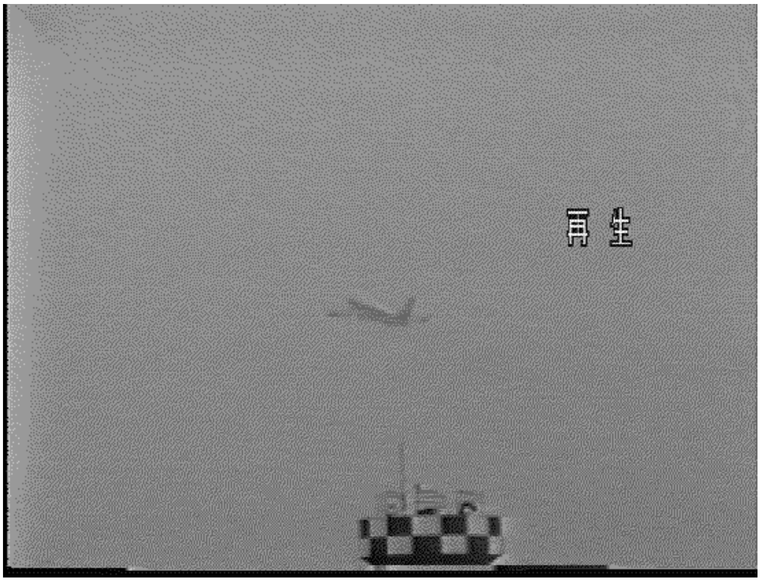
3. Energia Potencial. Potencial Eléctrico.



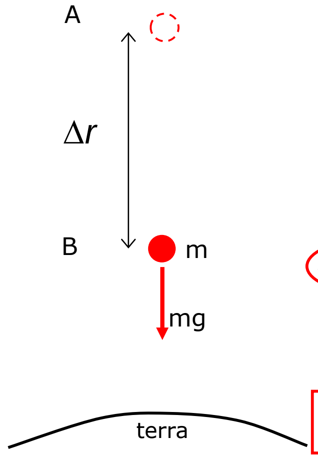
Se durante uma cirurgia um anestesista não calçar sapatos apropriados, o paciente pode ter ferimentos fatais. Porquê?

Tópicos

- Energia potencial eléctrica
- Trabalho realizado pela força eléctrica
- Potencial eléctrico e diferença de potencial
- Superfícies equipotenciais
- Potencial de membrana

O caso da força gravítica

o trabalho realizado pelo peso é positivo.



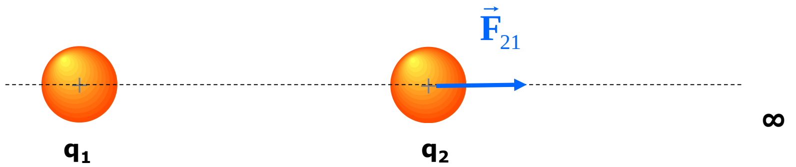
$$W_{F_g(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta E_{p(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = E_{p(\mathrm{B})} - E_{p(\mathrm{A})} = -W_{F_g(\mathrm{A}\to\mathrm{B})}$$

Na queda do corpo, a variação de energia potencial é negativa

Electromagnetismo EE (2016/17)
Cap 3 Energia Potencial. Potencial Eléctrico

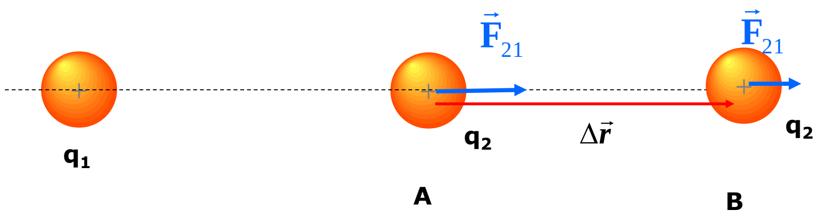
Se q_1 estiver fixa, o que acontece à carga q_2?



Tendo q_1 e q_2 o mesmo sinal, F_{21} vai acelerar q_2 até o seu efeito deixar de se sentir (∞).

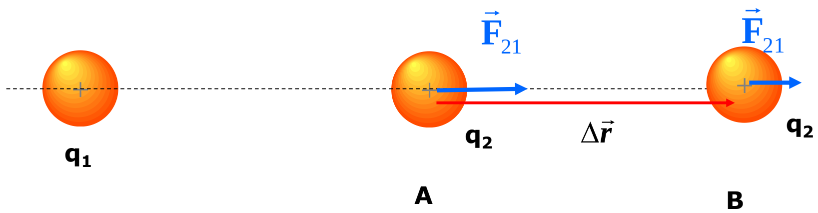
Havendo deslocamento devido a ação de F_{21}, esta força produz trabalho. A carga q_2 desloca-se porque possui uma determinada energia potencial elétrica. Todo o sistema físico tende a assumir a configuração de energia potencial mínima.

Vamos calcular o trabalho realizado por $\boldsymbol{F_{21}}$ para levar $\boldsymbol{q_2}$ da posição **A** até à posição **B**.
Ao longo do percurso, à medida que $\boldsymbol{q_2}$ se afasta de $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{F_{21}}$ é cada vez menor.



O trabalho efectuado sobre $\boldsymbol{q_2}$ pela força eléctrica F_{21} é:

$$W_{F_{21}(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}$$



$$W_{F_{21}(A\to B)} = \int_A^B \frac{kq_1q_2}{r^2}\cdot dr = kq_1q_2\int_A^B \frac{dr}{r^2} = kq_1q_2\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = -kq_1q_2\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

$$W_{F_{21}(A\to B)} = -\left(\frac{kq_1q_2}{r_B} - \frac{kq_1q_2}{r_A}\right)$$

Energia potencial final

$$W_{F_{21}(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = -\left(E_{p(\mathrm{B})} - E_{p(\mathrm{A})}\right) = -\Delta E_{p(\mathrm{A}\to\mathrm{B})}$$

Energia potencial inicial

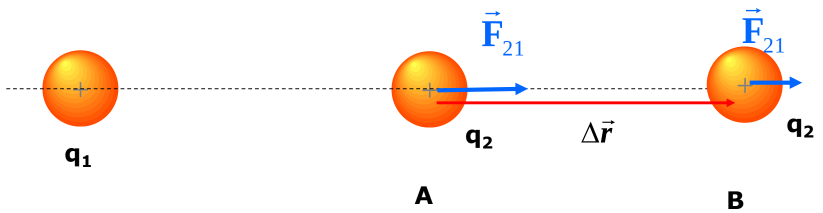
$$W_{F_e(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = -\Delta E_{p(\mathrm{A}\to\mathrm{B})}$$

Quando as forças são conservativas o trabalho por elas efetuado só depende das posições final e inicial e é simétrico da variação da energia potencial.

