Modelo do 3.º Teste
de Complementos de Análise Matemática

Duração: 1h30m

---

1. Use a transformada de Laplace para resolver o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y' - x' &= 3\cos(2t) \\ x'' + 4y &= 2\sin(2t) \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

   Solução: $x(t) = t\cos(2t)$ e $y(t) = t\cos(2t) + \frac{3}{2}\sin(2t)$.

2. Para $\lambda \geq 0$, determine os valores próprios e as funções próprias do PVF:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + (4+\lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \; y(2) = 0.$$

   Solução: O PVF tem solução não trivial $y(x) = c_2 e^{-2x}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$, $c_2 \neq 0$, para $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{4}, n \in N$. Logo, o PVF dado tem funções próprias

$$y_n(x) = e^{-2x}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

   para os valores próprios $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}, n = 1, 2, ...$

3. Determine a solução do seguinte problema usando o método de separação de variáveis:

$$u_t = 3u_x + 2u, \; x > 0, t > 0,$$
$$u(0,t) = e^{-t} + 4e^{2t}, \; t > 0.$$

   Solução:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{\left(\frac{\lambda_n}{3} - \frac{2}{3}\right)x + \lambda_n t}$$

   Como se impõe que $u(0,t) = e^{-t} + 4e^{2t}, \quad t < 0,$
   deverá-se ter

$$\sum_{n=1}^{N} c_n e^{\lambda_n t} = e^{-t} + 4e^{2t}$$

   pelo que $c_1 = 1$ e $\lambda_1 = -1$, $c_2 = 4$ e $\lambda_2 = 2$ Logo

$$u(x,t) = e^{-x-t} + 4e^{2t}.$$

4. Considere a função f definida, no intervalo $[0,1]$, por $f(x) = 1 - x$.

   (a) Mostre que a série de Fourier de senos de f é dada por

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n x)}{n}.$$

$$\underline{\text{Nota:}}\int x\sin(\pi n x)dx = \frac{\sin(\pi n x) - \pi n x\cos(\pi n x)}{\pi^2 n^2} + C$$

   Solução: O desenvolvimento de f em série de senos no intervalo $[0,1]$ é dado por

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n x)}{n}.$$

   (b) Seja $u(x,t)$ a temperatura de uma barra de cobre no ponto x no instante t. Considere que esta função satisfaz o problema de valores de fronteira

$$\begin{array}{ll} u_t = 1.14u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 1. \end{array}$$

   Determine a distribuição de temperatura da barra em qualquer instante de tempo $t > 0$, $u(x,t)$, sabendo que o PVF

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad 0 < x < l, \;\; y(0) = y(l) = 0$$

   só tem solução não trivial se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $n \in N$, e, neste caso, $y(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$.

   Solução:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N}\frac{2}{\pi n}\sin(\pi n x)\, e^{-1.14\pi^2 n^2 t}.$$

Questão	1.	2.	3.	4.(a)	4.(b)
Cotação	4	4	4	4	4