

## Capítulo 1

---

### Definições e Fundamentos das Antenas

#### 1.1 Introdução e definição de antena

As comunicações envolvendo mecanismos eléctricos tiveram o seu início em 1844 com a introdução do telégrafo e continuaram com a introdução da telefonia em 1878. Nestes sistemas os sinais eléctricos eram enviados sobre linhas bifilares. Em 1864 *Maxwell* previra teoricamente a existência de ondas electromagnéticas, no entanto tal existência só fora provada experimentalmente quando em 1886 *Hertz* construiu uma fonte radiante ressonante a 75 MHz, constituída por duas placas planas coplanares ligadas a uma bobine. O sistema receptor era formado por uma espira aberta com um pequeno buraco sobre o qual saltavam faíscas, prova inequívoca da transmissão de energia entre ambos os circuitos. *Hertz* também construiu antenas mais sofisticadas como dipolos e até um reflector cilíndrico parabólico alimentado por dipolos na sua linha focal. Em 1897 *Marconi* patenteou um sistema completo de telegrafia sem fios e em 1901 realizou a primeira transmissão transatlântica empregando um transmissor *de salto de faísca* a 60 Hz, ligado entre a terra e um fio horizontal suspenso entre 2 mastros de 60 metros no qual estavam suspensas 50 varetas verticais. A antena receptora foi elevada a 200 metros do nível do solo. Desde a era *Marconi* até à década de 40 a tecnologia de rádio centrou-se essencialmente no emprego de diversas antenas de fio cobrindo as frequências da banda de UHF. Durante a segunda guerra mundial introduziram-se novas antenas (guias de onda, antenas de abertura (buzinas), reflectores) para aplicações radar a frequências de microondas (GHz) graças à descoberta de novos geradores como o *klystron* e o *magnetron*. Esta nova gama de frequências e tipo de antenas foram rapidamente aproveitadas para estabelecer ligações rádio fixas. O impulso seguinte na tecnologia deu-se a partir dos anos 60 com as comunicações via satélite. A introdução de computadores e a aplicação

massiva de métodos numéricos (Método dos momentos, Métodos modais, etc.) têm permitido analisar e sintetizar novas antenas otimizadas para cada aplicação.

*O IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) define uma antena como sendo aquela parte de um sistema transmissor ou receptor desenhada especificamente para irradiar ou receber ondas electromagnéticas (IEEE Std. 145-1983).*

As suas formas são muito variadas tendo como particularidade o facto de constituírem uma transição entre uma zona onde existe uma onda electromagnética guiada e o espaço livre, distribuindo a energia radiada em distintas direcções no espaço com um certo carácter direccionado, que dependerá da aplicação concreta. Por exemplo em radiodifusão ou comunicações móveis o objectivo será irradiar sobre a zona de cobertura de forma omnidireccionada, enquanto ligações rádio fixas requerem geralmente antenas direccionadas. Em recepção toda a antena deverá ser capaz de captar energia do espaço, absorvê-la e entregá-la a um receptor.

As duas missões básicas de uma antena são as de transmitir e receber. Estas missões impõem para cada aplicação uma série de condições particulares sobre:

- A sua capacidade de irradiar e receber de determinadas direcções (Directividade).
- A frequência ou banda de frequências de trabalho.
- Os níveis de potência que suporta.
- A eficiência da antena.

Estas características, e em particular o carácter mais ou menos directivo da antena e a banda de frequências de trabalho, vão impor a existência de uma grande variedade de tipos de antenas sendo algumas delas estudadas no âmbito desta disciplina.

## **1.2 Tipos de antena e bandas de frequência de rádio**

A banda de frequência de trabalho vai definir o tipo de antena a utilizar, incluindo as suas propriedades mais importantes, pois estas últimas dependem do tamanho eléctrico das antenas, ou seja da relação entre o seu comprimento e o comprimento de onda ( $\lambda=c/f$ , sendo  $c$  a velocidade da luz no vazio e  $f$  a frequência).

Por exemplo, em radiodifusão AM (540-1600 KHz), o comprimento de onda é da ordem de 300 metros (calculado a 1000 KHz), pelo que nenhuma antena vai ser electricamente grande (tamanho de vários comprimentos de onda). Como se verá mais adiante, as antenas electricamente curtas nunca podem ser muito directivas, pelo que se vislumbra desde já que esta será uma das características primordiais das antenas nesta banda de frequência.

Pelo contrário na gama das microondas (p. e. 10 GHz) o comprimento de onda é de 3 cm, pelo que construir uma antena electricamente grande é muito mais fácil. A estas frequências as antenas poderão ser muito directivas.

Se as propriedades das antenas variam significativamente com a frequência de trabalho, o mesmo se passa com o mecanismo da propagação das ondas. Do mesmo modo que as antenas se medem com o seu comprimento eléctrico, os diferentes objectos naturais ou artificiais que podem afectar a propagação das ondas ( p. e. uma colina, um edifício, etc) também se vão medir com as suas dimensões eléctricas. Os efeitos que produz um obstáculo de determinada dimensão vão depender da frequência da onda. Do mesmo modo, os mecanismos de propagação vão ser diferentes para diferentes bandas de frequência. A tabela 1.1 mostra as bandas de frequência de rádio bem como as suas principais aplicações.

Em algumas bandas e para algumas aplicações utiliza-se outra nomenclatura. Por exemplo em microondas e radar utiliza-se a divisão em banda L, S, C, X, Ku, K, Ka ..., em aplicações de televisão, banda I, banda II, banda III, ...

Os tipos de antenas mais comuns que estudaremos classificam-se, segundo o modo de radiação, nos seguintes grupos:

- *Elementos de corrente*: tipicamente são fios condutores que suportam uma onda estacionária de corrente.
- *Antenas de onda progressiva*: são fios condutores de grande comprimento eléctrico terminados em cargas adaptadas ou com guias dieléctricas.
- *Arrays ou agrupamentos de antenas*: são um conjunto de antenas iguais onde se controla a amplitude e fase da alimentação de cada elemento para conseguir certas propriedades de radiação.
- *Antenas de abertura*: a radiação é produzida em função dos campos da onda que atravessa a dita abertura. Exemplos de antenas deste tipo são o extremo de um guia

de onda em circuito aberto, guias abuzinadas e estruturas mais complexas como reflectores ou lentes.

Na figura 1.1 representam-se os diferentes tipos de elemento que se utilizam em cada banda de frequência e o tamanho eléctrico das antenas.

Frequency band	Designation	Typical service
3–30 kHz	Very low frequency (VLF)	Navigation, sonar
30–300 kHz	Low frequency (LF)	Radio beacons, navigational aids
300–3000 kHz	Medium frequency (MF)	AM broadcasting, maritime radio, Coast Guard communication, direction finding
3–30 MHz	High frequency (HF)	Telephone, telegraph, and facsimile; shortwave international broadcasting; amateur radio; citizen's band; ship-to-coast and ship-to-aircraft communication
30–300 MHz	Very high frequency (VHF)	Television, FM broadcast, air traffic control, police, taxicab mobile radio, navigational aids
300–3000 MHz	Ultrahigh frequency (UHF)	Television, satellite communication, radiosonde, surveillance radar, navigational aids
3–30 GHz	Superhigh frequency (SHF)	Airborne radar, microwave links, common-carrier land mobile communication, satellite communication
30–300 GHz	Extremely high frequency (EHF)	Radar, experimental

*Tabela 1.1- Bandas de frequência*

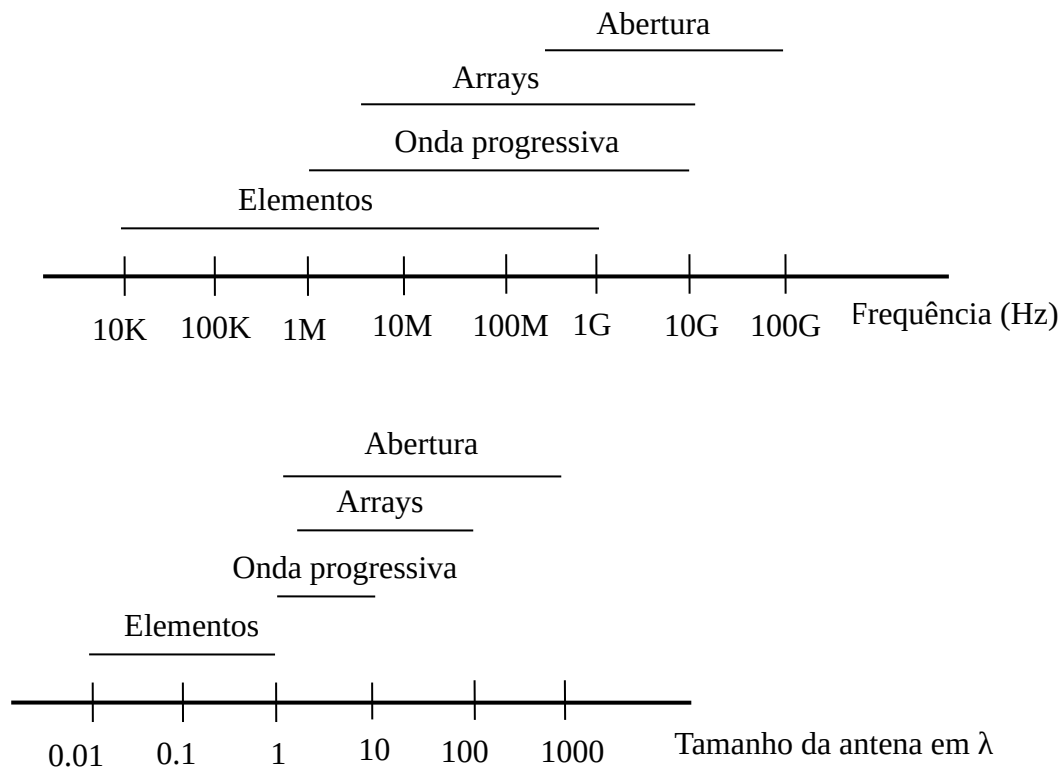


Figura 1.1- Tipos de antenas segundo a banda de frequência e tamanho eléctrico das mesmas

### 1.3 Fundamentos de radiação e propagação

Os fenómenos de radiação de uma antena e de propagação de ondas são fenómenos electromagnéticos regendo-se por isso pelas equações de *Maxwell* que relacionam campos eléctricos e magnéticos com as respectivas fontes (correntes e cargas eléctricas).

