Teoria

A determinação das derivadas parciais, pela utilização da definição de derivadas parciais, recorre às seguintes expressões:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h;y_0)-f(x_0;y_0)}{h}$;

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0;y_0+k)-f(x_0;y_0)}{k}$.

1. Usando a definição calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ nos pontos indicados:

a) $f(x;y)=\begin{cases}\frac{y-5}{x+4} & \text{se: } (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se: } (x;y)=(0;0)\end{cases}$ no ponto $(0;0)$

R:

Antes de mais vamos começar por determinar o domínio da função:

$D_f=\{(x;y)\in\Re^2 : x\neq -4\}\Rightarrow \Re^2\setminus\{-4\}$

Passando agora à determinação das derivadas pela definição, teremos para a derivada em ordem a x o seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h;y_0)-f(x_0;y_0)}{h}\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h;0)-f(0;0)}{h}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h;0)-f(0;0)}{h}\Leftrightarrow$$ ¤

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(0;0)=0 \rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $(x;y)=(0;0)$ então a função assume o valor 0 (zero). $f(x;y)=\frac{y-5}{x+4} \Rightarrow f(h;0)=\frac{0-5}{h+4} \Leftrightarrow f(h;0)=-\frac{5}{h+4}$

Assim sendo e por substituição directa em ¤ , teremos que:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{5}{h+4}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-5}{h\cdot(h+4)}=\lim_{h\to 0}-5\cdot\frac{1}{h^2+4h}=$$

$$=-5\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2+4h}=\begin{Bmatrix}-5\cdot\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h^2+4h}\\ -5\cdot\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^2+4h}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}+\infty\\ -\infty\end{Bmatrix}$$

Calculando agora a derivada em ordem a y teremos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0;y_0+k)-f(x_0;y_0)}{k}\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0;0+k)-f(0;0)}{k}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0;k)-f(0;0)}{k}\Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(0;0)=0 \rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $(x;y)=(0;0)$ então a função assume o valor 0 (zero). $f(x;y)=\frac{y-5}{x+4} \Rightarrow f(0;k)=\frac{k-5}{0+4} \Leftrightarrow f(0;k)=\frac{k-5}{4}$

Assim sendo e por substituição directa em ¤ , teremos que:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{k-5}{4} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k-5}{4k} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{4k} - \lim_{k\to 0} \frac{5}{4k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \cdot \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \cdot \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \cdot \lim_{k\to 0^-} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \cdot \lim_{k\to 0^+} \frac{1}{k} \end{cases} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

b) $f(x;y) = \dfrac{x^3 + 3y^3}{x+y}$ no ponto (1;1)

R:

Antes de mais vamos começar por determinar o domínio da função:

$$D_f = \{(x;y) \in \Re^2 : x \neq -y\} \Rightarrow \Re^2$$

Passando agora à determinação das derivadas pela definição, teremos para a derivada em ordem a x o seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h;y_0) - f(x_0;y_0)}{h} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1;1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h;1) - f(1;1)}{h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1;1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h;1) - f(1;1)}{h} \Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(1;1) = \dfrac{1^3 + 3\cdot 1^3}{1+1} = 2$

$$f(x;y)=\frac{x^3+3y^3}{x+y}\Rightarrow f(1+h;1)=\frac{(1+h)^3+3\cdot 1^3}{(1+h)+1}\Leftrightarrow f(1+h;1)=\frac{(1+h)^3+3}{h+2}$$

Assim sendo e por substituição directa em ¤ , teremos que:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1;1)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(1+h)^3+3}{h+2}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(1+h)^3+3-2\cdot(h+2)}{h+2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3+3-2\cdot(h+2)}{h\cdot(h+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)\cdot(1+h)^2+3-2h-4}{h\cdot(h+2)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)\cdot(1+2h+h^2)-1-2h}{h\cdot(h+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+2h+h^2+h+2h^2+h^3)-1-2h}{h\cdot(h+2)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+3h+3h^2+h^3-1-2h}{h\cdot(h+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{h+3h^2+h^3}{h\cdot(h+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(1+3h+h^2)}{h\cdot(h+2)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+3h+h^2)}{(h+2)}=\frac{(1+3\cdot 0+0^2)}{(0+2)}=\frac{1}{2}$$

Calculando agora a derivada em ordem a y teremos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0;y_0+k)-f(x_0;y_0)}{k}\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1;1)=\lim_{k\to 0}\frac{f(1;1+k)-f(1;1)}{k}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1;1)=\lim_{k\to 0}\frac{f(1;1+k)-f(1;1)}{k}\Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(1;1)=\dfrac{1^3+3\cdot 1^3}{1+1}=2$ $f(x;y)=\dfrac{x^3+3y^3}{x+y}\Rightarrow f(1;1+k)=\dfrac{1^3+3\cdot(1+k)^3}{1+(1+k)}\Leftrightarrow f(1;1+k)=\dfrac{1+3\cdot(1+k)^3}{2+k}$

Assim sendo e por substituição directa em ¤ , teremos que:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1;1)=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{1+3\cdot(1+k)^3}{2+k}-2}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{1+3\cdot(1+k)^3-2\cdot(2+k)}{2+k}}{k}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{1+3\cdot(1+k)^3-4-2k}{2+k}}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{1+3\cdot(1+k)^3-4-2k}{k\cdot(2+k)}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{1+(3+3k)\cdot(1+2k+k^2)-4-2k}{k\cdot(2+k)}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{1+(3+6k+3k^2+3k+6k^2+3k^3)-4-2k}{k\cdot(2+k)}=\lim_{k\to 0}\frac{(7k+9k^2+3k^3)}{k\cdot(2+k)}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{k\cdot(7+9k+3k^2)}{k\cdot(2+k)}=\lim_{k\to 0}\frac{(7+9k+3k^2)}{(2+k)}=\frac{(7+9\cdot 0+3\cdot 0^2)}{(2+0)}=\frac{7}{2}$$

c) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-y^3}{x^2+3y^2} & \text{se}: (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se}: (x;y)=(0;0)\end{cases}$ no ponto $(0;0)$

R:

Antes de mais vamos começar por determinar o domínio da função:

$D_f=\Re^2\rightarrow$ Porque a função já está definida no enunciado de forma a excluir o ponto (0;0) que seria aquele que poderia causar problemas.

