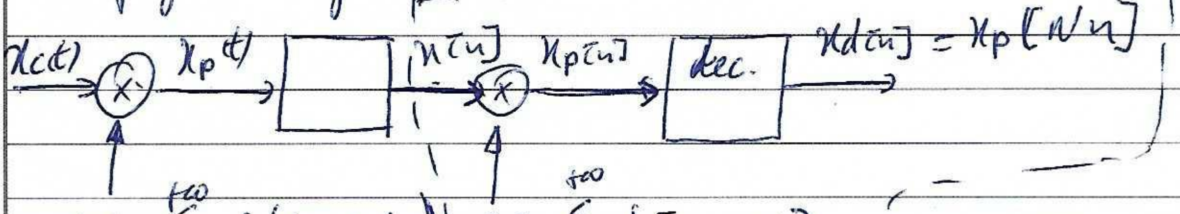
Universidade do Minho

(a) ______________________ Unidade Curricular ______________________

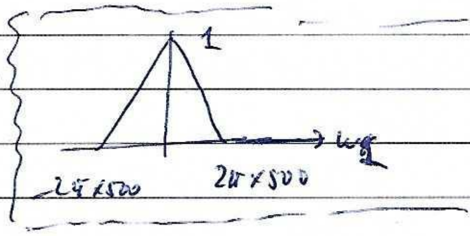
Curso ______________________ Docente ______________________

ALUNO (b) ______________________ em ___/___/_____

- Considere o sistema de processamento de sinal mostrado na figura seguinte:



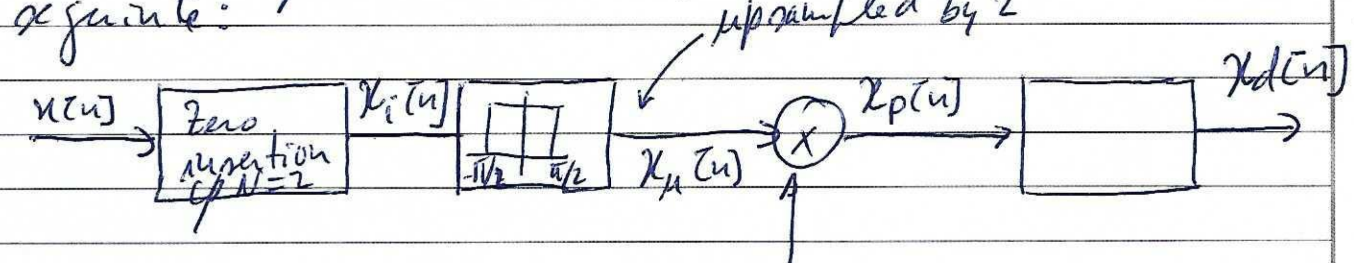
$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - k\frac{1}{4500}\right) \qquad p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - k4]$$



a) Considere $x_c(t) = 500\,\mathrm{sinc}^2(500t)$ e represente os espectros de $x_c(t)$, $x_p(t)$, $x[n]$ e $x_p[n]$.

b) Represente o espectro de $x_d[n]$. Verifique que a existência de espaço em banda que sugere ~~a~~ ~~os~~ existir espaço para mais downsampling. Consegue aproveitar esse espaço?

c) Considere que substitui a parte discreta do sistema pelo seguinte:



$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - 9k]$$

Represente nestas condições os espectros de $x_u[n]$, $x_p[n]$ e $x_d[n]$.

(a) - Exercício escrito ou exame final

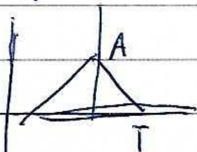
(b) - Nome completo em letra de imprensa

a) $x_c(t) = 500\,\mathrm{sinc}^2(500t)$ e $X_p(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$

logo para representar $X_p(\omega)$ é preciso conhecer $X_c(\omega)$.

