

a) $g(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$

Vector gradiente de f :

$$\nabla g = \left[\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right] = [2y - 6x, 2x - 4y]$$

• Pontos estacionários de f : $\nabla g(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 6x = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2y = 6x \\ - \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 2x - 4(3x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} - \\ 2x - 12x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Pontos estacionários: $(0,0)$

• Condico^{es} de 2^a ordem

- Matriz Hessiana de f :

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det[-6] = -6 < 0$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = 24 - 4 = 20 > 0$$

Logo $H(0,0)$ é uma matriz definida negativa,
então o ponto $(0,0)$ é um maximizante f .

$$\text{máximo} = f(0,0) = 10.$$

$$b) f(x,y) = \frac{9}{4}y^2 - 3x^2y + x^4 - x^5$$

• Criticos de 1ª ordem:

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6xy + 4x^3 - 5x^4 = 0 \\ \frac{9}{2}y - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ y = 3x^2 \times \frac{2}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} -6x \cdot (\frac{2}{3}x^2) + 4x^3 - 5x^4 = 0 \\ y = \frac{2}{3}x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x^3 + 4x^3 - 5x^4 = 0 \\ \text{---} \end{cases} \quad \begin{cases} -5x^4 = 0 \\ \text{---} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ponto crítico: (0,0)

• Criticos de 2ª ordem:

- Matriz Hessiana de f:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6y + 12x^2 - 20x & -6x \\ -6x & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

- Calcular a matriz no pto estacionário (0,0):

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz}$$

$$\Delta_1 = \det([0]) = 0$$

$$\Delta = \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \right) = 0$$

Não se pode concluir sobre o pto (0,0).

$$(c) \quad h(x,y) = x^2 y^2 - 2xy$$

Ordens de 1ª ordem:

$$\nabla h(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y), \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 - 2y = 0 \\ 2x^2y - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y(xy - 1) = 0 \\ 2x(xy - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 0 \vee xy = 1 \\ \vdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee (xy = 1)$$

Pontos críticos: $(0,0)$ e ff pontos de linha $xy - 1 = 0$
(ou seja $(x_1, \frac{1}{x_1})$, $x_1 \neq 0$)

Ordens de 2ª ordem:

— Matriz hessiana de h :

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy - 2 \\ 4xy - 2 & 2x^2 \end{bmatrix}$$

• Hessiana de h no pto $(0,0)$:

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det([0]) = 0$$

$$\Delta_2 = \det \left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0 - (+4) = -4 < 0$$

Logo $(0,0)$ é um pto sela!

- Hessian de f no ponto $(x_1, \frac{1}{x_1})$ ($x_1 \neq 0$)

$$H(x_1, \frac{1}{x_1}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^2} & 4x_1 \cdot \frac{1}{x_1^2} - 2 \\ 4x_1 \cdot \frac{1}{x_1^2} - 2 & 2x_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^2} & 2 \\ 2 & 2x_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^2} \\ 2 \end{bmatrix} \right) > 0, \quad \forall x_1 \neq 0$$

$$\Delta = \det \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^2} & 2 \\ 2 & 2x_1^2 \end{bmatrix} \right) = \frac{4x_1^2}{x_1^2} - 4 = 0$$

Logo, $H(x_1, \frac{1}{x_1})$ é semi-definida no ponto

$(x_1, \frac{1}{x_1})$. Como $H(x_1, \frac{1}{x_1})$ é semi-definida

positiva $\forall x \in \mathcal{D}_{f'}(0,0)$ então f'' é uma função

convexa. Se f'' é convexa então o mínimo

local é mínimo global. Portanto, f tem

uma linha de mínimos globais no pto: $(x_1, \frac{1}{x_1})$

outro processo:

Analisar o sinal de f'' nas partes vizinhas dos pnts:

antes $P(x_1, y_1)$: $x_1 \cdot y_1 = 1$, ou seja, as partes $Q(x_0, y_0)$; $x_0 y_0 = 1 + \epsilon$

$$\bullet h(x_1, y_1) = x_1^2 y_1^2 - 2x_1 y_1 = (x_1 y_1)^2 - 2(x_1 y_1) = 1 - 2 = -1$$

$$\bullet h(x_0, y_0) = x_0^2 y_0^2 - 2x_0 y_0 = (x_0 y_0)^2 - 2(x_0 y_0) = (1+\epsilon)^2 - 2(1+\epsilon)$$

$$= (1 \pm \epsilon) [(1 \pm \epsilon) - 2] = (1 \pm \epsilon) (-1 \pm \epsilon) = \epsilon^2 - 1 > -1$$

Logo $h(x_0, y_0) > h(x_1, y_1)$

então (x_1, y_1) são pontos minimiz-tes de f'' .

$$d) f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x+y)^2$$

• Índices de 1ª ordem

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4(x+y) = 0 \\ 4y^3 - 4(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - (x+y) = 0 \\ y^3 - (x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 0 \\ x+y = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{y^3} \\ 2y = y^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^3 - 2y = 0 \\ y(y^2 - 2) = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Pontos críticos: $(0,0)$; $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

