Teoria dos Circuitos e Fundamentos de Electrónica

Leis de Kirchoff e sua Aplicação na Análise de Circuitos

Teresa Mendes de Almeida
TeresaMAlmeida@ist.utl.pt

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

DEEC
Área Científica de Electrónica

Março de 2008

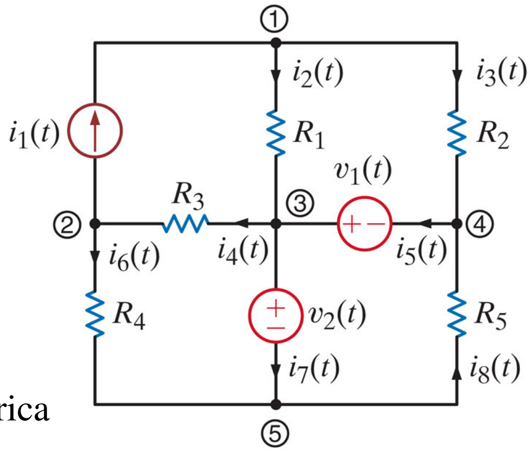
Matéria

- **Lei de Kirchhoff das correntes**
  - KCL – lei dos nós
  - Generalização de KCL
- **Lei de Kirchhoff das tensões**
  - KVL – lei das malhas
- **Ligação de componentes em série e em paralelo**
- **Resistências em série e em paralelo**
  - Resistências em série
  - Resistências em paralelo
  - Simplificação de resistências
- **Divisor de Tensão**
- **Divisor de Corrente**
- **Análise e simplificação de circuitos**

Lei de Kirchhoff das correntes (KCL)

- **A soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que saem desse nó**

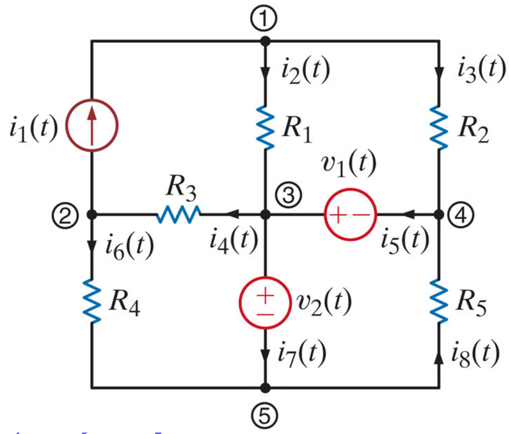
$$\sum_e i_e = \sum_s i_s$$



- **Nó 1** $\quad i_1 = i_2 + i_3$
- **Nó 2** $\quad i_4 = i_1 + i_6$
- **Nó 3** $\quad i_2 + i_5 = i_4 + i_7$
  - baseia-se na conservação da carga eléctrica
  - também se chama <u>Lei dos Nós</u>
  - equação tem tantos termos quantos os ramos que ligam ao nó
  - quando correntes não estão com sentido marcado no circuito
    - é preciso arbitrar um sentido para a corrente em cada ramo
    - e escrever equação KCL concordante com os sentidos escolhidos

Lei de Kirchhoff das correntes (KCL)

- **Nó 3** $\quad \underbrace{i_2 + i_5}_{entrar} = \underbrace{i_4 + i_7}_{sair}$



  - equações matematicamente equivalentes

$$+i_2 - i_4 + i_5 - i_7 = 0$$

$$-i_2 + i_4 - i_5 + i_7 = 0$$

  - então há outra formulação possível:
- **Num nó, a soma <u>algébrica</u> das correntes é nula**

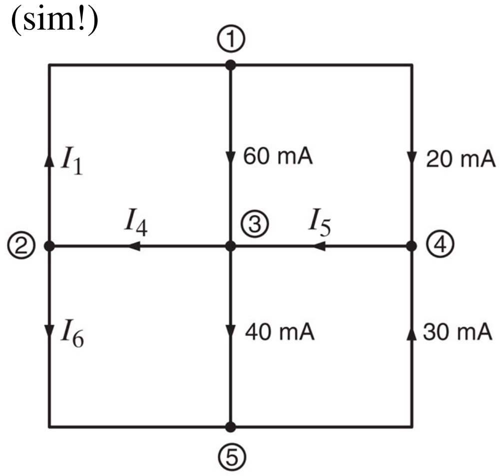
$$\sum_k i_k = 0$$

  - é preciso associar sinal algébrico (+/-) com sentido das correntes
    - correntes que entram são (+) e correntes que saem são (-)

      ou
    - correntes que entram são (-) e correntes que saem são (+)