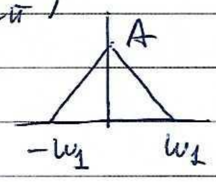
Pela prop. da dualidade:

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \qquad \frac{F(t)}{2\pi} \longleftrightarrow f(-\omega) \quad \Rightarrow$$



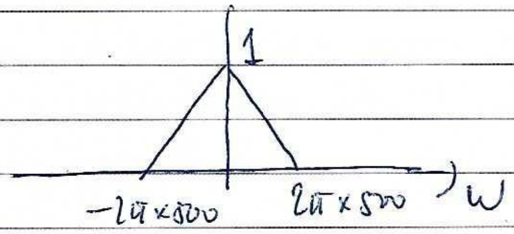
$\longleftrightarrow AT\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$

$\frac{A W_1}{2\pi}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{t\,w_1}{2\pi}\right) \longleftrightarrow$



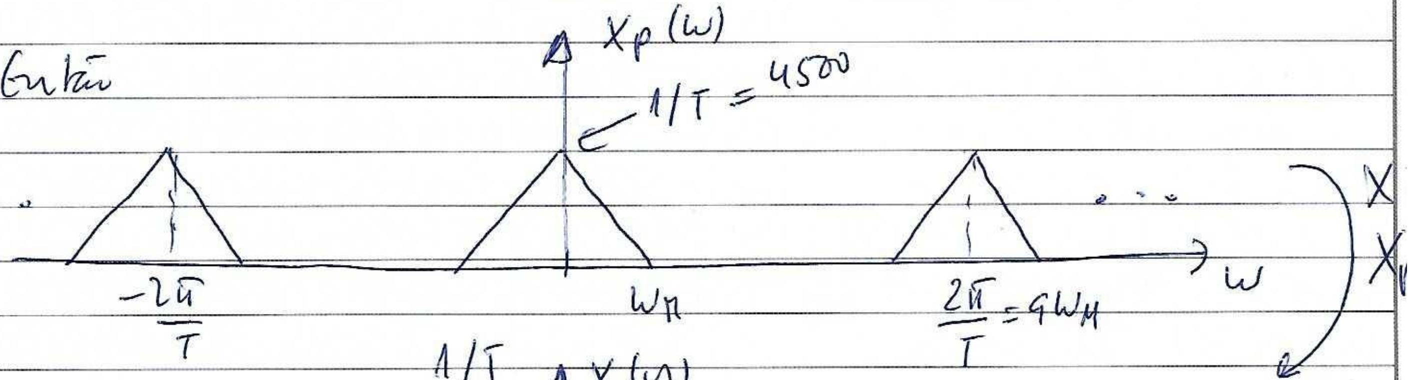
$$\begin{cases} \dfrac{A\,w_1}{2\pi} = 500 \\ \dfrac{w_1}{2\pi} = 500 \end{cases} \qquad \begin{aligned} A &= 1 \\ W_1 &= 2\pi \cdot 500 \text{ rad/seg} \end{aligned}$$

