

**1. Para cada uma das seguintes alíneas, verifique que a função dada é solução da respectiva equação diferencial homogénea, e obtenha a solução geral.**

a)  $\frac{x^2}{4} \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$  ,  $y_1(x) = x^4$ .

**R:**

**1º)** Verificar se  $y(x) = x^4$  é solução da equação diferencial dada:

$$y(x) = x^4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(4x^3) = 12x^2$$

Substituindo agora estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$$\frac{x^2}{4} \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} \cdot 12x^2 - x \cdot 4x^3 + x^4 = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 4x^4 + x^4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow y(x) = x^4$$

é solução da equação diferencial.

**2º)** Obter a solução geral através do método da redução de ordem:

O método da redução de ordem implica a seguinte mudança de variável:

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot v(x) \Leftrightarrow y_2(x) = x^4 \cdot v(x)$$

Assim sendo teremos então que:

$$y_2(x) = x^4 \cdot v(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 \cdot v(x)) = \frac{d}{dx}(x^4) \cdot v(x) + x^4 \cdot \frac{d}{dx}(v(x)) = 4x^3 \cdot v + x^4 \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 \cdot v + x^4 \cdot \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[4x^3 \cdot v + x^4 \cdot \frac{dv}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[4x^3 \cdot v\right] + \frac{d}{dx}\left[x^4 \cdot \frac{dv}{dx}\right] =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}(4x^3) \cdot v + 4x^3 \cdot \frac{d}{dx}v\right) + \left(\frac{d}{dx}(x^4) \cdot \frac{dv}{dx} + x^4 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)\right) =$$

$$= 12x^2 \cdot v + 4x^3 \cdot \frac{dv}{dx} + 4x^3 \cdot \frac{dv}{dx} + x^4 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = x^4 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + 8x^3 \cdot \frac{dv}{dx} + 12x^2 \cdot v$$

Substituindo agora estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$$\frac{x^2}{4} \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} \left( x^4 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + 8x^3 \cdot \frac{dv}{dx} + 12x^2 \cdot v \right) - x \left( 4x^3 \cdot v + x^4 \cdot \frac{dv}{dx} \right) + (x^4 \cdot v) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^6}{4} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{8x^5}{4} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{12x^4}{4} \cdot v - 4x^4 \cdot v - x^5 \cdot \frac{dv}{dx} + x^4 \cdot v = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^6}{4} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + \left( \frac{8x^5}{4} - x^5 \right) \cdot \frac{dv}{dx} + \left( \frac{12x^4}{4} + x^4 - 4x^4 \right) \cdot v = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^6}{4} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + \left( \frac{8x^5 - 4x^5}{4} \right) \cdot \frac{dv}{dx} + \left( \frac{12x^4 + 4x^4 - 16x^4}{4} \right) \cdot v = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^6}{4} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + x^5 \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

Fazendo agora uma nova mudança de variável do tipo:

$$w = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (w) = \frac{dw}{dx}$$

Agora teremos que re-escrever a equação diferencial anteriormente obtida que irá resultar numa nova equação diferencial de variáveis separáveis:

$$\frac{x^6}{4} \cdot \frac{dw}{dx} + x^5 \cdot w = 0 \Leftrightarrow \frac{x^6}{4} \cdot \frac{dw}{dx} = -x^5 \cdot w \Leftrightarrow \frac{x^6}{4} dw = (-x^5 \cdot w) dx \Leftrightarrow \underbrace{(x^5 \cdot w)}_w dx + \underbrace{\frac{x^6}{4}}_{x^6} dw = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{x^6 \cdot w} \wedge x \neq 0 \wedge w \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x^6 \cdot w} \cdot (x^5 \cdot w) dx + \frac{1}{x^6 \cdot w} \cdot \frac{x^6}{4} dw = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} dx + \frac{1}{4w} dw = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{4w} dw = C \Leftrightarrow \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{w} dw = C \Leftrightarrow \ln|x| + \frac{1}{4} \cdot \ln|w| = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \ln|x| + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln|w| = 4C, 4C = C_1 \Leftrightarrow 4 \cdot \ln|x| + \ln|w| = C_1 \Leftrightarrow \ln|x|^4 + \ln|w| = C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(|x|^4 \cdot |w|) = C_1 \Leftrightarrow e^{\ln(|x|^4 \cdot |w|)} = e^{C_1}, e^{C_1} = C_2 \Leftrightarrow |x|^4 \cdot |w| = C_2, C_3 = C_2 > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |w| = \frac{C_3}{|x|^4}, C_3 = C \neq 0 \Leftrightarrow w = \frac{C}{x^4} \rightarrow$  Família de soluções para a equação afectada do factor integrante.

