Teoria dos Circuitos e Fundamentos de Electrónica

Análise de Circuitos Lineares

Teresa Mendes de Almeida

TeresaMAlmeida@ist.utl.pt

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

DEEC

Área Científica de Electrónica

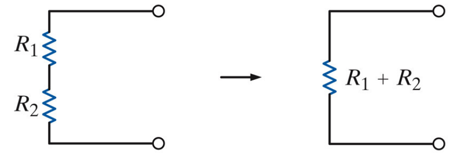
Março de 2008

Matéria

- **Simplificação de circuitos**
  - Resistências em série e em paralelo
  - Fontes de tensão em série
  - Fontes de corrente em paralelo
  - Simplificação de circuitos
- **Circuito Linear**
  - Linearidade
    - Homogeneidade
    - Aditividade
  - Aplicação na simplificação de circuitos
- **Teorema da Sobreposição**
  - Aplicação na análise e simplificação de circuitos
- **Circuitos equivalentes**
  - Thévenin
  - Norton
- **Teoremas de Thévenin e de Norton**
- **Equivalentes de circuitos**
  - sem geradores
  - com geradores independentes
  - com geradores dependentes e independentes
  - só com geradores dependentes
- **Conversão de geradores**
  - Aplicação na análise e simplificação de circuitos
- **Exemplos de aplicação**

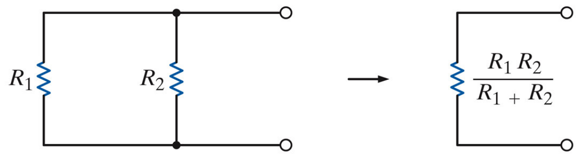
Simplificação de circuitos

- **Resulta de aplicar**
  - Lei Ohm, KCL, KVL



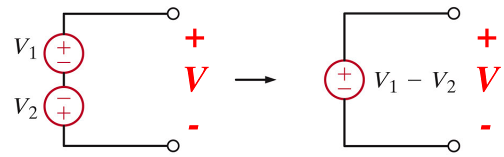
- **Resistências em série**

$$R_S = R_1 + R_2$$



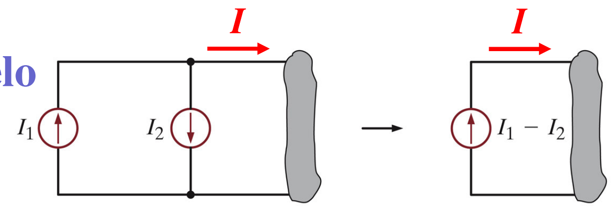
- **Resistências em paralelo**

$$R_P = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



- **Geradores de Tensão em série**
  - é preciso ter em conta polaridade das tensões

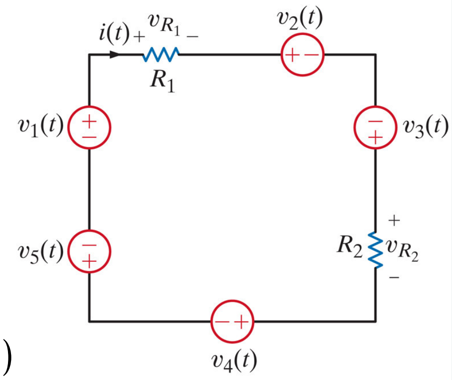
$$V = V_1 - V_2$$



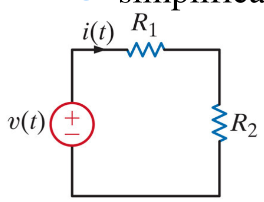
- **Fontes de Corrente em paralelo**
  - é preciso ter em conta sentido das correntes

$$I = I_1 - I_2$$

Exemplo de simplificação de circuitos

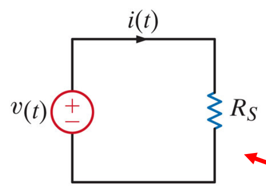


- **Calcular *i(t)* simplificando o circuito**
  - 1 malha
  - todos componentes em série
  - mesma corrente em todos componentes
  - simplificar geradores de tensão



$$v(t) = v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) - v_4(t) - v_5(t)$$

  - simplificar resistências $R_S = R_1 + R_2$



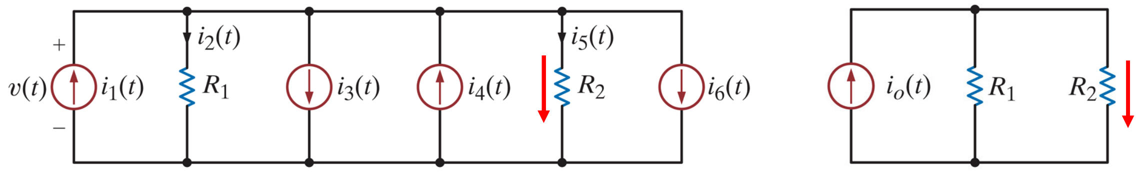
circuitos equivalentes para o cálculo de i(t)

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_S} = \frac{v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) - v_4(t) - v_5(t)}{R_1 + R_2}$$

- **resulta um circuito mais simples para o cálculo da grandeza eléctrica pretendida, neste caso, a corrente *i(t)***

Exemplo de simplificação de circuitos

- **Calcular $i_5(t)=i_{R2}(t)$ simplificando o circuito**

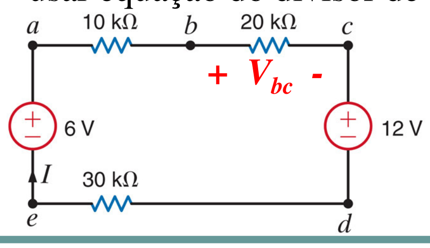


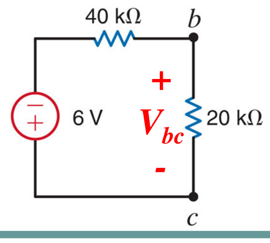
- 2 nós – todos componentes em paralelo
- simplificar fontes de corrente
- usar equação do divisor de corrente

$$i_o(t)=i_1(t)-i_3(t)+i_4(t)-i_6(t)$$

$$i_5(t)=\frac{R_1}{R_1+R_2}i_o(t)$$

- **Calcular $V_{bc}=V_b-V_c=V_{20k\Omega}$ simplificando o circuito**
  - simplificar geradores de tensão, simplificar resistências
  - usar equação do divisor de tensão

