''(t) = 1$

$$\frac{h^2}{12}(7.5-1.5)\times 1 \leq 0.3 \Leftrightarrow h \leq 0.7746 \Rightarrow h = 0.75$$

t_i	1.5	2.25	3	3.75	4.5	5.25	6	6.75	7.5
$a(t_i)$	0.9	2.19375	4.05	6.46875	9.45	12.99375	17.1	21.76875	27

$$\begin{aligned}\int_{1.75}^{1.5} a(t)dt \quad &\approx \quad \frac{0.75}{2}(0.9+2\times 2.19375+2\times 4.05+2\times 6.46875+2\times 9.45+2\times 12.99375 \\ &+2\times 17.1+2\times 21.76875+27) = 65.98125\end{aligned}$$

c) Construindo a tabela de diferenças divididas,

t_i	a_i	dd1	dd2	dd3	dd4
0	0				
		0.7			
0.5	0.35		-0.3		
		0.4		0.4	
1	0.55		0.3		**-0.045714**
		0.7		0.297143	
1.5	0.9		0.82		
		1.725			
2.25	2.19375				

$$|e_{3/8}| = \frac{0.5^4}{80}(1.5-0) \times 0.045714 \times 4! = 0.001286$$

5.5

$$I(a) = \int_1^2 f(x,a)dx = f(x,a) = \int_1^2 \frac{e^{ax}}{x}dx$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} = x^{-1}e^x$$
$$f'(x) = -x^{-2}e^x + x^{-1}e^x = e^x(x^{-1} - x^{-2})$$
$$f''(x) = e^x(x^{-1} - x^{-2}) + e^x(-x^{-2} + 2x^{-3}) = e^x(x^{-1} - 2x^{-2} + 2x^{-3})$$

$f'(1) = 2.718282 \quad f''(1.5) = 1.659885 \quad f''(2) = 1.847264$

O majorante da segunda derivada é 2.718282

$$\frac{h^2}{12}(2-1) \times 1 \leq 0.05 \Leftrightarrow h \leq 0.469817 \Rightarrow n > 2.128488$$

$$n = 3 \Rightarrow h = 0.333333$$
$$n = 4 \Rightarrow h = 0.25$$

x	1	1.25	1.5	1.75	2
f	2.718282	2.792274	2.987793	3.288344	3.694528

$$I(1) \approx \frac{0.25}{2}(2.718282 + 2 \times 2.792274 + 2 \times 2.987793 + 2 \times 3.288344 + 3.694528) = 3.068704$$

5.6

$$\begin{aligned} S(0.15) = 20.005 &\Leftrightarrow \frac{0.15}{3}(a + 4 \times 16.8 + 2 \times 19.4 + 4 \times 22 + 2b + 4 \times 27.6 + 30.7) = 20.005 \\ &\Leftrightarrow a + 2b = 65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3/8(0.15) = 20.030625 &\Leftrightarrow \frac{3}{8} \times 0.15(a + 3 \times 16.8 + 3 \times 19.4 + 2 \times 22 + 3b + 3 \times 27.6 + 30.7) = 20.030625 \\ &\Leftrightarrow a + 3b = 90 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a & + & 2b & = & 65 \\ a & + & 3b & = & 90 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 65 \\ 1 & 3 & | & 90 \end{pmatrix} \underset{m_{21} = -1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 65 \\ 0 & 1 & | & 25 \end{pmatrix} \begin{cases} a & = & 15 \\ b & = & 25 \end{cases}$$

5.7 a)

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{2} \times 1(0 + 2 \times 0.8415 + 0.9093) = 1.29615$$

b)

$$\begin{aligned} T(0.5) = 1.2667 &\Leftrightarrow \frac{0.5}{2}(0 + 2 \times f(0.5) + 2 \times 0.8415 + 2 \times f(1.5) + 0.9093) = 1.2667 \\ &\Leftrightarrow 0.5f(0.5) + 0.5f(1.5) = 0.618625 \\ &\Leftrightarrow f(0.5) + f(1.5) = 1.23725 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(0.5) &= \frac{0.5}{3} \times (0 + 4 \times f(0.5) + 2 \times 0.8415 + 4 \times f(1.5) + 0.9093) \\ &= \frac{2}{3} \times f(0.5) + \frac{2}{3} \times f(1.5) + 0.43205 = \frac{2}{3} \times (f(0.5) + f(1.5)) + 0.43205 \\ &= \frac{2}{3} \times 1.23725 + 0.43205 = 1.256883 \end{aligned}$$

5.8 (a)

$$\begin{aligned} P(x \leq 1) &= \int_0^1 \frac{4}{27}(9x - 6x^2 + x^3)dx \\ P(x \geq 2.5) &= \int_{2.5}^3 \frac{4}{27}(9x - 6x^2 + x^3)dx \end{aligned}$$

$$e_{\text{total}} = e_1 + e_2 = 0.02 \Rightarrow e_1 = e_2 = 0.01$$

$$f(x) = \frac{4}{27}(9x - 6x^2 + x^3)$$

$$f'(x) = \frac{4}{3} - \frac{48}{27}x + \frac{4}{9}x^2$$

$$f''(x) = -\frac{48}{27} + \frac{8}{9}x$$

$$e_T = \frac{h^2}{12}(b-a)M_2$$

- **[0,1]**

$$M_2 = \frac{48}{27} = 1.7778$$

$$\frac{h^2}{12}(1-0) \times 1.7778 \leq 0.01 \Leftrightarrow h \leq 0.2598 \Rightarrow h = 0.25$$

- **[2.5,3]**

$$M_2 = 0.8889$$

$$\frac{h^2}{12}(3-2.5)\times 0.8889 < 0.01 \Leftrightarrow h < 0.5196 \Rightarrow h = 0.5$$

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1	2.5	3
f_i	0	0.2801	0.4630	0.5625	0.5926	0.0926	0

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{0.25}{2}\times(0+2\times 0.2801+2\times 0.4630+2\times 0.5625+0.5926) = 0.4005$$

$$\int_{2.5}^3 f(x)dx \approx \frac{0.5}{2}\times(0.0926+0) = 0.0232$$

$$PROB = 0.4005+0.0232 = 0.4237$$

(b) Sim. Uma vez que se trata de um polinómio de grau 3, o erro de truncatura cometido com a fórmula de Simpson seria zero, independentemente do valor de h.

6 Aproximação dos mínimos quadrados

6.1 $p_2(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x)$

	x_i	f_i	$P_1(x_i)$	$P_1(x_i)^2$	$x_iP_1(x_i)$	$f_iP_1(x_i)$	$P_2(x_i)$	$P_2(x_i)^2$	$f_iP_2(x_i)$
	0	0.26	-3.125	9.765625	0	-0.8125	5.208333	27.12673	1.354167
	1.25	0.208	-1.875	3.515625	4.394531	-0.39	-1.04167	1.08507	-0.21667
	2.5	0.172	-0.625	0.390625	0.976563	-0.1075	-4.16667	17.36111	-0.71667
	3.75	0.145	0.625	0.390625	1.464844	0.090625	-4.16667	17.36111	-0.60417
	5	0.126	1.875	3.515625	17.57813	0.23625	-1.04167	1.08507	-0.13125
	6.25	0.113	3.125	9.765625	61.03516	0.353125	5.208333	27.12673	0.588542
$\sum$	**18.75**	**1.024**		**27.34375**	**85.44922**	**-0.63**		**91.14583**	**0.273958**

