Processamento Digital de Sinal

1ª Avaliação Complementar – 19_01_2008

Duração 2H00

PARTE I

---

1. Determine se o sistema descrito pela equação $T\{x[n]\}=ax[n]+b$ é **estável**, **causal**, **linear** e **invariante à translação**.

2. Enuncie em que condições existe "***aliasing***" **no domínio dos tempos** quando se usa a DFT? Justifique.

$\boxed{x[n] = 0 \quad n<0}$

3. A **parte real** da transformada de Fourier de um sinal causal é: $X_R(e^{jw})= 1+\cos(w)$. Determine a **parte imaginária** dessa mesma transformada.

$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$ $x_e[n] = \frac{x[n]+x[-n]}{2}$

X_R X_I $x_o[n] =$

---

4. Suponha o sistema discreto com resposta impulsional

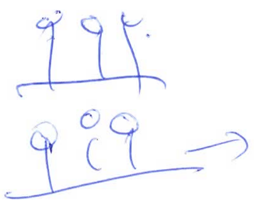
$$h[n]=\delta[n-2]-\delta[n+2].$$

Determine:

a) a sua resposta em frequência $\mathbf{H(e^{jw})}$.

b) graficamente $\mathbf{H(e^{jw})}$: **módulo** e **fase**.

c) um sinal discreto que **aplicado à entrada** do sistema dado produza uma **saída constante igual a zero** (saída nula). Justifique.



$n=0$

PARTE II

....

5. Defina "*fft*" e explique a necessidade de fazer o "***zeros padding***" quando aproximamos a transformada discreta de Fourier de um sinal, DFT.

6. Admita que **X(z)** é a transformada Z de um sinal discreto $\mathbf{x[n]}$. **Demonstre** qual é transformada de Z de $a^n.x[n]$.

7. No projecto de filtros digitais **quando se deve optar** por um solução baseada em filtros **FIR** ou **IIR**?. Justifique.

....

...

8. Considere o sistema discreto **causal** definido pela equação às diferenças

$$y[n] = 2x[n] + 0.7y[n-1] - 0.1y[n-2] \qquad \textbf{(1).}$$

a) Determine a sua função de transferência, **H(z)**.

b) Apresente o **diagrama de pólos e zeros** bem como a região de convergência, **ROC**. O sistema é estável?

c) Represente graficamente, de um modo aproximado, o **módulo** de $\mathbf{H(e^{jw})}$.

d) Determine que efeito teria em $\mathbf{H(e^{jw})}$ a substituição de $\mathbf{x[n]}$ por $\mathbf{x[n-1]}$ na equação **(1)**.

e) Calcule a sua resposta impulsional, $h[n]$, do sistema descrito pela equação às diferenças **(1)**.

f) Apresente uma **estrutura de realização** do filtro digital que a seguir se apresenta na forma que **minimiza os atrasos**,

$$y[n] = 2x[n-1] + 0.7y[n-1] - 0.1y[n-2].$$

Processamento Digital de Sinal

EXAMES ① 1ª Avaliação

19/01/2008

1 Determine se o sistema descrito pela equação $T\{x(n)\} = a\,x(n) + b$ é estável, causal, linear e invariante.

- Estável: Não Recursivo $|x(n)| < \infty \longrightarrow |a\,x(n) + b| < \infty$

$$|T\{x(n)\}| = |a\,x(n) + b| \leq |a|\,M + b.$$

é estável para valores finitos de a e b, sendo $x(n)$ limitado para um valor M.

- Causalidade

É causal pois a saída não precede a entrada, ou seja, o sistema não utiliza valores futuros de $x(n)$

- Linearidade

$$T\{\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)\} = \alpha_1 T\{x_1(n)\} + \alpha_2 \cdot T\{x_2(n)\}$$

$$a\{\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)\} + b \neq a\alpha_1\{x_1(n)\} + a\alpha_2\{x_2(n)\} + \alpha_1 b + \alpha_2 b$$

∴ O sistema não é linear.

- Invariância à translação

$$y(n) = a\,x(n) + b$$

$$T\{x(n-d)\} = a\,x(n-d) + b = y(n-d)$$

∴ O sistema é invariante à translação

2 Enuncie em que condições existe "aliasing" no domínio do tempo quando se usa a DFT. Justifique.

Aliasing é a sobreposição entre extensões periódicas e o espectro. Aparece, quando se utiliza a DFT e não se tem em atenção o número de pontos no sinal que se quer amostrar e se escolhe para a DFT um número inferior de pontos ao tamanho da sequência que se quer amostrada.

Para se evitar este aliasing o número de pontos de amostragem tem que ser no mínimo igual ao número de pontos do sinal amostrado $N \geq M$

3 A parte real da Transformada de Fourier de um sinal causal é: $X_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos(\omega)$. Determine a parte imaginária dessa mesma transformada.

