1. Considere um sinal discreto aleatório x[n] e a estimativa da sequência de autocorrelação dada por:

$$C_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n).x^*(n+m)$$

   a) Sabendo que quando N>>|m| a variância deste estimador é dada por

   $$\mathrm{var}[C_{xx}(m)] \approx \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left[\phi_{xx}^2(r) + \phi_{xx}(r-m) + \phi_{xx}(r+m)\right]$$

   como o classifica relativamente à consistência? Justifique.

   b) Mostre que o valor médio do periodograma é dado por:

   $$E[I_N(\Omega)] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}(m) e^{-j\Omega m}$$

   c) Mostre que o valor médio do periodograma está relacionado com a densidade espectral de potência por

   $$E[I_N(\Omega)] = P_{xx}(\Omega) * \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(\Omega \frac{N}{2}\right)}{\sin \frac{\Omega}{2}} \right)^2$$

   d) Enuncie e justifique o método de Bartlett para a estimação da densidade espectral de potência. Mostre que este método diminui a resolução espectral. Proponha uma alteração ao método que não apresente esta desvantagem. Em sua opinião este aumento de resolução espectral é efetivo? Justifique.

2. Considere um sistema discreto LTI caracterizado pela função de transferência

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

e ao qual é aplicado um sinal ruído branco de média nula.

   a) Explique o que entende por um sinal ruído branco. Caracterize-o em termos de densidade espectral de potência e sequência de autocorrelação. Justifique.
   b) Dos métodos de estimação espectral que conhece qual o mais indicado para estimar a densidade espetral de potência do processo de saída? Justifique.
   c) Mostre que a autocorrelação do sinal de saída é dada por

   $$\varphi_{xx}(m) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_{xx}(|m-k|)$$

   d) Considere que dispõe de uma amostra do sinal de saída de 5 pontos {1, -1, 1, 0, -1}. Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $-4 \leq m \leq 4$.
   e) Determine o erro do preditor.
   f) Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para m>4 e m<9.
   g) Determine o espectro de máxima entropia do sinal de saída do sistema.

$$\gamma_{xy}(m) = E\{(x[n]-m_x)(y[n+m]-m_y)^*\}$$

$$= E\{x[n]\,y^*[n+m] - x[n]\,m_y - m_x\,y^*[n+m] + m_y m_x\}$$

$$= \phi_{xy}[m] - m_x m_y$$

Teste 3-11-12

1. (a) Um estimador é consistente quando

$$\left.\begin{matrix} B \to 0 \\ Var \to 0 \end{matrix}\right\} N \to +\infty \qquad B = E\{c_{xx}(m)\} - \overbrace{\phi_{xx}[m]}^{\text{seq. autocorrelação}}$$

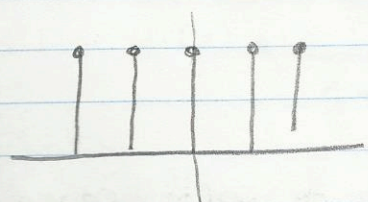
$$E\{c_{xx}(m)\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\,x[n+m]\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} \underbrace{E\{x[n]\,x[n+m]\}}_{\phi_{xx}(m)} = \frac{1}{N}(N-|m|)\,\phi_{xx}(m)$$

$$= \frac{N-|m|}{N}\,\phi_{xx}(m)$$

$$\lim_{N\to+\infty} c_{xx}(m) = \phi_{xx}(m)$$

Logo, consideramos consistente



$$c_{xx}(3) = \frac{1}{5}\,(x[-2]\,x[1] + x[-1]\,x[1]$$

$$c_{xx}(4) = \frac{1}{5}\,(x[-2]\,x[2])$$

periodograma

(b) $I_N(\Omega) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} c_{xx}(m)\, e^{-j\Omega m}$

Esperança matemática do I_N

$$E\{I_N(\Omega)\} = \sum_{-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N}\, \phi_{xx}(m)\, e^{-j\Omega m}$$

(c)

$$E\{I_N(\Omega)\} = \sum_{-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N}\, \phi_{xx}(m)\, e^{-j\Omega m}$$

↳ Transformada de fourier

$$\Rightarrow P_{xx}(\Omega) * \underbrace{T.F\left\{\frac{N-|m|}{N}\right\}}_{\frac{1}{N}\left(\frac{\sin\left(\Omega\frac{N}{2}\right)}{\sin\frac{\Omega}{2}}\right)^2} \rightarrow \text{triangular}$$

(d) → Devido ao facto da variância do periodograma não tender para zero com o aumento do tamanho da amostra, tentou-se arranjar métodos q diminuissem a variância de um periodograma. O sr Bartlett usou ~~socorreu-se~~ do conhecimento da estatística de que a soma de k variáveis aleatórias tds com a mesma variância, geram uma variável aleatória, cuja variância é $\frac{1}{k}$ x a variância de cada uma das outras.
A forma d conseguir isto é dividir os dados em k seg., calcular o periodograma de cada seg., estimar o espetro do sinal pela média dos periodogramas de cada seg.

→ Nº de pontos da sequencia é igual ao nº de pontos do tempo por isso o método Bartlett diminui a resolução espectral.

→ Diminui a Resolução porque um sinal com 1000 pontos na fft vai ter 1000 pontos na frequência. Se se dividir em 10 segmentos, cada um fica com 100 pontos ou seja 100 pontos na freq. Perde 10 vezes a resolução.

