CAPÍTULO 6

INTEGRAL DE RIEMANN

6.1 Introdução

Nesta secção apresentamos uma noção intuitiva do integral de uma função. Seja f uma função não negativa no intervalo $[a, b]$. Definimos o integral de f no intervalo $[a, b]$ como a área A compreendida entre os eixos verticais $x = a$ pela esquerda, $x = b$ pela direita, e a curva $y = f(x)$ por cima, $y = 0$ por baixo.
Notamos então

$$\int_a^b f(x)dx = A.$$

Do mesmo modo, seja f uma função não positiva no intervalo $[a, b]$. Definimos o integral de f no intervalo $[a, b]$ como a área A compreendida entre os eixos verticais $x = a$ pela esquerda, $x = b$ pela direita, e a curva $y = f(x)$ por cima, $y = 0$ por baixo, mas desta vez com o sinal negativo
Notamos então

$$\int_a^b f(x)dx = -A$$

Afinal para qualquer função f podemos definir a parte positiva $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ e a parte negativa $f^-(x) = \min(f(x), 0)$ e definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx.$$

Exemplo 6.1.1 Podemos observar que se f é a função constante $f(x) = \ell$, temos $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = (b-a)\ell$.

A dificuldade é de dar uma definição clara (então matemática) da noção de área limitada pela função f.

6.2 Integração de Riemann

Nesta secção, $I = [a, b]$ representa um intervalo fechado onde $a < b$ e $f, g, h...$ são funções de valores reais **limitadas** definidas no intervalo.

Definição 6.2.1

Uma subdivisão (ou partição) de I é uma sucessão finita $\sigma = (x_n)_{n=0,...N}$ de pontos tal que $x_0 = a \leq x_1 \leq ... \leq x_{N-1} \leq x_N = b$.
Notamos por $|\sigma| = \max_{i=n,...,N} x_n - x_{n-1}$ o comprimento (ou a amplitude) da subdivisão.

EXEMPLO 6.2.1 Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $h = \frac{1}{N}$. A sucessão $x_n = nh$, $n = 0, ..., N$ é uma subdivisão de amplitude h.

Definição 6.2.2

Seja $\sigma = (x_n)_{n=0,...N}$ uma subdivisão de I, um representante $\rho = (y_n)_{n=1,...,N}$ da subdivisão é uma sucessão de N pontos tal que $y_n \in [x_{n-1}, x_n]$.

EXEMPLO 6.2.2 Seja σ a subdivisão do exemplo anterior, a sucessão $y_n = (n - 1/2)h$, $n = 1, ..., N$ é um representante desta sucessão.

Definição 6.2.3 (Soma de Riemann)

Seja $\sigma = (x_n)_{n=0,...,N}$ uma subdivisão e $\rho = (y_n)_{n=1,...,N}$ um representante desta subdivisão. Notamos por

$$\Sigma(f, \sigma, \rho) = \sum_{i=1}^{n} (x_n - x_{n-1}) f(y_n)$$

a soma de Riemann.

NOTA 6.2.1 É importante de notar que a definição da soma de Riemann depende da escolha da partição σ e da sua representação ρ.

Definição 6.2.4

Sejam $c \in [a, b]$, $\sigma' = (x'_n)_{i=0,...,N'}$ subdivisão de $[a, c]$ com representante $\rho' = (y'_n)_{i=1,...,N'}$, $\sigma'' = (x''_n)_{i=0,...,N''}$ subdivisão de $[a, c]$ com representante $\rho'' = (y''_n)_{i=1,...,N''}$.
Notamos por $\sigma = \sigma' \cup \sigma''$ é a subdivisão de $[a, b]$ e $\rho = \rho' \cup \rho''$ o representente definidos

$$x_n = x'_n \text{ se } n = 0, ..., N', x_n = x''_{n-N'} \text{ se } n = N' + 1, ..., N' + N''.$$

Do mesmo modo temos

$$y_n = y'_n \text{ se } n = 1, ..., N', y_n = y''_{n-N'} \text{ se } n = N' + 1, ..., N' + N''.$$

Obtemos assim uma subdivisão $\sigma = (x_n)_{n=0,...,N}$ com representante $\rho = (y_n)_{n=1,...,N}$ onde $N = N' + N''$.