Processamento Digital de Sinal

EXAMES (2) 1ª Avaliação — 19/01/2008

4 Suponha o sistema discreto com resposta impulsional

$$h(n) = \delta(n-2) - \delta(n+2)$$

Determine:

a) A sua resposta em frequência $H(e^{jw})$

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \cdot e^{-jwn} = e^{-jw2} - e^{jw2} =$$

Qual a fase? ↓ C. AUX

$$= -\left(e^{jw2} - e^{-jw2}\right) = -2j\,\mathrm{sen}(w2)$$

$$= 2\,\mathrm{sen}(2w)\, e^{-j\pi/2}$$

C. AUX

$$e^{jw} = -j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos w + j\,\mathrm{sen}\, w = -j$$

tem de ser 0 tem de ser −1

$$\mathrm{sen}\, w = -1 \Leftrightarrow$$

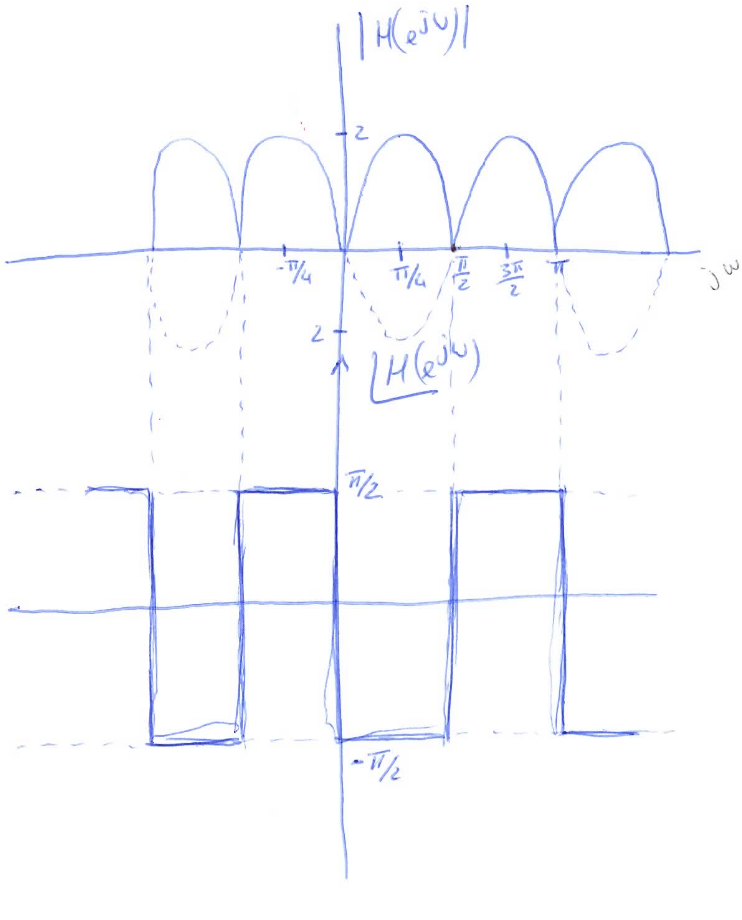
$$\Leftrightarrow w = \mathrm{arcsen}(-1)$$

$$w = -\pi/2$$

$$\therefore -j = e^{-j\pi/2}$$

b) $H(e^{jw}) = \underbrace{-2\,\mathrm{sen}(2w)}_{\text{Modulo}}\; e^{j\boxed{-\pi/2}}$ fase

ATENÇÃO! $-w = -\pi/2 \Rightarrow w = \pi/2$



w	$\lvert H(e^{jw})\rvert$
$-\pi$	0
$-\pi/2$	0
$-\pi/4$	2
0	0
$\pi/4$	−2
$\pi/2$	0
π	0

não se sabe verdade! Ver $-\pi/4$

INVERTE

MÓDULO NUNCA É NEGATIVO

5 Define "FFT" e explique a necessidade de fazer "zero-padding" quando aproximamos a transformada discreta de Fourier de um sinal, DFT.

FFT ou Fast Fourier Transform é um eficiente algoritmo para computar a Transformada Discreta de Fourier (DFT) e a sua inversa. Existem variadíssimos algoritmos FFT, cada um adaptado a necessidades específicas.
No uso de FFT para computar a inversa DFT só pode representar o domínio de tempo completo quando a entrada for periódica (infinita). Por isso se diz que a DFT é a transformada para análise de Fourier de funções discretas de domínios de tempo finito.

Sendo $S[k] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-j 2\pi \frac{k}{N} n}$ O tamanho N pode ser maior que a porção de não-zeros de $s[n]$, por isso o zero-padding é fazer o "enchimento" de $s[n]$ com zeros pois quanto maior for N melhor será a aproximação feita.

