Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática II

Ano Lectivo 2009/2010 **Folha 1 - Soluções**

1. (a) $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1;$

   (b) A recta $y = x + 2$ intersecta a hipérbole nos pontos $(-\dfrac{10}{3}, -\dfrac{4}{3})$ e $(-2, 0)$;

   (c) $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{48} = 1;$

   (d) $y = \frac{x^2}{3}$.

2. (a) $(-1, 4, -4)$;

   (b) $\sqrt{33}$;

   (c) $\sqrt{26}$;

   (d) 43;

   (e) $-4\imath - 2\jmath$;

   (f) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$;

   (g) $\arccos \frac{4}{\sqrt{33}}$

3. (a) Equação vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(-2, 0, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$,
   Equações paramétricas: $x = 1 - 2\lambda$, $y = 2$, $z = 3 + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
   Equações cartesianas: $x + 2z = 7$,$y = 2$.

   (b) Equação vectorial: $(x, y, z) = (1, 7, 4) + \lambda(1, -1, 3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$,
   Equações paramétricas: $x = 1 + \lambda$, $y = 7 - \lambda$, $z = 4 + 3\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
   Equações cartesianas: $x - 1 = 7 - y = \frac{z-4}{3}$.

   (c) Equação vectorial: $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(-3, 3, 2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$,
   Equações paramétricas: $x = 1 - 3\lambda$, $y = 3\lambda$, $z = 2 + 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
   Equações cartesianas: $\dfrac{1-x}{3} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{2}$.

   (d) Equação vectorial: $(x, y, z) = \lambda(5, 3, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$,
   Equações paramétricas: $x = 5\lambda$, $y = 3\lambda$, $z = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
   Equações cartesianas: $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{3}$, $z = 0$.

   (e) Equação vectorial: $(x, y, z) = (1, 0, 9) + \lambda(1, -2, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$,
   Equações paramétricas: $x = 1 + \lambda$, $y = -2\lambda$, $z = 9 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
   Equações cartesianas: $x - 1 = -\dfrac{y}{2} = 9 - z$.

4. (a) Equação cartesiana: $x + 4y + 2z = 28$;

   (b) Equação vectorial: $(x, y, z) = (-2, 1, 1) + \alpha(2, 1, 2) + \beta(1, -2, -4), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

   (c) Equação cartesiana: $x + y = 1$;

   (d) Equação vectorial: $(x, y, z) = (3, 2, 1) + \alpha(4, -1, -1) + \beta(-2, 2, 3), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

   (e) Equação cartesiana: $4x - 2y + 7z = 0$.

5. (a) Os planos são paralelos e distintos.
   (b) Os planos intersectam-se segundo uma recta e não são perpendiculares.
   (c) Os planos são perpendiculares.

6.

7. Esfera de centro $(-2, 3, -1)$ e raio $2\sqrt{2}$.

8.

9.

10. (a) S_1 e S_2 são hiperbolóides de uma folha;
    (b) A intersecção de S_1 e S_2 é uma hipérbole no plano $6x + 5y = 2$.

11.

12.

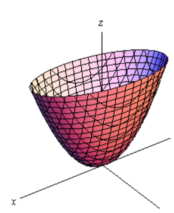
13.

14.

15. (a) $\mathbb{R}^2$;
    (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > y\}$;
    (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
    (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x \geq 0\}$.

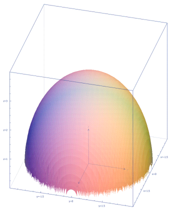
16. (a) $f(40, 15) = 25$. A altura da onda marítima, quando a velocidade do vento é de 15 nós durante 15 minutos, é de 25 pés.
    (b) $f(30, t)$ é a altura da onda quando a velocidade do vento é de 30 nós durante t minutos. Esta função é crescente.
    (c) $f(v, 30)$ é a altura da onda quando a velocidade do vento é de v nós durante 30 minutos. Esta função é crescente.
    (d) $f(18, 30)$ é, aproximadamente, $\dfrac{37}{5}$ pés.

