Universidade do Minho

PROBABILIDADES

Definição Clássica

Se existem N possibilidades iguais, das quais uma deve ocorrer e n são consideradas como favoráveis, ou como um "sucesso", então a probabilidade de um "sucesso" é dada por n/N.

$$\boxed{P(A) = \frac{n}{N}}$$

Exemplo

Qual a probabilidade de tirar um ás de um baralho de cartas?

n=4, N=52

4/52

Espaços Amostrais

Experiência

qualquer processo de observação ou medida

Resultados

contagens, respostas sim ou não, valores

Espaço amostral *S*

conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência

Elemento ou ponto amostral

cada resultado do espaço amostral

Probabilidade

Existem muitas situações onde as diferentes possibilidades não são igualmente prováveis.

A probabilidade de um evento (acontecimento ou resultado) é a proporção de vezes que eventos da mesma espécie ocorrerão no longo prazo.

Definição axiomática: Probabilidades definidas como “objectos matemáticos” que se comportam segundo regras bem definidas.

Espaços Amostrais

Exemplos

Liste os elementos do espaço amostral definido pelo lançamento de um dado.

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$S_2 = \{\text{par, impar}\}$

Liste os acontecimentos do espaço amostral constituído pelo lançamento de dois dados de cores diferentes.

$S_1 = \{(x,y) \mid x = 1, 2,\ldots , 6;\ y = 1, 2,\ldots , 6\}$

$S_2 = \{2, 3,\ldots ,11, 12\}$

Espaços Amostrais

Discreto

– contém um número finito de elementos, ou um número infinito de elementos aos quais é possível fazer corresponder números inteiros

Contínuo

– contém um número infinito de pontos amostrais, constituindo um espaço contínuo

Acontecimento ou Evento

– subconjunto do espaço amostral

Definições

União

– A união de dois eventos A e B, $\boxed{A \cup B}$, é o evento em S que contém todos os elementos que estão em A, em B ou em ambos

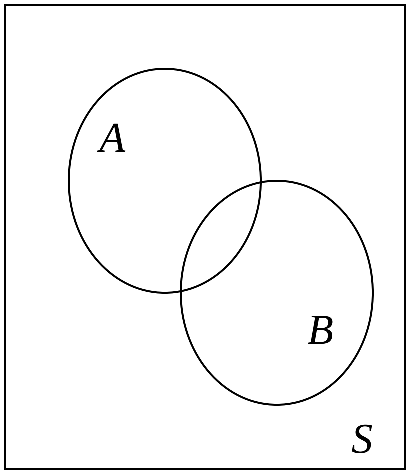
Intersecção

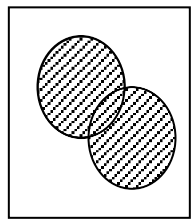
– A intersecção dos eventos A e B, $\boxed{A \cap B}$, é o evento em S que contém todos os elementos que estão em A e B

Complemento

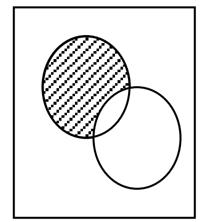
– O complemento do evento A, $\boxed{A'}$, é o evento em S que contém todos os elementos de S que não estão em A

Diagramas de Venn

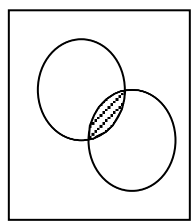




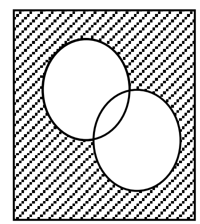
$A \cup B$



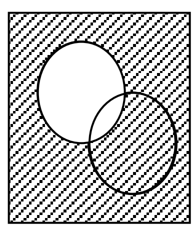
$A \cap \overline{B}$



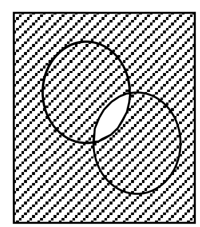
$A \cap B$



$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

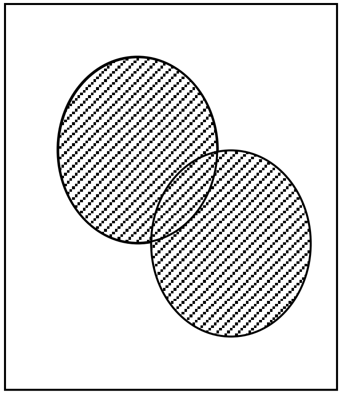


$\overline{A}$



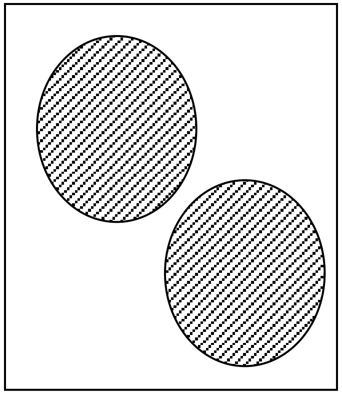
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

