Criptografia Assimétrica

Criptografia (MIETI)
José Carlos Bacelar Almeida
(jba@di.uminho.pt)

Motivação

- Utilização de criptografia (simétrica) obriga à existência de chaves partilhadas.
- Problema da distribuição de chaves:

  Numa comunidade de n agentes, o estabelecimento de canais seguros (utilizando cifras simétricas) requer a partilha de $\frac{n*(n-1)}{2}$ chaves

- O **pré-acordo de chaves** é um procedimento custoso (requer a utilização de canais seguros...) e pouco flexível (e.g. considere-se a inclusão de mais um agente na comunidade...).
- ... em "redes abertas" a *distribuição de chaves torna-se um problema sério*: o pré-acordo não é, de forma alguma, uma solução satisfatória.

Analogia com exemplos práticos sugere a possibilidade de alternativas viáveis...

- Exemplo:

  Admita-se que dispomos de uma cifra (simétrica) em que a operação de cifra é comutativa, i.e.

  $$E_{k1}(E_{k2}(X))=E_{k2}(E_{k1}(X))$$

  - Para A comunicar M com B pode:
    - A envia a B $E_{KA}(M)$ - em que KA é só conhecida por A.
    - B devolve a A $E_{KB}(E_{KA}(M))=E_{KA}(E_{KB}(M))$ - em que KB só é conhecida por B.
    - A decifra mensagem recebida e re-envia a B o resultado, i.e. $E_{KB}(M)$
    - B decifra mensagem M.

    ... ou seja, A e B comunicam de forma segura sem partilharem segredos... (a mensagem M circula sempre protegida com, pelo menos, uma operação de cifra)

- Obs.: mas este esquema também exibe uma vulnerabilidade importante... (c.f. *man-in-the-middle attack* estudado adiante)

Acordo de Chaves

- Pode-se contornar o problema da distribuição de chaves se ambas as partes acordarem num segredo comum...
  - ...trocando mensagens sobre um canal público...
  - ...mas sem que que seja possível derivar o segredo conhecendo apenas as mensagens trocadas.
- Um esquema que acomoda estes requisitos surgiu no artigo de *Diffie-Hellman (New Directions in Cryptography, 1976)*.
- Segurança resulta de se acreditar que a *exponenciação modular* é uma função de sentido único.

Teoria de Números (I)

- Operações modulares (mod n)
  - Adição - $x+y$ mod n

    Subtração - $x-y$ mod $n = x + (-y)$ mod $n = 0$

    Todos os valores $0 \leq x < n$ dispõe de inversa aditiva, logo Z_n é um grupo (abeliano)
  - Multiplicação - $x*y$ mod n

    Divisão - x/y mod $n = x*(x^{-1})$ mod $n = 1$

    Para que $0 \leq x < n$ disponha de inversa multiplicativa é necessário que $gcd(x,n)=1$ - isto é, x seja **primo relativo a** n. Podemo-nos então referir ao sub-grupo Z^*_n de Z_n .(os elementos de Z^*_n são os elementos de Z_n primos relativos a n)
  - Exponenciação - x^y mod n

    Logaritmo Discreto - $(\log_x(y))^y$ mod $n = 1$
- O corpo finito $GF(p)$ [p primo]

  Quando p é primo, todos os valores de Zp com excepção do zero dispõe de inversa multiplicativa. Dessa forma ficamos perante a estrutura algébrica de um corpo finito, designada por **corpo de Galois GF(p)**.
  - Dizemos que g é um **gerador** do grupo multiplicativo Z_p^* quando qualquer um dos seus elementos pode ser escrito como g^x (para um dado inteiro x).

Property	Property
Associativity	$a + (b + c) \bmod n = (a + b) + c \bmod n$
	$a \times (b \times c) \bmod n = (a \times b) \times c \bmod n$
Commutativity	$a + b \bmod n = b + a \bmod n$
	$a \times b \bmod n = b \times a \bmod n$
Distributivity	$a \times (b + c) \bmod n = (a \times b) + (a \times c) \bmod n$
Existence of identities	$a + 0 \bmod n = 0 + a \bmod n = a \bmod n$
	$a \times 1 \bmod n = 1 \times a \bmod n = a \bmod n$
Existence of inverses	$a + (-a) \bmod n = 0$
	$a \times (a^{-1}) \bmod n = 1$ if $GCD(a, n) = 1$
Reducibility	$(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$
	$(a \times b) \bmod n = ((a \bmod n) \times (b \bmod n)) \bmod n$

Algoritmos eficientes para operações modulares

- **Adição; multiplicação; resíduo (módulo)** - adaptações dos algoritmos usuais...
- **Exponenciação** - (square and multiply)...
- **GCD** - o famoso algoritmo de Euclides...
- **Inversa multiplicativa (divisão)** - generalização do algoritmo de Euclides...
- **Primalidade** (testar se um número é primo) - existem testes probabilísticos que nos permitem obter garantias (tão boas quanto necessárias) que um número é primo...

