Folha 7B – Derivação sob o sinal de integral, áreas de regiões planas

1. Determine uma função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que
$$\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^3 e^x - x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua verificando a condição
$$\int_0^{x} f(t)\,dt = \frac{4}{3} + 3x^2 + \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\cos 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Calcule $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{1+\operatorname{sen} t}{2+t^2}\,dt, \ \forall x \in \mathbb{R}.$
Sem calcular o integral, determine um polinómio $\mathcal{P}$ de grau 2 tal que
$$\mathcal{P}(0) = f(0), \quad \mathcal{P}'(0) = f'(0), \quad \mathcal{P}''(0) = f''(0)\,.$$

4. Determine a área da região $\mathcal{A}$ limitada pelas curvas de equações:
   (a) $x = 0, \ \ x = 2, \ \ x^2 + (y-2)^2 = 4, \ \ x^2 + (y+2)^2 = 4;$
   (b) $x = -1, \ \ y = |x|, \ \ y = 2x, \ \ x = 1;$
   (c) $y = -x^3, \ \ y = -(4x^2 - 4x);$
   (d) $y = -x^2 + \frac{7}{2}, \ \ y = x^2 - 1.$

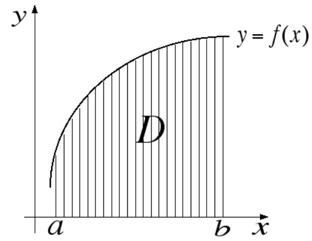
5. Estabeleça um integral (ou uma soma de integrais) que dê a área de cada uma das seguintes regiões planas:
   (a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\right\};$
   (b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq y \leq e^x \ \wedge \ 0 \leq y \leq e^{-x}\right\};$
   (c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0 \ \wedge \ y \leq x^2 - 2xy \leq 4\right\}.$

   Notar que as equações $y = x^2 - 2xy$ e $x^2 - 2xy = 4$ representam hipérboles com eixos de simetria oblíquos.

6. As coordenadas $(X_{\mathcal{G}}, Y_{\mathcal{G}})$ do centro de massa de um sólido com densidade $\rho = \rho(x)$, que ocupa uma região plana limitada pelo eixo OX, pelas rectas $x = a$ e $x = b$ e pela curva $y = f(x)$, são dadas por

$$X_{\mathcal{G}} = \frac{1}{m}\int_a^b x\rho(x)f(x)\,dx,$$

$$Y_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2m}\int_a^b \rho(x)f^2(x)\,dx,$$



onde $m = \displaystyle\int_a^b \rho(x)f(x)\,dx$ representa a massa total do sólido. Determine o centro de massa do sólido que ocupa a região D com densidade ρ dadas por:

(a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le a\ \wedge\ 0 \le y \le b\}$, $\quad \rho = kx$, $\quad k > 0$ constante,

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le 4 - x^2\}$, $\quad \rho = k|x|$, $\quad k > 0$ constante.

7. Uma partícula de massa m move-se num fluido com velocidade v, estando sujeita a uma resistência à viscosidade dada por $R(v)$, de tal forma que, em cada instante t, se tem

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)}\,du,$$

onde $v(t_0)$ representa a sua velocidade inicial. Suponha que, para um dado fluido, se tem

$$R(v) = -v\sqrt{v}, \quad m = 10, \quad v(t_0) = 10,$$

e calcule o tempo necessário para que a partícula reduza a sua velocidade para metade.

8. No método de diluição do contraste usado para medir a capacidade cardíaca, dada pelo volume de sangue bombeado em cada unidade de tempo, injecta-se uma quantidade A de contraste no sangue. Através de uma sonda que é introduzida na aorta avalia-se a concentração $c(t)$ de contraste que sai do coração em cada instante t, durante um certo período de tempo $[0,T]$, até que o contraste se tenha diluído por completo, deixando de ser detectado. A capacidade cardíaca do coração é então dada por

$$\frac{A}{\int_0^T c(t)dt}.$$

Calcule a capacidade cardíaca quando $A = 8$ e $c(t) = \dfrac{1}{4}t(12-t)$, com $0 \le t \le 12$.