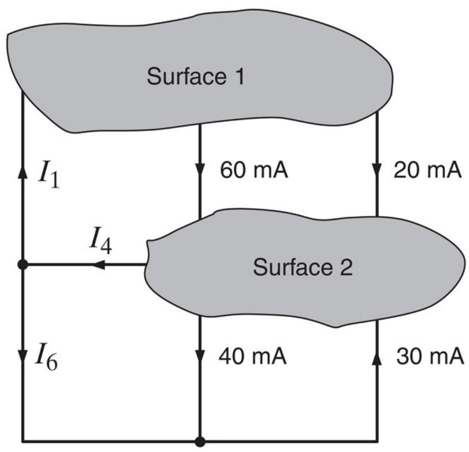
Quantas equações KCL?

- **Num circuito com N nós**
  - podem escrever-se N equações KCL – uma para cada nó
  - apenas N-1 equações é que são linearmente independentes
    - N-ésima equação é redundante (pode obter-se a partir das restantes eq.)
- **Calcular as correntes desconhecidas I_1, I_4, I_5, I_6 usando KCL**
  - Por onde começar? Qual a sequência de cálculos?
  - Há mais do que uma forma de calcular? (sim!)
- **Nó 4**
  - $30 + 20 = I_5$ $\quad I_5 = 50$ mA
- **Nó 3**
  - $60 + I_5 = I_4 + 40$ $\quad I_4 = 70$ mA
- **Nó 5**
  - $I_6 + 40 = 30$ $\quad I_6 = -10$ mA
- **Nó 2**
  - $I_4 = I_1 + I_6$ $\quad I_1 = 80$ mA



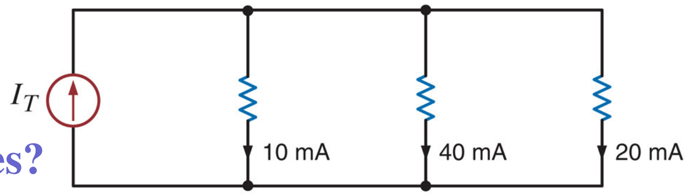
Generalização KCL

- **Pode generalizar-se a lei de Kirchhoff das correntes aplicando-a a uma superfície fechada**
  - superfície fechada
    - parte do circuito onde se verifique conservação da carga
    - conjunto de componentes (que não armazenam carga) interligados
    - pode ser vista como um nó gigante
- **Superfície 1**
  - $I_1 = 60 + 20$ $\quad I_1 = 80$ mA
- **Superfície 2**
  - $20 + 60 + 30 = I_4 + 40$ $\quad I_4 = 70$ mA
- **I_4 foi calculada sem se saber I_5**
- **Generalização pode ser muito útil em circuitos complexos**

