Complementos de Análise Matemática EE

MIETI, MIEMAT, MIETEX
2016/2017

Folha de Exercícios 4
A transformada de Laplace

Transformada de Laplace

1. Use a definição para determinar a transformada de Laplace das seguintes funções:

   a) $f(t) = 1$ *b)* $h(t) = \sin(bt)$

   c) $i(t) = t^2$ *d)* $j(t) = e^{at}$

   e) $r(t) = \begin{cases} e^t & , \quad 0 < t \leq 2 \\ 3 & , \quad t > 2 \end{cases}$ *f)* $g(t) = \begin{cases} 2 & , \quad 0 < t < 3 \\ t - 4 & , \quad 3 \leq t < 7 \\ 0 & , \quad t \geq 7 \end{cases}$

2. Utilize a propriedade da linearidade para determinar $\mathcal{L}\left\{5\sin(2t) + 9t^2\right\}$.

3. Utilize a propriedade da translação para determinar $\mathcal{L}\left\{e^{at}\sin(bt)\right\}$.

4. Utilize a propriedade da transformada do produto $t^n f(t)$ para determinar $\mathcal{L}\left\{t^2 cos(at)\right\}$.

5. Determine a transformada de Laplace das seguintes funções:

   (a) $f(t) = 3 + 2x^2$ (b) $g(t) = t + cost - 3\sin t$

   (c) $h(t) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 < t < 1 \\ t & se \quad t > 1 \end{cases}$ (d) $i(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < t < 5 \\ -3 & , \quad t > 5 \end{cases}$

   (e) $j(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < t < 5 \\ t - 3 & , \quad t \geq 5 \end{cases}$ (f) $k(t) = \begin{cases} 4 & , \quad 0 < t < 2 \\ -4 & , \quad t \geq 2 \end{cases}$

   (g) $l(t) = \begin{cases} \sin t & , \quad 0 < t < \pi \\ e^{-t} & , \quad t \geq \pi \end{cases}$ (h) $m(t) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 < t < 4 \\ 4 & se \quad 4 < t < 8 \\ 0 & se \quad t > 8 \end{cases}$

Transformada inversa de Laplace

6. Determine a transformada inversa de Laplace:

a) $F(s) = \dfrac{3}{s^3 + 4s^2 + 3s}$ *b)* $G(s) = \dfrac{2s+2}{s^2+4}$ *c)* $H(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$

d) $I(s) = \dfrac{5s}{s^2+4s+4}$ *e)* $J(s) = \dfrac{5s+6}{s^2+9}e^{-\pi s}$ *f)* $K(s) = \dfrac{s+1}{s^2}e^{-2s}$

g) $L(s) = \dfrac{1-e^{-\pi s}}{(s^2+1)s^2}$ *h)* $M(s) = \dfrac{1}{s^3}e^{-s} + \dfrac{s+3}{s^2+s}$ *i)* $N(s) = \dfrac{s+3}{s^2+2s+2}$

j) $P(s) = \dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$ *k)* $R(s) = \dfrac{s}{(s-2)^2+9}$ *l)* $S(s) = \dfrac{s+4}{s^2+4s+8}$

7. Utilize a convolução para determinar a transformada Inversa de cada uma das seguintes funções:

a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2-7s+10}$ *b)* $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s+3)}$ *c)* $H(s) = \dfrac{s}{(s^2+9)s}$

d) $I(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$ *e)* $J(s) = \dfrac{6}{s^2-1}$ *f)* $K(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4)}$

Resolução de equações diferenciais usando a transformada de Laplace

8. Use a transformada de Laplace para resolver os seguintes problemas de valores iniciais:

a) $y' - 5y = e^{5t}$, $\quad y(0) = 0$

b) $y' + y = \sin(t)$, $\quad y(0) = -1$

c) $y'' + y = t, \quad t > 2$, $\quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 0$

d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$, $\quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2$

e) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 8y = \sin x$, $\quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

f) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = xe^x$, $\quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

g) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} = 5u_4(t)$, $\quad y(0) = 1, \; y'(0) = 3$