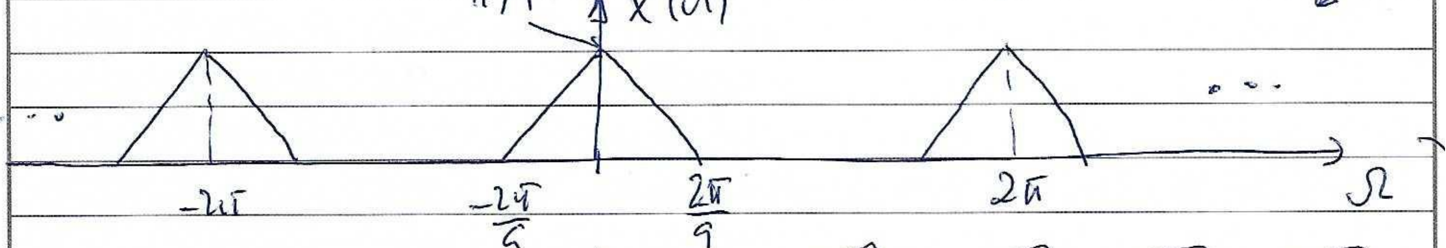
Então $X_c(\omega)$ é

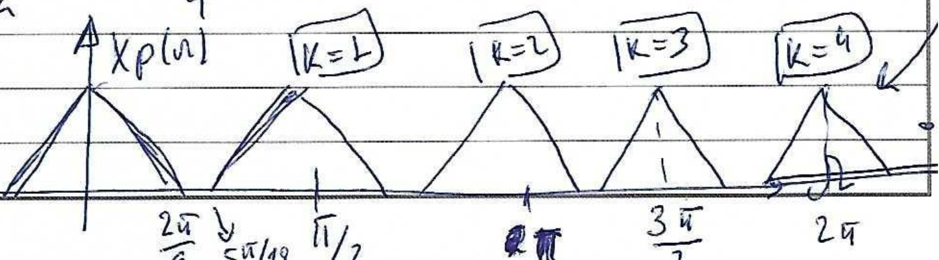


ω_s e $T = \frac{1}{4500} \Rightarrow \omega_s = 2\pi \cdot 4500$ rad/seg $= \boxed{9\,W_M}$

Então







(*) $X_p(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(\Omega) * P(\Omega)\right] = \dots = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$

b) O espectro do sinal decimado.

$x_d[n] = x_p[Nn] \overset{x_p[n]}{=}$ no decimador. Comparando os espectros destes 2 sinais temos

$$X_p(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n]\, e^{-j\Omega n}$$

e

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n]\, e^{-j\Omega n}$$. Como $x_d[n] = x[nN]$ temos

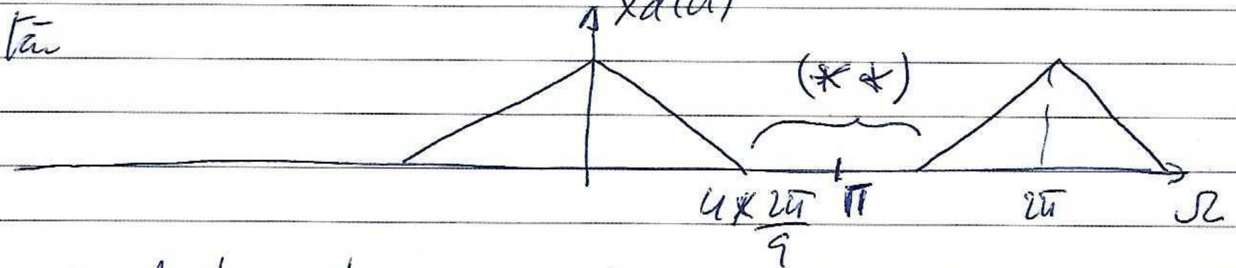
$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nN]\, e^{-j\Omega n}$$ que não é uma DTFT pois $nN \neq n$. Fazendo uma

m.v. $n \to m : m = nN$ obtemos

$$X_d(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, e^{-j\Omega \frac{m}{N}} = X(\Omega/N)$$

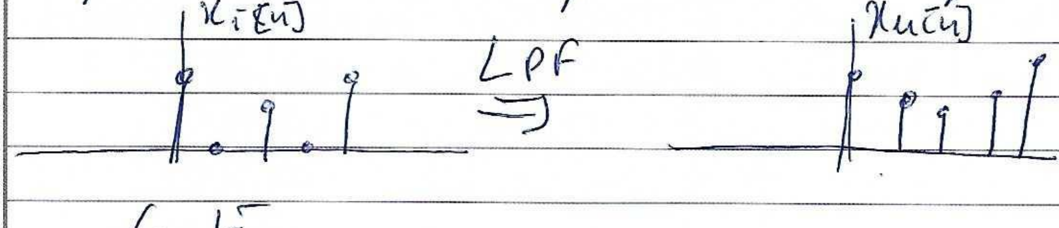
ou seja o espectro é alargado N vezes c/ $N=4$.

