Sumários Alargados de Análise Matemática II
Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

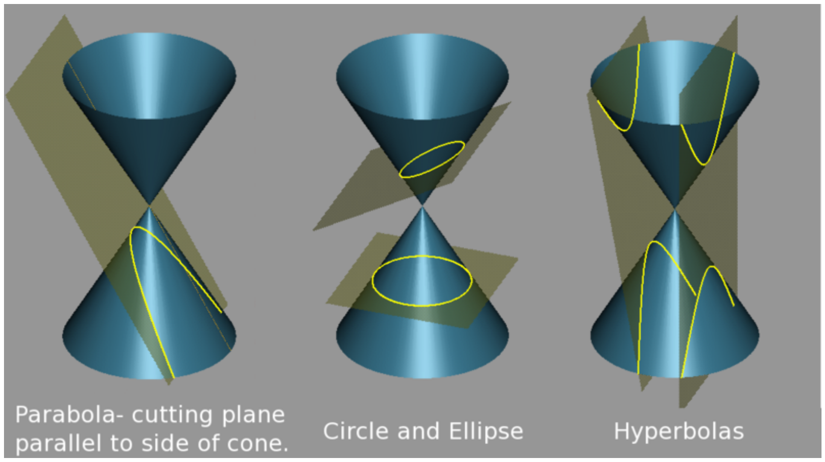
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra

2010-2011

1 Geometria do Espaço

1.1 Cónicas

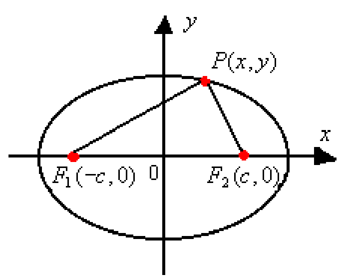
Chamamos **cónicas** às curvas obtidas quando se intersectam um cone duplo e um plano que não contém o vértice do cone.



(em http://schools-wikipedia.org/wp/c/Conic$underline$section.htm)

Também podemos obter definições equivalentes de cónicas baseadas nas suas propriedades geométricas.

Definição 1.1. Uma **elipse** é o conjunto de pontos do plano tal que soma das distâncias a dois pontos fixos, ditos **focos**, é constante e maior que a distância entre os focos.

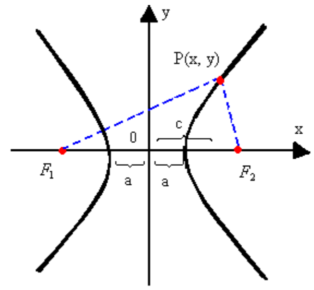


Uma equação da elipse centrada na origem, de eixos de simetria $0X$ e $0Y$, com focos $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, e que contém o ponto $(a, 0)$ é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde $b^2 = a^2 - c^2$.

Definição 1.2. Uma **hipérbole** é o conjunto dos pontos do plano tais que o módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos, ditos **focos**, é constante e menor que a distância entre os focos.

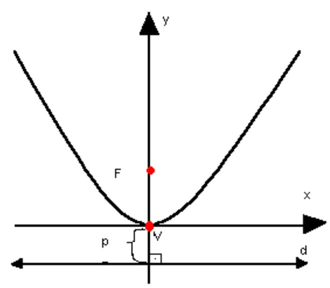


Uma equação da hipérbole centrada na origem e de **eixo focal** $0X$ e **eixo conjugado** $0Y$, com focos $(c, 0)$ e $-c, 0)$, que contém o ponto $(a, 0)$ é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Note-se que $c^2 = a^2 + b^2$.

Definição 1.3. Uma **parábola** é o conjunto de pontos do plano equidistantes de uma recta fixa, dita **directriz**, e de um ponto fixo fora dessa recta, dito **foco**.



Uma equação da parábola de vértice na origem, com foco $(0, p)$, directriz $y = -p$ e eixo de simetria $0Y$ é

$$x^2 = 4\,p\,y.$$

Proposição 1.4. As cónicas são definidas por equações de 2º grau nas variáveis x e y

$$\textbf{(1)} \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

com A, B e C não simultaneamente nulos.

