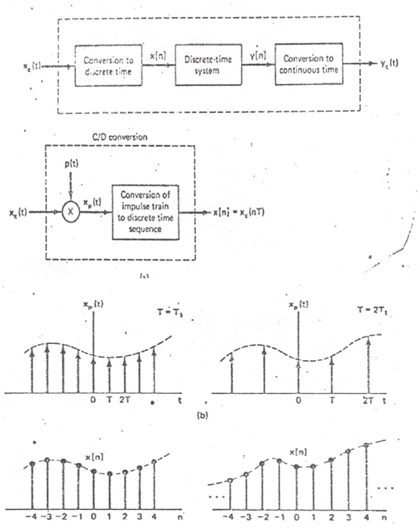
Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

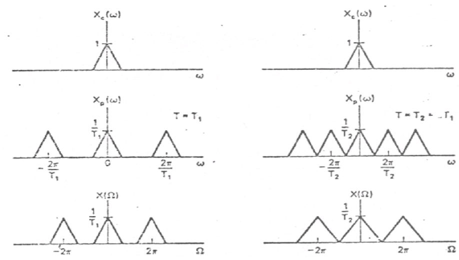
- **Processamento Digital de Sinais Contínuos**



$$X_p(w) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(w - kw_s) \qquad x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \qquad X_p(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)e^{-jwnT}$$

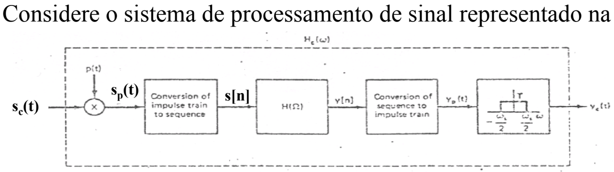
$$\boxed{X(\Omega) = X_p\left(\frac{\Omega}{T}\right)}$$

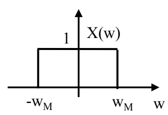


Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

– Exemplo:

Considere o sistema de processamento de sinal representado na figura seguinte:





Pretende-se com este sistema recuperar o sinal x(t) que se apresenta à entrada do sistema, degradado da forma $s_c(t)=x(t-T_0)+x(t+T_0)$. Considere que o espectro de x(t) é o que se encontra representado na figura e que $T_0<\pi/w_M$.

a) Verifique que se pode tomar como período de amostragem $T=T_0$.

b) Tomando como período de amostragem $T=T_0=\pi/(2w_M)$ esboçe $S_c(w)$, $S_p(w)$ e $S(\Omega)$

c) Mostre que $S(\Omega) = \frac{2}{T}\cos(\Omega)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T}\right)$

d) Sabendo que se deseja um filtro digital h[n] tal que y[n]=x(nT) (ou y[n-1]=x((n-1)T), ...) determine a equação de diferenças do filtro e a sua resposta em frequência H(Ω).

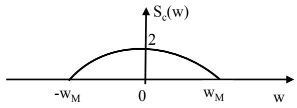
e) Represente Y(Ω) e diga qual deverá ser o ganho A do filtro passa-baixo ideal de forma que $y_c(t)=x(t)$.

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

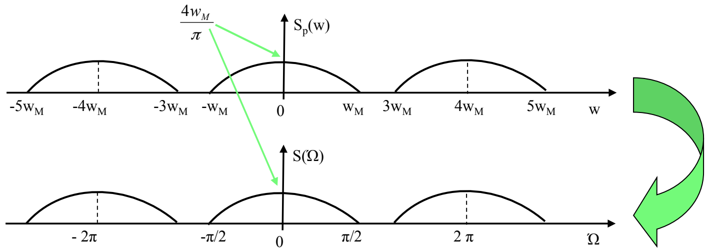
a) $T_0 < \dfrac{\pi}{w_M} \Longrightarrow w_0 > 2w_M$

b) $s_c(t) = x(t - T_0) + x(t + T_0) \quad \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \quad S_c(w) = e^{-jwT_0}X(w) + e^{jwT_0}X(w) = \ldots = 2\cos(wT_0)X(w)$

$$T = T_0, \quad T_0 = \frac{\pi}{2w_M} \Longrightarrow S_c(w) = 2\cos\left(\frac{w\pi}{2w_M}\right)X(w)$$



