1. Resolva cada uma das seguintes equações diferenciais. Mostre que a solução verifica formalmente a equação diferencial dada.

a) $(4xy)dx+(x^2+1)dy=0$

R:

Antes de mais temos que colocar a equação na forma de variáveis separáveis, escolhendo para tal um factor integrante tal que **em cada um dos termos apenas esteja representada a variável em ordem à qual está a respectiva derivada**, isto é, *no termo que multiplica por* dx *apenas devem estar representados elementos em* x *e o mesmo deverá suceder para* dy. Assim sendo teremos que:

$$\underbrace{(4xy)}_{\downarrow\; y}dx+\underbrace{(x^2+1)}_{\downarrow\;(x^2+1)}dy=0\Rightarrow \mu=\frac{1}{y\cdot(x^2+1)}$$

Logo, teremos a seguinte equação de variáveis separáveis:

$$(4xy)dx+(x^2+1)dy=0\Leftrightarrow\frac{1}{y\cdot(x^2+1)}(4xy)dx+\frac{1}{y\cdot(x^2+1)}(x^2+1)dy=0\Leftrightarrow\frac{4x}{(x^2+1)}dx+\frac{1}{y}dy=0$$

Posto isto e para se proceder à resolução desta equação teremos que integrar a equação de variáveis separáveis obtida:

$$\int\left(\frac{4x}{(x^2+1)}\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}\right)dy=C\Leftrightarrow 4\cdot\int\left(\frac{x}{\underbrace{(x^2+1)}_{u}}\right)dx+\int\left(\frac{1}{\underbrace{y}_{u}}\right)dy=C\Leftrightarrow^{1}$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\int\left(\frac{\overbrace{2x}^{u'}}{\underbrace{(x^2+1)}_{u}}\right)dx}_{\ln|u|}+\underbrace{\int\left(\frac{\overbrace{1}^{u'}}{\underbrace{y}_{u}}\right)dy}_{\ln|u|}=C\Leftrightarrow 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+1|+\ln|y|=C\Leftrightarrow 2\cdot\ln\left|\underbrace{x^2+1}_{\substack{sempre>0\\ \text{logo podemos}\\ \text{tirar o módulo}}}\right|+\ln|y|=C\Leftrightarrow$$

[1] $u=x^2+1\Rightarrow u'=(x^2+1)'_x=2x\rightarrow$ Para termos u' no integral em dx teremos que multiplicar o x por 2 e a totalidade do integral por $1/2$ para garantir que a expressão de partida não sofre qualquer alteração.

$u=y\Rightarrow u'=(y)'_y=1\rightarrow$ Para termos u' no integral em dy teremos que aplicar directamente a fórmula.

$$\Leftrightarrow 2\cdot\ln\left(x^2+1\right)+\ln|y|=C \Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right)^2+\ln|y|=C \Leftrightarrow \ln\left[\left(x^2+1\right)^2.|y|\right]=C \Leftrightarrow e^{\ln\left[\left(x^2+1\right)^2.|y|\right]}=e^C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^2.|y|=C_1 \Leftrightarrow y\cdot\left(x^2+1\right)^2=C$$

b) $\left[(x+4)\cdot\left(y^2-1\right)\right]dx+y\cdot\left(x^2+8x\right)dy=0$

R:

Antes de mais temos que colocar a equação na forma de variáveis separáveis, escolhendo para tal um factor integrante tal que **em cada um dos termos apenas esteja representada a variável em ordem à qual está a respectiva derivada**, isto é, *no termo que multiplica por* dx *apenas devem estar representados elementos em* x *e o mesmo deverá suceder para* dy. Assim sendo teremos que:

$$\underbrace{\left[(x+4)\cdot\left(y^2-1\right)\right]}_{\downarrow \atop \left(y^2-1\right)}dx+\underbrace{y\cdot\left(x^2+8x\right)}_{\downarrow \atop \left(x^2+8x\right)}dy=0 \Rightarrow \mu=\frac{1}{\left(y^2-1\right)\cdot\left(x^2+8x\right)}$$

