Universidade do Minho

TESTES DE HIPÓTESES

Testes de Hipóteses

Exemplo

Suponha que retirou uma amostra aleatória de 36 sacos de batatas de um supermercado. Os sacos especificam um peso de 15 Kg. Estabeleça um intervalo de confiança de 95% supondo que:

a) A média dos pesos dos sacos foi de 14.96 Kg e o desvio padrão de 0.64 Kg.

b) A média dos pesos dos sacos foi de 14.66 Kg e o desvio padrão de 0.71 Kg.

c) Poderá afirmar que, para cada uma das situações das alíneas anteriores, os sacos estão cheios de acordo com o peso especificado de 15 Kg?

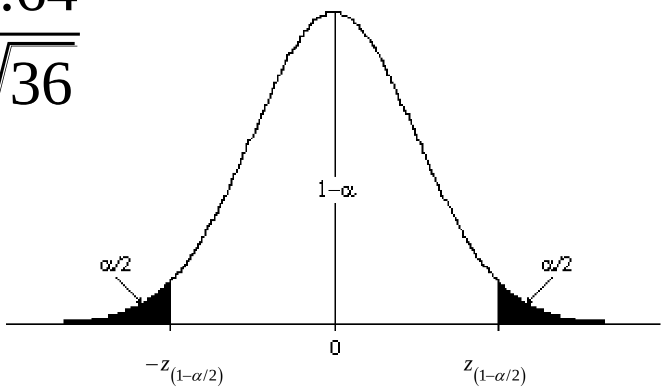
Testes de Hipóteses

Exemplo

a) $$\overline{x} - z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$14.96 - 1.96\frac{0.64}{\sqrt{36}} < \mu < 14.96 + 1.96\frac{0.64}{\sqrt{36}}$$

$$14.96 \pm 0.21Kg$$



b) $$\overline{x} - z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$14.66 - 1.96\frac{0.71}{\sqrt{36}} < \mu < 14.6 + 1.96\frac{0.71}{\sqrt{36}}$$

$$14.66 \pm 0.23Kg$$

c) Alínea a) – SIM ; Alínea b) - NÃO

Procedimento

- **Definição das hipóteses**
  - **H_0 – hipótese nula**
  - **H_1 – hipótese alternativa**
- **Identificação da estatística de teste (ET)**
- **Definição da regra de decisão ou região de rejeição (RR)**
- **Cálculo da estatística de teste e tomada de decisão**

Teste Bilateral

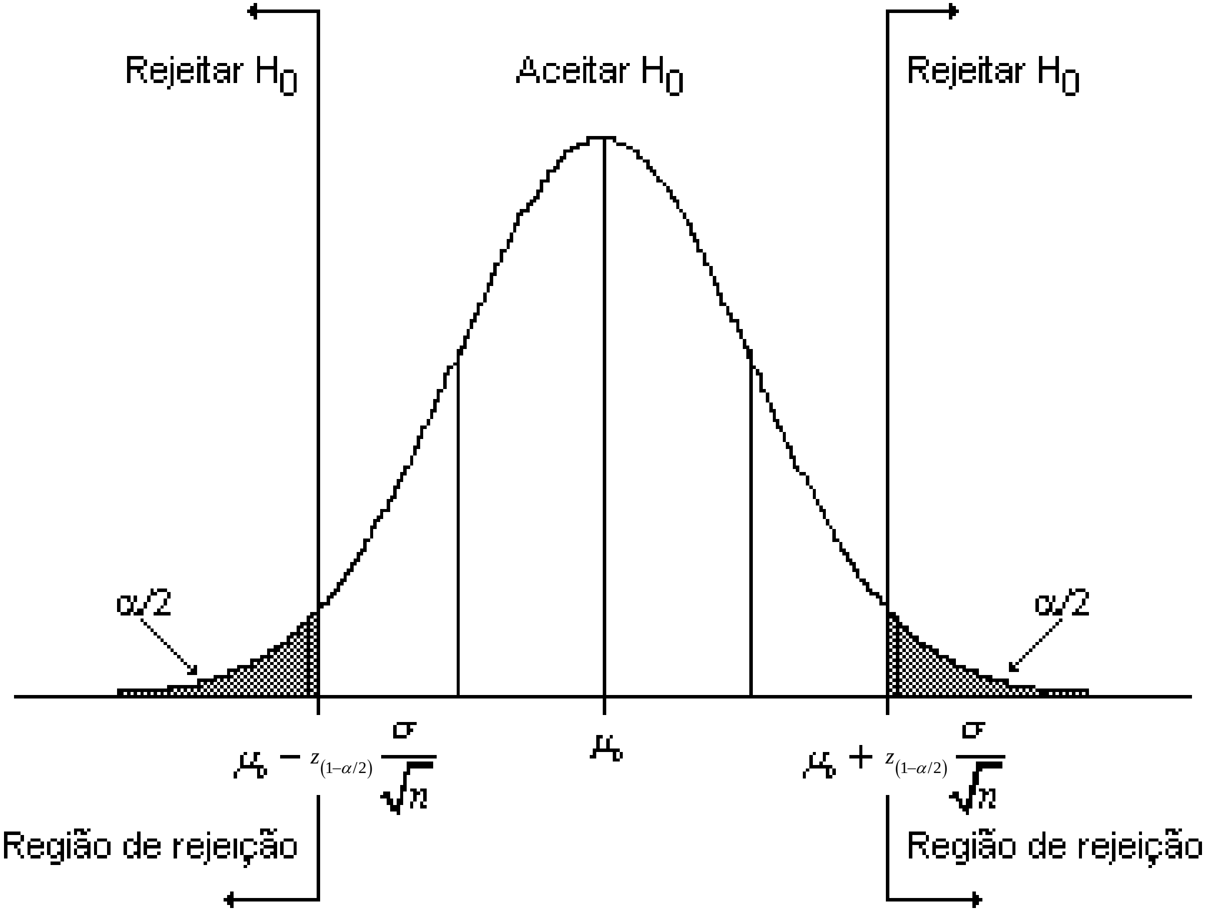
α - nível de significância

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$E.T.: z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$R.R.: |z| > z_{(1-\alpha/2)}$$



Testes de Hipóteses

Exemplo

a) $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{14.96 - 15}{0.64/\sqrt{36}} = -0.38$

$H_0 : \mu = 15$

$H_1 : \mu \neq 15$

$\alpha = 0.05$

$R.R.: |z| > 1.96$

$P(Z < -0.38) = 0.3520$

valor p

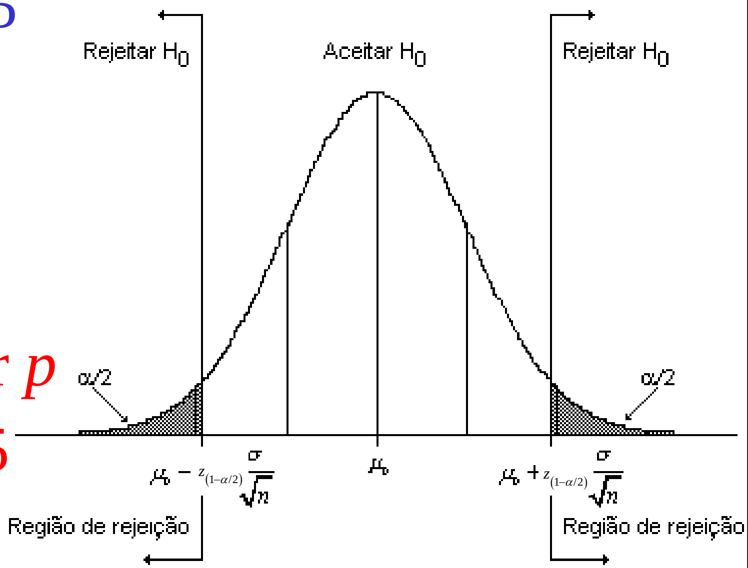
$2P(Z < -0.38) = 0.7040 \geq 0.05$

b) $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{14.66 - 15}{0.71/\sqrt{36}} = -2.87$

$P(Z < -2.87) = 0.0021$

valor p

$2P(Z < -2.87) = 0.0042 < 0.05$



c) Alínea a) – **Não se rejeita** ; Alínea b) – **Rejeita-se**

Decisão

- Se o valor calculado para a estatística de teste (ET) pertencer à região de rejeição (RR) então rejeita-se H_0 (valor $p < \alpha$).

