

CONTEÚDO

1. INTRODUÇÃO

Notas históricas. Propriedades básicas de cargas eléctricas.

2. ELECTROSTÁTICA

2.1 A lei de Coulomb. Campo eléctrico. O princípio de sobreposição. Linhas do campo eléctrico.

2.2 Dipolo eléctrico. Momento dipolar. Dipolo num campo eléctrico uniforme.

2.3 Campo eléctrico de uma distribuição contínua de cargas. Fluxo eléctrico.

2.4 A lei de Gauss. Aplicações da lei de Gauss a várias distribuições de carga. A forma diferencial da lei de Gauss.

2.5 Trabalho de forças electrostáticas. Diferença de potencial e potencial eléctrico. Potencial eléctrico de cargas pontuais. A equação de Poisson. Superfícies equipotenciais.

2.6 Energia potencial de um sistema de cargas. Densidade de energia de um campo eléctrico.

Anexo. Coordenadas cilíndricas e esféricas.

3. CONDUTORES EM CAMPOS ELÉCTRICOS. CONDENSADORES

3.1 Equilíbrio de cargas eléctricas num condutor. Electrostática dos condutores.

3.2 Definição de capacidade. Condensadores. Combinações de condensadores.

3.3 Energia num condensador carregado. Energia electrostática. Densidade de energia.

4. DIELECTRICOS

4.1 Noção de campo eléctrico na matéria.. Polarização dos dieléctricos. Dipolos microscópicos. Macro-campo e micro-campo

4.2 Campo **D**. Constante dieléctrica. Condições de fronteira para campos **D** e **E**.

4.3 Condensadores com dieléctricos

5. CORRENTES ELÉCTRICAS. CIRCUITOS DE CORRENTE CONTÍNUA

5.1 Corrente eléctrica. Tensão eléctrica. A lei de Ohm. Resistência eléctrica. Energia dissipada numa resistência. A lei de Joule-Lenz.

5.2 Densidade de corrente eléctrica. A forma diferencial da lei de Ohm

5.3 Porque é que existe resistência eléctrica? A resistividade de diferentes condutores. A mobilidade dos portadores de carga. Variação da resistividade com a temperatura.

5.4 Força electromotriz (FEM).

5.5 Associação de condutores. Análise de circuitos. As duas leis de Kirchoff. Circuito *RC*.

6. MAGNETOSTÁTICA.

6.1 Forças magnéticas. As experiências de Oersted e de Ampère. A força de Ampère sobre um condutor com corrente eléctrica. A força de Lorentz e o campo magnético. O princípio de sobreposição para os campos magnéticos.

6.2 A lei de Biot-Savart e as suas aplicações. O campo magnético duma corrente circular. Dipolo magnético. Momento magnético.

6.3 O integral de linha de campo magnético (o teorema de circulação). O fluxo de campo magnético. Comparação de campos magnéticos e eléctricos.

6.4 Campos magnéticos na matéria. Permeabilidade magnética. Diamagnetismo, paramagnetismo, e ferromagnetismo. A magnetização. O campo \mathbf{H} .

6.5 Condições de fronteira para os campos \mathbf{B} e \mathbf{H} . Circuitos magnéticos

7. INDUÇÃO MAGNÉTICA. EQUAÇÕES DE MAXWELL.

7.1 A experiência de Faraday. A lei de Faraday da indução. Força electromotriz induzida numa espira. A lei de Lenz.

7.2 Auto-Indutância. Indutância duma bobina. Circuito RL .

7.3 Corrente de deslocamento. As equações de Maxwell.

8. CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA. OSCILAÇÕES ELÉCTRICAS.

8.1 Correntes alternadas quase estacionárias. Circuitos com FEMs sinusoidais. Impedância.

8.2 Trabalho e potência de uma corrente alternada.

8.3 Oscilações num circuito RLC em série. Ressonância.

I. Introdução. As propriedades básicas das cargas eléctricas

1. Há dois tipos de cargas, positivas e negativas. As cargas de espécies diferentes atraem-se e as de mesma espécie repelem-se.
2. Conservação da carga. A carga total, constituída pela soma algébrica de todas as cargas num sistema isolado, conserva-se:

$$Q = \sum_i Q_i = \text{const} \quad (1)$$

Isto também significa que as cargas criam-se em pares (uma positiva + uma negativa).

3. Quantificação da carga. Qualquer carga eléctrica, positiva ou negativa, é sempre um múltiplo inteiro da carga elementar, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, também conhecida pela “carga do electrão”. (O electrão é a primeira partícula elementar encontrada. Leva uma carga negativa, $-e$. Esta carga foi medida, pela primeira vez, por Millikan em 1909).

II. Electrostática

2.1. A lei de Coulomb

Esta lei, estabelecida por Charles Coulomb em 1785, diz que a força electrostática entre duas cargas pontuais têm a mesma direcção da linha que as une, sendo repulsiva se as cargas tiverem o mesmo sinal, ou atractiva no caso contrário. A grandeza da força é directamente proporcional às grandezas das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. A lei pode ser expressa por meio da seguinte equação:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}^2} \vec{e}_{12}, \quad (2)$$

onde Q_1 e Q_2 são as cargas, \vec{e}_{12} é um vector unitário da direcção da carga 1 para a carga 2 e o k é um coeficiente de proporcionalidade.

A lei da Coulomb aplica-se a duas cargas em repouso. (Mais tarde, vamos ver que cargas eléctricas em movimento produzem campos magnéticos, então, a sua interacção deixa de ser puramente electrostática).

Para utilizar a Eq (2) como uma relação quantitativa, é preciso definir as unidades da carga eléctrica. No sistema CGS, o mais usado na física, a própria lei de Coulomb serve para definir as unidades da carga. O coeficiente da proporcionalidade é posto igual a 1, ou seja,

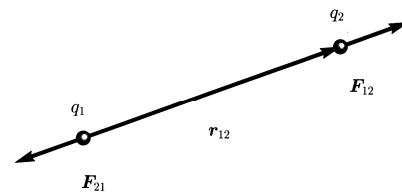
$$k=1 \quad (\text{CGS}),$$

sendo a distância medida em centímetros e a força em dinas. A unidade da carga chama-se 1 e.s.u.,

$$1 \text{ e.s.u.} = 1 \text{ cm} \cdot (1 \text{ din})^{1/2} \quad (3)$$

No sistema S.I., a unidade de carga chama-se 1 Coulomb. É definida de outra maneira (da qual vamos falar mais tarde).

$$1 \text{ C} = 3 \cdot 10^9 \text{ e.s.u.}$$



Esta unidade (o Coulomb) tem uma relação simples às unidades práticas, como o Ampère, o Volt, o Ohm e o Watt. No entanto, há preço que tem que pagar por isso. A constante k não é igual a 1 no S.I.:

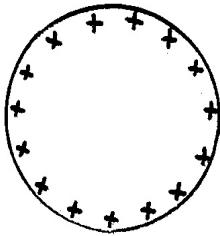
$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \quad (4)$$

Costuma-se escrever este coeficiente (só no sistema S.I.!) na seguinte forma:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (\text{S.I.}). \quad (5)$$

Coulomb mediu as forças eléctricas entre duas bolas pequenas metálicas utilizando uma balança de torção (igual à utilizada por Cavendish, quem verificou a lei da gravidade universal de Newton). A força eléctrica provoca uma torção na fibra de suspensão. A força restauradora da fibra torcida é proporcional ao ângulo de torção, que pode ser medida. Como foi que Coulomb mediu as cargas? Não as mediu. Depois de carregar uma bola e medir a força, dividiu a carga pela metade fazendo contacto com outra bola igual.

A lei de Coulomb, nomeadamente a proporcionalidade inversa ao quadrado da distância entre as cargas, foi verificada com uma precisão muito grande. Alias, uma prova disto foi obtida ainda antes do ano 1785 por Cavendish. Ele estudou experimentalmente uma camada esférica carregada e detectou a ausência de forças eléctricas no interior da



esfera metálica. As cargas ficam somente na superfície da esfera. Nos vamos mostrar mais tarde (no Capítulo III) que isto equivale a dizer que a força electrostática diminui com a distância como R^{-2} . (Não é aproximadamente 2, é exactamente 2!)

A validade da lei de Coulomb foi verificada para as distâncias entre as sub-atómicas ($< 1 \text{ \AA}$) até as macroscópicas. Ninguém a verificou para as distâncias astronómicas, mas também não há razões para dúvidas.