A força elétrica é uma força conservativa.

$$\boxed{E_P = \frac{kq_1q_2}{r}}$$

Energia potencial do sistema de cargas $\boldsymbol{q_1}$ e $\boldsymbol{q_2}$ à distância $\boldsymbol{r}$ uma da outra



ou:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(q_2 \cdot \vec{E}_1\right)\cdot d\vec{r} = q_2 \int_A^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{r}$$

Em que $\vec{E}_1$ é o campo devido à carga 1 e q_2 a carga que se movimenta entre A e B.

Se quisermos calcular o trabalho realizado, por unidade de carga:

$$\frac{W_{A\to B}}{q} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\frac{W_{A\to B}}{q} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

E daqui pode-se obter rapidamente a variação de energia potencial, por unidade de carga:

$$\frac{\Delta E_{p(A\to B)}}{q} = -\frac{W_{A\to B}}{q}$$

$$\frac{\Delta E_{p(A\to B)}}{q} = \frac{E_{p(\mathrm{B})}}{q} - \frac{E_{p(\mathrm{A})}}{q}$$

Energia potencial por unidade de carga inicial

Energia potencial por unidade de carga final

$$\boxed{V = \frac{E_p}{q}}$$

À energia potencial por unidade de carga chama-se potencial eléctrico:

Quais as unidades SI de Potencial Eléctrico? $\frac{J}{C} \equiv V$ **VOLT**

Alessandro Volta
1745-1826

Se o potencial elétrico pode ser definido por: $V = \frac{E_p}{q}$

A diferença de potencial pode ser definida como:

$$\Delta V = \frac{\Delta E_p}{q} = -\frac{W_{A\to B}}{q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Que traduz a relação entre diferença de potencial elétrico e Campo elétrico.

ΔV - diferença de energia potencial por carga unitária = diferença de potencial.

Relação entre Energia potencial eléctrostática e Potencial eléctrico

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{E_P = \frac{kq_1q_2}{r}} \\ \boxed{\frac{E_P}{q} = V} \end{array}\right\} \quad E_P = \frac{kq_1}{r}q_2 = Vq_2$$

Potencial eléctico criado pela carga ***q*** à distância ***r***

$$\boxed{V = \frac{kq}{r}}$$

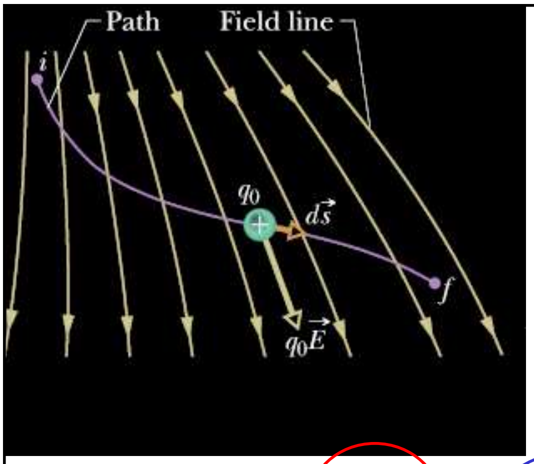
$$1V = 1J/C$$

$$1N/C = 1V/m$$

$$1eV = e(1V)$$

$$1eV = (1.60\times10^{-19}C)(1J/C)$$

$$1eV = 1.60\times10^{-19}J$$



$$\Delta E_{p(\mathrm{i}\to\mathrm{f})} = E_{p(\mathrm{f})} - E_{p(\mathrm{i})} = -W_{(\mathrm{i}\to\mathrm{f})}$$

Por conveniência, num sistema de cargas, usa-se como referência a situação em que as cargas estão infinitamente distanciadas (e supomos que a energia potencial é nula nesta situação).

$$\Delta E_{p(\infty\to\mathrm{P})} = E_{p(\mathrm{P})} - E_{p(\infty)}$$

$$\Downarrow$$

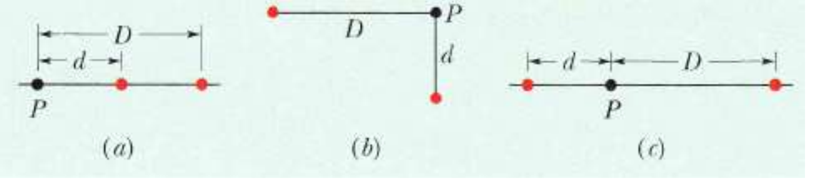
$$\Delta E_{p(\infty\to\mathrm{P})} = E_{p(\mathrm{P})} - 0$$

$$E_{p(\mathrm{P})} = -W_{(\infty\to\mathrm{P})}$$

energia potencial associada ao sistema de cargas

trabalho realizado pela força eléctrica para “trazer” a carga do infinito e colocá-la na configuração considerada.

Checkpoint 1: A figura mostra 3 diferentes arranjos de 2 protões. Ordene por ordem decrescente do potencial no ponto P.



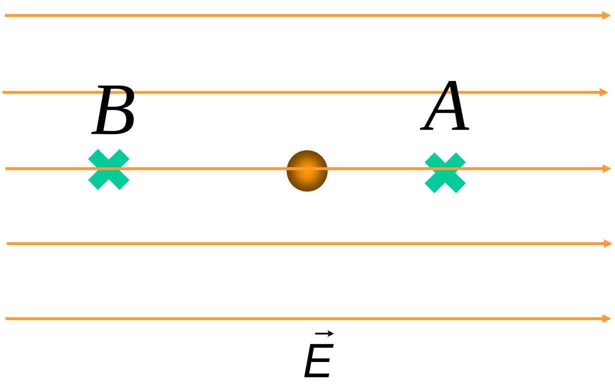
Checkpoint 2:

Na figura um protão move-se desde um ponto A até ao ponto B, numa zona onde existe um campo eléctrico uniforme, com o sentido indicada na figura.

