1. Calcule:

a) $\int_0^1\int_0^2\int_0^x (x+2y+z)dzdxdy$

R:

$$\int_0^1\int_0^2\int_0^x (x+2y+z)dzdxdy = \int_0^1\int_0^2\left[x\cdot z+2\cdot y\cdot z+\frac{z^{1+1}}{1+1}\right]_0^x dxdy = \int_0^1\int_0^2\left[x\cdot x+2\cdot y\cdot x+\frac{x^2}{2}\right]dxdy =$$

$$=\int_0^1\left[2\cdot\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)+2\cdot y\cdot\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)\right]_0^2 dy = \int_0^1\left[2\cdot\left(\frac{2^2}{2}\right)+2\cdot y\cdot\left(\frac{2^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2^3}{3}\right)\right]dy =$$

$$=\int_0^1\left[4+4\cdot y+\frac{8}{6}\right]dy = \left[4\cdot y+4\cdot\left(\frac{y^{1+1}}{1+1}\right)+\frac{8}{6}\cdot y\right]_0^1 = \left[4\cdot 1+4\cdot\left(\frac{1^2}{2}\right)+\frac{8}{6}\cdot 1\right] = \frac{44}{6}$$

b) $\int_0^a\int_0^x\int_0^y (x\cdot z)dzdydx$

R:

$$\int_0^a\int_0^x\int_0^y (x\cdot z)dzdydx = \int_0^a\int_0^x x\cdot\left[\frac{z^{1+1}}{1+1}\right]_0^y dydx = \int_0^a\int_0^x x\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]dydx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^a\int_0^x x\cdot\left[y^2\right]dydx =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^a x\cdot\left[\frac{y^{2+1}}{2+1}\right]_0^x dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^a x\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\int_0^a x\cdot\left[x^3\right]dx = \frac{1}{6}\cdot\int_0^a\left[x^4\right]dx = \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{x^{4+1}}{4+1}\right]_0^a =$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{a^5}{5}\right] = \frac{a^5}{30}$$

c) $\int_0^1 \int_{x+1}^{2\cdot x} \int_x^{x+z} (x) dydzdx$

R:

$$\int_0^1 \int_{x+1}^{2\cdot x} \int_x^{x+z} (x) dydzdx = \int_0^1 \int_{x+1}^{2\cdot x} [x \cdot y]_x^{x+z} dzdx = \int_0^1 \int_{x+1}^{2\cdot x} [(x\cdot(x+z)) - (x \cdot x)] dzdx =$$

$$= \int_0^1 \int_{x+1}^{2\cdot x} [(2\cdot x + x \cdot z) - 2 \cdot x] dzdx = \int_0^1 \int_{x+1}^{2\cdot x} [x \cdot z] dzdx = \int_0^1 \left[x \cdot \frac{z^{1+1}}{1+1} \right]_{x+1}^{2\cdot x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(x \cdot \frac{(2\cdot x)^2}{2} \right) - \left(x \cdot \frac{(x+1)^2}{2} \right) \right] dx = \int_0^1 \left[\left(x \cdot \frac{4 \cdot x^2}{2} \right) - \left(x \cdot \frac{(x^2 + 2\cdot x + 1)}{2} \right) \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(x \cdot \frac{4 \cdot x^2}{2} \right) - \left(x \cdot \frac{(x^2 + 2\cdot x + 1)}{2} \right) \right] dx = \int_0^1 \left[\left(\frac{4 \cdot x^3}{2} \right) - \frac{(x^3 + 2\cdot x^2 + x)}{2} \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{3\cdot x^3 - 2\cdot x^2 - x}{2} \right] dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 [3\cdot x^3 - 2\cdot x^2 - x] dx = \frac{1}{2} \cdot \left[3 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} - 2 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{x^{1+1}}{1+1} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[3 \cdot \frac{1^4}{4} - 2 \cdot \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{18}{24} - \frac{16}{24} - \frac{12}{24} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{10}{24} \right] = -\frac{10}{48}$$

d) $\int_0^a \int_0^x \int_0^{x\cdot y} \left(x^3 \cdot y^3 \cdot z\right) dzdydx$

R:

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^{x\cdot y} \left(x^3 \cdot y^3 \cdot z\right) dzdydx = \int_0^a \int_0^x x^3 \cdot y^3 \cdot \left[\frac{z^{1+1}}{1+1}\right]_0^{x\cdot y} dydx = \int_0^a \int_0^x x^3 \cdot y^3 \cdot \left[\frac{(x\cdot y)^2}{2}\right] dydx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^a \int_0^x x^3 \cdot y^3 \cdot \left[(x\cdot y)^2\right] dydx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^a \int_0^x x^3 \cdot y^3 \cdot x^2 \cdot y^2 dydx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^a \int_0^x x^5 \cdot y^5 dydx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^a x^5 \cdot \left[\frac{y^{5+1}}{5+1}\right]_0^x dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^a x^5 \cdot \left[\frac{x^6}{6}\right] dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \int_0^a x^{11} dx = \frac{1}{12} \cdot \left[\frac{x^{11+1}}{11+1}\right]_0^a = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \left[a^{12}\right] = \frac{a^{12}}{144}$$

2. Coloque os limites de integração dos seguintes integrais triplos $\iiint_R f(x;y;z)dV$ **para as regiões R que se indicam a seguir:**

a) R é o domínio limitado pelos planos: $x=0$**,** $y=0$**,** $z=0$ **e** $x+y+z=1$**.**

R:

Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

$$x+y+z=1 \Leftrightarrow z=1-x-y \Rightarrow 0 \le z \le 1-x-y$$

$$z=0 \Rightarrow 0=1-x-y \Leftrightarrow y=1-x \Rightarrow 0 \le y \le 1-x$$

$$\begin{Bmatrix} y=0 \\ z=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 0=1-x-0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow 0 \le x \le 1$$

$$A = \int_0^1 \int_0^{(1-x)} \int_0^{(1-x-y)} 1 \, dzdydx$$

b) R é o domínio limitado pelo parabolóide hiperbólico: $z = x \cdot y$**, e pelos planos:** $x + y = 1$ **e** $z = 0$ $(z \geq 0)$**.**

R:

Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

$$z = x \cdot y \Rightarrow 0 \leq z \leq x \cdot y$$

$$z = 0 \Rightarrow 0 = x \cdot y \Leftrightarrow y = 0 \wedge x \neq 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x + 0 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$A = \int_{?}^{?}\int_{?}^{?}\int_{?}^{?} 1 dzdydx$$

c) R é o sólido limitado por: $x^2 + y^2 = 2z$ **e por:** $z = 2$

R:

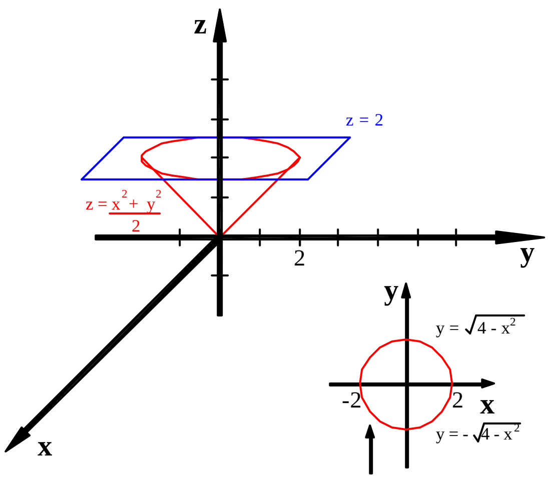
Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

$$x^2 + y^2 = 2z \Leftrightarrow z = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$z = 2 \Rightarrow 2 = \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$$



Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{4} = 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$$A = \int_{-2}^{2} \int_{\left(-\sqrt{4-x^2}\right)}^{\left(\sqrt{4-x^2}\right)} \int_{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}^{2} 1 \ dzdydx \equiv \int_{-2}^{2} \int_{\left(-\sqrt{4-x^2}\right)}^{\left(\sqrt{4-x^2}\right)} \left[2 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right] dydx$$

d) R é o sólido limitado pela superfície: $x^2+y^2=2x$, pelo plano: $z=2$ e pelo plano OXY.

R:

Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

$x^2+y^2=2x \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$

$x^2+y^2=2x \Leftrightarrow x^2+y^2-2x=0 \Leftrightarrow$

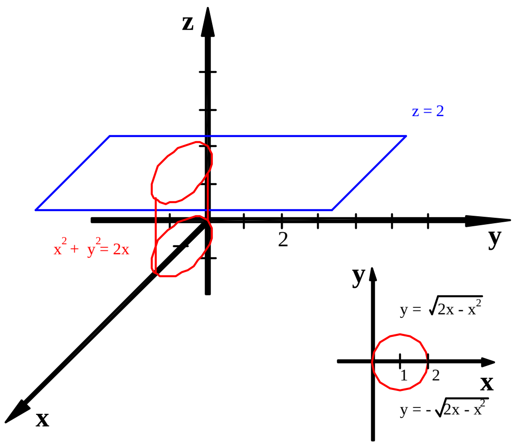
$\Leftrightarrow (x^2-2x+y^2)+1=0+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow$

