CAPÍTULO 3

FUNÇÕES REAIS

3.1 Generalidades

3.1.1 Domínio

Definição 3.1.1
Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função f definida em A de valores em B é uma relação tal que para cada $x \in A$ associamos um único $y = f(x) \in B$.
Dizemos que o y é a imagem do elemento (objeto) x pela função f.
O conjuntos A e B chamam-se respetivamente conjunto de partida e conjunto de chegada.

Seja $E \subset A$ um subconjunto,

$$f(E) = \{B \ni y = f(x) \text{ tal que } x \in E\}.$$

chama-se imagem de E pela função f.

Exemplo 3.1.1 Seja $f(x) = x^2$ e $E = \{-4\} \cup [-1,1] \cup]2,3[$, então $f(E) = [0,1] \cup]4,9[\cup \{16\}$.

Definição 3.1.2
No caso de $B = \mathbb{R}$, notamos por $D_f \subset \mathbb{R}$ o maior domínio (ordenado pela inclusão dos conjuntos) onde f está definida. O conjunto $CD_f = \{\mathbb{R} \ni y = f(x);\ x \in D_f\}$ chama-se contradomínio.

NOTA 3.1.1 Usamos também a notação

$$\begin{array}{rcl} D_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & y = f(x). \end{array}$$

NOTA 3.1.2 Habitualmente, a função é dada por uma expressão analítica com a variável x e temos de determinar o domínio D_f onde a expressão faz sentido.

EXEMPLO 3.1.2 Seja a função $f(x) = x^2$, o seu domínio é $\mathbb{R}$ enquanto o contradominio é $[0, +\infty[$. Temos ambos $f(-2) = f(2) = 4$ então 4 é a imagem de 2 e -2 enquanto -2 e 2 são os antecedente de 4.

NOTA 3.1.3 Uma função pode ter uma expressão analítica e portanto não existir... Por exemplo consideramos a função $f(x) = \sqrt{-|x| - 1}$, podemos verificar que nenhum valore é eligível então $D_f = \emptyset$, quer dizer que a função não existe na prática (apenas simbolicamente).

Definição 3.1.3
Seja f uma função de valores reais e D_f o seu domínio. Notamos por

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in D_f\}$$

o gráfico (ou curva representativa) da função f.

NOTA 3.1.4 Uma curva corresponde a uma função desde que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a reta vertical que passa pelo ponto $(x, 0)$

- não corta o gráfico (zero interseção) e $x \notin D_f$,
- ou corta apenas uma vez o gráfico e $x \in D_f$.

Se a reta corta duas vezes (ou mais) o gráfico então a curva não corresponde a uma função clássica. Chama-se "multi-valued" função.

Podemos também definir uma função por ramos onde a expressão é diferente em função do intervalo.

EXEMPLO 3.1.3

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \sin(x) & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{se } x \in [1, 4], \\ \frac{1}{x} & \text{se } x^2 < 1. \end{cases}$$

3.1.2 Propriedades elementares

Introduzimos neste parágrafo as propriedades usuais das funções de uma variável de valores reais.

Definição 3.1.4 (paridade)
Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio.

- f é uma função par em E se
  1. $\forall x \in E$, $-x \in E$,
  2. $\forall x \in E$, $f(-x) = f(x)$.
- f é uma função ímpar em E se
  1. $\forall x \in E$, $-x \in E$,
  2. $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$.

Definição 3.1.5 (periódico)
Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio. A função f é periódica de período T em E se

1. $\forall x \in E$, $x + T \in E$,
2. $\forall x \in E$, $f(x + T) = f(x)$.

Definição 3.1.6 (monotonia)
Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio.

- A função é crescente se $\forall x, y \in E$, $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- A função é estritamente crescente se $\forall x, y \in E$, $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- A função é decrescente se $\forall x, y \in E$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- A função é estritamente decrescente se $\forall x, y \in E$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Determinar os intervalos de monotonia de uma função f consiste em determinar os intervalos de D_f onde f é crescente ou decrescente.

NOTA 3.1.5 Uma função crescente ou decrescente num conjunto E diz-se monótona em E.
É muito importante precisar o conjunto E. Por exemplo, a funcção $f(x) = x^2$ é crescente em $E = [0, +\infty[$ mas decrescente em $]-\infty, 0]$. Além de mais, nem é crescerente nem é decrescente em $\mathbb{R}$.

Definição 3.1.7 (limitada)
Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio.

