Análise Matemática II (LEGI, MIEM) **FCTUC**

Exame (2h30m) - 9/6/2010

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio e a apresentação dos cálculos efectuados.

---

1. Seja f uma função definida por $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-4y^2}$.
   (a) (1 valor) Determine e esboce o domínio de f.
   (b) (1 valor) Identifique e esboce o gráfico de f.

2. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{se } x\geq 0 \\ \sin(xy), & \text{se } x<0 \end{cases}.$$
   (a) (1 valor) Calcule, se possível, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)$.
   (b) (1 valor) Calcule as derivadas parciais f_x e f_y no conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0\}$.
   (c) (1 valor) Averigúe se f é diferenciável em $(-\pi,1)$.
   (d) (1,5 valores) Supondo que $x=\pi u\cos(\pi u)$, $y=e^{u-1}$ e $g(u)=f(x(u),y(u))$, calcule $g'(u)$ para $u=1$.

3. Considere a função $f(x,y,z)=xze^{y^2}-\ln(xz)$.
   (a) (1 valor) Calcule o gradiente de f no ponto $(1,0,2)$.
   (b) (1 valor) Calcule a taxa de variação de f no ponto $(1,0,2)$ segundo o vector $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

4. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=x^2+y^2$.
   (a) (1 valor) Determine o plano tangente à superfície $z=f(x,y)$ no ponto $(1,0,1)$.
   (b) (1 valor) Usando diferenciais, calcule um valor aproximado para $1,0842^2$.
   (c) (1,5 valores) Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, determine os candidatos a extremos relativos de f sobre a recta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-2y=10\}$.

5. Considere a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{2n}}$.
   (a) (1 valor) Verifique que a série numérica é absolutamente convergente.
   (b) (1,5 valores) Calcule a soma da série numérica com duas casas decimais correctas.

v.s.f.f.

6. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ a função soma da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$.

   (a) (0,75 valores) Determine o raio de convergência da série de potências.

   (b) (1 valor) Indique o domínio de f e uma expressão analítica para $f(x)$.

   (c) (1,25 valores) Determine o desenvolvimento em série de potências de x da função $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Indique o maior conjunto em que este desenvolvimento é válido.

   (d) (1 valor) Estabeleça, justificando, a série de Maclaurin de $h(x) = \ln(1 - 2x)$.

7. (1,5 valores) Sejam $\{b_n\}_n$ uma sucessão de números reais e r uma constante real. Suponha que

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

é a série de Fourier de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2π, par, derivável e tal que $f(0) = 2$. Indique, justificando, os valores de b_n e r.