Pelo teorema da amostragem $S_p(w) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_c(w - kw_s)$



$\boxed{\Omega = wT}$

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

c)

$$S_p(w) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_c(w - kw_s) = \ldots = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[2\cos(Tw - 2\pi k)X(w - kw_s)\right] = \frac{2}{T}\cos(wT)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(w - kw_s)$$

$$S(\Omega) = S_p\left(\frac{\Omega}{T}\right) = \frac{2}{T}\cos(\Omega)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T}\right)$$

d) Para que x(t) seja recuperado y[n]=x(nT)

$$s[n] = s_c(nT) = x(nT - T_0) + x(nT + T_0)$$

$T = T_0$

$$s[n] = x((n-1)T) + x((n+1)T)$$

$$\begin{cases} y[n-1] = x((n-1)T) \\ y[n+1] = x((n+1)T) \end{cases}$$

$$y[n-1] + y[n+1] = s[n]$$

$\updownarrow$ **T. F.**

$$S(\Omega) = Y(\Omega)\left(e^{-j\Omega} + e^{j\Omega}\right) = Y(\Omega)2\cos(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{S(\Omega)} = \frac{1}{2\cos(\Omega)}$$

e)

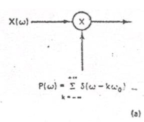
$$S(\Omega) = \frac{2}{T}\cos(\Omega)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T}\right)$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)S(\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T}\right)$$

$$A = T = \frac{\pi}{2w_M}$$

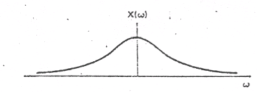
Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

- **Amostragem no Domínio das Frequências**
  - **Se conhecermos um sinal x(t) através de X(w) em que condições podemos representar o sinal por amostras de X(w).**

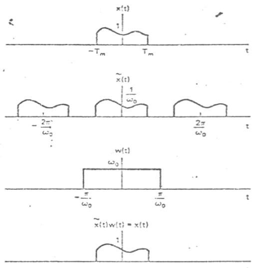


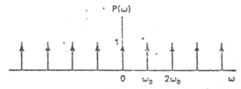
$$\tilde{X}(w) = X(w)P(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kw_0)\delta(w - kw_0)$$

$$\tilde{x}(t) = x(t) * p(t)$$



$$W(w) = 2\pi \sin c\left(\frac{w}{w_0}\right) \xleftrightarrow{\textbf{T. F.}}$$

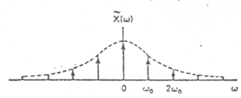




$$\xleftrightarrow{\textbf{T. F.}} \quad p(t) = \frac{1}{w_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi}{w_0}k\right)$$

$$\boxed{\frac{2\pi}{w_0} > 2T_m} \qquad X(w) = \frac{1}{2\pi}\tilde{X}(w)W(w)$$

$$\tilde{X}(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kw_0)\delta(w - kw_0)$$

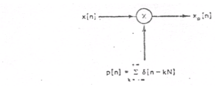


$$\xleftrightarrow{\textbf{T. F.}} \quad \tilde{x}(t) = \frac{1}{w_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(t - \frac{2\pi}{w_0}k\right)$$

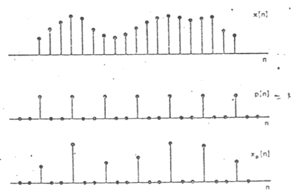
$$X(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kw_0)\sin c\left(\frac{w - kw_0}{w_0}\right)$$

