Cálculo EE

Ficha 2 2012/2013

Derivadas

1. Calcule as derivadas (onde existirem) das funções definidas por

   (a) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x^2}$; (b) $g(x) = \sqrt{x^3} + (3x^3 - e^{x^2} + \cos\sqrt{x}\,)^5$;

   (c) $h(y) = e^y + y^{\mathrm{e}}$; (d) $j(y) = 3y^2 \operatorname{sen} 2y + y \cos \dfrac{y}{2}$;

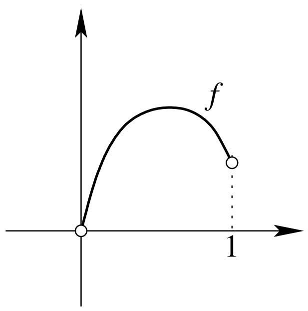
   (e) $m(u) = \cos\left(e^{u^2 + \log u}\right)$; (f) $\ell(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + \cos u}}$;

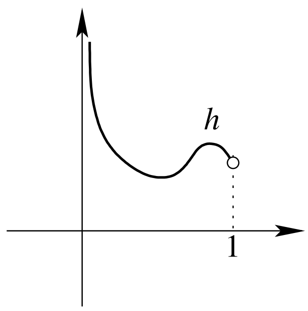
   (g) $o(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$; (h) $p(z) = \log\left(\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{sen} z^2\right)$.

2. Indique, justificando, se cada uma das funções definidas a seguir é derivável no respectivo domínio. Nos pontos onde não existir derivada, averigue se existem as derivadas laterais.

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 3, \\ 3x & \text{se} \quad x \geq 3; \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$

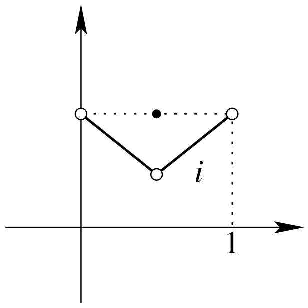
3. Considere as funções $f, h, i, j, k :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dadas a seguir pelos seus gráficos.

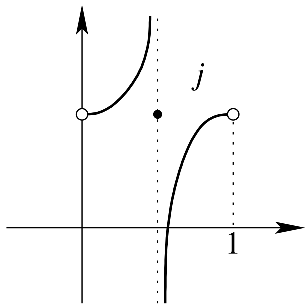


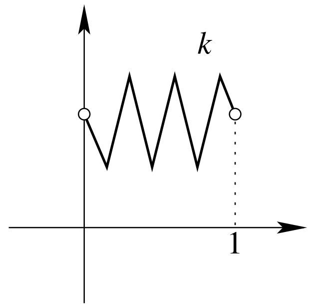


   (a) Indique as funções que são deriváveis.

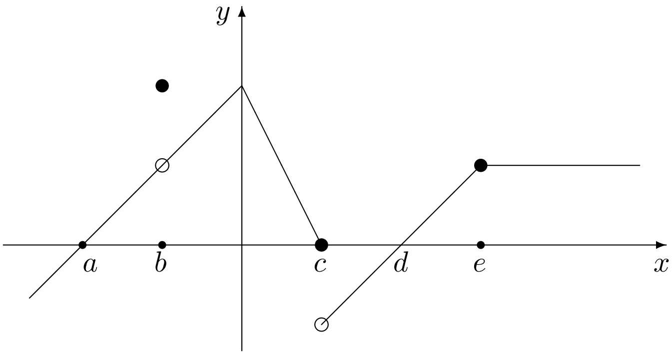
   (b) Indique as funções que não são deriváveis em mais do que um ponto.





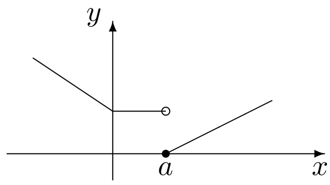


4. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ representada graficamente na figura seguinte



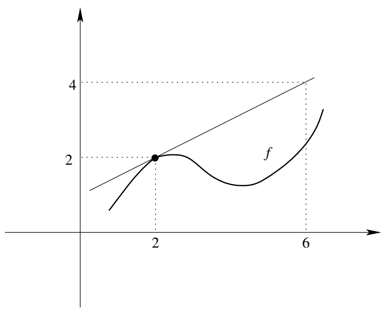
Indique os pontos onde f não é derivável, especificando se existem as derivadas laterais e indicando o seu sinal.

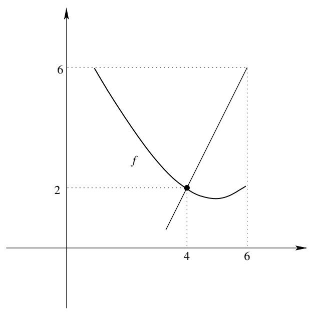
5. Esboce o gráfico da derivada da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ representada na figura ao lado.



