João Miguel Clemente de Sena Esteves

Análise de Circuitos

Guimarães, Janeiro de 2008

Análise de Circuitos I

Apresentação

A capacidade de analisar circuitos eléctricos é indispensável a qualquer licenciado em Engenharia Electrónica Industrial e Computadores.

Nesta unidade curricular introduzem-se alguns métodos básicos de análise de circuitos eléctricos de corrente contínua.

Objectivos da unidade curricular

Analisar um circuito eléctrico é reconhecer as leis físicas que são impostas ao circuito por cada um dos seus componentes, as leis físicas que são impostas aos componentes pelo próprio circuito e os efeitos – em cada componente e na globalidade do circuito – da coexistência dessas leis. Em concreto, depois de frequentar a disciplina os alunos deverão ser capazes de:

- analisar o estado estacionário de circuitos eléctricos de corrente contínua alimentados por fontes lineares de energia;

- analisar o estado transitório de circuitos RC e RL de primeira ordem;

- calcular a tensão, a corrente e a potência em jogo em cada elemento de um circuito eléctrico.

Pré-requisitos

Para obter um rendimento satisfatório nas aulas de Análise de Circuitos I, os alunos devem possuir conhecimentos elementares de electricidade e também de cálculo diferencial e integral. Recomenda-se que tenham frequentado, previamente, a unidade curricular de Introdução à Electrónica.

Programa

1. ***Revisão de Conceitos Fundamentais***
   - Corrente eléctrica, potencial eléctrico e tensão;
   - Condutor ideal;
   - Circuito aberto;
   - Resistência e Lei de Ohm;
   - Energia e potência;
   - Série eléctrica e paralelo eléctrico;
   - Divisor de tensão;
   - Divisor de corrente;

2. ***Fontes de Energia***
   - Fonte ideal de tensão;
   - Fonte ideal de corrente;
   - Fontes ideais em série;
   - Fontes ideais em paralelo;
   - Fontes lineares de energia;
   - Aproximação de uma fonte linear de energia a uma fonte ideal de tensão ou a uma fonte ideal de corrente;
   - Fontes independentes e fontes dependentes;
   - Transferência máxima de potência de uma fonte para uma carga resistiva.

3. ***Métodos de Análise de Circuitos***
   - Leis de Kirchoff;
   - Método das Correntes Fictícias;
   - Método das Tensões Nodais;
   - Princípio da Sobreposição;
   - Teorema de Thévenin;
   - Teorema de Norton.

4. ***Dispositivos de Armazenamento de Energia***
   - Condensador ideal;
   - Bobina ideal;
   - Circuitos com resistências e condensadores;
   - Circuitos com resistências e bobinas;
   - Constante de tempo de um circuito.

Elementos de Estudo

- Meireles, Vítor; ***Circuitos Eléctricos****;* LIDEL – Edições técnicas, LDA, Outubro de 2001.
- Scott, Donald E.; ***An Introduction to Circuit Analysis – A Systems Approach****;* McGraw-Hill, 1987.
- Hayt, William e Kemmerly, J.; ***Engineering Circuit Analysis****;* McGraw Hill, 1987.
- Boylstead, Robert L.; ***Introductory Circuit Analysis (8ª ed.)****;* Prentice Hall, 1997.
- Nilsson, James W. e Riedel, Susan A.; ***Electric Circuits (5ª ed.)****;* Addison-Wesley, 1996.

Exigência nas Aulas e na Avaliação

- A matéria não é muita e **o grau de exigência é elevado**.
- Ser-se-á **muito exigente** quanto a **conceitos básicos**.
- Há algumas **condições suficientes de reprovação**.

Regente:	João Sena Esteves
E-mail:	sena@dei.uminho.pt
Telefone:	Ext. 510386
Horário de atendimento:	Quarta-Feira, das 11h às 13h
Local de atendimento:	Gabinete B2-034

1. Corrente Eléctrica, Potencial Eléctrico e Tensão

A **corrente eléctrica** (**I**) tem como unidade o **ampere** (**A**).

O **potencial eléctrico** que existe num ponto A (**U_A**) tem como unidade o **volt** (**V**).

A **diferença de potencial**, **queda de tensão** ou simplesmente **tensão** que existe entre um ponto A e um ponto B (**U_{AB}**) tem como unidade o **volt** (**V**) e é dada por

$$\boxed{U_{AB} = U_A - U_B}$$

Diz-se (porque é verdade) que...

- uma **corrente eléctrica *passa* num componente** de um circuito.
- um **potencial eléctrico *existe num* ponto**.
- uma **tensão *existe entre* dois pontos**.

Notações:

- Usam-se **setas rectas** para indicar os sentidos de **correntes eléctricas**.
- Usam-se **setas curvas** para indicar os sentidos de **quedas de tensão**.

O **sentido verdadeiro da corrente eléctrica** que passa num componente de um circuito eléctrico é o oposto ao do movimento dos electrões que constituem essa corrente.

- Em Física, o **sentido real da corrente eléctrica** que passa num componente de um circuito eléctrico é o do movimento dos electrões que constituem essa corrente; o **sentido convencional da corrente eléctrica** é o oposto ao desse movimento. Assim, o **sentido verdadeiro da corrente eléctrica**, usado em Electrotecnia e em Electrónica, coincide com o **sentido convencional da corrente eléctrica** usado em Física.

O **sentido positivo da corrente eléctrica** que passa num componente é convencionado, podendo coincidir ou não com o sentido verdadeiro da corrente.

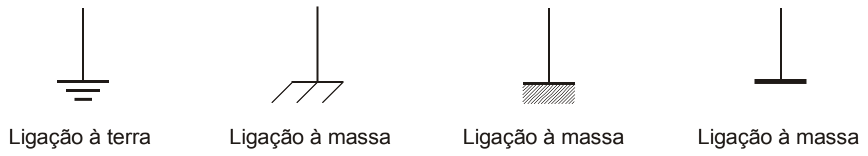
Um **receptor eléctrico** tem sempre **dois ou mais terminais**. Num receptor eléctrico de dois terminais, a corrente que entra por um dos terminais é a mesma que sai pelo outro.

Receptor eléctrico de dois terminais

O potencial eléctrico que existe num ponto só fica determinado se estiver definida uma referência para os potenciais eléctricos. Por definição, o valor do potencial eléctrico de referência é zero.

Pode escolher-se, arbitrariamente, o potencial de qualquer ponto de um circuito eléctrico como referência para os potenciais eléctricos. Em geral, a escolha da referência faz-se por forma a simplificar a análise do circuito.

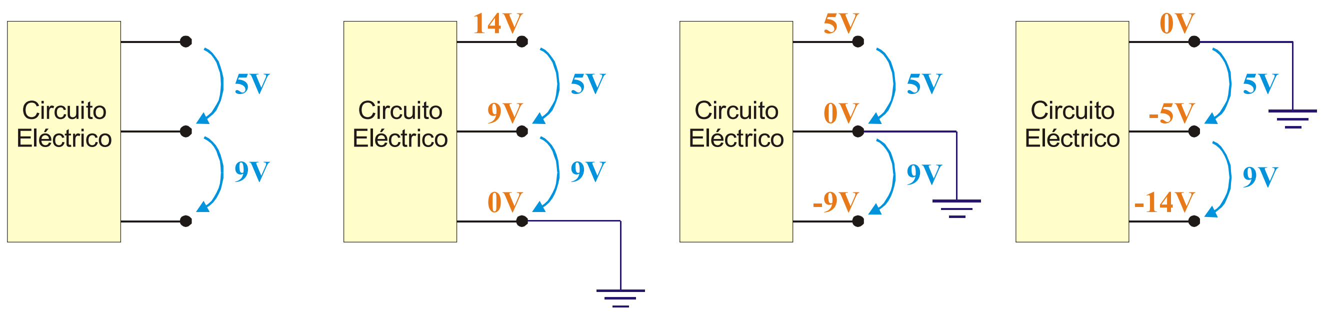
É frequente usar o potencial da **terra** ou o potencial da **massa** (*chassis*) dos aparelhos eléctricos como referência para os potenciais eléctricos.



O **potencial eléctrico que existe num ponto** tem o valor da queda de tensão existente entre esse ponto e o ponto cujo potencial é usado como referência para os potenciais eléctricos.

O **potencial eléctrico que existe num ponto** depende da referência escolhida para os potenciais eléctricos e pode assumir qualquer valor.

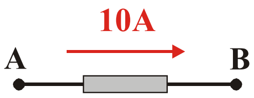
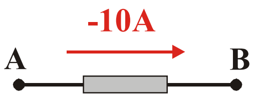
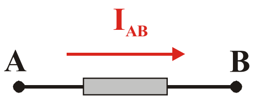
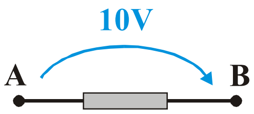
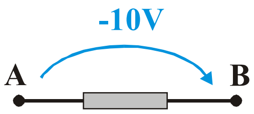
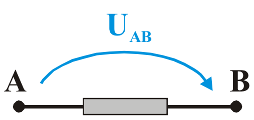
A **diferença de potencial** ou **tensão** existente entre dois pontos tem um valor que não depende da referência escolhida para os potenciais eléctricos.



O **sentido verdadeiro da queda de tensão** existente entre dois pontos é do ponto de potencial superior para o ponto de potencial inferior.

O **sentido positivo da queda de tensão** existente entre dois pontos é convencionado, podendo coincidir ou não com o sentido verdadeiro da queda de tensão.

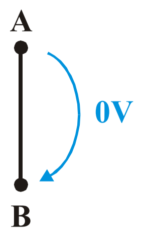
Para correntes e tensões **constantes**...

	- A seta indica o **sentido verdadeiro da corrente** que atravessa o receptor eléctrico. - Dentro do receptor, a corrente vai do terminal A para o terminal B. - A corrente que atravessa o receptor tem um valor de 10A.
	- A seta indica o **sentido positivo da corrente** que atravessa o receptor eléctrico. - Dentro do receptor, a corrente vai do terminal B para o terminal A. - A corrente que atravessa o receptor tem um valor de 10A.
	- A seta indica o **sentido positivo da corrente** que atravessa o receptor eléctrico. - Se, dentro do receptor, a corrente for do terminal A para o terminal B, então o sentido positivo da corrente coincide com o sentido verdadeiro da corrente e $I_{AB}>0$.
	- A seta indica o **sentido verdadeiro da queda de tensão** existente entre os terminais A e B do receptor eléctrico. - O potencial no terminal A é superior ao potencial no terminal B. - Entre os terminais A e B existe uma diferença de potencial de 10V.
	- A seta indica o **sentido positivo da queda de tensão** existente entre os terminais A e B do receptor eléctrico. - O potencial no terminal B é superior ao potencial no terminal A. - Entre os terminais A e B existe uma diferença de potencial de 10V.
	- A seta indica o **sentido positivo da queda de tensão** existente entre os terminais A e B do receptor eléctrico. - Se o potencial no terminal A for superior ao potencial no terminal B, então o sentido positivo da queda de tensão coincide com o sentido verdadeiro da queda de tensão e $U_{AB}>0$.

Nota: Para manter os desenhos simples, **não se representa o resto do circuito, que está ligado aos terminais A e B**. Sem esse circuito não poderiam existir as correntes representadas.

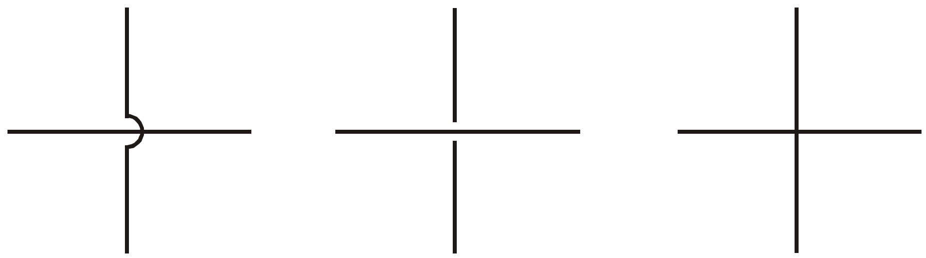
2. Condutor Ideal

Um **condutor ideal** mantém uma **tensão de 0V entre os seus terminais**, independentemente do valor e do sentido da corrente que o atravessa. Todos os seus pontos estão **sempre ao mesmo potencial**.

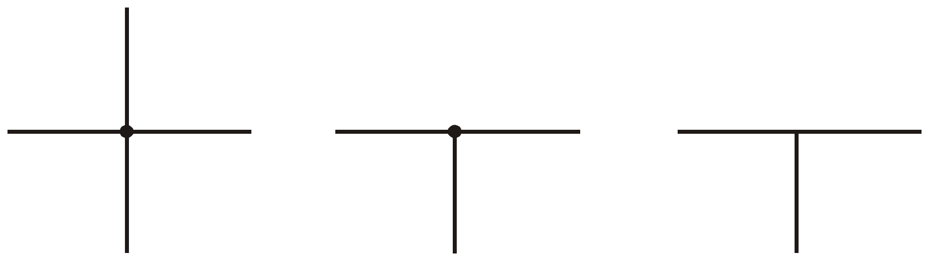


Ao ligar um condutor ideal entre dois pontos provoca-se um **curto-circuito** entre esses pontos. Mas ***condutor ideal*** e ***curto-circuito*** não são sinónimos, uma vez que é possível provocar um curto-circuito entre dois pontos com um condutor não ideal.

Representação de dois **condutores ideais isolados** um do outro:

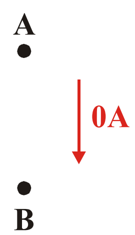


Representação de dois **condutores ideais ligados** um ao outro:



3. Circuito Aberto

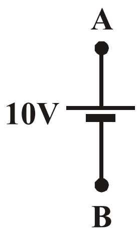
Um **circuito aberto entre dois pontos** é atravessado por uma **corrente de 0A**, independentemente do valor e do sentido da tensão que existe entre esses pontos.

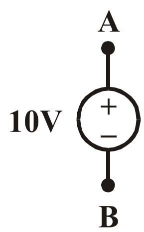


4. Fonte Ideal de Tensão

Entre os terminais de uma **fonte ideal de tensão** existe uma tensão cuja evolução ao longo do tempo não depende do valor da corrente debitada pela fonte.

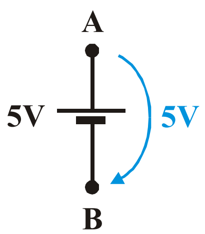
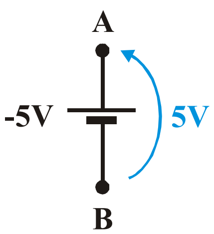
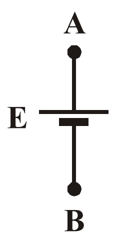
Uma **fonte ideal de tensão constante** tem **sempre a mesma tensão** entre os seus terminais, independentemente da corrente que debita ou do instante considerado.





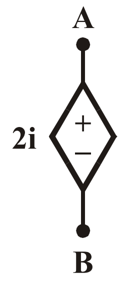
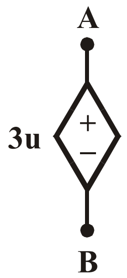
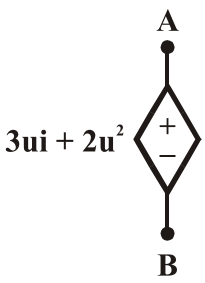
- O sentido e o valor da corrente que atravessa a fonte dependem do circuito ao qual se liga a fonte.

- Um **condutor ideal** é equivalente a uma **fonte ideal de tensão de 0V**.

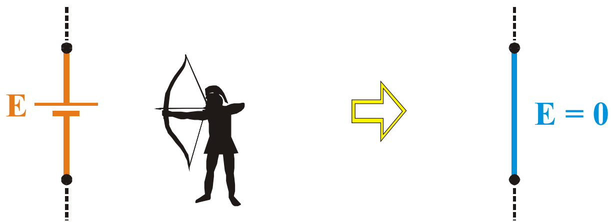
	- Entre os terminais A e B da fonte existe uma diferença de potencial de 5V. - O potencial no terminal A é superior ao potencial no terminal B.
	- Entre os terminais A e B da fonte existe uma diferença de potencial de 5V. - O potencial no terminal B é superior ao potencial no terminal A.
	- Se o potencial no terminal A for superior ao potencial no terminal B, então E > 0.

Numa **fonte ideal de tensão independente**, o valor da tensão que existe entre os seus terminais não depende do circuito no qual a fonte se insere.

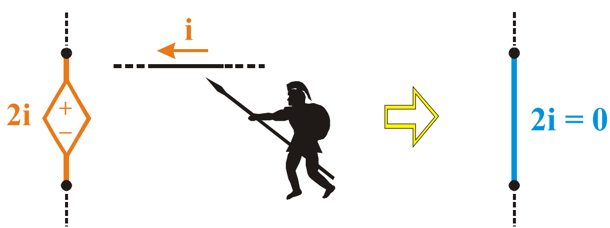
Numa **fonte ideal de tensão dependente** (ou **controlada**), o valor da tensão que existe entre os seus terminais é determinado (ou controlado) por tensões ou correntes existentes no circuito em que a fonte se insere.

	- Entre os terminais A e B da fonte existe uma diferença de potencial cujo valor é o dobro do valor da corrente **i**. - Se **i > 0**, então o potencial no terminal A é superior ao potencial no terminal B.
	- Entre os terminais A e B da fonte existe uma diferença de potencial cujo valor é o triplo do valor da tensão **u**. - Se **u > 0**, então o potencial no terminal A é superior ao potencial no terminal B.
	- Entre os terminais A e B da fonte existe uma diferença de potencial cujo valor é o triplo do produto dos valores da tensão **u** e da corrente **i** mais o dobro do quadrado do valor da tensão **u**. - Se $\mathbf{3ui + 2u^2 > 0}$, então o potencial no terminal A é superior ao potencial no terminal B.

Desactivar uma fonte ideal de tensão corresponde a anular a tensão que caracteriza essa fonte. A fonte desactivada é equivalente a um condutor ideal.



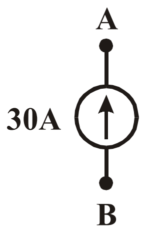
A tensão que existe entre os terminais de uma **fonte ideal de tensão dependente** só pode ser anulada por actuação sobre as tensões e correntes que determinam essa tensão.



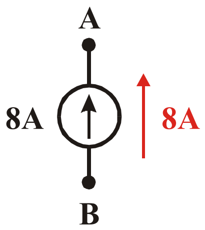
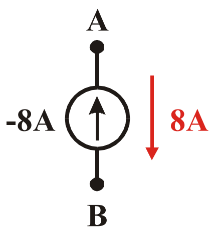
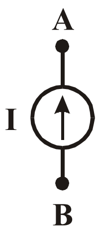
5. Fonte Ideal de Corrente

A corrente debitada por uma **fonte ideal de corrente** tem uma evolução ao longo do tempo que não depende do valor da tensão existente entre os terminais da fonte.

Uma **fonte ideal de corrente constante** debita **sempre a mesma corrente**, independentemente da tensão que existe entre os seus terminais ou do instante considerado.

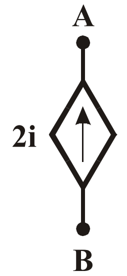
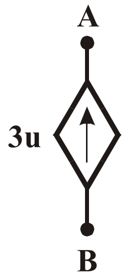
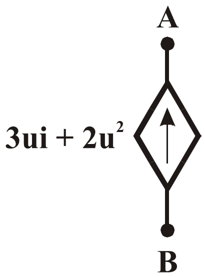


- O sentido e o valor da tensão existente entre os terminais da fonte dependem do circuito ao qual se liga a fonte.
- Um **circuito aberto** é equivalente a uma **fonte ideal de corrente de 0A**.

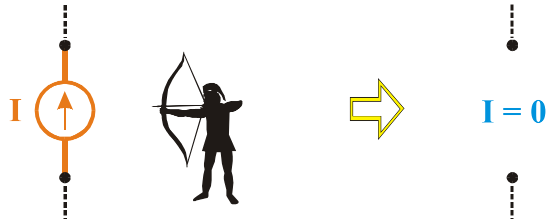
	- A corrente debitada pela fonte tem um valor de 8A. - Dentro da fonte, a corrente vai do terminal B para o terminal A.
	- A corrente debitada pela fonte tem um valor de 8A. - Dentro da fonte, a corrente vai do terminal A para o terminal B.
	- Se, dentro da fonte, a corrente for do terminal B para o terminal A, então $I > 0$.

Numa **fonte ideal de corrente independente**, o valor da corrente debitada pela fonte não depende do circuito no qual a fonte se insere.

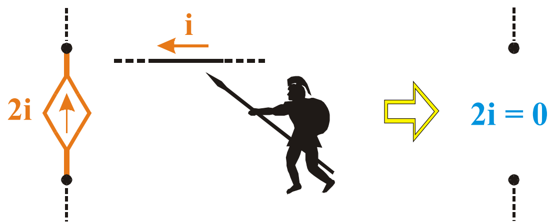
Numa **fonte ideal de corrente dependente** (ou **controlada**), o valor da corrente debitada pela fonte é determinado (ou controlado) por tensões ou correntes existentes no circuito em que a fonte se insere.

	- A fonte debita uma corrente cujo valor é o dobro do valor da corrente **i**. - Se $\mathbf{i > 0}$ então, dentro da fonte, a corrente vai do terminal B para o terminal A.
	- A fonte debita uma corrente cujo valor é o triplo do valor da tensão **u**. - Se $\mathbf{u > 0}$ então, dentro da fonte, a corrente vai do terminal B para o terminal A.
	- A fonte debita uma corrente cujo valor é o triplo do produto dos valores da tensão **u** e da corrente **i** mais o dobro do quadrado do valor da tensão **u**. - Se $\mathbf{3ui + 2u^2 > 0}$ então, dentro da fonte, a corrente vai do terminal B para o terminal A.

Desactivar uma fonte ideal de corrente corresponde a anular a corrente que caracteriza essa fonte. A fonte desactivada é equivalente a um circuito aberto.



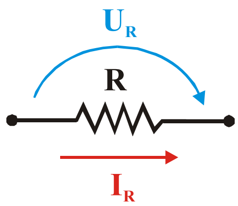
A corrente que percorre uma **fonte ideal de corrente dependente** só pode ser anulada por actuação sobre as tensões e correntes que determinam essa corrente.



6. Resistência e Lei de Ohm

Uma **resistência** é atravessada por uma **corrente que é proporcional à tensão** aplicada entre os seus terminais, ou seja

$$\boxed{\frac{U_R}{I_R} = \text{constante}}$$



A **resistência eléctrica** (**R**) tem como unidade o **ohm** (**Ω**). O seu valor depende apenas do material do qual a resistência é feita, das suas dimensões e do percurso seguido pela corrente no seu interior. Para os sentidos positivos de $\mathbf{U_R}$ e de $\mathbf{I_R}$ indicados na figura, o valor de **R** pode determinar-se experimentalmente recorrendo à expressão

$$\boxed{R = \frac{U_R}{I_R}}$$

<u>Lei de Ohm</u>

A **Lei de Ohm** aplica-se **exclusivamente às resistências** (por exemplo, não se aplica nem às fontes ideais de tensão nem às fontes ideais de corrente).

Um **condutor ideal** pode ser visto como uma **resistência de valor nulo**

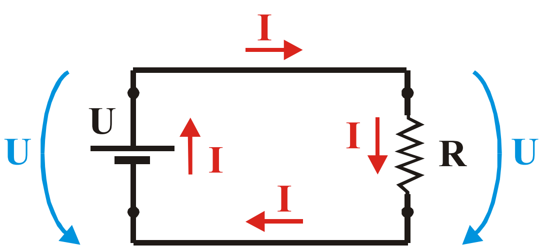
- como R=0, então a tensão entre os terminais do condutor ideal é nula, independentemente do valor e do sentido da corrente que o percorre.

Um **circuito aberto entre dois pontos** pode ser visto como uma **resistência de valor infinito**

- como $R = \infty$, então a corrente que a atravessa é nula, independentemente do valor e do sentido da tensão que existe entre os seus terminais.

Em qualquer resistência de valor finito não nulo

- a **corrente** flui **sempre** do terminal de **potencial mais alto** para o terminal de **potencial mais baixo**;
- o **valor da corrente** depende do **valor da tensão** que existe entre seus terminais;
- a corrente é nula se não houver tensão entre os seus terminais;
- a tensão entre seus terminais é nula se não for atravessada por nenhuma corrente.



- <u>**dentro da resistência**</u>, a corrente flui do terminal de **potencial mais alto** para o terminal de **potencial mais baixo**;
- <u>**fora da fonte**</u>, a corrente flui do terminal de **potencial mais alto** para o terminal de **potencial mais baixo**;
- <u>**dentro da fonte**</u>, a corrente flui do terminal de **potencial mais baixo** para o terminal de **potencial mais alto**.

7. Energia e Potência

Um componente inserido num circuito pode receber energia do circuito ou fornecer energia ao circuito. A **energia** recebida ou fornecida pelo componente tem como unidade o **joule** (**J**). Em Electrotecnia também é frequente usar como unidade de energia o **quilowatt-hora** (**kWh**):

$$\boxed{1\text{kWh} = 1000 \cdot 3600\underbrace{\text{Ws}}_{\text{J}} = 3600000\text{J} = 3600\text{kJ} = 3{,}6\text{MJ}}$$

Um componente de um circuito **recebe energia do circuito** se, dentro desse componente, a corrente fluir do terminal de **potencial mais alto** para o terminal de **potencial mais baixo**.

Um componente de um circuito **fornece energia ao circuito** se, dentro desse componente, a corrente fluir do terminal de **potencial mais baixo** para o terminal de **potencial mais alto**.

A **potência em jogo num componente de um circuito** é a derivada em ordem ao tempo da energia recebida ou fornecida pelo componente ao circuito e tem como unidade o **watt** (**W**). O seu valor (em watts) é igual ao produto do valor da **tensão** que existe entre os terminais desse componente (em volts) pelo valor da **corrente** que o atravessa (em amperes). Em circuitos de corrente contínua:

$$\boxed{P = U \cdot I}$$

Numa **resistência**:

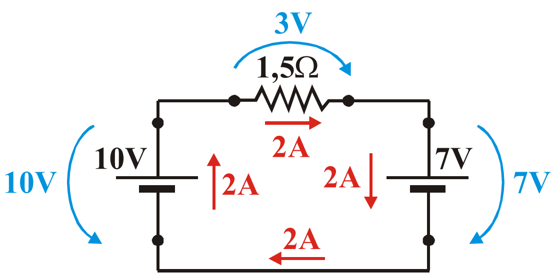
$$P_R = U_R \cdot I_R = \underbrace{(R \cdot I_R)}_{U_R} \cdot I_R = R \cdot I_R^2$$

$$P_R = U_R \cdot I_R = U_R \cdot \underbrace{\left(\frac{U_R}{R}\right)}_{I_R} = \frac{U_R^2}{R}$$

Efeito de Joule: Uma resistência constante **R** (em ohm) atravessada por uma corrente constante **I** (em ampere) durante um intervalo de tempo **Δt** (em segundos) liberta sob a forma de calor uma energia **W** (em joule) dada por

$$\boxed{W = R \cdot I^2 \cdot \Delta t}$$

Exemplo



- dentro da resistência, a corrente flui do terminal de **potencial mais alto** para o terminal de **potencial mais baixo**, por isso a resistência **recebe energia do circuito**.

  Potência em jogo na **resistência**: $P = 3 \cdot 2 = 6\text{W}$

- dentro da fonte de 10V, a corrente flui do terminal de **potencial mais baixo** para o terminal de **potencial mais alto**, por isso a fonte **fornece energia ao circuito**.

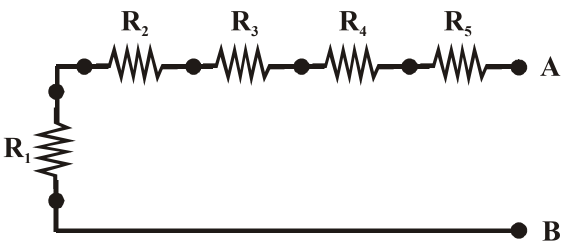
  Potência em jogo na **fonte de 10V**: $P = 10 \cdot 2 = 20\text{W}$

- dentro da fonte de 7V, a corrente flui do terminal de **potencial mais alto** para o terminal de **potencial mais baixo**, por isso a fonte **recebe energia do circuito**.

  Potência em jogo na **fonte de 7V**: $P = 7 \cdot 2 = 14\text{W}$

8. Série Eléctrica e Paralelo Eléctrico

Dois componentes estão **em série** quando são atravessados pela **mesma corrente**.