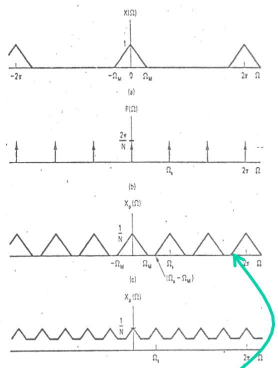
Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

- **Amostragem de Sequências**



$$\boxed{N = 3}$$





$$P(\Omega) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s) \xleftrightarrow{\textbf{T. F.}}$$

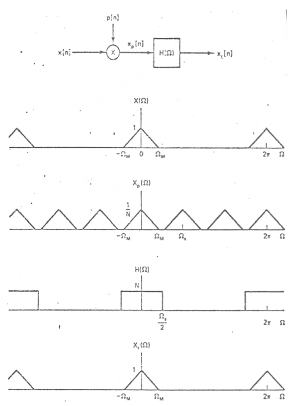
$$X_p(\Omega) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\Omega - k\Omega_s) \xleftrightarrow{\textbf{T. F.}}$$

$$x_p[n] = x[n]p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN]\delta[n - kN] \xleftrightarrow{\textbf{T. F.}} X_p(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} P(\Theta)X(\Omega - \Theta)d\Theta$$

$$\boxed{\Omega_s > 2\Omega_M}$$

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

- Recuperação do sinal através das suas amostras

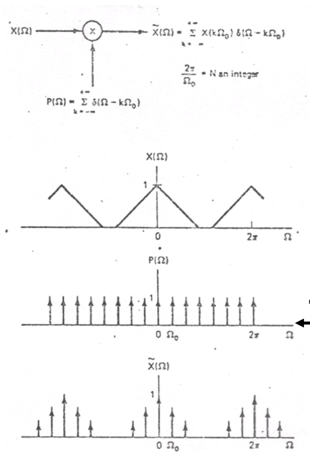


T. F. $\longleftrightarrow$ $h[n] = \frac{N\Omega_c}{2\pi}\sin c\left(\frac{\Omega_c n}{\pi}\right)$

$$x_r[n] = x_p[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN]\frac{N\Omega_c}{2\pi}\sin c\left(\frac{\Omega_c}{\pi}(n-kN)\right)$$

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

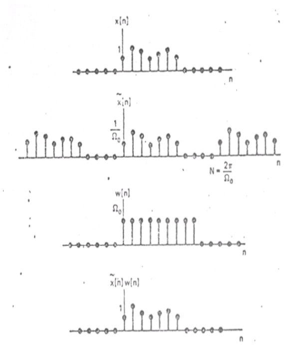
- **Amostragem de Sequências nas Frequências**



T. F. $\longleftrightarrow$ $p[n] = \frac{1}{\Omega_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left[n-k\frac{2\pi}{\Omega_0}\right]$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

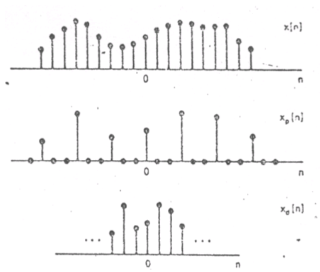
$$\tilde{x}[n] = x[n] * p[n] = \ldots = \frac{N}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-kN]$$



$\boxed{x[n] = 0 \Leftarrow= n < 0 .e. n > N-1}$

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

- **Decimação e Interpolação de Sequências**

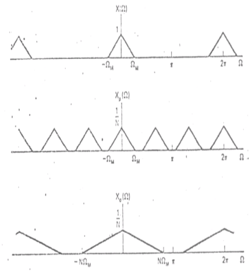


$$X_d(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n]e^{-j\Omega n}$$

$$x_d[n]=x[nN]=x_p[nN]$$

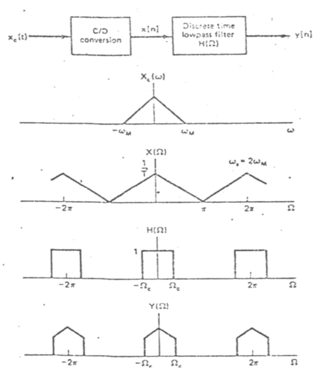
$$X_d(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[nN]e^{-j\Omega n}$$

$$X_d(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n]e^{-j\Omega\frac{n}{N}}=X_p\left(\frac{\Omega}{N}\right)$$