O campo eléctrico

Consideremos duas cargas pontuais, uma arbitrária e a outra unitária ($Q_2 = 1$) e positiva. Esta segunda carga chama-se carga de prova. A força exercida sobre a carga de prova só depende dos parâmetros da carga Q_1 (ou seja, da grandeza da carga e da sua posição) e chama-se a intensidade do campo eléctrico produzido pela carga pontual Q_1 . Colocando o sistema de eixos na carga Q_1 , a intensidade do campo eléctrico é dada pelo seguinte função:

$$\vec{E}(\vec{R}) = k \frac{Q_1}{R^2} \left(\frac{\vec{R}}{R} \right) \quad (6)$$

O campo eléctrico é vectorial. Isto significa que há um vector (\vec{E}) definido de maneira única em cada ponto do espaço. Se soubermos este campo, podemos dizer que vai acontecer com qualquer carga eléctrica que estiver num ponto \vec{R} . Como é possível apresentar um campo eléctrico no papel?

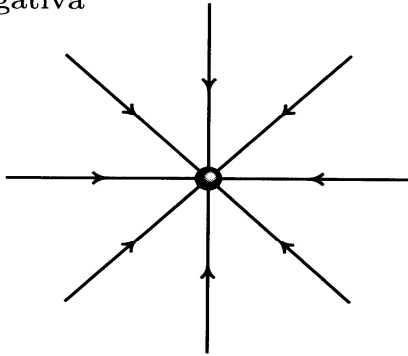
1) Poderíamos apresentar o vector \vec{E} por uma seta, cujo comprimento fosse proporcional à grandeza $|\vec{E}|$, mas este método seria pouco prático. A que ponto corresponde uma seta destas? Se o campo variar rápido no espaço, não é possível desenhar o número de setas suficiente para caracteriza-lo.

2) Podemos traçar umas curvas tais, que em cada um dos seus pontos a tangente à curva indicasse a direcção do campo neste ponto. Estas curvas chamam-se as linhas de campo.

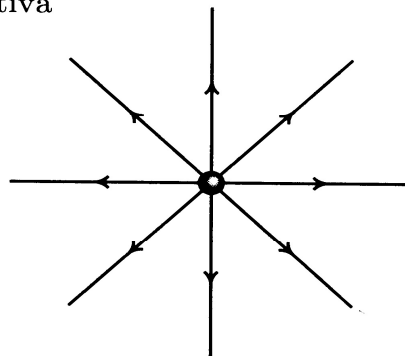
Algumas propriedades das linhas de campo:

- 1) São contínuas e não têm intersecções. Só podem começar ou acabar nos pontos onde ficam cargas eléctricas.
- 2) A sua densidade é que permite julgar da intensidade do campo. Por exemplo, a densidade aumenta com a aproximação a uma carga pontual.

negativa



positiva



O princípio de sobreposição

A lei de Coulomb dá-nos a força eléctrica entre duas cargas pontuais. E como é que vai ser se existirem mais de duas cargas (o que corresponde a situação real)? Consideremos três cargas Q_1 , Q_2 , e q .

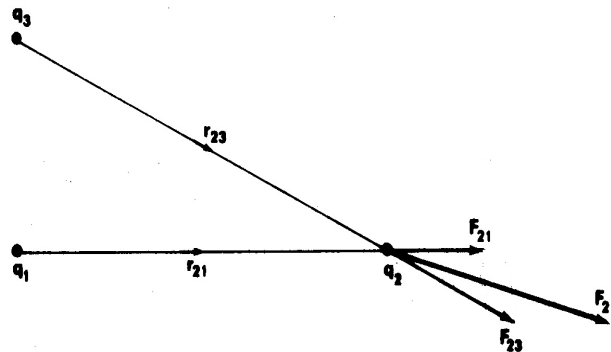
O resultado experimental é o seguinte. A força que actua sobre a carga q , devido à carga Q_1 , é independente da força que actua sobre q devido a Q_2 . A força resultante é:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = kq \sum_{i=1,2} \frac{Q_i}{R_i^3} \vec{R}_i \quad (7)$$

Isto é o princípio fundamental de sobreposição. Pode ser expresso em termos dos campos eléctricos:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad \vec{F} = q \cdot \vec{E} \quad (8)$$

Os dois campos sobrepoem-se, ou seja, são somados de forma vectorial em qualquer ponto do espaço. O resultado de sobreposição dos campos devidos a duas cargas pontuais pode ser apresentado pelas linhas de campo (ver o acetato).



2.2 Dipolo eléctrico

Consideremos duas cargas pontuais da grandeza igual mas do sinal oposto (q e $-q$), separadas por uma distância fixa (d). Este objecto chama-se dipolo eléctrico. O campo eléctrico do dipolo, de acordo com o princípio de sobreposição, é dado pela soma dos campos devidos a cada uma das cargas:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad (9)$$

Vamos calcular este campo \vec{E} numa zona bastante longe do dipolo, ou seja, para $R \gg d$. Temos (colocando a origem do sistema de coordenadas na carga positiva):

$$\vec{E}_+ = k \frac{q}{R^2} \vec{e}_R \quad (10)$$

e

$$\vec{E}_- = -k \frac{q}{(\vec{R} + \vec{d})^2} \vec{e}_{\vec{R} + \vec{d}}, \quad (11)$$

onde

$$\vec{e}_{\vec{R} + \vec{d}} = \frac{\vec{R} + \vec{d}}{|\vec{R} + \vec{d}|} \quad (12)$$

é o versor da direcção $\vec{R}' = \vec{R} + \vec{d}$.

Vamos fazer expansão em série de Taylor lembrando que

$(\frac{d}{R}) \ll 1$ e mantendo só termos lineares em d :

$$\frac{1}{(\vec{R} + \vec{d})^2} \approx \frac{1}{R^2 (1 + \frac{2(\vec{R}\vec{d})}{R^2})} \approx \frac{1}{R^2} (1 - 2 \frac{\vec{R}\vec{d}}{R^2}) \quad (13)$$

$$\vec{e}_{\vec{R} + \vec{d}} \approx \frac{\vec{R} + \vec{d}}{\sqrt{R^2 + 2(\vec{R}\vec{d})}}$$

$$\approx \frac{\vec{R} + \vec{d}}{R (1 + \frac{(\vec{R}\vec{d})}{R^2})} \approx \frac{\vec{R} + \vec{d}}{R} (1 - \frac{\vec{R}\vec{d}}{R^2}) \approx \frac{\vec{R}}{R} + \frac{\vec{d}}{R} - \frac{\vec{R}(\vec{R}\vec{d})}{R^3} \quad (14)$$

Utilizando os resultados (13) e (14), temos:

$$\vec{E}_- = -kq \frac{1}{R^2} (1 - 2 \frac{(\vec{R}\vec{d})}{R^2}) (\frac{\vec{R}}{R} + \frac{\vec{d}}{R} - \frac{\vec{R}(\vec{R}\vec{d})}{R^3}) \approx -\frac{kq}{R^2} \left\{ \frac{\vec{R}}{R} + \frac{\vec{d}}{R} - 3 \frac{\vec{R}(\vec{R}\vec{d})}{R^3} \right\} \quad (15)$$

Substituindo (15) e (10) na Eq. (9), temos a seguinte expressão para o campo eléctrico do dipolo:

$$\vec{E} = k \frac{q}{R^2} \left\{ 3 \frac{(\vec{R}\vec{d})\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{d}}{R} \right\} \quad (16)$$

Vamos introduzir um parâmetro,

$$\vec{p} = q\vec{d} = \sum_i q_i \vec{R}_i, \quad (17)$$

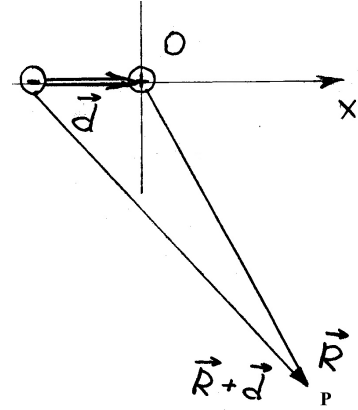
chamado momento dipolar. Em termos do momento dipolar, podemos reescrever Eq.(16) na seguinte forma:

$$\vec{E} = k \frac{1}{R^3} \{ 3(\vec{p}\vec{e}_R)\vec{e}_R - \vec{p} \} \quad (16a)$$

Analisemos esta expressão (16).

1) O dipolo é um objecto neutro. ($Q = q - q = 0$). Mesmo assim, produz um campo eléctrico.

