# FICHA DE TRABALHO 3 – Exercícios sobre Análise de Circuitos em CC

## Tema: Lei de Ohm Generalizada

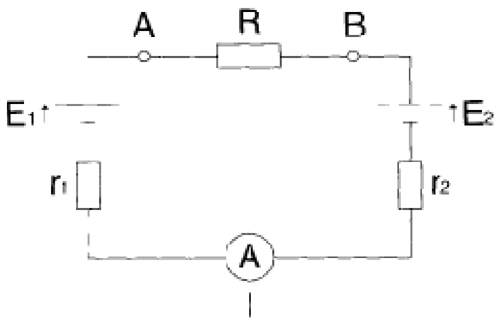
**P1** – Observe a figura. Sabe-se que $E_1 = 15$ V, $r_1 = 0{,}1\Omega$, $E_2 = 11{,}5$ V e $r_2 = 0{,}08\Omega$.

a) Qual dos elementos ($E_1$ ou $E_2$) é gerador ou receptor?

b) Sabendo que $R = 0{,}6\Omega$:

1. Calcule a intensidade medida pelo amperímetro
2. Indique o sentido (convencional) da corrente

c) Calcule o valor que deveria ter $R$, de modo a limitar a corrente no circuito a 3 A.




Resolução:

a) $E_1$ é o gerador e $E_2$ é o receptor, pois $E_1 > E_2$. Note que nos circuitos eléctricos, nem sempre é necessário indicar qual é a f.e.m. e qual é a f.c.e.m. Neste caso, bastou-nos ver que $E_1 > E_2$ para as definir.

b1) $I = \dfrac{E_1 - E_2}{R + r_1 + r_2} = \dfrac{15 - 11{,}5}{0{,}6 + 0{,}1 + 0{,}08} = 4{,}49$ A

b2) O sentido convencional da corrente é de $A$ para $B$, pois $E_1 > E_2$.

c) $R'_T = \dfrac{E_1 - E_2}{I'} = \dfrac{15 - 11{,}5}{3} = 1{,}17$ A

$R = R'_T - r_1 - r_2 = 1{,}17 - 0{,}1 - 0{,}08 = 0{,}99\ \Omega$

**P2** – Um motor eléctrico, cuja f.c.e.m. é de 213 V e resistência interna igual a 1,4 Ω, é alimentado por um gerador com f.e.m. de 225 V e resistência interna de 1,6 Ω. Calcule:

a) A intensidade absorvida pelo motor
b) A tensão aplicada ao motor
c) As perdas no gerador e no motor
d) As quedas de tensão no gerador e no motor
e) A resistência $R$ a ligar em série no circuito, de modo a limitar a corrente para 2,5 A

Resolução:

a) $I = \dfrac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2} = \dfrac{225 - 213}{1{,}6 + 1{,}4} = 4\ \text{A}$

b) $U = E_1 - r_1\, I = 225 - 1{,}6 \times 4 = 225 - 6{,}4 = 218{,}6\ \text{V}$
ou $U = E_2 + r_2\, I = 213 + 1{,}4 \times 4 = 213 + 5{,}6 = 218{,}6\ \text{V}$

c) $P_{j1} = r_1\, I^2 = 1{,}6 \times 4^2 = 25{,}6\ \text{W}$
$P_{j2} = r_2\, I^2 = 1{,}4 \times 4^2 = 22{,}4\ \text{W}$

d) $\Delta U_1 = r_1\, I = 1{,}6 \times 4 = 6{,}4\ \text{V}$
$\Delta U_2 = r_2\, I = 1{,}4 \times 4 = 5{,}6\ \text{V}$

e) $R_T = \dfrac{E_1 - E_2}{I} = \dfrac{225 - 213}{2{,}5} = 4{,}8\ \Omega$; $R = 4{,}8 - 1{,}6 - 1{,}4 = 1{,}8\ \Omega$

**P3** – O circuito apresentado tem as seguintes características: $E_1$ = 13 V, $r_1$ = 0,15 Ω, $E_2$ = 11,5 V, $r_2$ = 0,08 Ω, $E_3$ = 12 V, $r_3$ = 0,09 Ω, $E_4$ = 12,5 V, $r_4$ = 0,1 Ω, $R_1$ = 0,3 Ω, $R_2$ = 0,2 Ω.

a) Calcule o valor da intensidade no circuito
b) Indique o sentido da corrente
c) Indique quais os elementos que são geradores e quais os receptores
d) Calcule as tensões entre *A* e *B*, *B* e *C*, *C* e *D*, *D* e *A*

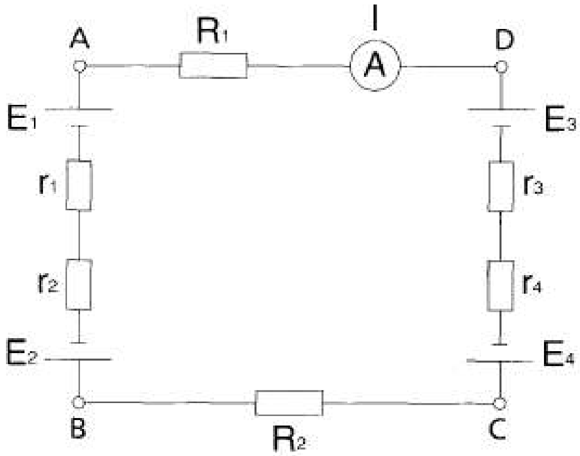


**Fig. 23**

Resolução:

a) Note que, neste caso particular, não sabemos quais as f.e.m. e quais as f.c.e.m., por mera análise do esquema. Somando as "forças" com o mesmo sentido e as de sentido contrário, obtemos:

$$I = \frac{(E_1 + E_4) - (E_2 + E_3)}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + R_1 + R_2} = \frac{13 + 12{,}5 - 12 - 11{,}5}{0{,}15 + 0{,}08 + 0{,}09 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2} = 2{,}17 \text{ A}$$

b) O sentido convencional da corrente é de *A* para *D*, pois que $E_1 + E_4 > E_2 + E_3$.

c) $E_1$ e $E_4$ são geradores; $E_2$, $E_3$, $R_1$ e $R_2$ são receptores – recebem energia eléctrica.

d) $U_{AB} = (E_1 - E_2) - (r_1 + r_2)\, I = (13 - 11{,}5) - (0{,}15 + 0{,}08) \times 2{,}17 = 1$ V

$U_{BC} = R_2\, I = 0{,}2 \times 2{,}17 = 0{,}43$ V

$U_{CD} = (E_4 - E_3) - (r_4 + r_3)\, I = (12{,}5 - 12) - (0{,}1 + 0{,}09) \times 2{,}17 = 0{,}09$ V