17. (i) (a) Parabolóide elíptico de vértice $(0, 0, 0)$ e eixo $0Z$, voltado para cima;



(b) Se $k < 0$, a curva de nível k é $\emptyset$; se $k = 0$, a curva de nível k é $(0, 0)$; se $k > 0$, a curva de nível k é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{k}$.
A intersecção do plano $X0Y$ e da superfície de equação $z = x^2 + y^2$ é o ponto $(0, 0)$. A intersecção do plano $X0Z$ e da superfície de equação $z = x^2 + y^2$ é a parábola $z = x^2$ no plano $X0Z$. A intersecção do plano $Y0Z$ e da superfície de equação $z = x^2 + y^2$ é a parábola $z = y^2$ no plano $Y0Z$.

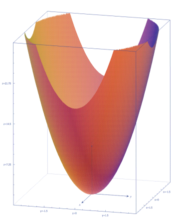
(ii) (a) Semi-esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio 3 (metade superior);



(b) Se $k < 0$ ou $k > 3$, a curva de nível k é $\emptyset$; se $k = 3$, a curva de nível k é $(0, 0)$; se $0 \leq k < 3$, a curva de nível k é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{9 - k^2}$.

A intersecção do plano $X0Y$ e da superfície de equação $z = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$ é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 3 (no plano $X0Y$). A intersecção do plano $X0Z$ e da superfície de equação $z = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$ é a semi-circunferência $x^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0$, no plano $X0Z$. A intersecção do plano $Y0Z$ e da superfície de equação $z = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$ é a semi-circunferência $y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0$, no plano $Y0Z$.

(iii) (a) Parabolóide elíptico de vértice $(0, 0, 0)$ e eixo $0Z$, voltado para cima;



(b) Se $k < 0$, a curva de nível k é $\emptyset$; se $k = 0$, a curva de nível k é $(0, 0)$; se $k > 0$, a curva de nível k é a elipse $2x^2 + 3y^2 = k$.

A intersecção do plano $X0Y$ e da superfície de equação $z = 2x^2 + 3y^2$ é o ponto $(0, 0)$. A intersecção do plano $X0Z$ e da superfície de equação $z = 2x^2 + 3y^2$ é a parábola $z = 2x^2$ no plano $X0Z$. A intersecção do plano $Y0Z$ e da superfície de equação $z = 2x^2 + 3y^2$ é a parábola $z = 3y^2$ no plano $Y0Z$.

18.

19. I(1)-II(b); I(2)-II(e); I(3)-II(a); I(4)-II(c); I(5) -II(f); I(6) -II(d).

20. I(a)-II(b); I(b)-II(c); I(c)-II(a); I(d)-II(d).

21. (a) A temperatura é igual a k, com $0 < k < 100$, nos pontos da circunferência $x^2 + y^2 = \dfrac{100}{k} - 1$. A temperatura é 100 no ponto $(0, 0)$.

(b) A formiga parte de $(1, 4)$ e descreve a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 17$. A temperatura ao longo da trajectória é de $\dfrac{50}{9}$.

22. (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\in\{(x,y): y=0\}, (x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\in\{(x,y): y=x\}, (x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

(b) O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ não existe.

23. (a) $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\in\{(x,y):y=x\},(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -\dfrac{1}{2}$ e $\lim\limits_{(x,y)\in\{(x,y):y=x^2\},(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

(c) O limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

24. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y}{x6+y^2} = 0.$

25. (a) $D_f = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$;

(b) $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq y \text{ e } x\neq -y\}$ e não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2-y^2}$;

(c) $D_f = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ e não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$;

(d) $D_f = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}$ não existe;

(e) $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq -y\}$ e $\lim\limits_{(x,y)\in\{(x,y):y=-x^2\},(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{2xy}{(x+y)^2}$ não existe;

(f) $D_f = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$

26. (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+2y^2)\sin\dfrac{1}{xy} = 0$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+2y^2} = 0$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2\sin y}{x^2+2y^2} = 0.$

27. (a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>-1\}$;

(b) $\mathbb{R}^2$;

(c) $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$;

(d) $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

28. (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (4xy^2-x) = 35$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{1}{2},\pi)} x^2y\sin(xy) = \dfrac{\pi}{4}$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}\right) = 1$;

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,-2)} x\sqrt{y^3+2x} = 0.$

29. (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} = 1.$

30. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$ não existe e $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = 2.$

31. (a) $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq y \text{ e } x\neq -y\}$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\in A_m,\ (x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{m}{1-m^2}.$

(c) Não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, pois para valores diferentes de $m\in\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ obtemos limites $\lim\limits_{(x,y)\in A_m,\ (x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ diferentes.

