

Nome _____

Número _____ Curso _____

1. Calcular os integrais seguintes

1. $\int_{-1}^1 \frac{10}{2x-3} dx$

2. $\int_5^{10} \exp(-x/3) - \cos(\pi x) dx$

3. $\int_0^1 \sqrt[5]{7x+9} dx$

2. Calcular os integrais seguintes usando a técnica de mudança de função.

1. $\int_{-3}^0 \frac{34x^7}{x^8+9} dx$

2. $\int_0^1 \frac{(1-2x)}{13-x+x^2} dx$

3. $\int_0^\pi \sqrt[4]{\sin(x)} \cos(x) dx$

3. Calcular os integrais seguintes usando a técnica de integração por partes.

1. $\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$

2. $\int_{-1}^1 x \cos(-\pi x) dx$

4. Calcular os integrais seguintes usando a divisão euclidiana ou a decomposição em elementos simples.

1. $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x-2} dx$

2. $\int_0^1 \frac{2x-3}{(2+x)(x-3)} dx$

3. $\int_1^2 \frac{x^2-3}{x(2+x^2)} dx$

5. Mostrar que para qualquer t , temos a formula $\cosh^2(t) = \frac{1 + \cosh(2t)}{2}$. Calcular o integral $\int_0^{\sinh(1)} \sqrt{1+x^2} dx$ usando a mudança de variavel $x = \sinh(t)$.

solução

1.1

$$\int_{-1}^1 \frac{10}{2x-3} dx = \left[\frac{10}{2} \ln |2x-3| \right]_{-1}^1 = 5 \{ \ln(1) - \ln(5) \} = -5 \ln(5).$$

1.2

$$\int_5^{10} \exp(-x/3) - \cos(\pi x) dx = \left[-\frac{\exp(-x/3)}{1/3} - \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \right]_5^{10} = 3 \exp(-10/3) (\exp(-1/2) - 1).$$

1.3

$$\int_0^1 \sqrt[5]{7x+9} dx = \left[\frac{1}{7} \frac{(7x+9)^{1+1/5}}{1+1/5} \right]_0^1 = \frac{(16)^{6/5} - (9)^{6/5}}{42/5}.$$

2.1 Com $u = x^8 + 9$, temos $u' = 8x^7$ e deduzimos $f(x) = \frac{34x^7}{x^8+9} = \frac{17}{4} \frac{8x^7}{x^8+9} = \frac{17}{4} \frac{u'}{u}$. Temos a função $g(u) = \frac{17}{4u}$ cuja primitiva é $G(u) = \frac{17}{4} \ln(|u|)$. Por consequência, uma primitiva de f é $F(x) = \frac{17}{4} \ln(|x^8+9|)$. Usando o teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_{-3}^0 \frac{34x^7}{x^8+9} dx = \left[\frac{17}{4} \ln(x^8+9) \right]_{-3}^0 = \frac{17}{4} (\ln(9) - \ln(3^8+9)).$$

2.2 Com $u = 13 - x + x^2$, temos $u' = 2x - 1$ e deduzimos $f(x) = \frac{(1-2x)}{13-x+x^2} = -\frac{u'}{u}$. Temos a função $g(u) = -\frac{1}{u}$ cuja primitiva é $G(u) = -\ln(|u|)$. Por consequência, uma primitiva de f é $F(x) = -\ln(|13-x+x^2|)$. Usando o teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_0^1 \frac{(1-2x)}{13-x+x^2} dx = -[\ln(13-x+x^2)]_0^1 = -\{ \ln(13) - \ln(13) \} = 0.$$

2.3 Com $u = \sin(x)$, temos $u' = \cos(x)$ e deduzimos $f(x) = \sqrt[4]{\sin(x)} \cos(x) = u^{1/4} u'$. Temos a função $g(u) = u^{1/4}$ cuja primitiva é $G(u) = \frac{u^{5/4}}{5/4}$. Por consequência, uma primitiva de f é $F(x) = \frac{4}{5} \sin^{5/4}(x)$. Usando o teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_0^\pi \sqrt[4]{\sin(x)} \cos(x) dx = \left[\frac{4}{5} \sin^{5/4}(x) \right]_0^\pi = 0.$$

