Mudança de variáveis em integrais múltiplos

Tal como acontece no cálculo de integrais simples, pode ser necessário fazer uma mudança de variáveis nos integrais múltiplos para facilitar ou tornar possível o seu cálculo.

Vamos considerar o caso geral e depois exemplificar com integrais duplos e triplos.

Teorema 1 *(da mudança de variáveis) - Considere T um conjunto aberto e limitado contido em $\mathbb{R}^n$ e $g : T \to \mathbb{R}^n$ uma mudança de variáveis, tal que $X = g(T)$:*

$$\begin{array}{rccc} g: & T & \to & \mathbb{R}^n \\ & t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) & \mapsto & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}$$

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então:

$$\int \cdots \int_X f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int \cdots \int_T f(g(t_1, \ldots, t_n))\ |\det Dg(t)|\ dt_1 \ldots dt_n.$$

<u>**Nota:**</u>

- Os integrais na igualdade anterior são múltiplos, pois X e T são domínios de $\mathbb{R}^n$.
- $Dg(t)$ representa a matriz jacobiana da mudança de variáveis g:

$$Dg(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial t_n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

- Para que g seja considerada uma mudança de variáveis, g tem de ser uma função de classe C^1 (isto é, as derivadas parciais de primeira ordem contínuas); g tem que ser injetiva e a derivada de g tem que ser injetiva, isto é, $\det Dg(t) \neq 0$ em todo o domínio T.
- $|\det Dg(t)| = \left|\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_n)}\right|$ representa o módulo do determinante da matriz jacobiana. O determinante da matriz jacobiana chama-se jacobiano da mudança de variáveis g.

Vamos ver o que isto significa em integrais duplos:

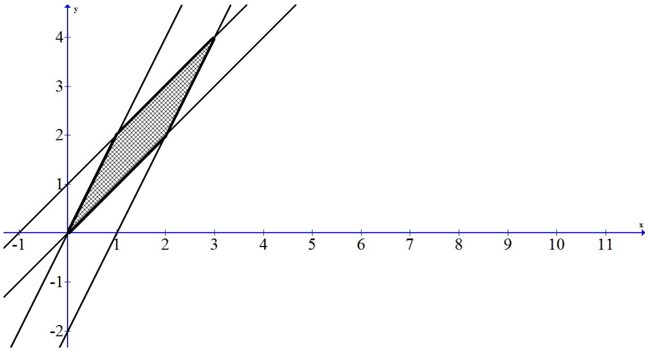
Seja T um conjunto aberto e limitado contido em $\mathbb{R}^2$ e consideremos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{array}{rccc} g: & T & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (t, u) & \mapsto & (x, y) = (g_1(t, u), g_2(t, u)) \end{array}$$

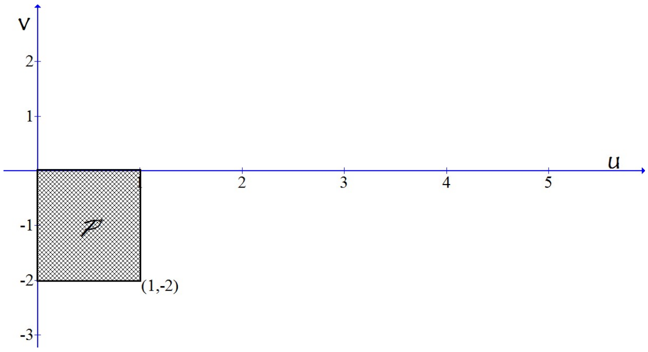
tal que $X = g(T)$.
Temos que

$$\iint_X f(x, y)\, dx\, dy = \iint_T f(g_1(t, u), g_2(t, u)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, u)}\right| dt\, du.$$

Exemplo 1 *Considere o integral duplo $\iint_P xy\, dx\, dy$ onde P é o paralelogramo limitado pelas retas $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ e $y = x + 1$.*



Se fizermos a mudança de variável $g(u,v) = (x,y) = (u-v, 2u-v)$ definida no retângulo P^* representado na figura abaixo



o retângulo P^* é transformado no paralelogramo P, isto é, $g(P^*) = P$.
O jacobiano da transformação g é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Temos então

$$\iint_P xy\,dx\,dy = \iint_{P^*} (u-v)(2u-v)\,1\,du\,dv = \int_{-2}^{0}\int_0^1 (2u^2 - 3vu + v^2)\,du\,dv = 7.$$

