1. Considere um processo estocástico discreto.

    a) Diga justificando, que parâmetros o caracterizam e como os poderia determinar.
    b) Se o processo for estacionário em que medida esses parâmetros se modificam. Justifique.
    c) Se além de estacionário o processo for ergódico como se pode caracterizá-lo apenas com uma realização. Justifique.

2. Considere um sinal discreto s[n] de média m_s e desvio padrão σ_s corrompido de modo aditivo por um sinal ruído branco e[n] de média m_e e desvio padrão σ_e.

    a) Determine a média e a variância do processo x[n]=s[n]+e[n] admitindo que os processos são não correlados.
    b) Determine a sequência de autocorrelação e a densidade espectral de potência de x[n] em função dos parâmetros conhecidos dos processos s[n] e e[n].
    c) Considere que s[n] é um sinal sinusoidal com fase aleatória e uniformemente distribuída em]0, 2π[ou seja s[n]=Acos(w_0n+φ). Mostre que nestas circunstâncias

$$\Phi_{xx}[m] = \frac{A^2}{2}\cos w_0\, m + \sigma_e^2 \delta[m] + m_e^2$$

    d) Determine e esboce justificando, no contexto da alínea c) a densidade espectral de potência do processo x[n].

3. Considere x[n] e y[n] 2 processos estocásticos reais, estacionários de médias m_x e m_y. Mostre as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} \gamma_{xx}(m) = \phi_{xx}(m) - m_x^2 \\ \gamma_{xy}(m) = \phi_{xy}(m) - m_x m_y \end{cases}$$

① Processo estocástico discreto

É uma família de $\overbrace{\text{variáveis aleatórias}}^{\text{v.a}}$ discretas

a) parâmetros: aqueles que caracterizam cada distribuição
*ex médias e variância → em distribuição gaussiana

aqueles que caracterizam as relações entre as v.a
autocorrelação, autocovariância

b) Se for estacionário as coisas não variam ao longo do tempo, todas as v.a têm os mesmos parâmetros (médias $=$, $\sigma^2 =$) e as relações passam a ser de 1 dimensão (apenas considera a distância temporal entre elas).

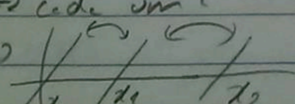
↳ Se o processo for estacionário os parâmetros q̃ caracterizam cada variável aleatória que o compõem são constantes no tempo, ou seja, são iguais para todas. Os parâmetros q̃ caracterizam a relação das v.a. dependem apenas da distância temporal entre elas, são sequências a 1 dimensão.

c) ergódico → médias temporais e de conjunto coincidem
↳ a estatística temporal = estatística do conjunto

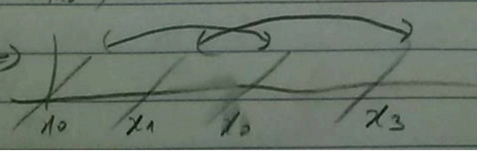
A média de cada v.a. é = à média do processo
σ^2 da v.a = σ^2 do processo
seq. da autocorrelação da v.a = a autocorrelação do processo
↳ só dependem das distâncias entre elas

↳ $\phi_{xx}[0] \Rightarrow$ cada um

$\phi_{xx}[1] \Rightarrow$



$\phi_{xx}[2] \Rightarrow$



(2) $s[n]$, m_s, σ_s

a) Determine a média do processo $x[n] = s[n] + e[n]$

$$E\{x\} = E\{s[n] + e[n]\} = E\{s[n]\} + E\{e[n]\} = m_s + m_e$$

$$\sigma_x^2 = E\{(x - m_x)^2\} = E\{x^2 - 2x m_x + m_x^2\} =$$

$$= E\{x^2\} - 2 m_x \underbrace{E\{x\}}_{m_x} + m_x^2 \Leftrightarrow$$

$$= E\{x^2\} - 2 m_x^2 + m_x^2 \Leftrightarrow (*)$$

C.A:

$$E\{x^2\} = E\{(e[n] + s[n])^2\} = E\{s^2[n] + 2se + e^2\}$$

continua

$$(*)\ \sigma_x^2 = E\{s^2\} + 2E\{se\} + E\{e^2\} - (m_s + m_e)^2 \Leftrightarrow$$

como são não correlados

$$\boxed{E\{s^2\} = \sigma_s^2 + m_s^2} \Leftrightarrow \sigma_x^2 = \sigma_s^2 + \cancel{m_s^2} + 2\overbrace{E\{se\}}^{m_e m_s} + \sigma_e^2 + \cancel{m_e^2} - \cancel{m_s^2} -$$

$$2 m_s m_e - \cancel{m_e^2} =$$

$$\Leftrightarrow \sigma_x^2 = \sigma_s^2 + \sigma_e^2$$

PS aula ...