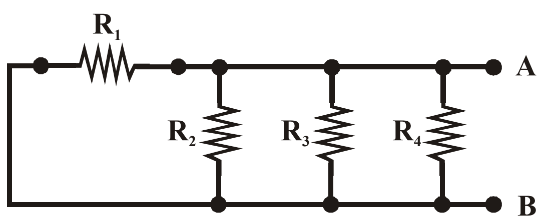


R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 estão em série.

R_{AB} (resistência medida entre os terminais A e B) é **superior à maior das resistências**, e <u>aumenta</u> se se colocar mais alguma resistência em série com as outras.

$$R_{AB} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = \sum_{i=1}^{5} R_i$$

Dois componentes estão **em paralelo** quando estão submetidos à **mesma tensão**.



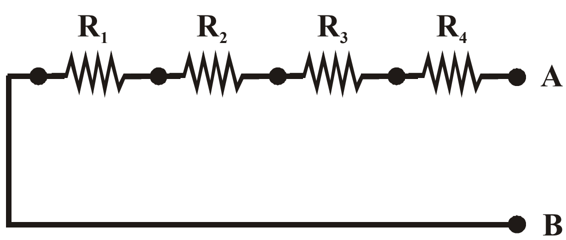
R_1, R_2, R_3 e R_4 estão em paralelo.

R_{AB} (resistência medida entre os terminais A e B) é **inferior à menor das resistências**, e <u>diminui</u> se se colocar mais alguma resistência em paralelo com as outras.

$$R_{AB} = R_1 \,//\, R_2 \,//\, R_3 \,//\, R_4$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{R_i}$$

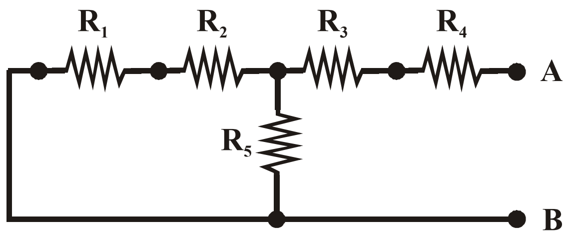
- Dois componentes em série podem não ter nenhum terminal comum.



R_1 e R_4 estão em série mas não possuem nenhum terminal comum.

$$R_{AB} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

- Dois componentes com um terminal comum podem não estar em paralelo e também não estar em série.



R_1 está em série com R_2

R_3 está em série com R_4

R_2 não está em série com R_3

R_2 não está em série com R_5

R_5 está em paralelo com a série formada por R_1 e R_2

$$R_{AB} = [(R_1 + R_2) // R_5] + R_3 + R_4$$

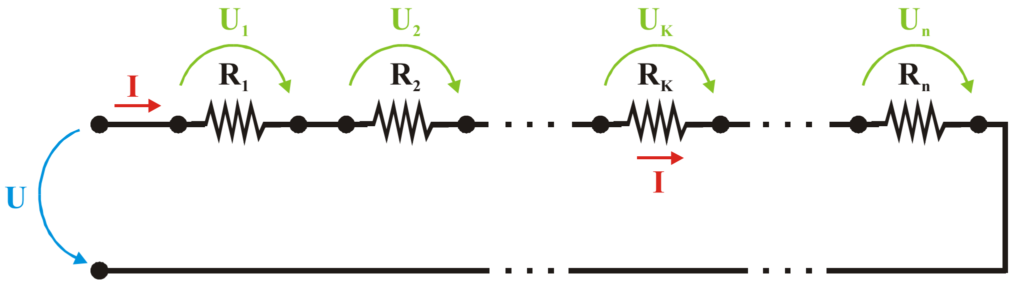
- Uma **fonte ideal de tensão:**
  - **pode estar em vazio** (ou seja, colocada **em série com um circuito aberto**), sendo atravessada por uma **corrente nula**;
  - **não pode ser curto-circuitada com um condutor ideal** (ou seja, colocada **em paralelo com um condutor ideal**);
  - **pode** ser colocada **em série com uma ou mais fontes ideais de tensão**, independentemente dos valores das tensões das outras fontes;
  - **só pode** ser colocada **em paralelo** com outra fonte ideal de tensão que possua uma **tensão de igual valor** aos seus terminais.

- Uma **fonte ideal de corrente:**
  - **pode ser curto-circuitada com um condutor ideal,** possuindo uma **tensão nula** entre os seus terminais;
  - **não pode estar em vazio**;
  - **pode** ser colocada **em paralelo com uma ou mais fontes ideais de corrente**, independentemente dos valores das correntes das outras fontes;
  - **só pode** ser colocada **em série** com outra fonte ideal de corrente que debite uma **corrente de igual valor**;
  - apresenta nos seus terminais uma **tensão** cujos **sentido** e **valor dependem do circuito alimentado pela fonte**.

Dualidade...

Tensão	**Série**	**Em vazio**
Corrente	**Paralelo**	**Em curto-circuito**

9. Divisor de Tensão



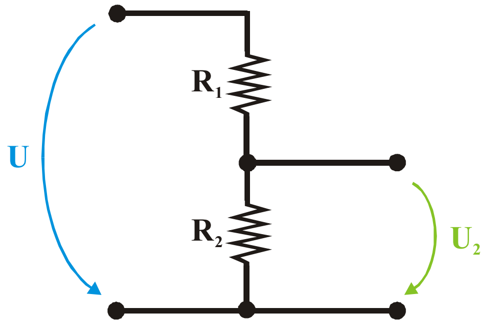
$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_k + \ldots + U_n$$
$$= R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + \ldots + R_k \cdot I + \ldots + R_n \cdot I$$
$$= \left(R_1 + R_2 + \ldots + R_k + \ldots + R_n\right) \cdot I$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right) \cdot I$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{U}{\sum_{i=1}^{n} R_i}$$

$$U_k = R_k \cdot I$$

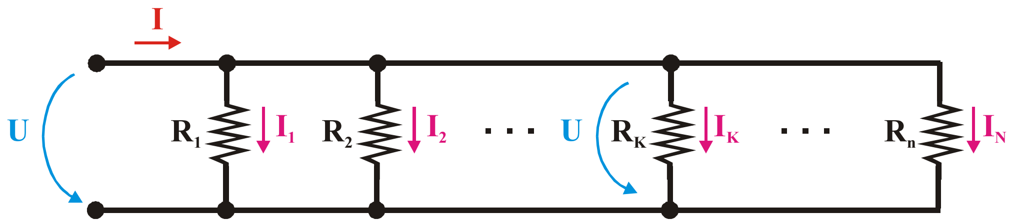
$$\Rightarrow \quad I = \frac{U_k}{R_k}$$

$$\boxed{U_k = \frac{R_k}{\sum_{i=1}^{n} R_i} \cdot U}$$



$$\boxed{U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U}$$

10. Divisor de Corrente



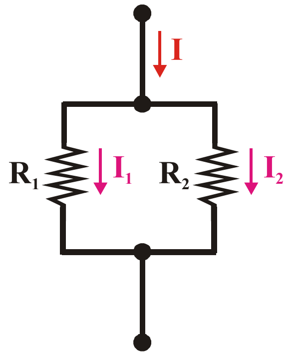
$$
\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 + \ldots + I_k + \ldots + I_n \\
&= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \ldots + \frac{U}{R_k} + \ldots + \frac{U}{R_n} \\
&= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_k} + \ldots + \frac{1}{R_n} \right) \cdot U \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \right) \cdot U
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad U = \frac{I}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}
$$

$$
I_k = \frac{1}{R_k} \cdot U
$$

$$
\Rightarrow \quad U = \frac{I_k}{\dfrac{1}{R_k}}
$$

$$
\boxed{I_k = \frac{\dfrac{1}{R_k}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} \cdot I}
$$



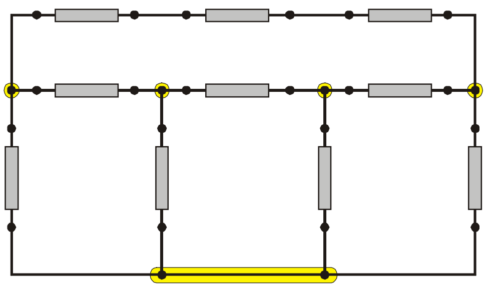
$$
\boxed{I_2 = \frac{\dfrac{1}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} \cdot I} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I}
$$

11. Ramos, Nós e Malhas de um Circuito

Um ***ramo*** de um circuito é constituído por **um componente** (que não seja um condutor ideal) ou um **conjunto de componentes ligados em série**. Os seus terminais estão ligados aos ***nós*** do circuito.

Um ***nó*** de um circuito é um ponto (ou um conjunto de pontos com o mesmo potencial eléctrico) onde estão ligados **três ou mais ramos**.

Uma ***malha*** de um circuito é um **conjunto de componentes** ligados entre si formando um **circuito electricamente fechado**.



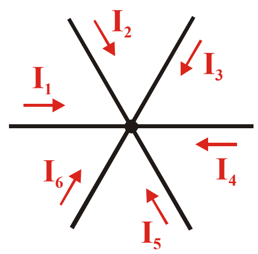
Este circuito tem:

- 8 ramos
- 5 nós
- Quantas malhas?...

12. Leis de Kirchoff

Lei dos Nós: o somatório de todas as correntes que confluem num nó é nulo.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} I_i = 0}$$

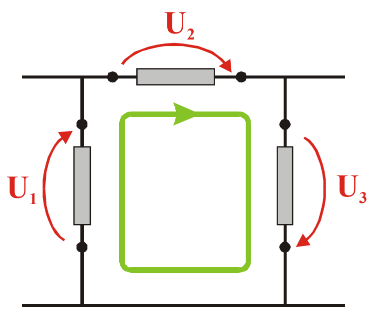


Lei das Malhas: o somatório de todas as tensões consideradas num mesmo sentido ao longo de uma malha é nulo.

Antes de escrever a equação de uma malha é preciso determinar:

- o sentido em que se irá percorrer a malha;
- o ponto de partida/chegada;
- se se consideram positivas as subidas ou as descidas de potencial.

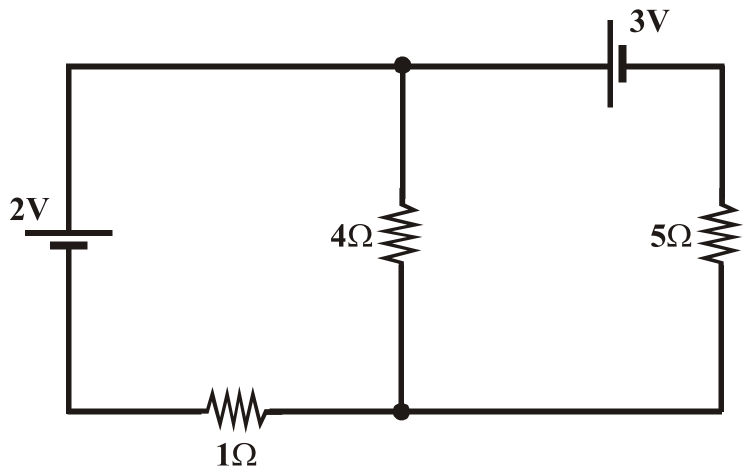
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} U_i = 0}$$



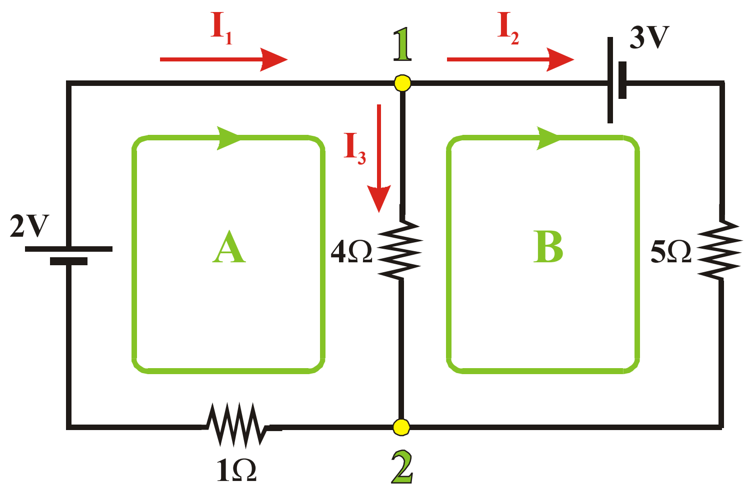
Algoritmo para calcular as correntes nos ramos de um circuito usando as Leis de Kirchoff

1. Identificar os **R ramos** e **N nós** do circuito;
2. Arbitrar o **sentido positivo da corrente em cada ramo**;
3. Identificar **R – (N – 1) malhas independentes** e escrever as respectivas equações, recorrendo à **Lei das Malhas**;
4. Escrever as equações de **N – 1 nós**, recorrendo à **Lei dos Nós**;
5. Resolver um **sistema de equações (de ordem R)** para obter as correntes nos ramos do circuito.

Exemplo: Determinar as correntes nos ramos do circuito.



Resolução:



$$\text{Resolver o sistema} \begin{cases} 4\cdot I_3 + 1\cdot I_1 - 2 = 0 & \text{(malha A)} \\ 3 + 5\cdot I_2 - 4\cdot I_3 = 0 & \text{(malha B)} \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0 & \text{(nó 1)} \end{cases}$$

13. Método das Correntes Fictícias

Algoritmo para determinar as correntes nos ramos de um circuito usando correntes fictícias

1. Identificar **R – (N – 1) malhas independentes** no circuito.

2. Atribuir **uma corrente fictícia a cada malha** escolhida.

   - Em cada ramo do circuito deve passar, pelo menos, uma corrente fictícia.
   - O número de correntes fictícias requerido é igual a R – (N – 1).
   - Uma corrente fictícia só é a corrente de um ramo se essa corrente fictícia for a única corrente nesse ramo.
   - Não se pode atribuir a mesma combinação de correntes fictícias a ramos diferentes.
     - Em particular: Se uma corrente fictícia é a única corrente num ramo, então essa corrente fictícia não pode ser a única corrente noutro ramo.
   - Num ramo com uma fonte ideal de corrente só deve passar uma corrente fictícia.

3. Escrever directamente o valor das correntes fictícias que passam nas fontes ideais de corrente.

4. Escrever as **equações das malhas que não contêm fontes ideais de corrente**.

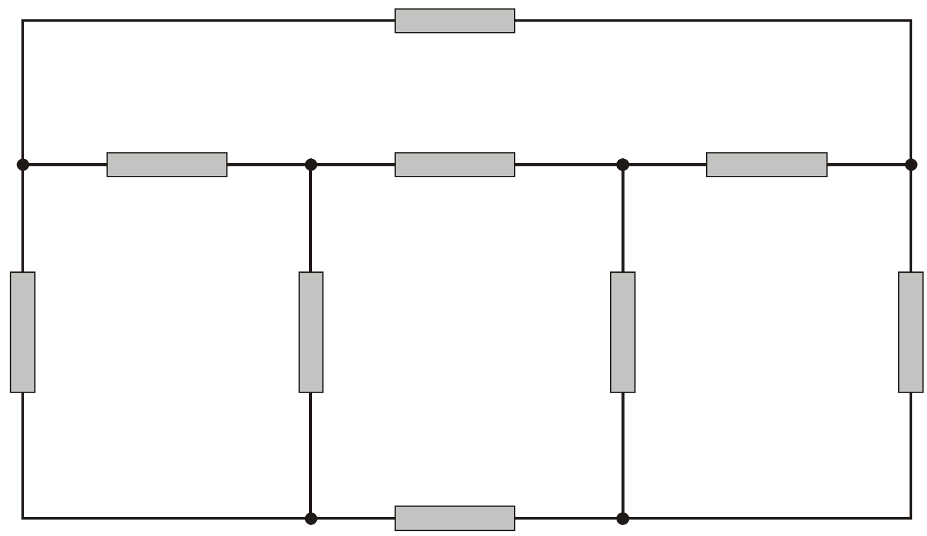
5. Resolver um **sistema de equações de ordem R – (N – 1) – C** para determinar todas as correntes fictícias.

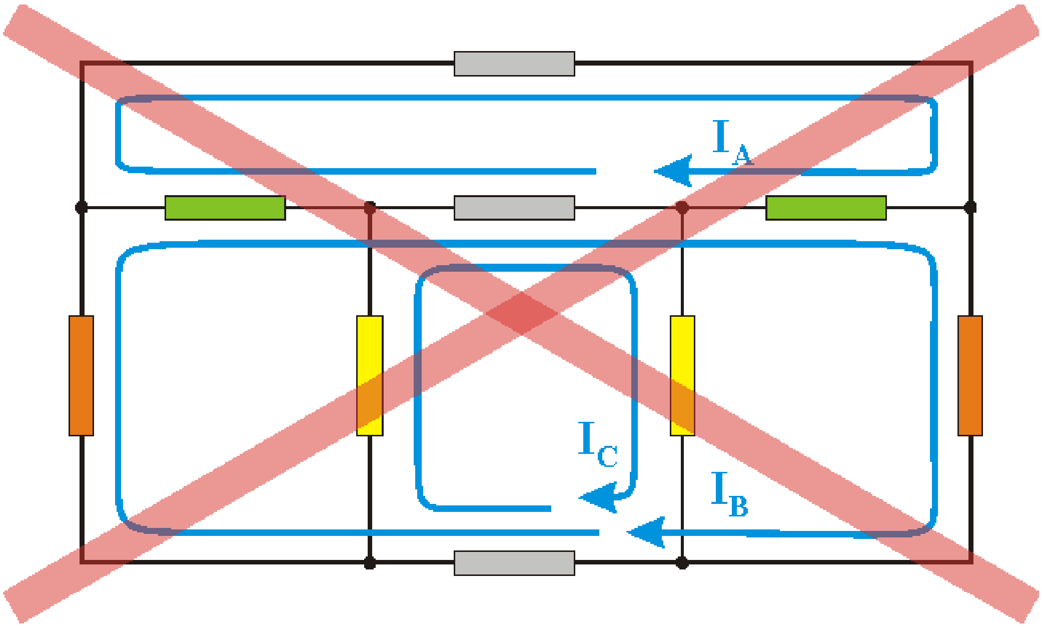
6. Calcular as **correntes nos ramos** a partir das correntes fictícias.

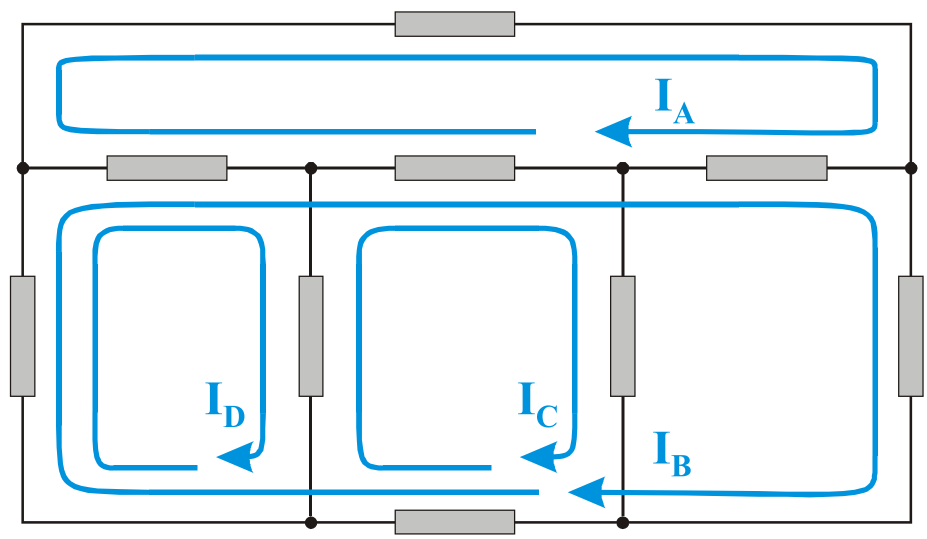
R – número de ramos;

N – número de nós;

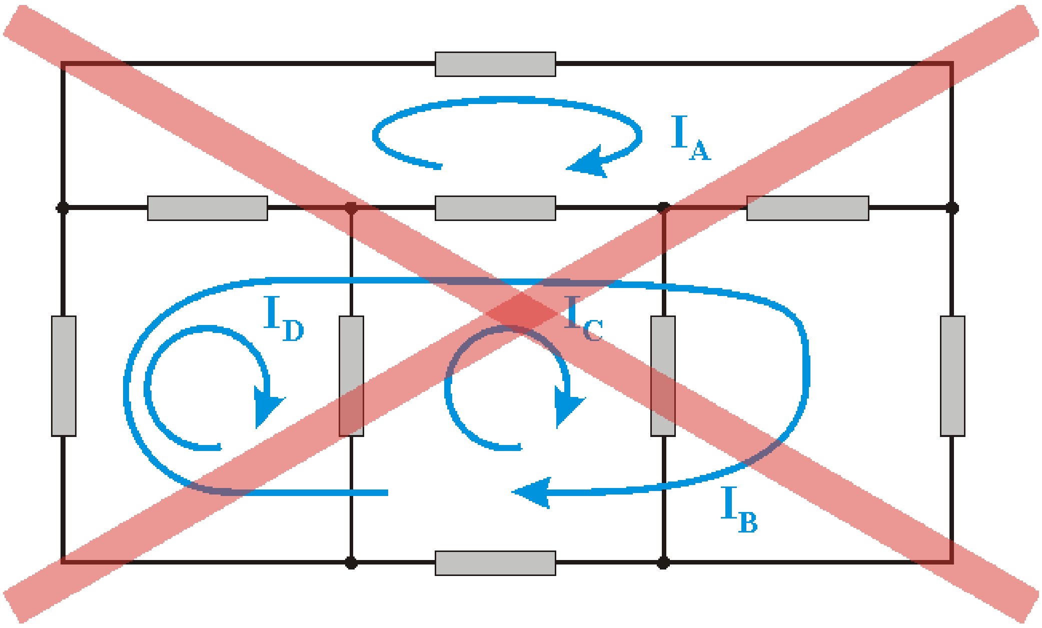
C – número de ramos com fontes ideais de corrente.

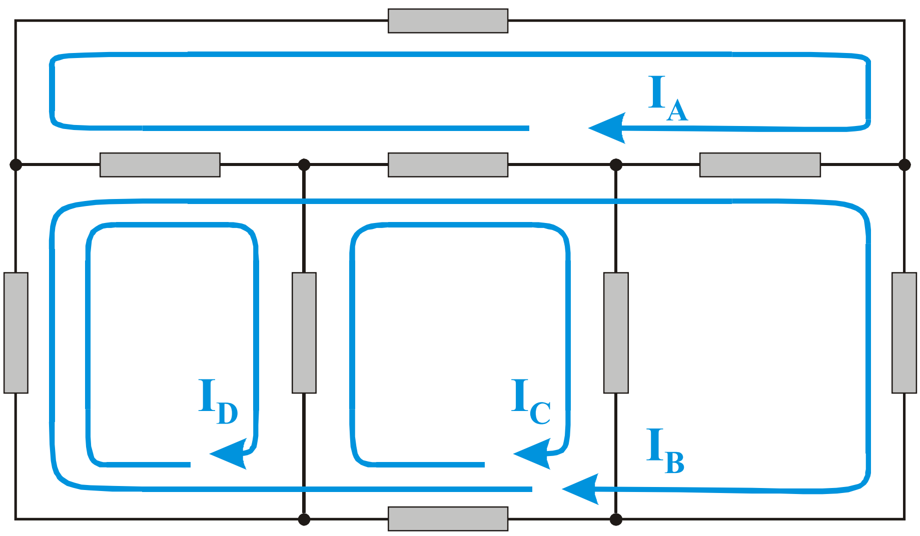



I_A
I_C
I_B

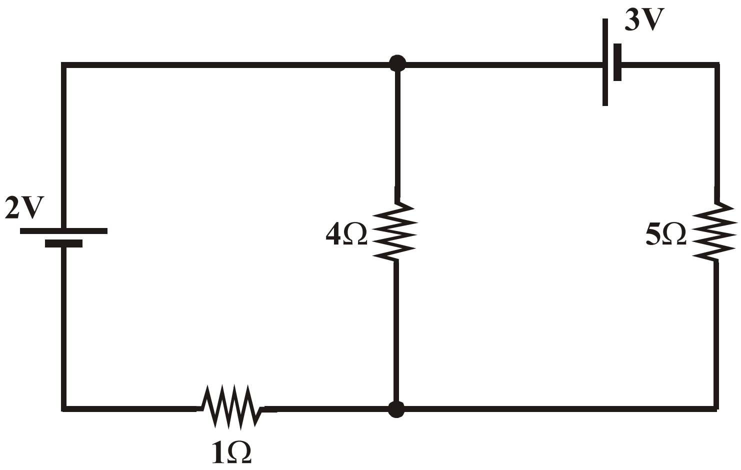

I_A
I_D
I_C
I_B

Sugestão relativa ao desenho das setas correspondentes a cada corrente fictícia.

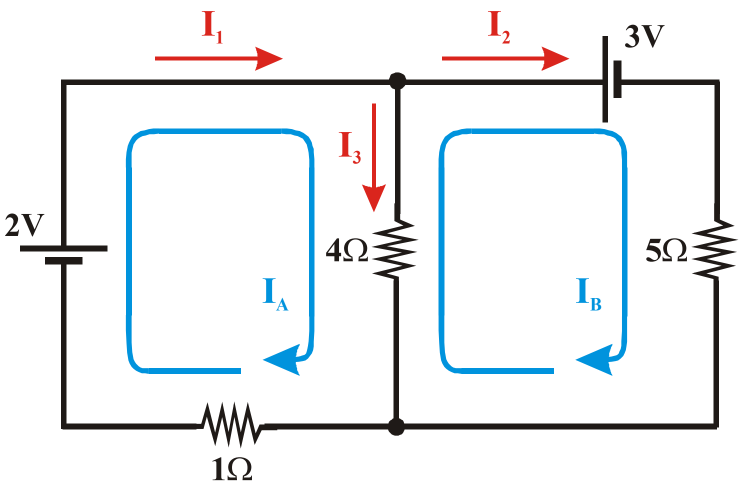




Exemplo: Determinar as correntes nos ramos do circuito.



Resolução:

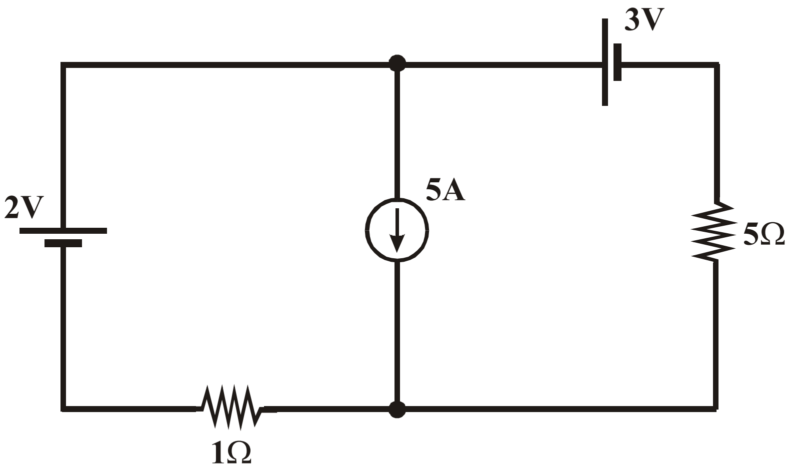


1. Resolver o sistema $\begin{cases} 4\cdot(I_A - I_B) + 1\cdot I_A - 2 = 0 & \text{(malha A)} \\ 3 + 5\cdot I_B + 4\cdot(I_B - I_A) = 0 & \text{(malha B)} \end{cases}$

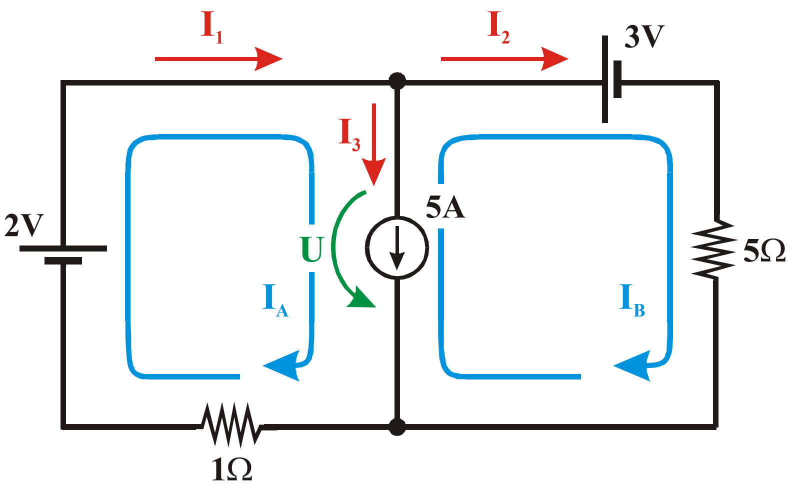
2. Calcular as correntes nos ramos a partir das correntes fictícias:

$$\begin{array}{|l} I_1 = I_A \\ I_2 = I_B \\ I_3 = I_A - I_B \end{array}$$

Exemplo: Determinar as correntes nos ramos do circuito.



