Universidade do Minho — MIECOM
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise Matemática B

— folha 2 — Funções Escalares — 2011'12 —

1. Para cada uma das funções que se seguem, determine o seu domínio e o seu contradomínio:

   (a) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$;

   (b) $f(x,y) = -y^2$;

   (c) $f(x,y) = -e^{-x^2-y^2}$;

   (d) $f(x,y) = x^3 - \operatorname{sen} y$;

   (e) $f(x,y) = |xy|$;

   (f) $f(x,y) = \operatorname{sen} y$;

   (g) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$;

   (h) $f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

2. Sem recorrer a instrumentos eletrónicos, faça a correspondência de cada uma das funções do exercício anterior com os gráficos apresentados na última página.

3. Estude a existência dos seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, com $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2\,, \\ 0 & \text{se } y \neq x^2\,; \end{cases}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$, com $g(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } x^2+y^2 \leq 1\,, \\ 5 & \text{se } x^2+y^2 > 1\,; \end{cases}$

4. Calcule, caso exista (ou demonstre que não existe) cada um os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$; (d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,0,1)} \dfrac{x^4 z}{(x^4+y^2)^3}$;

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{2x^2+4y^2}$; (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x+y}{x-y}$;

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$; (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$;

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-2x^2y^3}{2x^4+3y^6}$ (j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$;

(l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2-2y}{x^4+y^2}$; (m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-2x^2+3y}{x^2+y^2}$;

(n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^3}{3x^2+4y^6}$; (o) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$;

5. Estude a continuidade de cada uma das funções $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. Estude a continuidade das funções definidas por:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } xy \neq 0, \\ 0 & \text{se } xy = 0; \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (d) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < y < x^2, \\ 1 & \text{caso contrário;} \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (f) $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq y, \\ y & \text{se } x < y; \end{cases}$

(g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (m) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

7. Usando a definição, calcule a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A)$ da função f no ponto A segundo o vector $\vec{v}$, para:

   (a) $f(x,y) = xy\,,\ \vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\,,\ A = (1,0)$;

   (b) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}\,,\ \vec{v} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2\,,\ A = (1,1)$;

   (c) $f(x,y) = 3x + y^2\,,\ \vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\,,\ A = (0,0)$;

   (d) $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2\,,\ \vec{v} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\,,\ A = (1,2,-1)$;

8. Determine as funções derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por

   (a) $f(x,y) = 5y^3 + 2xy - x^2$;
   (b) $f(x,y) = y\mathrm{e}^{x} + x\cos(x^2y)$;
   (c) $f(x,y) = \log(\cos(xy))$;
   (d) $f(x,y,z) = \operatorname{sen} x + \log x + \mathrm{e}^{xz}$;
   (e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2yz^3}$.

9. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ para qualquer $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, onde:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$;

   (b) $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$;

10. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por

    (a) $f(x,y) = 1$ se $x = 0$ ou $y = 0$ e $f(x,y) = 0$ se $xy \neq 0$;

    (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$;

    (c) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$;

    (d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ se $x+y \neq 0$ e $f(x,y) = x$ se $x+y = 0$;

11. Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das funções definidas por

    (a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y^2}$;
    (b) $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$;
    (c) $f(x,y,z) = \cos(xyz)$;
    (d) $f(x,y,z) = y^2\log x + x\mathrm{e}^{xz}$.

12. Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função f : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

    (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^3$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 + x$;

    (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x \operatorname{sen} y$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y \operatorname{sen} x$.

13. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

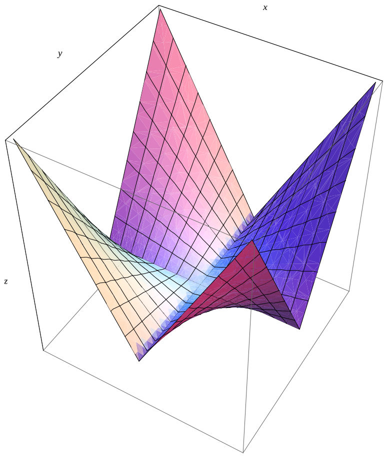
    (b) Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

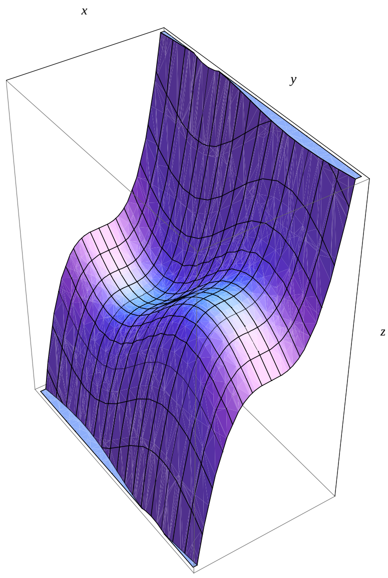
    (c) Explique porque não há contradição com o teorema de Schwarz.

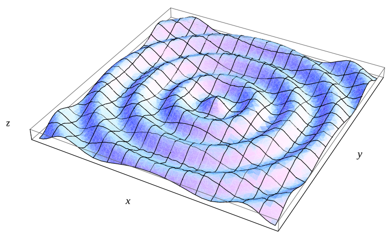
14. Considere a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x+y} & \text{se } x \neq -y, \\ 0 & \text{se } x = -y. \end{cases}$

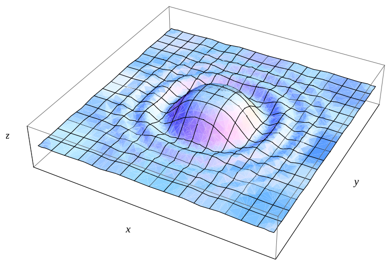
    (a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$.

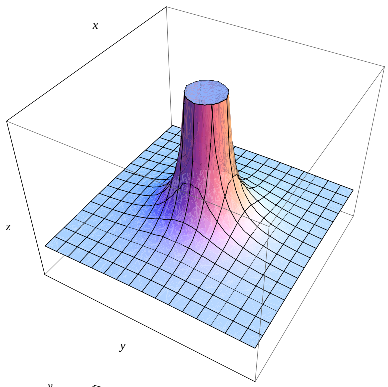
    (b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

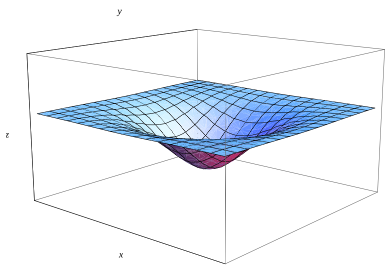

x
y
z

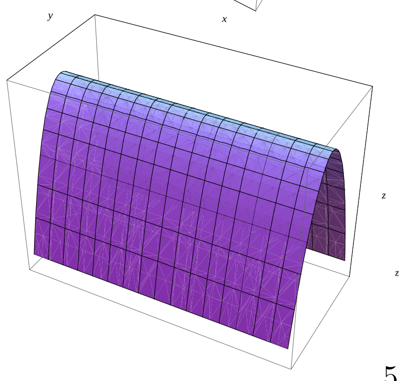

x
y
z

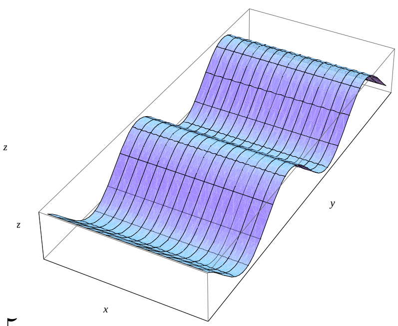

z
y
x


z
y
x


x
z
y


y
z
x


y
x
z


z
y
x