- Se o valor calculado para a ET não pertencer à RR então não se rejeita H_0; (valor $p \geq \alpha$) - resultado inconclusivo.

Teste Unilateral

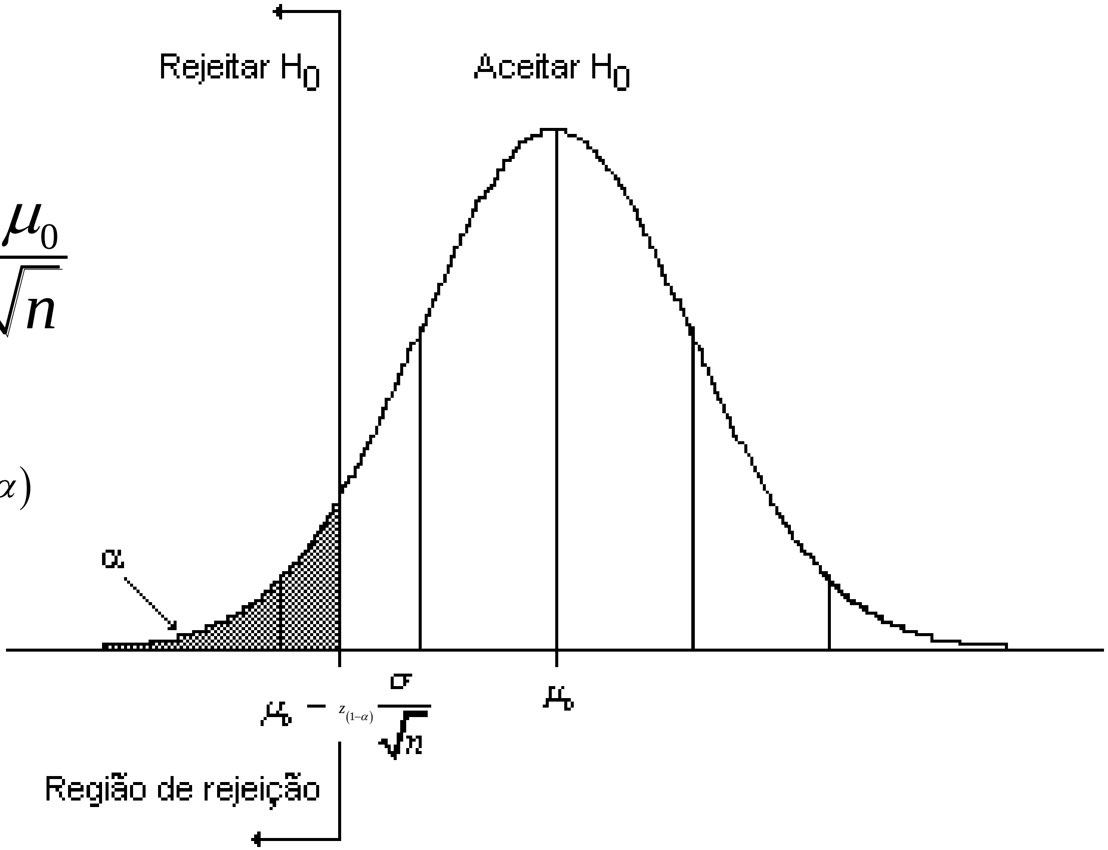
α - nível de significância

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

$$E.T.: z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$R.R.: z < -z_{(1-\alpha)}$$



Teste Unilateral

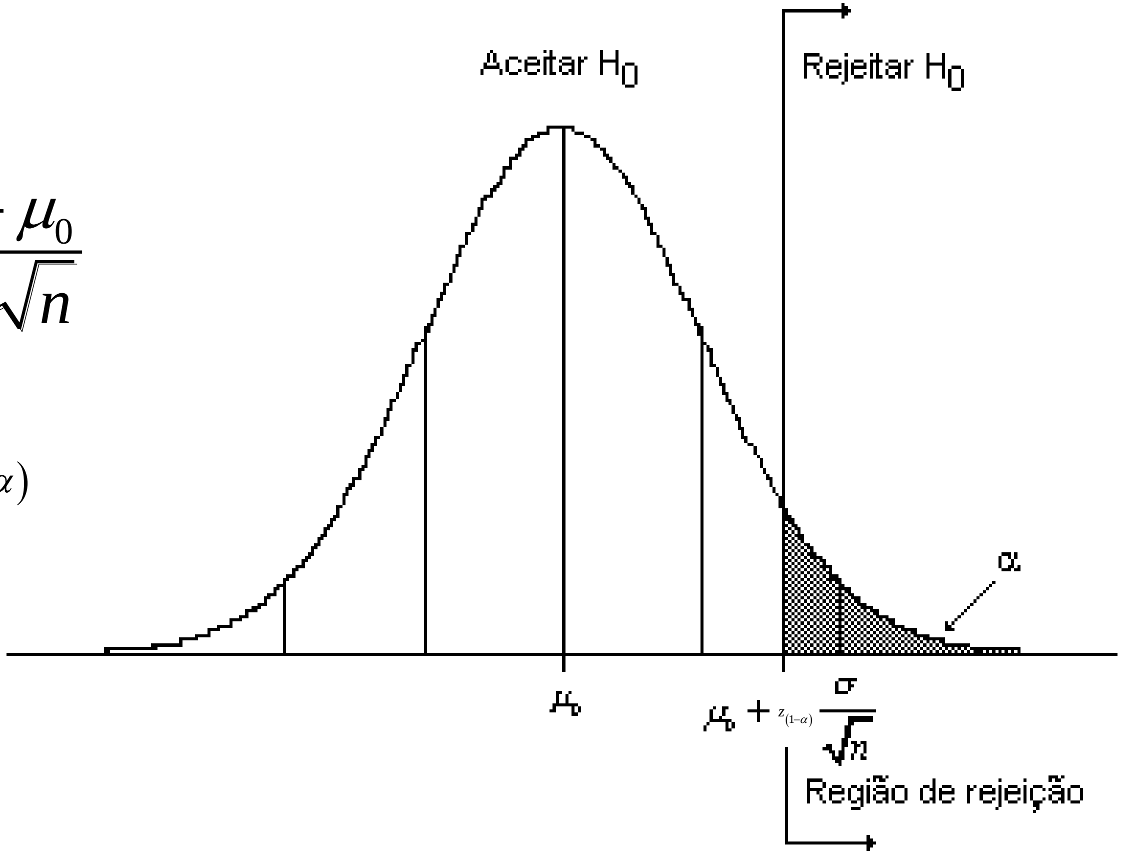
α - nível de significância

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$E.T.: z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$R.R.: z > z_{(1-\alpha)}$$



