Universidade do Minho

Departamento de Matemática e Aplicações

Analise Matemática B

Ficha 5b — MIECOM

1. Estude a continuidade das seguintes funções:

$$\textbf{a)}\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{7x^2y}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\textbf{b)} f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2 & se \quad x^2+y^2\leq 1\\ 0 & se \quad x^2+y^2>1\end{cases}$$

$$\textbf{c)}\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{sen(7x^2+7y^2)}{x^2+y^2} & se \quad x^2+y^2\neq 0\\ 7 & se \quad x^2+y^2=0\end{cases}$$

2. Utilize a definição de derivada parcial para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$, para

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ se } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

3. Determine as derivadas parciais de primeira e segunda ordem das seguintes funções:

a) $f(x,y)=\frac{3x^4+5xy^3}{3x-y}$ b) $g(x,y)=e^x f(x+y)+e^{-x}g(x-y)$, f,g deriváveis

c) $h(x,y)=e^x\ln\left(y^2+3x\right)$ d) $f(x,y,z)=\ln(1+x+y^2+z^3)$

e) $n(x,y)=arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ f) $p(x,y,z)=\int_0^{y\sin z}x.4^{2t}dt$

4. A equação diferencial $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, onde $z=f(x,y)$, denomina-se por equação de Laplace. Uma função definida em $\mathbf{R}^2$ que possua derivadas parciais de segunda ordem contínuas numa região do plano e que aí satisfaça a equação de Laplace, diz-se uma **função harmónica**. Mostre que as seguintes funções são harmónicas:
a) $z=e^{kx}\cos(ky)$ b) $z=3x^2y-y^3$

5. Determine para que valores da constante real λ a função $f(x,y)=x^2+\lambda y^2$ é harmónica em $\mathbf{R}^2$.

6. Mostre que a função $u(x,t)=t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ satisfaz a equação diferencial $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. A equação denomina-se por equação do calor e traduz o comportamento da difusão do calor numa barra isolada (onde $u(x,t)$ representa a temperatura na posição x no instante t) e outros fenómenos semelhantes.