Passando agora à determinação das derivadas pela definição, teremos para a derivada em ordem a x o seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h;y_0)-f(x_0;y_0)}{h}\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h;0)-f(0;0)}{h}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h;0)-f(0;0)}{h}\Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(0;0)=0\rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $(x;y)=(0;0)$ então a função assume o valor 0 (zero).
$f(x;y)=\dfrac{2x^3-y^3}{x^2+3y^2}\Rightarrow f(h;0)=\dfrac{2h^3-0^3}{2h^2+3\cdot0^2}\Leftrightarrow f(h;0)=\dfrac{2h^3}{2h^2}\Leftrightarrow f(h;0)=h$

Assim sendo e por substituição directa em ¤ , teremos que:

$$\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to0}\frac{h-0}{h}=\lim_{h\to0}1=1$$

Calculando agora a derivada em ordem a y teremos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0;y_0+k)-f(x_0;y_0)}{k}\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0;0+k)-f(0;0)}{k}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0;k)-f(0;0)}{k}\Leftrightarrow¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(0;0)=0\rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $(x;y)=(0;0)$ então a função assume o valor 0 (zero).
$f(x;y)=\frac{2x^3-y^3}{x^2+3y^2}\Rightarrow f(0;k)=\frac{2\cdot 0^3-k^3}{2\cdot 0^2+3\cdot k^2}\Leftrightarrow f(0;k)=-\frac{k^3}{3k^2}\Leftrightarrow f(0;k)=-\frac{k}{3}$

Assim sendo e por substituição directa em ¤ , teremos que:

$$\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{-\frac{k}{3}-0}{k}=\lim_{k\to 0}-\frac{k}{3k}=\lim_{k\to 0}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$$

d) $\mathrm{f}(\mathrm{x};\mathrm{y})=\begin{cases}\frac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{\mathrm{x}+y} & \text{se}:\ \mathrm{x}\neq -y\\ 1 & \text{se}:\ \mathrm{x}=-y\end{cases}$ no ponto $(0;0)$

R:

Antes de mais vamos começar por determinar o domínio da função:

$D_f=\Re^2$

Passando agora à determinação das derivadas pela definição, teremos para a derivada em ordem a x o seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h;y_0)-f(x_0;y_0)}{h}\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h;0)-f(0;0)}{h}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h;0)-f(0;0)}{h}\Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(0;0)=1\rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $x=-y$ então a função assume o valor 1. $f(x;y)=\frac{x-y}{x+y}\Rightarrow f(h;0)=\frac{h-0}{h+0}\Leftrightarrow f(h;0)=\frac{h}{h}\Leftrightarrow f(h;0)=1$

Assim sendo e por substituição directa em ¤ , teremos que:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Calculando agora a derivada em ordem a y teremos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0;y_0+k)-f(x_0;y_0)}{k}\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0;0+k)-f(0;0)}{k}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0;k)-f(0;0)}{k}\Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(0;0)=1 \rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $x=-y$ então a função assume o valor 1. $f(x;y)=\frac{x-y}{x+y} \Rightarrow f(0;k)=\frac{0-k}{0+k} \Leftrightarrow f(0;k)=\frac{-k}{k} \Leftrightarrow f(0;k)=-1$

Assim sendo e por substituição directa em ¤ , teremos que:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{-1-1}{k}=\lim_{k\to 0}-\frac{2}{k}=2\cdot -\frac{1}{0}=2\cdot\infty=\infty$$

e) $f(x;y)=\left\{\begin{matrix} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x+y} & \text{se: } x\neq -y \\ 0 & \text{se: } x=-y \end{matrix}\right\}$ no ponto $(0;0)$

R:

Antes de mais vamos começar por determinar o domínio da função:

$D_f=\Re^2$

Passando agora à determinação das derivadas pela definição, teremos para a derivada em ordem a x o seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h;y_0)-f(x_0;y_0)}{h} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h;0)-f(0;0)}{h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h;0)-f(0;0)}{h} \Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(0;0)=0 \rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $x=-y$ então a função assume o valor 0. $f(x;y)=\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x+y} \Rightarrow f(h;0)=\dfrac{e^{h^2+0^2}-1}{h+0} \Leftrightarrow f(h;0)=\dfrac{e^{h^2}-1}{h}$

Assim sendo e por substituição directa em ¤ , teremos que:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{h^2}-1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2}-1}{h^2}=^{1}1$$

Calculando agora a derivada em ordem a y teremos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0;y_0+k)-f(x_0;y_0)}{k} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0;0+k)-f(0;0)}{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0;k)-f(0;0)}{k} \Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(0;0)=0 \rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $x=-y$ então a função assume o valor 0. $f(x;y)=\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x+y} \Rightarrow f(0;k)=\dfrac{e^{0^2+k^2}-1}{0+k} \Leftrightarrow f(0;k)=\dfrac{e^{k^2}-1}{k}$

[1] Este é um dos limites conhecidos: $\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$

Assim sendo e por substituição directa em ¤ , teremos que:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{e^{k^2} - 1}{k}}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{e^{k^2} - 1}{k^2} \overset{2}{=} 1$$

f) $f(x; y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^4 + y^4 + 1)}{x - y} & \text{se: } x \neq y \\ 0 & \text{se: } x = y \end{cases}$ no ponto $(0;0)$

R:

Antes de mais vamos começar por determinar o domínio da função:

$D_f = \Re^2$

Passando agora à determinação das derivadas pela definição, teremos para a derivada em ordem a x o seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h; y_0) - f(x_0; y_0)}{h} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h;0) - f(0;0)}{h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h;0) - f(0;0)}{h} \Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(0;0) = 0 \rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $x = y$ então a função assume o valor 0.

[2] Este é um dos limites conhecidos: $\lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$

$$f(x;y)=\frac{\ln\left(x^4+y^4+1\right)}{x-y}\Rightarrow f(h;0)=\frac{\ln\left(h^4+0^4+1\right)}{h-0}\Leftrightarrow f(h;0)=\frac{\ln\left(h^4+1\right)}{h}$$

Assim sendo e por substituição directa em ¤ , teremos que:

$$\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln\left(h^4+1\right)}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(h^4+1\right)}{h^2}=^{3}\lim_{h\to 0}\frac{\left(\ln\left(h^4+1\right)\right)'}{\left(h^2\right)'}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\left(h^4+1\right)'}{\left(h^4+1\right)}}{\left(h^2\right)'}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4h^3}{\left(h^4+1\right)}}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h^3}{2h\cdot\left(h^4+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2}{\left(h^4+1\right)}=2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{\left(h^4+1\right)}=2\cdot\frac{0^2}{\left(0^4+1\right)}=0$$

Calculando agora a derivada em ordem a y teremos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0;y_0+k)-f(x_0;y_0)}{k}\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0;0+k)-f(0;0)}{k}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0;k)-f(0;0)}{k}\Leftrightarrow$$ ¤

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(0;0)=0\rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $x=y$ então a função assume o valor 0.

---

[3] Indeterminação do tipo $0/0$. Esta indeterminação pode ser levantada utilizando a regra de Cauchy que consiste em derivar o numerador e o denominador individualmente. $\frac{(\text{numerador})'}{(\text{denominador})'}$

$$f(x;y)=\frac{\ln\left(x^4+y^4+1\right)}{x-y} \Rightarrow f(0;k)=\frac{\ln\left(0^4+k^4+1\right)}{0-k} \Leftrightarrow f(0;k)=-\frac{\ln\left(k^4+1\right)}{k}$$

Assim sendo e por substituição directa em ¤ , teremos que:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{-\frac{\ln\left(k^4+1\right)}{k}-0}{k}=-\lim_{k\to 0}\frac{\ln\left(k^4+1\right)}{k^2}\overset{4}{=}-\lim_{k\to 0}\frac{\left(\ln\left(k^4+1\right)\right)'}{\left(k^2\right)'}=$$

$$=-\lim_{k\to 0}\frac{\frac{\left(k^4+1\right)'}{\left(k^4+1\right)}}{\left(k^2\right)'}=-\lim_{k\to 0}\frac{\frac{4k^3}{\left(k^4+1\right)}}{2k}=-\lim_{k\to 0}\frac{4k^3}{2k\cdot\left(k^4+1\right)}=-\lim_{k\to 0}\frac{2k^2}{\left(k^4+1\right)}=$$

$$=-2\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k^2}{\left(k^4+1\right)}=-2\cdot\frac{0^2}{\left(0^4+1\right)}=0$$

