# V. Estática

5.1. Introdução: efeito de uma força

5.2. Condições de equilíbrio de uma partícula

5.3. Condições de equilíbrio de um corpo rígido

5.4. Cálculo de momentos

  5.4.1. Binário

5.5. Sistemas de forças

  5.5.1. Sistemas de forças coplanares

  5.5.2. Sistemas de forças paralelas

5.6. Reacções nos apoios e ligações

  5.6.1. Duas dimensões (2D)

  5.6.2. Três dimensões (3D)

5.7. Exemplos

## 5.1. Introdução: efeito de uma força

Como sabemos pelas leis de Newton, uma força aplicada a um corpo prvoca nesse corpo uma alteração da sua velocidade. Se tivermos mais que uma força, a **2ª Lei de Newton** permite escrever:

$$\boxed{\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}}$$

Por outro lado, se o corpo estiver de alguma forma preso (como uma porta, por exemplo), a força pode ter um outro efeito, que é o de provocar a rotação do corpo em torno de um eixo. Assim, uma **força** tende a fazer rodar um corpo em torno de um eixo que não intersecte a sua linha de acção e não lhe seja paralela. Esta tendência é chamada de **momento da força**, em torno do eixo considerado, de tal forma que se verifica:

$$\boxed{\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = m\vec{\alpha}}$$

## 5.2. Condição de equilíbrio de uma partícula

Primeira lei de Newton ou lei da inércia: Quando a resultante das forças que actuam num objecto for nula, esse objecto permanece num estado de repouso ...

Diz-se que uma partícula está em equilíbrio de translação se a soma de todas as forças que actuam sobre ela for zero, isto é:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Condições de equilíbrio de uma partícula:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

## 5.3. Condições de equilíbrio de um corpo rígido

Para que um corpo rígido esteja em equilíbrio é necessário que a soma vectorial de todas as força externas, assim como a soma vectorial dos correspondentes momentos, sejam nulos, isto é:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$ **Equilíbrio de translação**

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \vec{0}$$ **Equilíbrio de rotação**

Estas 2 expressões vectoriais são equivalentes, no caso geral, a 6 equações escalares:

$$\sum_i F_x = 0 \qquad \sum_i M_x = 0$$

$$\sum_i F_y = 0 \qquad \sum_i M_y = 0$$

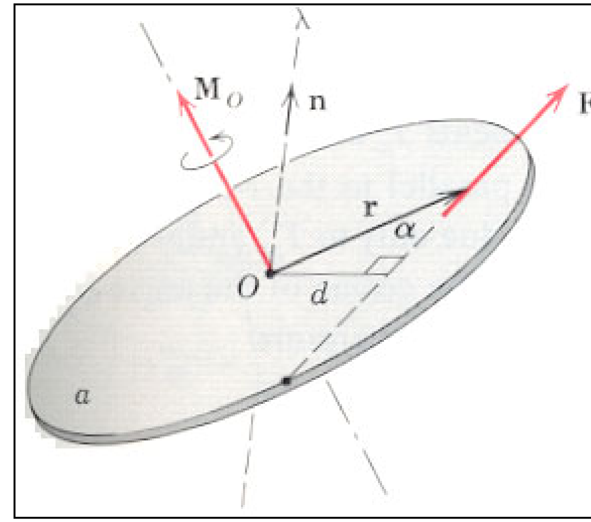
$$\sum_i F_z = 0 \qquad \sum_i M_z = 0$$

## 5.4. Calculo de momentos

O momento de uma força, $\vec{F}$, relativamente a um ponto, O, é definido como:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

Em que o módulo é dado por: $\left|\vec{M}_O\right| = \left|\vec{r}\right|.\left|\vec{F}\right|.\sin\alpha = d.F$

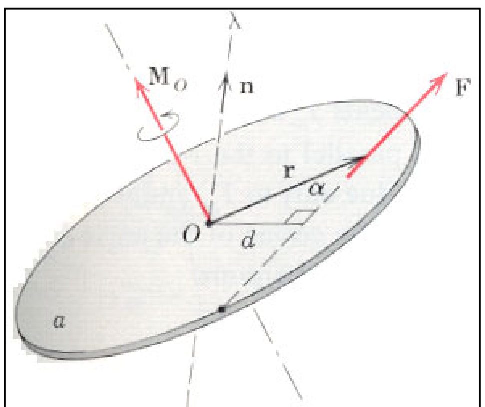



De acordo com as propriedades do produto vectorial, o **momento de uma força** é representado por um vector perpendicular tanto a **r** como a **F** e cujo sentido é dado pela regra da mão direita.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Se tanto **r** como **F** estiverem no mesmo plano, por exemplo o *xOy*, então temos:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \left(r_x F_y - r_y F_x\right)\hat{k}$$

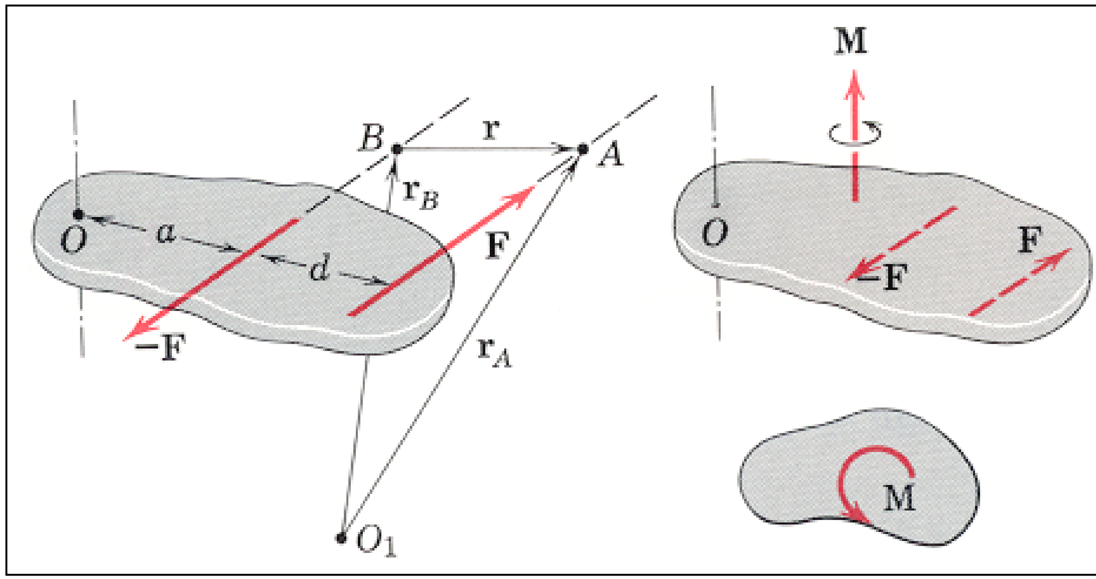



Logo **M** estará ao longo do eixo dos *zz'* e perpendicular ao plano formado por **r** e **F** (*xOy*).