$U_{DA} = R_1\, I = 0{,}3 \times 2{,}17 = 0{,}65$ V

**P4** – Uma bateria está a ser carregada por um gerador que tem as seguintes características: $E$ = 13,5 V e $r$ = 0,15 Ω. A resistência interna da bateria é de 0,12 Ω. Sabendo que a corrente de carga é de 11,1 A, calcule:

a) A força contra-electromotriz da bateria
b) A tensão aplicada à bateria
c) As quedas de tensão internas no gerador e na bateria

R: a) 10,5 V; b) 11,84 V; c) 1,66 V; 1,34 V

**P5** – Um gerador alimenta duas baterias iguais, ligadas em série. O gerador tem as seguintes características: $E_1 = 30$ V e $r_1 = 0,4\ \Omega$. Sabe-se que a tensão aplicada ao conjunto das duas baterias é de 27 V e que $r'_1 = r'_2 = 0,15\ \Omega$. Calcule:

a) A intensidade no circuito
b) A f.c.e.m. de cada bateria
c) As quedas de tensão em cada um dos três elementos
d) As perdas por efeito de Joule individuais

R: a) 7,5 A; b) 12,4 V; c) 3 V; 1,1 V; 1,1 V; d) 22,5 W; 8,44 W; 8,44 W.

**P6** – Calcule o número de baterias iguais, ligadas em série e alimentadas por um determinado gerador, com uma corrente de 6,67 A, sabendo que apresentam as seguintes características:

Gerador: $E = 36$ V e $r = 0,35\ \Omega$
Baterias: $E' = 6,2$ V (cada) e $r' = 0,08\ \Omega$ (cada)

R: 5

**P7** – Um motor eléctrico é alimentado por dois dínamos iguais, ligados em paralelo, com $r_1 = r_2 = 1,7\ \Omega$. Sabe-se que $E' = 213$ V, $r' = 1,5\ \Omega$ e que a corrente absorvida é de 5 A, calcule:

a) A tensão aplicada ao motor
b) A força electromotriz de cada gerador
c) A queda de tensão em cada gerador

R: a) 220,5 V; b) 224,75 V; c) 4,25 V

**P8** – Duas baterias são ligadas, entre si, através de uma resistência $R$. Sabe-se que apresentam as seguintes características: $E_1 = 12,6$ V, $r_1 = 0,11\ \Omega$, $E_2 = 11,1$ V e $r_2 = 0,09\ \Omega$.

a) Supondo que $I = 3$ A, calcule:
   1. O valor de $R$
   2. A tensão aos terminais de cada bateria
   3. A queda de tensão em cada bateria
   4. A queda de tensão na resistência $R$
b) Supondo que se pretende limitar a corrente para 2,2 A, qual o novo valor de $R$?

R: a1) 0,3 Ω; a2) 12,27 V; 11,37 V; a3) 0,33 V; 0,27 V; a4) 0,9 V; b) 0,48 Ω

**P9** – No circuito eléctrico representado, um gerador alimenta um motor. A resistência $R$ limita o valor da corrente. Os elementos representados têm os seguintes valores: $E = 230$ V, $r = 1{,}25\ \Omega$, $R = 2{,}1\ \Omega$, $E' = 210$ V e $r' = 1{,}1\ \Omega$.

a) Calcule a intensidade no circuito, utilizando a lei de Ohm generalizada
b) Calcule a queda de tensão no gerador
c) Calcule a tensão $U_G$, aos terminais do gerador
d) Calcule a queda de tensão na resistência, $U_R$
e) Calcule a queda de tensão no motor
f) Calcule a tensão aplicada ao motor, $U_M$
g) Confirme a validade da expressão: $U_G = U_R + U_M$
h) Calcule as seguintes potências:
   1. A potência útil fornecida pelo gerador, $P_G$
   2. A potência dissipada na resistência $R$, $P_R$
   3. A potência absorvida pelo motor, $P_a$

i) Verifique que $P_G = P_R + P_a$

R: a) 4,5 A; b) 5,6 V; c) 224,4 V; d) 9,45 V; e) 5 V; f) 215 V; g) 224,4 V ≈ 9,45 V + 215 V; h1) 1009,8 W; h2) 42,5 W; h3) 967,5 W; i) 1009,8 W ≈ 42,5 W + 967,5 W.

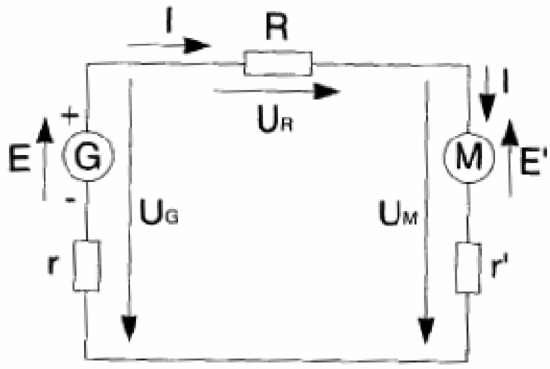
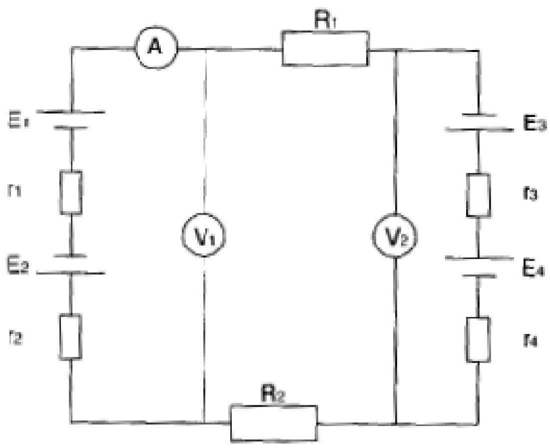



Fig. 24

**P10** – Observe a figura. Os elementos representados têm os seguintes valores: $E_1 = 5{,}4$ V, $r_1 = 0{,}05\ \Omega$, $E_2 = 6{,}5$ V, $r_2 = 0{,}08\ \Omega$, $E_3 = 5{,}6$ V, $r_3 = 0{,}06\ \Omega$, $E_4 = 6{,}3$ V, $r_4 = 0{,}07\ \Omega$, $R_1 = 0{,}3\ \Omega$ e $R_2 = 0{,}2\ \Omega$. Calcule:

a) A intensidade medida pelo amperímetro
b) As tensões medidas por $V_1$ e $V_2$
c) As diferentes quedas de tensão no circuito
d) A relação matemática entre $U_1$, $U_2$, $U_{R1}$ e $U_{R2}$

R: a) 2,37 A; b) 0,79 V; 0,39 V; c) 0,12 V; 0,19 V; 0,14 V; 0,17 V; 0,71 V; 0,47 V; d) $U_1 + U_2$ (geradores) = $R_1\ I + R_2\ I$ (receptores) ⇔ 0,79 + 0,39 = 0,71 + 0,47 ⇔ 1,18 V



**Tema: Leis de Kirchhoff**

**P1** – O esquema eléctrico representado, apresenta os seguintes valores. $E_1 = 18$ V, $E_2 = 12$ V, $r_1 = 0{,}1\ \Omega$, $r_2 = 0{,}08\ \Omega$, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$.