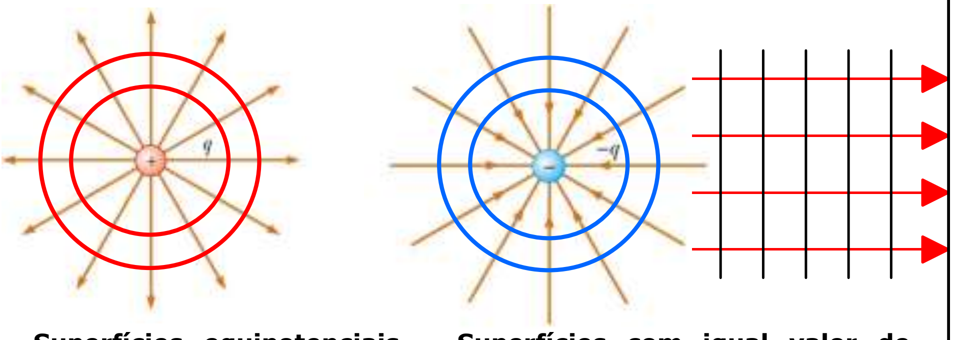
a) o trabalho realizado pelo campo eléctrico é positivo ou negativo?

b) a energia potencial electrostática do protão aumenta ou diminui?

c) Em qual dos pontos o potencial elétrico é maior?



Superfícies equipotenciais e linhas de campo

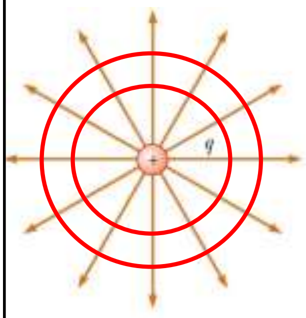


Superfícies equipotenciais – Superfícies com igual valor de potencial eléctrico.

As linhas de campo são sempre perpendiculares às superfícies equipotenciais.

As linhas de campo apontam no sentido do valor de potencial decrescente.

Relação entre Potencial Eléctrico e Campo Eléctrico



Derivando o Potencial eléctrico em ordem a ***r***:

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\frac{Kq}{r} = -\frac{Kq}{r^2}$$

Sabendo que o Campo eléctrico em ordem a ***r*** é dado por:

$$\vec{E}(r) = \frac{Kq}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{r}$$

Neste exemplo, o potencial devido à carga q só depende de uma variável (***r***). $V(r) = \frac{kq}{r}$

Mas ***r*** acaba por definir uma posição num espaço a 3D. Usando coordenadas espaciais ***x***, ***y*** e ***z***, deveremos aplicar derivadas parciais, uma segundo cada direção, para calcular o campo elétrico.

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{r}$$

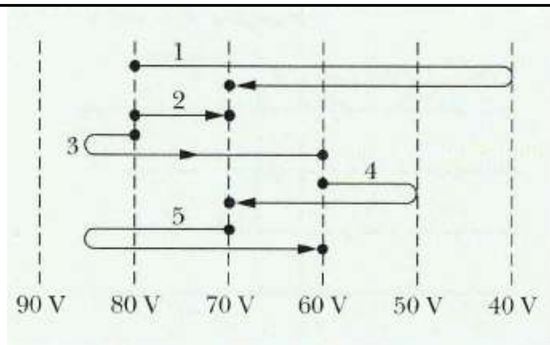
$$\Downarrow$$

$$\vec{E}(r) = -\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)}_{\vec{\nabla}} V(x,y,z)$$

Aqui surge o operador que actua sobre o potencial elétrico (Gradiente) que se representa por ∇ (nabla):

$$\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}V(x,y,z)$$

Checkpoint



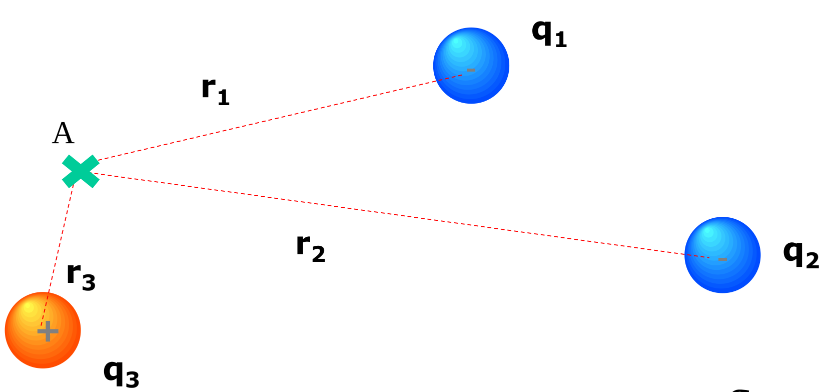
A figura representa a secção de superfícies equipotenciais paralelas e 5 diferentes percursos de electrões.

(a)Qual o sentido do campo eléctrico associado a estas superfícies equipotenciais?

(b) Para cada percurso, o trabalho realizado pela força eléctrica é positivo, negativo ou nulo?

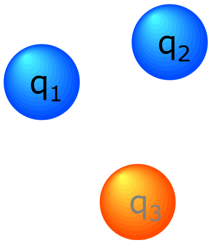
(c)Em que percursos a variação da energia cinética é positiva?