Uma cónica tem os eixos de simetria (ou o eixo de simetria) paralelos aos eixos coordenados se e só se $B = 0$. Neste caso, a partir da equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ obtemos, por exemplo, equações

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	Elipse centrada em (x_0, y_0)
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	Hipérbole centrada em (x_0, y_0)
$(x-x_0)^2 = 4p(y-y_0)$	Parábola com vértice em (x_0, y_0)

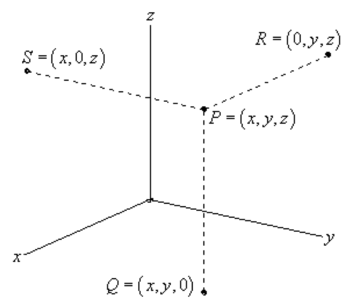
Note-se que a equação (1) pode representar uma cónica degenerada (um ponto, uma recta, duas rectas, o conjunto vazio, *etc*).

1.2 Vectores de $\mathbb{R}^3$

Um **sistema de coordenadas cartesianas do espaço** é constituído por três eixos perpendiculares dois a dois, ditos **eixos coordenados**, que se intersectam num ponto, **a origem**. Em cada um dos eixos fixa-se um sentido como positivo. Adopta-se para os três eixos uma unidade de comprimento. Geralmente, verifica-se o seguinte quanto à orientação dos eixos: um observador, com os pés na origem e a cabeça na parte positiva do eixo $0Z$, que olha para o menor ângulo entre as partes positivas dos eixos $0X$ e $0Y$ vê o eixo $0X$ à direita e o eixo $0Y$ à esquerda.

Cada par de eixos define um plano, dito plano coordenado: os eixos $0X$ e $0Z$ definem o plano $X0Z$, os eixos $0X$ e $0Y$ definem o plano $X0Y$, etc.

Após a escolha de um sistema de coordenadas, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e ternoss ordenados de números reais: cada ponto P identifica-se com o terno (a, b, c) das suas coordenadas.



Geometricamente, um vector $\vec{v}$ é um segmento de recta orientado que não é afectado pela translação: dois vectores são iguais se têm a mesma direcção, sentido e comprimento. A cada vector $\overrightarrow{v}$ com ponto inicial na origem e ponto final P associamos as coordenadas cartesianas de P. Se $P = (a, b, c)$ também identificamos $\overrightarrow{v}$ com o triplo (a, b, c).

Denotamos por $\overrightarrow{P_1P_2}$ o vector com ponto inicial $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e ponto final $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Note-se que $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{0P_2} - \overrightarrow{0P_1}$. Algebricamente, verifica-se

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{0P_2} - \overrightarrow{0P_1} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Os vectores unitários (de norma 1) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ denotam-se por, respectivamente, $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$. O vector nulo representa-se por $\overrightarrow{0}$.

Definição 1.5. 1. A **norma** de um vector $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ é o número real não negativo

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

2. A **distância** entre os pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ é igual à norma do vector $\overrightarrow{P_1P_2}$:
$$\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3. O **produto interno** ou **escalar** de dois vectores $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2, c_2)$ representa-se por $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ e é o número real

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

4. O **ângulo** $\theta \in [0, \pi]$ entre os vectores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é dado por

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos\theta,$$

ou seja, $\theta = \arccos\left(\dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}\right)$.

5. A **projecção** do vector $\overrightarrow{v}$ sobre o vector $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ é o vector

$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u}.$$

Definição 1.6. O **produto vectorial** ou **externo** dos vectores $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2, c_2)$ é o vector

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w} &= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= (b_1 c_2 - b_2 c_1)\hat{i} - (a_1 c_2 - a_2 c_1)\hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k}. \end{aligned}$$

Note-se que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (determinante formal).

Observe-se que produto escalar de dois vectores é um número real. O produto vectorial de dois vectores de $\mathbb{R}^3$ é um vector de $\mathbb{R}^3$.

Proposição 1.7 (Propriedades do produto externo)**.** Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ e α um número real.

1. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$;

2. $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w})$;

3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$;

4. $\alpha(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = (\alpha \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\alpha \overrightarrow{v})$;

5. $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$;

6. Se θ é o ângulo entre os vectores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, então

$$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin\theta.$$

   Em particular, se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vectores linearmente independentes, então $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|$ é igual à área do paralelogramo que tem como dois lados adjacentes os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

7. Os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são linearmente dependentes (isto é, um deles é múltiplo do outro) se e só se $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Em particular, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

8. O vector $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

1.3 Rectas e Planos

A recta r que contém o ponto P_0 e é paralela ao vector $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é o conjunto dos pontos

$$\{P_0 + \alpha \overrightarrow{v} : \ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Supondo que $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, obtemos várias equações da recta r:

- Equação vectorial da recta r:

  $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(v_1, v_2, v_3), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$

- Equações paramétricas da recta r:

  $$x = x_0 + \alpha v_1, \ \ y = y_0 + \alpha v_2, \ \ z = z_0 + \alpha v_3$$

  com $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Alguns exemplos de equações cartesianas da recta r:

  Se $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$: $\quad \dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2} = \dfrac{z - z_0}{v_3}.$

  Se $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ e $v_3 = 0$: $\quad \dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2}, \quad z = z_0.$

  Se $v_1 \neq 0$, $v_2 = 0$ e $v_3 = 0$: $\quad y = y_0, \qquad z = z_0.$

Sejam P_0 um ponto e $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vectores linearmente independentes. O conjunto

$$\{P_0 + \overrightarrow{w} : \ \overrightarrow{w} \in \mathrm{ger}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}\}$$

é um **plano** Π que contém o ponto P_0 e é **paralelo** aos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Note-se que

$$\Pi = \{P_0 + \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Supondo que $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, temos as seguintes equações do plano Π:

- Equação vectorial do plano:

  $$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3),$$

  cm $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Equações paramétricas do plano:

  $$x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1, \quad y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2, \quad z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3$$

  com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.8. Sejam P_0 um ponto e $\overrightarrow{n}$ um vector não nulo. O conjunto dos pontos P tais que $\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ é um plano que contém o ponto P_0 e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{n}$.

Reciprocamente, se Π é um plano então existem um ponto P_0 e um vector não nulo $\overrightarrow{n}$ tais que $\Pi = \{P : \overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{n} = 0\}$.

O plano Π que contém o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vector não nulo $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ tem uma equação cartesiana

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \text{ou seja} \quad ax + by + cz + d = 0 \quad (2),$$

onde $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Definição 1.9. Dois planos de equações $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ dizem-se

1. **paralelos** se (a, b, c) e (a', b', c') são linearmente dependentes;
2. **perpendiculares** se (a, b, c) e (a', b', c') são perpendiculares, isto é, $(a, b, c) \cdot (a', b', c') = 0$.

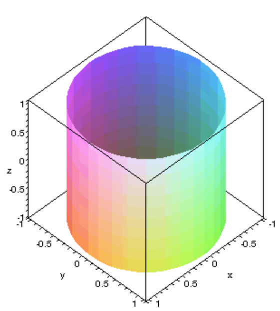
Exemplo 1.10. Os planos $x + 2y - z = 1$ e $-2x - 4y + 2z = 9$ são paralelos. Os planos $x + 2y - z = 1$ e $x - y - z + 3 = 0$ são perpendiculares.

1.4 Superfícies Cilíndricas

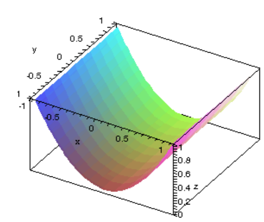
Definição 1.11. Chama-se **traço** da superfície num plano à curva que resulta da intersecção da superfície com o plano.

Se fizermos deslizar uma curva contida num plano Γ ao longo de um eixo que não está contido em Γ, geramos um superfície, dita **superfície cilíndrica**. Assim, uma superfície cilíndrica é constituída por todas as rectas paralelas a uma dada recta e que passam pelos pontos de uma curva plana.

Cilindro elíptico



Cilindro parabólico



Num sistema de coordenadas $0XYZ$, uma equação em duas (das três) variáveis define uma superfície cilíndrica. A superfície pode ser esboçada traçando uma curva plana num plano perpendicular ao eixo da variável ausente da equação e efectuando uma translação dessa curva ao longo de uma recta paralela a esse eixo.

Exemplo 1.12. A equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ define um cilindro elíptico. Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Y$ são elipses. Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Z$ ou ao plano $Y0Z$ são uma ou duas rectas paralelas, ou o conjunto vazio.