União



$$A \cup B$$

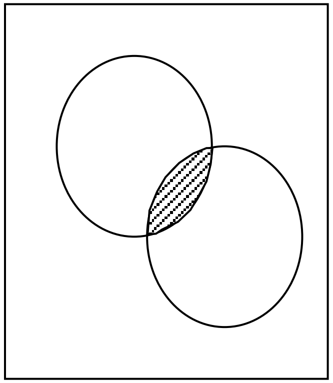
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$P(A \cap B) = 0 \quad \therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(eventos mutuamente exclusivos)

Intersecção



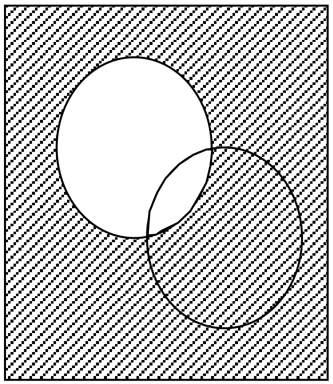
$$A \cap B$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A).P(B/A) \\ &= P(B).P(A/B) \end{aligned}}$$

$$P(A/B) = P(A) \text{ e } P(B/A) = P(B) \quad \therefore \quad P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

(eventos independentes)

Complemento



$\bar{A}$

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

Postulados de Boole

1. Para cada par de eventos A e B no espaço amostral S, há um único evento $A \cup B$ e um único evento $A \cap B$ em S

2. $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5. $A \cap S = A$, para cada evento A no espaço amostral S; existe um único evento $\varnothing$ tal que $A \cup \varnothing = A$ para cada evento A em S

6. Para cada evento A em S existe um único evento A' em S tal que $A \cap A' = \varnothing$ e $A \cup A' = S$

Probabilidade de um Acontecimento

1. A probabilidade de um evento é um número real não negativo, i.e., $\boxed{\mathrm{P}(A) \geq 0}$ para qualquer subconjunto A de S

2. $\boxed{\mathrm{P}(S) = 1}$

3. Se A_1, A_2, A_3, ..., é uma sequência finita ou infinita de eventos mutuamente exclusivos de S, então

$$\boxed{\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) + \ldots}$$

Probabilidade

Exemplos

Se uma moeda equilibrada é lançada duas vezes, qual a probabilidade de obter pelo menos uma coroa?

S={HH, HT, TH, TT}   A={HH, HT, HT}

P(A) = P(HH)+P(HT)+P(TH) = **3/4**

Um dado está viciado por forma que os números impares sejam duplamente mais prováveis que os números pares. Se o evento E é definido como um número maior que 3 ocorre num simples lançamento, calcule P(E).

1	2	3	4	5	6
2w	w	2w	w	2w	w

P(E) = 1/9+2/9+1/9 = **4/9**

Algumas Regras de Probabilidade

Se A e $A´$ são eventos complementares num espaço amostral S, então

$$\boxed{P(A´) = 1 - P(A)}$$

$$\boxed{P(\varnothing) = 0}$$

Se A e B são eventos num espaço amostral S e $A \subset B$, então

$$\boxed{P(A) \leq P(B)}$$

Para qualquer evento A, $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$

Se A e B são dois quaisquer eventos num espaço amostral S, então

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Se A, B e C são três quaisquer eventos num espaço amostral S, então

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

Probabilidade Condicional

- Podem surgir dificuldades quando as probabilidades são referidas sem especificação do espaço amostral

- A probabilidade condicional do evento A em relação ao espaço amostral S, a probabilidade de A dado S, é referida por

$$\boxed{\mathrm{P}(A \mid S)}$$

- Se A e B são dois quaisquer eventos no espaço amostral S e $\mathrm{P}(A) \neq 0$, a probabilidade condicional de B dado A é

$$\boxed{\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B \cap A) \,/\, \mathrm{P}(A)}$$

Probabilidade Condicional

Exemplo

Considere um dado viciado por forma que os números impares sejam duplamente mais prováveis que os números pares. Qual é a probabilidade de que o número de pontos do dado viciado seja um quadrado perfeito? E qual a probabilidade que seja um quadrado perfeito dado que é maior que 3?