A partir da figura verifica-se que o momento da força não varia quando deslocamos a força ao longo da sua linha de acção, dado que a distância *d* permanece constante. Portanto, para *x* e *y* arbitrários a equação $\boldsymbol{M = x.F_y - y.F_x}$ representa a **equação da linha de acção da força** cujo momento é **M**. Esta situação aplica-se para o caso de cálculo de momento de um **sistema de forças coplanaraes**.

## 5.4.1. Binário

O momento produzido por duas forças iguais e opostas e não colineares é chamado **binário**.



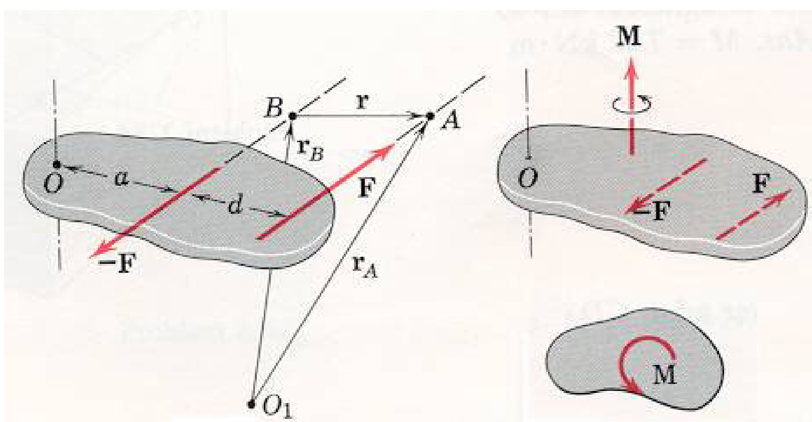

As forças representadas na figura não podem ser combinadas numa única força, porque a sua soma é nula, pelo que o seu efeito é o de produzir uma rotação.

O momento combinado das duas forças, relativamente a um eixo normal ao plano que contém as duas forças, é:

$$M = F.(a + d) - F.a = F.d$$ que é independente de a.

O **momento do binário** é representado por um vector livre $\vec{M}$ , perpendicular ao plano do binário.

O resultado é o mesmo seja qual for a origem do referencial, por exemplo $O_1$:

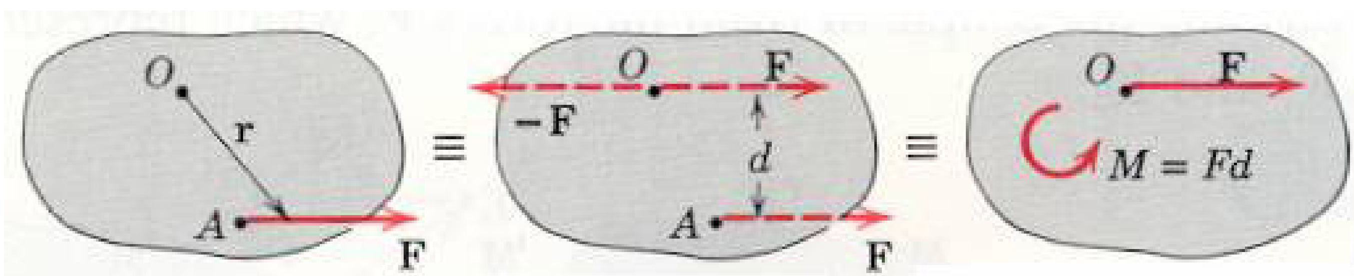



$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \left(-\vec{F}\right)$$
$$= \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \times \vec{F}$$
$$= \vec{r} \times \vec{F}$$

E como $d$ é a projecção de $\vec{r}$ segundo a normal de $\vec{F}$ então: $\boldsymbol{M = F.d}$

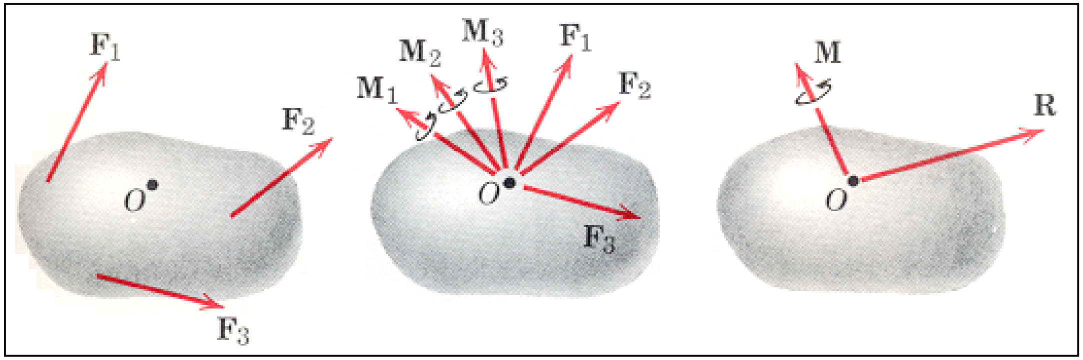
## 5.5. Sistemas de forças

Uma força $\vec{F}$ que tende a fazer um corpo rodar em torno de um eixo que passe por ***O*** e que não intersecte a linha de acção da força, é equivalente ao conjunto de uma força igual e paralela aplicada no eixo de rotação (momento nulo) e de um binário (resultante de forças nula) igual ao momento da força. Deste modo pode-se efectuar a **substituição de uma força por um sistema equivalente de uma força e um binário**.




A força aplicada no ponto A, pode ser substituída pela força aplicada em *O* e pelo binário $\boldsymbol{M = F.d}$

Para um sistema de forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ no espaço, cada uma das forças pode ser substituída do mesmo modo por um **sistema força-binário**.




As **forças concorrentes** podem ser adicionadas vectorialmente e todo o sistema de forças pode ser substituído por uma resultante $\vec{F}$, e por um momento resultante, $\vec{M}$:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_i \vec{F}_i = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}$$

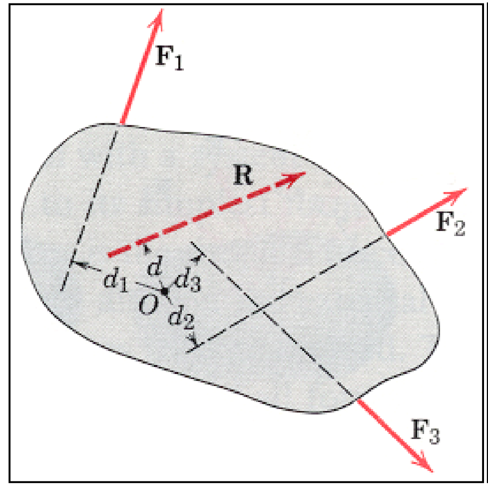
$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \ldots + \vec{M}_n = \sum_i \left( \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right)$$

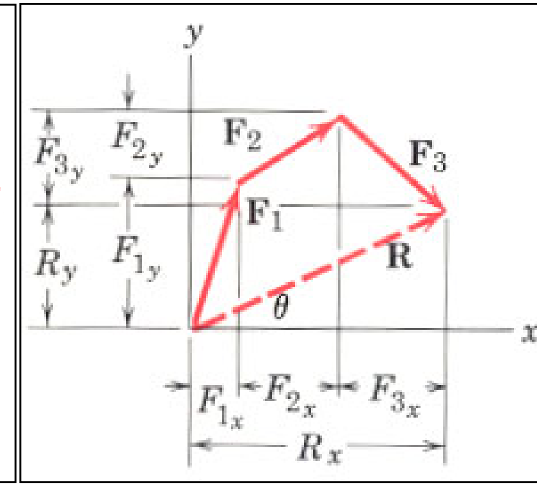
O módulo e a direcção de $\vec{M}$ dependem do eixo de rotação seleccionado.

