

Cálculo
Teste 1

Nome Completo

Número

JUSTIFIQUE CUIDADOSAMENTE TODAS AS SUAS RESPOSTAS.

I
(5 valores)

Relativamente às questões deste grupo indique se a afirmação é **verdadeira** ou **falsa**.

1. Seja f uma função real de uma variável real, definida para qualquer número real.

A função g definida por $g(x) = f(x) + f(-x)$ é uma função par.

2. Seja f uma função, real de uma variável real.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5 \iff \text{quando } 0 < |x - 3| < 1, \text{ se tem } |f(x) - 5| < \frac{1}{10}.$$

3. Os domínios das funções definidas por $f(x) = \arcsen x$ e $g(x) = \arctg x$ são iguais.

4. A equação $6x^4 - 7x + 1 = 0$ tem, quando muito, duas raízes reais distintas.

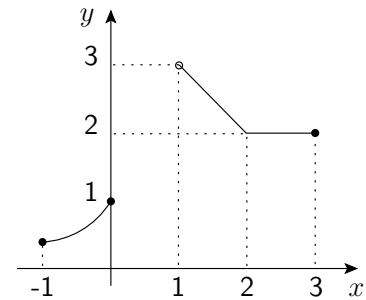
5. $\left[\int f(x) dx \right]' = \int f'(x) dx, \quad \forall x \in I \subseteq \mathbb{R}.$

II
(15 valores)

1. (3 valores)

Considere a função $f :]-1, 0[\cup]1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está representado na figura. No intervalo $[-1, 0]$ o gráfico da função f coincide com o gráfico da função exponencial.

- (a) Qual o contradomínio da função f .
- (b) A função f é injetiva?
- (c) Quais os pontos onde a função f é descontínua?
- (d) Quais os pontos onde a função f não é derivável?
- (e) Defina, analiticamente, um prolongamento contínuo da função f ao intervalo $[-1, 3]$.



2. (2,5 valores)

Encontre os valores de K para os quais é contínua em todo o seu domínio a função f definida por

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} K^2 x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ (1 - K)x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

3. (2 valores)

Defina, se existir, (ou mostre que não existe) uma reta tangente à função f , no ponto de coordenadas $(1, 1)$, sabendo que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

4. (2,5 valores)

Seja $P_{3,0}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ o polinómio de Taylor de ordem 3 em torno de 0 de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nestas condições defina o polinómio de Taylor de ordem 2 em torno de 0 da função f' .

5. (1 valor)

Defina uma função F , no intervalo $[0, 2]$, sabendo que $F''(x) = x^2 - x$, $F'(1) = 0$ e $F(0) = 1$

6. (4 valores)

Calcule as seguintes primitivas

(a) $\int \frac{x^4 + 1}{x^5} dx$

(b) $\int \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2} dx$

(c) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

| | | | | | | | |
|------------------------|---|--------------|--------------|--------------|---------|-------|----------|
| x | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | π | $3\pi/2$ |
| $\operatorname{sen} x$ | 0 | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | 0 | -1 |
| $\cos x$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1/2 | 0 | -1 | 0 |

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$