Sinais e Sistemas

Transformada de *Fourier* – 1ª parte

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Introdução

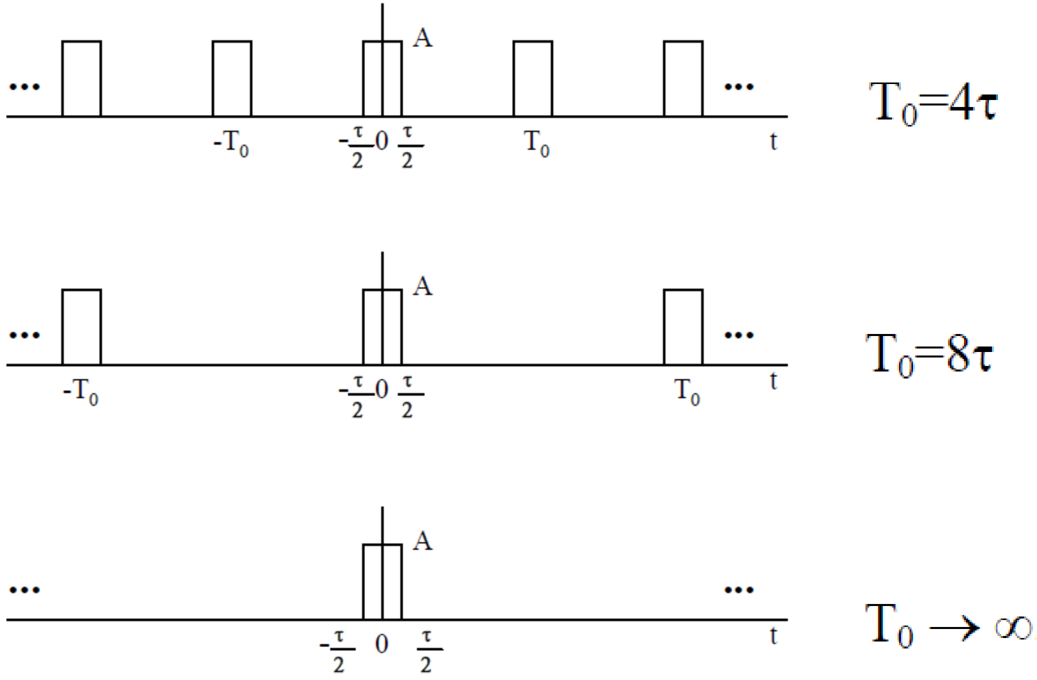
- Vamos agora estudar como uma função não-periódica pode ser expressa através de uma soma contínua de funções exponenciais com frequências no intervalo -∞ a +∞
- O conceito de espectro contínuo irá agora ser introduzido
  - Até agora foram apenas estudados espectros de frequências discretos e com amplitudes finitas, como acontece com a série de *Fourier*

Introdução

- Será agora estudada, a transformada de *Fourier* que constitui uma ferramenta que permite decompor um determinado sinal nas suas componentes exponenciais
- A transformada de *Fourier* $X(f)$ fornece a informação da contribuição de cada componente de frequência, em módulo e fase, para o sinal $x(t)$
- Na série de *Fourier* também havia esta contribuição, mas para frequências discretas. No caso da transformada, esta contribuição ocorre num *espectro contínuo de frequência*

Introdução

- As figuras abaixo mostram vários exemplos de ondas rectangulares periódicas com largura τ e período T_0, em que a largura τ é fixa:



Introdução

- Na sua representação pela série de *Fourier*, conforme estudado anteriormente, os coeficientes são dados por:

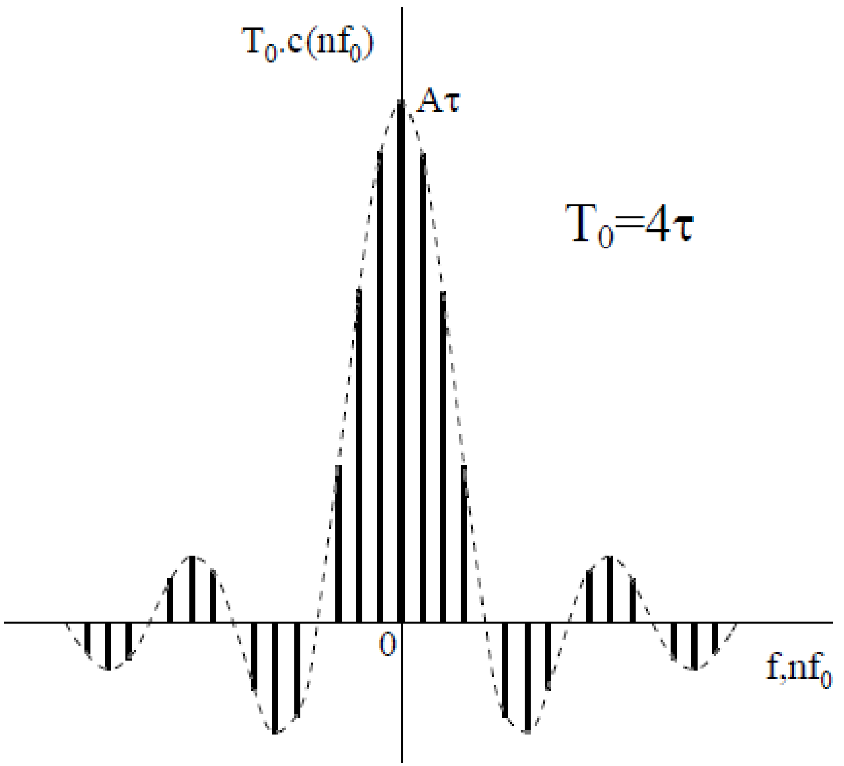
$$C_n = c(nf_0) = Af_0\tau \frac{\sin(n\pi f_0\tau)}{n\pi f_0\tau}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