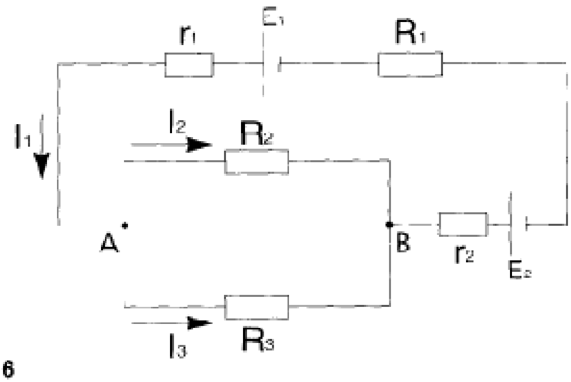



**Fig. 6**

a) Indique o(s) método(s) estudado(s) até aqui que permite(m) calcular as correntes $I_1$, $I_2$ e $I_3$

b) Calcule as correntes, utilizando o(s) método(s) indicado(s) em a)

c) Qual dos elementos ($E_1$ e $E_2$) é gerador ou receptor?

Resolução:

a) Podemos, **neste caso particular,** resolver o problema utilizando não só as **leis de Kirchhoff** mas também outras leis estudadas anteriormente, com base na **lei de Ohm generalizada,** conforme se pode verificar na alínea b) resolvida.

b1) **Utilizando a lei de Ohm generalizada**

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \underset{(3)}{\frac{1}{5}} + \underset{(5)}{\frac{1}{3}} = \frac{3+5}{5 \times 3} = \frac{8}{15} \rightarrow R_p = \frac{15}{8} = 1{,}88\ \Omega$$

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + r_1 + R_p + R_2} = \frac{18 - 12}{4 + 0{,}1 + 1{,}88 + 0{,}08} = \frac{6}{6{,}06} = \mathit{0{,}99\ A}$$

$$U_{AB} = E_1 - E_2 - (R_1 + r_1 + r_2)\, I_1 = 18 - 12 - 4{,}18 \times 0{,}99 = 1{,}86\ \text{V}$$

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{R_2} = \frac{1{,}86}{5} = \mathit{0{,}37\ A}; \qquad I_3 = \frac{1{,}86}{3} = \mathit{0{,}62\ A}$$

b2) **Utilizando as leis de Kirchhoff**

Como há três incógnitas ($I_1$, $I_2$, $I_3$), temos de estabelecer três equações: uma pela lei dos nós e duas pela lei das malhas. Formámos as malhas 1 e 2, representadas no esquema, as quais são distintas entre si.

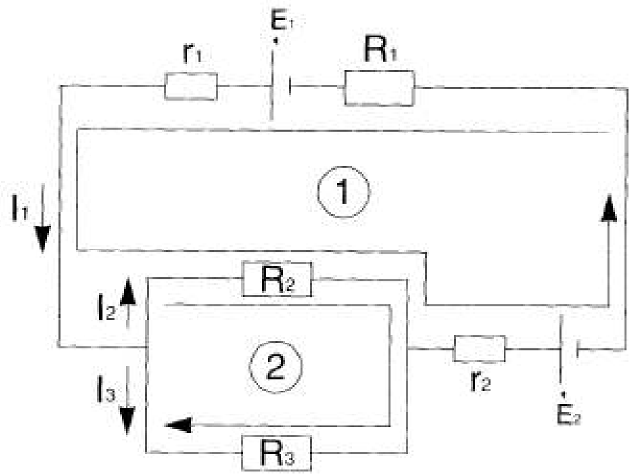



**Fig. 7**

Assim, temos:

**Lei das malhas** $\begin{cases} E_1 - E_2 = (R_1 + r_1 + r_2)\ I_1 + R_2\ I_2 & (1) \\ 0 = R_2\ I_2 - R_3\ I_3 & (2) \end{cases}$

**Lei dos nós:** $I_1 = I_2 + I_3$ (3)

Note que a 3.ª malha (passando por $R_3$) não seria distinta da malha 1 (que passa po $R_2$), razão pela qual nunca poderíamos considerá-las simultaneamente.
Podemos então formar o sistema de equações:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ E_1 - E_2 = (R_1 + r_1 + r_2)\ I_1 + R_2\ I_2 \\ 0 = R_2\ I_2 - R_3\ I_3 \end{cases}$$

o qual vamos resolver pelo **método da substituição.**

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ 18 - 12 = (4 + 0{,}1 + 0{,}08)\ I_1 + 5\ I_2 \\ 0 = 5\ I_2 - 3\ I_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ 6 = 4{,}18\ I_1 + 5\ I_2 \\ I_2 = \dfrac{3\ I_3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{3\,I_3}{5} + I_3 \\ 6 = 4{,}18\ I_1 + 5 \times \dfrac{3\,I_3}{5} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{3\,I_3 + 5\,I_3}{5} = \dfrac{8\,I_3}{5} \\ 6 = 4{,}18\ I_1 + 3\ I_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 6 = 4{,}18 \times \dfrac{8\,I_3}{5} + 3\,I_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 6 = \dfrac{33{,}44\ I_3}{5} + \dfrac{15\ I_3}{5} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 6 = \dfrac{48{,}44}{5}\ I_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots \\ I_3 = 0{,}62\ \text{A} \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_2 = \dfrac{3\ I_3}{5} = \dfrac{3 \times 0{,}62}{5} = 0{,}37\ \text{A} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 = 0{,}37 + 0{,}69 = 0{,}99\ A \\ I_2 = 0{,}37\ A \\ I_3 = 0{,}62\ A \end{cases}$$

c) Visto que $I_1$, $I_2$ e $I_3$ são positivos, então os sentidos arbitrados no esquema estavam correctos. Deste modo, tendo $E_1$ e $I_1$ o mesmo sentido, este elemento é gerador; como $I_1$ (ou $I_2$ e $I_3$) tem sentido contrário a $E_2$, este elemento é receptor. Já era de esperar, pois, que $E_1 > E_2$ e encontram-se em oposição.