Circunferência de centro (1;0) e raio $\sqrt{1}=1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$

Plano OXY $\Rightarrow z=0$ e plano: $z=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \; 0 \leq z \leq 2$



$$A=\int_0^2\int_0^2\int_{\left(-\sqrt{2x-x^2}\right)}^{\sqrt{2x-x^2}} 1 \; dydxdz$$

3. Calcule os volumes dos corpos limitados pelas superfícies dadas, utilizando integrais triplos:

a) Pelos planos: $x=0$**,** $y=0$**,** $z=0$ **e** $x+y+z=9$**.**

R:

Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

$$x+y+z=9 \Leftrightarrow z=9-x-y \Rightarrow 0 \le z \le 9-x-y$$

$$z=0 \Rightarrow 0=9-x-y \Leftrightarrow y=9-x \Rightarrow 0 \le y \le 9-x$$

$$\left\{\begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0=9-x-0 \Leftrightarrow x=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le x \le 9$$

$$V=\int_0^9 \int_0^{(9-x)} \int_0^{(9-x-y)} 1 \, dzdydx$$

Calculando agora o volume teremos:

$$V=\int_0^9 \int_0^{(9-x)} \int_0^{(9-x-y)} 1 \, dzdydx \Leftrightarrow V=\int_0^9 \int_0^{(9-x)} [z]_0^{9-x-y} dydx \Leftrightarrow V=\int_0^9 \int_0^{(9-x)} [9-x-y] dydx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^9 \left[9 \cdot y - x \cdot y - \frac{y^{1+1}}{1+1}\right]_0^{9-x} dx \Leftrightarrow V=\int_0^9 \left[9 \cdot (9-x) - x \cdot (9-x) - \frac{(9-x)^2}{2}\right] dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^9 \left[(81-9 \cdot x) - (9 \cdot x - x^2) - \frac{(81-18 \cdot x + x^2)}{2}\right] dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^9 \left[\frac{(162-18 \cdot x)}{2} - \frac{(18 \cdot x - 2 \cdot x^2)}{2} - \frac{(x^2-18 \cdot x+81)}{2}\right] dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^9 \left[\frac{162-18 \cdot x - 18 \cdot x + 2 \cdot x^2 - x^2 + 18 \cdot x - 81}{2}\right] dx \Leftrightarrow V=\int_0^9 \left[\frac{x^2-18 \cdot x+81}{2}\right] dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{2}\cdot\int_0^9 \left[x^2 - 18\cdot x + 81\right]dx \Leftrightarrow V = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^{2+1}}{2+1} - 18\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + 81\cdot x\right]_0^9 \Leftrightarrow V = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{9^3}{3} - 18\cdot\frac{9^2}{2} + 81\cdot 9\right] \Leftrightarrow$$

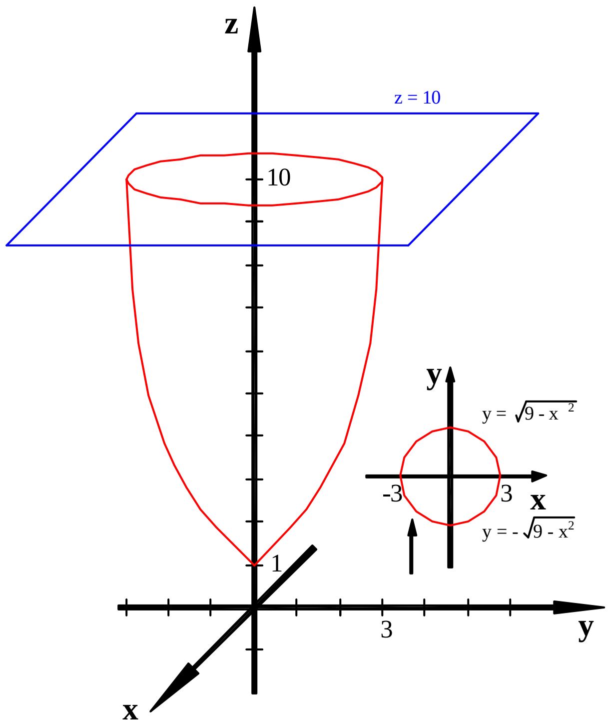
$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{729}{3} - 9\cdot 81 + 81\cdot 9\right] \Leftrightarrow V = \frac{1}{2}\cdot[243] \Leftrightarrow V = \frac{243}{2}$$

b) Pelo parabolóide: $z = x^2 + y^2 + 1$ **e pelo plano:** $z = 10$**.**

R:

Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

$z = x^2 + y^2 + 1$



$z = 10 \Rightarrow 10 = x^2 + y^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{9 - x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$

Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{9} = 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$

$$V = \int_{-3}^{3}\int_{\left(-\sqrt{9-x^2}\right)}^{\left(\sqrt{9-x^2}\right)}\int_{\left(x^2+y^2+1\right)}^{10} 1 \; dzdydx$$

Para o calculo do volume, e uma vez que estamos perante um sólido de base circular, teremos que proceder a uma mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, sendo que da observação atenta do gráfico se conclui que:

$$\begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Sabendo ainda da teoria que: $\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot sen\theta \end{cases}$, então:

$$x^2 + y^2 + 1 = (r \cdot \cos\theta)^2 + (r \cdot sen\theta)^2 + 1 = r^2 \cdot \underbrace{\left(\cos^2\theta + sen^2\theta\right)}_{=1} + 1 = r^2 + 1$$

Assim sendo, o integral triplo correspondente ao volume será calculado em coordenadas polares da forma que se segue:

$$V = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{r^2+1}^{10} \left(1 \times \overbrace{r}^{Jacobiano}\right) dz d\theta dr \Leftrightarrow V = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r \cdot [z]_{r^2+1}^{10} d\theta dr \Leftrightarrow V = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r \cdot \left[10 - \left(r^2 + 1\right)\right] d\theta dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left[10 \cdot r - r^3 - r\right] d\theta dr \Leftrightarrow V = \int_0^3 \left[10 \cdot r - r^3 - r\right] \cdot [\theta]_0^{2\pi} dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \int_0^3 \left[10 \cdot r - r^3 - r\right] \cdot [2\pi] dr \Leftrightarrow V = 2\pi \cdot \left[10 \cdot \frac{r^{1+1}}{1+1} - \frac{r^{3+1}}{3+1} - \frac{r^{1+1}}{1+1}\right]_0^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = 2\pi \cdot \left[10 \cdot \frac{3^2}{2} - \frac{3^4}{4} - \frac{3^2}{2}\right] \Leftrightarrow V = 2\pi \cdot \left[\frac{(10 \cdot 2 \cdot 9) - 81 - (2 \cdot 9)}{4}\right] \Leftrightarrow V = 2\pi \cdot \left[\frac{81}{4}\right] \Leftrightarrow V = \frac{81\pi}{2}$$

c) O sólido limitado pelas superfícies: $x^2+z^2=4$ **e pelos planos:** $y=1$ **e** $y=4$**.**

R:

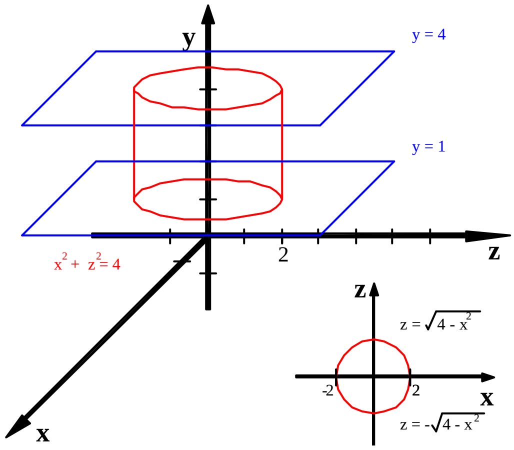
Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

$$x^2+z^2=4 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{4-x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{4-x^2} \le z \le \sqrt{4-x^2}$$

$$\left\{\begin{matrix} y=1 \longrightarrow \text{Plano paralelo ao plano XOZ} \\ y=4 \longrightarrow \text{Plano paralelo ao plano XOZ} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \le y \le 4$$



$x^2+z^2=4 \rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio 2 $\Rightarrow -2 \le x \le 2$

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{1}^{4}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 1\, dzdydx$$

Para o calculo do volume teremos que proceder a uma mudança de coordenadas, sendo que da observação atenta do gráfico se conclui que:

$$\left\{\begin{matrix} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le q \le 2p \\ 1 \le y \le 4 \end{matrix}\right\}$$