Se houver um conjunto de cargas, o potencial num determinado ponto é dado por:



$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \sum k \frac{q_i}{r_i}$$

Qual a energia potencial electrostática dum sistema de várias cargas eléctricas pontuais?



$$E_P = k\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right]$$

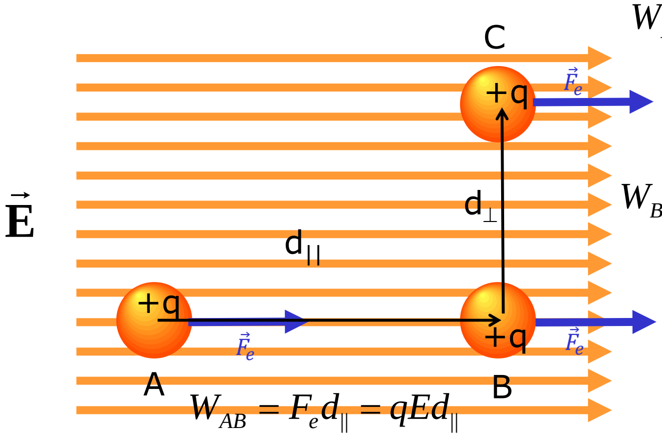
Portanto: $E_P = E_{P12} + E_{P13} + E_{p23}$

$$E_P = \sum_{i \neq j} k \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Diferença de potencial num Campo Eléctrico Uniforme

Qual o trabalho realizado pela força eletrostática entre A e C?

$$W_{AC} = W_{AB} + W_{BC}$$



$$W_{BC} = F_e d_\perp = 0$$

$$W_{AB} = F_e d_\parallel = qEd_\parallel$$

Qual a diferença de potencial entre A e C?

$$W_{AC} = qEd_\parallel \Leftrightarrow \Delta E_{P(AC)} = -qEd_\parallel \Leftrightarrow \Delta V_{AC} = -Ed_\parallel \Rightarrow \Delta V_{AB} = -Ed_\parallel$$

Ponto da situação (cap 1 e 3)

Conceito de força $\vec{F} = -\frac{dE_P}{dr}\hat{r}$ **Conceito de energia**

Actua localmente $\vec{F} \longleftarrow \Delta E_P = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \longrightarrow E_P$

$\vec{F} = q\vec{E}$ $\qquad$ $E_P = qV$

Actua em todo o lado $\vec{E} \longleftarrow \vec{E} = -gradV \longrightarrow V$

$\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{r}$

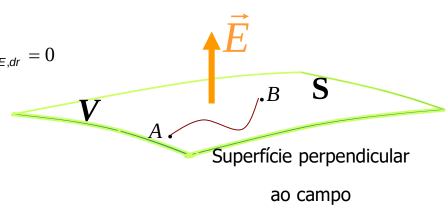
Quando uma carga se desloca numa superfície equipotencial a força elétrica não realiza trabalho (**porquê?**) **Para que uma superfície seja equipotencial basta que seja perpendicular ao campo?**

Imaginemos uma superfície perpendicular ao campo e vamos calcular a diferença de potencial entre dois pontos dessa superfície.

$\Delta V_{A\to B} = ?$

$\theta_{E,dr} = 90^o \Rightarrow \cos\theta_{E,dr} = 0$

$\Delta V_{A\to B} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$

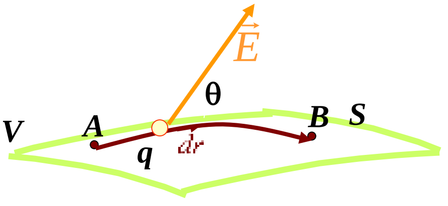


$\Delta V_{A\to B} = 0$

(qualquer que seja A e B na superfície)

$\boxed{S \text{ é uma superfície equipotencial}}$

E se a superfície considerada não for perpendicular ao campo?



$\theta_{E,ds} \neq 90^{\circ} \Rightarrow \cos\theta_{E,ds} \neq 0$

$$\Delta V_{sup} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \neq 0$$

$$\Delta V_{A \to B} \neq 0$$

S NÃO é uma superfície equipotencial

<u>Potencial numa esfera condutora carregada</u>

Fora da esfera

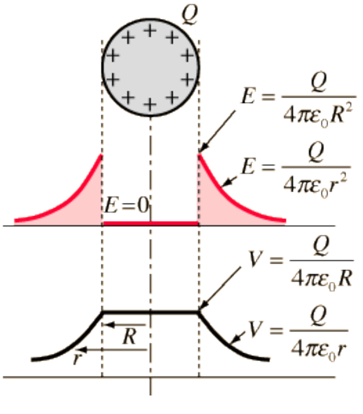
$$\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta V_{\infty r} = -kq\int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot d\vec{r}$$

$$V_{\infty} - V_r = -kq\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\infty}$$

$$-V_r = -kq\left[-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{r}\right]$$

$$V_r = \frac{kq}{r}$$



Interior da esfera

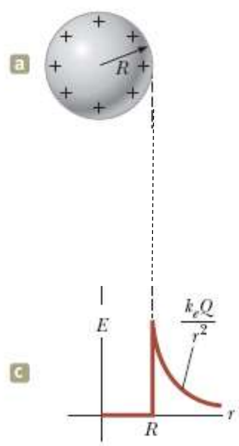
$$\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{r}$$

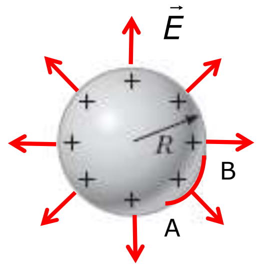
$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{0} \Rightarrow V = const.$$

<u>Equivalente ao que acontece numa casca carregada</u>

condutores esféricos e não esféricos

Já sabemos que num condutor esférico em equilíbrio electrostático, o excesso de carga aculuma-se à superfície. A densidade superficial de carga, σ, nesse condutor é uniforme.





$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{r}$$

$$\Downarrow$$

$$V_B - V_A = 0$$

Porque o campo é perpendicular ao percurso. Portanto o potencial é constante ao longo da superfície.

Como o campo é nulo no interior do condutor, então, no interior do condutor, o potencial é constante e igual ao potencial na superfície.

Aplicação

2 condutores esféricos com raios r_1 e r_2 estão separados por uma distância muito maior que os respectivos raios. As esferas são ligadas através de um fio condutor. As cargas eléctricas das esferas **em equilíbrio** são q_1 e q_2, respectivamente. Qual a razão entre os campos eléctricos à superfícia das esferas?

Se as esferas estão muito afastadas, podemos considerar que o campo provocado por uma esfera não afecta a distribuição de cargas da outra esfera.

