# Complementos de Análise Matemática

MIETI, MIEMAT, MIETEX
2016/2017

**Ficha 6: Separação de variáveis, séries de Fourier e aplicações**

1. Encontre uma solução em séries de Fourier formal dos problemas
   (a) $x'' + 4x = t,\ x(0) = x(1) = 0,$
   (b) $x'' + 2x = 1,\ x(0) = x(\pi) = 0.$

2. Use séries de Fourier para encontrar uma solução periódica da equação diferencial $2x'' + 32x = f(t)$ onde
   (a) $f(t) = 10$ se $0 < t < 1$ e $f(t) = -10$ se $1 < t < 2$,
   (b) $f(t)$ é a função de período 4 com $f(t) = 5t$ para $-2 < t < 2$.

3. (a) Encontre a série de Fourier da função $f$ de período 2 com $f(t) = t^2$ para $0 < t < 2$.
   (b) Mostre que a derivada termo a termo desta série não converge para $f'(t)$.

4. Encontre a série de Fourier das funções
   (a) $f(t) = \sin^2 t,\ -\pi \le t \le \pi,$
   (b) $f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad -\pi < x \le 0 \\ x & : \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$
   (c) Desenvolva $f(x) = \sin\, x$, $0 \le x \le \pi$, em série de Fourier de cosenos.
   (d) Desenvolva $f(x) = 1$, $0 \le x \le 1$, em série de Fourier de senos.
   (e) Desenvolva $f(t) = \exp(t)$, $0 < t < \pi$, em série de Fourier de senos.

5. Considere a seguinte problema de valor inicial e condições na fronteira:

$$\begin{array}{ll} u_t = 9u_{xx} + 9u, & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \pi - x & 0 < x < \pi. \end{array}$$

   (a) Desenvolva $u(x,0)$ numa série de senos em $[0,\pi]$.
   (b) Encontre uma solução em séries de Fourier formal do problema.

6. Determine a solução do seguinte problema de valores de fronteira para a equação do calor.

$$\begin{array}{ll} w_t = w_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ w(t,0) = 0,\ w(t,\pi) = 0, & t > 0, \\ w(0,x) = \sum_{n=1}^{5} \frac{sen((2n+1)x)}{2n+1}. & 0 < x < \pi. \end{array}$$

7. Determine a solução do seguinte problema de valores de fronteira para a equação do calor.

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx}, & t \geq 0,\ 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,x) = \sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(8x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \geq 0. \end{array}$$

8. Determine a solução do seguinte problema de valores na fronteira e iniciais para a equação da onda.

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - 4\,u_{xx} = 0, & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(t,0) = 0,\ u(t,\pi) = 0, & t > 0, \\ u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = 3\,\sin(2x) - 4\,\sin(4x). & 0 < x < \pi. \end{array}$$

**Soluções da Ficha 6**

(1a) $x(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin(n\pi t)}{n(4-n^2\pi^2)}$
(1b) $x(t) = \frac{-4}{\pi}\sum_{n\,impar} \frac{1}{n(n^2-2)} sen(nt)$
(2a) $x(t) = \frac{20}{\pi}\sum_{n\,impar} \frac{\sin(n\pi t)}{n(16-n^2\pi^2)}$
(2b) $x(t) = \frac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(40-n^2\pi^2)}\ \sin(n\pi t/2)$
(3) $f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n\pi t)}{n^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi t)}{n}$
(4a) $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos(2t)$
(4b) $f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n\,impar} \frac{cos(nx)}{n^2} + \sum_{n\,impar} \frac{sen(nx)}{n}$
(4c) $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+cos(n\pi)}{n^2-1} cos(nx)$
(4d) $1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n\,impar} \frac{sen(nx)}{n}$
(4e) $f(t) = \frac{2}{n}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}[(-1)^{n+1}\exp(\pi) + 1]sen(nt)$
(5a) $u(x,0) = \frac{2}{n} sen(nx)$
(5b) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\ e^{9(1-n^2)t}\ \sin(nx)$
(6) $w(t,x) = \sum_{n=1}^{5} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}\ e^{-(2n+1)^2 t}$
(7) $u(t,x) = sin(3x)\ e^{-9t}\ - \frac{1}{2}\ \sin(8x)\ e^{-64t}$
(8) $u(t,x) = \frac{3}{4}\ \sin(4t)\ \sin(2x) - \frac{1}{2}\ sin(8t)\ \sin(4x)$

Nota:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)];$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)];$$
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$