Resolução:



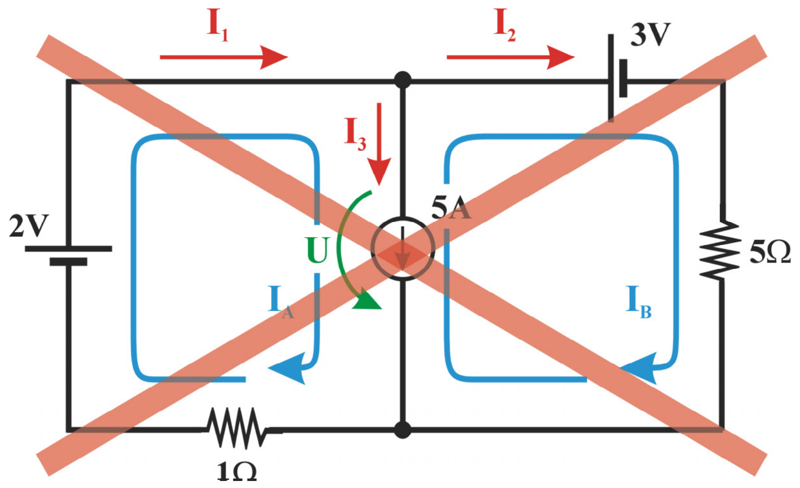
1. Considerar o sistema $\begin{cases} U + 1 \cdot I_A - 2 = 0 & \text{(malha A)} \\ 3 + 5 \cdot I_B - U = 0 & \text{(malha B)} \end{cases}$

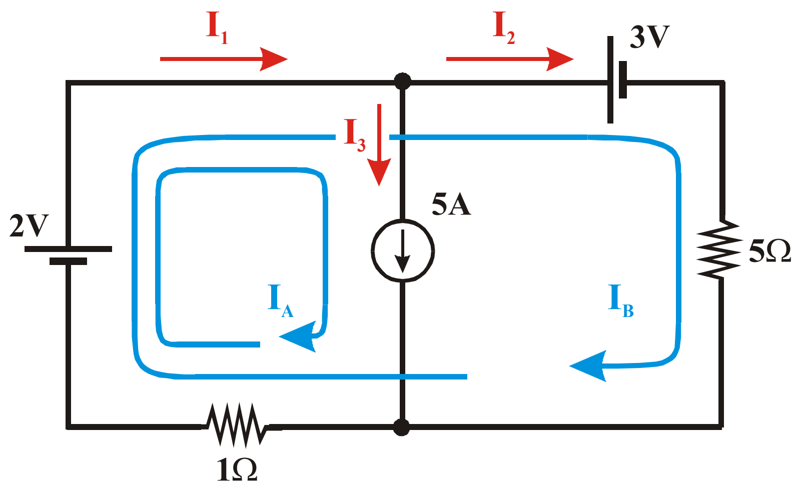
   Este sistema não se pode resolver porque possui três incógnitas e apenas duas equações. No entanto, $I_A - I_B = 5A$ pelo que se pode escrever – e resolver – um novo sistema de três incógnitas e **três equações**:

$$\begin{cases} U + 1 \cdot I_A - 2 = 0 & \text{(malha A)} \\ 3 + 5 \cdot I_B - U = 0 & \text{(malha B)} \\ I_A - I_B = 5A & \text{(fonte ideal de corrente)} \end{cases}$$

2. Calcular as correntes nos ramos a partir das correntes fictícias:

$$\left| \begin{array}{l} I_1 = I_A \\ I_2 = I_B \\ I_3 = I_A - I_B \end{array} \right.$$





1. Resolver o sistema $\begin{cases} I_A = 5A & \text{(malha A)} \\ 3 + 5 \cdot I_B + 1 \cdot (I_A + I_B) - 2 = 0 & \text{(malha B)} \end{cases}$

   Este sistema reduz-se a **uma única equação**:

$$3 + 5 \cdot I_B + 1 \cdot (5 + I_B) - 2 = 0$$

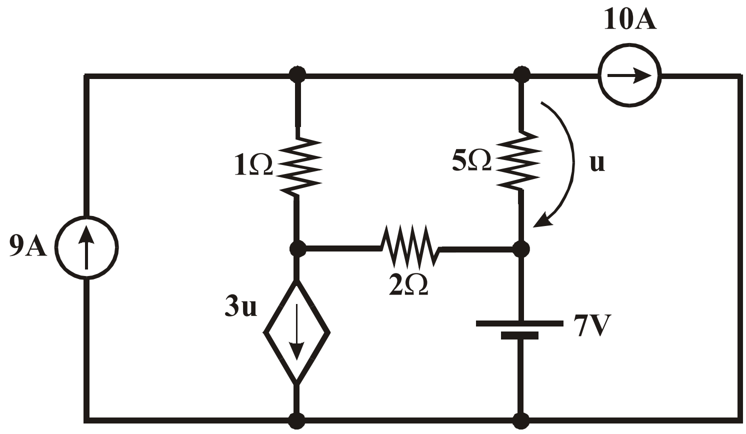
2. Calcular as correntes nos ramos a partir das correntes fictícias:

$$I_1 = I_A + I_B$$

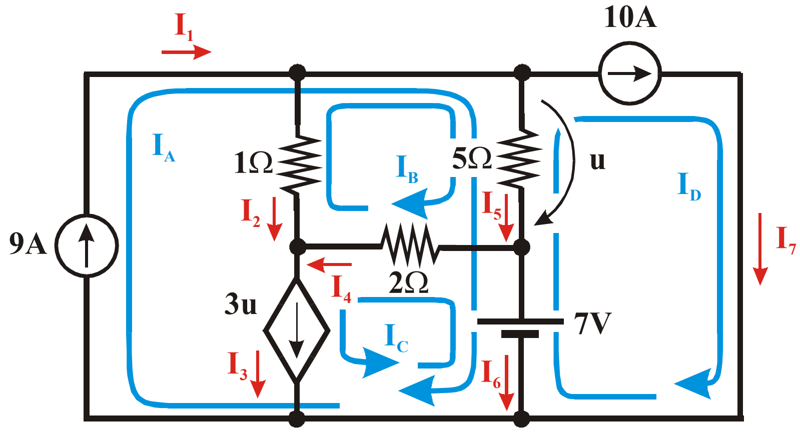
$$I_2 = I_B$$

$$I_3 = I_A = 5A$$

Exemplo: Determinar as correntes nos ramos do circuito.



Resolução:



1. Resolver o sistema

$$\begin{cases} I_A = 9A & \text{(malha A)} \\ I_C = 3u & \text{(malha C)} \\ I_D = 10A & \text{(malha D)} \\ 5\cdot(I_A + I_B - I_D) + 2(I_B + I_C) + 1\cdot I_B = 0 & \text{(malha B)} \\ u = 5\cdot(I_A + I_B - I_D) \end{cases}$$

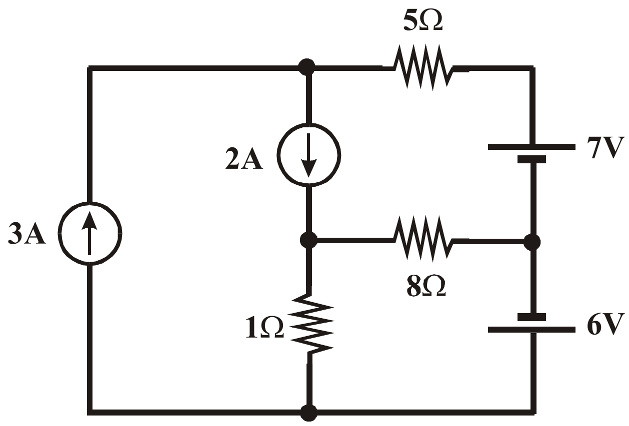
Uma vez que $I_C = 3u = 3\cdot 5\cdot(9 + I_B + 10)$, o sistema reduz-se a **uma única equação**:

$$5\cdot(9 + I_B - 10) + 2(I_B + [15\cdot(9 + I_B + 10)]) + 1\cdot I_B = 0$$

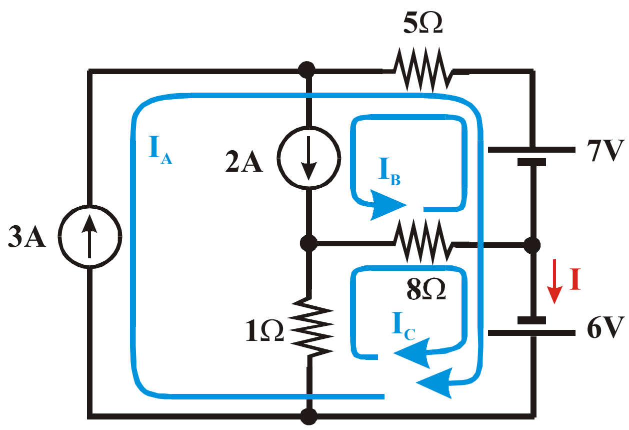
2. Calcular as correntes nos ramos a partir das correntes fictícias:

$$\begin{array}{|l} I_1 = I_A \\ I_2 = -I_B \\ I_3 = I_C \\ I_4 = I_B + I_C \\ I_5 = I_A + I_B - I_D \\ I_6 = I_A - I_C - I_D \\ I_7 = I_D \end{array}$$

Exemplo: Determinar o valor da potência em jogo na fonte de 6V e verificar se essa fonte recebe energia do circuito ou lhe fornece energia.



Resolução:



1. Resolver o sistema
$$\begin{cases} I_A = 3A & \text{(malha A)} \\ I_B = 2A & \text{(malha B)} \\ 8\cdot(I_B + I_C) - 6 + 1\cdot I_C = 0 & \text{(malha C)} \end{cases}$$

   Este sistema reduz-se a **uma única equação**:

$$8\cdot(2 + I_C) - 6 + 1\cdot I_C = 0 \quad \Rightarrow \quad I_C = -\frac{10}{9} = -1{,}11A$$

2. Calcular I a partir das correntes fictícias:

$$I = I_A + I_C = 3 - 1{,}11 = 1{,}89A$$

   $I > 0$, logo o sentido verdadeiro da corrente coincide com o sentido positivo arbitrado.

   Dentro da fonte de 6V, a corrente flui do terminal de **potencial mais baixo** para o terminal de **potencial mais alto**, por isso **a fonte fornece energia** ao circuito.

3. Calcular o valor da potência em jogo na fonte de 6V:

$$P = 6\cdot I = 6\cdot 1{,}89 = 11{,}34W$$

14. Método das Tensões Nodais

Algoritmo para determinar as tensões existentes entre os nós de um circuito e uma referência

1. Identificar os **N nós** do circuito.

2. Escolher cuidadosamente o nó onde colocar a **referência** (**REF**) **para os potenciais eléctricos** e numerar todos os outros nós.

   - Se possível, a **REF** deve ser colocada no **nó onde confluem mais ramos**, uma vez que não se escreve a equação de correntes que confluem neste nó.
   - Se houver **apenas um ramo só com fontes ideais de tensão**, a **REF** deve ser colocada num dos nós onde se liga esse ramo.
   - Se houver **vários ramos só com fontes ideais de tensão**...

     ... e todos esses ramos tiverem um **nó comum**, a **REF** deve ser colocada nesse nó.

     ... e todos esses ramos estiverem **em cascata**, a **REF** deve ser colocada num dos nós onde se liga um desses ramos.

     ... e esses ramos não tiverem **terminais comuns**, a **REF** deve ser colocada num dos nós onde se liga um desses ramos. Os dois nós onde estão ligados cada um dos outros ramos só com fontes ideais de tensão devem ser englobados num *super-nó*.

3. Arbitrar o **sentido positivo** para as **correntes nos ramos** que confluem em **nós de tensão desconhecida**.

   - Não se consideram as correntes que confluem nos nós cuja tensão é conhecida.
   - Cuidado com a colocação das setas... (ver figura).

4. Escrever uma **equação de correntes** para **cada nó de tensão desconhecida** (incluindo os super-nós considerados).

   - Não se escrevem equações nem para o nó de referência nem para os nós de tensão conhecida.
   - As incógnitas de cada equação são as tensões nodais.

5. Escrever uma **equação de tensões** para cada super-nó considerado.

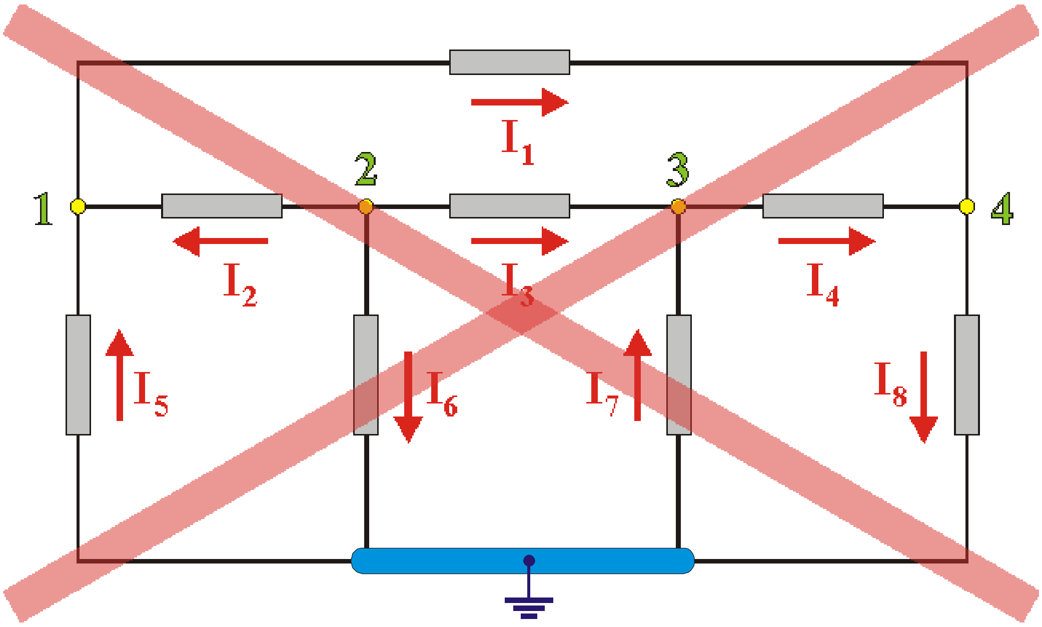
6. Resolver um **sistema de equações de ordem (N – 1) – T** para determinar as tensões nodais.

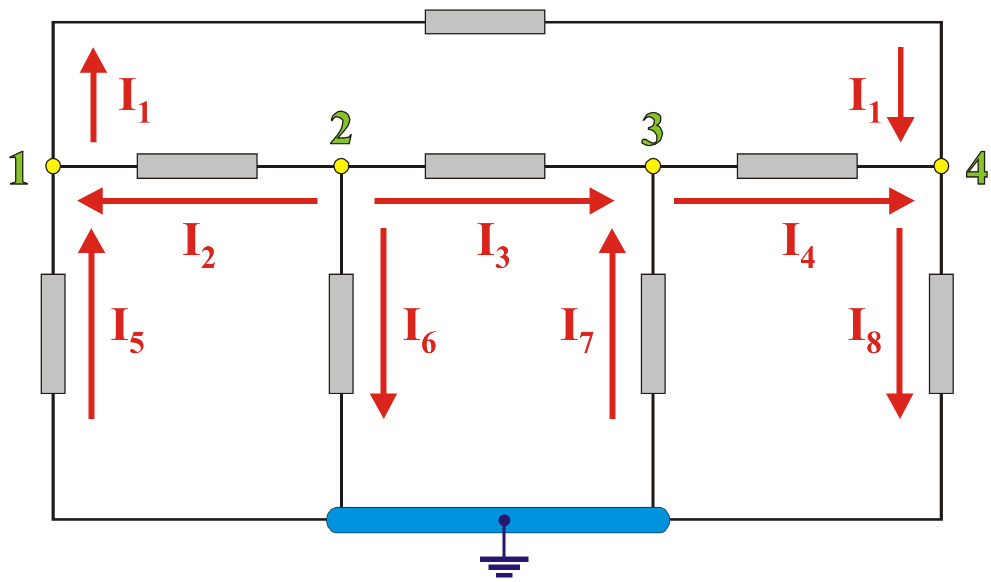
   - A **corrente de cada ramo** pode depois ser calculada em função das tensões nodais.

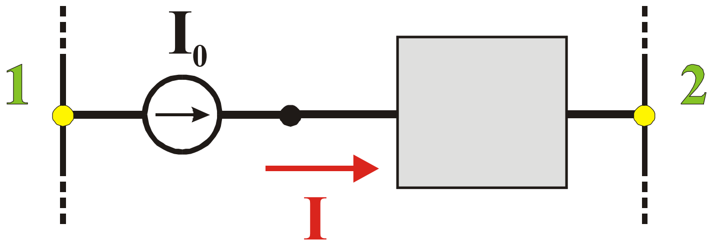
N	–	número de nós;
T	–	número de ramos <u>**só**</u> com fontes ideais de tensão que possuem um terminal comum ou estão em cascata.

Sugestão relativa ao desenho das setas que indicam o sentido positivo da corrente em cada ramo:

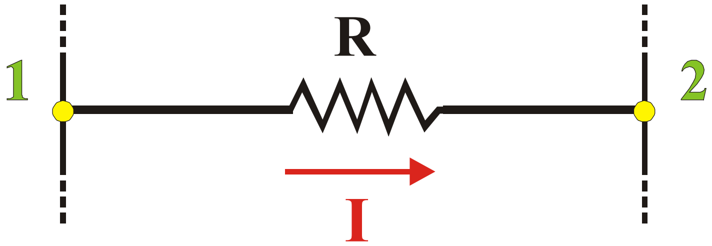
Desenhar as setas junto dos nós e não a meio dos ramos, para evitar esquecer alguma corrente ao escrever a equação de correntes para cada nó.







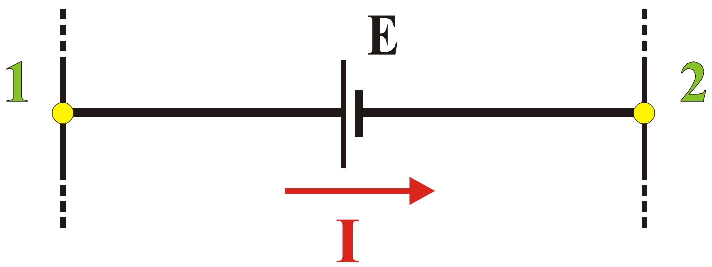
$$\boxed{I = I_0 \quad \forall_{U_1, U_2}}$$



$$\boxed{I = \frac{U_1 - U_2}{R}}$$

$$\boxed{I = \frac{(U_1 - U_2) + E}{R}}$$

$$\boxed{I = \frac{(U_1 - U_2) - E}{R}}$$



$$I = ?$$

$$U_1 - U_2 = E$$

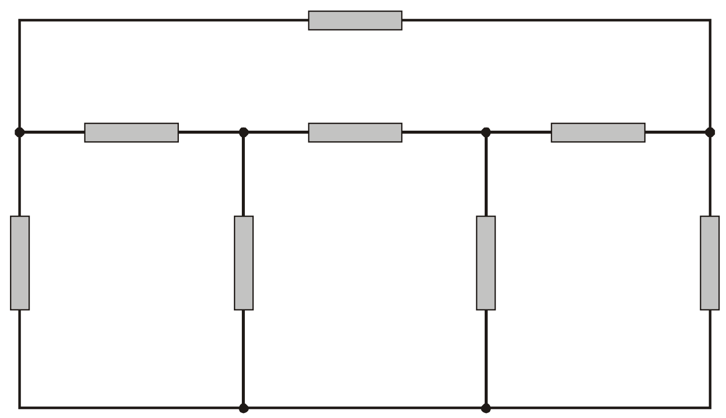
Exemplo: Relativamente ao circuito da figura:

a) Identificar os nós do circuito.

b) Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado, tendo em vista o cálculo das tensões nodais (tensões existentes entre os nós do circuito e essa referência) usando o Método das Tensões Nodais.

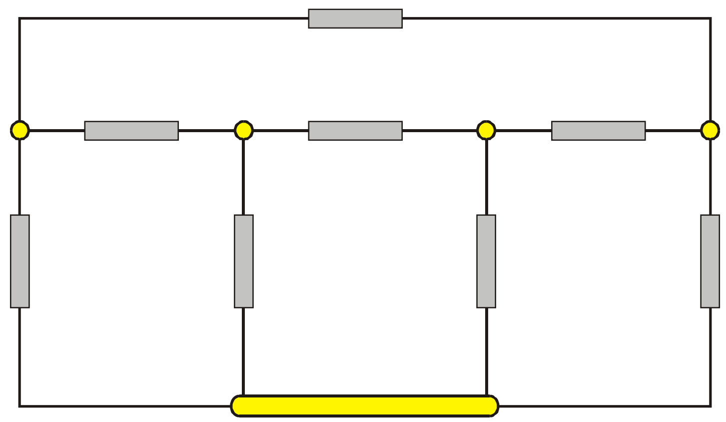
c) Numerar convenientemente os nós do circuito, tendo em vista o cálculo das tensões nodais usando o Método das Tensões Nodais.

d) Indicar os sentidos positivos habitualmente considerados para as tensões nodais.

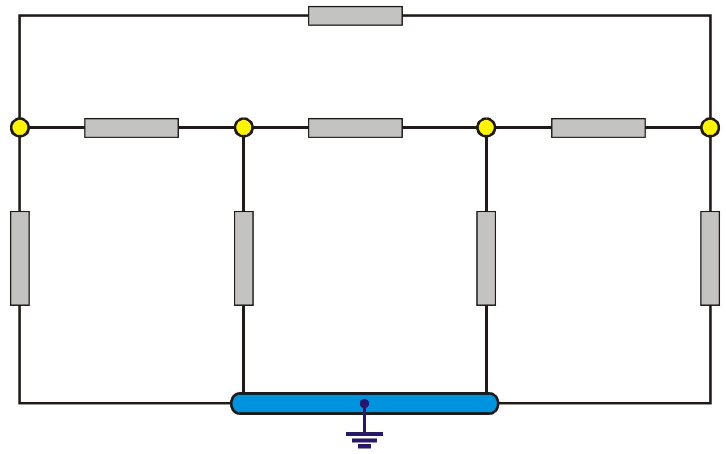


Resolução:

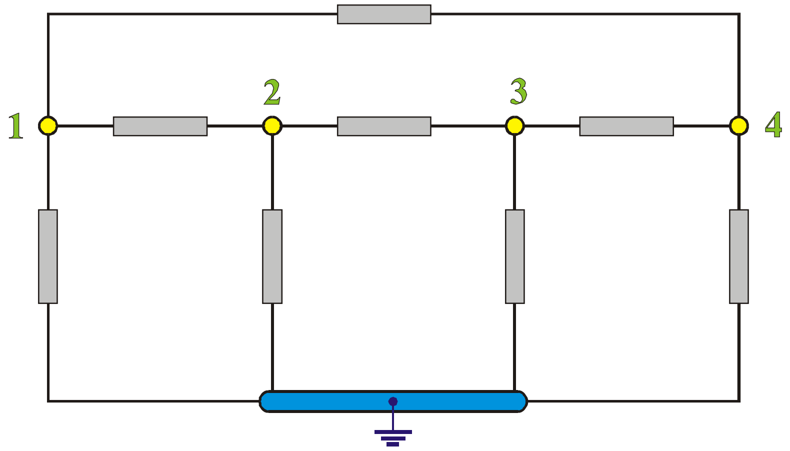
a) Identificar os nós do circuito.



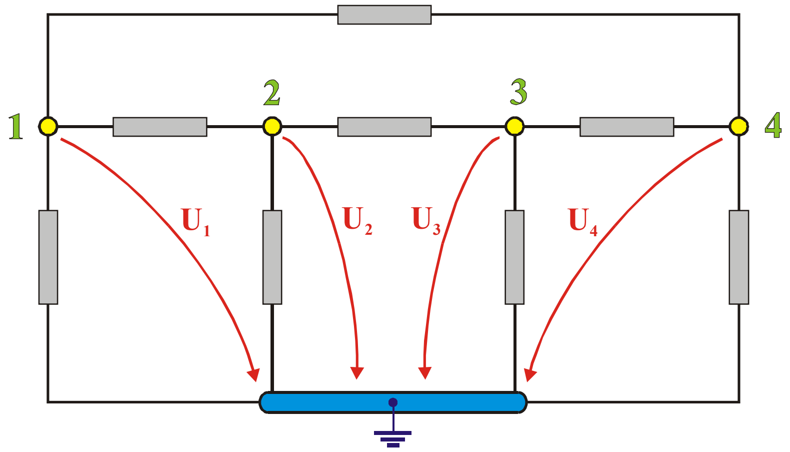
b) Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado, tendo em vista o cálculo das tensões nodais (tensões existentes entre os nós do circuito e essa referência) usando o Método das Tensões Nodais.



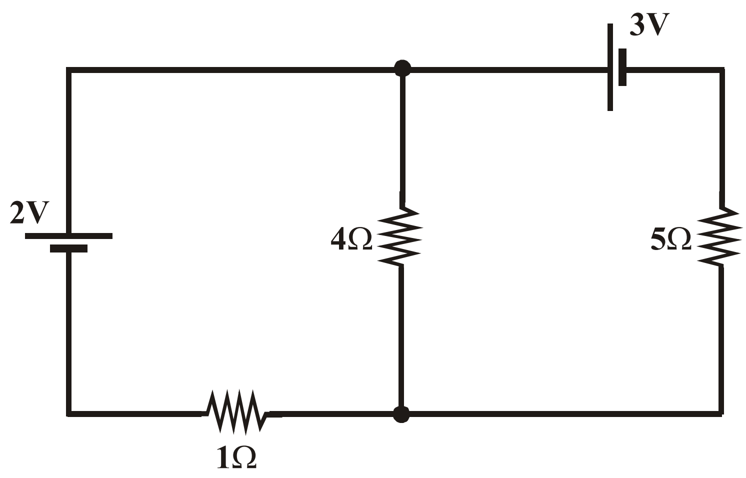
c) Numerar convenientemente os nós do circuito, tendo em vista o cálculo das tensões nodais usando o Método das Tensões Nodais.



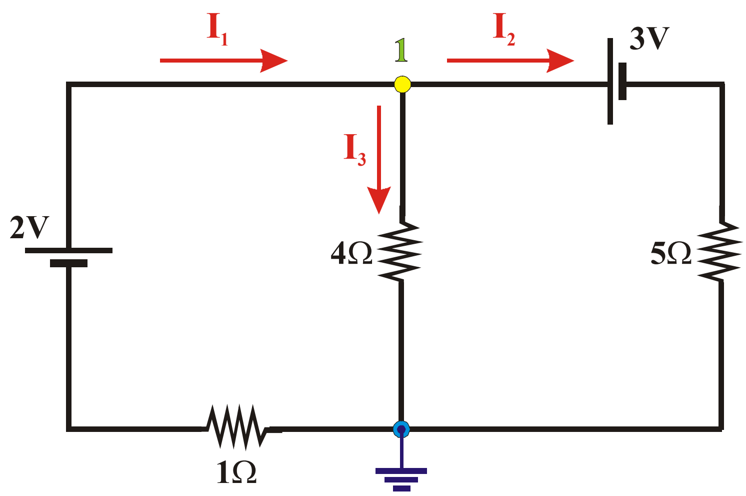
d) Indicar os sentidos positivos habitualmente considerados para as tensões nodais.



Exemplo: Recorrendo ao Método das Tensões Nodais, determinar as correntes nos ramos do circuito.



