Complementos de Análise Matemática EE

Departamento de Matemática e Aplicações

2012/2013

Folha de Exercícios 4

Solução de equações diferenciais lineares de ordem n

Eng$^{\text{a}}$. de Comunicações, Eng$^{\text{a}}$. de Polímeros

Propriedades da equação homogénea

1. Considerar a equação diferencial $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$.

   (a) Mostrar que e^x, e^{2x} e e^{-2x} são soluções linearmente independentes desta equação.

   (b) Escrever a solução geral da equação dada.

   (c) Determinar a solução que satisfaz as seguintes condições:
   $y(0) = 1, y'(0) = -3$ e $y''(0) = 1$.

2. Relativamente a cada uma das proposições seguintes indicar se é verdadeira ou falsa, justificando adequadamente.

   (a) Sabe-se que determinada equação diferencial linear homogénea de 2$^{\text{a}}$ ordem admite como solução as funções x e 1. Assim sendo, a solução geral desta equação é $y = c_1e^1 + c_2e^x$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

   (b) A respeito de determinada equação diferencial linear homogénea de 3$^{\text{a}}$ ordem sabe-se que a sua solução geral é $y = c_1 \operatorname{sen}(2x) + c_2 \cos(2x) + c_3e^{2x}$. Nestas condições pode-se afirmar que $\cos(4x)$ não é solução da referida equação diferencial. Pista: $\operatorname{sen}(2x)$, $\cos(2x)$, e^{2x} e $\cos(4x)$ são funções linearmente independentes.

3. Mostrar que se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são duas soluções de $a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$, então $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ também é uma solução dessa equação, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

A redução da ordem

4. Para cada alínea que se segue, verificar que a função dada é solução da respetiva equação diferencial homogénea e obter a correspondente solução geral.

   $(a)\; \frac{x^2}{4}\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad y_1(x) = x^4.$

   $(b)\; x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0,\; x > 0 \qquad y_1(x) = x^2.$

   $(c)\; x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0,\; x > 0 \quad y_1(x) = x.$

Propriedades da equação não homogéna

5. Considerar a equação diferencial não homogénea $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2x$.
   (a) Mostrar que e^x e 1 são soluções linearmente independentes da equação homogénea associada.
   (b) Qual a função complementar associada à equação diferencial dada?
   (c) Mostrar que $1 - 2x - x^2$ é um integral particular da equação dada.
   (d) Qual a solução geral da equação dada?

6. Verificar que $x^3/8$ é um integral particular da seguinte equação diferencial:
   $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x^3$
   e determinar a sua solução geral sabendo que x e x^{-1} são soluções da equação homogénea associada.

7. Sabendo que um integral particular de $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 1$ é $y = \frac{1}{6}$,
   que um integral particular de $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x$ é $y = \frac{x}{6} + \frac{5}{36}$
   e que um integral particular de $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^x$ é $y = \frac{e^x}{2}$,
   determinar um integral particular de $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 2 - 12x + 6e^x$.

Equações homogéneas com coeficientes constantes

8. Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais.
   (a) $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$. (b) $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$. (c) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$.
   (d) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0$. (e) $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$. (f) $\frac{d^3y}{dx^3} - y = 0$.

9. Escrever uma equação diferencial linear homogénea cuja solução geral seja a família de funções dada:
   (a) $y = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3e^{2x}$. (b) $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$.

10. Resolver os seguintes problemas de valores iniciais:
    (a) $9\frac{dy}{dx} - 3y = 0$, $y(3) = 1$. (b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$, $y(\pi) = 1$ e $y'(\pi) = 1$.

11. As raízes da equação característica correspondente a determinada equação diferencial de ordem 10 são: $4, 4, 4, 4, 2 + 3i, 2 + 3i, 2 + 3i, 2 - 3i, 2 - 3i, 2 - 3i$. Escrever a solução geral dessa equação.

Equações não homogéneas: método dos coeficientes indeterminados

12. Determinar a solução dos seguintes problemas de valores iniciais e problemas de valores de fronteira:

    (a) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 3 + 2x^2$, $y(0) = 6$, $y(1) = 9 + e$.

    (b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = (x+1)\,e^x + e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

    (c) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x + \operatorname{sen} x + 1$, $y(\pi) = 0$, $y'(0) = 0$.

    (d) $\frac{d^2y}{dx^2} = xe^{-x}\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

13. Determinar a solução geral da equação diferencial
    $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 3x\cos x + 2e^x - x^2$.
    a partir da solução das equações diferenciais
    $\frac{d^2y}{dx^2} - y = x\cos x$, $\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x$, $\frac{d^2y}{dx^2} - y = x^2$.

Equações diferenciais não homogéneas: método de variação das constantes

14. Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais:

    (a) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x$, $x \in \left]0, \pi/2\right[$. (b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^x}{x^2}$, $x > 0$.

    (c) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cotg} x$, $x \in \left]0, \pi/2\right[$. (d) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^x}{1+x^2}$.

15. Determinar a solução geral de

    (a) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\,(x-2)\,\frac{dy}{dx} + (2-x)\,y = -x^3$, $x > 0$, sabendo que x é uma solução da equação homogénea associada;

    (b) $\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\frac{d^2y}{dx^2} - 2\cos x \operatorname{sen} x\frac{dy}{dx} + \left(1 + \cos^2 x\right) y = \operatorname{sen}^3 x$, $x \in \left]0, \pi/2\right[$, sabendo que $\operatorname{sen} x$ e $x \operatorname{sen} x$ são soluções da equação homogénea associada.