## 5.5.1. Sistema de Forças Coplanares

Quando todas as forças actuam no mesmo plano, a força resultante $\vec{R}$ pode ser obtida através da soma das componentes:

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j}$$




$$\begin{cases} R_x = \sum F_x \\ R_y = \sum F_y \end{cases} \qquad tg\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

A localização da **força resultante** (linha de acção) depende da selecção do ponto O, em relação ao qual se calculam os **momentos** e de modo que: $\vec{M}_{F1} + \vec{M}_{F2} + \vec{M}_{F3} = \vec{M}_{Fres}$

Para **<u>forças coplanares:</u>**

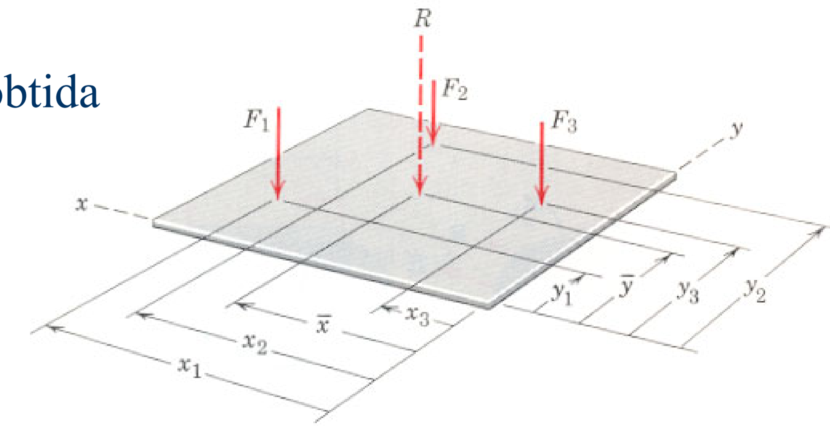
$Rd = -F_1d_1 + F_2d_2 - F_3d_3$ (se escolhemos o sentido positivo como sendo o anti-horário)

A **força resultante** pode ser aplicada através de qualquer linha de acção ($M^R_o = xR_y - yR_x$) desde que se adicione o **binário** correspondente para manter o efeito do **sistema de forças**.

## 5.5.2. Sistema de Forças Paralelas

Neste caso, a força resultante $\vec{R}$ pode ser obtida através da soma escalar das forças aplicadas:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3}$$




A posição da linha de acção da resultante, é obtida tendo em conta que o momento da resultante em torno de um eixo é igual à soma dos momentos das componentes em torno do mesmo eixo:

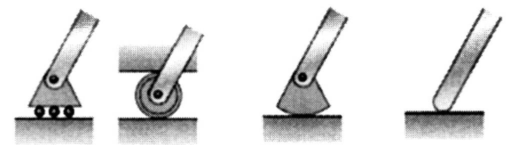
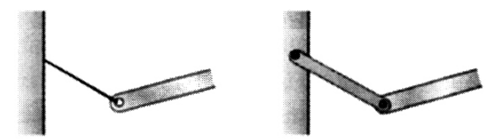
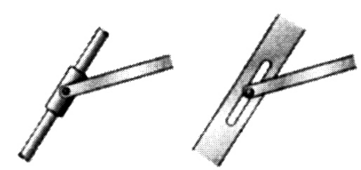
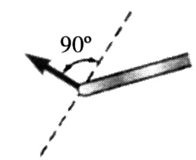
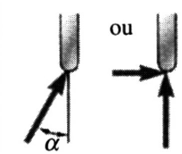
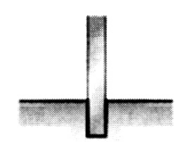
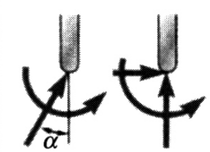
$$R = \sum F_i \qquad \bar{x}_c = \frac{\sum F_i x_i}{R} \qquad \bar{y}_c = \frac{\sum F_i y_i}{R}$$

O ponto dado por $(\bar{x}_c, \bar{y}_c)$ designa-se por **centro de forças paralelas**. Deste modo, um sistema de forças paralelas de resultante não-nula pode ser sempre reduzido a uma única força paralela às forças do sistema cujo ponto de aplicação é: $(\bar{x}_c, \bar{y}_c)$

