FICHA 11 A

(1)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+5}$

Série do módulo: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+5} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+5}$

Vou verificar se é da mesma natureza que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\lim \frac{\frac{n}{n^3+5}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^3}{n^3+5} = 1 \neq 0 \wedge \neq \infty$$

Logo a série dada é da mesma natureza que $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$.

Esta é uma Serie de Riem. $\alpha = 2$ que é convergente, logo a série do módulo é convergente e a dada é Abs. Convergente

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ $\quad \lim (-1)^n$ n existe $\neq 0 \Rightarrow$ série divergente

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n n^2}$ $\quad$ S. M. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^2}$

Criterio D'Alembert: $\lim \frac{\frac{1}{3^{n+1}(n+1)^2}}{\frac{1}{3^n n^2}} = \lim \frac{3^n n^2}{3^{n+1}(n+1)^2} = \frac{1}{3} <$

logo a série do módulo é convergente

$\Downarrow$

Série dada é Absolutamente Convergente.

Pg2

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \, \text{sen}(n)}{e^n}$$

$$-1 \leq \text{sen}(n) \leq 1$$

$$-\frac{n}{e^n} \leq \frac{n\,\text{sen}(n)}{e^n} \leq \frac{n}{e^n}$$

$$\left| \frac{n\,\text{sen}(n)}{e^n} \right| < \frac{n}{e^n}$$

Pelo Critério D'Alembert temos,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n+1}{\cancel{e^n}\cdot e}}{\frac{n}{\cancel{e^n}}} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} \text{ é convergente}$$

pelo que a série dada é absolutamente convergente.

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos(n\pi)}{1+n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1+n^3}$$

já que $\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ par} \end{cases} \Leftrightarrow (-1)^n$

- A série do módulo é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2}$ da mesma natureza que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que é divergente. Nada se pode concluir da série dada.
- Pelo Critério de Leibniz e uma vez que $\frac{n^2}{1+n^3}$ é decrescente e $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{1+n^3} = 0$ posso concluir que a série dada é simplesmente convergente.

1) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{4+\cos n}{n^3}$

A série do módulo é $\sum_{n\geq 1} \frac{4+\cos(n)}{n^3}$

$-1 \leq \cos(n) \leq 1$

$\frac{3}{n^3} \leq \frac{4+\cos(n)}{n^3} \leq \frac{5}{n^3}$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^3}$ é convergente. É série de Riemann com $\alpha = 3$. Então, a série dada é absolutamente convergente.

2)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$

b) Sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_n u_n = 0$ e $\sum_{n\geq 1} u_n^3$ seja divergente.

$u_n = \frac{1}{n^{1/4}}$ $\quad \lim \frac{1}{n^{1/4}} = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}} \to$ S.R $\alpha = \frac{3}{4} \to$ divergente

c) Sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_n u_n = 0$ e $\sum_{n\geq 1} u_n^2$ seja divergente.

$u_n = \frac{1}{n^{1/3}}$ $\quad \lim_n \frac{1}{n^{1/3}} = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}} \longrightarrow$ S.R $\alpha = \frac{2}{3} \longrightarrow$ divergente

2)

d) Exemplo de série que

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ diverge

$$\boxed{u_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^{1/2}}}$$

$$\sum u_n^2 = \sum \frac{1}{n} \text{ divergente}$$

$$\sum u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Criterio Leibniz

1) $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ é simplesmente convergente

e)

$u_n = \frac{1}{n}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ é série Riemman $\alpha = 1$ divergente

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ é " " $\alpha = 2$ convergente