Complementos de Análise Matemática EE

Departamento de Matemática e Aplicações

2012/2013

Folha de Exercícios 7

EDP's II

Eng^{a}. de Comunicações, Eng^{a}. de Polímeros

Separação de Variáveis

1. Usar o método de separação de variáveis para determinar a solução dos seguintes problemas de valores de fronteira.

   (a) $u_t = u_y, \quad u(t,0) = e^{-3t} + e^{2t};$

   (b) $u_t = u_y - u, \quad u(t,0) = e^{-5t} + 2e^{-7t} - 14e^{13t}.$

2. Determinar a solução do seguinte problema de valores de fronteira.

$$\begin{array}{ll} u_t = 1.14\, u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 2, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x/2) - 3\operatorname{sen}(2\pi x), & 0 < x < 2, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0. & t > 0. \end{array}$$

3. A equação de calor no espaço bidimensional é dada por

$$u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy}). \tag{1}$$

   (a) Supondo que $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$, determinar as equações diferenciais ordinárias que devem ser satisfeitas por X, Y, e T;

   (b) Determinar soluções $u(x,y,t)$ de (1) que satisfaçam as condições de fronteira $u(0,y,t) = 0, \quad u(a,y,t) = 0, \quad u(x,0,t) = 0, \quad u(x,b,t) = 0.$

4. Averiguar se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir cada uma das EDPs seguintes por pares de EDOs. Em caso afirmativo, determinar essas equações.

   (a) $\quad tu_{tt} + u_x = 0.$ $\qquad$ (b) $\quad tu_{xx} + xu_t = 0.$

   (c) $\quad u_{xx} + (x-y)u_{yy} = 0.$ $\qquad$ (d) $\quad u_{xx} + 2u_{xt} + u_t = 0.$

Séries de Fourier

5. Determinar a série de Fourier de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.

(a) $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1, \end{cases} \quad |x| < 1;$ (b) $f(x) = x \quad |x| < 1;$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2, \end{cases} \quad |x| < 2;$ (d) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ \pi, & 0 \leq x < \pi. \end{cases};$

(e) $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1. \end{cases};$ (f) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x, \quad |x| < \pi.$

6. (a) Determinar a série de Fourier da função x^2 no intervalo $|x| < \pi$;
   (b) Usar a igualdade de Parseval para mostrar que

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + ... = \frac{\pi^4}{90}.$$

7. Determinar a série de Fourier, envolvendo apenas co-senos, de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.

(a) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < a, \\ a, & a \leq x < 2a, \end{cases} \quad 0 < x < 2a;$ (b) $f(x) = x, \quad 0 < x < \pi;$

(c) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < l/2, \\ l - x, & l/2 \leq x < l, \end{cases} \quad 0 < x < l.$

8. Determine a série de Fourier, envolvendo apenas senos, de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \end{cases} \quad 0 < x < 2;$ (b) $f(x) = x, \quad 0 < x < \pi;$

(c) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x, \quad 0 < x < \pi.$

9. (a) Desenvolver a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ numa série de Fourier de co-senos no intervalo $0 < x < \pi$;
   (b) Desenvolver a função $f(x) = \cos x$ numa série de Fourier de senos no intervalo $0 < x < \pi$;
   (c) Pode-se desenvolver a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ numa série de Fourier de co-senos no intervalo $-\pi < x < \pi$? Justificar.

Aplicação à equação de calor

10. Os extremos $x = 0$ e $x = 10$ de uma barra de alumínio ($\alpha^2 = 0.86$) são mantidos a $0\ ^{o}C$, enquanto que a sua superfície se encontra isolada. Determinar uma expressão para a distribuição de temperatura na barra ao longo do tempo $u(x, t)$ caso se tenha inicialmente:

$(a) \quad u(x,0) = 70, \quad 0 < x < 10;$

$(b) \quad u(x,0) = 70\cos x, \quad 0 < x < 10;$

$(c) \quad u(x,0) = \begin{cases} 10x, & 0 < x < 5, \\ 10\,(10-x)\,, & 5 \leq x < 10. \end{cases};$

$(d) \quad u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 3, \\ 65, & 3 \leq x < 10. \end{cases};$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$
$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$$
$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

Soluções da folha de exercícios 7

1. (a) $u(t,y) = e^{2(t+y)} + e^{-3(t+y)}$; (b) $u(t,y) = e^{-5t-4y} + 2e^{-7t-6y} - 14e^{13t+14y}$.