Ao serem ligadas por um condutor, as esferas ficam em equilíbrio (**V_1** = **V_2** = **V**).

$$V = k\frac{q_1}{r_1} = k\frac{q_2}{r_2} \Leftrightarrow \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \Leftrightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

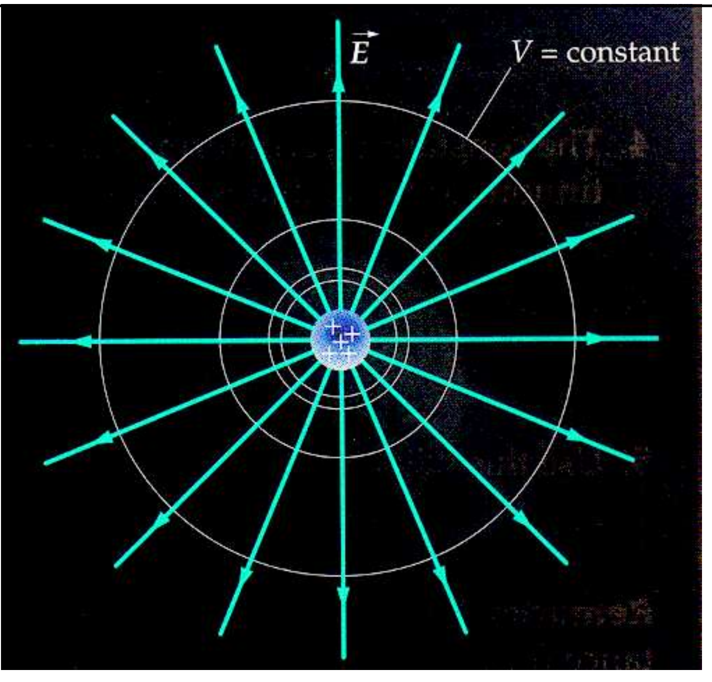
$$E_1 = k\frac{q_1}{r_1^2} \wedge E_2 = k\frac{q_2}{r_2^2} \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1/r_1^2}{q_2/r_2^2} \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

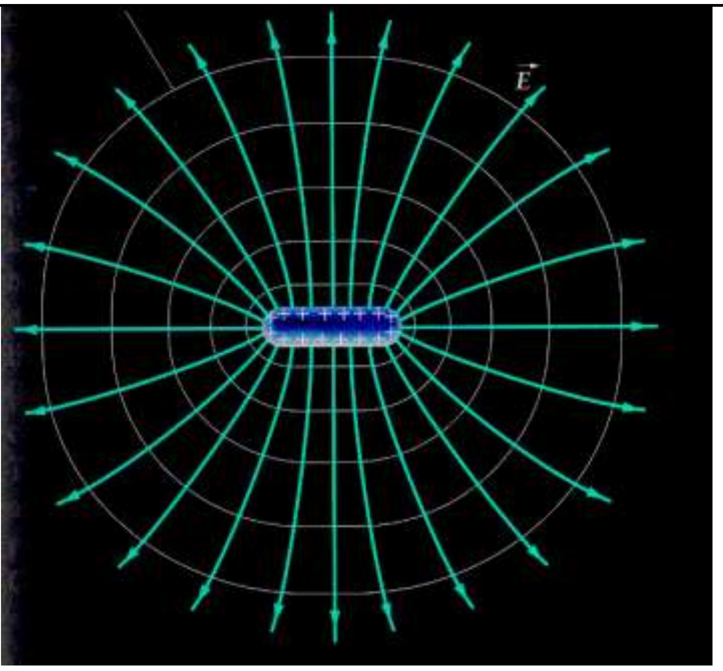
O campo eléctrico na vizinhança da esfera de menor raio é superior, apesar do potencial à superfície de ambas as esferas ser igual.

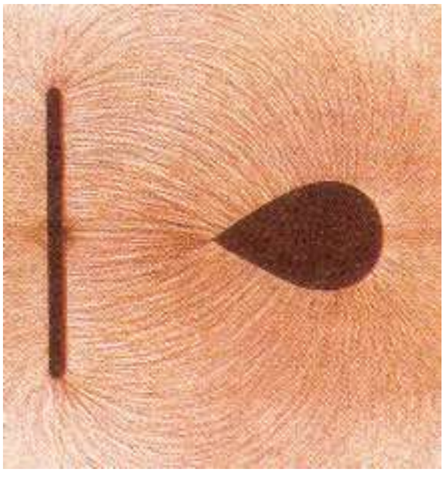
Se o condutor não é esférico:

- σ elevada onde o raio de curvatura for pequeno e a superfície convexa.
- σ baixa onde o raio de curvatura for pequeno e a superfície côncava.

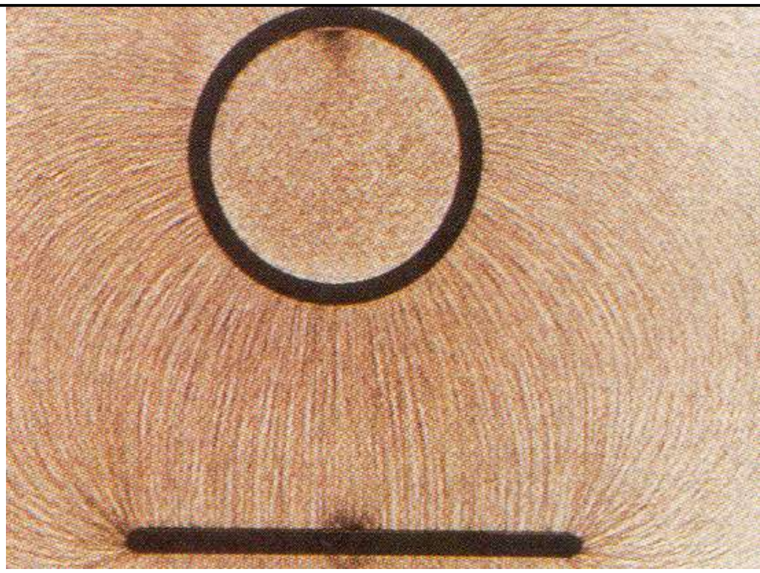
Como $|\vec{E}| \propto \sigma$, o campo eléctrico é grande nas vizinhanças dos pontos que têm curvatura convexa, com pequeno raio de curvatura, e atinge valores muito elevados nas vizinhanças de pontas agudas.