Alguns problemas (tidos por) intratáveis...

- Factorização de um inteiro:

  Dado um inteiro n determinar a sua factorização em números primos. Ou seja, determinar números primos $p_1,...,p_i$ tal que $p_1 \times ... \times p_i = n$

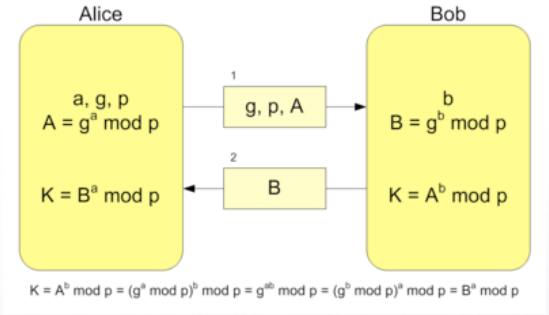
- Logaritmo discreto:

  Dado a, b e n, determinar x tal que $a^x \bmod n = b$

- Raiz quadrada discreta:

  Dado y e n, determinar x tal que $x^2 \bmod n = y$

Protocolo *Diffie&Hellman*



- Parâmetros:

  Seja p um primo e g um gerador do grupo Z_p^*.

- Descrição:
  - A gera um inteiro $1<x<p$ e envia a B "$g^x \bmod p$"
  - B gera um inteiro $1<y<p$ e envia a A "$g^y \bmod p$"
  - Segredo partilhado: $g^{xy} \bmod p = (g^y)^x \bmod p = (g^x)^y \bmod p$

- Segurança (perante *adversários passívos*):
  - Se fosse possível calcular o logaritmo discreto, o intruso poderia calcular *x* a partir de g^x e, assim, atacar o protocolo.
  - Em rigor, a segurança do protocolo exprime-se como uma assumpção de segurança própria (*Computational Diffie-Hellman problem*): *a partir de g^x e g^y não é possível determinar g^{xy}.*
- Por vezes (e.g. JCA), refere-se aos valores envolvidos no algoritmo como pares de chaves:
  - x, g^x : chave privada e pública de A;
  - y, g^y : chave privada e pública de B.

  Obs.: mas note que estas chaves só devem ser utilizadas numa única execução do algoritmo.

Man-in-the-middle (I)

- Na presença de um *adversário activo*, é possível este fazer-se passar por outro agente comprometendo a segurança da técnica: ataque vulgarmente designado por *man-in-the-middle.*
- Exemplo:

Suponhamos que A pretende acordar um segredo com B.

- A gera x, calcula g^x e envia este último valor a B;
- I intercepta a mensagem de A;
- I gera z e calcula g^z que envia para A:
- A adopta o segredo $K=(g^z)^x=g^{xz}$ que presume acordado com B;
- I conhece o segredo $K=(g^x)^z=g^{xz}$ que A pensa partilhar com B.

I pode ainda executar uma sessão análoga com B e assim colocar-se "no meio" da comunicação entre A e B.

- Este é um ataque a que estão sujeitas a generalidade das técnicas criptográficas assimétricas: ***A utilização de técnicas criptográficas assimétricas requer uma associação fidedigna entre pares de chaves e identidades dos agentes.***

Criptografia de Chave Pública

- Conceito introduzido por *Diffie & Hellman* em 1976.
- Ideia base:
  - Duas chaves distintas são utilizadas na operação de cifra Kc de decifragem Kd.

    E(Kd,E(Kc,M)=M
  - O conhecimento de uma chave não permite retirar informação sobre a outra.
- ...leva ao conceito de *função de sentido único com segredo...*
  - Cifra com uma das chaves deve ser uma função de sentido único - não deve ser computacionalmente viável inverter essa função.
  - Mas informação adicional (outra chave) permite calcular operação inversa...

Mais uma vez, é a *Teoria de números* que se tem revelado a principal fonte de problemas que se acredita satisfazerem critérios requeridos...

- Assim, uma das chaves pode ser "tornada pública"...

Trapdoor Permutation

- Na criptografia de chave pública faz-se uso de uma especificação mais apertada nas funções de sentido único: ***Funções de Sentido Único Com Segredo (trapdoor permutation)***
  - Função injectiva que dispõe de um algoritmo eficiente para o seu cálculo;
  - Cujo cálculo da inversa seja um problema intratável;
  - Mas, quem dispuser de informação adicional (o segredo), pode calcular essa inversa.