2. $u(x,t) = \operatorname{sen}(\pi x/2)\, e^{-1.14\pi^2 t/4} - 3\operatorname{sen}(2\pi x)\, e^{(-1.14)4\pi^2 t}$.

3. (a) $X'' - \mu X = 0,\ Y'' - (\mu+\lambda)Y = 0,\ T' - \lambda\alpha^2 T = 0$;
   (b) $u(x,y,t) = \operatorname{sen}(n\pi x/a)\ \operatorname{sen}(n\pi y/b)\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 (b^2+a^2)t\,/\,a^2b^2}$.

4. (a) $tT'' - \lambda T = 0,\ X' + \lambda X = 0,$ (b) $X'' - \lambda x\, X = 0,\ T' + \lambda t T = 0,$
   (d) $T' - \lambda T = 0, X'' + \lambda(2X' + X) = 0.$

5. (a) $f(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{\operatorname{sen}\, \pi x}{1} + \frac{\operatorname{sen}\, 3\pi x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5\pi x}{5} + \ldots)$; (b) $f(x) = \frac{2}{\pi}(\frac{\operatorname{sen}\, \pi x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2\pi x}{2} + \frac{\operatorname{sen}\, 3\pi x}{3} - \ldots)$;
   (c) $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + (1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right))\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)]$;
   (d) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(nx)$;
   (e) $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\pi x]}{(2n-1)^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(n\pi x)$;
   (f) $f(x) = \frac{3}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 3x$.

6a. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$.

7. (a) $f(x) = \frac{3a}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a(\cos(n\pi/2)-1)}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right)$; (b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$;
   (c) $f(x) = \frac{l}{4} + \frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}[2\cos(n\pi/2) - 1 - (-1)^n]\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$.

8. (a) $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\cos(n\pi/2) - (-1)^n)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$; (b) $f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} x$
   (c) $f(x) = \operatorname{sen}\, 2x$.

9. (a) $\operatorname{sen} x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1-2^2} + \frac{\cos 4x}{1-4^2} + \ldots\right],\ 0 < x < \pi$;
   (b) $\cos x = \frac{4}{\pi}\left[\frac{2\operatorname{sen} 2x}{2^2-1} + \frac{4\operatorname{sen} 4x}{4^2-1} + \ldots\right],\ 0 < x < \pi$;
   (c) Não. Argumento 1: A série de Fourier de $f(x) = \operatorname{sen} x$ no intervalo $-\pi < x < \pi$ é única, sendo $f(x) = \operatorname{sen} x$. Argumento 2 : A série de Fourier de uma função ímpar (como $\operatorname{sen} x$) é uma série que envolve apenas senos.

10. (a) $u(x,t) = \frac{280}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n+1)\pi x/10)}{2n+1}\, e^{-0.86(2n+1)^2\pi^2 t\,/\,100}$;
   (b) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1-(-1)^n\cos 10)}{n^2\pi^2-100}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\, e^{-0.86n^2\pi^2 t\,/\,100}$;
   (c) $u(x,t) = 100\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4sen\,(n\pi/2)}{n^2\pi^2} - \frac{(-1)^n}{n\pi}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\, e^{-0.86n^2\pi^2 t\,/\,100}$;
   (d) $u(x,t) = -\frac{130}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - \cos(3\pi/10))}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\, e^{-0.86n^2\pi^2 t\,/\,100}$.