A partir desta definição podemos provar os resultados seguintes

Proposição 6.2.1

Temos as propriedades seguintes

- Se $f = \alpha$ é uma função constante então

$$\Sigma(f, \sigma, \rho) = (b - a)\alpha.$$

- Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entao

$$\Sigma(\lambda f + \mu g, \sigma, \rho) = \lambda\Sigma(f, \sigma, \rho) + \mu\Sigma(g, \sigma, \rho).$$

- Se $f \leq g$ então

$$\Sigma(f, \sigma, \rho) \leq \Sigma(g, \sigma, \rho).$$

- para qualquer função f definida em $[a, b]$

$$|\Sigma(f, \sigma, \rho)| \leq \Sigma(|f|, \sigma, \rho).$$

- Seja $c \in [a, b]$ com (σ', ρ') partição e representação do intervalo $[a, c]$, (σ'', ρ'') partição e representação do intervalo $[c, b]$. Temos

$$\Sigma(f, \sigma' \cup \sigma'', \rho' \cup \rho'') = \Sigma(f, \sigma', \rho') + \Sigma(f, \sigma'', \rho'')$$

Definição 6.2.5

Uma função f limitada, definida no intervalo $[a, b]$ é integrável ou admite o integral $I(f, [a, b]) \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon >$, existe $h > 0$ tal que para qualquer subdivisão σ com $|\sigma| \leq h$ e qualquer representante ρ de σ temos

$$|\Sigma(f, \sigma, \rho) - I(f, [a, b])| \leq \varepsilon.$$

Neste caso notamos por $I(f, [a, b]) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx.$

Além de mais, esta integral é única.

NOTA 6.2.2 Quando existe, o integral corresponde à área (algébrica) definida entre o gráfico da função e o eixo $y = 0$ no intervalo $[a, b]$.

NOTA 6.2.3 Quando escrevemos o integral $\int_a^b f(x)dx$, a variável x chama-se variável muda. Em consequência, as expressões seguintes

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(\theta)d\theta = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(r)dr$$

representam o mesmo integral.

Damos agora alguns exemplos de função integraveis. As provas dos resultados de convergência para o integral são omitidas porque se encontram fora do assunto deste curso.

Proposição 6.2.2
As funções contínuas em $[a, b]$ admitem sempre um integral.

EXEMPLO 6.2.3 A função $f(x) = \sin(2\pi x)$ é contínua em $[0, 1]$, então ela admite um integral.

Proposição 6.2.3
As funções limitadas é monótonas em $[a, b]$ admitem sempre um integral.

EXEMPLO 6.2.4 Por exemplo a função $E(x)$ (parte inteira) é limitada, monótona no intervalo $[0, 10]$ então admite um integral.

Proposição 6.2.4
Seja $\sigma = (x_n)_{n=0,\ldots,N}$. As funções contínuas nos intervalos $]x_{n-1}, x_n[$, discontinuas em x_n admitem sempre um integral.

EXEMPLO 6.2.5 A função $f(x) = x$ quando $x < 1$ e $f(1) = 0$ e $f(x) = 1 - x$ se $x < 1$ é limitada, contínua por ramos no intervalo $[-4, 17]$. Então a função é integravel no intervalo.

6.3 Propriedade do integral

Para simplificar os enunciados, vamos sempre supor que as funções consideradas são continuas no intervalo considerado. Portanto, os resultados podem ser estendidos para qualquer função que seja integrável.
As propriedades que obtemos no contexto da soma de Riemann passam ao limite.

Proposição 6.3.1
Temos as propriedades seguintes

- Se $f = \alpha$ é uma função constante então
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\alpha.$$
- (Linearidade) Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entao
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$
- (Monotonia)Se $f \leq g$ então
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$
- para qualquer função f definida em $[a, b]$
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$
- (aditividade) Seja $c \in [a, b]$, temos
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$
- Seja $c \in [a, b]$, temos
$$\int_c^c f(x)dx = 0.$$