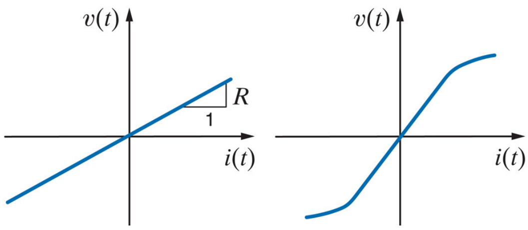




$$V_{bc}=\frac{20}{20+40}(-6)=-2V$$

Circuito Linear

- **Descrito por equações algébricas lineares**
- **Componentes do circuito**
  - têm características lineares
  - têm características não lineares mas
    - podem ser localmente aproximadas por características lineares
    - modelos lineares por troços

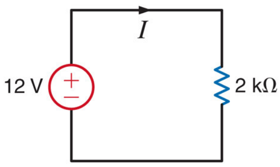


linear não linear

- **Linearidade**
  - linearidade implica homogeneidade e aditividade
  - homogeneidade $f(\alpha x)=\alpha f(x)$
  - aditividade $f(x+y)=f(x)+f(y)$
  - circuito linear
    - x , $y \rightarrow$ tensão ou corrente
    - $f(x)$, $f(y) \rightarrow$ tensão ou corrente

Homogeneidade (escalamento) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

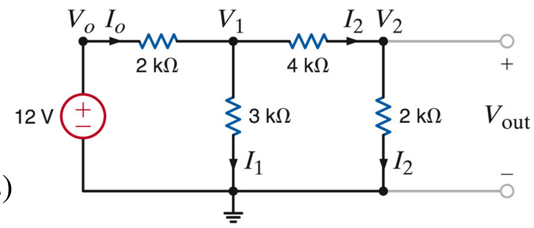
- **Quanto vale I se $V=24V$? E se $V=1,2V$?**



$$I = \frac{V}{R} = 6mA \qquad \begin{cases} V \leftrightarrow x \\ I \leftrightarrow f(x) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} V = 24V \rightarrow I = ? = 12mA \\ V = 1,2V \rightarrow I = ? = 0,6mA \end{array}$$

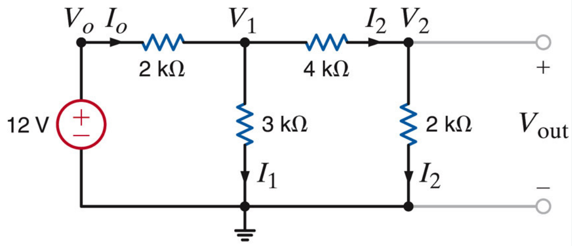
  - não é preciso voltar a analisar o circuito para obter o novo resultado
  - como é um circuito linear pode fazer-se escalamento do resultado

- **Quanto vale V_{out}?**
  - pela estrutura do circuito (circuito em escada), para fazer a sua análise
    - é preciso propagar o efeito de $V_{IN}=12V$ desde a entrada até à saída V_{out}
    - é preciso escolher uma forma de análise do circuito
    - é preciso analisar o circuito da esquerda para a direita
  - usando homogeneidade
    - arbitra-se um valor numérico para V_{out}
    - analisa-se da direita para a esquerda
    - determina-se V_{IN} correspondente
    - faz-se escalamento (regra de três simples)



Homogeneidade (escalamento) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

- **Quanto vale V_{out}?**
  - usando homogeneidade
  - arbitra-se um valor numérico para V_{out}
  - analisa-se da direita para a esquerda
  - determina-se V_{IN} correspondente
  - faz-se escalamento (regra de três simples)
  - calcula-se V_{out} real



$$V'_{out} = 4V$$

$$I'_2 = \frac{V'_{out}}{2k} = 2mA$$

$$V'_1 = (4k + 2k) I'_2 = 12V$$

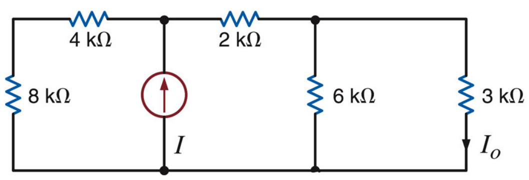
$$I'_1 = \frac{V'_1}{3k} = 4mA$$

$$I'_0 = I'_1 + I'_2 = 6mA$$

$$V'_0 = 2kI'_0 + V'_1 = 24V$$

$$V_{out} = \frac{V'_{out}}{V'_0} V_0 = 2V$$

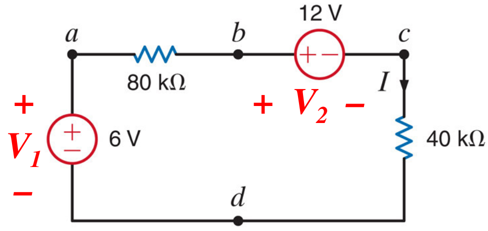
- **Quanto vale I_O se $I = 6mA$?**



  - arbitrar valor numérico para I_O (p. ex. 2mA)
  - calcular I e escalar o valor obtido

Aditividade $f(x+y)=f(x)+f(y)$

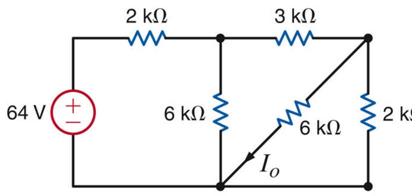
- **Circuito linear**

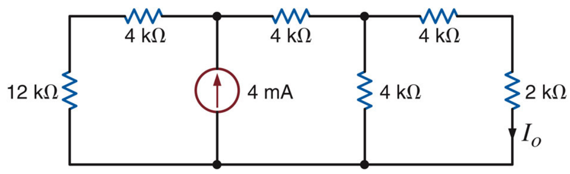


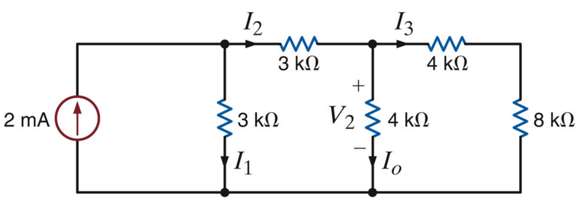
- a corrente I resulta da presença das duas fontes de tensão V_1 e V_2
- a corrente I é a soma de duas parcelas
  - uma resulta da presença de V_1: $V_1 \rightarrow I_1$
  - a outra resulta da presença de V_2: $V_2 \rightarrow I_2$
- calcular I_1:
  - $V_1=6V \quad V_2=0V$ $\qquad I_1=\dfrac{6}{80k+40k}=50\mu A$
- calcular I_2:
  - $V_1=0V \quad V_2=12V$ $\qquad I_2=\dfrac{-12}{80k+40k}=-0{,}1mA=-100\mu A$
- calcular I: $\qquad I=I_1+I_2=-50\mu A$