O tipo de simetrias existente na maioria das aplicações práticas (ou por vezes forçada com o objectivo de tornar os problemas matematicamente tratáveis) torna frequentemente a análise mais fácil quando se usam sistemas de coordenadas apropriados à simetria do problema (por exemplo esféricas ou cilíndricas em vez de cartesianas). Além disso as equações de *Maxwell* envolvem operadores relativamente pouco comuns em outras áreas da engenharia. Ambos estes assuntos foram tratados na disciplina de electricidade e magnetismo e vão ser recordados na secção 1.3.1 dada a importância dos mesmos no estabelecimento da teoria básica da propagação electromagnética. O propósito da secção 1.3.2 é fazer uma revisão

muito breve ao estabelecimento das equações de *Maxwell*. Finalmente a secção 1.3.3 apresentará as equações de *Maxwell* em regime sinusoidal estabelecendo deste modo a teoria básica da propagação electromagnética relevante para o estudo de radiodifusão em meio aberto. A secção 1.3.4 apresentará a teoria básica relativa às condições fronteira em meios condutores enquanto a secção 1.3.5 apresentará a equação de onda com o objectivo de estabelecer uma relação o mais estreita possível entre a teoria das antenas e os fenómenos de propagação usados por exemplo em guias de onda. Finalmente na secção 1.3.6 começar-se-á o estudo da teoria das antenas.

### **1.3.1 Sistemas de coordenadas e operadores diferenciais**

A simetria existente na grande maioria dos problemas relacionados com o electromagnetismo simplifica extraordinariamente a sua solução se for usado o sistema de coordenadas mais adequado. Consideremos por exemplo, o campo magnético criado por uma corrente transportada por um fio condutor infinito. O campo magnético produzido por esta corrente será o mesmo em todos os pontos situados à mesma distância do fio, independentemente da sua posição angular ou da sua coordenada num eixo paralelo à corrente. Consequentemente, neste caso, o sistema de coordenadas cilíndricas será o mais adequado. Consideremos agora uma pequena esfera eletricamente carregada. O campo eléctrico criado por esta esfera será igual em todos os pontos que estejam à mesma distância da esfera. Neste caso o sistema de coordenadas mais fácil de usar será o sistema de coordenadas esféricas.

#### **1.3.1.1 Sistemas de coordenadas**

O sistema de coordenadas mais comum é o denominado sistema de coordenadas cartesianas, que divide o espaço tridimensional em três planos perpendiculares entre si cuja intersecção define um ponto no espaço. Representando por  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  os vectores de comprimento unitário segundo a direcção respectivamente dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  podemos definir neste sistema de coordenadas os elementos infinitesimais de comprimento, área e volume. O elemento infinitesimal de comprimento será

$$dl = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad (1.1)$$

Existem 3 elementos infinitesimais de área respectivamente apoiados sobre os 3 planos que dividem o espaço cartesiano. Representemos por  $dS_x$  o elemento infinitesimal de área perpendicular a  $\hat{i}$  ou seja apoiado no plano y-z. Definamos do mesmo modo  $dS_y$  e  $dS_z$ . Então os 3 elementos infinitesimais de área serão simplesmente dados por

$$\begin{aligned} dS_x &= dydz \\ dS_y &= dx dz \\ dS_z &= dx dy \end{aligned} \quad (1.2)$$

O elemento infinitesimal de volume será dado simplesmente por

$$dv = dx dy dz \quad (1.3)$$

Embora o sistema de coordenadas cartesianas seja o mais usado, sistemas de coordenadas alternativos apresentam grandes vantagens na análise de problemas com tipos de simetria específico. Imagine por exemplo um fio condutor infinito percorrido por uma corrente eléctrica e colocado por hipótese ao longo do eixo O-Z. O efeito desta corrente fora do fio será o mesmo em qualquer ponto do espaço que esteja à mesma distância do fio. Sendo o fio infinito qualquer ponto situado na superfície de qualquer cilindro envolvendo o fio condutor e tendo este como seu centro sofrerá o mesmo tipo de acção provocado pela corrente que atravessa o fio condutor. A análise deste tipo de problemas com simetria cilíndrica vem matematicamente bastante simplificada se forem usadas coordenadas cilíndricas em vez de coordenadas cartesianas. No sistema de coordenadas cilíndricas um ponto no espaço é definido pela intersecção de um cilindro e 2 planos como mostra a figura 1.2

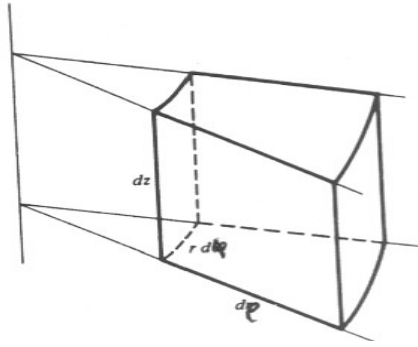


Figura 1.2- Sistema de coordenadas cilíndricas

Sejam respectivamente  $\hat{i}_\rho$ ,  $\hat{i}_\phi$  e  $\hat{i}_z$  os vectores unitários segundo a direcção radial, tangencial ao cilindro e do eixo O-Z respectivamente. O elemento infinitesimal de comprimento é dado por

$$dl = d\rho \hat{i}_\rho + \rho d\phi \hat{i}_\phi + dz \hat{i}_z \quad (1.4)$$

sendo os elementos infinitesimais de área dados por

$$\begin{aligned} dS_\rho &= \rho d\phi dz \\ dS_\phi &= d\rho dz \\ dS_z &= \rho d\rho d\phi \end{aligned} \quad (1.5)$$

e o elemento infinitesimal de volume dado por

$$dv = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.6)$$

Outros problemas são caracterizados por outros tipos de simetria. Considere-se como exemplo uma pequena esfera carregada electricamente de modo uniforme. O campo eléctrico fora da esfera será dependente apenas da distância a que o ponto se encontra da carga, significando que todos os pontos pertencentes à mesma superfície esférica que tem como ponto central a carga ficarão sujeitos ao mesmo campo electrostático. Neste caso a simetria



esférica do problema é evidente pelo que o uso de coordenadas esféricas simplificará muito a resolução do problema.

As coordenadas de um ponto são neste caso dadas pela intersecção de um plano contendo o eixo O-Z com um cone com vértice na origem O-Z e por uma esfera com centro na origem dos eixos, como elucida a figura 1.3.

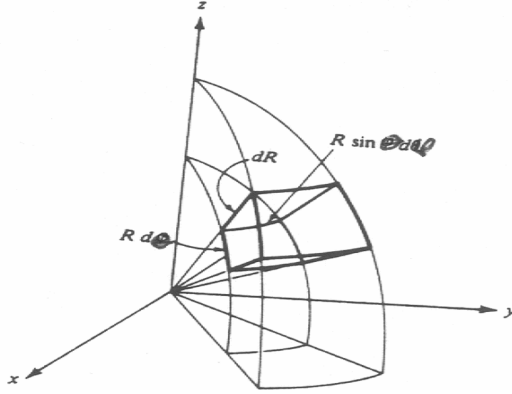


Figura 1.3- Sistema de coordenadas esféricas

Sejam respectivamente  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\phi}$  os vectores unitários segundo a direcção radial, tangencial à esfera no plano z-y e tangencial à esfera no plano x-y respectivamente. O elemento infinitesimal de comprimento é neste caso dado por

$$dl = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\phi\hat{\phi} \quad (1.7)$$

sendo os elementos infinitesimais de área dados por

$$\begin{aligned} dS_r &= r^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ dS_\theta &= r \sin\theta dr d\phi \\ dS_\phi &= r dr d\theta \end{aligned} \quad (1.8)$$

e o elemento infinitesimal de volume dado por

$$dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (1.9)$$

### 1.3.1.2 Operadores diferenciais

O gradiente de um campo escalar é por definição um campo vectorial que tem a direcção e sentido da derivada direcciona máxima do campo (função) escalar e é-lhe igual em módulo. Define-se em coordenadas cartesianas como

$$\nabla U = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) U \quad (1.10)$$

em coordenadas cilíndricas como

$$\begin{aligned} \nabla U &= (\nabla U)_\rho \hat{i}_\rho + (\nabla U)_\varphi \hat{i}_\varphi + (\nabla U)_z \hat{i}_z \\ &= \frac{\partial U}{\partial \rho} \hat{i}_\rho + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \hat{i}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{i}_z \\ &= \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dl_\rho} \hat{i}_\rho + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dl_\varphi} \hat{i}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dl_z} \hat{i}_z \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{i}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{i}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \hat{i}_z \right) U \end{aligned} \quad (1.11)$$

e do mesmo modo em coordenadas esféricas como

$$\begin{aligned} \nabla U &= (\nabla U)_r \hat{i}_r + (\nabla U)_\theta \hat{i}_\theta + (\nabla U)_\varphi \hat{i}_\varphi \\ &= \frac{\partial U}{\partial r} \hat{i}_r + \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{i}_\theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \hat{i}_\varphi \\ &= \frac{\partial U}{\partial r} \frac{dr}{dl_r} \hat{i}_r + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dl_\theta} \hat{i}_\theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dl_\varphi} \hat{i}_\varphi \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \hat{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{i}_\varphi \right) U \end{aligned} \quad (1.12)$$

A divergência de um campo vectorial  $\vec{A}$  num ponto  $P$  é definida como a razão entre o fluxo total que sai de um elemento de volume  $\Delta V$  e o volume  $\Delta V$ , no limite em que  $\Delta V$  tende para zero, à volta de  $P$ .

$$\nabla \cdot \vec{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} \quad (1.13)$$

Mostremos agora rapidamente que esta definição representa a derivada do campo na direcção das linhas de força. Consideremos para o efeito um tubo de forças de volume elementar  $\Delta V$  paralelo ao plano x-y e por questões de simplicidade um campo vectorial apenas com componente segundo o eixo O-X como mostra a figura 1.4.

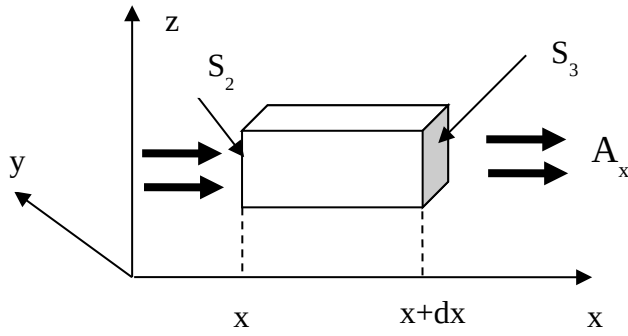


Figura 1.4- Fluxo através de um tubo de forças de volume elementar

Ora

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{S_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}_2 + \int_{S_3} \vec{A} \cdot d\vec{s}_3 \quad (1.14)$$

sendo que

$$\int_{S_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}_2 = - A_x(x) dy dz \quad (1.15)$$

e do mesmo modo

$$\int_{s_3} A \cdot ds_3 = A_x(x+dx) dydz \quad (1.16)$$

Se  $dx$  é pequeno então

$$A_x(x+dx) = A_x(x) + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx + \dots \quad (1.17)$$

Substituindo as equações (1.15), (1.16) e (1.17) na equação (1.14) obtém-se

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = [A_x(x+dx) - A_x(x)] dydz \approx \left[ \frac{\partial A_x}{\partial x} dx \right] dydz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dV \quad (1.18)$$

Conclui-se então que se o campo vectorial  $\vec{A}$  tem apenas componente segundo o eixo O-X ou seja  $\vec{A} = A_x \hat{x}$  então a divergência de  $\vec{A}$  é a medida da variação do campo na direcção deste pois

$$\nabla \cdot \vec{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \quad (1.19)$$

Para um campo  $\vec{A}$  com componentes nos 3 eixos, as componentes segundo os 3 eixos podem ser consideradas separadamente pelo que

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} \approx \left[ \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (1.20)$$

ou

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.21)$$

Se a divergência de um campo vectorial é a derivada do campo na direcção das linhas de força, então se numa região fechada a divergência for positiva significa que dentro dessa região existem fontes de campo ou seja divergem linhas de campo de dentro dessa região. Se a divergência for negativa então nessa região escoam-se campo e se for nula então dentro dessa região fechada não existem fontes nem escoadores de campo.

