# Complementos de Análise Matemática

MIETI, MIEMAT, MIETEX
2016/2017

## Folha de Exercícios 5

Introdução às equações diferenciais parciais

---

***Problemas com condições de fronteira: valores próprios e funções próprias***

1. Mostre que as funções $\sin(\pi x), \sin(2\pi x), \sin(3\pi x), ...$ são as funções próprias do problema de valores de fronteira
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0,$$
no intervalo $[0, 1]$.

2. Mostre que as funções $1, \cos(\pi x), \cos(2\pi x), \cos(3\pi x), ...$ são as funções próprias do problema de valores de fronteira
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = y'(1) = 0,$$
no intervalo de $[0, 1]$ .

3. Determine os valores próprios e as funções próprias dos seguintes problemas de valores de fronteira.

   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0$

   (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0$

   (c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0$

   (d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$

4. Para que valores de $\lambda$ é que o problema de valores de fronteira
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi),$$
tem solução não-trivial?

5. Para que valores de $\lambda$ é que o PVF
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + (1 + \lambda)y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$
tem solução não-trivial?

***Classificação de equações diferenciais parciais de segunda ordem***

6. Escrever a forma geral de uma EDP de primeira ordem linear em três variáveis. Quantas funções são necessárias para especificar esta EDP?

7. Considere o operador $\mathcal{L}$ dado por $\mathcal{L}u(x,y) = a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}$. Mostre que $\mathcal{L}$ é um operador linear.

8. Supondo que $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são operadores lineares. Mostre que o operador $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ também é um operador diferencial linear.

9. Classifique cada uma das EDPs de segunda ordem como elíptica, parabólica ou hiperbólica.

   (a) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y = 0$

   (b) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y = 0$

   (c) $u_{xx} + xu_{yy} = 0$

   (d) $u_{xx} + 2e^{xy}u_{xy} + e^{2xy}u_{yy} = 0$

   (e) $e^y u_{xx} + e^x u_{yy} = 0$

   (f) $u_{xx} + 2\cos(x)\, u_{yy} = 0 \quad x \in ]0, \pi/2[$

***O princípio da sobreposição***

10. Mostre que a função $u(x,y) = e^{kx}\cos ky$ é uma solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ qualquer que seja o valor da constante $k$.

11. Mostre que a função $u(x,t) = e^{kx}e^{-k^2 t}$ é uma solução da equação de calor $u_{xx} + u_t = 0$ qualquer que seja o valor da constante $k$.

12. Mostre que a função $u(x,y) = e^{kx}e^{-ky}$ é uma solução da equação de onda $u_{xx} - u_{yy} = 0$ qualquer que seja o valor da constante $k$.

13. Mostre que a função $u(x,y) = \frac{kx^2}{2} + \frac{(1-k)y^2}{2}$ é uma solução da equação de Poisson $u_{xx} + u_{yy} = 1$ qualquer que seja o valor da constante $k$.

**Soluções da folha de exercícios 5**

3. (a) $\lambda_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}$, $y(x) = \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right]$;
   (b) $\lambda = 0$, $y(x) = 1$; $\lambda_n = -n^2\pi^2/l^2$, $y(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$;
   (c) $\lambda = -1$, $y(x) = e^x$; $\lambda_n = n^2$, $y(x) = n\cos(nx) + \sin(nx)$;
   (d) $y(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) + \sqrt{\lambda_n}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)$, onde $\tan\left(\sqrt{\lambda_n}\right) = -\sqrt{\lambda_n}$ e $\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4} < \lambda_n < n^2\pi^2$.

4. $\lambda = 0$, $y(x) = 1$; $\lambda_n = n^2$, $y(x) = \cos(nx) + \sin(nx)$.

5. $\lambda_n = n^2\pi^2$, $y(x) = e^x \sin(n\pi x)$.

6. $a(x,y,z)u_x + b(x,y,z)u_y + c(x,y,z)u_z + d(x,y,z)u = f(x,y,z)$; são necessárias 5 funções.

9. (a) hiperbólica;
   (b) parabólica;
   (c) elíptica se $x > 0$, hiperbólica se $x < 0$, parabólica se $x = 0$;
   (d) parabólica;
   (e) elíptica;
   (f) elíptica;