Erros

	Verdadeiro estado da natureza	
Decisão	**verdadeira**	**falsa**
Rejeitar H0	Erro de Tipo I α	Decisão correcta
Não Rejeitar H0	Decisão correcta	Erro de Tipo II β

Erros

$$\alpha = P(\text{Rej. H}_0 \mid \text{H}_0)$$

$$\beta = P(\text{Não rej. H}_0 \mid \text{H}_1)$$

Função potência de um teste

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \alpha(\theta) & \text{se H}_0 \text{ verdadeiro} \\ 1-\beta(\theta) & \text{se H}_1 \text{ verdadeiro} \end{cases}$$

Teste à Média

Teste Unilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\left(H_1 : \mu < \mu_0\right)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estatística

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \approx \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Região de Rejeição

$$z > z_{(1-\alpha)}$$

$$\left(z < -z_{(1-\alpha)}\right)$$

Região de Rejeição

$$|z| > z_{(1-\alpha/2)}$$

Teste à Média

Exemplo

Suponha que a Inspecção das Actividades Económicas quer verificar se os sacos de cimento de uma determinada fábrica têm um peso médio de 15 Kg.

Para tal recolheu uma amostra aleatória de 50 sacos, tendo encontrado uma média de 14.81 Kg com um desvio padrão de 0.62 Kg.

Permitem os dados concluir que a fábrica está a fornecer sacos com um peso inferior ao especificado? Assuma $\alpha=0.05$.

Teste à Média

Exemplo

1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : \mu = 15$$
$$H_1 : \mu < 15$$
$$\alpha = 0.05$$

2. Região crítica

$$z < -z_{(0.95)} = -1.65$$

3. Teste estatístico

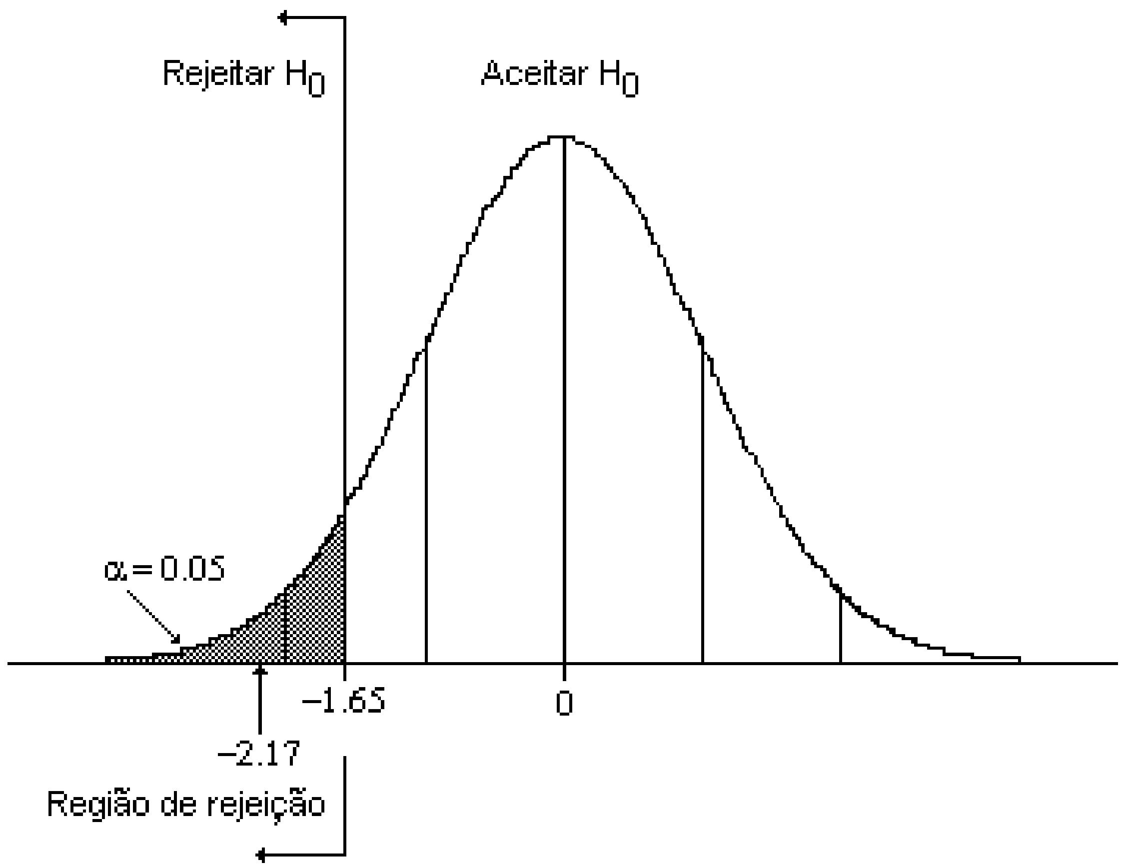
$$z \approx \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{14.81 - 15}{0.62/\sqrt{50}} = -2.17$$

4. Decisão

Rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, os sacos têm, em média, um peso inferior a 15 Kg.

Teste à Média

Exemplo



Teste à Média

Teste Unilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\left(H_1 : \mu < \mu_0\right)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estatística

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Região de Rejeição

$$t > t_{\alpha,n-1}$$

$$\left(t < -t_{\alpha,n-1}\right)$$

Região de Rejeição

$$|t| > t_{\alpha/2,n-1}$$

Teste à Média

Exemplo

Uma máquina produz parafusos com 2.5 cm de comprimento.No entanto, se os parafusos forem demasiado curtos ou longos, serão rejeitados. Neste caso a máquina necessita de ser ajustada. Para tal, uma amostra de parafusos é recolhida, a intervalos regulares, para verificar se os parafusos estão a ser produzidos com o comprimento médio de 2.5 cm. Suponha que foi recolhida uma amostra de 16 parafusos, com uma média de $\overline{x}$ = 2.52 cm e um desvio padrão s = 0.04 cm.

Há evidência suficiente para assumir que a máquina não está a produzir segundo as especificação, isto é, que a máquina está fora de controlo? Use α=0.01.