2. **Determine as derivadas parciais de 1ª ordem das seguintes funções e calcule-as nos pontos indicados:**

a) $\mathrm{f}(\mathrm{x};\mathrm{y})=x^3\mathrm{y}+7\mathrm{x}^2\mathrm{y}^3+5\mathrm{x}+3;\ \mathrm{P}=(1;1)$

R:

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}(\mathrm{x};\mathrm{y})=\left(x^3\mathrm{y}\right)_x'+\left(7\mathrm{x}^2\mathrm{y}^3\right)_x'+\left(5\mathrm{x}\right)_x'+\left(3\right)_x'=\left(3\cdot x^{3-1}\mathrm{y}\right)+\left(2\cdot 7\mathrm{x}^{2\text{-}1}\mathrm{y}^3\right)+\left(1\cdot 5\mathrm{x}^{1\text{-}1}\right)+\left(0\right)=$$

$$=\left(3x^2\mathrm{y}\right)+\left(14\mathrm{xy}^3\right)+\left(5\right)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(1;1)=\left(3\cdot 1^2\cdot 1\right)+\left(14\cdot 1\cdot 1^3\right)+\left(5\right)=22$$

[4] Indeterminação do tipo $0/0$. Esta indeterminação pode ser levantada utilizando a regra de Cauchy que consiste em derivar o numerador e o denominador individualmente. $\frac{(\text{numerador})'}{(\text{denominador})'}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\left(x^3y\right)_y^{'}+\left(7x^2y^3\right)_y^{'}+\left(5x\right)_y^{'}+\left(3\right)_y^{'}=\left(1\cdot x^3y^{1-1}\right)+\left(3\cdot 7x^2y^{3-1}\right)+\left(0\right)+\left(0\right)=$$

$$=\left(x^3\right)+\left(21x^2y^2\right)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(1;1)=\left(1^3\right)+\left(21\cdot 1^2\cdot 1^2\right)=22$$

b) $g(x;y)=\dfrac{y^2+3x}{7x+y};\ P=(1;1)$

R:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x;y)=\left(\frac{y^2+3x}{7x+y}\right)_x^{'}=\frac{\left(y^2+3x\right)_x^{'}\cdot(7x+y)-\left(y^2+3x\right)\cdot(7x+y)_x^{'}}{(7x+y)^2}=$$

$$=\frac{(3)\cdot(7x+y)-\left(y^2+3x\right)\cdot(7)}{(7x+y)^2}\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial x}(1;1)=\frac{3\cdot(7\cdot 1+1)-\left(1^2+3\cdot 1\right)\cdot 7}{(7\cdot 1+1)^2}=-\frac{4}{64}=-\frac{1}{16}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x;y)=\left(\frac{y^2+3x}{7x+y}\right)_y^{'}=\frac{\left(y^2+3x\right)_y^{'}\cdot(7x+y)-\left(y^2+3x\right)\cdot(7x+y)_y^{'}}{(7x+y)^2}=$$

$$=\frac{(2y)\cdot(7x+y)-\left(y^2+3x\right)\cdot(1)}{(7x+y)^2}\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial y}(1;1)=\frac{(2\cdot 1)\cdot(7\cdot 1+1)-\left(1^2+3\cdot 1\right)\cdot 1}{(7\cdot 1+1)^2}=-\frac{12}{64}=-\frac{3}{16}$$

c) $\text{h}(\text{x; y}) = (\cot g(x))^{\text{tg}(\text{y})}; \text{P} = \left(\frac{p}{4};-\frac{p}{4}\right)$

R:

$$\frac{\partial \text{h}}{\partial x}(\text{x; y}) = \left([\cot g(x)]^{tg(y)}\right)'_x = {}^{5}\, tg(y)\cdot[\cot g(x)]^{tg(y)-1}\cdot[\cot g(x)]'_x =$$

$$= tg(y)\cdot[\cot g(x)]^{tg(y)-1}\cdot\left[-\cos ec^2(x)\cdot(x)'_x\right] = tg(y)\cdot[\cot g(x)]^{tg(y)-1}\cdot\left[-\frac{1}{sen^2(x)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{p}{4};-\frac{p}{4}\right) = tg\left(-\frac{p}{4}\right)\cdot\left[\cot g\left(\frac{p}{4}\right)\right]^{tg\left(-\frac{p}{4}\right)-1}\cdot\left[-\frac{1}{sen^2\left(\frac{p}{4}\right)}\right] = -1\cdot 1^{-1-1}\cdot\left[-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right] =$$

$$= -1\cdot\left[-\frac{1}{\frac{2}{4}}\right] = -\left(-\frac{4}{2}\right) = 2$$

$$\frac{\partial \text{h}}{\partial y}(\text{x; y}) = \left([\cot g(x)]^{tg(y)}\right)'_y = {}^{6}\,[\cot g(x)]^{tg(y)}\cdot(tg(y))'_y\cdot\ln[\cot g(x)] =$$

$$= [\cot g(x)]^{tg(y)}\cdot\left(\sec^2(y)\cdot(y)'_x\right)\cdot\ln[\cot g(x)] = [\cot g(x)]^{tg(y)}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2(y)}\right)\cdot\ln[\cot g(x)] \Rightarrow$$

---

5 Aqui temos uma derivada do tipo: $\left(u^a\right)' = a\cdot u^{a-1}\cdot u'$

6 Aqui temos uma derivada do tipo: $\left(\frac{a^u}{\ln(a)}\right)' = a^u\cdot u' \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(a)}\cdot\left(a^u\right)' = a^u\cdot u' \Leftrightarrow \left(a^u\right)' = a^u\cdot u'\cdot\ln(a)$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{p}{4};-\frac{p}{4}\right)=\left[\cot g\left(\frac{p}{4}\right)\right]^{tg\left(-\frac{p}{4}\right)}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\left(-\frac{p}{4}\right)}\right)\cdot\ln\left[\cot g\left(\frac{p}{4}\right)\right]=1^{-1}\cdot\left[\frac{1}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}\right]\cdot\ln(1)=$$

$$=1\cdot\left[\frac{1}{\frac{2}{4}}\right]\cdot 0=0$$

d) $\mathrm{i}(x;y)=e^x\cdot\ln\left(y^2+3x\right);\ P=(0;2)$

R:

$$\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial x}(x;y)=\left(e^x\cdot\ln\left(y^2+3x\right)\right)'_x=\left(e^x\right)'_x.\ln\left(y^2+3x\right)+e^x.\left(\ln\left(y^2+3x\right)\right)'_x=$$ [7]

$$=(x)'_x\cdot\left(e^x\right).\ln\left(y^2+3x\right)+e^x.\frac{\left(y^2+3x\right)'_x}{y^2+3x}=e^x.\ln\left(y^2+3x\right)+e^x.\frac{3}{y^2+3x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial i}{\partial x}(0;2)=e^0.\ln\left(2^2+3\cdot 0\right)+e^0.\frac{3}{2^2+3\cdot 0}=1.\ln(4)+1.\frac{3}{4}=\ln(4)+\frac{3}{4}$$

$$\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial y}(x;y)=\left(e^x\cdot\ln\left(y^2+3x\right)\right)'_y=\left(e^x\right)'_y.\ln\left(y^2+3x\right)+e^x.\left(\ln\left(y^2+3x\right)\right)'_y=$$