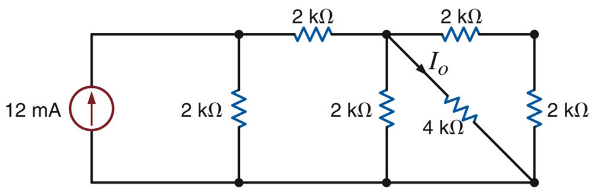
Exemplos de aplicação

- **Calcular I_O usando linearidade (homogeneidade)**

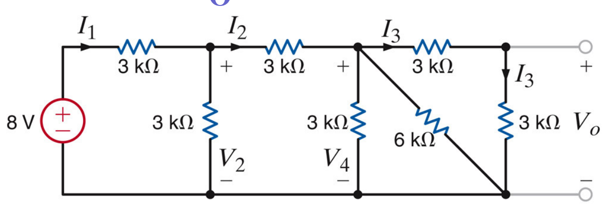








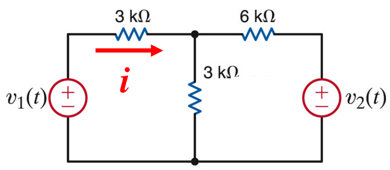
- **Calcular V_O usando linearidade (homogeneidade)**



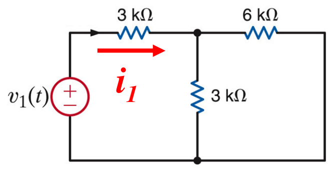
$$f(\alpha x)=\alpha f(x)$$

Teorema da Sobreposição

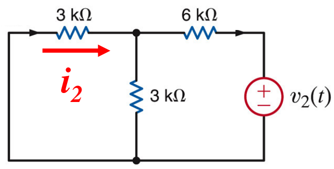
- **Num circuito linear, contendo vários geradores independentes, a corrente ou a tensão num ponto pode ser calculada como a soma algébrica das contribuições individuais de cada um dos geradores independentes agindo isoladamente**
  - considera-se um gerador independente de cada vez
  - eliminam-se os restantes geradores independentes
    - eliminar gerador(fonte) de tensão = substituir-se por curto-circuito
    - eliminar gerador de corrente = substituir-se por circuito aberto
  - num circuito com N geradores independentes
    - faz-se a análise de N sub-circuitos mais simples
- **Calcular *i***



Sub-circuito 1



Sub-circuito 2



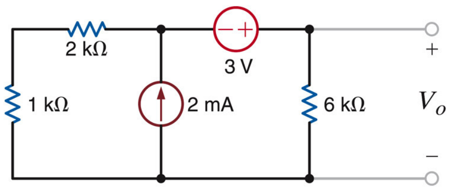
$i = i_1 + i_2$

Exemplo de aplicação

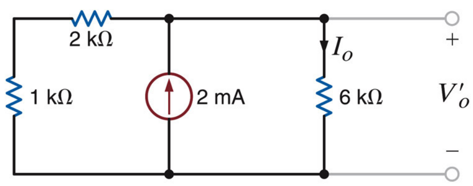
- **Calcular $V_O = V_{R6}$**

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$V_O = V'_O + V''_O$



- **Sub-circuito 1**

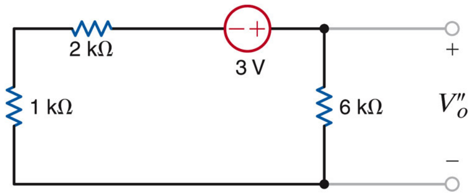


$V'_O = 6kI_O$

$I'_O = \frac{2k+1k}{2k+1k+6k} 2 = \frac{2}{3} mA$ divisor de corrente

$V'_O = 4V$

- **Sub-circuito 2**

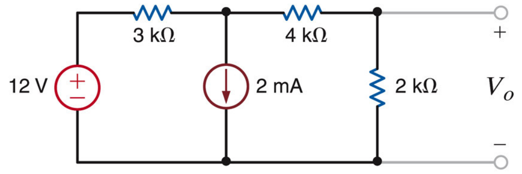


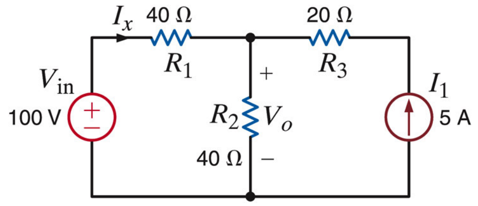
$V''_O = \frac{6k}{1k+2k+6k} 3 = 2V$ divisor de tensão

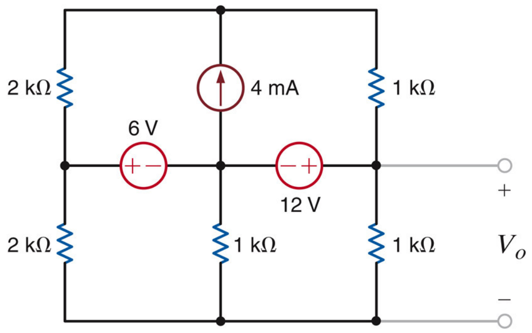
- **Soma algébrica das 2 contribuições** $V_O = V'_O + V''_O = 6V$
  - analisaram-se 2 circuitos mais simples
    - para cada um escolheu-se um determinado método de análise – que se considere mais adequado (simples e rápido)

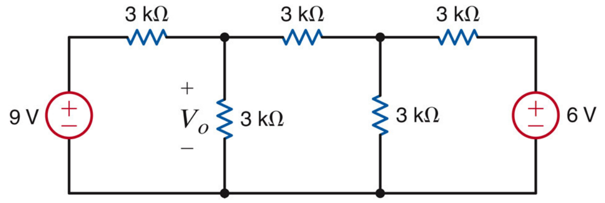
Exemplos de aplicação

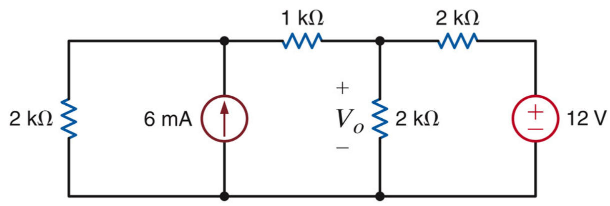
- **Calcular V_O usando o Teorema da Sobreposição**