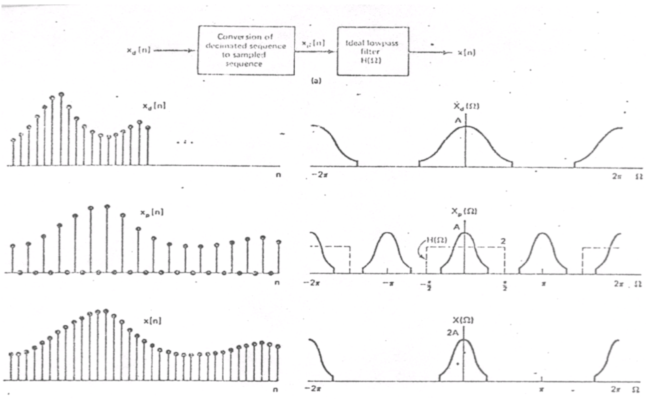
Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

A decimação corresponde a diminuir a frequência de amostragem, tendo só utilidade efectiva se um sinal foi amostrado a uma taxa maior que a taxa de Nyquist. No entanto se um sinal foi amostrado à taxa de Nyquist e a sua largura de banda foi reduzida por um filtro discreto a sua frequência de amostragem pode ainda ser reduzida por decimação.



Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

- Interpolação: Processo inverso da decimação e corresponde a aumentar a frequência de amostragem de um sinal. A sequência $x_p[n]$ é interpolada com zeros sendo a sequência interpolada x[n] obtida por filtragem passa-baixo.



Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

- Principal Aplicação: Transmodulação ou transmultiplexagem

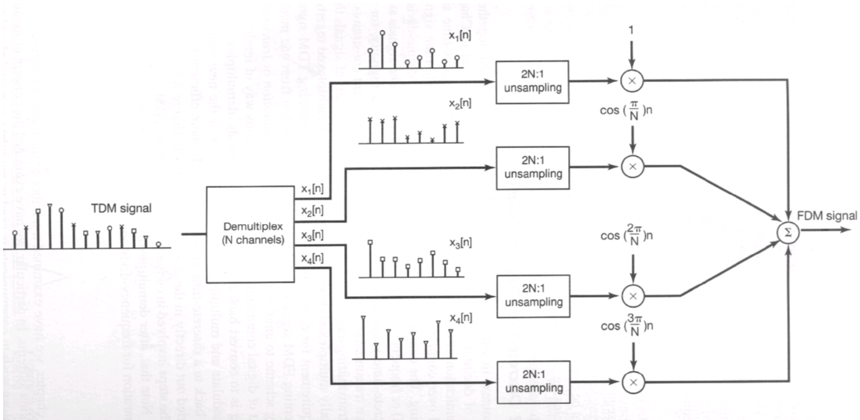


Figure 8.44 Block diagram for TDM-to-FDM transmultiplexing.

Amostragem (nas Frequências e de Sequências)

- **Problemas para resolução em casa**

1) Considere o exemplo da pág. 84 onde agora o sinal x(t) se apresenta degradado à entrada do sistema da forma $s_c(t)=x(t)+\alpha x(t-T_0)$. Resolva todas as alíneas excepto a c).

2) Para o mesmo exemplo suponha agora que $\pi/w_M < T_0 < 2\,\pi/w_M$. Determine o período de amostragem, o ganho do filtro passa-baixo e a resposta em frequência do filtro digital que permitem a recuperação de x(t).