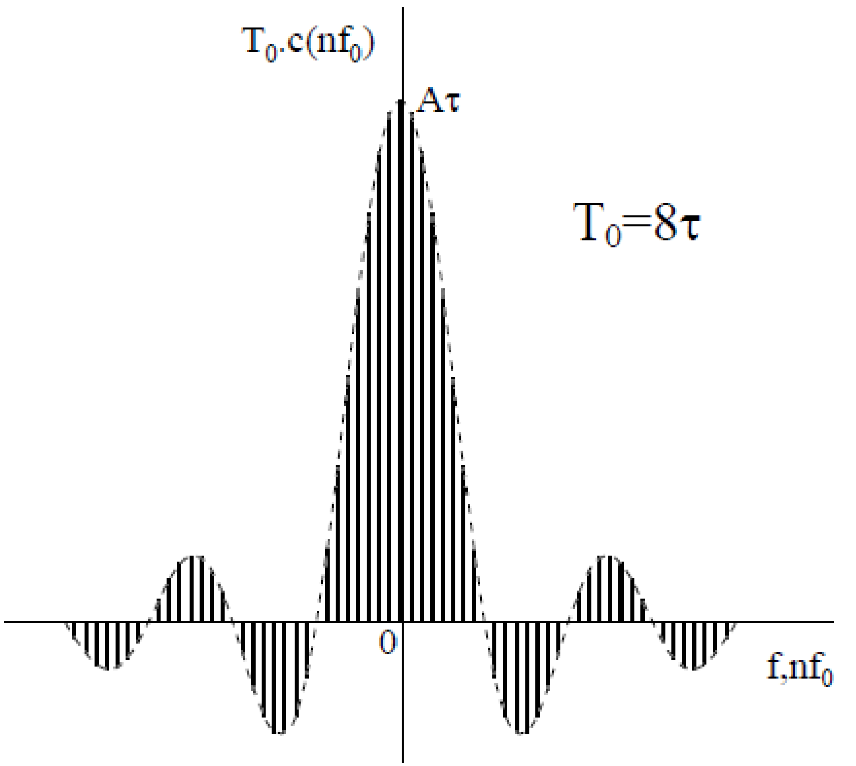
- multiplicando-se membro a membro por T_0, obtém-se:

$$T_0C_n = A\tau \frac{\sin(n\pi f_0\tau)}{n\pi f_0\tau} = A\tau \left.\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}\right|_{f=nf_0} = A\tau\,\mathrm{sinc}(f_0\tau)$$

Introdução

- Da expressão anterior obtém-se os gráficos:





Introdução

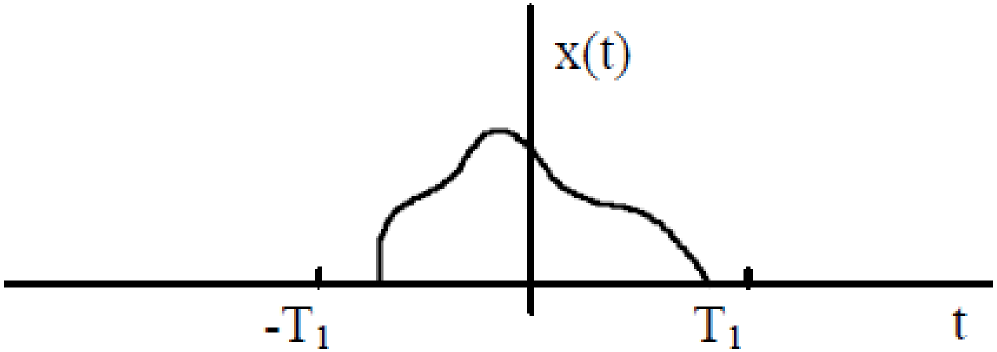
- Por inspeção das figuras, nota-se que:
  - Considerando-se *f* uma variável contínua, a função:

$$A\tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$$

    - é a envolvente do sinal, e os coeficientes T_0C_n são amostras desta envolvente
  - Para τ fixo, a envolvente é independente de T_0;
  - À medida que se aumenta T_0, as amostras ficam mais próximas, e os coeficientes da série aproximam-se da envolvente

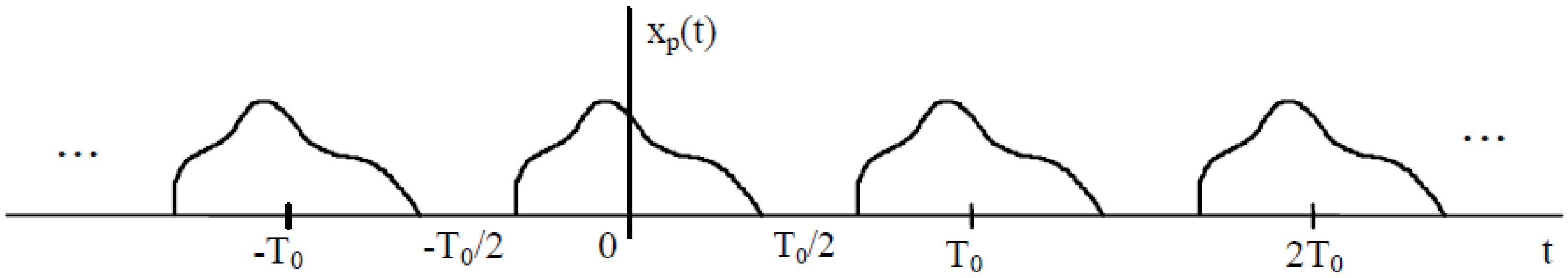
Transformada de *Fourier*

- Considere-se agora um sinal aperiódico $x(t)$ de duração finita, ilustrado na figura abaixo:
- $x(t) = 0$, para $|t| > T_1$



- A partir deste sinal, construímos um sinal periódico $x_p(t)$ com período T_0, mostrado a seguir

Transformada de *Fourier*



- dentro de um período $-T_0/2 \leq t \leq +T_0/2$ ocorre $x_p(t) = x(t)$, ou seja, $x_p(t)$ é composto de cópias de $x(t)$ a cada T_0
- Nota-se ainda que: $\lim_{T_0 \to \infty} x_p(t) = x(t)\ ,\ \ \forall t \text{ finito}$

Transformada de *Fourier*

- Representando-se o sinal periódico $x_p(t)$ pela sua série de *Fourier*, tem-se:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn2\pi f_0 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt$$

- Como $x_p(t) = x(t)$ para $|t|<T_0/2$ e $x(t) = 0$ para $|t|>T_1$, quando $T_0/2 > T_1$, pode-se substituir $x_p(t)$ por $x(t)$ no integral e modificar os limites de integração

Transformada de *Fourier*

- Assim fica:

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-jn2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jn2\pi f_0 t} dt$$

- e, a partir da expressão anterior, obtém-se:

$$T_0 C_n = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jn2\pi f_0 t} dt$$

- Como se viu no exemplo da onda retangular, podemos considerar T_0C_n como amostras de uma envolvente

Transformada de *Fourier*

- Chamando *X*(*f*) a essa envolvente, então:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- em que os coeficientes C_n tornam-se:

$$C_n = \frac{1}{T_0} X(nf_0)$$

- e:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn2\pi f_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0)\, e^{jn2\pi f_0 t}$$

Transformada de *Fourier*

- Como $f_0 = 1/T_0$ fica:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0)\, e^{jn2\pi f_0 t} f_0$$

- Fazendo o limite de T_0 tender para infinito, tem-se que:
  - $x_p(t)$ tende para $x(t)$
  - f_0 tende para df
  - nf_0 tende para f
  - o somatório tende para um integral