- m é um minorante de f em E se $\forall x \in E,\ f(x) \geq m$
- f admite um mínimo m em E se existe $x_m \in E$ tal que
$$\forall x \in E,\ \ f(x) \geq m = f(x_m).$$
- M é um majorante de f em E se $\forall x \in E,\ f(x) \leq M$
- f admite um máximo M em E se existe $x_M \in E$ tal que
$$\forall x \in E,\ \ f(x) \leq M = f(x_M).$$

Uma função majorada e minorada é limitada.

Proposição 3.1.1
Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio. O mínimo e o máximo, quando exitem são únicos.

Demonstração. Quando existem, o máximo ou o mínimo correspondem aos máximo e mínimo do conjunto $f(E)$. A unicidade deriva desta equivalência. $\square$

Nota 3.1.6 A função $f(x) = x^2$ tem 0 como mínimo e 1 como máximo em $[-1, 1]$. Podemos notar que existem dois pontos ($x = -1$ e $x = 1$) que conduzem ao mesmo máximo.
A função $f(x) = x^2$ não admite majorante no conjunto $E = [5, +\infty[$.

Nota 3.1.7 m é um minorante (resp. M majorante) de f em E é equivalante a m é um minorante (M majorante) ao conjunto $f(E)$.

Exemplo 3.1.4 Seja a função $f(x) = \sin(x)$. A função não admite nem um mínimo nem um máximo no conjunto $E =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ porque $-\frac{\pi}{2} \notin E$ e $\frac{\pi}{2} \notin E$.

Nota 3.1.8 Mínimo, mínimo absoluto ou mínimo global têm exatamente o mesmo significado. Portanto, neste curso usamos de preferência a expressão mínimo global em oposição a mínimo local (ver capítulo sobre as derivadas) enquanto a palavra **absoluto** é reservada as situação onde se trata do sinal (valor absoluto, convergência absoluta).

Definição 3.1.8 (ínfimo e supremo)
Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio.

- f admite um ínfimo m em E se
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, \ m > f(x) - \varepsilon.$$
- f admite um supremo M em E se
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, \ M < f(x) + \varepsilon.$$

Exemplo 3.1.5 0 é o ínfimo da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $]0, +\infty[$ (mas a função não admite um mínimizante).
1 é o supremo da função $f(x) = 1 - e^{-x}$ no intervalo $]0, +\infty[$ (mas a função não admite um maximizante).

Temos a proposição seguinte.

Proposição 3.1.2
Se f é minorada em E então f admite um único ínfimo.
Se f é majorada em E então f admite um único supremo.

Definição 3.1.9
Seja f uma função e D_f o seu domínio. Dizemos que $x \in D_f$ é um zero da função se $f(x) = 0$. Notamos por
$$\mathcal{Z}_f = \{x \in D_f; \ f(x) = 0\}$$
os zeros da função f.

Exemplo 3.1.6 Os zeros da função $f(x) = x^2 - 1$ são -1, 1 e temos $\mathcal{Z}_f = \{-1, 1\}$.

3.1.3 Aritmética das funções

Definição 3.1.10 (soma, produto)
Sejam f e g duas funções e $E \subset D_f \cap D_g$.

- Definimos a função soma por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Definimos a função produto por $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
- Definimos o produto com um números real $\lambda \in \mathbb{R}$ por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Definição 3.1.11 (quociente)
Sejam f e g duas funções e $E \subset D_f \cap D_g$ **tal que** $\forall x \in E$, $g(x) \neq 0$. Definimos a função quociente por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exemplo 3.1.7 A função quociente $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ é bem definida desde que $\cos(x) \neq 0$, seja $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 3.1.12 (composta)
Sejam f e g duas funções.

- O conjunto $E \subset D_f$ é compatível para a composta se $f(E) \subset D_g$.
- Se E é compatível, definimos a função composta $h = g \circ f$ em E por

$$\forall x \in E,\ h(x) = (g \circ f)(x) = g\Big(f(x)\Big).$$

Exemplo 3.1.8 A principal dificuldade na composta de funções é determinar qual é o maior domínio E compatível para a composta. Por exemplo se $f(x) = x^2 - 1$ e $g(y) = \ln(y)$ como $D_g =]0, +\infty[$ temos escolher E tal que $f(E) \subset]0, +\infty[$ quer dizer procurar os $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 1 > 0$. O maior conjunto E compatível é finalmente $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

3.1.4 Funções de relevo

Apresentamos aqui algumas funções de relevo.