$h)\ \dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{dy}{dx}=e^x, \qquad y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

$i)\ \dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}=e^{-x}, \quad y(1)=0,\ \ y'(1)=0$

$j)\ y''+y=f(t), \qquad y(0)=0,\ \ y'(0)=0 \text{ com } f(t)=\begin{cases} 0 & se\ \ 0<t<4 \\ 4 & se\ \ 4<t<8 \\ 0 & se\ \ \ \ \ t>8 \end{cases}$

$k)\ y''+4y=h(t), \qquad y(0)=2,\ \ y'(0)=0 \text{ com } h(t)=\begin{cases} -4t+8\pi & ,\ \ 0<t<2\pi \\ 0 & ,\ \ t>2\pi \end{cases}$

9. Use a transformadas de Laplace para resolver os seguintes problemas de valores iniciais:

$a)\begin{cases} u'+u-v=0 \\ v'-u+v=2 \end{cases} \quad u(0)=1,\ v(0)=2$

$b)\begin{cases} y'-z=0 \\ z'+y=t \end{cases} \quad y(0)=0,\ z(0)=1$

$c)\ \begin{cases} y''+z+y=0 \\ y'+z'=0 \end{cases} \quad y(0)=0, y'(0)=0,\ z(0)=1$

$d)\ \begin{cases} y'+z''=\cos(x) \\ y''-z=\sin(x) \end{cases} \quad y(0)=1, y'(0)=0,\ z(0)=-1, z'(0)=-1$

$e)\ \begin{cases} y'+x=t \\ x'+y=2e^t \end{cases} \quad y(0)=0,\ x(0)=0,$

$f)\ \begin{cases} w'+y=\sin(x) \\ y'-z=e^x \\ z'+w+y=1 \end{cases} \quad w(0)=0, y(0)=1, z(0)=1$

$g)\ \begin{cases} w''-y+2z=3e^{-x} \\ -2w'+2y'+z=0 \\ 2w'-2y+z'+2z''=0 \end{cases} \quad w(0)=0, w'(0)=1; y(0)=2, z(0)=$
$2; z'(0)=-2$

Soluções da folha de exercícios 4

1. *a)* $F\left(s\right)=\dfrac{1}{s},\ s>0$

   b) $H\left(s\right)=\dfrac{b}{s^2+b^2},\ s>0$

   c) $I\left(s\right)=\dfrac{2}{s^3},\ s>0$

   d) $J\left(s\right)=\dfrac{1}{s-a},\ s>a$

   e) $R\left(s\right)=\dfrac{1-e^{-2(s-1)}}{s-1}+\dfrac{3}{s}e^{-2s},\ s>0$

   f) $G(s)=\dfrac{2}{s}+e^{-3s}\left(\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{3}{s}\right)-e^{-7s}\left(\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{3}{s}\right)$

2. $\dfrac{10}{s^2+4}+\dfrac{18}{s^3},\ s>0$

3. $\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$

4. $-2s\dfrac{3a^2-s^2}{(s^2+a^2)^3}$

5. *a)* $F(s)=\dfrac{3}{s}+\dfrac{4}{s^3}$

   b) $G(s)=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{s-3}{s^2+1}$

   c) $H\left(s\right)=\dfrac{s+1}{s^2}e^{-s},\ s>0$

   d) $I\left(s\right)=-3\dfrac{e^{-5s}}{s},\ s>0$

   e) $J\left(s\right)=e^{-5s}\left(\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s}\right),\ s>0$

   f) $K\left(s\right)=\dfrac{-4}{s}(2e^{-2s}-1)$

   g) $L\left(s\right)=\dfrac{1}{s^2+1}+\dfrac{e^{-\pi(s+1)}}{s+1}+\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$