• Índices de 2ª ordem:

- Matriz e Hessiana de f

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & -4 \\ -4 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix}$$

• Hessiana H no ponto $(0,0)$:

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det([-4]) = -4 < 0$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = 16 - 16 = 0$$

$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{array} \right\} \leftarrow \text{semi-definida negativa.}$

$\rightarrow (*)$

• Hessiana H no ponto $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$$H(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det[20] = 20 > 0$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 20 \end{bmatrix} = 400 - 16 = 384 > 0$$

$\therefore H(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ definida positiva

• Logo $(-r_1, -r_2)$ e' un punto minimiz-ta de f .
minim = $f(-r_1, -r_2)$

• Verificamos no punto (r_1, r_2) :

$$H(r_1, r_2) = \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 20 \end{bmatrix} >$$

$$\Delta_1 = \det([20]) = 20 > 0$$

$$\Delta = \det\left(\begin{bmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 20 \end{bmatrix}\right) = 416 > 0$$

} Logo $H(r_1, r_2)$ e' definida
positiva, Logo (r_1, r_2)
e' un minimiz-ta
de f .

$$\text{minimo} = f(r_1, r_2) = \dots$$

2. a) Extrair a função $f(x,y) = \log xy$
 sujeito à restrição $g(x,y) = 0$, ou seja,
 $2x + 3y - 5 = 0$.

Função Lagrangeana:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) \\ = \log xy + \lambda (2x + 3y - 5)$$

• Pontos estacionários da função Lagrangeana:

$$\nabla L = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ \frac{y}{x} + 2\lambda = 0 \\ \frac{x}{y} + 3\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ \lambda = -\frac{1}{2x} \\ \lambda = -\frac{1}{3y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3y} = -\frac{1}{2x} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 2x \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \begin{cases} 2x + 2x - 5 = 0 \\ y = \frac{2}{3}x \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \\ \lambda = -\frac{1}{2 \times \frac{5}{4}} = -\frac{2}{5} // \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{5}{6} \\ \lambda = -\frac{1}{2 \times \frac{5}{4}} = -\frac{2}{5} // \end{cases}$$

Ponto estacionário de L : $(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{2}{5})$

Hessiane da Lagrange:

$$H(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & x & y \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Calcular $H(x, y, \lambda)$ no pto $(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{2}{5})$:

$$H(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{2}{5}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -\frac{16}{25} & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{36}{25} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -\frac{16}{25} & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{36}{25} \end{bmatrix} \right) = 0 - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -\frac{36}{25} \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & -\frac{16}{25} \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + \frac{144}{25} + \frac{144}{25} = \frac{288}{25} > 0$$

Como $\Delta > 0$ então $(\frac{5}{4}, \frac{5}{6})$ é um máximo de f .

b) Extrema a função $f(x, y) = xy$ sujeito
à restrição $g(x, y) = 0$, ou seja,
 $x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$

Função Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

$$\hookrightarrow L(x, y, \lambda) = xy + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 2a^2)$$

Puntos estacionarios de función Lagrange:

8.5

$$\nabla L = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2a^2 = 0 \\ y + 2x\lambda = 0 \\ x + 2y\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x\lambda \\ x + 2(-2x\lambda)\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4x\lambda^2 = 0 \\ x(1 - 4\lambda^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \vee 1 - 4\lambda^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee \lambda^2 = \frac{1}{4} \\ \lambda = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee \lambda = \frac{1}{2} \vee \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{2}}: \Rightarrow y = -x \Rightarrow \begin{aligned} x^2 + x^2 - 2a^2 &= 0 \\ 2x^2 &= 2a^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{a^2} = \pm a \end{aligned}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}: \Rightarrow y = +x \Rightarrow x = \pm a$$

Puntos estacionarios:

$$(a, -a, \frac{1}{2})$$

$$(-a, a, \frac{1}{2})$$

$$(a, a, -\frac{1}{2})$$

$$(-a, -a, -\frac{1}{2})$$

Hessiana de Lagrange:

$$H(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

* Calcular H no ponto $(a, -a, \frac{1}{2})$:

$$H(a, -a, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & 2a & -2a \\ 2a & 1 & 1 \\ -2a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 0 - 2a \times \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ -2a & 1 \end{vmatrix} + (-2a) \times \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ -2a & 1 \end{vmatrix} = -2a \times (2a + 2a) - 2a \times (2a + 2a) \\ = -8a^2 - 8a^2 = -16a^2 < 0$$

Como $\Delta < 0$ existe um minimizante no ponto $(a, -a)$.
minim = $f(a, -a) = -a^2$

* Calcular H no ponto $(-a, a, \frac{1}{2})$:

$$H(-a, a, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & -2a & 2a \\ -2a & 1 & 1 \\ 2a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 0 - (-2a) \times \begin{vmatrix} -2a & 1 \\ 2a & 1 \end{vmatrix} + 2a \times \begin{vmatrix} -2a & 1 \\ 2a & 1 \end{vmatrix} = 2a \times (-2a - 2a) + 2a \times (2a - 2a) \\ = -8a^2 - 8a^2 = -16a^2 < 0$$

Como $\Delta < 0$ a func. f , tem um minimizante no ponto $(-a, a)$.

