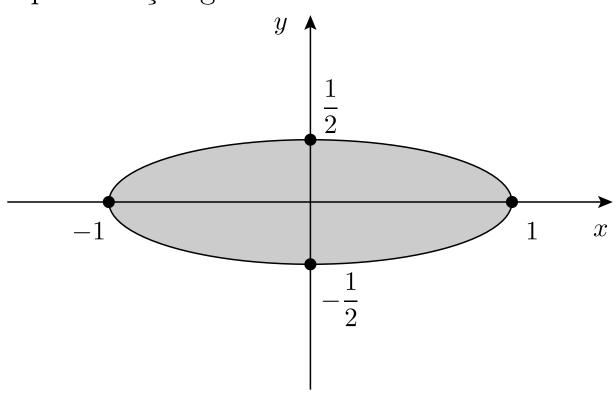
Análise Matemática II (LEGI, MIEM) **FCTUC**

Uma proposta de corrrecção do exame de 9/06/2010

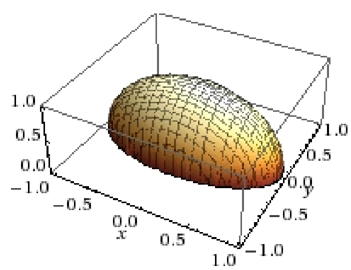
---

1. **Resolução:**

   (a) O domínio da função f é o conjunto $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 4y^2 \leqslant 1\}$, cuja representação gráfica é



   (b) O gráfico de f é o conjunto $G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 4y^2 + z^2 = 1, \ (x,y) \in D_f\}$, onde D_f é o conjunto determinado na alínea anterior. A representação gráfica de G_f é um semi-elipsóide:



2. **Resolução:**

   (a) Sejam $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ e $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.
   Então

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \sin(xy) = \sin(0) = 0$$

   e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\in B}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} x^2 + y^2 = 0^2 + 1^2 = 1.$$

   Como os limites são diferentes, conclui-se que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

   Como existe uma vizinhança aberta de $(1,-1)$ contida em B, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,-1)\\(x,y)\in B}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} x^2 + y^2 = 2.$$

(b) Visto A ser um conjunto aberto, as derivadas parciais de f em pontos $(x, y) \in A$ calculam-se usando apenas a expressão de f em A, ou seja, $\sin(xy)$. Assim, temos, para todo o ponto $(x, y) \in A$,

$$f_x(x, y) = y\cos(xy) \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = x\cos(xy).$$

(c) Como $(-\pi, 1) \in A$ e as derivadas parciais $f_x(x, y) = y\cos(xy)$ e $f_y = x\cos(xy)$, de f em A, existem e são contínuas, conclui-se que f é diferenciável em $(-\pi, 1)$.

(d) Note-se que $(x(1), y(1)) = (\pi\cos(\pi), e^0) = (-\pi, 1) \in A$. As funções $x(u)$ e $y(u)$ são diferenciáveis em todo o seu domínio e, pelo resultado que obtivemos na alínea anterior, f é diferenciável em $(x(1), y(1))$. Assim, podemos aplicar o teorema da derivada da função composta, que diz que

$$g'(1) = x'(1)f_x(-\pi, 1) + y'(1)f_y(-\pi, 1).$$

Ora, $x'(u) = \pi\cos(\pi u) - \pi^2 u\sin(\pi u) \quad \text{e} \quad y'(u) = e^{u-1}$, pelo que

$$x'(1) = \pi\cos(\pi) - \pi^2\sin(\pi) = -\pi \quad \text{e} \quad y'(1) = e^0 = 1.$$

Temos ainda $f_x(-\pi, 1) = \cos(-\pi) = -1$ e $f_y(-\pi, 1) = -\pi\cos(-\pi) = \pi$. Juntando tudo na fórmula de $g'(1)$ concluímos que $g'(1) = 2\pi$.

3. **Resolução:**

(a) A função f está definida no conjunto $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0 \wedge z \neq 0\}$ e as suas derivadas parciais são

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = z\,\mathrm{e}^{y^2} - \dfrac{z}{xz} = z\,\mathrm{e}^{y^2} - \dfrac{1}{x} \\ f_y(x, y, z) = 2\,xyz\,\mathrm{e}^{y^2} \\ f_z(x, y, z) = x\,\mathrm{e}^{y^2} - \dfrac{x}{xz} = x\,\mathrm{e}^{y^2} - \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

O gradiente de f em $(1, 0, 2)$ é o vector

$$\nabla f(1, 0, 2) = \big(f_x(1, 0, 2), f_y(1, 0, 2), f_z(1, 0, 2)\big) = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right).$$

(b) Como a função f é diferenciável numa vizinhança de $(1, 0, 2)$, a derivada de f no ponto $(1, 0, 2)$ na direcção do vector $\overrightarrow{v}$ é dada por

$$\mathrm{D}_{\overrightarrow{v}} f(1, 0, 2) = \nabla f(1, 0, 2) \cdot \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$$

O vector $\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tem norma 1 pois

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Então temos

$$\mathrm{D}_{\overrightarrow{v}} f(1, 0, 2) = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