Cifra Assimétrica

- A utilização de chaves distintas para as operações de cifra e decifragem permite contornar o problema da pré-distribuição de chaves.
- O ponto de partida é a observação só a chave para decifrar necessita ser mantida secreta.
- Assim:
  - Cada agente dispõe de um par de chaves *(Kc,Kd)*

Cifra:

- Chave pública: *Kc;* Chave privada: *Kd*
- Para *A* enviar mensagem *M* a *B:* envia $E(Kc^B,M)$ - note que Kc^B é publicamente conhecida...
- *B* decifra a mensagem utilizando a sua chave privada: $E(Kd^B,M)=M$

***A* dispõe de garantias que só *B* pode extrair o conhecimento de *M* porque só ele dispõe do conhecimento da chave privada.**

Utilização (na prática)

- Para o mesmo nível de segurança, as cifras assimétricas são várias ordens de grandeza menos eficientes do que as simétricas (e.g. 1000x).
- ...por isso, são normalmente utilizadas em conjunção com estas (e não alternativamente).
- Utilização típica:

Envelope digital - utilizado para garantir confidencialidade na transmissão de uma mensagem

- *A* gera uma **chave de sessão *K*** (para uma cifra simétrica)
- *A* envia a *B* par com $E(Kc^B,K)$ e $E_K(M)$ - $E_K(-)$ é uma cifra simétrica
- *B* decifra *K* e utiliza essa chave para decifrar *M*.

Man-in-the-middle (II)

- Tal como no caso do acordo de chaves, também a cifra assimétrica é vulnerável perante um adversário activo (ataque *man-in-the-middle*).
- Na sua essência, este ataque traduz-se por fazer uso da chave pública "errada".
- Exemplo:

  Suponhamos que *A* deseja cifrar uma mensagem para *B*.

  - Ao pedido de *A* relativo à chave pública de *B, I* responde com a sua própria chave pública Kc^I.
  - *A* envia $E(Kc^I,M)$...
  - *I* intercepta essa mensagem, decifra-a, e torna-a a cifrar utilizando a verdadeira chave pública de *B*
  - *B* decifra mensagem...

  A e *B* supõe que *M* se matem secreta mas *I* decifrou mensagem sem problemas...
- Mais uma vez observa-se que existe necessidade de confiar na associação entre os pares de chaves e as identidades.

Assinatura digital

O principal contributo da criptografia assimétrica foi o de permitir a definição de um *análogo digital* do conceito de *assinatura de um documento*.

- Em geral, podemos identificar uma assinatura digital como um "suplemento" à mensagem que nos permite verificar:

  Integridade: a mensagem não é modificada após a assinatura;

  Autenticidade: a identidade do *assinante* pode ser confirmada;

  Não repúdio: é possível demonstrar a identidade do assinante.

- É a capacidade de a assinatura digital "autenticar documentos" que permitirá ultrapassar as limitações das técnicas assimétricas que tem vindo a ser identificadas...

Descrição:

- Na utilização de uma assinatura estão envolvidas duas entidades: o (**S**)ignatário e o (**V**)erificador.
- Um esquema de assinaturas compreende duas operações:
  - ***produção da assinatura***: processo pelo qual o Signatário gera a assinatura $x=\text{Sig}^S(M)$ que anexa à mensagem - a mensagem assinada consiste assim num par (M,x);
  - ***verificação da assinatura***: processo em que o Verificador confirma que a origem da mensagem M é S, i.e. $\text{Ver}^S(M,x)=true$
- Das propriedades requeridas pela assinatura resulta que, se o (**S**)ignatário produzir uma assinatura $x=\text{Sig}^S(M)$, o (**V**)erificador com o par (M,x):
  - pode verificar que a origem de M é S, i.e. $\text{Ver}^S(M,x)=true$
  - não pode produzir $M' \neq M$ tal que $\text{Ver}^S(M',x)=true$

Obs.1: na essência do conceito de assinatura digital está uma assimetria entre as capacidades do verificador e do assinante: o primeiro deve estar habilitado a verificar as assinaturas produzidas pelo segundo sem dispor da capacidade de, ele próprio, as produzir.

Obs.2: note que os MACs garantem os dois primeiros requisitos mas falham no último (não repúdio) - nesse caso o verificador dispõe de tanta informação como o assinante.