Vamos agora verificar se  $x=0 \wedge w=0$  também poderão ser soluções. Para tal teremos que

antes de mais re-escrever a equação diferencial:  $\frac{x^6}{4} \cdot \frac{dw}{dx} = -x^5 \cdot w \Leftrightarrow \frac{x^6}{4} \frac{dw}{dx} + x^5 \cdot w = 0$

Então por substituição teremos que:  $\frac{0^6}{4} \frac{dw}{dx} + 0^5 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow x=0 \wedge w=0$  também são soluções.

Logo a família de soluções neste momento é dada por:  $w = \frac{C}{x^4} \wedge x=0 \wedge w=0$

Então agora teremos que:  $w = \frac{dv}{dx} \Rightarrow v(x) = \int w dx$ , logo:

$$w = \frac{C}{x^4} \Rightarrow v(x) = \int \frac{C}{x^4} dx \Leftrightarrow v(x) = C \cdot \int x^{-4} dx \Leftrightarrow v(x) = C \cdot \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + k \Leftrightarrow v(x) = -\frac{C}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(x) = k_1 \cdot \frac{1}{x^3} + k, k=0 \Leftrightarrow v(x) = k_1 \cdot \frac{1}{x^3}$$

Substituindo agora este valor na primeira mudança de variável teremos que:

$$y_2(x) = x^4 \cdot v(x) \Leftrightarrow y_2(x) = x^4 \cdot k_1 \cdot \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow y_2(x) = k_1 \cdot x, k_1=1 \Leftrightarrow y_2(x) = x$$

**Conclusão:** A solução geral é:  $y = c_1 \cdot x^4 + c_2 \cdot x$

b)  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2y = 0$  ,  $x > 0$  ,  $y_1(x) = x^2$ .

**R:**

1º) Verificar se  $y(x) = x^2$  é solução da equação diferencial dada:

$$y(x) = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(2x) = 2$$

Substituindo agora estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot 2 - 2 \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow y(x) = x^2 \text{ é solução da equação diferencial.}$$

2º) Obter a solução geral através do método da redução de ordem:

O método da redução de ordem implica a seguinte mudança de variável:

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot v(x) \Leftrightarrow y_2(x) = x^2 \cdot v(x)$$

Assim sendo teremos então que:

$$y_2(x) = x^2 \cdot v(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 \cdot v(x)) = \frac{d}{dx}(x^2) \cdot v(x) + x^2 \cdot \frac{d}{dx}(v(x)) = 2x \cdot v + x^2 \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x \cdot v + x^2 \cdot \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[2x \cdot v + x^2 \cdot \frac{dv}{dx}\right] = \frac{d}{dx}[2x \cdot v] + \frac{d}{dx}\left[x^2 \cdot \frac{dv}{dx}\right] = \\ &= \left(\frac{d}{dx}(2x) \cdot v + 2x \cdot \frac{d}{dx}(v)\right) + \left(\frac{d}{dx}(x^2) \cdot \frac{dv}{dx} + x^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)\right) = 2 \cdot v + 2x \cdot \frac{dv}{dx} + 2x \cdot \frac{dv}{dx} + x^2 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = \\ &= x^2 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + 4x \cdot \frac{dv}{dx} + 2 \cdot v \end{aligned}$$

Substituindo agora estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(x^2 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + 4x \cdot \frac{dv}{dx} + 2 \cdot v\right) - 2 \cdot (x^2 \cdot v) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + 4x^3 \cdot \frac{dv}{dx} + 2 \cdot v \cdot x^2 - 2 \cdot x^2 \cdot v = 0 \Leftrightarrow x^4 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + 4x^3 \cdot \frac{dv}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{x^3} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{4x^3}{x^3} \cdot \frac{dv}{dx} = 0 \Leftrightarrow x \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + 4 \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

