Aula prática nº 2 – ÁLGEBRA DE BOOLE

Tópicos

- Postulados de Huntington
- Álgebra de Boole binária: operadores básicos
- Demonstração de teoremas
- Simplificação (analítica) de expressões booleanas
- Conjuntos de operadores funcionalmente completos
- Funções booleanas e sua representação:
    - o Algébrica
    - o Tabular (tabelas de verdade)
    - o Esquemática (circuitos lógicos)

A Álgebra de Boole desenvolve-se sobre uma estrutura matemática $(B,+,\bullet)$ [onde B é um conjunto e '+' e '•' representam operações, ditas respetivamente *soma* e *produto*] satisfazendo o seguinte conjunto de postulados (enunciado por Huntington em 1904):

Postulados de Huntington

• **P1** Fecho: as operações são fechadas em B

$$\forall b_1, b_2 \in B \quad \begin{cases} b_1 + b_2 \in B \\ b_1 \cdot b_2 \in B \end{cases}$$

• **P2** Comutatividade

$$\forall b_1, b_2 \in B \quad \begin{cases} b_1 + b_2 = b_2 + b_1 \\ b_1 \cdot b_2 = b_2 \cdot b_1 \end{cases}$$

• **P3** Elementos Neutros

$$\exists b_0 \forall b \in B: \quad b + b_0 = b$$
$$\exists b_1 \forall b \in B: \quad b \cdot b_1 = b$$

• **P4** Distributividade Mútua

$$\forall_{b_1, b_2, b_3 \in B} \quad b_1 + (b_2 \cdot b_3) = (b_1 + b_2) \cdot (b_1 + b_3)$$
$$\forall_{b_1, b_2, b_3 \in B} \quad b_1 \cdot (b_2 + b_3) = (b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot b_3)$$

• **P5** Complementação

$$\forall b \in B \exists \overline{b} \in B \quad \begin{cases} b + \overline{b} = b_1 \\ b \cdot \overline{b} = b_0 \end{cases}$$

• **P6** Cardinal

$$\forall_{b_1 \in B} \exists_{b_2 \in B} \; b_1 \neq b_2 \Leftrightarrow \# B \geq 2$$

Álgebra de Boole binária
O cardinal mínimo de B é 2. Nesta situação – $B=\{0,1\}$ – todos os postulados são satisfeitos pelos seguintes operadores:

SOMA LÓGICA [DISJUNÇÃO] **OU** (*OR*)	PRODUTO LÓGICO [CONJUNÇÃO] **E** (*AND*)	COMPLEMENTAÇÃO [NEGAÇÃO] **NÃO** (*NOT*)
$0+0=0$ $0+1=1$ $1+0=1$ $1+1=1$	$0\cdot 0=0$ $0\cdot 1=0$ $1\cdot 0=0$ $1\cdot 1=1$	$\overline{0}=1$ $\overline{1}=0$

Estabelece-se assim uma estrutura algébrica de Boole a dois valores (0 e 1).

Teorema da dualidade: Todo o teorema ou identidade algébrica dedutível a partir dos postulados da álgebra de Boole conserva a validade se as operações (+) e (·) e os elementos neutros forem trocados.

Exercícios

1 Demonstre os seguintes teoremas recorrendo aos postulados de Huntington:

a) Idempotência: $\forall b \in B \quad b \cdot b = b$

b) Elemento absorvente: $\forall b \in B \quad b \cdot b_0 = b_0, \quad b + b_1 = b_1$

c) Unicidade do complemento

d) Unicidade do elemento neutro

e) Absorção: $x + x \cdot y = x$

f) Simplificação: $x + \overline{x} \cdot y = x + y$

g) Consenso: $x \cdot y + \overline{x} \cdot z + z \cdot y = x \cdot y + \overline{x} \cdot z$

h) Leis de DeMorgan: $\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

2 Por indução direta (verificação exaustiva da tabela de verdade) demonstre

a) Teorema da involução: $\overline{\overline{x}} = x$

b) Propriedade associativa: $x + (y+z) = (x+y) + z$

3 Mostre que o operador "ou" exclusivo (*XOR*), definido por $x \oplus y = x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y$, é associativo:

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

4 Recorrendo ao teorema da dualidade, determine o operador dual do "ou" exclusivo $\oplus$. Compare as tabelas de verdade.