Utilização básica (conceito)

- Em relação à cifra assimétrica, as operações num esquema de assinaturas
  - A produção da assinatura é restrita ao Signatário;
  - A verificação pode ser pública.
- Assim é concebível trocar os papeis das chaves públicas e privadas nas cifras assimétricas para codificar um esquema de assinatura:
  - Cada agente *X* dispõe de um par de chaves (Kc^X, Kd^X)
  - Chave pública: Kd Chave privada: Kc
  - $Sig^A(M) = E(M, Kc^A)$
  - $Ver^A(M, S) = E(S, Kd^A) == M$

_B_ (ou qualquer agente) dispõe de garantias que _M_ foi realmente enviada por _A_ porque só ele dispunha da chave privada.

Utilização (na prática)

- As considerações expostas anteriormente relativamente à eficiência das técnicas assimétricas...
- (...assim como outras relativas a aspectos de segurança...)
- ...faz com que se combine o padrão apresentado com a utilização de uma *função de hash criptográfica*.
- Assim, na prática temos:
  - *A* utiliza uma função de hash criptográfica para calcular $H=hash(M)$
  - *A* envia a *B* o par constituído por *M* e $S=E(H, Kc^A)$.
  - *B* determina valor de hash e compara-o com resultado da decifragem de *S*.

Man-in-the-middle (III)

- Tal como as restantes técnicas assimétricas, também as assinaturas digitais são vulneráveis ao ataque *man-in-the-middle.*
- Na assinatura, esse ataque traduz-se na falha de garantias de autenticação após a verificação da assinatura (a verificação é realizada com uma chave pública "errada").

- Mas é interessante observar que desta vez existe um certo grau de circularidade entre o que é o objectivo da técnica e a causa do problema:
  - a assinatura digital pretende estabelecer a autenticidade de uma mensagem/documento;
  - e a falha na garantia de autenticidade da associação entre as chave públicas e identidades leva à possibilidade do ataque *man-in-the-middle.*
  - ...ora, se considerar um documento que estabeleça essa associação...
  - ...podemos utilizar uma assinatura digital para **certificar** esse documento (assunto que abordaremos adiante)

- Já vimos atrás como a criptografia assimétricas permite a realização de "Esquemas de Assinaturas".

Obs.: as assinaturas digitais são facilmente duplicáveis (um aspecto que as distingue das assinaturas correntes). Este facto determina um cuidado particular em certas aplicações dessas assinaturas (e.g. ordens para transacções financeiras...).

- Por vezes, existe interesse em incluir no "esquema de assinaturas" funcionalidade/propriedades que estendem as já referidas...

Assinaturas não repudiávies - em que o procedimento de verificação requer a intervenção do signatário (sem que este se possa recusar a colaborar...)

Assinaturas com recuperação de mensagem (ARM) - o mecanismo de verificação não requer a mensagem assinada (como no esquema referido, designado Assinatura com Apêndice de Mensagem (AAM)).

...(consultar *Stinson, cap.6*)

Certificação das chaves

Problema descrito mostra que nunca devemos utilizar cifras assimétricas sem uma *confiança* plena na associação entre pares de chaves e identidades dos agentes...

Obs.: Notar que o problema já está presente no esquema hipotético (com cifras simétricas) utilizado para motivar o conceito...

- Evidentemente que tal garantia pode ser conseguida por uma *pré-distribuição* de chaves (mas então não estamos longe do problema inicial...)
- Solução alternativa consiste em utilizar os próprios mecanismos disponibilizados pelas técnicas assimétricas (em particular a assinatura digital) para estabelecer a confiança entre as associações par-de-chaves/identidades.
  - Todos os agentes dispõe da chave pública de um agente ***fidedigno*** - *a* **Autoridade de certificação (CA)**. Essa chave pública deve ser obtida por via de um canal seguro...
  - A *CA* ***garante*** (assinando digitalmente) a associação entre *chave-pública/identidade do agente* - o que designamos por **certificado de chave pública**. É ***responsabilidade*** da *CA* a correcção da associação estabelecida.
  - Um qualquer agente pode verificar a assinatura de um certificado (atestando assim a validade da associação pretendida).

