Funções de Várias Variáveis - Gradiente

Definição: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D um conjunto aberto e $(a,b) \in D$. Chama-se **gradiente** de f em (a,b) e representa-se por grad $f(a,b)$ ou $\overrightarrow{\nabla} f(a,b)$ ao vector das suas derivadas parciais em (a,b),

$$\text{grad } f(a,b) = \overrightarrow{\nabla} f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

Exemplo: Determine o vector gradiente de $f(x,y) = x^2y - xe^y$ no ponto $P(2,0)$.

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \left(2xy - e^y, x^2 - xe^y\right)$$

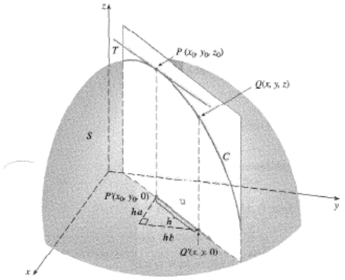
$$\overrightarrow{\nabla} f(2,0) = (-1,2)$$

Derivada direcional

- Seja **A derivada direccional** de f em (x_0, y_0) na direcção do vector unitário $\hat{u} = (a, b)$ é:

$$D_{\hat{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{1}$$

A interpretação geométrica pode ser vista na figura a seguir:



- Representa o declive da recta T, tangente a S em P.

- Se f é uma função diferenciável num aberto U de R^2 onde f tem derivada direccional segundo a direcção dum qualquer vector unitário $\overrightarrow{\hat{u}} = (u_1, u_2)$ então,

$$D_{\overrightarrow{\hat{u}}} f(x,y) = \overrightarrow{\nabla} f(x,y) . \overrightarrow{\hat{u}} \tag{2}$$

- Se o vector que define a direcção é o vector unitário $\hat{u}$, se este vector fizer um ângulo de θ com o semieixo positivo das abcissas, então $\hat{u} = (cos(\theta), sen(\theta))$ pelo que,

$$D_{\hat{u}} f(x,y) = \overrightarrow{\nabla} f(x,y).(cos(\theta), sen(\theta)) \tag{3}$$

por isso a derivada direccional de f segundo $\hat{u}$ seja também designada de **derivada de f na direcção de** θ.

Derivadas de funções implícitas

- Seja F uma função definida numa região $D \subset R^2$, contendo uma bola aberta B de centro em (x_0, y_0).
  Se $F(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ são funções contínuas em B, então a equação $F(x, y) = 0$ define implicitamente y como função de x, num aberto $B' \subset B$ e contendo (x_0, y_0) e a derivada $\frac{dy}{dx}$ é dada por:

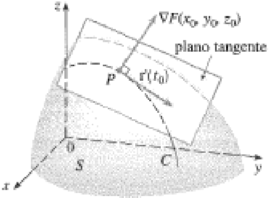
$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} \tag{4}$$

  com $(x, y) \in B'$.

- Mostre que $xy^2 - x = 2y^3 - 1$ define y como função implícita de x no ponto (5,2). Calcule $\frac{dy}{dx}(5)$.

Plano tangente e recta normal a superfície num ponto

- Seja uma supefície com equação $F(x, y, z) = K$. Considere-se que $P \equiv (x_0, y_0, z_0)$ é um ponto sobre a supefície S, e seja C uma curva contida em S que passa em P.



A curva C é descrita como uma função vectorial $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Seja t_0 o valor do parâmetro t para o qual se obtém P.

- Como $C \in S$ qualquer ponto de C tem que satizfazer a equação de S $F(x(t), y(t), z(t)) = K$. Vamos agora calcular dF,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \tag{5}$$

Atendendo á definição de gradiente podemos reescrever a equação (5) como:

$$\overrightarrow{\nabla} F . \overrightarrow{r}'(t) = 0 \tag{6}$$

em particular, se $t = t_0$, temos:

$$\overrightarrow{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) . \overrightarrow{r}'(t_0) = 0 \tag{7}$$

- Isto significa que o vector gradiente de F no ponto P é perpendicular ao vector tangente a qualquer curva C de S que passe por P. Qualquer recta do plano tangente a S em P é igualmente perpendicular ao gradiente de F em P. Logo, obtemos a equação do plano tangente a S em P.

$$\overrightarrow{\nabla} F(x_0, y_0, z_0).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \tag{8}$$

  Por outro lado, se o vector gradiente de F no ponto P é perpendicular ao vector tangente a qualquer curva C de S, as suas coordenadas dão-nos a direcção dum vector normal a S em P. Assim podemos dizer que a equação da recta normal a S que passa por P é:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \overrightarrow{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) \tag{9}$$

Extremos de funções de 2 variáveis

Hessiano e matriz Hessiana

Chama-se matriz Hessiana de uma função $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ à matriz de ordem n

$$H(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

A matriz pode ser interpretada como sendo a jacobiana do sistema

$$\begin{cases} y_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ y_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \\ y_n = \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{cases}$$

Sendo sempre a matriz hessiana de uma função f uma matriz quadrada, pode-se falar do seu determinante que se chama Hessiano de f.

Funções de várias variáveis

Considerando por exemplo uma função de duas variáveis $f(x, y)$ a sua matriz hessiana será:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

e o seu hessiano, evidentemente

$$|H(x,y)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Se f admitir derivadas contínuas até à segunda ordem $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e a expressão anterior toma a forma

$$|H(x,y)| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Extremos livres

Definição: A função f tem um máximo (mínimo) absoluto no ponto $X_0 \in D$ quando $f(X_0) \geq f(X)$ $(f(X_0) \leq f(X))$, para todo $X \in D$.

Nota: Um máximo (mínimo) é próprio ou impróprio consoante a igualdade é excluída ou incluída.

Definição: A função f tem um máximo (mínimo) relativo no ponto $X_0 \in D$ quando $f(X_0) \geq f(X)$ $(f(X_0) \leq f(X))$, para todo $X \in D$ e pertencente a uma vizinhança do ponto X_0.

Nota: Os máximos ou mínimos costumam designar-se, genericamente por **extremo** e o ponto X_0 **extremante** (maximizante ou minimizante).

Funções de várias variáveis

Seja $f(x,y)$ uma função que admite derivadas parciais de 1^aordem.

Condição de primeira ordem de estacionariedade:

Permite determinar os pontos críticos.
É condição condição necessária para que $f\,(x,y)$ admite um extremo no ponto $P(x_0,y_0)$, que as suas derivadas parciais de 1^oordem no ponto sejam nulas, isto é, $\overrightarrow{\nabla}_f(x_0,y_0)=\overrightarrow{0}$.

Condição de segunda ordem de estacionariedade:

Permite definir se um ponto crítico é ou não extremo e determinar a sua natureza.
Seja P o ponto crítico.

Seja $\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$

i) se $\Delta > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ então $f(x_0, y_0)$ é um mínimo relativo (definida positiva).

ii) se $\Delta > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ então $f(x_0, y_0)$ é um maximo relativo (definida negativa).

iii) se $\Delta < 0$ então $f(x_0, y_0)$ não é extremo local de f , é um ponto de sela.

iv) se $\Delta = 0$ a existência de extremos da função no ponto (x_0, y_0) fica indeterminada.

Exemplo:
Determinar, se existirem, os extremos das seguintes funções

a) $f(x, y) = 2y^2 + 2x^2 + 2xy - 8y - 10x + 3$ b) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - y^2$