Álgebra Linear EE- 2015/2016

Folha de Exercícios 1

1. Dê um exemplo de uma matriz:

1.1 real do tipo 2×3
1.2 complexa de ordem 3
1.3 linha com 3 elementos
1.4 coluna com 4 elementos
1.5 triangular superior pertencente a $IR^{3\times3}$
1.6 triangular inferior de ordem 4
1.7 simétrica pertencente a $C^{3\times3}$
1.8 hermitiana de ordem 3.

2. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calcule:

2.1 $B^T A \quad e \quad (C^T A + D^T A)^T$
2.2 $A^T B \quad e \quad B^T (C + D)$

3. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = [b_{ij}] \in IR^{2\times3}, \quad b_{ij} = i - j; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} i & 0 & 2i \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Indique se estão bem definidas as seguintes expressões, efectuando as operações nesses casos:

3.1 $A + 2B$
3.2 $A - C$
3.3 AC
3.4 CA
3.5 C^3
3.6 $\dfrac{AB^T + BA^T}{2}$
3.7 $(ABA^T C)^2$
3.8 $\overline{D} D^H D D^T$
3.9 uu^T
3.10 $u^T u$
3.11 $u^T A^T B u$

4. Determine os valores de *a*, *b*, e *c*, para que as matrizes *A* e *B* sejam simétricas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & b \\ a & 3 & 2 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & b \\ -1 & a & 1 \\ 3 & c & 0 \end{bmatrix}$$

5. Dê um exemplo de uma matriz quadrada real A, tal que $A^2 = -I$.

6. Prove que o produto de uma matriz pela sua transposta é uma matriz simétrica.

7. Verifique que $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{i}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{e^{2i}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{e^{-2i}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{e^{-i}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ é uma matriz unitária e determine a sua inversa.

8. Seja a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

8.1 Calcule M^2 e verifique que $M^2 = \lambda . M, \quad \lambda \in IR$.
8.2 Calcule M^3 *e* M^4 em função de λ e de M.
8.3 Deduza da alínea 8.2 a expressão genérica de M^n.

9. Mostre que as matrizes $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ são ortogonais e calcule A^{-1} *e* B^{-1}.

10. Considere as seguintes matrizes sobre C:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ i & 1+i & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -i \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & 1+i & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -i \\ 1+i & i & 2 \\ i & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

10.1 Determine as matrizes transposta, conjugada e transconjugada de $A_j, \ j \in \{1,2,3\}$.

10.2 Diga, justificando, se alguma das matrizes $A_j, \ j \in \{1,2,3\}$, é

i) simétrica;

ii) hermitiana.

11. Considere as seguintes matrizes sobre C

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & i & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -i \\ -2 & 1+i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11.1 Efectue as seguintes transformações elementares nas linhas de A e, em cada caso, escreva a matriz obtida como produto de uma matriz elementar pela matriz A:

i) Troca de ordem das linhas 2 e 3.

ii) Multiplicação da linha 3 por –i.

iii) Substituição da linha 2 pela sua soma com a linha 1 multiplicada por i.

11.2 Dê exemplos de matrizes equivalentes a A. Justifique.

11.3 Efectue as seguintes transformações elementares nas colunas de B

i) Troca de ordem das colunas 1 e 3.

ii) Multiplicação da coluna 2 por –2.

iii) Substituição da coluna 3 pela sua soma com a coluna 1 multiplicada por –1.

11.4 Dê exemplos de matrizes equivalentes a B. Justifique.

12. Determine a característica de cada uma das seguintes matrizes:

12.1 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

12.2 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

12.3 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

12.4 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

13. Discuta em função dos parâmetros reais α *e* β a característica da matriz, $A=\begin{bmatrix}\beta & -\alpha & 0\\ 0 & 0 & \alpha\\ 0 & \beta & 0\end{bmatrix}$.

14. Sejam $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix} \in M_{3\times 4}(R)$. Diga, Justificando, se as matrizes A e B são equivalentes.

15. Diga quais das seguintes matrizes sobre IR são invertíveis, e nos casos afirmativos, determine a respectiva inversa.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 3 & 9\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\ e\quad D=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

16. Considere a matriz real $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & \alpha & 1\\ 2 & 2 & 0 & \alpha\\ 0 & 0 & \alpha & \beta\\ 3 & 0 & 6 & 0\end{bmatrix}$.

16.1 Diga para que valores reais de α *e* β, a matriz A é invertível.

16.2 Admita $\alpha \neq 0$ *e* $\beta \neq 1$ e determine A^{-1}.

16.3 Ainda para $\alpha \neq 0$ *e* $\beta \neq 1$, considere a matriz B que se obtém de A, por troca da segunda com a terceira coluna. Calcule B^{-1} e compare-a com A^{-1}.