- $P_0(x) = 1, \quad C_0 = 0, \quad P_{-1}(x) = 0$
- $P_1(x) = x - B_0$

  $$B_0 = \frac{\sum xP_0(x)^2}{\sum P_0(x)^2} = \frac{18.75}{6} = 3.125$$

  $P_1(x) = x - 3.125$
- $P_2(x) = (x - B_1)P_1(x) - \mathbb{C}_1$

  $$B_1 = \frac{\sum xP_1(x)^2}{\sum P_1(x)^2} = \frac{85.449219}{27.34375} = 3.125$$

  $$\mathbb{C}_1 = \frac{\sum P_1(x)^2}{\sum P_0(x)^2} = \frac{27.34375}{6} = 4.557292$$

  $P_2(x) = (x - 3.125)^2 - 4.557292$
- $c_0 = \dfrac{\sum fP_0(x)}{\sum P_0(x)^2} = \dfrac{1.024}{6} = 0.170667$
- $c_1 = \dfrac{\sum fP_1(x)}{\sum P_1(x)^2} = \dfrac{-0.63}{27.34375} = -0.02304$
- $c_2 = \dfrac{\sum fP_2(x)}{\sum P_2(x)^2} = \dfrac{0.273958}{91.145834} = 0.003006$

$$p_2(x) = 0.170667 - 0.02304(x - 3.125) + 0.003006\left[(x - 3.125)^2 - 4.557292\right]$$

6.2 $M(x) = c_1 x + c_2 \sin(x)$

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = x \\ \Phi_2(x) = \sin(x) \end{cases}$$

	x_i	f_i	$\Phi_1(x_i)$	$\Phi_2(x_i)$	$\Phi_1(x_i)^2$	$\Phi_2(x_i)^2$	$\Phi_1(x_i)\Phi_2(x_i)$	$f_i\Phi_1(x_i)$	$f_i\Phi_2(x_i)$
	1	122	1	0.841471	1	0.708073	0.841471	122	102.659460
	3	188	3	0.14112	9	0.019915	0.423360	564	26.530562
	6	270	6	-0.279415	36	0.078073	-1.676493	1620	-75.442185
	10	160	10	-0.544021	100	0.295959	-5.440211	1600	-87.043378
	12	120	12	-0.536573	144	0.28791	-6.438875	1440	-64.388750
$\sum$					**290**	**1.389930**	**-12.290748**	**5346**	**-97.684291**

$$\begin{pmatrix} \sum \Phi_1(x)^2 & \sum \Phi_1(x)\Phi_2(x) & | & \sum f_i\Phi_1(x) \\ \sum \Phi_1(x)\Phi_2(x) & \sum \Phi_2(x)^2 & | & \sum f\Phi_2(x) \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 290 & -12.290748 & | & 5346 \\ -12.290748 & 1.389930 & | & -97.684291 \end{pmatrix} \underset{m_{21}=0.042382}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 290 & -12.290748 & | & 5346 \\ 0 & 0.869024 & | & 128.889881 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 & = 24.720381 \\ c_2 & = 148.315675 \end{cases}$$

$$M(x) = 24.720381x + 148.315675\sin(x)$$

$$f(8) \approx M(8) = 344.500384.$$

6.3 a) $p_1(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x)$

	x_i	f_i	$P_1(x_i)$	$P_1(x_i)^2$	$f_iP_1(x_i)$
	1.5	4.9	-1.125	1.265625	-5.5125
	2	3.3	-0.625	0.390625	-2.0625
	3	2	0.375	0.140625	0.75
	4	1.5	1.375	1.890625	2.0625
$\sum$	**10.5**	**11.7**		**3.6875**	**-4.7625**

- $P_0(x) = 1, \quad C_0 = 0, \quad P_{-1}(x) = 0$

- $P_1(x) = x - B_0$

  $B_0 = \dfrac{\sum xP_0(x)^2}{\sum P_0(x)^2} = \dfrac{10.5}{4} = 2.625$

  $P_1(x) = x - 2.625$

- $c_0 = \dfrac{\sum fP_0(x)}{\sum P_0(x)^2} = \dfrac{11.7}{4} = 2.925$

- $c_1 = \dfrac{\sum fP_1(x)}{\sum P_1(x)^2} = \dfrac{-4.7625}{3.6875} = -1.291525$

$$p_1(x) = 2.925 - 1.291525(x - 2.625)$$

b) $M(x; c_1, c_2) = \dfrac{c_1}{x} + c_2 x$

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = \dfrac{1}{x} \\ \Phi_2(x) = x \end{cases}$$

	x_i	f_i	$\Phi_1(x_i)$	$\Phi_2(x_i)$	$\Phi_1(x_i)^2$	$\Phi_2(x_i)^2$	$\Phi_1(x_i)\Phi_2(x_i)$	$f_i\Phi_1(x_i)$	$f_i\Phi_2(x_i)$
	1.5	4.9	0.666667	1.5	0.444444	2.25	1	3.266667	7.35
	2	3.3	0.5	2	0.25	4	1	1.65	6.6
	3	2	0.333333	3	0.111111	9	1	0.666667	6
	4	1.5	0.25	4	0.0625	16	1	0.375	6
$\sum$					**0.868055**	**31.25**	**4**	**5.958334**	**25.95**

$$\left(\begin{array}{cc|c} \sum_i \Phi_1(x_i)^2 & \sum_i \Phi_1(x_i)\Phi_2(x_i) & \sum_i f_i\Phi_1(x_i) \\ \sum_i \Phi_1(x_i)\Phi_2(x_i) & \sum_i \Phi_2(x_i)^2 & \sum_i f_i\Phi_2(x_i) \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.868055 & 4 & 5.958334 \\ 4 & 31.25 & 25.95 \end{array}\right) \underset{1 \leftrightarrow 2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 31.25 & 25.95 \\ 0.868055 & 4 & 5.958334 \end{array}\right) \underset{m_{21} = -0.217014}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 31.25 & 25.95 \\ 0 & -2.781680 & 0.326827 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} c_1 &= 7.405414 \\ c_2 &= -0.117493 \end{cases}$$

$$M(x) = \frac{7.405414}{x} - 0.117493x$$

c) Cálculo da soma dos quadrados dos resíduos

	x_i	f_i	$p_1(x_i)$	$M(x_i)$	$(f_i - p_1(x_i))^2$	$(f_i - M(x_i))^2$
	1.5	4.9	4.377966	4.760703	0.27252	0.019404
	2	3.3	3.732203	3.467721	0.1868	0.02813
	3	2	2.440678	2.115992	0.194197	0.013454
	4	1.5	1.149153	1.381382	0.123094	0.01407
$\sum$					**0.776611**	**0.075058**

O modelo $M(x)$ ajusta-se melhor no sentido dos mínimos quadrados porque a soma dos quadrados dos resíduos é menor que para o modelo $p_1(x)$ $(0.075058 < 0.776611)$.