Adoptamos também a convenção

Notação 6.3.1
Para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$ então

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Esta convenção é compatível com a aditividade no sentido que

$$0 = \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx.$$

NOTA 6.3.1 Cuidado! $\int_a^b (gf)(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$. Por exemplo, sejam $f(x) = g(x) = x$ podemos verificar que

$$\int_{-1} 1f(x)dx = \int_{-1}^1 g(x) = 0$$

visto que a área abaixo de $y = 0$ compensa a área acima. Por conseguinte como a função $f(x)g(x) = x^2$ temos

$$\int_{-1}^1 (fg)(x)dx > 0.$$

6.3.1 Integração e primitivação

Definição 6.3.1
Seja f um função contínua em $[a, b]$. para qualquer $x \in [a, b]$ definimos a função integral por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Teorema 6.3.1
Seja f uma função contínua em I então

- para qualquer $x \in]a, b[$, $F(x)$ é derivável en x com $F'(x) = f(x)$
- F é derivável pela direita em a e pela esquerda em b com $F'(a) = f(a)$ e $F'(b) = f(b)$.

Em particular, $F(x)$ é a primitiva da função f que se anula em a.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos considerar apenas a derivada pela direita, a derivada pela esquerda trata-se do mesmo modo. Seja $x \in [a, b[$ e $h > 0$ tal que $x+h < b$. Como a função é contínua no intervalo $[x, x+h]$, existe $x_m(h), x_M(h) \in [x, x+h]$ tal que

$$f(x_m(h)) \leq f(t) \leq f(x_M(h)), \quad \forall t \in [x, x+h].$$

Deduzimos então

$$hf(x_m(h)) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq hf(x_M(h))$$

e como $\int_x^{x+h} f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$ temos

$$hf(x_m(h)) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x_M(h)), \Longrightarrow f(x_m(h)) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x_M(h))$$

Da continuidade de f deduzimos que $f(x_m(h)) \to f(x)$ e $f(x_M(h)) \to f(x)$ quando $h \to 0$ e finalmente obtemos

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

O que significa que $F_d'(x) = f(x)$. □

NOTA 6.3.2 Como F é derivável no intervalo $[a, b]$, então é contínua em $[a, b]$.

Corolário 6.3.1 (Fórmula de Barlow)
Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e G uma primitiva de f então

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja G uma primitiva de f, então a função $G(x) - G(a)$ é a primitiva que se anula em a, seja ainda $G(x) - G(a) = F(x)$. Aplicando a formula no ponto $x = b$ dá o resultado. □

Proposição 6.3.2 (Fórmula da média)
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c).$$

DEMONSTRAÇÃO. O resultado vem diretamente da aplicação do teorema do Lagrange. A funcão F é contínua, derivável no intervalo $[a, b]$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $F(b) - F(a) = (b-a)F'(c)$ e obtemos a fórmula visto que $F'(c) = f(c)$. □

EXEMPLO 6.3.1 Calcular o integral seguinte $I = \int_1^{10} \frac{1}{1+x} dx$.
Seja $f(x) = \frac{1}{1+x}$, a função é contínua no intervalo $[1, 10]$ com primitiva $G(x) = \ln(1+x)$. Obtemos assim

$$\int_1^{10} \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_1^{10} = \ln(11) - \ln(2) = \ln(11/2).$$

Como as primitivas dependem apenas de uma constante, qualquer primitiva pode escrever se como $G(x) = \int_c^x f(t)dt$. Com consequência, o limite inferior do integral não tem importância quando queremos apenas determinar uma primitiva. Por isso, definimos o operador "primitivação "da maneira seguinte.

Notação 6.3.2
Para qualquer função contínua em $[a, x]$, definimos o operador "primitivação "para qualquer $x \in [a, b]$ como

$$Pf(x) = \int^x f(t)dt = -\int_x f(t)dt.$$

Em particular temos para qualquer $x, y \in [a, b]$

$$\int_x^y f(t)dt = \int^y f(t)dt + \int_x f(t)dt = \int^y f(t)dt - \int^x f(t)dt = P(y) - P(x).$$

NOTA 6.3.3 Uma consequência importante desta definição é que qualquer técnica de integração sera também uma técnica de primitivação.

6.4 Técnica de cálculo de integral

Vamos dar nesta secção as principais técnicas de resolução de integrais.

