Ficha nº 0

1.

$$a_1(3,1)+a_2(6,2)+a_3(-1,1)=(5,6).$$

$$(3a_1,a_1)+(6a_2,2a_2)+(-a_3,a_3)=(5,6)$$

$$(3a_1+6a_2-a_3,\ a_1+2a_2+a_3)=(5,6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1+6a_2-a_3=5 \\ a_1+2a_2+a_3=6 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1-3L_2$$

$$\begin{cases} 0a_1+0a_2-4a_3=-13 \\ a_1+2a_2+a_3=6 \end{cases} \begin{cases} a_3=\frac{13}{4} \\ \text{——} \end{cases} \begin{cases} \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{——} \\ a_1+2a_2+\frac{13}{4}=6 \end{cases} \begin{cases} \\ a_1+2a_2=6-\frac{13}{4}=\frac{11}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3=\frac{13}{4} \\ a_1+2a_2=\frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3=\frac{13}{4} \\ a_1=\frac{11}{4}-2a_2 \end{cases}$$

A solução do problema é:

$$\left(\frac{11}{4}-2a_2,\ a_2,\ \frac{13}{4}\right) \quad \text{com } a_2\in\mathbb{R}.$$

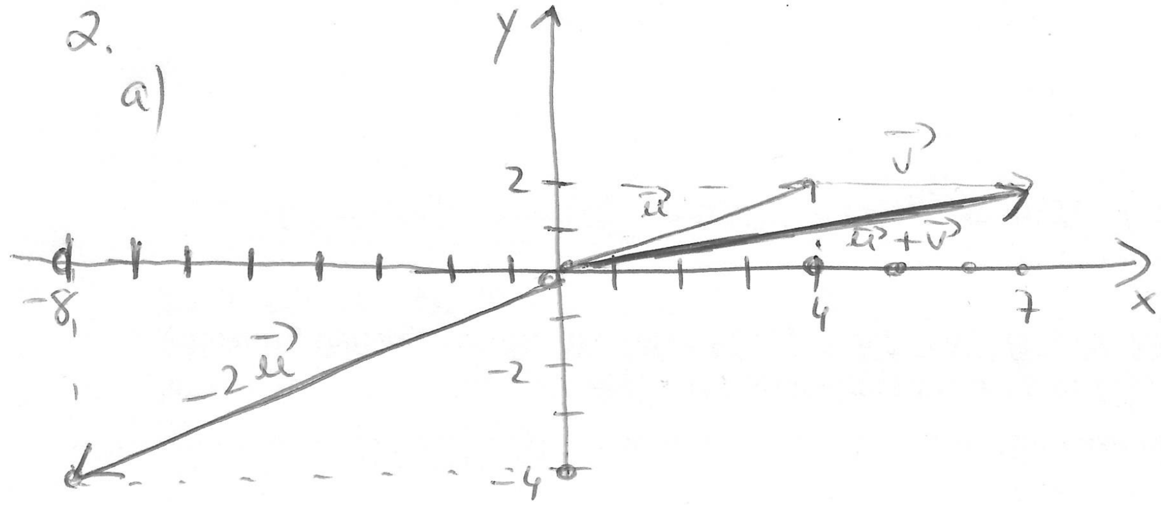
Logo, não há solução única.

Por exemplo, para $a_2=0$

$\left(\frac{11}{4}, 0, \frac{13}{4}\right)$ é uma solução.

2\.

a)



b) $\vec{u}+\vec{v}=(4,2)+(3,0)=(7,2)$

$-2\vec{u}=-2(4,2)=(-8,-4)$

3\. Dois vetores são paralelos se só se forem múltiplos um do outro, isto é, sejam $\vec{u}$ e $\vec{s}$ dois vectores

$\vec{u}=(u_1,u_2)$

$\vec{s}=(s_1,s_2)$

$$\vec{u}\,//\,\vec{s} \Leftrightarrow \vec{u}=k\vec{s} \text{ para } k\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1}{s_1}=\frac{u_2}{s_2}.$$

Neste caso $3\left(\vec{v}-\frac{1}{3}\vec{w}\right)=3\vec{v}-\vec{w}$. ~~Log~~ Como os vetores são múltiplos, então são paralelos.