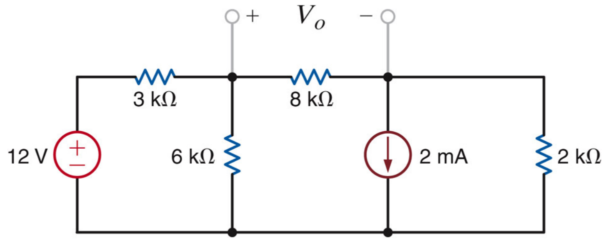






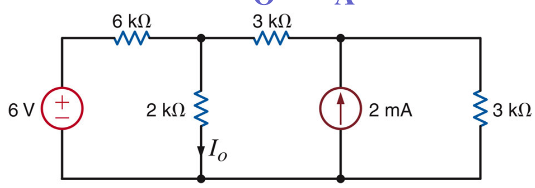


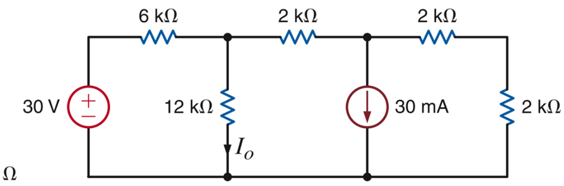


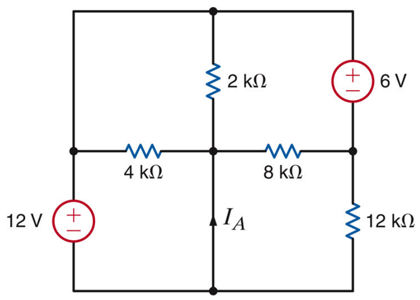


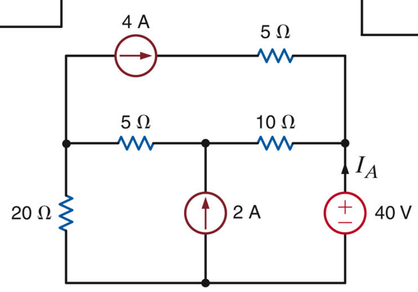
Exemplos de aplicação

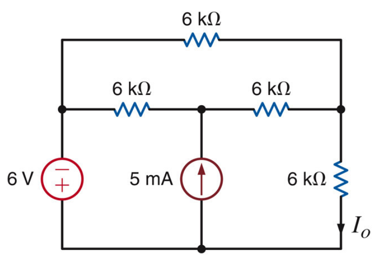
- **Calcular I_O e I_A usando o Teorema da Sobreposição**

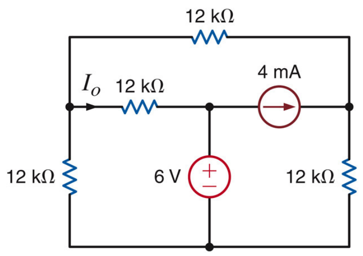


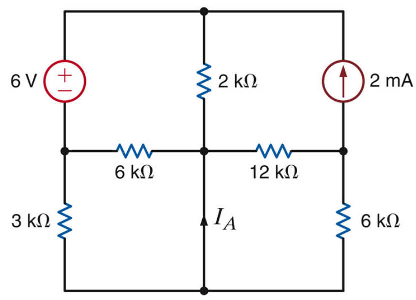






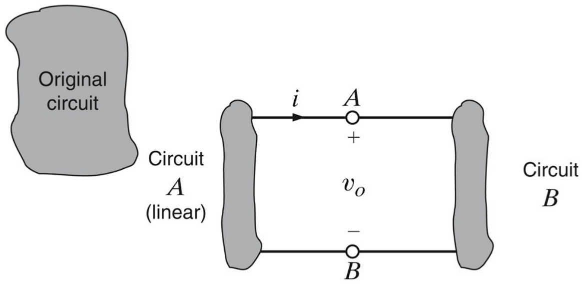






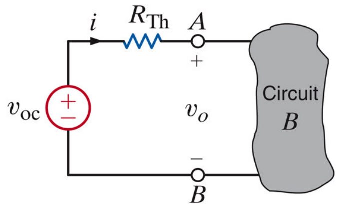
Circuitos equivalentes de Thévenin e Norton

- **Dado um circuito para análise**
  - linear ou não linear
- **Pode ser dividido em 2 circuitos**
  - A – circuito linear
  - B – circuito linear ou não linear

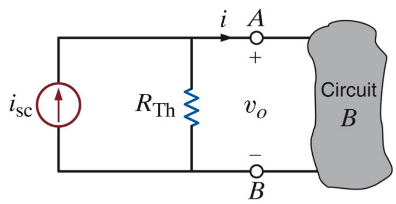


- **O circuito linear A pode ser substituído por um circuito equivalente mais simples**

- **Circuito equivalente de Thévenin**
  - fonte de tensão em série com resistência
  - V_{OC} = tensão em circuito aberto (open circuit)

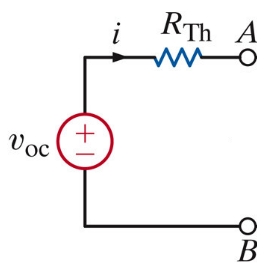


- **Circuito equivalente de Norton**
  - fonte de corrente em paralelo com resistência
  - I_{SC} = corrente de curto-circuito (short-circuit)

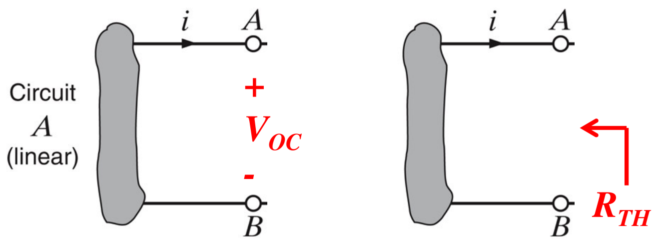


Teorema de Thévenin

- **Um circuito linear, quando visto de um par de terminais, é equivalente a um circuito constituído por uma fonte de tensão em série com uma resistência**
  - $V_{TH} = V_{OC}$
    - tensão equivalente de Thévenin
    - tensão em circuito aberto
  - R_{TH}
    - resistência equivalente de Thévenin
    - resistência vista dos dois terminais

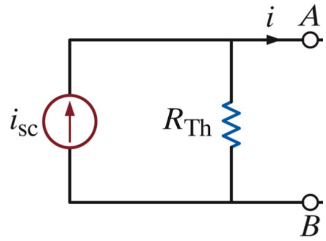


- **Como determinar circuito equivalente de Thévenin?**
  - analisar circuito linear
  - calcular V_{OC} e R_{TH}