Definição 3.1.13
Seja $a, b \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = ax + b$ chama-se função afim. O caso $a = 0$ corresponde à função constante.

Generalizamos este tipo de função com as funções polinomiais.

Definição 3.1.14

- Para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$, a função $x \to x^i$ chama-se monómio de grau i.
- Um polinómio de grau n é constituido por monómios de grau $i \leq n$ tal que

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

  onde a_0, a_1, ..., a_n são os coeficientes reais do polinómio.
- Sejam f e g dois polinómios, o quociente $h = \dfrac{f}{g}$ chama-se função racional.

Exemplo 3.1.9 A função $f(x) = 4x^3$ é um monómio de grau 3 e $g(x) = 3 - 4x^4 - 12x^5$ é um polinómio de grau 5. Finalmente obtemos a fração racional $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{4x^3}{3 - 4x^4 - 12x^5}$.

Proposição 3.1.3

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$. Notamos por $E(x) = n$ a parte inteira de x. Falamos também de função em escada porque cada valor inteiro representa um andar.

Lema 3.1.1

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $E(x + 1) = E(x) + 1$.

Demonstração. Por definição temos $E(x) \leq x < E(x) + 1$ então $(E(x) + 1) \leq x + 1 < (E(x) + 1) + 1$. O número $m = E(x) + 1 \in \mathbb{Z}$ e satisfaz a condição $m \leq x + 1 < m + 1$ assim como a proposição anterior, isto significa que $m = E(x+1)$ e concluimos $E(x+1) = E(x)+1$. $\square$

Exemplo 3.1.10 $E(1.21) = 1$, $E(-1.21) = -2$. Existe outro tipo de arredondamento na literatura e também em programação, como o Matlab, tal que 'round', 'floor'.

Proposição 3.1.4

Seja a função $f(x) = x - E(x)$ então f é periódica de período 1 e $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$ então por definição temos $E(x) \leq x < E(x)+1$, seja $0 \leq x - E(x) < 1$ e deduzimos $f(x) \in [0,1[$.
Como $D_f = \mathbb{R}$, temos imediatamente que se $x \in D_f$, $x+1 \in D_f$. Do outro lado, com o lema calculamos

$$f(x+1) = x+1-E(x+1) = x+1-[E(x)+1] = x-E(x) = f(x).$$

Deduzimos que a função f é 1-periodica. $\square$

Exemplo 3.1.11 Podemos verificar a propriedade $\min(0,x) = -\max(0,-x)$ seja $g(x) = -f(-x)$. Verificamos também

$$x = \min(0,x) + \max(0,x), \qquad |x| = \max(0,x) - \min(0,x).$$

Definimos a função sinal $\operatorname{sng}(x) = \frac{x}{|x|}$ para $x \neq 0$ e $\operatorname{sng}(0) = 0$.

3.2 Função recíproca

Definição 3.2.1 (injetiva)
Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio. A função f é injetiva em E se

$$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Nota 3.2.1 A última relação chama-se critério de injetividade.

Temos a proposição seguinte.

Proposição 3.2.1
Seja f uma função estritamente monótona no subconjunto $E \subset D_f$. Então f é injectiva.

Demonstração. Vamos dar a prova no caso de uma função estritamente crescente. Sejam dois pontos $x, x' \in E$ tal que $f(x) = f(x')$. Supomos que $x < x'$ então devemos ter $f(x) < f(x')$ o que é impossível porque $f(x) = f(x')$. Do mesmo modo, supomos então que $x > x'$. Desta vez devemos ter $f(x) > f(x')$ o que é também impossível. Fica finalmente a única possibilidade $x = x'$ o que significa que a função é injetiva. $\square$

Definição 3.2.2 (sobrejetiva)
Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio e $F \subset \mathbb{R}$. Dizemos que a função é sobrejetiva de E sobre F se $f(E) = F$. Em outras palavras

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tal que } f(x) = y.$$

EXEMPLO 3.2.1 Por exemplo a função $f(x) = x^2$ é sobrejetiva de $[-2, 2]$ em $[0, 4]$ mas não é injetiva porque $f(-2) = f(2) = 4$ (dois valores diferentes do domínio têm a mesma imagem).

Definição 3.2.3 (bijetiva)
Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio e $F \subset \mathbb{R}$. Dizemos que a função é bijetiva de E sobre F se ela é injetiva e surjetiva. Por outras palavras

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tal que } f(x) = y$$

e x é único.