5 Mostre que $x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z = x + y \cdot z$

6 Mostre que os operadores *NAND* ($\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$) e *NOR* ($\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$) são completos.

7 Uma função booleana é uma regra (correspondência) que associa um elemento do conjunto *B*={0,1} a cada uma das 2^n combinações que as *n* variáveis independentes podem assumir. Recorrendo a uma notação vetorial para o caso geral do sistema digital com *n* entradas e *m* saídas, temos:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})} \longrightarrow \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

a) Quantas funções diferentes existem?

b) Concretize para $n = 4$ e $m = 1$.

8 Na ignição de um motor de um carro atual, através de um botão START, o motor de arranque deve ser acionado quando se cumprir o seguinte:

- o botão "START" for pressionado **e** uma das duas seguintes:
  - o pedal de embraiagem estiver carregado **ou**
  - o travão estiver carregado **e** o carro estiver em ponto-morto (mudança não engatada)

a) Recorrendo às variáveis *S* (botão START pressionado), *E* (embraiagem carregada), *T* (travão carregado) e *C* (caixa com velocidade engatada), construa a tabela de verdade da função *M*, que vale 1 nas situações em que o motor de arranque deve ser acionado.

b) Defina M através de uma expressão algébrica em S, E, T e C.

c) Desenhe o circuito que realiza a função *M* e implemente-o em DesignWorks. Para as linhas que representam as variáveis e a função, dê-lhes o nome da respetiva variável.

d) [Complementar] O ficheiro `teste_motor_start.tsv` é um ficheiro de vetores de teste para o circuito. Ou seja, contém um conjunto de valores das variáveis de entrada (um vetor é um conjunto ordenado de valores escalares) que são usados para testar o circuito e avaliar o seu funcionamento. A primeira linha:

```
$I S E T C    $O M
```

define os sinais para o teste. O primeiro bloco $I (abreviatura de $INPUT) indica quais os sinais de entrada, e que neste caso são valores binários (separados por espaços) que representam os sinais S, E, T e C. O segundo bloco, $O (abreviatura de $OUTPUT) indica as variáveis de saída. Como pode ver, o ficheiro não está completo (não estão incluídos todos os valores possíveis para as entradas). Complete o ficheiro de vetores de teste para que cubra todas as combinações possíveis das entradas e simule o circuito (Simulation -> Test Vectors -> Run Test Vector File). Use o resultado para verificar a correcção da tabela de verdade construída em a).

9. Considere a seguinte função booleana:

$$y = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 + \overline{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_4 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2$$

a) Simplifique-a
b) Construa a tabela de verdade que define *y*
b) Por manipulação algébrica, reescreva *y* apenas com operadores *NAND*
c) Por manipulação algébrica, reescreva *y* apenas com operadores *NAND* que não poderão ter mais de 2 argumentos (entradas)
d) Desenhe os diagramas lógicos correspondentes a a), c) e d) e proceda a uma análise de custos em termos de número e variedade de operadores envolvidos

10. A função “Maioria”, *M*(*x*,*y*,*z*), é igual a 1 sempre que pelo menos dois dos seus três argumentos são iguais a 1:

a) Construa a tabela de verdade da função *M*.
b) A partir da tabela de verdade, determine a expressão algébrica que define *M*.
c) Construa o circuito lógico que realiza *M*.
d) Mostre que *M*(*x*,*y*,*z*), juntamente com a operação de complementação e a constante “0”, forma um conjunto de operações funcionalmente completo.