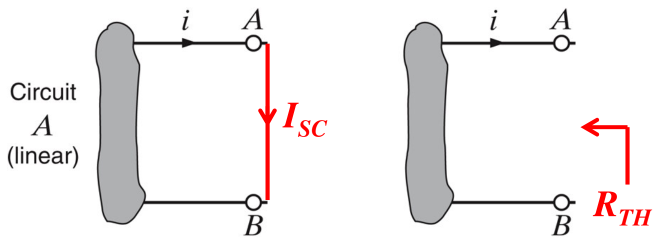


Teorema de Norton

- **Um circuito linear, quando visto de um par de terminais, é equivalente a um circuito constituído por uma fonte de corrente em paralelo com uma resistência**
  - $I_N = I_{SC}$
    - corrente equivalente de Norton
    - corrente medida em curto-circuito
  - R_{TH}
    - resistência equivalente de Thévenin (Norton)
    - resistência vista dos dois terminais

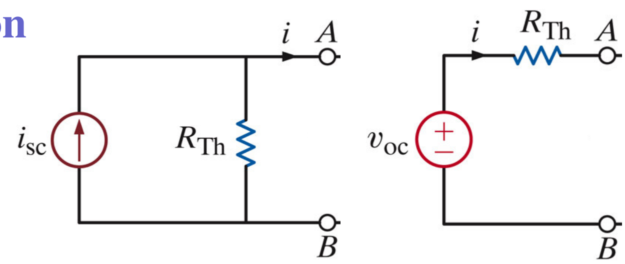


- **Como determinar circuito equivalente de Norton?**
  - analisar circuito linear
  - calcular I_{SC} R_{TH}



Equivalência entre circuitos Thévenin - Norton

- **Circuitos de Thévenin e Norton**
  - são equivalentes ao circuito linear
  - logo são equivalentes entre si



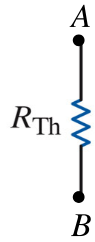
- **Qual a relação entre V_{OC}, I_{SC} e R_{TH}?**

$$R_{TH} = \frac{V_{OC}}{I_{SC}}$$

- **Uma vez conhecida esta relação, basta calcular duas das grandezas e pode obter-se a terceira**
  - escolher o cálculo das duas grandezas que são mais fáceis de calcular
  - independentemente do tipo de circuito equivalente (Thévenin ou Norton) que se pretende determinar
- **Método de cálculo de V_{OC}, I_{SC} e R_{TH}?**
  - depende da estrutura do circuito linear que se tem de analisar e do qual se pretende calcular o circuito equivalente (Thévenin ou Norton)
  - Tem geradores?... São independentes?... Tem geradores dependentes?...

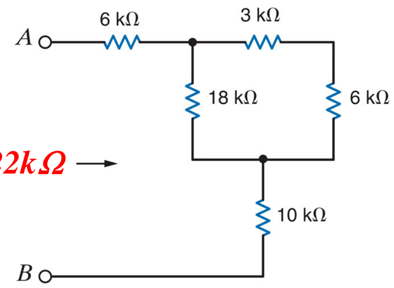
Circuito sem geradores

- **$V_{OC} = 0$**
- **$I_{SC} = 0$**
  - se não existe nenhuma fonte de energia no circuito, não há corrente eléctrica!
- **R_{TH} = simplificação das resistências do circuito**
- **Circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton**
  - são apenas uma resistência de valor R_{TH}

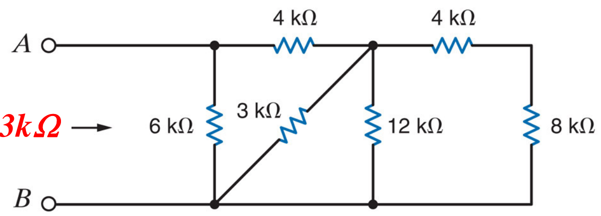


- **Qual o circuito equivalente de Thévenin/Norton?**

$R_{TH}=22k\Omega$ →

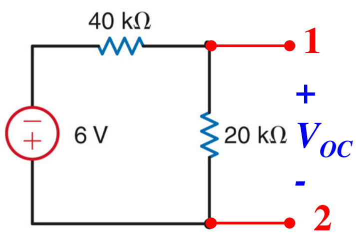


$R_{TH}=3k\Omega$ →



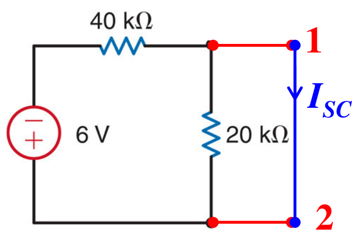
Circuito só com geradores independentes

- **Podem calcular-se as 3 grandezas: V_{OC}, I_{SC} ou R_{TH}**
  - V_{OC} – calculada com o circuito em aberto
  - I_{SC} – calculada fazendo um curto-circuito aos terminais
  - R_{TH} – eliminam-se geradores independentes e simplificam-se resistências
  - calcular apenas 2 grandezas – escolher mais fáceis



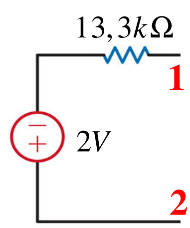
- **Calcular equivalente de Thévenin visto para a esquerda dos nós 1 e 2**
  - V_{OC} – divisor de tensão

$$V_{OC} = V_{12} = \frac{20k}{20k+40k}(-6) = -2V$$



  - R_{TH} – elimina-se fonte independente

$$R_{TH} = 20k \,//\, 40k = {}^{40k}\!/_{3} = 13,3k\Omega$$



  - I_{SC} – curto-circuito entre 1 e 2
    - não passa corrente na $R_{20k\Omega}$

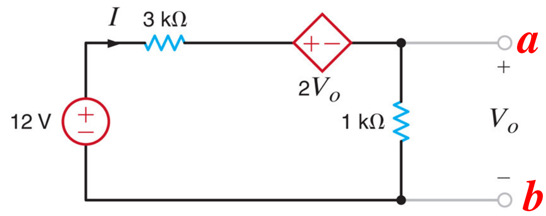
$$I_{SC} = \frac{-6}{40k} = -0,15mA$$

Circuito com geradores independentes e dependentes

- **Calcular V_{OC} e I_{SC}**
  - V_{OC} – calculada com o circuito em aberto
  - I_{SC} – calculada fazendo um curto-circuito aos terminais
- **Obter $R_{TH} = V_{OC}/I_{SC}$**

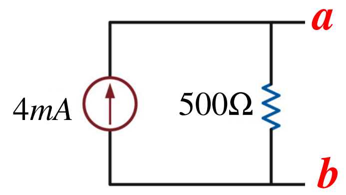
- **Calcular equivalente de Norton visto para a esquerda de a-b**
- **V_{OC}**

$$V_{OC} = V_{ab} = V_O$$
$$V_{OC} = 1k \times I$$
$$I = \frac{12-2VO}{3k+1k} \Leftrightarrow I = 2mA$$
$$V_{OC} = 2V$$



