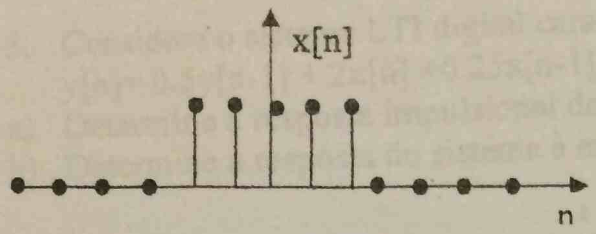
Processamento Digital de Sinal

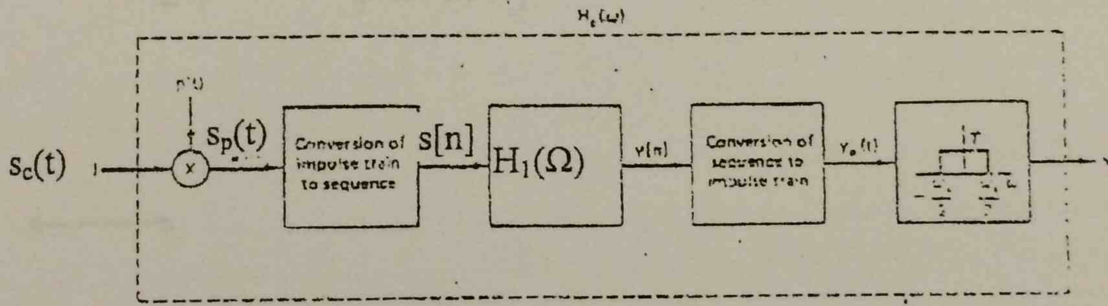
Miniteste1 2010/2011

1. Considere o sinal $y[n]=x[n]\cos((2\pi/4)n)$ onde $x[n]$ está representado na figura seguinte:



a) Represente graficamente y[n]. Justifique.
b) Represente graficamente o módulo e a fase de $Y(\Omega)$. Justifique.
c) Represente a DTFT e a DFT de 6 pontos do sinal y[n]. Justifique.
d) Represente a FFT de mais de 6 pontos do sinal y[n]. Justifique.

2. Considere o sistema de processamento discreto de sinais contínuous mostrado na figura seguinte com o qual se pretende recuperar o sinal x(t) que se apresenta à entrada do sistema degradado da forma $s_c(t) = x(t-3T_0) + x(t+T_0)$;



a) Considere $x(t) = \frac{w_1}{\pi} \sin c\left(\frac{w_1 t}{\pi}\right)$. O sinal sc(t) pode ser, em sua opinião, directamente aplicado à entrada do sistema? Se a sua resposta for negativa represente em termos de diagrama de blocos um sistema que permita a adaptação de sc(t) ao sistema de processamento digital de sinais contínuos.
b) Determine o período de amostragem máximo para o qual x(t) ou uma sua versão modificada possa ser completamente recuperado á saída do sistema. Justifique.
c) Considere o sinal sc(t) amostrado à frequência de Nyquist e determine o atraso do eco para o qual s[n]=x[n-6]+x[n+2].
d) Represente os espectros dos sinais sc(t), p(t), sp(t) e s[n]. Justifique convenientemente os cálculos que efectuar e comente adequadamente as suas representações gráficas.
e) Projecte o filtro $H1(\Omega)$ que permita recuperar x(t) a menos da fase. Pretende-se que $yc(t)=x(t-T_0)$.

f) Imagine que na situação da alínea c) fazia uma decimação por um factor de 2 em s[n]. Na sua opinião perdia alguma informação do sinal. Se sim como procederia para minimizar ou anular essa perda. Justifique convenientemente a sua resposta.

3. Considere o sistema LTI digital caracterizado pela seguinte equação de diferenças $y[n]= 0.5y[n-1] + 2x[n] +0.25x[n-1]$. Utilize a Transformada-Z e:

a) Determine a resposta impulsional do sistema.

