Processamento Digital de Sinal

Miniteste 3 2006/2007

Filtros Digitais.

1. Compare qualitativamente os métodos de síntese de filtros Digitais IIR que conhece. (5 minutos)

2. Determine a resposta a impulso do filtro digital passa banda ideal que não causa distorção harmónica. (15 minutos)

3. Considere um canal áudio com 3 canais multiplexados em FDM digital, cada um ocupando uma largura de banda de $\pi/3$. Pretende-se que implemente um filtro FIR que seja adequado para retirar o canal intermédio. O filtro deve apresentar as seguintes características:

   a. Atenuação mínima de -0.05 dB na banda passante
   b. Atenuação mínima de -60 dB na banda de rejeição
   c. Determine a ordem do filtro de ordem mais baixa que permite efectuar o pretendido. Justifique

TABLE 7.2 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Window Type	Peak Sidelobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Mainlobe	Peak Approximation Error $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	−13	$4\pi/(M+1)$	−21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	−25	$8\pi/M$	−25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	−31	$8\pi/M$	−44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	−41	$8\pi/M$	−53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	−57	$12\pi/M$	−74	7.04	$9.19\pi/M$

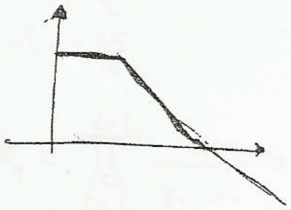
X

Teste modelo (miniteste 3) 2006 - 2007

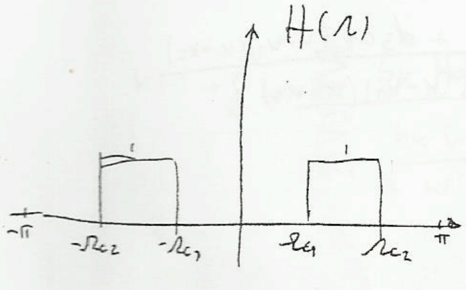
1) • verificação na resposta impulsional
- baseado na amostragem
- tem um problema porque não é somente o aliasing
- mais simples ; - ~~a resposta amostrada do sinal~~

• método de transformação bilinear
- é o melhor porque não tem aliasing, evita o
-

→ os filtros reais nunca são limitados em banda.
todos os filtros práticos tem banda finita, sendo limitado



2) Filtro FIR (não tem distorção harmónica).



$$H(\Omega) = \begin{cases} 0 & ; |\Omega| < \Omega_{c1} \\ e^{-j\Omega N/2} & ; \Omega_{c1} < |\Omega| < \Omega_{c2} \\ 0 & ; |\Omega| > \Omega_{c2} \end{cases}$$

$$\angle H(\Omega) = e^{-j\Omega N/2}$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\Omega_{c2}}^{-\Omega_{c1}} \overbrace{e^{-j\Omega N/2}\, e^{j\Omega n}}^{e^{j\Omega(n-N/2)}}\, d\Omega + \int_{\Omega_{c1}}^{\Omega_{c2}} e^{-j\Omega N/2}\, e^{j\Omega n}\, d\Omega\right.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{j(n-N/2)}\, e^{j(n-N/2)\Omega}\Big|_{-\Omega_{c2}}^{-\Omega_{c1}} + \frac{1}{j(n-N/2)}\, e^{j(n-N/2)\Omega}\Big|_{\Omega_{c1}}^{\Omega_{c2}}\right]$$

$=$

$$C_K = H_d(\Omega_k) - \frac{(-1)^{k+1}\,\delta}{W(\Omega_k)}$$

$\to$ sempre que o filtro é equiripple, não tem variação de ripple o $\underline{W(\Omega_k) = 1}$

$H_d(\Omega) \to =1$ na banda passante.