**P2** – Observe o esquema eléctrico representado, em que: $E_1 = 12$ V, $E_2 = 9$ V, $E_3 = 15$ V, $r_1 = 0{,}3\ \Omega$, $r_2 = 0{,}2\ \Omega$, $r_3 = 0{,}1\ \Omega$, $R_1 = 2{,}5\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$.

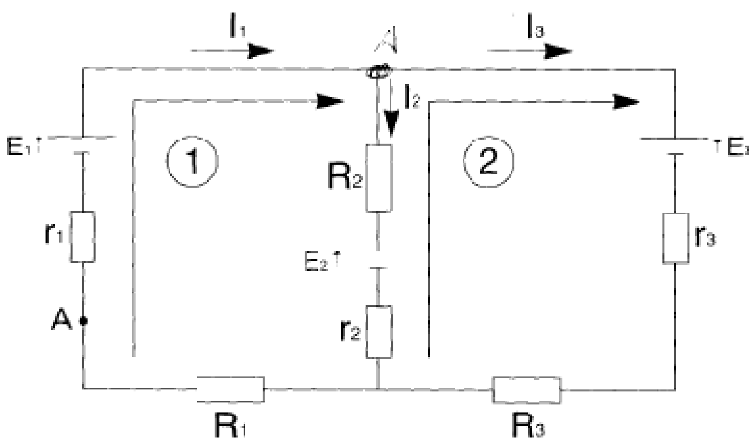



**Fig. 8**

Assinalámos já no circuito, não só os sentidos (convencionados) para as correntes, mas também os sentidos para a circulação das malhas.

a) Diga se algum dos métodos estudados anteriormente, excluindo as leis de Kirchhoff, permite calcular as correntes $I_1$, $I_2$ e $I_3$ do circuito.

b) Utilizando as leis de Kirchhoff:

1. Apresente o sistema de equações que permite resolver o problema
2. Calcule as correntes $I_1$, $I_2$ e $I_3$.

c) Calcule a tensão entre os pontos $A$ e $B$.

Resolução:

a) Nenhuma das leis anteriormente estudadas, nomeadamente a lei de Ohm generalizada, permite resolver este tipo de problema que tem três incógnitas, isto é, três correntes desconhecidas. Portanto, só utilizando as leis de Kirchhoff.

b1) $$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ E_1 - E_2 = (R_1 + r_1)\, I_1 + (R_2 + r_2)\, I_2 \\ E_2 - E_3 = (R_3 + r_3)\, I_3 - (R_2 + r_2)\, I_2 \end{cases}$$

b2) $$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ 12 - 9 = (2{,}5 + 0{,}3)\, I_1 + (3 + 0{,}2)\, I_2 \\ 9 - 15 = (3 + 0{,}1)\, I_3 - (3 + 0{,}2)\, I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ 3 = 2{,}8\, I_1 + 3{,}2\, I_2 \\ -6 = 3{,}1\, I_3 - 3{,}2\, I_2 \end{cases}$$

Substituindo a 1.ª equação nas restantes e utilizando agora o **método da redução,** obtemos sucessivamente:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 3 = 2{,}8\,(I_2 + I_3) + 3{,}2\, I_2 \\ -6 = 3{,}1\, I_3 - 3{,}2\, I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \\ (3{,}2) \\ (6) \end{matrix} \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 3 = 6\, I_2 + 2{,}8\, I_3 \\ -6 = -3{,}2\, I_2 + 3{,}1\, I_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 9{,}6 = 19{,}2\, I_2 + 8{,}96\, I_3 \\ -36 = -19{,}2\, I_2 + 18{,}6\, I_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 9{,}6 = 19{,}2\, I_2 + 8{,}96 \times (-0{,}958) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$-26{,}4 = 0 \cdot I_2 + 27{,}56\, I_3$$
$$\rightarrow I_3 = -0{,}958 \text{ A}$$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_2 = \dfrac{9{,}6 - 8{,}96 \times 0{,}958}{19{,}2} = 0{,}947 \text{ A} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 = 0{,}947 - 0{,}958 = -0{,}011 \text{ A} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = -0{,}011 \text{ A} \\ I_2 = 0{,}947 \text{ A} \\ I_3 = -0{,}958 \text{ A} \end{cases}$$

O facto de $I_1$ e $I_3$ serem negativos quer apenas dizer que os sentidos arbitrados para estas correntes não eram os correctos. Devemos, pois, alterar os seus sentidos no esquema da figura 8.

c) Aplicando a lei das malhas à malha representada na figura 9 (note que o sentido correcto de $I_3$ já foi marcado no esquema), obtemos:

$U_{AB} = E_2 + (r_2 + R_2) \cdot I_2 = 9 + (0{,}2 + 3) \times 0{,}947 = 12{,}03$ V
ou
$U_{AB} = E_3 - (r_3 + R_3) \cdot I_3 = 15 - (0{,}1 + 3) \times 0{,}958 = 12{,}03$ V

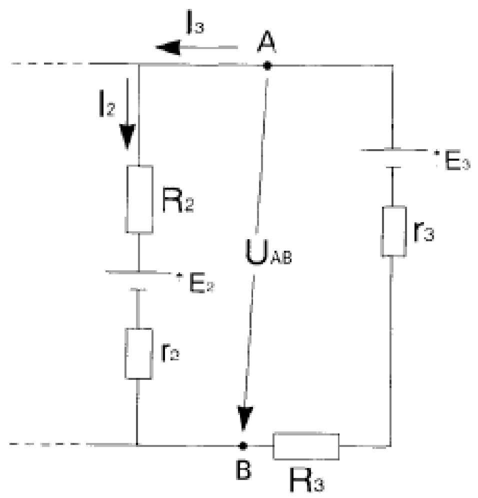



**Fig. 9**

**P3** – Observe a figura 10, em que: $E_1 = 24$ V, $E_2 = 12$ V, $E_3 = 6$ V, $r_1 = 0{,}6\ \Omega$, $r_2 = 0{,}5\ \Omega$, $r_3 = 0{,}4\ \Omega$, $R = 2\ \Omega$, $R_1 = 1{,}5\ \Omega$, $R_2 = 2{,}3\ \Omega$.

a) Calcule as correntes no circuito. Indique, no final, os sentidos correctos das correntes.
b) Calcule a diferença de potencial entre $A$ e $B$
c) Calcule a potência dissipada em $R$
d) Indique os geradores e os receptores de força contra-electromotriz

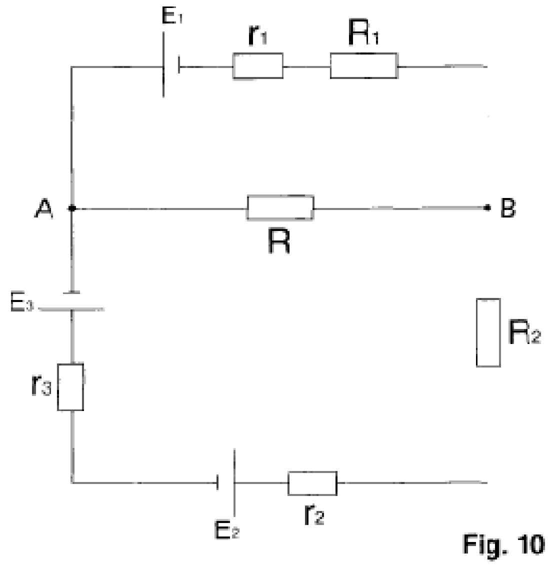



Fig. 10

R: a) 9,284 A; 7,032 A; 2,252 A; b) 4,5 V; c) 10,1 W; d) $E_1$, $E_2$ e $E_3$ são geradores.

