Complementos de Análise Matemática

MIEITI, MIEMAT, MIETEX
2016/2017

Folha de Exercícios 3

Resolução analítica de equações diferenciais de ordem n

Propriedades das equações diferenciais lineares homogéneas

1. Quais das seguintes equações diferenciais são lineares homogêneas?

   (a) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + y^4 = 0$

   (b) $3y' + xy = 0$

   (c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 1$

   (d) $2x\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)\, y = 0$

2. Determine o Wronskiano dos seguintes conjuntos e diga se são linearmente dependentes ou independentes em $]-\infty, +\infty[$.

   (a) $\{\sin 3x, \cos 3x\}$

   (b) $\{1-x, 1+x, 1-3x\}$

3. Considere a equação diferencial $x^2y'' - x\,(x+2)\,y' + (x+2)\,y = 0$.

   (a) Mostre que x e xe^x são soluções linearmente independentes da equação diferencial dada.

   (b) Escreva a solução geral da equação diferencial dada.

4. Considere a equação diferencial $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$.

   (a) Mostre que e^x, e^{2x} e e^{-2x} são soluções linearmente independentes desta equação.

   (b) Escreva a solução geral da equação dada.

   (c) Determine a solução que satisfaz as seguintes condições: $y(0) = 1, y'(0) = -3$ e $y''(0) = 1$.

5. Sabe-se que e^{-x} e $5e^{-x}$ são duas soluções de $y'' + 2y' + y = 0$. A solução geral é $y = c_1e^{-x} + c_25e^{-x}$?

6. Mostre que se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são duas soluções de $a_0(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$, então $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ também é uma solução dessa equação, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

7. Para cada alínea que se segue, verifique que a função dada é solução da respectiva equação diferencial homogénea e obtenha a correspondente solução geral.

   (a) $\dfrac{x^2}{4}\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ $\qquad y_1(x) = x^4.$

   (b) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0,\ x > 0$ $\qquad y_1(x) = x^2.$

   (c) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - y = 0,\ x > 0$ $\qquad y_1(x) = x.$

Propriedades das equações diferenciais lineares não homogéneas

8. Mostre que $1 - 2x - x^2$ é um integral particular da equação diferencial não homogénea $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 2x$ e determine a solução geral sabendo que e^x e 1 são soluções linearmente independentes da equação homogénea associada.

9. Verifique que $\dfrac{x^3}{8}$ é um integral particular da equação diferencial $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - y = x^3$ e determine a sua solução geral sabendo que x e x^{-1} são soluções da equação homogénea associada.

Equações lineares homogéneas com coeficientes constantes

10. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.

    (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 10\dfrac{dy}{dx} + 21y = 0$

    (b) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0$

    (c) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 0$

    (d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0$

    (e) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

11. Resolva os seguintes problemas de valores iniciais:

 (a) $9\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$, $y(3) = 1$.

 (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$, $y(\pi) = 1$ e $y'(\pi) = 1$.

12. Nas seguintes alíneas, dá-se um conjunto completo de raízes da equação característica de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n em $y(x)$, com coeficientes reais. Determine a solução geral da equação diferencial.

 (a) $0, 0, 2 \pm i9$

 (b) $-3 \pm i, -3 \pm i, 3 \pm i, 3 \pm i$

13. Determine, justificando, a equação diferencial linear de coeficientes constantes cuja solução geral é

 $y = e^x\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right) + \frac{1}{6}e^{-2x}$.

Método dos coeficientes indeterminados

14. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.

 (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 4x^2$

 (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = \sin 2x$

 (c) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 6\dfrac{d^2y}{dx^2} + 11\dfrac{dy}{dx} - 6y = 2xe^{-x}$

15. Determine a solução dos seguintes problemas de valores iniciais.

 (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x+1)\,e^x + e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

 (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = xe^{-x}\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

16. Determine a solução geral da equação diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 3x\cos x + 2e^x - x^2$ a partir da solução das equações diferenciais $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = x\cos x$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = e^x$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = x^2$.

Método da variação das constantes

17. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.

 (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x$, $x \in \,]0, \pi/2[$

 (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{e^x}{x^2}$, $x > 0$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \mathrm{cotg}x,\ x \in \,]0, \pi/2[$

(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$

(e) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\,(x-2)\,\dfrac{dy}{dx} + (2-x)\,y = -x^3,\ x > 0$, sabendo que x é uma solução da equação homogénea associada

(f) $\left(\sin^2 x\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\cos x \sin x\dfrac{dy}{dx} + \left(1+\cos^2 x\right) y = \sin^3 x,\ x \in \,]0, \pi/2[\,,$ sabendo que $\sin x$ e $x \sin x$ são soluções da equação homogénea associada

Soluções da folha de exercícios 3

1. (b) e (d).
2. (a) $W(\sin 3x, \cos 3x) = -3$, o conjunto é linearmente independente.
   (b) $W(1-x, 1+x, 1-3x) = 0$, o conjunto é linearmente dependente.
3. (b) $y = c_1 x + c_2 x e^x$.
4. (a) $W\left(e^x, e^{2x}, e^{-2x}\right) = 12e^x \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
   (b) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$.
   (c) $y = e^x - e^{2x} + e^{-2x}$.
5. Não é solução geral.
7. (a) $y = c_1 x^4 + c_2 x$.
   (b) $y = c_1 x^2 + c_2 x^{-1}$.
   (c) $y = c_1 x + c_2 x^{-1}$.
8. $y = c_1 e^x + c_2 + 1 - 2x - x^2$.
9. $y = c_1 x + c_2 x^{-1} + \frac{x^3}{8}$.
10. (a) $y = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-7t}$.
    (b) $y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^x$.
    (c) $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x$.
    (d) $y = e^{2x}\left[c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right]$.
    (e) $y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x$.
11. (a) $y = e^{x/3-1}$.
    (b) $y = -\cos x - \sin x$.
12. (a) $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x}\cos 9x + c_4 e^{2x}\sin 9x$
    (b) $y = e^{-3x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x) + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x + c_7 x \cos x + c_8 x \sin x)$
13. $y'' - y' = e^{-2x}$.
14. (a) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$.
    (b) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{3}{20}\sin 2x + \frac{1}{20}\cos 2x$.
    (c) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{1}{12} x e^{-x} - \frac{13}{144} e^{-x}$.
15. (a) $y = -2xe^x + 3e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 e^x - 3e^x + xe^{2x}$.
    (b) $y = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + x \sin x + \sin x) + x + \frac{3}{2}$.
16. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{3}{2}x \cos x + \frac{3}{2}\sin x + xe^x + x^2 + 2$.
17. (a) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \ln(\cos x)\cos x + x \sin x$.
    (b) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x - (\ln x) e^x$.
    (c) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \ln\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$.
    (d) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) e^x + xe^x \arctan x$.
    (e) $y = c_1 x e^{-x} + c_2 x - x^2$.
    (f) $y = c_1 \sin x + c_2 x \sin x + \frac{x^2}{2}\sin x$.