Complementos de Análise Matemática

MI em: Engenharia de Comunicações, Engenharia Electrónica Industrial e Computadores

Exame da Época Especial - 13 de setembro de 2011

Duração: 2 horas

(cotação: 1a) 3,5 valores, 1b) 1,5 valores)

1a) Determinar uma solução do PVI

$$\left(2xy^3 - e^{-x}\right)dx + \left(3x^2y^2 - e^y\right)dy = 0, \quad x > 0; \quad y(0) = 0,$$

e mostrar que a solução obtida verifica-o formalmente;

1b) Relativamente à EDO $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2} + 1$, mostrar que:

i) é homogénea;
ii) não é linear, independentemente da variável independente considerada.

(cotação: 2a) 1,5 valores, 2b) 3,5 valores)

2a) Considerar a EDO $y''' - y' = 0$. Determinar três funções linearmente independentes que sejam solução desta EDO e escrever a respetiva solução geral;

2b) Determinar a solução geral da EDO $y''' - y'' + 4y' - 4y = 5e^x - x^2$, sabendo que as funções e^x, $\operatorname{sen} 2x$ e $\cos 2x$ são soluções da equação homogénea associada.

(cotação: 2a) 1,5 valores, 2b) 3,5 valores)

3a) Considerar a função

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}.$$

Determinar a respetiva transformada de Laplace $F(s)$, sem usar a definição de transformada de Laplace, e indicando para que valores de s é que a transformada é válida.

3b) Determinar a solução do seguinte sistema usando a transformada de Laplace

$$\begin{aligned} &y' + 2x' + 2y = 6e^{3t} - 2 \\ &2y' + x' + x = 4e^{3t} - 4e^{-2t} - 1 \\ &x(0) = 0, \ y(0) = 0 \end{aligned},$$

onde t é a variável independente, e mostrar que a solução obtida verifica as condições iniciais dadas.

(cotação: 3a) 1,5 valores, b) 3,5 valores)

4a) Averiguar se $\lambda = 4$ é um valor próprio da EDO $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 1$ e, em caso afirmativo, determinar a respectiva função própria;

4b) Determinar a solução do seguinte problema usando o método de separação de variáveis,

$$u(x,t) \ : \ \begin{cases} x(u_x + u_t) = u, & x, t > 0 \\ u(x,0) = 7xe^{3x} - 5x, & x > 0 \end{cases}.$$