Ficha 6: Integral de Riemann

6.1 Definição do integral

Definição 6.1 *Seja f uma função não negativa no intervalo $[a, b]$. O integral de f no intervalo $[a, b]$ é a área A compreendida entre os eixos verticais $x = a$ pela esquerda, $x = b$ pela direita, e a curva $y = f(x)$ por cima, $y = 0$ por baixo, e notamos*

$$\int_a^b f(x)dx = A.$$

Do mesmo modo, seja f uma função não positiva no intervalo $[a, b]$. Definimos o integral de f no intervalo $[a, b]$ como o valor algébrico da área A compreendida entre os eixos verticais $x = a$ pela esquerda, $x = b$ pela direita, e a curva $y = f(x)$ por cima, $y = 0$ por baixo, mas desta vez com o sinal negativo.
Notamos então

$$\int_a^b f(x)dx = -A$$

Afinal para qualquer função f definimos a parte positiva $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ e a parte negativa $f^-(x) = \min(f(x), 0)$ e o integral vale

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx.$$

NOTA 6.1 Quando escrevemos o integral $\int_a^b f(x)dx$, a variável x chama-se variável muda. Em consequência, as expressões seguintes

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(\theta)d\theta = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(r)dr$$

representam o mesmo integral.

Proposição 6.1
As funções contínuas em $[a, b]$ admitem sempre um integral.

EXEMPLO 6.1 A função $f(x) = \sin(2\pi x)$ é contínua em $[0, 1]$, então ela admite um integral.

6.2 Propriedades do integral

Proposição 6.2

- *Se $f = \alpha$ é uma função constante então*

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\alpha.$$

- *(Linearidade) Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, então*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

- *(Monotonia)Se $f \leq g$ então*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- *para qualquer função f definida em $[a, b]$*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

- *(aditividade) Seja $c \in [a, b]$, temos*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- *Seja $c \in [a, b]$, temos*

$$\int_c^c f(x)dx = 0.$$

Adoptamos também a convenção

Notação 6.1 *Para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$ então*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Esta convenção é compatível com a aditividade no sentido que

$$0 = \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx.$$

NOTA 6.2 Cuidado! $\int_a^b (gf)(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$. Por exemplo, sejam $f(x) = g(x) = x$ podemos verificar que

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 g(x) = 0$$

visto que a área abaixo de $y = 0$ compensa a área acima. Por conseguinte como a função $f(x)g(x) = x^2$ temos

$$\int_{-1}^1 (fg)(x)dx > 0.$$

6.3 Integração e primitivação

Definição 6.2 *Seja f uma função contínua em $[a, b]$. para qualquer $x \in [a, b]$ definimos a função integral por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Teorema 6.1

- *para qualquer $x \in]a, b[$, $F(x)$ é derivável em x com $F'(x) = f(x)$*
- *F é derivável pela direita em a e pela esquerda em b com $F'(a) = f(a)$ e $F'(b) = f(b)$.*

Em particular, $F(x)$ é a primitiva da função f que se anula em a.

Corolário 6.1 (Fórmula de Barrow)
Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e G uma primitiva de f então

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Exemplo 6.2 Calcular o integral seguinte $I = \displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{1+x}dx$.
Seja $f(x) = \frac{1}{1+x}$, a função é contínua no intervalo $[1, 10]$ com primitiva $G(x) = \ln(1 + x)$. Obtemos assim

$$\int_1^{10} \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1 + x)]_1^{10} = \ln(11) - \ln(2) = \ln(11/2).$$

Como as primitivas dependem apenas de uma constante, qualquer primitiva pode escrever-se como $G(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)dt$. Em consequência, o limite inferior do integral não tem importância quando queremos apenas determinar uma primitiva.

6.4 Técnica de cálculo de integral

6.4.1 Integrção com mudança de variável

Definição 6.3 (mudança de variável) *Seja $y = \phi(x)$ uma função e $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ dois intervalos. Dizemos que ϕ é uma mudança de variável de I sobre J se:*

- *ϕ é uma bijeção de I sobre J.*
- *ϕ é derivável em I tal que $\phi'(x) \neq 0$ para qualquer $x \in]a, b[$.*

Proposição 6.3
Seja f uma função contínua em $[c, d]$ e $y = \phi(x)$ uma mudança de variável de $[a, b]$ sobre $[c, d]$. Então temos:

$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx.$$

Para realizar uma mudança (ou substituição) de variável, procedemos em três etapas.

1. Mudar os limites: passar de c, d para a, b.
2. Mudar a função: passar de $f(y)$ para $f(\phi(y))$.
3. Mudar o diferencial: passar de dy para $\phi'(x)dx$.