Transformada de *Fourier*

- Logo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1)$$

- onde:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2)$$

- A equação (2) é a equação de análise da transformada de *Fourier*, ou simplesmente a transformada de *Fourier* do sinal *x*(*t*)
- A equação (1) é a equação de síntese da transformada de *Fourier*, ou a transformada de *Fourier* inversa

Transformada de *Fourier*

- Este par de equações é normalmente representado simbolicamente por:

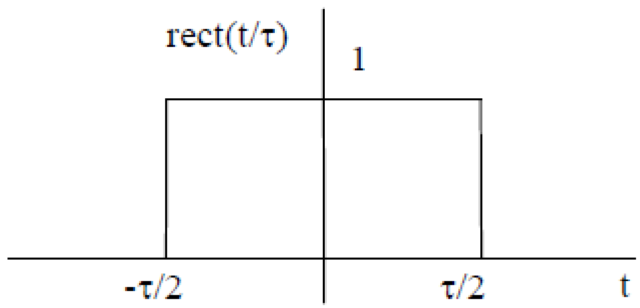
$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

- Em certas ocasiões, também será útil aplicar a notação simbólica do operador:
- $\mathscr{F}[x(t)]$ - para a transformada de *Fourier* direta:
  - $\mathscr{F}[x(t)] = X(f)$
- $\mathscr{F}^{-1}[X(f)]$ - para a transformada de *Fourier* inversa
  - $\mathscr{F}^{-1}[X(f)] = x(t)$

Transformada de *Fourier*

- Exemplo - 1: Impulso rectangular de duração τ

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \le \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$



$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}} - e^{j2\pi f\frac{\tau}{2}}}{-j2\pi f} = \frac{-j2\sin(\pi f\tau)}{-j2\pi f}$$

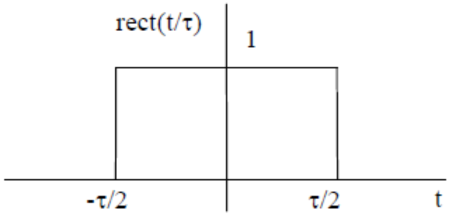
$$X(f) = \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f} = \tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} = \tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)$$

Transformada de *Fourier*

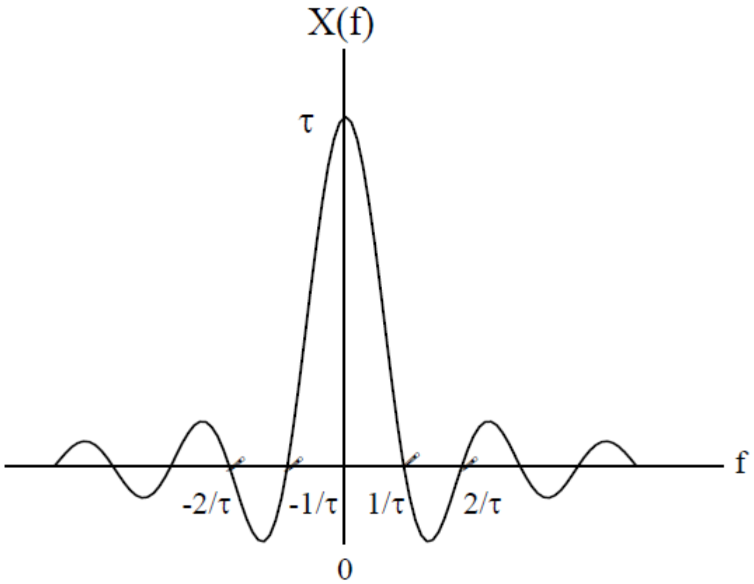
- Exemplo - 1: Impulso rectangular de duração τ

- Obtém-se assim o par de transformada de *Fourier*:

$$\mathrm{rect}(t/\tau) \quad \leftrightarrow \quad \tau.\mathrm{sinc}(f\tau)$$



$\leftrightarrow$



Transformada de *Fourier*

- Exemplo - 1: Impulso rectangular de duração τ

- Analisando-se a figura, observa-se que o primeiro zero ocorre para $f = 1/\tau$. Assim, para o impulso estreito (τ reduzido), o primeiro zero ocorre para um valor de f elevado, ou seja, o espectro torna-se mais largo
- Para o impulso de longa duração, o primeiro zero ocorre para f reduzido, indicando que o espectro torna-se mais estreito

Transformada de *Fourier*

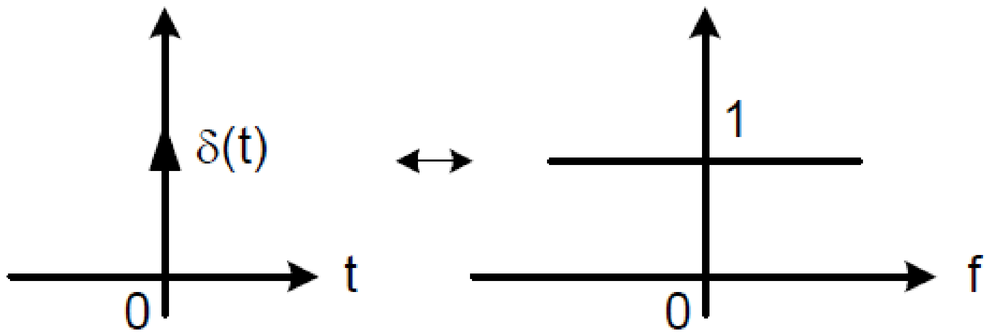
- Exemplo - 1: Impulso rectangular de duração τ

- A observação anterior corresponde à <u>propriedade de espalhamento recíproco</u>
- Num caso limite, quando o impulso é infinitamente estreito, espera-se um espectro infinitamente largo com tendência para a função constante $X(f)=\tau$, conforme será verificado no próximo exemplo

Transformada de *Fourier*

- Exemplo - 2: Impulso de área unitária - δ(*t*) - *Dirac*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi ft} dt = 1 \ , \ \forall f$$



$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

Transformada de *Fourier*

- Exemplo - 2: Impulso de área unitária - $\delta(t)$ – *Dirac*

- A transformada de *Fourier* de um impulso unitário é constante, com amplitude igual à área do impulso
- Este comportamento já era previsto - propriedade de espalhamento recíproco do exemplo anterior
- A interpretação deste resultado, permite concluir que um impulso unitário apresenta um conteúdo espectral com amplitude constante, presente em todas as frequências entre $-\infty$ e $+\infty$

Convergência da TF

- Na dedução da transformada de *Fourier* como um processo limite a partir da série de *Fourier*, limitamo-nos ao caso em que o sinal $x(t)$ tinha duração finita
- Porém, afirma-se que o resultado permanece válido para uma classe muito maior de sinais, incluindo-se alguns de duração infinita
- Além disso, como o ponto de partida foi a série de *Fourier*, é razoável considerar as mesmas condições para a existência da transformada de *Fourier*