Logo, o integral triplo será calculado em coordenadas polares da forma que se segue:

$$V=\int_0^2\int_0^{2p}\int_1^4\left(1\times \overbrace{r}^{Jacobiano}\right)dydqdr \Leftrightarrow V=\int_0^2\int_0^{2p} r\cdot[y]_1^4\,dqdr \Leftrightarrow V=\int_0^2\int_0^{2p} r\cdot[4-1]dqdr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^2 3r\cdot[q]_0^{2p}\,dr \Leftrightarrow V=\int_0^2 3r\cdot[2p]dr \Leftrightarrow V=6p\cdot\left[\frac{r^{1+1}}{1+1}\right]_0^2 \Leftrightarrow V=6p\cdot\left[\frac{2^2}{2}\right] \Leftrightarrow V=12p$$

4. Um sólido de densidade $d(x;y;z)$ limitada pelas superfícies. Calcule aplicando integrais triplos a massa do sólido:

a) $d(x;y;z)=x$ **,** $x+y+z=4$ **,** $x=0$ **,** $y=0$ **e** $z=0$**.**

R:

Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

$$x+y+z=4 \Leftrightarrow z=4-x-y \Rightarrow 0 \le z \le 4-x-y$$

$$z=0 \Rightarrow 0=4-x-y \Leftrightarrow y=4-x \Rightarrow 0 \le y \le 4-x$$

$$\left\{\begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0=4-x-0 \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow 0 \le x \le 4 \qquad m=\int_0^4\int_0^{(4-x)}\int_0^{(4-x-y)}(x)\,dzdydx$$

Calculando agora o integral teremos que:

$$m=\int_0^4\int_0^{(4-x)}\int_0^{(4-x-y)}(x)\,dzdydx \Leftrightarrow m=\int_0^4\int_0^{(4-x)}[x\cdot z]_0^{4-x-y}dydx \Leftrightarrow m=\int_0^4\int_0^{(4-x)}[x\cdot(4-x-y)]dydx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=\int_0^4\int_0^{(4-x)}\left[4x-x^2-x\cdot y\right]dydx \Leftrightarrow m=\int_0^4\left[4\cdot x\cdot y-x^2\cdot y-x\cdot\frac{y^{1+1}}{1+1}\right]_0^{4-x}dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=\int_0^4\left[4\cdot x\cdot(4-x)-x^2\cdot(4-x)-x\cdot\frac{(4-x)^2}{2}\right]dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=\int_0^4\left[16\cdot x-4\cdot x^2-4\cdot x^2+x^3-x\cdot\frac{(16-8\cdot x+x^2)}{2}\right]dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=\int_0^4\left[x^3-8\cdot x^2+16\cdot x+\frac{\left(-16\cdot x+8\cdot x^2-x^3\right)}{2}\right]dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=\int_0^4\left[\frac{2\cdot x^3-16\cdot x^2+32\cdot x-x^3+8\cdot x^2-16\cdot x}{2}\right]dx\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}\cdot\int_0^4\left[x^3-8\cdot x^2+16\cdot x\right]dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^{3+1}}{3+1}-8\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}+16\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1}\right]_0^4\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{4^4}{4}-8\cdot\frac{4^3}{3}+16\cdot\frac{4^2}{2}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}\cdot\left[64-\frac{512}{3}+128\right]\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}\cdot\left[192-\frac{512}{3}\right]\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{576-512}{3}\right]\Leftrightarrow m=\frac{64}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{32}{3}$$

b) $d(x;y;z)=z+1$**,** $z=4-x^2-y^2$ **e** $z=0$**.**

R:

Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

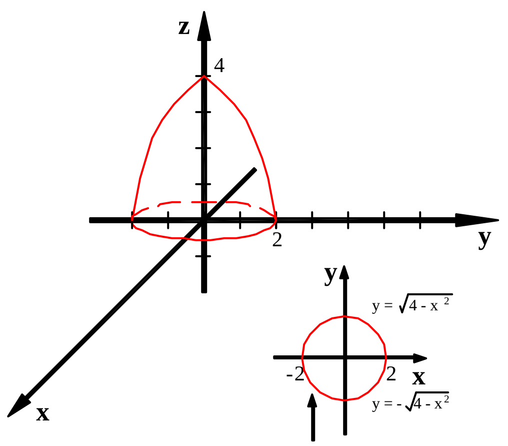
$$z=4-x^2-y^2\Leftrightarrow z=4-\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\le z\le 4-\left(x^2+y^2\right)$$

$$z=0\Rightarrow 0=4-\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow x^2+y^2=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$$



Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{4}=2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$$m=\int_{-2}^{2}\int_{\left(-\sqrt{4-x^2}\right)}^{\left(\sqrt{4-x^2}\right)}\int_{0}^{4-\left(x^2+y^2\right)}(z+1)dzdydx$$

Para o calculo da massa do sólido, e uma vez que estamos perante um sólido de base circular, teremos que proceder a uma mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, sendo que da observação atenta do gráfico se conclui que:

$$\begin{Bmatrix} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq q \leq 2p \end{Bmatrix}$$

Sabendo ainda da teoria que: $\begin{Bmatrix} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot sen q \end{Bmatrix}$, então:

$$4-\left(x^2+y^2\right)=4-\left(r \cdot \cos q\right)^2+\left(r \cdot sen q\right)^2=4-r^2 \cdot \underbrace{\left(\cos^2 q+sen^2 q\right)}_{=1}=4-r^2$$

Assim sendo, o integral triplo correspondente à massa será calculado em coordenadas polares da forma que se segue:

$$m=\int_0^2\int_0^{2p}\int_0^{\left(4-r^2\right)}\left((z+1)\times \overbrace{r}^{Jacobiano}\right)dzdqdr \Leftrightarrow m=\int_0^2\int_0^{2p} r \cdot \left[\frac{z^{1+1}}{1+1}+z\right]_0^{4-r^2} dqdr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=\int_0^2\int_0^{2p} r \cdot \left[\frac{\left(4-r^2\right)^2}{2}+\left(4-r^2\right)\right]dqdr \Leftrightarrow m=\int_0^2\int_0^{2p} r \cdot \left[\frac{\left(16-8 \cdot r^2+r^4\right)}{2}+\frac{2 \cdot \left(4-r^2\right)}{2}\right]dqdr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=\int_0^2\int_0^{2p} r \cdot \left[\frac{r^4-8 \cdot r^2+16+8-2 \cdot r^2}{2}\right]dqdr \Leftrightarrow m=\frac{1}{2} \cdot \int_0^2\int_0^{2p} r \cdot \left[r^4-10 \cdot r^2+24\right]dqdr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \int_0^{2p} \left[r^5 - 10 \cdot r^3 + 24 \cdot r \right] dq dr \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \left[r^5 - 10 \cdot r^3 + 24 \cdot r \right] \cdot \left[q \right]_0^{2p} dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \left[r^5 - 10 \cdot r^3 + 24 \cdot r \right] \cdot \left[2p \right] dr \Leftrightarrow m = \frac{2p}{2} \cdot \int_0^2 \left[r^5 - 10 \cdot r^3 + 24 \cdot r \right] dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = p \cdot \left[\frac{r^{5+1}}{5+1} - 10 \cdot \frac{r^{3+1}}{3+1} + 24 \cdot \frac{r^{1+1}}{1+1} \right]_0^2 \Leftrightarrow m = p \cdot \left[\frac{2^6}{6} - 10 \cdot \frac{2^4}{4} + 24 \cdot \frac{2^2}{2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = p \cdot \left[\frac{64}{6} - 10 \cdot \frac{16}{4} + 24 \cdot \frac{4}{2} \right] \Leftrightarrow m = p \cdot \left[\frac{32}{3} - \frac{160}{4} + 24 \cdot 2 \right] \Leftrightarrow m = p \cdot \left[\frac{32}{3} - 40 + 48 \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = p \cdot \left[\frac{32}{3} + 8 \right] \Leftrightarrow m = p \cdot \left[\frac{32+24}{3} \right] \Leftrightarrow m = \frac{56p}{3}$$

5. Determine o volume dos seguintes sólidos:

a) O sólido limitado pelas superfícies: $z = x^2 + y^2$ **e** $z = x + y$**.**

R:

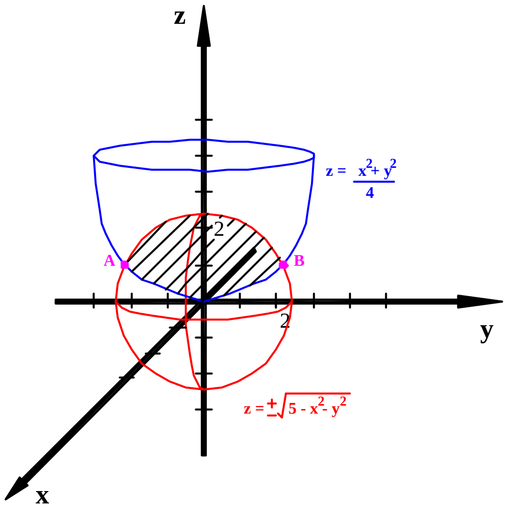
b) O sólido limitado superiormente pela esfera de equação: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e inferiormente pelo parabolóide de equação: $x^2 + y^2 = 4z$.

