Complementos de Análise Matemática EE

Departamento de Matemática e Aplicações

2012/2013

Folha de Exercícios 3

Solução de equações diferenciais de primeira ordem

Eng^{a}. de Comunicações, Eng^{a}. de Polímeros

Equações Diferenciais Exatas

1. Averiguar quais das seguintes equações diferenciais são exatas e determinar a sua solução.

   (a) $\left(3x^2y^2 - y^3 + 2x\right)\, dx + \left(2x^3y - 3xy^2 + 1\right)\, dy = 0$

   (b) $\left(\dfrac{2s-1}{t}\right) ds + \left(\dfrac{s-s^2}{t^2}\right) dt = 0$

   (c) $\left(x + e^{x/y}\right)\, dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy = 0, y\,(1) = 1$

2. Para cada uma das equações seguintes determinar o valor da constante A de forma a serem exatas e resolver as equações correspondentes.

   (a) $\left(6xy + 2y^2 - 5\right)\, dx + \left(3x^2 + Axy - 6\right)\, dy = 0$

   (b) $\left(\dfrac{A\,y}{x^3} + \dfrac{y}{x^2}\right) dx + \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right) dy = 0$

3. Para cada uma das equações seguintes determinar a função mais geral $f\,(x, y)$ de forma a ter-se uma equação diferencial exata:

   (a) $f\,(x, y)\; dx + \left(2ye^x + y^2e^{3x}\right)\, dy = 0$

   (b) $\left(y^2 + 1\right)\cos x\; dx +\; f\,(x, y)\; dy = 0$

Equações Diferenciais Exatas e Fatores Integrantes

4. Para cada alínea que se segue, verificar que a equação diferencial dada não é exata, que $\mu(x, y)$ é uma fator integrante e, com base nisso, obter uma família de soluções:

   (a) $\left(x^2 - y + 1\right) + \left(x^3 - 3xy + 2x\right)\, y' = 0, \qquad \mu(y) = e^{3y}$

   (b) $x^2y^3\, dx + x(1 + y^2)\, dy = 0, \qquad \mu(x, y) = \dfrac{1}{xy^3}$

   (c) $\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x}\operatorname{sen} x\right) dx + \left(\dfrac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right) dy = 0, \qquad \mu(x, y) = ye^x$

5. Considerar a equação diferencial

$$\left(y^2+2xy\right)\, dx - x^2\, dy = 0$$

   (a) Mostrar que esta equação não é exata.
   (b) Multiplicar a equação por $y^n, n \in Z$, e determinar n de forma a que a nova equação seja exata.
   (c) Resolver a equação que se obtém quando se multiplica a equação acima pelo fator integrante obtido em b)
   (d) Mostrar que $y=0$ é uma solução da equação não exata, mas que não é solução da equação obtida quando esta é multiplicada pelo fator integrante obtido em a).

Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis

6. Resolver cada uma das seguintes equações diferenciais. Mostrar que a solução verifica formalmente a equação diferencial dada.

   (a) $4xy\, dx + \left(x^2+1\right)\, dy = 0$
   (b) $(x+4)\left(y^2-1\right)\, dx + y\left(x^2+8x\right)\, dy = 0$
   (c) $\operatorname{tg}\theta\, dr + 2r\, d\theta = 0$
   (d) $\dfrac{dy}{dx} = x-y$, (sugestão: fazer $w = x-y$)
   (e) $\dfrac{dy}{dx} = (y+x)^2$, (sugestão: fazer $w = y+x$)

7. Resolver o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 8(\cos^2 y)\, dx + (\operatorname{cosec}^2 x)\, dy = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Equações Diferenciais Homogéneas

8. Recorde-se que uma função $g(x,y)$ diz-se homogénea de grau n se $g(tx,ty) = t^n g(x,y)$.

   Uma equação diferencial da forma $y' = f(x,y)$ diz-se homogénea se a função $f(x,y)$ é homogénea de grau zero.