Convergência da TF

- Condições para a existência da transformada de *Fourier*:
- a) $x(t)$ deve ser integrável quadraticamente, ou seja, ter energia finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

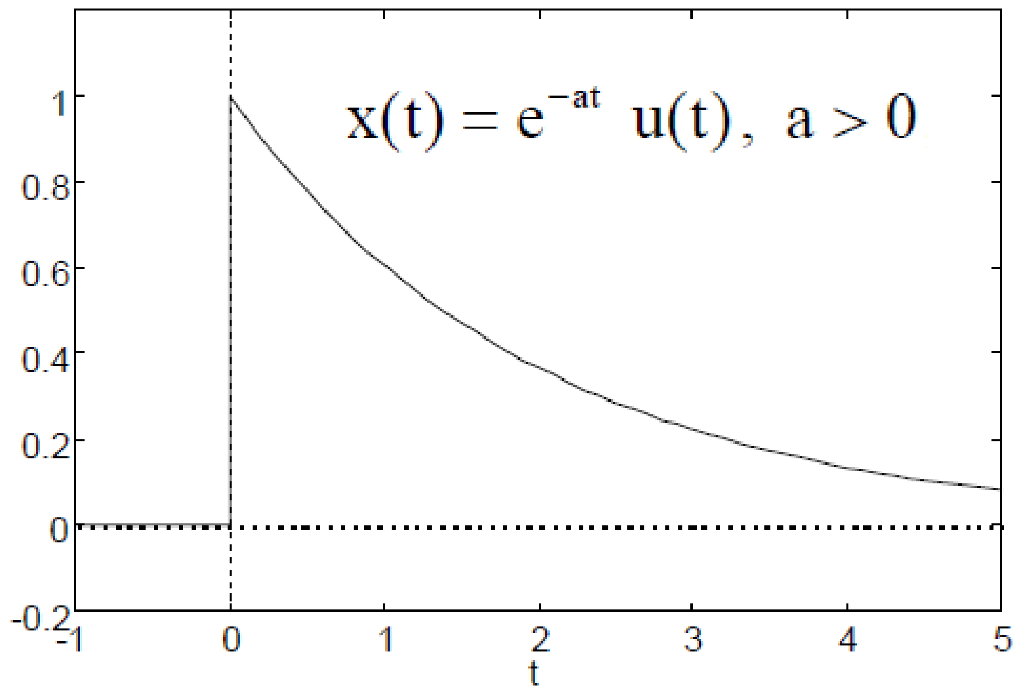
- b) $x(t)$ deve satisfazer às condições de *Dirichlet*:
  - i) deve ser absolutamente integrável: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt < \infty$
  - ii) deve ter um número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo de tempo finito
  - iii) deve ter um número finito de descontinuidades finitas em qualquer intervalo de tempo finito

Convergência da TF

- É importante salientar que tais condições são suficientes, mas não necessárias para a existência da transformada de *Fourier*.
- A função impulso de *Dirac* não satisfaz as condições de *Dirichlet* pois representa uma descontinuidade infinita. Contudo esta função possui transformada de *Fourier*
- Ao contrário da matemática, os critérios físicos são mais abrangentes, os quais estabelecem que, a condição necessária e suficiente para que um dado sinal possua transformada de *Fourier*, é que o processo físico associado ocorra consistentemente na prática

Transformada de *Fourier*

- Exemplo - 3: Calcular a transformada de *Fourier* da função exponencial real mostrada na figura em baixo e esboçar o seu espectro



Transformada de *Fourier*

- Solução: Esta função, assintoticamente limitada no tempo, satisfaz todos os critérios de convergência para que sua transformada de *Fourier* exista.
- Aplicando a definição:

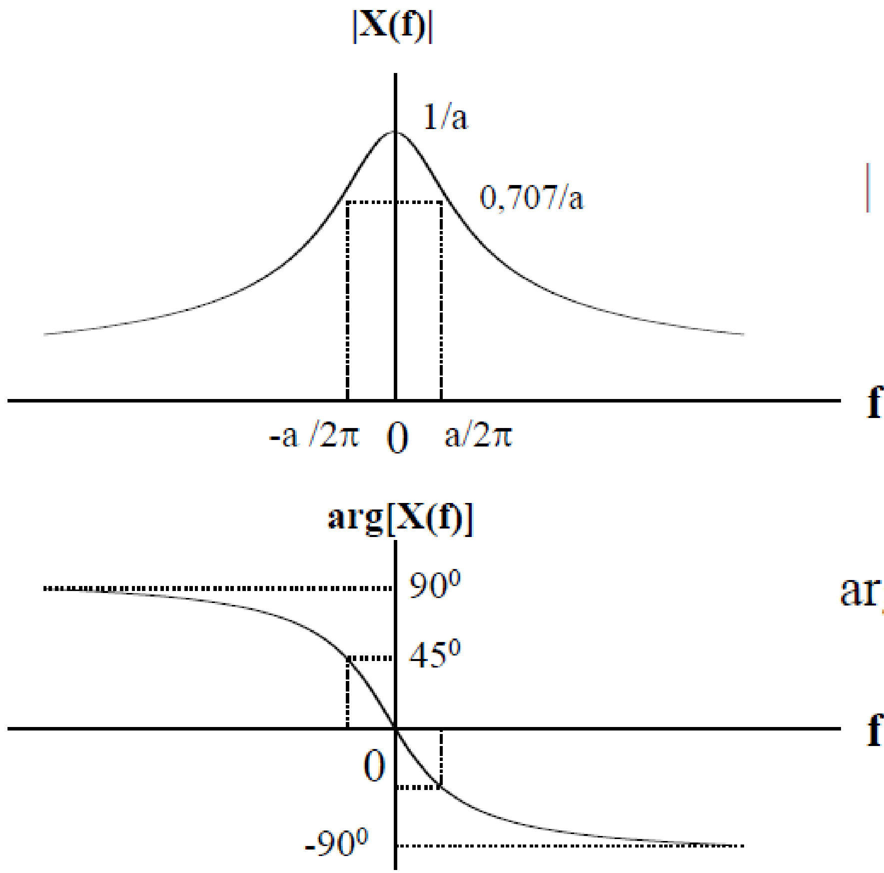
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(j2\pi f+a)t}dt = \left[\frac{e^{-at}e^{-j2\pi ft}}{-(j2\pi f+a)}\right]_0^{\infty} = \frac{0-1}{-(j2\pi f+a)}$$

$$X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \qquad \arg[X(f)] = -\operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Transformada de *Fourier*

- Solução: Exemplo - 3



$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$\arg[X(f)] = -\operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

