8 Resolva o problema de valores na fronteira e iniciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{para} \quad x \in]0,\pi[\ ,\ t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(0,x) = 0\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 3\,\mathrm{sen}(2x) - 4\,\mathrm{sen}(4x) & \text{para} \quad x \in]0,\pi[\end{cases}$$

Resolução:

Usando o método de separação de variáveis, procuramos soluções da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, as quais, substituindo na equação diferencial parcial, levam a

$$X(x)T''(t) - 4X''(x)T(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possivel se ambos os seus lados, de variáveis diferentes x e t, forem iguais a uma constante, digamos $-\lambda$. Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real

$$\begin{cases} T''(t) + 4\lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

Por sua vez, as condições de fronteira homogéneas $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, em $x = 0, \pi$, implicam que as soluções não nulas da forma $T(t)X(x)$ tenham que satisfazer

$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Resolvemos agora a equação diferencial para $X(x)$, cujas soluções dependem do sinal de λ. Temos então

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{-\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{-\lambda}x} & \text{se } \lambda < 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\sqrt{\lambda}x + C\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda}x & \text{se } \lambda > 0. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais.

Impondo as condições de fronteira anteriores às soluções $X(x)$ assim determinadas, temos

(i) Para $\lambda < 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} X(0) = 0 \Leftrightarrow B + C = 0 \\ X(\pi) = 0 \Leftrightarrow Be^{\sqrt{-\lambda}\pi} + Ce^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ C = 0 \end{array} \right.$$

(ii) Para $\lambda = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{c} X(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \\ X(\pi) = 0 \Leftrightarrow B\pi = 0 \Leftrightarrow B = 0 \end{array} \right.$$

(iii) Para $\lambda > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} X(0) = 0 \Leftrightarrow B \cdot 1 + C \cdot 0 = 0 \\ X(\pi) = 0 \Leftrightarrow B \cos \sqrt{\lambda}\pi + C \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\pi = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou } \sqrt{\lambda}\pi = n\pi \end{array} \right.$$

donde obtemos as únicas soluções não triviais (funções próprias) $X(x) = C \operatorname{sen}(nx)$ com $n = 1, 2, \ldots$, para (valores próprios) $\lambda = n^2$.

Usamos agora este conjunto discreto de valores de λ para resolver a correspondente equação para $T(t)$,

$$T''(t) + 4\lambda T(t) = 0 \Leftrightarrow T''(t) + 4n^2 T(t) = 0,$$

cujas soluções são

$$T(t) = C \operatorname{sen}(2nt) + \tilde{C} \cos(2nt).$$

Conclui-se assim que, para cada $n = 1, 2, \ldots$ as soluções não nulas da equação diferencial parcial dada, obtidas por separação de variáveis na forma $T(t)X(x)$, e satisfazendo as condições de fronteira, são

$$u_n(t, x) = C \operatorname{sen}(2nt) \operatorname{sen}(nx) + \tilde{C} \cos(2nt) \operatorname{sen}(nx).$$

Finalmente, procuramos uma solução formal da equação diferencial parcial satisfazendo também as condições iniciais, por "combinação linear infinita" destas soluções $T(t)X(x)$

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}(2nt) \operatorname{sen}(nx) + \tilde{C}_n \cos(2nt) \operatorname{sen}(nx),$$

a qual tem que agora também satisfazer

$$u(0, x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \operatorname{sen}(nx) = 0 \Leftrightarrow \tilde{C}_n = 0 \quad \text{para todo o} \quad n \geq 1,$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 3 \operatorname{sen}(2x) - 4 \operatorname{sen}(4x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2nC_n \operatorname{sen}(nx) = 3 \operatorname{sen}(2x) - 4 \operatorname{sen}(4x),$$

donde $4C_2 = 3$ e $8C_4 = -4$, sendo os restantes coeficientes todos nulos.
Assim se determina a forma final da solução do problema

$$u(t, x) = \frac{3}{4} \operatorname{sen}(4t) \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(8t) \operatorname{sen}(4x).$$