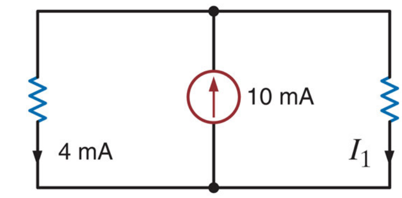


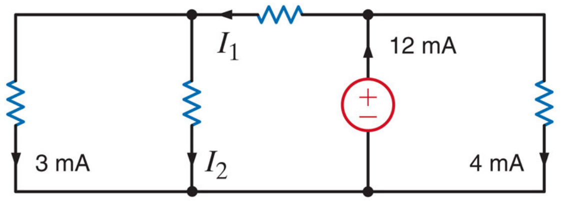
Exemplos de aplicação

- **Quantos nós?**
- **Quanto vale I_T?**
- **Quantas eq. KCL diferentes?**

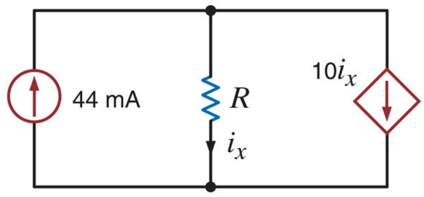


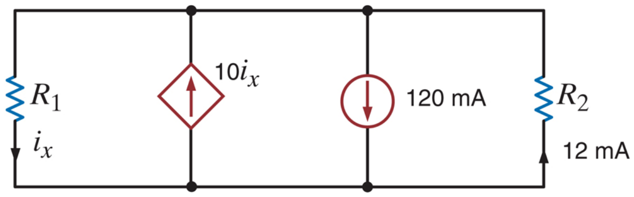
- **Calcular I_1 e I_2**





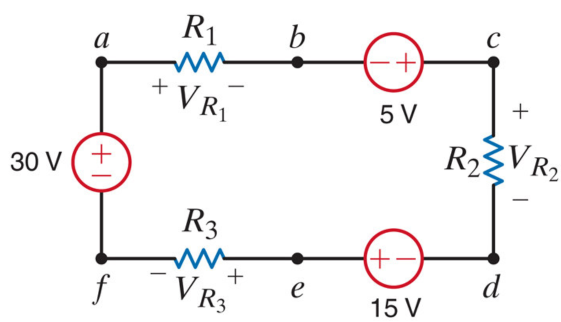
- **Calcular i_x**





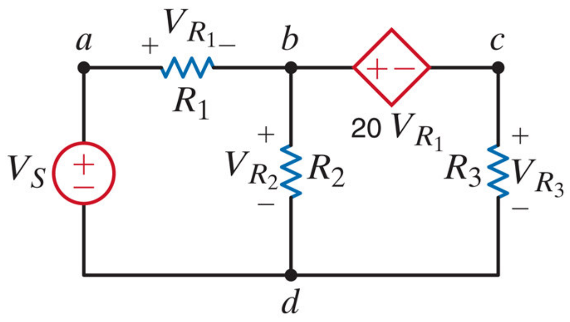
Lei de Kirchhoff das tensões (KVL)

- **A soma algébrica das tensões numa malha é zero** $\sum_k v_k = 0$
  - baseia-se na conservação da energia eléctrica
  - é preciso associar sinal algébrico com polaridade da tensão
    - quando se circula na malha
      - + → quando se encontra primeiro o sinal +
      - – → quando se encontra primeiro o sinal –
    - quando grandezas não estão marcadas no circuito
      - arbitrar sentidos e escrever equações KVL de acordo com sentidos
  - também se chama <u>Lei das Malhas</u>
- **Sentido horário – abcdefa**
  - $+ V_{R1} - 5 + V_{R2} - 15 + V_{R3} - 30 = 0$
- **Sentido anti-horário – afedcba**
  - $+ 30 - V_{R3} + 15 - V_{R2} + 5 - V_{R1} = 0$
- **Basta escrever uma das equações**
  - as 2 equações são equivalentes



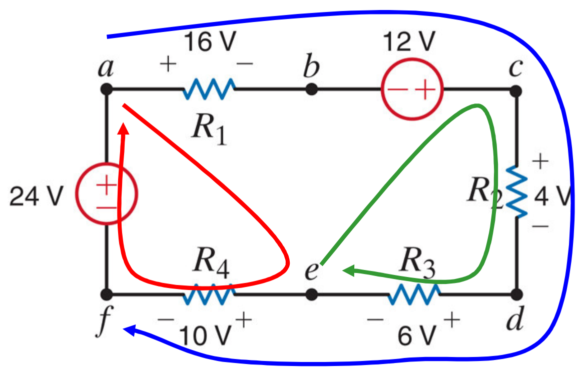
Quantas equações KVL?

- **Quantas equações KVL se podem escrever?**
  - uma por cada malha do circuito
- **Quantas equações KVL são linearmente independentes?**
  - tantas quantas o número de malhas elementares
  - as restantes equações são redundantes
- **Circulando em sentido horário em todas as malhas do circuito**
  - Malha exterior – abcda
    - $+V_{R1} + (20\ V_{R1}) + V_{R3} - V_S = 0$
  - Malha elementar à esquerda – abda
    - $+V_{R1} + V_{R2} - V_S = 0$
  - Malha elementar à direita – bcdb
    - $+ (20\ V_{R1}) + V_{R3} - V_{R2} = 0$
  - 2 malhas elementares
    - apenas 2 das 3 equações KVL são linearmente independentes
    - a 3ª equação que se considere é redundante
      - pode obter-se a partir das outras 2