32. $f_x\,(0,0) = 0$ e $f_y\,(1,2) = 1.$

33. (a) $\dfrac{\partial h}{\partial t}$: taxa de variação instantânea da altura da onda em relação à quantidade de tempo a o vento sopra a uma velocidade fixa;

$\dfrac{\partial h}{\partial v}$: taxa de variação instantânea da altura da onda em relação à velocidade do vento.

(b) $\dfrac{\partial h}{\partial t}(40,15) \approx 0.7$ e $\dfrac{\partial h}{\partial v}(40,15) \approx 1.0$

34. (a)–(iii); (b)–(i); (c)–(iv); (d)–(ii).

35. (a) Verdadeira, pois a função $I(V,5)$ é crescente (logo $\dfrac{\partial I}{\partial V}(220,5) > 0$) e $I(220,R)$ é decrescente (logo $\dfrac{\partial I}{\partial R}(220,5) < 0$).

(b) Verdadeira.

36. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8xy^3e^{x^2y^3}$,

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12x^2y^2e^{x^2y^3}$,

(c) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -5x^4y^4\sin(x^5y^4)$,

(d) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -4x^5y^3\sin(x^5y^4)$,

(e) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 8y^3e^{x^2y^3} + 16x^2y^6e^{x^2y^3}$,

(f) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 24xy^2e^{x^2y^3} + 24x^3y^5e^{x^2y^3}$,

(g) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -12x^5y^2\sin(x^5y^4) - 16x^{16}y^6\cos(x^5y^4)$,

(h) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y) = -20x^4y^3\sin(x^5y^4) - 20x^9y^7\cos(x^5y^4)$.

37. (a) (i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy+z^2$, (ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2+2yz$, (iii) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2xz+y^2$.

(b) (i) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) = 2x$, (ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) = 2z$, (iii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2x$;

(c) (i) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z} = 0$, (ii) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2} = 2$, (iii) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 0$.

38. $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xz > 0\}$, $\nabla f(1,0,2) = (1,0,\frac{1}{2})$.

39. (a) A taxa de variação instantânea da pressão em relação à temperatura, se a temperatura for $80K$ e o volume permanecer fixo em $50dm^3$, é de $\dfrac{\partial P}{\partial T}(80,50) = \dfrac{1}{5}\,atm/K$.

(b) A taxa de variação instantânea do volume em relação à pressão, se o volume é $50dm^3$ e a temperatura permanece fixa em $80K$, é de $\dfrac{\partial V}{\partial P}(80,16) = -\dfrac{25}{8}\,dm^3/atm$.

40. (a) $F(70; 6,4 \times 10^{-11}) \approx 684N$.

(b) $\dfrac{\partial F}{\partial m}(70; 6,4 \times 10^{-11}) = 9,77N$ e $\dfrac{\partial F}{\partial r}(70; 6,4 \times 10^{-11}) = -214 \times 10^{-6} N/metro$

Para uma pessoa com $70Kg$ de massa e situada a 6.4×10^{-11} metros do centro da Terra, a força gravitacional aumenta aproximadamente $9,77N$ por aumento de $1Kg$ de massa e diminui cerca de $214 \times 10^{-6}N$ por aumento de 1 metro na distância ao centro da Terra.

41. (a) $\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y) = 5000y$;

(b) $\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,5) = 25000$;

(c) $\dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) = 5000x$;

(d) $\dfrac{\partial V}{\partial y}(2,y) = 10000$.

42. (a) $\dfrac{\partial T}{\partial x} = -\lambda T_1 e^{-\lambda x}(\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x))$.

