Propriedades da D. T. F. T.

- **Propriedades da Transformada de Fourier (DTFT)**
  - Periodicidade – É sempre periódica de período 2π, em contraste com a T. F. em tempo contínuo.
  - Linearidade $ax_1[n]+bx_2[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} aX_1(\Omega)+bX_2(\Omega)$
  - Simetrias – Se x[n] é real então:
    - X(Ω)=X*(-Ω)
    - Re[X(Ω)] e |X(Ω)| são funções pares
    - Im[X(Ω)] e a fase de X(Ω) são funções ímpares
  - Atraso temporal

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$$

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} X(\Omega-\Omega_0)$$

  - Diferença e soma

$$x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \left(1-e^{-j\Omega}\right)X(\Omega)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)+\pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$$

Propriedades da D. T. F. T.

- Escalonamento no tempo e na frequência (x[an])
  - Não existe pelo menos no sentido tradicional pois n é inteiro e a terá que ser inteiro. Por exemplo x[2n] não é uma versão "acelerada" do sinal mas simplesmente as suas amostras de índice par. No entanto define-se

$$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x[n/k], n-é-múltiplo-de-k \\ 0, otherwise \end{cases}$$

$$X_{(k)}(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk]e^{-j\Omega rk}$$

$$X_{(k)}(\Omega)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r]e^{-j(k\Omega)r}=X(k\Omega)$$

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} X(k\Omega)$$

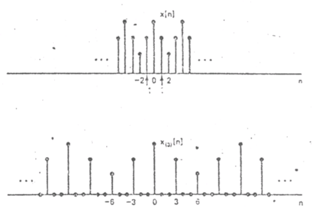


Figure 5.20 The signal $x_{(3)}[n]$ obtained from $x[n]$ by inserting two zeros between successive values of the original signal.

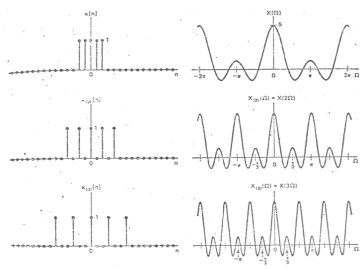
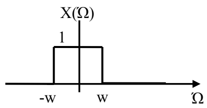


Figure 5.21 Inverse relationship between the time and frequency domains; as k increases $x_{(k)}[n]$ spreads out, while its transform is compressed.

Propriedades da D. T. F. T.

–Dualidade: Não se verifica. Mostre a relação seguinte e compare com a DTFT de uma seq. finita.

$$\frac{W}{\pi}\sin c\left(\frac{Wn}{\pi}\right) \quad \xleftrightarrow{\text{T. F.}}$$



–Derivação na frequência:

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} jnx[n]e^{-j\Omega n} \quad \Rightarrow \quad nx[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

– Relação de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(\Omega)|^2 d\Omega \quad \xRightarrow{\text{Sinais periódicos}} \quad \frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x[n]|^2 = \sum_{n=<N>}|a_k|^2$$

– Convolução: Muito importante na análise de sistemas LTI discretos

$$h[n] = x[n]*h[n] \quad \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \quad Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$$

Propriedades da D. T. F. T.

- Exemplo 1: Determine a resposta de um sistema LTI discreto no tempo a um sinal genérico x[n] sabendo que a sua resp. a impulso é h[n]=δ[n-n_0].

a) No domínio do tempo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-n_0-k] = x[n-n_0]$$

b) No domínio da freq. aplicando as propriedades da convolução e desl. no tempo

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-n_0]e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n_0} \qquad Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = e^{-j\Omega n_0}X(\Omega) \xleftrightarrow{\text{T. F.}} y[n] = x[n-n_0]$$

- Exemplo 2: Determine a resposta, de um sistema LTI discreto no tempo cuja resp. a impulso é h[n]= α^nu[n], a x[n]=β^nu[n].

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-\beta e^{-j\Omega}} \qquad Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})(1-\beta e^{-j\Omega})} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}{1-\alpha e^{-j\Omega}} + \frac{\frac{-\beta}{\alpha-\beta}}{1-\beta e^{-j\Omega}}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \qquad y[n] = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^n u[n] = \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{n+1}u[n] - \beta^{n+1}u[n]\right]$$

Propriedades da D. T. F. T.

- Exemplo 3: Repita o exemplo 2 para o caso em que α=β.

$$Y(\Omega)=\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)^2 \qquad Y(\Omega)=\frac{j}{\alpha}e^{j\Omega}\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)$$

$$\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

$$n\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} j\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)$$

$$(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} je^{j\Omega}\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)$$

$$y[n]=(n+1)\alpha^n u[n+1] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \frac{j}{\alpha}e^{j\Omega}\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)=\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)^2 \Longrightarrow y[n]=(n+1)\alpha^n u[n]$$

Propriedades da D. T. F. T.

