7.

Recorrendo ao método de separação de variáveis determine uma solução do seguinte problema de valor na fronteira para a equação do calor:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = \sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(8x) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

para $0 \leq x \leq \pi$ e $t \geq 0$.

Resolução: *Começa-se por procurar soluções da equação diferencial parcial da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Substituindo na equação tem-se*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\left(T(t)X(x)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T(t)X(x)\right) \\ \iff & T'(t)X(x) = T(t)X''(x) \\ \iff & \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \text{ para } T(t), X(x) \neq 0 \\ \iff & \frac{T'(t)}{T(t)} = k = \frac{X''(x)}{X(x)} \text{ para algum } k \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & \begin{cases} T'(t) = kT(t) \\ X''(x) = kX(x) \end{cases} \text{ para algum } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tendo em conta as condições na fronteira

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \iff T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0$$

$$T(t) = 0 \ \ \forall t \text{ ou } X(0) = X(\pi) = 0,$$

conclui-se que para obter soluções não identicamente nulas tem de ser $X(0) = X(\pi) = 0$. Por sua vez isto implica que a constante k acima tem de ser negativa (se $k \geq 0$ a única solução da equação $X''(x) - kX(x) = 0$ que verifica $X(0) = X(\pi) = 0$ é a solução identicamente nula).
Portanto

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-k}x) + c_2 \sin(\sqrt{-k}x),$$

e substituindo nas condições fronteira obtém-se

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin(\sqrt{-k}\pi) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \text{ ou } \sin(\sqrt{-k}\pi) = 0. \end{cases}$$

Obtêm-se assim soluções não nulas para a equação diferencial para X e para a condição fronteira quando

$$\sqrt{-k}\pi = n\pi \iff k = -n^2 \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

e para cada um destes valores de k obtêm-se como soluções do sistema acima múltiplos reais de

$$X(x) = \sin(nx) \text{ e } T(t) = e^{-n^2 t}.$$

Isto é, para cada $n = 1, 2, \ldots$ obtém-se a seguinte solução da equação diferencial parcial satisfazendo a condição na fronteira:

$$u_n(t,x) = \sin(nx)e^{-n^2 t}.$$

Finalmente, determina-se coeficientes $d_n \in \mathbb{R}$ tais que a condição inicial seja satisfeita por

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(t,x).$$

Tem-se

$$\begin{aligned} & u(0,x) = \sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(8x) \\ \iff \quad & \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(0,x) = \sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(8x) \\ \iff \quad & \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx) \cdot 1 = \sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(8x) \end{aligned}$$

portanto $d_3 = 1, d_8 = -\frac{1}{2}$ *e* $d_n = 0$ *para* $n \neq 3, 8$. *Conclui-se que a solução do problema do enunciado é*

$$u(t,x) = \sin(3x)e^{-9t} - \frac{1}{2}\sin(8x)e^{-64t}.$$