A divergência de um campo vectorial escreve-se em coordenadas cilíndricas e esféricas respectivamente como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.22)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] \quad (1.23)$$

Um teorema muito importante no âmbito da electrostática é o teorema de *Gauss* que relaciona na forma integral o fluxo e a divergência de um campo vectorial.

O teorema de Gauss diz que o *fluxo de um campo vectorial  $\vec{A}$  que sai de uma superfície fechada  $S$  é igual ao integral estendido ao volume  $V$  limitado pela superfície  $S$ , da divergência do campo  $\vec{A}$* , ou seja

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv \quad (1.24)$$

no caso de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  existir e ser finita no domínio limitado por  $S$ . Este teorema permite estabelecer a lei de *Gauss* na sua forma diferencial que é também uma das equações de *Maxwell*, ou seja se

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.25)$$

e

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv \quad (1.26)$$

então igualando o primeiro membro da equação (1.25) ao segundo membro da equação (1.26) e atendendo à equação (1.24) pode-se estabelecer que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.27)$$

O rotacional de um campo vectorial  $\vec{A}$  é a relação entre a circulação de  $\vec{A}$  ao longo de uma curva fechada  $C$  e a área  $\Delta S$  definida por  $C$  quando  $\Delta S$  tende para zero. O rotacional é uma grandeza vectorial com a direcção do vector área elementar (normal ao plano de  $C$ ) e sentido dado pela regra do saca-rolhas ou polegar da mão direita, e definido analiticamente por

$$(\nabla \wedge \vec{A})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \quad (1.28)$$

Calculemos então a componente do rotacional na direcção do eixo O-X como mostra a figura 1.5.

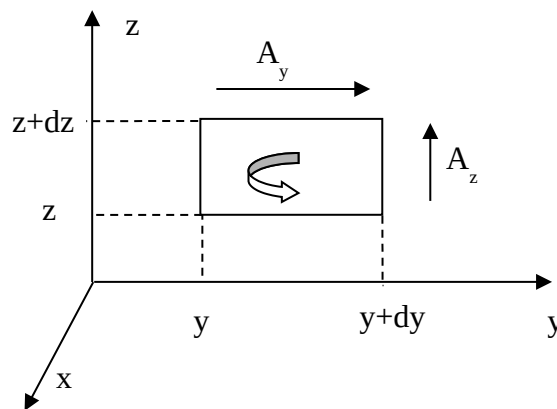


Figura 1.5- Circulação de um campo vectorial ao longo de um contorno elementar

$$\oint_{\text{ex}} A \cdot dl = \int_y^{y+dy} A_z|_{y+dy} dz + \int_z^{z+dz} A_y|_{z+dz} dy + \int_{y+dy}^y A_z|_y dz + \int_z^{z+dz} A_y|_z dy \quad (1.29)$$

Considerando as componentes do campo constantes ao longo dos elementos infinitesimais de comprimento em que se faz a integração obtém-se

$$\oint_{\text{ex}} A \cdot dl \approx (A_z dz)|_{y+dy} - (A_z dz)|_y + (A_y dy)|_{z+dz} - (A_y dy)|_z \quad (1.30)$$

Atendendo a que

$$A_z dz|_{y+dy} = A_z dz|_y + \frac{\partial(A_z dz)}{\partial y} dy \quad (1.31)$$

e

$$A_y dy|_{z+dz} = A_y dy|_z + \frac{\partial(A_y dy)}{\partial z} dz \quad (1.32)$$

a equação (1.30) pode escrever-se como

$$\oint_{\text{ex}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz \quad (1.33)$$

ou, a partir da equação (1.28) podemos escrever

$$(\nabla \wedge \vec{A})_x = \lim_{dy, dz \rightarrow 0} \frac{\oint_{\text{ex}} \vec{A} \cdot d\vec{l}}{dy dz} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (1.34)$$

De modo semelhante se podem obter as componentes do rotacional em y e z. A equação (1.34) mostra que as componentes do rotacional (neste caso só a componente segundo O-X) contêm contribuição das outras componentes sob a forma de derivadas, o que significa que o rotacional é a derivada espacial do campo vectorial na direcção normal às linhas de força. O rotacional pode escrever-se sob a forma do determinante de uma matriz 3x3 como segue

$$\nabla^{\wedge} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (1.35)$$

Por conveniente escolha dos percursos de integração podem obter-se de modo semelhante as expressões do rotacional nas coordenadas cilíndricas e esféricas como segue

$$\nabla^{\wedge} \vec{A} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{i}_\rho + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{i}_\varphi + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{i}_z \quad (1.36)$$

$$\nabla^{\wedge} \vec{A} = \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{i}_r + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \vec{i}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{i}_\varphi \quad (1.37)$$

O teorema de *stokes* é um teorema muito importante na análise de muitos fenómenos electromagnéticos, está directamente ligado à definição de rotacional de um campo vectorial e pode ser enunciado como segue:

*A circulação de um vector  $\vec{A}$  numa curva fechada  $C$  é igual ao fluxo do rotacional de  $\vec{A}$  através de qualquer superfície que se apoie na curva fechada  $C$ .*

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla^{\wedge} \vec{A}) \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (1.38)$$

em que os vectores tangencial à curva e perpendicular à área são definidos no sentido directo.

### 1.3.2 Revisão sucinta sobre o estabelecimento das equações de *Maxwell*

Os conhecimentos básicos da electrostática permitem estabelecer as equações de *Maxwell* para o campo eléctrico em regime estacionário. A equação (1.27), repetida aqui por conveniência, usa o conhecimento da electrostática da equação (1.25) e estabelece uma das equações de *Maxwell* em regime estacionário



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.27)$$

Se o campo eléctrico  $\vec{E}$  deriva de um potencial  $V$ , onde por convenção as linhas de campo apontam no sentido dos potenciais decrescentes então  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$  o que leva por aplicação directa da definição de rotacional a

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (1.39)$$

Esta igualdade pode provar-se pela definição de rotacional (equação (1.35)) atendendo a que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \dots \quad (1.40)$$

Diz-se por isso que o campo  $\vec{E}$  é conservativo, ou seja ao mover uma carga eléctrica de tal modo que ela volte ao ponto de partida a energia é conservada. Define-se então uma energia potencial, só função da posição, de tal modo que a energia gasta ao movimentar uma carga entre 2 pontos só depende dos pontos inicial e final e não do caminho percorrido.

Do mesmo modo os conhecimentos básicos da magnetostática permitem estabelecer as equações de *Maxwell* para o campo magnético em regime estacionário. Se considerarmos um fio de comprimento infinito posicionado ao longo do eixo O-Z e percorrido por uma corrente contínua (regime estacionário) sabemos da magnetostática que a indução magnética criada por esta corrente é dada por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{i}_\varphi \quad (1.41)$$

ou equivalentemente usando o integral de contorno fechado

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (1.42)$$

Usando o teorema de *stokes* e a equação (1.42) podemos escrever que

$$\oint (\nabla \wedge \vec{B}) \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \oint J \cdot d\vec{S} \quad (1.43)$$

onde  $J$  representa a densidade superficial de corrente que atravessa a superfície apoiada no contorno  $C$ . Esta igualdade permite estabelecer mais uma equação de *Maxwell* em regime estacionário

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.44)$$

Para o caso presente do fio rectilíneo infinito colocado ao longo do eixo O-Z o vector indução magnética  $\vec{B}$  é independente de  $z$  pelo que a sua divergência será dada por

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \quad (1.45)$$

Aplicando o teorema de *Gauss* a 2 dimensões obtemos

$$\oint \nabla \cdot \vec{B} dS = \oint \vec{B} \cdot \vec{n} dl = 0 \quad (1.46)$$

pois  $\vec{B} \perp \vec{n}$ , de onde se conclui que

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.47)$$

Neste caso o que existe é conservação do fluxo em vez de conservação da energia como no caso do campo electrostático. Como a divergência de um rotacional é nula costuma designar-se por potencial vector um hipotético campo vectorial  $\vec{A}$  a partir do qual se obtém o campo  $\vec{B}$  através da igualdade  $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ . Deste modo consegue-se uma semelhança com o campo electrostático que é derivado de um gradiente. Esta semelhança vai ser usada mais adiante no estabelecimento do campo electromagnético gerado por antenas.

As equações (1.27), (1.39), (1.44) e (1.47) são conhecidas como as equações de *Maxwell* em regime estacionário. Podemos verificar que aparentemente os campos eléctrico e magnético são completamente independentes, o que significaria que cargas eléctricas e

correntes também o são. Mas correntes não são mais que cargas eléctricas em movimento. Então é plausível que em regime transitório os campos eléctrico e magnético sejam dependentes um do outro.

Consideremos então uma superfície fechada da qual flui uma corrente eléctrica. Pelo principio da conservação da carga a corrente que sai dessa superfície é igual à taxa de diminuição de carga no interior da mesma, ou seja

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \frac{dQ}{dt} \quad (1.48)$$

Aplicando o teorema de Gauss ao fluxo do vector densidade de corrente obtemos

$$\int \nabla \cdot \vec{J} dv = - \frac{dQ}{dt} = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (1.49)$$

o que significa que

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.50)$$

que é chamada a equação da continuidade e traduz o principio de conservação da carga eléctrica. Esta equação mostra que existe uma relação entre carga e corrente eléctrica pelo que os campos eléctrico e magnético estão certamente relacionados em regime não estacionário.

Consideremos a lei de *Faraday* que diz que a força electromotriz induzida num circuito fechado é igual e de sinal contrário (lei de *Lenz*) à variação de fluxo por unidade de tempo, ou seja

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.51)$$

onde  $\Phi$  é o fluxo da indução magnética ou seja

$$\Phi = \int B \cdot d\vec{S} \quad (1.52)$$

A equação (1.51) pode então escrever-se como

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \frac{\partial B}{\partial t} d\vec{S} \quad (1.53)$$

Aplicando o teorema de *stokes* à equação anterior obtém-se

$$\int \nabla \wedge \vec{E} d\vec{S} = - \int \frac{\partial B}{\partial t} d\vec{S} \quad (1.54)$$

ou seja

$$\nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.55)$$

A equação anterior traduz a lei de *Faraday* e portanto uma relação entre os campos eléctrico e magnético que existe apenas em regime não estacionário. No entanto esta relação não é confirmada pela equação (1.44). Além disso podemos observar que as equações (1.44) e (1.50) são inconsistentes. Aplicando o operador divergência a ambos os membros da equação (1.44) obtemos

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{B}) = 0 = \nabla \cdot \vec{J} \quad (1.56)$$

De facto pela equação (1.50) a divergência do vector densidade superficial de corrente não é nula mas proporcional à variação da densidade de carga eléctrica. Se escrevermos a equação (1.44) como

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (1.57)$$

podemos verificar que esta equação agora já inclui a equação da continuidade. A aplicação do operador divergência a ambos os membros da equação (1.57) resulta directamente na equação da continuidade.