6.4.1 Mudança de variável e primitivação por substituição

Definição 6.4.1 (mudança de variável)
Seja $y = \phi(x)$ uma função e $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ dois intervalos. Dizemos que ϕ é uma mudança de variável de I sobre J se:

- ϕ é uma bijeção de I sobre J.
- ϕ é derivável sobre I tal que $f'(x) \neq 0$ para qualquer $x \in]a, b[$.

Proposição 6.4.1
Seja f uma função contínua em $[c,d]$ e $y=\phi(x)$ uma mudança de variavel de $[a,b]$ sobre $[c,d]$. Então temos:
$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx.$$

Para realizar uma mudança (ou substituição) de variável, procedemos em três etapas.

1. Mudar os limites: passar de c,d para a,b.
2. Mudar a função: passar de $f(y)$ para $f(\phi(y))$.
3. Mudar o diferencial: passar de dy para $\phi'(x)dx$.

Exemplo 6.4.1 (Mudança de variável) Usando a mudança de variável $y=\sin(t)$ calcular o intergral $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy$.
A função $\sin(t)$ é uma bijeção de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sobre $[-1,1]$ e verificamos que $\phi'(t)=\cos(t)>0$ para qualquer $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Além de mais temos $\phi(-\frac{\pi}{2})=-1$, $\phi(\frac{\pi}{2})=1$.
Na segunda etapa determinamos a nova função
$$f(\phi(t))=\sqrt{1-\sin^2(t)}=\sqrt{\cos^2(t)}=\cos(t).$$
Finalmente , em útima etapa sabemos que $\phi'(t)=\frac{dy}{dt}$ então $dy=\phi'(t)dt=\cos(t)dt$. Deduzimos finalmente
$$I(f)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)dt.$$
Usando a formula $\cos^2(t)=\frac{\cos(2t)+1}{2}$, obtemos
$$I(f)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2t)+1}{2}dt=\left[\frac{\sin(2t)}{4}+\frac{t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

6.4.2 Integração e primitivação por partes

Proposição 6.4.2
Sejam f e g duas funções contínuas, diferenciáveis em $[a,b]$ então
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[fg\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx,\ \text{onde}\ \Big[fg\Big]_a^b=(fg)(b)-(fg)(a).$$

DEMONSTRAÇÃO. Usamos a formula $(fg)' = f'g + fg'$ então

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Notando que $\displaystyle\int_a^b (fg)'(x)dx = (fg)(b) - (fg)(a)$ concluimos que

$$\Big[fg\Big]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Donde a fórmula. □

NOTA 6.4.1 Podemos aplicar a mesma fórmula quando consideramos a primitivação, sejam

$$\int^x f(t)g'(t)dt = (fg)(x) - \int^x f'(t)g(t)dx$$

ou escrito de um modo diferente $P(fg') = fg - P(f'g)$.

EXEMPLO 6.4.2 (INTEGRAÇÃO POR PARTES) Usanso uma integração por partes, calcular o integral seguinte $\displaystyle\int_0^{10} te^t dt$.
Consideramos $f(t) = t$ e $g'(t) = e^t$, então, $f'(t) = 1$ e $g(t) = e^t$.

$$\begin{aligned}\int_0^{10} te^t dt &= \Big[te^t\Big]_0^{10} - \int_0^{10} e^t dt \\ &= 10e^{10} - (e^{10} - e^0) \\ &= 9e^{10} + 1.\end{aligned}$$

EXEMPLO 6.4.3 (PRIMITIVAÇÃO POR PARTES) Usando uma primitivação por partes, determinar uma primitiva de $\ln(x)$.
Seja $f(t) = \ln(t)$, $g'(t) = 1$, então, $f'(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = t$.

$$\begin{aligned}\int^x \ln(t)dt &= x\ln(x) - \int^x \frac{t}{t}dt \\ &= x\ln(x) - x.\end{aligned}$$

6.4.3 Integração de função racionais

Definição 6.4.2
Sejam P e Q dois polinónios. A fração racional $\frac{P}{Q}$ é irredutível se

- $\deg(P) < \deg(Q)$.
- As raizes de P são diferentes dos raizes de Q, *i.e.* $Z_P \cap Z_Q = \emptyset$.

Proposição 6.4.3 (divisão Euclidiana em $\mathbb{R}(X)$)
Sejam N e D dois polinómios então existe sempre um polínomio E e um polinómio P com deg(P) <deg(D) tal que

$$\frac{N}{D} = E + \frac{N}{Q}.$$

A escritura chama-se "redução de fração "onde $\frac{P}{Q}$ é uma fração irredutível.