4\. sejam os vetores $\vec{u}=(3,k-2)$ e $\vec{v}=(-9,1)$.

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos $(\vec{u}\,//\,\vec{v})$ se e só se

$$\frac{3}{-9}=\frac{k-2}{1} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}=k-2 \Leftrightarrow k=2-\frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow k=\frac{5}{3}$. se $k=\frac{5}{3}$, tem-se $(-9,1)=-3\left(3,-\frac{1}{3}\right)$

5 $P \to (3,0,5)$ $\quad Q \to (2,7,6)$

$$\vec{PQ} = Q - P = (2,7,6) - (3,0,5)$$

$$\vec{PQ} = (-1,7,-1) = -1 \times (1,0,0) + 7(0,1,0) - 1 \cdot (0,0,1)$$

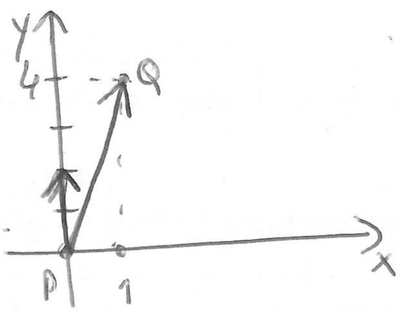
$$= -1\,\vec{e_1} + 7\,\vec{e_2} - 1 \cdot \vec{e_3}.$$

ou $= -\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$.

6 $P \to (1,0)$ $\quad Q \to (2,4)$

a) $\vec{PQ} = Q - P = (2,4) - (1,0) = (1,4)$

b)



O vector $\vec{e_2} = (0,1)$ indica a posição Norte. Assim, é possível determinar ângulo entre o vector $\vec{PQ} = (1,4)$ e o vector $\vec{e_2} = (0,1)$, usando, por exemplo, o produto interno:

$$\vec{PQ} \cdot \vec{e_2} = (1,4)\cdot(0,1) = \|(1,4)\|\,\|(0,1)\| \cdot \cos\alpha \qquad \alpha = \measuredangle(\vec{PQ}, \ldots$$

$$1\times 0 + 4 \times 1 = \sqrt{1+16}\,\sqrt{1}\,.\cos\alpha$$

$$4 = \sqrt{17}.\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\alpha = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

7) Dado um ponto $P \to (p_1, p_2, p_3)$ que pertence a uma recta R e um vector director $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ da recta R, a equação vectorial da recta R é:

$$(x,y,z) = P + t\,\vec{u} = (p_1, p_2, p_3) + t\,(u_1, u_2, u_3)$$

$t \in \mathbb{R}$

E as equações paramétricas são

$$\boxed{\begin{cases} x = p_1 + tu_1 \\ y = p_2 + tu_2 \\ z = p_3 + tu_3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

Assim, se a recta passa no ponto $P \to (3,-1,2)$ e tem a direcção do ~~recta~~ vector $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, a equação vectorial é

$$(x,y,z) = (3,-1,2) + t(2,-3,4) \quad , t \in \mathbb{R}$$

e as equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

8. Se a recta passa nos pontos $P \to (2,-1)$ e $Q \to (-3,4)$ então tem a direcção do vector $\vec{PQ} = Q - P$

$$= (-3,4) - (2,-1)$$
$$= (-5,5)$$

e a eq. vectorial da recta é:

$$(x,y) = P + t\vec{PQ} = (2,-1) + t(-5,5) \quad , t \in \mathbb{R}$$

e as eq. paramétricas são

$$\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -1 + 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

9. A recta $\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = -5 \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

tem a direcção do vector $\vec{u} = (-3,0,2)$ e passa no ponto $P \to (2,-5,0)$.