1	2	3	4	5	6
2/9	1/9	2/9	1/9	2/9	1/9

A={4, 5, 6}   B={1, 4}

P(A) = **4/9**

P(B|A) = 1/9 / 4/9 = **1/4**

Probabilidade Condicional

- Se A e B são dois quaisquer eventos no espaço amostral S e $\mathrm{P}(A) \neq 0$, então

$$\boxed{\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B \mid A)}$$

- Se A, B e C são três quaisquer eventos no espaço amostral S, tal que $\mathrm{P}(A) \neq 0$ e $\mathrm{P}(A \cap B) \neq 0$, então

$$\boxed{\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B \mid A)\,\mathrm{P}(C \mid A \cap B)}$$

Exemplo

Uma caixa contém 20 fusíveis dos quais 5 são defeituosos. Se 3 fusíveis são seleccionados e removidos sucessivamente sem reposição, qual a probabilidade de que os 3 fusíveis sejam defeituosos?

$P(A) = 5/20$ $\quad P(B|A) = 4/19$ $\quad P(C|A\cap B)=3/18$

$P(A\cap B\cap C) = \mathbf{1/114}$

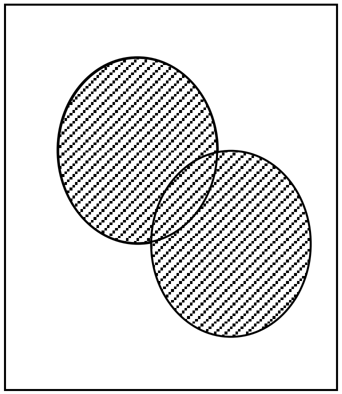
Eventos Independentes

- Dois eventos são independente se a ocorrência ou não ocorrência de qualquer um deles não afecta a probabilidade de ocorrência do outro

$$\boxed{\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B)} \qquad \boxed{\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)}$$

- Dois eventos são independentes se e só se

$$\boxed{\mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)}$$

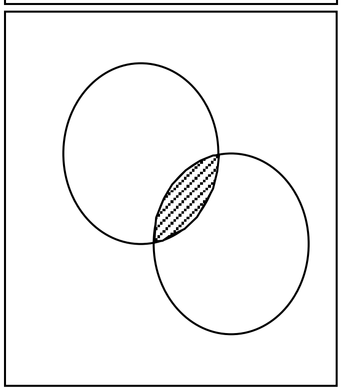


$$A \cup B$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

eventos mutuamente exclusivos



$$A \cap B$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

eventos independentes

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Eventos Independentes

- Se dois eventos A e B são independentes, então os dois eventos A e $B´$ são também independentes

$A = A \cap (B \cup B´)$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap B´)$

$(A \cap B)$ e $(A \cap B´)$ mutuamente exclusivos

$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap B´)] = P(A \cap B) + P(A \cap B´)$

$$\boxed{P(A \cap B´) = P(A)\,[1 - P(B)] = P(A)\,P(B´)}$$

- Os eventos A_1, A_2, ... e A_k, são independentes se e só se a probabilidade da intersecção de quaisquer 2, 3 ou k destes eventos igualar o produto das respectivas probabilidades, por exemplo,

$$\boxed{\begin{array}{c} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2)\,\ldots \\ P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)\,P(A_2)\,\ldots\,P(A_k) \end{array}}$$

Eventos Independentes

Exemplo

Uma moeda é lançada 3 vezes, com qualquer dos 8 resultados possíveis igualmente prováveis. Considere os seguintes eventos:

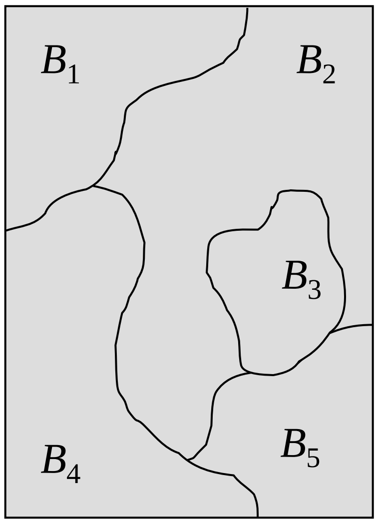
A – uma cara (H) ocorre em cada um dos dois primeiros lançamentos