Então



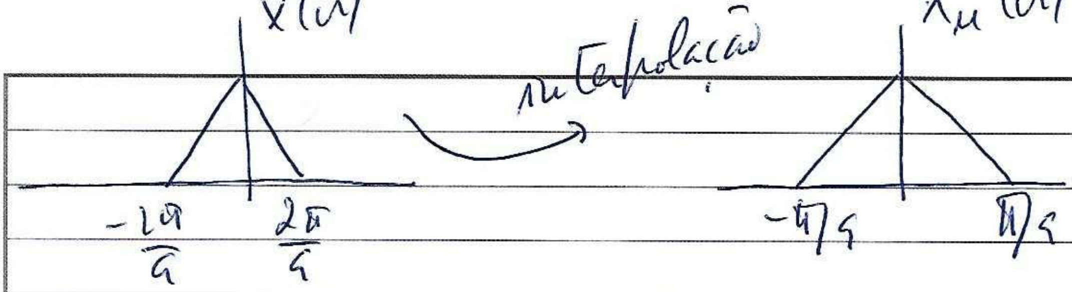
Há de facto espaço em banda mas não chega para fazer a decimação por 5 pois neste caso $X_d(\Omega)$ teria largura de $5 \times \frac{2\pi}{9} = \frac{10\pi}{9} > \pi \Rightarrow$ "aliasing"

c) Substituindo a parte discreta pelo sugerido temos:

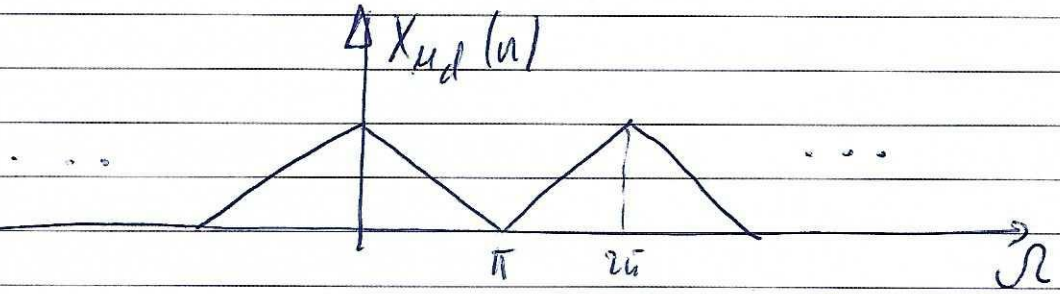


proc. de interpolação (inverso da decimação).

Então



O sistema que processa $X_u(\Omega)$ é um decimador por 9, logo $X_{ud}(\Omega) = X_u(\Omega/9)$ ou seja o espectro 9 vezes + largo, logo



Verificamos então que o espaço em freq. está totalmente ocupado, o que significa que sem ~~sacrificar~~ perder informação não é possível compactar mais o sinal no domínio dos tempos.

<u>Resumo</u>: O sinal $x[n]$ tinha L. B. de $\frac{2\pi}{9}$ que necessitava de uma decimação de $4,5 = 9/2$ para ocupar toda a banda. Não é possível decimar por um factor não inteiro logo decimando por 4 (alínea b) sobre espaço em banda o que significa que a representação do sinal no tempo poderia ser mais compactada.

A solução óptima consistiu em interpolar o sinal por 2 e depois decimar por 9 ~~ou~~ que é o mesmo que decimar por $9/2 = 4,5$, o requerido inicial.

B. Combinando interpolação e decimação consegue-se obter decimações por valores ñ inteiros evitando tornar o sinal contínuo (DAC) e depois voltar a amostrar à freq. desejada.