TF – Relações de Simetria

- Partindo da definição:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

- Se *x*(*t*) for um sinal real, pode-se mostrar que:
  - $X(-f) = X^*(f)$
- ou, de forma equivalente:
  - $X^*(-f) = X(f)$
- A transformada de *Fourier* (ou seja, o espectro) exibe simetria *Hermitiana*

TF – Relações de Simetria

- Se $X(f)$ for expresso em termos das suas partes real e imaginária, obtém-se:
  - $X(f) = \mathrm{Re}\{X(f)\} + j\mathrm{Im}\{X(f)\}$
- Então:
  - $X^*(-f) = \mathrm{Re}\{X(-f)\} - j\mathrm{Im}\{X(-f)\}$
- Ou seja:
  - $\mathrm{Re}\{X(f)\} = \mathrm{Re}\{X(-f)\}$ – Função Par
  - $\mathrm{Im}\{X(f)\} = -\mathrm{Im}\{X(-f)\}$ – Função Ímpar

TF – Relações de Simetria

- Se $X(f)$ for expresso em termos das suas partes real e imaginária, obtém-se:
  - $X(f) = \mathrm{Re}\{X(f)\} + j\mathrm{Im}\{X(f)\}$
- Então:
  - $X^*(-f) = \mathrm{Re}\{X(-f)\} - j\mathrm{Im}\{X(-f)\}$
- Ou seja:
  - $\mathrm{Re}\{X(f)\} = \mathrm{Re}\{X(-f)\}$ – Função Par
  - $\mathrm{Im}\{X(f)\} = -\mathrm{Im}\{X(-f)\}$ – Função Ímpar

TF – Relações de Simetria

- Observa-se também que:

$$|X(f)| = \left(\mathrm{Re}\{X(f)\}^2 + \mathrm{Im}\{X(f)\}^2\right)^{1/2} = |X(-f)|$$

$$\arg[X(f)] = \operatorname{atan}\frac{\mathrm{Im}\{X(f)\}}{\mathrm{Re}\{X(f)\}} = -\arg[X(-f)]$$

- Como:

$$X^*(-f) = |X(-f)|e^{-j\arg[X(-f)]}$$

- conclui-se que o espectro de amplitudes (módulo) é uma função par e o espectro de fases é uma função ímpar

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

TF – Relações de Simetria

- Considera-se agora um sinal $x(t)$ arbitrário - pode ser complexo
- Sabemos que este sinal pode ser expresso como soma de uma função par (x_e) e de uma função ímpar (x_o) de t:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x^*(-t)}{2} \qquad x_o(t) = \frac{x(t) - x^*(-t)}{2}$$

TF – Relações de Simetria

- Assim, têm-se as seguintes relações:

$$x_e(t) \leftrightarrow X_e(f) = \mathrm{Re}\{X(f)\}$$

$$x_o(t) \leftrightarrow X_o(f) = j\mathrm{Im}\{X(f)\}$$

- Para sinais *x*(*t*) reais:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).\cos(2\pi ft)dt + j\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\mathrm{sen}(2\pi ft)dt = \mathrm{Re}\{X(f)\} + j\,\mathrm{Im}\{X(f)\}$$

$$x_e(t) \leftrightarrow X_e(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).\cos(2\pi ft)dt$$

$$x_o(t) \leftrightarrow X_o(f) = j\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\mathrm{sen}(2\pi ft)dt$$

TF – Relações de Simetria

- No caso onde $x(t)$ tem simetria par, tal que $x(-t) = x(t)$:
  - $x(t).\cos(2\pi ft)$ é par
  - $x(t).\text{sen}(2\pi ft)$ é ímpar
  - $X_o(f) = 0$
  - $X(f) = X_e(f) = 2\int_0^{\infty} x(t).\cos(2\pi ft)\,dt$

- Conclui-se que, se $x(t)$ for par e puramente real, o seu espectro $X(f)$ também será puramente real

TF – Relações de Simetria

- Se $x(t)$ tem simetria ímpar, tal que $x(-t) = -x(t)$, então:
  - $X_e(f) = 0$
- e:

$$X(f) = X_o(f) = -j2\int_0^{\infty} x(t).\mathrm{sen}(2\pi ft)\, dt$$

- Se $x(t)$ for ímpar e puramente real, o seu espectro $X(f)$ será puramente imaginário
- Em casos onde $x(t)$ não for nem par nem ímpar, o espectro $X(f)$ terá partes real e imaginária, conforme o resultado obtido no Exemplo 3

TF – Teorema de *Parseval*

- O teorema de *Parseval* estabelece que, se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são sinais de energia arbitrários, com transformadas de *Fourier* $X_1(f)$ e $X_2(f)$, respectivamente, então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f) \cdot X_2^*(f)\, df$$

- No caso particular, onde $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$, então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$$

- onde E_x é a energia de $x(t)$

TF – Teorema de *Parseval*

- Sendo $x(t)$ um sinal de energia, sua energia pode ser obtida através da integração de $|x(t)|^2$, no domínio do tempo, ou de $|X(f)|^2$, no domínio da frequência, conforme seja mais conveniente
- A função $|X(f)|^2$ é chamada de densidade espectral de energia de $x(t)$, e fornece a informação da energia por unidade de frequência ao longo do espectro de $X(f)$

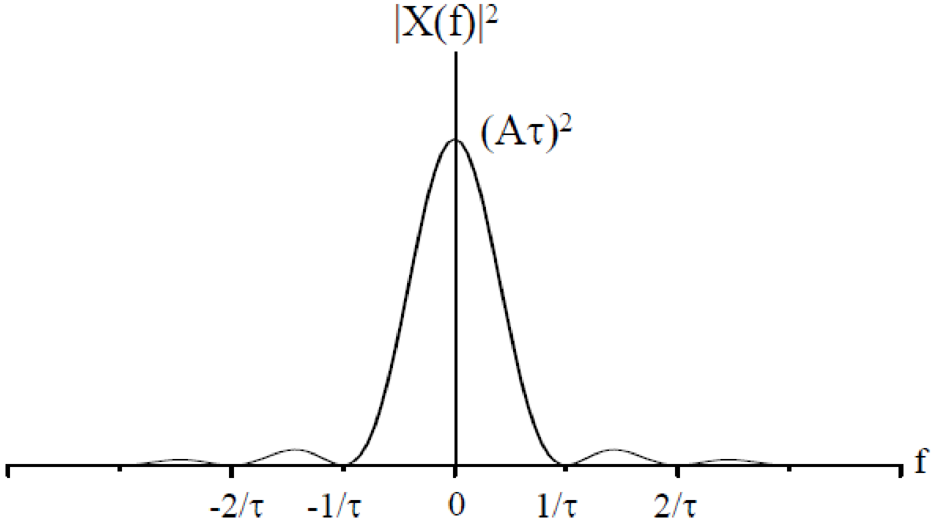
TF – Teorema de *Parseval*

- Exemplo - 4: Obter a densidade espectral de energia do pulso retangular de largura τ e amplitude A: $x(t) = A.\mathrm{rect}(t/\tau)$

