Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

MIEInf
04 de novembro de 2015
[duração 2h]

Cálculo

Teste 1 – Proposta de correção

Nome Completo	Número

JUSTIFIQUE CUIDADOSAMENTE TODAS AS SUAS RESPOSTAS.

I

(5 valores)

Relativamente às questões deste grupo indique se a afirmação é **verdadeira** ou **falsa**.

1. Seja f uma função real de uma variável real, definida para qualquer número real.
A função g definida por $g(x) = f(x) + f(-x)$ é uma função par.
Verdade.
A função g com domínio $\mathbb{R}$ é par quando $g(x) = g(-x)$. Ora, neste caso,

$$g(-x) = f(-x) + f(-(-x)) = f(-x) + f(x) = g(x)$$

pelo que g é par.

2. Seja f uma função, real de uma variável real.

$$\lim_{x \longrightarrow 3} f(x) = 5 \Longleftrightarrow \text{quando } 0 < |x-3| < 1, \text{se tem } |f(x) - 5| < \frac{1}{10}.$$

Falso.
Considere-se, por exemplo, a função constante $f(x) = 5.05$, $x \in \mathbb{R}$. Quando $0 < |x-3| < 1$ vem

$$|f(x) - 5| = |5.05 - 5| = 0.05 < \frac{1}{10}$$

no entanto

$$\lim_{x \longrightarrow 3} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3} 5.05 = 5.05 \neq 5\,.$$

3. Os domínios das funções definidas por $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ e $g(x) = \operatorname{arctg} x$ são iguais.
Falso.
O domínio da função f é $[-1, 1]$ e o domínio da função g é $\mathbb{R}$.

4. A equação $6x^4 - 7x + 1 = 0$ tem, quando muito, duas raízes reais distintas.
Verdade.
Considere-se a função $f(x) = 6x^4 - 7x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Dos corolários do teorema de Rolle, sabe-se que não há mais do que um zero de f inferior ao menor zero de f', nem mais do que um zero de f superior ao maior zero de f'.
Ora, $f'(x) = 24x^3 - 7 = 0$ se e só se $x = \sqrt[3]{\dfrac{7}{23}}$. Isto é, a derivada da função f tem exatamente um zero. Assim, f não tem mais que um zero inferior a $\sqrt[3]{\frac{7}{23}}$ nem mais que um zero superior a este valor: f tem, no máximo, dois zeros reais. Ou, de forma equivalente a equação $6x^4 - 7x + 1 = 0$ tem, no máximo, duas raízes reais.

5. $\left[\displaystyle\int f(x)\,dx\right]' = \displaystyle\int f'(x)\,dx, \qquad \forall x \in I \subseteq \mathbb{R}.$
Falso.
Tome-se, por exemplo a função $f(x) = 1$, $x \in I$. Então

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = \left[\int 1\,dx\right]' = [x + \mathcal{C}]' = 1, \qquad \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

$$\int f'(x)\,dx = \int 0\,dx = \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

II

(15 valores)

1. (3 valores)

Considere a função $f : [-1,0] \cup]1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está representado na figura. No intervalo $[-1,0]$ o gráfico da função f coincide com o gráfico da função exponencial.

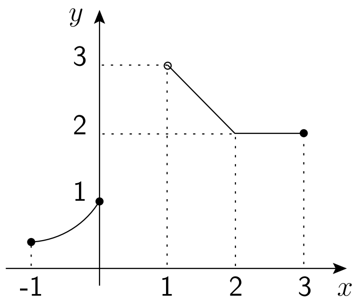
(a) Qual o contradomínio da função f.

(b) A função f é injetiva?

(c) Quais os pontos onde a função f é descontínua?

(d) Quais os pontos onde a função f não é derivável?

(e) Defina, analiticamente, um prolongamento contínuo da função f ao intervalo $[-1,3]$.



(a) Por observação do gráfico verifica-se que $CD_f = [e^{-1}, 1] \cup [2, 3[$.

(b) Uma função é injetiva se a objetos diferentes corresponderem imagens diferentes. Assim, a função f não é injetiva, bastando notar que, por exemplo, $2 \neq 3$ mas $f(2) = f(3)$.

(c) A função f é contínua, como tal não possuí pontos de descontinuidade.

(d) Por observação do gráfico verifica-se que f não é derivável em $x = 2$ por, neste ponto, o seu gráfico apresentar um ponto "anguloso".