**P4** – O circuito representado tem os seguintes valores: $E_1$ = 3 V, $E_2$ = 6 V, $E_3$ = 9 V, $r_1$ = 0,15 Ω, $r_2$ = 0,2 Ω, $r_3$ = 0,35 Ω, $R_1$ = 0,3 Ω, $R_2$ = 0,4 Ω, $R_3$ = 0,5 Ω.
Calcule:

a) $I_1$, $I_2$ e $I_3$
b) As quedas de tensão em $R_1$, $R_2$ e $R_3$
c) A diferença de potencial entre *A* e *B*
d) A potência dissipada em cada resistência
e) A potência total dissipada no circuito

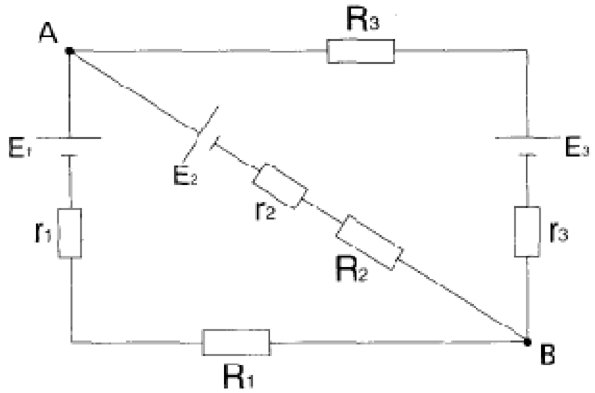



Fig. 11

R: a) 5,29 A; 1,03 A; 4,26 A; b) 1,59 V; 0,41 V; 2,13 V; c) 5,38 V; d) 8,4 W; 0,42 W; 9,1 W; 4,2 W; 0,21 W; 6,4 W; e) 28,7 W.

**P5** – Os valores correspondentes à figura, são os seguintes: $E_1 = 9$ V, $E_2 = 3$ V, $E_3 = 4{,}5$ V, $E_4 = 6$ V, $r_1 = 0{,}25\ \Omega$, $r_2 = 0{,}2\ \Omega$, $r_3 = 0{,}15\ \Omega$, $r_4 = 0{,}1\ \Omega$, $R = 5\ \Omega$.
Calcule:
a) As correntes no circuito
b) As tensões medidas pelos dois voltímetros

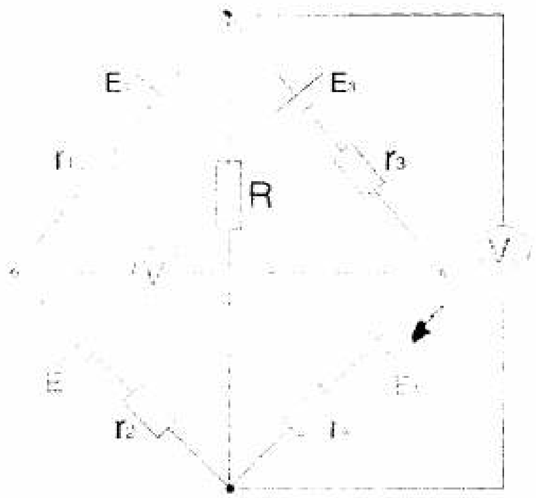


Fig. 12

R: a) 2,91 A; 2,14 A; 0,77 A; b) 3,66 V; 10,7 V.

**P6** – O esquema representado tem os seguintes valores: $E_1 = 6$ V, $E_2 = 6$ V, $E_3 = 4{,}5$ V, $E_4 = 3$ V, $E_5 = 3$ V, $r_1 = 0{,}5\ \Omega$, $r_2 = 0{,}3\ \Omega$, $r_3 = 0{,}25\ \Omega$, $r_4 = 0{,}1\ \Omega$, $r_5 = 0{,}12\ \Omega$, $R_1 = 3{,}2\ \Omega$, $R_2 = 2{,}5\ \Omega$, $R_3 = 2{,}1\ \Omega$, $R_4 = 1{,}5\ \Omega$, $R = 3{,}5\ \Omega$.

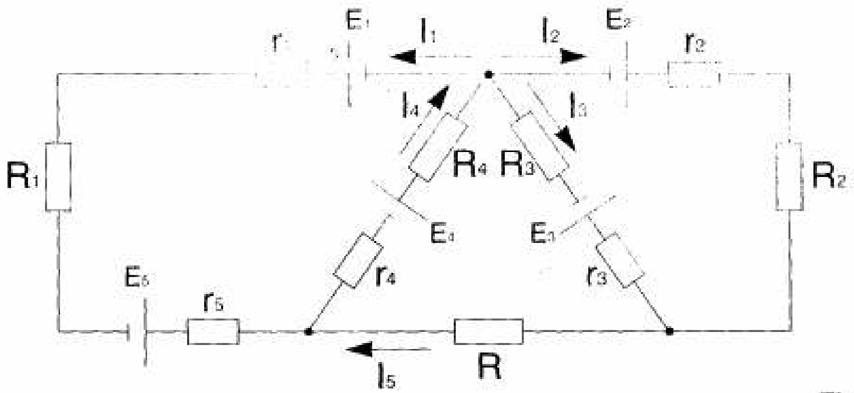


Fig. 13

Apresente o sistema de equações que permite resolver o circuito.

Nota: sugere-se aos interessados que experimentem resolver o sistema de equações obtido.

