CAPÍTULO 1

NÚMEROS REAIS

Neste capítulo apresentamos os fundamentos essenciais sobre os números e introduzimos as principais notações que usaremos neste documento.

1.1 Os conjuntos de números reais

Notação 1.1.1

- $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números inteiros naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros relativos, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números rationais dado por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

- $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

NOTA 1.1.1 A construção do conjunto $\mathbb{R}$ é uma tarefa complexa que sai completamente deste curso. Uma propriedade importante dos números reais que deriva desta construção é que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, existe sempre uma sucessão $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{Q}$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = x$. O conjunto $\mathbb{R}$ pode ser visto como o conjunto 'limite' de todas as sucessões de $\mathbb{Q}$.

1.1.1 Rudimentos de estruturas algébricas

Definição 1.1.1
Seja A um conjunto, definimos o operador binario $*$ (ou lei interna) como uma relação que para quaisquer a, b de A associar um elemento $a * b$ de A.

- O operador é associativo se $\forall\ a, b, c$ temos $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- O operador é comutativo se $\forall\ a, b$ temos $a * b = b * a$.
- O elemento e é neutro por $*$ se para qualquer $a \in A$ temos $a * e = e * a = a$.
- a é um elemento simétrico se existe $b \in A$ tal que $a * b = b * a = e$.

Um conjunto A associative e que possui um elemento neutro cujos todos elementos admite um elemento simétrico é um grupo.

Existem dois operadores nos conjuntos dos números que são as operações da adição $+$ e da multiplicação $\times$. Os operadores $-$ e $/$ deduzem-se das duas operações anteriores: $-a$ é o elemento simetrico de a pela adição enquanto $1/a$ é o elemento simétrico de a pela multiplicação.

Definição 1.1.2
Sejam A um conjunto e $*$ um operador sobre este conjunto. O subconjunto $B \subset A$ é fechado pelo operador $*$ se para quaisquer $a, b \in B$ temos $a * b \in B$.

Em $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}_0$ podemos sempre addicionar ou multiplicar mas por exemplo $2 - 3 \notin \mathbb{N}_0$ ou $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.
Em $\mathbb{Z}$, podemos adicionar, mutiplicar, substrair mas $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Q}$. No final, as quatro operações aritméticas são válidas nos conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ com uma restrição muito importante: **É proibido dividir por 0.**

NOTA 1.1.2 Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ chamam-se corpos porque todas as operações aritméticas são validas. O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é também um corpo.

1.1.2 Ordem em $\mathbb{R}$

O corpo $\mathbb{R}$ é totalmente ordenado no sentido que podemos sempre comparar dois elementos x e y quaisquer com a relação de ordem $<$ ou $>$. O conjunto $\mathbb{R}$ tem a propriedade de tricotomia no sentido seguinte.

Proposição 1.1.1 (Tricotomia)
Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ então, uma e só uma das três asserções é verificada

1. $x = y$;
2. $x < y$;
3. $x > y$.

Introduzimos outras relações de ordem $x \leq y$ significa $x < y$ ou $x = y$ enquanto $x \geq y$ significa $x > y$ ou $x = y$.

NOTA 1.1.3 Da propriedade de tricotomia deduzimos que o contrário de $x < y$ (resp. $x > y$) é $x \geq y$ (resp. $x \leq y$).

Definição 1.1.3
Seja $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que x é positivo se $x > 0$. Dizemos que x é não negativo se $x \geq 0$. Do mesmo modo, dizemos que x é negativo se $x < 0$. Dizemos que x é não positivo se $x \leq 0$.
Notamos por $\mathbb{R}^+$ os números positivos e por $\mathbb{R}^-$ os números negativos.

NOTA 1.1.4 Notamos por $\mathbb{R}_0^+$ os números não negativos e por $\mathbb{R}_0^-$ os números não positivos.

Temos as propriedades seguintes.

Proposição 1.1.2
Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$.

- $x + z < y + z$ e $x - z < y - z$.
- Se $z > 0$ então $xz < yz$.
- Se $z < 0$ então $xz > yz$.

Cuidado quando simplificar. Por exemplo se $-2x < 4y$ então $x > -2y$.