---

[7] $\left(e^u\right)'=u'\cdot e^u$ e $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$

$$= e^x.\frac{\left(y^2+3x\right)_y^{'}}{y^2+3x} = e^x.\frac{2y}{y^2+3x} \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial y}(0;2) = e^0.\frac{2\cdot 2}{2^2+3\cdot 0} = 1\cdot\frac{4}{4} = 1$$

e) $\mathrm{j}(\mathrm{x};\mathrm{y}) = sen\left(1+e^{xy}\right);\ \mathrm{P} = (1;2)$

R:

$$\frac{\partial \mathrm{j}}{\partial x}(\mathrm{x};\mathrm{y}) = \left(sen\left(1+e^{xy}\right)\right)_x^{'} = {}^{8}\left(1+e^{xy}\right)_x^{'}\cdot\left(\cos\left(1+e^{xy}\right)\right) = (xy)_x^{'}\cdot e^{xy}\cdot\left(\cos\left(1+e^{xy}\right)\right) =$$

$$= y\cdot e^{xy}\cdot\left(\cos\left(1+e^{xy}\right)\right) \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial x}(1;2) = 2\cdot e^{1\cdot 2}\cdot\left(\cos\left(1+e^{1\cdot 2}\right)\right) = 2\cdot e^2\cdot\left(\cos\left(1+e^2\right)\right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{j}}{\partial y}(\mathrm{x};\mathrm{y}) = \left(sen\left(1+e^{xy}\right)\right)_y^{'} = \left(1+e^{xy}\right)_y^{'}\cdot\left(\cos\left(1+e^{xy}\right)\right) = (xy)_y^{'}\cdot e^{xy}\cdot\left(\cos\left(1+e^{xy}\right)\right) =$$

$$= x\cdot e^{xy}\cdot\left(\cos\left(1+e^{xy}\right)\right) \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial y}(1;2) = 1\cdot e^{1\cdot 2}\cdot\left(\cos\left(1+e^{1\cdot 2}\right)\right) = e^2\cdot\left(\cos\left(1+e^2\right)\right)$$

f) $\mathrm{f}(\mathrm{x};\mathrm{y}) = \begin{cases} \dfrac{2x^3}{x^2+3y^2} & \text{se}: (\mathrm{x};\mathrm{y}) \neq (0;0) \\ 0 & \text{se}: (\mathrm{x};\mathrm{y}) = (0;0) \end{cases}$

R:

Para este tipo de casos teremos que transformar a função da seguinte forma:

---

8 $\left(sen(u)\right)' = u'\cdot\cos(u)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^3}{x^2+3y^2}\right) & se:(x;y)\neq(0;0)\\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h;y_0)-f(0;0)}{h} & se:(x;y)=(0;0)\end{cases}\Leftrightarrow¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^3}{x^2+3y^2}\right)=\frac{(2x^3)'_x\cdot(x^2+3y^2)-2x^3\cdot(x^2+3y^2)'_x}{(x^2+3y^2)^2}=\frac{6x^2\cdot(x^2+3y^2)-2x^3\cdot 2x}{(x^2+3y^2)^2}=$ $=\frac{6x^4+18x^2y^2-4x^4}{(x^2+3y^2)^2}=\frac{2x^4+18x^2y^2}{(x^2+3y^2)^2}$ $f(0;0)=0\rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $(x;y)=(0;0)$ então a função assume o valor 0 (zero). $f(x;y)=\frac{2x^3}{x^2+3y^2}\Rightarrow f(0+h;0)=\frac{2h^3}{h^2+3\cdot 0^2}\Leftrightarrow f(h;0)=2h$ $\lim_{h\to 0}\frac{2h-0}{h}=\lim_{h\to 0}2=2$

$$¤\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\begin{cases}\frac{2x^4+18x^2y^2}{(x^2+3y^2)^2} & se:(x;y)\neq(0;0)\\ 2 & se:(x;y)=(0;0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\begin{cases}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x^3}{x^2+3y^2}\right) & se:(x;y)\neq(0;0)\\ \lim_{k\to 0}\frac{f(x_0;y_0+k)-f(0;0)}{k} & se:(x;y)=(0;0)\end{cases}\Leftrightarrow¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x^3}{x^2+3y^2}\right)=\frac{\left(2x^3\right)'_y\cdot\left(x^2+3y^2\right)-2x^3\cdot\left(x^2+3y^2\right)'_y}{\left(x^2+3y^2\right)^2}=\frac{-2x^3\cdot 6y}{\left(x^2+3y^2\right)^2}=\frac{-12x^3y}{\left(x^2+3y^2\right)^2}$ $f(0;0)=0\rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $(x;y)=(0;0)$ então a função assume o valor 0 (zero). $f(x;y)=\frac{2x^3}{x^2+3y^2}\Rightarrow f(0;0+k)=\frac{2\cdot 0^3}{0^2+3\cdot k^2}\Leftrightarrow f(0;k)=0$ $\lim_{k\rightarrow 0}\frac{0-0}{k}=\lim_{k\rightarrow 0}0=0$

$$¤\ \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\begin{cases}\frac{-12x^3y}{\left(x^2+3y^2\right)^2} & \text{se}:(x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se}:(x;y)=(0;0)\end{cases}$$

g) $f(x;y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{se}:(x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se}:(x;y)=(0;0)\end{cases}$

R:

Para este tipo de casos teremos que transformar a função da seguinte forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) & \text{se}:(x;y)\neq(0;0)\\ \lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x_0+h;y_0)-f(0;0)}{h} & \text{se}:(x;y)=(0;0)\end{cases}\Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)=\frac{(2xy)'_x\cdot\left(x^2+y^2\right)-2xy\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2y\cdot\left(x^2+y^2\right)-2xy\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^2y+2y^3-4x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2y^3-2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$f(0;0)=0\rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $(x;y)=(0;0)$ então a função assume o valor 0 (zero).

$$f(x;y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}\Rightarrow f(0+h;0)=\frac{2\cdot h\cdot 0}{h^2+0^2}\Leftrightarrow f(h;0)=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

¤ $$\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\begin{cases}\dfrac{2y^3-2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{se}:(x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se}:(x;y)=(0;0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2x^3}{x^2+3y^2}\right) & \text{se}:(x;y)\neq(0;0)\\ \lim_{k\to 0}\dfrac{f(x_0;y_0+k)-f(0;0)}{k} & \text{se}:(x;y)=(0;0)\end{cases}\Leftrightarrow$$ ¤

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)=\frac{(2xy)'_y\cdot\left(x^2+y^2\right)-2xy\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2+y^2\right)-2xy\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$= \frac{2x^3 + 2xy^2 - 4xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2x^3 - 2xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$f(0;0) = 0 \rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $(x;y) = (0;0)$ então a função assume o valor 0 (zero).

$$f(x;y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \Rightarrow f(0;0+k) = \frac{2 \cdot 0 \cdot k}{0^2 + k^2} \Leftrightarrow f(0;k) = 0$$

$$\lim_{k \to 0} \frac{0 - 0}{k} = \lim_{k \to 0} 0 = 0$$

$$¤ \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - 2xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} & \text{se}: (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{se}: (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

h) $$f(x;y) = \begin{cases} \left(4x^2 + 4y^2\right) \cdot \cos\left(\dfrac{2x}{x^2 + y^2}\right) & \text{se}: x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se}: x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$ [9]

R:

Para este tipo de casos teremos que transformar a função da seguinte forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(4x^2 + 4y^2\right) \cdot \cos\left(\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}\right)\right) & \text{se}: (x;y) \neq (0;0) \\ \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h; y_0) - f(0;0)}{h} & \text{se}: (x;y) = (0;0) \end{cases} \Leftrightarrow ¤$$

[9] $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x;y) = (0;0)$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(4x^2+4y^2\right)\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right)=\left(4x^2+4y^2\right)'_x\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\left(4x^2+4y^2\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right)'_x=$$

$$=8x\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\left(4x^2+4y^2\right)\cdot\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_x\cdot\left(-sen\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right)=$$

$$=8x\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\left(4x^2+4y^2\right)\cdot\left(\frac{(2x)'_x\cdot\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\left(-sen\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right)=$$

$$=8x\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\left(4x^2+4y^2\right)\cdot\left(\frac{2\cdot\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\left(-sen\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right)=$$

$$=8x\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\left(4x^2+4y^2\right)\cdot\left(\frac{2x^2+2y^2-4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\left(-sen\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right)=$$

$$=8x\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\left(4x^2+4y^2\right)\cdot\left(\frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\left(-sen\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right)=$$

$$=8x\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\left(\frac{8x^2y^2-8x^4+8y^4-8y^2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\left(-sen\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right)=$$

$$=8x\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\left(\frac{-8x^4+8y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\left(-sen\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right)$$

$f(0;0)=0\rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $x^2+y^2=0$ então a função assume o valor 0 (zero).

$$f(x;y)=\left(4x^2+4y^2\right)\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\Rightarrow f(0+h;0)=\left(4h^2+4\cdot0^2\right)\cdot\cos\left(\frac{2h}{h^2+0^2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(h;0) = 4h^2 \cdot \cos\left(\frac{2}{h}\right)$$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{4h^2 \cdot \cos\left(\frac{2}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{4h^2 \cdot \cos\left(\frac{2}{h}\right)}{h} = 0$, pq $4.0^2=0$ e 0 multiplicado por qualquer coisa é igual a zero.

$$¤ \ \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \begin{cases} 8x \cdot \cos\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2}\right) + \left(\dfrac{-8x^4+8y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\left(-\operatorname{sen}\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2}\right)\right) & \text{se}: (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{se}: (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left(4x^2+4y^2\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)\right) & \text{se}: (x;y) \neq (0;0) \\ \lim_{k\to 0} \dfrac{f(x_0;y_0+k) - f(0;0)}{k} & \text{se}: (x;y) = (0;0) \end{cases} \Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(4x^2+4y^2\right)\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right) = \left(4x^2+4y^2\right)'_y \cdot \cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + \left(4x^2+4y^2\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right)'_y =$$

$$= 8y \cdot \cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + \left(4x^2+4y^2\right)\cdot\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_y \cdot\left(-sen\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right) =$$

$$= 8y \cdot \cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + \left(4x^2+4y^2\right)\cdot\left(\frac{(2x)'_y \cdot \left(x^2+y^2\right) - 2x\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\left(-sen\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right) =$$

$$= 8y\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\left(4x^2+4y^2\right)\cdot\left(\frac{-2x\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\left(-sen\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right)=$$

$$= 8y\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\left(4x^2+4y^2\right)\cdot\left(\frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\left(-sen\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right)=$$

$$= 8y\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\left(\frac{-16x^3y-16xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\left(-sen\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right)=$$

$f(0;0)=0 \rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $x^2+y^2=0$ então a função assume o valor 0 (zero).

$$f(x;y)=\left(4x^2+4y^2\right)\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\Rightarrow f(0;k)=\left(4\cdot 0^2+4\cdot k^2\right)\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 0}{0^2+k^2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0;k)=4k^2\cdot\cos(0)\Leftrightarrow f(0;k)=4k^2$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{4k^2-0}{k}=\lim_{k\to 0}4k=4\cdot 0=0$$

¤ $$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\begin{cases} 8y\cdot\cos\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\left(\frac{-16x^3y-16xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\left(-sen\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\right) & se:(x;y)\neq(0;0) \\ 0 & se:(x;y)=(0;0)\end{cases}$$

3. Determine as derivadas parciais de 2ª ordem das seguintes funções:

a) $f(x;y)=x^2\left(1+y^2+x^3\right)\Leftrightarrow f(x;y)=x^2+x^2y^2+x^5$

R:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\left(x^2+x^2y^2+x^5\right)'_x=2x+2xy^2+5x^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=\left(2x+2xy^2+5x^4\right)'_x=2+2y^2+20x^3$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}(\mathrm{x};\mathrm{y})=\left(x^2+x^2y^2+x^5\right)'_y=2x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=\left(2x^2y\right)'_y=2x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+2xy^2+5x^4\right)=4xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y\right)=4xy$$

b) $\mathrm{g}(\mathrm{x};\mathrm{y};\mathrm{z})=x^3y^3z^3$

R:

$$\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial x}(\mathrm{x};\mathrm{y};\mathrm{z})=\left(x^3y^3z^3\right)'_x=3x^2y^3z^3$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x;y;z)=\left(3x^2y^3z^3\right)'_x=6xy^3z^3$$

$$\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial y}(\mathrm{x};\mathrm{y};\mathrm{z})=\left(x^3y^3z^3\right)'_y=3x^3y^2z^3$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x;y;z)=\left(3x^3y^2z^3\right)'_y=6x^3yz^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x;y;z)=\left(x^3y^3z^3\right)'_z = 3x^3y^3z^2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x;y;z)=\left(3x^3y^3z^2\right)'_z = 6x^3y^3z$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x;y;z)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x;y;z)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^3z^3\right)=9x^2y^2z^3$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x;y;z)=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x;y;z)\rightarrow \text{Pelo teorema de Schwarz.}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}(x;y;z)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x;y;z)\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2y^3z^3\right)=9x^2y^3z^2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial x}(x;y;z)=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}(x;y;z)\rightarrow \text{Pelo teorema de Schwarz.}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}(x;y;z)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x;y;z)\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(3x^3y^2z^3\right)=9x^3y^2z^2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial y}(x;y;z)=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}(x;y;z)\rightarrow \text{Pelo teorema de Schwarz.}$$

c) $\mathrm{h}(x;\, y) = x \cdot e^{y+3x} - y \cdot e^{x+2y}$

R:

$$\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial x}(x;\, y) = \left(x \cdot e^{y+3x} - y \cdot e^{x+2y}\right)'_x = \left(x \cdot e^{y+3x}\right)'_x - \left(y \cdot e^{x+2y}\right)'_x =$$

$$= \left(e^{y+3x} + x \cdot (y+3x)'_x \cdot e^{y+3x}\right) - \left(y \cdot (x+2y)'_x \cdot e^{x+2y}\right) = e^{y+3x} \cdot (1 + x \cdot 3) - \left(y \cdot 1 \cdot e^{x+2y}\right) =$$

$$= e^{y+3x} \cdot (3x+1) - \left(y \cdot e^{x+2y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x;\, y) = \left(e^{y+3x} \cdot (3x+1) - \left(y \cdot e^{x+2y}\right)\right)'_x =$$

$$= \left((y+3x)'_x \cdot e^{y+3x} \cdot (3x+1) + e^{y+3x} \cdot (3x+1)'_x\right) - \left(y \cdot (x+2y)'_x \cdot e^{x+2y}\right) =$$