$c_1 = 1 - \delta$

$c_2 = 1 + \delta$

$c_3 = 0 - \delta$

$L \leftarrow$ ordem do filtro.

$$d_K = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+1} \frac{1}{x_k - x_i} = b_k(x_k - x_{L+2})$$

$$d_k = b_k\,(x_k - x_{L+2})$$

$$d_1 = b_1(x_1 - x_4) = b_1\left(1 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = \tfrac{3}{2} b_1$$

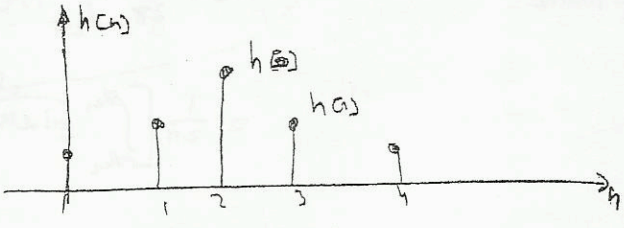
$$d_2 = b_2(x_2 - x_4) = b_2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\right) =$$

$$A_e(\Omega) = \frac{\dfrac{d_1 c_1}{x - x_1} + \dfrac{d_2 c_2}{x - x_2} + \dfrac{d_3 c_3}{x - x_3}}{\dfrac{d_1}{x - x_1} + \dfrac{d_2}{x - x_2} + \dfrac{d_3}{x - x_3}} =$$

$$= \frac{d_1 c_1 (x - x_2)(x - x_3) + d_2 c_2 (x - x_1)(x - x_3) + d_3 c_3 (x - x_1)(x - x_2)}{d_1 (x - x_2)(x - x_3) + d_2 (x - x_1)(x - x_3) + d_3 (x - x_1)(x - x_2)}$$

$$P(x) = \frac{(d_1 c_1 + d_2 c_2 + d_3 c_3)\,x^2}{(d_1 + d_2 + d_3)\,x^2}$$

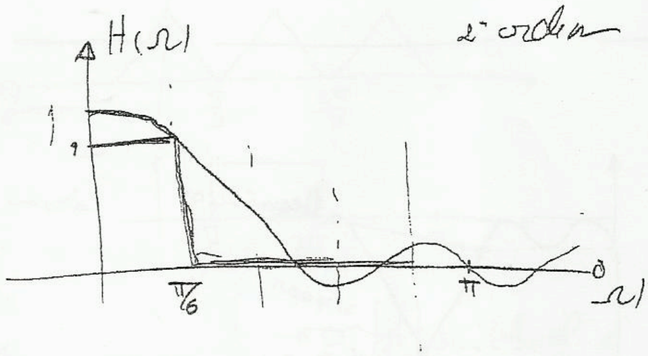
$h[0]$ $h[1]$ $h[2]$



$$\boxed{\delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k \, H_d(\Omega)}{\sum_{k=1}^{L+2} \frac{b_k (-1)^{k+1}}{W(\Omega_k)}}}$$

$$\boxed{b_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+2} \frac{1}{x_k - x_i}}$$

2° ordem



$$\Omega_i \begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = \frac{\pi}{6} \\ \Omega_3 = \frac{\pi}{2} \\ \Omega_4 = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$k=1 \rightarrow b_1 = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{L+2} \frac{1}{x_1 - x_i} = \frac{1}{x_1 - \cos\Omega_2} \cdot \frac{1}{x_1 - \cos(\Omega_3)} \cdot \frac{1}{x_1 - \cos(\Omega_4)} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{1}{1-0} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} =$$

$$\simeq 4,9751$$

valor de $H_d(\Omega)$ até b_2 está acima de 1, toma valor 1, depois b_3 e b_4 já estão na zona de rejeição, $H_d(\Omega) = 0$.

$$k=1 \rightarrow \delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k \, H_d(\Omega)}{\sum_{k=1}^{L+2} \frac{b_k (-1)^{k+1}}{W(\Omega_k)}} = \frac{b_1 + b_2}{k b_1 - k b_2 + b_3 - b_4} = \boxed{W(\Omega) = \frac{1}{k}}$$