R: $I_4 = I_1 + I_2 + I_3$

$I_4 = I_1 + I_5$

$E_1 + E_5 + E_4 = (R_1 + r_1 + r_5)\ I_1 + (R_4 + r_4)\ I_4$

$E_4 + E_3 = (R_4 + r_4)\ I_4 + (R_3 + r_3)\ I_3 + R\ I_5$

$E_2 - E_3 = (R_2 + r_2)\ I_2 - (R_3 + r_3)\ I_3$

Soluções: $I_1$ = 1,983 A; $I_2$ = 0,648 A; $I_3$ = 0,134 A; $I_4$ = 2,77 A; $I_5$ = 0.787 A

## Tema: Teorema da Sobreposição

**P1** – Observe a rede representada na figura 16, em que: $E_1$ = 6 V, $E_2$ = 15 V, $r_1$ = 0,1 Ω, $r_2$ = 0,2 Ω, $R_1$ = 5 Ω, $R_2$ = 10 Ω, $R_3$ = 4 Ω. Utilizando o teorema da sobreposição, calcule:

a) A intensidade em $R_1$

b) A tensão aos terminais de $R_1$

c) A potência dissipada em $R_1$.

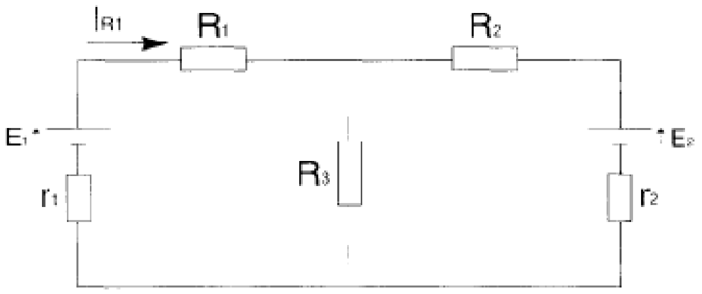
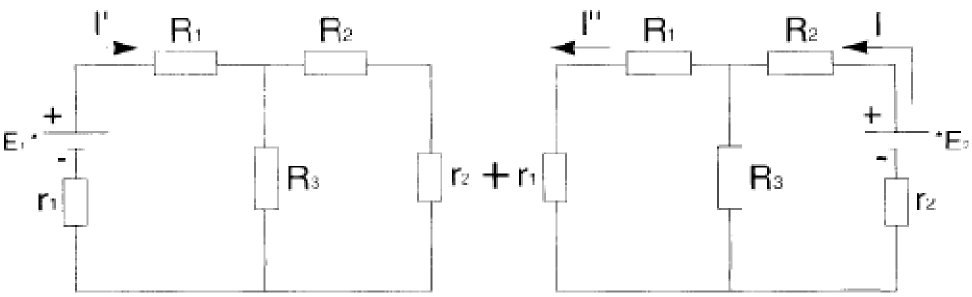



**Fig. 16**

Resolução:

a) A rede da figura 16 é equivalente à "soma" das duas redes indicadas na figura 17.

A intensidade em $R_1$ ($I_{R1}$) é igual à **soma algébrica** de $I'$ com $I''$. Calculemos, por isso, cada uma destas intensidades, por resolução dos dois circuitos da figura 17.



Assim, na figura 17 a), temos:

$R_2 + r_2 = 10 + 0{,}2 = 10{,}2\ \Omega$; $\quad R_p = \dfrac{R_3 \times (R_2 + r_2)}{R_3 + R_2 + r_2} = \dfrac{4 \times 10{,}2}{4 + 10{,}2} = 2{,}87\ \Omega$

$R_s = r_1 + R_1 + R_p = 0{,}1 + 5 + 2{,}87 = 7{,}97\ \Omega$

$I' = \dfrac{E_1}{R_s} = \dfrac{6}{7{,}97} = 0{,}75\ \text{A}$

Na figura 17 b), temos:

$r_1 + R_1 = 0{,}1 + 5 = 5{,}1\ \Omega$; $\quad R_p = \dfrac{R_3 \times (r_1 + R_1)}{R_3 + r_1 + R_1} = \dfrac{4 \times 5{,}1}{4 + 5{,}1} = 2{,}24\ \Omega$

$R_s = r_2 + R_2 + R_p = 0{,}2 + 10 + 2{,}24 = 12{,}44\ \Omega$

$I = \dfrac{E_2}{R_s} = \dfrac{15}{12{,}44} = 1{,}21\ \text{A}$

$U_{R3} = E_2 - (R_2 + r_2)\ I = 15 - 10{,}2 \times 1{,}21 = 2{,}66\ \text{V}$

$I_{R3} = \dfrac{U_{R3}}{R_3} = \dfrac{2{,}66}{4} = 0{,}66\ \text{A}$

$I'' = I - I_{R3} = 1{,}21 - 0{,}66 = 0{,}55\ \text{A}$

A corrente em $R_1$ será, portanto, a diferença entre $I'$ e $I''$ (têm sentidos contrários):

$I_{R1} = I' - I'' = 0{,}75 - 0{,}55 = 0{,}20\ \text{A}$

Visto que os sentidos das correntes $I'$ e $I''$ estavam correctamente indicados nos esquemas (a saírem do pólo positivo do gerador respectivo), então a corrente $I_{R1}$ tem também o seu sentido correctamente arbitrado, pois que o valor obtido é positivo. Caso contrário, teríamos de trocar o sentido de $I_{R1}$ no esquema.

b) A tensão aos terminais de $R_1$ será:

$U_{R1} = R_1\ I_{R1} = 5 \times 0{,}20 = 1\ \text{V}$

c) A potência dissipada em $R_1$ será:

$P_{R1} = U_{R1}\ I_{R1} = 1 \times 0{,}46 = 0{,}46\ \text{W}$

**P2** – Considere ainda o circuito da figura anterior.

a) Utilizando o teorema da sobreposição, calcule:

1. A intensidade em $R_2$
1. A intensidade em $R_3$

b) Compare os valores obtidos com os que obterá, utilizando as leis de Kirchhoff

R: a1) 1 A; a2) 1,2 A

## Tema: Teorema de Thévenin

**P1** – O esquema eléctrico representado tem os seguintes valores: $E_1$ = 9 V, $E_2$ = 12 V, $r_1$ = 0,1 Ω, $r_2$ = 0,2 Ω, $R_1$ = 4 Ω, $R_2$ = 6 Ω, $R_3$ = 3 Ω.

Utilizando o teorema de Thévenin, calcule:

a) A intensidade em $R_2$

b) A intensidade em $R_3$

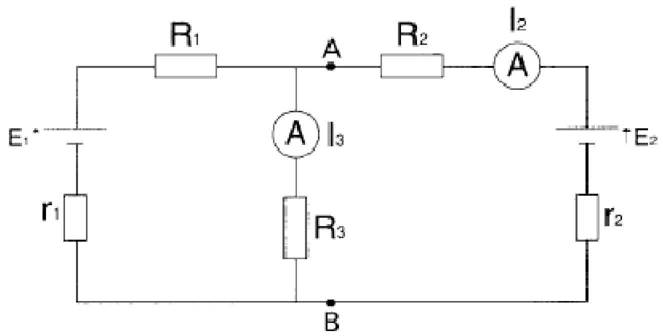



**Fig. 20**

Resolução:

Conforme vimos anteriormente, podíamos calcular estas correntes pelas leis de Kirchhoff ou pelo teorema da sobreposição.