- **I_{SC}**

$$V_O = 0V \Rightarrow (2V_O) = 0, I_{R=1k\Omega} = 0 \Rightarrow I_{SC} = \frac{12}{3k} = 4mA$$

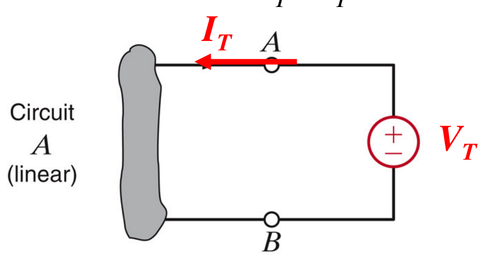


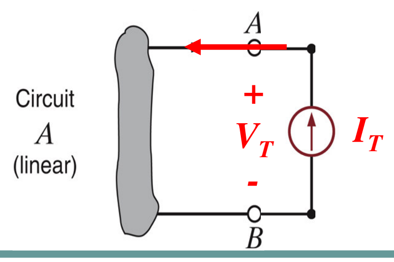
- **R_{TH}**

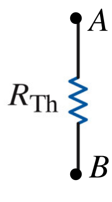
$$R_{TH} = \frac{V_{OC}}{I_{SC}} = 500\Omega$$

Circuito só com geradores dependentes

- **$V_{OC} = 0$**
- **$I_{SC} = 0$**
  - se não existe nenhuma fonte de energia independente no circuito, não há corrente eléctrica!
- **Não se pode calcular $R_{TH} = V_{OC}/I_{SC}$**
  - obtém-se uma indeterminação matemática
- **É preciso usar uma fonte de teste**
  - dependendo do circuito aplica-se fonte de tensão (V_T) ou de corrente (I_T) aos terminais do circuito
  - a razão entre V_T e I_T é a resistência equivalente de Thévenin $R_{TH} = \frac{V_T}{I_T}$

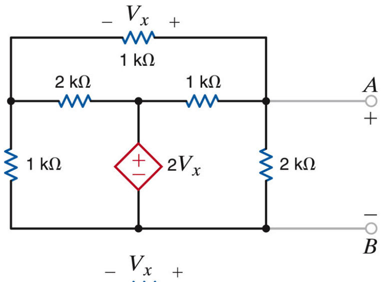




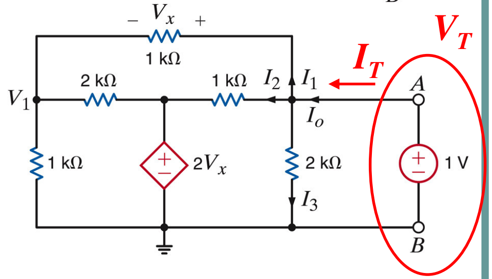


Circuito só com geradores dependentes

- **Determinar o equivalente de Thévenin aos terminais AB**
  - $V_{OC}=0 \quad I_{SC}=0$
  - aplicar fonte de teste de tensão $V_T=1V$
  - calcular a corrente $I_T=I_0$
  - calcular $R_{TH}=V_T/I_T=1/I_T$



  - cálculo de I_T
    - KVL malha exterior, KCL nó V_1
    - calcular V_x, I_1, I_2 e I_3, $I_0=I_T$



$$1 = V_{AB} = V_x + V_1$$

$$\frac{V_1}{1k} + \frac{V_1 - 2V_x}{2k} + \frac{V_1 - 1}{1k} = 0$$

$$V_x = \frac{3}{7}V$$

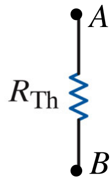
$$I_1 = \frac{V_x}{1k} = \frac{3}{7}mA$$

$$I_2 = \frac{1-2V_x}{1k} = \frac{1}{7}mA$$

$$I_3 = \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}mA$$

$$I_0 = I_T = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{15}{14}mA$$

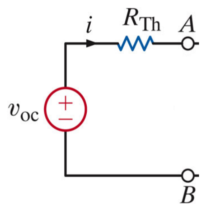
$$R_{TH} = \frac{1}{I_T} = \frac{14}{15}k\Omega$$

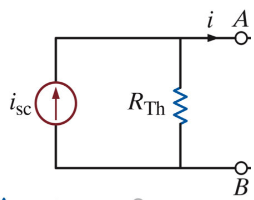


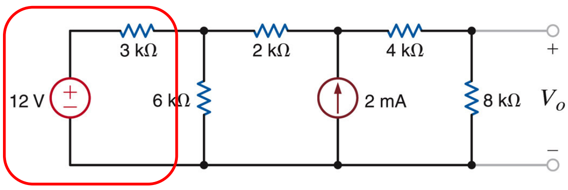
Conversão de Geradores

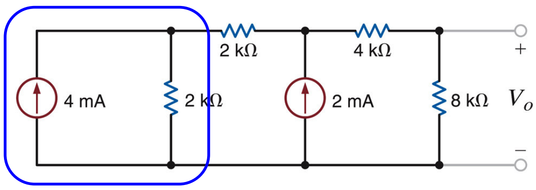
- **Geradores reais**
  - gerador de tensão real – tem resistência interna em série
  - gerador de corrente real – tem resistência interna em paralelo
- **Um gerador de tensão real é equivalente a um gerador de corrente real**
  - esta equivalência pode usar-se para simplificar circuitos
- **Calcular V_O**