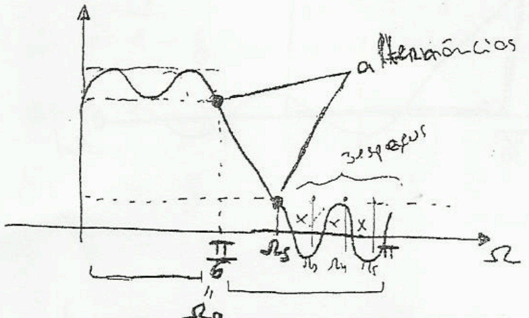
$$= -0.0915$$

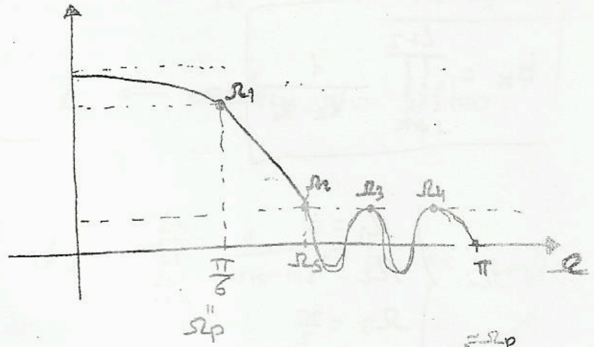
$$W(\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 0 \leq (\Omega) \leq \pi/6 \\ 1, & |\Omega| > \pi/6 \end{cases} \qquad k = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

>> freqz (N,D) ← mostra o gráfico da freq de corte.

b)

para se obter apenas 5 alternâncias





$L=2$

$L+2 \leq$ nº alternâncias $\leq L+3$.

$$\frac{\pi - \overbrace{\Omega_s}^{=\Omega_p}}{\underbrace{3}_{\text{nº de espaços}}} = \frac{5\pi}{18} \simeq \frac{\pi}{3}$$

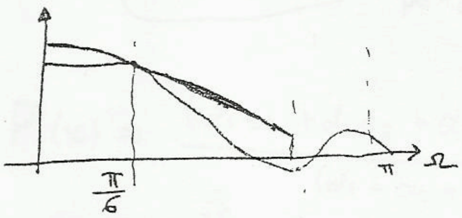
$\Omega_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

$\Omega_4 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{2} \simeq \frac{5\pi}{6} \simeq \frac{2\pi}{3}$

$$W(\Omega)\left[H_d(\Omega) - A_e(\Omega)\right] = (-1)^{i+1}\delta \qquad i=1,2,3,4\ldots \begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = \Omega_p = \frac{\pi}{6} \\ \Omega_3 = \frac{\pi}{2} \\ \Omega_4 = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

16-06-2010

Problema sobre filtros digitais:



2ª ordem

$$W(\Omega)\left[H_d(\Omega) - \underbrace{A_e(\Omega)}_{\sum_{i=0}^{L} a_i (\cos(\Omega_i))^i}\right] = (-1)^{i+1}\delta \quad , i=1,2,\ldots \qquad W(\Omega) = \frac{1}{K}$$

$$\Omega_i \begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = \pi/6 \\ \Omega_3 = \pi/2 \\ \Omega_4 = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$\frac{\pi - \pi/6}{3} = \frac{5\pi}{18}$

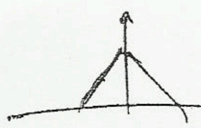
$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{18} = \frac{8\pi}{18} \simeq \frac{\pi}{2}$

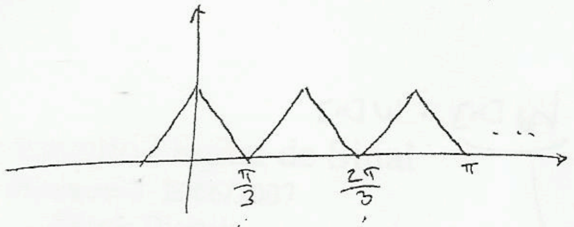
$\frac{\pi}{6} + 2\times\frac{5\pi}{18} = \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{18} = \frac{13\pi}{18} \simeq \frac{2\pi}{3}$

$W(\Omega) = \frac{1}{K}$

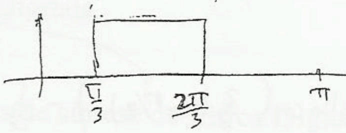
cha acercado Minitestes 2006/2007

3)





