Universidade do Minho

Departamento de Matemática e Aplicações

Analise Matemática B

Ficha 7a | MIECOM

Gradiente, Derivadas Direccionais, Funções Impícitas, Plano Tangente, Recta Normal, Fórmula de Taylor

1. Determine o campo vectorial gradiente (grad $f = \overrightarrow{\nabla} f$) da função $f(x,y) = xy$.

2. Determine o gradiente (grad $f = \overrightarrow{\nabla} f$) da função $f(x,y) = x^2 + y^2(1+\sin x)$ no ponto $(a,b) = (\pi, 2)$.

3. Calcule a derivada dirigida da função $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$ no ponto $(1,1,1)$ na direcção do vector $\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$.

4. Seja $f(x,y,z) = \sin\left(\dfrac{xz}{x^2+y^2}\right)$.

   (a) Determine a função vectorial $\overrightarrow{\nabla} f$.

   (b) Calcule $\overrightarrow{\nabla} f(2,1,0)$.

   (c) Qual a taxa de variação de f no ponto $(2,1,0)$ segundo o vector $(1,1,1)$?

5. Sabendo que $D_{\vec{u}} f(a,b) = \vec{u}.\overrightarrow{\nabla} f(a,b) = \|\overrightarrow{\nabla} f(a,b)\|.\cos\phi$ onde ϕ é o ângulo entre os vectores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{\nabla} f(a,b)$:

   (a) qual a direcção segundo a qual f tem maior taxa de crescimento? Nessa direcção, qual a taxa de variação?

   (b) qual a direcção segundo a qual f tem menor taxa de decrescimento? Nessa direcção, qual a taxa de variação?

   (c) qual a direcção segundo a qual f tem taxa de variação nula?

6. Diga para que valores de k a equação $x + 2yx + 3z^2 + x^2 z = 1$ define z implicitamente como função de x e y na vizinhança do ponto $(1,0,k)$.

7. Considere a equação $1 + y = x^2 - \ln y$.

   (a) Mostre que a equação dada define y como função implícita de x numa vizinhança do ponto $(\sqrt{2}, 1)$.

   (b) Determine $\frac{dy}{dx}(\sqrt{2})$ e $\frac{d^2y}{dx^2}(\sqrt{2})$.

8. Considere a equação $1 - \cos(x + 2y + z) = 2x + y - 3z$.

   (a) Mostre que a equação dada define z como função implícita de x e y numa vizinhança do ponto $(0,0,0)$.

   (b) Determine $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0,0)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0,0)$

9. Calcule a equação do plano tangente à superfície $x^3+2xy^2-7z^3+3y+1=0$ no ponto $P=(1,1,1)$.

10. Prove que o plano tangente à superfície $z=x^2-y^2$ no ponto $P=(a,b,c)$ é intersectado pelo eixo dos ZZ no ponto em que $z=-c$.

11. Determine a equação da recta normal à superfície $x^2-yz+3y^2=2xz^2-8z$ no ponto (1,2,-1).

12. Em que ponto da recta determinada na pergunta anterior encontra o plano $x+3y-2z=10$?

13. Determine polinómio de Taylor de grau 2 para a função $f(x,y)=\dfrac{1}{2+x-2y}$ em torno do ponto $(2,1)$.

14. Determine um polinómio de 2^o grau aproximado à função $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, em torno do ponto $(6,8)$ e use-o para estimar $\sqrt{(6,02)^2+(7,97)^2}$.

15. Determine polinómio de Taylor de grau 3 para a função $f(x,y)=e^{x+2y}$ em torno do ponto $(0,0)$.