Teste à Média

Exemplo

1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : \mu = 2.5 \qquad H_1 : \mu \neq 2.5 \qquad \alpha = 0.01$$

2. Região crítica

$$|t| > t_{0.005,15} = 2.947$$

3. Teste estatístico

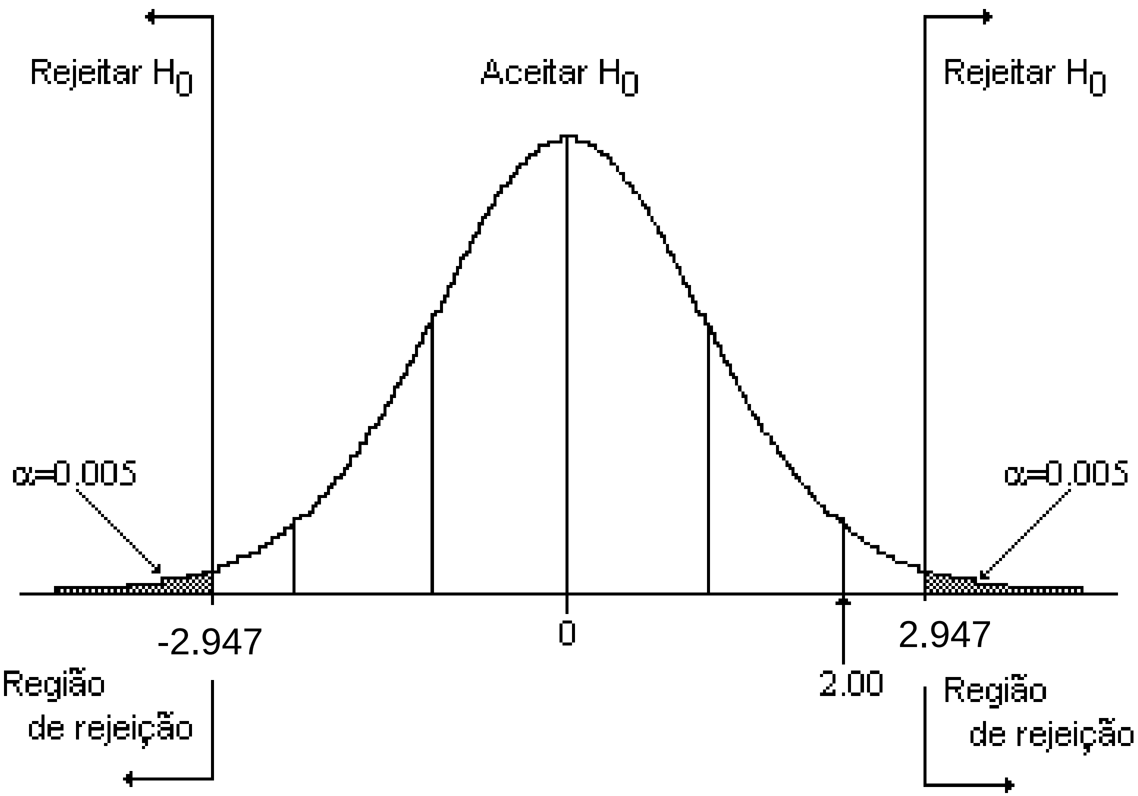
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{2.52 - 2.5}{0.04/\sqrt{16}} = 2.00$$

4. Decisão

Não rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, os parafusos podem ter um comprimento médio de 2.5 cm.

Teste à Média

Exemplo



Teste à Média

Exemplo

Um inspector alimentar, ao examinar 12 frascos de compota, obteve as seguintes percentagens de impureza: 2.3, 1.9, 2.1, 2.8, 2.3, 3.6, 1.4, 1.8, 2.1, 3.2, 2.0 e 1.9. Assuma que estas determinações são distribuídas normalmente.

Será que o teor médio de impurezas nesta marca de compotas é significativamente diferente de 2%. Assuma $\alpha=0.05$.

Teste à Diferença de Médias (Amostras Independentes)

Teste Unilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$$

$$\left(H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0 \right)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$$

Estatística

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \approx \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Região de Rejeição

$$z > z_{(1-\alpha)}$$

$$\left(z < -z_{(1-\alpha)} \right)$$

Região de Rejeição

$$|z| > z_{(1-\alpha/2)}$$

Teste à Diferença de Médias (Amostras Independentes)

Exemplo

Uma fábrica de calçado possui duas linhas de montagem. O engenheiro de produção pretende testar uma nova organização da sequência das operações de montagem. Para tal, reorganizou a linha 2 e, ao fim de um mês, registou o tempo médio de montagem de um determinado modelo em cada uma das linhas. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Linha 1 $n_1 = 36$ $\bar{x}_1 = 10.9$ min $s_1 = 0.5$ min

Linha 2 $n_2 = 40$ $\bar{x}_2 = 10.6$ min $s_2 = 0.4$ min

Permitem os dados concluir que a nova organização é mais eficiente? Use α=0.01.

Teste à Diferença de Médias (Amostras Independentes)

Exemplo

1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$$
$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > 0$$
$$\alpha = 0.01$$

2. Região crítica

$$z > z_{(0.99)} = 2.33$$

3. Teste estatístico

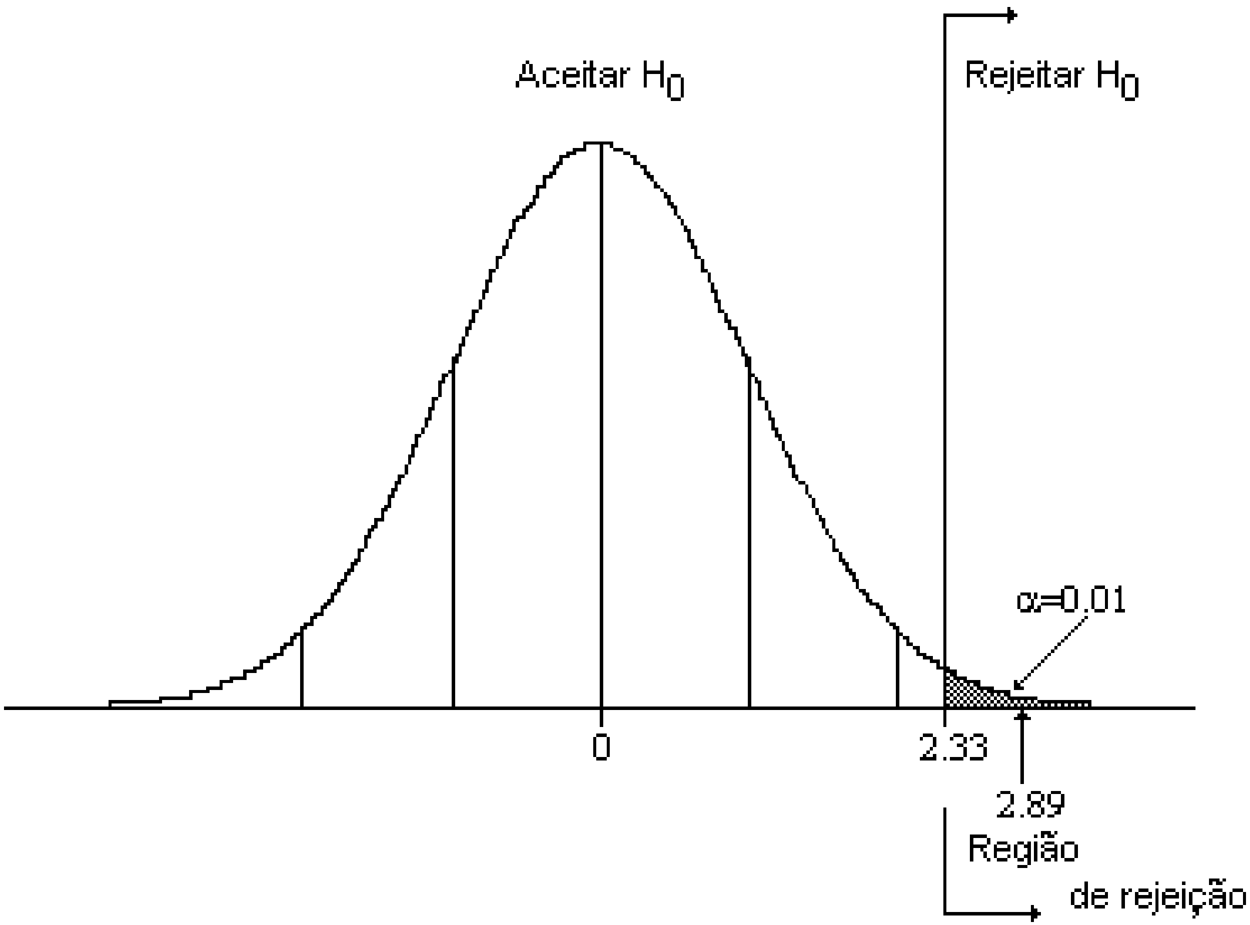
$$z \approx \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(10.9 - 10.6) - 0}{\sqrt{\frac{0.5^2}{40} + \frac{0.4^2}{36}}} = 2.89$$

4. Decisão

Rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, a nova organização da linha 2 é mais eficiente.