Teste 2 11-12

1)

$x[n] = s[n] + e[n]$ $e[n]$ = ruído branco $\rightarrow \gamma_{ee}(m) = \sigma_e^2 \delta(m)$

$\phi_{ee}(m) = \gamma_{ee}(m) + m_e^2 =$

$= \sigma_e^2 \delta(m) + m_e^2$

b) sequência de autocorrelação

$\phi_{xx}(m) = \epsilon\{x[n]\, x^*[n+m]\}$

$= \epsilon\{(s[n] + e[n])(s[n+m] + e[n+m])^*\}$

esperança matemática

$= \epsilon\{s[n]s^*[n+m] + s[n]e^*[n+m] + e[n]s^*[n+m] + e[n]e^*[n+m]\} =$

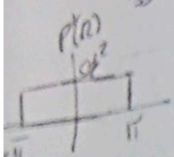
$= \phi_{ss}[m] + 2m_s m_e + \phi_{ee}[m]$ =

$= \phi_{ss}[m] + 2m_s m_e + \sigma_e^2 \delta[m] + m_e^2$

densidade espectral

$P_{xx}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{ss}[m] e^{-j\Omega m} =$

$= P_{ss}(\Omega) + \underbrace{2\pi(2m_s m_e + m_e^2)\delta(\Omega) + \sigma_e^2}_{P'(\Omega)}$



Cálculos Auxiliares

$\epsilon\{s[n]e^*[n+m]\} =$

$= \epsilon\{s[n]\} \cdot \epsilon\{e^*[n+m]\} =$

$= m_s \cdot m_e$

$s[n]e^*[n+m] = e[n]s^*[n+m]$

Sabendo que: $\phi_{xx}(m) = \epsilon\{x[n]x^*[n+m]\}$

então: $\epsilon\{s[n]s^*[n+m]\} = \phi_{ss}(m)$

e : $\epsilon\{e[n]e^*[n+m]\} = \phi_{ee}(m)$

$\phi_{ee}(m) = \gamma_{ee}(m) = \sigma_e^2 \delta(m) + m_e^2$

c) Sendo o sinal sinusoidal então a média do sinal $= \emptyset \rightarrow m_s = \emptyset$.

Basta comprovar que

$\frac{A^2}{2}\cos \omega_0 m = \phi_{ss}[m] = \epsilon\{s[n]s^*[n+m]\}$

sendo $s[n] = A\cos(\Omega_0 n + \varphi)$

$\cancel{2}\cos a \cdot \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

$\phi_{ss}[m] = \epsilon\{s[n]s^*[n+m]\} = \epsilon\{A\cos(\underbrace{\Omega_0 n + \varphi}_{a}) \cdot A\cos(\underbrace{\Omega_0(n+m) + \varphi}_{b})\} =$

$= \frac{A^2}{2}\epsilon\{\cos(2\Omega_0 n + \Omega_0 m + 2\varphi) + \cos(\Omega_0 m)\}$

$= \frac{A^2}{2}\underbrace{\epsilon\{\cos(2\Omega_0 n + \Omega_0 m + 2\varphi)\}}_{} + \frac{A^2}{2}\{\cos(\Omega_0 m)\} = *$

o $\epsilon\{\}$ é uma média,

logo sendo um cos e estando no domínio n é $\emptyset$

é um cos, no entanto está no domínio m, portanto não sabemos a média

Cálculos Auxiliares

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$

$+ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)$

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$

$* = \frac{A^2}{2}\cos \omega_0 m$

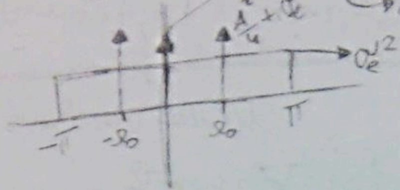
d) $P_{xx}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}(m) e^{-j\Omega m} = *$ (usando a propriedade da linearidade)

$$\frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0 m) \xleftrightarrow{T.F.} \frac{A^2}{2}\pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right]$$

$$\xleftrightarrow{S.F.} \begin{cases} a_1 = \frac{A^2}{4} \\ a_{-1} = \frac{A^2}{4} \end{cases}$$

$$* = \frac{A^2}{4}\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right] + \sigma_e^2 + 2\pi m_e \delta(\Omega) =$$

$\to 2\pi m_e + \sigma_e^2 \to$ Aos valores acima da linha tem de se somar o valor dessa linha que corresponde a σ_e^2



③ $\gamma_{xx}(m) = E\{(x[n]-m_x)(x[n+m]-m_x)\} =$

$= E\{x[n]x[n+m] - x[n]m_x - m_x x[n+m] + m_x^2\} =$

$= \phi_{xx}[m] - m_x^2$

$\gamma_{xy}(m) = E\{(x[n]-m_x)(y[n+m]-m_y)^*\} =$

$= E\{x[n]y^*[n+m] - x[n]m_y - m_x y^*[n+m] + m_y m_x\} =$

$= \phi_{xy}[m] - m_x m_y$

CALCULOS Auxiliares

$E\{x[n]m_x\} = m_x E\{x[n]\} = m_x^2$

$E\{\underbrace{x[n+m]m_x}_{\text{porque é estacionário}}\} = E\{x[n]m_x\}$

$E\{x[n]m_y\} = m_x m_y$

$E\{m_x y^*[n+m]\} = m_x m_y$

//

Teste 3_11_12

① a) 1 estimador é consistente quando

polarização $B \to \phi$
variância $Var \to \phi$ $\Big\}\ N \to +\infty$

Para um estimador ser consistente a polarização e a variância devem tender para ϕ.

$B = E\{C_{xx}(m)\} - \phi_{xx}[m]\}$

$$E\{C_{xx}(m)\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]x[n+m]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} E\{\underbrace{x[n]x[n+m]}_{\phi_{xx}(m)}\} =$$

$$= \frac{1}{N}(N-|m|)\,\phi_{xx}(m) = \frac{N-|m|}{N}\phi_{xx}(m)$$

$\downarrow$ Desaparece o -1 porque começa em ϕ

$\lim_{N\to+\infty} C_{xx}(m) = \phi_{xx}(m)$, desta forma $B=\phi$ pelo que vai ser consistente