1. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais

a) $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$

R:

Sabendo que: $m = \frac{dy}{dx}$, então teremos que:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow m^3 - 3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m \cdot \left(m^2 - 3m + 2\right) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \vee m = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow m = 0 \vee m = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow m = 0 \vee m = \frac{3-1}{2} \vee m = \frac{3+1}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow m_1 = 0 \vee m_2 = 1 \vee m_3 = 2 \Leftrightarrow m \cdot (m-1) \cdot (m-2) = 0 \rightarrow$ 3 raízes reais simples

Assim sendo teremos que:

$$y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + c_3 \cdot e^{m_3 \cdot x} \Leftrightarrow y = c_1 \cdot e^{0 \cdot x} + c_2 \cdot e^{1 \cdot x} + c_3 \cdot e^{2 \cdot x} \Leftrightarrow y = c_1 + c_2 \cdot e^{x} + c_3 \cdot e^{2 \cdot x}$$

b) $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$

R:

Sabendo que: $m = \frac{dy}{dx}$, então teremos que:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow m^3 - 2m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m \cdot \left(m^2 - 2m + 1\right) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \vee m = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow m = 0 \vee m = \frac{2 \pm 0}{2} \Leftrightarrow m = 0 \vee m = \frac{2}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow m_1 = 0 \vee m_2 = 1 \vee m_3 = 1 \Leftrightarrow m \cdot (m-1)^2 = 0 \rightarrow$ 3 raízes reais, uma delas de multiplicidade 2.

Assim sendo teremos que:

$$y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + c_3 \cdot x \cdot e^{m_3 \cdot x} \Leftrightarrow y = c_1 \cdot e^{0 \cdot x} + c_2 \cdot e^{1 \cdot x} + c_3 \cdot x \cdot e^{1 \cdot x} \Leftrightarrow y = c_1 + c_2 \cdot e^{x} + c_3 \cdot x \cdot e^{x}$$

c) $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$

R:

Sabendo que: $m=\frac{dy}{dx}$, então teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0 \Leftrightarrow m^2+4=0 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{4\cdot(-1)} \Leftrightarrow m=\pm 2\cdot\underbrace{\sqrt{-1}}_{=i} \Leftrightarrow m=\pm 2\cdot i \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow m_1=-2\cdot i \vee m_2=2\cdot i \Leftrightarrow m=\underbrace{0}_{a}\pm\underbrace{2}_{b}\cdot i \rightarrow$ 2 raízes complexas.

Assim sendo teremos que:

$$y=c_1\cdot e^{a\cdot x}\cdot\cos(bx)+c_2\cdot e^{a\cdot x}\cdot sen(bx) \Leftrightarrow y=c_1\cdot e^{0\cdot x}\cdot\cos(2x)+c_2\cdot e^{0\cdot x}\cdot sen(2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=c_1\cdot\cos(2x)+c_2\cdot sen(2x)$$

d) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+13y=0$

R:

Sabendo que: $m=\frac{dy}{dx}$, então teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+13y=0 \Leftrightarrow m^2-4m+13=0 \Leftrightarrow m=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 13}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow m=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2} \Leftrightarrow m=\frac{4\pm\sqrt{36\cdot(-1)}}{2} \Leftrightarrow m=\frac{4\pm 6\cdot\overbrace{\sqrt{-1}}^{=i}}{2} \Leftrightarrow m=\frac{4\pm 6\cdot i}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m_1=\frac{4}{2}-\frac{6\cdot i}{2} \vee m_2=\frac{4}{2}+\frac{6\cdot i}{2} \Leftrightarrow m_1=2-3\cdot i \vee m_2=2+3\cdot i \Leftrightarrow m=\underbrace{2}_{a}\pm\underbrace{3}_{b}\cdot i$$

Assim sendo teremos que:

$$y=c_1\cdot e^{a\cdot x}\cdot\cos(bx)+c_2\cdot e^{a\cdot x}\cdot sen(bx) \Leftrightarrow y=c_1\cdot e^{2\cdot x}\cdot\cos(3x)+c_2\cdot e^{2\cdot x}\cdot sen(3x)$$

e) $\dfrac{d^4y}{dx^4}+2\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

R:

Sabendo que: $m=\dfrac{dy}{dx}$, então teremos que:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \Leftrightarrow m^4+2m^2+1=0 \Leftrightarrow \left(m^2\right)^2+2m^2+1=0 \Leftrightarrow m^2=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2=\frac{-2}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2+1=0 \Rightarrow m=\pm\sqrt{-1}=\pm i \\ m^2+1=0 \Rightarrow m=\pm\sqrt{-1}=\pm i \end{array}\right\} \rightarrow \text{raízes complexas de multiplicidade } 2 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b=1 \end{array}\right\}$$