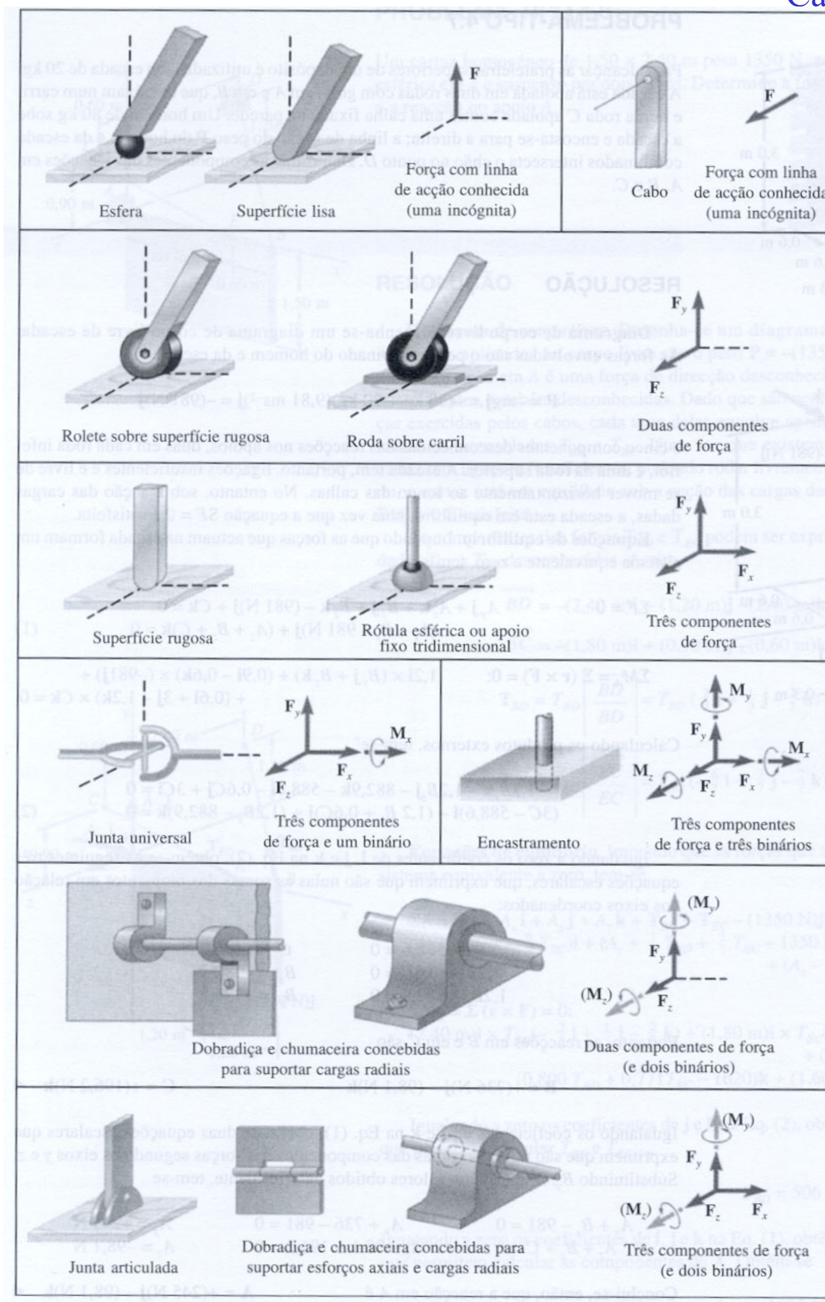
O **centro de massa** de um sistema de vários corpos é calculado do mesmo modo, já que as forças gravíticas dos diferentes corpos do sistema, correspondem a um **sistema de forças paralelas**.

# 5.6. Reacções nos apoios e ligações

## 5.6.1. Duas dimensões (2D)

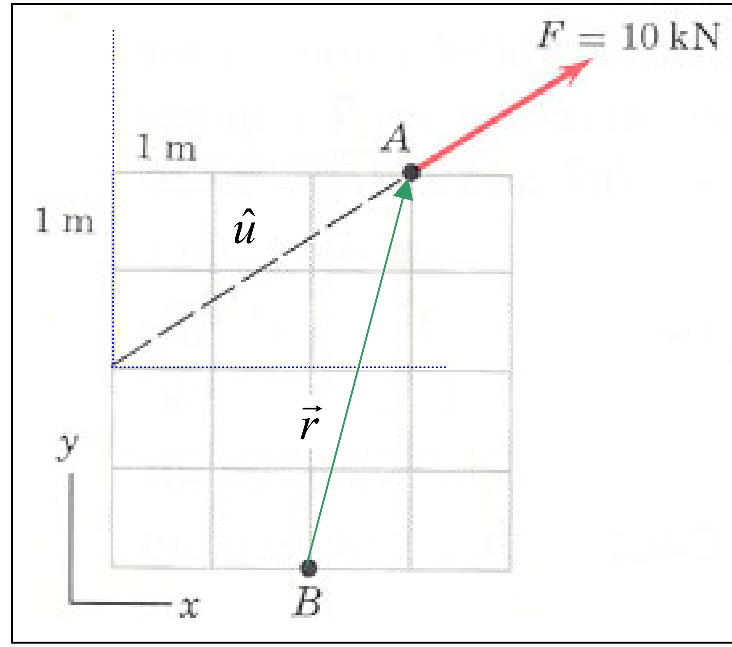
| Apoio ou ligação | Reacção | Número de incógnitas |
| --- | --- | --- |
|  Roletes; Suporte basculante; Superfície lisa |  Força com linha de acção conhecida | 1 |
|  Cabo curto; Biela curta |  Força com linha de acção conhecida | 1 |
|  Cursor sobre haste lisa; Pino deslizante sem atrito |  Força com linha de acção conhecida | 1 |
|  Articulação sem atrito ou apoio fixo; Superfície rugosa |  Força com linha de acção desconhecida | 2 |
|  Encastramento |  Força e binário | 3 |

## 5.6.2. Três dimensões (3D)



## 5.7. Exemplos

### Exemplo 1 (momentos):




**Calcule o momento $M_B$ da força F de 10 kN em torno do ponto B.**

$$\vec{M}_B = \vec{r} \times \vec{F} = \left(r_x.F_y - r_y.F_x\right)\hat{k}$$

Como temos: $\vec{r} = \hat{i} + 4\hat{j}$

Obtemos: $\vec{M}_B = \left(1.F_y - 4.F_x\right)\hat{k}$

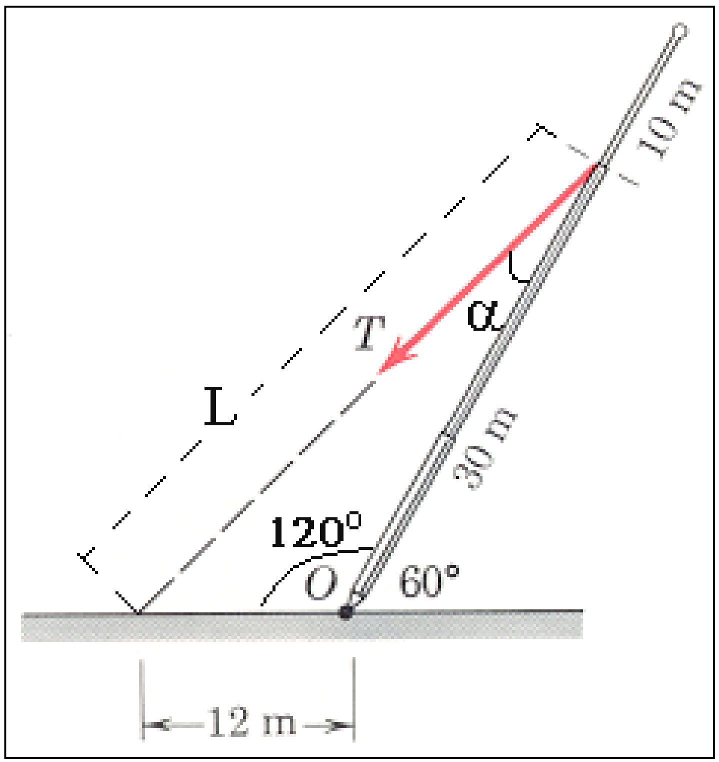
Para determinar as componentes de F, usar o versor da direcção de F, isto é:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} = F\hat{u}_F = 10\hat{u}_F \\ \text{Como} \quad \hat{u}_F = \dfrac{3\hat{i} + 2\hat{j}}{\sqrt{13}} \end{array}\right\} \quad \vec{F} = 8.32\hat{i} + 5.55\hat{j}$$