1.5 Superfícies Quádricas

Definição 1.13. Uma **quádrica** é o conjunto de pontos (x, y, z) que satisfazem uma equação de segundo grau nas variáveis x, y e z:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

com A, B, C, D, E, F, G, H, I, J números reais. Efectuando, se necessário, rotações e translações, as quádricas têm equações do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad \text{ou} \quad Ax^2 + By^2 + Iz + J = 0.$$

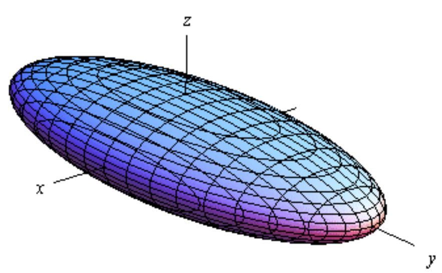
Há seis tipos de quádricas (não degeneradas): elipsóides, hiperbolóides de uma folha, hiperbolóides de duas folhas, cones elípticos, parabolóides elípticos e parabolóides hiperbólicos.

As quádricas com equações do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad \text{ou} \quad Ax^2 + By^2 + Iz + J = 0$$

podem ser identificadas determinando os traços nos planos paralelos aos planos coordenados.

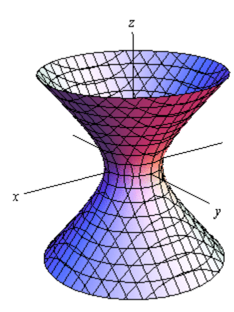
1. **Elipsóide**: quádrica de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.



Os traços nos planos paralelos aos planos coordenados que intersectam a superfície em mais do que um ponto são elipses.

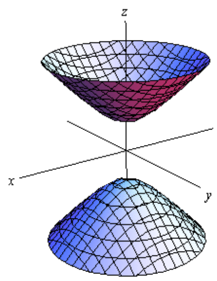
Se $a = b = c$, o elipsóide é uma **superfície esférica**.

2. **Hiperbolóide de uma folha**: quádrica de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.



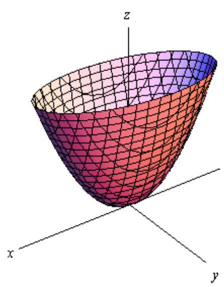
Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Y$ são elipses, os traços nos planos paralelos ao plano $X0Z$ que não contêm os pontos $(0, b, 0)$ e $(0, -b, 0)$ são hipérboles e os traços nos planos paralelos ao plano $Y0Z$ que não contêm os pontos $(a, 0, 0)$ e $(-a, 0, 0)$ são hipérboles. O eixo $0Z$ é o **eixo do hiperbolóide**.

3. **Hiperbolóide de duas folhas**: quádrica de equação $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.



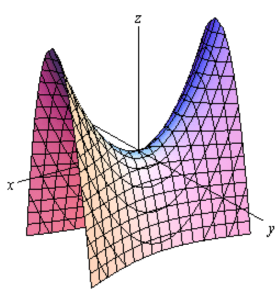
Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Y$ que intersectam a superfície em mais do que um ponto são elipses. Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Z$ ou ao plano $Y0Z$ são hipérboles. O eixo $0Z$ é o eixo do hiperbolóide.

4. **Parabolóide elíptico**: quádrica de equação $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.



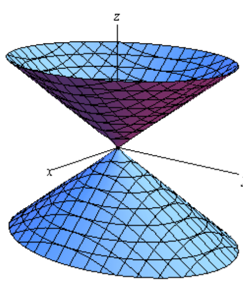
Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Y$ que intersectam a superfície em mais do que um ponto são elipses. Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Z$ ou ao plano $Y0Z$ são parábolas.

5. **Parabolóide hiperbólico**: quádrica de equação $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.



Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Y$, distintos do plano $X0Y$, são hipérboles. Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Z$ ou ao plano $Y0Z$ são parábolas.

6. **Cone elíptico**: quádrica de equação $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.



Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Y$, distintos do plano $X0Y$, são elipses. Os traços nos planos $X0Z$ e $Y0Z$ são rectas que se intersectam em $(0,0,0)$. Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Z$ ou ao plano $Y0Z$, distintos dos planos $X0Z$ e $Y0Z$, são hipérboles.

As imagens das superfícies quádricas estão em http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII.

2 Cálculo Diferencial de Funções Reais de Várias Variáveis Reais

Revisões

Recorde-se que, sendo $n \geq 1$ um inteiro,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ dizem-se **pontos** ou **vectores**.