2) Este campo decai mais rápido com o aumento da distância (R), do que o campo de uma carga pontual,



$$\frac{1}{R^3} \quad \text{em vez de} \quad \frac{1}{R^2}.$$

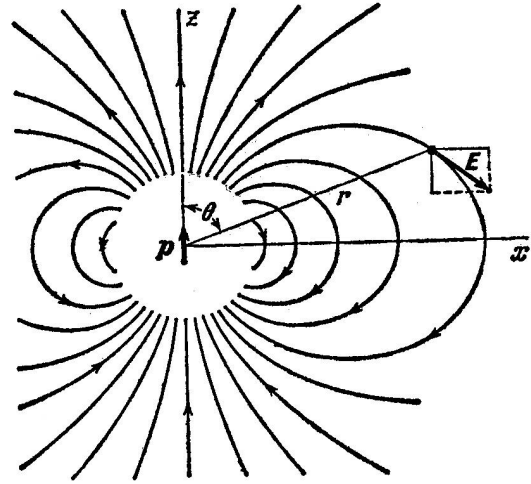
3) O campo (16), comparando com o campo duma carga pontual, tem outra simetria. Escolhemos o eixo X paralelo ao dipolo: (\vec{e}_R está no plano XOY). Seja ϑ o ângulo entre o versor \vec{e}_R eléctrico e o eixo X . Da Eq.(16), podemos calcular as componentes X e Y do campo:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{p}{R^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \\ E_y &= \frac{3p}{R^3} \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{3p}{2R^3} \sin 2\vartheta \end{aligned} \quad (18)$$

Das relações (18) logo vemos que o campo é diferente ao longo do eixo X ($\parallel \vec{p}$) e ao longo do Y (perpendicular ao \vec{p}). Ao longo do Y , só a componente segundo o X não é nula:

$$E_x(Y, X=0) = -\frac{p}{R^3}; \quad E_y(Y, X=0) = 0.$$

Então, o campo do dipolo não tem simetria radial. Pode ser apresentado pelas linhas de campo, que fazem lembrar uma borboleta (ver figura ao lado).



O dipolo num campo eléctrico uniforme

Imaginemos que as cargas que constituem o dipolo estão ligadas mecanicamente de modo que o dipolo possa mover-se como inteiro ou então rodar. Suponhamos que o dipolo encontra-se num campo eléctrico externo, criado por outras cargas remotas, que não nos interessam. Para simplificar, vamos admitir que este campo externo é uniforme, ou seja, $\vec{E} = \text{const}$ em qualquer ponto. As linhas do campo são paralelas e equidistantes. Se o momento dipolar for paralelo ao campo \vec{E} , a força resultante sobre o dipolo é nula:

$$\vec{F} = q\vec{E} - q\vec{E} = 0 \quad (19)$$

O momento da força também é nulo:

$$\vec{M} = 0$$

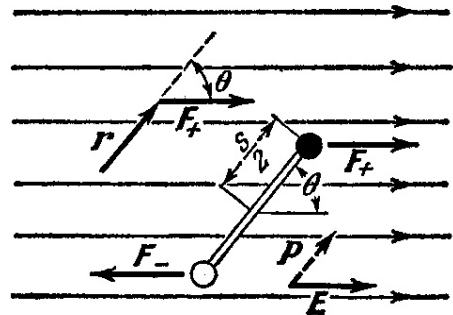
Na situação geral (ver figura ao lado), quando há um ângulo entre os vectores \vec{p} e \vec{E} , $\vartheta \neq 0$, a força resultante continua a ser nula (ver Eq. (19)), mas o momento já não é:

$$M = \frac{d}{2} Eq \sin \vartheta + \frac{d}{2} Eq \sin \vartheta = pE \sin \vartheta \quad (20)$$

A direcção do vector momento é perpendicular ao plano do desenho e o sentido, de acordo com

a definição geral, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, é dado pela regra de parafuso. A expressão (20) pode ser escrita sob a forma vectorial:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad (20a)$$



onde o símbolo " \times " significa o produto vectorial (ou externo).

Então, o dipolo num campo eléctrico uniforme está sob a acção de um momento de força resultante, que faz com que ele rode. O sentido desta rotação é tal que o dipolo tem de tomar a sua posição de equilíbrio, $\vec{p} \parallel \vec{E}$. A posição com o vector \vec{p} paralelo às linhas de campo é a de equilíbrio estável. Se acontecer um pequeno desvio desta posição, o momento de força resultante vai restaurar o equilíbrio. Pelo contrário, a orientação com o \vec{p} antiparalelo ao \vec{E} é a de equilíbrio instável. Basta surgir um pequeno desvio do alinhamento, e o momento resultante das forças eléctricas vai fazer com que o dipolo se vire de 180° .

Concluindo, neste exemplo do dipolo eléctrico vimos que:

- 1) O campo eléctrico criado por uma distribuição de cargas pode ser bem diferente do de uma carga pontual;
- 2) O efeito de campo eléctrico externo sobre um objecto como o dipolo também é diferente do que aconteceria com uma carga pontual.

2.3 Campo eléctrico de uma distribuição contínua de cargas

Até agora, só temos considerado cargas pontuais e as suas combinações, como o dipolo. Rigorosamente, a distribuição de carga é sempre discreta. Os portadores de carga são sempre partículas que têm alguns tamanhos finitos. No entanto, até agora desprezamos estes tamanhos finitos e consideramos cargas como pontuais. Muitas vezes outra aproximação (de algum modo contrária à de carga pontual) é útil, que despreza o facto de ser discreta a distribuição de carga. Consideremos um volume pequeno que, no entanto, contém muitas partículas carregadas. A carga total destas partículas chamamos de dQ e o volume é dV . A densidade volúmica da carga é definida como a razão

$$\rho = \frac{dQ}{dV} . \quad (21)$$

Na prática, a razão $\frac{dQ}{dV}$ na Eq.(21) é considerada como a derivada. A densidade de carga pode ser uma função das coordenadas no espaço. Por exemplo, uma bola esférica uniformemente carregada pode ser descrita pela seguinte função que apresenta a densidade de carga:

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0, & x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 + z^2 > R^2 \end{cases}$$

A carga total é dada pelo integral volumétrico:

$$Q = \int \rho(x, y, z) dV \quad (22)$$

No exemplo anterior da esfera uniformemente carregada, podemos calcular este integral. Convém usar as coordenadas esféricas (ver Anexo).

Neste sistema de coordenadas,

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \rho_0, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (23)$$

não depende dos ângulos θ e φ . O volume infinitesimal é

$$dV = dx dx dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi . \quad (24)$$

Então,

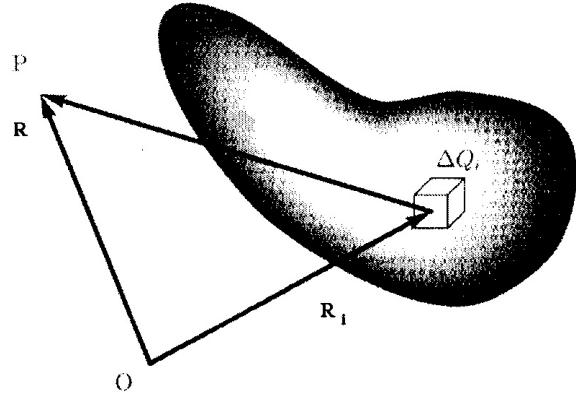
$$Q = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \rho_0 \frac{R^3}{3} 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0$$

que obviamente é o volume da esfera vezes a densidade de carga.

Tendo introduzido o conceito de densidade de carga e utilizando o princípio de sobreposição, podemos, em princípio, calcular o campo eléctrico (num ponto P qualquer) devido a uma distribuição contínua de carga:

$$\vec{E}(x, y, z) = k \sum_i \frac{dQ_i}{(\vec{R} - \vec{R}_i)^2} \vec{e}_{\vec{R} - \vec{R}_i} \quad (25)$$



Eq.(25) é a aplicação directa da lei de Coulomb e do princípio de sobreposição, admitindo que cada carga dQ_i é uma

carga pontual. Considerando as dQ_i -s como umas grandezas infinilesemais, a soma na Eq. (25) fica substituída pelo integral:

$$\vec{E}(x, y, z) = k \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{r^2} \vec{e}_r \quad (26)$$

onde $r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$ e \vec{r} é o vector que une os pontos (x', y', z') e (x, y, z) . Então, para calcular o campo eléctrico num ponto, é preciso avaliar o integral volumétrico sobre todo o espaço onde a densidade de carga é diferente do zero.

O fluxo eléctrico

Consideremos um campo eléctrico no espaço, devido a uma distribuição de cargas, e uma superfície fechada. Dada uma superfície vamos dividi-la em pequenos elementos dS . Cada elemento da superfície tem uma normal \vec{n} associada a ele. Podemos introduzir um “vector” de superfície:

$$d\vec{S} = \vec{n} dS \quad (27)$$

Definimos uma grandeza escalar, chamada fluxo, como o produto escalar dos vectores \vec{E} e $d\vec{S}$:

$$d\Phi_i = \vec{E}_i d\vec{S}_i \quad (28)$$

onde \vec{E}_i é o vector de campo eléctrico na superfície elementar dS_i (em princípio, é diferente para os i -s diferentes). O fluxo total através da superfície fechada é

$$\Phi = \sum_i d\phi_i = \sum_i \vec{E}_i d\vec{S}_i \rightarrow \oint \vec{E} d\vec{S} \quad (29)$$

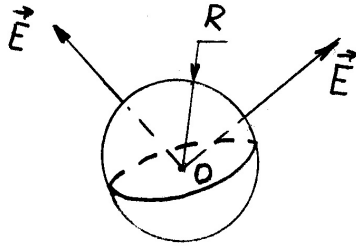
onde, outra vez, passamos da soma para o integral. Este integral chama-se integral de superfície. O símbolo \oint significa que o integral é calculado sobre uma superfície fechada. Então, o fluxo eléctrico é dado pela equação

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S}. \quad (29a)$$

Podemos dizer que é proporcional ao número de linhas de campo que atravessam a superfície. A noção de fluxo facilita muito o cálculo dos campos eléctricos, como vamos ver logo.