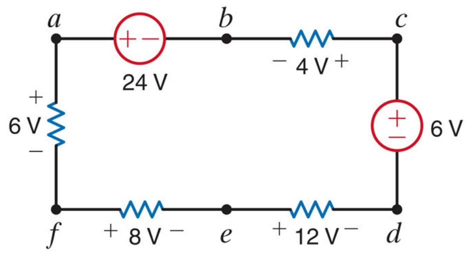
Usar KVL para determinar V entre dois nós

- **Usar KVL para determinar tensão entre dois nós do circuito**
- **Quanto vale V_{ae}?**
  - $V_{ae} = +V_a - V_e$ é a incógnita
  - circulando no sentido horário
  - $V_{ae} + 10 - 24 = 0$ $V_{ae} = 14V$
- **Quanto vale V_{ec}?**
  - $V_{ec} = +V_e - V_c$ é a incógnita
  - circulando no sentido horário
  - $V_{ec} + 4 + 6 = 0$ $V_{ec} = -10V$
- **Quanto vale V_{af}?**
  - pelo ramo da esquerda (gerador de tensão)
    - $V_{af} = +V_a - V_f = 24\ V$
  - circulando pelos componentes do lado direito
    - $V_{af} = +V_a - V_f = +16 - 12 + 4 + 6 + 10 = +24\ V$

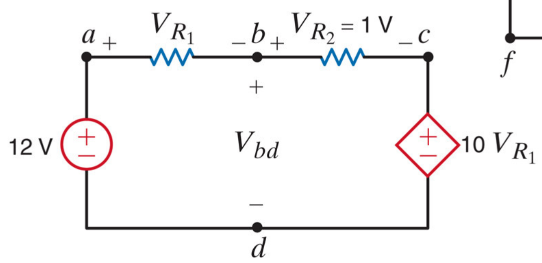


Exemplos de aplicação

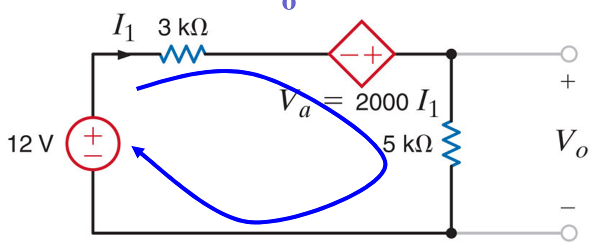
- **Calcular V_{ec}, V_{ad} e V_{eb}**

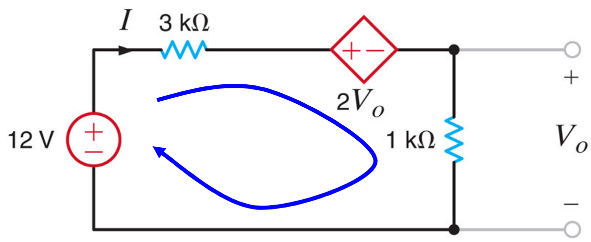


- **Calcular V_{bd}**



- **Calcular V_o**



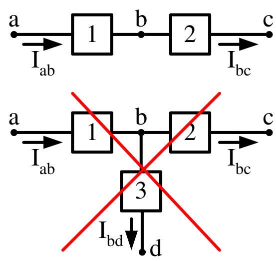


$$\begin{cases} 3I_1 - V_a + 5I_1 - 12 = 0 \\ V_a = 2I_1 \end{cases} \qquad I_1 = 2mA \quad V_o = 10V$$

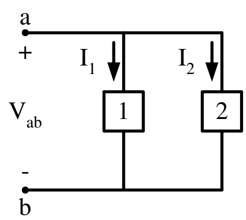
$$\begin{cases} 3000I + (2V_o) + V_o - 12 = 0 \\ V_o = 1000I \end{cases} \qquad \begin{cases} I = 2mA \\ V_o = 2V \end{cases}$$

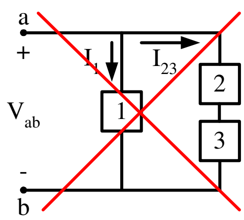
Ligação em série e em paralelo

- **Componentes 1 e 2 ligados em série**
  - têm um nó comum
    - nó b
  - passa a mesma corrente nos dois componentes $I_{ab} = I_{bc}$

