Estimação do Espectro de Potência (métodos Clássicos)

- Noções básicas sobre estimação
  - Problema: Como caracterizar uma estimativa $\hat{\alpha}$ de um parâmetro α de um dado PE de que se conhece apenas um segmento x(0), x(1), ... x(N-1) de uma sua realização? Por outras palavras como saber se uma dada fórmula

$$\hat{\alpha} = F(x(0),\ldots x(N-1))$$

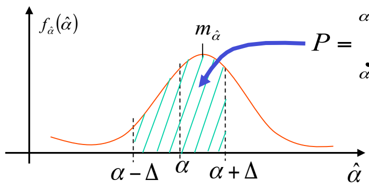
é adequada para estimar α.

  - Solução
    - Podemos considerar $\hat{\alpha}$ como uma v. a. à qual está associada uma f. d. p. $f_{\hat{\alpha}}\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = F(X_0,\ldots X_{N-1})$$

    - A média e a var. de $\hat{\alpha}$ caracterizam o mérito de $\hat{\alpha}$ como estimativa de α.

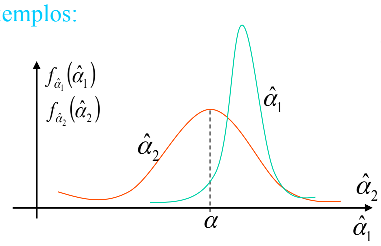
Estimação do Espectro de Potência (métodos Clássicos)



$$P = \int_{\alpha-\Delta}^{\alpha+\Delta} f_{\hat{\alpha}}(\hat{\alpha})\,d\hat{\alpha}$$

- Diz-se que o estimador $\hat{\alpha}$ de α terá um erro inferior a Δ com uma confiança de P.

  - Dois possíveis critérios sobre um estimador
    - A média de $\hat{\alpha}$ ser igual a α
    - A var. de $\hat{\alpha}$ ser a menor possível
  - Exemplos:



- O estimador 2 não é polarizado $m_{\hat{\alpha}2} = \alpha$ mas tem uma var. superior à do estimador 1.

Qual será o melhor?

Estimação do Espectro de Potência (métodos Clássicos)

- Uma resposta poderá ser: Aquele a que corresponder um erro quadrático médio mais pequeno

$$
\begin{aligned}
E.Q.M. &= E\left[(\hat{\alpha}-\alpha)^2\right] = E\left[\hat{\alpha}^2+\alpha^2-2\hat{\alpha}\alpha\right] \\
&= E\left[\hat{\alpha}^2+E^2[\hat{\alpha}]-2\hat{\alpha}E[\hat{\alpha}]+\alpha^2-2\hat{\alpha}\alpha-E^2[\hat{\alpha}]+2\hat{\alpha}E[\hat{\alpha}]\right] \\
&= E\left[(\hat{\alpha}-E[\hat{\alpha}])^2+\alpha^2-2\hat{\alpha}\alpha-E^2[\hat{\alpha}]+2\hat{\alpha}E[\hat{\alpha}]\right] \\
&= \sigma^2_{\hat{\alpha}}+(\alpha-E[\hat{\alpha}])^2
\end{aligned}
$$

(polarização)²

- Estimativa de máxima verosimilhança
  - Dada uma sucessão de valores x(0) ... X(N-1) e um parâmetro α do PE, a estimativa de máxima verosimilhança MLE ("Maximum Likelihood Estimate") é a que maximiza a probabilidade de se obterem aqueles valores

$$\hat{\alpha}_{MLE} : \max_{\hat{\alpha}} = P\left[X_0 = x(0) \quad e.... \quad e \quad X_{N-1} = x(N-1)\right]$$

Estimação do Espectro de Potência (métodos Clássicos)

- Estimativa de MLE (cont.)
  - Estimativa da média
    - A estimativa MLE da média de um PE estacionário e ergódico, cujas v. a. se assumem estatísticamente independentes é

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

- A polarização deste estimador é nula ⟸ $E[\hat{m}_x] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E[x(n)] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} m_x$

- Quanto à variância do estimador

$$\sigma^2_{\hat{m}_x} = \text{var}[\hat{m}_x] = E\left[\hat{m}_x^2\right] - m_x^2$$

$$E\left[\hat{m}_x^2\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} E[x(n).x(k)] = \frac{1}{N^2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} E\left[x^2(n)\right] + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{N-1} E[x(n)]E[x(k)]\right]$$

$$= \frac{1}{N}E\left[x^2(n)\right] + \frac{N-1}{N}m_x^2$$

$$\sigma^2_{\hat{m}_x} = \text{var}[\hat{m}_x] = \frac{1}{N}\left\{E\left[x^2(n)\right] - m_x^2\right\} = \frac{1}{N}\sigma_x^2$$