À profundidade de x pés e no instante t a temperatura varia aproximadamente

$$-\lambda T_1 e^{-\lambda x}(\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x))$$

unidades, por variação de um pé de profundidade.

(b) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \omega T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)$.

À profundidade de x pés e no instante t a temperatura varia aproximadamente

$$\omega T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)$$

unidades, por variação de um dia.

(c) $k = \dfrac{\omega}{2\lambda^2}$.

43. $f(x,y) = x^2 + xy - y^2 + k, \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{R}$.

44.

45.

46. (a) f é diferenciável em $(0,0)$;

(b) f é diferenciável em $(1,2)$.

47. (a) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ é diferenciável em $(2,1)$;

(b) $f(x,y,z) = x^2e^{yz} + y\ln z$ é diferenciável em $(1,2,1)$;

(c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{se } x \neq 0 \\ y^4, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ não é diferenciável $(0,2)$, pois não é contínua neste ponto;

(d) $f(x,y) = \cos(y\sqrt{x^2+y^2})$ é diferenciável em $(0,0)$;

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq y^2 \\ y-1, & \text{se } x = y^2 \end{cases}$ não é diferenciável em $(0,0)$ pois não é contínua neste ponto.

48. (a) f não é contínua em $(0,0)$.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(c) f não é diferenciável em $(0,0)$.

49. (a) plano tangente: $z = 2x + y$;
recta normal: $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(b) plano tangente: $z = 48x - 14y - 64$;
recta normal: $(x, y, z) = (1, -2, 12) + \lambda(48, -14, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) plano tangente: $z = x - y$;
recta normal: $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(1, -1, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(d) plano tangente: $z = -x + \frac{5}{4}y$;
recta normal: $(x, y, z) = (1, 2, \frac{3}{2}) + \lambda(-1, \frac{5}{4}, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(e) plano tangente: $z = 2x + 2y$;
recta normal: $(x, y, z) = \lambda(2, 2, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

50. (a) O plano tangente à superfície é horizontal apenas no ponto $(0, 0, 0)$;

(b) O plano tangente à superfície é horizontal nos pontos $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

51. $f(x, y) \approx f(7; 2) + f_x(7; 2)(x - 7) + f_y(7; 2)(y - 2)$ e $f(7,01; 1,98) \approx 0,07$.

52. (a) $f(0,1; 3,14) \approx f(0; \pi) + f_x(0; \pi)(0.1 - 0) + f_y(0; \pi)(3,14 - \pi) = -1$;

(b) $f(2,001; 0,003; -0,001) \approx f(2; 0; 0) + f_x(2; 0; 0) \cdot 9,001 + f_y(2; 0; 0) \cdot 0,003 - f_z(2; 0; 0) \cdot 0,001 = 2,001$.

53. Tomando $f(x, y, z) = x^2y^3z^6$, tem-se que $(3,05)^2 \times (2,01)^3 \times (1,006)^6$ é, aproximadamente,

$$f(3; 2; 1) + f_x(3; 2; 1) \cdot 0,05 + f_y(3; 2; 1) \cdot 0.01 + f_z(3; 2; 1) \cdot 0,006 \approx 78,072.$$

54.

55. (a) $\dfrac{dz}{dt} = 42t^{13}$;

(b) $\dfrac{dz}{dt} = -3\sin(t)$;

(c) $\dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{10}{3}t^{-\frac{7}{3}}$.

56. $\dfrac{dT}{dt} = -2xye^y + x^3e^y + y^4 - 3x^2y^2$, com $x = \cos t$ e $y = \sin t$.

57. A taxa de variação da pressão no instante t_0 é 10 atm/s.

58. (a) Taxa de variação do volume: $6m^3/s$;
(b) taxa de variação da área da superfície: $4m^2/s$;
(c) taxa de variação do comprimento da diagonal: $0m/s$.