EXEMPLO 3.2.2 Por exemplo a função $f(x) = x^2$ é bijetiva de $[0, 2]$ em $[0, 4]$.

Obtemos a corolário seguinte.

Corolário 3.2.1
Seja f uma função estritamente monótona no subconjunto $E \subset D_f$. Então f é bijectiva de E em $f(E)$.

Definição 3.2.4 (função recíproca)
Seja f uma função bijetiva de $E \subset D_f$ em $F \subset \mathbb{R}$. Então para qualquer $y \in F$, notamos por $x = f^{-1}(y)$ o único x tal que $f(x) = y$. Além de mais temos

$$\forall x \in E,\ x = f^{-1}(f(x)), \quad \text{e} \quad \forall y \in F,\ y = f(f^{-1}(y)).$$

f^{-1} chama-se função recíproca definida de F sobre E.

NOTA 3.2.2 Infelizmente a notação f^{-1} é muita má porque podemos confundir com $\frac{1}{f(x)}$. Por exemplo a notação x^{-1} não é clara porque pode ser a função inversa $\frac{1}{x}$ ou a função recíproca x. Para evitar qualquer confusão, usamos a expressão função recíproca para designar f^{-1} enquanto usamos a expressão função inversa para designar o inverso algébrico $\frac{1}{f(x)}$.

Notação 3.2.1
Notamos $f^{-1} \circ f = Id_E$ e $f \circ f^{-1} = Id_F$ onde Id_E e Id_F são as funções identidades em E e F respetivamente.

Seja f é uma função bijetiva $E \subset D_f$ sobre F e f^{-1} a sua função reciproca. Para qualquer ponto $M = (x, f(x))$ do gráfico de f, observamos que $M = (f^{-1}(y), y)$. Por consequência o ponto $M' = (y, f^{-1}(y))$ é o ponto simétrico de M relativamente à reta diagonal $x = y$. Concluimos que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente a diagonal.

3.3 Funções x^a, a^x, $\log_a(x)$

3.3.1 Função potência

Definição 3.3.1
Seja $a \in \mathbb{R}$, notamos por x^a a função potência.

- Se $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$, $D_f = [0, +\infty[$.
- Se $a \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$, $D_f =]0, +\infty[$.
- Se $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Se $a \in \mathbb{N}_0$, $D_f = \mathbb{R}$.

NOTA 3.3.1 Os monómios x^5 ou o seu inverso x^{-5} são exemplos de funções potências.

Notação 3.3.1
No caso particular $a = \frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}$, notamos

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

Proposição 3.3.1
Seja $a \neq 0$ então $f(x) = x^a$ é uma bijecção de $]0, +\infty[$ sobre $]0, +\infty[$ e a sua função recíproca é dado por $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{a}}$

DEMONSTRAÇÃO. Usamos a propriedade que $(x^a)^b = x^{ab}$ desde que $x > 0$. Com efeito

$$f^{-1}(f(x)) = (x^a)^{\frac{1}{a}} = x^{\frac{a}{a}} = x.$$

$\square$

NOTA 3.3.2 Temos casos mais complexos onde temos uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$. Por exemplo se $a = 2i + 1$ é um número inteiro ímpar, então x^a e $x^{\frac{1}{a}}$ faz sentido mesmo se $x \leq 0$.

3.3.2 Função exponencial

Definição 3.3.2
Seja $a > 0$, notamos por a^x a função exponencial de base a. É a única função que satisfaz as propriedade seguintes

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $a^{x+y} = a^x a^y$.
- $a^0 = 1$ e $a^1 = a$.

NOTA 3.3.3 É importante distinguir a função potência x^a da função exponencial a^x. Notamos também $\exp_a(x) = a^x$ a exponecial de base a.

NOTA 3.3.4 Consideramos a sucessão $u_i = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$. Podemos mostrar que esta sucessão converge para um valor que notamos habitualmente e (o número de Neper) seja

$$\lim_{i \to \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = e$$

Simplificamos a notação por $\exp(x) = \exp_e(x)$ quando tratamos da função exponecial com $a = e$. A razão fundamental deste caso particular é que é o único valor que verifica a propriedade $(e^x)' = e^x$.

NOTA 3.3.5 É facil verificar que $a^x \geq 0$ porque

$$a^x = a^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = a^{\frac{x}{2}} a^{\frac{x}{2}} \geq 0.$$

Por outro lado verificamos que

$$1 = a^0 = a^{x-x} = a^x a^{-x} \Rightarrow a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

Recordamos também a propriedade $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.3.2
Se $a \in]0, 1[$ a função é estritamente decrescente enquanto é estritamente crescente se $a > 1$.