R:

Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

$x^2 + y^2 + z^2 = 5 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{5 - x^2 - y^2} \Rightarrow$ Esfera de centro (0;0;0) e raio $\sqrt{5} = 2,4...$

$x^2 + y^2 = 4z \Leftrightarrow z = \dfrac{x^2 + y^2}{4} \Rightarrow$ Parabolóide com vértice em (0;0;0).



Pontos de intersecção A e B:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z + z^2 = 5 \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 4z - 5 = 0 \\ -------- \end{cases} \Leftrightarrow^{1} \begin{cases} z = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} \\ -------------- \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} \\ ------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-4 \pm 6}{2} \\ ------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-4-6}{2} \vee z = \dfrac{-4+6}{2} \\ -------------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -5 \vee z = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \cdot z \end{cases} \Leftrightarrow^{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \cdot 1 \rightarrow \text{Circunferência de centro (0;0) e r} = \sqrt{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = \pm\sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

---

[1] A fórmula resolvente para uma equação do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$ é dada por: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

[2] O ponto $z = -5$ não serve porque não corresponde a zona da área assinalada no gráfico.

Daqui se conclui que: $\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2} \\ \dfrac{x^2+y^2}{4} \le z \le \sqrt{5-\left(x^2+y^2\right)} \end{cases}$

Assim sendo teremos então os seguintes limites de integração: $V = \int_{-2}^{2} \int_{\left(-\sqrt{4-x^2}\right)}^{\left(\sqrt{4-x^2}\right)} \int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^{\sqrt{5-\left(x^2+y^2\right)}} (1)\, dzdydx$

Uma vez que existem circunferências centradas a delimitar os integrais (na esfera), então teremos que recorrer a uma mudança de coordenadas, sendo que: $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le q \le 2p \end{cases}$

Ora sabendo que: $\begin{cases} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot sen q \\ |J| = r \end{cases}$. Então teremos:

$$x^2 + y^2 = (r \cdot \cos q)^2 + (r \cdot sen q)^2 = r^2 \cdot \underbrace{\left(\cos^2 q + sen^2 q\right)}_{=1} = r^2$$

Pelo que o integral será agora escrito na seguinte forma:

$$V = \int_0^2 \int_0^{2p} \int_{\frac{r^2}{4}}^{\sqrt{5-r^2}} (1 \cdot r)\, dzdqdr \Leftrightarrow V = \int_0^2 \int_0^{2p} [r \cdot z]_{\frac{r^2}{4}}^{\sqrt{5-r^2}}\, dqdr \Leftrightarrow V = \int_0^2 \int_0^{2p} \left[\left(r \cdot \sqrt{5-r^2} \right) - \left(r \cdot \frac{r^2}{4} \right) \right] dqdr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \int_0^2 \int_0^{2p} \left[\left(\sqrt{r^2 \cdot \left(5-r^2\right)} \right) - \left(\frac{r^3}{4} \right) \right] dqdr \Leftrightarrow V = \int_0^2 \int_0^{2p} \left[\left(r^2 \cdot \left(5-r^2\right) \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{r^3}{4} \right) \right] dqdr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^2\int_0^{2p}\left[\left(5\cdot r^2-r^4\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{r^3}{4}\right)\right]dq\,dr \Leftrightarrow V=\int_0^2\int_0^{2p}\left[\left(5\cdot r^{2\cdot\frac{1}{2}}-r^{4\cdot\frac{1}{2}}\right)-\left(\frac{r^3}{4}\right)\right]dq\,dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^2\int_0^{2p}\left[\left(5\cdot r^1-r^2\right)-\left(\frac{r^3}{4}\right)\right]dq\,dr \Leftrightarrow V=\int_0^2\left[\left(5\cdot r^1-r^2\right)-\left(\frac{r^3}{4}\right)\right]\cdot\left[q\right]_0^{2p}dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^2\left[\left(5\cdot r^1-r^2\right)-\left(\frac{r^3}{4}\right)\right]\cdot\left[2p\right]dr \Leftrightarrow V=2p\cdot\left[\left(5\cdot\frac{r^{1+1}}{1+1}-\frac{r^{2+1}}{2+1}\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{r^{3+1}}{3+1}\right)\right]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=2p\cdot\left[\left(5\cdot\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2^4}{4}\right)\right] \Leftrightarrow V=2p\cdot\left[\left(5\cdot\frac{4}{2}-\frac{8}{3}\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{16}{4}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=2p\cdot\left[\left(10-\frac{8}{3}\right)-\frac{16}{16}\right] \Leftrightarrow V=2p\cdot\left[9-\frac{8}{3}\right] \Leftrightarrow V=2p\cdot\left[\frac{27-8}{3}\right] \Leftrightarrow V=2p\cdot\left[\frac{19}{3}\right] \Leftrightarrow$$