6.4 a) $s_1(t) = 0.2\alpha_1 \sin(20\pi t) + 0.2\beta_1 \sin(22\pi t)$

$$\begin{cases} \Phi_1(t) = 0.2\sin(20\pi t) \\ \Phi_2(t) = 0.2\sin(22\pi t) \end{cases}$$

	t_i	f_i	$\Phi_1(t_i)$	$\Phi_2(t_i)$	$\Phi_1(t_i)^2$	$\Phi_2(t_i)^2$	$\Phi_1(t_i)\Phi_2(t_i)$	$f_i\Phi_1(t_i)$	$f_i\Phi_2(t_i)$
	0.11	-3.1127	0.117557	0.193717	0.01382	0.037526	0.022773	-0.36592	-0.602983
	0.52	0.0625	0.190211	-0.196457	0.03618	0.038595	-0.037368	0.011888	-0.012279
	0.79	3.0351	-0.11756	-0.185955	0.01382	0.034579	0.02186	-0.356797	-0.564393
$\sum$					**0.06382**	**0.1107**	**0.007265**	**-0.710829**	**-1.179655**

$$\left(\begin{array}{cc|c} \sum \Phi_1(x)^2 & \sum \Phi_1(x)\Phi_2(x) & \sum f\Phi_1(x) \\ \sum \Phi_1(x)\Phi_2(x) & \sum \Phi_2(x)^2 & \sum f\Phi_2(x) \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.06382 & 0.007265 & -0.710829 \\ 0.007265 & 0.1107 & -1.179655 \end{array}\right) \underset{m_{21} = -0.113836}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0.06382 & 0.007265 & -0.710829 \\ 0 & 0.109873 & -1.098737 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 & = -9.999664 \\ \beta_1 & = -10.000064 \end{cases}$$

$$s_1(t) = -0.2 \times 9.999664 \times \sin(20\pi t) - 0.2 \times 10.000064 \times \sin(22\pi t)$$

b) $\begin{cases} s_1(t) = -2\sin(20\pi t) - 2\sin(22\pi t) \\ s_2(t) = 2\sin(20\pi t) + 2\cos(20\pi t) \end{cases}$

	t_i	f_i	$s_1(t_i)$	$s_2(t_i)$	$(f_i - s_1(t_i))^2$	$(f_i - s_2(t_i))^2$
	0.1	1.9863	-1.175571	2	9.997425	0.000188
	0.45	-2.01	0.618034	-2	6.906563	0.0001
	0.63	1.2742	-1.050554	1.284079	5.404483	0.000098
$\sum$					**22.308471**	**0.000386**

O sinal transmitido foi s_2 porque tem menor soma dos quadrados dos resíduos.

6.5 a) $M\,(x; c_1, c_2) = c_1 x^2 + c_2 \frac{1}{x}$

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = x^2 \\ \Phi_2(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

	x_i	f_i	$\Phi_1(x_i)$	$\Phi_2(x_i)$	$\Phi_1(x_i)^2$	$\Phi_2(x_i)^2$	$\Phi_1(x_i)\Phi_2(x_i)$	$f_i\Phi_1(x_i)$	$f_i\Phi_2(x_i)$
	1	20	1	1	1	1	1	20	20
	3	7.5	9	0.333333	81	0.111111	3	67.5	2.5
	4	6.5	16	0.25	256	0.0625	4	104	1.625
	6	7	36	0.166667	1296	0.027778	6	252	1.1666667
	9	10	81	0.111111	6561	0.012346	9	810	1.1111111
	12	A	144	0.083333	20736	0.006944	12	$144A$	$\frac{A}{12}$
$\sum$					**28931**	**1.220679**	**35**	$\mathbf{1253.5 + 144A}$	$\mathbf{26.402778 + \frac{A}{12}}$

$$\left(\begin{array}{ccc} \sum \Phi_1(x)^2 & \sum \Phi_1(x)\Phi_2(x) & \mid & \sum f\Phi_1(x) \\ \sum \Phi_1(x)\Phi_2(x) & \sum \Phi_2(x)^2 & \mid & \sum f\Phi_2(x) \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 28931 & 35 & \mid & 1253.5 + 144A \\ 35 & 1.220679 & \mid & 26.402778 + \frac{A}{12} \end{array}\right)$$

b) $A = 15$

$$\begin{pmatrix} 28931 & 35 & | & 3413.5 \\ 35 & 1.220679 & | & 27.652778 \end{pmatrix} \underset{m_{21}=-0.001210}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 28931 & 35 & | & 3413.5 \\ 0 & 1.178329 & | & 23.523211 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 &= 0.093837 \\ c_2 &= 19.963194 \end{cases}$$

$$M(x) = 0.093837x^2 + 19.963194\frac{1}{x}$$

6.6 a) $p_2(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x)$

	x_i	f_i	$P_1(x_i)$	$P_1(x_i)^2$	$x_iP_1(x_i)$	$f_iP_1(x_i)$	$P_2(x_i)$	$P_2(x_i)^2$	$f_iP_2(x_i)$
	0	15.43	-11.2	125.44	0	-172.816	47.567571	2262.673830	733.967624
	8	10.2	-3.2	10.24	81.92	-32.64	-45.837837	2101.107283	-467.545935
	12	10.2	0.8	0.64	7.68	8.16	-44.540541	1983.859775	-454.313516
	16	11.86	4.8	23.04	368.64	56.928	-11.243245	126.410554	-133.344883
	20	15.43	8.8	77.44	1548.8	135.784	54.054051	2921.840451	834.054010
$\sum$	**56**	**63.12**		**236.8**	**2007.04**	**-4.584**		**9395.891892**	**512.817299**

- $P_0(x) = 1, \quad C_0 = 0, \quad P_{-1}(x) = 0$

- $P_1(x) = x - B_0$

  $$B_0 = \frac{\sum xP_0(x)^2}{\sum P_0(x)^2} = \frac{56}{5} = 11.2$$

  $P_1(x) = x - 11.2$

- $P_2(x) = (x - B_1)P_1(x) - \mathbb{C}_1$

  $$B_1 = \frac{\sum xP_1(x)^2}{\sum P_1(x)^2} = \frac{2007.04}{236.8} = 8.475676$$

  $$\mathbb{C}_1 = \frac{\sum P_1(x)^2}{\sum P_0(x)^2} = \frac{236.8}{5} = 47.36$$

  $P_2(x) = (x - 8.475676)(x - 11.2) - 47.36$

- $c_0 = \dfrac{\sum f P_0(x)}{\sum P_0(x)^2} = \dfrac{63.12}{5} = 12.624$
- $c_1 = \dfrac{\sum f P_1(x)}{\sum P_1(x)^2} = \dfrac{-4.584}{236.8} = -0.019358$
- $c_2 = \dfrac{\sum f P_2(x)}{\sum P_2(x)^2} = \dfrac{512.817299}{9395.891892} = 0.054579$

$$p_2(x) = 12.624 - 0.019358(x - 11.2) + 0.054579\left[(x - 8.475676)(x - 11.2) - 47.36\right]$$

$$f(10) \approx p_2(10) = 9.962539.$$

b)

$$p_2'(x) = 0.109158x - 1.09323$$

$$p_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10.015116 \approx 10$$

$$p_2''(x) = 0.109158 > 0 \Rightarrow x = 10 \text{ é mínimo}$$

c) $M(x; c_1, c_2) = c_1 e^{1-0.1x} + c_2 e^{0.1x-1}$

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = e^{1-0.1x} \\ \Phi_2(x) = e^{0.1x-1} \end{cases}$$

	x_i	f_i	$\Phi_1(x_i)$	$\Phi_2(x_i)$	$\Phi_1(x_i)^2$	$\Phi_2(x_i)^2$	$\Phi_1(x_i)\Phi_2(x_i)$	$f_i\Phi_1(x_i)$	$f_i\Phi_2(x_i)$
	0	15.43	2.718282	0.367879	7.389056	0.1353353	1	41.943089	5.6763798
	8	10.2	1.221403	0.818731	1.491825	0.67032	1	12.458308	8.3510537
	12	10.2	0.818731	1.221403	0.67032	1.4918247	1	8.3510537	12.458308
	16	11.86	0.548812	1.822119	0.301194	3.3201169	1	6.508906	21.610329
	20	15.43	0.367879	2.718282	0.135335	7.3890561	1	5.6763798	41.943089
$\sum$					**9.98773**	**13.006653**	**5**	**74.937736**	**90.039159**

$$\left(\begin{array}{cc|c} \sum \Phi_1(x)^2 & \sum \Phi_1(x)\Phi_2(x) & \sum f\Phi_1(x) \\ \sum \Phi_1(x)\Phi_2(x) & \sum \Phi_2(x)^2 & \sum f\Phi_2(x) \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 9.98773 & 5 & | & 74.937736 \\ 5 & 13.006653 & | & 90.039159 \end{pmatrix} \xrightarrow[m_{21}=-0.500614]{} \begin{pmatrix} 9.98773 & 5 & | & 74.937736 \\ 0 & 10.503582 & | & 29.903390 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 & = 2.846971 \\ c_2 & = 6.077745 \end{cases}$$

$$M(x) = 2.846971e^{1-0.1x} + 6.077745e^{0.1x-1}.$$

6.7 $M(x; c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{-x} + c_2 x + c_3$

