Ficha 6: Exercício 5

Considere o seguinte problema de valor inicial e condições na fronteira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 9u \qquad \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \pi - x & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

(a) Desenvolva $u(x,0)$ numa série de senos em $[0,\pi]$.

(b) Resolva formalmente o problema dado.

Resolução:

(a) Os coeficientes da série de senos de $\pi - x$ em $[0,\pi]$ são, para $n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{-(\pi - x)\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx\right\} \\ &= \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Logo,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\,\mathrm{sen}(nx)$$

(b) Consideremos primeiro soluções da equação diferencial parcial do tipo $u = T(t)X(x)$. Substituindo na equação obtemos $T'X = 9TX'' + 9TX$, ou seja $\frac{T'}{9T} - 1 = \frac{X''}{X} = \sigma$, onde σ é uma constante real dado que o primeiro membro é independente de x e o segundo é independente de t. Logo,

$$\begin{cases} T'(t) - 9(\sigma + 1)T(t) = 0 \\ X''(x) - \sigma X(x) = 0\,. \end{cases}$$

Consoante o sinal da constante σ a equação diferencial de segunda ordem em $X(x)$ tem as soluções

$$X(x) = \begin{cases} ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x} & \text{se } \sigma > 0 \\ a + bx & \text{se } \sigma = 0 \\ a\cos(\sqrt{-\sigma}x) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\sigma}x) & \text{se } \sigma < 0 \end{cases}$$

Pelas condições na fronteira,

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Vejamos o que isto implica para cada um dos casos anteriores:

Caso $\sigma > 0$:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ ae^{\sqrt{\sigma}\pi} + be^{-\sqrt{\sigma}\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a(e^{\sqrt{\sigma}\pi} - e^{-\sqrt{\sigma}\pi}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X(x) \equiv 0$$

Caso $\sigma = 0$:

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + b\pi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X(x) \equiv 0$$

Caso $\sigma < 0$:

$$\begin{cases} a = 0 \\ a\cos(\pi\sqrt{-\sigma}) + b\,\mathrm{sen}(\pi\sqrt{-\sigma}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b\,\mathrm{sen}(\pi\sqrt{-\sigma}) = 0 \end{cases}$$

e, neste último caso, ou $a = b = 0$, dando novamente a solução $X(x) \equiv 0$, ou $a = 0$ com $\sigma = -n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, e neste caso obtemos as soluções não identicamente nulas $X(x) = a\,\mathrm{sen}(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$. Resolvendo a equação para $T(t)$ com estes valores de σ obtemos $T(t) = ce^{9(1-n^2)t}$. Procuremos então a solução do problema como uma série de funções do tipo $T(t)X(x) = b_n e^{9(1-n^2)t}\,\mathrm{sen}(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{9(1-n^2)t}\,\mathrm{sen}(nx)\,.$$

Dado que $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}(nx) = \pi - x$, deduzimos que b_n, $n = 1, 2, \ldots$ são os coeficientes da série de senos calculada na alínea anterior pelo que a solução (formal) do problema dado é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} e^{9(1-n^2)t}\,\mathrm{sen}(nx)\,.$$