NOTA 1.1.5 As propriedades são válidas com a relação $\leq$. Além de mais, temos relações semelhantes com $>$ e $\geq$.

1.2 Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Dizemos que A é um subconjunto de $\mathbb{R}$ (notamos $A \subset \mathbb{R}$ se ele é constituído por elementos de $\mathbb{R}$. Um caso particular é o conjunto vazio $\emptyset$ que não tem elementos.
Podemos realizar operações simples com os conjuntos.

Definição 1.2.1 (união, intersecção,complementar)
Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

- $A \cup B = \{x \in \mathbb{R}; x \in A \text{ ou } x \in B\}$,
- $A \cap B = \{x \in \mathbb{R}; x \in A \text{ e } x \in B\}$,
- $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} \text{ e } x \notin A\}$.
- $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \in A \text{ e } x \notin B\}$,

Usando a ordem total de $\mathbb{R}$, introduzimos as seguintes noções.

Definição 1.2.2
Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$.

- $m \in \mathbb{R}$ é um minorante de A se $\forall x \in A$, $m \leq x$.
- $m \in A$ é um mínimo de A se $\forall x \in A$, $m \leq x$.
- $M \in \mathbb{R}$ é um majorante de A se $\forall x \in A$, $M \geq x$.
- $M \in A$ é um máximo de A se $\forall x \in A$, $M \geq x$.

Proposição 1.2.1
Se A admite um máximo, então é único. Se A admite um míximo, então é único.

DEMONSTRAÇÃO. Supomos que temos dois máximos M_1 e M_2. A definição implica que temos $M_1 \leq M_2$ (M_2 é um máximo e $M_1 \in A$) e $M_2 \leq M_1$ (M_1 é um máximo e $M_2 \in A$). Em conclusão, a propriedade de Tricotomia implica $M_1 = M_2$. A prova é igual para o mínimo. $\square$

NOTA 1.2.1 Cuidado! A diferença essencial entre um majorante e o máximo é que o majorante pode ser um ponto qualquer de $\mathbb{R}$ enquanto o máximo deve pertenecer ao conjunto.

Definição 1.2.3
Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$.

- A é limitado inferiormente se existe pelo menos um minorante.
- A é limitado superiormente se existe pelo menos um majorante.
- A é limitado se existe pelo menos um minorante e um majorante.

NOTA 1.2.2 Se um subconjunto A não tem majorante, então isto significa que para qualquer valor $M \in \mathbb{R}$ existe sempre um $x \in A$ tal que $x > M$.

Quando um subconjunto é limitado inferiormente ou superiormente podemos então introduzir a noção de supremo, ínfimo.

Definição 1.2.4
Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$.

- $m \in \mathbb{R}$ é um ínfimo de A ($m = \inf A$) se $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A;\ x < m + \varepsilon$.
- $M \in \mathbb{R}$ é um supremo de A ($M = \sup A$) se $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A;\ x > M - \varepsilon$.

Proposição 1.2.2 (Axioma do supremo em $\mathbb{R}$)
Se A é limitado inferiormente então existe um único ínfimo.
Se A é limitado superiormente então existe um único supremo.

EXEMPLO 1.2.1 O conjunto $]-\infty, 4]$ tem um supremo (4) e um máximo (4). Não tem nem ínfimo, nem mínimo
O conjunto $]-\infty, 4[$ tem um supremo (4) mas não tem máximo.

1.2.1 Intervalos de $\mathbb{R}$

Um caso particular de subconjuntos de $\mathbb{R}$ são os intervalos.

Notação 1.2.1
Seja $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$.

x	$-\infty$	-2		-1		1	$+\infty$
x-2	-	0	+	|	+	|	+
x-1	-	|	-	0	+	|	+
x+1	-	|	-	|	-	0	+
$\times$	-	0	+	0	-	0	+

- intervalo $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$,
- intervalo $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$,
- intervalo $[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a \text{ e } x \leq b\}$,
- intervalo $]a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ x > a \text{ e } x < b\}$

NOTA 1.2.3 Podemos também definir do modo semelhante os intervalos $]b, +\infty[$, $[b, +\infty[$, $[a, b[$ e $]a, b]$.