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = e^{-x} \\ \Phi_2(x) = x \\ \Phi_3(x) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \sum \Phi_1(x)^2 & \sum \Phi_1(x)\Phi_2(x) & \sum \Phi_1(x)\Phi_3(x) & | & \sum f\Phi_1(x) \\ \sum \Phi_2(x)\Phi_1(x) & \sum \Phi_2(x)^2 & \sum \Phi_2(x)\Phi_3(x) & | & \sum f\Phi_2(x) \\ \sum \Phi_3(x)\Phi_1(x) & \sum \Phi_3(x)\Phi_2(x) & \sum \Phi_3(x)^2 & | & \sum f\Phi_3(x) \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \sum e^{-2x} & \sum xe^{-x} & \sum e^{-x} & | & \sum fe^{-x} \\ \sum xe^{-x} & \sum x^2 & \sum x & | & \sum fx \\ \sum e^{-x} & \sum x & \sum 1 & | & \sum f \end{pmatrix}$$

	x_i	f_i	e^{-2x_i}	e^{-x_i}	$x_i e^{-x_i}$	x_1^2	$f_i e^{-x_i}$	$f_i x_i$
	-1	1.4	7.389056	2.718282	-2.718282	1	3.805595	-1.4
	0	0	1	1	0	0	0	0
	1	0.75	0.135335	0.367879	0.367879	1	0.27591	0.75
	2	2.3	0.018316	0.135335	0.270671	4	0.311271	4.6
$\sum$	**2**	**4.45**	**8.542707**	**4.221496**	**-2.079732**	**6**	**4.392776**	**3.95**

$$\begin{pmatrix} 8.542707 & -2.718282 & 4.221496 & | & 4.392776 \\ -2.079732 & 6 & 2 & | & 3.95 \\ 4.221496 & 2 & 4 & | & 4.45 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ m_{21} = 0.243451 \\ m_{31} = -0.494164 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8.542707 & -2.718282 & 4.221496 & | & 4.392776 \\ 0 & 5.493687 & 3.027728 & | & 5.019426 \\ 0 & 3.027728 & 1.913890 & | & 2.279249 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \\ m_{32} = -0.551129 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 8.542707 & -2.718282 & 4.221496 & | & 4.392776 \\ 0 & 5.493687 & 3.027728 & | & 5.019426 \\ 0 & 0 & 0.245223 & | & -0.487100 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 & = 1.984748 \\ c_2 & = 2.008409 \\ c_3 & = -1.986356 \end{cases}$$

$$M\,(x) = 1.984748e^{-x} + 2.008409x - 1.986356$$

$$f(0.5) \approx M(0.5) = 0.221659.$$

6.8 $p_1(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x)$

	x_i	f_i	$P_1(x_i)$	$P_1(x_i)^2$	$f_i P_1(x_i)$
	-3	-10	-4	16	40
	0	a	-1	1	$-a$
	2	0	1	1	0
	5	b	4	16	$4b$
$\sum$	**4**	$a+b-\mathbf{10}$		**34**	$-a+\mathbf{4}b+\mathbf{40}$

- $P_0(x) = 1, \quad C_0 = 0, \quad P_{-1}(x) = 0$

- $P_1(x) = x - B_0$

  $B_0 = \dfrac{\sum x P_0(x)^2}{\sum P_0(x)^2} = \dfrac{4}{4} = 1$

  $P_1(x) = x - 1$

- $c_0 = \dfrac{\sum f P_0(x)}{\sum P_0(x)^2} = \dfrac{a+b-10}{4}$

- $c_1 = \dfrac{\sum f P_1(x)}{\sum P_1(x)^2} = \dfrac{-a+4b+40}{34}$

$$p_1(x) = \frac{a+b-10}{4} + \frac{-a+4b+40}{34}(x-1) = \frac{a+b-10}{4} + \frac{-a+4b+40}{34}x - \frac{-a+4b+40}{34}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-a+4b+40}{34} & = & 2 \\ \dfrac{a+b-10}{4} - \dfrac{-a+4b+40}{34} & = & -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+4b & = & 28 \\ 19a+9b & = & -22 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & | & 28 \\ 19 & 9 & | & -22 \end{pmatrix} \underset{1 \leftrightarrow 2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 19 & 9 & | & -22 \\ -1 & 4 & | & 28 \end{pmatrix} \underset{m_{21}=0.052632}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 19 & 9 & | & -22 \\ 0 & 4.474684 & | & 26.842105 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a & = -4 \\ b & = 6 \end{cases}$$

7 Optimização não linear sem restrições

7.1 Os pontos estacionários satisfazem $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 3 \times 9}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(1) = 6 \times 1 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow x = 1$ é maximizante.

$f''(3) = 6 \times 3 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow x = 3$ é minimizante.

7.2 $\max P(t) = -\min\left(-P(t)\right)$

$\min -e^{0.4t-0.01t^2}$

$p(t) = -P(t) = -e^{0.4t-0.01t^2}$

Iniciar o algoritmo DSC: $t_1 = 30, \delta = 2, M = 0.05, \varepsilon = 0.1$

- **1ª iteração**

$$\begin{cases} t_1 = 30 \\ p(t_1) = -20.0855 \quad \underline{\textit{procurar para a direita}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 = 30 + \delta = 30 + 2 = 32 \\ p(t_2) = -12.9358 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{procurar para a esquerda}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{-1} = 30 - \delta = 30 - 2 = 28 \\ p(t_{-1}) = -28.7892 \quad \downarrow \quad \underline{\textit{continuar}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{-2} = 28 - 2 \times \delta = 28 - 2 \times 2 = 24 \\ p(t_{-2}) = -46.5255 \quad \downarrow \quad \underline{\textit{continuar}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{-3} = 24 - 4 \times \delta = 24 - 4 \times 2 = 16 \\ p(t_{-3}) = -46.5255 \quad = \quad \underline{\textit{continuar}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{-4} = 16 - 8 \times \delta = 16 - 8 \times 2 = 0 \\ p(t_{-4}) = -1 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{parar e calcular ponto médio}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_m = \dfrac{0+16}{2} = 8 \\ p(t_m) = -12.9358 \end{cases}$$

$$0 \qquad \underbrace{8 \quad 16}_{-12.9358 \qquad -46.5255} \qquad 24$$

Como $p(t_m) \geq p(t_{-3})$ escolher os três pontos igualmente espaçados: $p(t_m), p(t_{-3}), p(t_{-2})$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{t_1} \leftarrow 8 & p(\mathbf{t_1}) = -12.9358 \\ \mathbf{t_2} \leftarrow 16 & p(\mathbf{t_2}) = -46.5255 \\ \mathbf{t_3} \leftarrow 24 & p(\mathbf{t_3}) = -46.5255 \end{array}\right\} \qquad \Delta = 8$$

$$t^*(q) = \mathbf{t_2} + \Delta \frac{p(\mathbf{t_1}) - p(\mathbf{t_3})}{2(p(\mathbf{t_3}) - 2p(\mathbf{t_2}) + p(\mathbf{t_1}))} = 20, \qquad p(t^*(q)) = -54.5982.$$