Logo, teremos a seguinte equação de variáveis separáveis:

$$\left[(x+4)\cdot\left(y^2-1\right)\right]dx+y\cdot\left(x^2+8x\right)dy=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(y^2-1\right)\cdot\left(x^2+8x\right)}\cdot\left[(x+4)\cdot\left(y^2-1\right)\right]dx+\frac{1}{\left(y^2-1\right)\cdot\left(x^2+8x\right)}\cdot\left[y\cdot\left(x^2+8x\right)\right]dy=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{x^2+8x}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0$$

Posto isto e para se proceder à resolução desta equação teremos que integrar a equação de variáveis separáveis obtida:

$$\int \frac{x+4}{\underbrace{x^2+8x}_{u}}dx+\int \frac{y}{\underbrace{y^2-1}_{u}}dy=C \Leftrightarrow^{2} \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\int \frac{\overbrace{2\cdot(x+4)}^{u'}}{\underbrace{x^2+8x}_{u}}dx}_{\ln|u|}+\frac{1}{2}\cdot \underbrace{\int \frac{\overbrace{2\cdot y}^{u'}}{\underbrace{y^2-1}_{u}}dy}_{\ln|u|}=C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot \ln\left|x^2+8x\right|+\frac{1}{2}\cdot \ln\left|y^2-1\right|=C \Leftrightarrow \frac{2}{2}\cdot \ln\left|x^2+8x\right|+\frac{2}{2}\cdot \ln\left|y^2-1\right|=2\cdot C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|x^2+8x\right|+\ln\left|y^2-1\right|=2\cdot C \Leftrightarrow \ln\left[\left|x^2+8x\right|\cdot\left|y^2-1\right|\right]=C_1 \Leftrightarrow e^{\ln\left[\left|x^2+8x\right|\cdot\left|y^2-1\right|\right]}=e^{C_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|x^2+8x\right|\cdot\left|y^2-1\right|=C_2 \Leftrightarrow \left(x^2+8x\right)\cdot\left(y^2-1\right)=C$$

c) $(tg(\theta))dr+(2r)d\theta=0$

R:

Antes de mais temos que colocar a equação na forma de variáveis separáveis, escolhendo para tal um factor integrante tal que **em cada um dos termos apenas esteja representada a variável em ordem à qual está a respectiva derivada**, isto é, *no termo que multiplica por* dr *apenas devem estar representados elementos em* r *e o mesmo deverá suceder para* $d\theta$. Assim sendo teremos que:

$$\underbrace{(tg(\theta))}_{\downarrow\, tg(\theta)}dr+\underbrace{(2r)}_{\downarrow\, 2r}d\theta=0 \Rightarrow \mu=\frac{1}{2r\cdot tg(\theta)}$$

Logo, teremos a seguinte equação de variáveis separáveis:

$$(tg(\theta))dr+(2r)d\theta=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2r\cdot tg(\theta)}\cdot(tg(\theta))dr+\frac{1}{2r\cdot tg(\theta)}\cdot(2r)d\theta=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2r}dr+\frac{1}{tg(\theta)}d\theta=0$$

---

[2] $u=x^2+8x \Rightarrow u'=\left(x^2+8x\right)'_x=2x+8$ → Para termos u' no integral em dx teremos que multiplicar o $x+4$ por 2 e a totalidade do integral por $1/2$ para garantir que a expressão de partida não sofre qualquer alteração.

$u=y^2-1 \Rightarrow u'=\left(y^2-1\right)'_y=2y$ → Para termos u' no integral em dy teremos que multiplicar o y por 2 e a totalidade do integral por $1/2$ para garantir que a expressão de partida não sofre qualquer alteração.