   (a) Verificar se as seguintes funções $f(x,y)$ são homogéneas. Em caso afirmativo, indicar o respectivo grau.
      i. $f(x,y) = x^2+3xy$
      ii. $f(x,y) = \ln(x/y) + xy$

(b) Mostrar que a mudança de variável $y = vx$ transforma a equação diferencial homogénea $y' = f(x, y)$ na seguinte equação de variáveis separáveis $xv' = f(1, v) - v$.

(c) Usando o resultado obtido na alínea anterior resolver as seguintes equações diferenciais:

i. $(x + y)\ dx - x\, dy = 0, x > 0$

ii. $\left(2xy - x^2\right)\ dx + x^2\, dy = 0, x > 0$

iii. $y' = \dfrac{5y - 2x}{4x - y}, y\,(0) = 12$

9. Resolver as seguintes equações diferenciais usando dois métodos diferentes:

(a) $y' \cos x + 2y \operatorname{sen} x = 0$

(b) $(2x - y)\, y' + x + 2y = 0$

(c) $\left(4xy - y^2\right) \dfrac{dy}{dx} + x^2 + 2y^2 = 0$

Equações Diferenciais Lineares

10. Averiguar quais das seguintes equações diferenciais são lineares e determinar uma família de soluções:

(a) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{x}{t^2} = \dfrac{1}{t^2}$ (b) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^3y^3}$ (c) $u\, dv - 2v\, du = (u + 1)\ du$

(d) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}$ (e) $xy' - 2y = x^3e^x$ (f) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{t+1}{2t}x = \dfrac{t+1}{tx}$

(g) $dy - 4y\, dx = 2e^x y^{1/2}\, dx$ (h) $y' + 3\dfrac{y}{x} = 6x^2$ (i) $x\, dy + \left(y + 2x^6y^4\right)\ dx = 0$

11. Resolver os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\dfrac{dy}{dx} - 5y = 3e^{5x},\ \ y(0) = 8;$

(b) $xy' + y - e^x = 0,$ e $y(a) = b.$

12. A equação

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

designa-se equação de Riccati.

(a) Mostrar que se $A \equiv 0$ então a equação referida é uma equação linear.

(b) Verificar que $f = x$ é uma solução explícita da equação de Riccati $y' = -y^2 + xy + 1$ e que a transformação $y = f + \frac{1}{v}$ reduz a equação diferencial a uma equação linear em $v(x)$; resolver a equação linear obtida pela transformação.

Exercícios Diversos

13. Classificar e resolver as seguintes equações diferenciais determinando uma família de soluções:

 (a) $e^x\,dx + x^3\,dy + 4x^2y\,dx = 0$

 (b) $2r\left(s^2+1\right)\,dr + \left(r^4+1\right)\,ds = 0$

 (c) $y' = y^{\frac{1}{2}}$.

 (d) $(y + \cos x)\,dx + (x + \operatorname{sen} y)\,dy = 0$.

 (e) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

14. Resolver os seguintes problemas de valor inicial:

 (a) $\left(\dfrac{1}{y^2}\ln x - y\right)dy - \dfrac{1}{xy}\,dx = 0, x > 0, y(1) = 2$

 (b) $\left(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy = 0, x > 0,\ y(1) = 0$

 (c) $\dfrac{dy}{dx} - y\ \operatorname{tg}(x) = \sec(x) \quad y(0) = 0$

15. Considere-se a equação diferencial

$$x^2y' + 2xy = 0, \quad x \neq 0$$

 (a) Averiguar se a equação dada é exata e determinar a respectiva família de soluções.

 (b) A equação dada é linear? Em caso afirmativo, determinar o respectivo fator integrante, μ_1.

 (c) A equação dada é de variáveis separáveis? Em caso afirmativo, determinar o respectivo fator integrante, μ_2.