Assim sendo teremos que:

$$y=c_1\cdot e^{a\cdot x}\cdot\cos(bx)+c_2\cdot x\cdot e^{a\cdot x}\cdot\cos(bx)+c_3\cdot e^{a\cdot x}\cdot sen(bx)+c_4\cdot x\cdot e^{a\cdot x}\cdot sen(bx) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=c_1\cdot\cos(x)+c_2\cdot x\cdot\cos(x)+c_3\cdot sen(x)+c_4\cdot x\cdot sen(x)$$

f) $\dfrac{d^3y}{dx^3}-y=0$

R:

Sabendo que: $m=\dfrac{dy}{dx}$, então teremos que:

$\dfrac{d^3y}{dx^3}-y=0 \Leftrightarrow m^3-1=0 \Leftrightarrow m=1 \rightarrow$ é uma das raízes. Vamos agora recorrer à regra de Rufini:

	x^3	x^2	x	ind.
	1	0	0	-1
	↓	+↓	+↓	+↓
1	↓	1	1	1
└ ×	1	1	1	0
$(m-1)\times$	$\rightarrow m^2+m+1$			

Uma vez que a regra de Rufini "baixa" um grau na função em cada vez que é aplicada, então teremos agora que:

$$m^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)\cdot\left(m^2 + m + 1\right) = 0 \Leftrightarrow m - 1 = 0 \vee m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow m = 1 \vee m = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \vee m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\cdot \overbrace{\sqrt{-1}}^{i}}{2} \Leftrightarrow m_1 = 1 \vee m = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{=a} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{=b}\cdot i$$

Assim sendo teremos que:

$$y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{a\cdot x}\cdot \cos(bx) + c_3 \cdot e^{a\cdot x}\cdot sen(bx) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = c_1 \cdot e^{1\cdot x} + c_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\cdot sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = c_1 \cdot e^{x} + e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\cdot\left[c_2 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 \cdot sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$

2. Escreva a equação diferencial linear homogénea, cuja solução geral é a família dada.

a) $y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{x} + c_3 \cdot e^{2x}$

R:

Sabe-se que: $y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + c_3 \cdot e^{m_3 \cdot x}$ é a solução geral para três raízes reais distintas, logo daqui se pode concluir por equivalência directa com a expressão apresentada no enunciado que:

$$y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{x} + c_3 \cdot e^{2x} \Rightarrow m_1 = -1 \vee m_2 = 1 \vee m_3 = 2 \Rightarrow (m+1)\cdot(m-1)\cdot(m-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m+1)\cdot\left(m^2 - 2m - m + 2\right) = 0 \Leftrightarrow (m+1)\cdot\left(m^2 - 3m + 2\right) = 0 \Leftrightarrow m^3 - 3m^2 + 2m + m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 2m^2 - m + 2 = 0 \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

b) $y = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot sen(x)$

R:

Sabe-se que: $y = c_1 \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(bx) + c_2 \cdot e^{a \cdot x} \cdot sen(bx), \text{onde}: m = a \pm i \cdot b$ é a solução geral para duas raízes imaginárias, logo daqui se pode concluir por equivalência directa com a expressão apresentada no enunciado que:

$$y = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot sen(x) \Leftrightarrow y = c_1 \cdot e^{0 \cdot x} \cdot \cos(1 \cdot x) + c_2 \cdot e^{0 \cdot x} \cdot sen(1x) \Rightarrow m = a \pm i \cdot b \Leftrightarrow m = 0 \pm i \cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \pm i \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow (m)^2 = \left(\pm\sqrt{-1}\right)^2 \Leftrightarrow m^2 = -1 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

3. Resolva os seguintes problemas de valores iniciais

a) $9\frac{dy}{dx} - 3y = 0, \quad y(3) = 1$

R:

Sabendo que: $m = \frac{dy}{dx}$, então teremos que:

$$9\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \Leftrightarrow 9m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{9} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$$ → 1 raiz real simples.

Sabendo que para raízes reais a solução é dada por: $y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + \ldots$

Então teremos neste caso que: $y = c_1 \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x} \Leftrightarrow y(x) = c_1 \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x}$

Logo, para a condição inicial: $y(3) = 1$ teremos: $y(3) = 1 \Rightarrow c_1 \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 1 \Leftrightarrow c_1 \cdot e^{1} = 1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{e}$

Desta forma, e por substituição, teremos: $y(x) = \frac{1}{e} \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x} \Leftrightarrow y(x) = e^{-1} \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x} \Leftrightarrow y(x) = e^{\frac{x}{3} - 1}$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(\pi) = 1 \quad \text{e} \quad y'(\pi) = 1$

R:

Sabendo que: $m = \frac{dy}{dx}$, então teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow m = \pm i \Leftrightarrow m = \underbrace{0}_{a} \pm i \cdot \underbrace{1}_{b}$$ → 2 raízes imaginárias.