3.1 Escolhemos $u = \ln(x)$ e $v' = x^{-1/2}$. Deduzimos $u' = \frac{1}{x}$ e $v = 2x^{1/2}$. A fórmula de integração por partes dá

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = \left[2 \ln(x) x^{1/2} \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{2x^{1/2}}{x} dx = \{4e\} - 4 \left[x^{1/2} \right]_1^{e^2} = 4.$$

3.2 Escolhemos $u = x$ e $v' = \cos(-\pi x) = \cos(\pi x)$. Deduzimos $u' = 1$ e $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$. A fórmula de integração por partes dá

$$\int_{-1}^1 x \cos(-\pi x) dx = \left[x \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right]_{-1}^1 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sin(\pi x) dx = 0 + \frac{1}{\pi^2} \left[\cos(\pi x) \right]_{-1}^1 = 0.$$

4.1 Usando a divisão euclidiana, obtemos $\frac{x^2}{x-2} = x + 2 + \frac{4}{x-2}$ e deduzimos

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x-2} dx = \int_{-1}^1 x + 2 + \frac{4}{x-2} dx = \left[\frac{(x+2)^2}{2} + 4 \ln(|x-2|) \right]_{-1}^1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - 4 \ln(3).$$

4.2 A fração racional $\frac{2x-5}{(2+x)(x-3)} = \frac{N(x)}{D(x)}$ é irredutível porque $\deg(N) < \deg(D)$ e os polinômios não têm raízes em comum. Temos a decomposição em elementos simples $\frac{2x-5}{(2+x)(x-3)} = \frac{9/5}{x+2} + \frac{1/5}{x-3}$. Deduzimos então

$$\int_0^1 \frac{2x-5}{(2+x)(x-3)} dx = \int_0^1 \frac{9/5}{x+2} + \frac{1/5}{x-3} dx = \left[9/5 \ln(|x+2|) + 1/5 \ln(|x-3|) \right]_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{2x-5}{(2+x)(x-3)} dx = 9/5 \ln(3/2) + 1/5 \ln(2/3) = 8/5 \ln(3/2).$$

4.3 A fração racional $\frac{x^2-3}{x(2+x^2)} = \frac{N(x)}{D(x)}$ é irredutível porque $\deg(N) < \deg(D)$ e os polinômios não têm raízes em comum. Temos a decomposição em elementos simples $\frac{x^2-3}{x(2+x^2)} = \frac{5/2x}{x^2+2} - \frac{3/2}{x}$. Deduzimos então

$$\int_1^2 \frac{x^2-3}{x(2+x^2)} dx = \int_1^2 \frac{5/2x}{x^2+2} - \frac{3/2}{x} dx = \left[\frac{5}{4} \ln(x^2+2) - \frac{3}{2} \ln(x) \right]_1^2$$

$$\int_1^2 \frac{x^2-3}{x(2+x^2)} dx = \frac{5}{4} \ln(2) - \frac{3}{2} \ln(2) = -\frac{\ln(2)}{4}.$$

5 Temos

$$\cosh^2(t) = \frac{(e^t + e^{-t})^2}{4} = \frac{(e^t)^2 + 2e^t e^{-t} + (e^{-t})^2}{4} = \frac{1 + \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}}{2} = \frac{1 + \cosh(2t)}{2}.$$

Efectuamos as três etapas da mudança de variável: (1) se $x = 0$, $t = 0$ e se $x = \sinh(1)$, $t = 1$. (2) $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2(t)} = \cosh(t)$. (3) $\frac{dx}{dt} = x'(t) = \cosh(t)$ então $dx = \cosh(t)dt$. Juntamos as informações, determinamos o novo integral em função de t :

$$\int_0^{\sinh(1)} \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^1 \cosh^2(t) dt = \int_0^1 \frac{1 + \cosh(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sinh(2t)}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{\sinh(2)}{4}.$$