B – uma coroa (T) ocorre no terceiro lançamento

C – exactamente duas coroas ocorrem nos 3 lançamentos

$A = \{HHH, HHT\}$	$P(A) = \mathbf{1/4}$
$B = \{HHT, HTT, THT, TTT\}$	$P(B) = \mathbf{1/2}$
$C = \{HTT, THT, TTH\}$	$P(C) = \mathbf{3/8}$
$A \cap B = \{HHT\}$	$P(A \cap B) = \mathbf{1/8}$
$B \cap C = \{HTT, THT\}$	$P(B \cap C) = \mathbf{1/4}$
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$	**independentes**
$P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$	**dependentes**

Partição

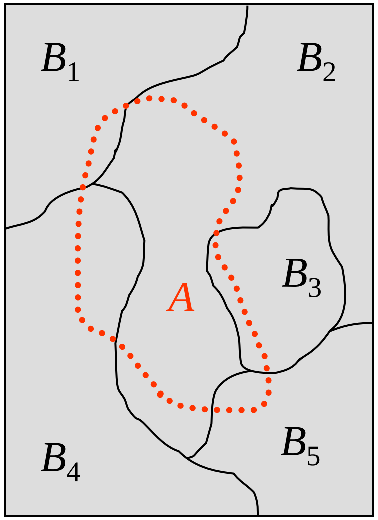


$$\underbrace{B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 = S \qquad B_i \cap B_j = \varnothing \quad \forall i, j \;\; i \neq j}_{\text{eventos mutuamente exclusivos}}$$

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = 1$$

$$\boxed{\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S \qquad\qquad \sum_{i=1}^{k} P(B_i) = 1}$$

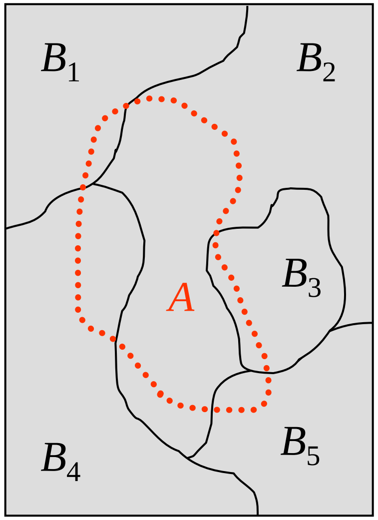
Probabilidade Total



$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \cdots \cup (B_5 \cap A)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{5} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{5} P(B_i).P(A/B_i)$$

Teorema de Bayes



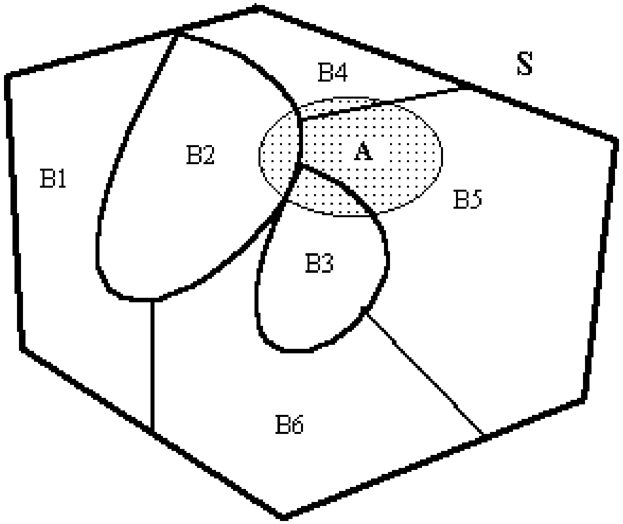
$$P(B_i \cap A) = P(B_i).P(A/B_i) = P(A).P(B_i/A)$$

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i).P(A/B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i).P(A/B_i)}{\sum_{j=1}^{5} P(B_j).P(A/B_j)}$$

Partição do Espaço

- Se os eventos B_1, B_2, ... e B_k constituem uma partição do espaço amostral S e $\mathrm{P}(B_\mathrm{i}) \neq 0$ para $i=1, 2, ..., k$, então para qualquer evento A em S

$$\boxed{\mathrm{P}(A) = \sum[\mathrm{P}(B_\mathrm{i})\, \mathrm{P}(A \mid B_\mathrm{i})]}$$