Tópicos de Resolução:



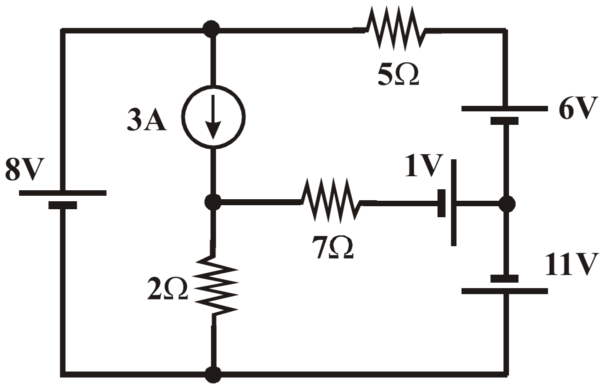
1. Para determinar U_1 (tensão do nó 1, relativamente à referência) resolver a equação $\boxed{I_1 - I_2 - I_3 = 0}$ tendo em conta que

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{(0 - U_1) + 2}{1} \\ I_2 = \dfrac{(U_1 - 0) - 3}{5} \\ I_3 = \dfrac{(U_1 - 0)}{4} \end{cases}$$

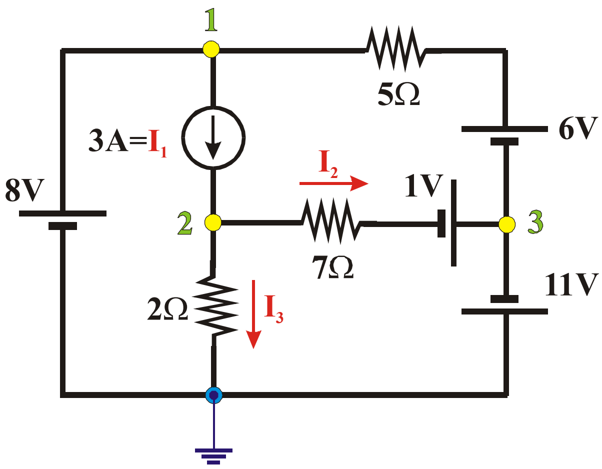
$$\boxed{\frac{(0 - U_1) + 2}{1} - \frac{(U_1 - 0) - 3}{5} - \frac{(U_1 - 0)}{4} = 0}$$

2. Calcular as correntes nos ramos a partir da tensão U_1.

Exemplo: Recorrendo ao Método das Tensões Nodais, determinar o valor da potência em jogo na fonte ideal de corrente. Verificar se essa fonte recebe energia do circuito ou lhe fornece energia.



Resolução:



1. Para determinar U_2 (tensão do nó 2, relativamente à referência) resolver a equação $\boxed{I_1 - I_2 - I_3 = 0}$ tendo em conta que

$$\begin{cases} I_1 = 3A \\ I_2 = \dfrac{(U_2 - U_3) + 1}{7} \\ I_3 = \dfrac{(U_2 - 0)}{2} \\ \\ U_1 = 8V \\ U_3 = -11V \end{cases}$$

$$\boxed{3 - \frac{[U_2 - (-11)] + 1}{7} - \frac{(U_2 - 0)}{2} = 0}$$

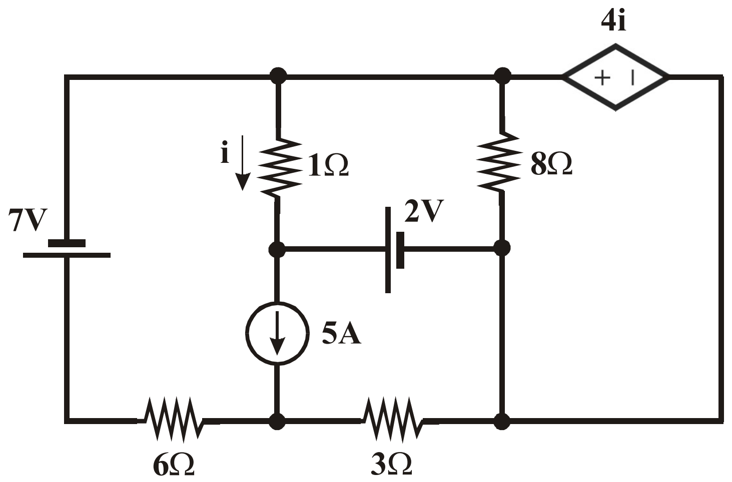
$$\Rightarrow \quad U_2 = 2V$$

Dentro da fonte de 3A, a corrente flui do terminal de **potencial mais alto** (8V) para o terminal de **potencial mais baixo** (2V), por isso **a fonte recebe energia** do circuito.

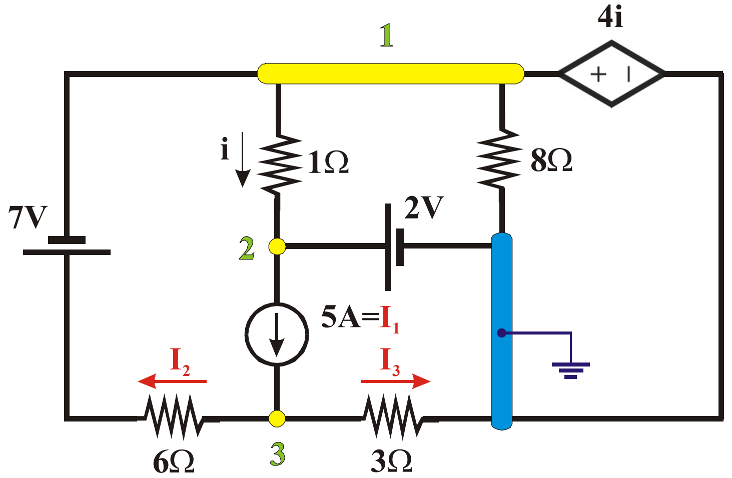
2. Calcular o valor da potência em jogo na fonte de 3A:

$$P = (U_1 - U_2) \cdot I_1 = (8 - 2) \cdot 3 = 18W$$

Exemplo: Recorrendo ao Método das Tensões Nodais, determinar o valor da potência em jogo na fonte ideal de corrente. Verificar se essa fonte recebe energia do circuito ou lhe fornece energia.



Resolução:



1. Para determinar U_3 (tensão do nó 3, relativamente à referência) resolver a equação $\boxed{I_1 - I_2 - I_3 = 0}$ tendo em conta que

$$\begin{cases} U_1 = 4i \\ i = \dfrac{U_1 - U_2}{1} \\ U_2 = 2V \\ I_1 = 5A \\ I_2 = \dfrac{(U_3 - U_1) - 7}{6} \\ I_3 = \dfrac{(U_3 - 0)}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = \dfrac{8}{3} = 2{,}67V \\ U_2 = 2V \\ \\ I_1 = 5A \\ I_2 = \dfrac{(U_3 - 2{,}67) - 7}{6} \\ I_3 = \dfrac{(U_3 - 0)}{3} \end{cases}$$

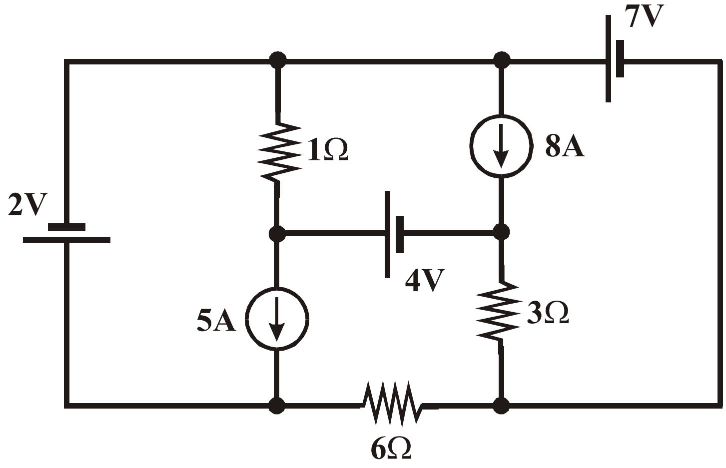
$$\boxed{5 - \frac{(U_3 - 2{,}67) - 7}{6} - \frac{(U_3 - 0)}{3} = 0}$$

$$\Rightarrow \quad U_3 = 13{,}22V$$

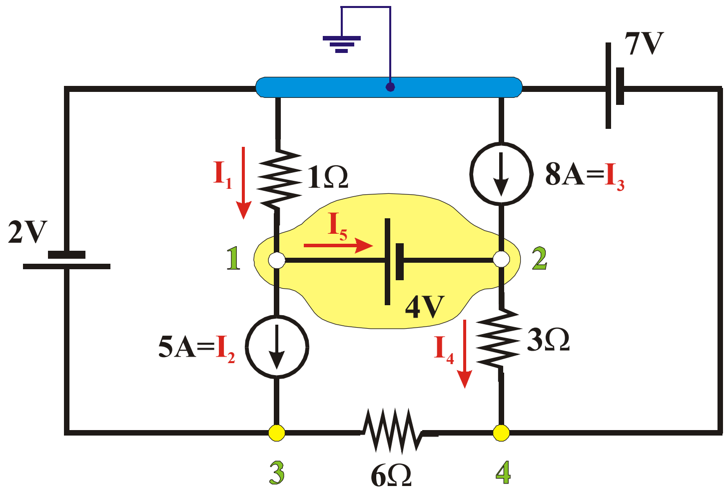
Dentro da fonte de 5A, a corrente flui do terminal de **potencial mais baixo** (2V) para o terminal de **potencial mais alto** (13,22V), por isso **a fonte fornece energia** ao circuito.

2. Calcular o valor da potência em jogo na fonte de 5A: $P = (U_3 - U_2) \cdot I_1 = (13{,}22 - 2) \cdot 5 = 56{,}1W$

Exemplo: Recorrendo ao Método das Tensões Nodais, determinar o valor da potência em jogo na fonte de 4V. Verificar se essa fonte recebe energia do circuito ou lhe fornece energia.



Resolução:



1. Para determinar U_1 (tensão do nó 1, relativamente à referência) resolver a equação $\boxed{I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0}$ tendo em conta que

$$\begin{cases} U_3 = 2V \\ U_4 = -7V \\ U_1 - U_2 = 4V \\ \\ I_1 = \dfrac{0 - U_1}{1} = -U_1 \\ I_2 = 5A \\ I_3 = 8A \\ I_4 = \dfrac{U_2 - U_4}{3} = \dfrac{U_1 + 3}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{-U_1 - 5 + 8 - \frac{U_1 + 3}{3} = 0} \quad \Rightarrow \quad U_1 = 1{,}5V$$

2. Para determinar I_5 resolver a equação $\boxed{I_1 - I_2 - I_5 = 0}$ tendo em conta que:

$$\begin{cases} I_1 = -U_1 = -1{,}5A \\ I_2 = 5A \end{cases}$$

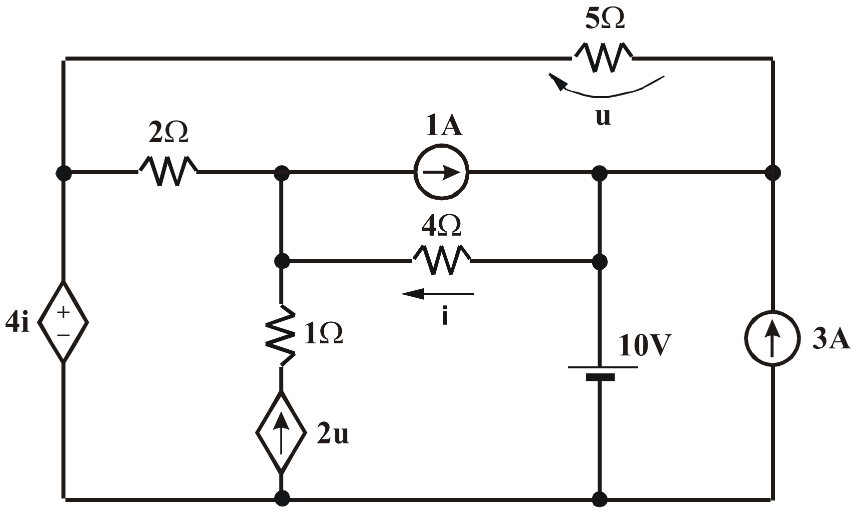
$$\boxed{-1{,}5 - 5 - I_5 = 0} \quad \Rightarrow \quad I_5 = -6{,}5A$$

<u>**Dentro da fonte de 4V**</u>, a corrente flui do terminal de **potencial mais baixo** para o terminal de **potencial mais alto** por isso **a fonte fornece energia** ao circuito.

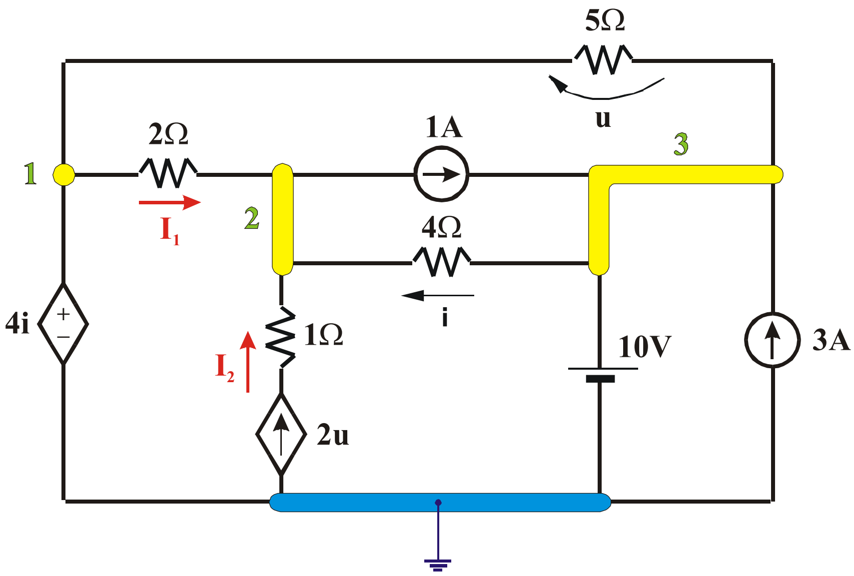
3. Calcular o valor da potência em jogo na fonte de 4V:

$$P = 4 \cdot |I_5| = 4 \cdot 6{,}5 = 26W$$

Exemplo: Recorrendo ao Método das Tensões Nodais, determinar o valor da potência em jogo na fonte de 1A. Verificar se essa fonte recebe energia do circuito ou lhe fornece energia.



Resolução:



1. Para determinar U_2 (tensão do nó 2, relativamente à referência) resolver a equação $\boxed{I_1 + I_2 + i - 1 = 0}$ tendo em conta que

$$\begin{cases} U_1 = 4i \\ U_3 = 10V \\ i = \dfrac{U_3 - U_2}{4} = \dfrac{10 - U_2}{4} \\ u = U_3 - U_1 = 10 - 4i = U_2 \\ I_1 = \dfrac{U_1 - U_2}{2} = \dfrac{4i - U_2}{2} = \dfrac{4 \cdot \left(\dfrac{10 - U_2}{4}\right) - U_2}{2} = 5 - U_2 \\ I_2 = 2 \cdot u = 2 \cdot U_2 \end{cases}$$

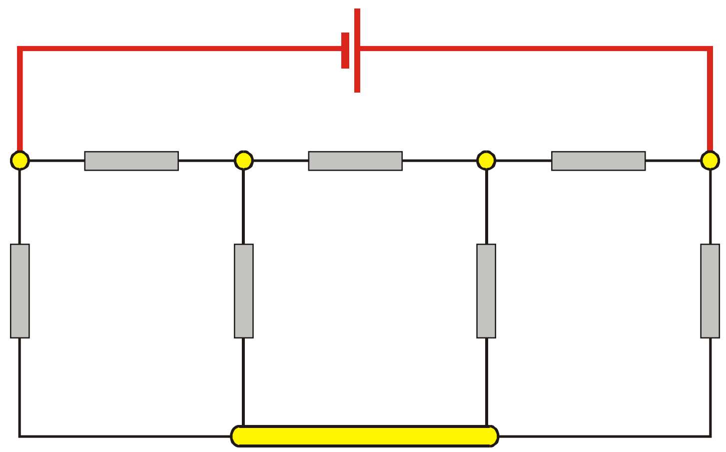
$$\boxed{5 - U_2 + 2 \cdot U_2 + \frac{10 - U_2}{4} - 1 = 0}$$

$$\Rightarrow \quad U_2 = -8{,}67V$$

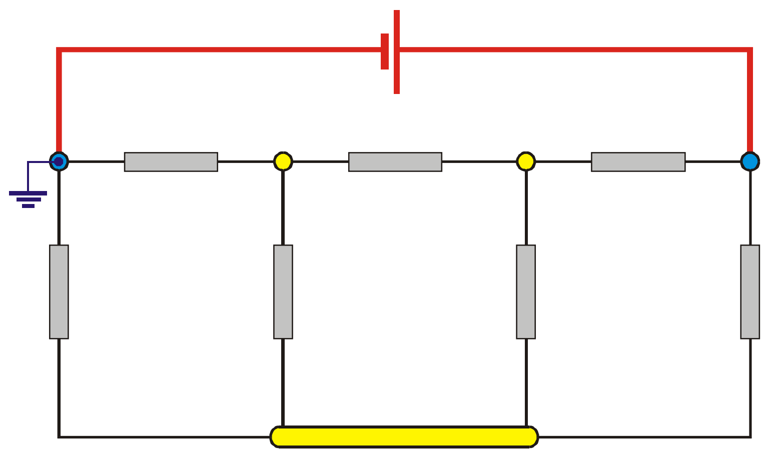
Dentro da fonte de 1A, a corrente flui do terminal de **potencial mais baixo** (-8,67V) para o terminal de **potencial mais alto** (10V), por isso **a fonte fornece energia** ao circuito.

2. Calcular o valor da potência em jogo na fonte de 1A: $P = (U_3 - U_2) \cdot 1 = [10 - (-8{,}67)] \cdot 1 = 18{,}67W$

Exemplo: Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado, tendo em vista o cálculo das tensões nodais usando o Método das Tensões Nodais.

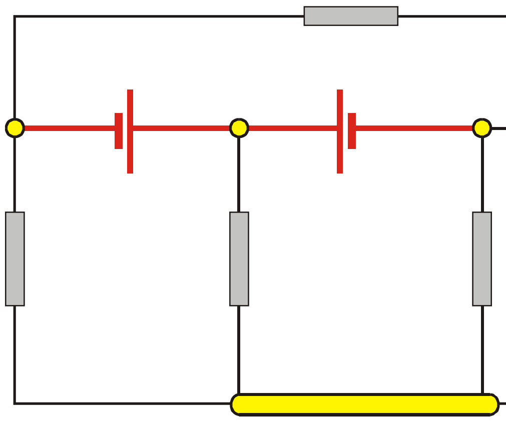


Resolução:

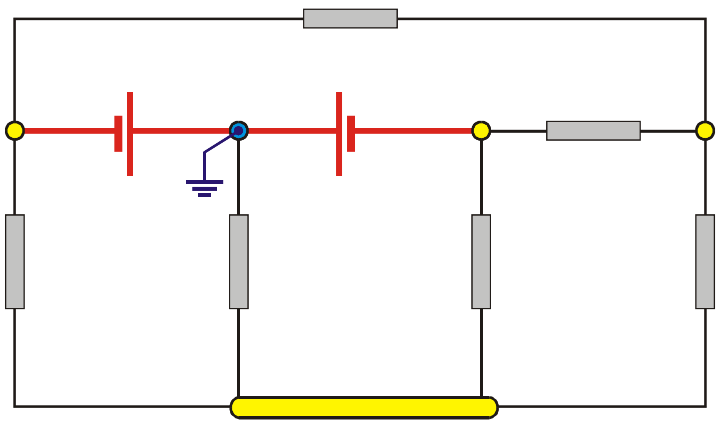


A referência fica igualmente bem escolhida se for colocada em qualquer um dos nós a azul.

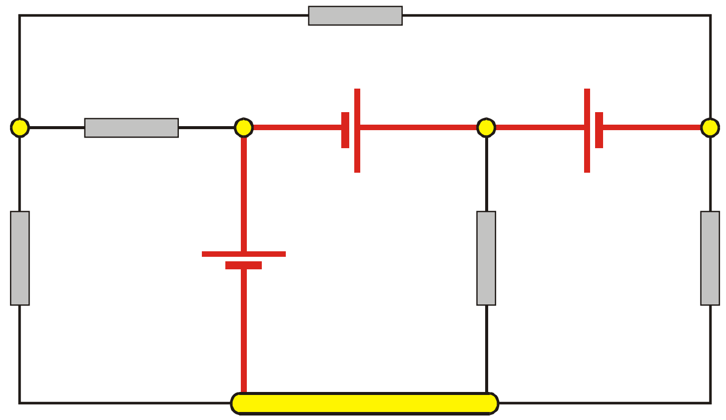
Exemplo: Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado, tendo em vista o cálculo das tensões nodais usando o Método das Tensões Nodais.



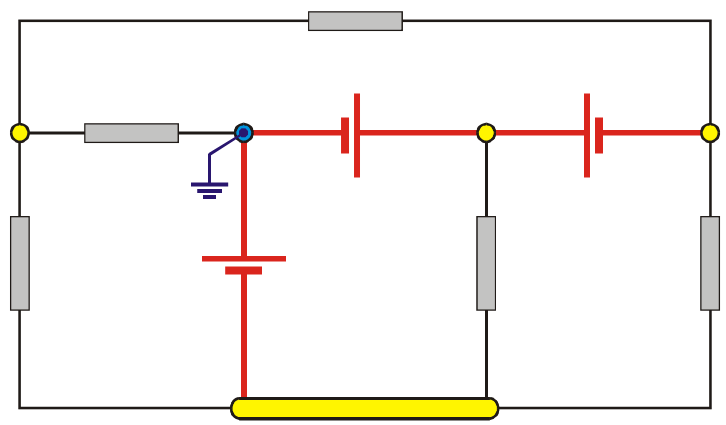
Resolução:



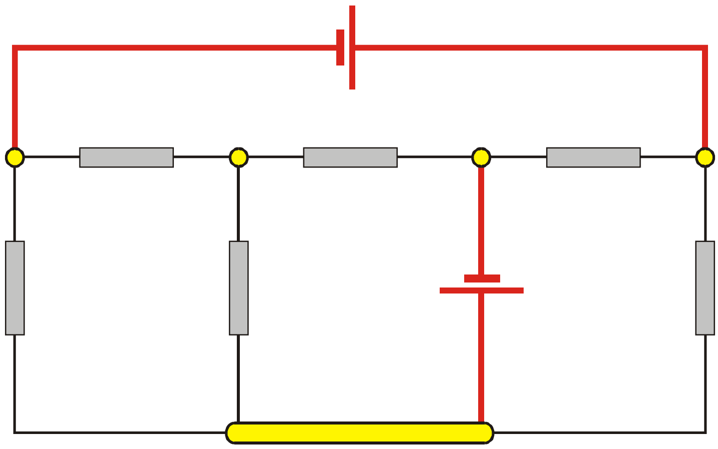
Exemplo: Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado, tendo em vista o cálculo das tensões nodais usando o Método das Tensões Nodais.



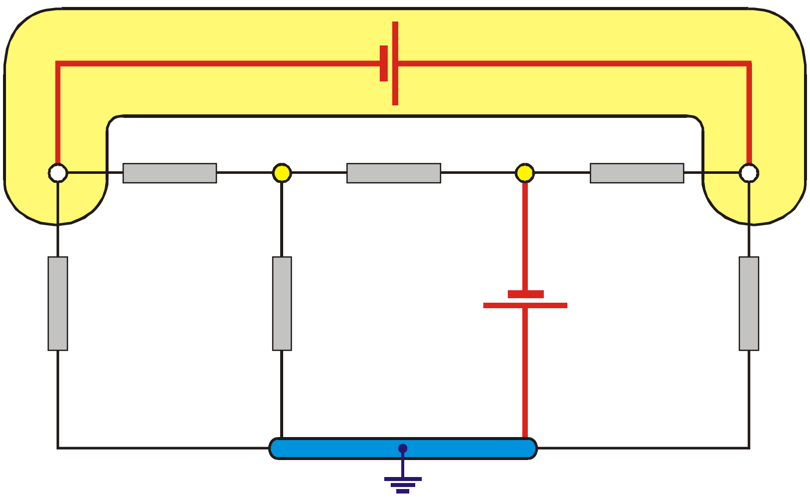
Resolução:



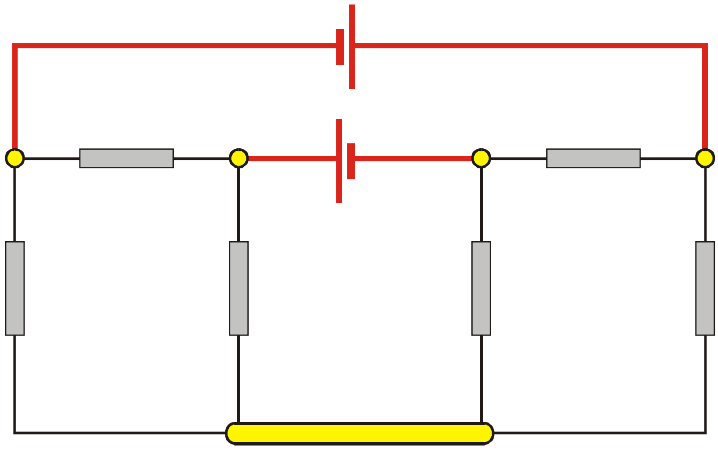
Exemplo: Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado, tendo em vista o cálculo das tensões nodais usando o Método das Tensões Nodais.



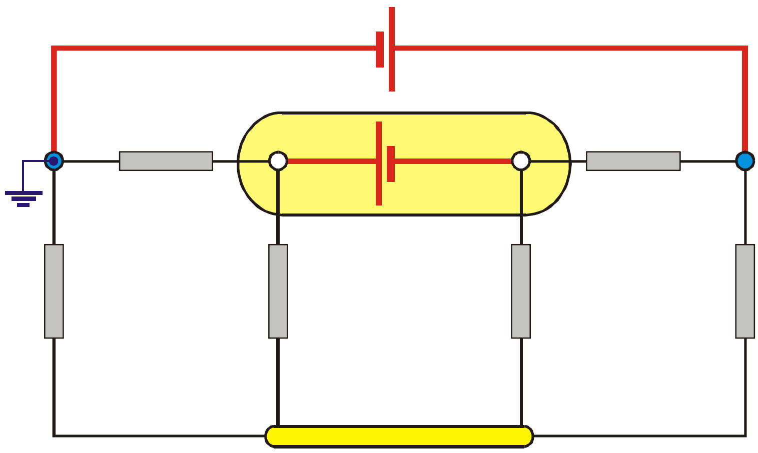
Resolução:

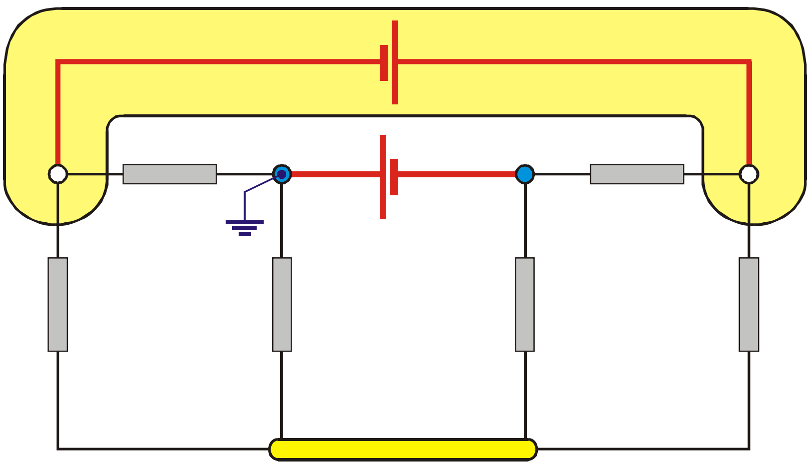


Exemplo: Colocar a referência dos potenciais eléctricos no nó mais indicado, tendo em vista o cálculo das tensões nodais usando o Método das Tensões Nodais.



Resolução:





A referência fica igualmente bem escolhida se for colocada em qualquer um dos nós a azul.

15. Componentes Lineares e Circuitos Lineares

Um ***componente*** que é atravessado por uma corrente **i** quando se encontra submetido a uma tensão **u** diz-se ***linear*** se a multiplicação de **i** por um valor constante **k** resultar na multiplicação de **u** pelo mesmo valor constante **k**.

- Uma **resistência** é um componente linear, uma vez que $\mathbf{u(t) = R \cdot i(t)}$. O gráfico de u(t) em função de i(t) é uma recta.

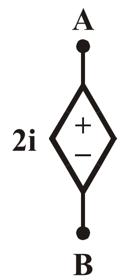
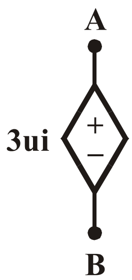
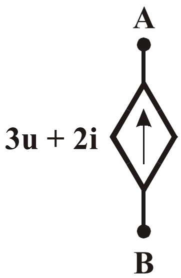
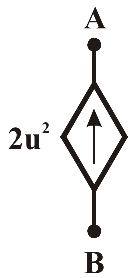
Um ***circuito linear*** é constituído por componentes de um destes três tipos:

1. **Componentes lineares passivos;**

   - Um componente diz-se ***passivo*** se não dispõe de energia própria que possa fornecer ao circuito. Há componentes passivos capazes de armazenar energia recebida do circuito durante um intervalo de tempo, podendo devolvê-la ao circuito num intervalo de tempo posterior.