$$= \left(3 \cdot e^{y+3x} \cdot (3x+1) + e^{y+3x} \cdot 3\right) - \left(y \cdot 1 \cdot e^{x+2y}\right) = 3 \cdot e^{y+3x} \cdot (3x+2) - \left(y \cdot e^{x+2y}\right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial y}(x;\, y) = \left(x \cdot e^{y+3x} - y \cdot e^{x+2y}\right)'_y = \left(x \cdot e^{y+3x}\right)'_y - \left(y \cdot e^{x+2y}\right)'_y =$$

$$= \left(x \cdot (y+3x)'_y \cdot e^{y+3x}\right) - \left(e^{x+2y} + y \cdot (x+2y)'_y \cdot e^{x+2y}\right) = x \cdot e^{y+3x} - \left(e^{x+2y} + 2y \cdot e^{x+2y}\right) =$$

$$= x \cdot e^{y+3x} - e^{x+2y} \cdot (2y+1)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x;\, y) = \left(x \cdot e^{y+3x} - e^{x+2y} \cdot (2y+1)\right)'_y =$$

$$= \left(x \cdot (y+3x)'_y \cdot e^{y+3x}\right) - \left((x+2y)'_y \cdot e^{x+2y} \cdot (2y+1) + e^{x+2y} \cdot (2y+1)'_y\right) =$$

$$= \left(x \cdot 1 \cdot e^{y+3x}\right) - \left(2 \cdot e^{x+2y} \cdot (2y+1) + e^{x+2y} \cdot 2\right) = x \cdot e^{y+3x} - \left(2 \cdot e^{x+2y} \cdot (2y+2)\right)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x;y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y+3x}\cdot(3x+1)-\left(y\cdot e^{x+2y}\right)\right)=$$

$$=\left((y+3x)_y^{'}\cdot e^{y+3x}.(3x+1)\right)-\left(y_y^{'}\cdot e^{x+2y}+y\cdot(x+2y)_y^{'}\cdot e^{x+2y}\right)=$$

$$=\left(1\cdot e^{y+3x}.(3x+1)\right)-\left(1\cdot e^{x+2y}+y\cdot 2\cdot e^{x+2y}\right)=\left(e^{y+3x}.(3x+1)\right)-\left(e^{x+2y}\cdot(2y+1)\right)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}(x;y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot e^{y+3x}-e^{x+2y}\cdot(2y+1)\right)=$$

$$=\left((x)_x^{'}\cdot e^{y+3x}+x\cdot(y+3x)_x^{'}\cdot e^{y+3x}\right)-\left((x+2y)_x^{'}\cdot e^{x+2y}\cdot(2y+1)\right)=$$

$$=\left(1\cdot e^{y+3x}+x\cdot 3\cdot e^{y+3x}\right)-\left(1\cdot e^{x+2y}\cdot(2y+1)\right)=\left(e^{y+3x}.(3x+1)\right)-\left(e^{x+2y}\cdot(2y+1)\right)$$

d) $\mathrm{m}(x;y;z)=\int_0^{y\cdot sen(z)} x\cdot 4^{2t}\,dt \Leftrightarrow \mathrm{m}(x;y;z)=x\cdot\int_0^{y\cdot sen(z)} 4^{2t}\,dt$

R:

$$\frac{\partial m}{\partial x}=(x)_x^{'}\cdot\int_0^{y\cdot sen(z)}4^{2t}\,dt=\int_0^{y\cdot sen(z)}4^{2t}\,dt \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 m}{\partial x^2}=\left(\int_0^{y\cdot sen(z)}4^{2t}\,dt\right)_x^{'}=0$$

$$\frac{\partial m}{\partial y}=x\cdot\left(\int_0^{y\cdot sen(z)}4^{2t}\,dt\right)_y^{'}=^{10} x\cdot\left((y\cdot sen(z))_y^{'}\cdot\left(4^{2\cdot(y\cdot sen(z))}\right)-0\cdot\left(4^{2\cdot 0}\right)\right)=x\cdot sen(z)\cdot 4^{2y\cdot sen(z)}$$

---

10 $\frac{d}{dx}\left[\int_{j(x)}^{y(x)} f(t)dt\right]=\frac{d}{dx}[y(x)]\cdot f[y(x)]-\frac{d}{dx}[j(x)]\cdot f[j(x)]$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial y^2} = x \cdot sen(z) \cdot \left(4^{2y \cdot sen(z)}\right)_y^{'} =^{11} x \cdot sen(z) \cdot \left(4^{2y \cdot sen(z)}\right) \cdot \left(2y \cdot sen(z)\right)_y^{'} \cdot \ln(4) =$$

$$= x \cdot sen(z) \cdot \left(4^{2y \cdot sen(z)}\right) \cdot 2 \cdot sen(z) \cdot \ln(4) = 2x \cdot \ln(4) \cdot sen^2(z) \cdot \left(4^{2y \cdot sen(z)}\right)$$

$$\frac{\partial m}{\partial z} = x \cdot \left(\int_0^{y \cdot sen(z)} 4^{2t}\, dt \right)_z^{'} = x \cdot \left(\left(y \cdot sen(z)\right)_z^{'} \cdot \left(4^{2 \cdot (y \cdot sen(z))}\right) - 0 \cdot \left(4^{2 \cdot 0}\right) \right) = xy \cdot \cos(z) \cdot 4^{2y \cdot sen(z)}$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} = xy \cdot \left(\cos(z) \cdot \left(4^{2y \cdot sen(z)}\right)\right)_z^{'} =$$

$$= xy \cdot \left(-(z)_z^{'} \cdot sen(z) \cdot 4^{2y \cdot sen(z)} + \cos(z) \cdot 4^{2y \cdot sen(z)} \cdot \left(2y \cdot sen(z)\right)_z^{'} \cdot \ln(4) \right) =$$

$$= xy \cdot \left(-1 \cdot sen(z) \cdot 4^{2y \cdot sen(z)} + \cos(z) \cdot 4^{2y \cdot sen(z)} \cdot 2y \cdot \cos(z) \cdot \ln(4) \right) =$$

$$= xy \cdot \left(-sen(z) \cdot 4^{2y \cdot sen(z)} + \cos(z) \cdot \left(4^{2y \cdot sen(z)} \cdot 2y \cdot \ln(4)\right) \right)$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y}(x;y;z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial m}{\partial x}(x;y;z) \right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^{y \cdot sen(z)} 4^{2t}\, dt \right) = \left(\left(y \cdot sen(z)\right)_y^{'} \cdot \left(4^{2 \cdot (y \cdot sen(z))}\right) - 0 \cdot \left(4^{2 \cdot 0}\right) \right) =$$

$$= sen(z) \cdot 4^{2y \cdot sen(z)}$$

$\dfrac{\partial^2 m}{\partial y \partial x}(x;y;z) = \dfrac{\partial^2 m}{\partial x \partial y}(x;y;z) \rightarrow$ Pelo teorema de Schwarz.