4. **Resolução:**

(a) O plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(1,0,1)$ é dado pela equação

$$z = f(1,0) + f_x(1,0)\,(x-1) + f_y(1,0)\,(y-0).$$

Temos

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad f_x(x,y) = 2x, \qquad f_y(x,y) = 2y$$

Substituindo em $(1,0)$ obtemos

$$f(1,0) = 1, \qquad f_x(1,0) = 2 \qquad f_y(1,0) = 0$$

A equação do plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(1,0,1)$ é

$$z = 1 + 2(x-1) \Leftrightarrow z = 2x - 1.$$

(b) Queremos calcular um valor aproximado de

$$f(1.0842, 0) = 1.0842^2.$$

Tomamos para ponto aproximado $(a,b) = (1,0)$. Então o diferencial de f num ponto (x,y) perto de $(1,0)$ é dado por

$$\mathrm{d}f(x,y) = f_x(1,0)\,(x-1) + f_y(1,0)\,(y-0) = 2\,(x-1) + 0 = 2\,(x-1)$$

Usando o diferencial, $f(x,y)$ pode ser aproximado por

$$f(x,y) \approx f(1,0) + \mathrm{d}f(x,y) \approx 1 + 2\,(x-1).$$

Portanto, temos

$$1.0842^2 = f(1.0842, 0) \approx 1 + 2\,(1.0842 - 1) \approx 1 + 2 \times 0.0842 \approx 1.1684.$$

(c) Notemos $g(x,y) = x - 2y$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, os extremos de f sujeitos à restrição $g(x,y) = 10$ obtêm-se a partir das soluções do sistema seguinte, com $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{l} f_x(x,y) = \lambda\, g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda\, g_y(x,y) \\ g(x,y) = 10 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2x = \lambda \\ 2y = -2\lambda \\ x - 2y = 10 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\lambda}{2} \\ y = -\lambda \\ \frac{\lambda}{2} + 2\lambda = 10 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} - \\ - \\ 5\,\lambda = 20 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -4 \\ \lambda = 4 \end{array}\right.$$

Portanto, $f(2,-4) = 20$ é o único candidato a extremo relativo de $f(x,y)$ com a restrição $g(x,y) = 10$.

5. **Resolução:**

   (a) Para mostrar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{2n}}$ é absolutamente convergente, basta verificar que a série dos módulos $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{2n}}$ é convergente. Como

   $$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)^{2n}}} = \lim_n \frac{1}{(n+1)^2} = 0 < 1,$$

   o critério da raiz permite concluir que a série anterior é convergente. Consequentemente, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{2n}}$ é absolutamente convergente.

   (b) Para que a aproximação à soma da série tenha duas casas decimais correctas, o erro cometido com esta estimativa deve ser inferior a $0,5 \times 10^{-2}$. Tendo em conta que a série dada é uma série alternada que satisfaz as condições do critério de Leibnitz, para encontrar uma tal aproximação basta determinar o primeiro $n > 0$ que verifica

   $$a_{n+1} < 0,005,$$

   onde $a_n = \frac{1}{(n+1)^{2n}}$. É fácil verificar que para $n = 2$ a desigualdade anterior é verificada. Portanto, uma estimativa para a soma da série que satisfaz as condições do enunciado é

   $$\tilde{S} = -a_1 + a_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3^4} = -\frac{77}{324}.$$

6. **Resolução:**

   (a) Trata-se de uma série geométrica de razão $2x$. Portanto a série converge se $|2x| < 1$ e diverge se $|2x| \geq 1$. Ora,

   $$|2x| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

   O raio de convergência da série é $\frac{1}{2}$ (e o intervalo de convergência é $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$).

   (b) A função f é a soma de uma série geométrica de razão $2x$ e primeiro termo 1. Assim, f tem domínio $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ e

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}.$$

   (c) Para todo o $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, temos

   $$\int_0^x f(t)\, dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x 2^n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^n}{n}.$$

Verifiquemos se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^n}{n}$ converge ou não quando $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$:

Se $x = -\frac{1}{2}$, temos a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ convergente, pelo critério de Leibnitz.

Se $x = \frac{1}{2}$, temos a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, que é divergente.

Pelo teorema de Abel,

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}, \text{ ou seja, } \int_0^{-\frac{1}{2}} f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}.$$

Assim, a igualdade $\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^n}{n}$ verifica-se para todo o $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

(d) Visto $f(t) = \frac{1}{1-2t}$, temos, para todo o $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$,

$$\int_0^x f(t)\, dt = \left[-\frac{1}{2}\ln(1-2t)\right]_0^x = -\frac{1}{2}\ln(1-2x)$$

e, pela alínea (c), visto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n}x^n = -\frac{1}{2}\ln(1-2x)$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n}x^n = -\frac{1}{2}h(x) \Leftrightarrow h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2^n x^n}{n}.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2^n x^n}{n}$ é a série de Maclaurin de $h(x)$.

7. **Resolução:** Como f é periódica e derivável, logo contínua, o teorema de Fourier diz-nos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ é igual à soma da sua série de Fourier.

Como f é par, a série de Fourier de f é uma série de cossenos, pelo que $b_n = 0$.

Além disso, como $f(0) = 2$, obtemos $2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(0) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n$. Ora, $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é uma série geométrica de razão r convergente. Assim, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = 1 \Leftrightarrow \frac{r}{1-r} = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}.$$