2. **Fontes ideais independentes;**

3. **Fontes ideais dependentes <u>lineares.</u>**

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>- Fonte ideal de tensão dependente linear.</td>
<td>
</td>
<td>- Fonte ideal de tensão dependente não linear.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>- Fonte ideal de corrente dependente linear.</td>
<td>
</td>
<td>- Fonte ideal de corrente dependente não linear.</td>
</tr>
</table>

16. Princípio da Sobreposição

Seja um circuito eléctrico com **n** fontes ideais independentes numeradas de **1** a **n**. Num componente desse circuito, a fonte **k** (**1** $\leq$ **k** $\leq$ **n**) origina $\mathbf{u_k}$, $\mathbf{i_k}$ **e** $\mathbf{p_k}$ tais que**:**

- $\mathbf{u_k}$ é a tensão existente entre os terminais do componente quando todas as fontes independentes do circuito estão desactivadas, excepto a fonte **k**;

- $\mathbf{i_k}$ é a corrente que passa no componente quando todas as fontes independentes do circuito estão desactivadas, excepto a fonte **k**;

- $\mathbf{p_k}$ é a potência em jogo no componente quando todas as fontes independentes do circuito estão desactivadas, excepto a fonte **k**.

Então, se o circuito for **linear** verifica-se que:

- a **corrente** que atravessa o componente é **igual à soma algébrica das n correntes** $\mathbf{i_k}$.

$$\boxed{i = \sum_{k=1}^{n} i_k}$$

- a **tensão** existente entre os terminais do componente é **igual à soma algébrica das n tensões** $\mathbf{u_k}$.

$$\boxed{u = \sum_{k=1}^{n} u_k}$$

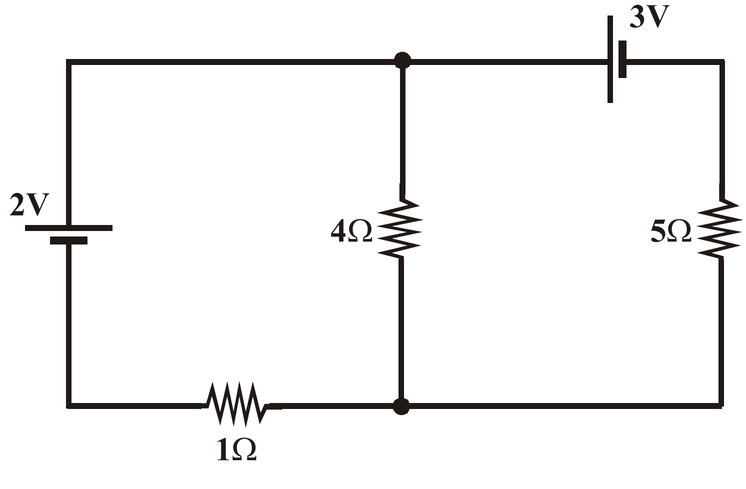
- em geral, a **potência** em jogo no componente é **diferente da soma algébrica das n potências** $\mathbf{p_k}$.

$$\boxed{p \neq \sum_{k=1}^{n} p_k}$$

Quando se recorre ao Princípio da Sobreposição para analisar um circuito verifica-se que:

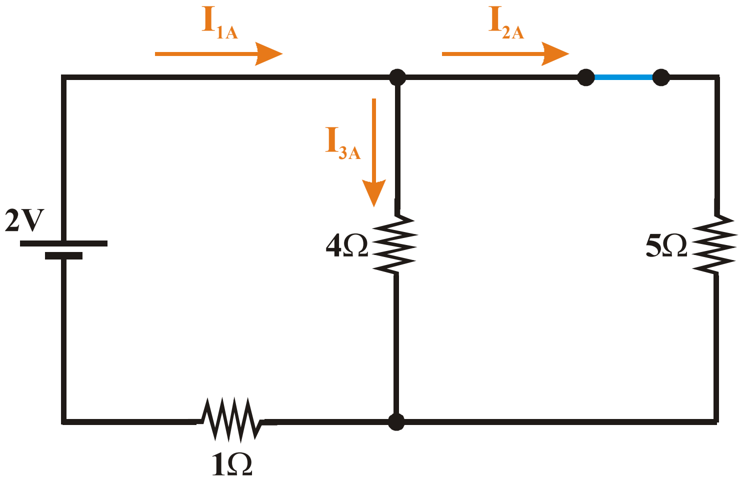
- o circuito a analisar dá origem a um **conjunto de circuitos** mais simples, que devem ser analisados.
- o número de circuitos originados pode chegar a ser igual ao **número de fontes ideais independentes** do circuito a analisar (nesse caso, cada um dos circuitos tem a menor complexidade possível, uma vez que possui apenas uma fonte ideal independente).
- as **fontes dependentes** do circuito a analisar estão todas presentes (e, em princípio, activas) em cada um dos circuitos originados pela aplicação deste método.
- a **potência** em jogo num componente de um circuito pode ser calculada recorrendo à **corrente** que atravessa esse componente e à **tensão** que existe entre os seus terminais.

Exemplo: Recorrendo ao Princípio da Sobreposição, determinar as correntes nos ramos do circuito.

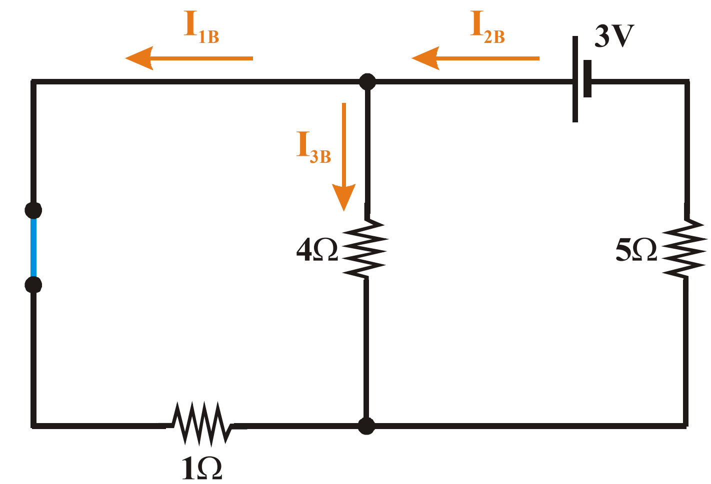


Tópicos de Resolução:

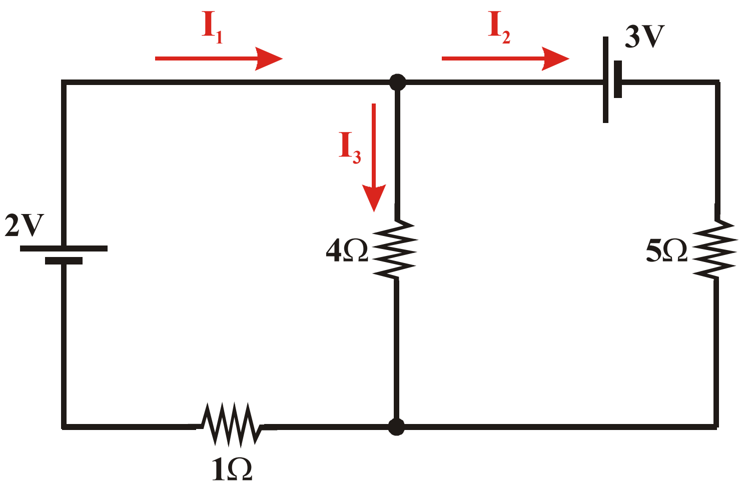
1. Calcular as correntes devidas à fonte de 2V.



2. Calcular as correntes devidas à fonte de 3V.



3. Calcular as correntes totais.

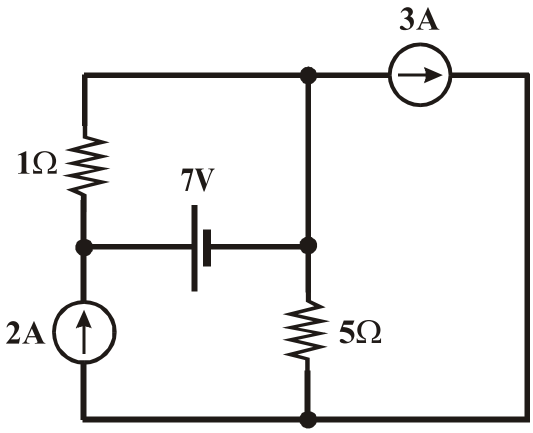


$$I_1 = I_{1A} - I_{1B}$$

$$I_2 = I_{2A} - I_{2B}$$

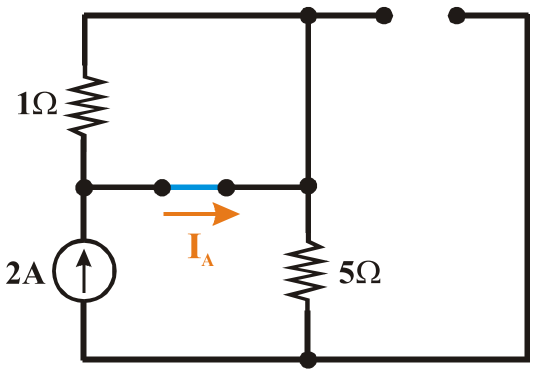
$$I_3 = I_{3A} + I_{3B}$$

Exemplo: Recorrendo ao Princípio da Sobreposição, determinar o valor da potência em jogo na fonte ideal de tensão.

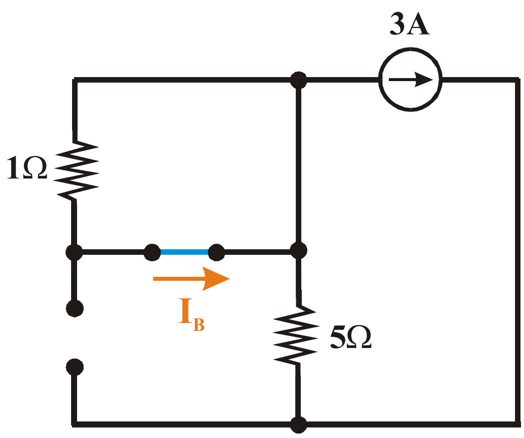


Tópicos de Resolução:

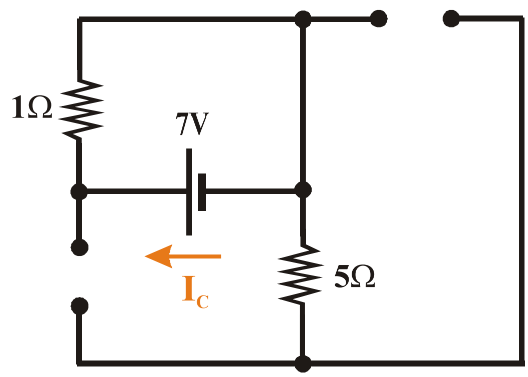
1. Calcular a corrente que passa na fonte de 7V devido à fonte de 2A.



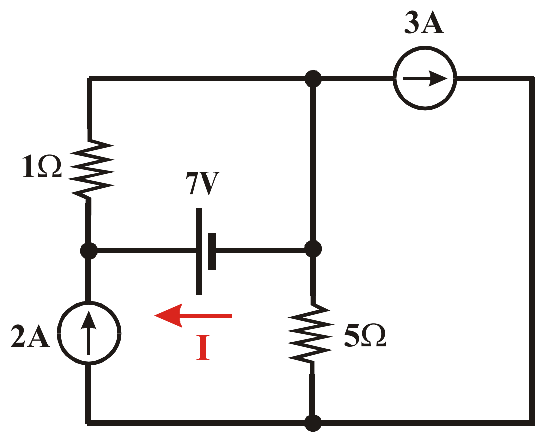
2. Calcular a corrente que passa na fonte de 7V devido à fonte de 3A.



3. Calcular a corrente que passa na fonte de 7V devido à própria fonte de 7V.



4. Calcular a corrente total que passa na fonte de 7V.

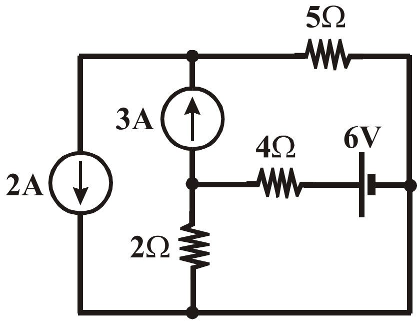


$$\boxed{I = -I_A - I_B + I_C}$$

5. Calcular o valor da potência em jogo na fonte de 7V.

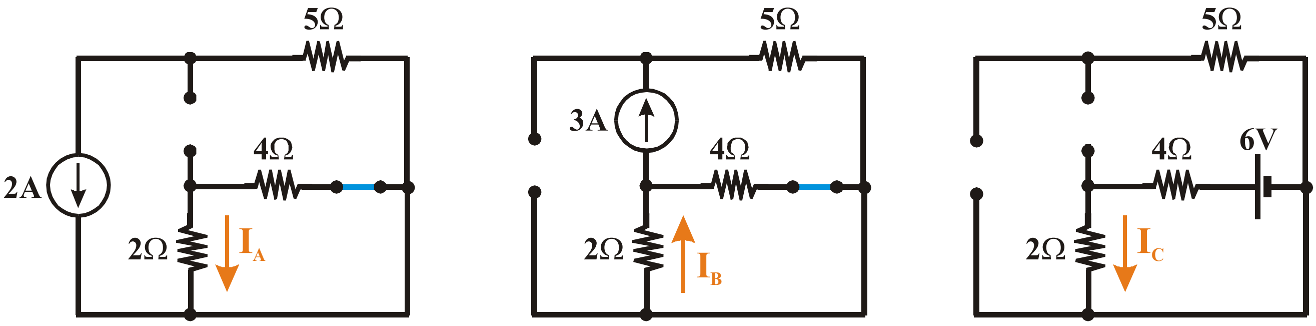
$$\boxed{P = 7 \cdot I}$$

Exemplo: Recorrendo ao Princípio da Sobreposição, determinar o valor da potência em jogo na resistência de 2Ω.

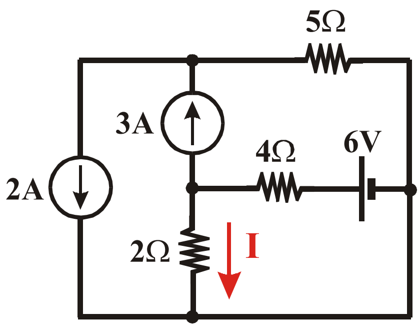


Tópicos de Resolução:

1. Calcular, na resistência de 2Ω, a corrente devida a cada uma das fontes.



2. Calcular, na resistência de 2Ω, a corrente total.



$$\boxed{I = I_A - I_B + I_C}$$

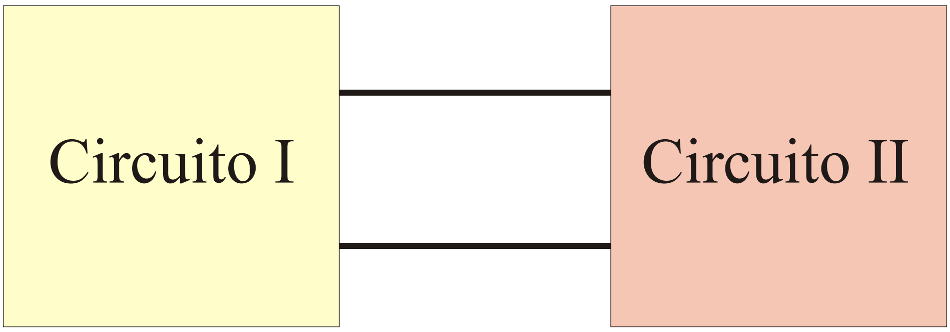
3. Calcular o valor da potência em jogo na resistência de 2Ω.

$$\boxed{P = 2 \cdot I^2}$$

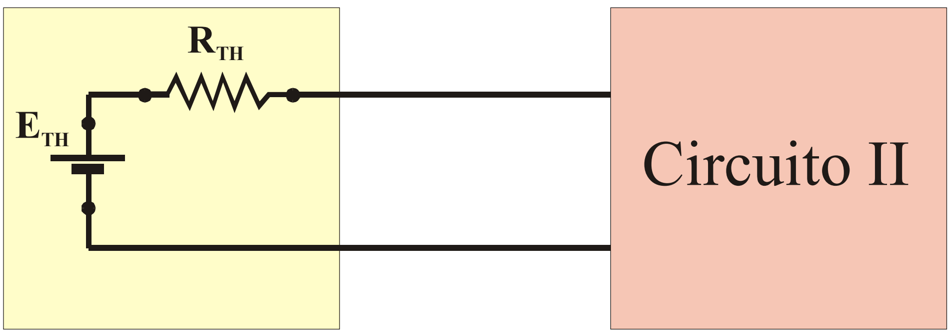
17. Teorema de Thévenin

Um **circuito I** e um **circuito II** estão ligados entre si por dois condutores ideais e isolados de outros circuitos, verificando-se as seguintes condições:

- O circuito I e o circuito II são **lineares**, podendo conter:
    - resistências;
    - fontes ideais independentes;
    - fontes ideais dependentes lineares.
- Se o circuito I tiver **fontes ideais dependentes lineares**, as tensões e correntes que controlam essas fontes pertencem todas ao circuito I.
- Se o circuito II tiver **fontes ideais dependentes lineares**, as tensões e correntes que controlam essas fontes pertencem todas ao circuito II.



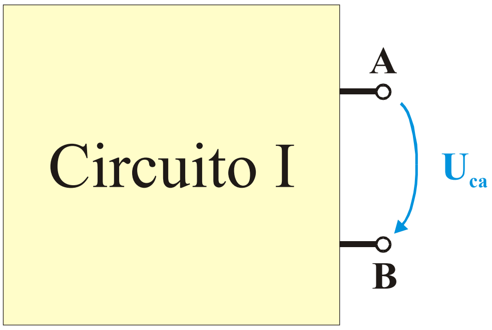
Nestas circunstâncias, todas as tensões e correntes que existem no **circuito II** continuam a ser as mesmas se o **circuito I** for substituído pelo seu **Equivalente de Thévenin**.

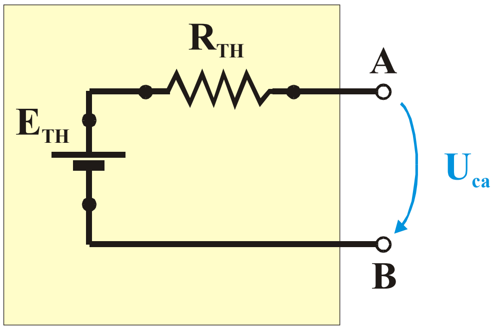


17.1 Determinação de E_{TH}

Se os dois condutores ideais que ligam o circuito I ao circuito II forem cortados, no circuito I formam-se dois terminais, A e B.

E_{TH} é a **tensão de circuito aberto** (**U_{ca}**) existente entre A e B, ou seja, a tensão que existe entre A e B se nenhum componente exterior ao circuito I for ligado entre esses terminais.

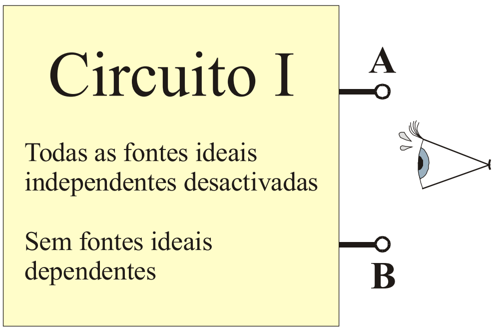


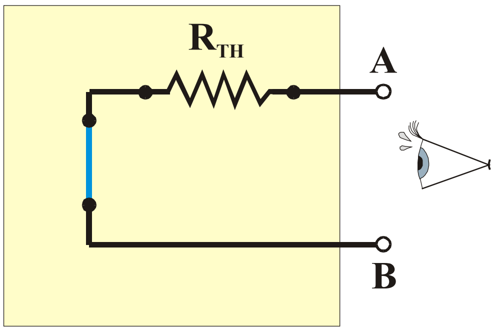


$\boxed{E_{TH} = U_{ca}}$ $\boxed{E_{TH} = U_{ca}}$

17.2 Determinação de R_{TH} com o circuito desactivado, por análise de associações de resistências

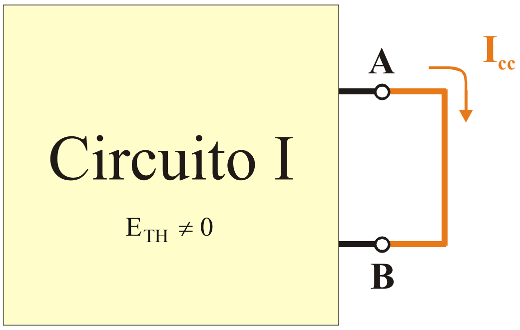
Este método não se pode aplicar quando o circuito possui fontes ideais dependentes.

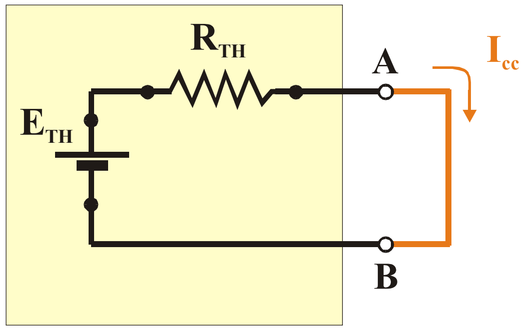




$\boxed{R_{TH} = R_{AB}}$ $\boxed{R_{TH} = R_{AB}}$

17.3 Determinação de R_{TH} sem desactivação do circuito

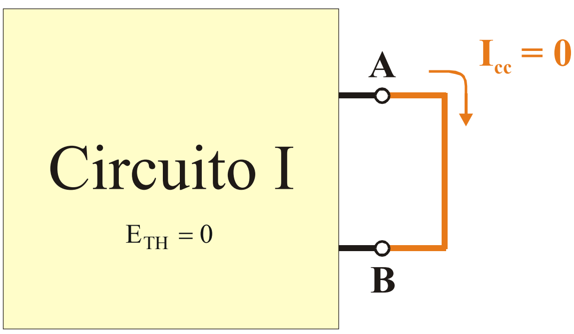


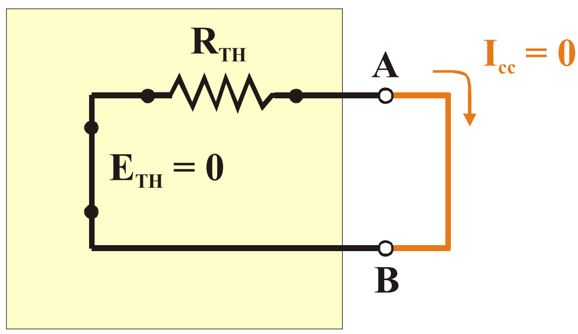


$\boxed{R_{TH} = \frac{E_{TH}}{I_{cc}}}$ $\boxed{R_{TH} = \frac{E_{TH}}{I_{cc}}}$

17.4 Determinação de R_{TH} quando E_{TH} é nulo, sem análise de associações de resistências

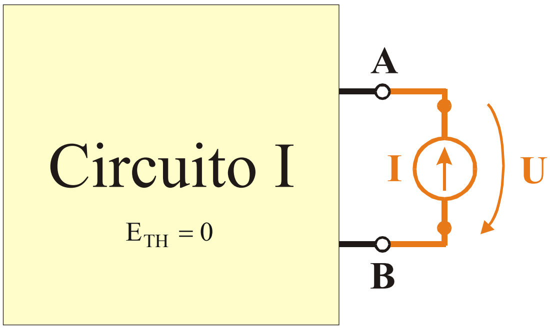
Quando $E_{TH} = 0$, não é possível calcular R_{TH} recorrendo à corrente de curto-circuito, uma vez que esta também é nula.

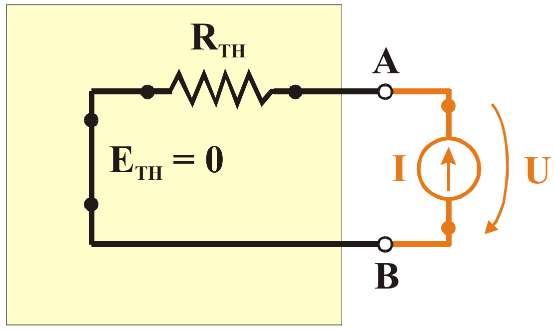




$\boxed{I_{cc} = 0}$ $\boxed{I_{cc} = 0}$

17.4.1 Recurso a uma fonte ideal de corrente

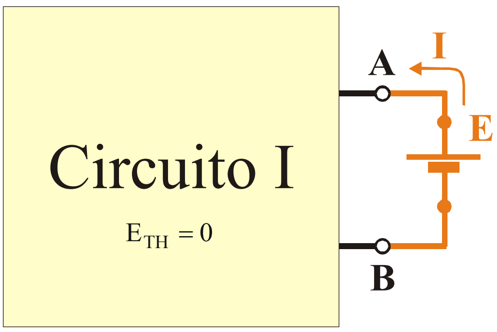


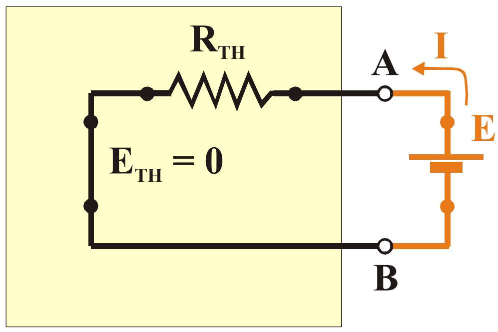


$$\boxed{R_{TH} = \frac{U}{I}}$$

$$\boxed{R_{TH} = \frac{U}{I}}$$

17.4.2 Recurso a uma fonte ideal de tensão

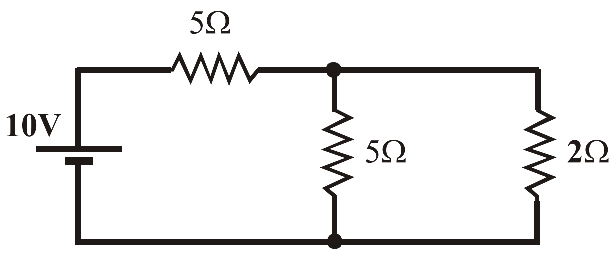




$$\boxed{R_{TH} = \frac{E}{I}}$$

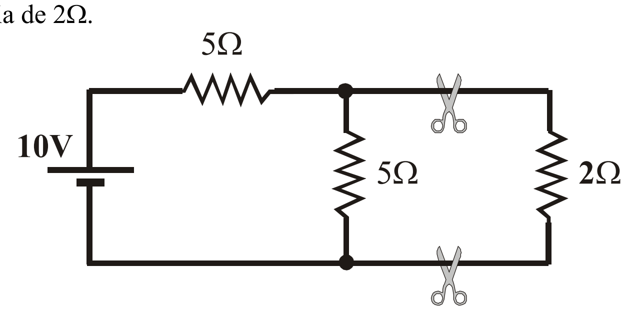
$$\boxed{R_{TH} = \frac{E}{I}}$$

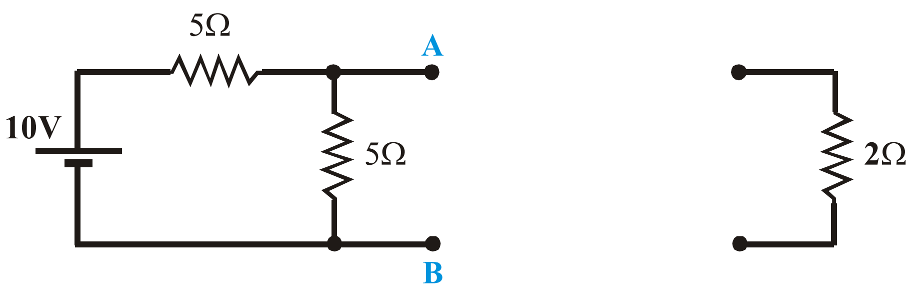
Exemplo: Recorrendo ao Teorema de Thévenin, determinar o valor da tensão presente nos terminais da resistência de 2Ω.