2.4 A lei de Gauss

Vamos calcular o fluxo do campo eléctrico no caso mais simples possível.



Consideremos uma carga pontual Q situada no ponto O . O campo eléctrico é igual (em módulo, não em direcção) em todos os pontos da superfície esférica (de raio R), e é normal à superfície (ou seja, tem simetria radial). Então,

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint \vec{E} d\vec{S} = E \oint dS \\ &= k \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi k Q \end{aligned} \quad (30)$$

onde $4\pi R^2$ é a área da superfície da esfera.

Consideremos agora uma outra superfície fechada, maior, que abrange a esfera (um “invólucro” de forma arbitrária). Podemos afirmar que o fluxo através do invólucro é igual ao fluxo através da esfera. Isto é claro intuitivamente, porque o número de linhas de campo que atravessam ambas as superfícies tem que ser igual. No entanto, pode-se provar isto com rigor. Consideremos um cone com o vértice no centro da esfera (ver figura). O elemento do invólucro (duma forma arbitrária) recortado pelo cone, dA , é maior do que o elemento da superfície da esfera, dS , pelo factor

$$\left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \frac{1}{\cos \theta},$$

porque, primeiro, dA está mais longe do vértice e, segundo, em princípio, está inclinado de um ângulo θ , (que é o ângulo formado pela normal à superfície dA e o eixo do cone). O fluxo elementar que atravessa dA , é:

$$d\Phi_1 = E(R_1) dA \cos \theta = E(R_1) dS \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \quad (31)$$

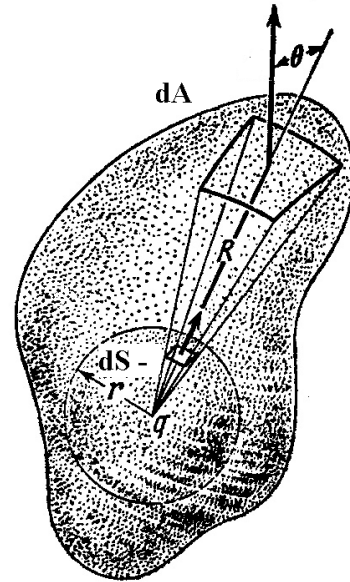
onde $E(R_1)$ é o campo à distância R_1 . De acordo com a lei de Coulomb, o campo à distância $R_1 > R$ é menor do que $E(R)$:

$$E(R_1) = E(R) \left(\frac{R}{R_1} \right)^2 \quad (32)$$

Combinando (31) e (32), temos:

$$d\Phi_1 = E(R) dS \equiv d\Phi,$$

ou seja, os fluxos que atravessam dS e dA são iguais. Como sempre é possível estabelecer correspondência entre os elementos dA e dS (recortados pelo mesmo cone),



concluimos que o fluxo total não depende da superfície fechada escolhida. No entanto, se escolhermos uma superfície fechada que não abranja a carga, o fluxo vai ser nulo, porque cada linha de campo atravessa essa superfície duas vezes, uma vez no sentido positivo e outra no sentido negativo. Podemos enunciar a lei de Gauss da seguinte forma:

O fluxo do campo eléctrico através de uma superfície fechada é igual a $(4\pi k)$ vezes a carga contida dentro da superfície:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi k \sum_i Q_i \quad (33)$$

$$= 4\pi k \int \rho dV.$$

Pelo princípio de sobreposição, o fluxo é determinado pela carga total dentro da superfície. Na segunda expressão, o integral volumétrico refere-se ao espaço encerrado dentro da superfície. Queria salientar que a lei de Gauss baseia-se na lei de Coulomb. Se a expoente na lei de Coulomb (2) fosse diferente de 2, a afirmação (33) não teria lugar.

Algumas aplicações da lei de Gauss

A equação (33) permite calcular os campos eléctricos para várias distribuições contínuas de carga, de maneira bem mais fácil do que através da Eq.(26). Consideremos alguns exemplos.

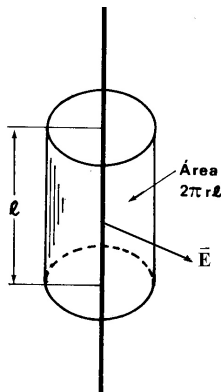
1) Campo devido a um fio rectilíneo e infinito, uniformemente carregado.

A carga total do fio é Q . Introduzamos a densidade linear de carga, ou seja, a carga por unidade de comprimento:

$$\lambda = \frac{dQ}{dl}$$

Se o fio for infinito, a sua carga total vai ser infinito também:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dl \rightarrow \infty$$



(não há problema, fios realmente infinitos não existem!).

Se considerarmos uma superfície cilíndrica com o eixo coincidente com o fio, o campo vai ser igual (em módulo) em todos os pontos desta superfície. Pela simetria, é claro que as linhas de campo, em qualquer plano perpendicular ao fio, têm direcção radial. Ao mesmo tempo, todos os planos perpendiculares são iguais em termos de campo eléctrico. Em coordenadas cilíndricas, z, r, φ , o campo só deve variar em função de r e não pode depender de z nem de φ . Aplicando a Eq.(33) para a superfície cilíndrica, temos:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = E \oint dS = E 2\pi r l = 4\pi k \lambda l$$

onde λl é a carga dentro da superfície. Dai obtemos:

$$E = k \frac{2\lambda}{r}. \quad (34)$$

2) Campo devido a uma distribuição plana e infinita.

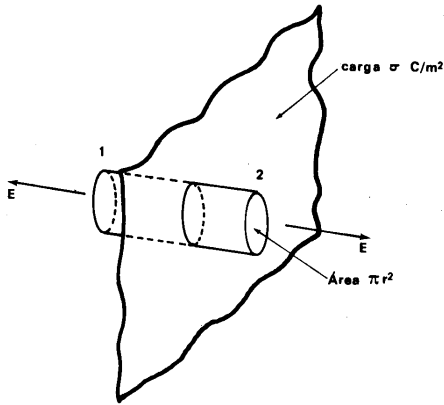
Consideremos um plano (xOy) uniformemente carregado. Da maneira análoga a Eq.(33), definimos a densidade superficial da carga:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad (35)$$

(a carga por 1cm^2). Para o plano uniformemente carregado,

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 = \text{const}$$

Pela simetria, o campo eléctrico também não pode depender do x nem do y (qualquer ponto no plano xOy é igual!). O vector \vec{E} só pode ser dirigido ao longo do eixo z . Escolhemos uma superfície cilíndrica com as bases paralelas ao plano carregado e calculamos o fluxo:



$$\begin{aligned} \text{Fluxo total} &= \text{Fluxo através da face 1} \\ &+ \text{Fluxo através da face 2} \\ &+ \text{Fluxo através das faces laterais} \\ &= ES + ES + 0 = 2ES \end{aligned} \quad (36)$$

onde S é a área das faces 1 e 2.

Como o campo é tangente às faces laterais, o fluxo através delas é nulo. Das Eqs. (36) e (32), temos

$$2ES = k4\pi\sigma S.$$

Então,

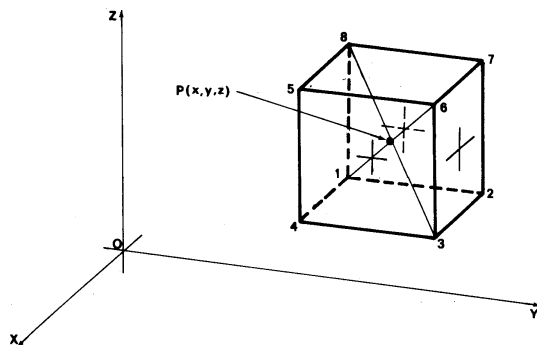
$$E = k2\pi\sigma. \quad (37)$$

Este campo também não depende do z , então, é uniforme.

O campo eléctrico do outro lado do plano também é uniforme, tem a mesma intensidade mas o seu sentido é oposto. Então, a componente z do campo eléctrico é descontínua em $z = 0$. O salto é de valor $4\pi k\sigma$. Nos vamos ver em outros casos que este resultado é geral. Ao atravessar uma superfície carregada, o campo eléctrico sempre sofre um salto deste valor.