---

[11] Aqui temos uma derivada do tipo: $\left(\dfrac{a^u}{\ln(a)}\right)^{'} = a^u \cdot u^{'} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln(a)} \cdot \left(a^u\right)^{'} = a^u \cdot u^{'} \Leftrightarrow \left(a^u\right)^{'} = a^u \cdot u^{'} \cdot \ln(a)$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x \partial z}(x;y;z)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial m}{\partial x}(x;y;z)\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^{y\cdot sen(z)} 4^{2t}\,dt\right)=\left((y\cdot sen(z))'_z\cdot\left(4^{2\cdot(y\cdot sen(z))}\right)-0\cdot\left(4^{2\cdot 0}\right)\right)=$$

$$= y\cdot\cos(z)\cdot 4^{2y\cdot sen(z)}$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial z \partial x}(x;y;z)=\frac{\partial^2 m}{\partial x \partial z}(x;y;z)\rightarrow \text{ Pelo teorema de Schwarz.}$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial y \partial z}(x;y;z)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial m}{\partial y}(x;y;z)\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(x\cdot sen(z)\cdot 4^{2y\cdot sen(z)}\right)=$$

$$= x\cdot\left((sen(z))'_z\cdot 4^{2y\cdot sen(z)}+sen(z)\cdot\left(4^{2y\cdot sen(z)}\right)'_z\right)=$$

$$= x\cdot\left(\cos(z)\cdot 4^{2y\cdot sen(z)}+sen(z)\cdot\left(4^{2y\cdot sen(z)}\right)\cdot(2y\cdot sen(z))'_z\cdot\ln(4)\right)=$$

$$= x\cdot\left(\cos(z)\cdot 4^{2y\cdot sen(z)}+sen(z)\cdot\left(4^{2y\cdot sen(z)}\right)\cdot 2y\cdot\cos(z)\cdot\ln(4)\right)=$$

$$= x\cdot 4^{2y\cdot sen(z)}\cdot\left(\cos(z)+2y\cdot\ln(4)\cdot sen(z)\cdot\cos(z)\right)$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial z \partial y}(x;y;z)=\frac{\partial^2 m}{\partial y \partial z}(x;y;z)\rightarrow \text{ Pelo teorema de Schwarz.}$$

4. Verifique se o teorema de Schwarz se aplica nos exemplos a) e c) do exercício anterior.

R:

Para a alínea **a)** teremos que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+2xy^2+5x^4\right)=4xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y\right)=4xy$$

Para a alínea **c)** teremos que:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x;y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y+3x}\cdot(3x+1)-\left(y\cdot e^{x+2y}\right)\right)=$$

$$=\left((y+3x)'_y\cdot e^{y+3x}.(3x+1)\right)-\left(y'_y\cdot e^{x+2y}+y\cdot(x+2y)'_y\cdot e^{x+2y}\right)=$$

$$=\left(1\cdot e^{y+3x}.(3x+1)\right)-\left(1\cdot e^{x+2y}+y\cdot 2\cdot e^{x+2y}\right)=\left(e^{y+3x}.(3x+1)\right)-\left(e^{x+2y}\cdot(2y+1)\right)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}(x;y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot e^{y+3x}-e^{x+2y}\cdot(2y+1)\right)=$$

$$=\left((x)'_x\cdot e^{y+3x}+x\cdot(y+3x)'_x\cdot e^{y+3x}\right)-\left((x+2y)'_x\cdot e^{x+2y}\cdot(2y+1)\right)=$$

$$=\left(1\cdot e^{y+3x}+x\cdot 3\cdot e^{y+3x}\right)-\left(1\cdot e^{x+2y}\cdot(2y+1)\right)=\left(e^{y+3x}.(3x+1)\right)-\left(e^{x+2y}\cdot(2y+1)\right)$$

5. Mostre que as funções $z = e^{kx} \cdot \cos(ky)$ e $z = e^{kx} \cdot sen(ky)$, com $k \in \Re$, satisfazem a seguinte equação diferencial: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ em $\Re^2$.

R:

Antes de mais convém mencionar que: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ é a equação de Laplace. Agora, vamos começar por determinar as primeiras derivadas para cada uma das funções, para em seguida determinar as respectivas segundas derivadas e verificar se estas satisfazem a equação de Laplace.

Para: $z = e^{kx} \cdot \cos(ky)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(e^{kx} \cdot \cos(ky)\right)'_x = \left(e^{kx}\right)'_x \cdot \cos(ky) + \left(e^{kx}\right) \cdot \left(\cos(ky)\right)'_x = (kx)'_x \cdot \left(e^{kx}\right) \cdot \cos(ky) = k \cdot e^{kx} \cdot \cos(ky)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(k \cdot e^{kx} \cdot \cos(ky)\right)'_x = k \cdot \left(e^{kx}\right)'_x \cdot \cos(ky) = k \cdot (kx)'_x \cdot e^{kx} \cdot \cos(ky) = k^2 \cdot e^{kx} \cdot \cos(ky)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(e^{kx} \cdot \cos(ky)\right)'_y = \left(e^{kx}\right)'_y \cdot \cos(ky) + \left(e^{kx}\right) \cdot \left(\cos(ky)\right)'_y = (ky)'_y \cdot \left(e^{kx}\right) \cdot \left(-sen(ky)\right) =$$

$$= -k \cdot e^{kx} \cdot sen(ky)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(-k \cdot e^{kx} \cdot sen(ky)\right)'_y = -k \cdot \left(\left(e^{kx}\right)'_y \cdot sen(ky) + \left(e^{kx}\right) \cdot \left(sen(ky)\right)'_y\right) =$$

$$= -k \cdot (ky)'_y \cdot e^{kx} \cdot \cos(ky) = -k^2 \cdot e^{kx} \cdot \cos(ky)$$

Logo teremos que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \Leftrightarrow k^2\cdot e^{kx}\cdot\cos(ky)+\left[-k^2\cdot e^{kx}\cdot\cos(ky)\right]=0 \Leftrightarrow 0=0$$

Daqui se conclui que a primeira função satisfaz a equação de Laplace.

Para: $z=e^{kx}\cdot sen(ky)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(e^{kx}\cdot sen(ky)\right)'_x=\left(e^{kx}\right)'_x\cdot sen(ky)+\left(e^{kx}\right)\cdot\left(sen(ky)\right)'_x=(kx)'_x\cdot\left(e^{kx}\right)\cdot sen(ky)=k\cdot e^{kx}\cdot sen(ky)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(k\cdot e^{kx}\cdot sen(ky)\right)'_x=k\cdot\left(e^{kx}\right)'_x\cdot sen(ky)=k\cdot(kx)'_x\cdot e^{kx}\cdot sen(ky)=k^2\cdot e^{kx}\cdot sen(ky)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(e^{kx}\cdot sen(ky)\right)'_y=\left(e^{kx}\right)'_y\cdot sen(ky)+\left(e^{kx}\right)\cdot\left(sen(ky)\right)'_y=(ky)'_y\cdot\left(e^{kx}\right)\cdot\left(\cos(ky)\right)=$$

$$=k\cdot e^{kx}\cdot\cos(ky)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(k\cdot e^{kx}\cdot\cos(ky)\right)'_y=k\cdot\left(\left(e^{kx}\right)'_y\cdot\cos(ky)+\left(e^{kx}\right)\cdot\left(\cos(ky)\right)'_y\right)=$$

$$=k\cdot(ky)'_y\cdot e^{kx}\cdot\left(-sen(ky)\right)=-k^2\cdot e^{kx}\cdot sen(ky)$$

Logo teremos que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \Leftrightarrow k^2 \cdot e^{kx} \cdot sen(ky)+\left[-k^2 \cdot e^{kx} \cdot sen(ky)\right]=0 \Leftrightarrow 0=0$$

Daqui se conclui que a segunda função satisfaz a equação de Laplace.