Em $\mathbb{R}^n$, definimos uma **adição de vectores** e uma **multiplicação escalar**: Dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

- a adição de x e y é $x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
- a multiplicação escalar do número λ e do vector x é $\lambda x = \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido da adição e da multipicação escalar referidas em cima é um **espaço vectorial real**.

Em $\mathbb{R}^n$ também definimos um **produto interno** e uma **norma**:

- Chama-se produto interno de $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ao número real

$$x \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

- A norma ou comprimento de $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é o número real $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

Definição 2.1. Uma **bola aberta** de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r \in \mathbb{R}^+$ é o conjunto dos pontos

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$

Exemplos 2.2. 1. Em $\mathbb{R}$, a bola aberta $B(a, r)$ é o intervalo aberto $]a - r, a + r[$.

2. Em $\mathbb{R}^2$, a bola aberta $B(a, r)$, onde $a = (a_1, a_2)$, é o conjunto dos pontos $p = (x, y)$ do plano com $\|p - a\| < r$, ou seja,

$$\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < r.$$

   Assim, $B(a, r)$ é o círculo de centro a e raio r sem a circunferência que o delimita.

3. Em $\mathbb{R}^3$, a bola aberta $B(a, r)$, onde $a = (a_1, a_2, a_3)$, é o conjunto dos pontos $p = (x, y, z)$ do espaço com $\|p - a\| < r$, ou seja,

$$\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2} < r.$$

   Assim, $B(a, r)$ é a região limitada pela esfera de centro a e raio r sem a esfera que a delimita.

Definição 2.3. Uma **bola fechada** de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r \in \mathbb{R}^+$ é o conjunto dos pontos

$$\overline{B(a,r)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq r\}.$$

Exemplos 2.4.

1. Em $\mathbb{R}$, a bola fechada $\overline{B(a,r)}$ é o intervalo fechado $[a-r, a+r]$.

2. Em $\mathbb{R}^2$, a bola fechada $\overline{B(a,r)}$, onde $a = (a_1, a_2)$, é o conjunto dos pontos $p = (x, y)$ do plano com $\|p - a)\| \leq r$, ou seja,

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} \leq r.$$

   Assim, $\overline{B(a,r)}$ é o círculo de centro a e raio r.

3. Em $\mathbb{R}^3$, a bola fechada $\overline{B(a,r)}$, onde $a = (a_1, a_2, a_3)$, é o conjunto dos pontos $p = (x, y, z)$ do espaço com $\|p - a\| \leq r$, ou seja,

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2} \leq r.$$

   Assim, $\overline{B(a,r)}$ é a região limitada pela esfera de centro a e raio r incluindo a esfera que a delimita.

Definição 2.5. Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $S \neq \emptyset$.

1. O ponto a diz-se **ponto interior** de S se existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(a,r) \subseteq S$.

2. O ponto a diz-se **ponto de acumulação** de S se, qualquer que seja $r \in \mathbb{R}^+$, se verifica

$$B(a,r) \cap (S \backslash \{a\}) \neq \emptyset.$$

Exemplos 2.6.

1. O conjunto dos pontos interiores do intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ $(a < b)$, bem como dos intervalos $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$, é $]a,b[$.

2. O conjunto dos pontos de acumulação do intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ $(a < b)$, bem como dos intervalos $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$, é $[a,b]$.

3. O conjunto dos pontos interiores do conjunto $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ é $B(a,r)$.

4. O conjunto dos pontos de acumulação de $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ é $\overline{B(a,r)}$.

5. Seja $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1,\ -1 < y \leq 5\}$. O conjunto dos pontos interiores de S é

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1,\ -1 < y < 5\}.$$

   O conjunto dos pontos de acumulação de S é

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 5\}.$$

2.1 Funções reais de várias variáveis: gráficos e conjuntos de níveis

Alguns exemplos de funções reais de várias variáveis:

1. A lei de um gás (lei de Gay-Lussac) é $PV = kT$, onde P é a pressão em N/u^2 (N - Newton, u - unidades de medida), V é o volume em u^3, T a temperatura em graus e $k > 0$ é uma constante que depende do gás.