6. Defina duas funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas apenas num ponto $a \in \mathbb{R}$, para as quais exista $f'(a)$ e não exista $g'(a)$.

7. A figura em baixo à esquerda representa o gráfico de uma função f e da recta tangente no ponto $(2, 2)$. Sendo $g(x) = f(x^2 - 2)$, determine $g'(2)$.





8. A figura em cima à direita representa o gráfico de uma função f e da recta perpendicular no ponto $(4, 2)$. Sendo $g(x) = f(5x - x^2)$, determine $g'(1)$?

9. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis e considere a seguinte tabela que mostra alguns dos seus valores e das correspondentes derivadas. Determine $h'(2)$ para:

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	5	5	e	$\sqrt{2}$
5	2	8	π	7

(a) $h = f \circ g$;
(b) $h = g \circ f$;
(c) $h = f \circ f$.

10. Seja $k\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $k'(1) = 2$.

Determine a derivada de:

(a) $k(2x)$, para $x = 1/2$; (b) $k(x + 1)$, para $x = 0$; (c) $k\left(\dfrac{x}{4}\right)$, para $x = 4$.

11. Usando o teorema de Rolle, mostre que a equação $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ possui exactamente duas raízes reais.

12. Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 1 - x^{2/3}$.

    (a) Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$.

    (b) Mostre que $f'(x)$ nunca se anula em $]-1, 1[$.

    (c) Exlique porque não há qualquer contradição com o teorema de Rolle.

13. Seja $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = x - e^{x-1}$.

    (a) Verifique que $g(1) = g'(1) = 0$.

    (b) Mostre que $z = 1$ é o único zero de g.

14. Diga, justificando devidamente, se existe alguma função derivável $g\colon [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(0) = -3$, $g(5) = 5$ e $g'(x) \leq 1$ para todo $x \in]0,5[$.

15. Usando o teorema do valor médio de Lagrange, mostre que $e^x > 1+x$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
    Sugestão: considere separadamente os casos $x > 0$ e $x < 0$.

16. Diga, justificando devidamente, se existe alguma função $f\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0$ para $x \in [0,1]$ e $f'(x) = 1$ para $x \in]1,2]$.

17. Calcule os seguintes limites, indicando, quando for o caso, o tipo de indeterminação presente:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \operatorname{sen}^2 \sqrt{x}}{x}$;

    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\operatorname{sen} 5x)}{\log(\operatorname{sen} 6x)}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$;

    (g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2x + \operatorname{sen} x}$; (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$;

    (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$; (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \log x$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (e^x - x)^{1/x}$;

18. Determine o polinómio de Taylor de ordem n da função f apresentada a seguir, em torno do ponto a indicado:

    (a) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 50$, $a = 0$;

    (b) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 7$, $a = 0$;

    (c) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 8$, $a = 0$;

    (d) $f(x) = \log x$, $x \in \mathbb{R}^+$, $n = 5$, $a = 1$;

19. Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que o seu polinómio de Taylor de ordem 6 em torno de 0 é

$$P_{6,0}(x) = 3x - 4x^3 + 5x^6 .$$

Determine $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$, $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$.

20. Sejam $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sabendo que $P(x) = 2x + 1$ coincide simultaneamente com o polinómio de Taylor de primeira ordem de f em torno do ponto 0 e com o polinómio de Taylor de segunda ordem de g em torno do ponto 1, determine $f(0)$, $f'(0)$, $g(1)$, $g'(1)$ e $g''(1)$.

21. Seja $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ o polinómio de Taylor de terceira ordem em torno do ponto 1 de $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Determine o correspondente polinómio de Taylor de segunda ordem.

22. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $f(3) = 1$, $f'(3) = -2$, $f''(3) = 3$ e $f'''(3) = -5$. Determine os polinómios de Taylor de ordens 2 e 3 da função f em torno do ponto 3. Use os dois polinómios para aproximar o valor de $f(2,9)$.

23. Escreva o polinómio $x^3 - 15x^2 + 75x - 120$ em potências de $x - 5$.

24. Determine o polinómio do terceiro grau cujas derivadas de ordens $0, 1, 2$ e 3 no ponto 3 são todas iguais a 3.

25. Usando a fórmula de Taylor-Lagrange, mostre que se tem

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| \le \frac{1}{6}\,, \quad \forall x \in [0,1].$$

26. Apresente uma estimativa para o erro cometido ao usar o polinómio $P_{7,0}(x)$ para aproximar o valor de $\operatorname{sen} x$ no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.