3.3 Séries de Potências

Definição 3.57. Sejam $\{a_n\}_{n\geq 0}$ uma sucessão de números reais e $a \in \mathbb{R}$. Chama-se **série de potências** de $x-a$ em torno de a a uma série de funções

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n. \tag{1}$$

Observação 3.58. Podemos estudar apenas séries de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. O caso geral reduz-se a este efectuando uma mudança de variável $x = y - a$.

Exemplos 3.59.

1. A série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge absolutamente se $|x| < 1$ e diverge se $|x| \geq 1$.

   Se $x \in]-1,1[$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

2. A série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$ converge apenas quando $x = 0$.

3. A série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolutamente para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Para cada x, tem-se $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ (como veremos à frente).

Exercícios 3.60.

1. Determine o conjunto de pontos em que as séries de potências seguintes convergem.

   (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln(n+2)}$;

   (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-5)^n}{n^2+1}$;

   (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{(n+2)^2}$;

   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n}$.

2. Mostre que se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolutamente quando $x = c > 0$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo o $x \in [-c, c]$.

Teorema 3.61. Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ uma série de potências. Então verifica-se uma das seguintes condições.

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ converge apenas para $x = a$.

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ converge absolutamente em $\mathbb{R}$.

3. Existe um número $r > 0$ tal que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ converge absolutamente em $]a-r, a+r[$ e diverge fora do intervalo $[a-r, a+r]$.

Definição 3.62.

1. No 1º caso, a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ tem **raio de convergência** 0;

2. No 2º caso, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ tem **raio de convergência infinito** e **intervalo de convergência** $\mathbb{R}$;

3. No 3º caso, a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ tem **raio de convergência** r e **intervalo de convergência** $]a-r, a+r[$.

Observação 3.63. Uma série de potências pode convergir ou divergir nas extremidades do seu intervalo de convergência.

Exemplos 3.64.

1. A série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ tem raio de convergência infinito e intervalo de convergência $\mathbb{R}$.

2. A série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x-1)^n}{n6^n}$ tem raio de convergência 3 e intervalo de convergência $\left]-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right[$.

3. A série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} x^n$ tem raio de convergência 1 e intervalo de convergência $]-1, 1[$.

Teorema 3.65 (Diferenciação e integração de séries de potências)**.** Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ uma série de potências de intervalo de convergência $I \neq \{a\}$ e seja a função $f : I \to \mathbb{R}$ a sua soma.

1. A função f é contínua em I.

2. A função f é derivável em I e, para todo o $x \in I$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-a)^{n-1}$.

3. A função f é integrável em I e, para qualquer $x \in I$, tem-se

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^x (t-a)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

Exemplo 3.66. Consideremos a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}x^n$ que tem intervalo de convergência $\mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a soma da série:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}x^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}x^n = 2f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Seja $x \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Exercícios 3.67. 1. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$.

(a) Determine o intervalo de convergência da série.

(b) Mostre que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ no intervalo $]-1,1[$.

2. Mostre que $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ no intervalo $]-1,1[$.

Teorema 3.68. (Teorema de Abel)

Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ uma série de potências de raio de convergência $r > 0$.

1. Se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ converge então

$$\lim_{x \to (a+r)^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n.$$

2. Se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-r)^n$ converge então

$$\lim_{x \to (a-r)^+} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-r)^n.$$

Exemplo 3.69. Usando o teorema de Abel, mostra-se que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots:$$

Já vimos que $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ no intervalo $]-1,1[$. Tomando $x = 1$ na série anterior, vamos obter a série numérica alternada

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Pelo Critério de Leibnitz, a série é convergente. Pelo Teorema de Abel, tem-se

$$\arctan 1 = \lim_{x \to 1^-} \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

ou seja,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots.$$

Proposição 3.70 (Operações com séries de potências)**.** Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ séries de potências com intervalos de convergência I e J, respectivamente.

1. Se $I \neq J$, o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$ é $I \cap J$. Se $I = J$, o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$ contém $I \cap J$.