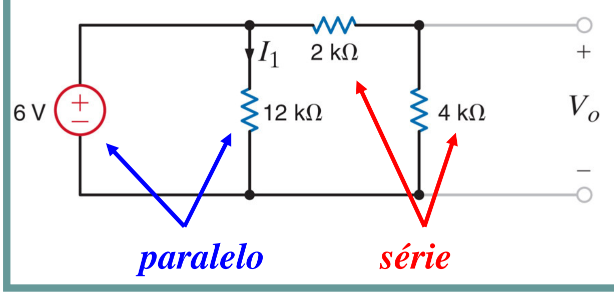


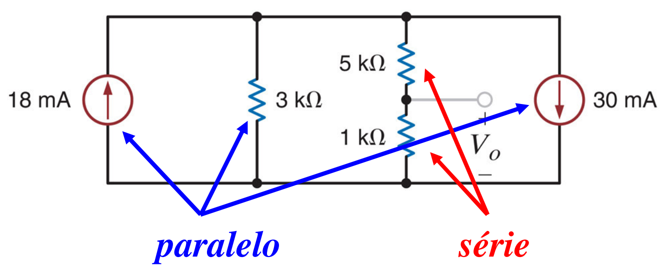
- **Componentes 1 e 2 ligados em paralelo**
  - têm dois nós comuns
    - nós a e b
  - tensão aos terminais é a mesma V_{ab}





- **Ligação série / paralelo?**

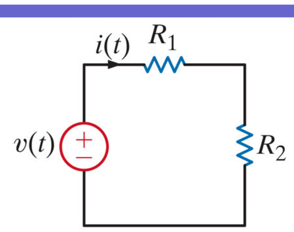




Resistências em série

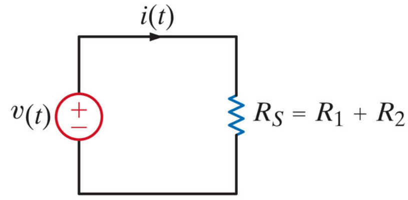
- **Duas resistências em série somam-se**

$$R_S = R_1 + R_2$$

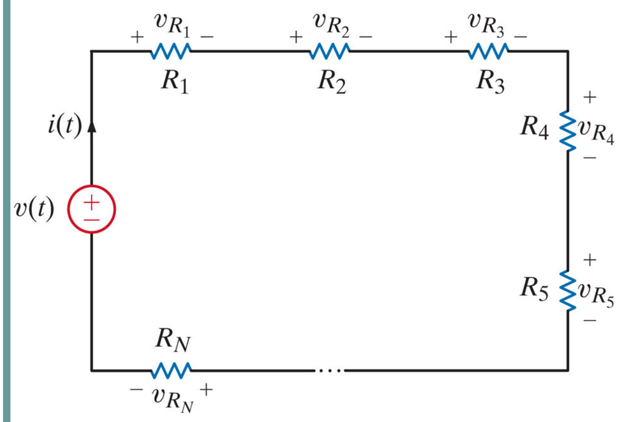


- **KVL**

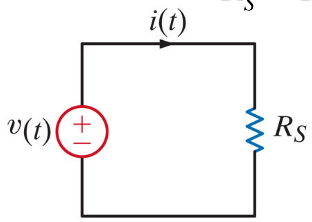
$$R_1 i + R_2 i - v = 0 \quad v = \left(R_1 + R_2\right) i \quad \frac{v}{i} = R_1 + R_2$$



- **N resistências em série somam-se**



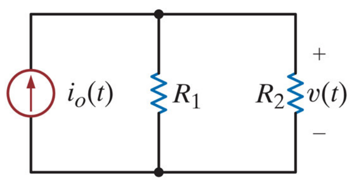
$$R_S = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_N$$



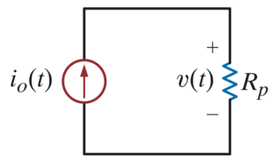
- **R_S é sempre maior do que as resistências da série**

Resistências em paralelo

- **Duas resistências em paralelo**
- **KCL**



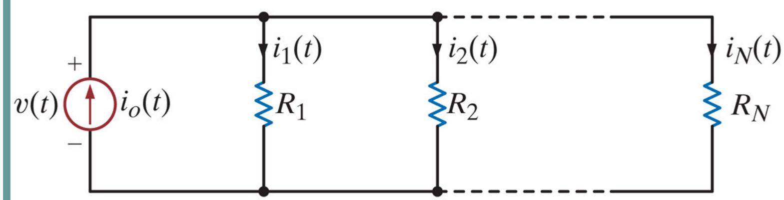
$$i_o = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} \quad i_o = v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \frac{i_o}{v} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad G_P = G_1 + G_2 \qquad R_P = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_P = R_1 \,//\, R_2$$

