**Análise Matemática EE - Ficha nº 9**
1ºano, 2ºsemestre

---

# Integrais de linha

## Integrais de linha de campos escalares

1. Calcule o integral de linha $\int_\Gamma f\, ds$ onde:

   (a) $f(x,y,z) = x + y + z$ e $\Gamma$ é a linha definida por $\vec{c}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (b) $f(x,y,z) = \cos z$ e $\Gamma$ é a linha definida por $\vec{c}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (c) $f(x,y,z) = y$ e $\Gamma$ é a linha definida por $\vec{c}(t) = (0, 0, t)$, $t \in [0, 1]$.

   (d) $f(x,y,z) = yz$ e $\Gamma$ é a linha definida por $\vec{c}(t) = (t, 3t, 2t)$, $t \in [1, 3]$.

2. Considere um fio com a forma de uma semi-circunferência definida por $\vec{c}(t) = (0, 3\sin t, 3\cos t)$, $t \in [0, \pi]$ com uma densidade de massa de 2 gramas por unidade de comprimento. Determine a massa total do fio.

3. Determine a área de um dos lados de uma cerca cuja altura é dada pela função $f(x,y) = 1 + \frac{y}{3}$ e que se apoia numa curva com a seguinte descrição $\vec{c}(t) = (3\cos^3 t, 3\sin^3 t)$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Determine o comprimento da curva $\Gamma$ definida por $\vec{c}(t) = (t^2, t, 3)$, $t \in [0, 1]$.

## Integrais de linha de campos vetoriais

1. Calcule o integral de linha $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{c}$ onde

   (a) $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, z)$ e $\Gamma$ é a linha definida por $\vec{c}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (b) $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, z)$ e $\Gamma$ é a linha definida por $\vec{c}(t) = (t, t, t)$, $t \in [0, 1]$.

2. Calcule $\int_\Gamma x^2\, dx + xy\, dy + dz$ onde $\Gamma$ é a linha definida por $\vec{c}(t) = (t, t^2, 1)$, $t \in [0, 1]$.

3. Calcule $\int_\Gamma \cos z\, dx + e^x\, dy + e^y\, dz$ onde $\Gamma$ é a linha definida por $\vec{c}(t) = (1, t, e^t)$, $t \in [0, 2]$.

4. Calcule o trabalho feito pelo campo de forças $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, z)$ ao longo da parábola $y = x^2, z = 0$ para $x = -1$ até $x = 2$.

5. Mostre que o campo de forças $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y, z)$ ao deslocar uma partícula ao longo da curva $\Gamma$ que se encontra no plano $YOZ$ definida por $\vec{c}(t) = (0, 2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ não faz nenhum trabalho, isto é, que $W = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{c} = 0$.

6. Verifique se os seguintes integrais de linha são ou não independentes do caminho percorrido e, em seguida, calcule-os:

   (a) $\int_\Gamma (x + y)\, dx + (x + y^3)\, dy$ entre os pontos $(1, 1)$ e $(2, 2)$.

   (b) $\int_\Gamma P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy$ com $P(x,y) = x^2 - xy$ e $Q(x,y) = y^2 - \frac{x^2}{2}$ onde $\Gamma$ é a parábola $y = x^2$ entre os pontos $(-1, 1)$ e $(2, 4)$.

7. Considere a função $\vec{F}(x,y) = (3 + 2xy, x^2 - 2y)$.

   (a) Verifique se a função $\vec{F}(x,y)$ é um campo conservativo e, se for esse o caso, determine a função potencial.

(b) Calcule o integral de linha $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\Gamma$ é a curva dada por $r(t) = e^t \sin t\vec{i} + e^t \cos t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.

8. Considere a função $\vec{F}(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y)$.

   (a) Verifique se a função $\vec{F}(x, y)$ é um campo conservativo e, se for esse o caso, determine a função potencial.

   (b) Calcule o integral de linha $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\Gamma$ é a curva dada por $r(t) = (1+t)\vec{i}+t^2\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2$.

**Teorema de Green**

1. Calcule $\oint_C (3y - e^{\sin x})dx + (7x + \sqrt{y^4 + 2})dy$ onde $C$ é a circunferência centrada na origem e raio 3, usando o teorema de Green.

2. Calcule $\oint_C (xy^2)dx + (x^3)dy$ onde $C$ é o rectângulo com vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 3)$ e $(0, 3)$, usando o teorema de Green.

3. Calcule $\oint_C (xy)dx + (x^2y^3)dy$ onde $C$ é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, e $(1, 2)$, usando o teorema de Green.