Exemplo 6.3 (Mudança de variável) Usando a mudança de variável $y = \sin(t)$ calcular o intergral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}dy$.
A função $\sin(t)$ é uma bijeção de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sobre $[-1,1]$ e verificamos que $\phi'(t) = \cos(t) > 0$ para qualquer $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Além de mais temos $\phi(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\phi(\frac{\pi}{2}) = 1$.
Na segunda etapa determinamos a nova função

$$f(\phi(t)) = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t).$$

Finalmente, na útima etapa sabemos que $\phi'(t) = \frac{dy}{dt}$ então $dy = \phi'(t)dt = \cos(t)dt$. Deduzimos finalmente

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt.$$

Usando a formula $\cos^2(t) = \frac{\cos(2t)+1}{2}$, obtemos

$$I(f) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2}dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

6.4.2 Integração e primitivação por partes

Proposição 6.4
Sejam f e g duas funções contínuas, diferenciáveis em $[a,b]$ então

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx, \text{ onde } \Big[fg\Big]_a^b = (fg)(b) - (fg)(a).$$

Nota 6.3 Podemos aplicar a mesma fórmula quando consideramos a primitivação, seja

$$\int^x f(t)g'(t)dt = (fg)(x) - \int^x f'(t)g(t)dx$$

ou escrito de um modo diferente $P(fg') = fg - P(f'g)$.

Exemplo 6.4 (Integração por partes) Usando uma integração por partes, calcular o integral seguinte $\displaystyle\int_0^{10} te^t dt$.
Consideramos $f(t) = t$ e $g'(t) = e^t$, então, $f'(t) = 1$ e $g(t) = e^t$.

$$\begin{aligned} \int_0^{10} te^t dt &= \Big[te^t\Big]_0^{10} - \int_0^{10} e^t dt \\ &= 10e^{10} - (e^{10} - e^0) \\ &= 9e^{10} + 1. \end{aligned}$$

Exemplo 6.5 (Primitivação por partes) Usando uma primitivação por partes, determinar uma primitiva de $\ln(x)$.
Seja $f(t) = \ln(t)$, $g'(t) = 1$, então, $f'(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = t$.

$$\begin{aligned} \int^x \ln(t)dt &= x\ln(x) - \int^x \frac{t}{t}dt \\ &= x\ln(x) - x. \end{aligned}$$

6.4.3 Integração de funções racionais

Graças à decomposição em elementos simples calculamos o integral de uma fração racional.

Exemplo 6.6 Calcular o integral seguinte

$$\int_{-1}^{0} \frac{x+4}{(x+2)(x-1)^2}dx.$$

Usando a decomposição em elementos simples, podemos escrever

$$\begin{aligned} I(F) &= \int_{-1}^{0} \frac{x+4}{(x+2)(x-1)^2}dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left[-\frac{2/9}{x-1} + \frac{5/3}{(x-1)^2} + \frac{2/9}{x+2} \right] dx \\ &= -2/9\int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1}dx + 5/3\int_{-1}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}dx + 2/9\int_{-1}^{0} \frac{1}{x+2}dx \\ &= -2/9\Big[\ln|x-1|\Big]_{-1}^{0} + 5/3\Big[\frac{-1}{x-1}\Big]_{-1}^{0} + 2/9\Big[\ln|x+2|\Big]_{-1}^{0} \\ &= 2/9\ln(2) + 5/6 - 2/9\ln(2) = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

6.5 Aplicação

6.5.1 Comprimento de uma curva

Proposição 6.5
Seja f uma função diferenciável em $[a,b]$ e G_f o seu gráfico ou curva. Então o comprimento $|G_f|$ da curva associado a f é dado por

$$|G_f| = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Nota 6.4 A razão desta definição vem da medida de uma curva parametrizada que nós estudamos na cadeira de Análise onde usamos uma parametrização particular $x(t) = t$ e $y(t) = f(t)$.

Exemplo 6.7 Calcular o comprimento da curva da função $\frac{1}{2}x^2$ no intervalo $[0,1]$.

$$|G_f| = \int_0^1 \sqrt{1+[x]^2}dx.$$

Introduzimos a mudança de variável $\sinh(t) = x$. Temos $\sinh(0) = 0$ e $\sinh(t_1) = 1$ onde $t_1 = \arg\sinh(1) = \ln(1+\sqrt{1+1^2}) = \ln(1+\sqrt{2})$. Por outro lado, verificamos que

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2(t)} = \sqrt{\cosh^2(t)} = \cosh(t)$$

e

$$\frac{dx}{dt} = \sinh'(t) = \cosh(t).$$

Usando a mudança de variável, temos

$$|G_f| = \int_0^{t_1} \cosh^2(t)dt = \frac{1+\cosh(2t)}{2}dt = \Big[\frac{t}{2} + \frac{\sinh(2t)}{4}\Big]_0^{t_1} = \ln\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right) + \sinh\left(2\ln(1+\sqrt{2})\right).$$