3.3.3 Função logarítmica

Proposição 3.3.3
Seja $a > 0$, a função exponencial de base a é bijetiva de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$ e notamos por $\log_a(x)$ a função recíproca /função logarítmica) tal que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exp_a(\log_a(x)) = x.$$

Notação 3.3.2
Para tratar do logarítmo na base $a = e$ usamos a notação especial $\ln(x) = \log_e(x)$. Alguns autores usam também da notação $\log(x)$ ou $\text{Log}(x)$ para o logarítmo em base $a = 10$.

Recordadamos aqui as principais propriedades do logarítmo.

Proposição 3.3.4
Seja $a > 0$ e $x, y > 0$.

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.
- $\log_a(1/x) = -\log_a(x)$.

Outras propriedades entre as diferentes bases e o logaritmo neperiano são dadas aqui.

Proposição 3.3.5
Seja $a, b > 0$ e $x > 0$.

- $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
- $a^x = e^{x \ln(a)}$
- $\log_a(b^x) = x\dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$.

3.4 Funções trigonométricas

Definição 3.4.1
Consideramos uma circunferência de raio 1 centrado em 0 e notamos por A o ponto à nossa direita.

- A orientação trigonométrica é dada pelo vetor no ponto A de direção $(0, 1)$.
- Para qualquer ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$, associamos o ponto M situado na circunferência tal que o comprimento do arco vale θ.
- o seno é a medida algébrica da projeção no eixo Oy.
- o cosseno é a medida algébrica da projeção no eixo $0x$.

Como $\sin(0) = \sin(2\pi)$ e $\cos(0) = \cos(2\pi)$, efetuamos uma extensão das funções por periodicidade do modo seguinte.

Definição 3.4.2
Seja $x \in \mathbb{R}$, então existe um único $n \in \mathbb{Z}$ é um único $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que $x = \theta + 2\pi n$ e definimos

$$\cos(x) = \cos(\theta), \qquad \sin(x) = \sin(\theta).$$

A função sin é impar enquanto a função cos é par. Por construção, as duas funções são periódicas de periodo 2π.

Agora definimos duas funções complementares.

Definição 3.4.3
Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ definimos

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ definimos

$$\cot(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

As duas funções são ímpares e periódicas de período π.

Podemos agora definir as funções trigonométricas inversas

Proposição 3.4.1 (arco-seno)
A função $x \to y = \sin(x)$ é uma bijeção de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sobre $[-1, 1]$ e notamos por $y \to x = \arcsin(y)$ a função recíproca definida de $[-1, 1]$ sobre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(x)) = x, \quad \forall y \in [-1, 1], \sin(\arcsin(y)) = y.$$

NOTA 3.4.1 Cuidado! Os conjunto de partida e chegada são muitos importantes.

EXERCÍCIO 3.4.1 Resolver as equações $\sin(x) = \frac{1}{2}$, $\sin(x) = \sin(2x)$.

Proposição 3.4.2 (arco-cosseno)
A função $x \to y = \cos(x)$ é uma bijeção de $[0, \pi]$ sobre $[-1, 1]$ e notamos por $y \to x = \arccos(y)$ a função recíproca definida de $[-1, 1]$ sobre $[0, \pi]$

$$\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall y \in [-1, 1], \cos(\arccos(y)) = y.$$

EXERCÍCIO 3.4.2 Resolver as equações $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(x) = \cos^2(x)$.

Proposição 3.4.3 (arco-tangente)
A função $x \to y = \tan(x)$ é uma bijeção de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sobre $\mathbb{R}$ e notamos por $y \to x = \arctan(y)$ a função recíproca definida de $\mathbb{R}$ sobre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \sin(\arctan(y)) = y.$$

Exercício 3.4.3 Resolver as equações $\tan(x) = \frac{1}{3}$, $\tan(x) = \frac{1}{\tan(x)}$, $\arctan(y) = 20$.

Proposição 3.4.4 (arco-cotangente)
A função $x \to y = \cot(x)$ é uma bijeção de $]0, \pi[$ sobre $\mathbb{R}$ e notamos por $y \to x = \operatorname{arccot}(y)$ a função recíproca definida de $\mathbb{R}$ sobre $[0, \pi]$

$$\forall x \in]0, \pi[, \operatorname{arccot}(\cot(x)) = x, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \cot(\operatorname{arccot}(y)) = y.$$

Exercício 3.4.4 Resolver as equações $\cot(x) = -1$, $\cot(x) = \tan(x)$.