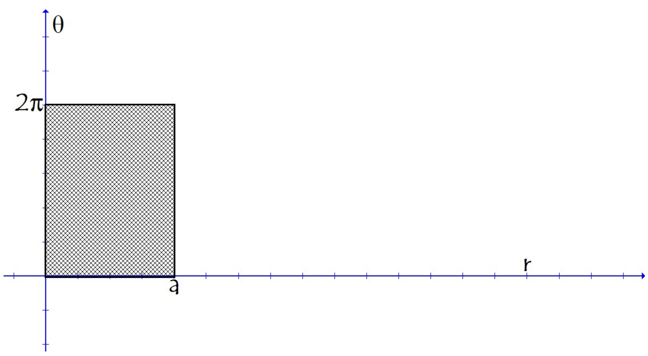
Integral duplo em coordenadas polares

Considere a transformação g que permite mudar de coordenadas cartesianas (x,y) para coordenadas polares (r,θ), isto é,

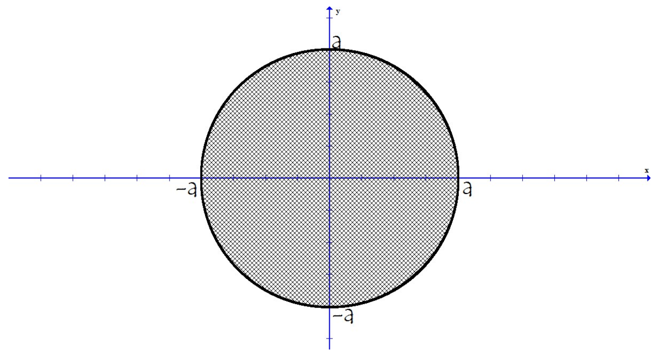
$$g(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

com $r > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$.
A mudança de variáveis g transforma o conjunto $T = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0 \wedge 0 < \theta < 2\pi\}$ no plano XOY onde se retira a parte positiva do eixo OX.

A mudança de variáveis g transforma o retângulo da forma $T = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : a > r > 0 \wedge 0 < \theta < 2\pi\}$ definido nas coordenadas (r,θ),



no círculo X definido da forma $x^2 + y^2 \leq a^2$ (onde se retira o semieixo positivo de OX) nas coordenadas XOY.



Neste caso,

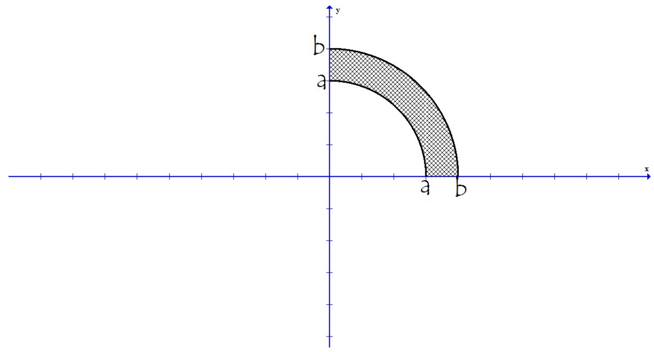
$$\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

para uma função f integrável, pois o jacobiano da transformação das coordenadas cartesianas em coordenadas polares ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Temos que $dA = dx\,dy = r\,dr\,d\theta$.

Exemplo 2 *Calcular o valor de $\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$ onde D é a região do primeiro quadrante que se situa entre as circunferências $x^2+y^2 = a^2$ e $x^2+y^2 = b^2$.*

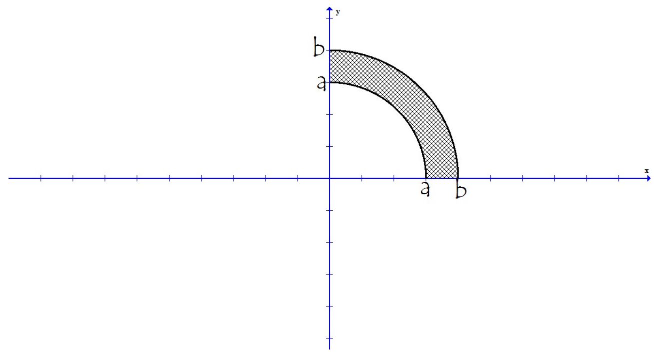


Usando a mudança de variáveis $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, com $a < r < b$ e $0 < \theta < \pi/2$, temos que

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \int_a^b \ln(r^2)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(b^2\ln b - a^2\ln a - \frac{1}{2}(b^2-a^2)\right).$$

Exemplo 3 *Calcular a área da região D do primeiro quadrante que se situa entre as circunferências $x^2+y^2 = a^2$ e $x^2+y^2 = b^2$.*