6.5.2 Cálculo da área de um domínio plano

Proposição 6.6
Sejam f e g duas funções contínuas em $[a,b]$ e D o domínio compreendido entre os lados verticais $x = a$, $x = b$ das funções f e g. Então a área (não algébrica) de D (notação $|D|$ ou área(D)) é dada por

$$|D| = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

NOTA 6.5 Cuidado para não confundir a área algébrica (que pode ser negativa) com a área geométrica (que é sempre não negativa).

EXEMPLO 6.8 Calcular a área situada entre $x = -1$ e $x = 1$ para as funções $f(x) = x$, $f(x) = -x$.

$$|S| = \int_{-1}^{1} |x - (-x)| = 2\int_0^1 2x = 4\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = 2.$$

6.5.3 Cálculo do volume de um sólido de revolução

Proposição 6.7
Seja f uma função contínua em $[a,b]$, não negativa e definimos o sólido gerado por revolução a partir de f como

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \in [a,b], \sqrt{y^2+z^2} \leq f(x)\}.$$

Então o volume do sólido $|V|$ é dado por

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

NOTA 6.6 Notar que $\pi f^2(x)$ corresponde a área de uma circunferência de raio $f(x)$.

EXEMPLO 6.9 Calcular o volume gerado por revolução a partir de $f = (1-x)$ no intervalo $[0,1]$. Verificamos bem que $f(x) \geq 0$ quando $x \in [0,1]$.

$$|V| = \pi\int_0^1 (1-x)^2 dx = \pi\Big[-\frac{(1-x)^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

6.6 Exercícios

Exercício 1 Calcular os integrais imediatos seguintes.

1. $\displaystyle\int_0^3 (x^2 - x)dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{1+2x^2}dx, \quad \int_{-1}^1 (e^{-x} + e^{2x})dx, \quad \int_0^1 (\cos(\pi t) + \sin(2\pi t))dt.$

2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{12}{2x-5}dx, \quad \int_0^{1/4} (1 + \tan^2(\pi x))dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t)dt, \quad \int_{\sin(-1)}^{\sin(1/2)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Exercício 2 Calcular os integrais imediatos seguintes com substituição de função.

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 2x\sqrt{1+x^2}dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin(x^4)dx, \quad \int_0^5 \frac{5x}{1+2x^2}dx, \quad \int_0^2 12x^3 e^{x^4}dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{9x^2}{e^{x^3}}dx.$

Exercício 3 Calcular os integrais seguintes usando a integração por partes

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx, \quad \int_1^3 x\ln(x)dx, \quad \int_1^3 x^2\ln(x)\ dx,$

2. $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\ dx, \quad \int_0^1 x\cos(2\pi x)\ dx, \quad \int_1^3 t^2\ln(t)\ dt.$

Exercício 4 Calcular os integrais usando a mundança de variável.

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{4-(2x)^2}dx$ com $x = \sin(t)$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t\sqrt{t}}dt$ com $s = \sqrt{t}$.

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^{\frac{2}{3}}}dt$ com $t = s^3$.

Exercício 5 Sejam $P = x+1$, $Q = (x-2)(x+3)$ dois polinómios e $f = \frac{P}{D}$ a fração racional associada.

1. Justificar que a fração racional é uma fração racional irredutível. Determinar a decomposição em elementos simples de $\frac{P}{Q}$.

2. Calcular o valor do integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

3. Mesmas questões com $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+5x^2-4}{x+2}dx$.

4. Mesmas questões com $\int_0^1 \frac{2x^3+x^2-3x-1}{2x-1}\,dx$.

5. Mesmas questões com $\int_0^1 \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}\,dx$.

Solução 1

1. *i)* $\displaystyle\int_0^3 (x^2-x)dx = \frac{9}{2}$, *ii)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2x^2}dx = \frac{\arctan(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$,

iii) $\displaystyle\int_{-1}^1 (e^{-x}+e^{2x})dx = e - \frac{1}{e} + e^2/2 - \frac{1}{2e^2}$, *iv)* $\displaystyle\int_0^1 (\cos(\pi t)+\sin(2\pi t))dt = 0.$

2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{12}{2x-5}dx = 6\ln(3/7)$, $\displaystyle\int_0^{1/4} (1+\tan^2(\pi x))dx = \frac{1}{\pi}$,

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t)dt = \pi$, $\displaystyle\int_{\sin(-1)}^{\sin(1/2)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{3}{2}.$