Posto isto e para se proceder à resolução desta equação teremos que integrar a equação de variáveis separáveis obtida:

$$\int\left(\frac{1}{2r}\right)dr+\int\left(\frac{1}{tg(\theta)}\right)d\theta=C \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\int\left(\frac{1}{r}\right)dr+\int\left(\frac{1}{\frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}}\right)d\theta=C \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\int\left(\frac{1}{\underbrace{r}_{u}}\right)dr+\int\left(\frac{\cos(\theta)}{\underbrace{sen(\theta)}_{u}}\right)d\theta=C \Leftrightarrow$$ [3]

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\int\left(\frac{\overbrace{1}^{u'}}{\underbrace{r}_{u}}\right)dr}_{\ln|u|}+\underbrace{\int\left(\frac{\overbrace{\cos(\theta)}^{u'}}{\underbrace{sen(\theta)}_{u}}\right)d\theta}_{\ln|u|}=C \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\ln|r|+\ln|sen(\theta)|=C \Leftrightarrow \frac{2}{2}\cdot\ln|r|+2\cdot\ln|sen(\theta)|=2\cdot C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|r|+2\cdot\ln|sen(\theta)|=C_1 \Leftrightarrow \ln|r|+\ln|sen(\theta)|^2=C_1 \Leftrightarrow \ln\left(|r|\cdot|sen(\theta)|^2\right)=C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln\left(|r|\cdot|sen(\theta)|^2\right)}=e^{C_1} \Leftrightarrow |r|\cdot|sen(\theta)|^2=C_2 \Leftrightarrow r\cdot sen^2(\theta)=C$$

d) $\frac{dy}{dx}=x-y$**, (sugestão: fazer** $w=x-y$**)**

R:

Antes de mais temos que colocar a equação na forma de variáveis separáveis, escolhendo para tal um factor integrante tal que **em cada um dos termos apenas esteja representada a variável em ordem à qual está a respectiva derivada**, isto é, *no termo que multiplica por* dx *apenas devem estar representados elementos em* x *e o mesmo deverá suceder para* dw.

Assim sendo teremos que: $\frac{dy}{dx}=x-y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=w$

Da mesma forma teremos ainda que: $w=x-y \Leftrightarrow y=x-w$

Logo: $y=x-w \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x-w)=\frac{dx}{dx}-\frac{dw}{dx}=1-\frac{dw}{dx}$

---

[3] $u=r \Rightarrow u'=(r)'_r=1$ → Já temos u' no integral em dr logo só temos que aplicar a fórmula directamente.
$u=sen(\theta) \Rightarrow u'=(sen(\theta))'_\theta=\cos(\theta)$ → Já temos u' no integral em $d\theta$ logo só temos que aplicar a fórmula directamente.

Então teremos finalmente que:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx}=w\\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dw}{dx}\end{array}\right\} \Rightarrow 1-\frac{dw}{dx}=w \Leftrightarrow 1-w=\frac{dw}{dx} \Leftrightarrow (1-w)dx=dw \Leftrightarrow (1-w)dx-dw=0$$

Daqui se pode concluir que o factor integrante será:

$$\underbrace{(1-w)}_{\downarrow\, 1-w}dx-dw=0 \Rightarrow \mu=\frac{1}{1-w}$$

Logo, teremos a seguinte equação de variáveis separáveis:

$$(1-w)dx-dw=0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-w}\cdot(1-w)dx-\frac{1}{1-w}dw=0 \Leftrightarrow dx-\frac{1}{1-w}dw=0$$

Posto isto e para se proceder à resolução desta equação teremos que integrar a equação de variáveis separáveis obtida:

$$\int(1)dx-\int\left(\frac{1}{1-w}\right)dw=C \Leftrightarrow \int(1)dx-\int\left(\frac{1}{\underbrace{1-w}_{u}}\right)dw=C \Leftrightarrow^{4} \int(1)dx-\left(-\frac{1}{1}\right)\cdot\underbrace{\int\left(\frac{\overbrace{-1\cdot 1}^{u'}}{\underbrace{1-w}_{u}}\right)dw}_{\ln|u|}=C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1\cdot\ln|1-w|=C \Leftrightarrow x+\ln|1-w|=C$$