A forma final das equações de *Maxwell* na sua forma diferencial é então

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \wedge \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (1.58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \wedge \vec{B} &= \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (1.59)$$

Estas equações incluem a equação da continuidade e podem escrever-se também na forma integral

$$\oint \epsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = \int \rho dV \quad \oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{S}$$

(1.60)

que representam respectivamente a lei de *Gauss* do campo eléctrico e a lei de *Faraday*. Para o campo magnético temos

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} d\vec{l} = \int \vec{J} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int \epsilon_0 \vec{E} d\vec{S}$$

(1.61)

que representam respectivamente a lei de *Gauss* do campo magnético e a lei de *Ampère* que inclui a equação da continuidade. Finalmente a equação da continuidade (ou da conservação da carga) na forma integral é dada por

$$\oint \vec{J} d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int \rho dV$$

(1.62)

### 1.3.3 Equações de *Maxwell* em regime sinusoidal

Normalmente o estudo dos fenómenos de radiação em antenas restringe-se ao regime permanente sinusoidal dado que a largura de banda destas é muito grande quando comparado com as larguras de banda de áudio e vídeo. É esta característica que permite que uma antena possa captar simultaneamente várias emissões de rádio, cada uma modulada pela sua portadora, que transporta sinais com larguras de banda obviamente muito menor que a frequência da respectiva portadora. Neste caso as variações temporais das fontes são da forma  $e^{j\omega t}$ , pelo que expressando as amplitudes de correntes e campos como fasores, as equações de *Maxwell* podem escrever-se como

$$\nabla \wedge E = -j\omega B \quad (1.63)$$

$$\nabla \wedge H = j\omega D + J \quad (1.64)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.65)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (1.66)$$

As equações anteriores conjuntamente com a equação da continuidade, que expressa o princípio da conservação da carga, constituem a base matemática para a resolução dos problemas de radiação electromagnética e propagação de ondas.

De um modo geral em regime não estacionário os campos são função da posição e do tempo. A representação destes campos na forma fasorial está relacionada com a representação temporal (como é usual) do seguinte modo

$$E(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[ \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right] \quad (1.67)$$

### 1.3.4 Propagação em meios condutores. Condições de fronteira em condutores perfeitos

Quando a propagação se efectua em meios condutores é gerada em cada ponto uma corrente proporcional ao campo eléctrico no referido ponto e á condutividade do meio

$$J = \sigma E \quad (1.68)$$

Nestas condições a equação (1.64) pode ser escrita como

$$\nabla \wedge \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} = j\omega\epsilon \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right) \vec{E} \quad (69)$$

A permitividade eléctrica é agora uma grandeza complexa evidenciando perdas num meio condutor. A medida das perdas do meio é normalmente expressa na forma angular de tal modo que se define a tangente do ângulo de perdas como

$$\tan \gamma = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \quad (1.70)$$

A resolução dos problemas de radiação electromagnética faz-se normalmente mediante a resolução numérica de sistemas de equações lineares que surgem da aplicação das condições de fronteira à antena. Nas condições de fronteira aparecem os campos eléctrico e magnético, bem como as suas fontes, que como vimos na secção anterior se relacionam através das equações de *Maxwell*. O objectivo é encontrar as distribuições de corrente  $J$  sobre os condutores, e a partir delas obter os campos irradiados. Às frequências de rádio, a profundidade de penetração da corrente e dos campos no interior dos condutores que definem

a antena  $\left( \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \right)$  é tão pequena (ordem dos  $\mu\text{m}$ ), que os condutores reais podem substituir-se por condutores ideais ( $\sigma = \infty$ ) e assumir que as correntes são superficiais. Sob esta aproximação, as condições de fronteira a aplicar são as de um condutor perfeito.

As condições fronteira destinam-se a estabelecer as equações de *Maxwell* em pontos de descontinuidade em componentes de  $E$  ou  $B$ . Estes pontos de descontinuidade encontram-se geralmente em superfícies com distribuições de carga ou corrente. Estas distribuições derivam das já conhecidas retirando-lhe uma dimensão. Define-se então densidade superficial de carga como a carga por unidade de área distribuída numa camada de espessura nula

$$\rho_s = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta a} \quad (1.71)$$

De modo análogo define-se uma densidade superficial de corrente  $J_s$ , corrente que percorre uma superfície de espessura nula como

$$\vec{J}_s = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \hat{i}_n \quad (1.72)$$

onde  $\Delta I$  é a corrente que atravessa o elemento  $\Delta l$  perpendicular à direcção  $\hat{i}_n$  da corrente.

Vejamos agora as condições de fronteira dos campos na superfície de separação entre 2 meios. Sejam  $J_1$  e  $J_2$  as densidades de corrente em cada um dos lados da superfície  $\Sigma$  onde existe descontinuidade, como mostra a figura 1.6

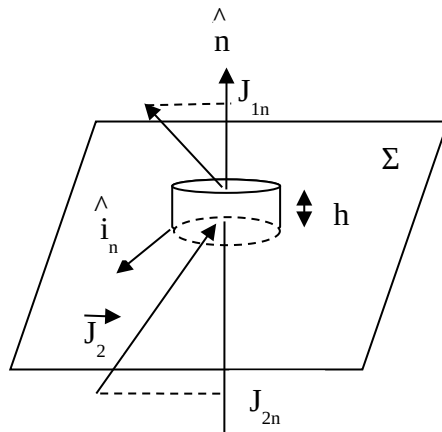


Figura 1.6- Derivação das componentes normais do campo electromagnético na superfície de separação entre 2 meios.

Apliquemos o princípio da conservação da carga (equação (1.62)) a uma superfície cilíndrica elementar de eixo perpendicular a  $\Sigma$  e de base  $\Delta a$  paralela a  $\Sigma$ . Seja  $C$  a intersecção deste cilindro com  $\Sigma$ .

No limite em que a altura  $h$  do cilindro tende para zero temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint J dS = I_1 + I_2 + I_C \quad (1.73)$$

onde



$$\begin{aligned}
 I_1 &= (J_1 \cdot n) \Delta a \\
 I_2 &= - (J_2 \cdot n) \Delta a \\
 I_C &= \oint_C J_s \cdot \vec{i}_n dl
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

com  $n$  definido normalmente a  $\Sigma$  e apontando para o lado 1 da superfície e  $\vec{i}_n$  o vector unitário tangente a  $\Sigma$  e normal ao contorno  $C$ .

A carga contida no cilindro será

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int \rho dv = \rho_s \Delta a \tag{1.75}$$

aplicando agora a lei da conservação da carga (equação (1.62)) obtém-se

$$\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) \Delta a + \oint_C \vec{J}_s \cdot \vec{i}_n dl = - \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \Delta a \tag{1.76}$$

ou dividindo por  $\Delta a$  e tomando o limite quando  $\Delta a \rightarrow 0$

$$\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) + \nabla_{\Sigma} \cdot \vec{J}_s = - \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \tag{1.77}$$

onde a divergência superficial de  $J_s$  é dada por

$$\nabla_{\Sigma} \cdot \vec{J}_s = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{J}_s \cdot \vec{i}_n dl}{\Delta a} \tag{1.78}$$

A equação (1.77) diz-nos que a taxa de variação de carga superficial num ponto é igual ao fluxo de corrente por unidade de área que sai desse ponto em todas as direcções; a primeira parcela corresponde à corrente normalmente a  $\Sigma$  e a segunda parcela à corrente superficial em  $\Sigma$ .

O comportamento das componentes normais dos campos  $B$  e  $E$  obtém-se de modo semelhante. Consideremos a mesma superfície cilíndrica normal à superfície em que o campo é descontínuo e em que existe uma densidade superficial de carga  $\rho_s$ . Quando  $h \rightarrow 0$  o fluxo de  $E$  que atravessa a parte lateral do cilindro é nula pois a área é nula pelo que resulta a igualdade expressa pela equação (1.79). Aplicando a lei de Gauss ao cilindro

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dv$$

e fazendo  $h \rightarrow 0$  obtemos a equação (1.75) e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = n \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \Delta a \quad (1.79)$$

No limite quando  $\Delta a \rightarrow 0$ , usando a equação (1.75) e a lei de Gauss obtemos

$$n \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (1.80)$$

A equação (1.80) mostra que a componente normal do campo eléctrico não é contínua no caso de haver carga superficial que actua como fonte de campo.

No caso do campo magnético temos sempre

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

pois a divergência do campo magnético é nula ou seja

$$n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (1.81)$$

ou seja a componente normal de  $B$  é contínua sobre a superfície em qualquer circunstância.

O comportamento das componentes tangenciais dos campos  $B$  e  $E$  obtém-se por aplicação do teorema de Stokes e das respectivas equações integrais. Consideremos a equação (1.60) (lado direito) repetida aqui por conveniência

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{S} \quad (1.60)$$

Consideremos agora a figura 1.7 onde a superfície  $\Sigma$  tem distribuições superficiais de cargas  $\rho_s$  e correntes  $J_s$ .

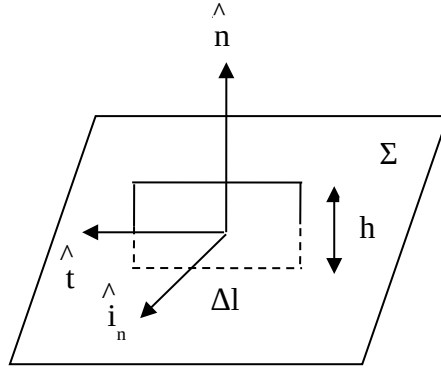


Figura 1.7- Derivação das componentes tangenciais do campo electromagnético na superfície de separação entre 2 meios.

Escolha-se um contorno rectangular na vizinhança da superfície e paralela a esta, com lados  $L_1$  e  $L_2$  e comprimento  $\Delta l$  fechando-se por 2 segmentos de comprimento  $h$  normais a  $\Sigma$ . Consideremos como na figura (1.6) o meio 1 como sendo acima de  $\Sigma$  e o meio 2 abaixo de  $\Sigma$ . Aplicando a equação (1.60) e tomando o limite quando  $h \rightarrow 0$  obtém-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{t} dl = \vec{E}_1 \cdot \hat{t} \Delta l - \vec{E}_2 \cdot \hat{t} \Delta l = \hat{t} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \Delta l \quad (1.82)$$

O segundo membro da equação (1.60) é nulo pois a área tende para zero com  $h$ , ou seja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Sigma} B dS = 0 \quad (1.83)$$

Então temos que em  $\Sigma$

$$\hat{t} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = n \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (1.84)$$

o que significa que a componente tangencial do campo eléctrico é contínua sobre a superfície em qualquer circunstância.