- *Critério de Paragem*

  $\Delta \leq \varepsilon \Leftrightarrow 8 \leq 0.1$ (falso)

  $\delta = M\delta = 0.05 \times 2 = 0.1$

- **2ª iteração**

  $$\begin{cases} t_1 = 20 \\ p(t_1) = -54.5982 \quad \underline{\textit{procurar para a direita}} \end{cases}$$

  $$\begin{cases} t_2 = 20 + \delta = 20 + 0.1 = 20.1 \\ p(t_2) = -54.5927 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{procurar para a esquerda}} \end{cases}$$

  $$\begin{cases} t_{-1} = 20 - \delta = 20 - 0.1 = 19.9 \\ p(t_{-1}) = -54.5927 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{ordenar pontos}} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{t_1} \leftarrow 19.9 & p(\mathbf{t_1}) = -54.5927 \\ \mathbf{t_2} \leftarrow 20 & p(\mathbf{t_2}) = -54.5982 \\ \mathbf{t_3} \leftarrow 20.1 & p(\mathbf{t_3}) = -54.5927 \end{array}\right\} \qquad \Delta = 0.1$$

$$t^*(q) = \mathbf{t_2} + \Delta \frac{p(\mathbf{t_1}) - p(\mathbf{t_3})}{2(p(\mathbf{t_3}) - 2p(\mathbf{t_2}) + p(\mathbf{t_1}))} = 20 \qquad p(t^*(q)) = -54.5982$$

- *Critério de Paragem*

  $\Delta \leq \varepsilon \Leftrightarrow 0.1 \leq 0.1$ (verdadeiro)

O pior momento é aos 20 dias com 54.5982 % de pessoas doentes.

7.3 a) Formular problema sem restrições

$$\begin{array}{ll} \min & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a.} & x_1^2 + x_1 x_2 = 50^2 \end{array} \Rightarrow x_2 = \frac{2500 - x_1^2}{x_1}$$

$$\min \quad 6x_1 + 4 \times \frac{2500 - x_1^2}{x_1}$$

b) Iniciar o algoritmo DSC: $x_1 = 50, \delta = 5, M = 0.1, \varepsilon = 0.05$

- **1ª iteração**

$$\begin{cases} x_1 = 50 \\ f(x_1) = 300 \quad \underline{\textit{procurar para a direita}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 50 + \delta = 50 + 5 = 55 \\ f(x_2) = 291.818182 \quad \downarrow \quad \underline{\textit{continuar}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 55 + 2 \times \delta = 55 + 2 \times 5 = 65 \\ f(x_3) = 283.846154 \quad \downarrow \quad \underline{\textit{continuar}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 65 + 4 \times \delta = 65 + 4 \times 5 = 85 \\ f(x_4) = 287.647059 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{parar e calcular ponto médio}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{65 + 85}{2} = 75 \\ f(x_m) = 283.333333 \end{cases}$$

$$55 \qquad \underbrace{65 \qquad 75}_{283.846154 \qquad 283.333333} \qquad 85$$

Como $f(x_m) < f(x_1)$ escolher 3 pontos igualmente espaçados: $f(x_3), f(x_m), f(x_4)$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{x_1} \leftarrow 65 & f(\mathbf{x_1}) = 283.846154 \\ \mathbf{x_2} \leftarrow 75 & f(\mathbf{x_2}) = 283.333333 \\ \mathbf{x_3} \leftarrow 85 & f(\mathbf{x_3}) = 287.647059 \end{array}\right\} \quad \Delta = 10$$

$$x^*(q) = \mathbf{x_2} + \Delta \frac{f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_3})}{2(f(\mathbf{x_3}) - 2f(\mathbf{x_2}) + f(\mathbf{x_1}))} = 71.062501 \qquad f(x^*(q)) = 282.846196$$

- *Critério de Paragem*

  $\Delta \leq \varepsilon \Leftrightarrow 10 \leq 0.05 \quad \text{(falso)}$

  $\delta = M\delta = 5 \times 0.1 = 0.5$

- **2ª iteração**

$$\begin{cases} x_1 = 71.062501 \\ f(x_1) = 282.846196 \quad \underline{\textit{procurar para a direita}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 71.062501 + \delta = 71.062501 + 0.5 = 71.562501 \\ f(x_2) = 282.862991 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{procurar para a esquerda}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{-1} = 71.062501 - \delta = 71.062501 - 0.5 = 70.562501 \\ f(x_{-1}) = 282.843335 \quad \downarrow \quad \underline{\textit{continuar}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{-2} = 70.062501 - 2 \times \delta = 70.062501 - 1 = 69.562501 \\ f(x_{-2}) = 282.880615 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{parar e calcular ponto médio}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{70.562501 + 69.562501}{2} = 70.062501 \\ f(x_m) = 282.854706 \end{cases}$$

$$69.562501 \qquad \underbrace{\underset{282.854706}{70.062501} \qquad \underset{282.843335}{70.562501}} \qquad 71.062501$$

Como $f(x_m) < f(x_{-1})$ escolher 3 pontos igualmente espaçados: $f(x_{-1}), f(x_m), f(x_1)$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{x_1} \leftarrow 70.062501 & f(\mathbf{x_1}) = 282.854706 \\ \mathbf{x_2} \leftarrow 70.562501 & f(\mathbf{x_2}) = 282.843335 \\ \mathbf{x_3} \leftarrow 71.062501 & f(\mathbf{x_3}) = 282.846196 \end{array}\right\} \qquad \Delta = 0.5$$

$$x^*(q) = \mathbf{x_2} + \Delta \frac{f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_3})}{2(f(\mathbf{x_3}) - 2f(\mathbf{x_2}) + f(\mathbf{x_1}))} = 70.711988 \qquad f(x^*(q)) = 282.842713$$

- *Critério de Paragem*

  $\Delta \leq \varepsilon \Leftrightarrow 0.5 \leq 0.05 \quad \text{(falso)}$

  $\delta = M\delta = 0.5 \times 0.1 = 0.05$

- **3ª iteração**

$$\begin{cases} x_1 = 70.711988 \\ f(x_1) = 282.842713 \quad \underline{\textit{procurar para a direita}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 70.711988 + \delta = 70.711988 + 0.05 = 70.761988 \\ f(x_2) = 282.842787 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{procurar para a esquerda}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{-1} = 70.711988 - \delta = 70.711988 - 0.05 = 70.661988 \\ f(x_{-1}) = 282.842780 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{ordenar pontos}} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{x_1} \leftarrow 70.661988 & f(\mathbf{x_1}) = 282.842780 \\ \mathbf{x_2} \leftarrow 70.711988 & f(\mathbf{x_2}) = 282.842713 \\ \mathbf{x_3} \leftarrow 70.761988 & f(\mathbf{x_3}) = 282.842787 \end{array}\right\} \qquad \Delta = 0.5$$

$$x^*(q) = \mathbf{x_2} + \Delta \frac{f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_3})}{2(f(\mathbf{x_3}) - 2f(\mathbf{x_2}) + f(\mathbf{x_1}))} = 70.710747 \qquad f(x^*(q)) = 282.842713$$

- *Critério de Paragem*

  $\Delta \le \varepsilon \Leftrightarrow 0.05 \le 0.05$ (verdadeiro)

$x_1 \approx 70.710747, x_2 \approx -35.355442$ e o custo mínimo ≈ 282.842713

7.4 $v(x) = (60 - 2x)^2 x = (3600 - 240x + 4x^2)x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$