Soluções da folha de exercícios 3

1. *a)* $x^3y^2 - y^3x + x^2 + y = c$ *b)* $\dfrac{s^2 - s}{t} = c$ *c)* $\dfrac{x^2}{2} + ye^{x/y} = c$, $y(1) = 1 \Rightarrow c = 1/2 + e$

2. *a)* $A = 4; 3x^2y + 2y^2x - 5x - 6y = c$ *b)* $A = -2; \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{y}{x} = c$

3. $a)$ $f\,(x,y) = y^2e^x + y^3e^{3x} + \phi(x)$ $\quad$ $b)$ $f(x,y) = 2y\,\mathrm{sen}\,x + \phi(y)$

4. $a)$ $e^{3y}\left(\dfrac{x^3}{3} - xy + x\right) = c$ $\quad$ $b)$ $x^2 - \dfrac{1}{y^2} + \ln y^2 = c,\ y = 0$

   $c)$ $e^x\,\mathrm{sen}\,y + 2y\cos x = k$

5. $b)$ $n = -2$ $\quad$ $c)$ $x + \dfrac{x^2}{y} = c$

6. $a)$ $y(x^2+1)^2 = c$ $\quad$ $b)$ $(y^2-1)(x^2+8x) = c$ $\quad$ $c)$ $r\,\mathrm{sen}^2\,\theta = c$

   $d)$ $y = x - 1 + ce^{-x}$ $\quad$ $e)$ $y = \mathrm{tg}(x-c) - x$

7. $4x - 2\,\mathrm{sen}\,(2x) + \mathrm{tg}\,y = \frac{\pi}{3}$

8. $a)$ $i)$ sim, grau 2, $\quad$ $ii)$ não

   $c)$ $i)$ $x\ln x - cx = y$ $\quad$ $ii)$ $3yx^2 - x^3 = c$ $\quad$ $iii)$ $y = 6\sqrt{1-x} - 2x + 6$

9. $a)$ $y = c\cos^2 x$

   $b)$ $y^2 - 4yx - x^2 = c$

   $c)$ $x^3 + 6xy^2 - y^3 = c$

10. b), d), f), g) e i) - equações diferenciais ordinárias de 1^a ordem, não lineares

    a), c), e) e h) - equações diferenciais ordinárias de 1^a ordem, lineares

    $a)$ $x\,(t) = 1 + ce^{1/t}$ $\quad$ $c)$ $v = cu^2 - c - \dfrac{1}{2}$ $\quad$ $e)$ $y = x^2e^x + cx^2$ $\quad$ $h)$ $y = x^3 + cx^{-3}$

11. $a)$ $y = e^{5x}\,(3x+8)$ $\quad$ $b)$ $(e^x + ab - e^a)x^{-1}$

12. $b)$ $v' - vx = 1,$ $\quad$ $e^{-x^2/2}v = \int e^{-x^2/2}\,dx + c$

13. $a)$ linear, $\quad$ $y = 1/x^4\,\{(1-x)e^x + c\}$ $\quad$ $b)$ v. separáveis, $\quad$ $\mathrm{arctg}\,r^2 + \mathrm{arctg}\,s = c$

    $c)$ v. separáveis, $\quad$ $x - 2\sqrt{y} = c$ $\quad$ $d)$ exata, $\quad$ $xy + \mathrm{sen}\,x - \cos y = c$

    $e)$ homogénea, $\quad$ $y^2 = x^2(\ln x^2 + c)$

14. $a)$ $\dfrac{1}{y}\ln x + \dfrac{y^2}{2} = 2$ $\quad$ $b)$ $3\ln x - \left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2}\right)^{3/2} = -1$ $\quad$ c) $y = x\sec x$

15. $a)$ $F(x,y) = x^2y + c$ $\quad$ $b)$ $\mu_1 = x^2$ $\quad$ $c)$ $\mu_2 = \dfrac{1}{x^2y}$