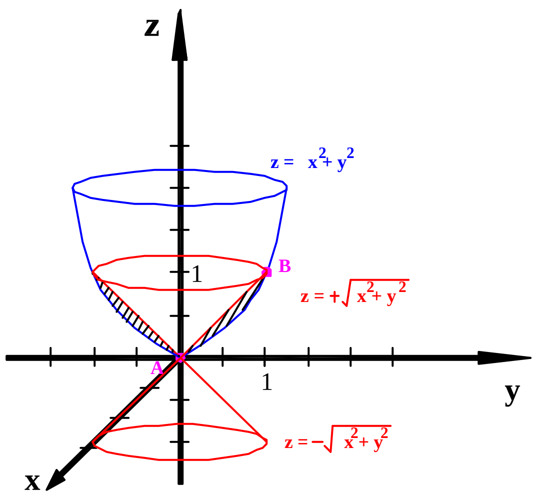
$$\Leftrightarrow V=\frac{38}{3}p$$

c) O sólido limitado pelo parabolóide: $z = x^2 + y^2$ e pelo cone: $z^2 = x^2 + y^2$.

R:

Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

$z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow 2$ Cones de vértices (0;0;0), um na zona positiva de z e outro na negativa;



$z = x^2 + y^2 \Rightarrow$ Parabolóide com vértice em (0;0;0).

Pontos de intersecção A e B:

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = z \\ ---- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - z = 0 \\ ---- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \cdot (z-1) = 0 \\ ---- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{z=0}_{\Downarrow} \quad \vee \quad \underbrace{z=1}_{\Downarrow} \\ x^2 + y^2 = 0 \vee x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \rightarrow Ponto(0;0;0) \\ x^2 + y^2 = 1 \rightarrow Circunferência \begin{cases} Centro(0;0) \\ Raio = \sqrt{1} = 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ponto(0;0;0) \\ y = \pm\sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

Daqui se conclui que: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

Assim sendo teremos então os seguintes limites de integração: $V = \int_{-1}^{1} \int_{\left(-\sqrt{1-x^2}\right)}^{\left(\sqrt{1-x^2}\right)} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} (1) dzdydx$

Uma vez que existem circunferências centradas a delimitar os integrais, então teremos que recorrer a uma mudança de coordenadas, sendo que: $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq q \leq 2p \end{cases}$

Ora sabendo que: $\begin{cases} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot sen q \\ \left| J \right| = r \end{cases}$. Então teremos:

$$x^2 + y^2 = (r \cdot \cos q)^2 + (r \cdot sen q)^2 = r^2 \cdot \underbrace{\left(\cos^2 q + sen^2 q\right)}_{=1} = r^2$$

Pelo que o integral será agora escrito na seguinte forma:

$$V = \int_0^1 \int_0^{2p} \int_{r^2}^{\sqrt{r^2}} (1 \cdot r)\, dz dq dr \Leftrightarrow V = \int_0^1 \int_0^{2p} \int_{r^2}^{r} (r)\, dz dq dr \Leftrightarrow V = \int_0^1 \int_0^{2p} \left[r \cdot z \right]_{r^2}^{r} dq dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \int_0^1 \int_0^{2p} \left[(r \cdot r) - (r \cdot r^2) \right] dq dr \Leftrightarrow V = \int_0^1 \int_0^{2p} \left[r^2 - r^3 \right] dq dr \Leftrightarrow V = \int_0^1 \left[r^2 - r^3 \right] \cdot \left[q \right]_0^{2p} dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \int_0^1 \left[r^2 - r^3 \right] \cdot \left[2p \right] dr \Leftrightarrow V = 2p \cdot \left[r^2 - r^3 \right]_0^1 \Leftrightarrow V = 2p \cdot \left[1^2 - 1^3 \right] \Leftrightarrow V = 0$$