Processamento Digital de Sinal

Teste 2 2015-2016

1. Considere um processo estocástico discreto.

    a) Diga justificando, que parâmetros o caracterizam e como os poderia determinar.
    b) Se o processo for estacionário em que medida esses parâmetros se modificam. Justifique.
    c) Se além de estacionário o processo for ergódico como se pode caracterizá-lo apenas com uma realização. Justifique.

2. Considere x[n] e y[n] 2 processos estocásticos reais, estacionários de médias m_x e m_y. Mostre as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} \gamma_{xx}(m) = \phi_{xx}(m) - m_x^2 \\ \gamma_{xy}(m) = \phi_{xy}(m) - m_x m_y \end{cases}$$

3. Considere um sinal discreto s[n] de média m_s e desvio padrão σ_s corrompido de modo multiplicativo por um sinal ruído branco e[n] de média m_e e desvio padrão σ_e .

    a) Determine a média e a variância do processo x[n]=s[n].e[n] admitindo que os processos são não correlados.
    b) Determine a sequência de autocorrelação e a densidade espectral de potência de x[n] em função dos parâmetros conhecidos dos processos s[n] e e[n].
    c) Considere que s[n] é um sinal sinusoidal com fase aleatória e uniformemente distribuída em [0, 2π[ou seja $s[n]=A\cos(w_0 n+\varphi)$. Mostre que nestas circunstâncias, se os processos são não correlados então

$$\Phi_{xx}[m] = \frac{A^2}{2}\cos(w_0\, m).\,[\sigma_e^2 \delta[m] + m_e^2]$$

    d) Use a propriedade da modulação para determinar a densidade espectral de potência do processo x[n]. Esboce $P_{xx}(\Omega)$.

4. Considere um sistema discreto LTI caracterizado pela função de transferência

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

ao qual é aplicado um sinal ruído branco de média nula.

a) Mostre que um sistema deste tipo gera um sinal parcialmente predizível a partir de um sinal completamente impredizível.
b) Dos métodos de estimação espectral que conhece qual o mais indicado para estimar a densidade espetral de potência do processo de saída? Justifique.
c) Mostre que a autocorrelação do sinal de saída é dada por

$$\varphi_{xx}(m) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_{xx}(|m-k|)$$

d) Considere que dispõe de uma amostra do sinal de saída de 5 pontos {-1,1, 0, -1, 1}. Estime a sequência de autocorrelação usando o estimador não polarizado na média do processo de saída para -4≤m≤4.
e) Determine o erro do preditor.
f) Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para m>4 e m<7.
g) Determine o espectro de máxima entropia do sinal de saída do sistema.

$$\phi_{xx}(n,m) = E\left[X_n . X_m^*\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y^* f_{X_n,X_m}(x,y)\,dxdy$$

$$C_{xx}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n).x^*(n+m) \qquad C'_{xx}(m) = \frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n).x^*(n+m)$$

$$\gamma_{xx}(n,m) = E\left[\left(X_n - m_x(n)\right).\left(X_m - m_x(m)\right)^*\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_x(n)\right).\left(y - m_x(m)\right)^* f_{X_n,X_m}(x,y)\,dxdy$$