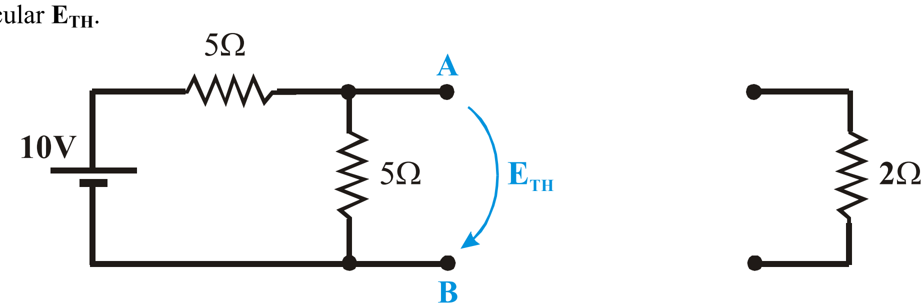
Tópicos de Resolução:

1. Retirar a resistência de 2Ω.

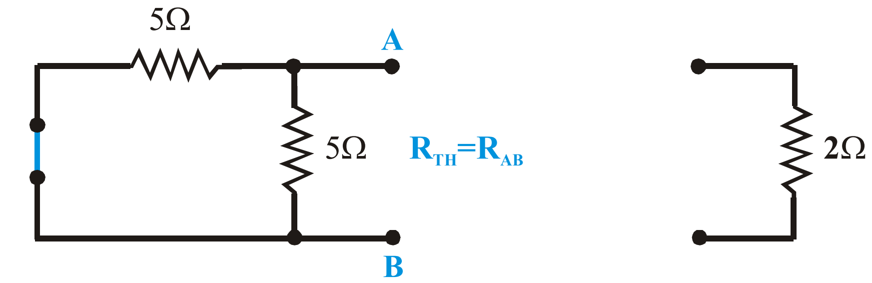




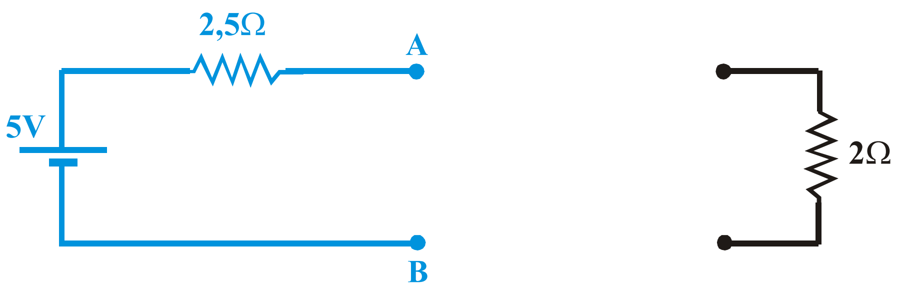
2. Calcular E_{TH}.

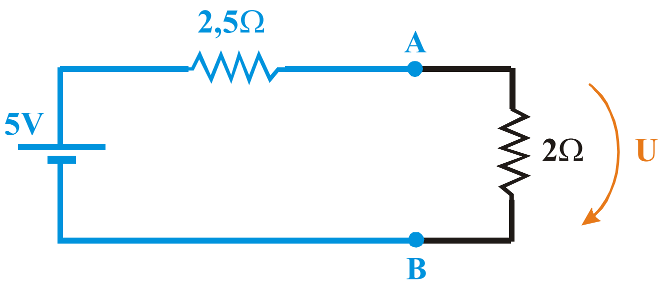


3. Calcular $\mathbf{R_{TH}}$.

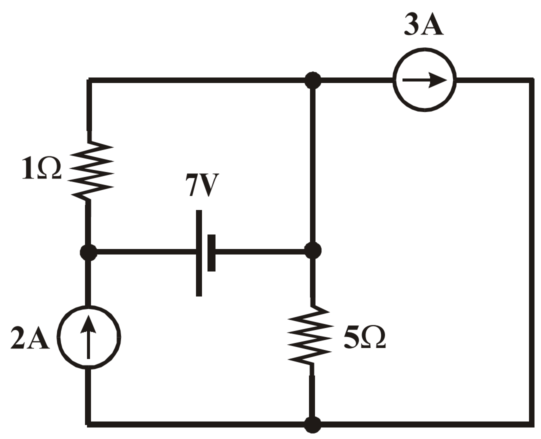


4. Ligar a resistência de 2Ω ao circuito equivalente e calcular **U**.



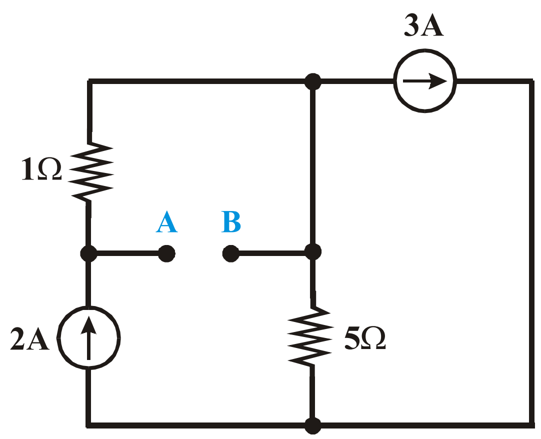


Exemplo: Recorrendo ao Teorema de Thévenin, determinar o valor da potência em jogo na fonte ideal de tensão.

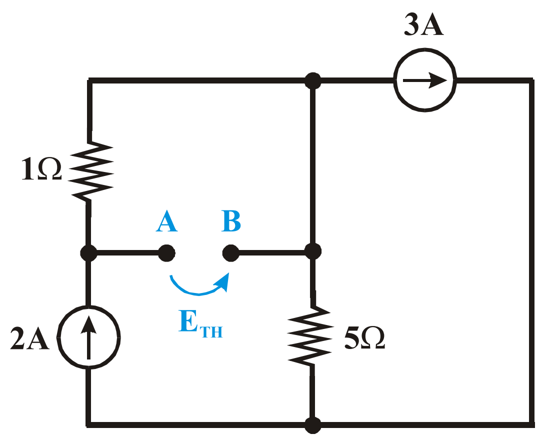


Tópicos de Resolução:

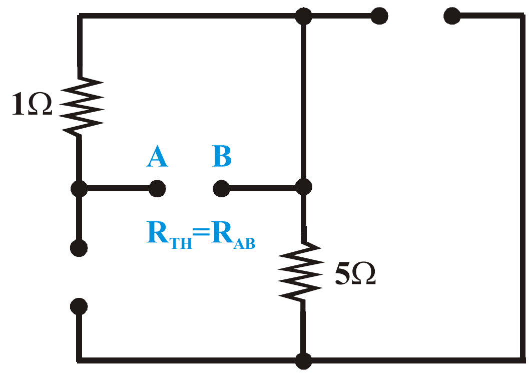
1. Retirar a fonte ideal de tensão.



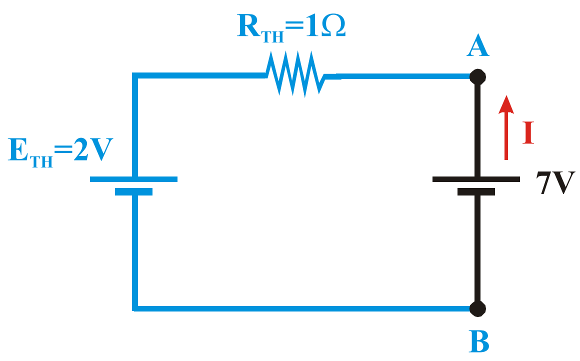
2. Calcular $\mathbf{E_{TH}}$.



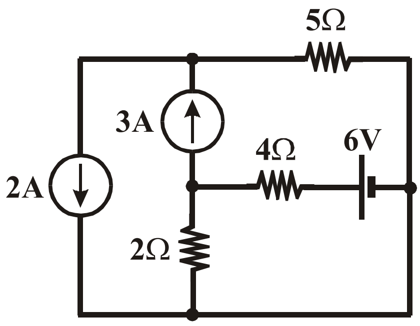
3. Calcular $\mathbf{R_{TH}}$.



4. Ligar a fonte ideal de tensão ao circuito equivalente, calcular **I** e determinar a potência em jogo na fonte ideal de tensão.

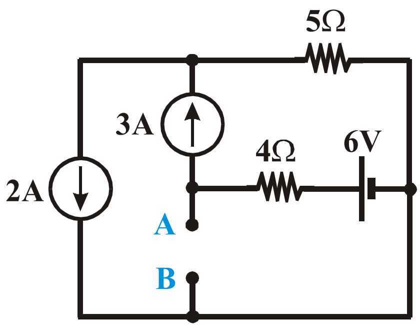


Exemplo: Recorrendo ao Teorema de Thévenin, determinar o valor da potência em jogo na resistência de 2Ω.

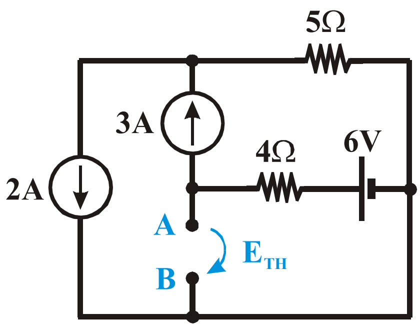


Tópicos de Resolução:

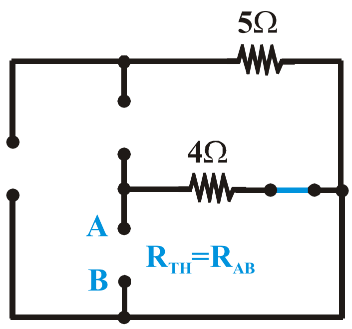
1. Retirar a resistência de 2Ω.



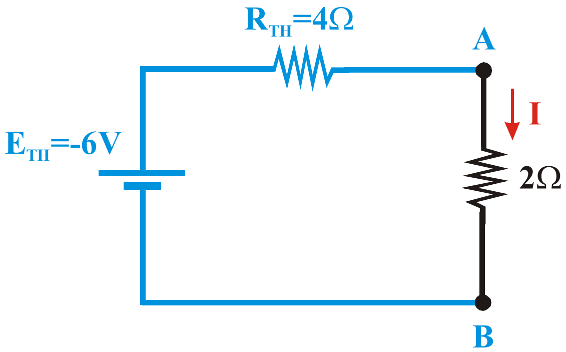
2. Calcular $\mathbf{E_{TH}}$.



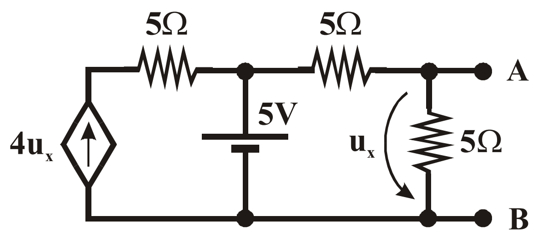
3. Calcular $\mathbf{R_{TH}}$.



4. Ligar a resistência de 2Ω ao circuito equivalente, calcular I e determinar a potência em jogo na resistência de 2Ω.

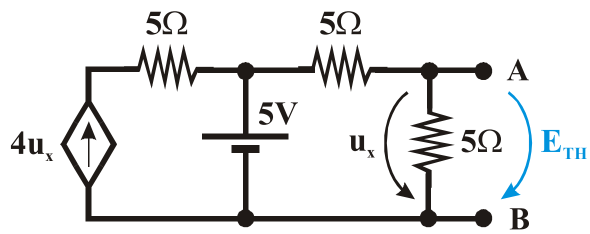


Exemplo: Determinar o equivalente de Thévenin do circuito representado, relativamente aos terminais A e B.

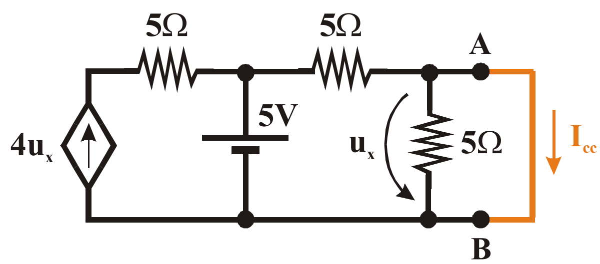


Tópicos de Resolução:

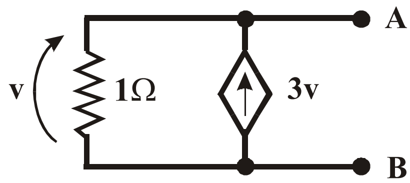
1. Calcular $\mathbf{E_{TH}}$.



2. Calcular $\mathbf{R_{TH}}$ a partir da corrente de curto-circuito $\mathbf{I_{cc}}$.

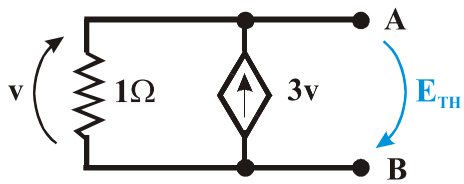


Exemplo: Determinar o equivalente de Thévenin do circuito representado, relativamente aos terminais A e B.

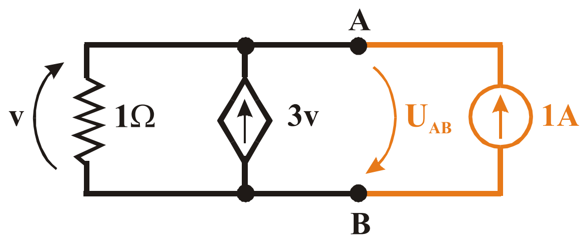


Tópicos de Resolução:

1. Calcular $\mathbf{E_{TH}}$.



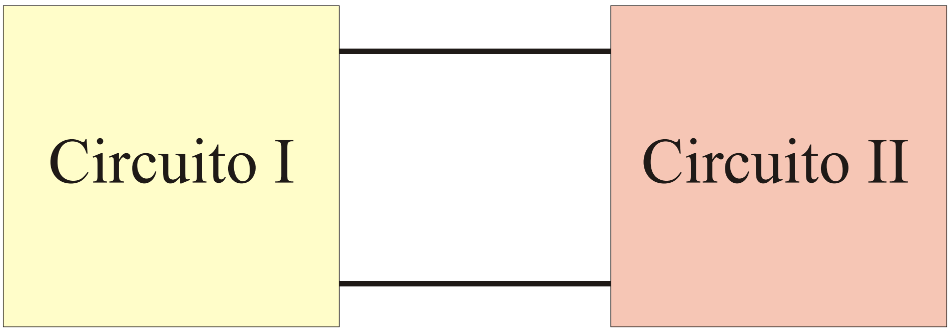
2. Calcular $\mathbf{R_{TH}}$ recorrendo à fonte de corrente de 1A.



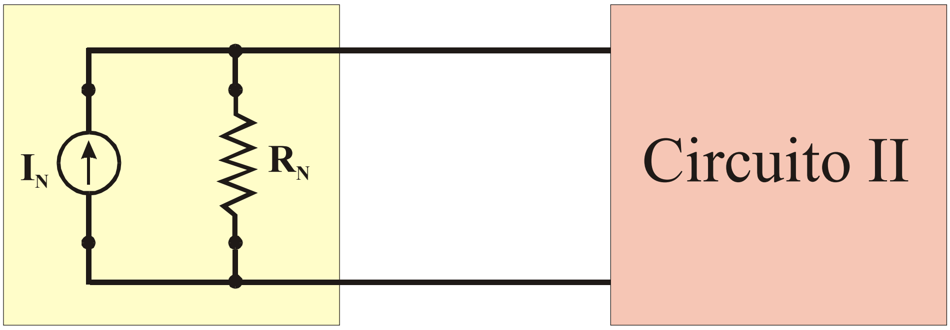
18. Teorema de Norton

Um **circuito I** e um **circuito II** estão ligados entre si por dois condutores ideais e isolados de outros circuitos, verificando-se as seguintes condições:

- O circuito I e o circuito II são **lineares**, podendo conter:
    - resistências;
    - fontes ideais independentes;
    - fontes ideais dependentes lineares.
- Se o circuito I tiver **fontes ideais dependentes lineares**, as tensões e correntes que controlam essas fontes pertencem todas ao circuito I.
- Se o circuito II tiver **fontes ideais dependentes lineares**, as tensões e correntes que controlam essas fontes pertencem todas ao circuito II.



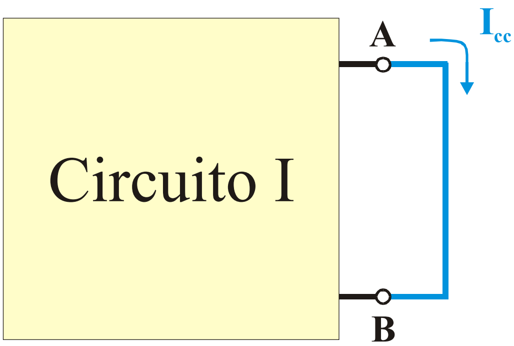
Nestas circunstâncias, todas as tensões e correntes que existem no **circuito II** continuam a ser as mesmas se o **circuito I** for substituído pelo seu **Equivalente de Norton**.

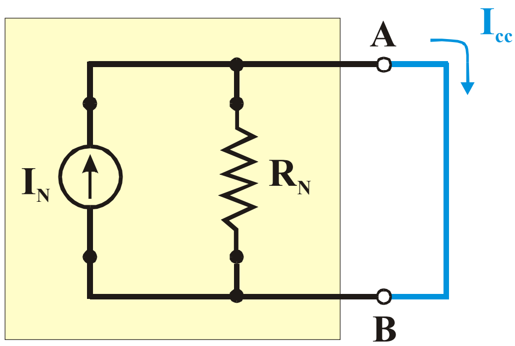


18.1 Determinação de I_N

Se os dois condutores ideais que ligam o circuito I ao circuito II forem cortados, no circuito I formam-se dois terminais, A e B.

I_N é a **corrente de curto-circuito** (**I_{cc}**) relativa aos terminais A e B, ou seja, a corrente que passa num condutor ideal colocado entre esses terminais.

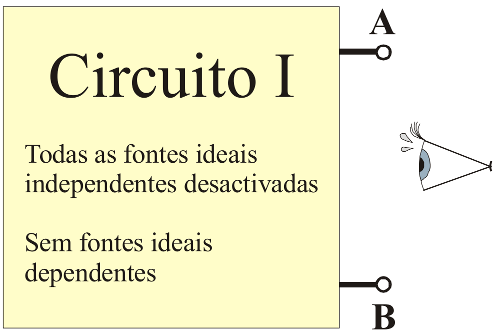


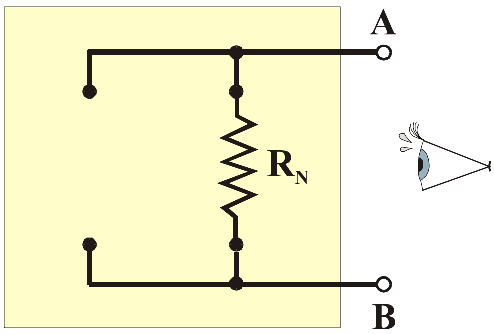


$\boxed{I_N = I_{cc}}$ $\boxed{I_N = I_{cc}}$

18.2 Determinação de R_N com o circuito desactivado, por análise de associações de resistências

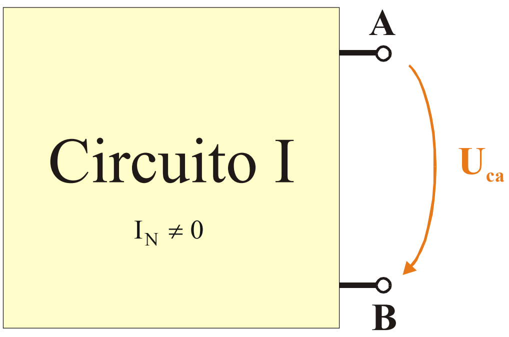
Este método não se pode aplicar quando o circuito possui fontes ideais dependentes.

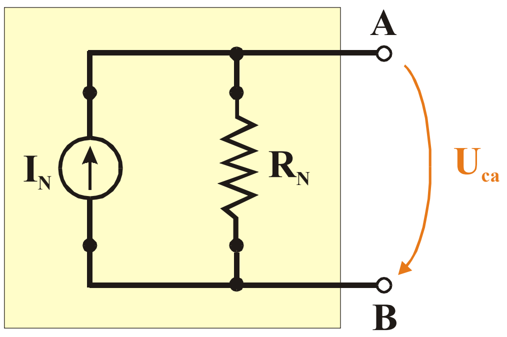




$\boxed{R_N = R_{AB}}$ $\boxed{R_N = R_{AB}}$

18.3 Determinação de R_N sem desactivação do circuito



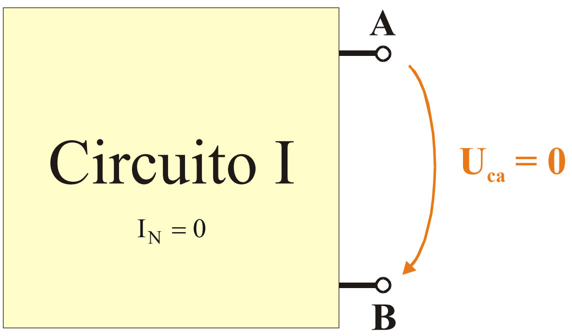


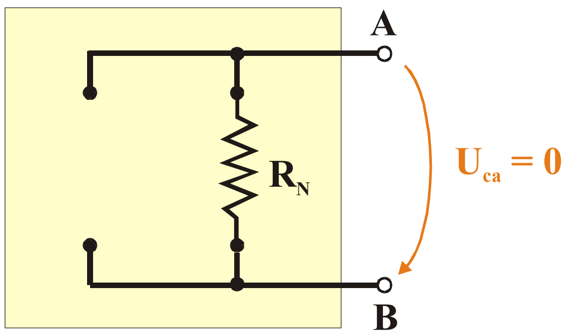
$$\boxed{R_N = \frac{U_{ca}}{I_N}}$$

$$\boxed{R_N = \frac{U_{ca}}{I_N}}$$

18.4 Determinação de R_N quando I_N é nulo, sem análise de associações de resistências

Quando $I_N = 0$, não é possível calcular R_N recorrendo à tensão de circuito aberto, uma vez que esta também é nula.

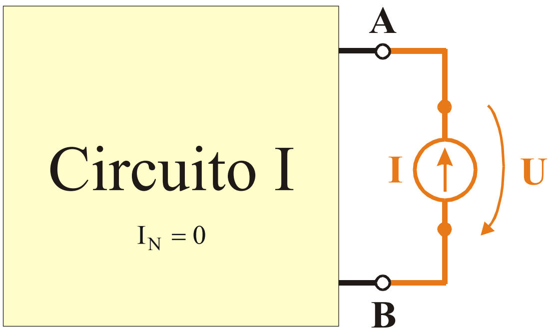




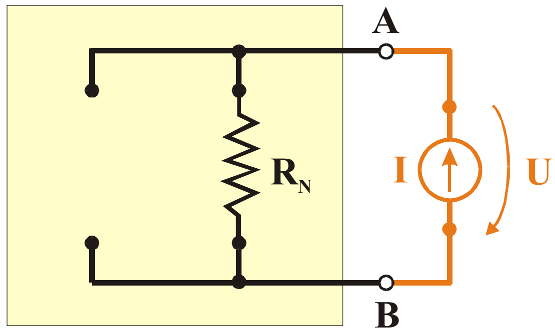
$$\boxed{U_{ca} = 0}$$

$$\boxed{U_{ca} = 0}$$

18.4.1 Recurso a uma fonte ideal de corrente

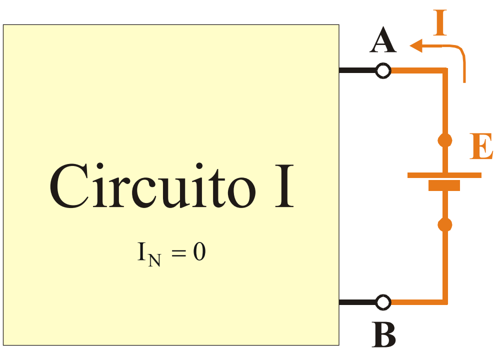


$$R_N = \frac{U}{I}$$

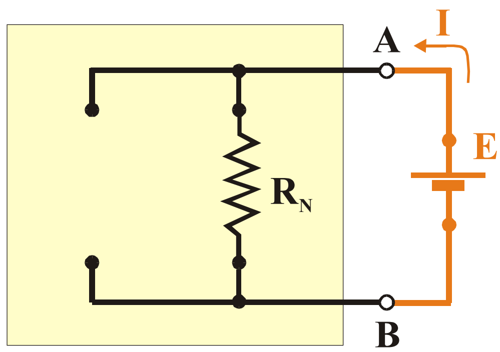


$$R_N = \frac{U}{I}$$

18.4.2 Recurso a uma fonte ideal de tensão

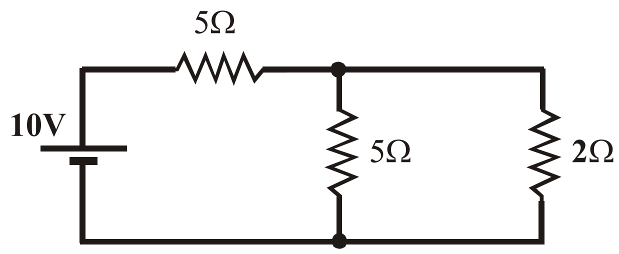


$$R_N = \frac{E}{I}$$



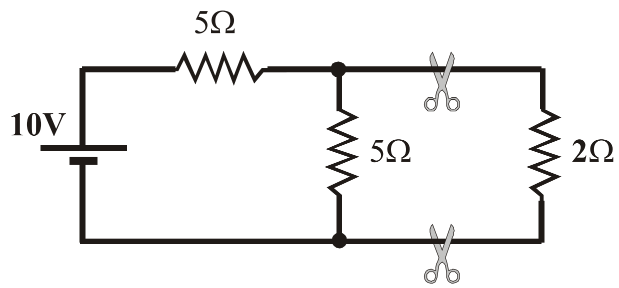
$$R_N = \frac{E}{I}$$

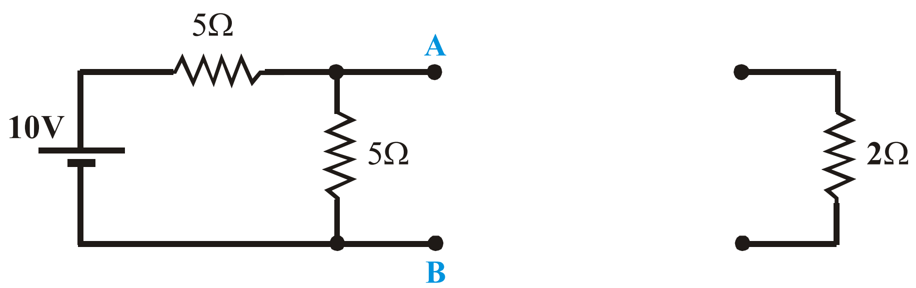
Exemplo: Recorrendo ao Teorema de Norton, determinar o valor da corrente que atravessa a resistência de 2Ω.



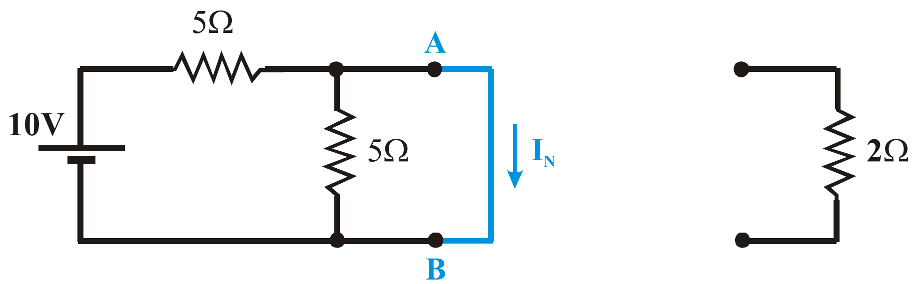
Tópicos de Resolução:

1. Retirar a resistência de 2Ω.

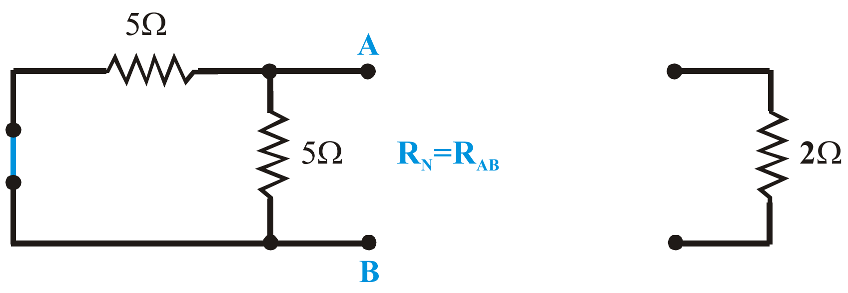




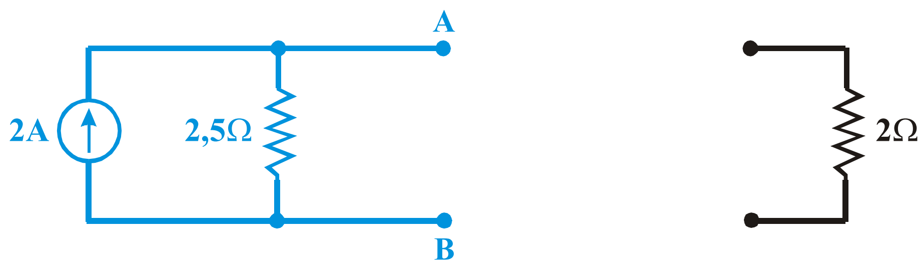
2. Calcular I_N.