3.5 Funções hiperbólicas

Definição 3.5.1 (Cosseno hiperbólico)
Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ definimos o cosseno hiperbólico por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Notamos que a função é par e positiva.

Proposição 3.5.1
A função $x \to y = \cosh$ é uma bijecção de $[0, +\infty[$ sobre $[1, +\infty[$ e notamos por $y \to x = \arg\cosh(y)$ a função reciproca de $[1, +\infty[$ sobre $[0, +\infty[$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, \arg\cosh(\cosh(x)) = x, \quad \forall y \in [1, +\infty[, \cosh(\arg\cosh(y)) = y.$$

Ao contrário das funções trigonométricas circulares, é possivel dar uma expressão analítica às funções hiperbólicas recíprocas.

Proposição 3.5.2
Para qualquer $y \in [1, +\infty[$, temos

$$\arg\cosh(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Demonstração. Seja $y = \cosh(x)$ então temos $2y = X + \frac{1}{X}$ com $X = e^x$, seja ainda $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Temos de resolver uma equação do segundo grau cujas as soluções são

$$X_1 = y - \sqrt{y^2 - 1}, \quad X_2 = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

Como $x \geq 0$ então $X = e^x \geq 1$ e devemos ecolher a segunda solução. Obtemos assim $e^x = X = y + \sqrt{y^2 - 1}$, seja ainda $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$. $\square$

Definição 3.5.2 (Seno hiperbólico)
Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ definimos o seno hiperbólico por

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Notamos que a função é ímpar.

Proposição 3.5.3
A função $x \to y = \sinh$ é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e notamos por $y \to x = \arg\sinh(y)$ a função recíproca de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, \arg\sinh(\sinh(x)) = x, \quad \forall y \in [1, +\infty[, \sinh(\arg\sinh(y)) = y.$$

É possível dar uma expressão analítica da função recíproca.

Proposição 3.5.4
Para qualquer $y \in [1, +\infty[$, temos

$$\arg\sinh(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

Demonstração. Seja $y = \sinh(x)$ então temos $2y = X - \frac{1}{X}$ com $X = e^x$, seja ainda $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Temos de resolver uma equação do segundo grau cujas as soluções são

$$X_1 = y - \sqrt{y^2 + 1}, \quad X_2 = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

Como a primeira solução é negativa, devemos ecolher a segunda solução. Obtemos assim $e^x = X = y + \sqrt{y^2 + 1}$, seja ainda $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$. $\square$

Definição 3.5.3 (tangente hiperbólica)
Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ definimos a tangente hiperbólica por

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Notamos que a função é par.

Proposição 3.5.5
A função $x \to y = \tanh$ é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $]-1,1[$ e notamos por $y \to x = \arg\tanh(y)$ a função recíproca de $]-1,1[$ sobre $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arg\tanh(\tanh(x)) = x, \quad \forall y \in]-1,1[, \tanh(\arg\tanh(y)) = y.$$

É possível dar uma expressão analítica à função recíproca.

Proposição 3.5.6
Para qualquer $y \in]-1,1[$, temos

$$\arg\tanh(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Demonstração. Seja $y = \tanh(x)$ então temos $y = \frac{X^2-1}{X^2+1}$ com $X = e^x$, seja ainda $(1-y)X^2 = 1+y$. Obtemos a solução $e^x = X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$ ou ainda $x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)$. $\square$

Definição 3.5.4 (cotangente hiperbólica)
Para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos a cotangente hiperbólica por

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Notamos que a função é par.

Proposição 3.5.7
A função $x \to y = \coth$ é uma bijeção de $]0, +\infty[$ sobre $]1, +\infty[$ e notamos por $y \to x = \arg\coth(y)$ a função recíproca de $]1, +\infty[$ sobre $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, \arg\coth(\coth(x)) = x, \quad \forall y \in]1, +\infty[, \coth(\arg\coth(y)) = y.$$

É possível dar uma expressão analítica à função recíproca.

Proposição 3.5.8
Para qualquer $y \in]1, +\infty[$, temos

$$\arg\coth(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

DEMONSTRAÇÃO. A prova faz-se exatamente como no caso anterior. Notamos que $\arg\tanh(y)$ e $\arg\coth(y)$ têm a mesma expressão analítica mas são definidas em domínios diferentes. $\square$