A forma diferencial da lei de Gauss

O campo eléctrico pode existir dentro de um meio onde a densidade de carga não é nula ($\rho \neq 0$). Consideremos um ponto P dentro do meio e um paralelepípedo infinitesimal, com o centro no ponto P e as arestas iguais a Δx , Δy , e Δz (ver a figura). Uma vez que o paralelepípedo é pequeno, o valor do campo em diversos pontos do seu interior pode ser calculado recorrendo à série de Taylor:



$$\begin{aligned} &\vec{E}(x + dx, y + dy, z + dz) \\ &= \vec{E}(x, y, z) + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (38)$$

Vamos calcular o fluxo através da superfície do paralelepípedo. Para avaliar o fluxo através da face 3456 (ver a figura), podemos tomar como valor representativo do campo nessa superfície o valor no seu centro, que é:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}(x, y, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \Delta x .$$

Assim, o fluxo através dessa superfície será

$$\Delta\Phi_{3456} = (\vec{E}(x, y, z) + \frac{1}{2} \Delta x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}) \vec{e}_x \Delta y \Delta z$$

onde \vec{e}_x é o versor do eixo X e $\Delta y \Delta z$ é a área da face. O campo na face 1278 e o fluxo através dela têm os valores,

$$\vec{E}_2 = \vec{E}(x, y, z) + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \left(-\frac{\Delta x}{2} \right)$$

e

$$\Delta\Phi_{1278} = (\underbrace{\vec{E}(x, y, z)}_{\vec{E}_0} - \frac{1}{2} \Delta x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}) (-\vec{e}_x) \Delta y \Delta z .$$

Consequentemente, o fluxo através das duas superfícies será:

$$\Delta\Phi_{3456} + \Delta\Phi_{1278} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \vec{e}_x \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta V$$

onde ΔV é o volume do paralelepípedo. Do modo idêntico, podemos calcular o fluxo através das restantes faces do paralelepípedo. O resultado final para o fluxo total é:

$$\Delta\Phi = \oint \vec{E} dS = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta V \quad (39)$$

A quantidade entre parêntesis chama-se divergência do vector \vec{E} :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (40)$$

Combinando as equações (33), (39) e (40), o teorema de Gauss pode ser escrita sob a seguinte forma:

$$\text{div} \vec{E} \Delta V = k 4 \pi \rho \Delta V ,$$

ou seja,

$$\text{div} \vec{E} = k 4 \pi \rho . \quad (41)$$

Esta relação é conhecida como a forma diferencial da lei de Gauss (porque a divergência é uma operação diferencial). Pelo contrário à forma integral (33), esta relação determina o campo eléctrico (através das suas derivadas) num ponto em função da densidade de carga ρ no mesmo ponto. Às vezes, esta forma torna-se mais conveniente para calcular o campo a partir da distribuição da densidade de carga. A divergência às vezes aparece escrita noutra forma, através de um operador diferencial “nabla”:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{d}{dx} + \vec{e}_y \frac{d}{dy} + \vec{e}_z \frac{d}{dz} . \quad (42)$$

Em termos deste operador, a definição da divergência (40) pode ser escrita assim:

$$\text{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} . \quad (40a)$$

2.5 Trabalho de forças electrostáticas. Diferença de potencial e potencial eléctrico

Consideremos um campo devido a uma carga positiva Q . Uma outra carga q , também positiva, encontra-se a uma distância R_i da primeira. No deslocamento da carga q para uma posição \vec{R}_f mais próxima do ponto O (onde está fixa a carga Q), a força electrostática (repulsiva) realiza um trabalho,

$$W = \int_{\vec{R}_i}^{\vec{R}_f} \vec{F} d\vec{l} ; \vec{F} = q\vec{E}.$$

O integral é calculado ao longo da trajectória do deslocamento. Vamos calcular este trabalho para dois percursos diferentes:

- 1) Ao longo da circunferência (do raio R_i) e depois pelo raio;
- 2) Primeiro ao longo do eixo X e depois ao longo do Y .

Percurso 1

Ao longo da circunferência, a força (radial) é sempre normal à trajectória, por isso

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \text{o trabalho é nulo.}$$

No deslocamento radial,

$$\begin{aligned} W &= \int_{R_i}^{R_f} k \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr \\ &= -kQq \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i} \right) < 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Percurso 2

Ao longo do X $d\vec{l} = \vec{e}_x dx$,

$$W_1 = k \int_{x_i}^{x_f} Qq \frac{dx(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r)}{r^2} = kQq \int_{x_i}^{x_f} \frac{xdx}{r^3}$$

(porque $(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r) = \frac{x}{r}$),

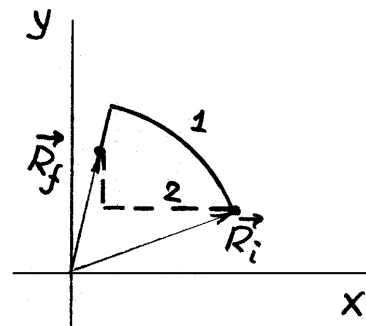
$$= \int_{x_i}^{x_f} \frac{xdx}{(\sqrt{x^2 + y_i^2})^3} (kqQ) = -kqQ \int_{x_i}^{x_f} \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{(x^2 + y_i^2)^{3/2}} = \frac{kqQ}{(x^2 + y_i^2)^{1/2}} \Big|_{x_i}^{x_f}$$

Ao longo do Y $d\vec{l} = \vec{e}_y dy$,

$$W_2 = kQq \int_{y_i}^{y_f} \frac{ydy}{(x_f^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{kqQ}{(x_f^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_{y_i}^{y_f}$$

O trabalho realizado total é:

$$W = W_1 + W_2 =$$



$$= kQq \left(\frac{1}{(x_i^2 + y_i^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x_f^2 + y_i^2)^{1/2}} + \frac{1}{(x_f^2 + y_i^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x_f^2 + y_i^2)^{1/2}} \right)$$

$$= kQq \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_f} \right),$$

ou seja, coincide com o resultado (43). Podemos concluir que o trabalho realizado pela força electrostática não depende do caminho, só depende das posições inicial e final da carga no campo. Nos consideramos o campo criado por uma carga pontual, mas, usando o princípio de sobreposição, podemos imediatamente concluir que o resultado acima obtido permanece válido para qualquer campo eléctrico estacionário.

A transferência da carga q foi efectuada por uma força externa (não electrostática). O trabalho desta força externa é igual e oposto ao da força electrostática, isto é, positivo na transferência acima considerada. Por outras palavras, a energia potencial da carga q aumentou a custa da fonte da força externa. Para uma carga de prova ($q=1$), o trabalho realizado pela força externa entre quaisquer dois pontos é uma característica do campo. Esta grandeza (o trabalho por unidade de carga) chama-se diferença de potencial eléctrico (d.d.p) entre dois pontos A e B,

$$\varphi_{AB} = - \int_B^A \vec{E} d\vec{l}, \quad (44)$$

onde o integral é calculado ao longo de qualquer trajectória que une os pontos B e A . A qualquer par de pontos de espaço onde existe campo eléctrico \vec{E} corresponde uma diferença de potencial. A unidade da d.d.p. no sistema CGS não tem nome especial, chama-se

$$1 \text{ e.s.u. de d.d.p.} = \frac{1 \text{ erg}}{1 \text{ e.s.u. de carga}}$$

No sistema S.I., a unidade chama-se 1 Volt,

$$1 \text{ V} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ C}} \approx \frac{1}{300} \text{ e.s.u. de d.d.p} \quad (45)$$

Podemos dizer que 1 J é o trabalho necessário para deslocar uma carga de 1 C num campo eléctrico entre dois pontos para os quais a diferença de potencial é igual a 1 V .

O potencial eléctrico

Podemos escolher um ponto de referência (R) e calcular as d.d.p.'s entre qualquer outro ponto (A, B, \dots) no campo e o ponto R : $\varphi_{AR}, \varphi_{BR}, \dots$. A estas quantidades chamamos simplesmente potenciais nos respectivos pontos. É habitual escolher o infinito como o ponto de referência. Então, o potencial num ponto A seria

$$\varphi(\vec{R}_A) = - \int_{\infty}^A \vec{E} d\vec{l} \quad (46)$$

A Eq. (46) relaciona o potencial com a intensidade de campo eléctrico. Como é que podemos obter o campo eléctrico a partir do potencial, ou seja, inverter a Eq. (46)?