$\max v(x) = -\min(-v(x))$

$\min -4x^3 - 240x^2 + 3600x$

$f(x) = -v(x) = -4x^3 - 240x^2 + 3600x$

Iniciar o algoritmo DSC: $x_1 = 5, \delta = 1, M = 0.5, \varepsilon = 0.5$

- **1ª iteração**

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ f(x_1) = -12500 \quad \underline{\textit{procurar para a direita}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 5 + \delta = 5 + 1 = 6 \\ f(x_2) = -13824 \quad \downarrow \quad \underline{\textit{continuar}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 6 + 2 \times \delta = 6 + 2 \times 1 = 8 \\ f(x_3) = -15488 \quad \downarrow \quad \underline{\textit{continuar}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 8 + 2 \times \delta = 8 + 4 \times 1 = 12 \\ f(x_4) = -15552 \quad \downarrow \quad \underline{\textit{continuar}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 12 + 8 \times \delta = 12 + 8 \times 1 = 20 \\ f(x_5) = -8000 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{parar e calcular o ponto médio}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{12+20}{2} = 16 \\ f(x_m) = -12544 \end{cases}$$

$$8 \qquad \underbrace{\underset{-15552}{12} \qquad \underset{-12544}{16}} \qquad 20$$

Como $f(x_m) \geq f(x_4)$ escolher 3 pontos igualmente espaçados: $f(x_m), f(x_3), f(x_4)$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{x_1} \leftarrow 8 & f(\mathbf{x_1}) = -15488 \\ \mathbf{x_2} \leftarrow 12 & f(\mathbf{x_2}) = -15552 \\ \mathbf{x_3} \leftarrow 16 & f(\mathbf{x_3}) = -12544 \end{array}\right\} \qquad \Delta = 4$$

$$x^*(q) = \mathbf{x_2} + \Delta \frac{f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_3})}{2(f(\mathbf{x_3}) - 2f(\mathbf{x_2}) + f(\mathbf{x_1}))} = 10.08 \qquad f(x^*(q)) = -15999.23$$

- *Critério de Paragem*

  $\Delta \leq \varepsilon \Leftrightarrow 4 \leq 0.5$ (falso)

  $\delta = M\delta = 0.5 \times 1 = 0.5$

- **2ª iteração**

$$\begin{cases} x_1 = 10.08 \\ f(x_1) = -15999.23 \quad \underline{\textit{procurar para a direita}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 10.08 + \delta = 10.08 + 0.5 = 10.58 \\ f(x_2) = -15960.41 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{procurar para a esquerda}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{-1} = 10.08 - \delta = 10.08 - 0.5 = 9.58 \\ f(x_{-1}) = -15978.54 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{ordenar pontos}} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{x_1} \leftarrow 9.58 & f(\mathbf{x_1}) = -15978.54 \\ \mathbf{x_2} \leftarrow 10.08 & f(\mathbf{x_2}) = -15999.23 \\ \mathbf{x_3} \leftarrow 10.58 & f(\mathbf{x_3}) = -15960.41 \end{array}\right\} \qquad \Delta = 0.5$$

$$x^*(q) = \mathbf{x_2} + \Delta \frac{f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_3})}{2(f(\mathbf{x_3}) - 2f(\mathbf{x_2}) + f(\mathbf{x_1}))} = 10.00 \qquad f(x^*(q)) = -16000$$

- *Critério de Paragem*

  $\Delta \leq \varepsilon \Leftrightarrow 0.1 \leq 0.1$ (verdadeiro)

$x_{\min} \approx 10.00, v_{\max} \approx 16000$

7.5 $f(t) = 10 + 3\,sen(\frac{2\pi}{365}(t-80))$

$\max f(t) = -\min\left(-f(t)\right)$

$\min -\left(10 + 3\,sen(\frac{2\pi}{365}(t-80))\right)$

$F(t) = -f(t) = -\left(10 + 3\,sen(\frac{2\pi}{365}(t-80))\right)$

Iniciar o algoritmo DSC: $t_1 = 200, \delta = 10, M = 0.1, \varepsilon = 2$

- **1ª iteração**

$$\begin{cases} t_1 = 200 \\ F(t_1) = -12.6400 \quad \underline{\textit{procurar para a direita}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 = 200 + \delta = 200 + 10 = 210 \\ F(t_2) = -12.3569 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{procurar para a esquerda}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{-1} = 200 - \delta = 200 + 10 = 190 \\ F(t_{-1}) = -12.8451 \quad \downarrow \quad \underline{\textit{continuar}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{-2} = 190 - 2 \times \delta = 190 - 2 \times 10 = 170 \\ F(t_{-2}) = -12.9993 \quad \downarrow \quad \underline{\textit{continuar}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{-3} = 170 - 4 \times \delta = 170 - 4 \times 10 = 130 \\ F(t_{-3}) = -12.2749 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{parar e calcular ponto médio}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_m = \dfrac{130 + 170}{2} = 150 \\ F(t_m) = -12.8015 \end{cases}$$

$$130 \qquad \underbrace{\underset{-12.8015}{150} \qquad \underset{-12.9993}{170}} \qquad 190$$

Como $F(t_m) \geq F(t_{-2})$ escolher 3 pontos igualmente espaçados: $F(t_m), F(t_{-2}), F(t_{-1})$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{t_1} \leftarrow 150 & F(\mathbf{t_1}) = -12.8015 \\ \mathbf{t_2} \leftarrow 170 & F(\mathbf{t_2}) = -12.9993 \\ \mathbf{t_3} \leftarrow 190 & F(\mathbf{t_3}) = -12.8451 \end{array}\right\} \qquad \Delta = 20$$

$$t^*(q) = \mathbf{t_2} + \Delta \frac{F(\mathbf{t_1}) - F(\mathbf{t_3})}{2(F(\mathbf{t_3}) - 2F(\mathbf{t_2}) + F(\mathbf{t_1}))} = 171.2386 \qquad F(t^*(q)) = -13$$

- *Critério de Paragem*

  $\Delta \leq \varepsilon \Leftrightarrow 20 \leq 2$ (falso)

  $\delta = M\delta = 0.1 \times 10 = 1$

- **2ª iteração**

$$\begin{cases} t_1 = 171.2386 \\ F(t_1) = -13 \quad \underline{\textit{procurar para a direita}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 = 171.2386 + \delta = 171.2386 + 1 = 172.2386 \\ F(t_2) = -12.9996 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{procurar para a esquerda}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{-1} = 171.2386 - \delta = 171.2386 - 1 = 170.2386 \\ F(t_{-1}) = -12.7576 \quad \uparrow \quad \underline{\textit{ordenar pontos}} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{t_1} \leftarrow 170.2386 & F(\mathbf{t_1}) = -12.7576 \\ \mathbf{t_2} \leftarrow 171.2386 & F(\mathbf{t_2}) = -13 \\ \mathbf{t_3} \leftarrow 172.2386 & F(\mathbf{t_3}) = -12.9996 \end{array}\right\} \qquad \Delta = 1$$

$$t^*(q) = \mathbf{t_2} + \Delta \frac{F(\mathbf{t_1}) - F(\mathbf{t_3})}{2(F(\mathbf{t_3}) - 2F(\mathbf{t_2}) + F(\mathbf{t_1}))} = 171.7370 \qquad F(t^*(q)) = -12.9999$$

- *Critério de Paragem*

  $\Delta \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 \leq 2$ (verdadeiro)

$t_{\max} \approx 171.7370, f_{\max} \approx 12.9999$

7.6 $f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_1)^2 + x_1 x_2$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1(1-x_1)^2 - 2x_1^2(1-x_1) + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1(1-x_1)(1-x_1-x_1) + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x_1 - 2x_1^2)(1-2x_1) + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} (2-4x_1)(1-2x_1) - 2(2x_1 - 2x_1^2) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^* = (0, 0)$

$$\nabla^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(2) = 2 > 0 \qquad \det(\nabla^2 f(x^*)) = -1 < 0$ logo a matriz é indefinida $\Rightarrow x^*$ é ponto sela.