- **Sistemas discretos LTI e equações diferença**

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} Y(\Omega)\sum_{k=0}^{N}a_k e^{-jk\Omega}=X(\Omega)\sum_{k=0}^{M}b_k e^{-jk\Omega}$$

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N}a_k e^{-jk\Omega}}$$

- Exemplo: Qual é h[n] e H(Ω) do sistema descrito por

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n]$$

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\Omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}=\ldots=\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}-\frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$h[n]=4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Propriedades da D. T. F. T.

- Exemplo: Considere o sistema LTI com resposta a impulso h[n]=(1/2)^{n}u[n]. Utilize a DTFT para determinar a resposta do sistema ao sinal x[n]=(n+1)(1/4)^{n}u[n].

Das tabelas temos

$$(n+1)\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \frac{j}{\alpha}e^{j\Omega}\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)=\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)^2$$

$$X(\Omega)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2}$$

$$Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2}=\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{-2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}+\frac{-1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2}$$

$$y[n]=4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]-(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Propriedades da D. T. F. T.

- **Problemas para resolução em casa**

  – Repita o exemplo anterior para

  1) x[n]=(3/4)^{n}u[n]

  2) x[n]=(-1)^n

Propriedades da D. T. F. T.

- Interferência de movimentos musculares em ECG's.

Causas: Movimentos do tronco (tosse, respiração, movimentos de pernas ou braços, ... Variações de temperatura, fenómenos eléctricos (polarização dos amplificadores, étc,..)

Consequências: Dificuldade de análise do ST

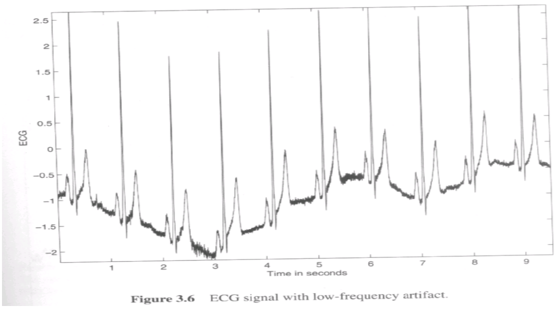


Figure 3.6 ECG signal with low-frequency artifact.

Propriedades da D. T. F. T.

- Eliminação de interferências de baixa frequência com o derivador

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{T. F.}} jwX(w) \qquad x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{\text{T. F.}} \left(1-e^{-j\Omega}\right)X(\Omega)$$

$$H(\Omega)=1-e^{-j\Omega}=e^{-j\frac{\Omega}{2}}\left(e^{j\frac{\Omega}{2}}-e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right)=e^{-j\frac{\Omega}{2}}\left(2jsen\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$|H(\Omega)|=2sen\frac{\Omega}{2}$$

$$\angle H(\Omega)=\frac{\Pi}{2}-\frac{\Omega}{2}$$

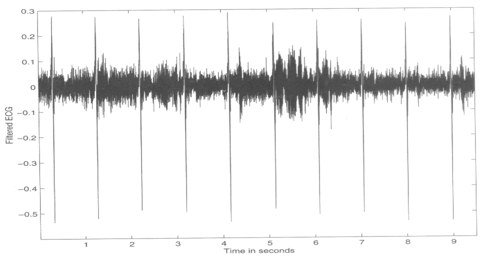
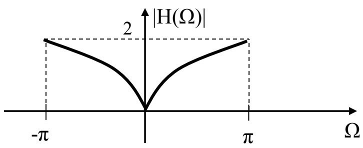


Figure 3.24 Result of filtering the ECG signal with low-frequency noise shown in Figure 3.6, using the first-order difference operator.



Propriedades da D. T. F. T.

- Uma função de transferência mais apropriada às características do ECG.

Conteúdo espectral significativo em baixas frequências (0,5-1Hz)

$$H(\Omega)=\frac{1-e^{-j\Omega}}{1-0{,}995e^{-j\Omega}}$$

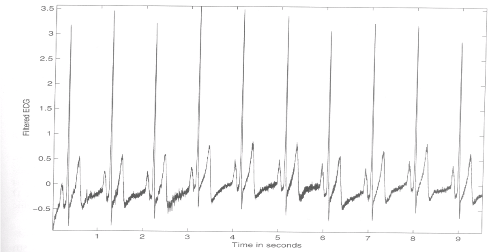


Figure 3.28 Result of processing the ECG signal with low-frequency noise shown in Figure 3.6, using the filter to remove base-line wander as in Equation 3.47. (Compare with the results in Figures 3.24 and 3.25.)