Protocolo *Station-to-Station*

- As técnicas apresentadas (envelope digital, assinatura digital, ...) devem então requerer um certificado sempre que necessitarem de uma chave pública. Dessa forma ficam com garantias que as chaves públicas utilizadas se encontram associadas às identidades presumidas (por via da confiança depositada na CA), e assim impossibilitam ataques do tipo *man-in-the-middle*.
- Já no caso do protocolo de acordo de chaves *Diffie-Hellman*, não faz sentido certificar as chaves públicas utilizadas (já que estas são geradas para cada sessão do protocolo).
- Em vez disso, faz-se uso de assinaturas digitais normais para garantir a autenticidade das mensagens trocadas durante (certos passos d)o protocolo.
- Ao protocolo resultante dá-se o nome *Station-to-Station:*
  - $A \rightarrow B: +x \,.\, g^x$
  - $B \rightarrow A: +y \,.\, g^y,\ E_K(\mathrm{Sig}^B(g^x,g^y))$
  - $A \rightarrow B: E_K(\mathrm{Sig}^A(g^x,g^y))$

Obs.1: Na apresentação do protocolo, " $A \rightarrow B: +x \,.\, M$" denota um passo em que A gera o valor x e envia a B a mensagem M; $E_K(M)$ denota o criptograma resultante de cifrar M com a chave K; e $\mathrm{Sig}^A(M)$ a assinatura digital de M por A.

Obs.2: Estando envolvidas assinaturas digitais nos segundo e terceiro passos do protocolo, é normal incluírem-se nas mensagens trocadas também os certificados requeridos para a verificação dessas assinaturas (i.e. da chave pública de B e A respectivamente).

RSA

- Algoritmo que realiza o conceito de criptografia de chave pública introduzido por *Diffie & Hellman.*
- Desenvolvida por *Ron Rivest, Adi Shamir & Leonard Adleman* - 1977/8.
- Baseada no problema da *factorização* de inteiros.

Teoria de Números (II)

- Função *totient* $\varphi(n)$ de *Euler*: em Z_n, o conjunto de valores $0 \le x < n$ são designados por **resíduos**. Aos resíduos que não dispõe de factores em comum com n dizemos tratarem-se de **resíduos reduzidos**. A função *totient de Euler* $\varphi(n)$ é definida como o número de resíduos reduzidos de n.
  - Se p é primo, então $\varphi(p)=p-1$
  - Se $n=p*q$ com p,q primos, então $\varphi(n)=(p-1)(q-1)$
- Teorema (pequeno) de *Fermat*: (p primo, $0<a<n$)

$$a^{p-1} \bmod p \equiv 1$$

...ou na versão generalizada de *Euler,* ($gcd(a,n)=1$)

$$a^{\varphi(n)} \bmod n \equiv 1$$

- Teorema Chinês dos Restos:

Podemos simplificar as operações modulares em n *se conhecermos o resultado dessas operações nos factores primos de* n

$$p, q \text{ primos}; \quad p < q \quad ; \quad q * u \equiv 1 \bmod p$$

$$a \equiv x \bmod p$$

$$b \equiv x \bmod q$$

$$\text{Se } a \geq b \bmod p: \quad x = (((a - (b \bmod p)) * u) \bmod p) * q + b$$

$$\text{Se } a < b \bmod p: \quad x = (((a + p - (b \bmod p)) * u) \bmod p) * q + b$$

RSA - descrição

- Inicialização (produção do par de chaves)
  - Geram-se dois números primos grandes p,q (faz-se $n=p*q$, logo $\varphi(n)=(p-1)*(q-1)$)
  - Considera-se um valor e que seja primo relativo a $\varphi(n)$ (i.e. $gcd(e,\varphi(n))=1$).
  - Calcula-se d como a inversa de e no grupo multiplicativo $Z^*_{\varphi(n)}$, i.e. $e*d=1 \bmod \varphi(n)$.

Chave para cifrar: (n,e) **Chave para decifrar:** (n,d)

- Utilização (como cifra)
  - Ambas as operações são a exponenciação modular.

Cifra do texto limpo x ($0 \leq x < n$) com chave (n,e):

$$\boldsymbol{x^e \bmod n}$$

Decifragem do criptograma y ($0 \leq y < n$) com chave (n,d)

$$\boldsymbol{y^d \bmod n}$$

CORRECÇÃO:

Pretende-se mostrar que E*(Kd,*E*(Kc,M))=M*, i.e.

$$\left(x^{e}\right)^{d} \equiv x \pmod{n}$$

porque,

$$\left(x^{e}\right)^{d} \bmod n \equiv x^{e*d} \bmod n \equiv x^{k*\varphi(n)+1} \bmod n$$

Se $\gcd(x,p)=1$, o teorema de Fermat diz-nos que

$$x^{p-1} \bmod p \equiv 1 \Rightarrow x^{(p-1)*(q-1)*k} \bmod p \equiv 1$$

Assim,

$$x^{k*\varphi(n)+1} \bmod p \equiv x$$

para qualquer x (verifica-se trivialmente quando $x \mid p$).