Para o campo magnético usamos a equação (1.61) repetida aqui por conveniência e o mesmo contorno rectangular fazendo  $h \rightarrow 0$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{l} = \int_{\Sigma} \vec{J} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \epsilon_0 \vec{E} d\vec{S} \quad (1.61)$$

No limite quando  $h \rightarrow 0$  temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{t} dl = \hat{t} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \Delta l \quad (1.85)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \vec{J} d\vec{S} = (\vec{J}_s \cdot \hat{t}_n) \Delta l \quad (1.86)$$

e ainda

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_S E \cdot dS = 0 \quad (1.87)$$

pois a área tende para zero com  $h$ . Substituindo as equações (1.85), (1.86) e (1.87) na equação (1.61) obtemos

$$\hat{t} \cdot (B_1 - B_2) = \hat{n} \wedge (B_1 - B_2) = \mu_0 J_s \cdot \hat{i}_n \quad (1.88)$$

o que significa que a componente tangencial de  $B$  só será contínua no caso de não haver corrente superficial.

No âmbito do estudo da teoria das antenas quando estas são compostas por condutores perfeitos importa realçar alguns aspectos:

- 1- Se o condutor é perfeito a corrente só existe à superfície. Neste caso o campo magnético no interior do condutor é nulo pois qualquer contorno fechado no interior do condutor tem um fluxo de corrente nulo na área por ele envolvida (teorema de Stokes). Pela lei de Gauss o campo eléctrico no interior do condutor também será nulo pois sendo a condutividade infinita não existirão cargas no interior do condutor. Então pela equação (1.81) a componente normal do campo magnético será nula.
- 2- Pela equação (1.84), e considerando o que foi dito no ponto 1 nomeadamente o facto do campo eléctrico ser nulo no interior do condutor, a componente tangencial do campo eléctrico será nula.
- 3- O campo magnético a existir será fora do condutor mas só se houver corrente e será perpendicular ao plano definido por esta e pela normal à superfície de acordo com a equação (1.88).
- 4- O campo eléctrico a existir será fora do condutor mas só se houver carga à superfície e será perpendicular à superfície do condutor de acordo com a equação (1.80).

*Compreenda bem estas observações !!*

As equações (1.77), (1.80), (1.81), (1.84) e (1.88) são as equações de *Maxwell* aplicadas a superfícies com distribuição de cargas e correntes. Os produtos escalares e vectoriais nestas equações são frequentemente chamados respectivamente divergências e rotacionais superficiais. Por exemplo a equação (1.88) é conhecida como rotacional superficial do campo magnético ao passo que a equação (1.80) é conhecida como divergência superficial do campo eléctrico.

### 1.3.5 Equação de onda (onda electromagnética plana)

Consideremos as equações (1.58) e (1.59) (lado direito) repetidas aqui por conveniência

$$\nabla^{\wedge} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.58)$$

$$\nabla^{\wedge} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (1.59)$$

Aplicando o operador rotacional a ambos os membros da equação (1.58) ficamos com

$$\nabla^{\wedge} (\nabla^{\wedge} \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \quad (1.89)$$

Antes de avançarmos recordemos o operador Laplaciano  $\nabla^2$  que existe quer para funções escalares quer para funções vectoriais e é definido para funções escalares como

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (1.89.1)$$

e para funções vectoriais como

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \hat{i} + \nabla^2 A_y \hat{j} + \nabla^2 A_z \hat{k} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \hat{i} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \hat{j} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \hat{k} \quad (1.89.2)$$

Continuemos agora com o nosso raciocínio substituindo a parte direita da equação (1.58) na equação (1.89) obtendo

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \vec{B}) \quad (1.90)$$

substituindo agora a equação (1.59) ficamos com

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.91)$$

ou numa forma mais conveniente

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.92)$$

Verifique agora como exercício que começando por aplicar o rotacional à equação (1.59) e substituindo depois a equação (1.58) obtém

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.93)$$

pelo que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  satisfazem a mesma equação. Estamos interessados em estudar a propagação em espaço livre ou seja com condutividade nula pelo que a equação de onda se simplifica para

$$\nabla^2 \Psi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.94)$$

que é a equação de onda a 3 dimensões com velocidade de propagação

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (1.95)$$

Consideremos agora para simplificação de cálculos uma onda que se propaga segundo o eixo OZ. Temos então

$$\Psi = \Psi(z, t) \quad (1.96)$$

pelo que

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0 \quad (1.97)$$

e a equação de onda reduz-se a

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.98)$$

Usando o método de separação de variáveis para obter a solução da equação (1.98) vem

$$\Psi(z, t) = Z(z)T(t) \quad (1.99)$$

Derivando duas vezes a equação (1.99) em ordem a  $z$  e em ordem a  $t$  e substituindo na equação (1.98) obtém-se

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{1}{v^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2 = \text{constante} \quad (1.100)$$

ou resumindo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -K^2 Z \Rightarrow Z_k(z) = A_k e^{jKz} + B_k e^{-jKz} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -K^2 v^2 T \Rightarrow T_k(t) = C_k e^{j\omega t} + D_k e^{-j\omega t} \end{cases} \quad (1.101)$$

com

$$\omega^2 = K^2 v^2 \quad (1.102)$$



A solução geral da equação (1.98) é então atendendo à equação (1.99)

$$\Psi(z,t) = \sum_k \left[ A_k D_k e^{j(kz - \omega t)} + B_k C_k e^{-j(kz - \omega t)} \right] + \sum_k \left[ A_k C_k e^{j(kz + \omega t)} + B_k D_k e^{-j(kz + \omega t)} \right] \quad (1.103)$$

A solução geral da equação de onda a uma dimensão é uma sobreposição de ondas planas sinusoidais. Consideremos apenas uma dessas ondas

$$E = E_0 e^{j(Kz - \omega t)} \quad B = B_0 e^{j(Kz - \omega t)} \quad (1.104)$$

onde  $E_0$  e  $B_0$  são vectores constantes que verificam as equações de *Maxwell*. Definem-se ainda o período espacial como

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|} \quad (1.105)$$

e a velocidade de fase como

$$v = \frac{\omega}{|k|} \quad (1.106)$$

Apliquemos agora as equações de *Maxwell* à equação de onda dos campos (equação (1.104)) atendendo a que estamos interessados em estudar o fenómeno em espaço livre (isento de cargas eléctricas). Nestas condições atendendo às equações (1.21) e (1.27) e ao facto da onda electromagnética não ter componentes sobre OX nem OY podemos escrever

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = jKE_z = 0 \quad (1.107)$$

e também

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = jKB_z = 0 \quad (1.108)$$

As equações (1.107) e (1.108) mostram que as componentes do campo segundo a direcção de propagação são nulas ou por outras palavras os campos eléctrico e magnético são perpendiculares à direcção de propagação (OZ).

Continuando a aplicar as equações de Maxwell e atendendo a que as componentes dos campos segundo OZ são nulas poderemos escrever

$$\nabla \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = jK(-E_y \hat{i} + E_x \hat{j}) = jK \hat{k} \wedge \vec{E} \quad (1.109)$$

A terceira igualdade da equação (1.109) resulta como se pode verificar da definição de produto vectorial. Usando agora as equações (1.55), (1.63) e (1.109) podemos escrever

$$K \hat{k} \wedge \vec{E} = \omega B \quad (1.110)$$

o que significa que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares entre si e também perpendiculares a  $\hat{k}$  que é a direcção de propagação da onda.

Muito relevante no âmbito do estudo das antenas é a potência irradiada. No nosso caso da propagação da onda segundo OZ a potência é obviamente irradiada segundo a direcção  $\hat{k}$  e concluímos que quer  $\vec{E}$  quer  $\vec{B}$  são perpendiculares à direcção de radiação, o que sugere que a quantidade  $\vec{E} \wedge \vec{B}$  deverá estar relacionada, pelo menos em direcção, com a potência do campo electromagnético. Vejamos então as unidades desta grandeza. O campo eléctrico é dado em Volts/m por ser por definição o gradiente de uma função potencial. O campo magnético  $\vec{H}$  é dado em Ampere/m como se pode verificar a partir da equação (1.59) e aplicação do teorema de Stokes. Então a quantidade

$$S = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad \left[ \text{watts} / \text{m}^2 \right] \quad (1.111)$$

é uma densidade de potência associada ao campo electromagnético. O vector  $\vec{S}$  é designado por vector de Poynting e é estabelecido na teoria do campo electromagnético pelo teorema de Poynting tendo sido no entanto apresentado aqui de forma intuitiva.

#### 1.4 Distribuição de corrente numa antena e mecanismo de radiação

A função que define a forma que toma a corrente (amplitude e fase) sobre a estrutura da antena é governada pelas condições de fronteira em condutores normalmente considerados perfeitos. É por isso uma propriedade da geometria, da estrutura e do ponto de excitação da linha de transmissão correspondente. A sua obtenção exacta é um dos problemas electromagnéticos mais complexos, atenuados no entanto hoje em dia pela utilização de métodos numéricos que permitem obter boas aproximações para as mesmas.

Uma linha de transmissão bifilar não irradia potência electromagnética dado que o campo eléctrico e magnético são nulos fora de uma hipotética superfície cilíndrica que envolva ambos os condutores pois estes transportam correntes desfasadas de  $\pi$  radianos (oposição de fase). No entanto alterando a geometria dos condutores como mostra a figura 1.8 o campo electromagnético criado por um condutor é reforçado em vez de anulado pelo campo criado pelo outro. Esta é a geometria da antena de dipolo linear que é o tipo de antena mais comum.

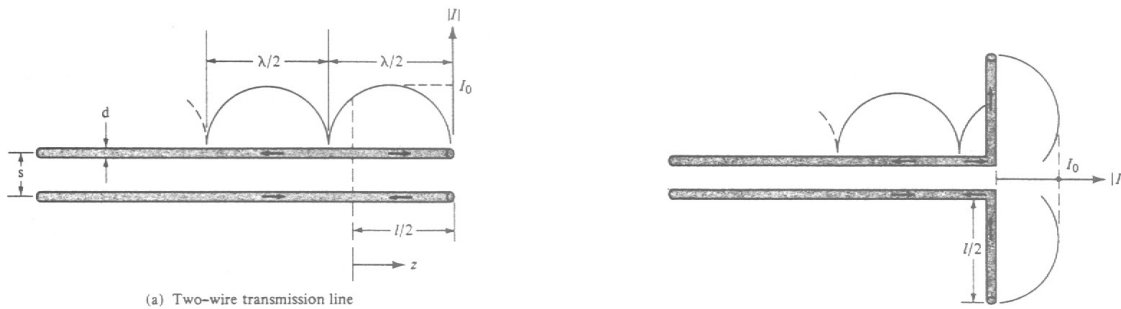


Figura 1.8- Obtenção do dipolo linear a partir de uma linha de transmissão.