2. Se $\lambda \neq 0$, o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n x^n$ é I.

3. O intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n$ contém $I \cap J$.

3.4 Séries de Taylor

Proposição 3.71. Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ uma série de potências de intervalo de convergência $I \neq \{a\}$. Suponhamos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n,$$

para todo o $x \in I$. Então f tem derivadas de todas as ordens em I e, para todo o $k \in \mathbb{N}$ e todo o $x \in I$, tem-se

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}.$$

Em particular , vem $f^{(k)}(a) = k!a_k$.

Corolário 3.72. Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-a)^n$ duas séries de potências de intervalo de convergência $I \neq \{a\}$. Se ambas as séries têm a mesma função soma $f : I \to \mathbb{R}$, então $a_n = b_n$, para todo o $n \geq 0$.

Definição 3.73. Sejam I um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas de todas as ordens em $a \in I$. Chama-se **série de Taylor de f em torno do ponto a** à série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Se $a = 0$, a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

diz-se **série de Maclaurin** de f.

Pela Proposição 3.71, se a função $f : I \to \mathbb{R}$, com $I \neq \{a\}$, é a soma da série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n,$$

isto é, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, para todo o $x \in I$, então

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Portanto, a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ é a série de Taylor de f em torno do ponto a.

Exemplos 3.74. 1. Mostremos que a série de Maclaurin de $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$, é

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Note-se que $f^{(n)}(x) = e^x$, para todo o $n \geq 0$ e para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f^{(n)}(0) = 1$, para todo o $n \geq 0$, e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Esta série tem intervalo de convergência $\mathbb{R}$ (verifique).

2. Determinemos a série de Maclaurin de $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$.

Para $n \geq 0$, temos

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{se } n = 4k \\ \cos x, & \text{se } n = 4k+1 \\ -\sin x, & \text{se } n = 4k+2 \\ -\cos x, & \text{se } n = 4k+3 \end{cases}$$

logo $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \texttt{se } n \texttt{ é par} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \texttt{se } n \texttt{ é ímpar} \end{cases}$.

Assim, a série de Maclaurin de $f(x) = \sin x$ é

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Esta série tem intervalo de convergência $\mathbb{R}$ (verifique).

3. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Como vimos

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad x \in]-1,1[.$$

Então, pela Proposição 3.71, temos

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \text{coeficiente de } x^n = 1.$$

Assim, a série de Maclaurin de f é

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

4. A série de Maclaurin dda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, é $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$, pois

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

para todo o x tal que $|-x^2| < 1$, ou seja, $x \in]-1,1[$.

5. A série de Maclaurin da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, é a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1},$$

pois

$$\frac{x}{1+x^2} = x\frac{1}{1+x^2} = x\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1}, \text{ para todo o } x \in]-1,1[.$$

Embora a soma da série de Maclaurin de uma função f seja essa função f (restrita a um intervalo adequado) em muitos casos, nem sempre tal acontece, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 3.75. Seja $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \texttt{se } x \neq 0 \\ 0, & \texttt{se } x = 0 \end{cases}$.

- A função f tem derivadas de todas as ordens em $\mathbb{R}$ e $f^{(n)}(0) = 0$, para todo o n.
- Logo a série de Maclaurin de f converge para 0, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
- No entanto, $f(x) \neq 0$, para todo o $x \neq 0$.

Proposição 3.76. Sejam I um intervalo aberto, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas até à ordem $n+1$ em I. Para cada $x \in I$, é válida a fórmula seguinte:

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad (2)$$

para algum c no intervalo aberto de extremos a e x.