EXEMPLO 1.2.2 Consideramos o intervalo $A = [1, 2]$. 1 é ao mesmo tempo o mínimo e o ínfimo de A. 2 é ambos o máximo e o supremo de A.
Consideramos o intervalo $B =]1, 2[$. 1 não é um mínimo mas é um minorante e 1 é o ínfimo. 2 não é um máximo mas é um majorante e 2 é o supremo.
Consideramos o intervalo $C =]1, +\infty[$. Não temos nem majorante, nem máximo, nem supremo.
Consideramos o intervalo $D = \{1, 3, 5, ...\}$. Não temos nem majorante, nem máximo, nem supremo. 1 é ao mesmo tempo o mínimo é o ínfimo.

EXERCÍCIO 1.2.1 Determinar os x tal que $(x^2 - 1)(2x + 4) < 0$.
Escrevemos $(x - 1)(x + 1)(2x + 4) < 0$ e introduzimos a tabela de sinal Concluimos que $x \in]-\infty - 2[\cup] - 1, 1[$.

1.2.2 Módulo

Definição 1.2.5 (Módulo)
Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, definimos o módulo de x, notado por $|x|$, a quantidade

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

NOTA 1.2.4 Uma outra definição do módulo é

$$|x| = \max\{-x, x\}.$$

Deste última definição, é facil verificar que se $|x| = 0$ então $x = 0$.

Proposição 1.2.3
Seja $\alpha > 0$.

- $|x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$.
- $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$.
- $|x| > \alpha \Leftrightarrow x < -\alpha$ ou $x > \alpha$.
- $|x| \geq \alpha \Leftrightarrow x \leq -\alpha$ ou $x \geq \alpha$.

Exercício 1.2.2 Determinar os x tal que $|2x - 3| < 1$.
A relação $|2x-3| < 1$ é equivalente á $-1 < 2x-3| < 1$, quer dizer $-1+3 < 2x| < 1+3$, seja ainda $1 < x < 2$. Conclusão $x \in]1, 2[$.

Exercício 1.2.3 Determinar os x tal que $|-3x + 5| \geq 1$.
A relação $|-3x+5| \geq 1$ é equivalente á $-3x+5 \leq -1$ ou $-3x+5 \geq 1$. A primeira desigualde dá $-3x \leq -1-5$, seja ainda $x \geq 2$. Do mesmo modo temos $-3x+5 \geq 1$, seja ainda $x \leq \frac{4}{3}$. Conclusão $x \in]-\infty, \frac{4}{3}] \cup [2, +\infty[$.

O módulo satisfaz várias propriedades importantes.

Proposição 1.2.4
Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então temos

- $x \leq |x|$,
- $|xy| = |x||y|$,
- $|x+y| \leq |x| + |y|$,
- $|x| - |y| \leq |x - y|$,
- $2|xy| \leq x^2 + y^2$.

Demonstração. Vamos provar as várias propriedades.

A primeira desigualdade é evidente porque $x \leq \max\{-x, x\}$.

Para provar a segunda asserção temos de distinguir quatro situações em função do sinal de x e y. Tratamos só o caso $x < 0$ e $y < 0$. Neste caso $|xy| = xy$ enquanto $|x| = -x$ e $|y| = -y$. Deduzimos então

$$|x||y| = (-x)(-y) = xy = |xy|.$$

Para a terceira desigualdade, notamos que se $x = 0$ o resultado é evidente. Agora supomos que $x \neq 0$ então temos a equivalência

$$|x + y| \leq |x| + |y| \Longleftrightarrow |1 + t| \leq 1 + |t| \text{ com } t = \frac{x}{y}.$$

Se $t \geq 0$ temos $1 + t \geq 0$ e então $|1 + t| = 1 + t = 1 + |t|$.
Agora supomos que $t < 0$ então $t < 1 + t < 1$ seja ainda $|1 + t| < \max(|t|, 1) < 1 + |t|$.

A quarta desigualdade vem da propriedade

$$|x| = |x - y + y| < |x - y| + |y|$$

e concluimos que $|x| - |y| \leq |x - y$.