* Calcular H no ponto $(a, a, -\frac{1}{2})$:

$$H(a, a, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & 2a & 2a \\ 2a & -1 & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 0 - 2a \times \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 2a & -1 \end{vmatrix} + 2a \times \begin{vmatrix} 2a & -1 \\ 2a & 1 \end{vmatrix} = -2a \times (-2a - 2a) + 2a \times (2a + 2a) \\ = +8a^2 + 8a^2 = 16a^2 > 0$$

Como $\Delta > 0$ a func. f tem um maximizante no ponto (a, a) .

* Calcular H no ponto $(-a, -a, -\frac{1}{2})$:

8.6

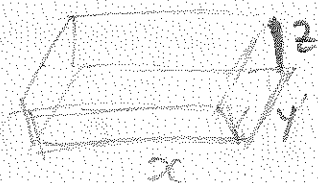
$$H(-a, -a, -\frac{1}{2}) = \begin{vmatrix} 0 & -2a & -2a \\ -2a & -1 & 1 \\ -2a & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 0 - (-2a) \times \begin{vmatrix} -2a & 1 \\ -2a & -1 \end{vmatrix} + (-2a) \times \begin{vmatrix} -2a & -1 \\ -2a & 1 \end{vmatrix} = 2a \times (2a + 2a) - 2a(-2a - 2a) = 8a^2 + 8a^2 = 16a^2 > 0$$

Como $\Delta > 0$, a função f , tem um máximo no pto $(-a, -a)$. $\text{máximo} = f(-a, -a) = a^2$

3-

Função a otimizar: $f(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz$
Sujeito à restrição: $g(x, y, z) = 0$, ou $xyz = 0$



$$xyz - V = 0$$

$$V = x \cdot y \cdot z$$

$$A = xy + 2yz + 2xz$$

Função Lagrange:

$$L(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + 2xz + \lambda (xyz - V)$$

Problema de otimização de L :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz - V = 0 \\ y + 2z - \lambda yz = 0 \\ x + 2z + \lambda xz = 0 \\ 2y + 2x + \lambda xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{V}{xy} \\ y + \frac{2V}{xy} + \lambda \cdot \frac{y \cdot V}{xy} = 0 \\ x + \frac{2V}{xy} + \lambda \cdot \frac{x \cdot V}{xy} = 0 \\ \lambda = -\frac{2y + 2x}{xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + \frac{2V}{xy} + \frac{(-2y-2x)}{xy} \cdot \frac{V}{x} = 0 \\ x + \frac{2V}{xy} + \frac{(-2y-2x)}{xy} \cdot \frac{V}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \frac{2V}{xy} - \frac{2V}{x^2} - \frac{2V}{xy} = 0 \\ x + \frac{2V}{xy} - \frac{2V}{y^2} - \frac{2V}{xy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} = \\ x(1 - \frac{1}{2v} \cdot x^3) = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{x=0} \vee 1 - \frac{x^3}{2v} = 0 \\ \frac{x^3}{2v} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} = \\ x^3 = 2v \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2v}{((2v)^{1/3})^2} \Leftrightarrow y = \frac{2v}{(2v)^{2/3}} = (2v)^{1/3} \\ x = (2v)^{1/3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{v}{(2v)^{1/3} \cdot (2v)^{1/3}} = \frac{v}{(2v)^{2/3}} = \frac{v}{(2)^{2/3} \cdot v^{2/3}} = \frac{v^{1/3}}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{-2(2v)^{1/3} - 2(2v)^{1/3}}{(2v)^{1/3} \cdot (2v)^{1/3}} = \frac{-4(2v)^{1/3}}{(2v)^{2/3}} = \frac{-4}{(2v)^{1/3}}$$

• Hessian de Lagrangeana de L :

$$H(x, y, z, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & yz & xz & xy \\ yz & 0 & 1+\lambda z & 2+\lambda y \\ xz & 1+\lambda z & 0 & 2+\lambda x \\ xy & 2+\lambda y & 2+\lambda x & 0 \end{bmatrix}$$

• Calcular H no ponto $((2v)^{1/3}, (2v)^{1/3}, \frac{v^{1/3}}{\sqrt[3]{4}}, \frac{-4}{(2v)^{1/3}})$

4- $f = \underbrace{xy + 2yz + 2xz}_{A} = 12$



• $V = xyz$

Função a otimizar: $f(x, y, z) = xyz$

Sujeito à restrição: $xy + 2yz + 2xz = 12$