   Podemos expressar o volume do gás em função da pressão e da temperatura; a pressão do gás em função do volume e da temperatura; ou a temperatura do gás em função da pressão e do volume.

   $$V(P,T) = \frac{kT}{P}, \qquad P(V,T) = \frac{kT}{V}, \qquad T(V,P) = \frac{PV}{k}.$$

2. Quando um poluente é emitido por uma chaminé de h metros de altura, a concentração do poluente a x quilómetros da origem da emissão e a y metros do solo é aproximada por
   $$P(x,y) = \frac{a}{x^2}(e^{h(x,y)} + e^{k(x,y)}),$$
   onde $h(x,y) = -\dfrac{b}{x^2}(y-h)^2$ e $k(x,y) = -\dfrac{b}{x^2}(y+h)^2$.

   O poluente é medido em $\mu g/m$ e a e b são constantes que dependem das condições atmosféricas e da taxa de emissão do poluente.

Definição 2.7. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio. Uma **função real de várias variáveis reais** ou **campo escalar** definida em D é uma correspondência que a cada ponto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ associa um e um só número real y. Escreve-se

$$\begin{array}{rcl} f : D \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & y = f(x). \end{array}$$

O conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **domínio** da função f. O conjunto

$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x_1, \ldots, x_n), \text{ para algum } (x_1, \ldots, x_n) \in D\}.$$

diz-se **contradomínio** ou **imagem** de f.

Exemplos 2.8.
1. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ fixo. A função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha$, para todo o $x \in D$, diz-se função **constante**. O contradomínio de f é $f(D) = \{\alpha\}$.

2. Seja $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixo. A função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, para todo o $(x_1, \ldots, x_n) \in D$, diz-se uma **projecção**.

3. A função $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \to & x_1^2 + \cdots + x_n^2. \end{array}$ tem contradomínio $f(\mathbb{R}^n) = [0, +\infty[$.

Se o domínio de uma função f de n variáveis não é especificado, toma-se para domínio de f o conjunto dos pontos $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ para os quais $f(x_1, \ldots, x_n)$ tem significado.

Exemplos 2.9. 1. A função f dada pela expressão $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ tem domínio

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$$

e contradomínio $\{z\in\mathbb{R} : 0\leq z\leq 1\}=[0,1]$.

2. A função f dada pela expressão $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ tem domínio

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\neq 0\}=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$$

e contradomínio $\mathbb{R}$.

Definição 2.10. O **gráfico** de uma função $f : D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ é o conjunto

$$G=\{(x_1,\ldots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1} : (x_1,\ldots,x_n)\in D, y=f(x_1,\ldots,x_n)\}.$$

Exemplos 2.11. 1. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=3$. O gráfico de f é o subconjunto G de $\mathbb{R}^3$

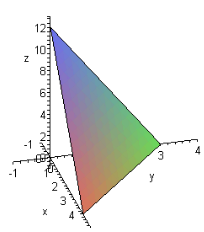
$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=3\}.$$

A representação gráfica de f é o plano horizontal de equação $z=3$.

2. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=12-3x-4y$. O gráfico de f é o subconjunto G de $\mathbb{R}^3$

$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x+4y+z=12\}.$$

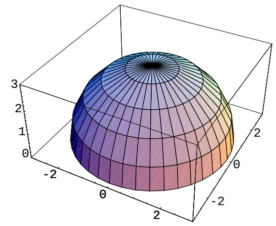
A representação gráfica de f é o plano que contém os pontos $(0,3,0)$, $(4,0,0)$ e $(0,0,12)$:



3. Seja $f:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 9\}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$. O gráfico de f é o subconjunto G de $\mathbb{R}^3$

$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\geq 0,\ x^2+y^2+z^2=9\}.$$

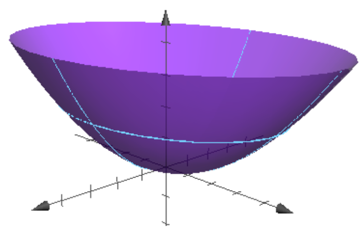
A representação gráfica de f é a semi-esfera superior de raio 3 e centro $(0,0,0)$.