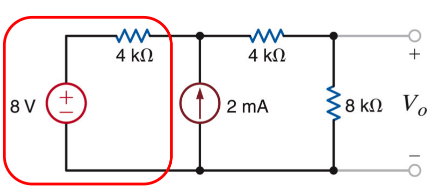
$$R_{TH} = \frac{V_{OC}}{I_{SC}}$$

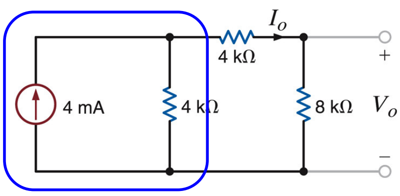












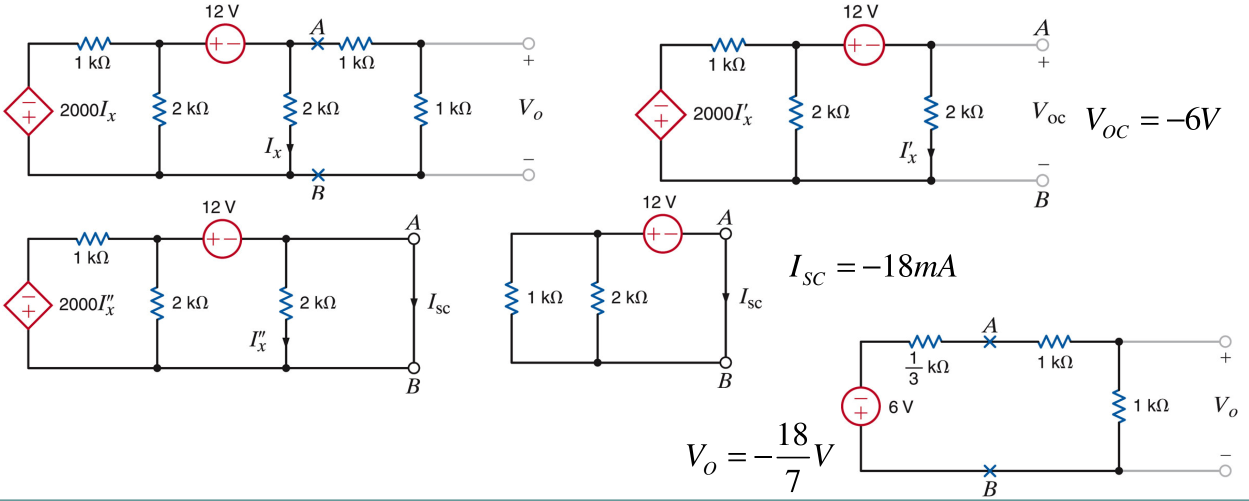
$$I_O = \frac{4k}{4k + (4k + 4k)} 4mA$$

$$I_O = 1mA$$

$$V_O = 8V$$

Como determinar circuito equivalente?

- **Pode determinar-se circuito equivalente**
  - calculando o equivalente de todo o circuito linear
  - calculando parcialmente um circuito equivalente
    - nunca se podem separar as variáveis de controlo dos geradores dependentes, da parte do circuito onde estes estão inseridos!
- **Calcular V_O**



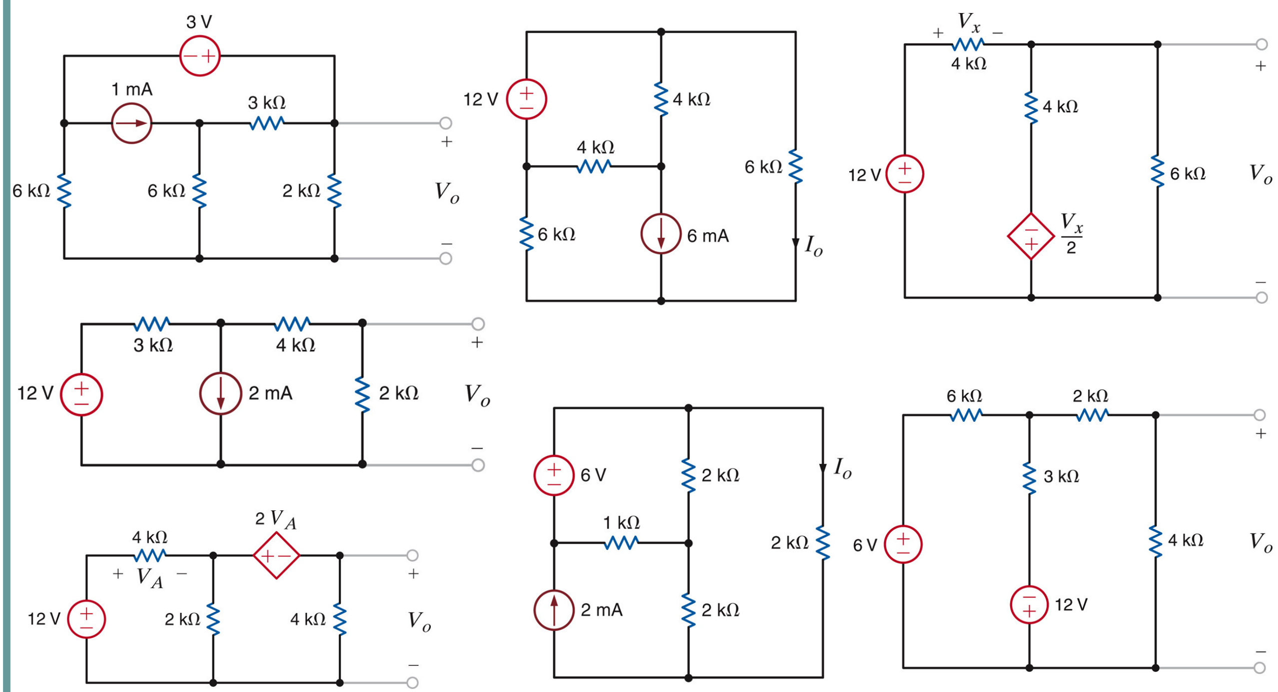
$$V_{OC} = -6V$$

$$I_{SC} = -18mA$$

$$V_O = -\frac{18}{7}V$$

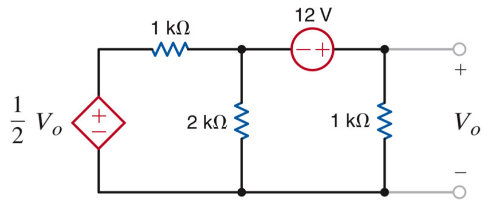
Exemplos de aplicação

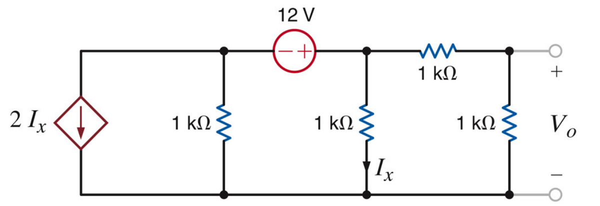
- **Calcular V_O e I_O usando Teoremas de Thévenin ou Norton**