Raciocinando da mesma forma para q obtemos:

$$x^{k*\varphi(n)+1} \bmod q \equiv x$$

e estas duas equações permitem-nos concluir (Teorema Chinês dos Restos):

$$x^{k*\varphi(n)+1} \bmod n \equiv x$$

RSA - segurança

- Derivar chave privada da chave pública:

  É possível definir um algoritmo (probabilístico) que permite calcular a factorização de *n* assumindo que dispomos de um oráculo para derivar a chave privada RSA da pública. Ou seja, os problemas são demonstrados equivalentes...

- Extrair mensagem do criptograma:

  Se se escolher uma mensagem arbitrária (de entre todo o espaço de mensagens admissíveis), "acredita-se" que não é possível derivar essa mensagem do criptograma respectivo.

- (Não) Indistinguibilidade de mensagens:

  Mas é muito simples derivar a mensagem cifrada se se souber que ela pertence a um conjunto restrito de possibilidades (e.g. um único bit).

RSA: Propriedades Algébricas

- A exponenciação modular exibe uma multiplicidade de propriedades algébricas:
  - Comutatividade

$$\left(x^{e_1} \bmod n_1\right)^{e_2} \bmod n_2 \equiv \left(x^{e_2} \bmod n_2\right)^{e_1} \bmod n_1$$

  - Propriedade multiplicativa

$$(x_1 \times x_2)^e \bmod n \equiv \left(x_1{}^e \bmod n\right) \times \left(x_2{}^e \bmod n\right)$$

  - etc.
- Estas propriedades são exploradas em certas técnicas criptográficas...
- ...mas também são a base de certos ataques a utilizações específicas.

RSA: *Protocol Failures*

- Protocol Failures são vulnerabilidades que, sem atacar a essência do algoritmo RSA, comprometem certos padrões de utilização desse algoritmo.

- Alguns exemplos:

Módulo comum

Se o mesmo módulo n é partilhado por uma comunidade, é possível recuperar a mensagem original se esta for enviada (cifrada) para vários agentes...

Expoente baixo

Se o expoente e for valor pequeno e partilhado por uma comunidade, é possível recuperar a mensagem original a partir de $e*(e+1)/2$ criptogramas (cifrados com diferentes chaves públicas).

RSA: *outras vulnerabilidades*

Assinar após cifrar:

Torna possível ao receptor da mensagem "alterar" o seu par de chaves e argumentar que a mensagem assinada foi uma por si escolhida.

Obs.1: esta vulnerabilidade não é específica do RSA.

Obs.2: existem outros argumentos para evitar o padrão "assinar após cifrar" (e.g. pode haver dúvidas se o signatário conhecia o conteúdo da mensagem que assina).

Baixa entropia da mensagem:

O RSA, como qualquer algoritmo determinístico de chave pública, disponibiliza ao adversário um oráculo para cifrar mensagens por si escolhidas. Se a entropia da mensagem for baixa, é possível tabelar todos os possíveis pares mensagem/criptograma (ataque *codebook*).

RSA: variantes aleatórias

- As maiores críticas apontadas ao RSA resultam de ele ser determinístico (i.e. uma dada mensagem cifrada repetidas vezes resulta sempre no mesmo criptograma).
- Já vimos que este facto pode comprometer completamente a segurança da técnica em determinadas utilizações.
- Existem variantes aleatórias do RSA que ultrapassam esta limitação, prevendo a utilização de factores aleatórios na produção do criptograma (ou assinatura).
- É possível demonstrar (formalmente) que essas variantes cumprem requisitos de segurança mais apertados (e.g. indistinguibilidade).
- Exemplos:
    - Cifra: RSA-OAEP
    - Assinatura: RSA-PSS

RSA-OAEP

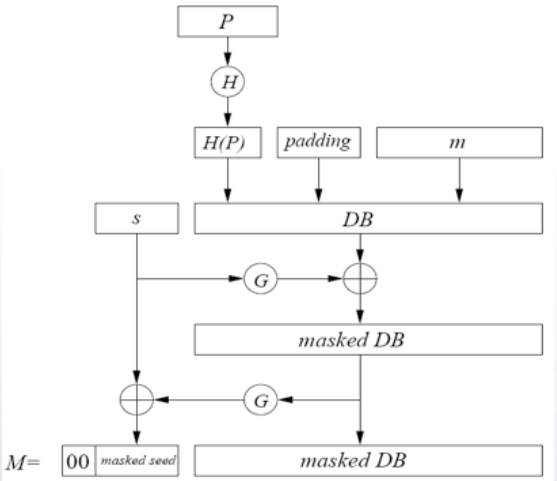


Figure 1: OAEP encoding function.