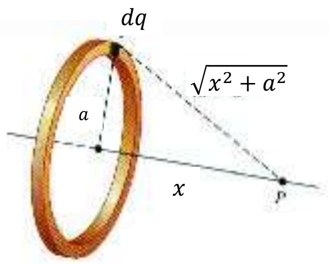
Placa e condutor com cargas de sinal oposto. Reparar que, em ambos os condutores, o campo elétrico é mais intenso nas zonas onde o raio de curvatura é menor.



Linhas de campo eléctrico para um cilindro e uma placa com cargas de sinal contrário. Notar que as linhas são perpendiculares às superfícies e que não há linhas no interior do cilindro.

Potencial gerados por alguns corpos de geometria particular, com distribuição homogénea de carga

Potencial num eixo de um anel de carga Q, uniformemente carregado



ɔotencial criado por um elemento de carga dq, que de ser considerado pontual, no ponto **P**, assumindo e o potencial é nulo no infinito, pode ser calculado :

$$V = \frac{kdq}{r}$$

contribuição de todos os elementos de carga dq, para otencial no ponto **P**, será:

$$V = \int \frac{kdq}{r}$$

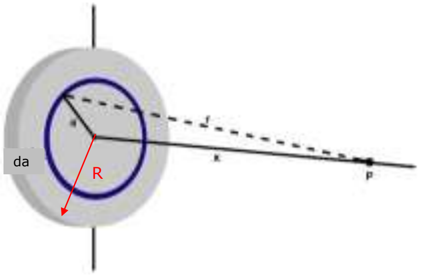
$$V = \int \frac{kdq}{r} = \int \frac{kdq}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{k}{\sqrt{x^2+a^2}} \int dq$$

Q

$$\boxed{V = \frac{kQ}{\sqrt{x^2+a^2}}}$$

Potencial num eixo de um disco uniformemente carregado

Num disco com densidade de carga σ



Resolver o problema como se o disco fosse um conjunto de anéis concêntricos carregados.

Potencial no ponto P criado pelo anel azul: $dV = \frac{kdq}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{k\sigma 2\pi ada}{\sqrt{x^2+a^2}}$

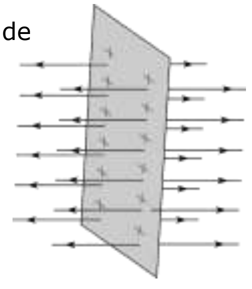
Integrando entre 0 e R: $V = \int_0^R \frac{k\sigma 2\pi ada}{\sqrt{x^2+a^2}} = k\sigma\pi \int_0^R (x^2+a^2)^{-1/2} 2ada$

Fazendo: $\int u^n du$ com: $u = x^2 + a^2$ $n = -\frac{1}{2}$

$$V = k\sigma\pi \int_0^R (x^2+a^2)^{-1/2} 2ada = \left[\frac{(x^2+a^2)^{1/2}}{1/2}\right]\Bigg|_0^R \qquad \boxed{V = 2k\sigma\pi\left[(x^2+R^2)^{1/2} - x\right]}$$

Potencial devido a um plano uniformemente carregado

Num plano com densidade de carga σ



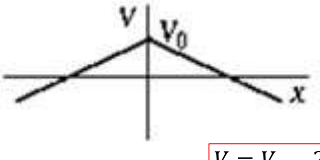
$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath} = -2\pi k\sigma\hat{\imath} \qquad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath} = 2\pi k\sigma\hat{\imath}$$

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r} = -(-2\pi k\sigma\hat{\imath})\cdot(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}) = 2\pi k\sigma dx$$

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r} = -(2\pi k\sigma\hat{\imath})\cdot(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}) = -2\pi k\sigma dx$$

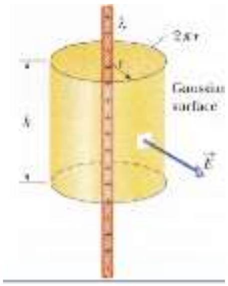
$$\int dV = \int 2\pi k\sigma dx \qquad \int dV = \int -2\pi k\sigma dx$$

$$V = V_0 + 2\pi k\sigma x \qquad V = V_0 - 2\pi k\sigma x$$



$$\boxed{V = V_0 - 2\pi k\sigma|x|}$$

Potencial devido a uma linha infinita uniformemente carregada



$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{2k\lambda}{r}dr$$

$$\int dV = \int -\frac{2k\lambda}{r}dr$$

$$V = V_0 - 2k\lambda \ln r$$

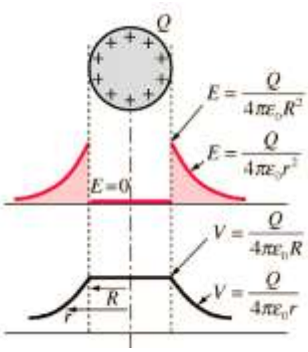
O potencial decresce com r, mas não é 0 no infinito, nem pode ser 0 em r=0. O potencial tem de ser 0 a uma distância pré-estabelecida (e.g. a)

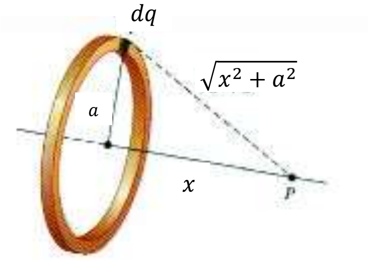
$$0 = V_0 - 2k\lambda \ln a$$

$$V_0 = 2k\lambda \ln a$$

$$V = 2k\lambda \ln a - 2k\lambda \ln r$$

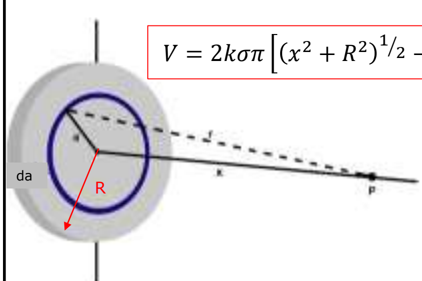
$$\boxed{V = -2k\lambda \ln\frac{r}{a}}$$