A equação (2) diz-se **fórmula de Taylor de ordem n de f no ponto a.** O polinómio de grau $\leq n$

$$P_n(f;x,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

diz-se **polinómio de Taylor de f de grau n no ponto a.** A expressão

$$R_n(f;x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

diz-se **resto de Lagrange de ordem n de f.**

Para cada $x \in I$, $\{P_n(f;x,a)\}_{n\geq 0}$ é a sucessão das somas parciais da série de Taylor de f em torno do ponto a. Assim, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

converge e a sua soma é $f(x)$ se e só se $\lim_n P_n(f;x,a) = f(x)$, ou seja,

$$\lim_n R_n(f;x,a) = \lim_n (f(x) - P_n(f;x,a)) = 0.$$

Exemplos 3.77. 1. Vamos mostrar que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$:

O polinómio de Taylor de f de grau n no ponto 0 é

$$P_n(f;x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!};$$

O resto de Lagrange de ordem n de f é

$$R_n(f;x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!},$$

com c no intervalo aberto de extremos 0 e x. Assim, a fórmula de Taylor de $f(x) = e^x$ no ponto 0 é

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!},$$

com c pertencente ao intervalo aberto de extremos 0 e x.

Para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{e^c |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Como $c \leq |c| \leq |x|$, tem-se

$$e^c \leq e^{|c|} \leq e^{|x|}.$$

Portanto,

$$0 \leq |R_n(f;x)| = \frac{|e^c x^{n+1}|}{(n+1)!} = \frac{e^c |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Note-se que

$$\lim_n \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

logo $\lim\limits_n |R_n(f;x)| = 0$. e, portanto, $\lim\limits_n R_n(f;x) = 0$. Então, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. Mostremos que

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}:$$

O polinómio de Taylor de f de grau n no ponto 0 é

$$P_n(f;x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{s x^n}{n!}$$

com $s = 0$, se n é par, ou $s = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$, se n é ímpar.

O resto de Lagrage de f de ordem n é

$$R_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(c) x^{n+1}}{(n+1)!},$$

para algum c pertencente ao intervalo aberto de extremos 0 e x.

A fórmula de Taylor de $f(x) = \sin x$ no ponto 0 é

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{sx^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!},$$

com

- c pertencente ao intervalo aberto de extremos 0 e x,
- $s = 0$, se n é par, ou $s = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$, se n é ímpar, e
- $f^{(n+1)}(c) \in \{\sin c, -\sin c, \cos c, -\cos c\}$.

Para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$|R_n(f;x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)||x^{n+1}|}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Note-se que

$$\lim_n \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

logo $\lim\limits_n R_n(f;x) = 0$.

Então, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. Mostremos que $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Como $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\cos x = (\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^{2n+1})'}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbb{R}$$

   Note-se que a série de Maclaurin de $f(x) = \cos x$ é $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

Proposição 3.78 (Para estimar o erro)**.** Sejam I um intervalo aberto, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas até à ordem $n+1$ em I. Se existe $M > 0$ tal que que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, para todo o $x \in I$, então

$$f(x) = P_n(f;x,a) + R_n(f;x,a)$$

com $|R_n(f;x,a)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$, para todo o $x \in I$.

Exemplos 3.79. 1. Estimemos e com cinco casas decimais correctas.

A função $f(x) = e^x$ tem derivadas de todas as ordens em $\mathbb{R}$ e

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}}_{P_n(e^x;x)} + \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_n(e^x;x)}$$

com c entre 0 e x. Assim, $e \sim 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ com

$$R_n(e^x; 1) = \frac{e^c}{(n+1)!}, \text{ para algum } c \text{ tal que } 0 < c < 1.$$

Então $e^c < e^1 = e < 3$ e $|R(e^x; 1)| = R(e^x; 1) < \frac{3}{(n+1)!}$.

Se $\frac{3}{(n+1)!} \leq 0,5 \times 10^{-5}$, também $R_n(e^x; 1) < 0,5 \times 10^{-5}$.

Ora,

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 0,5 \times 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{3} \geq 2 \times 10^5 \Leftrightarrow n \geq 9.$$

Assim, uma aproximação para o valor de e com cinco casas decimais correctas é

$$e \sim 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} \sim 2,71828.$$

2. Aproximemos a função $f(x) = \cos x$ no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ usando um polinómio de grau 2 e estimemos o erro cometido.