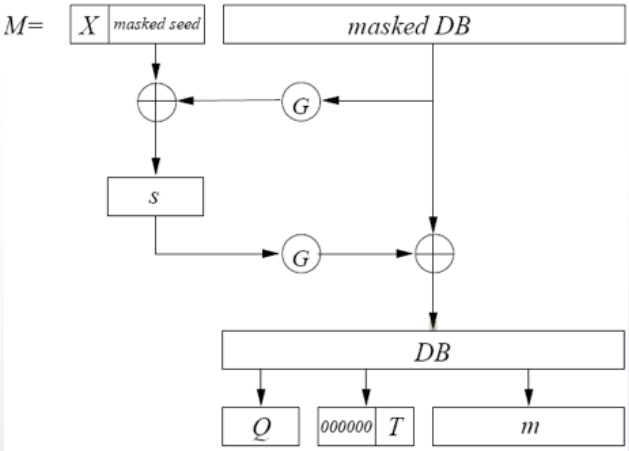
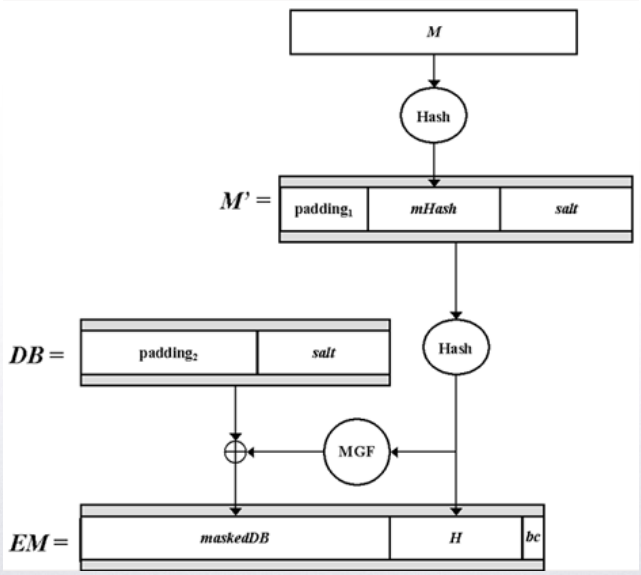


Figure 2: OAEP decoding function.

RSA-PSS



El-Gamal

- Algoritmo introduzido em 1984 por *T. El Gamal.*
- Baseado no problema do *logaritmo discreto.*
- Variantes para funcionar como cifra ou como assinatura...

El Gamal (cifra)

- Inicialização
  - escolher um primo p e dois inteiros, g e x, tal que g é gerador de Z^*p e $x<p$
  - calcular $y = g^x \bmod p$
  - [chave privada, chave pública] = [x, (y, g, p)]
- Cifra de uma mensagem M
  - escolher (aleatoriamente) um inteiro $k,\ 0<k<p-1$
    - tal que k não foi já utilizado e $gcd(k, p-1)=1$
  - calcular $a = g^k \bmod p$ e $b = M*y^k \bmod p$
  - criptograma: (a, b)
- Decifragem...
  - ...dada a chave pública (y,g,p), e o criptograma (a,b)
  - M = $b/a^x \bmod p$

correcção e segurança

- Derivar chave privada da chave pública:

  Corresponde precisamente ao problema do *logaritmo discreto,* que se crê intratável.

- Extrair mensagem do criptograma:

  Se se escolher uma mensagem arbitrária (de entre todo o espaço de mensagens admissíveis), "acredita-se" que não é possível derivar essa mensagem do criptograma respectivo.

- Indistinguibilidade de mensagens:

  É possível demonstrar que, dado um criptograma *c* que se sabe resultante da cifra de uma de duas mensagens previamente escolhidas, não é possível saber qual a mensagem efectivamente cifrada (admitindo que o problema *Diffie-Hellman* é intratável).

El Gamal (assinatura)

- Inicialização
  - escolher um primo p e dois inteiros, g e x, tal que $g<p$ e $x<p$
  - calcular $y = g^x \bmod p$
  - [chave privada, chave pública] = [x, (y, g, p)]
- Assinatura de uma mensagem m
  - escolher (aleatóriamente) um inteiro $k,\ 0<k<p-1$
    - tal que k não foi já utilizado e $gcd(k, p-1)=1$
  - calcular $r = g^k \bmod p$ e $s = k^{-1}*(m-x*r) \bmod (p-1)$
    - k^{-1} é a inversa multiplicativa de k mod $(p-1)$
  - assinatura: (r, s)
- Verificação da assinatura
  - ...dada a chave pública (y,g,p), e a assinatura (r,s) da mensagem m
  - calcular $y^r r^s \bmod p$
  - verificar se $y^r r^s \equiv g^m \bmod p$
    - Se SIM, a assinatura é válida!