A equação da corrente, supondo o dipolo orientado segundo o eixo OZ é

$$I(z) = I_0 \sin K \left( \frac{l}{2} - |z| \right) \quad (1.112)$$

sendo  $l$  o comprimento do dipolo. A figura 1.9 mostra a distribuição de corrente em dipolos lineares função do comprimento de onda ( $\lambda$ ) e do comprimento do dipolo ( $l$ ) e para o caso de onda estacionária (que não varia com o tempo).

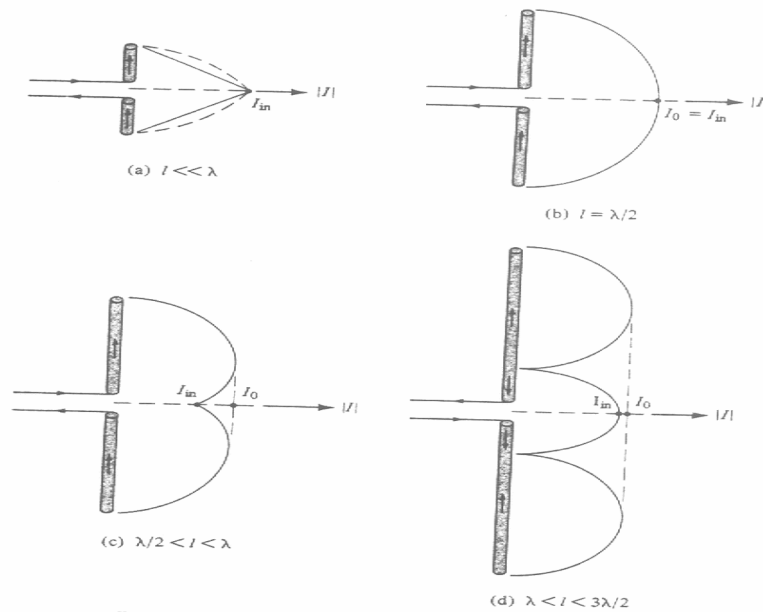


Figure 1.12 Current distribution on linear dipoles.

Figura 1.9- Distribuição de corrente em dipolos para várias relações  $l/\lambda$ .

A figura 1.9 (a) mostra o caso de um dipolo eletricamente curto onde a distribuição de corrente sobre o dipolo é aproximadamente triangular pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = x \quad (1.113)$$

A figura 1.9 (d) mostra o caso onde o excessivo comprimento do dipolo tem como efeito o cancelamento parcial do campo electromagnético criado por algumas partes do dipolo. A figura (1.10) mostra a distribuição de corrente num dipolo de meio comprimento de onda para regime sinusoidal.

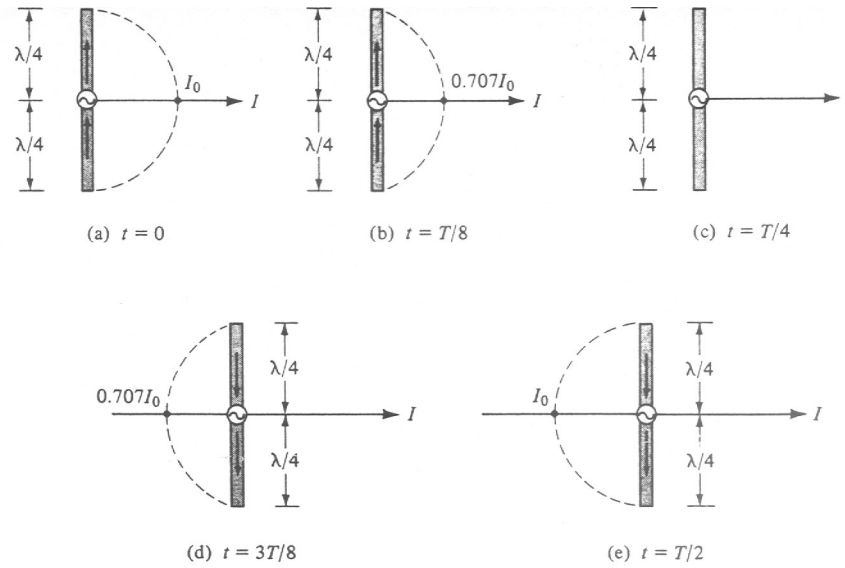


Figure 1.13 Current distribution on a  $\lambda/2$  wire antenna for different times.

Figura 1.10- Distribuição de corrente em regime sinusoidal num dipolo de  $\lambda/2$ .

Dado a distribuição de correntes e por isso de cargas eléctricas ao longo de uma linha de transmissão, consideremos agora o mecanismo pelo qual a radiação é produzida, transportada pela linha de transmissão até à antena e seguidamente irradiada no espaço.

A figura 1.11 mostra as ondas electromagnéticas criadas ao longo de uma linha de transmissão e os respectivos campos electromagnéticos associados. Imaginemos agora que removemos parte da antena como mostra a parte direita da figura 1.11.

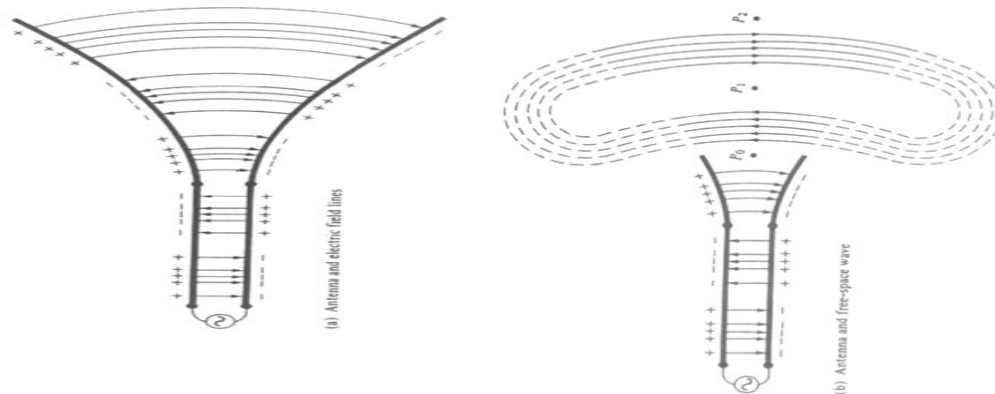


Figura 1.11- Radiação, linha de transmissão e separação das linhas do campo eléctrico.

Neste caso as linhas do campo vão fechar-se sobre si mesmas pois o campo eléctrico existia antes da remoção parcial da antena e não foi criado nenhum sistema sorvedor de campo, apenas foi retirada a sua fonte. Este processo é consistente com as equações de

*Maxwell* pois não existe carga eléctrica naquela região do espaço pelo que a divergência do campo é nula, no entanto existe campo. Como exemplo comparativo considere um volume de água parada para o qual se atira um objecto de grandes dimensões. O impacto do objecto na água desequilibra energeticamente o sistema e essa energia vai-se propagando ao longo da superfície da água através de uma onda plana. O facto de retirar em seguida o objecto não vai repor o equilíbrio energético existente anteriormente ao impacto do objecto na água. A ondulação vai manter-se e o sistema acabará por atingir um novo equilíbrio energético mas muito mais tarde. Este fenómeno também acontece com as ondas electromagnéticas que neste caso são criadas por distúrbios eléctricos. Um distúrbio de natureza eléctrica de curta duração terá como consequência a geração de ondas electromagnéticas que se propagam na linha de transmissão, depois na antena e serão finalmente radiadas em espaço livre mesmo se a sua fonte entretanto deixou de existir. Se este distúrbio eléctrico for de natureza contínua as ondas electromagnéticas serão continuamente geradas e propagar-se-ão sequencialmente umas a seguir às outras. Este fenómeno é ilustrado na figura 1.12.

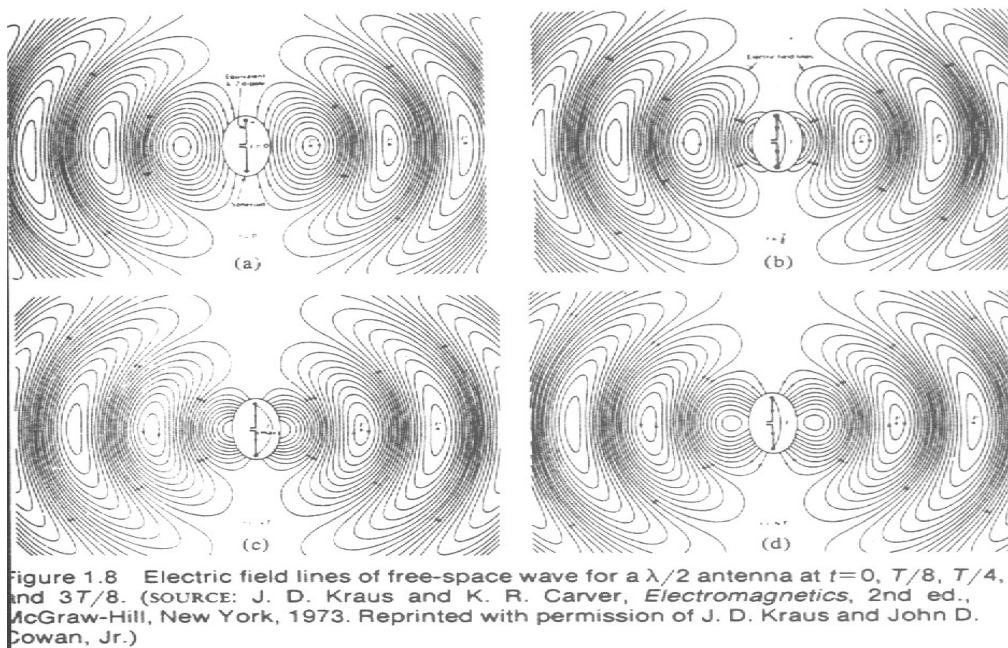
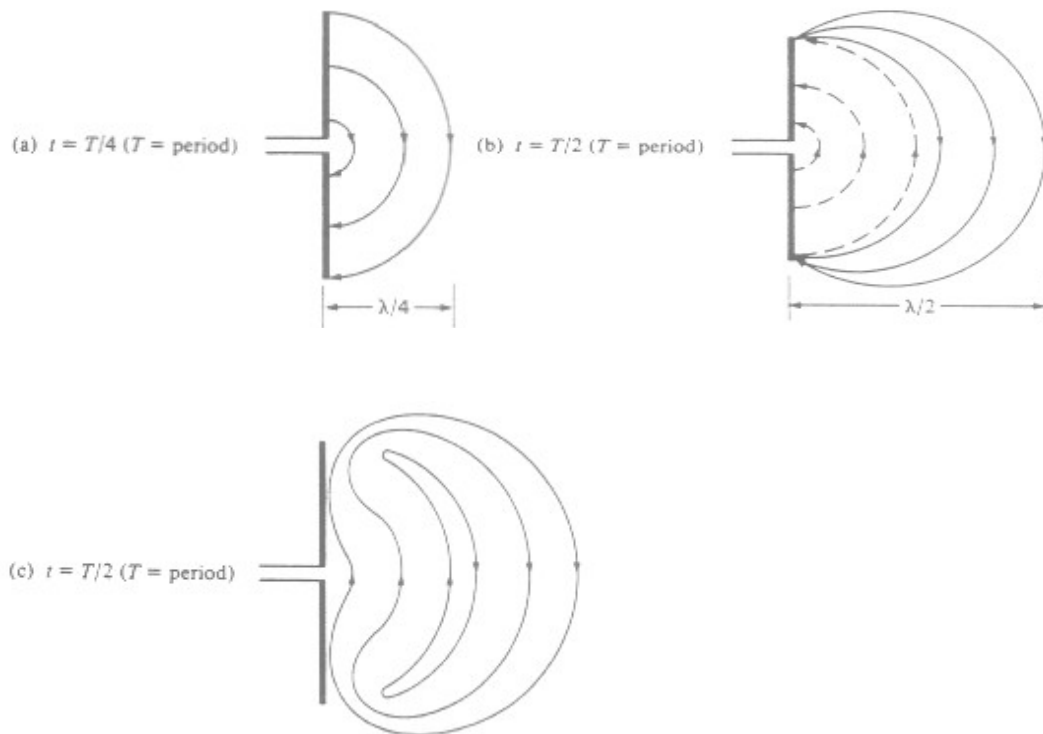


