Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática II

Ano Lectivo 2010/2011 **Folha 2 - Soluções**

3 Sucessões e Séries

3.1 Sucessões de números reais

1.

2. (a) Sucessão monótona decrescente;
   (b) Sucessão monótona crescente;
   (c) Sucessão monótona crescente.

3. (a) Convergente, 1;
   (b) Convergente, 0;
   (c) Convergente, 0;
   (d) Divergente, $+\infty$;
   (e) Convergente, 0;
   (f) Divergente, $+\infty$;
   (g) Convergente, 1 ;
   (h) Convergente, $\frac{1}{4}$;
   (i) Convergente, e^{-2};
   (j) Convergente, e^{4};
   (k) Divergente, $-\infty$;
   (l) Convergente, 1;
   (m) Convergente, 0;
   (n) Convergente; 1;
   (o) Convergente, 1.

4. (a)
   (b) $\lim v_n = 0$.

5. (a) A sucessão é divergente;
   (b) A sucessão é convergente (e tem limite igual a 0).

6. (a)
   (b) A sucessão (u_n) não tem limite.

7. $u_n = n^2,\ v_n = \dfrac{1}{n}$; (b) $u_n = n^2,\ v_n = -\dfrac{1}{n}$; (c) $u_n = n,\ v_n = \dfrac{1}{n^2}$; (d) $u_n = \pi n,\ v_n = \dfrac{1}{n}$.

3.2 Séries numéricas

9. (a) $S_1 = -1,\ S_2 = 0,\ S_3 = -1,\ S_4 = 0,\ S_5 = -1$.
   (b) $S_1 = 1,\ S_2 = \frac{5}{4},\ S_3 = \frac{49}{36},\ S_4 = \frac{205}{144},\ S_5 = \frac{5269}{3600}$;
   (c) $S_0 = -1,\ S_1 = -3,\ S_2 = -7,\ S_3 = -15,\ S_4 = -31$;

(d) $S_1 = 4$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = \frac{15}{2}$, $S_5 = \frac{31}{4}$.

10. Seja $\{S_n\}$ a sucessão das somas parciais da série. Então $a_4 = \frac{1}{15}$ e $S_4 = \frac{5}{3}$. A série é convergente e a sua soma é 2.

11. (a) Sucessão $\{s_n\}$ com $s_n = 1 + \dfrac{2}{10} + \dfrac{2}{10^2} + \cdots + \dfrac{2}{10^n} = 1,\underbrace{22\ldots2}_{n \text{ vezes}}$.

    (b) $1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$.

12. (a) Série divergente;
    (b) Série convergente com soma 3;
    (c) Série divergente;
    (d) Série divergente.

13. (a) Série convergente com soma $\sqrt[3]{5} + \sqrt[6]{5} + \sqrt[9]{5} - 3$;

    (b) $u_n = \ln(1 - \dfrac{1}{n^2}) = \ln(\dfrac{n+1}{n}) - \ln(\dfrac{n}{n-1})$, $n \geq 2$: Série convergente com soma $-\ln 2$;

    (c) Série convergente com soma $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$;

    (d) $u_n = \dfrac{1}{n(n+4)} = \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+4})$, $n \geq 1$: Série convergente com soma $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{16}$.

14.

15. (a) Série convergente com soma 5;
    (b) Série divergente;
    (c) Série convergente com soma $\frac{7}{2}$;
    (d) Série convergente com soma $-\frac{21}{8}$;
    (e) Série divergente;
    (f) Série convergente com soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^6}(1 + e^{-n}) + 3^{1-10^6}$;
    (g) Série divergente;
    (h) Série divergente;
    (i) Série divergente.

16. (a) $0,\overline{2} = \dfrac{2}{9}$; (b) $3,\overline{471} = 3 + \dfrac{371}{999}$; (c) $1,\overline{12} = 1 + \dfrac{12}{99}$.

17.

18. Serão emitidas 20000 unidades Roetgen.

19.

20.

21. (a) Série convergente; (b) Série convergente; (c) Série convergente.

22. (a) Série convergente; (b) Série convergente; (c) Série convergente; (d) Série divergente; (e) Série divergente; (f) Série convergente; (g) Série convergente; (h) Série convergente.

