Ficha 1a

1. a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}(x+1)^n$.

$$R = \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_n \left| \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}} \right| = \lim_n \frac{2^{n+1}}{2^n} = \lim_n \frac{2^n . 2}{2^n} = 2$$

A série é absolutamente convergente no intervalo centrado em -1 e raio 2:

$$]-1-2, -1+2[=]-3, 1[$$

Analisar a convergência da série quando $x=-3$:

$x=-3$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3+1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$

É uma série numérica divergente pois $\lim_n (-1)^n$ não existe.

Analisar a convergência da série quando $x=1$:

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$ série divergente.

Assim, o intervalo de convergência é $I =]-3, 1[$.

1.b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^{2n}$ $\qquad c = 0$

$$R = \lim_n \left| \frac{\frac{2^n}{(2n)!}}{\frac{2^{n+1}}{(2n+2)!}} \right| = \lim_n \left| \frac{2^n . (2n+2)!}{2^{n+1} . (2n)!} \right| = \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)}{2} = +\infty$$

Assim $I = \mathbb{R}$.

1.c) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

$c = 0$

$$R = \lim_n \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}{\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}} \right| = \lim_n \frac{n+2}{n} = 1$$

A série é absolutamente convergente no intervalo centrado em 0 e de raio 1 : $]-1,1[$.

Analisar a convergência da série quando $x=-1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \to \text{série divergente}$$

pois trata-se da série harmónica.

Analisar a convergência da série quando $x=1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}.1^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

É uma série numérica alternada. É necessário analisar a série dos módulos $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ que é uma série divergente. Neste caso, nada se pode afirmar sobre a convergência da série alternada.

Aplica-se o critério de Leibniz:

A sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ é decrescente e $\lim \frac{1}{n} = 0$, logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ é simplesmente convergente.

O intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ é $I =]-1,1]$.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3x-1)^n}{n.2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n.2^n} .3^n.\left(x-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(x-\frac{1}{3}\right)^n$ 3

$c = \frac{1}{3}$ e $a_n = \frac{(-1)^n.3^n}{n.2^n}$

$R = \lim_n \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n}{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}} \right| = \lim \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{2}{3}$

A série é absolutamente convergente em $\left]\frac{1}{3}-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right[= \left]-\frac{1}{3}, 1\right[$.

Para $x = -\frac{1}{3}$:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}(-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \to$ série divergente.

Para $x = 1$:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ → Tal como foi analisado no exercício anterior esta série numérica alternada é simplesmente convergente.

e) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n!(5x+1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n!\, 5^n \left(x+\frac{1}{5}\right)^n$

$c = -\frac{1}{5}$; $a_n = (-1)^n n!\, 5^n$

$R = \lim_n \left| \frac{(-1)^n n!\, 5^n}{(-1)^{n+1}(n+1)!\, 5^{n+1}} \right| = \lim_n \frac{n!\, 5^n}{(n+1)\, n!\, 5^n . 5} = \lim \frac{1}{(n+1).5} = 0$

A série é absolutamente convergente em $c = -\frac{1}{5}$.

2. Obter o desenvolvimento em série de Maclaurin de $\frac{1}{2-x}$, sabendo que $\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+\dots$, $-1<u<1$.

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}.$$

Substituindo no desenvolvimento anterior $u=\frac{x}{2}$, tem-se

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\dots\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^3}+\frac{x^3}{2^4}+\dots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$$

válido para $-1<\frac{x}{2}<1 \iff -2<x<2$.

3. sabendo que

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots$$

obter

a) $\cos x$ por derivação

$$\cos x = (\operatorname{sen} x)' = \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots\right)'$$

$$= 1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}-\frac{7x^6}{7!}+\dots\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)\,x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\dots$$

$$= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\dots$$

b) $\cos x$ por primitivação:

$$\cos x = -P \operatorname{sen} x$$

$$= -P\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots\right)$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4 \times 3!} + \frac{x^6}{6 \times 5!} - \frac{x^8}{8 \times 7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n(2n-1)!} + \dots\right) + k$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + k.$$

Podemos escolher $k = 1$, obtendo assim o desenvolvimento em série de potências de x da função $\cos x$.