- Solução: Utilizando o resultado do exemplo 1, verifica-se que o espectro desse impulso retangular é dado por $X(f) = A\tau.\mathrm{sinc}(f\tau)$

TF – Teorema de *Parseval*

- Solução: A figura seguinte revela que a maior parte da energia do pulso encontra-se dentro da banda | f | < $1/\tau$



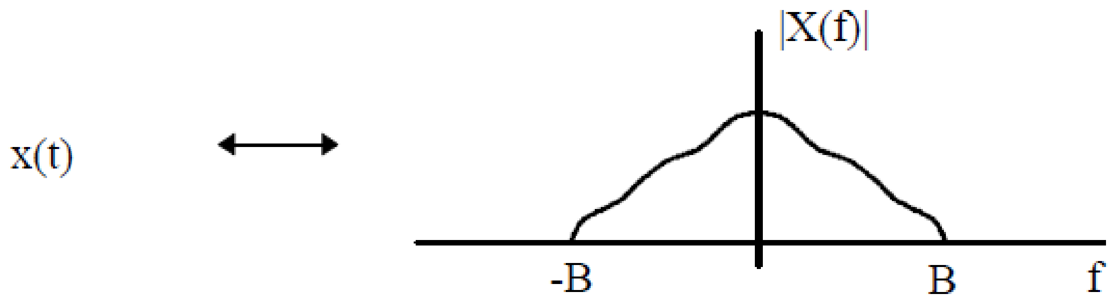
Densidade espectral de energia do pulso retangular

TF – Largura de Banda Espectral

- O conceito de largura de banda de sinais é muito importante quando se trabalha com sinais e sistemas de comunicação
- Por exemplo, um sinal radiado por uma antena para ser transmitido deve ter largura de banda limitada, pois caso contrário, estaria ocupando uma porção muito grande do espectro eletromagnético, impedindo a utilização desse meio de transmissão por outros sinais
- A largura de banda de um sinal é obtida através da análise do sinal no domínio da frequência

TF – Largura de Banda Espectral

- Um sinal com característica passa-baixo, exibe uma característica espectral genérica mostrada na figura:



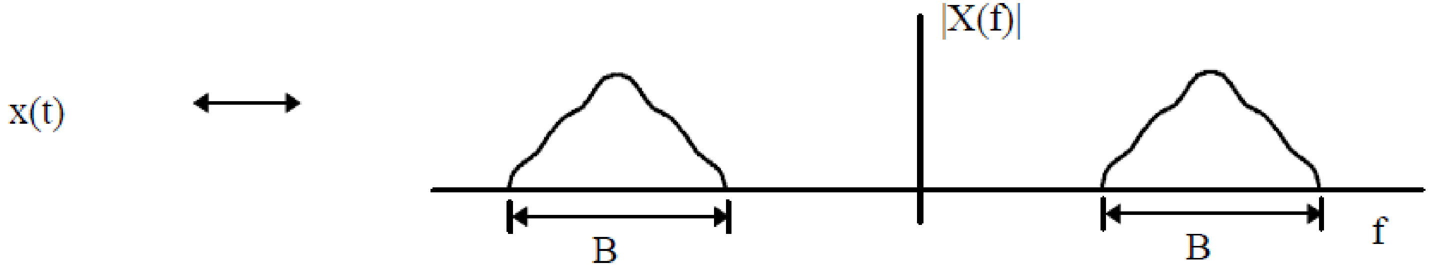
- Neste caso, diz-se que $x(t)$ é um sinal com banda limitada a B Hz, ou um sinal passa-baixo com largura de banda B, o que significa que $x(t)$ não possui componentes de frequência acima de B Hz

TF – Largura de Banda Espectral

- É de realçar que, embora se trabalhe com a representação de espectro bilateral, para a determinação da largura de banda considera-se somente a porção positiva do espectro, em conformidade com as leituras fornecidas por analisadores de espectro

TF – Largura de Banda Espectral

- Um sinal com característica passa-banda com banda *B*, exibe uma característica espectral genérica mostrada na figura:



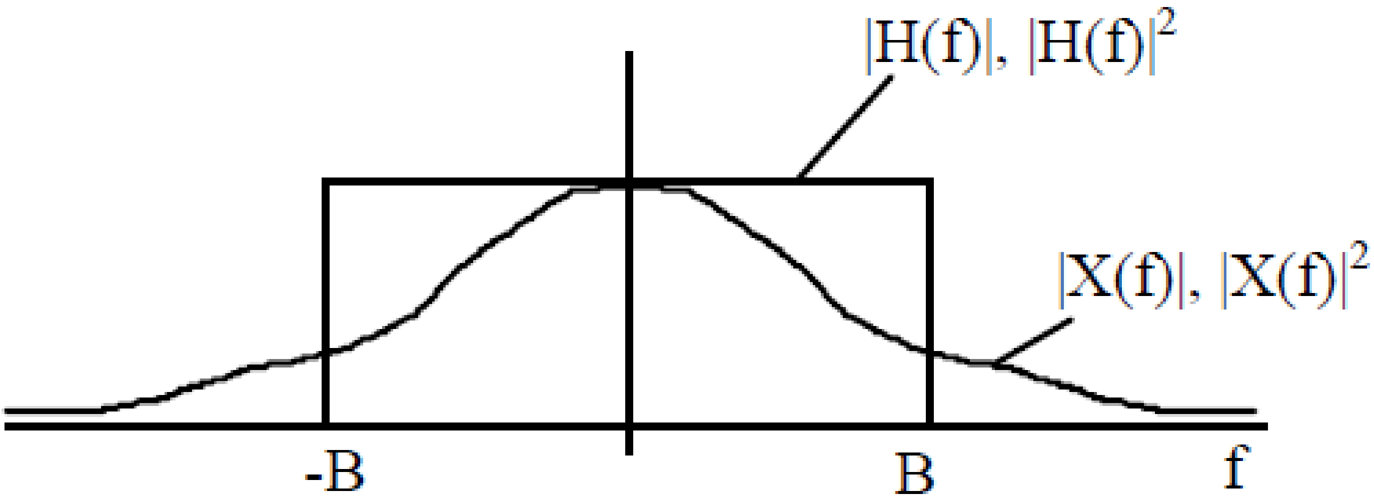
- Na prática, contudo, os sinais podem não apresentar banda limitada (e geralmente é o caso), e o que se pode fazer é definir a banda do sinal a partir de frequências nas quais a amplitude do espectro decai a um determinado valor da amplitude máxima