Teste à Diferença de Médias (Amostras Independentes)

Exemplo



Teste à Diferença de Médias (Amostras Independentes)

Teste Unilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$
$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$$
$$\left(H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0\right)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$
$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$$

Estatística

$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2} \qquad S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Região de Rejeição

$$t > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$$
$$\left(t < -t_{\alpha, n_1+n_2-2}\right)$$

Região de Rejeição

$$|t| > t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$$

Teste à Diferença de Médias (Amostras Independentes)

Exemplo

O desgaste da cabeça do fémur conduz à implantação de uma cabeça de substituição numa liga metálica leve e resistente.

Esta implantação é feita com um cimento especial, que alguns médicos suspeitam que possa diminuir a resistência do osso.

No entanto, as opiniões dos ortopedistas dividem-se quanto à necessidade de introdução de um tampão que evite que o cimento se espalhe pelo espaço disponível.

Para comparar o efeito do uso do tampão na resistência à flexão, foram efectuados vários implantes em animais de laboratório, tendo sido obtidos os seguintes resultados de resistência (Nm):

C/ Tampão	7.0	6.2	7.1	8.1	5.1	5.6
S/ Tampão	8.9	7.7	5.3	8.6	7.1	4.6

O que pode concluir acerca do efeito do tampão na resistência à flexão? Use $\alpha=0.05$.

Teste à Diferença de Médias (Amostras Independentes)

Exemplo

1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0 \qquad \alpha = 0.05$$
$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$$

2. Região crítica

$$|t| > t_{0.025,10} = 2.228$$

3. Teste estatístico

$$\bar{x}_1 = 6.517 \quad s_1 = 1.098 \qquad \bar{x}_2 = 7.033 \quad s_2 = 1.750$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{5(1.098)^2 + 5(1.750)^2}{10} = 2.134$$

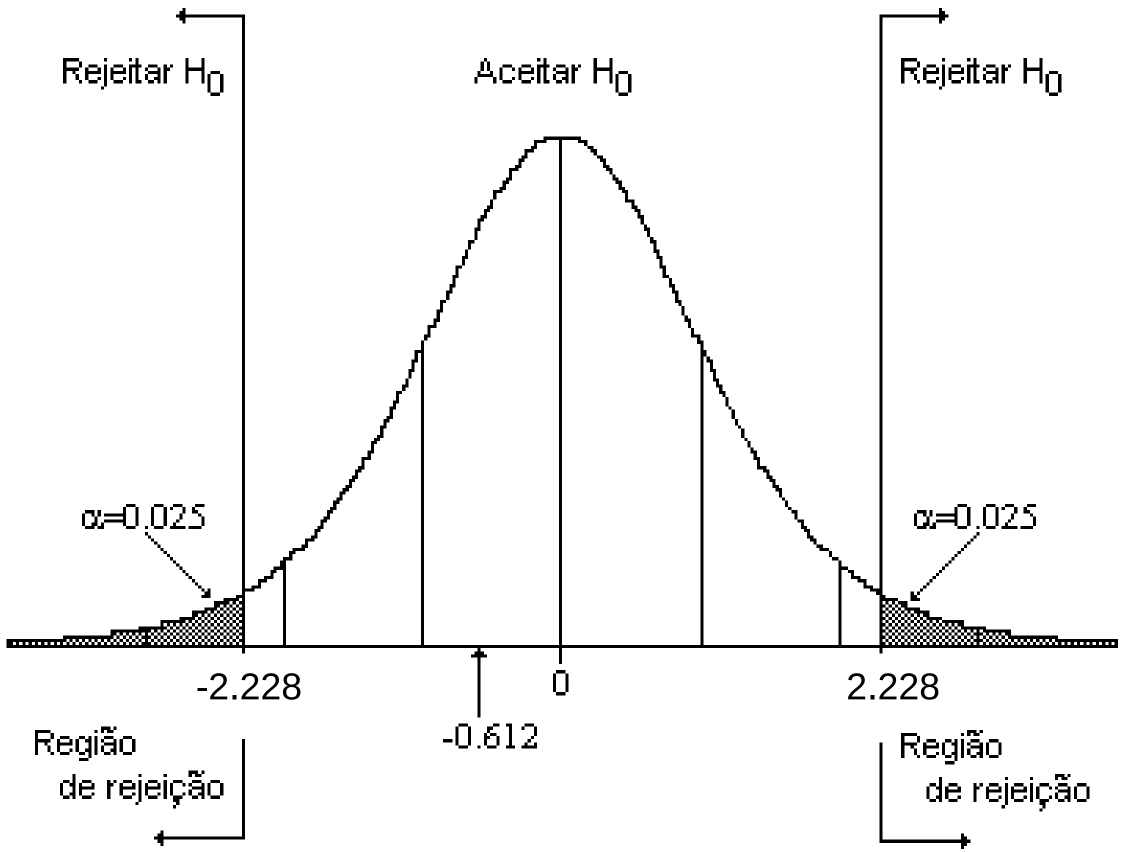
$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{(6.517 - 7.033) - 0}{1.461\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}} = -0.612$$

4. Decisão

Não rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, poderá não existir uma diferença entre as médias da resistência à flexão entre os dois tipos de implantes, com e sem tampão.

Teste à Diferença de Médias (Amostras Independentes)

Exemplo



Teste à Diferença de Médias (Amostras Independentes)

$$n_1 = n_2 = n$$

Teste Unilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$$

$$\left(H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0\right)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$$

Estatística

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\left(s_1^2 + s_2^2\right)}} \sim t_v$$

$$v = n_1 + n_2 - 2 = 2(n-1)$$

Região de Rejeição

$$t > t_{\alpha,v}$$

$$\left(t < -t_{\alpha,v}\right)$$

Região de Rejeição

$$|t| > t_{\alpha/2,v}$$

Teste à Diferença de Médias (Amostras Independentes)

$$n_1 \neq n_2$$

Teste Unilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$$

$$\left(H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0\right)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$$

Estatística

$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_v$$

$$v = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Região de Rejeição

$$t > t_{\alpha,v}$$

$$\left(t < -t_{\alpha,v}\right)$$

Região de Rejeição

$$|t| > t_{\alpha/2,v}$$

Teste à Diferença de Médias (Amostras Emparelhadas)

Teste Unilateral

$$H_0: (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$
$$H_1: (\mu_1 - \mu_2) > D_0$$
$$\left(H_1: (\mu_1 - \mu_2) < D_0\right)$$

Teste Bilateral

$$H_0: (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$
$$H_1: (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$$

Estatística

$$t = \frac{\bar{d} - D_0}{s_d / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Região de Rejeição

$$t > t_{\alpha, n-1}$$
$$\left(t < -t_{\alpha, n-1}\right)$$

Região de Rejeição

$$|t| > t_{\alpha/2, n-1}$$

Teste à Diferença de Médias (Amostras Emparelhadas)

Exemplo

As normas sanitárias para a água de consumo doméstico impõem uma determinada concentração de cloro.