23. (a) Série convergente; (b) Série convergente; (c) Série convergente; (d) Série convergente; (e) Série convergente; (f) Série convergente; (g) Inconclusivo; (h) Série convergente; (i) Série convergente; (j) Série convergente.

24. A série diverge.

25. (a) Série convergente; (b) Série convergente; (c) Série convergente.

26. (a) Série convergente; (b) Série convergente; (c) Série convergente; (d) Série convergente; (e) Série divergente; (f) Série convergente; (g) Série convergente; (h) Série convergente; (i) Série convergente.

27. (a) $u_2 = \dfrac{3}{4}, \quad u_3 = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}, \quad u_4 = \dfrac{35}{192}$.
    (b) A afirmação é verdadeira. A sucessão é monótona decrescente.
    (c) A série é convergente.

28. Basta mostrar que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ é convergente (usar o Critério da Raiz).

29.

30. (a) Série convergente;
    (b) O limite é igual a 0, pela condição necessária de convergência.

31. (a) Série convergente.
    (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n+1)}{n} \frac{1}{5^n \sqrt[5]{n+2}} = 0.$

32. (a) $\frac{1}{13!}$; (b) $6^{-\frac{3}{4}}$; (c) $\dfrac{3}{32}$; (d) $\dfrac{1}{16}$.

33. (a) $k = 200$; (b) $k = 3$; (c) $k = 1$.

3.3 Séries de Potências

33. Chamo conjunto de convergência ao conjunto dos pontos onde a série converge.

    (a) Raio de convergência: 1, Intervalo de convergência: $]-1,1[$, Conjunto de convergência: $[-1,1[$;

(b) Raio de convergência: $\frac{1}{3}$, Intervalo de convergência: $]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}[$, Conjunto de convergência: $]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}[$;

(c) Raio de convergência: infinito, Intervalo de convergência: $\mathbb{R}$, Conjunto de convergência: $\mathbb{R}$;

(d) Raio de convergência: 1, Intervalo de convergência: $]-1,1[$, Conjunto de convergência: $[-1,1]$;

(e) Raio de convergência: $\frac{1}{5}$, Intervalo de convergência: $]-\frac{1}{5},\frac{1}{5}[$, Conjunto de convergência: $[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}]$;

(f) Raio de convergência: 1, Intervalo de convergência: $]-1,1[$, Conjunto de convergência: $[-1,1[$;

(g) Raio de convergência: $\frac{1}{2}$, Intervalo de convergência: $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, Conjunto de convergência: $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$;

(h) Raio de convergência: 1, Intervalo de convergência: $]2,4[$, Conjunto de convergência: $[2,4[$;

(i) Raio de convergência: infinito, Intervalo de convergência: $\mathbb{R}$, Conjunto de convergência: $\mathbb{R}$;

(j) Raio de convergência: 0, Conjunto de convergência: $\{0\}$;

(k) Raio de convergência: 2, Intervalo de convergência: $]1,5[$, Conjunto de convergência: $]1,5[$;

(l) Raio de convergência: 3, Intervalo de convergência: $]-3,3[$, Conjunto de convergência: $]-3,3[$;

(m) Raio de convergência: 1, Intervalo de convergência: $]-1,1[$, Conjunto de convergência: $]-1,1]$;

(n) Raio de convergência: $\frac{4}{3}$, Intervalo de convergência: $]-\dfrac{19}{3},-\dfrac{11}{3}[$, Conjunto de convergência: $]-\dfrac{19}{3},-\dfrac{11}{3}[$;

(o) Raio de convergência: 8, Intervalo de convergência: $]-\dfrac{13}{2},\dfrac{19}{2}[$, Conjunto de convergência: $]-\dfrac{13}{2},\dfrac{19}{2}[$.

34. Raio de convergência: $\sqrt{2}$.

35. Intervalo de convergência: $]a-b,a+b[$.

36.

37. (a) Erro menor que $\dfrac{1}{6000}$; (b) Erro menor que $0,0002$; (c) Erro menor que $\dfrac{1}{729}$.

38. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$, Raio de convergência: 1; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{2n-1}}{2n-1}$, Raio de convergência: 1.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{en!}$, Raio de converg.: infinito;

39. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, Raio de convergência: 1;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, Raio de converg.: infinito;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\ln 3)^n x^n}{n!}$, Raio de converg.: infinito;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n}$, Raio de convergência: 1;

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, Raio de converg.: infinito;

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, Raio de convergência: 1.

40. (a) $-\ln(1-x)$, $x \in]-1,1[$;

(b) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $x \in]-1,1[$;

(c) $-\arctan x$, $x \in]-1,1[$.

41. (a) $\frac{1}{(1-x)^2}$, $x \in]-1,1[$;

(b) $\frac{2}{(1-x)^3}$, $x \in]-1,1[$.

42. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n x^n}{n}$, $x \in]-1,1[$ e $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!3^k$, com $k \geq 1$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$ e $f^{(2k+1)}(0) = 1,\ f^{(2k)}(0) = 0$.

43.

44. (a) $e^x - 1 + \frac{e^x}{1-e^x}$, $x \in]-\infty, 0[$;

(b) $e^{(\sin x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sin(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$;

(d) $\arctan(x+1)$, $x \in]-2,0[$.

45. A soma da série é $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

46. Um valor aproximado de $\int_0^1 \cos(x^2)dx$: $\frac{9}{10}$, uma estimativa para o erro da aproximação: $\frac{1}{216}$.

47. (a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320}$;

(b) $1 - \frac{1}{18}$;

(c) $\sum_{n=0}^{8} \frac{(-1)^n}{n!(3n+1)}$.

3.4 Séries de Fourier

48. $a_0 = 1$, $a_n = 1$, $b_n = \begin{cases} 0 & \text{, se } n \text{ é par} \\ \frac{2}{\pi n} & \text{, se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$.

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)x).$$

49. Se $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a soma da série de Fourier, então s é periódica de período 2π e

$$s(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, se } -\pi < x < \pi, x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{, se } x = -\pi, 0 \end{cases}$$

Assim, $s(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin(\frac{\pi}{2}(2n-1))$, ou seja, $1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}$. Daí resulta a igualdade pretendida.

50. Em cada caso, seja $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a soma da série de Fourier. Note-se que s é periódica de período 2π.

(1) $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{2n-1} \sin((2n-1)x)$ e $s(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } -\pi < x < \pi, x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = -\pi, 0 \end{cases}$.

(2) $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$ e $s(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } -\pi < x < \pi \\ 0, & \text{se } x = -\pi \end{cases}$.

(3) $f(x) \sim \frac{1}{2}\cos x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{\pi(4n^2-1)} \sin(2nx)$ e $s(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } -\pi < x < \pi \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x = 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{se } x = -\pi \end{cases}$.

(4) $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ e $s(x) = f(x)$, $-\pi \leq x < \pi$.

51. (a) $f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2} \cos((2n-1)\pi x)$. A soma da série de Fourier é a função f.

(b) Temos $f(1) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2} \cos((2n-1)\pi)$, ou seja,

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Daí resulta a igualdade pretendida.

52.

53. (a) Igual ao exercício 50 (2).

(b) Igual ao exercício 50 (2).

(c) Basta notar que, se $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a soma da série de Fourier, então $s(\frac{\pi}{2}) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(\frac{\pi}{2}n)$, ou seja,

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(2k-1)+1}}{2k-1}(-1)^{k-1} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

Daí resulta a igualdade pretendida.

54. (a)

(b) A série de Fourier de f é a série $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \frac{2\pi(-1)^n}{n} \sin(nx) \right)$.

(c) A soma da série de Fourier é a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período 2π, definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - \pi x, \text{ se } -\pi < x < \pi \\ \pi^2, \text{ se } x = -\pi \end{cases}$$

(d) Basta notar que $g(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi) + \frac{2\pi(-1)^n}{n} \sin(n\pi)$, ou seja,

$$\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n(-1)^n}{n^2}$$

donde $\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$, ou ainda, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

55. (a) A série de Fourier de f é $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nx)$.

(b) A soma da série de Fourier é $f(x)$.