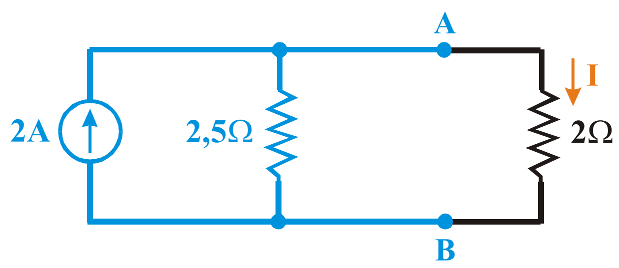


3. Calcular $\mathbf{R_N}$.

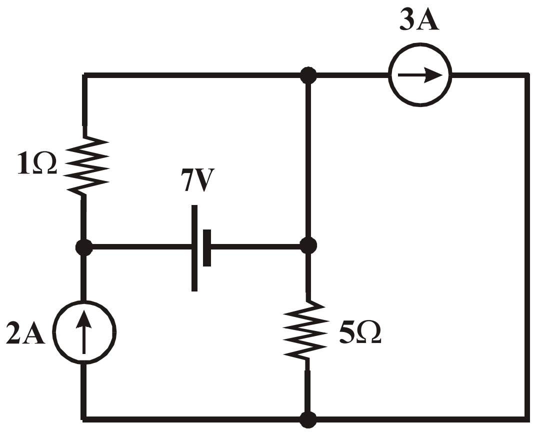


4. Ligar a resistência de 2Ω ao circuito equivalente e calcular **I**.



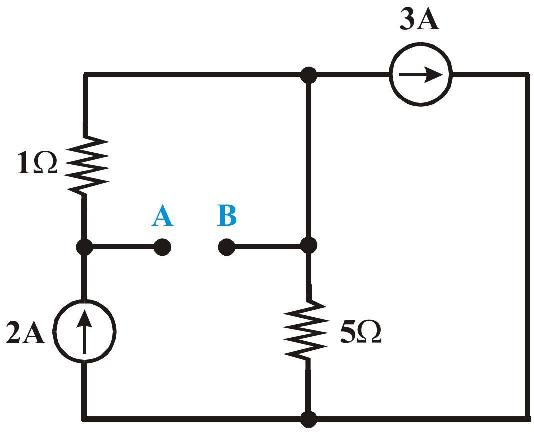


Exemplo: Recorrendo ao Teorema de Norton, determinar o valor da potência em jogo na fonte ideal de tensão.

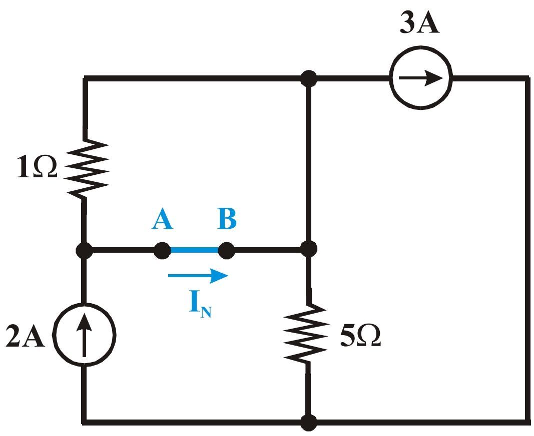


Tópicos de Resolução:

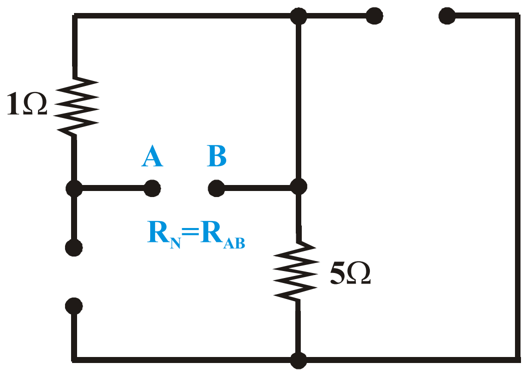
1. Retirar a fonte ideal de tensão.



2. Calcular $\mathbf{I_N}$.

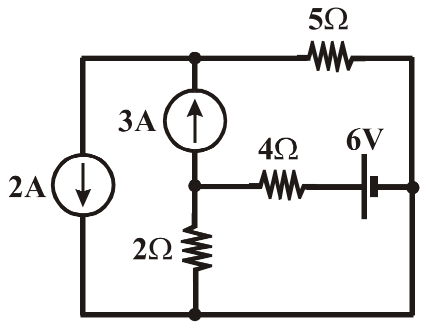


3. Calcular $\mathbf{R_N}$.



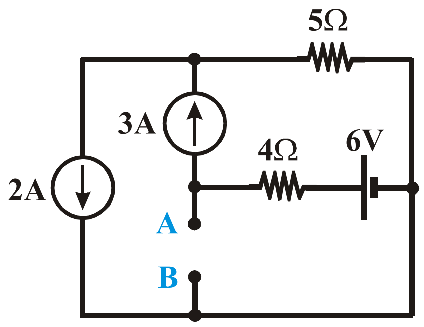
4. Ligar a fonte ideal de tensão ao circuito equivalente e determinar a potência em jogo nessa fonte.

Exemplo: Recorrendo ao Teorema de Norton, determinar o valor da potência em jogo na resistência de 2Ω.

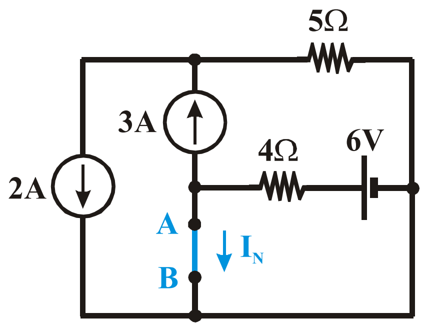


Tópicos de Resolução:

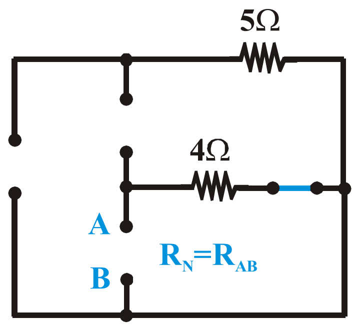
1. Retirar a resistência de 2Ω.



2. Calcular $\mathbf{I_N}$.

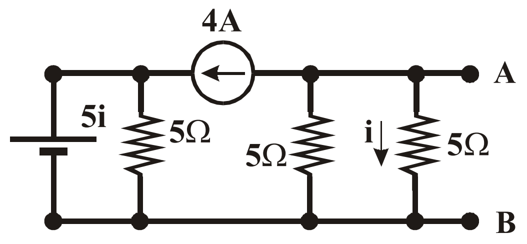


3. Calcular $\mathbf{R_N}$.



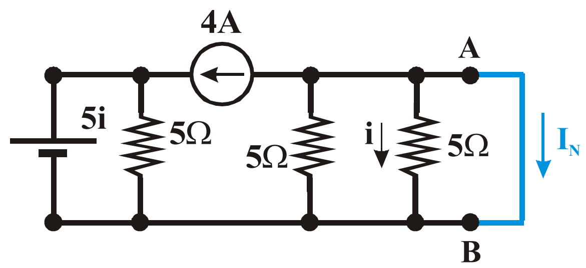
4. Ligar a resistência de 2Ω ao circuito equivalente e determinar a potência em jogo nessa resistência.

Exemplo: Determinar o equivalente de Norton do circuito representado, relativamente aos terminais A e B.

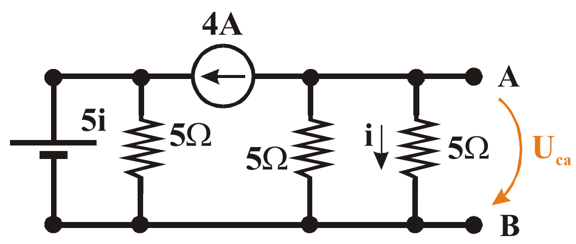


Tópicos de Resolução:

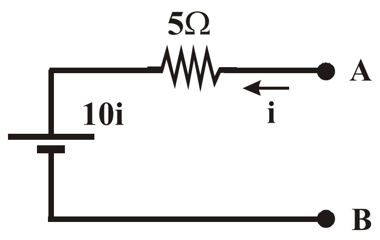
1. Calcular $\mathbf{I_N}$.



2. Calcular $\mathbf{R_N}$ a partir da tensão de circuito aberto $\mathbf{U_{ca}}$.

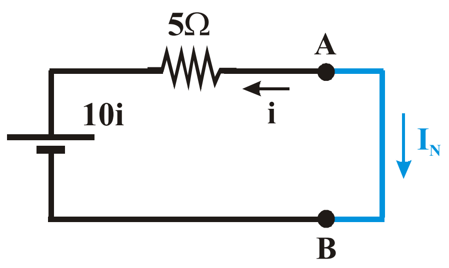


Exemplo: Determinar o equivalente de Norton do circuito representado, relativamente aos terminais A e B.

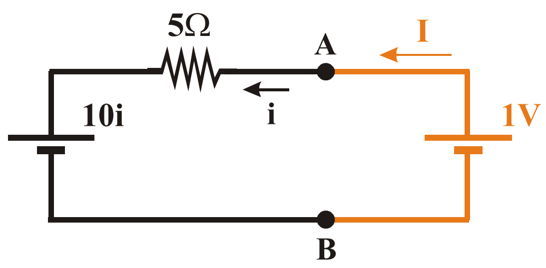


Tópicos de Resolução:

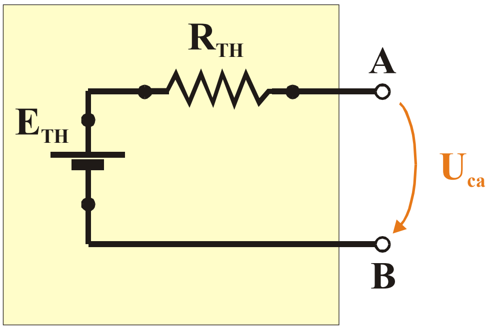
1. Calcular $\mathbf{I_N}$.

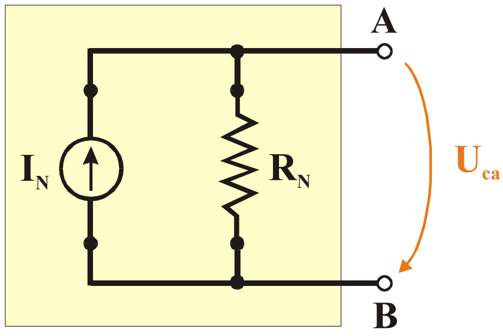


3. Calcular $\mathbf{R_N}$ recorrendo à fonte ideal de tensão de 1V.



19. Relação Existente Entre o Equivalente de Thévenin e o Equivalente de Norton

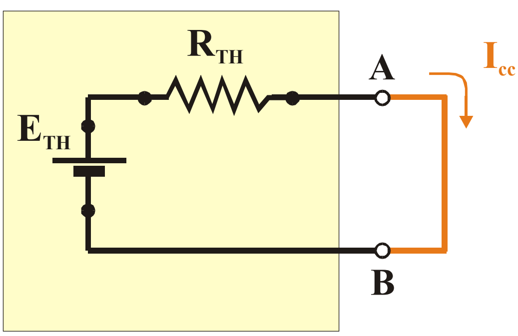


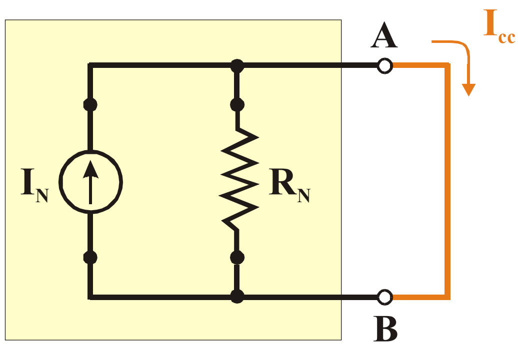


$$U_{ca} = E_{TH}$$

$$U_{ca} = R_N \cdot I_N$$

$$E_{TH} = R_N \cdot I_N$$

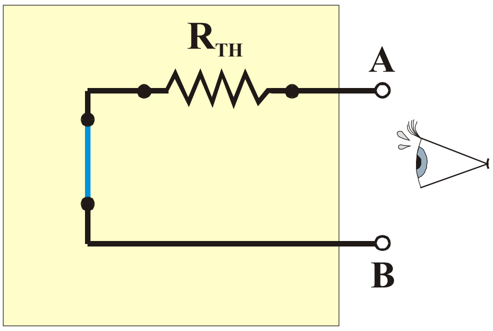


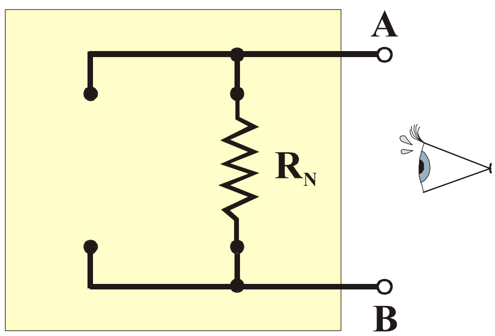


$$I_{cc} = \frac{E_{TH}}{R_{TH}}$$

$$I_{cc} = I_N$$

$$I_N = \frac{E_{TH}}{R_{TH}}$$





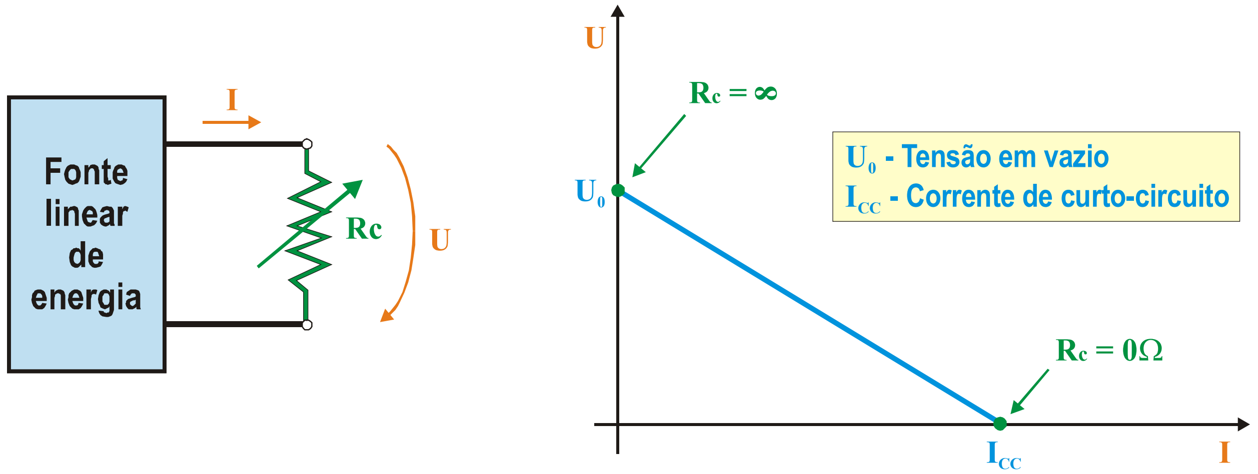
$$R_{AB} = R_{TH}$$

$$R_{AB} = R_N$$

$$R_{TH} = R_N$$

20. Fontes Lineares de Energia

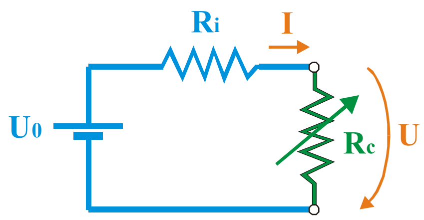
Numa **fonte linear de energia**, a característica U=f(I) é uma recta.



20.1 Equivalente de Thévenin de uma Fonte Linear de Energia

- A característica **U=f(I)** corresponde à equação:

$$\boxed{U = U_0 - \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I} \qquad \frac{U_0}{I_{CC}} = R_i \;\Rightarrow\; \boxed{U = U_0 - R_i \cdot I}$$



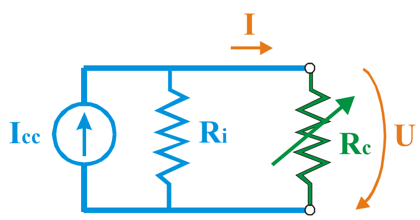
- A partir do modelo equivalente obtêm-se as equações **U=f(R$_c$)** e **I=f(R$_c$)**:

$$\boxed{\begin{array}{l} U = \dfrac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 \\ I = \dfrac{U_0}{R_i + R_C} \end{array}}$$

20.2 Equivalente de Norton de uma Fonte Linear de Energia

- A característica **I=f(U)** corresponde à equação:

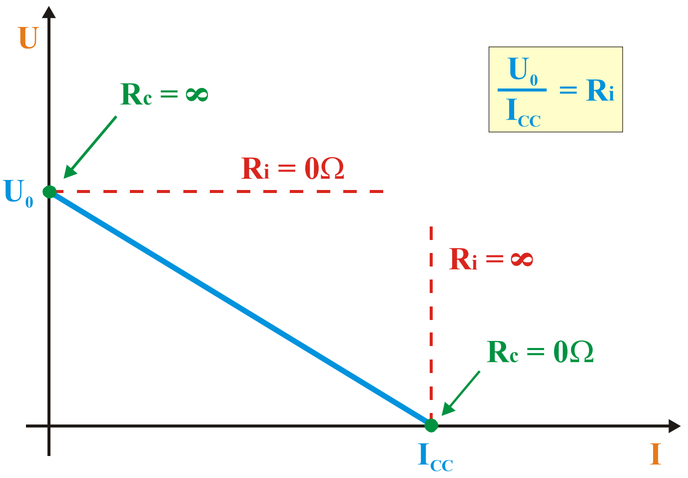
$$\boxed{I = I_{CC} - \frac{U}{\frac{U_0}{I_{CC}}}} \qquad \frac{U_0}{I_{CC}} = R_i \;\Rightarrow\; \boxed{I = I_{CC} - \frac{U}{R_i}}$$



- A partir do modelo equivalente obtêm-se as equações **I=f(R$_c$)** e **U=f(R$_c$)**:

$$\boxed{\begin{array}{l} I = \dfrac{R_i}{R_i + R_C} \cdot I_{CC} \\ U = \dfrac{R_i \cdot R_C}{R_i + R_C} \cdot I_{CC} \end{array}}$$

20.3 Aproximação de uma Fonte de Energia a uma Fonte Ideal de Tensão ou a uma Fonte Ideal de Corrente



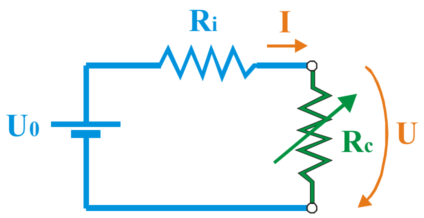
- Fonte ideal de tensão ($I_{CC} = \infty$)

$$\boxed{\frac{U_0}{I_{CC}} = R_i = 0\Omega}$$

- Fonte ideal de corrente ($U_0 = \infty$)

$$\boxed{\frac{U_0}{I_{CC}} = R_i = \infty}$$

- Fonte real

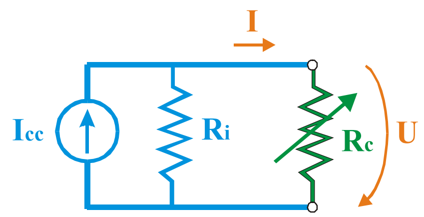


$$\boxed{\begin{aligned} U &= \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 \\ I &= \frac{U_0}{R_i + R_C} \end{aligned}}$$

$$\boxed{R_c >> R_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} U &\approx U_0 \\ I &\approx \frac{U_0}{R_C} \end{aligned}}$$

Se $R_C >> R_i$ a fonte aproxima-se de uma fonte ideal de tensão, uma vez que U varia pouco com R_C.

- Fonte real



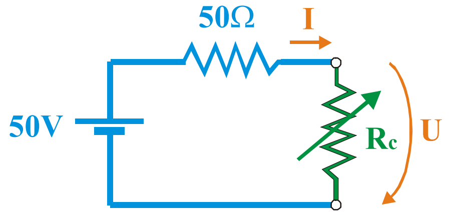
$$\boxed{\begin{aligned} I &= \frac{R_i}{R_i + R_C} \cdot I_{CC} \\ U &= \frac{R_i \cdot R_C}{R_i + R_C} \cdot I_{CC} \end{aligned}}$$

$$\boxed{R_c << R_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} I &\approx I_{CC} \\ U &\approx R_C I_{CC} \end{aligned}}$$

Se $R_C << R_i$ a fonte aproxima-se de uma fonte ideal de corrente, uma vez que I varia pouco com R_C.

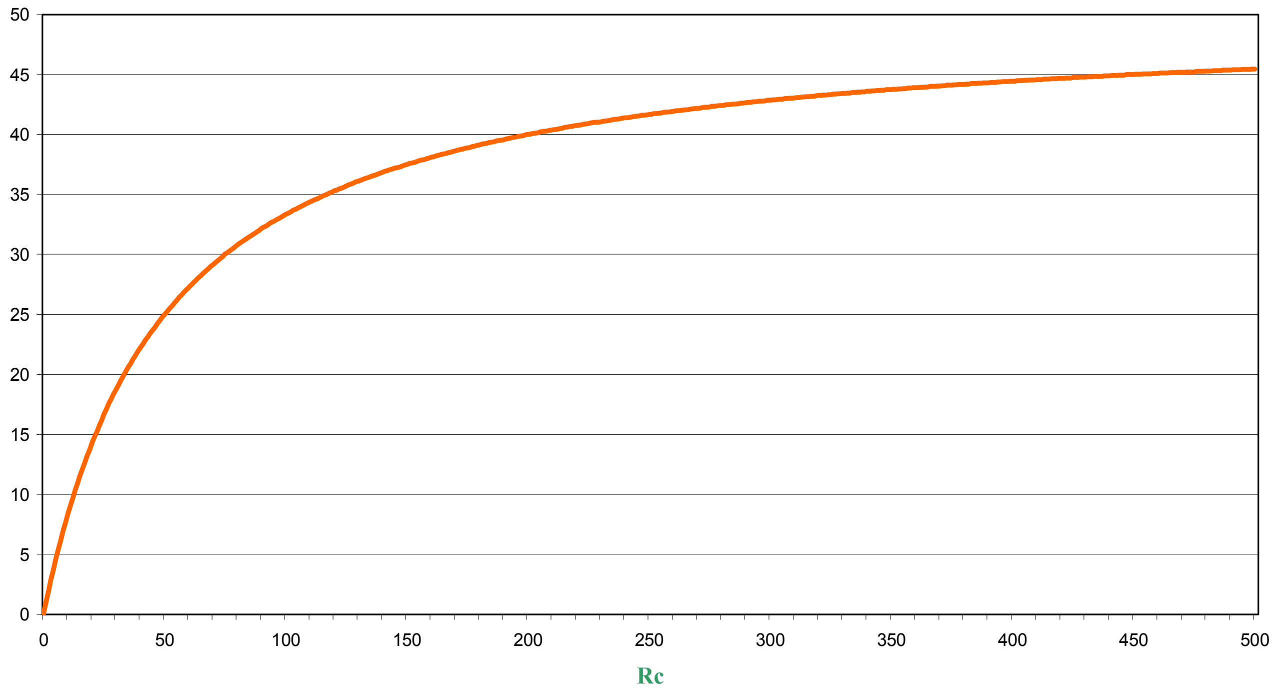
Exemplo:

$$U_0 = 50\text{V} \qquad R_i = 50\Omega$$

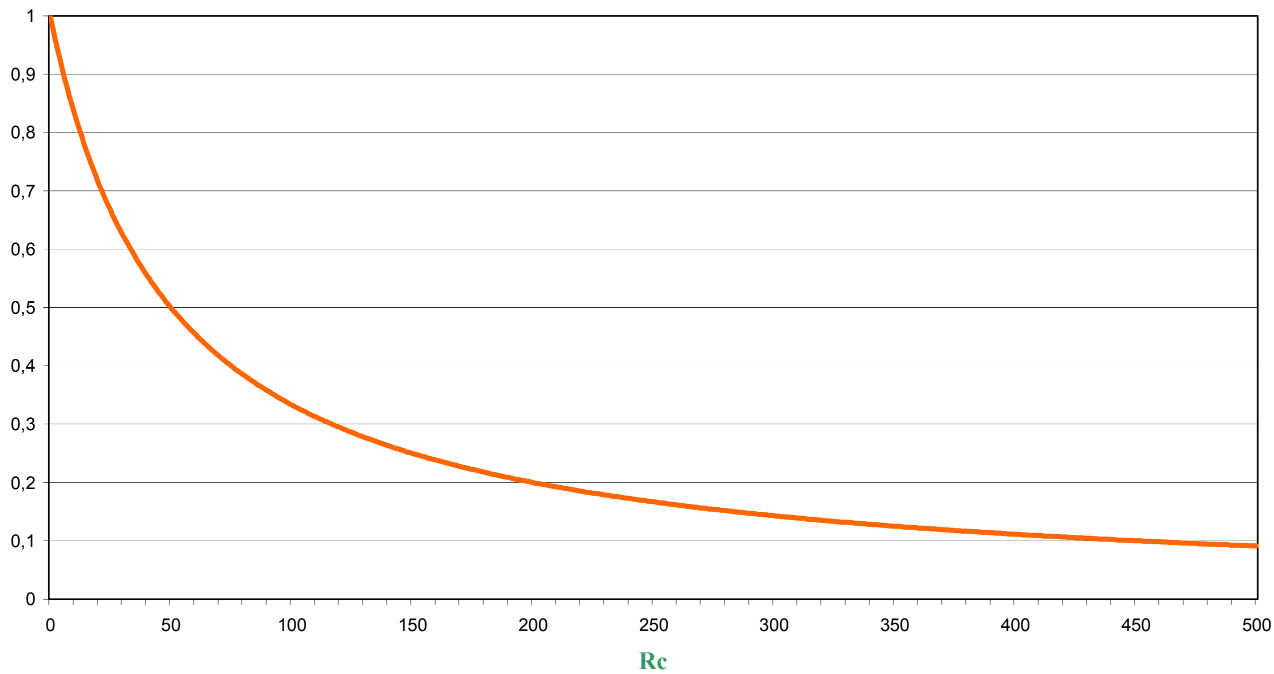


$$\begin{cases} U = \dfrac{R_C}{50 + R_C} \cdot 50 \\[2ex] I = \dfrac{50}{50 + R_C} \end{cases}$$

U = f(Rc)



I = f(Rc)



$$\boxed{0{,}5\Omega \le R_C \le 5\Omega}$$

$$\boxed{R_C = 0{,}5\Omega}$$

$$U_{0,5\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{0{,}5}{50 + 0{,}5} \cdot 50 = 0{,}495\text{V}$$

$$I_{0,5\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{50}{50 + 0{,}5} = 0{,}990\text{A}$$

$$\boxed{R_C = 5\Omega}$$

$$U_{5\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{5}{50 + 5} \cdot 50 = 4{,}545\text{V}$$

$$I_{5\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{50}{50 + 5} = 0{,}909\text{A}$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 0,5Ω para 5Ω:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{U_{5\Omega} - U_{0,5\Omega}}{U_{0,5\Omega}} = \dfrac{4{,}545 - 0{,}495}{0{,}495} = 8{,}182 = 818{,}2\% \\ \dfrac{I_{5\Omega} - I_{0,5\Omega}}{I_{0,5\Omega}} = \dfrac{0{,}909 - 0{,}990}{0{,}990} = -0{,}082 = -8{,}2\% \end{array}}$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 5Ω para 0,5Ω:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{U_{0,5\Omega} - U_{5\Omega}}{U_{5\Omega}} = \dfrac{0{,}495 - 4{,}545}{4{,}545} = -0{,}891 = -89{,}1\% \\ \dfrac{I_{0,5\Omega} - I_{5\Omega}}{I_{5\Omega}} = \dfrac{0{,}990 - 0{,}909}{0{,}909} = 0{,}089 = 8{,}9\% \end{array}}$$

- A fonte aproxima-se mais de uma **fonte ideal de corrente** do que de uma fonte ideal de tensão porque a variação relativa da corrente é menor.

$$\boxed{25\Omega \le R_C \le 100\Omega}$$

$$\boxed{R_C = 25\Omega}$$

$$U_{25\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{25}{50 + 25} \cdot 50 = 16{,}666\text{V}$$

$$I_{25\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{50}{25 + 50} = 0{,}666\text{A}$$

$$\boxed{R_C = 100\Omega}$$

$$U_{100\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{100}{50 + 100} \cdot 50 = 33{,}333\text{V}$$

$$I_{100\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{50}{50 + 100} = 0{,}333\text{A}$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 25Ω para 100Ω:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{U_{100\Omega} - U_{25\Omega}}{U_{25\Omega}} = \dfrac{33{,}333 - 16{,}666}{16{,}666} = 1{,}000 = 100{,}0\% \\ \dfrac{I_{100\Omega} - I_{25\Omega}}{I_{25\Omega}} = \dfrac{0{,}333 - 0{,}666}{0{,}666} = -0{,}500 = -50{,}0\% \end{array}}$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 100Ω para 25Ω:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{U_{25\Omega} - U_{100\Omega}}{U_{100\Omega}} = \dfrac{16{,}666 - 33{,}333}{33{,}333} = -0{,}500 = -50{,}0\% \\ \dfrac{I_{25\Omega} - I_{100\Omega}}{I_{100\Omega}} = \dfrac{0{,}666 - 0{,}333}{0{,}333} = 1{,}000 = 100{,}0\% \end{array}}$$

- A fonte aproxima-se igualmente mal de uma fonte ideal de corrente e de uma fonte ideal de tensão.

$$\boxed{400\Omega \le R_C \le 500\Omega}$$

$$\boxed{R_C = 400\Omega}$$

$$U_{400\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{400}{50 + 400} \cdot 50 = 44{,}444\text{V}$$

$$I_{400\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{50}{50 + 400} = 0{,}111\text{A}$$

$$\boxed{R_C = 500\Omega}$$

$$U_{500\Omega} = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 = \frac{500}{50 + 500} \cdot 50 = 45{,}455\text{V}$$

$$I_{500\Omega} = \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{50}{50 + 500} = 0{,}091\text{A}$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 400Ω para 500Ω:

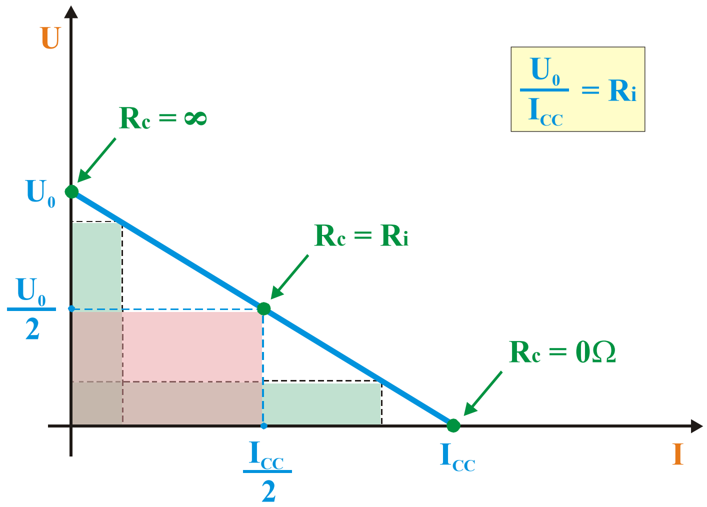
$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{U_{500\Omega} - U_{400\Omega}}{U_{400\Omega}} = \dfrac{45{,}455 - 44{,}444}{44{,}444} = 0{,}023 = 2{,}3\% \\ \dfrac{I_{500\Omega} - I_{400\Omega}}{I_{400\Omega}} = \dfrac{0{,}091 - 0{,}111}{0{,}111} = -0{,}180 = -18{,}0\% \end{array}}$$

Aumentos relativos de tensão e de corrente quando Rc passa de 500Ω para 400Ω:

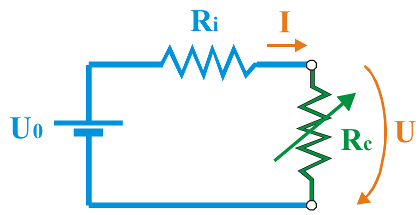
$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{U_{400\Omega} - U_{500\Omega}}{U_{005\Omega}} = \dfrac{44{,}444 - 45{,}455}{45{,}455} = -0{,}022 = -2{,}2\% \\ \dfrac{I_{400\Omega} - I_{500\Omega}}{I_{500\Omega}} = \dfrac{0{,}111 - 0{,}091}{0{,}091} = 0{,}219 = 21{,}9\% \end{array}}$$

- A fonte aproxima-se mais de uma **fonte ideal de tensão** do que de uma fonte ideal de corrente porque a variação relativa da tensão é menor.

