

## Critérios poara o estudo de séries numéricas

---

### Primeiro Critério de Comparação

Sejam  $(u_n)_n$  e  $(v_n)_n$  sucessões de termos não negativos, tais que para um certo  $p \in \mathbb{N}$ , se tem  $u_n \leq v_n$ ,  $\forall n \geq p$ . Se a série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge então a série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  também converge.

Equivalentemente, se a série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge então a série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  também é diverge.

### Segundo Critério de Comparação

Sejam  $(u_n)_n$  uma sucessão de termos não negativos e  $(v_n)_n$  uma sucessão de termos positivos, tais que existe  $\ell = \lim_n \frac{u_n}{v_n}$ , sendo  $\ell \in \mathbb{R}_0^+$  ou  $\ell = +\infty$ .

- Se  $\ell \in \mathbb{R}^+$  então as séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  e  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  possuem a mesma natureza.

- Se  $\ell = 0$  e  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge então  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  também converge.

Equivalentemente, se  $\ell = 0$  e  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge então  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  também diverge.

- Se  $\ell = +\infty$  e  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge então  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  também diverge.

Equivalentemente, se  $\ell = +\infty$  e  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge então  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  também converge.

### Critério da razão (de D'Alembert)

Seja  $(u_n)_n$  uma sucessão de termos positivos tal que  $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ .

- Se  $\ell < 1$  então a série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge.

- Se  $\ell > 1$  então a série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge.

- Se  $\ell = 1$  então nada se pode concluir sobre a natureza da série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

### Critério da raíz (de Cauchy)

Seja  $(u_n)_n$  uma sucessão de termos não negativos tal que  $\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \ell$ .

- Se  $\ell < 1$  então a série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge.

- Se  $\ell > 1$  então a série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge.

- Se  $\ell = 1$  então nada se pode concluir sobre a natureza da série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

### Critério de Leibnitz (condição suficiente de convergência de séries alternadas)

Seja  $(u_n)_n$  uma sucessão decrescente, pelo menos a partir de uma certa ordem, e tal que  $\lim_n u_n = 0$ . Então a série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} u_n$  é convergente.