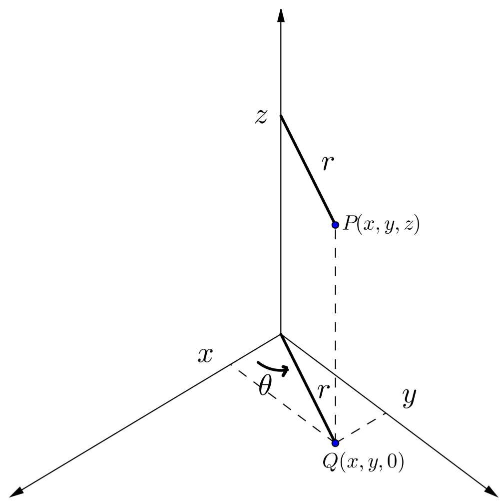


Para calcular a área da região plana D, temos que calcular o integral duplo $\iint_D dx\,dy$. Usando a mudança de variáveis $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, com $a < r < b$ e $0 < \theta < \pi/2$, temos que

$$\iint_D dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_a^b r\,dr\,d\theta =$$
$$= \frac{\pi}{4}\left(b^2 - a^2\right).$$

Integral triplo em coordenadas cilíndricas

Um ponto P em $\mathbb{R}^3$ pode ser definido pelas suas coordenadas cartesianas ou retangulares (x, y, z) mas também pode ser definido pelas coordenadas cilíndricas (r, θ, z) onde z é a cota do ponto P como nas coordenadas retangulares, r é a distância do ponto P ao eixo OZ e θ é o ângulo que o vetor $(x, y, 0)$ faz com o semi-eixo positivo de OX.



A mudança que permite mudar de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas é

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

com $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ e $z \in \mathbb{R}$.

Depois de aplicarmos a mudança de variáveis, o integral triplo $\iiint_X f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ de uma função f definida num domínio X,

$$\iiint_X f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

pois o jacobiano da transformação das coordenadas cartesianas em coordenadas cilíndricas é

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

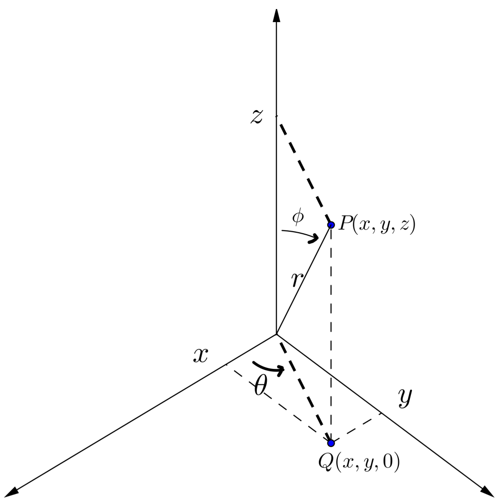
Temos que $dV = dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$.

Exemplo 4 *Para calcular o volume de um cilindro V limitado pela superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = a^2$ e pelos planos $z = 2$ e $z = -2$, usamos o integral*

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \int_{-2}^{2}\int_0^a\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dr\,dz.$$

Integral triplo em coordenadas esféricas

Um ponto P em $\mathbb{R}^3$ pode ser definido pelas suas coordenadas cartesianas ou retangulares (x,y,z) mas também pode ser definido pelas coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) onde r é a distância do ponto P à origem do referencial, θ é o ângulo que o vetor $(x,y,0)$ faz com o semi-eixo positivo de OX e ϕ é o ângulo entre o semieixo positivo OZ e o vetor $\overrightarrow{OP}$.



A mudança que permite mudar de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas é

$$\begin{aligned} x =& \; r\sin\phi\cos\theta \\ y =& \; r\sin\phi\sin\theta \\ z =& \; r\cos\phi \end{aligned}$$

com $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ e $0 < \phi < \pi$.

O integral triplo $\iiint_X f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ de uma função f definida num domínio X, ficará na forma

$$\iiint_X f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)\,r^2\sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi$$

pois o jacobiano da transformação das coordenadas cartesianas em coordenadas esféricas é

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{vmatrix} = -r^2\sin\phi$$

Temos que $dV = dx\,dy\,dz = r^2 \sin\phi \, dr\, d\theta\, d\phi$.

Exemplo 5 *Para calcular o volume de uma esfera V limitado pela superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, usamos o integral*

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\phi \, d\theta\, d\phi\, dr = \frac{4a^3\pi}{3}.$$