Esta concentração é ajustada na central de bombagem; contudo, é necessário verificar se a concentração se mantém ao longo da rede de distribuição.

Em geral, são recolhidas amostras na central de bombagem e na rede em intervalos regulares. Estas amostras não são independentes, na medida em que uma alta concentração na central deverá originar também maiores concentrações na rede.

A tabela apresenta as concentrações de cloro na central e num ponto da rede, ao longo de 10 semanas.

Verifique se existem diferenças significativas nas concentrações de cloro nos dois pontos de amostragem (α=0.05).

Central	2,3	1,9	2,0	1,8	1,8	2,2	2,2	2,1	2,1	1,9
Rede	1,9	2,0	2,0	1,9	1,7	1,7	2,0	2,2	2,0	2,0

Teste à Diferença de Médias (Amostras Emparelhadas)

Exemplo

1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$$
$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$$
$$\alpha = 0.05$$

2. Região crítica

$$|t| > t_{0.025,9} = 2.262$$

3. Teste estatístico

$$\bar{d} = 0.09 \qquad s_d = 0.218$$

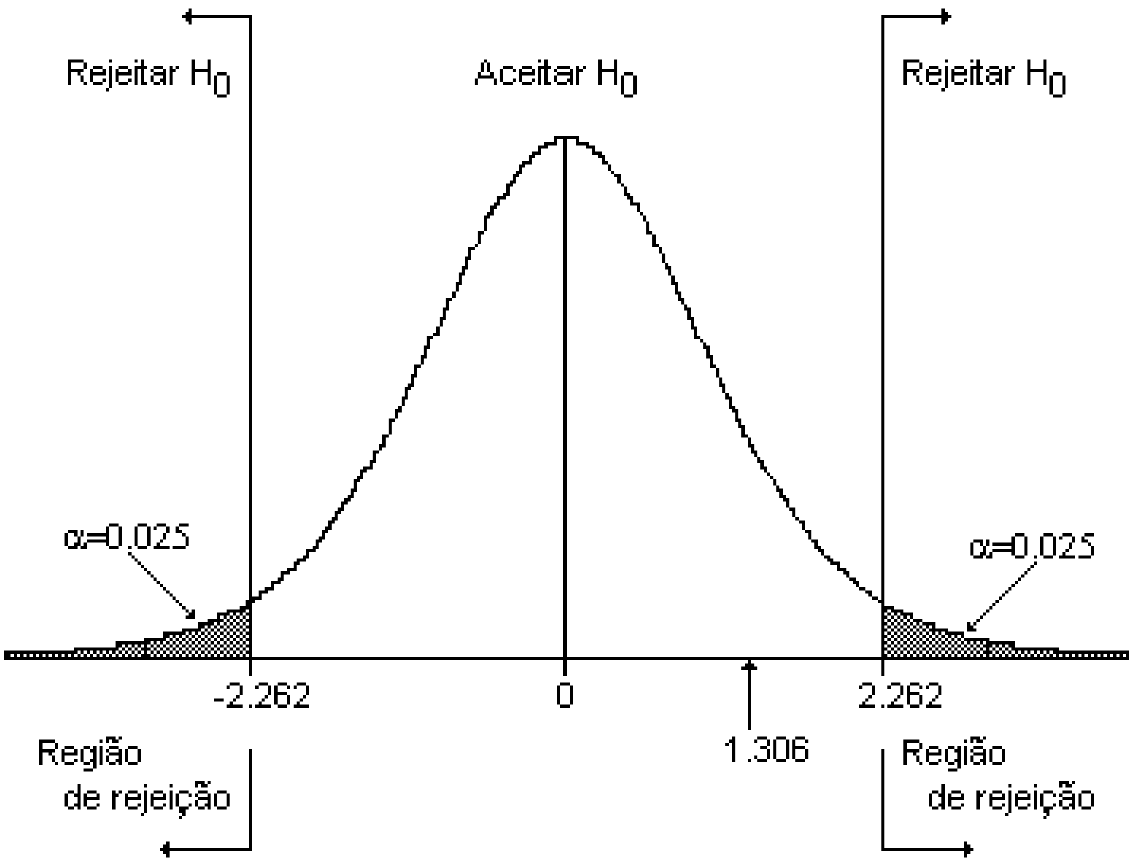
$$t = \frac{\bar{d} - D_0}{s_d \sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{0.09 - 0}{0.218\sqrt{\frac{1}{10}}} = 1.306$$

4. Decisão

Não rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, poderá não haver diferenças entre as concentrações médias de cloro na central e na rede.

Teste à Diferença de Médias (Amostras Emparelhadas)

Exemplo



Teste à Proporção

Teste Unilateral

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p > p_0$$

$$\left(H_1 : p < p_0 \right)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p \neq p_0$$

Estatística

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\left(1 - p_0\right)}{n}}} \sim N(0,1)$$

Região de Rejeição

$$z > z_{(1-\alpha)}$$

$$\left(z < -z_{(1-\alpha)} \right)$$

Região de Rejeição

$$|z| > z_{(1-\alpha/2)}$$

Teste à Proporção

Exemplo

Uma empresa de detergentes sabe que aproximadamente 2 em cada 10 clientes potenciais usam o seu produto. Após uma campanha publicitária, 200 consumidores seleccionados aleatoriamente foram entrevistados, tendo 53 expresso a sua preferência pela marca. Permitem os dados concluir que houve um aumento da aceitação do produto? ($\alpha=0.05$).

Teste à Proporção

Exemplo

1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : p = 0.20$$
$$H_1 : p > 0.20$$
$$\alpha = 0.05$$