A diferença de potencial entre dois pontos muito próximos é

$$d\varphi = -\vec{E} d\vec{l}$$

e o vector de deslocamento infinitesimal é

$$d\vec{l} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz \quad (47)$$

Por outro lado, $d\varphi$ (o diferencial do potencial) pode ser escrito assim:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

Então, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \\ = - E_x dx - E_y dy - E_z dz \end{aligned} \quad (48)$$

Como os dx, dy, dz são independentes, a Eq. (48) significa que

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (49)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \\ &= -\vec{\nabla} \varphi \end{aligned} \quad (50)$$

onde, outra vez, surgiu o operador diferencial “nabla” definido na Eq.(42). Este operador, quando aplicado a uma função escalar (como o potencial) é chamado gradiente:

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi \quad (50a)$$

A Eq.(50) é a desejada relação inversa para achar o campo eléctrico a partir do potencial. O potencial, em função das coordenadas do ponto no qual está definido, chama-se função potencial. A função potencial do campo devido a uma carga pontual obtém-se logo da Eq.(43):

$$\varphi(\vec{R}) = k \frac{Q}{R} \quad (51)$$

Como a função φ é relacionada com o campo eléctrico \vec{E} de uma forma linear, o princípio de sobreposição aplica-se também à função potencial. Deste modo, podemos escrever uma relação análoga a Eq. (25):

$$\varphi(x, y, z) = k \sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q_i}{|\vec{R} - \vec{R}_i|}$$

ou, para uma distribuição contínua de cargas,

$$\varphi(x, y, z) = k \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (52)$$

onde o integral é calculado sobre todo o espaço onde $\rho \neq 0$. Através da Eq.(52), pode-se calcular a função potencial dada uma distribuição contínua de carga. No entanto, existe um método mais conveniente.

Equação de Poisson

Utilizando o teorema de Gauss na sua forma diferencial (41) e a relação (50), podemos escrever:

$$\text{div}(-\text{grad} \varphi) = k 4\pi \rho \quad (53)$$

Lembrando a definição (42), temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}) +$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y \left(\vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \left(\vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \\ & = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi \equiv \Delta \varphi. \end{aligned}$$

Este operador diferencial (da 2-a ordem) designado Δ (ou ∇^2) chama-se operador de Laplace (ou Laplaciano). Então, Eq.(53) pode ser escrita sob a forma:

$$\nabla^2 \varphi = -k4\pi\rho, \quad (54)$$

que se chama a equação de Poisson. É uma equação diferencial da 2-a ordem, que permite calcular o potencial a partir de distribuição de carga.

Superfícies equipotenciais

A equação

$$\varphi(\vec{R}) = \text{const}$$

determina uma superfície no espaço tridimensional. A forma da superfície, para o mesmo campo, depende do valor da constante. Estas superfícies são chamadas superfícies equipotenciais. De acordo com a Eq.(50a), as linhas de campo são sempre perpendiculares às superfícies equipotenciais. Por exemplo, as superfícies equipotenciais do campo criado por uma carga pontual são esferas concêntricas.

2.6 Energia potencial de um sistema de cargas

Consideremos a energia necessária para construir uma distribuição de n cargas pontuais (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) que ficam nos pontos $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_n$. Imaginemos que as cargas estavam inicialmente no infinito e vamos trazê-las, uma de cada vez, do infinito para a sua posição \vec{R}_i . Começamos pela primeira. O trabalho necessário para o deslocamento é nulo porque, para já, não há campo eléctrico. Então,

$$W_1 = 0$$

Para a segunda, já é necessário realizar algum trabalho, nomeadamente,

$$W_2 = Q_2 \varphi_1(\vec{R}_2) = kQ_1 Q_2 \frac{1}{R_{12}}, \quad \longleftarrow \text{A distância entre 1 e 2}$$

onde $\varphi_1(\vec{R}_2)$ é o potencial criado pela carga 1 no ponto \vec{R}_2 . Para a terceira partícula,

$$W_3 = Q_3 (\varphi_1(R_3) + \varphi_2(R_3)) = kQ_1 Q_3 \frac{1}{R_{13}} + kQ_2 Q_3 \frac{1}{R_{23}}$$

Continuemos assim até a última partícula ser colocada no sítio. O trabalho total realizado será:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^n W_i = 0 + kQ_1 Q_2 \frac{1}{R_{12}} + \dots \\ &= k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} Q_i Q_j \frac{1}{R_{ij}} \end{aligned} \quad (55)$$

A outra maneira de fazer o mesmo seria começar pela carga número n , depois carga

($n-1$), etc. Assim, em vez da Eq.(55) teríamos:

$$W_n = 0; \quad W_{n-1} = kQ_n Q_{n-1} \frac{1}{R_{n,n-1}}; \dots$$

$$W = k \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=n-i+1}^n Q_i Q_j \frac{1}{R_{ij}} = k \sum_{i'=1}^n \sum_{j=i'+1}^n Q_{i'} Q_j \frac{1}{R_{i'j}} \quad (55a)$$

(onde mudamos o índice de soma para $i' = n - i$). Utilizando (55) e (55a), podemos escrever:

$$2W = k \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Q_i Q_j}{R_{ij}} + \sum_{j=i+1}^n \frac{Q_i Q_j}{R_{ij}} \right\} = k \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (j+i)}}^n \frac{Q_i Q_j}{R_{ij}} \quad (56)$$

A energia potencial de um sistema de cargas é igual ao trabalho necessário para construir este sistema. Então, a energia potencial do sistema de n cargas pontuais é dada por

$$U = W = \frac{k}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n \frac{Q_i Q_j}{R_{ij}} \quad (57)$$

A relação (57) tem um significado simples: a energia de um sistema de cargas é a soma das energias das interações em pares entre todas as cargas do sistema:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n U_{ij}, \quad U_{ij} = k \frac{Q_i Q_j}{R_{ij}} \quad (57a)$$

O factor $\frac{1}{2}$ serve para não contarmos cada par de cargas por duas vezes. Podemos notar que

$$k \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n \frac{Q_j}{R_{ij}} = \varphi(\vec{R}) \equiv \varphi_i,$$

é o potencial criado por todas as cargas, a menos a carga de número i , no ponto \vec{R}_i .

Então, podemos reescrever (57) sob a seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i. \quad (57b)$$

Para uma distribuição contínua de cargas, substituímos Q_i por ρdV e o somatório pelo integral no volume. Assim temos:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV. \quad (58)$$

Essa energia potencial é igual ao trabalho realizado pelas forças eléctricas na passagem de uma distribuição (contínua) de cargas, ρ , para a situação em que $\rho = 0$ em qualquer ponto do espaço. Essa última situação pode ser realizada pela dispersão de todas as cargas ao infinito.

A fórmula (58) pode ser escrita sob outra forma. Usando a equação de Poisson (54), podemos escrever:

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{\Delta \varphi}{(-4\pi k)} \varphi dV = -\frac{1}{8\pi k} \int \varphi \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \varphi) dV$$

onde o integral é calculado no volume do espaço todo onde há campo eléctrico ($\varphi \neq 0$).
Integrando por partes, temos:

$$U = -\frac{1}{8\pi k} \left\{ \oint \varphi \vec{\nabla} \varphi d\vec{S} - \int (\vec{\nabla} \varphi)^2 dV \right\}$$

\uparrow (sobre o volume infinito)
 (sobre uma superfície que encerra o volume infinito)

$$= \frac{1}{8\pi k} \int (\vec{E})^2 dV \quad (59)$$

A fórmula (59) permite calcular a energia dum campo eléctrico através da sua intensidade.

Resumo

- 1) As forças electrostáticas obedecem à lei de Coulomb (2). Essa interacção é considerada como o resultado de acção do campo eléctrico devido a carga 1 sobre a carga 2, e vice versa.
- 2) O campo eléctrico pode ser caracterizado ou pela sua intensidade, \vec{E} , ou pela função potencial φ . A relação entre estas grandezas é dada pelas equações:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi ; \quad \varphi = -\int_{\infty}^{\vec{R}} \vec{E} d\vec{l} .$$

- 3) O objectivo principal da electrostática é calcular o campo eléctrico para uma distribuição conhecida de cargas eléctricas. Este problema pode ser resolvido, em princípio, de várias maneiras (mas no fundo sempre estão a lei de Coulomb e o princípio de sobreposição):
 - (i) aplicação directa da lei de Coulomb e do princípio de sobreposição,
 - (ii) cálculo do fluxo eléctrico – a lei de Gauss,
 - (iii) através da forma diferencial da lei de Gauss,
 - (iv) através de resolução da equação de Poisson (ou Laplace) para o φ .
- 4) Um sistema de carga possuiu ma energia potencial, que pode ser calculada como a soma das energias das interacções em pares entre todas as cargas que constituem o sistema. Alternativamente, essa energia pode ser calculada como a energia do campo eléctrico criado pelas cargas (Eq.(59)).