Fazendo agora uma nova mudança de variável do tipo:

$$w = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (w) = \frac{dw}{dx}$$

Agora teremos que re-escrever a equação diferencial anteriormente obtida que irá resultar numa nova equação diferencial de variáveis separáveis:

$$x \cdot \frac{dw}{dx} + 4 \cdot w = 0 \Leftrightarrow x \cdot \frac{dw}{dx} = -4 \cdot w \Leftrightarrow (x)dw = -(4 \cdot w)dx \Leftrightarrow \underbrace{(x)}_x dw + \underbrace{(4 \cdot w)}_w dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{x \cdot w} \wedge w \neq 0 \text{ }^1 \Rightarrow \frac{1}{x \cdot w} \cdot (x)dw + \frac{1}{x \cdot w} \cdot (4 \cdot w)dx = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{w} \right)dw + \left( \frac{4}{x} \right)dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \left( \frac{1}{w} \right)dw + \int \left( \frac{4}{x} \right)dx = C \Leftrightarrow \int \left( \frac{1}{w} \right)dw + 4 \cdot \int \left( \frac{1}{x} \right)dx = C \Leftrightarrow \ln|w| + 4 \cdot \ln|x| = C \Leftrightarrow$$

$$\ln|w| + \ln|x|^4 = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(|w| \cdot |x|^4) = C \Leftrightarrow e^{\ln(|w| \cdot |x|^4)} = e^C, e^C = C_1 \Leftrightarrow |w| \cdot |x|^4 = C_1, C_2 = C_1 > 0 \Leftrightarrow |w| = \frac{C_2}{|x|^4}, C_2 = C \neq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow w = \frac{C}{x^4} \rightarrow \text{Família de soluções para a equação afectada do factor integrante.}$$

Vamos agora verificar se  $w = 0$  também poderá ser solução. Para tal teremos que antes de mais re-escrever a equação diferencial na sua outra forma:

$$(x)dw + (4w)dx = 0 \Leftrightarrow (x) \frac{dw}{dx} + (4w) = 0$$

<sup>1</sup> Como é dito no enunciado que  $x > 0$  então não precisamos de mencionar no factor integrante que  $x \neq 0$ .

Então por substituição teremos que:  $(x)\frac{d0}{dx} + (4 \cdot 0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow w = 0$  também é solução.

Logo a família de soluções neste momento é dada por:  $w = \frac{C}{x^4} \wedge w = 0$

Então agora teremos que:  $w = \frac{dv}{dx} \Rightarrow v(x) = \int w \, dx$ , logo:

$$w = \frac{C}{x^4} \Rightarrow v(x) = \int \frac{C}{x^4} \, dx \Leftrightarrow v(x) = C \cdot \int x^{-4} \, dx \Leftrightarrow v(x) = C \cdot \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + k \Leftrightarrow v(x) = -\frac{C}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(x) = k_1 \cdot \frac{1}{x^3} + k, k = 0 \Leftrightarrow v(x) = k_1 \cdot \frac{1}{x^3}$$

Substituindo agora este valor na primeira mudança de variável teremos que:

$$y_2(x) = x^2 \cdot v(x) \Leftrightarrow y_2(x) = x^2 \cdot k_1 \cdot \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow y_2(x) = k_1 \cdot \frac{1}{x}, k_1 = 1 \Leftrightarrow y_2(x) = \frac{1}{x}$$

**Conclusão:** A solução geral é:  $y = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot \frac{1}{x}$

c)  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$  ,  $x > 0$  ,  $y_1(x) = x$

**R:**

1º) Verificar se  $y(x) = x$  é solução da equação diferencial dada:

$$y(x) = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx}(1) = 0$$

Substituindo agora estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot 0 + x \cdot 1 - x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow y(x) = x \text{ é solução da equação diferencial.}$$

**2º)** Obter a solução geral através do método da redução de ordem:

O método da redução de ordem implica a seguinte mudança de variável:

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot v(x) \Leftrightarrow y_2(x) = x \cdot v(x)$$

Assim sendo teremos então que:

$$y_2(x) = x \cdot v(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x \cdot v(x)) = \frac{d}{dx}(x) \cdot v(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(v(x)) = v + x \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x \cdot \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left[ v + x \cdot \frac{dv}{dx} \right] = \frac{d}{dx}[v] + \frac{d}{dx} \left[ x \cdot \frac{dv}{dx} \right] =$$

$$= \frac{dv}{dx} + \left( \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{dv}{dx} + x \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) \right) = \frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx} + x \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = 2 \cdot \frac{dv}{dx} + x \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}$$

Substituindo agora estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$$x^2 \left( 2 \cdot \frac{dv}{dx} + x \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + x \left( v + x \cdot \frac{dv}{dx} \right) - (x \cdot v) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 \cdot \frac{dv}{dx} + x^3 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + x \cdot v + x^2 \cdot \frac{dv}{dx} - (x \cdot v) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 \cdot \frac{dv}{dx} + x^3 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + x^2 \cdot \frac{dv}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + 3x^2 \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

Fazendo agora uma nova mudança de variável do tipo:

$$w = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) = \frac{d}{dx}(w) = \frac{dw}{dx}$$

Agora teremos que re-escrever a equação diferencial anteriormente obtida que irá resultar numa nova equação diferencial de variáveis separáveis:

$$x^3 \cdot \frac{dw}{dx} + 3x^2 \cdot w = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{3x^2}{x^3} \cdot w = 0 \Leftrightarrow \frac{dw}{dx} + \frac{3}{x} \cdot w = 0 \Leftrightarrow dw + \underbrace{\left( \frac{3}{x} \cdot w \right)}_w dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{w} \wedge w \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{w} \cdot dw + \frac{1}{w} \cdot \left( \frac{3}{x} \cdot w \right) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{w} \cdot dw + \frac{3}{x} dx = 0 \Leftrightarrow \int \frac{1}{w} \cdot dw + \int \frac{3}{x} dx = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{w} \cdot dw + 3 \cdot \int \frac{1}{x} dx = C \Leftrightarrow \ln|w| + 3 \cdot \ln|x| = C \Leftrightarrow \ln|w| + \ln|x|^3 = C \Leftrightarrow \ln(|w| \cdot |x|^3) = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(|w| \cdot |x|^3)} = e^C, e^C = C_1 \Leftrightarrow |w| \cdot |x|^3 = C_1, C_2 = C_1 > 0 \Leftrightarrow |w| = \frac{C_2}{|x|^3}, C_2 = C \neq 0 \Leftrightarrow w = \frac{C}{x^3} \rightarrow$$

Família de soluções para a equação afectada do factor integrante.

Vamos agora verificar se  $w = 0$  também poderá ser solução.

$$\frac{dw}{dx} + \frac{3}{x} \cdot w = 0 \Rightarrow \frac{d0}{dx} + \frac{3}{x} \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow w = 0 \text{ também é solução.}$$

Logo a família de soluções neste momento é dada por:  $w = \frac{C}{x^3} \wedge w = 0$

Então agora teremos que:  $w = \frac{dv}{dx} \Rightarrow v(x) = \int w \, dx$ , logo:

$$w = \frac{C}{x^3} \Rightarrow v(x) = \int \frac{C}{x^3} \, dx \Leftrightarrow v(x) = C \cdot \int x^{-3} \, dx \Leftrightarrow v(x) = C \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + k \Leftrightarrow v(x) = -\frac{C}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(x) = k_1 \cdot \frac{1}{x^2} + k, k = 0 \Leftrightarrow v(x) = k_1 \cdot \frac{1}{x^2}$$

Substituindo agora este valor na primeira mudança de variável teremos que:

$$y_2(x) = x \cdot v(x) \Leftrightarrow y_2(x) = x \cdot k_1 \cdot \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y_2(x) = k_1 \cdot \frac{1}{x}, k_1 = 1 \Leftrightarrow y_2(x) = \frac{1}{x}$$

**Conclusão:** A solução geral é:  $y = c_1 \cdot x + c_2 \cdot \frac{1}{x}$