7.7 $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 3x^2 \\ -2y \end{pmatrix}$$

$(x, y)^* = (-2, 0)$

$$\nabla f((x, y)^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^* \text{ é ponto estacionário}$$

$(x, y)^{**} = (0, 0)$

$$\nabla f((x,y)^{**}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{**} \text{ é ponto estacionário}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3x^2 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x(2+x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Os únicos pontos estacionários são $(-2, 0)$ e $(0, 0)$.

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6+6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f((x,y)^*) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det(-6) = -6 < 0$, $\quad \det(\nabla^2 f((x,y)^*)) = 12 > 0$, logo a matriz é definida negativa $\Rightarrow (x,y)^*$ é maximizante.

$$\nabla^2 f((x,y)^{**}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det(6) = 6 > 0$, $\quad \det(\nabla^2 f((x,y)^{**})) = -12 < 0$, logo a matriz é indefinida $\Rightarrow (x,y)^{**}$ é ponto sela.

7.8 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^4 - 32x_3 + 6x_1x_2 + 5x_2$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 10x_1 + 6x_2 \\ 4x_2 + 6x_1 + 5 \\ 4x_3^3 - 32 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 + 6x_2 = 0 \\ 4x_2 + 6x_1 + 5 = 0 \\ 4x_3^3 - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 + 6x_2 = 0 \\ 4x_2 + 6x_1 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Cálculo de x_1 e x_2:

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & | & 0 \\ 6 & 4 & | & -5 \end{pmatrix} \underset{m_{21} = -0.6}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 10 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0.4 & | & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 7.5 \\ x_2 = -12.5 \end{cases}$$

$x^* = (7.5, -12.5, 2)$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12x_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = 10 \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \nabla^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

Cálculo do determinante de A_3 por EGPP

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix} \underset{m_{21}=-0.6}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

$\det(A_1) = 10 > 0,\ \det(A_2) = 4 > 0,\ \det(A_3) = 10 \times 0.4 \times 48 = 192 > 0$, logo a matriz é definida positiva $\Rightarrow x^*$ é minimizante.

7.9 $f(x_1, x_2) = 4{x_1}^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 4x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & | & 0 \\ -4 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \underset{m_{21}=0.5}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 8 & -4 & | & 0 \\ -4 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow 8x_1 - 4x_2 = 0$$

$8x_1 - 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 - 2x_1 = 0$ Sistema possível e indeterminado

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(8) = 8 > 0$, $\det(\nabla^2 f(x)) = 0$ logo a matriz é semi-definida positiva $\Rightarrow$ condição necessária para um ponto ser minimizante.

Como $x_2 - 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2x_1$, substituindo em $f(x_1, x_2)$ resulta $f(x) = 8x_1^2 - 8x_1^2 = 0$, logo todos os pontos de $x_2 - 2x_1 = 0$ são minimizantes.

7.10 $\max \overline{f}(x_1, x_2) = -\sin(x_1 - 1) - x_2^4$

$\min f(x_1, x_2) = \sin(x_1 - 1) + x_2^4$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_1 - 1) \\ 4x_2^3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1 - 1) & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

Iniciar o algoritmo de Segurança de Newton: $x^1 = (1, 1), \eta = 10^{-6}, \mu = 10^{-6}, \varepsilon = 1$

- **1ª iteração**

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direcção d_N^1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 12 & | & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{sistema impossível} \Rightarrow d_{SN}^1 = -\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$$x^{\text{aux}} = x^1 + \alpha d_{SN}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(x^1) = 1 \\ f(x^{\text{aux}}) = 80.158562 \quad \uparrow \end{cases}$$

$\alpha = 0.5 \times 1 = 0.5$

$$x^{\text{aux}} = x^1 + \alpha d_{SN}^1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(x^1) = 1 \\ f(x^{\text{aux}}) = 0.520574 \quad \downarrow \end{cases}$$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^1) + \mu\alpha\nabla f(x^1)^T d^1_{SN} \Leftrightarrow 0.520574 \leq 1 + 10^{-6} \times 0.5 \times (-17)$

$\Leftrightarrow 0.520574 \leq 1.0000085$ (verdadeiro) logo a descida é significativa.

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- *Critério de Paragem*

$$\|\nabla f(x^2)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.877583 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|_2 = 4.095138 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$$

- **2ª iteração**

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 0.877583 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x^2) = \begin{pmatrix} 0.479426 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direcção d^2_N

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.479426 & 0 & -0.877583 \\ 0 & 12 & 4 \end{array}\right) \rightarrow d^2_N = \begin{pmatrix} -1.830487 \\ 0.333333 \end{pmatrix}$$

O sistema tem solução única.

$$\nabla f(x^2)^T d^2_N = \begin{pmatrix} 0.877583 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.830487 \\ 0.333333 \end{pmatrix} = -2.939736$$

$\left|\nabla f(x^2)^T d^2_N\right| = 2.939736 > 10^{-6}$, logo d^2_N não é ortogonal ao gradiente.

$\nabla f(x^2)^T d^2_N = -2.939736 > 10^{-6}$, logo d^2_N não é ascendente.

$$d^2_{SN} = d^2_N = \begin{pmatrix} -1.830487 \\ 0.333333 \end{pmatrix}$$

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$$x^{\text{aux}} = x^2 + \alpha d^2_{SN} = \begin{pmatrix} -1.330487 \\ -0.666667 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(x^2) = 0.520574 \\ f(x^{\text{aux}}) = -0.527518 \quad \downarrow \end{cases}$$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^2) + \mu\alpha \nabla f(x^2)^T d_{SN}^2 \Leftrightarrow -0.527518 \leq 0.520574 + 10^{-6} \times 1 \times (-2.939736)$ (verdadeiro), logo a descida é significativa.

$$x^3 = \begin{pmatrix} -1.330487 \\ -0.666667 \end{pmatrix}$$

- *Critério de Paragem*

  $$\|\nabla f(x^3)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.688697 \\ -1.185187 \end{pmatrix} \right\|_2 = 1.676108 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$$

Como o número máximo de iterações é dois,

$$x_{\max} \approx \begin{pmatrix} -1.330487 \\ -0.666667 \end{pmatrix} \text{ e } f_{\max} \approx 0.527518$$

7.11 a) Formular problema sem restrições

$$\begin{aligned} &\min \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 40 \Rightarrow x_3 = 40 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

$$\min \quad x_1^2 + x_2^2 + (40 - x_1 - x_2)^2$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2(40 - x_1 - x_2) \\ 2x_2 - 2(40 - x_1 - x_2) \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Iniciar o algoritmo de Segurança de Newton: $x^1 = (10, 10), \eta = 0.00001, \mu = 0.001, \varepsilon = 0.001$

- **1ª iteração**

  $$x^1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x^1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direcção d_N^1

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & | & 20 \\ 2 & 4 & | & 20 \end{pmatrix} \underset{m_{21}=-0.5}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 2 & | & 20 \\ 0 & 3 & | & 10 \end{pmatrix} \rightarrow d_N^1 = \begin{pmatrix} 3.333333 \\ 3.333333 \end{pmatrix}$$

O sistema tem solução única.

$$\nabla f(x^1)^T d_N^1 = \begin{pmatrix} -20 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.333333 \\ 3.333333 \end{pmatrix} = -133.333320$$

$\left|\nabla f(x^1)^T d_N^1\right| = 133.333320 > 0.00001$ logo d_N^1 não é ortogonal ao gradiente.