Sabendo que para raízes imaginárias a solução é dada por: $y = c_1 \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(bx) + c_2 \cdot e^{a \cdot x} \cdot sen(bx)$

Então teremos neste caso que: $y = c_1 \cdot \underbrace{e^{0\cdot x}}_{=1} \cdot \cos(1 \cdot x) + c_2 \cdot \underbrace{e^{0\cdot x}}_{=1} \cdot sen(1 \cdot x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot sen(x) \Leftrightarrow y(x) = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot sen(x)$$

Antes de prosseguir vamos determinar a primeira derivada de $y(x)$ pois uma das condições iniciais refere-se a essa primeira derivada:

$$y(x) = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot sen(x) \Rightarrow y'(x) = c_1 \cdot (\cos(x))' + c_2 \cdot (sen(x))' \Leftrightarrow y'(x) = -c_1 \cdot sen(x) + c_2 \cdot \cos(x)$$

Logo, para as condições iniciais: $y(\pi) = 1$ e $y'(\pi) = 1$ teremos:

$$\begin{cases} y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + c_2 \cdot \underbrace{sen(\pi)}_{0} = 1 \\ -c_1 \cdot \underbrace{sen(\pi)}_{0} + c_2 \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cdot (-1) = 1 \\ c_2 \cdot (-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Desta forma, teremos a seguinte equação:

$$y(x) = -1 \cdot \cos(x) - 1 \cdot sen(x) \Leftrightarrow y(x) = -\cos(x) - sen(x)$$

4. As raízes da equação característica correspondente a determinada equação diferencial linear de ordem 10 são: $4, 4, 4, 4; 2+3i, 2+3i, 2+3i; 2-3i, 2-3i, 2-3i$**. Escreva a solução geral da equação.**

R:

Vamos estudar caso a caso:

- $4, 4, 4, 4 \Rightarrow$ **raiz real de multiplicidade 4:**

Então para este caso teremos a seguinte solução, baseada na solução geral para este tipo de raízes: $y = c_1 \cdot x^{1-1} \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot x^{2-1} \cdot e^{m_2 \cdot x} + \ldots + c_n \cdot x^{n-1} \cdot e^{m_n \cdot x}$

$$y = c_1 \cdot x^{1-1} \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot x^{2-1} \cdot e^{m_2 \cdot x} + c_3 \cdot x^{3-1} \cdot e^{m_3 \cdot x} + c_4 \cdot x^{4-1} \cdot e^{m_4 \cdot x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = c_1 \cdot e^{4 \cdot x} + c_2 \cdot x^1 \cdot e^{4 \cdot x} + c_3 \cdot x^2 \cdot e^{4 \cdot x} + c_4 \cdot x^3 \cdot e^{4 \cdot x} \Leftrightarrow y = e^{4 \cdot x} \cdot \left(c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot x^3\right)$$

- $2+3i, 2+3i, 2+3i; 2-3i, 2-3i, 2-3i \Rightarrow$ **raízes imaginárias de multiplicidade 3:**

Então para este caso teremos a seguinte solução, baseada na solução geral para este tipo de raízes: $y = c_n \cdot x^{k-1} \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(bx) + c_n \cdot x^{k-1} \cdot e^{a \cdot x} \cdot sen(bx),\ k = 1,2,3,\ldots$

$$\begin{aligned} y = &\left(c_1 \cdot x^{1-1} \cdot e^{2x} \cdot \cos(3x) + c_2 \cdot x^{2-1} \cdot e^{2x} \cdot \cos(3x) + c_3 \cdot x^{3-1} \cdot e^{2x} \cdot \cos(3x)\right) + \\ &+ \left(c_4 \cdot x^{1-1} \cdot e^{2x} \cdot sen(3x) + c_5 \cdot x^{2-1} \cdot e^{2x} \cdot sen(3x) + c_6 \cdot x^{3-1} \cdot e^{2x} \cdot sen(3x)\right) \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} y = &\left(c_1 \cdot e^{2x} \cdot \cos(3x) + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} \cdot \cos(3x) + c_3 \cdot x^2 \cdot e^{2x} \cdot \cos(3x)\right) + \\ &+ \left(c_4 \cdot e^{2x} \cdot sen(3x) + c_5 \cdot x \cdot e^{2x} \cdot sen(3x) + c_6 \cdot x^2 \cdot e^{2x} \cdot sen(3x)\right) \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = e^{2x} \cdot \cos(3x) \cdot \left(c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2\right) + e^{2x} \cdot sen(3x) \cdot \left(c_4 + c_5 \cdot x + c_6 \cdot x^2\right)$$

Logo, a solução geral resultará da junção destas duas soluções pelo que teremos:

$$y = e^{4 \cdot x} \cdot \left(c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot x^3\right) + e^{2x} \cdot \cos(3x) \cdot \left(c_5 + c_6 \cdot x + c_7 \cdot x^2\right) +$$

$$+ e^{2x} \cdot sen(3x) \cdot \left(c_8 + c_9 \cdot x + c_{10} \cdot x^2\right)$$