Como $f^{(3)}(x) = \sin x$, para todo o $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tem-se

$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{P_2(\cos x;x)} + \underbrace{\frac{\sin c}{3!}x^3}_{R_2(\cos x;x)}$$

para algum c entre 0 e x.

Como $|\sin x| \leq 1$ para todo o x, tem-se que

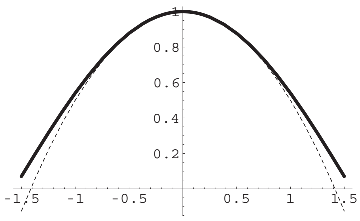
$$|R_2(\cos x; x)| = \frac{|\sin c|}{3!}|x|^3 \leq \frac{|x|^3}{6}.$$

Portanto, $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ e

$$|\cos x - (1 - \frac{x^2}{2})| \leq \frac{|x|^3}{6},$$

para todo o $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Nesta figura, a curva $y = \cos x$ está a cheio e a curva $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ está a tracejado.



Proposição 3.80 (Série binomial)**.** Se $m \in \mathbb{N}$ então, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k.$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ então, para todo o $x \in]-1,1[$, tem-se

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Exemplos 3.81. 1. Para todo o $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x)^3} = (x+3)^{-3} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)(-4)(-5)\cdots(-3-n+1)}{n!} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)}{n!} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)}{2} x^n.
\end{aligned}$$

2. Para todo o $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)\cdots(1/2-n+1)}{n!} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n.
\end{aligned}$$

Logo $\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n.$

3.5 Séries de Fourier

Definição 3.82 (Série trigonométrica)**.** Chamamos **série trigonométrica** a uma série de funções da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L}),$$

onde $\{a_n\}_{n\geq 0}$ e $\{b_n\}_{n\geq 1}$ são sucessões de números reais, e $L \in \mathbb{R}^+$ fixo.

Exemplo 3.83. A série de funções $\frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(\frac{n\pi x}{L})$ é uma série trigonométrica.

Observação 3.84. Se $L = \pi$, temos as séries trigonométricas da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

onde $\{a_n\}_{n\geq 0}$ e $\{b_n\}_{n\geq 1}$ são sucessões de números reais.

Exemplo 3.85. As séries de funções $\quad \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \quad$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} \cos(nx) + (n^2 - 1) \sin(nx))$$

são séries trigonométricas.

Recordemos algumas definições.

- Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **periódica** se existe um número real $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. O número T é um **período** de f.
- Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **par** se $f(-x) = f(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
- Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos 3.86.

1. A função $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$, é periódica de período 2π e ímpar.
2. A função $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$, é periódica de período 2π e par.
3. A função $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$, é ímpar, mas não é periódica.
4. A função $f(x) = \sin x + \cos x,\ x \in \mathbb{R}$, é periódica de período 2π, mas não é par nem ímpar.

Definição 3.87 (Série de Fourier)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, limitada e com um número finito de descontinuidades em $[-L, L]$. Sejam

- $a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx;$

- $a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\dfrac{n\pi x}{L})\,dx$, para $n \geq 1;$ (1)

- $b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\dfrac{n\pi x}{L})\,dx$, para $n \geq 1.$ (2)

Os números a_0, a_n e b_n, com $n \geq 1$, dizem-se **coeficientes de Fourier**.

A série trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

diz-se **série de Fourier da função** f.

Escreve-se $f \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\dfrac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\dfrac{n\pi x}{L})$. (3).

Observação 3.88. A presença do factor $\dfrac{1}{2}$ na parcela $\dfrac{a_0}{2}$ deve-se a uma questão técnica: torna a fórmula (1) válida para $n = 0$.

Exemplos 3.89. 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π definida por $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ em $[0, 2\pi[$. A série de Fourier de f é

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(nx).$$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π definida por $f(x) = 0$, se $x \in [-\pi, 0[$, e $f(x) = 1$, se $x \in [0, \pi[$. A série de Fourier de f é

$$f \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)x).$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, **ímpar**, limitada e com um número finito de descontinuidades em $[-L, L]$. Então

- $a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0;$

- $a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\dfrac{n\pi x}{L})\,dx = 0$, para $n \geq 1$, pois a função $g(x) = f(x)\cos(\dfrac{n\pi x}{L})$ é ímpar.