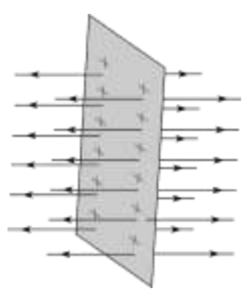


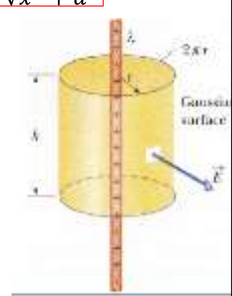


$$\boxed{V = \frac{kQ}{\sqrt{x^2+a^2}}}$$

$$\boxed{V = 2k\sigma\pi\left[(x^2+R^2)^{1/2} - x\right]}$$



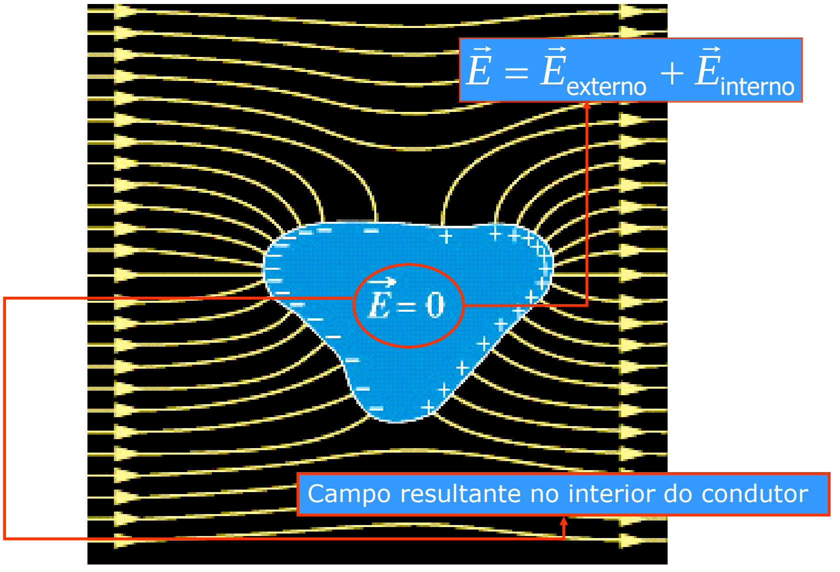




$$\boxed{V = V_0 - 2\pi k\sigma|x|}$$

$$\boxed{V = -2k\lambda \ln\frac{r}{a}}$$

condutor num campo eléctrico externo



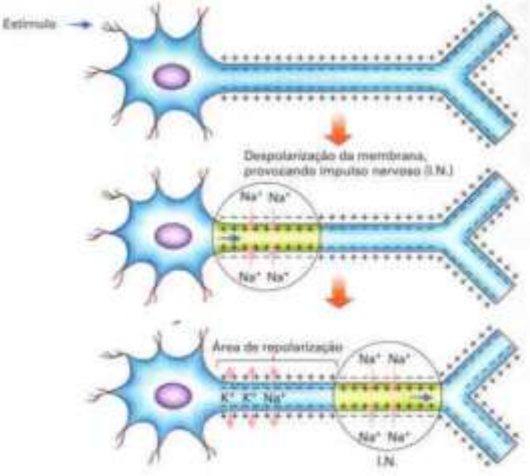
O corpo humano é condutor e se o anestesista estiver com calçado isolador, pode acumular carga eléctrica e atingir um potencial da ordem das dezenas dos kV. Ao tocar no paciente, produzir-se-ia uma descarga.

Além disso, pode haver gases inflamáveis (gases para anestesia) que poderiam originar um evento desastroso.

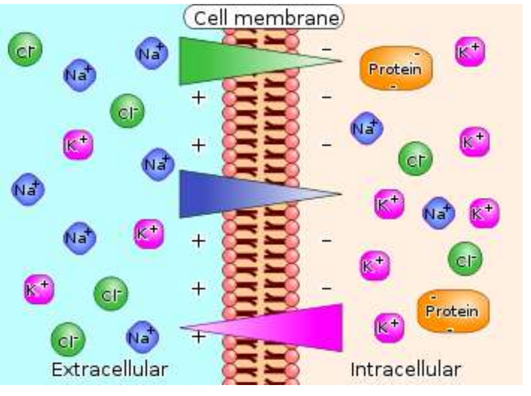
Para descarregar a carga acumulada, os membros das equipas cirúrgicas usam calçado condutor e o chão da sala cirúrgica é também condutor.

Potencial de membrana

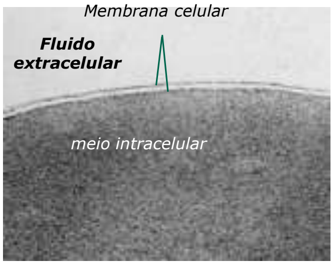
Na origem de cada um dos nossos gestos, de cada um dos nossos pensamentos, de cada batimento cardíaco, um número quase infinito de pequenos circuitos está em funcionamento, e do seu bom funcionamento depende a nossa vida. Se quisermos perceber alguma coisa das ciências da vida, temos que perceber electromagnetismo...

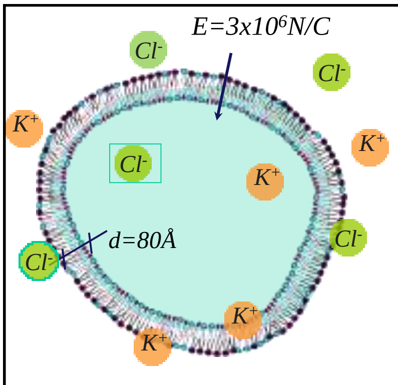


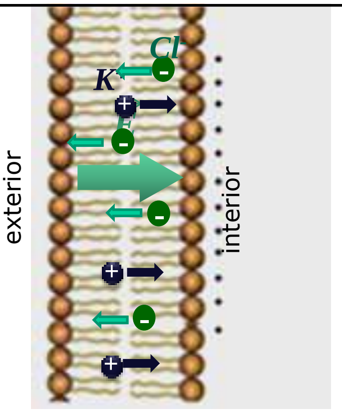
Nas células as concentrações iónicas no fluido interior da célula e o fluido extra-celular não são iguais. A presença de cargas de sinal contrário nas faces exterior e interior da membrana dá origem a um campo eléctrico.