2. Região crítica

$$z > z_{(0.95)} = 1.65$$

3. Teste estatístico

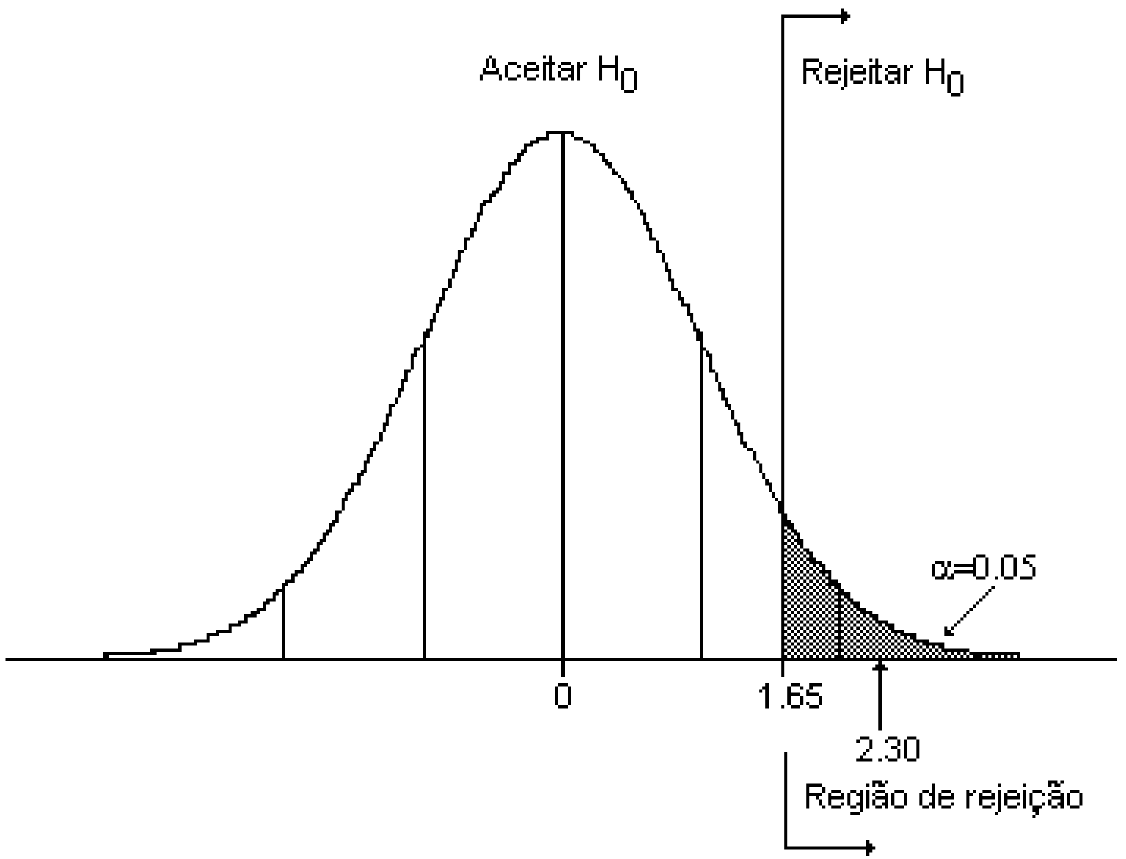
$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\left(1 - p_0\right)}{n}}} = \frac{0.265 - 0.2}{\sqrt{\frac{0.2\left(1 - 0.2\right)}{200}}} \approx 2.30$$

4. Decisão

Rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, a campanha publicitária teve um efeito no aumento dos potenciais consumidores.

Teste à Proporção

Exemplo



Teste à Diferença de Proporções

Teste Unilateral

$$H_0: (p_1 - p_2) = D_0$$
$$H_1: (p_1 - p_2) > D_0$$
$$\left(H_1: (p_1 - p_2) < D_0\right)$$

Teste Bilateral

$$H_0: (p_1 - p_2) = D_0$$
$$H_1: (p_1 - p_2) \neq D_0$$

Estatística

$$\hat{p} \approx \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - D_0}{\sigma_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}} \sim N(0,1)$$

$$\sigma_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)} \approx \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

Região de Rejeição

$$z > z_{(1-\alpha)}$$
$$\left(z < -z_{(1-\alpha)}\right)$$

Região de Rejeição

$$|z| > z_{(1-\alpha/2)}$$

Teste à Diferença de Proporções

Exemplo

As estatísticas sobre a população portuguesa, relativas ao ano 1998, mostram que, na região do Vale do Tejo e na região Norte, o número de nascimentos e o número de óbitos com menos de um ano de idade foram os seguintes:

Região	**Nascimentos**	**Óbitos**
Lisboa e Vale do Tejo	37695	221
Norte	43469	279

Verifique se existem diferenças nas taxas de mortalidade infantil (número de óbitos/número de nascimentos) das duas regiões.

Teste à Diferença de Proporções

Exemplo

1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : (p_1 - p_2) = 0$$
$$H_1 : (p_1 - p_2) \neq 0$$
$$\alpha = 0.05$$

2. Região crítica

$$|z| > z_{(0.975)} = 1.96$$

3. Teste estatístico

$$\hat{p}_1 = \frac{221}{37695} = 0.0059 \quad \hat{p}_2 = \frac{279}{43469} = 0.0064 \quad \hat{p} = \frac{221+279}{37695+43469} = 0.0062$$

$$\sigma_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)} \approx \sqrt{(0.0062)(1-0.0062)\left(\frac{1}{37695} + \frac{1}{43469}\right)} \approx 0.0006$$

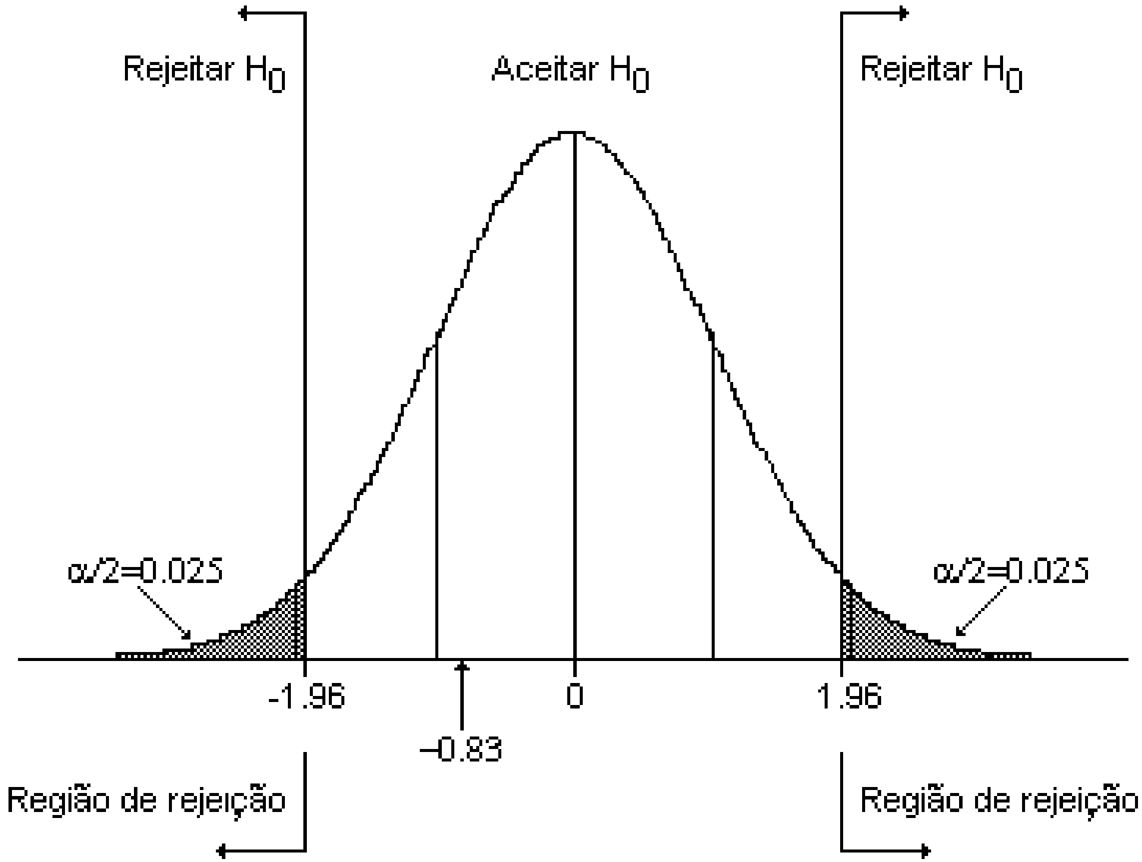
$$z = \frac{(p_1 - p_2) - D_0}{\sigma_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}} = \frac{(0.0059 - 0.0064) - 0}{0.0006} = -0.8333$$

4. Decisão

Não rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, as taxas de mortalidade infantil poderão ser equivalentes.