Mas, vejamos agora como calculá-las utilizando o teorema de Thévenin!

a) **Cálculo de $I_2$**

Para calcular $I_2$, vamos "abrir" o circuito entre os terminais *A* e *B* indicados na figura 20, isto é, o ramo de $R_2$ (onde passa a corrente $I_2$) é desligado. De seguida, vamos obter sucessivamente a f.e.m. $E_{TH}$ e a resistência interna $R_{TH}$ do gerador de Thévenin, para calcular finalmente o valor de $I_2$.

a1) **Cálculo de $E_{TH}$**

Vamos determinar a tensão entre *A* e *B*, com terminais abertos, tal como se sugere na figura 21. Obtemos então:

$$I = \frac{E_1}{R_1 + r_1 + R_3} = \frac{9}{4 + 0{,}1 + 3} = 1{,}27 \text{ A}$$

$$U_{AB} = U_{R3} = R_3\, I = 3 \times 1{,}27 = 3{,}81 \text{ V}$$

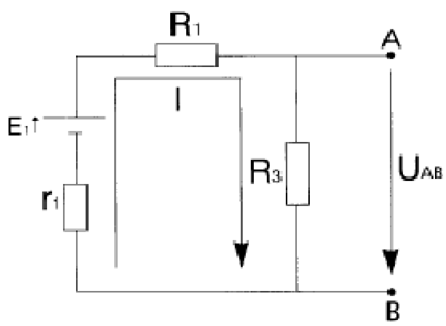



**Fig. 21**

Segundo o teorema, o gerador de Thévenin tem uma f.e.m. $E_{TH} = U_{AB} = 3{,}81$ V.

a2) **Cálculo de $R_{TH}$**

Quanto à resistência interna do gerador de Thévenin, ela obtém-se medindo a resistência interna entre *A* e *B*, substituindo no circuito da figura anterior, os geradores ($E_1$, neste caso) pelas suas resistências internas ($r_1$, neste caso). Obtemos, assim, a figura 22.

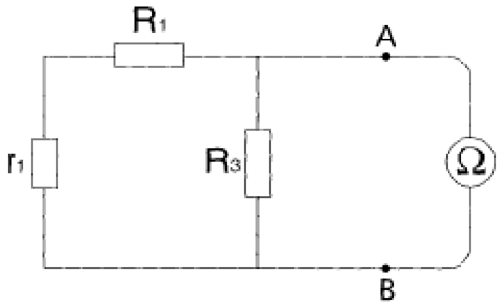



**Fig. 22**

A resistência $R_{TH}$ medida (ou calculada) entre os terminais *A* e *B* será:

$$R_{TH} = \frac{(R_1 + r_1) \times R_3}{R_1 + r_1 + R_3} = \frac{(4 + 0{,}1) \times 3}{4 + 0{,}1 + 3} = 1{,}73\ \Omega$$

Segundo o teorema, "... a parte do circuito que fica é equivalente ao gerador de Thévenin...".

Substituindo então parte do circuito pelo gerador de Thévenin, obtemos o circuito total equivalente (já com a resistência $R_2$):

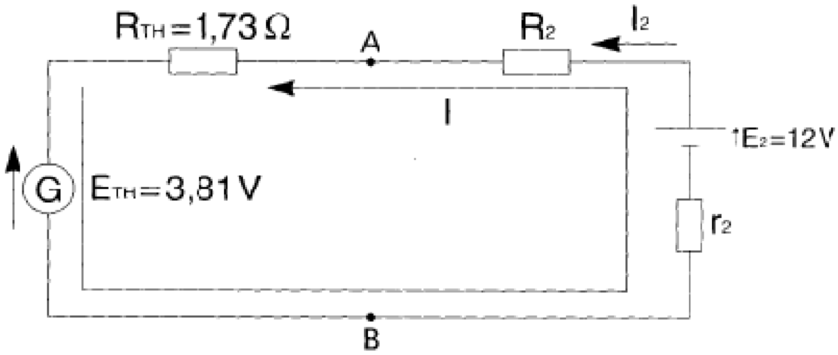



**Fig. 23**

A corrente em $R_2$ é agora fácil de calcular.

Temos, portanto, aplicando a lei das malhas:

$E_2 - E_{TH} = I_2\,(r_2 + R_2 + R_{TH})$

$12 - 3{,}81 = I_2\,(0{,}2 + 6 + 1{,}73) \rightarrow I_2 = 1{,}03$ A

b) **Cálculo de $I_3$**

Abrindo o ramo de $R_3$, isto é, desligando $R_3$, o circuito toma a forma indicada na figura 24.

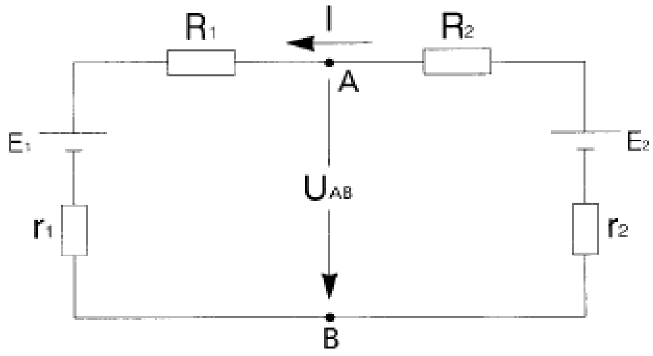



**Fig. 24**

A corrente neste circuito é dada por:

$$I = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2} = \frac{12 - 9}{4 + 6 + 0{,}1 + 0{,}2} = 0{,}291 \text{ A}$$

Note que o sentido positivo de $I$ é o indicado no esquema, pois verifica-se que $E_2 > E_1$. Este pormenor é importante, ao aplicarmos a lei das malhas, no cálculo de $U_{AB}$. A tensão entre $A$ e $B$ é dada por:

$$U_{AB} = E_2 - (R_2 + r_2)\, I = 12 - (6 + 0{,}2) \times 0{,}291 = 10{,}2 \text{ V}$$

considerando $E_2$ gerador.

Ou então:

$$U_{AB} = E_1 + (R_1 + r_1)\, I = 9 + (4 + 0{,}1) \times 0{,}291 = 10{,}2 \text{ V}$$

considerando $E_1$ receptor.