$B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k$ $\qquad$ $B_i \cap B_j = 0$ para $i \neq j$

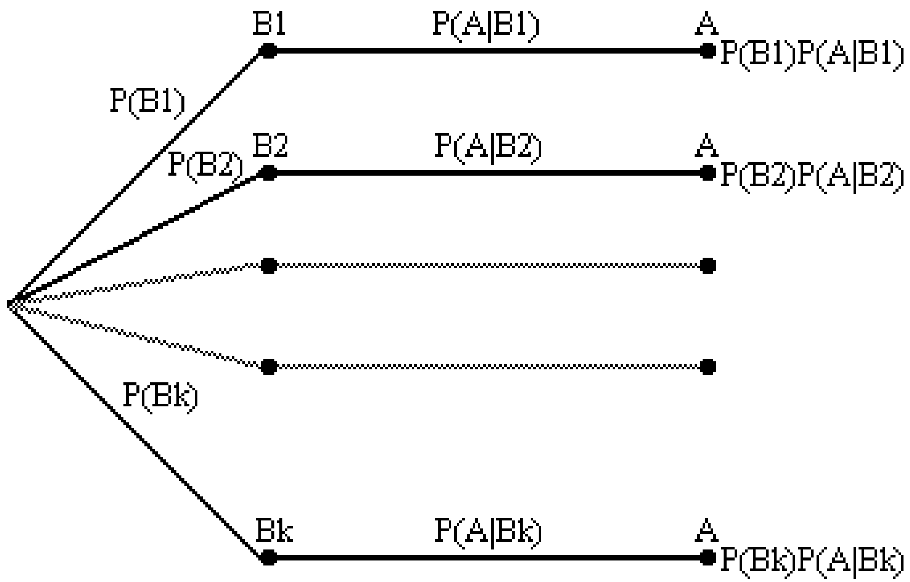
$B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k = S$ $\qquad$ $A \cap S = A$

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B_1)\, \mathrm{P}(A \mid B_1) + \mathrm{P}(B_2)\, \mathrm{P}(A \mid B_2) + ... + \mathrm{P}(B_\mathrm{k})\, \mathrm{P}(A \mid B_\mathrm{k})$$

Teorema de Bayes

- Se os eventos constituem uma partição do espaço amostral S e $P(B_i) \neq 0$, para $i=1, 2, ..., k$, então para qualquer evento A em S, tal que $P(A) \neq 0$

$$\boxed{P(B_r \mid A) = [P(B_r)P(A \mid B_r)] / [\sum P(B_i)P(A \mid B_i)] \quad \text{para } r=1, 2, ..., k}$$



Teorema de Bayes

Exemplo

Considere 3 fábricas *A*, *B* e *C*, que produzem um determinado produto em lotes de 100, 200 e 300 peças, respectivamente. Um lote de cada fábrica é selecionado e as peças são misturadas. Suponha que a probabilidade de se encontrar peças defeituosas em cada uma das fábricas seja respectivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se uma peça ao acaso, calcule as seguintes probabilidades:

a) ser defeituosa;

b) ser da fábrica A, sabendo que a peça é defeituosa.

$$D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$$

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$$

$$P(D) = P(A).P(D/A) + P(B).P(D/B) + P(C).P(D/C)$$

$$P(D) = \frac{1}{6}\frac{10}{100} + \frac{2}{6}\frac{5}{100} + \frac{3}{6}\frac{1}{100} = \frac{10+10+3}{600} = \frac{23}{600}$$

Teorema de Bayes

Exemplo

b) ser da fábrica A, sabendo que a peça é defeituosa.

Teorema de Bayes

$$P(A/D) = \frac{P(A).P(D/A)}{P(A).P(D/A) + P(B).P(D/B) + P(C).P(D/C)}$$

$$P(A/D) = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{10}}{\frac{1}{6}\frac{10}{100} + \frac{2}{6}\frac{5}{100} + \frac{3}{6}\frac{1}{100}} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{23}{600}} = \frac{10}{600}\frac{600}{23} = \frac{10}{23}$$

Partição do Espaço

Exemplo

A urna I contém 3 fichas vermelhas e 2 fichas azuis, e a urna II contém 2 fichas vermelhas e 8 fichas azuis. Joga-se uma moeda. Se sair cara (H), extrai-se uma ficha da urna I; se sair coroa (T), extrai-se uma ficha da urna II. Determine a probabilidade de escolha de uma ficha vermelha.