- **N resistências em paralelo**

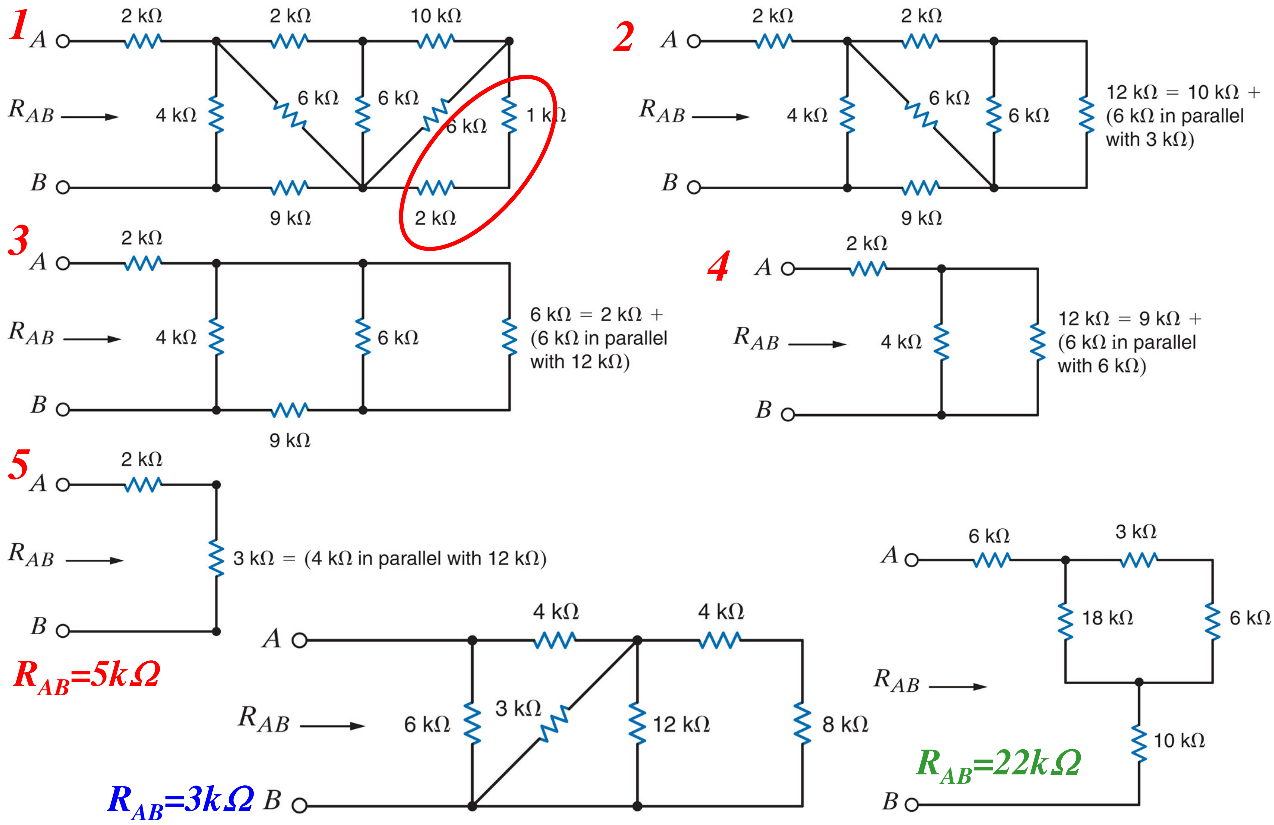


$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_N}$$

$$R_P = R_1 \,//\, R_2 \,//\, R_3 \,// \cdots //\, R_N$$

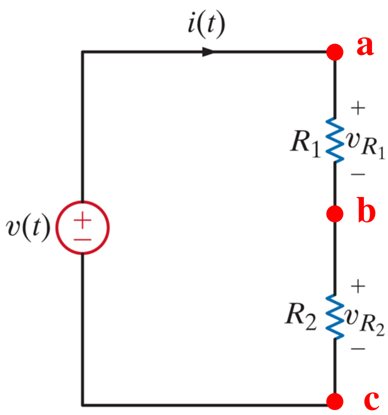
- **R_P é sempre menor do que as resistências do paralelo**
- **N resistências iguais** $\quad R_P = R / N$