Figura 1.12- Propagação da onda electromagnética em espaço livre para uma antena de  $\lambda/2$  em diferentes instantes

Consideremos agora a forma como as ondas electromagnéticas existentes na antena são irradiadas para o espaço. A figura 1.13 (lado esquerdo) mostra as linhas de força do campo eléctrico criado entre os 2 braços de uma antena de dipolo. Ao fim de um tempo igual a  $\frac{1}{4}$  do período a onda propagou-se de  $\frac{1}{4}$  do comprimento de onda pois por definição viaja a 1

comprimento de onda por período. Imaginemos que estamos sob regime pulsado e numa situação em que a corrente sob a estrutura da antena é máxima. Seguidamente a corrente irá começar a diminuir o que pode ser visto como a introdução de cargas eléctricas opostas às existentes e criando então um campo com sentido oposto ao anterior. Entretanto passado mais  $\frac{1}{4}$  do período a onda viajará mais  $\lambda/4$  como mostra a parte direita da figura 1.13. Entretanto como a carga responsável pela criação do campo deixou de existir sob a superfície da antena as linhas de força são obrigadas a deixar os seus extremos sob os condutores e a fecharem-se sobre si mesmas como mostra a parte de baixo da figura 1.13. Na segunda parte do período o processo repete-se mas com cargas de sinal contrário e portanto campo eléctrico de sentido oposto. Este processo repete-se contínua e indefinidamente.



*Figura 1.13- Formação e separação das linhas de campo eléctrico de um dipolo curto.*

### **1.5 Radiação de um elemento de corrente**

O estudo da radiação electromagnética por antenas é normalmente obtido a partir da radiação de um elemento infinitesimal de corrente que será integrado a todo o espaço ocupado

pela antena. A equação (1.104) representa a equação de onda que se propaga segundo o eixo OZ e pode ser escrita como

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(Kz - \omega t)} = \vec{B}_0 e^{j\omega \left( \frac{z}{c} - t \right)} \quad (1.114)$$

ou seja o campo magnético é a parte real da equação (1.114) pelo que pode ser dado por

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos \left( \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \right) \quad (1.115)$$

Este é o conceito de potenciais retardados ou seja a onda electromagnética ao deslocar-se a velocidade finita leva um tempo a atingir um qualquer ponto no espaço, proporcional à distância a que esse ponto se encontra da fonte de radiação. Se o problema for de simetria esférica a equação (1.115) será

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos \left( \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) \quad (1.116)$$

A lei de Biot-Savart diz-nos que o campo magnético elementar criado por um elemento infinitesimal de comprimento  $dl$  de uma corrente  $I$  é dado por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (1.117)$$

Como exemplo de aplicação calculemos o campo magnético criado por uma corrente  $I$  sobre um fio de comprimento infinito colocado ao longo do eixo OZ como mostra a figura 1.14.

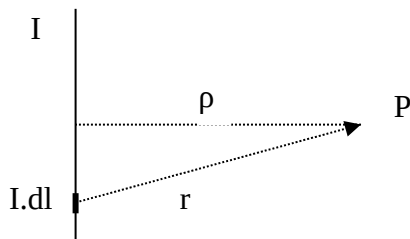




Figura 1.14- Fio de comprimento infinito percorrido por uma corrente  $I$  e colocado segundo OZ.

Pela lei de Biot-Savart, o campo magnético elementar criado pela corrente  $I$  que percorre o elemento de comprimento  $dl$  no ponto  $P$  será

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \alpha}{r^2} \quad (1.118)$$

sendo  $\alpha$  o ângulo entre  $dl$  e  $r$ . Atendendo a que

$$r^2 = \frac{\rho^2}{\sin^2 \alpha} \quad (1.119)$$

e

$$l = \rho \cot \alpha \quad (1.120)$$

pelo que

$$dl = - \frac{\rho}{\sin^2 \alpha} d\alpha \quad (1.121)$$

Substituindo-se as equações (1.119), (1.120) e (1.121) na equação (1.118) e integrando ao longo de todo o fio condutor obtém-se

$$B = - \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \int \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad (1.122)$$

como é verificado pela equação (1.41). A direcção de  $B$  é dada pelo produto vectorial definido na equação (1.117), ou seja  $\hat{i}_\phi$  para o presente caso.

Na secção 1.3.2 (pág. 18) vimos que pelo facto da divergência do campo magnético ser nula este deriva de um potencial vector tal que  $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ . Vejamos agora como podemos estabelecer este potencial vector para o caso de um elemento infinitesimal de corrente, ou seja qual o potencial vector  $d\vec{A}$  ao qual corresponde o campo magnético elementar dado pela equação (1.117). A equação (1.117) pode ser escrita em termos de densidade de corrente atendendo a que

$$I d\vec{l} = J d\vec{v} \quad (1.123)$$

como

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3} d\vec{v} \quad (1.124)$$

Atendendo a que

$$\nabla \frac{1}{r} = - \frac{1}{r^2} \hat{i}_r = - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (1.125)$$

podemos escrever a equação (1.124) como

$$d\vec{B} = - \frac{\mu_0}{4\pi} J \wedge \nabla \frac{1}{r} d\vec{v} = \nabla \wedge \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J d\vec{v}}{r} \quad (1.126)$$

uma vez que

$$\nabla \wedge \frac{J}{r} = - J \wedge \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \nabla \wedge J = - J \wedge \nabla \frac{1}{r} \quad (1.127)$$

A segunda parcela da parte média da equação (1.127) é nula pois a densidade de corrente não depende de  $r$  depende apenas de  $l$  (ver figura 1.14). Deste modo o potencial vector  $\vec{A}$  será dado por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{r} dv \quad (1.128)$$

onde o integral na equação (128) se estende a todo o volume das correntes. Introduzindo agora o conceito de potencial retardado podemos escrever a equação (1.128) como

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{r} e^{-jKr} dv \quad (1.129)$$

Consideremos agora um elemento de corrente sobre o eixo OZ como mostra a figura 1.15 e calculemos os campos irradiados por este elemento.

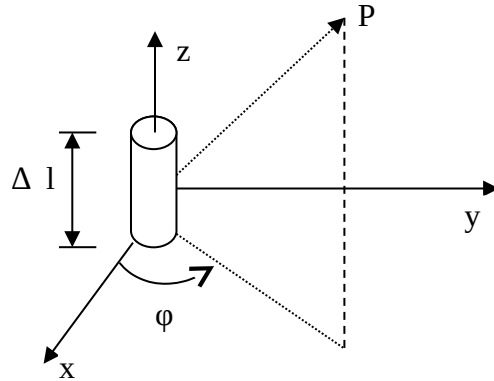


Figura 1.15- Elemento de corrente ou dipolo de Hertz

Aplicando a equação (1.129) ao dipolo de *Hertz* obtemos sob as condições do comprimento do dipolo  $\Delta l$  e da área de intersecção do dipolo com um plano paralelo ao plano X-Y  $\Delta a$  serem muito menores que  $r$  (distância radial ao ponto onde é criado o campo)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu e^{-jKr}}{4\pi r} \int_{-\frac{\Delta l}{2}}^{\frac{\Delta l}{2}} \left( \int_{\Delta a} \vec{J} \cdot \hat{z} d\sigma \right) dz = \frac{\mu}{4\pi r} e^{-jKr} I \Delta l \hat{i}_z \quad (1.130)$$

Convertendo o potencial vector de coordenadas cilíndricas para coordenadas esféricas atendendo a que

$$\hat{i}_z = \cos \theta \hat{i}_r - \sin \theta \hat{i}_\theta \quad (1.131)$$

obtemos

$$A_r = \frac{\mu}{4\pi} e^{-jKr} I \Delta l \cos \theta \quad A_\theta = - \frac{\mu}{4\pi} e^{-jKr} I \Delta l \sin \theta \quad (1.132)$$

Usando agora a equação (1.37) obtemos o campo magnético gerado pelo dipolo

$$H_\phi = - \frac{I \Delta l K^2 \sin \theta}{4\pi} e^{-jKr} \left[ \frac{1}{jKr} + \left( \frac{1}{jKr} \right)^2 \right] \quad (1.133)$$

O campo eléctrico e magnético estão relacionados pelas equações de *Maxwell*, pelo que através da equação (1.64) e atendendo a que estamos interessados no campo fora da antena, portanto fora do espaço onde existem correntes podemos reescrever esta equação como

$$E(\vec{r}) = \frac{\nabla \wedge \vec{H}}{j\omega \epsilon} = E_r \hat{i}_r + E_\theta \hat{i}_\theta \quad (1.134)$$

Aplicando o operador rotacional (equação (1.37)) à equação (1.133) e calculando o campo eléctrico como definido pela equação (1.134) obtemos

$$E_r = - \frac{\eta I \Delta l K^2 \cos \theta}{2\pi} e^{-jKr} \left[ \left( \frac{1}{jKr} \right)^2 + \left( \frac{1}{jKr} \right)^3 \right] \\ E_\theta = - \frac{\eta I \Delta l K^2 \sin \theta}{4\pi} e^{-jKr} \left[ \frac{1}{jKr} + \left( \frac{1}{jKr} \right)^2 + \left( \frac{1}{jKr} \right)^3 \right] \quad (1.135)$$

onde a impedância isotrópica do meio (para o vázio  $\eta=120\pi$ ) é dada por

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{K}{\omega \epsilon} \quad (1.136)$$

a velocidade de propagação da onda num meio caracterizado por uma permissividade eléctrica e permeabilidade magnética respectivamente  $\epsilon$  e  $\mu$  é dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (1.137)$$

e  $c$ ,  $K$  e  $\lambda$  estão relacionados pelas equações (1.105) e (1.106).