4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$. O gráfico de f é o subconjunto G de $\mathbb{R}^3$:

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}.$$

A representação gráfica de f é um parabolóide elíptico:



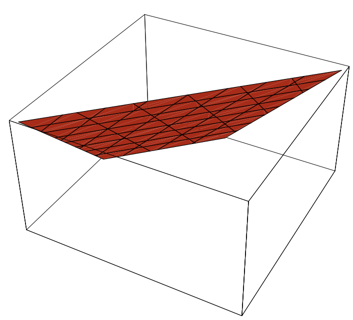
Definição 2.12. Seja $k \in \mathbb{R}$. Chama-se **conjunto de nível** k de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ao subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$f(x_1, \ldots, x_n) = k, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in D.$$

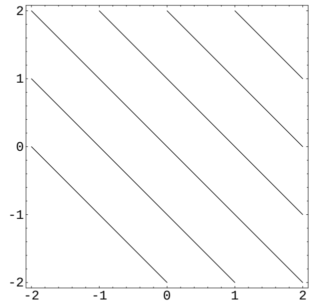
Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o conjunto de nível k de f diz-se **curva de nível** k de f. Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, o conjunto de nível k de f diz-se **superfície de nível** k de f.

Exemplos 2.13. 1. Seja $f(x, y) = x + y - 1$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, a curva de nível k de f, $x + y = 1 + k$, é uma recta.

A representação gráfica de $f(x, y) = x + y - 1$ é o plano de equação $z = x + y - 1$.



Algumas curvas de nível de f:



2. Consideremos a função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-2y^2}$, com domínio $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+2y^2\leq 9\}$. Se $0\leq k<3$, a curva de nível k de f é a elipse de equação $x^2+2y^2=9-k^2$.

   Se $k=3$, a curva de nível k é o ponto $(0,0)$.

   Se $k<0$ ou $k>3$, a curva de nível k é o $\emptyset$.

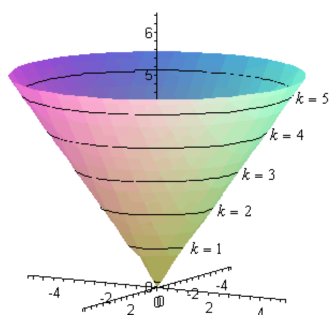
3. Seja f a função
$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

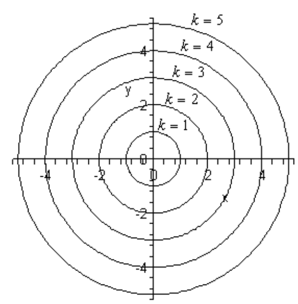
   Se $k\in\mathbb{R}^+$, a curva de nível k de f é uma circunferência de centro $(0,0)$ e raio k.

   Se $k=0$, a curva de nível k é o ponto $(0,0)$.

   Se $k<0$, a curva de nível k é o $\emptyset$.

   Segue-se o gráfico de f e algumas curvas de nível de f.





2.2 Limites e continuidade

2.2.1 Limites

Definição 2.14. Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $a = (a_1, \ldots, a_n)$ um ponto de acumulação de D. Diz-se que o **limite** de $f(x)$ quando x tende para a é $L \in \mathbb{R}$, e escreve-se

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

se dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } x \in D \text{ e } 0 < \|x - a\| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Observe que

- $\underline{\|x - a\| < \delta}$ é o mesmo que $\underline{x \in B(a, \delta)}$.
- $\underline{|f(x) - L| < \varepsilon}$ é o mesmo que $\underline{f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[}$.
- Para calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, basta que a seja ponto de acumulação do domínio de f (para podermos calcular $f(x)$ com x muito próximo de a), não interessa se f está ou não definida em a.

Exemplos 2.15. 1. Se $f(x) = \alpha$, para todo o $x \in \mathbb{R}^3$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$.

2. Se $i \in \{1, \ldots, n\}$ e a função f é definida por $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, para todo o $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(a_1,\ldots,a_n)} f(x_1, \ldots, x_n) = a_i.$$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + y$ e seja (a, b) um ponto de $\mathbb{R}^2$. Então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = a + b.$$

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{3xy^2}{x^2 + y^2}.$$

Então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$

Proposição 2.16 (Limites segundo conjuntos)**.** Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função, $A \subseteq D$ e $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de A. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ então $\lim\limits_{x\in A,\ x\to a} f(x) = L$.

Exemplo 2.17. Seja $f(x, y) = \dfrac{x^4 - 2y^2}{xy}$, com $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ xy \neq 0\}$. O limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ não existe, como veremos de seguida.