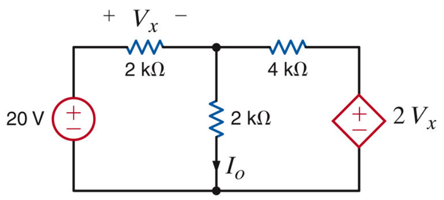


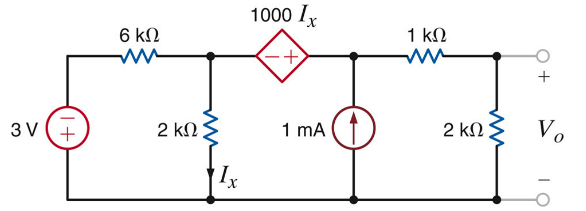
Exemplos de aplicação

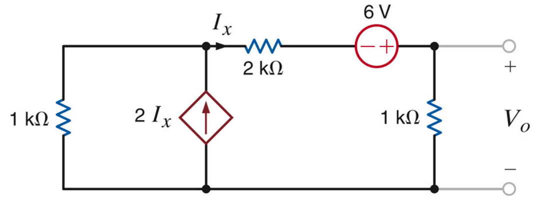
- **Calcular V_O e I_O usando Teoremas de Thévenin ou Norton**

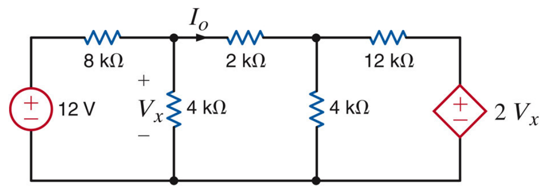






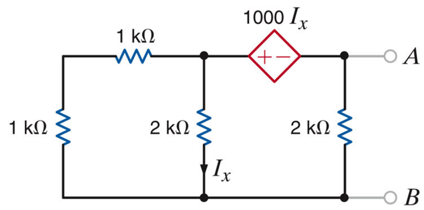


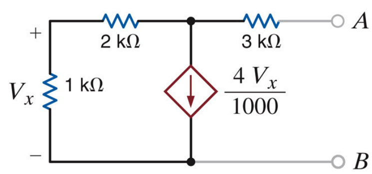


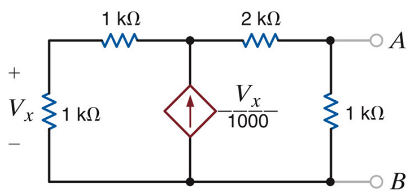


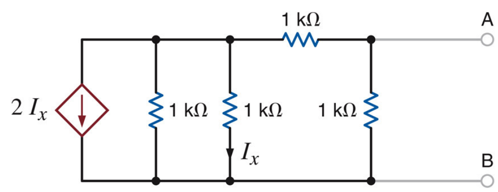
Exemplos de aplicação

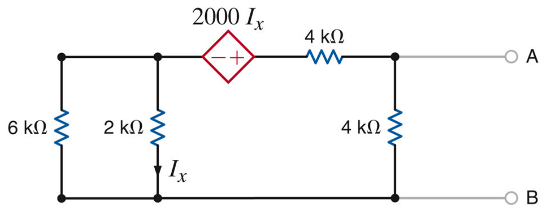
- **Calcular circuitos equivalentes de Thévenin e Norton vistos dos terminais A-B**

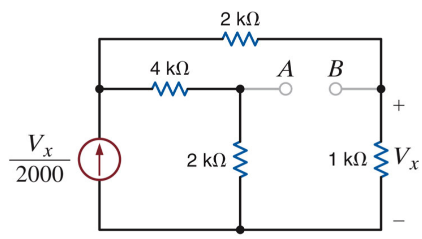






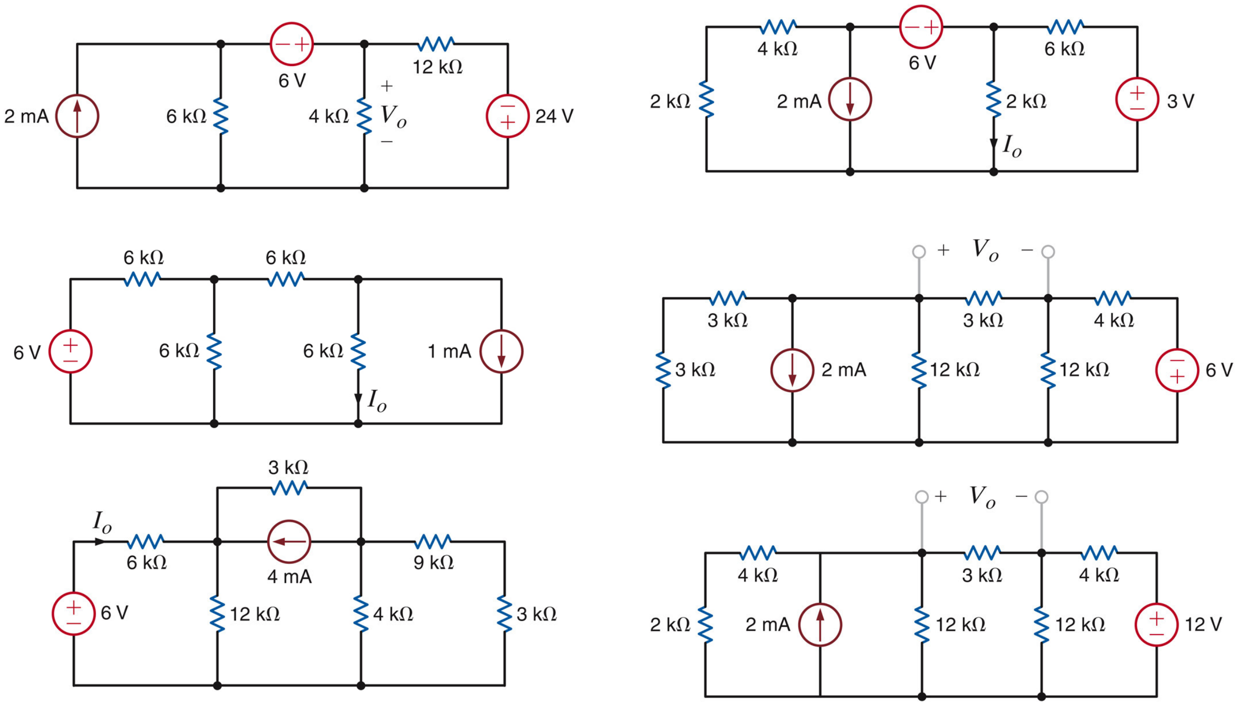






Exemplos de aplicação

- **Calcular V_O e I_O usando Teoremas de Thévenin ou Norton**



Ferramentas de análise de circuitos lineares

- **Lei de Ohm e Leis de Kirchhoff (KCL e KVL)**
- **Componentes em série e paralelo**
  - Resistências, geradores(fontes) de tensão e de corrente
- **Propriedades de circuito linear**
  - Homogeneidade (escalamento), Aditividade
- **Teorema da Sobreposição**
- **Teoremas de Thévenin e Norton**
- **Circuitos equivalentes de Thévenin e Norton**
- **Conversão de geradores**