A técnica é baseada na divisão euclidiana de um polínomio. Damos aqui um exemplo simples.

EXEMPLO 6.4.4 Seja a fração racional $\frac{N}{D}$ com $N = x^3 + 4x^2 + x - 1$, $D = x^2 - 3$, podemos escrever

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x - 1}{x^2 - 3} = x + 4 + \frac{4x + 11}{x^2 - 3},$$

onde a fração é irreductível.

Definição 6.4.3
Os elementos (frações) simples são da forma

- Elemento simples de tipo I (raiz simples):

$$\frac{A}{(ax+b)^n}, \quad a \neq 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

- Elemento simples de tipo II:

$$\frac{AX+B}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad b^2 - 4ac < 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

Decomposição em elementos simples

NOTA 6.4.2 Cuidado no segundo caso. Quando $4b^2 - 4ac \geq 0$, não é um elemento simples de tipo II (nem tipo I).

Proposição 6.4.4 (Decomposição em elementos simples)
Sejam P e Q dois polinómios tal a fração racional $\frac{P}{Q}$ seja irreductível. Então podemos sempre decompor a fração racional numa soma de elementos simples.

Apresentamos vários cenários onde propomos algumas técnicas de decomposições.

Exemplo 6.4.5 (Por identificações) Decompor em elementos simples a fração $F(x) = \dfrac{x+4}{(x-1)(x+2)}$.
Escrevemos a decomposição com elementos simples da forma

$$F(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

onde devemos determinar A_1, A_2 usando a identificação

$$\frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

Em primeiro lugar multiplicamos a expressão por $x-1$

$$F(x)(x-1) = \frac{x+4}{x+2} = A_1 + \frac{A_2(x-1)}{x+2}.$$

Depois avaliamos a expressão em $x = 1$ o que dá o coeficiente A_1

$$\frac{1+4}{1+2} = A_1 + \frac{A_2(1-1)}{1+2} = A_1 = \frac{5}{3}.$$

Do mesmo modo, multiplicamos a expressão por $x+2$ que avaliamos no ponto $x = -2$.

$$F(x)(x+2) = \frac{x+4}{x-1} = A_2 + \frac{A_1(x+2)}{x-1}.$$

Obtemos assim o segundo coeficiente $A_2 = -\frac{2}{3}$.
Deduzimos finalmente a decomposição em elementos simples

$$F(x) = \frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = \frac{5/3}{x-1} - \frac{3/2}{x+2}.$$

Exemplo 6.4.6 (usando os limites) Decompor em elementos simples a fração $F(x) = \dfrac{x+4}{(x+2)(x-1)^2}$.
Escrevemos a decomposição com elementos simples da forma

$$F(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2}$$

onde devemos determinar A_1, A_2, A_3 usando a identificação

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2}$$

Em primeiro lugar multiplicamos a expressão por $x+2$

$$F(x)(x+2) = \frac{x+4}{(x-1)^2} = \frac{A_1(x+2)}{x-1} + \frac{A_2(x+2)}{(x-1)^2} + A_3.$$

Depois avaliamos a expressão em $x = -2$ o que dá o coeficiente $A_3 = \frac{2}{9}$.
Agora multiplicamos F por $x-1$ e obtemos

$$F(x)(x-1) = \frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = A_1 + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{2}{9}\frac{(x-1)}{x+2}.$$

Tomando o limite em $+\infty$ deduzimos que

$$\lim_{+\infty} \frac{x+4}{(x-1)(x+2)} = A_1 + \lim_{+\infty} \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{2}{9} \lim_{+\infty} \frac{(x-1)}{x+2} \Longrightarrow 0 = A_1 + \frac{2}{9}$$

e deduzimos que $A_1 = -\frac{2}{9}$.
Finalmente, escolhendo o valor $x = 0$ temos

$$F(0) = \frac{0+4}{(0+2)(0-1)^2} = -\frac{2}{9}\frac{1}{0-1} + \frac{A_2}{(0-1)^2} + \frac{2}{9}\frac{1}{0+2}$$

e deduzimos $2 = \frac{2}{9} + A_2 + \frac{1}{9}$ de onde tiramos $A_2 = \frac{5}{3}$. Em conclusão temos a decomposição em elementos simples

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-1)^2} = -\frac{2/9}{x-1} + \frac{5/3}{(x-1)^2} + \frac{2/9}{x+2}.$$

Utilização num integral Graça a decomposição em elementos simples podemos calcular as integrais de uma fração racional.