O gerador de Thévenin tem, portanto, uma f.e.m.:

$$E_{TH} = U_{AB} = 10{,}2 \text{ V}$$

A resistência equivalente de Thévenin é obtida através do circuito representado na figura 25, em que se retiraram as forças electromotrizes:

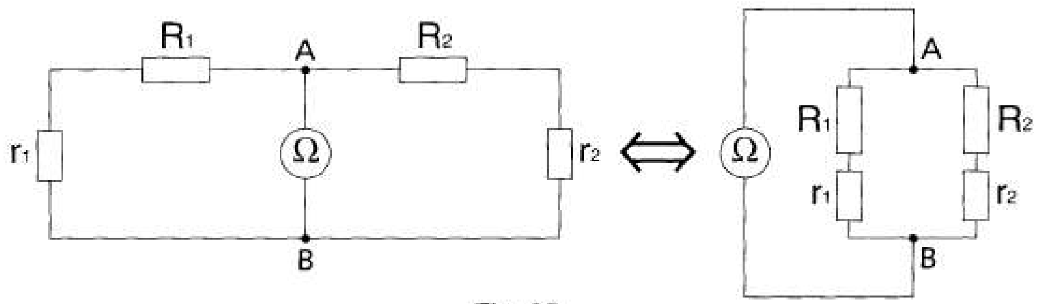



**Fig. 25**

Obtemos, portanto:

$$R_{TH} = \frac{(R_1 + r_1) \times (R_2 + r_2)}{R_1 + r_1 + R_2 + r_2} = \frac{(4 + 0{,}1) \times (6 + 0{,}2)}{4 + 0{,}1 + 6 + 0{,}2} = 2{,}47\ \Omega$$

Obtemos, finalmente, o esquema equivalente de Thévenin, aplicando a tensão de Thévenin a um circuito constituído pela resistência de Thévenin em série com o ramo de $R_3$:

$$I_3 = \frac{E_{TH}}{R_{TH} + R_3} = \frac{10{,}2}{2{,}47 + 3} = 1{,}86\ \text{A}$$

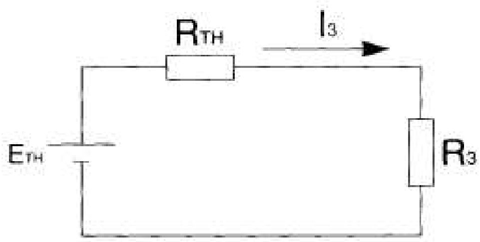



**Fig. 26**

**P2** – Utilizando o teorema de Thévenin, calcule as correntes em $R_1$, $R_2$ e $R_3$. Os valores são os seguintes: $E_1 = 9$ V, $E_2 = 4{,}5$ V, $E_3 = 6$ V, $r_1 = 0{,}3\ \Omega$, $r_2 = 0{,}2\ \Omega$, $r_3 = 0{,}1\ \Omega$, $R_1 = 1{,}2\ \Omega$, $R_2 = 1{,}5\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$.

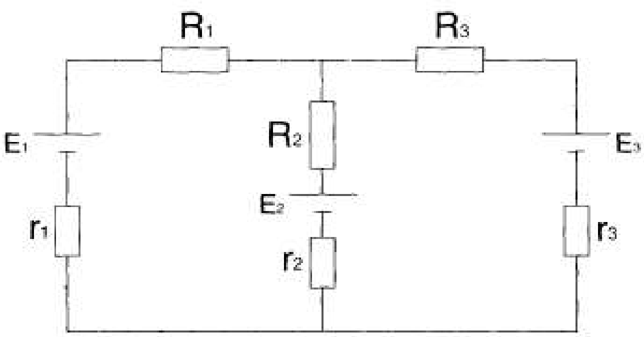



**Fig. 27**

R: $I_1$ = 1,53 A; $I_2$ = 1,30 A; $I_3$ = 0,23 A

**P3** – O circuito representado apresenta os seguintes valores: $E_1$ = 9 V, $E_2$ = 4,5 V, $r_1$ = 0,3 Ω, $r_2$ = 0,2 Ω, $R_1$ = 4 Ω, $R_2$ = 3 Ω, $R_3$ = 8 Ω, $R_4$ = 6 Ω.

a) Utilizando o teorema de Thévenin, calcule as correntes em $R_1$ e em $R_2$.

b) Confirme os valores encontrados, utilizando as leis de Kirchhoff. Para maior rapidez na utilização das leis de Kirchhoff, sugere-se que simplifique o circuito, calculando o paralelo entre $R_3$ e $R_4$.

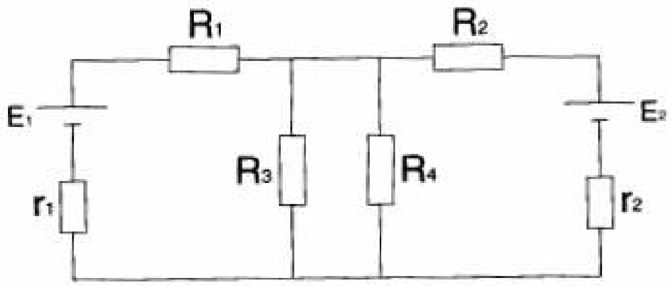



**Fig. 28**

R: $I_1$ = 1,12 A; $I_2$ = 0,10 A

**P4** – O circuito representado apresenta os seguintes valores: $E_1$ = 3 V, $E_2$ = 4,5 V, $E_3$ = 12 V, $R_1$ = 2 kΩ, $R_2$ = 4 kΩ, $R_3$ = 6 kΩ, $R_4$ = 4 kΩ, $R_5$ = 1 kΩ, $R_6$ = 5 kΩ. As resistências internas dos geradores são desprezáveis. Calcule as intensidades em $R_1$, $R_5$ e em $R_2$.

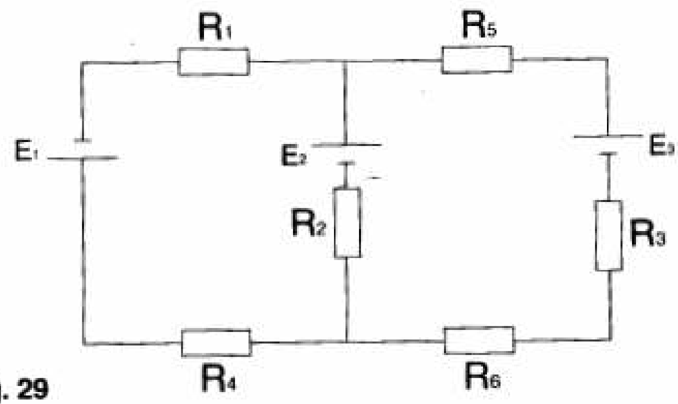



**Fig. 29**

R: 1,04 mA; 0,73 mA; 0,31 mA.