6. Mostre que a função $f(x;y)=3x^2y-y^3$, é harmónica em $\Re^2$.

Indique outra função polinomial do 3º grau em x e y que também seja harmónica.

R:

Uma função diz-se harmónica quando as suas derivadas de 2ª ordem são contínuas e a função verifica a equação de Laplace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

Assim sendo vamos começar por determinar as derivadas parciais de 1ª e de 2ª ordem da função:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\left(3x^2y\right)'_x-\left(y^3\right)'_x=6xy \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=\left(6xy\right)'_x=6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\left(3x^2y\right)'_y-\left(y^3\right)'_y=3x^2-3y^2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=\left(3x^2\right)'_y-\left(3y^2\right)'_y=-6y$$

Estas derivadas são contínuas. Agora vamos verificar se a função respeita a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \Leftrightarrow 6y+(-6y)=0 \Leftrightarrow 0=0 \rightarrow \text{Está verificado.}$$

7. Sejam u e v funções de duas variáveis que possuem derivadas parciais de 2ª ordem contínuas e que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, isto é, tais que $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$.

Mostre que as funções u e v são harmónicas.

R:

No enunciado é dito que as funções possuem segundas derivadas contínuas, logo basta verificar a equação de Laplace recorrendo para tal às condições de Cauchy-Riemann que estão mencionadas no enunciado.

Assim teremos para a variável **u**, o seguinte:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}+\left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ 0=0 \rightarrow$ Isto é válido considerando que aqui se aplica o teorema de Schwarz que diz que as derivadas parciais até à segunda ordem existem e são contínuas: $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

Para a variável **v**, teremos:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \Leftrightarrow -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ 0=0 \rightarrow$ Isto é válido considerando que aqui se aplica o teorema de Schwarz que diz que as derivadas parciais até à segunda ordem existem e são contínuas: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

8. Mostre que a função $u(x;t)=t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}$ satisfaz a equação diferencial $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. A equação denomina-se por equação do calor e traduz o comportamento da difusão do calor numa barra isolada (onde $u(x;t)$ representa a temperatura na posição x no instante t) e outros fenómenos semelhantes.

R:

Para mostrar que a função satisfaz a equação diferencial, teremos que determinar as respectivas derivadas parciais:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)'_t \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)'_t\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}+t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)'_t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}+t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{x^2}{4t}\right)'_t\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}+t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(x^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{4t}\right)'_t\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}+t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(x^2\right)\cdot\left(-\frac{-1\cdot(4t)'_t}{(4t)^2}\right)\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}+t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(x^2\right)\cdot\left(\frac{4}{(4t)^2}\right)\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=e^{-\frac{x^2}{4t}}\cdot\left(-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2}+\frac{4x^2t^{-\frac{1}{2}}}{(4t)^2}\right)\Leftrightarrow$$

Agora vai-se determinar a 1ª e 2ª derivada parcial em ordem a x, para depois comparar o resultado com a 1ª derivada em ordem a t:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)'_x \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)'_x\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}+t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)'_x \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{x^2}{4t}\right)'_x\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{4t}\right)\cdot 2x\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{4t}\right)\cdot 2x\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\right)'_x \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{4t}\cdot\left(2x\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\right)'_x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{4t}\cdot(2x)'_x\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}+2x\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)'_x \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{4t}\cdot 2\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}+2x\cdot\left(-\frac{x^2}{4t}\right)'_x\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2t}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}+2x\cdot\left(-\frac{(x^2)'_x\cdot 4t}{(4t)^2}\right)\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{t^{-\frac{1}{2}}\cdot t^{-1}}{2}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}+2x\cdot\left(-\frac{2x}{4t}\right)\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}+\left(-\frac{4x^2}{4t}\right)\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}+\left(-\frac{x^2}{t}\right)\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-\frac{x^2}{4t}}\left(-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2}-\frac{x^2}{t}\right)$$

9. Mostre que a função f definida por: $f(x;t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}};k\in\Re$ **satisfaz a equação de difusão** $\frac{\partial f}{\partial t}=k\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ **.**

R:

Antes de mais, vamos proceder a um pequeno re-arranjo da função:

$$f(x;t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \Leftrightarrow f(x;t)=\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \Leftrightarrow f(x;t)=t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}$$

Vamos então agora determinar o valor de cada uma das derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x;t)=\left(t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}\right)_t^{'}=\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)_t^{'}\cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}+t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}\right)_t^{'}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}+t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)_t^{'}\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}+t^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\cdot\left(\frac{\left(x^2\right)_t^{'}\cdot 4kt-x^2\cdot(4kt)_t^{'}}{(4kt)^2}\right)\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}-t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{-x^2\cdot 4k}{(4kt)^2}\right)\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}\right)=e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}\cdot\left(-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2}+\frac{4kx^2\cdot t^{-\frac{1}{2}}}{(4kt)^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;t)=\left(t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}\right)_x^{'}=t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}\right)_x^{'}=t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)_x^{'}\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}\right)=$$

$$= t^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4kt} \cdot \left(-x^2\right)'_x \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \right) = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{4kt} \cdot \left(-2x\right) \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;t) = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{4kt} \cdot \left(\left(-2x\right) \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \right) \right)'_x = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{4kt} \cdot \left(\left(-2x\right)'_x \cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} + \left(-2x\right) \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \right)'_x \right) =$$

$$= \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{4kt} \cdot \left(-2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} + \left(-2x\right) \cdot \left(-\frac{x^2}{4kt} \right)'_x \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \right) \right) =$$

$$= \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{4kt} \cdot \left(-2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} + 2x \cdot \frac{1}{4kt} \cdot \left(x^2\right)'_x \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \right) \right) =$$

$$= \left(-2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{4kt} + \frac{4x^2}{4kt} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{4kt} \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \right) \right) = e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \cdot \left(-2 \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{4kt} + 4x^2 \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(4kt)^2} \right) =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \cdot \left(-\frac{t^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{-1}}{2k} + 4x^2 \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(4kt)^2} \right) = e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \cdot \left(-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2k} + \frac{4x^2 \cdot t^{-\frac{1}{2}}}{(4kt)^2} \right)$$

Ora, seguindo o que está exposto no enunciado teremos que:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \cdot \left(-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2} + \frac{4kx^2 \cdot t^{-\frac{1}{2}}}{(4kt)^2} \right) = k \cdot \left[e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}} \cdot \left(-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2k} + \frac{4x^2 \cdot t^{-\frac{1}{2}}}{(4kt)^2} \right) \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}\cdot\left(-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2}+\frac{4kx^2\cdot t^{-\frac{1}{2}}}{(4kt)^2}\right)=e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}\cdot\left(-\frac{k\cdot t^{-\frac{3}{2}}}{2k}+\frac{k\cdot 4x^2\cdot t^{-\frac{1}{2}}}{(4kt)^2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}\cdot\left(-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2}+\frac{4kx^2\cdot t^{-\frac{1}{2}}}{(4kt)^2}\right)=e^{-\frac{x^2}{4\cdot k\cdot t}}\cdot\left(-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2}+\frac{4kx^2\cdot t^{-\frac{1}{2}}}{(4kt)^2}\right)\rightarrow$$ Está então demonstrado que a função satisfaz a equação de difusão.