Exemplo 6.4.7 Calcular o integral seguinte

$$\int_{-1}^{0} \frac{x+4}{(x+2)(x-1)^2} dx.$$

Usando a decomposição em elementos simples, podemos escrever

$$\begin{aligned}
I(F) &= \int_{-1}^{0} \frac{x+4}{(x+2)(x-1)^2} dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left[-\frac{2/9}{x-1} + \frac{5/3}{(x-1)^2} + \frac{2/9}{x+2} \right] dx \\
&= -2/9 \int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1} dx + 5/3 \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x-1)^2} dx + 2/9 \int_{-1}^{0} \frac{1}{x+2} dx \\
&= -2/9 \Big[\ln|x-1| \Big]_{-1}^{0} + 5/3 \Big[\frac{-1}{x-1} \Big]_{-1}^{0} + 2/9 \Big[\ln|x+2| \Big]_{-1}^{0} \\
&= 2/9 \ln(2) + 5/6 - 2/9 \ln(2) = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

6.5 Aplicação

6.5.1 Comprimento de uma curva

Proposição 6.5.1
Seja f uma função diferencial em $[a, b]$ e G_f o seu gráfico ou curva. Então o comprimento $|G_f|$ da curva associado a f é dado por

$$|G_f| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Nota 6.5.1 A razão desta definição vem da medida de uma curva parametrizada que nós estudamos na cadeira de Análise onde usamos uma parametrização particular $x(t) = t$ e $y(t) = f(t)$.

Exemplo 6.5.1 Calcular o comprimento da curva da função $\frac{1}{2}x^2$ no intervalo $[0, 1]$.

$$|G_f| = \int_0^1 \sqrt{1 + [x]^2} dx.$$

Introduzimos a mudança de variável $\sinh(t) = x$. Temos $\sinh(0) = 0$ e $\sinh(t_1) = 1$ onde $t_1 = \arg\sinh(1) = \ln(1 + \sqrt{1 + 1^2}) = \ln(1 + \sqrt{2})$. Por outro lado, verificamos que

$$\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \sqrt{\cosh^2(t)} = \cosh(t)$$

e

$$\frac{dx}{dt} = \sinh'(t) = \cosh(t).$$

Usamdo a mudança de variável, temos

$$|G_f| = \int_0^{t_1} \cosh^2(t)dt = \frac{1 + \cosh(2t)}{2}dt = \Big[\frac{t}{2} + \frac{\sinh(2t)}{4}\Big]_0^{t_1} = \ln\left(\sqrt{1 + \sqrt{2}}\right) + \sinh\left(2\ln(1 + \sqrt{2})\right).$$

6.5.2 Cálculo da área de um domínio plano

Proposição 6.5.2
Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$ e D o domínio compreendido entre os lados verticais $x = a$, $x = b$ as funções f e g. Então a área (não algébrica) de D (notação $|D|$ ou área(D)) é dada por

$$|D| = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

Nota 6.5.2 Cuidado para não confundir a área algebrica (que pode ser negativa) com a área geométrica (que é sempre não negativa).

Exemplo 6.5.2 Calcular a área situada entre $x = -1$ e $x = 1$ e as funções $f(x) = x$, $f(x) = -x$.

$$|S| = \int_{-1}^1 |x - (-x)| = 2\int_0^1 2x = 4\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = 2.$$

6.5.3 Cálculo do volume de um sólido de revolução

Proposição 6.5.3
Seja f uma função contínua em $[a, b]$, não negativa e definimos o sólido gerado por revolução a partir de f como

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Então o volume do sólido $|V|$ é dado por

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

NOTA 6.5.3 Notar que $\pi f^2(x)$ corresponde a área de uma circunferência de raio $f(x)$.