Exercícios diversos

16. Resolver os seguintes problemas de valores iniciais:

    (a) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

    (b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x - e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

17. Considerar a equação diferencial $y''(t) = \sqrt{1 - [y'(t)]^2}$.

    (a) Mostrar que a mudança de variável $y' = v$, transforma a equação dada numa equação de 1ª ordem de variáveis separáveis.
    (b) Resolver a equação obtida na alínea anterior e obter, em seguida, a solução geral da equação diferencial dada.

18. Determinar a solução das equações diferenciais:

    (a) $y^{(5)} + 4y^{(3)} = x^2$.
    (b) $y''' - 2y'' + y' = e^x$.

19. Determinar, justificando, a equação diferencial linear de coeficientes constantes cuja solução geral é

    $y = e^x\left(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x\right) + \frac{1}{6}e^{-2x}$.

20. Mostrar que a equação diferencial $x'' - 2tx' - 2x = 0$ se reduz a uma equação da forma $v'' + a(t)v = 0$, fazendo $x = e^{t^2/2}v(t)$.

21. Considerar a equação diferencial $x^2y'' - x\,(x+2)\,y' + (x+2)\,y = x^3$, $x \neq 0$.

    (a) Mostrar que x e xe^x são soluções linearmente independentes da equação homogénea que lhe está associada.
    (b) Determinar a solução geral da equação diferencial dada.

22. Verificar que as três soluções t, $t\ln t$, t^2 da equação de terceira ordem

    $t^3x''' - t^2x'' + 2tx' - 2x = 0$

    são linearmente independentes. Seguidamente, determinar a solução que satisfaz as condições iniciais $x(1) = 3$, $x'(1) = 2$, $x''(1) = 1$.

Soluções da folha de exercícios 4

1. (a) $W\left(e^x, e^{2x}, e^{-2x}\right) = 12e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
   (b) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$.
   (c) $y = e^x - e^{2x} + e^{-2x}$.

2. (a) Falsa.
   (b) Verdadeira

4. (a) $y = c_1x^4 + c_2x$.
   (b) $y = c_1x^2 + c_2x^{-1}$.
   (c) $y = c_1x + c_2x^{-1}$.
5. (b) $y_c = c_1e^x + c_2$.
   (d) $y = c_1e^x + c_2 + 1 - 2x - x^2$.
6. $y = c_1x + c_2x^{-1} + \frac{x^3}{8}$.
7. $y = 3e^x - \frac{4}{3} - 2x$.
8. (a) $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^x$.
   (b) $y = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x$.
   (c) $y = c_1\cos(2x) + c_2\,\mathrm{sen}\,(2x)$.
   (d) $y = e^{2x}\left[c_1\cos(3x) + c_2\,\mathrm{sen}\,(3x)\right]$.
   (e) $y = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\,\mathrm{sen}\,x$.
   (f) $y = c_1e^x + e^{-x/2}\left[c_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$.
9. (a) $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$.
   (b) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.
10. (a) $y = e^{x/3-1}$.
    (b) $y = -\cos x - \mathrm{sen}\,x$.
11. $\left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3\right)e^{4x} + e^{2x}\left[\left(c_5 + c_6x + c_7x^2\right)\cos(3x) + \left(c_8 + c_9x + c_{10}x^2\right)\mathrm{sen}\,(3x)\right]$.
12. (a) $y = 5 + 3x + x^2 + e^x$.
    (b) $y = -2xe^x + 3e^{2x} - \frac{1}{2}x^2e^x - 3e^x + xe^{2x}$.
    (c) $y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{sen}\,x + \left(\frac{\pi}{2} + 1 - \frac{1}{2}x\right)\cos x + 1$.
    (d) $y = -\frac{1}{2}e^{-x}\left(\cos x + x\,\mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,x\right) + x + \frac{3}{2}$.
13. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - \frac{3}{2}x\cos x + \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,x + xe^x + x^2 + 2$.
14. (a) $y = c_1\cos x + c_2\,\mathrm{sen}\,x + \ln(\cos x)\cos x + x\,\mathrm{sen}\,x$.
    (b) $y = c_1e^x + c_2xe^x - (\ln x)\,e^x$.
    (c) $y = c_1\cos x + c_2\,\mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,x\ln\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{1+\cos x}\right)$.
    (d) $y = c_1e^x + c_2xe^x - \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right)e^x + xe^x\,\mathrm{arctg}\,x$.
15. (a) $y = c_1xe^{-x} + c_2x - x^2$.
    (b) $y = c_1\,\mathrm{sen}\,x + c_2x\,\mathrm{sen}\,x + \frac{x^2}{2}\,\mathrm{sen}\,x$.

16. (a) $y = e^{3x} + e^{x} - 2e^{2x}$.

    (b) $y = -xe^{x} - \frac{1}{6}e^{-x} - \frac{3}{2}e^{x} + \frac{5}{3}e^{2x}$.

17. (a) $\frac{dv}{dt} = \sqrt{1 - v^2}$.

    (b) $y = -\cos(c_1 + t) + c_2$.

18. (a) $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos(2x) + c_5 \operatorname{sen}(2x) - x^3/48 + x^5/240$.

    (b) $y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x} + x^2 e^{x}/2$.

19. $y'' - y' = e^{-2x}$.

21. (b) $y = c_1 x + c_2 x e^{x} - x^2 - x$.

22. $x = t - 3t \ln t + 2t^2$.