Análise Matemática EE - Ficha nº 6
1ºano, 2ºsemestre

Fórmula de Taylor

1. Desenvolva, pela fórmula de Taylor, até aos termos de 2^a ordem a função $f(x,y)=xy^2$, em torno do ponto $(1,2)$.

2. Determine um polinómio de 2^o grau aproximado à função $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, em torno do ponto $(1,2)$ e use-o para estimar $\sqrt{(1.02)^2+(1.97)^2}$.

3. Determine polinómios do grau indicado para as seguintes funções em torno dos pontos dados.

   (a) $f(x,y)=\dfrac{1}{2+x-2y}$, grau 3, torno de $(2,1)$.

   (b) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$, grau 3, torno de $(1,0)$.

   (c) $f(x,y)=\int_0^{x+y^2} e^{-t^2}$, grau 3, torno de $(0,0)$.

   (d) $f(x,y)=\dfrac{\sin x}{y}$, grau 2, torno de $(\dfrac{\pi}{2},1)$.

Extremos livres

1. Determine os extremos das seguintes funções

   a) $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x-y+1$
   b) $f(x,y)=2x^3+2y^3-6axy$
   c) $f(x,y,z)=2x^2+y^2+4z^2$
   d) $f(x,y)=x^2y^2-2xy$
   e) $f(x,y)=(x-y)^2-x^4-y^4$
   f) $f(x,y)=y^2-4x^2y+3x^4$
   g) $f(x,y)=2xy-3x^2-2y^2+10$
   h) $f(x,y)=\left(x^2+y^2-1\right)^2$
   i) $f(x,y)=\dfrac{9}{4}y^2-3x^2y+x^4-x^5$
   j) $f(x,y)=x^4+y^4-2\,(x+y)^2$

2. Determine todos os pontos $P\,(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ onde eventualmente possa ser extremos o valor da função
$$\Phi\,(x,y,z)=x^2+y^2+10-2x+\cos^2 z-8y.$$
   Desses pontos indique, justificando, aqueles onde a função é máxima, mínima ou não tem extremos.

3. Determine os extremos das seguintes funções.

   a) $f(x,y)=2\left(y^3+x^2+xy\right)$
   b) $f(x,y)=x^3+x^2y+2x-9y$
   c) $f(x,y)=2\,(x-y)^2-2\left(x^4+y^4\right)$
   d) $f(x,y)=x^4-2x^2y^2+y^4+1$
   e) $z=x^4-y^3-y^2$
   f) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{8}{x}-y$
   g) $f(x,y)=\cos\,(x+y)$
   h) $f(x,y)=x^2ye^{-\left(x^2+y^2\right)}$
   i) $f(x,y)=\dfrac{xy}{2+x^4+y^4}$

4. Considere uma função real u definida em $\mathbf{R}^2$, diferenciável para qualquer ordem de derivação e que satisfaz as condições

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = x.u\,(x,t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = t.u\,(x,t) \end{cases}, \quad u\,(0,0) = 1.$$

Verifique se admite extremo na origem.

5. Determine as dimensões de uma caixa rectangular sem topo com um dado volume V e com a mínima área de superfície total.

6. O custo (por unidade de área) do material usado para fazer a base da caixa rectangular é o dobro do custo do material usado para fazer o topo e os lados laterais. Determine as dimensões de uma caixa de volume V de modo a minimizar o custo de fabrico.

Extremos condicionados

1. Determine os extremos das funções seguintes, considerando as equações de ligação indicadas:
   a) $f(x,y) = \log xy$; $2x + 3y = 5$ b) $f(x,y) = xy$; $x^2 + y^2 = 2a^2$
   c) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$

2. Calcule os extremos da função $z = x + 2y$ quando $x^2 + y^2 = 5$.

3. De todos os triângulos de hipotenusa igual a 4, determine o de área máxima.

4. Determine os extremos das funções seguintes, considerando as equações de ligação indicadas:

   (a) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$; $2x + 3y + 5z = 100$

   (b) $f(x,y,z) = x + y + z$; $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$

   (c) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

5. Decomponha o número $k > 0$ na soma de três números cujo produto é máximo.

6. Determine os extremos da função $f(x,y,z) = ax^2 + by^2$ sobre a superfície esférica $S = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$, supondo que $a < 0$ e $b > 0$.

7. Utilizando a teoria do extremo ligado, determine o ponto de cota mais alta da intersecção do parabolóide $x^2 + y^2 = 5 - z$ com o plano $x + y + z = 1$.

8. Determinar, utilizando a teoria do extremo ligado, os pontos da superfície $x^2 - y^2 + z = R$ (R constante) onde a função $v = x + y - z^2$ tem um possível extremo, indicando, no caso deste existir, qual a sua natureza.

9. Pretende-se construir, com uma folha de zinco de área igual a 24 dm^2, uma caixa paralelipípeda fechada. Determine, quais as dimensões que deve ter essa caixa de modo que a sua capacidade seja máxima.