Substituindo agora o w, teremos que:

$$w=x-y \Rightarrow x+\ln|1-(x-y)|=C \Leftrightarrow x+\ln|1-x+y|=C$$

[4] $u=1-w \Rightarrow u'=(1-w)'_w=-1 \rightarrow$ Para termos u' no integral em dw teremos que multiplicar o 1 por -1 e a totalidade do integral por $-\frac{1}{1}$ para garantir que a expressão de partida não sofre qualquer alteração.

e) $\frac{dy}{dx} = (y+x)^2$ **, (sugestão: fazer** $w = y + x$ **)**

R:

Antes de mais temos que colocar a equação na forma de variáveis separáveis, escolhendo para tal um factor integrante tal que **em cada um dos termos apenas esteja representada a variável em ordem à qual está a respectiva derivada**, isto é, *no termo que multiplica por* dx *apenas devem estar representados elementos em* x *e o mesmo deverá suceder para* dw.

Assim sendo teremos que: $\frac{dy}{dx} = (y+x)^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = w^2$

Da mesma forma teremos ainda que: $w = y + x \Leftrightarrow y = w - x$

Logo: $y = w - x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(w-x) = \frac{dw}{dx} - \frac{dx}{dx} = \frac{dw}{dx} - 1$

Então teremos finalmente que:

$$\begin{Bmatrix} \frac{dy}{dx} = w^2 \\ \frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dx} - 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{dw}{dx} - 1 = w^2 \Leftrightarrow \frac{dw}{dx} = w^2 + 1 \Leftrightarrow dw = (w^2+1)dx \Leftrightarrow (w^2+1)dx - dw = 0$$

Daqui se pode concluir que o factor integrante será:

$$\underbrace{(w^2+1)}_{\substack{\downarrow \\ w^2+1}}dx - dw = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{w^2+1}$$

Logo, teremos a seguinte equação de variáveis separáveis:

$$(w^2+1)dx - dw = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{w^2+1}\cdot(w^2+1)dx - \frac{1}{w^2+1}\cdot dw = 0 \Leftrightarrow dx - \frac{1}{w^2+1}\cdot dw = 0$$

Posto isto e para se proceder à resolução desta equação teremos que integrar a equação de variáveis separáveis obtida:

$$\int 1\,dx - \int \frac{1}{w^2+1}\,dw = C \Leftrightarrow \int 1\,dx - \underbrace{\int \frac{1}{w^2+1}\,dw}_{arctg(w)} = C \Leftrightarrow x - arctg(w) = C$$

Substituindo agora o w, teremos que:

$$w = y + x \Rightarrow x - arctg(y+x) = C$$

2. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 8\left(\cos^2 y\right)dx + \left(\operatorname{cosec}^2 x\right)dy = 0 \\ y\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

R:

Antes de mais temos que colocar a equação na forma de variáveis separáveis, escolhendo para tal um factor integrante tal que **em cada um dos termos apenas esteja representada a variável em ordem à qual está a respectiva derivada**, isto é, *no termo que multiplica por* dx *apenas devem estar representados elementos em* x *e o mesmo deverá suceder para* dy. Assim sendo teremos que:

$$8\underbrace{\left(\cos^2 y\right)}_{\downarrow \atop \left(\cos^2 y\right)}dx + \underbrace{\left(\operatorname{cosec}^2 x\right)}_{\downarrow \atop \left(\operatorname{cosec}^2 x\right)}dy = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{\left(\cos^2 y\right)\cdot \operatorname{cosec}^2 x}$$