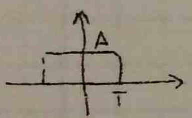
b) Determine a resposta do sistema à entrada

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

c) Determine a entrada do sistema cuja saída é

$$y[n] = n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

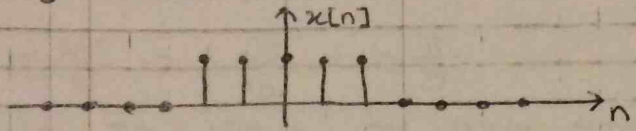
$$\cos(\Omega_0 n) \longleftrightarrow \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right]$$



$\longleftrightarrow$

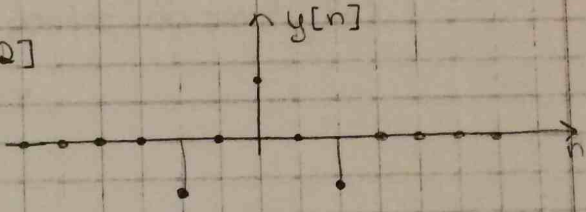
① $y[n] = x[n]\cos((2\pi/4)n)$, onde $x[n]$ está representado:

2010/2011



a) Represente graficamente $y[n]$.

$y[n] = 0 \quad , n < -2$
$y[-2] = x[-2]\cos(-\pi) = -x[-2]$
$y[-1] = x[-1]\cos(-\pi/2) = 0$
$y[0] = x[0]\cos(0) = x[0]$
$y[1] = x[1]\cos(\pi/2) = 0$
$y[2] = x[2]\cos(\pi) = -x[2]$



b) Represente graficamente o módulo e a fase de $Y(\Omega)$.

$$y[n] = x[n]\cos((2\pi/4)n) \longleftrightarrow Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(\Omega) * T.F.\{\cos\tfrac{2\pi}{4}n\}\right]$$

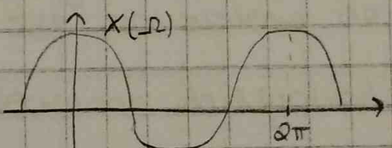
$$\cos(\Omega_0 n) = \sum_{n=-2}^{2} 1 . e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-2}^{2} (e^{-j\Omega})^n$$

m.v.: $n \to m$: $m = n+2$

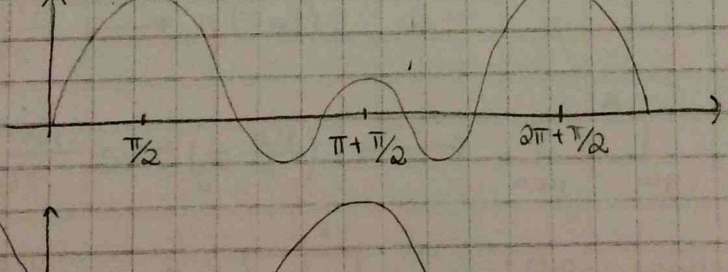
$$X(\Omega) = \sum_{m=0}^{4} (e^{-j\Omega})^{m-2} = e^{2j\Omega}\sum_{m=0}^{4} e^{-j\Omega m} = e^{2j\Omega}\frac{1-e^{-j\Omega 5}}{1-e^{-j\Omega}}$$

$$= e^{2j\Omega}\frac{\cancel{e^{-j\frac{\Omega}{2}}}\left(e^{j\Omega/2} - e^{-j9/2\,\Omega}\right)}{\cancel{e^{-j\frac{\Omega}{2}}}\left(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}\right)} = \frac{e^{j\frac{5}{2}\Omega} - e^{-j5/2\,\Omega}}{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}$$

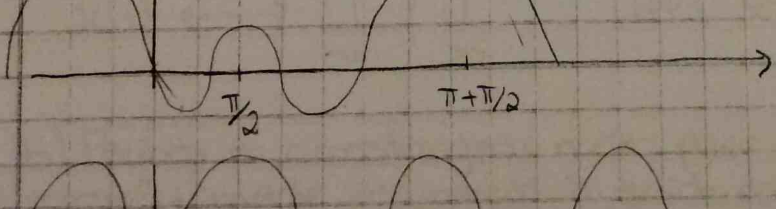
$$= \frac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}$$



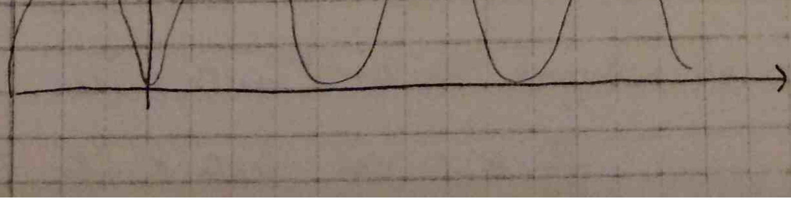
$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\theta) * P(\Omega-\theta)\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[X(\Omega-\Omega_0) + X(\Omega+\Omega_0)\right]$$



$X(\Omega - \pi/2)$



$X(\Omega + \pi/2)$



$Y(\Omega)$
Espaçamento $\frac{2\pi}{6}n$

c) Represente a DTFT e a DFT de 6 pontos do sinal y[n].