<u>Solução</u> → somam-se $\emptyset$'s no tempo para obter os mesmos 1000 pontos. Neste caso, no tempo acrescenta-se 900 $\emptyset$s, no tempo vai ficar com 1000 pontos na freq.

2. $\xrightarrow{\omega[n]} \boxed{H(z)} \xrightarrow{x[n]}$

(a) sinal de ruído branco é um sinal aleatório cujo as amostras são não correlados.

$$\phi_{ww} = \sigma_w^2 \,\delta(m) + m_w^2 = \sigma_w^2\,\delta(m)$$

$$P_{ww}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{ww}(m)\, e^{-j\Omega m} = \sigma_w^2$$

(b) métodos estimação $\begin{cases} \text{classico} \\ \text{Moderno} \end{cases}$

O método mais indicado é da entropia máxima porque este processo tem seq. auto-correlação infinita e os métodos clássicos truncam a seq. auto-correlação.

(c) $$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{y(z)}{X(z)}$$

$$X(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k X(z)\, z^{-k} = w(z)$$

TZI

$x[n] = \hat{x}[n] + e[n]$

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k\, x[n-k] + w[n]$$

$$\boxed{\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k \, x[n-k]}$$

se esta expressão é válida posso escrever,

$$x[n]\,x[n+m] = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot x[n-k]\,x[n+m]$$

Ao fazer a esperança,

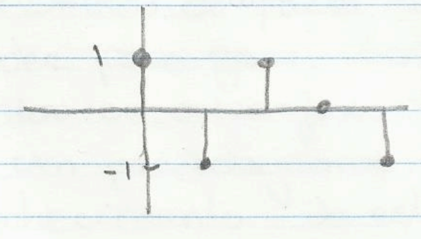
$$E\{x[n]x[n+m]\} = \{\sum_{k=1}^{N} a_k \, x[n-k] \cdot x[n+m]\}$$

$$\phi_{xx}(m) = \sum_{k=1}^{N} a_k \underbrace{E\{x[n-k]\,x[n+m]\}}_{\phi_{xx}}$$

N resolve $\begin{cases} n+m-(n-k) = (m+k) \\ n-k-(n+m) = -k-m \end{cases}$

Resolve $\begin{cases} n-m-(n-k) = k-m \\ n-k-(n-m) = (m-k) \end{cases}$

(d)



$$c_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\,x[n+m]$$

$$c_{xx}(0) = \frac{1}{5}(4) = 4/5$$

$$c_{xx}(1) = c_{xx}(-1) = \frac{1}{5}(-1-1) = -\frac{2}{5}$$

$$c_{xx}(2) = c_{xx}(-2) = \frac{1}{5}(1-2) = 0$$

$$c_{xx}(3) = c_{xx}(-3) = \frac{1}{5}(1) = \frac{1}{5}$$

$$c_{xx}(4) = c_{xx}(-4) = \frac{1}{5}(-1) = -1/5$$

(e) $MRSE = \phi_{xx}(0) - \sum_{k=1}^{N} a_k \, \phi_{xx}(k)$

$$\begin{bmatrix} \phi xx(0) & \phi xx(1) & \phi xx(2) & \phi xx(3) \\ \phi xx(1) & \phi xx(0) & \phi xx(1) & \phi xx(2) \\ \phi xx(2) & \phi xx(1) & \phi xx(0) & \phi xx(1) \\ \phi xx(3) & \phi xx(2) & \phi xx(1) & \phi xx(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi xx(1) \\ \phi xx(2) \\ \phi xx(3) \\ \phi xx(4) \end{bmatrix}$$

multiplicar linha pela coluna

$$\begin{cases} 4a_1 - 2a_2 + a_4 = -2 \\ -2a_1 + 4a_2 - 2a_3 = 0 \\ -2a_2 + 4a_3 - 2a_4 = 1 \\ a_1 - 2a_3 + 4a_4 = -1 \end{cases}$$

$\cdot\, 6a_2 - 4a_3 + a_4 = -2$

$\cdot\, 4a_2 - a_4 = -1$

... saber a's

$$\text{MMSE} = \frac{4}{5} - \left(a_1\left(-\tfrac{2}{5}\right) + a_3\left(\tfrac{1}{5}\right) + a_4\left(-\tfrac{1}{5}\right)\right)$$

$$= \dots$$

(f) $\phi xx(5) = a_1\left(\frac{1}{5}\right) + a_2\left(\frac{1}{5}\right) + a_4\left(-\frac{2}{3}\right) = \dots$

$\phi xx(6) = a_1\, \phi xx(5) + a_2\left(-1/5\right) + a_3\left(\frac{1}{5}\right) = \dots$

$\vdots$

$\phi xx(8)$

(g) $$P_{xx}(\Omega) = \frac{\text{MMSE}}{1 - \sum_{k=1}^{4} a_k e^{-j\Omega k}}$$

OUTRA ALÍNEA

$x[n] = s[n] \cdot e[n]$

$\phi xx(m) = E\{s[n]\,e[n]\,s[n+m]\,e[n+m]\}$

$= E\{s[n]\,s[n+m]\,e[n]\,e[n+m]\}$

$= \phi ss \cdot \phi ee$