TF – Largura de Banda Espectral

- Por exemplo, pode-se definir que a largura de banda de um sinal passa-baixo seja dada pelas frequências onde o espectro de amplitudes decaia a 5% do seu valor máximo
- Um outro critério que pode ser adotado é definir a largura de banda, de um sinal com característica passa-baixo, por exemplo, como sendo aquela de um filtro passa-baixo ideal (banda B) com mesmo ganho máximo, tal que a área sob $|H(f)|$ ou $|H(f)|^2$ seja igual à área sob $|X(f)|$ ou $|X(f)|^2$

TF – Largura de Banda Espectral

- Este critério é muito usado na análise do ruído



Critério para definição de largura de banda

Relação entre a TF de tempo contínuo e sinais periódicos

- Na dedução da transformada de *Fourier* a partir da série de *Fourier*, aproximou-se o sinal aperiódico $x(t)$ por um período de um sinal periódico $x_p(t)$, de período T_0:

$$x(t) = \begin{cases} x_p(t) \ , & |t| \leq T_0 / 2 \\ 0 \ , & \ldots \end{cases}$$

- Os coeficientes da série de *Fourier* podem ser determinados a partir da transformada de *Fourier* através de:

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t)\, e^{-jn2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jn2\pi f_0 t} dt$$

Relação entre a TF de tempo contínuo e sinais periódicos

- Recorrendo-se à equação de análise, com $f = nf_0$ fica:

$$C_n = \frac{1}{T_0} X(nf_0)$$

- os coeficientes C_n são obtidos a partir de amostras da transformada de *Fourier* nas frequências nf_0
- Uma discussão sobre amostragem de sinais será apresentada numa das próximas aulas

Transformada de *Fourier* de Sinais Periódicos

- Considere um sinal cuja transformada de *Fourier* é um impulso de área unitária (*Dirac*) em $f = f_0$:

$$X(f) = \delta(f - f_0)$$

- a partir da equação de síntese obtém-se o sinal no domínio dos tempos $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

- $x(t)$ é um sinal periódico com período $T_0 = 1/f_0$

Transformada de *Fourier* de Sinais Periódicos

- O resultado anterior permite estabelecer mais um par de transformada de *Fourier*:

$$e^{j2\pi f_0 t} \quad \leftrightarrow \quad \delta(f - f_0)$$

- Generalizando, para uma combinação de impulsos de áreas C_n, localizados em $f = nf_0$:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - nf_0)$$

- obtém-se:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

Transformada de *Fourier* de Sinais Periódicos

- O resultado anterior permite novamente estabelecer mais um par de transformada de *Fourier*:

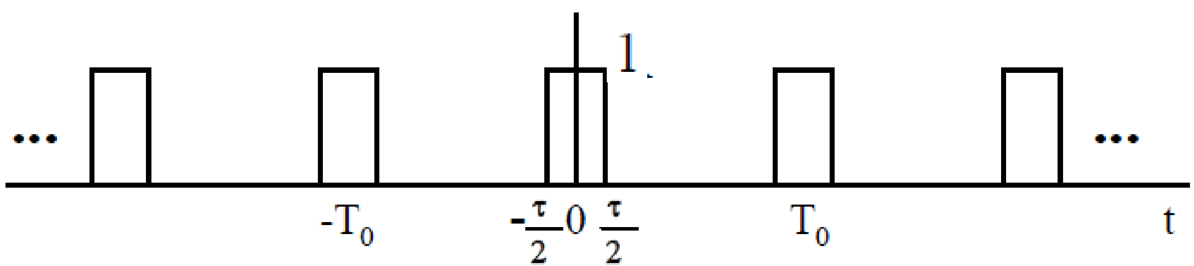
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad \leftrightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - nf_0)$$

- O termo do lado esquerdo representa o sinal peródico $x(t)$ no seu desenvolvimento em série de *Fourier*
- A transformada de *Fourier* de um sinal periódico, cujos coeficientes da série de *Fourier* são iguais a C_n, é igual a um trem de impulsos de áreas C_n localizados nas frequências nf_0

Transformada de *Fourier* de Sinais Periódicos

- Exemplo - 5: Considere uma onda quadrada de frequência f_0, cujos coeficientes C_n da série de *Fourier* são dados por:

$$C_n = \frac{\sin(n\pi f_0 \tau)}{n\pi}, \quad f_0 \tau = \frac{1}{2}$$

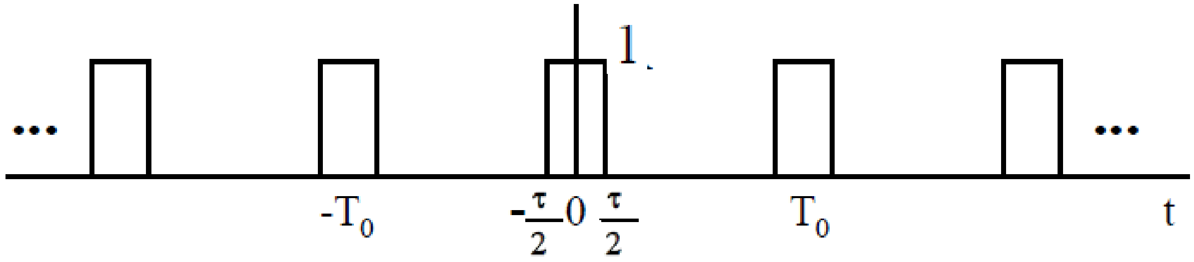


- Determinar a transformada de *Fourier* da sua série de *Fourier*

Transformada de *Fourier* de Sinais Periódicos

- Exemplo - 5: Considere uma onda quadrada de frequência f_0, cujos coeficientes C_n da série de *Fourier* são dados por:

$$C_n = \frac{\sin(n\pi f_0 \tau)}{n\pi}, \quad f_0 \tau = \frac{1}{2}$$



- Determinar a transformada de *Fourier* da sua série de *Fourier*

Transformada de *Fourier* de Sinais Periódicos

- Solução: Os coeficientes da série de *Fourier* podem ser reescritos como:

$$C_n = \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n\pi} = \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

- e portanto, basta aplicar:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad \leftrightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - nf_0)$$