EXEMPLO 6.5.3 Cacular o volume gerado por revolução a partir de $f = (1-x)$ no intervalo $[0,1]$. Verificamos bem que $f(x) \geq 0$ quando $x \in [0,1]$.

$$|V| = \pi \int_0^1 (1-x)^2 dx = \pi \Big[-\frac{(1-x)^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

6.6 Integral impróprio

Nas secções anteriores, consideramos situações onde a função é contínua num intervalo fechado $[a,b]$ com $a,b \in \mathbb{R}$. Vamos agora considerar intervalos abertos (ou semi-abertos) de tipo $[a,b[$ onde a,b são reais mas podem ser também $+\infty$ ou $-\infty$. Neste caso falamos de integrais impróprios.

6.6.1 Caso $[a,b[$ ou $]a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$

Definição 6.6.1
Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b[$, temos as três possibilidades seguintes.

- A função é integrável no intervalo (ou admite um integral imprópria no intervalo) se existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que
$$\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx = \ell.$$
- O integrál é divergente para $\pm\infty$ se
$$\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx = \pm\infty.$$
- Caso contrário, dizemos que o integral não converge no intervalo $[a,b[$

NOTA 6.6.1 Temos a mesma definição para o intervalo $]a,b]$ onde consideramos o limite

$$\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

Vamos apresentar três exemplos representativos assim como a técnica para determinar a convergência de um integral impróprio

EXEMPLO 6.6.1 (CONVERGÊNCIA) Determinar se existe o integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

A função $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ é contínua no intervalo $]0,1]$ então o problema está no ponto 0. Para $t\in]0,1]$, o integral

$$I(t)=\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[t,1]$. Temos assim

$$I(t)=\int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=\Big[\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\Big]_t^1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{t}).$$

Como $\lim\limits_{t\to 0^+}\sqrt{t}=0$, deduzimos que $\lim\limits_{t\to 0^+}I(t)=\dfrac{1}{2}$ e concluimos que o integral converge para um meio seja

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}.$$

Exemplo 6.6.2 (Divergência) Determinar se existe o integral

$$I=\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx.$$

A função $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$ é contínua no intervalo $]0,1]$ então o problema está no ponto 0. Para $t\in]0,1]$, o integral

$$I(t)=\int_t^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[t,1]$. Temos assim

$$I(t)=\int_t^1 x^{-\frac{3}{2}}dx=\Big[-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Big]_t^1=-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{t}}).$$

Como $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{t}}=+\infty$, deduzimos que $\lim\limits_{t\to 0^+}I(t)=+\infty$ e concluimos que o integral diverge para $+\infty$.

Exemplo 6.6.3 (Não convergência) Determinar se existe o integral

$$I=\int_0^1 \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

A função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ é contínua no intervalo $]0,1]$ então o problema está no ponto 0. Para $t\in]0,1]$, o integral

$$I(t)=\int_t^1 \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[t,1]$. Notando que uma primitiva de f é $F(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, deduzimos que

$$I(t)=\Big[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\Big]_t^1=\sin(1)-\sin\left(\frac{1}{t}\right).$$

Consideramos as duas sequências $t_i=\frac{1}{2i\pi}$ e $s_i=\frac{1}{\pi/2+2i\pi}$, obtemos

$$\sin\left(\frac{1}{t_i}\right)=\sin(2i\pi)=0,\quad \sin\left(\frac{1}{s_i}\right)=\sin(\pi/2+2i\pi)=1.$$

Deduzimos que

$$\lim_{i\to\infty} I(t_i) = \sin(1), \qquad \lim_{i\to\infty} I(s_i) = \sin(1) - 1$$

Concluimos que $I(t)$ não tem limite em 0 é o intergral não converge.

NOTA 6.6.2 O princípio do método é considerar o intergral no intervalo $[t, 1]$ pois passar ao limite. Para avaliar o integral sobre $[t, 1]$, podemos usar qualquer tecnica que usamos anterioramente como a mudança de mariavel ou a integração por partes.

6.6.2 Caso $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$

Definição 6.6.2
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, +\infty[$, temos as três possibilidades seguintes.