Logo: $\vec{M}_B = -27.7\hat{k} \ \ (kN.m)$ (vector dirigido no sentido do plano do papel ⊗ )

# Exemplo 2 (momentos):

**Ao içar a estaca na posição indicada a tracção T no cabo tem de suportar um momento em torno de O de 72 kN.m. Determine T.**




Para calcular o ângulo α é necessário calcular L.
Pela lei dos cosenos:

$L^2 = 30^2 + 12^2 - 2(30)(12)\cos 120^\circ$

$L = 37{,}5$ m

Pela lei dos senos: $$\frac{L}{sen(120^\circ)} = \frac{12}{sen(\alpha)}$$

**α = 16,1º**

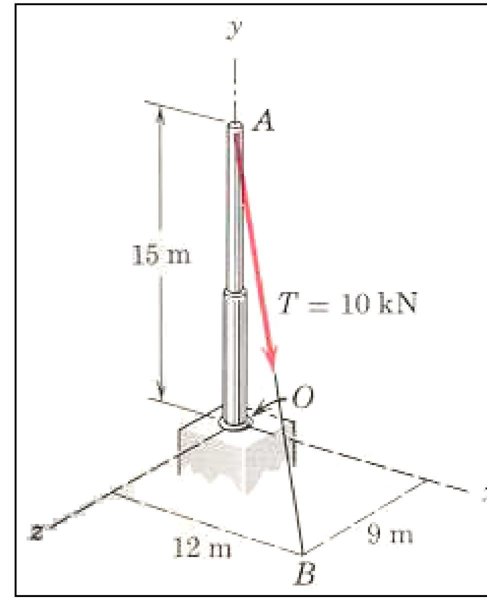
**O momento de T relativamente a O é:**

$M_O = T.30.sen\alpha = 72$ kN.m

**T = 8,65 kN**

# Exemplo 3 (momentos):

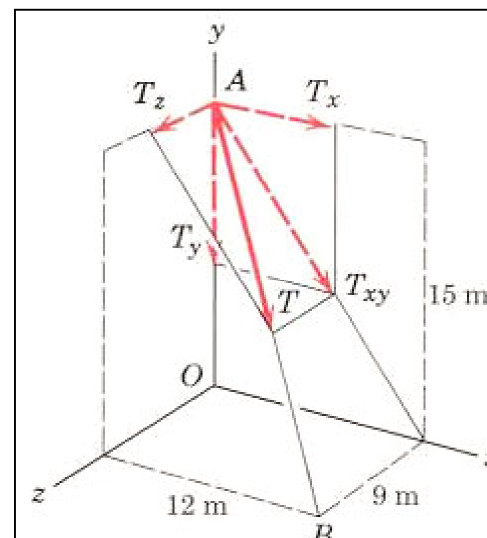
**A tensão T = 10 kN está aplicada no cabo preso no topo do mastro. Determine o momento desta força em torno de O.**




**1º passo** – como $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , convém decompor o vector posição, do ponto de aplicação da força, e a tensão, utilizando o sistema de eixos representado na figura.

$$\vec{r} = 15\hat{j} \quad (m) \qquad\qquad \vec{T} = 10\hat{u}_{AB} = 10\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (12,0,9) - (0,15,0) = 12\hat{i} - 15\hat{j} + 9\hat{k}$$




$$\hat{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{12\hat{i} - 15\hat{j} + 9\hat{k}}{\sqrt{12^2 + (-15)^2 + 9^2}}$$

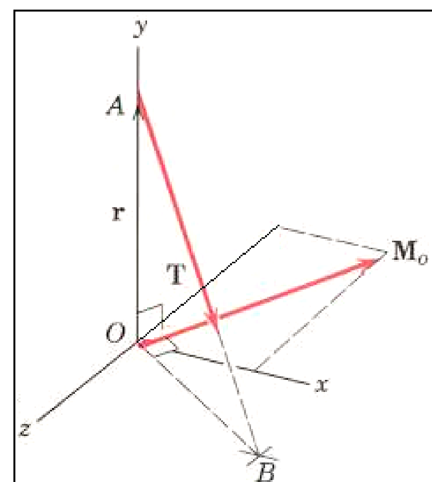
$$\vec{T} = 5.66\hat{i} - 7.07\hat{j} + 4.24\hat{k}$$

**2º passo** - cálculo do momento

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 15 & 0 \\ 5.66 & -7.07 & 4.24 \end{vmatrix}$$

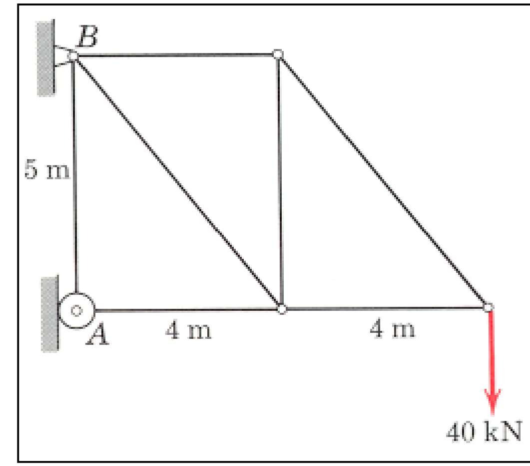
$$\vec{M} = 63.6\hat{i} - 84.9\hat{k} \quad (kN.m)$$

$$\vec{T} = 5.66\hat{i} - 7.07\hat{j} + 4.24\hat{k}$$

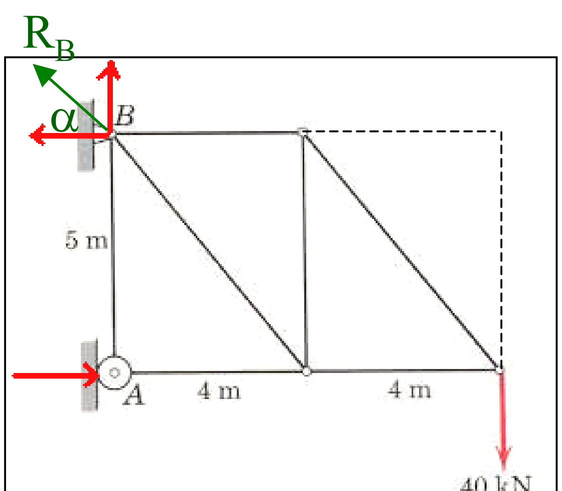


# Exemplo 4 (binário):

**A armação representada na figura suporta uma carga, F, de 40 kN. A parede vertical exerce uma força horizontal contra o suporte rolante em A, e a articulação em B exerce a força adicional necessária para que a armação esteja em equilíbrio. A força, F, de 40 kN e a componente vertical da reacção em B constituem um binário que é igual e oposto ao binário devido às duas forças horizontais. Calcule o módulo da força que actua em B.**




