Folha 9A – Integrais impróprios.

1. Diga se cada um dos seguintes integrais impróprios é convergente ou divergente. Em caso de convergência determine o valor do integral impróprio (recomenda-se que o aluno faça um esboço do gráfico da função integranda):

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx;$

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}\, dx;$

   (c) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x \, dx;$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx;$

   (e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{2x-1}\, dx.$

2. Verifique que é possível atribuir uma área à região

$$\mathcal{A} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq \frac{4}{2x+1} - \frac{2}{x+2} \right\}.$$

   e determine-a.

   [Neste exercício convém notar que os integrais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4}{2x+1}\, dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x+2}\, dx$ são divergentes.]

3. Uma substância radioactiva decai exponencialmente no tempo de acordo com a lei $m(t) = m(0)e^{ct}$, onde c é uma constante negativa e $m(t)$ a massa da substância no instante t. A duração média de um átomo dessa substância é dada por

$$M = -c \int_0^{+\infty} t e^{ct}\, dt.$$

   Calcule a duração média de um átomo de carbono 14, para o qual $c = -0.000121$.