Este campo eléctrico é responsável pela diferença de potencial eléctrico entre o exterior e o interior da célula, denominado **potencial de membrana**. Esta diferença de potencial desempenha um papel fundamental nas funções celulares.

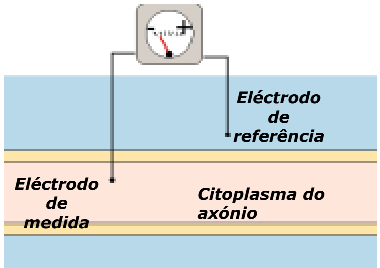




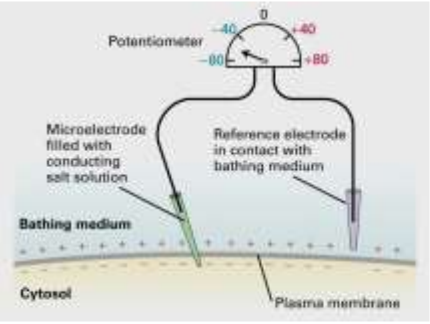


$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$$

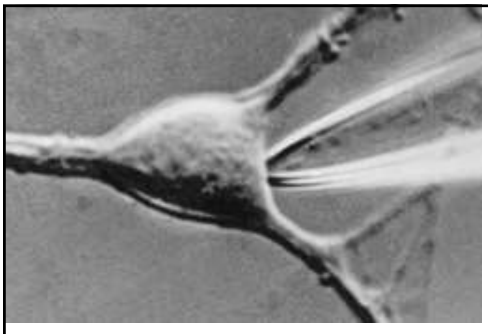
O sentido da força depende do sinal da carga do ião.



O potencial de membrana pode ser medido colocando dois eléctrodos (um dentro, outro fora da célula) e medindo a diferença de potencial entre eles.



Os eléctrodos são geralmente capilares de vidro, com menos de $1\mu m$ de diâmetro contendo uma solução de *KCl*.



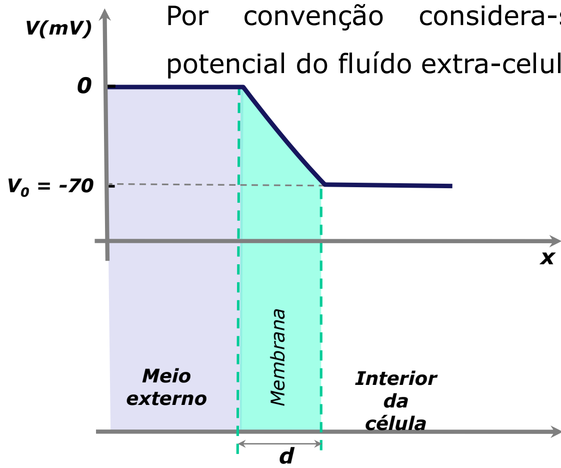
Na maioria das células, o potencial de membrana, *V*, permanece inalterado, desde que não haja influências externas. Nessas condições diz-se que o potencial de membrana é o potencial de repouso, representado por V_0.

O potencial de repouso tem um valor característico para cada tipo de célula:

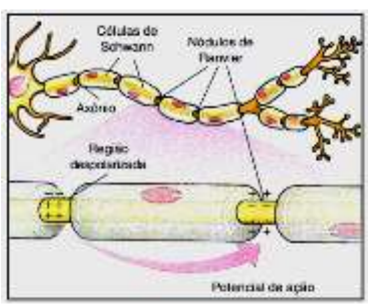
Tipo de célula	Potencial de repouso
Fibra nervosa	-55mV a -110mv
Fibra muscular	-30mV a -55mv

Potencial de repouso

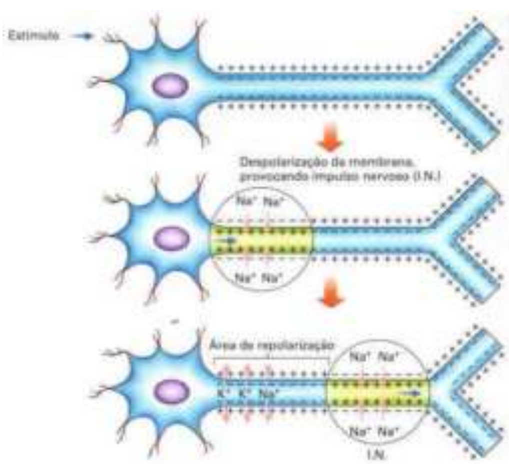
Por convenção considera-se que o potencial do fluído extra-celular é nulo.



Potencial de repouso de uma célula - O potencial de repouso existe enquanto existirem diferenças de concentração iónica dentro e fora da célula.



Um impulso nervoso (que transporta a informação para o cérebro) é uma alteração no potencial que se propaga ao longo do axónio.



Exemplo

O campo eléctrico numa membrana celular de *80Å*, tem o sentido de fora para dentro da célula e tem magnitude $3x10^6 N/C$. Calcule:

a) A força que actua num ião Cl^- .

b) A força que actua num ião K^+.

c) O trabalho realizado pelo campo eléctrico no transporte de um ião Cl^-, de dentro para fora da célula.

d) O trabalho realizado pelo campo eléctrico no transporte de um ião K^+, de dentro para fora da célula e de fora para dentro.

e) A variação de energia potencial dos iões Cl^- e K^+ quando saem da célula e quando entram.

Numa célula, o potencial no interior da célula é de *-60 mV* relativamente ao exterior. A espessura da membrana celular é *d=80Å*. Calcule:

a) Calcule o campo eléctrico na membrana. (7.5×10^6 N/C)

b) As forças que actuam nos iões Cl^- e K^+. (1.2×10^{-12} N)

c) O trabalho realizado pelo campo no transporte de um ião de Cl^-, do interior para o exterior da célula. (9.6×10^{-21} J)