$N = 6$

$$n\frac{2\pi}{N} \Rightarrow n\frac{2\pi}{6} = n\frac{\pi}{3}$$

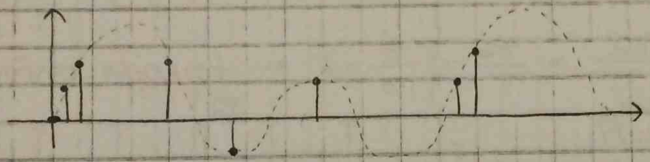
$$\{0,\ \pi/3,\ 2\pi/3,\ \pi,\ 4\pi/3,\ 5\pi/3\}$$

d) Represente a FFT de mais de 6 pontos do sinal y[n].

$N: N = 2^n \geq 6 \Rightarrow n = 3,\ N = 8$

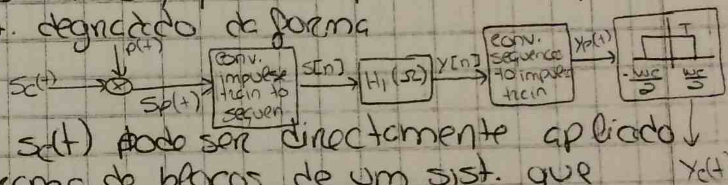
$$n\frac{2\pi}{N} \Rightarrow n\frac{2\pi}{8} = n\frac{\pi}{4}$$

$$\{0,\ \pi/4,\ \pi/2,\ 3\pi/4,\ \pi,\ 5\pi/4,\ 3\pi/2,\ 7\pi/4\}$$



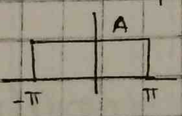
② Proces. discreto de sinais contínuos, quer recuperar $x(t)$ que se representa à entrada do sist. degradado de forma

$s_c(t) = x(t - 3T_0) + x(t - T_0)$



a) $x(t) = \frac{w_1}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{w_1 t}{\pi}\right)$. O sinal $s_c(t)$ pode ser directamente aplicado à entrada do sistema? Diagrama de blocos de um sist. que permite a adaptação de $s_c(t)$ ao sistema de PDS contínuos.

Desde que cumpra o teorema de Nyquist, podemos aplicar.



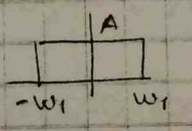
$\longleftrightarrow\ 2AT\,\text{sinc}\left(\frac{wT}{\pi}\right)$

$x(t) \longleftrightarrow X(w)$

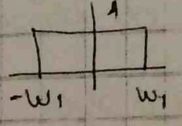
$X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-w)$ $\boxed{T = w_1}$

$\frac{X(t)}{2\pi} \longleftrightarrow x(-w)$

$\frac{2Aw_1}{2\pi}\text{sinc}\left(t\frac{w_1}{\pi}\right) \longleftrightarrow$



$x(t) \longleftrightarrow$



(Pelo teorema da dualidade)

b) Período de amostragem máx para o qual $x(t)$ possa ser completamente recuperado à saída do sistema.

$w_s \geq 2w_1 \longrightarrow$ vel. angular de amostragem

$$\frac{2\pi}{T_s} \geq 2w_1 \Rightarrow T_s \leq \frac{\pi}{w_1}$$

c) Considere o sinal $s_c(t)$ amostrado à freq. de Nyquist e det. o atraso do eco para o qual $s[n] = x[n-6] + x[n+2]$

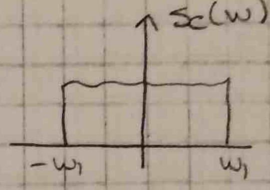
$$s[n] = s_c(nT) = x\left(\frac{nT - 3T_0}{T}\right) + x\left(\frac{nT + T_0}{T}\right)$$

$$s[n] = x\left[n - \frac{3T_0}{T}\right] + x\left[n + \frac{T_0}{T}\right] \Longrightarrow \frac{T_0}{T} = 2 \Leftrightarrow T_0 = 2T = 2\frac{\pi}{w_1}$$

d) Espectros de $s_c(t)$, $p(t)$, $s_p(t)$, $s[n]$.