El Gamal (assinatura)

- Correcção:

$$y^r r^s = (g^x)^r (g^k)^s \equiv g^{xr+ks} \bmod p$$ ← Definição de y e r

$$\equiv g^{xr+k(k^{-1}(m-xr))} \bmod p$$ ← Definição de s

$$\equiv g^{xr+(m-xr)} \bmod p$$

$$\equiv g^m \bmod p$$

$g^x \equiv g^{x'} \bmod p$
Se $x \equiv x' \bmod (p-1)$
e p é primo

- Segurança:

  Descobrir a chave privada da pública corresponde exactamente ao problema do logaritmo discreto;

  ....

Digital Signature Algorithm

- Algoritmo de assinatura incluído no standard *Digital Signature Standard (DSS)* - 1991.
- Desenvolvido pela NSA para a NIST (baseado no *El-Gamal*).
- Desenhado para dispor de um procedimento de assinatura muito eficiente - e.g. muito mais eficiente do que o RSA... (em contrapartida, a verificação é muito mais pesada).
- É, por isso, particularmente adaptada para ser executada em ambientes com recursos limitados (e.g. *smartcards*).
- Desenhado para funcionar unicamente como assinatura (mas é possível desenvolver esquemas que permitem utilizar as rotinas de assinatura/verificação DSA para cifrar mensagens...)

DSA - descrição

- Inicialização
  - p é um primo de L bit ($512 \leq L \leq 1024$; L múltiplo de 64)
  - q é um factor primo de $(p-1)$ de 160 bit
  - $g=h^{(p-1)/q} \bmod p$, onde $h<p-1$; $g>1$
  - $y = g^x \bmod p$, em que $x<q$
  - [chave privada, chave pública] = [x, (y, g, p,q)]
- Assinatura de uma mensagem m (utiliza função de hash H)
  - escolher (aleatoriamente) um inteiro k, $0<k<q$
    - tal que k não foi já utilizado e $gcd(k, p-1)=1$
  - calcular $r = (g^k \bmod p) \bmod q$ e $s = k^{-1}*(H(m)+x*r) \bmod q$
  - assinatura: (r, s)
- Verificação da assinatura
  - ...dada a chave pública (y,g,p,q), e a assinatura (r,s) da mensagem m
  - calcular $w=s^{-1} \bmod q$; $u1=(H(m)*w) \bmod q$; $u2=(r*w) \bmod q$
  - verificar se $(g^{u1}y^{u2} \bmod p) \bmod q = r$

Referências

- Cryptography: theory and practice – D. Stinson. [cap. 4,5 (6,8,9,11,13)]
- Applied Cryptography – *Bruce Schneier*. [cap. 19,20 (21,22,23)]

Criptografia em Curvas Elípticas (ECC)

- O problema do "logaritmo discreto" pode ser expresso em qualquer corpo finito (e.g. $GF(p)$ ou $GF(p^n)$)
- ...em particular, podemos exprimir a exponenciação no grupo cíclico determinado por uma *curva elíptica* sobre o corpo considerado.
- Permite representações compactas para níveis de segurança pretendidos (e.g. 163 bit para níveis de segurança análogos as 1024 bit em RSA)
- ... e realizações eficientes das operações pretendidas...
- Argumenta-se, por isso, ser particularmente adequado para dispositivos com recursos limitados (e.g. *smartcards*)

Corpos finitos $GF(p^n)$

- A estrutura de corpo de $GF(p)$ pode ser generalizada para polinómios com resíduos (módulo p) como coeficientes.
- Exemplo: $GF(2^n)$ corresponde ao corpo de polinómios de grau n com coeficientes binários. Obs.: estes polinómios podem ser representados de forma compacta como uma palavra em binário (os coeficientes)

  Adição - adição de polinómios (Xor das representações)

  Multiplicação - multiplicação de polinómios módulo um polinómio primitivo de grau n (pode ser realizado por via de Xor e deslocamentos das representações...)

Obs.: Um polinómio primitivo é um polinómio que não pode ser expresso como o produto de outros dois polinómios (o equivalente aos números primos...)

Outras técnicas...

- Partilha de segredos

  Dispor de esquemas que permitam a partilha de um segredo por uma comunidade de N agentes onde sejam necessários (pelo menos) p agentes para o recuperar.

- Provas de conhecimento zero

  Exibir evidencia sobre o "conhecimento" de um dado objecto sem revelar qualquer informação sobre ele.

- Dinheiro electrónico; votação electrónica; ...

  Construir uma abstracção electrónica sobre "o dinheiro" ou "votação electrónica": Deve resolver questões como o *anonimato*; a *não duplicação*; etc.

- ...