(e) A função f é contínua e está definida por ramos

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 4 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 2, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Seja g o prolongamento pedido. A função g é igual à função f nos pontos onde esta função está definida. É então necessário definir g para $x \in]0, 1]$. Para que g seja contínua em $[-1, 3]$ deve-se ter g contínua em $]0, 1[$ e

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} g(x) = g(0) = f(0), \qquad \lim_{x \longrightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} g(x) = g(x).$$

A função $g : [-1, 3] \longrightarrow [e^{-1}, 3]$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D_f \\ 2x - 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} e^x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x - 1 & 0 < x \leq 1 \\ 4 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 2, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

está nas condições pedidas.

2. (2.5 valores)

Encontre os valores de K para os quais é contínua a função f definida por

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & f(x) = \begin{cases} K^2x^2 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ (1-K)x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases} \end{array}$$

A função f está definida por ramos e em cada um destes ramos é contínua por ser uma função polinomial, logo contínua. É necessário analisar o que se passa em $x = 2$. Neste ponto, f será contínua se

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x)$$

isto é se $4K^2 = 2(1 - K)$. Daqui resulta uma equação de 2.° grau que tem duas raízes reais $K = -1$ ou $K = \dfrac{1}{2}$.

Conclui-se, assim, que f é contínua para $K = -1$ ou $K = \dfrac{1}{2}$.

3. (2 valores)

Defina, se existir, (ou mostre que não existe) uma reta tangente à função f, no ponto de coordenadas $(1,1)$, sabendo que

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 & \text{se} & x \leq 1 \\ x & \text{se} & x > 1 \end{array} \right. \end{array}$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f em $(1, f(1))$ é

$$y = f(1) + f'(1)(x-1)$$

desde que f seja derivável neste ponto. Estude-se, então, a derivabilidade de f em $x = 1$ por definição. Tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x+1) = 2 = f'_-(1) \\ \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \longrightarrow 1^-} 1 = 1 = f'_+(1). \end{aligned}$$

Como as derivadas laterais, embora existindo, são diferentes, concluí-se que f não é derivável em $x = 1$. Como tal, não é possível definir a equação tangente ao gráfico de f em $(1, f(1))$.

4. (2.5 valores)

Seja $P_{3,0}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ o polinómio de Taylor de ordem 3 em torno de 0 de uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Nestas condições defina o polinómio de Taylor de ordem 2 em torno de 0 da função f'.

Denote-se $f' = g$. O polinómio de Taylor de ordem 2 em torno de 0 da função g é

$$\begin{aligned} Q_{2,0}(x) &= g(0) + g'(0)(x-0) + g''(0)\frac{(x-0)^2}{2!} \\ &= f'(0) + f''(0)x + f'''(0)\frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Mas, como f e $P_{3,0}$ são iguais até à ordem 3 tem-se

$$\begin{array}{ll} P_{3,0}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 & P_{3,0}(0) = 1 = f(0) \\ P'_{3,0}(x) = 2 + 6x + 12x^2 & P'_{3,0}(0) = 2 = f'(0) = g(0) \\ P''_{3,0}(x) = 6 + 24x & P''_{3,0}(0) = 6 = f''(0) = g'(0) \\ P'''_{3,0}(x) = 24 & P'''_{3,0}(0) = 24 = f'''(0) = g''(0)\,. \end{array}$$

Então

$$Q_{2,0}(x) = 2 + 6x + 12x^2 = [P_{3,0}(x)]'\,.$$

5. (1 valor)

Defina uma função F, no intervalo $[0,2]$, sabendo que $F''(x) = x^2 - x$, $F'(1) = 0$ e $F(0) = 1$

Se $F''(x) = x^2 - x$ então

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int F''(x)\,dx = \int (x^2 - x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \\ F(x) &= \int F'(x)\,dx = \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1\right)dx = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Assim,

$$F(0) = 1 \Rightarrow \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\right|_{x=0} = 1 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$F'(1) = 0 \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1\right|_{x=1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{6}.$$

Finalmente

$$\begin{array}{rccl} F: & [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & F(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{6}x + 1. \end{array}$$

6. (4 valores)

Calcule as seguintes primitivas

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^5}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}\,dx$

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^5}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

(b) Calcule-se esta primitiva é recorrendo ao método de primitivação por partes:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x\;dx = \int 1\ \operatorname{arctg} x\;dx &= x\ \operatorname{arctg} x - \int x\frac{1}{x^2+1}\,dx + \mathcal{C}\\ &= x\ \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \mathcal{C}\\ &= x\ \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathcal{C}\\ &= x\ \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{x^2+1} + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C}\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}\,dx = \int \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'dx = \frac{f(x)}{g(x)} + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\operatorname{sen} x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0

$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$