Para a última desigualdade usamos ao mesmo tempo que $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \geq 0$ e $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$. Obtemos assim que $x^2 + y^2 \geq -2xy(1)$ e $x^2 + y^2 \geq 2xy(2)$. Se $xy \geq 0$ temos com a relação (2): $2|xy| = 2xy \leq x^2 + y^2$. Por outro lado se $xy < 0$ temos a relação (1): $2|xy| = -2xy < x^2 + y^2$. □

Exercício 1.2.4 Mostrar que para qualquer $\varepsilon > 0$, $X, Y \in \mathbb{R}$, temos $|XY| \leq \frac{\varepsilon}{2}X^2 + \frac{1}{2\varepsilon}Y^2$.
Escrevemos apenas $XY = X\sqrt{\varepsilon}\frac{Y}{\sqrt{\varepsilon}}$ e usamos a ultima desigaldade da proposição anterior com $x = X\sqrt{\varepsilon}$ e $y = \frac{Y}{\sqrt{\varepsilon}}$.

1.3 Topologia elementar

Introduzimos aqui alguns elementos de topologia que vão permitir tratar, nos próximos capítulos, a noção de limite e continuidade.

Definição 1.3.1
Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$.

- A é aberto se $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$.
- A é fechado se $\overline{A}$ é aberto.

Nota 1.3.1 Designamos o intervalo $B(x, \varepsilon) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ por bola aberta centrada em x de raio ε e temos

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R};\ |x - y| < \varepsilon\}.$$

Exemplo 1.3.1 Os conjuntos $]1, 4[$ ou $] - \infty, 5[$ são abertos enquanto os conjuntos $[-1, 1]$, $[1, +\infty[$ são fechados. Os conjuntos $\emptyset$ e $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$ são abertos e fechados.

Proposição 1.3.1
A reunião ou a interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
A reunião ou a interseção de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado.
A reunião de um número infinito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
A interseção de um número infinito conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Exemplo 1.3.2 O conjunto $]1,4[\cup]-\infty,5[$ é aberto enquanto o conjunto $[-1,1]\cup[1,+\infty[$ é fechado. O conjunto $[1,4]\cup]-\infty,5[$ nem é aberto, nem é fechado.

Exercício 1.3.1 Demonstrar que qualquer conjunto aberto, não vazio, contém sempre um elemento de $\mathbb{Q}$.
Seja A um conjunto não vazio, então existe $x \in A$. Para este x existe $\varepsilon > 0$ tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$ visto que A é aberto. Agora, sabemos que existe uma sucessão $r_i \in \mathbb{Q}$ tal que $\lim_{i\to\infty} r_i = x$. Por consequência, existe um índice N_0 talque $|r_{N_0} - x| < \varepsilon$ quer dizer $r_{N_0} \in B(x,\varepsilon) \subset A$. Concluimos que existe sempre um elemento $r_{N_0} \in \mathbb{Q}$ no conjunto A.

Definição 1.3.2
Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. O ponto $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de A se

$$\forall\varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Por outras palavras, $\forall\varepsilon$, $\exists y \in A$, $y \neq x$ tal que $|x-y| < \varepsilon$.

Nota 1.3.2 Existem um grande quantidade de definições para classificar os pontos de $\mathbb{R}$, como ponto aderente, ponto isolado, ponto fronteira... Esta classificação está fora do alcance deste documento.

Definição 1.3.3
Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. O ponto $x \in A$ é ponto isolado de A se

$$\exists\varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset.$$

Exemplo 1.3.3 Seja $A = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$, então todos os pontos de A são isolados de A enquanto o ponto 0 é um ponto de acumulação.

Definição 1.3.4
Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que o conjunto é conexo se para qualquer $x, y \in A$ e para qualquer $t \in [0,1]$, os pontos $tx + (1-t)y \in A$.

Nota 1.3.3 Os conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos.

Exemplo 1.3.4 O conjunto $[-5,5]$ é conexo enquanto o conjunto $[-5,0[\cup]0,5[$ não é conexo (falta o zero).

Definição 1.3.5

Seja $x \in \mathbb{R}$. Um conjunto $\mathcal{V}_x$ é uma vizinhança de x se existe $\varepsilon > 0$ tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathcal{V}_x$

Exemplo 1.3.5 O intervalo $[-1,1]$ é uma vizinhança de 0 porque $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\subset[-1,1]$ (aqui $\varepsilon = 1/2$).