$\boxed{F.3}$

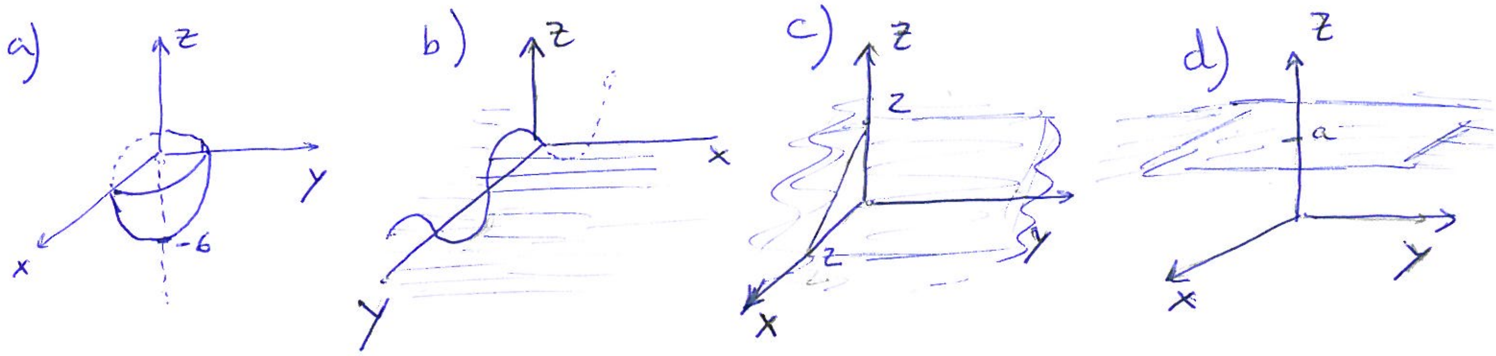
1.

a) $D_f = \mathbb{R}^2$

b) $D_f = \{(x,y) : 2 - x \geq 0 \wedge y \neq 0\}$

c) $D_f = \{(x,y) : 36 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 36\}$

2.



3.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

Calculemos os limites iterados no pto $(0,0)$, isto é, vamos aproximar (x,y) a $(0,0)$ através da recta $y=0$ e depois através da recta $x=0$.

- Ao longo do eixo OX $(y=0)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

- Ao longo do eixo OY $(x=0)$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$\therefore$ Como os limites iterados são diferentes, não existe limite.

3. b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2y}{x^3+y^3}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{4x^2y}{x^3+y^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{4x^2y}{x^3+y^3}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Como os limites iterados são iguais, o limite, se existir é zero.

Calculamos através de trajectórias diferentes que passam pelo pto $(0,0)$. Por exemplo, $y=mx$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{4x^2y}{x^3+y^3} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^2(mx)}{x^3+(mx)^3} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^3m}{x^3(1+m^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4m}{1+m^3} = \frac{4m}{1+m^3}$$

Como o limite depende do declive da recta (valor de m) pela qual se aproxima do pto $(0,0)$, o limite não existe.

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y-2}{x+3} & \text{se } x\neq -3 \\ 0 & \text{se } x=-3 \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(-3,2)} f(x,y) = \lim_{x\to -3}\left(\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{x+3}\right) = \lim_{x\to -3} 0 = 0$$

e

$$\lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to -3}\frac{y-2}{x+3}\right) = \infty$$, logo o $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,2)} f(x,y)$ não existe.

④ Usar a definição de limite para provar que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x,y)-L| < \varepsilon$$

a) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} (5x+3y) = 13$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : 0<\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}<\delta \Rightarrow |(5x+3y)-13|<\varepsilon$$

Tem-se que,

$$|5x+3y-13| = |(5x-10)+(3y-3)| \leq |5(x-2)|+|3(y-1)|$$

$$\leq 5|x-2| + 3|y-1|$$

Se $5|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $3|y-1| < \frac{\varepsilon}{2}$, então

$$|5x+3y-13| \leq 5|x-2|+3|y-1| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$5|x-2| < \frac{\varepsilon}{2} \iff 25(x-2)^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \iff (x-2)^2 < \frac{\varepsilon^2}{100}$$

$$3|y-1| < \frac{\varepsilon}{2} \iff 9(y-1)^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \iff (y-1)^2 < \frac{\varepsilon^2}{36}$$

Escolhemos $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{10}, \frac{\varepsilon}{6}\right\} = \frac{\varepsilon}{10}$

então

$$(x-2)^2 \leq (x-2)^2+(y-1)^2 < \frac{\varepsilon^2}{100} \quad \text{e} \quad (y-1)^2 \leq (x-2)^2+(y-1)^2 < \frac{\varepsilon^2}{100} < \frac{\varepsilon^2}{36}$$

ou seja $|5x+3y-13| < \varepsilon$.

(4)

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$

Tem-se que,

$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = (*)$

como $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$
e $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$(*) \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$

Como $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, tem-se que $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \delta$.

Podemos então escolher $\delta = \varepsilon$.

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$

④ c) (cont.)

Tem-se que

$$\left|\frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{4|x^3|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4x^2|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = (*)$$

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$(*) \leq \frac{4\,x^2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 4x^2 \leq 4.(x^2+y^2) = 4\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

Como $0<\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, tem-se que

$$\left|\frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < 4\delta^2$$

Podemos escolher δ da forma:

$$4\delta^2 = \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta^2 = \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Leftrightarrow \delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$$

//

(5.) a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{5x^2-y^2} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm\sqrt{5}x\} \cup \{(0,0)\}$

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0 \Rightarrow$ o limite, se existir, é zero

para $\frac{2xy}{5x^2-y^2}$ nos pts $(x,y) \neq (0,0)$ e $y \neq \pm\sqrt{5}x$: para esses pts, a expressão de f como é o quociente de polinómios e o denominador não se anula no D_f. Assim, o $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{5x^2-y^2}$ se existir é zero e $f(0,0)=1$. Logo a função não é contínua em $(0,0)$.

$\therefore$ A função é contínua em $D_f \setminus \{(0,0)\}$.

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+1} & , x \neq -1 \\ 0 & , x = -1 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}^2$

- para $x=-1$ temos de estudar se existe limite e se este é igual para $x=-1$, isto é,

$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{xy}{x+1} = f(-1,y)$

$\lim_{x\to -1}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x+1}\right) = \lim_{x\to -1} \frac{xy}{x+1} = \frac{-y}{0} \to \infty$, excepto qd $y=0$.

Não existe limite.

$\therefore$ A função é contínua em todo o seu domínio excepto para $x=-1$.

(6) Sabemos que $\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$.

Então $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

$\therefore$ $f(x,y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ se $f(0,0) = 1$

(7) a) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

$$f(2,-1) = \frac{2-(-1)}{2+(-1)} = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h,-1) - f(2,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2+h+1}{2+h-1} - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3+h}{1+h} - \frac{3(1+h)}{1+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h(1+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{h+1} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2,h-1) - f(2,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2-(h-1)}{2+(h-1)} - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3-h}{h+1} - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3-h-3(h+1)}{h(h+1)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h-3h}{h(h+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{h(h+1)} = -4$$

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f(0,0) = 0$