1. Representação das forças aplicadas:




2. Condições de equilíbrio:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_B\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0} \Rightarrow \sum M_{Bz} = 0$$

$$\begin{cases} R_A - R_{Bx} = 0 \\ R_{By} - F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = R_{Bx} \\ R_{By} = F = 40\,kN \end{cases}$$

3. Cálculo dos momentos relativamente a B:

$$\begin{cases} \vec{M}_B\left(\vec{R}_B\right) = \vec{0} \\ \vec{M}_B\left(\vec{R}_A\right) = 5.R_A\,\hat{k} \\ \vec{M}_B\left(\vec{F}\right) = -8.F\,\hat{k} \end{cases}$$

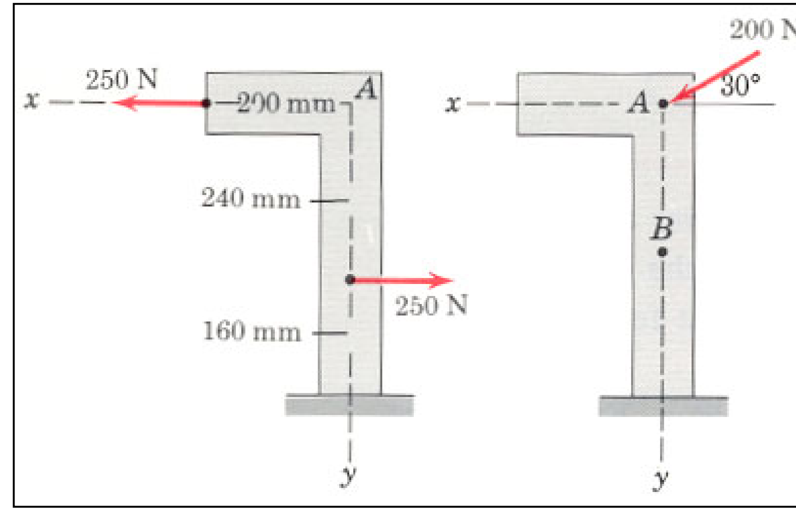
$$\sum M_{Bz} = 0 \Rightarrow 5R_{Bx} - 8F = 0 \Rightarrow R_{Bx} = 64\,kN$$

Obtemos assim: $R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = \sqrt{64^2 + 40^2} = 75.5\,kN$

$$tg\alpha = \frac{R_{By}}{R_{Bx}} = \frac{40}{64} \Rightarrow \alpha = 32^{o}$$

## Exemplo 5 (binário):

**A placa está sujeita a duas forças de 250 N. Deseja substituir-se estas duas forças por um sistema equivalente, consistindo numa força de 200 N, aplicada em A, e uma segunda força aplicada em B. Determine a coordenada y de B.**

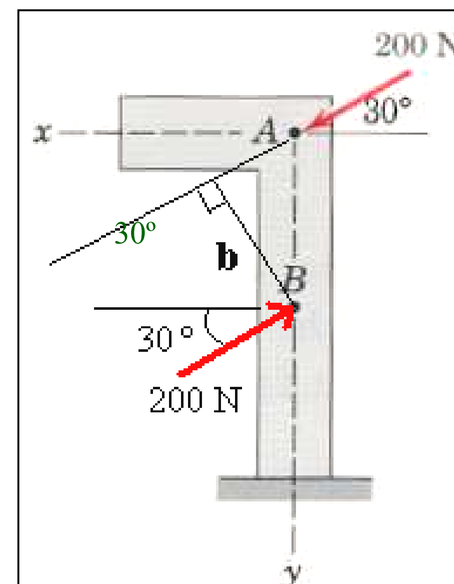



**1.** Cálculo da força resultante e do momento resultante: $R = \sum F = 0$

Momento do binário das forças de 250 N: $M_R = 250 \times 0.24 = 60$ N.m

**2.** O sistema equivalente terá de ter a mesma força resultante e o mesmo momento, pelo que terá de ser um binário, para que a força resultante seja nula.

A segunda força tem um módulo de 200 N, a mesma direcção e sentido oposto da representada.

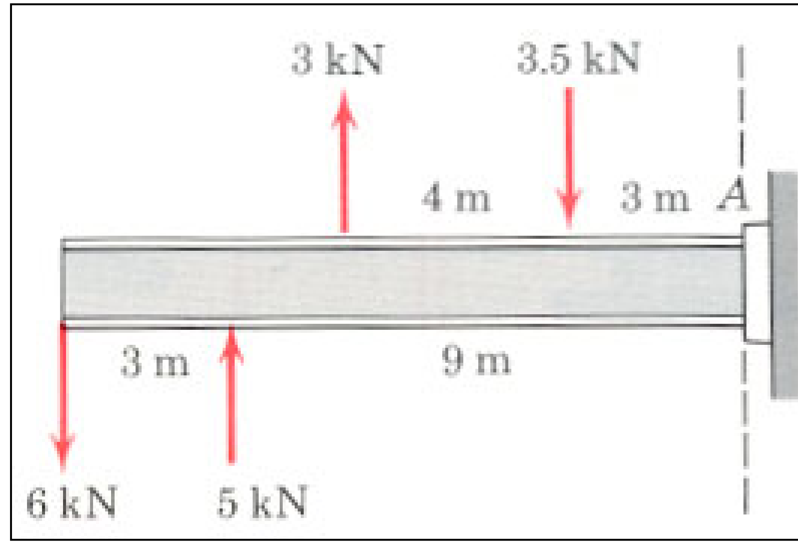



**3.** Cálculo do braço do binário: $60 = 200.b$ $\qquad$ **b** = 0.3 m

e da coordenada y de B: $\cos(30^{o}) = b/y$ $\qquad$ **y** = 0.346 m

## Exemplo 6 (forças paralelas):

**Determine a força R que poderia substituir as quatro forças que actuam na barra, sem alterar a reacção que a suporta no ponto A. Indique também a posição de R contada a partir de A.**




**1.** Cálculo da força resultante:

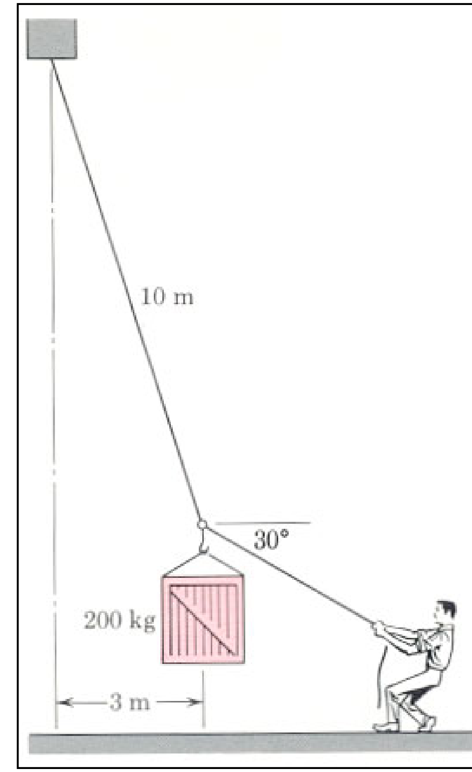
**R** = 5 + 3 – 3.5 – 6 = **-1.5 kN** (resultante para baixo)