59. (a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4u + 6v,\ \ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2v$ com $u = 2x + 7$ e $v = 3x + y + 7$;

(b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x \cos u \cos v - \sin u \sin v,\ \ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2 \cos u \cos v + 3 \sin u \sin v$ com $u = 3x^2 - 2y$ e $v = x - 3y$;

(c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 15,\ \ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 10$

60.

61. (a) G_1 não é gráfico de uma função $z = f(x,y)$ pois $(1,2,1),(1,2,2) \in G_1$ e não pode ser $1 = f(1,2)$ e $2 = f(1,2)$.

(b) G_2 não é gráfico de uma função $z = f(x,y)$ pois $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\pi}{4}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\pi}{4}) \in G_2$ e não pode ser $\frac{\pi}{4} = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $-\frac{\pi}{4} = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

(c) G_3 é o gráfico da função $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$.

62. (a) $y'(0) = \frac{\partial y}{\partial x} = 1$.

(b) A expressão $y^2 - 2xy - 1 = 0$ define
(a) y como função implícita de x nas vizinhanças dos pontos (a,b), com $a \neq b$, constituídas por pontos da forma $(x, x \pm \sqrt{x^2+1})$;
(b) x como função implícita de y nas vizinhanças dos pontos (a,b), com $b \neq 0$, constituídas por pontos da forma $(\frac{y^2-1}{2y}, y)$.

63. $f_x(1,1) = \frac{1}{2}$ e $f_y(1,1) = \frac{1}{2}$.

64. $f_x(1,1,1) = \frac{5}{8}$, $f_y(1,1,1) = -\frac{9}{8}$, $f_z(1,1,1) = \frac{1}{2}$.

65. (a) Plano tangente: $x + y + z = 3\sqrt{\frac{\pi}{3}}$;

recta normal: $(x,y,z) = (\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \sqrt{\frac{\pi}{3}}, \sqrt{\frac{\pi}{3}}) + \lambda(1,1,1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Plano tangente: $x + y = \frac{\pi}{2}$;
recta normal: $(x,y,z) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) + \lambda(1,1,0),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Plano tangente: $x = 1$; recta normal: $(x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(1,0,0),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

66. (a) $\nabla f(1,1) = (1,-1)$.

(b) $\nabla f(\pi,\pi,\pi) = (0,0,0)$, $\quad \nabla f(0,0,\pi/2) = (-1,-1,-1)$.

67. $D_{\vec{v}} f(0,1) = -\frac{3}{5}$.

68. Não há nenhum vector v unitário para o qual exista $D_{\vec{v}} f\,(P_0)$.

69. (a) $g'(0) = 0$.

(b) $D_{\vec{v}} f(\pi, \frac{1}{2}) = 0$.

70. (a) $D_{\vec{u}} g(4,-3) > 0$.

(b) $D_{\vec{v}} g(4,-3) < 0$.

71. (a) $D_{\vec{v}} f(1,0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

(b) $D_{\vec{v}} f(0,-1) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(c) $D_{\vec{v}} f(1,-1,2) = \frac{10}{\sqrt{11}}$.

(d) $D_{\vec{v}} f(2,1) = 0$.

(e) $D_{\vec{v}} f(0, \frac{\pi}{4}) = \frac{7}{\sqrt{58}}$.

72. (a) O valor máximo que a derivada direccional pode atingir em $(1,0)$ é $\|\nabla f(1,0)\| = 1$ e é obtido na direcção do vector $\nabla f(1,0) = (1,0)$.

O valor mínimo que a derivada direccional pode atingir em $(1,0)$ é $-\|\nabla f(1,0)\| = -1$ e é obtido na direcção do vector $-\nabla f(1,0) = (-1,0)$.

(b) O valor máximo que a derivada direccional pode atingir em $(0,-1)$ é $\|\nabla f(0,-1)\| = 1$ e é obtido na direcção do vector $\nabla f(0,-1) = (1,0)$.

O valor mínimo que a derivada direccional pode atingir em $(0,-1)$ é $-\|\nabla f(0,-1)\| = -1$ e é obtido na direcção do vector $-\nabla f(0,-1) = (-1,0)$.