Simplificação de resistências



Divisor de Tensão

- **A tensão divide-se entre duas resistências em série na proporção directa do valor das suas resistências**



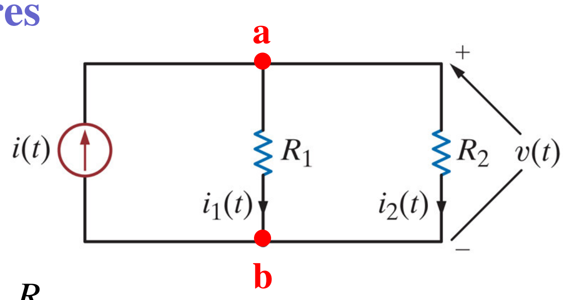
- **KCL** $\begin{cases} i = i_{ab} = i_{R1} \\ i_{ab} = i_{bc} = i_{R2} \end{cases}$ $\quad i = i_{R1} = i_{R2}$
- **KVL (abca)** $v_{R1} + v_{R2} - v = 0$
- **Lei Ohm** $\begin{cases} v_{R1} = R_1 i \\ v_{R2} = R_2 i \end{cases}$ $\quad R_1 i + R_2 i - v = 0$

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2} \qquad v_{R1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v \qquad v_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

- **R_1=R_2** $v_{R1} = v_{R2} = \frac{v}{2}$ **R_1=0** $\begin{cases} v_{R1} = 0 \\ v_{R2} = v \end{cases}$ **R_1=+∞** $\begin{cases} v_{R1} = v \\ v_{R2} = 0 \end{cases}$

Divisor de Corrente

- **A corrente divide-se entre duas resistências em paralelo na proporção inversa dos seus valores**
- **KCL** $i = i_1 + i_2$



- **Lei Ohm** $\begin{cases} v = v_{ab} = R_1 i_1 \\ v = v_{ab} = R_2 i_2 \end{cases}$

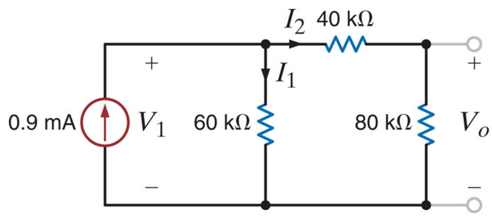
$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \qquad i_2 = \frac{R_1}{R_2} i_1 \qquad i = i_1 + \frac{R_1}{R_2} i_1$$

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} i \\ i_2 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} i \end{cases} \qquad G = \frac{1}{R} \qquad \begin{cases} i_1 = \dfrac{G_1}{G_1 + G_2} i \\ i_2 = \dfrac{G_2}{G_1 + G_2} i \end{cases}$$

- **$R_1=R_2$** $i_1 = i_2 = \dfrac{i}{2}$ **$R_1=0$** $\begin{cases} i_1 = i \\ i_2 = 0 \end{cases}$ **$R_1=+\infty$** $\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = i \end{cases}$

Exemplo de aplicação

- **Calcular I_1, I_2 e V_o**
- **Divisor de corrente e Lei de Ohm**

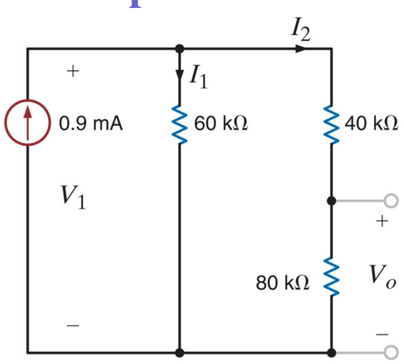


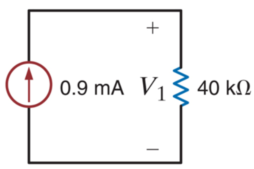
$$I_1 = \frac{40+80}{60+(40+80)} 0.9 = 0.6mA$$

