2.º Teste de Complementos de Análise Matemática

Duração: 1h30m

---

1. Determine a solução geral da equação diferencial
$$\frac{d^4y}{dx^4}+y=0.$$
Solução: raízes $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$, solução geral:
$$y=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right)+e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(c_3\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+c_4\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right),$$
onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes arbitrárias.

2. Determine a solução da equação diferencial
$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cos x$$
usando o método dos coeficentes indeterminados, sabendo que a solução geral da equação homogénea associada pode ser escrita como $y_c=c_1\cos x+c_2\sin x$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

   Solução geral: $y=y_c+y_p=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$.

3. Considere a equação diferencial
$$y''+8y'+16y=\frac{2e^{-4x}}{1+2x},\quad x>0.$$
   (a) Sabendo que e^{-4x} e xe^{-4x} são soluções da equação homogénea associada, mostre que as soluções são linearmente independentes.
   Solucão:
$$W\left(e^{-4x},xe^{-4x}\right)=\begin{vmatrix} e^{-4x} & xe^{-4x} \\ -4e^{-4x} & e^{-4x}-4xe^{-4x}\end{vmatrix}=$$
$$=e^{-8x}-4xe^{-8x}+4xe^{-8x}=e^{-8x}\neq 0$$
   Como $W\left(e^{-4x},xe^{-4x}\right)\neq 0$, e^{-4x} e xe^{-4x} são soluções linearmente independentes.

   (b) Usando o método da variação das constantes determine uma solução particular da equação diferencial dada.

   Solução particular: $y_p=\left(-x+\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right)e^{-4x}+\ln(2x+1)xe^{-4x}=e^{-4x}\left(\frac{1}{2}(2x+1)\ln(2x+1)-x\right)$.

4. Determine a transformada inversa de Laplace da seguinte função:
$$F(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s-2)}e^{-\pi s}.$$
Solução: $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s-2)}e^{-\pi s}\right\}=u_\pi(t)\left(-\frac{1}{5}\cos(t-\pi)-\frac{2}{5}\sin(t-\pi)+\frac{1}{5}e^{2(t-\pi)}\right).$

5. Resolva o seguinte PVI usando a transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x' - y + 2x &= e^{-t} + e^{t} \\ x' - y' &= -e^{-t} \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Solução: $x(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}$ e $y(t) = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t}$.