$\nabla f(x^1)^T d_N^1 = -133.333320 \leq 0.00001$ logo d_N^1 é descendente.

$$d_{SN}^1 = d_N^1 = \begin{pmatrix} 3.333333 \\ 3.333333 \end{pmatrix}$$

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$$x^{\text{aux}} = x^1 + \alpha d_{SN}^1 = \begin{pmatrix} 13.333333 \\ 13.333333 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(x^1) = 600 \\ f(x^{\text{aux}}) = 533.333333 \quad \downarrow \end{cases}$$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^1) + \mu\alpha\nabla f(x^1)^T d_{SN}^1 \Leftrightarrow 533.333333 \leq 600 + 0.001 \times 1 \times (-133.333320) \Leftrightarrow$ $533.333333 \leq 599.866667$ (verdadeiro), logo a descida é significativa.

$$x^2 = \begin{pmatrix} 13.333333 \\ 13.3333333 \end{pmatrix}$$

- *Critério de Paragem*

$$\|\nabla f(x^2)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.000002 \\ -0.000002 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0.000003 \leq \varepsilon \quad \text{(verdadeiro)}$$

- **2ª iteração**

$$x^2 = \begin{pmatrix} 13.333333 \\ 13.333333 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} -0.000002 \\ -0.000002 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x^2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direcção d_N^2

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & | & 0.000002 \\ 2 & 4 & | & 0.000002 \end{pmatrix} \underset{m_{21}=-0.5}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 2 & | & 0.000002 \\ 0 & 3 & | & 0.000001 \end{pmatrix} \rightarrow d_N^2 = \begin{pmatrix} 0.000000 \\ 0.000000 \end{pmatrix}$$

O sistema tem solução única.

$$x^3 = x^2 = \begin{pmatrix} 13.333333 \\ 13.3333333 \end{pmatrix}$$

- *Critério de Paragem*

  $\|\nabla f(x^3)\|_2 = 0.000003 \leq \varepsilon \quad$ (verdadeiro)

$x_1 \approx 13.333333, x_2 \approx 13.333333, x_3 \approx 13.333334$ e $f_{\min} \approx 533.333333$

7.12 a) Formular problema sem restrições

$$\begin{array}{ll} \min & 0.1 + 0.25x + 0.08 + 0.12y + 0.00125y^2 + 0.05 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3 \\ \text{s.a.} & x + y + z = 100 \Rightarrow x = 100 - y - z \end{array}$$

$$\begin{aligned} \min \quad f(y,z) = \; & 0.23 + 0.25(100 - y - z) + 0.12y + 0.00125y^2 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3 \\ = \; & 25.23 - 0.13y + 0.00125y^2 - 0.16z + 0.001z^2 + 0.0001z^3 \end{aligned}$$

$$\nabla f(y,z) = \begin{pmatrix} -0.13 + 0.0025y \\ -0.16 + 0.002z + 0.0003z^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(y,z) = \begin{pmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.002 + 0.0006z \end{pmatrix}$$

b) Iniciar o algoritmo de Segurança de Newton: $(y^1, z^1) = (30, 50), \eta = 0.0001, \mu = 0.01, \varepsilon = 0.5$

- **1ª iteração**

  $$(y^1, z^1) = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(y^1, z^1) = \begin{pmatrix} -0.055 \\ 0.69 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(y^1, z^1) = \begin{pmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.032 \end{pmatrix}$$

  Cálculo da direcção d_N^1

  $$\left(\begin{array}{cc|c} 0.0025 & 0 & 0.055 \\ 0 & 0.032 & -0.69 \end{array}\right) \rightarrow d_N^1 = \begin{pmatrix} 22 \\ -21.5625 \end{pmatrix}$$

  O sistema tem solução única.

  $$\nabla f(y^1, z^1)^T d_N^1 = \begin{pmatrix} -0.055 & 0.69 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ -21.5625 \end{pmatrix} = -16.088125$$

  $\left|\nabla f(y^1, z^1)^T d_N^1\right| = 16.088125 > 0.0001$ logo d_N^1 não é ortogonal ao gradiente.

$\nabla f(y^1,z^1)^T d_N^1 = -16.088125 \leq 0.0001$ logo d_N^1 é descendente.

$d_{SN}^1 = d_N^1 = \begin{pmatrix} 22 \\ -21.5625 \end{pmatrix}$

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$(y^{\text{aux}}, z^{\text{aux}}) = (y^1, z^1) + \alpha d_{SN}^1 = \begin{pmatrix} 52 \\ 28.4375 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} f(y^1,z^1) = 29.455 \\ f((y^{\text{aux}}, z^{\text{aux}})) = 20.408408 \quad \downarrow \end{cases}$

Critério de Armijo

$f((y^{\text{aux}}, z^{\text{aux}})) \leq f(y^1,z^1) + \mu\alpha\nabla f(y^1,z^1)^T d_{SN}^1 \Leftrightarrow 20.408408 \leq 29.455 + 0.01 \times 1 \times (-16.088125) \Leftrightarrow 20.408408 \leq 29.294119$ (verdadeiro) logo a descida é significativa.

$(y^2,z^2) = \begin{pmatrix} 52 \\ 28.4375 \end{pmatrix}$

- *Critério de Paragem*

  $\|\nabla f(y^2,z^2)\|_2 = 0.139482 \leq \varepsilon \quad$ (falso)

- **2ª iteração**

$(y^2,z^2) = \begin{pmatrix} 52 \\ 28.4375 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(y^2,z^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.139482 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(y^2,z^2) = \begin{pmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.019063 \end{pmatrix}$

Cálculo da direcção d_N^2

$\left(\begin{array}{cc|c} 0.0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.019063 & -0.139482 \end{array}\right) \rightarrow d_N^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7.316897 \end{pmatrix}$

O sistema tem solução única.

$\nabla f(y^2,z^2)^T d_N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.139482 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -7.316897 \end{pmatrix} = -1.020575$

$\left|\nabla f(y^2,z^2)^T d_N^2\right| = 1.020575 > 0.0001$ logo $d_N^{(2)}$ não é ortogonal ao gradiente.

$\nabla f(y^2,z^2)^T d_N^2 = -1.020575 \leq 0.0001$ logo $d_N^{(2)}$ é descendente.

$d_{SN}^{(2)} = d_N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7.316897 \end{pmatrix}$

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$(y^{\text{aux}}, z^{\text{aux}}) = (y^2, z^2) + \alpha d_{SN}^2 = \begin{pmatrix} 52 \\ 21.120603 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} f(y^2, z^2) = 20.408408 \\ f(y^{\text{aux}}, z^{\text{aux}}) = 19.858931 \quad \downarrow \end{cases}$

Critério de Armijo

$f(y^{\text{aux}}, z^{\text{aux}}) \leq f(y^2, z^2) + \mu\alpha\nabla f(y^2, z^2)^T d_{SN}^{(2)} \Leftrightarrow 19.858931 \leq 20.408408 + 0.01 \times 1 \times (-1.020575) \Leftrightarrow 19.858931 \leq 20.398202$ (verdadeiro) logo a descida é significativa.

$(y^3, z^3) = \begin{pmatrix} 52 \\ 21.120603 \end{pmatrix}$

- *Critério de Paragem*

  $\|\nabla f(y^3, z^3)\|_2 = 0.016065 \leq \varepsilon \quad$ (verdadeiro)

$$(x, y, z)_{\min} \approx \begin{pmatrix} 26.879397 \\ 52 \\ 21.120603 \end{pmatrix} \text{ e } f_{\min} \approx 19.858931$$