Análise Matemática II (LEGI, MIEM) **FCTUC**

Frequência (1h30m) - 28/5/2010

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio e a apresentação dos cálculos efectuados.

---

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 2 - (x-1)^2 - (y-1)^2$.
   (a) Determine, caso existam, os máximos e mínimos locais e os pontos sela de f.
   (b) Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, determine os extremos absolutos de $f_{|D}$ (onde $f_{|D}$ denota a restrição de f ao conjunto D).
2. Averigúe a natureza das séries numéricas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$, onde $a_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{n^2}{e^n}$.
3. Determine a natureza da série numérica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{2n^5 - 3}$.
4. Considere a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$.
   (a) Estabeleça a fórmula de Taylor de ordem 1 de f no ponto $a = 16$.
   (b) Usando a alínea (a), calcule um valor aproximado A para $\sqrt{17}$ e estime o erro $|\sqrt{17} - A|$.
5. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ a função soma da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)5^n}$.
   (a) Determine o intervalo de convergência da série.
   (b) Indique o domínio da função derivada f' e ache uma expressão analítica para $f'(x)$.
   (c) Calcule $f(1)$ com um erro inferior a $0,01$.
6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função periódica de período π definida no intervalo $[0, \pi[$ por $f(x) = \cos x$.
   (a) Verifique se a série de Fourier de f é uma série de senos. (Sugestão: Esboce o gráfico de f).
   (b) Determine a soma da série de Fourier de f nos pontos $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Fórmula

A série de Fourier de uma função f periódica de período $2L$ é $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$,
onde $a_n = \displaystyle\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ e $b_n = \displaystyle\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$, para $n \geq 0$.