III. Condutores em campos eléctricos. Condensadores

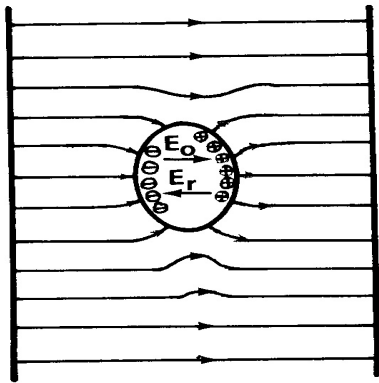
3.1 Um condutor num campo electrostático. Equilíbrio de cargas

Conforme às suas propriedades eléctricas, há três tipos de materiais:

- 1) Condutores, nos quais as cargas eléctricas podem-se movimentar livremente (metais, grafita, soluções aquosas de sais, gases ionizados);
- 2) Isoladores, nos quais as partículas carregadas que os constituem não se podem movimentar com facilidade (vidro, borracha, madeira, água pura);
- 3) Semicondutores, que são isoladores nas condições normais mas tornam-se condutores sob determinadas acções externas (por exemplo, iluminação, aquecimento, irradiação).

Neste capítulo, falaremos dos condutores ideais.

Consideremos um material condutor, homogéneo e isotrópico. Este material tem cargas móveis no seu interior. As cargas só podem estar em equilíbrio se o campo eléctrico no interior do condutor for nulo. Esta conclusão mantém-se válida se o condutor estiver



num campo eléctrico externo (\vec{E}_0). As cargas vão arranjar-se no espaço dentro do condutor e vão criar um campo eléctrico interno, \vec{E}_r , que, no equilíbrio, vai anular o campo externo em qualquer ponto no interior do condutor:

$$\vec{E}_0 + \vec{E}_r = 0.$$

De acordo com a lei de Gauss, a densidade de carga ρ no interior do condutor tem que ser nula:

$$\rho = \frac{1}{4\pi k} \text{div} \vec{E} = 0.$$

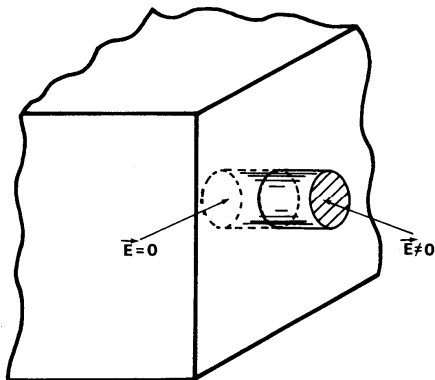
Então, as cargas positivas e negativas separam-se de tal modo que a densidade de carga é não nula nas superfícies do condutor mas é nula em qualquer ponto no interior. Na totalidade, o condutor continua a ser neutro,

$$\int \rho dV = 0 \quad (\text{ou} \quad \oint \sigma dS = 0).$$

Qual é o potencial no interior do condutor? Uma vez que o campo aí é nulo, o potencial só pode ser constante,

$$\vec{\nabla} \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \text{const.} \quad (60)$$

Então, um condutor é um corpo equipotencial. Essa conclusão mantém-se válida para um condutor com carga eléctrica ($\int \rho dV \neq 0$).



Vamos considerar o campo no exterior de um condutor perto da sua superfície. Como vimos, o potencial, no equilíbrio, é igual em todos os pontos do condutor, inclusive os da superfície. Isto implica que o campo no exterior tem que ser perpendicular à superfície. Se tivesse alguma componente tangencial, isto significaria a existência de um gradiente do potencial ao longo da superfície, que contradiz ao facto de $\varphi = \text{const.}$ Podemos relacionar o campo na vizinhança da

superfície com a densidade superficial de carga, σ . Escolhendo uma superfície cilíndrica, perpendicular à superfície do condutor, e, aplicando a lei de Gauss, temos (compare com p. 12):

$$E \cdot S + \underbrace{0 \cdot S}_{\uparrow} = 4\pi k \sigma S$$

(o campo no interior é nulo).

Então,

$$E = 4\pi k \sigma \quad (61)$$

Esta fórmula deve ser entendida assim: num campo eléctrico externo, a densidade superficial de carga ajusta-se de maneira de obedecer à relação (61), onde E é o campo eléctrico total (o externo mais o criado pela carga superficial σ). A Eq.(61) dá uma relação local entre a componente normal do campo E e σ . Ambas as grandezas E e σ são incógnitas, ou seja, dependem do campo externo (criado por cargas externas). A Eq.(61) não é suficiente para determinar σ (ou E). Ambas, em princípio, dependem do campo externo.

Electrostática dos condutores. Alguns exemplos

1) Campo eléctrico dentro duma cavidade de condutor.

Consideremos uma camada esférica de um condutor sem carga. Apliquemos um campo eléctrico uniforme. Aparece uma distribuição de cargas ($\sigma \neq 0$) e o campo fora deixa de ser uniforme (as linhas de campo são sempre normais à superfície condutor). O potencial da superfície interior é constante, ou seja, não depende dos ângulos esféricos θ e ϕ . No interior da cavidade, onde não há cargas, o potencial é dado pela equação de Laplace:

$$\nabla^2 \varphi = 0 .$$

Em coordenadas esféricas,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad (62)$$

A equação (62) tem duas soluções

$$\varphi = \text{const} ; \quad \varphi = \frac{\text{const}}{r} .$$

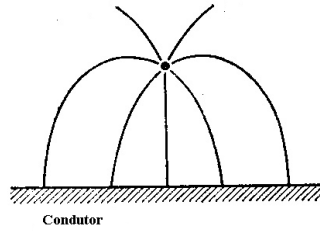
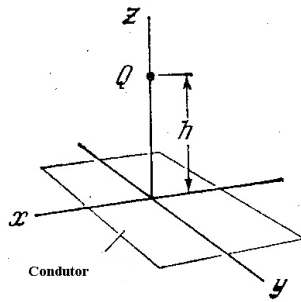
Então, a solução geral seria

$$\varphi(r) = C_1 + \frac{C_2}{r} \quad (63)$$

mas temos que pôr $C_2 = 0$. Senão, o potencial e o campo eléctrico ($-\frac{\partial \varphi}{\partial r}$) vão ser infinitos no centro da cavidade. Então, $\varphi = \text{const}$ e $\vec{E} = 0$ dentro de cavidade. Este resultado tem carácter geral, isto é, não depende da forma de cavidade. O potencial é constante na superfície interior da cavidade, então, é constante em qualquer ponto da cavidade. Daí, o campo na cavidade é nulo, qualquer que seja o campo no exterior. Este fenómeno é o princípio de blindagem eléctrica, que se usa para proteger alguns objectos da acção de campos eléctricos.

2) Campo eléctrico duma carga pontual em cima duma superfície condutora.

As linhas de campo têm que ser perpendiculares à superfície todos os pontos do plano $z = 0$ têm o mesmo potencial. Se consideramos o campo devido a duas cargas pontuais,



q no ponto $z = h$ e $(-q)$ no ponto $z = -h$, as linhas de campo necessariamente têm a mesma propriedade (são normais ao plano $z = 0$). Pelo teorema de unicidade, as soluções destes dois problemas coincidem. O problema de duas cargas pontuais é mais fácil de resolver. Utilizando

esta truque (ou seja, introduzindo a carga $-q$, uma carga imaginária), podemos resolver o problema em título. Próximo da superfície, o campo é vertical:

$$E_z = -k \frac{2q}{(h^2 + r^2)} \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}},$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. A densidade superficial de carga, da acordo com a Eq.(61), é:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{2qh}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \quad (64)$$

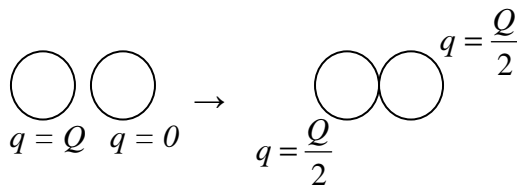
A carga total na superfície condutora é:

$$\begin{aligned} Q &= \int \sigma dS = -\frac{1}{2\pi} qh \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{2dr d\phi}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \\ &= qh \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \Big|_0^\infty = -q \end{aligned}$$

que é igual à carga imaginária. Podemos dizer que a carga pontual induz uma carga $(-q)$ na superfície metálica aterrada (a carga positiva vai para a terra).

3.2 Condensadores

Um corpo condutor pode ser usado para armazenar carga eléctrica. O corpo pode ser carregado através de contacto com um outro corpo carregado. Também, a carga pode ser (parcialmente) retirada do corpo se este entrar em contacto com um outro corpo condutor, não carregado. Por exemplo, duas esferas metálicas iguais, uma carregada e a outra não carregada, entram em contacto.