$$V_o = 80k \times I_2 = 24V$$

$$I_2 = \frac{60}{60+(40+80)} 0.9 = 0.3mA$$

- **Simplificar resistências e usar divisor de tensão**





$$R_1 = 60 // (80+40) = 40k\Omega$$

$$V_1 = R_1 I_1 = 40 \times 0.9 = 36V$$

$$V_o = \frac{80}{80+40} V_1 = 24V$$

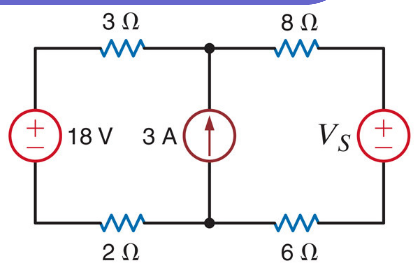
Exemplo de aplicação

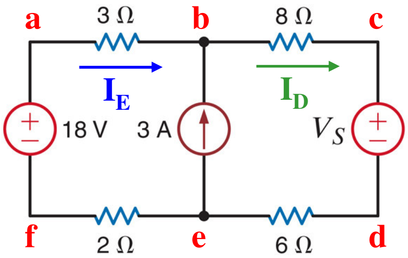
- **Calcular V_S sabendo que a potência fornecida pela fonte de corrente é 0W**
  - identificar nós
  - $P_{fonte\ I} = 0W$

    $$P_{fonte\,I} = V_{fonte\,I} I_{fonte\,I} = V_{eb} I_{eb} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{eb} = 0$$
  - marcar corrente I_E
  - KCL nós a e f $\quad I_E = I_{ab} = I_{fa} = I_{ef}$
  - KVL malha elementar à esquerda (abefa)

    $$3I_E + \underbrace{V_{be}}_{0} + 2I_E - 18 = 0 \quad I_E = \frac{18}{5} A$$
  - marcar corrente I_D
  - KCL nó b $\quad I_E + 3 = I_D \quad I_D = \frac{33}{5} A$
  - KCL nós c e d $\quad I_D = I_{bc} = I_{cd} = I_{de}$
  - KVL malha elementar à direita (bcdeb)

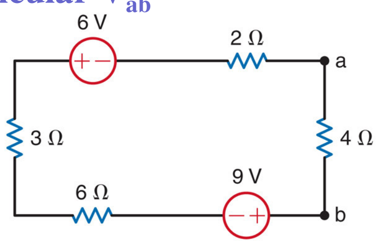
    $$8I_D + V_S + 6I_D + \underbrace{V_{eb}}_{0} = 0 \quad V_S = -14 I_D = -92,4V$$



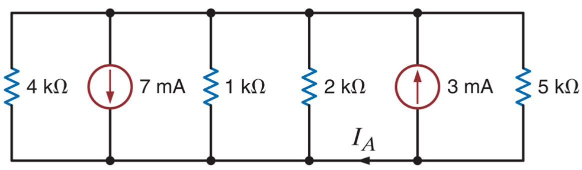


Exemplos de aplicação

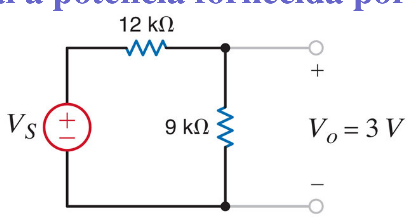
- **Calcular V_{ab}**



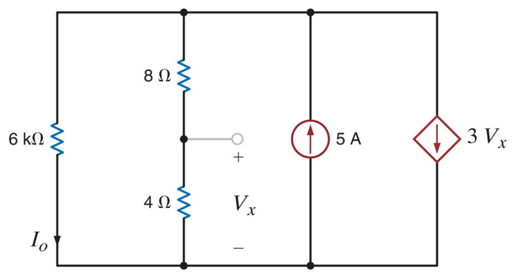
- **Quanto vale I_A?**



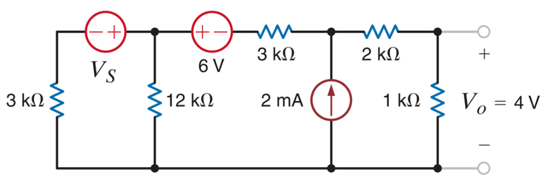
- **Qual a potência fornecida por V_S?**



- **Calcular I_o**



- **Quanto vale V_S?**



- **Quanto vale V_1?**