**2.** Cálculo da posição da força resultante, tendo em conta que o momento da força resultante é igual ao momento das forças do sistema:

$F_1.d_1 - F_2.d_2 - F_3.d_3 + F_4.d_4 = R.d$ (se escolhemos o sentido positivo como sendo o anti-horário)

$6\times12 - 5\times9 - 3\times7 + 3.5\times3 = 1.5d \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{d = 11\ m}$

## Exemplo 7 (equilíbrio):

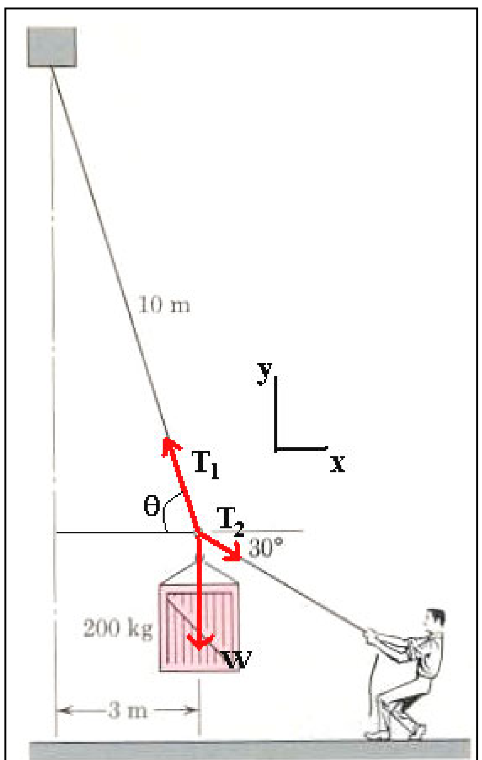



**Qual a força que o homem deve exercer na corda para suspender o caixote de 200 kg na posição indicada?**

**1º passo** – escolha de um referencial e representação das forças aplicadas no ponto em equilíbrio

**W** – peso do corpo (vertical)

**$T_1$ e $T_2$** - tracções no fio (ao longo do fio)



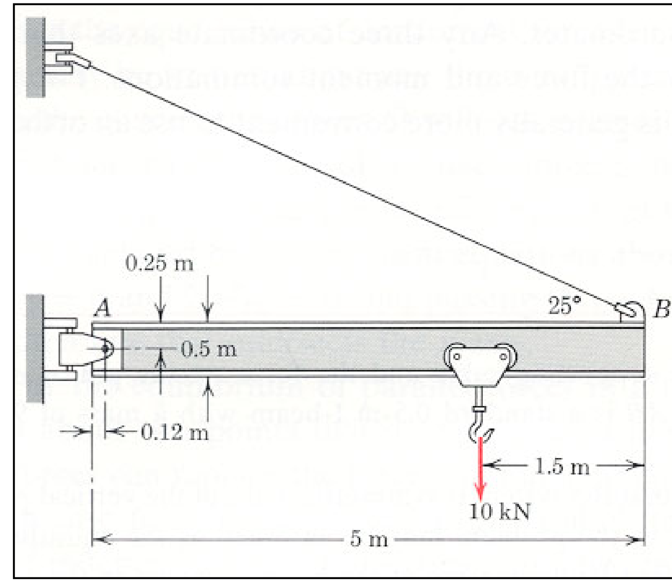

$$\cos\theta = \frac{3}{10} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 72.54^{\circ}$$

**2º passo** – aplicação das condições necessárias para o equilíbrio do ponto onde estão aplicadas as forças:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -T_1.\cos\theta + T_2.\cos(30^{\circ}) = 0 \\ T_1.sen\theta - T_2.sen(30^{\circ}) - W = 0 \end{cases}$$

$$T_2 = 872.9\,N$$

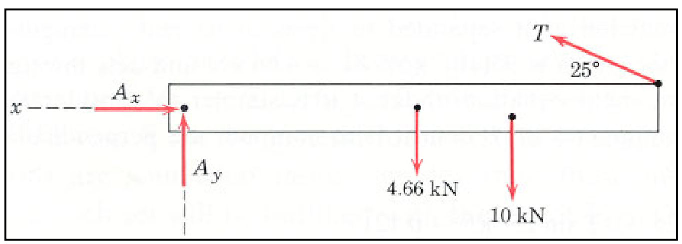
# Exemplo 8 (equilíbrio):




Determine a tracção T no cabo que suporta a viga e a força sobre o pino em A. A viga AB tem um peso de 4,66 kN.

**1º passo** – escolha de um referencial e representação das forças aplicadas à barra (diagrama de corpo livre)

- **W** – peso da viga (vertical)
- **L** – carga aplicada (vertical)
- **T** – Tracção no fio (ao longo do fio)
- **A** – Reacção na articulação (componentes ***x*** e ***y***)



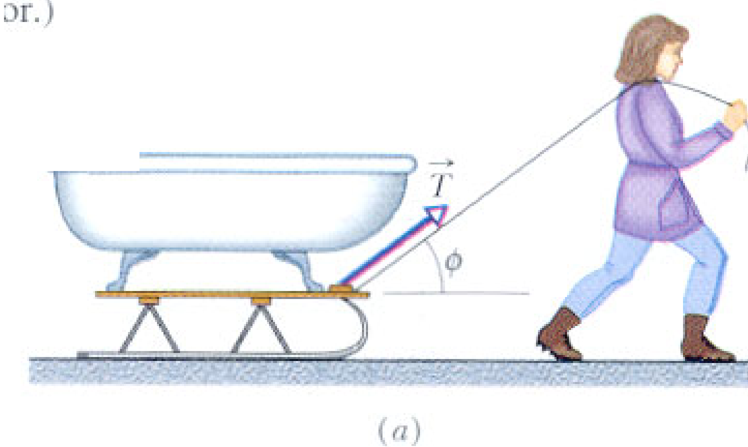

**2º passo** – aplicação das condições necessárias para o equilíbrio num sistema de forças coplanares e escolha adequada do ponto em relação ao qual se devem calcular os momentos.