Fazer um filtro passa banda



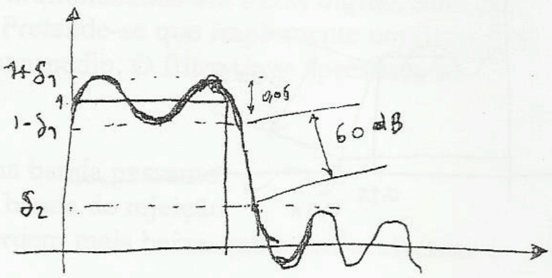
a) informação

- atenuação mínima de 0,05 dB
- -60 dB na banda de rejeição

→ o filtro ideal é o filtro de ordem mais baixo.

c)

$$M = \frac{10 \log(\delta_1 \delta_2) - 13}{2.324\, \Delta\Omega}$$



δ_2: $20 \log_{10} \delta_2 = -60$

$$\delta_2 = 10^{-3} = 0.001$$

δ_1: $1 - \delta_1 = 10^{-\frac{0,05}{20}}$

→ $20 \log_{10}(1-\delta_1) = -0,05$

$$1-\delta_1 = 10^{-\frac{0,05}{20}} \simeq 0,9943 \Rightarrow \delta_1 \simeq 1 - 0,9943 \simeq 0,0057$$

$$M = \frac{-10 \log_{10}(0,0057 \times 0,001) - 13}{2.324 \cdot \underbrace{\frac{\pi}{30}}_{dw}} = 162,06$$

$\simeq \frac{1}{10} \Delta B$ ← $\frac{1}{10}$ × a largura da banda do canal.

com a largura do canal é $\frac{\pi}{3}$

$M = 163$ ou superior

→ Determinar o filtro

→ Usando a janela de Kaiser com: (pk Brejeição = 60dB)

$\alpha = M/2$

$\beta = ?$

A → ganho em dB positivos, = 60 → banda de rejeição

$$M_k = \frac{A-8}{2.285\, \Delta\Omega} = \frac{60-8}{2.285 \times \frac{\pi}{30}} = \frac{52}{2.285 \times \frac{\pi}{30}} = 211$$

pela fórmula: $\beta = 0,1102\,(\overset{=60}{A} - 8,7) = 5,6533$

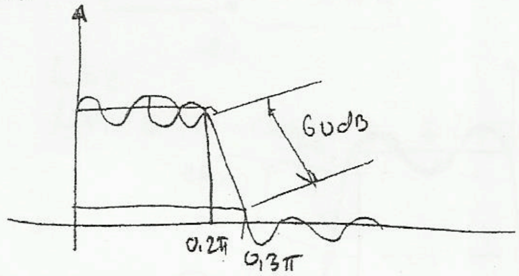
$$h[n] = \underset{\text{desejado}}{h_d[n]} \cdot w[n]$$

4

$$h[n] = \underbrace{h_d[n]}\cdot w[n]$$

$$h_d[n] = \frac{2}{3}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2}{3}(n-M/2)\right) - \frac{1}{3}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{3}(n-M/2)\right) \quad \text{para } M = 218$$

MATLAB




```
>> ~~wp~~
>> wp = 0.2* pi
ws = 0.3 * pi
```

```
wp = 0,2* pi;
ws = 0,3* pi
dw = ws - wp
→ A = 60
→ M = ceil ((A - 8)/(2.285 * dw))
```

B = beta → be = 0,1102* (A-8.7)

chama parte:

```
function [hd] = ideal_lp(wc, M)

alpha = M/2;
n = [0:1:M];
m = n - alpha + eps;
hd = sin(wc*m)./(pi*m);
```

```
hd = ideal_lp(wp, M);
plot(hd)
```

chamar função de kaiser →

```
w_kai = kaiser (M+1, be);
figure
plot(w_kai)
```

.* multiplica um vector ponto a ponto...

```
h = hd.* w_kai;
```

se der erro faze:

```
h = hd.* w_kai';
figure
plot (h)
```

(1)

resposta impulsional do filtro depois de passar no filtro de kaiser.