   h) $M\left(s\right)=4\left(\dfrac{e^{-4s}-e^{-8s}}{s}\right)$

6. *a)* $f\left(t\right)=1+\frac{1}{2}e^{-3t}-\frac{3}{2}e^{-t}$

   b) $g(t)=2\cos\left(2t\right)+\sin\left(2t\right)$

   c) $h(t)=1-\cos\left(t\right)$

   d) $i(t)=-10te^{-2t}+5e^{-2t}$

   e) $j(t)=5u_\pi\left(t\right)\cos\left(3\left(t-\pi\right)\right)+2u_\pi\left(t\right)\sin\left(3\left(t-\pi\right)\right)$

   f) $k(t)=u_2\left(t\right)+u_2\left(t\right)\left(t-2\right)$

g) $l(t) = t - \sin(t) - u_\pi(t)(t-\pi) + u_\pi(t)\sin(t-\pi)$

h) $m(t) = u_1(t)\dfrac{(t-1)^2}{2} + 3 - 2e^{-t}$

i) $n(t) = e^{-t}\cos(t) + 2e^{-t}\sin(t)$

j) $p(t) = 6e^{2t}\cos(4t) + 2e^{2t}\sin(4t)$

k) $r(t) = e^{2t}\cos(3t) + \dfrac{2}{3}e^{2t}\sin(3t)$

l) $s(t) = e^{-2t}\cos(2t) + e^{-2t}\sin(2t)$

7. *a)* $f(t) = \dfrac{-e^{2t}}{3} + \dfrac{e^{5t}}{3}$

   b) $g(t) = \dfrac{t}{3} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{e^{-3t}}{9}$

   c) $h(t) = \dfrac{\sin(3t)}{3}$

   d) $i(t) = t - \sin(t)$

   e) $j(t) = 3e^t - 3e^{-t}$

   f) $k(t) = \dfrac{1}{4}(1 - \cos 2t)$

8. *a)* $y(t) = te^{5t}$

   b) $y(t) = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}e^{-t}$

   c) $y(t) = t - \cos(t-2) - \sin(t-2)$

   d) $y(t) = e^{2t}$

   e) $y(x) = e^{-2x}\left(\dfrac{69}{65}\cos 2x + \dfrac{131}{130}\sin 2x\right) + \dfrac{7}{65}\sin x - \dfrac{4}{65}\cos x$

   f) $y(x) = e^x - te^x + \dfrac{1}{6}x^3e^x$

   g) $y(t) = -5u_4(t) - 5u_4(t)(t-4) + 5u_4(t)e^{t-4} - 2 + 3e^t$

   h) $y(x) = -1 + \dfrac{1}{2}e^x + \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x$

   i) $y(x) = -\dfrac{1}{2}e^{x-2} + \dfrac{1}{3}e^{2x-3} + \dfrac{1}{6}e^{-x}$

   j) $y(t) = 4u_4(t) - 4u_4(t)\cos(t-4) - 4u_8(t) + 4u_8(t)\cos(t-8)$

   k) $y(t) = \frac{1}{2}[2t - 4\pi - \sin(2t)]\,u_{2\pi}(t) + 2\pi(1-\cos(2t)) - \frac{1}{2}[2t - \sin(2t)] + 2\cos(2t)$

9. *a)* $\begin{cases} u(x) = 1 + x \\ v(x) = 2 + x \end{cases}$

   b) $\begin{cases} z(t) = 1 \\ y(t) = t \end{cases}$

   c) $\begin{cases} y(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 \\ z(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$$d)\begin{cases} z(x) = -\cos x - \sin x \\ y(x) = \cos x \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x(t) = t + te^t \\ y(t) = -1 - te^t + e^t \end{cases}$$

$$f)\begin{cases} z(x) = \cos x \\ y(x) = e^x + \sin x \\ w(x) = 1 - e^x \end{cases}$$

$$g)\begin{cases} z(x) = 2e^{-x} \\ y(x) = e^x + e^{-x} \\ w(x) = e^x \end{cases}$$