10. As rectas

$$(x,y,z) = (t, -6t+1, 2t-8)$$

e $(x,y,z) = (3t+1, 2t, 0)$ intersectam-se se houver um $t_1 \in \mathbb{R}$ e um $t_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(t_1, -6t_1+1, 2t_1-8) = (3t_2+1, 2t_2, 0)$$

Como se tem sempre $2t_1 - 8 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 4$, veremos se existe t_2 tal que

$$\begin{cases} 4 = 3 \times t_2 + 1 \\ -6 \times 4 + 1 = 2t_2 \\ \text{—} \end{cases} \quad \begin{cases} 3t_2 = 3 \\ -23 = 2t_2 \\ \text{—} \end{cases} \quad \begin{cases} t_2 = 1 \\ t_2 = -23/2 \end{cases}$$

Como não deu o mesmo t_2, então não existe um $t_1 \in \mathbb{R}$ e $t_2 \in \mathbb{R}$ tal que as rectas se intersectem.

11. Se o segmento passa nos pontos $\overset{P}{(1,1,1)}$ e $\overset{Q}{(2,1,2)}$, tem a direcção do vector $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,1,2) - (1,1,1)$
$= (1,0,1)$.

A equação da recta que contém os dois pontos é

$(x,y,z) = (1,1,1) + t(1,0,1) \quad , t \in \mathbb{R}.$

A equação do segmento de recta com início em $(1,1,1)$ e fim em $(1,0,1)$ é

$$(x,y,z) = (1,1,1) + t(1,0,1) \quad , \text{ com } t \in [0,1].$$

12. $\|2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{4+16+25}$

$= \sqrt{20+25} = \sqrt{45}$

Nota:

$\|u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + u_3\vec{e_3}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

dá o comprimento do vector $u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + u_3\vec{e_3}$.

13. $\|\vec{i} - \sqrt{6}\,\vec{j} + c\vec{k}\| = 4 \Leftrightarrow$

$\sqrt{1 + (\sqrt{6})^2 + c^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{1+6+c^2} = 4 \Leftrightarrow$

$\sqrt{7+c^2} = 4 \Leftrightarrow 7 + c^2 = 16 \Leftrightarrow c^2 = 9 \Leftrightarrow$

$c = \pm 3.$

14. a) Pode determinar-se o ângulo entre dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a partir do seu produto interno, pois $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| . \cos\alpha$, onde α é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

a) Assim, o ângulo α entre $(1,1,1)$ e $(1,1,-1)$ pode ser determinado da forma

$$(1,1,1)\cdot(1,1,-1) = \|(1,1,1)\|\,\|(1,1,-1)\| \cdot \cos\alpha$$

$$1+1-1 = \sqrt{1+1+1}\,\sqrt{1+1+1} \cdot \cos\alpha$$

$$1 = \sqrt{3}\,\sqrt{3} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{3}.$$

b) O ângulo α entre $3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ e $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ é:

$$(3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})\cdot(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) = \|3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\|\,\|\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\| \cdot \cos$$

$$3-1-2 = \sqrt{9+1+4}\,\sqrt{1+1+1} \cdot \cos\alpha$$

$$0 = \sqrt{14}\,\sqrt{3} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ radianos}$$

Os vectores são perpendiculares.