Consideremos os conjuntos

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y, x \neq 0\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, x \neq 0\}.$$

O ponto $(0,0)$ é ponto de acumulação de A e de B. Ora,

$$(1) \qquad \lim_{(x,y)\in A,\ (x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 2x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}(x^2 - 2) = -2.$$

$$(2) \qquad \lim_{(x,y)\in B,\ (x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

Como os limites (1) e (2) são distintos, conclui-se que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Proposição 2.18. Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função, A_1 e A_2 subconjuntos de D tais que $D = A_1 \cup A_2$, e a um ponto de acumulação de A_1 e de A_2. Se

$$\lim_{x\in A_1,\ x\to a} f(x) = L = \lim_{x\in A_2,\ x\to a} f(x)$$

então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Exemplo 2.19. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x-y}, & \text{se } x \neq y \\ 2, & \text{se } x = y \end{cases}.$$

Calculemos $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Note-se que, tomando

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\} \quad \text{e} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\},$$

tem-se $\mathbb{R}^2 = A \cup B$. Os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ são pontos de acumulação de A e B. Como temos

$$\lim_{(x,y)\in A,(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\in A,(x,y)\to(1,1)} (x+y) = 2$$

$$\lim_{(x,y)\in B,(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\in B,(x,y)\to(1,1)} 2 = 2,$$

conclui-se que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 2$.

Por outro lado, quando tentamos calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, temos

$$(3) \qquad \lim_{(x,y)\in A,(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\in A,(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0,$$

$$(4) \qquad \lim_{(x,y)\in B,(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\in B,(x,y)\to(0,0)} 2 = 2.$$

Como os limites (3) e (4) são distintos, não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Proposição 2.20 (Propriedades dos limites)**.** Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções e a um ponto de acumulação de D. Suponhamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Então verifica-se o seguinte.

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$;

2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = LM$;

3. Se $M \neq 0$ então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

4. Se $f(x) \leq g(x)$, para todo o $x \in D$, então $L \leq M$.

Definição 2.21. Uma função $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se **limitada** se existe $d \in \mathbb{R}^+$ tal que $|g(x)| \leq d$, para todo o $x \in D$.

Exemplo 2.22. A função $g(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2 + 1}$, de domínio $\mathbb{R}^2$, é limitada pois, para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se

$$|\frac{x^2}{x^2 + y^2 + 1}| = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 1} \leq 1.$$

Proposição 2.23. Sejam $f,\ g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções e a um ponto de acumulação de D. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e g é limitada então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Exemplo 2.24. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,3)} \sin(\dfrac{2x}{x + y - z})(x - 1)^3 = 0$, pois $f(x, y, z) = \sin(\dfrac{2x}{x + y - z})$ é uma função limitada e $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,3)} (x - 1)^3 = 0$.

2.2.2 Continuidade

Definição 2.25. Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto de acumulação de D. A função f é **contínua** em a se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Se S é um subconjunto de D, a função f é **contínua** em S se é contínua em todos os pontos de S.

Exemplos 2.26.
1. As funções constantes são funções contínuas em (todos os pontos de) $\mathbb{R}^n$.

2. As projecções são funções contínuas em $\mathbb{R}^n$.

3. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x + y$, é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Proposição 2.27. Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $a \in D$.

1. As funções $f + g$ e fg são contínuas em a.

2. Se $g(a) \neq 0$ então f/g é contínua em a.

Exemplos 2.28. 1. Seja $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

com $m_1, m_2, \ldots, m_n$ inteiros não-negativos fixos. Então ψ é contínua em $\mathbb{R}^n$. (Assume-se que $x_i^0 = 1$).

2. As funções polinomiais (isto é, funções que são somas finitas de funções definidas em 1.) são contínuas em $\mathbb{R}^n$.

3. As funções racionais (isto é, funções que são quocientes de duas funções polinomiais) são contínuas no seu domínio.

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções. Chama-se **composta** de g e f à função $g \circ f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$E = \{x \in D : f(x) \in A\} \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemplo 2.29. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \sin(xy)$ é a composta de duas funções. De facto, $f = h \circ g$ onde

- g é a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x, y) = xy$, e
- h é a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(z) = \sin z$.

Proposição 2.30. Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções. Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$ então $g \circ f$ é contínua em a.

Exemplo 2.31. Determinemos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sin(xy)$. Como $f = h \circ g$, com

$$g(x, y) = xy \text{ e } h(z) = \sin z,$$

g é contínua em $\mathbb{R}^2$ e h é contínua em $\mathbb{R}$, tem-se que f é contínua em $\mathbb{R}^2$. Em particular, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(xy) = \lim_{z\to 0} \sin z = 0.$$