- Logo a estimativa é consistente ⟺ **N→∞ => B e σ →0**

Estimação do Espectro de Potência (métodos Clássicos)

- Estimativa de MLE (cont.)
  - Estimativas da variância
    - Se a média é conhecida (1) $$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x(n)-m_x\right)^2$$
    - Se a média é desconhecida (2) $$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x(n)-\hat{m}_x\right)^2$$
  - Problema: Mostre que a estimativa (1) tem polarização nula e que no caso da estimativa 2 a polarização é $$B_2 = \frac{1}{N}\sigma_x^2$$ Mostre também que as 2 estimativas são consistentes.
  - Estimativas da autocorrelação

$$C'_{xx}(m) = \frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)\,x^*(n+m) \qquad C_{xx}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)\,x^*(n+m)$$

Tira confiança aos valores obtidos para *m* elevado

Estimação do Espectro de Potência (métodos Clássicos)

- Problema: Mostre que:
  - 1) $E\left[C'_{xx}(m)\right] = \phi_{xx}(m)$
  - 2) $E\left[C_{xx}(m)\right] = \frac{N-|m|}{N}\phi_{xx}(m)$
  - Pode-se mostrar que quando N>>|m|:

$$\mathrm{var}\left[C'_{xx}(m)\right] \approx \frac{N}{\left(N-|m|\right)^2}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\left[\phi_{xx}^2(r)+\phi_{xx}(r-m)+\phi_{xx}(r+m)\right]$$

$$\mathrm{var}\left[C_{xx}(m)\right] \approx \frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\left[\phi_{xx}^2(r)+\phi_{xx}(r-m)+\phi_{xx}(r+m)\right]$$

  - Conclui-se que ambos os estimadores são consistentes

Estimação do Espectro de Potência (métodos Clássicos)

- O Periodograma (como estimador do espectro de potência)
  - Como o espectro de potência é a T. F. da autocorrelação
  - Como $C'_{xx}(m)$ ou $C_{xx}(m)$ são estimativas consistentes da autocorrelação
  - Poder-se-ia pensar que a T. F. de $C_{xx}(m)$ ou $C'_{xx}(m)$ seria uma estimativa consistente do espectro de potência.
  - Tal conclusão é errada !
  - O periodograma é a T. F. de $C_{xx}(m)$ $\quad I_N(\Omega)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{xx}(m)e^{-j\Omega m}=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} C_{xx}(m)e^{-j\Omega m}$

$$E[I_N(\Omega)]=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\frac{N-|m|}{N}\phi_{xx}(m)e^{-j\Omega m}$$

$$\operatorname{var}[I_N(\Omega)]=\sigma_x^4\left[1+\left(\frac{\sin[\Omega N]}{N\sin\Omega}\right)^2\right]$$

  - Como a var. do periodograma não tende para zero à medida que $N\to\infty$, o periodograma é uma estimativa inconsistente do espectro de potência $P_{xx}(\Omega)$

Estimação do Espectro de Potência (métodos Clássicos)

- O periodograma (cont.)
  - Todavia como o periodograma pode ser calculado por

$$I_N(\Omega)=\frac{1}{N}|X(\Omega)|^2$$

O que é muito eficiente utilizando o algoritmo FFT têm sido utilizados métodos baseados no periodograma para estimar $P_{xx}(\Omega)$

  - Verifiquemos que a esperança matemática de $I_N(\Omega)$ pode ser vista como o resultado da multiplicação da seq. de autocorrelação por uma janela triangular ou seja

$$C_{xx}(m)=\phi_{xx}(m)\frac{N-|m|}{N} \quad \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \quad E[I_N(\Omega)]=P_{xx}(\Omega)*W_B(\Omega)$$

$$W_B(\Omega)=T.F.\left\{\frac{N-|m|}{N}\right\}=\frac{1}{N}\left(\frac{\sin\left(\Omega\frac{N}{2}\right)}{\sin\frac{\Omega}{2}}\right)^2$$

Estimação do Espectro de Potência (métodos Clássicos)

- O periodograma (cont.)
  - O método de Bartlett (média de periodogramas)
    - Dividir os dados em k segmentos de M pontos
    - Calcular k periodogramas de M pontos $\longrightarrow$ $I_M^i(\Omega)=\frac{1}{M}\left|X^i(\Omega)\right|^2 \quad 1\le i\le k$
    - Calcular a média dos k periodogramas $B_{xx}(\Omega)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} I_M^i(\Omega)$