(c) O valor máximo que a derivada direccional pode atingir em $(1,-1,2)$ é $\|\nabla f(1,-1,2)\| = 2\sqrt{41}$ e é obtido na direcção do vector $\nabla f(1,-1,2) = (4,-2,12)$.

O valor mínimo que a derivada direccional pode atingir em $(1,-1,2)$ é $-\|\nabla f(1,-1,2)\| = -2\sqrt{41}$ e é obtido na direcção do vector $-\nabla f(1,-1,2) = (-4,2,-12)$.

(d) O valor máximo que a derivada direccional pode atingir em $(2,1)$ é $\|\nabla f(2,1)\| = 80$ e é obtido na direcção do vector $\nabla f(2,1) = (3,4)$.

O valor mínimo que a derivada direccional pode atingir em $(2,1)$ é $-\|\nabla f(2,1)\| = 80$ e é obtido na direcção do vector $-\nabla f(2,1) = (-3,-4)$.

(e) O valor máximo que a derivada direccional pode atingir em $(0,\frac{\pi}{4})$ é $\|\nabla f(0,\frac{\pi}{4})\| = 1$ e é obtido na direcção do vector $\nabla f(0,\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

O valor mínimo que a derivada direccional pode atingir em $(0,\frac{\pi}{4})$ é $-\|\nabla f(0,\frac{\pi}{4})\| = -1$ e é obtido na direcção do vector $-\nabla f(0,\frac{\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

73. (a) Se o alpinista seguir para Oeste, ele desce porque a taxa de variação da altitude nessa direcção é de -0.8 e é negativa.

(b) Se o alpinista seguir para nordeste, ele sobe porque a taxa de variação da altitude nessa direcção é de $0.2 \times \sqrt{2}$ e é positiva.

(c) Para viajar ao longo de uma curva de nível o alpinista deve andar numa direcção perpendicular ao vector gradiente, por exemplo na direcção $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

74. (a) Para que a temperatura baixe mais rapidamente o robot deve deslocar-se na direcção e sentido de $-\nabla T(1,1) = (-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9})$.

(b) Verifica-se geometricamente o resultado que obtivemos na alínea anterior.

75. (a) $D_{\vec{v}}T(Q) = -\dfrac{40}{3\sqrt{3}}$.

(b) A direcção de maior crescimento da temperatura, num ponto (a,b,c) da bola, é dada pelo vector $\nabla T(a,b,c)$ que tem a direcção e sentido do vector $-(a,b,c)$.

76. (a) Temos $\begin{cases} g_x(x,y) &= e^{x+y} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} \\ g_y(x,y) &= e^{x+y}. \end{cases}$

Como as derivadas parciais estão definidas em $\mathbb{R}^2$ e são contínuas em $\mathbb{R}^2$, concluimos que g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

(b) $D_{\vec{v}}g(0,0) = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

(c) A derivada direccional em $(0,0)$ é máxima na direcção de $\nabla g(0,0) = (1,1)$ e vale $\|\nabla g(0,0)\| = \sqrt{2}$.

77.

78. Os pontos críticos da função são $(0,0)$ e $(1,1)$. O ponto $(0,0)$ é um ponto sela da função e em $(1,1)$ a função atinge um mínimo local -4.

79. (a) A função f não tem extremos locais.
    (b) O ponto $(0,0)$ é o único ponto crítico da função f. Em $(0,0)$ a função f atinge um mínimo absoluto 0.
    (c) Os pontos críticos da função f são os pontos do conjunto: $\{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}$. Em $(0,0)$ a função atinge um máximo local 16 e em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}$ a função atinge o mínimo absoluto 0.
    (d) Os pontos críticos da função f são os pontos do conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0\}$ e nesses pontos a função f atinge o máximo absoluto 4.