- A função é integrável no intervalo (ou admite um integral impróprio no intervalo) se existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que
$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx = \ell.$$
- O integral é divergente para $\pm\infty$ se
$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx = \pm\infty.$$
- Caso contrário, dizemos que o integral não converge no intervalo $[a, +\infty[$

NOTA 6.6.3 Temos a mesma definição para o intervalo $]-\infty, b]$ onde consideramos o limite

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

Vamos apresentar três exemplos representativos assim como a técnica para determinar a convergência de um integral impróprio

EXEMPLO 6.6.4 (CONVERGÊNCIA) Determinar se existe o integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx.$$

A função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é contínua no intervalo $[1, +\infty[$ então o problema está em $+\infty$. Para $t > 1$, o integral

$$I(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[1, t]$. Temos assim

$$I(t) = \int_1^t x^{-2}dx = \Big[-x^{-1}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

Como $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} = 0$, deduzimos que $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = 1$ e concluimos que o integral converge para um seja

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

EXEMPLO 6.6.5 (DIVERGÊNCIA) Determinar se existe o integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx.$$

A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua no intervalo $[1, +\infty[$ então o problema está em $+\infty$. Para $t > 1$, o integral

$$I(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[1, t]$. Temos assim

$$I(t) = \int_1^t x^{-1} dx = \Big[\ln(t)\Big]_1^t = \ln(t).$$

Como $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln(t) = +\infty$, deduzimos que $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = +\infty$ e concluimos que o integral é divergente.

EXEMPLO 6.6.6 (NÃO CONVERGÊNCIA) Determinar se existe o integral

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(x) dx.$$

A função $f(x) = \cos(x)$ é contínua no intervalo $[0, +\infty[$ então o problema está em $+\infty$. Para $t > 0$, o integral

$$I(t) = \int_0^t \cos(x) dx$$

faz sentido porque f é contínua no intervalo fechado $[1, t]$. Temos assim

$$I(t) = \Big[\sin(t)\Big]_0^t = \sin(t).$$

Consideramos as duas sequências $t_i = 2i\pi$ e $s_i = \pi/2 + 2i\pi$, obtemos

$$\sin(t_i) = \sin(2i\pi) = 0, \quad \sin(s_i) = \sin(\pi/2 + 2i\pi) = 1.$$

Deduzimos que

$$\lim_{i\to\infty} I(t_i) = 0, \qquad \lim_{i\to\infty} I(s_i) = 1$$

Concluimos que $I(t)$ não tem limite em 0 é o intergral não converge.

6.6.3 Outros casos

Seja I um intervalo qualquer e $c \in I$, notamos por $I^- = I \cap]-\infty, c]$, $I^+ == I \cap [c, +\infty[$.

Definição 6.6.3
Seja f uma função definida contínua no intervalo I. A função é integrável em I se f é integravel em I^- e em I^+ e pomos

$$\int_I f(x)dx = \int_{I^-} f(x)dx + \int_{I^+} f(x)dx.$$

NOTA 6.6.4 A definição é independente da escolha de c porque temos o teorema de Chasles (aditividade).

NOTA 6.6.5 Se apenas um dos dois integrais não converge (ou diverge) não podemos concluir, não termos fenómenos de compensação.

EXEMPLO 6.6.7 Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

A função é simetrica (par) então devemos só de considerar o integral no intervalo $[0, +\infty[$. Seja $t > 0$, uma primitiva da função $\frac{1}{1+x^2}$ é $\arctan(x)$ e deduzimos

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \Big[\arctan(t)\Big]_0^t = \arctan(t)$$

Como $\lim\limits_{t \to +\infty} \arctan(t) = \pi/2$, concluimos que o integral é convergente e temos

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

EXEMPLO 6.6.8 Determinar, se existir, o integral

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2-1} dx.$$

A função é contínua no intervalo $]-1, 1[$. Usamos uma decomposição em elementos simples e encontramos

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.$$

Seja $t \in]0, 1[$ e consideramos o integral

$$I(t) = \int_0^t \frac{1}{x^2-1} = \int_0^t \left(\frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}\right) dx = \Big[1/2 \ln(1-x) + 1/2 \ln(1+x)\Big]_0^t = 1/2 \ln(1-t^2).$$

Como $\lim\limits_{t \to 1^-} \ln(1-t^2) = -\infty$ concluimos que o intergral é divergente é então não podemos calcular o integral no intervalo $]-1, 1[$.