      $E[B_{xx}(\Omega)]=E[I_M^i(\Omega)] \qquad \operatorname{var}[B_{xx}(\Omega)]=\frac{1}{k}\operatorname{var}[I_M^i(\Omega)]$
  - A polarização de $B_{xx}(\Omega)$ é maior que a de $I_N(\Omega)$ já que $E[B_{xx}(\Omega)]$ pode ser vista como a T. F. $\{\varphi_{xx}.\text{janela}\}$
    - No caso de $B_{xx}(\Omega)$ $\quad janela=\dfrac{N/k-|m|}{N/k}$
    - No caso de $I_N(\Omega)$ $\quad janela=\dfrac{N-|m|}{N}$
  - Como a janela no caso de Bartlett é mais curta o lobo principal da sua T. F. É mais largo, o que se traduz numa diminuição da resolução espectral.
  - Resumindo: O método de Bartlett:
    - Aumenta a polarização
    - Diminui a resolução
    - Diminui a variância

Estimação do Espectro de Potência (métodos Clássicos)

- O periodograma (cont.)
  - O método das janelas
    - Para diminuir a variância inerente ao periodograma um método consiste em aplicar uma janela à estimativa da autocorrelação, $C_{xx}(m)$ antes da T. F.. A ideia é diminuir a influência dos termos de $C_{xx}(m)$ para *m* próximo de *N*, pois são estes termos que introduzem a variância elevada no periodograma. Obtém-se deste modo o chamado espectro alisado

$$S_{xx}(\Omega)=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} C_{xx}(m)w(m)e^{-j\Omega m}$$

$$E[S_{xx}(\Omega)]=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} E[C_{xx}(m)]w(m)e^{-j\Omega m}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\phi_{xx}(m)w_B(m)w(m)e^{-j\Omega m}$$

$$=P_{xx}(\Omega)*W_B(\Omega)*W(\Omega)\approx P_{xx}(\Omega)*W(\Omega)$$

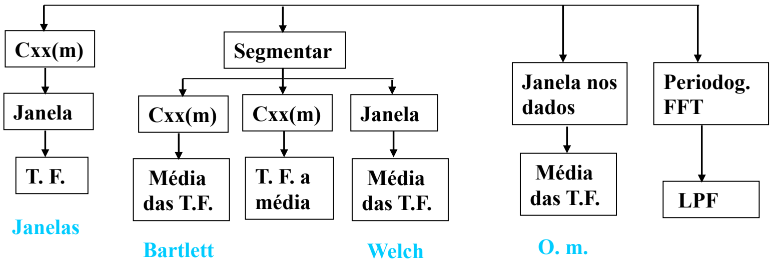
N grande

- Prova-se que $\quad \operatorname{var}[S_{xx}(\Omega)]\approx\left(\frac{1}{N}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w^2(m)\right)P_{xx}^2(\Omega)$

  - Idealmente:
    - **Se N→∞ mais depressa do que M→∞ então var[$S_{xx}(\Omega)$] →0**
    - **Se N>>M então E[$S_{xx}(\Omega)$]=P_{xx} (Ω)*W (Ω)**
    - **Se M→∞ então W (Ω)→impulso e E[$S_{xx}(\Omega)$] →P_{xx} (Ω)**

Estimação do Espectro de Potência (métodos Clássicos)

- O periodograma (cont.)
  - Outro método
    - Aplicar uma janela aos dados, o que equivale a reduzir o valor dos produtos x(n)x(n+m) muito afastados, logo de $C_{xx}(m)$ com *m* grande.
  - Método de Welch
    - É uma combinação do método anterior e do método de Bartlett
  - Resumo dos métodos Clássicos



Estimação do Espectro de Potência (métodos Clássicos)

- Exercícios

1- Mostre que $I_N(\Omega)=\frac{1}{N}\left|X(\Omega)\right|^2$ onde $C_{xx}(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1}x(n)x^*(n+m)$

2- Idem para $E[S_{xx}(\Omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}E[I_N(\theta)]W(\Omega-\theta)d\theta$

3- Prove que no método de Welch $E[B_{xx}^w(\Omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{xx}(\theta)W(\Omega-\theta)d\theta$ onde

$$W(\Omega)=\frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1}w(n)e^{-j\Omega n}\right| \qquad U=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}w^2(n)$$

4- Faça os projectos 1 e 2 do capítulo 6 (parte de estimação espectral) do livro de exercícios com Matlab.