A – ficha vermelha escolhida

B_1 – Urna I	$P(B_1) = 1/2$	$P(A\|B_1) = 3/5$
B_2 – Urna II	$P(B_2) = 1/2$	$P(A\|B_2) = 2/10$

$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$

$P(A) = P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)] = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$

$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$

$P(A) = \mathbf{2/5}$

Teorema de Bayes

Exemplo

A urna I contém 3 fichas vermelhas e 2 fichas azuis, e a urna II contém 2 fichas vermelhas e 8 fichas azuis. Joga-se uma moeda. Se sair cara (H), extrai-se uma ficha da urna I; se sair coroa (T), extrai-se uma ficha da urna II. Suponha que não se sabe o resultado da jogada da moeda, mas que a ficha extraída é vermelha. Qual a probabilidade de ter sido extraída da urna I?

A – ficha vermelha escolhida

B_1 – Urna I	$P(B_1) = 1/2$	$P(A\|B_1) = 3/5$
B_2 – Urna II	$P(B_2) = 1/2$	$P(A\|B_2) = 2/10$

$P(B_1|A) = [P(B_1)P(A|B_1)]/[P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)]$

$P(B_1|A) = \mathbf{3/4}$

Exemplo

Questão a)

Pretende-se planear uma família de 3 crianças.

a) Liste os elementos do espaço amostral e calcule as respectivas probabilidades.

Rapaz – R e Menina – M

e_1 – RRR

e_2 – RRM

e_3 – RMR

e_4 – RMM

e_5 – MRR

e_6 – MRM

e_7 – MMR

e_8 – MMM

Assumindo $P(R) = P(M)$, $P(e_1) = P(e_2) = ... = P(e_8) = \mathbf{1/8}$

Questão b)

b) Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

E – pelo menos 2 meninas

F – segunda criança uma menina, seguida de um rapaz

G – menos de 2 meninas

H – todas as crianças do mesmo sexo

I – nenhuma menina

I_1 – exactamente 1 menina

I_2 – exactamente 2 meninas

I_3 – exactamente 3 meninas

J – menos de 2 rapazes

Questão b)

Evento	Listagem	Probabilidade
E	e_4, e_6, e_7, e_8	4/8
F	e_3, e_7	2/8
G	e_1, e_2, e_3, e_5	4/8
H	e_1, e_8	2/8
I	e_1	1/8
I_1	e_2, e_3, e_5	3/8
I_2	e_4, e_6, e_7	3/8
I_3	e_8	1/8
J	e_4, e_6, e_7, e_8	4/8

Questão c) e d)

c) O casal ficaria desiludido se em 3 crianças, nascessem menos de duas meninas ou todas do mesmo sexo. Qual a probabilidade de tal acontecer?

$$P(G \cup H)=?$$

$G \cup H=\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6\}$ $\quad$ $P(G \cup H) = \mathbf{5/8}$

d) O casal ficaria duplamente desiludido se em 3 crianças, nascessem menos de duas meninas e todas do mesmo sexo. Qual a probabilidade de tal acontecer?

$$P(G \cap H)=?$$

$G \cap H=\{e_1\}$ $\quad$ $P(G \cap H) = \mathbf{1/8}$

Questão e)

e) Determine os eventos e as respectivas probabilidades:

$F \cup G$, $F \cap G$, $I \cup J$, $I \cap J$

$F \cup G = \{e_1, e_2, e_3, e_5, e_7\}$ $P(F \cup G)$ = **5/8**

$F \cap G = \{e_3\}$ $P(F \cap G)$ = **1/8**

$I \cup J = \{e_1, e_4, e_6, e_7, e_8\}$ $P(I \cup J)$ = **5/8**

$I \cap J = \{\}$ $P(I \cap J)$ = **0**

Questão f)

f) Numa família de 3 crianças, suponha que se sabe que G (menos de duas meninas) ocorreu. Qual é a probabilidade que H (todas do mesmo sexo) tenha ocorrido?

$P(H|G)=?$

i) se se considerar $P(R)=0.5$

$P(H|G)=0.25$

ii) se se considerar $P(R)=0.6$

$P(H|G)=0.34$