20.4 Transferência Máxima de Potência de uma Fonte para uma Carga Resistiva



$$\begin{cases} U = \dfrac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 \\ I = \dfrac{U_0}{R_i + R_C} \end{cases} \Rightarrow \quad P = U \cdot I = \frac{R_C}{R_i + R_C} \cdot U_0 \cdot \frac{U_0}{R_i + R_C} = \frac{R_C}{(R_i + R_C)^2} \cdot U_0^2$$



$$\frac{dP}{dR_C} = \frac{(R_i + R_C)^2 - 2 \cdot R_C \cdot (R_i + R_C)}{(R_i + R_C)^4} \cdot U_0^2$$

$$= \frac{R_i - R_C}{(R_i + R_C)^3} \cdot U_0^2$$

$$\frac{dP}{dR_C} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = R_i$$

$$R_C < R_i \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dR_c} > 0$$

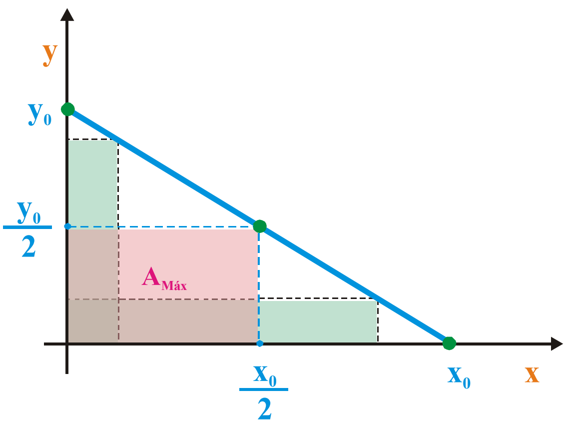
$$R_C > R_i \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dR_c} < 0$$

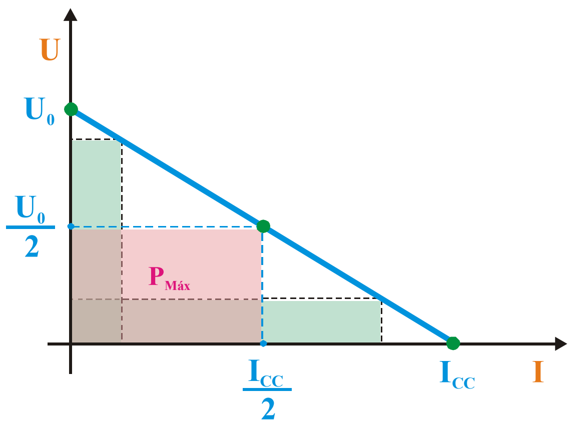
Conclusão: a **potência em R_C é máxima** quando **$R_C = R_i$**

Nessas circunstâncias:

$$\begin{cases} U = \dfrac{R_i}{R_i + R_i} \cdot U_0 = \dfrac{U_0}{2} \\ I = \dfrac{U_0}{R_i + R_i} = \dfrac{U_0}{2 \cdot R_i} = \dfrac{I_{CC}}{2} \end{cases}$$

Demonstração geométrica...





$$\begin{cases} A = x \cdot y \\ y = y_0 - \dfrac{y_0}{x_0} \cdot x \end{cases} \Rightarrow \quad A = y_0 \cdot x - \frac{y_0}{x_0} \cdot x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_0 - 2 \cdot \frac{y_0}{x_0} \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{x_0}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{y_0}{2}$$

$$x < \frac{x_0}{2} \quad \Rightarrow \quad y_0 - 2 \cdot \frac{y_0}{x_0} \cdot x > 0$$

$$x > \frac{x_0}{2} \quad \Rightarrow \quad y_0 - 2 \cdot \frac{y_0}{x_0} \cdot x < 0$$

Conclusão: o **valor máximo de A** ocorre no ponto de coordenadas

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_0}{2} \\ y = \dfrac{y_0}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = U \cdot I \\ U = U_0 - \dfrac{U_0}{I_{CC}} \cdot I \end{cases} \Rightarrow \quad P = U_0 \cdot I - \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I^2$$

$$\frac{dP}{dI} = 0$$

$$\Rightarrow \quad U_0 - 2 \cdot \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I = 0$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{I_{CC}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{U_0}{2}$$

$$I < \frac{I_{CC}}{2} \quad \Rightarrow \quad U_0 - 2 \cdot \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I > 0$$

$$I > \frac{I_{CC}}{2} \quad \Rightarrow \quad U_0 - 2 \cdot \frac{U_0}{I_{CC}} \cdot I < 0$$

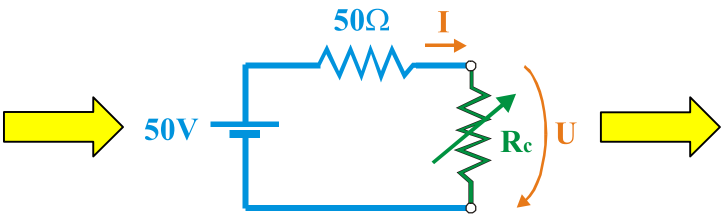
Conclusão: o **valor máximo de P** ocorre no ponto de coordenadas

$$\begin{cases} I = \dfrac{I_0}{2} \\ U = \dfrac{U_0}{2} \end{cases}$$

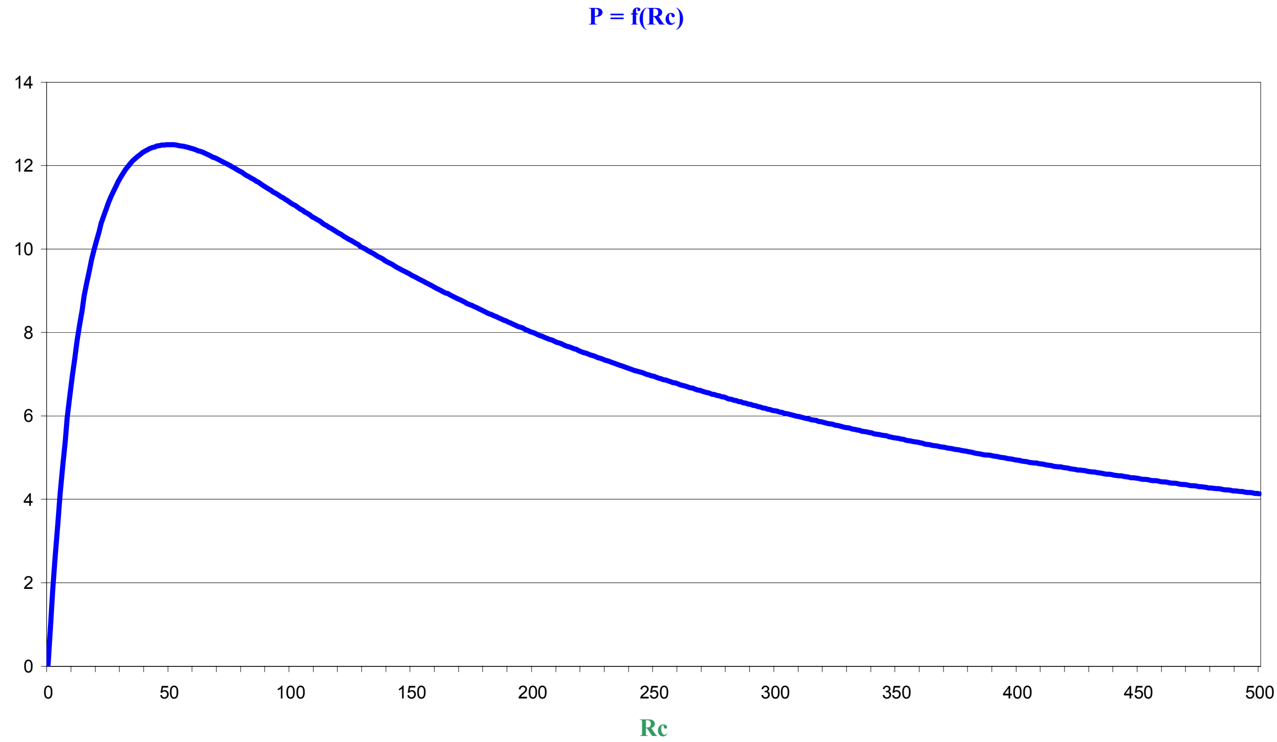
Exemplo:

$U_0 = 50\text{V}$

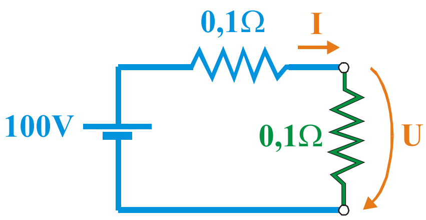
$R_i = 50\Omega$



$$\begin{cases} U = \dfrac{R_C}{50+R_C}\cdot 50 \\ I = \dfrac{50}{50+R_C} \end{cases} \Rightarrow \; P = \frac{2500\cdot R_C}{(50+R_C)^2}$$



A **transferência máxima de potência** de uma fonte para uma carga **nem sempre é desejável!**



$$U = \frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}1}\cdot 100 = 50\text{V} \quad (\text{apenas metade de } 100\text{V})$$

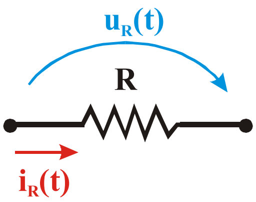
$$I = \frac{100}{0{,}1+0{,}1} = 500\text{A} \qquad (!...)$$

21. Circuitos com Resistências, Bobinas e Condensadores

Resistência Ideal

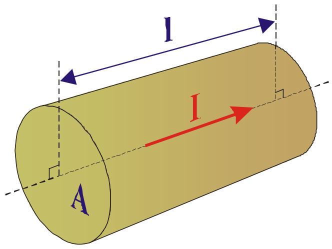
R - **Resistência eléctrica**

Unidade: **ohm (Ω)**



Lei de Ohm: $\boxed{u_R(t) = R \cdot i_R(t)}$

Para um condutor eléctrico:



$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{l}{A}}$$

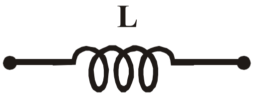
R[Ω] – Resistência eléctrica do condutor

ρ [Ω·m] – Resistividade do material condutor

l [m] – Comprimento do condutor

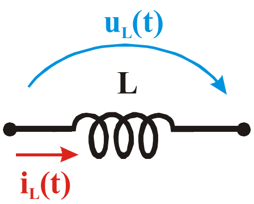
A [m²] – Área da secção recta transversal do condutor

Bobina Ideal



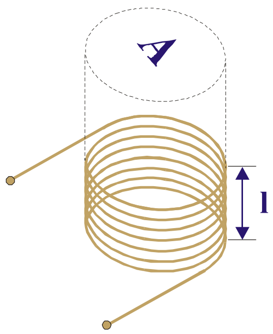
L - **Coeficiente de auto-indução**

Unidade: **henry (H)**



$$\boxed{u_L(t) = L \cdot \frac{d[i_L(t)]}{dt}}$$

Para um solenóide:



$$\boxed{L = \mu \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l}}$$

L [H] – Coeficiente de auto-indução do solenóide

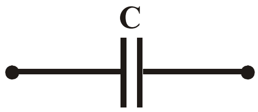
μ [H·m⁻¹] – Permeabilidade (absoluta, não relativa) do material do núcleo (ar, no exemplo da figura)

N – Número de espiras do solenóide

A [m²] – Área da secção recta transversal do solenóide

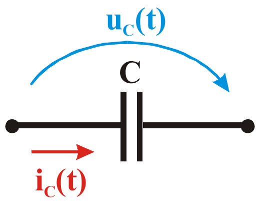
l [m] – Comprimento do solenóide

Condensador Ideal



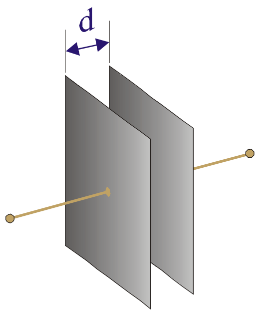
C - **Capacidade**

Unidade: **farad (F)**



$$\boxed{i_C(t) = C \cdot \frac{d[u_C(t)]}{dt}}$$

Para um condensador de placas paralelas:



$$\boxed{C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}}$$

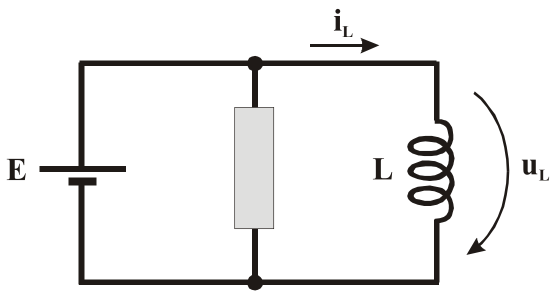
C [F] – Capacidade do condensador

ε [F·m⁻¹] – Permitividade (absoluta, não relativa) do dieléctrico existente entre as placas (ar, no exemplo da figura)

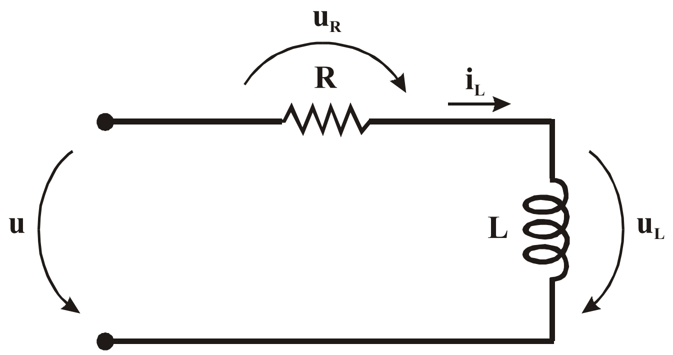
A [m²] – Área da sobreposição das placas do condensador (área de cada placa, no caso de as placas serem iguais e estarem alinhadas uma com a outra)

d [m] – Distância existente entre as placas do condensador

21.1 Circuitos RL

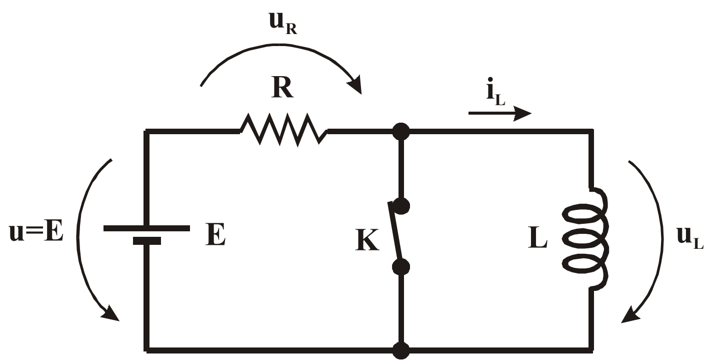


$$u_L(t) = E = L \cdot \frac{d[i_L(t)]}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d[i_L(t)]}{dt} = \frac{E}{L}} \text{ (A/s)}$$



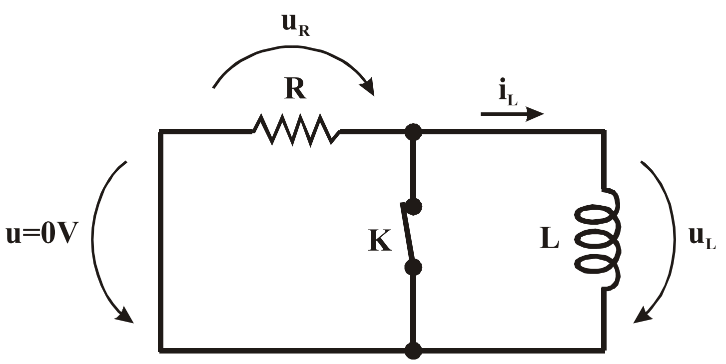
$$\begin{cases} u_L(t) = u(t) - u_R(t) = u_L(t) - R \cdot i_L(t) \\ u_L(t) = L \cdot \dfrac{d[i_L(t)]}{dt} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{d[i_L(t)]}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i_L(t) = \frac{u(t)}{L}}$$

Constante de tempo do circuito: $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$ (s)



$$\text{Caso particular:}\begin{cases} u(t) = E \;\Rightarrow\; \dfrac{d[i_L(t)]}{dt} + \dfrac{R}{L}\cdot i_L(t) = \dfrac{E}{L} \\ i_L(t) = 0 \text{ em } t = t_0 \\ k \text{ é aberto em } t = t_0 \end{cases}$$

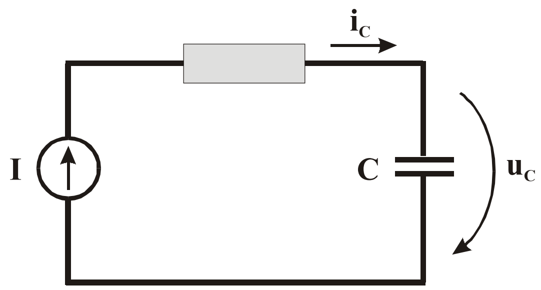
$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} i_L(t) = \dfrac{E}{R} - \dfrac{E}{R}\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot(t-t_0)} \\ u_L(t) = u(t) - u_R(t) = E - R\cdot i_L(t) = E\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot(t-t_0)} \end{array}}$$



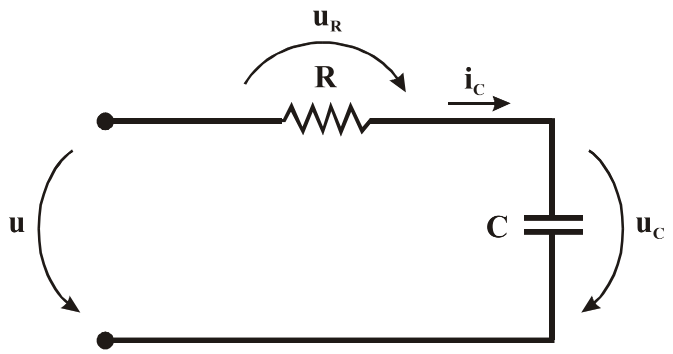
$$\text{Caso particular:}\begin{cases} u(t) = 0V \;\Rightarrow\; \dfrac{d[i_L(t)]}{dt} + \dfrac{R}{L}\cdot i_L(t) = 0 \\ i_L(t) = I_0 \text{ em } t = t_0 \\ k \text{ é aberto em } t = t_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{i_L(t) = I_0\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot(t-t_0)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} i_L(t) = I_0\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot(t-t_0)} \\ u_L(t) = u(t) - u_R(t) = 0 - R\cdot i_L(t) = -R\cdot I_0\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot(t-t_0)} \end{array}}$$

21.2 Circuitos RC

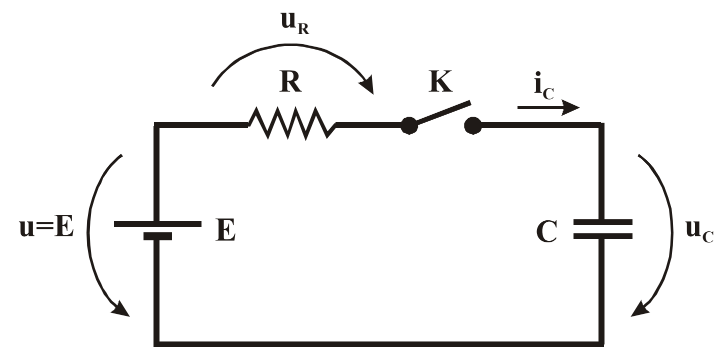


$$i_C(t) = I = C \cdot \frac{d[u_C(t)]}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d[u_C(t)]}{dt} = \frac{I}{C}} \quad (V/s)$$



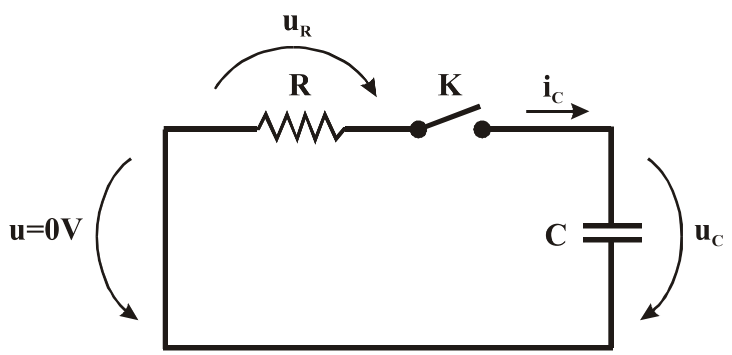
$$\begin{cases} i_C(t) = \dfrac{u(t) - u_C(t)}{R} \\ i_C(t) = C \cdot \dfrac{d[u_C(t)]}{dt} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{d[u_C(t)]}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u_C(t) = \frac{u(t)}{RC}}$$

Constante de tempo do circuito: $\boxed{\tau = RC}$ (s)



Caso particular: $\begin{cases} u(t) = E \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{d[u_C(t)]}{dt} + \dfrac{1}{RC} \cdot u_C(t) = \dfrac{E}{RC} \\ u_C(t) = 0 \text{ em } t = t_0 \\ k \text{ é fechado em } t = t_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u_C(t) = E - E \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)} \\ i_C(t) = \dfrac{u(t)-u_C(t)}{R} = \dfrac{E-u_C(t)}{R} = \dfrac{E}{R}\cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)} \end{array}}$$



Caso particular: $\begin{cases} u(t) = 0V \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{d[u_C(t)]}{dt} + \dfrac{1}{RC} \cdot u_C(t) = 0 \\ u_C(t) = U_0 \text{ em } t = t_0 \\ k \text{ é fechado em } t = t_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)} \\ i_C(t) = \dfrac{u(t)-u_C(t)}{R} = \dfrac{0-u_C(t)}{R} = -\dfrac{U_0}{R}\cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot(t-t_0)} \end{array}}$$

22. Grandezas, Unidades e Prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI)

22.1 Grandezas e Unidades SI

Grandeza		Unidade	
Nome	Símbolo	Nome	Símbolo
potencial eléctrico	U	volt	V
tensão (diferença de potencial, queda de tensão)	U, E	volt	V
corrente eléctrica	I	ampere	A
energia	W	joule	J
potência	P	watt	W
frequência	f	hertz	Hz
resistência eléctrica	R	ohm	Ω
resistividade	ρ	ohm metro	Ω·m
capacidade eléctrica	C	farad	F
permitividade	ε	farad por metro	$F \cdot m^{-1}$
coeficiente de auto-indução	L	henry	H
permeabilidade	μ	henry por metro	$H \cdot m^{-1}$
momento do binário	T	newton metro	N·m

22.2 Prefixos SI

Múltiplos

Nome	Símbolo	Factor multiplicador
yotta	Y	10^{24} = 1 000 000 000 000 000 000 000 000
zetta	Z	10^{21} = 1 000 000 000 000 000 000 000
exa	E	10^{18} = 1 000 000 000 000 000 000
peta	P	10^{15} = 1 000 000 000 000 000
tera	**T**	**10^{12} = 1 000 000 000 000**
giga	**G**	**10^{9} = 1 000 000 000**
mega	**M**	**10^{6} = 1 000 000**
quilo	**k**	**10^{3} = 1000**
hecto	h	10^{2} = 100
deca	da	10^{1} = 10

Submúltiplos

Nome	Símbolo	Factor multiplicador
deci	d	$10^{-1} = 0{,}1$
centi	c	$10^{-2} = 0{,}01$
mili	**m**	$\mathbf{10^{-3} = 0{,}001}$
micro	**µ**	$\mathbf{10^{-6} = 0{,}000\ 001}$
nano	**n**	$\mathbf{10^{-9} = 0{,}000\ 000\ 001}$
pico	**p**	$\mathbf{10^{-12} = 0{,}000\ 000\ 000\ 001}$
fento	f	$10^{-15} = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 001$
ato	a	$10^{-18} = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$
zepto	z	$10^{-21} = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$
yocto	y	$10^{-24} = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$

23. Unidades a Converter ao SI

Nome	Símbolo	Valor correspondente no SI
quilowatt-hora	kWh	3600000J
cavalo-vapor	cv	735,49875W ≅ **735W**
horse power (metric)		735,49875W ≅ **735W**
cheval vapeur (França)	CV	735,49875W ≅ **735W**
pferdestarke (Alemanha)	PS	735,49875W ≅ **735W**
horse power(550ft·lbf/s)	hp *(1hp = 550ft·lbf/s)*	745.69987W ≅ **746W**
horse power (electric)		746W
horse power (Reino Unido)		745,7W
onça-força *(ounce-force)*	ozf	0,27801385N
libra-força *(pound-force)*	lbf	4,4482216N
polegada *(inch)*	in, ´´	0,0254m
pé *(foot)*	ft	0,3048m
onça-força polegada *(ounce-force inch)*	oz·in	0,00706155Nm
rotação por minuto	rot·min^{-1}, r.p.m.	0,104720rad.s^{-1}