1. Mostre que: $h(x)=e^{x}-e^{-x}$ é uma solução do problema de valores iniciais: $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$, $y(0)=0$ e $y^{'}(0)=2$. Averigúe se: $i(x)=e^{x}+e^{-x}$ é uma solução do mesmo problema.

R:

Como temos a equação diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$, então vamos começar por determinar as derivadas até à segunda ordem da função: $y=h(x)=e^{x}-e^{-x}$, para posteriormente se substituir o resultado obtido para cada uma na equação diferencial dada.

- $y=h(x)=e^{x}-e^{-x}$

- $\frac{dy}{dx}=h^{'}(x)=\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{'}=\underbrace{\left(e^{x}\right)^{'}}_{\left(e^{u}\right)^{'}=u'\cdot e^{u}}-\underbrace{\left(e^{-x}\right)^{'}}_{\left(e^{u}\right)^{'}=u'\cdot e^{u}}=e^{x}-\left(-e^{-x}\right)=e^{x}+e^{-x}$

- $\frac{d^2y}{dx^2}=h^{''}(x)=\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{'}=\underbrace{\left(e^{x}\right)^{'}}_{\left(e^{u}\right)^{'}=u'\cdot e^{u}}+\underbrace{\left(e^{-x}\right)^{'}}_{\left(e^{u}\right)^{'}=u'\cdot e^{u}}=e^{x}+\left(-e^{-x}\right)=e^{x}-e^{-x}$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$ teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=0\Leftrightarrow\left(e^{x}-e^{-x}\right)-\left(e^{x}-e^{-x}\right)=0\Leftrightarrow 0=0\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Verificada a}\\\text{identidade}\end{matrix}\right\}$$

Já se verificou que a função é explícita. Agora, falta verificar se $y(0)=0$ e $y^{'}(0)=2$, pelo que:

$$y(0)=0\Leftrightarrow h(0)=0\Leftrightarrow e^{0}-e^{-0}=0\Leftrightarrow e^{0}-\frac{1}{e^{0}}=0\Leftrightarrow 1-\frac{1}{1}=0\Leftrightarrow 0=0\rightarrow\text{ Verifica}$$

$$y^{'}(0)=2\Leftrightarrow h^{'}(0)=2\Leftrightarrow e^{0}+e^{-0}=2\Leftrightarrow e^{0}+\frac{1}{e^{0}}=2\Leftrightarrow 1+\frac{1}{1}=2\Leftrightarrow 2=2\rightarrow\text{ Verifica}$$

Repetindo o mesmo procedimento para $i(x) = e^x + e^{-x}$, teremos que:

- $y = i(x) = e^x + e^{-x}$

- $\frac{dy}{dx} = i'(x) = \left(e^x + e^{-x}\right)' = \underbrace{\left(e^x\right)'}_{\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u} + \underbrace{\left(e^{-x}\right)'}_{\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u} = e^x + \left(-e^{-x}\right) = e^x - e^{-x}$

- $\frac{d^2y}{dx^2} = i''(x) = \left(e^x - e^{-x}\right)' = \underbrace{\left(e^x\right)'}_{\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u} - \underbrace{\left(e^{-x}\right)'}_{\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u} = e^x - \left(-e^{-x}\right) = e^x + e^{-x}$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \Leftrightarrow \left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x + e^{-x}\right) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Verificada a} \\ \text{identidade}\end{matrix}\right\}$$

Já se verificou que a função é explícita. Agora, falta verificar se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$, pelo que:

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow i(0) = 0 \Leftrightarrow e^0 + e^{-0} = 0 \Leftrightarrow e^0 + \frac{1}{e^0} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{1} = 0 \Leftrightarrow 2 \neq 0 \rightarrow \text{Não Verifica}$$

$$y'(0) = 2 \Leftrightarrow i'(0) = 2 \Leftrightarrow e^0 - e^{-0} = 2 \Leftrightarrow e^0 - \frac{1}{e^0} = 2 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1} = 2 \Leftrightarrow 0 \neq 2 \rightarrow \text{Não Verifica}$$

2. Sabendo que toda a solução da equação diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$, pode ser escrita na forma: $f(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, determine qual deverá ser o valor de c_1 e c_2 por forma a que $f(x)$ seja uma solução do problema de valores iniciais: $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.

R:

Para se determinarem os valores de c_1 e c_2, conforme é pedido, teremos que recorrer aos valores iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$. Sabendo que: $y(x) = f(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$.

Então:

$$y'(x) = f'(x) = \left(c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}\right)' \Leftrightarrow y'(x) = \left[\underbrace{(c_1)'}_{=0} \cdot e^x + c_1 \cdot \underbrace{(e^x)'}_{=e^x}\right] + \left[\underbrace{(c_2)'}_{=0} \cdot e^{-x} + c_2 \cdot \underbrace{(e^{-x})'}_{=-e^{-x}}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x}$$

Assim sendo e por substituição teremos agora que:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{-0} = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 2 \Leftrightarrow c_1 \cdot e^0 - c_2 \cdot e^{-0} = 2$$

Logo teremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{-0} = 1 \\ c_1 \cdot e^0 - c_2 \cdot e^{-0} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = 1 \\ c_1 \cdot 1 - c_2 \cdot 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ (1 - c_2) - c_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ 1 - 2c_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ c_2 = \frac{2-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{2} \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Este exercício termina por aqui porque no enunciado é afirmado que toda a solução da equação diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$, pode ser escrita na forma: $f(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$, onde c_1 e c_2 são as constantes que se acabaram de calcular.