Logo, teremos a seguinte equação de variáveis separáveis:

$$8\left(\cos^2 y\right)dx + \left(\operatorname{cosec}^2 x\right)dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\cos^2 y\right)\cdot \operatorname{cosec}^2 x}\cdot 8\left(\cos^2 y\right)dx + \frac{1}{\left(\cos^2 y\right)\cdot \operatorname{cosec}^2 x}\cdot\left(\operatorname{cosec}^2 x\right)dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{\operatorname{cosec}^2 x}dx + \frac{1}{\left(\cos^2 y\right)}dy = 0$$

Posto isto e para se proceder à resolução desta equação teremos que integrar a equação de variáveis separáveis obtida:

$$\int\left(\frac{8}{\operatorname{cosec}^2 x}\right)dx + \int\left(\frac{1}{\left(\cos^2 y\right)}\right)dy = C \Leftrightarrow 8\cdot\int\left(\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x}\right)dx + \int\left(\frac{1}{\left(\cos^2 y\right)}\right)dy = C \text{ ☼}$$

Cálculos Auxiliares

Sabe-se que:

$$\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x}=\frac{1}{(\operatorname{cosec}(x))^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{sen^2(x)}}=sen^2(x)$$

Sabe-se ainda que:

$$sen\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \Leftrightarrow \left(sen\frac{\alpha}{2}\right)^2=\left(\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \left(sen\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

Logo, para: $\left\{\frac{\alpha}{2}=x \Leftrightarrow \alpha=2x\right\}$. Teremos que: $sen^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$

Sabe-se do formulário que:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \sec^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Daqui pode-se concluir que: $\int\left(\sec^2 u\right)\frac{du}{dx}=tg(u)+C$

Pode ser reescrita na seguinte forma: $\int\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)\frac{du}{dx}=tg(u)+C$

Logo, este membro da equação tem integração directa.

Substituindo então estes valores obtidos nos cálculos auxiliares na equação ☼, teremos que:

$$☼ \Leftrightarrow 8\cdot\int\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx+\int\left(\frac{1}{(\cos^2 y)}\right)dy=C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\cdot\left[\int\left(\frac{1}{2}\right)dx-\int\left(\frac{\cos(2x)}{2}\right)dx\right]+\int\left(\frac{1}{(\cos^2 y)}\right)dy=C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\int(1)dx-\frac{1}{2}\cdot\int\underbrace{(\cos(2x))}_{\cos(u)}dx\right]+\int\left(\frac{1}{(\cos^2 y)}\right)dy=C\Leftrightarrow$$ [5]

$$\Leftrightarrow 8\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\int(1)dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\int\underbrace{2\cdot(\cos(2x))}_{u'\cdot\cos(u)}dx}_{sen(u)}\right]+\int\left(\frac{1}{(\cos^2 y)}\right)dy=C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot sen(2x)\right]+tg(y)=C\Leftrightarrow\frac{8}{2}\cdot x-\frac{8}{4}\cdot sen(2x)+tg(y)=C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x-2\cdot sen(2x)+tg(y)=C$$

Ora, para: $y\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{12}\\ y=\frac{\pi}{4}\end{cases}$

Então teremos por substituição na equação anteriormente obtida que:

$$4\frac{\pi}{12}-2\cdot sen\left(2\frac{\pi}{12}\right)+tg\left(\frac{\pi}{4}\right)=C\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}-2\cdot\underbrace{sen\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}}+\frac{\overbrace{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{=\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{\sqrt{2}}{2}}}=C\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}-2\cdot\frac{1}{2}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}-1+1=C\Leftrightarrow C=\frac{\pi}{3}$$

Logo, teremos que: $4x-2\cdot sen(2x)+tg(y)=C\Leftrightarrow 4x-2\cdot sen(2x)+tg(y)=\frac{\pi}{3}$

---

[5] $u=2x\Rightarrow u'=(2x)'_x=2\rightarrow$ Para termos u' na segunda parte do integral em dx teremos que multiplicar o $\cos(2x)$ por 2 e a totalidade do integral por $1/2$ para garantir que a expressão de partida não sofre qualquer alteração.