Em resultado disso, cada uma das esferas vai ter carga $Q/2$, do modo que o seu potencial eléctrico seja igual (recordemo-nos que o potencial de uma esfera carregada é $\phi = k \frac{Q}{R}$ onde R é o raio da esfera). Definamos uma grandeza nova, que caracteriza a propriedade dos corpos condutores de armazenar a carga eléctrica. Chama-se capacidade e é o coeficiente de proporcionalidade entre a carga e o potencial:

$$C = \frac{Q}{\phi} \quad (65)$$

A capacidade é um parâmetro do corpo condutor e depende sobretudo da sua geometria e dos tamanhos. Por exemplo, para uma esfera condutora

$$C = \frac{R}{k} . \quad (66)$$

As unidades

No sistema CGS, $k = 1$ e C mede em centímetros .

No sistema S.I., há uma unidade especial chamada Fárada:

$$1F = \frac{1C}{1V}$$

A relação entre $1F$ e 1 cm é fácil de obter:

$$1F = \frac{3 \times 10^9 \text{ e.s.u. de carga}}{\frac{1}{300} \text{ e.s.u. de d.d.p.}} = 9 \times 10^{11} \text{ cm}$$

Há geometrias favoráveis em termos da capacidade de armazenamento de carga. Por exemplo, duas placas paralelas de área grande, separadas por uma distância pequena, uma aterrada e a outra com carga. $Q = \sigma S$ (S é a área, σ - a densidade superficial de carga). Calculemos o potencial da placa de cima. A equação de Laplace a 1D é:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0$$

e a sua solução é:

$$\varphi = C_1 z + C_2 . \quad (67)$$

As condições de fronteira são:

$$\varphi(z = 0) = 0 \text{ (a placa de baixo está aterrada);}$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = 4\pi k \sigma$$

(vem da eq. (61), o campo está dirigido para baixo, com a componente normal à superfície igual a $E = \frac{d\varphi}{dz}$). Assim, os coeficientes C_1 e C_2 são:

$$C_1 = 4\pi k \sigma ; \quad C_2 = 0 .$$

Então, o potencial da placa de cima é

$$\varphi(d) = 4\pi k \sigma d \quad (68)$$

A capacidade:

$$C = \frac{\sigma S}{4\pi k \sigma d} = \frac{S}{4\pi k d} \quad (69)$$

A construção considerada chama-se condensador de placas paralelas. A sua capacidade é proporcional à área das placas e inversamente proporcional à distância entre as placas. Qual a carga da segunda placa? O campo eléctrico na sua vizinhança é:

$$E = \frac{d\varphi}{dz} \Big|_{z=0} = -4\pi k d .$$

Então, de acordo com Eq.(61)

$$\sigma' = \frac{E}{4\pi k} = -\sigma$$

ou seja, é igual e oposta à carga da placa de cima. Isto é o resultado da indução, a carga positiva da placa de baixo, que inicialmente era neutra, fugiu para a terra. Então, o condensador é globalmente neutro. Qual o campo eléctrico fora do condensador? A solução (67) da equação de Poisson aplica-se também a $z > d$, mas as constantes $C_1 = 0$ e $C_2 = 4\pi k d \sigma$ obtêm-se da continuidade do φ e do teorema de Gauss; que prevê um salto da intensidade do campo eléctrico numa superfície carregada (o salto é igual a $4\pi k \sigma$). Então, o campo é nulo fora do condensador.

Não necessariamente uma das placas do condensador deve estar ligada à Terra. Ou seja, pode ter um potencial diferente do zero. Neste caso, entende-se pela capacidade a razão

$C = \frac{Q}{\Delta\varphi}$, onde $\Delta\varphi$ é a diferença de potencial entre as placas e Q , na mesma, é a carga de uma das placas.

Condensadores em paralelo e em série

Consideremos dois condensadores, em princípio, de capacidades diferentes, C_1 e C_2 , ligados em paralelo. Qual a capacidade dessa associação? A d.d.p. entre as placas é igual para os dois,

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = V$$

A carga total armazenada é

$$Q = Q_1 + Q_2$$

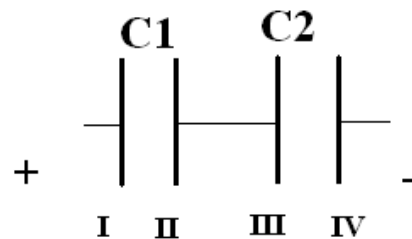
Então,

$$C = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} = C_1 + C_2 \quad (70)$$

ou seja, a capacidade total é a soma das duas.

Consideremos agora dois condensadores ligados em série. A d.d.p., entre as placas IV e I é

$$V = \Delta\varphi_{II-I} + \Delta\varphi_{IV-III} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$



(porque $\Delta\varphi_{I-IV} = V$ e $\varphi_{II} = \varphi_{III}$). Se carregarmos

esta associação com uma carga Q , isto significa que a placa IV tem carga Q , e a placa I tem carga $-Q$ (ou ao contrário). Como a parte que inclui as placas II e III é neutra,

$Q_1 = Q_2 = Q$. Então, a capacidade total é:

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{\Delta\varphi_{IV-I}} = \frac{Q}{\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}} \\ &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (71)$$

Notemos que C é menor do que C_1 ou C_2 .

Os resultados (70) e (71) aplicam-se aos condensadores de outra forma geométrica, por exemplo, aos cilíndricos.

3.3 Energia num condensador carregado

Consideremos um condensador com carga q (q numa placa e $-q$ noutra). Aumentemos a carga do condensador por dq . Isto significa transferir a carga dq de uma placa para a outra. Transferir uma carga (neste caso, dq) dum ponto para outro implica realizar um trabalho, igual à carga vezes a diferença de potencial entre os dois pontos (ou seja, entre as duas placas):

$$dW = dq\Delta\phi = dq \frac{q}{C}$$

(porque $\Delta\phi = \frac{q}{C}$). Então, para carregar um condensador com carga Q , é preciso realizar o trabalho igual a

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} = U \quad (72)$$

que devemos considerar igual à energia armazenada no condensador (U). A energia também pode ser escrita na forma

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta\phi)^2 \quad (73)$$

que a expressa através da diferença de potencial entre as placas.

Esta energia armazenada no condensador pode ser interpretada de outra maneira. Utilizando a Eq.(69) para C e Eq.(68) para $\Delta\phi$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} U &= \underbrace{Sd}_{\uparrow} \frac{1}{2} 4\pi k \sigma^2 \\ &\text{(o volume dentro do condensador)} \\ &= \text{(o volume)} \frac{1}{8\pi k} E^2 \end{aligned} \quad (74)$$

onde ainda utilizamos a fórmula (61). Este resultado está em acordo com a fórmula geral (59) para a energia eléctrica de um sistema de cargas. A grandeza $\frac{1}{8\pi k} E^2$ chama-se

densidade volúmica de energia eléctrica. Então, a energia armazenada num condensador, por um lado, é a energia electrostática da interacção entre as cargas que se encontram nas suas placas, por outro lado, é a energia do campo eléctrico no interior do condensador.

Resumo

- 1) Num condutor ideal
 - (i) $\vec{E} = 0$ no seu interior, e todos os pontos são equipotenciais;
 - (ii) $\rho = 0$ no interior;
 - (iii) o campo eléctrico no exterior, perto da superfície, é perpendicular à superfície, sendo o seu módulo igual a $(4\pi k \sigma)$.
- 2) Condensador é um sistema de condutores utilizado para armazenar carga eléctrica. É caracterizado pela capacidade. A capacidade de condensador de placas paralelas é

$$C = \frac{S}{4\pi k d}, \text{ onde } S - \text{área, } d - \text{distância entre as placas.}$$

A diferença de potencial entre as placas é $\Delta\varphi = Q/C$ e a energia armazenada é

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C (\Delta\varphi)^2 .$$

As regras de associação de condensadores em paralelo e em série são dadas pelas Eqs. (70) e (71).

Anexo. Elemento de volume, versores dos eixos e operações diferenciais em coordenadas esféricas e cilíndricas

Coordenadas esféricas r, θ, ϕ	Coordenadas cilíndricas r, ϕ, z
$x = r \sin \theta \cos \phi$ $y = r \sin \theta \sin \phi$ $z = r \cos \theta$ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$ $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$x = r \cos \phi$ $y = r \sin \phi$ $z = z$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $z = z$
$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$	$dV = r dr d\phi dz$
$n_r = \sin \theta \cos \phi e_x + \sin \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z$ $n_\theta = \cos \theta \cos \phi e_x + \cos \theta \sin \phi e_y - \sin \theta e_z$ $n_\phi = -\sin \phi e_x + \cos \phi e_y$	$n_r = \cos \phi e_x + \sin \phi e_y$ $n_\phi = -\sin \phi e_x + \cos \phi e_y$ $n_z = e_z$
$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$ $\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$ $\text{rot} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] n_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} \right] n_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right] n_\phi$ $\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$	$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z$ $\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ $\text{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) n_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) n_\phi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right] n_z$ $\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$