6 Admite que X(z) é a transformada de Z de um sinal discreto $x[n]$. Demonstre qual é a transformada de Z de $a^n x[n]$

$$x[n] \xrightarrow{T.Z} X(z) \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$a^n x[n] \xrightarrow{T.Z} ?$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a z^{-1})^n x[n] = \text{Admitindo } x[n] = u[n]$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (a z^{-1})^n = \cancel{(a z^{-1})^0} \frac{1 - \cancel{(a z^{-1})^{\infty}}}{1 - a z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{1}{\frac{z-a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

Com:

$$|a z^{-1}| < 1 \Rightarrow |a| < |z| \Rightarrow \boxed{|z| > |a|}$$

7 No projecto de filtros digitais quando se deve optar por uma solução baseada em filtros FIR ou IIR? Justifique.

No projecto de filtros digitais devemos optar pelo IIR (Infinite Impulsional Response) quando não for possível sustentar os elevados custos computacionais e por isso opta-se por se comprometer a estabilidade do sistema em ordem a ter custos mais baixos.
O FIR é para sistemas em que podendo sustentar os custos computacionais, é vital assegurar a sua estabilidade em 100% das equações.

8 Considere o sistema discreto causal definido pela equação às diferenças

$$y[n] = 2x[n] + 0{,}7\,y[n-1] - 0{,}1\,y[n-2]$$

a) Defina a função de transferência $H(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = ?$$

$$Y(z) = 2X(z) + 0{,}7\,Y(z)z^{-1} - 0{,}1\,Y(z)z^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(z) - 0{,}7\,Y(z)z^{-1} + 0{,}1\,Y(z)z^{-2} = 2X(z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(z)\left(1 - 0{,}7z^{-1} + 0{,}1z^{-2}\right) = 2X(z) \Leftrightarrow$$

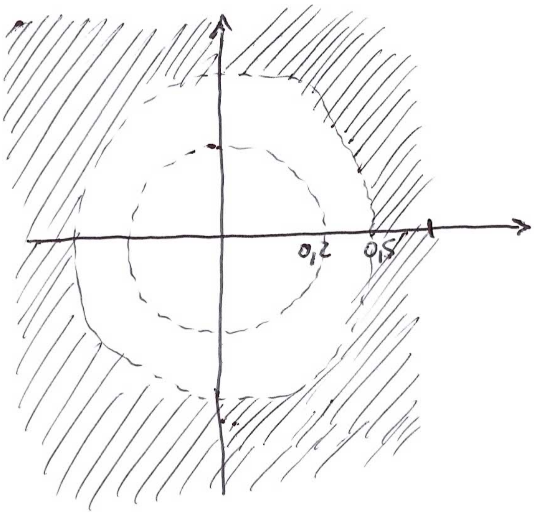
$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{2}{1 - 0{,}7z^{-1} + 0{,}1z^{-2}} = \frac{2z^2}{z^2 - 0{,}7z + 0{,}1}$$

$$\left(\frac{z^2}{z^2}\right)$$

b) Apresente o diagrama de polos e zeros bem como a região de convergência ROC
O sistema é estável?

Zeros: $2z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$

Polos: $z^2 - 0{,}7z + 0{,}1 = 0 \Rightarrow z = 0{,}2 \vee z = 0{,}5$



Para o sistema ser causal (como enunciado), a ROC está para fora do ponto mais exterior. Logo o sistema vai ser estável pois a ROC inclui a circunferência de raio unitário.

c) Represente graficamente de um modo aproximado o módulo de $H(e^{jw})$

$$H(z) = \frac{2}{1 - 0{,}7 z^{-1} + 0{,}1 z^{-2}}$$ como é estável $H(e^{jw}) = H(z)\Big|_{z=e^{jw}}$.

$$H(e^{jw}) = \frac{2}{1 - 0{,}7 e^{-jw} + 0{,}1 e^{-jw2}}$$

$$|H(e^{jw})| = \left| \frac{2}{1 - 0{,}7(\cos(-w) - j\,\mathrm{sen}(w)) + 0{,}1(\cos(-2w) - j\,\mathrm{sen}(2w))} \right| =$$

$$= \frac{2}{1 - 0{,}7\cos(-w) + 0{,}1\cos(-2w) + 0{,}7j\,\mathrm{sen}(w) - 0{,}1j\,\mathrm{sen}(2w)} =$$

$$|H(e^{jw})| = \frac{2}{\sqrt{(1 - 0{,}7\cos(w) + 0{,}1\cos(2w))^2 + j(0{,}7\,\mathrm{sen}\,w - 0{,}1\,\mathrm{sen}(2w))^2}}$$

w	$\| \|$
0	
$\pi/2$	
π	
$-\pi/2$	
$-\pi$	