15. a) Equações paramétricas da recta l

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}t \\ y = 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Se R é um ponto da recta l, as suas coordenadas serão $R = \left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}t, -\frac{1}{\sqrt{2}}t, 0\right)$ para um determinado valor de $t \in \mathbb{R}$.

b) $\overrightarrow{PR} = R - P = \left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}t, -\frac{1}{\sqrt{2}}t, 0\right) - (2,0,0)$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}t, -\frac{1}{\sqrt{2}}t, 0\right)$

$\overrightarrow{QR} = R - Q = \left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}t, -\frac{1}{\sqrt{2}}t, 0\right) - (1,1,2)$

$= \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}t, -\frac{1}{\sqrt{2}}t - 1, -2\right)$

$\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QR} \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$

$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}t, -\frac{1}{\sqrt{2}}t, 0\right) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}t, -\frac{1}{\sqrt{2}}t-1, -2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}t\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}t\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) = 0$

$\frac{2}{\sqrt{2}}t\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee 1+\frac{1}{\sqrt{2}}t = 0$

se $t=0$, o ponto $R = P$

então $1+\frac{1}{\sqrt{2}}t = 0 \Leftrightarrow t = -\sqrt{2}$

e

$R \to \left(2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 0\right) = (1,-1,0)$

c) $\overrightarrow{QR} = (0,0,-2)$

$\|\overrightarrow{QR}\| = \|(0,0,-2)\| = \sqrt{4} = 2$ unidades de comprimento.

16.

A equação cartesiana de um plano que passa no ponto $P \to (p_1, p_2, p_3)$ e é perpendicular ao vector (p) $\vec{u} = (A, B, C)$ é:

$$A(x - p_1) + B(y - p_2) + C(z - p_3) = 0$$

Assim, a equação do plano que contém o ponto $(1,1,1)$ e é ortogonal a $2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ é:

$$2(x-1) + 1(y-1) - 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x - 2 + y - 1 - 2z + 2 = 0$$

$$\boxed{2x + y - 2z = 1}$$

17. Se o plano contém os pontos $\overset{P}{(1,1,1)}$, $\overset{Q}{(2,0,0)}$ e $\overset{R}{(1,1,0)}$, então contém os vectores

$$\vec{PQ} = Q - P = (2,0,0) - (1,1,1) = (1,-1,-1)$$

$$\vec{PR} = R - P = (1,1,0) - (1,1,1) = (0,0,-1).$$

O vector $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular ao plano que contém ambos os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{e_1}(1-0) - \vec{e_2}(-1-0) + \vec{e_3}(0)$$

$$= \vec{e_1} + \vec{e_2} = (1,1,0).$$

Assim, a equação do plano que contém, por exemplo, o ponto $P_0(1,1,1)$ e é ortogonal ao vector $\vec{PQ} \times \vec{PR} = (1,1,0)$ é

$$1(x-1) + 1(y-1) + 0\cdot(z-1) = 0$$

$$x-1+y-1=0 \Leftrightarrow \boxed{x+y=2}\ , z \text{ livre}$$

<u>Nota:</u> Se z é livre, este é um plano paralelo ao eixo Oz.

18\. Um vector perpendicular ao plano $3x+y-z=0$ é $\vec{u} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}$.

19\. Recta que passa em $P_0(0,0,0)$ e tem a direcção de $\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ é

$$\begin{cases} x = 0+t \\ y = 0+t \\ z = 0+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

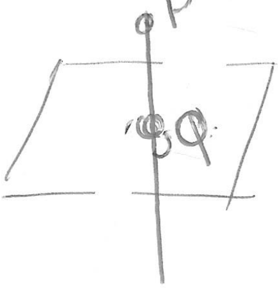
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

A equação do plano é $x+y+2z=5$.

Um ponto da recta $(t,t,2t)$ pertence ao plano se satisfizer a equação do plano $t+t+2(2t)=5 \Leftrightarrow 2t+4t=5 \Leftrightarrow 6t=5$

O ponto $(5,5,5)$ pertence ao plano e à recta. $t=5/6$

A distância da origem $P \to (0,0,0)$ ao plano é a distância entre o ponto $(0,0,0)$ e o ponto $Q\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{3}\right)$ pois o vector perpendicular ao plano $(1,1,2)$ é o vector director da recta, isto é, a recta é perpendicular ao plano e Q pertence à recta e ao plano



$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{150}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$