As equações (1.133) e (1.135) podem ser aproximadas para as situações extremas de proximidade entre a antena e o ponto onde se pretende saber o campo electromagnético. Na zona muito próxima da antena ( $Kr \ll 1$  ou  $r \ll \lambda/2\pi$ ) as equações do campo electromagnético podem ser aproximadas para

$$H_\varphi \approx \frac{I\Delta l \sin\theta}{4\pi r^2} \quad E_r \approx \frac{\eta I\Delta l \cos\theta}{2\pi j K r^3} \quad E_\theta \approx \frac{\eta I\Delta l \sin\theta}{4\pi j K r^3} \quad (1.138)$$

A equação (1.138) mostra que os campos eléctrico e magnético estão em quadratura o que significa que a potência média irradiada será nula como mostra a equação (1.111). De facto em regime sinusoidal o vector de Poynting é dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \\ E_r & E_\theta & 0 \\ 0 & H_\varphi & H_r^* \end{vmatrix} \quad (1.139)$$

Verifique que o determinante na equação (1.139) só tem componentes imaginárias ou seja a potência média irradiada pelo dipolo na zona próxima é nula, embora exista potência instantânea na zona próxima. De facto

$\text{Re}[S] :$  densidade de potência média no tempo

$\text{Im}[S] :$  densidade de potência reactiva

O campo electromagnético na zona distante da antena ( $Kr \gg 1$  ou  $r \gg \lambda/2\pi$ ) pode ser aproximado por

$$H_{\varphi} \approx \frac{jKI\Delta \sin \theta}{4\pi r} e^{-jKr} \quad E_{\theta} = \eta H_{\varphi} \gg E_r \quad (1.140)$$

Determinando agora, sob as condições de campo distante, o vector de Poynting através do determinante na equação (1.139) obtém-se

$$\begin{aligned} S_{\varphi} &= 0 \\ S_{\theta} &= -\frac{1}{2} E_r H_{\varphi}^* = j \frac{I^2 \eta (\Delta l)^2}{8\pi \lambda r^3} \sin \theta \cos \theta \left( 1 + \frac{1}{K^2 r^2} \right) \\ S_r &= \frac{1}{2} E_{\theta} H_{\varphi}^* = \frac{I^2 \eta (\Delta l)^2}{8\lambda^2 r^2} \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{j}{K^3 r^3} \right) \end{aligned} \quad (1.141)$$

A equação (1.141) mostra que apenas a componente radial do vector de Poynting tem uma componente activa (real) ou seja

$$\text{Re}[\vec{S}] = \text{Re}[S_r] = \frac{I^2}{8} \eta \left( \frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{i}_r \quad (1.142)$$

pelo que só as componentes do campo na zona distante contribuem para a densidade de potência média.

Repare que na zona distante o campo eléctrico e magnético são perpendiculares entre si (equação (1.140)) sendo ainda ambos perpendiculares à direcção de propagação da energia (equação (1.142)).

Além da zona próxima e distante da antena é comum estudar ainda o comportamento do campo electromagnético na região intermédia caracterizada por  $Kr > 1$ . As aproximações consideradas nesta zona são basicamente as mesmas que foram consideradas para o caso da região distante excepto que agora o campo na direcção radial não pode ser desprezado. Deste modo na região intermédia a equação (1.140) é válida excepto que o campo eléctrico na direcção radial é dado por

$$E_r \approx \frac{\eta I \Delta l \cos \theta}{2\pi r^2} e^{-jKr} \quad (1.143)$$

Comparando por esta ordem as equações (1.138), (1.143) e (1.140) conclui-se que a componente radial do campo eléctrico vai-se tornando insignificante à medida que a distância à antena aumenta, ou seja as componentes  $E_\theta$  e  $H_\phi$  vão ficando em fase, o que indica a formação de potência média na direcção de propagação da onda electromagnética.

## 1.6 Parâmetros de radiação de um elemento de corrente

As características fundamentais das antenas, como sejam a potência máxima que a antena é capaz de irradiar ou a direcção dessa radiação, são normalmente expressas em termos de um conjunto de parâmetros normalmente conhecidos como parâmetros fundamentais das antenas ou simplesmente parâmetros de radiação.

### 1.6.1 Potência irradiada

A potência irradiada por uma antena pode ser calculada recorrendo à equação (1.139) e à constatação expressa na equação (1.111) na qual o vector de *Poynting* representa uma densidade superficial de potência média. Deste modo a potência média irradiada por qualquer antena será

$$w = \int_S \Re \{ \vec{S} \} \cdot \hat{n} dS \quad (1.144)$$

No caso particular do dipolo de *Hertz*, atendendo às equações (1.142) e (1.8) e ao facto de que

$$\int \sin^3 \theta d\theta = -\frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{3} - \frac{2}{3} \cos \theta \quad (1.145)$$

temos

$$w = \int_S \Re \{ \vec{S} \} \cdot \hat{n} dS_r = \frac{I^2}{8} \eta \left( \frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta d\varphi = \eta \frac{\pi}{3} I^2 \left( \frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2 \quad (1.146)$$

### 1.6.2 Resistência de radiação

A resistência de radiação de uma antena é a resistência sob a qual a antena irradia, ou seja sob a qual transfere a onda electromagnética guiada ao espaço livre. É então dada por

$$R_r = \frac{w}{\frac{1}{2} I^2} \quad (1.147)$$

No caso do dipolo de *Hertz* a resistência de radiação é dada por

$$R_r = \frac{w}{\frac{1}{2} I^2} = \frac{2}{3} \pi \eta \left( \frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2 = 789 \left( \frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2 \quad (1.148)$$

Além da resistência de radiação a parte real da impedância de entrada de uma antena é ainda composta pela resistência de perdas, ou seja a potência perdida por efeito de Joule na antena. Dado que apenas uma destas 2 resistências tem propósitos úteis é comum definir-se a eficiência de radiação como a razão da potência efectivamente radiada pela potência efectivamente consumida pela antena

$$e = \frac{w}{w + w_l} = \frac{R_r}{R_r + R_l} \quad (1.149)$$

### 1.6.3 Intensidade de radiação

A intensidade de radiação é a potência média irradiada por unidade de ângulo sólido ou seja

$$U = \frac{dw}{d\Omega} \quad (1.150)$$

Atendendo à definição de ângulo sólido e à equação (1.8) verificamos que

$$dS_r = r^2 d\Omega \quad (1.151)$$

ou seja pela equação (1.146) obtemos



$$dw = \text{Re}\{S_r\} r^2 d\Omega \quad (1.152)$$

Então para o dipolo de *Hertz* temos

$$U = \frac{dw}{d\Omega} = \text{Re}\{S_r\} r^2 = \frac{\eta}{8} I^2 \left( \frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2 \sin^2 \theta \quad (1.153)$$

Um radiador que irradia igual potência em todas as direcções é chamado de radiador isotrópico sendo a sua intensidade de radiação dada por

$$U_0 = \frac{w}{4\pi} \quad (1.154)$$

#### 1.6.4 Directividade

Define-se ganho direcciona de uma antena como a razão entre a intensidade de radiação numa dada direcção e a intensidade de radiação se o radiador fosse isotrópico, ou seja

$$g = \frac{U}{U_0} = \frac{4\pi U}{w} \quad (1.155)$$

A directividade de uma antena é definida como o valor máximo do seu ganho direcciona, ou seja para o caso particular do dipolo de *Hertz* temos

$$D = g_m = \frac{U_m}{U_0} = \frac{4\pi U_m}{w} = 1,5 \quad (1.156)$$

#### 1.6.5 Diagrama de radiação

O diagrama de radiação de uma antena é uma representação gráfica da intensidade de radiação na zona distante em função das coordenadas espaciais. Estes diagramas são geralmente tridimensionais como é o caso da figura 1.16 que mostra o diagrama de radiação tridimensional do dipolo de *Hertz*.

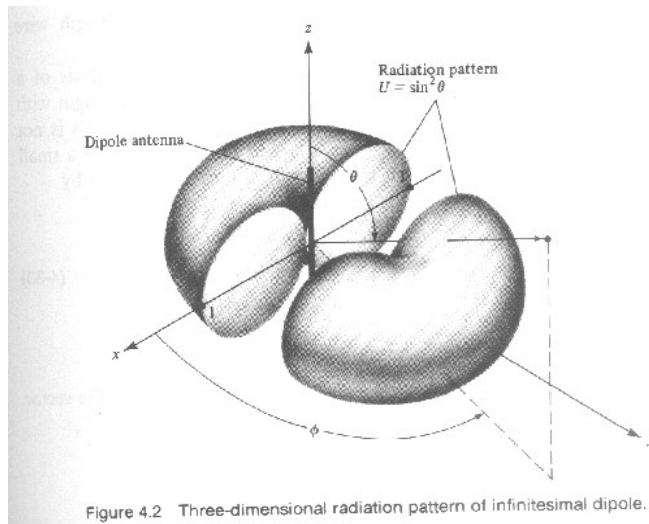


Figura 1.16- Diagrama de radiação tridimensional do dipolo de Hertz

A representação de diagramas tridimensionais num espaço a 2 dimensões é frequentemente feita recorrendo a 2 representações em 2 planos ortogonais. Vejamos a representação do diagrama de radiação do dipolo de *Hertz* nos planos x-y e y-z como mostra a figura 1.17.

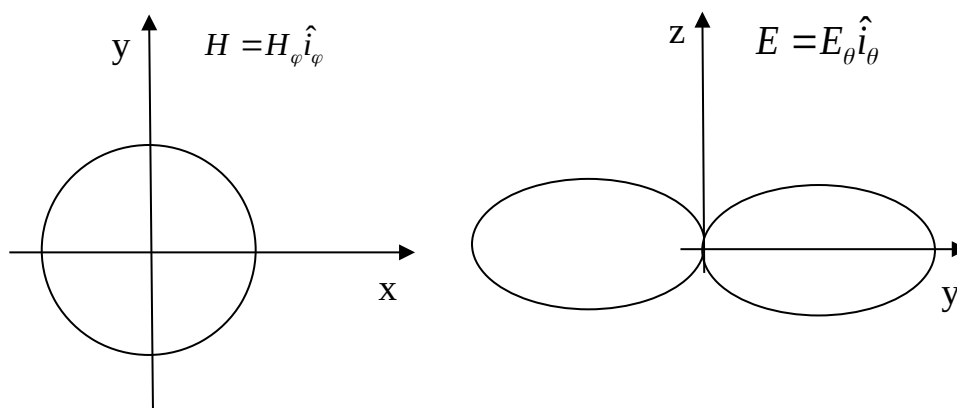


Figura 1.17- Diagrama de radiação do dipolo de Hertz nos planos x-y e y-z.

A figura 1.17 mostra que o radiador é isotrópico no plano x-y ou seja a sua intensidade de radiação dada na equação (1.153) não depende de  $\phi$ . Deste modo o diagrama de radiação neste plano não tem grande relevância nas características radiantes do elemento pelo que é frequentemente preterido. De facto as características de radiação mais importantes do elemento ocorrem no plano y-z onde são de facto função das coordenadas espaciais, neste caso de  $\theta$ .