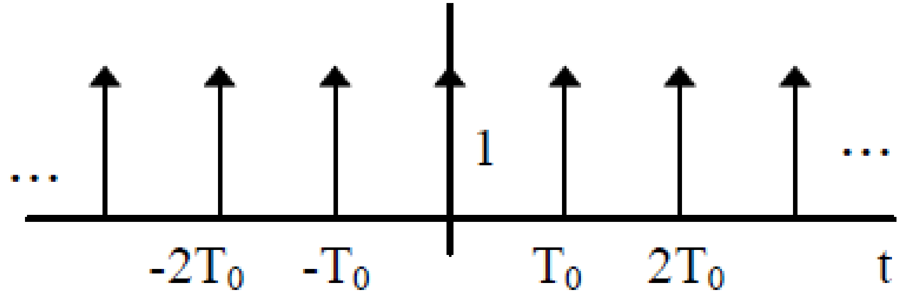
- para obter a transformada de *Fourier*:

$$X(f) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\delta(f - nf_0)$$

Transformada de *Fourier* de Sinais Periódicos

- Exemplo - 6: Obter a transformada de *Fourier* do trem de impulsos com período T_0 cuja série de *Fourier* é dada por:

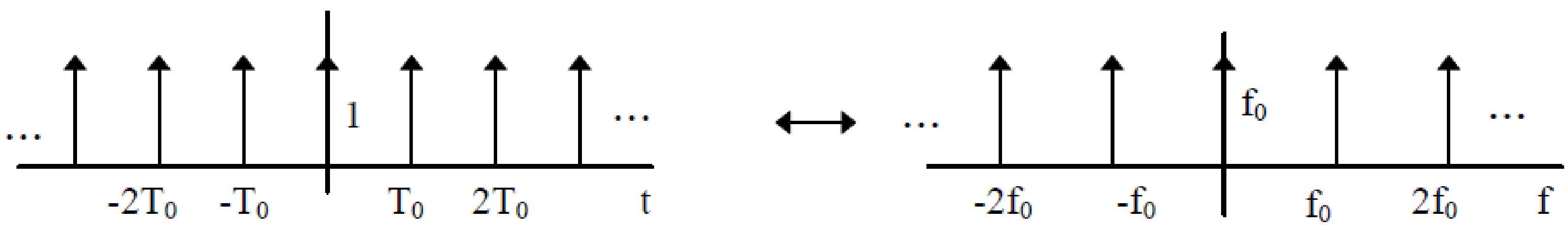
$$x(t) = \sum_n \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_n e^{j2\pi n f_0 t}$$



Transformada de *Fourier* de Sinais Periódicos

- Solução: Aplicando a relação anterior, com $C_n = 1$, e sabendo-se que $T_0 = 1/f_0$, obtém-se:

$$X(f) = \frac{1}{T_0}\sum_k \delta(f - kf_0) = f_0 \sum_k \delta(f - kf_0)$$



- A transformada de *Fourier* de um trem de impulsos de áreas unitárias espaçados de T_0 é igual a outro trem de impulsos, com áreas $f_0 = 1/T_0$ e espaçados de f_0

Transformada de *Fourier* de co-seno

- Considere-se um sinal sinosoidal, definido por:
  - $x(t) = A.\cos \omega_0 t$
- Recorrendo-se ao desenvolvimento em termos de exponenciais complexas fica:

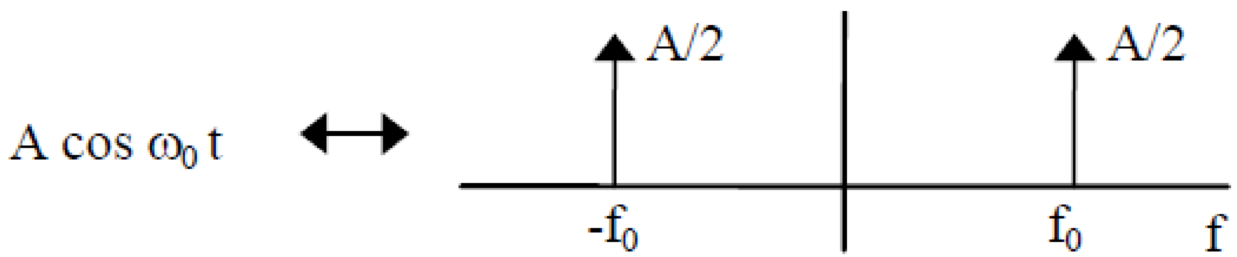
$$X(f) = \Im[A.\cos\omega_0 t] = \Im\left[A.\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] = \Im\left[A.\frac{e^{j\omega_0 t}}{2}\right] + \Im\left[A.\frac{e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]$$

- aplicando-se as 2 propriedades anteriores, obtém-se:

$$X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

Transformada de *Fourier* de co-seno

- O diagrama espectral está desenhado em baixo:



- Este resultado era previsível, pois o espectro de um co-seno de frequência f_0 é composto por uma única linha em f_0, a qual <u>deve ser substituída por um impulso no diagrama espectral de frequências contínuas</u>

Transformada de *Fourier* de seno

- Para o caso da função seno temos:
  - $x(t) = A.\text{sen}\ \omega_0 t$
- Recorrendo-se ao desenvolvimento em termos de exponenciais complexas fica:

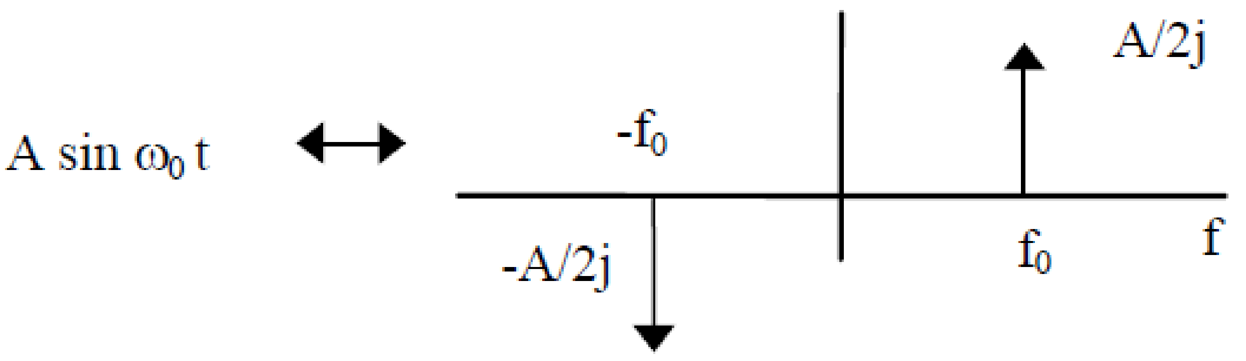
$$X(f) = \Im[A.\sin\omega_0 t] = \Im\left[A.\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right]$$

- aplicando-se as 2 propriedades anteriores, obtém-se:

$$X(f) = \frac{A}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

Transformada de *Fourier* de seno

- O diagrama espectral está desenhado em baixo:



- Como o espectro é imaginário puro não é necessário desenhar o espectro na forma de amplitude e fase

Bibliografia

- Oppenheim, A.V. , Willsky, A.S. and Young, I.T., Signals and Systems, Prentice- Hall Signal Processing Series, 1983