teste 6 = dia 1/07 às 9:30h

Processamento Digital de Sinal

Miniteste 2

Estimação espectral

1. Considere um sistema LTI, cuja entrada é ruído branco de média nula e variância σ_x^2, caracterizado pela seguinte equação de diferenças

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

1.0 a) Explique sucintamente o que significa um processo ruído branco e diga quais os parâmetros que o caracterizam. Determine a sequência de autocovariância do processo x[n].

1.0 b) Supondo que dispõe apenas de N amostras do processo x[n], determine a estimativa e a polarização da sequência de autocovariância do processo.

1.0 c) Determine, no contexto da alínea anterior, uma estimativa para a densidade espectral de potência do processo x[n], justificando o método usado.

1.0 d) Considere M=0 e b_0=1 e determine uma estimativa para a densidade espectral de potência de y[n], admitindo que possui uma amostra de N pontos e que não conhece os parâmetros de x[n].

1.0 e) Estabeleça, no contexto da alínea anterior um conjunto de equações lineares que lhe permita calcular os coeficientes a_k.

1.0 f) Determine a densidade espetral de potência cruzada das sequências x[n] e y[n] ($P_{xy}(\Omega)$)

6.0

↳ dei um valor de bónus pois isto deveria ser para 5.0

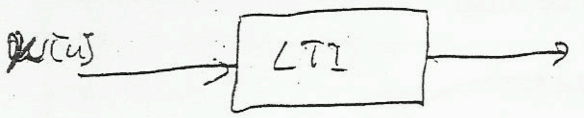
44

39

Miniteste 2 (Correcção)

122

1.



$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

$m_{w} = 0$

$var\{w\} = \sigma_x^2$

a) Um processo ruído branco é por definição um p.a. onde as v. a. que o compõem são não correlacionadas (correladas) ou seja

$$\phi_{xx}(m) = E\{x[n]\, x^*[n+m]\} = \sigma_x^2\, \delta(m) \quad (1)$$

a sequência de autocovariância é por definição (processos ergódicos)

$$\gamma_{xx}(m) = E\{(X_n - m_{X_n})(X^*_{n+m} - m_{X_{n+m}})^*\} = E\{(x[n] - m_x)(x^*[n+m] - m\ldots$$

Como a média do processo é nula e este é estacionário então $m_{X_n} = m_{X_{n+m}} = 0$ pelo que

$$\gamma_{xx}(m) = E\{x[n] .\, x^*[n+m]\} = \phi_{xx}(m) = \underline{\sigma_x^2\, \delta(m)} \text{ (de (1))}$$

b) Como a média é nula então $\gamma_{xx}(m) = \phi_{xx}(m)$

Se temos apenas N amostras temos que usar um dos 2 estimadores estudados nas aulas, p. ex.

$$C_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\, x[n+m]$$

A estimativa da sequência de autocovariância do processo será então

$$E[C_{xx}(m)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \underbrace{E\{x[n]\, x[n+m]\}}_{\text{constante}} \rightarrow \frac{N-|m|}{N} \gamma_{xx}(m)$$

A polarização B define-se como $B = E[C_{xx}(m)] - \gamma_{xx}(m)$

$$B = \left(\frac{N-|m|}{N} - 1\right) \gamma_{xx}(m) = \frac{|m|}{N} \gamma_{xx}(m)$$

O estimador é consistente pois $B \to 0$ se $N \to +\infty$.

Por definição

$$P_{xx}(\Omega) = \text{T.F.}\{\phi_{xx}(m)\}$$

Como $\phi_{xx}(m)$ não é conhecido usamos a sua estimativa $C_{xx}(m)$ ou seja calculamos o periodograma de N pontos, que é uma estimativa não consistente da densidade espectral de potência.

$$I_{N}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{xx}(m)\, e^{-j\Omega m}$$

Para tornar o estimador consistente usa-se uma propriedade das estatística que diz que a variância da soma de N v.a. independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) tende para $\frac{1}{K}\,\text{var}\{x\}$. Deste modo dividimos os dados em K segmentos, calculamos o periodograma de cada segmento e seguidamente fazemos a média dos periodogramas de cada segmento de dados. O valor encontrado deste modo é a estimativa da densidade espectral de potência do processo.

d) $M=0$ e $b_0=1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] + \underbrace{x[n]}_{\text{ruído branco}}$

Então $y[n]$ é um processo autoregressivo de ordem N pelo que a densidade espectral de potência deverá ser calculada pelo método da entropia máxima (M.E.M).

$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]$ sendo o erro de predição $\mathcal{E} = E\{(y[n]-\hat{y}[n])^2\}$

$$= E\{(y[n]-\hat{y}[n])(y[n]-\hat{y}[n])\} = E\{y[n](y[n]-\hat{y}[n])\} - \underbrace{E\{\hat{y}[n](y[n]-\hat{y}[n])\}}_{=0}$$

$= \phi_{xx}(0) - \sum_{i=1}^{N} a_i\, \phi_{xx}(i) = \sigma_x^2$, no entanto se a variância é desconhecida então

$$P_{MEM}(\Omega) = \frac{\phi_{xx}(0) - \sum_{i=1}^{N} a_i\, \phi_{xx}(i)}{\left|1 - \sum_{k=1}^{M} a_k\, e^{-jk\Omega}\right|^2}$$

$$P_{yy}(\Omega) = |H(\Omega)|^2\, P_{xx}(\Omega)$$

σ_x^2

$1 \quad \ldots \quad 12$

30

(40)

e/ São as equações de Yule-Walker ou equações normais e resultam de

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^{N} y[n-k] \quad \text{ou equivalente} \quad \phi_{xx}(k) = \sum_{i=1}^{N} a_i \, \phi_{xx}(|k-i|)$$

$$\begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(1) & -- & \phi(N-1) \\ \phi(N-1) & \phi(N-2) & -- & \phi(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix}$$

f/ $P_{xy}(\Omega) = ?$ $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[-k]\, h[n+k] \Longleftarrow \boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]}$

$$P_{xy}(\omega) = \text{T.F.}\{\phi_{xy}[m]\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}[m]\, e^{-j\Omega m}$$

$$\phi_{xy}[m] = E\{x[n]\, y^*[n+m]\} = E\{y[n]\, x^*[n+m]\}$$

$$= E\Big\{x^*[n+m] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]\Big\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[n+m-k]\, h[n-k]$$

$$r = n-k \Rightarrow \boxed{\phi_{xy}[m] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[r+m]\, h[r]}$$

$$P_{xy}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}[m]\, e^{-j\Omega m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[k+m]\, h[k]\, e^{-j\Omega m}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}[k+m]\, e^{-j\Omega m}\, \underline{e^{-j\Omega k}\; e^{j\Omega k}}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, e^{j\Omega k}}_{H^*(\Omega)} \; \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}[k+m]\, e^{-j\Omega(k+m)}}_{P_{xx}(\Omega)}$$