80. (a) O ponto $(1,-2)$ é o único ponto crítico da função f e $(1,-2)$ é um ponto de sela.
    (b) O ponto $(2,-1)$ é o único ponto crítico da função f e em $(2,-1)$ a função atinge um mínimo local de -3.
    (c) Os pontos críticos da função são $(0,0)$ e $(\frac{1}{6},\frac{1}{12})$. O ponto $(0,0)$ é um ponto sela da função e em $(\frac{1}{6},\frac{1}{12})$ a função atinge um máximo local de $\frac{1}{432}$.
    (d) Os pontos críticos da função f são os pontos do conjunto $\{(k\pi,0) : k \in \mathbb{Z}\}$ e esses pontos são pontos sela da função.
    (e) Os pontos críticos da função são $(0,0)$ e $(1,1)$. O ponto $(0,0)$ é um ponto sela da função e em $(1,1)$ a função atinge um mínimo local de -1.
    (f) Os pontos críticos da função f são os pontos do conjunto: $\{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy=1\}$. O ponto $(0,0)$ é um ponto sela da função e em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy=1\}$ a função atinge um mínimo absoluto de -1.
    (g) Os pontos críticos da função f são os pontos do conjunto: $\{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$. O ponto $(0,0)$ é um ponto sela da função e em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ a função atinge um mínimo absoluto de 0.
    (h) O ponto $(0,0)$ é o único ponto crítico da função f e $f(0,0)$ não é extremo local de f.

81. (a) Na região triangular considerada, o mínimo absoluto de f é -8 e é atingido em $(4,0)$ e o máximo absoluto de f é 1 e é atingido em $(1,3)$.
    (b) Na região quadrangular considerada, o mínimo absoluto de f é -1 e é atingido nos pontos $(1,0)$ e $(1,2)$ e o máximo absoluto de f é 3 e é atingido nos pontos $(0,1)$ e $(2,1)$.
    (c) Em A, o mínimo absoluto de f é 0 e é atingido nos pontos $(0,0)$ e $(2,2)$ e o máximo absoluto de f é 9 e é atingido em $(3,0)$.
    (d) Em Ω, o mínimo absoluto de f é 0 e é atingido em (0,0) e o máximo absoluto é 3 e é atingido nos pontos $(-1,1)$ e $(1,-1)$.

82. (a) O ponto $(0,2)$ é o único ponto crítico da função f no seu domínio e em $(0,2)$ a função atinge um mínimo local de 0.
    (b) i. O mínimo absoluto de $f_{|D}$ é 1 e é atingido em $(0,1)$ e o máximo absoluto de $f_{|D}$ é 9 e é atingido em $(0,-1)$.
        ii. $f_{|E}$ tem os mesmos extremos absolutos que $f_{|D}$.
    (c) Verificam-se geometricamente os resultados que obtivemos nas alíneas anteriores.

83. (a) Os pontos críticos da função g são os pontos do conjunto: $\{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy = 1\}$. O ponto $(0,0)$ é um ponto sela da função e em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy = 1\}$ a função atinge um mínimo absoluto de -5.

(b) Em M, o mínimo absoluto de g é $-\frac{19}{4}$ e é atingido nos pontos $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e o máximo absoluto de g é $-\frac{11}{4}$ e é atingido nos pontos $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

84. (a) Em A, o mínimo absoluto de f é -1 e é atingido em $(-1,0)$ e o máximo absoluto de f é 1 e é atingido em $(1,0)$.

(b) Em A, o mínimo absoluto de f é 4 e é atingido nos pontos $(-2,0)$ e $(2,0)$ e o máximo absoluto de f é 8 e é atingido nos pontos $(0,-2)$ e $(0,2)$.

(c) Em A, o mínimo absoluto de f é 0 e é atingido em $(0,0)$ e o máximo absoluto de f é 8 e é atingido nos pontos $(0,-2)$ e $(0,2)$.

85. A temperatura máxima que a formiga vai encontrar é de 5, nos pontos $(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$ e $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$.

A temperatura mínima que a formiga vai encontrar é de 0, nos pontos $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ e $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$.

86. $(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}, \dfrac{5\sqrt{3}}{3}, \dfrac{5\sqrt{3}}{3})$ é o vector de $\mathbb{R}^3$ cujo comprimento é 5 e cujas componentes têm a soma máxima.

87. O ponto da recta $2x - 4y = 3$ que está mais próximo da origem é $(\frac{3}{10}, -\frac{3}{5})$.