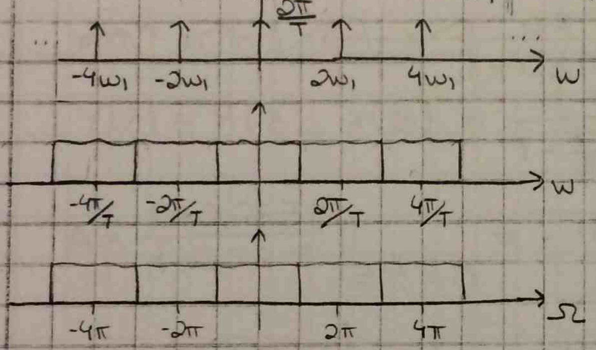
$$s_c(t) = x(t - 3T_0) + x(t + T_0)$$

$$S_c(w) = X(w)\, e^{-3jwT_0} + X(w)\, e^{jwT_0} = X(w)\left(e^{-3jwT_0} + e^{jwT_0}\right)$$



$$p(t) = \sum \delta(t - nT) \longleftrightarrow P(w) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(w - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

Freq. Nyquist $\rightarrow T = \frac{\pi}{w_1} \;\Big|\; = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{w_1}} = 2w_1$



$$s_p(t) = s_c(t) \cdot p(t) \longleftrightarrow S_p(w) = \frac{1}{2\pi}\left[S_c(w) * P(w)\right]$$

$$S(\Omega) = S_p(w)\Big|_{\Omega = wT} \qquad = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_c\left(w - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

e) Projecte o filtro $H_1(\Omega)$ que permite recuperar $x(t)$ a menos de fase. Pretende-se que $y_c(t) = x(t - T_0)$

$\xrightarrow{s[n]} \boxed{H_1(w)} \longrightarrow y[n] = ? \rightarrow x[n-2]$ $\qquad s[n] = x[n-6] + x[n+2]$

$$H_1(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{S(\Omega)} = \frac{X(\Omega)\, e^{-2j\Omega}}{X(\Omega)\, e^{-6j\Omega} + X(\Omega)\, e^{2j\Omega}}$$

f) Na alínea e) fazia uma decimação por um factor 2 em $s[n]$. Perdia informação do sinal?

Sim, perdia toda a informação do sinal, nenhuma parte ficava intacta. É impossível anular a perda. Poderíamos minimizar, se filtrássemos o sinal com um filtro passa baixo, para evitar aliasing. No entanto, perdíamos as frequências de $\pi/2$ até π.

③ $y[n] = 0{,}5\, y[n-1] + 2x[n] + 0{,}25x[n-1]$. Trans. - Z.

a) Resposta impulsional do sistema.

$$Y(z)[1-0{,}5z^{-1}] = X(z)[2+0{,}25z^{-1}]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2+0{,}25z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}}$$

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

$$H(z) = 2\,\frac{1}{1-0{,}5z^{-1}} + 0{,}25z^{-1}\,\frac{1}{1-0{,}5z^{-1}}$$

$$h[n] = 2\,(0{,}5)^n u[n] + 0{,}25\,(0{,}5)^{n-1} u[n-1]$$

b) Resposta do sistema à entrada $x[n] = (1/3)^n u[n]$

$$\cancel{n a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}}$$

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\cdot\frac{2+0{,}25z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}} = \frac{A}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{B}{1-0{,}5z^{-1}}$$

$$A = \left.\frac{2+0{,}25z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}}\right|_{z^{-1}=3} = -11/2$$

$$B = \left.\frac{2+0{,}25z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right|_{z^{-1}=2} = 15/2$$

$$y[n] = -11/2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 15/2\,(0{,}5)^n u[n]$$

c) Entrada do sistema. $y[n] = n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$$n a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$Y(z) = \frac{1/4\, z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1/4\,z^{-1}(1-1/2\,z^{-1}) + (1-1/4\,z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{1/4\,z^{-1}(1-1/2\,z^{-1}) + (1-1/4\,z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2(2+0{,}25z^{-1})}$$

$$= \frac{A}{(1-1/4\,z^{-1})^2} + \frac{B}{1-1/4\,z^{-1}} + \frac{C}{2+0{,}25z^{-1}} = \begin{cases} A = \\ B = \\ C = \end{cases}$$

$$x[n] = A(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+1] + B\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + C/2\,(0{,}125)^n u[n]$$

$$(n+1)\,a^n u[n+1] \longleftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2}$$