A série de Fourier de f é uma **série de senos**

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L}),$$

onde $b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\, dx$, para $n \geq 1$.

Exemplo 3.90. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π definida por $f(x) = x$, para $-\pi \leq x < \pi$.

A função f é ímpar, logo a série de Fourier de f é uma série de senos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

onde $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\, dx$, para $n \geq 1$. Ora, para $n \geq 1$ temos $b_n = \dfrac{2}{n}(-1)^{n+1}$.

A série de Fourier de f é a série de senos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx).$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, **par**, limitada e com um número finito de descontinuidades em $[-L, L]$. Então

- $b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\, dx = 0$, para $n \geq 1$, pois a função $h(x) = f(x)\sin(\dfrac{n\pi x}{L})$ é ímpar.

A série de Fourier de f é uma **série de cosenos**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}),$$

onde $a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$ e $a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})\, dx$, para $n \geq 1$.

Exemplo 3.91. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π definida por $f(x) = x^2$, para $-\pi \leq x < \pi$.

A função f é par, logo a série de Fourier de f é uma série de cosenos

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x),$$

onde $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx$ e $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(\pi x)\, dx$, para $n \geq 0$. Ora, $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$, e para $n \geq 1$ temos $a_n = \dfrac{4}{n^2}(-1)^n$.

A série de Fourier de f é a série de cosenos

$$f \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Definição 3.92. 1. Diz-se que r é uma **descontinuidade de 1ª espécie** de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se

$$\lim_{x \to r^-} f(x) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to r^+} f(x) \in \mathbb{R}.$$

2. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **seccionalmente contínua** se tiver um número finito de descontinuidades, todas de 1ª espécie, em qualquer intervalo limitado $[a, b]$.

3. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **seccionalmente derivável** se f for seccionalmente contínua e f' for seccionalmente contínua. (Observação: se $f'(a)$ não existe, considera-se que f' não é contínua em a.)

Exemplos 3.93. 1. A função sinal $sign(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ é seccionalmente derivável.

2. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2π definida por $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ é seccionalmente derivável.

3. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2 definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, para $-1 \leq x \leq 1$, é contínua, mas não é seccionalmente derivável.

Teorema 3.94 (Teorema de Fourier)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e seccionalmente derivável. Então a série de Fourier de f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

tem soma

$$g(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

onde

$$f(x^+) = \lim_{z \to x^+} f(z) \quad \text{e} \quad f(x^-) = \lim_{z \to x^-} f(z).$$

Corolário 3.95. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π contínua e seccionalmente derivável. Então

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L}),$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.96.

Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2π definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}.$$

A série de Fourier de f é

$$f \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}.$$

Como f é seccionalmente derivável, a soma da série de Fourier de f é uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2π definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x = 0, \pi \end{cases}.$$

Exercícios 3.97.

1. Faça um esboço da função $f(x) = |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$, determine a série de Fourier de f e represente graficamente as primeiras 3 somas parciais da série.

2. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$ e periódica de período 2π, definida por $f(x) = x + |x|$, $x \in [-\pi, \pi[$. Determine a série de Fourier de f e a soma dessa série.

3. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$ e periódica de período 2π, definida por $f(x) = x^2 - \pi x$, $x \in [-\pi, \pi[$.

   (a) Verifique que os coeficientes de Fourier de f são

   $$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad b_n = \frac{2\pi(-1)^n}{n}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

   (b) Determine a soma da série de Fourier de f.

   (c) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (Sugestão: Use as alíneas anteriores).

Proposição 3.98 (Identidade de Parseval)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua e periódica de período $2L$. Então os seus coeficientes de Fourier verificam a identidade

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2 \, dx.$$