Teste à Diferença de Proporções

Exemplo



Teste à Variância

Teste Unilateral

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$\left(H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \right)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Estatística

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\, s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Região de Rejeição

$$\chi^2 > \chi_{\alpha,n-1}^2$$

$$\left(\chi^2 < \chi_{1-\alpha,n-1}^2 \right)$$

Região de Rejeição

$$\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2 \quad \text{ou} \quad \chi^2 > \chi_{\alpha}^2$$

Teste à Variância

Exemplo

As garrafas de refrigerantes contêm um volume aproximado de 33 cl. O produtor perderá dinheiro se as garrafas contiverem muito mais do que o volume especificado, e correrá o risco de ser multado, se o volume for bastante inferior.

Assim, é necessário controlar a variação do volume de enchimento das garrafas. Se a variância for superior a 0.25 o processo está fora de controlo, e a máquina de enchimento deve ser ajustada Para tal, um controlador de qualidade recolhe uma amostra de 15 garrafas, com um enchimento médio de 33.15 cl e um desvio padrão de 0.71 cl.

Face a estes resultados pode-se concluir que o processo está controlado?

Teste à Variância

Exemplo

1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : \sigma^2 = 0.25$$

$$H_1 : \sigma^2 > 0.25$$

$$\alpha = 0.05$$

2. Região crítica

$$\chi^2 > \chi^2_{0.05,14} = 23.685$$

3. Teste estatístico

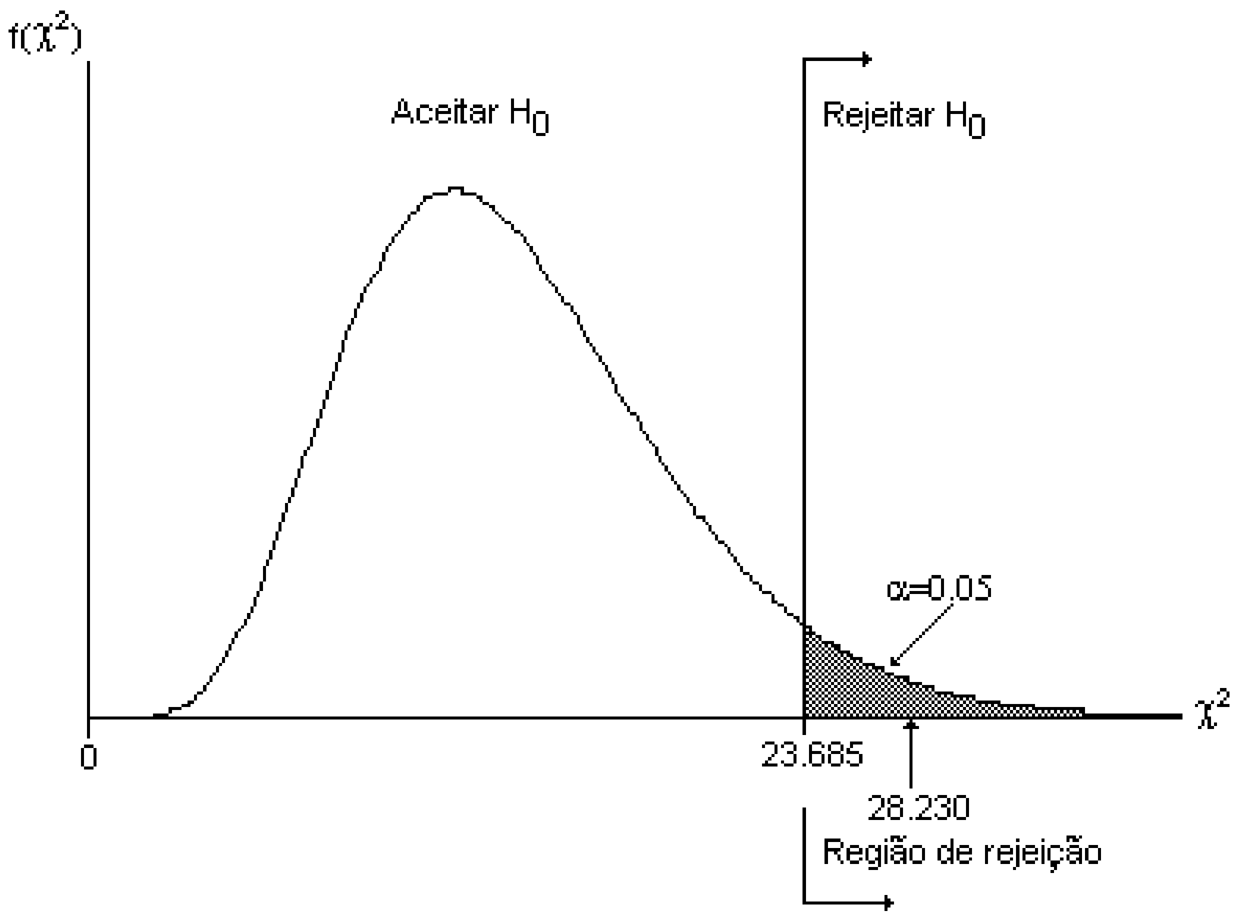
$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{14(0.71)^2}{0.25} = 28.230$$

4. Decisão

Rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, o processo de enchimento está fora de controlo.

Teste à Variância

Exemplo



Teste à Razão de Variâncias

Teste Unilateral

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \Rightarrow \left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2\right)$$

$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \Rightarrow \left(\sigma_1^2 > \sigma_2^2\right) \left(H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1 \Rightarrow \left(\sigma_1^2 < \sigma_2^2\right)\right)$$

Estatística

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1} \qquad \left(F = \frac{s_2^2}{s_1^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}\right)$$

Região de Rejeição

$$F > F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$$

Teste Bilateral

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \Rightarrow \left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2\right)$$

$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \Rightarrow \left(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2\right)$$

Estatística

$$F = \begin{cases} \dfrac{s_1^2}{s_2^2} & s_1^2 > s_2^2 \\ \dfrac{s_2^2}{s_1^2} & s_1^2 < s_2^2 \end{cases} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

Região de Rejeição

$$F > F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$$

Teste à Razão de Variâncias

Exemplo

Numa fábrica de cimento, de duas máquinas de enchimento de sacos de 15Kg, foram recolhidas duas amostras de 13 e 9 sacos.

Estas amostras apresentaram, respectivamente, os seguintes desvios padrões 0.071 e 0.075 Kg.

Permitem os dados concluir que a variabilidade da primeira máquina de enchimento é menor? (α=0.05).

Teste à Razão de Variâncias

Exemplo

1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$\alpha = 0.05$$

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$$

2. Região crítica

$$F > F_{0.05,12,8} = 3.284$$

3. Teste estatístico

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{(0.075)^2}{(0.071)^2} = 1.116$$

4. Decisão

Não rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, a variabilidade das máquinas de enchimento poderá ser idêntica.

Teste à Razão de Variâncias

Exemplo