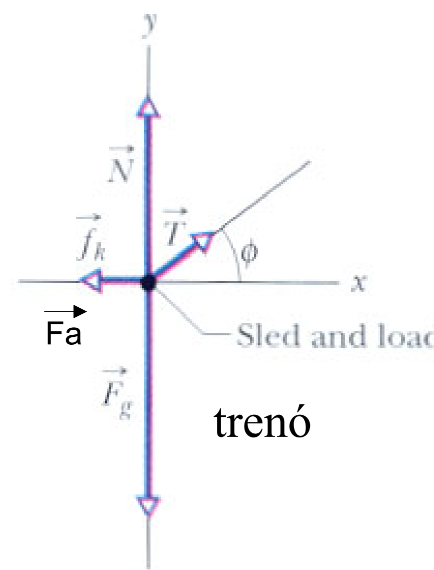
$$\sum M_{Az} = 0 \Rightarrow 0.25T_x + (5\text{-}0.12)T_y - (3.5\text{-}0.12)L - (2.5\text{-}0.12)W = 0 \Rightarrow T = 19.61 \text{ kN}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x - T_x = 0 \\ A_y + T_y - W - L = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_x = 17.77\,kN \\ A_y = 6.37\,kN \end{cases} \quad \begin{matrix} \vec{A} = 17.77\hat{i} + 6.37\hat{j}\ (kN) \\ A = 18.88\ kN \end{matrix}$$

# Exemplo 9 (força de atrito):

Uma rapariga puxa uma carga de 75 kg em cima de um trenó com velocidade constante ao longo de um lago gelado. O coeficiente de atrito cinético entre o trenó e o gelo é de 0.1 e o ângulo que a corda faz com a horizontal (ϕ) é de 42º. Qual o valor da tensão (**T**) na corda ?




Uma vez que o trenó se desloca com velocidade constante, temos:

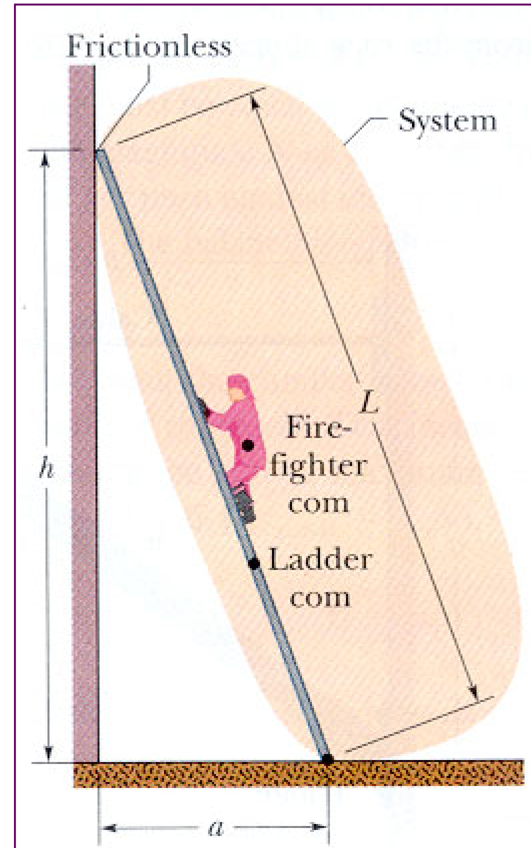
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_a + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T.\cos\phi - F_a = 0 \\ T.sen\phi + N - P = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T.\cos\phi - \mu_c N = 0 \\ N = P - T.sen\phi \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\mu_c mg}{\cos\phi + \mu_c sen\phi} = 91\,N$$

## Exemplo 10 (força de atrito):

Um bombeiro (fire fighter) sobe uma escada (ladder) que está encostada a uma parede para apagar um incêndio. Supondo que não existe atrito na parede, existindo unicamente entre a escada e o solo, **determine o valor das reacções em ambos os apoios da escada quando o bombeiro tiver subido metade do caminho**. Considere que o comprimento da escada é de 12 m, sendo a massa da escada de 45 kg, a massa do bombeiro de 72 kg e a altura h (ver figura) sendo de 9,3 m. Adicionalmente entre em conta com o facto da escada não ser homogénea e ter o seu centro de massa (com) a um terço do seu comprimento a contar de baixo.

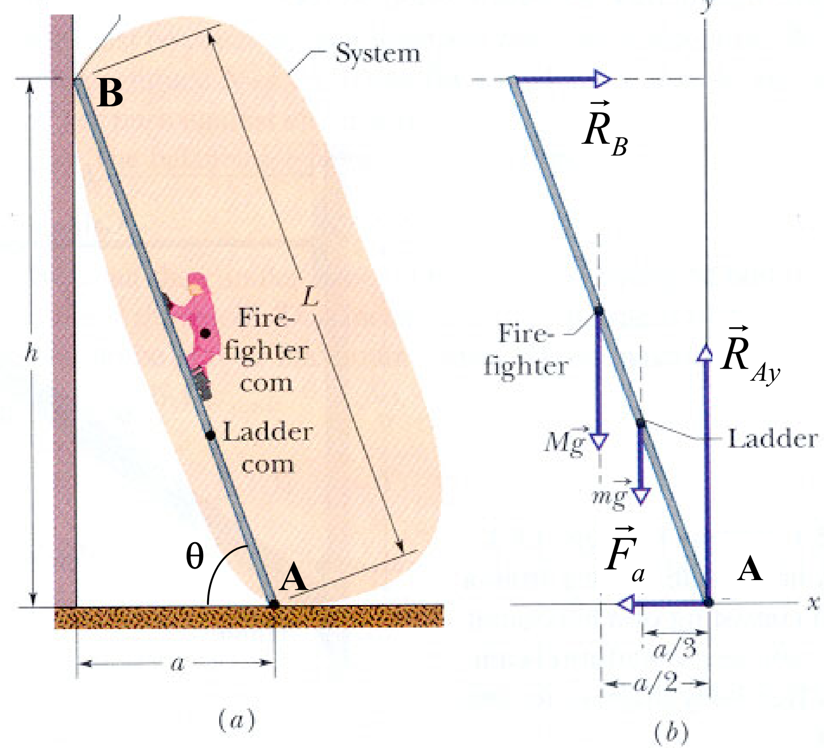


Resolução:

Vamos escolher o nosso sistema como sendo o bombeiro mais a escada numa situação de equilíbrio de translação e rotação.

$$\sin\theta = \frac{h}{L} \Leftrightarrow \theta = 50.8^{\circ}$$

sem atrito




Vamos calcular os momentos relativamente a A, uma vez que assim temos:

$$\vec{M}_A\left(\vec{R}_{Ay}\right) = \vec{M}_A\left(\vec{F}_a\right) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_B - F_a = 0 \\ R_{Ay} - P_{bombeiro} - P_{escada} = 0 \\ -L.R_B \sin\theta + \frac{L}{2} P_{bombeiro}.\sin(90-\theta) + \frac{L}{3} P_{escada}.\sin(90-\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_B = F_a \\ R_{Ay} = 1146.6\ \text{N} \\ R_B = 407\ \text{N} \end{cases}$$

$$\vec{R}_B = 407\hat{i}\ (\text{N})$$

$$\vec{R}_A = -F_a\hat{i} + R_{Ay}\hat{j} = -407\hat{i} + 1146.6\hat{j}\ (\text{N})$$