1. Mostre que: $y^2 + x = 1$ não é uma solução implícita da equação diferencial: $y\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$ no intervalo $]0;2[$, apesar de a verificar formalmente.

R:

Uma vez que temos a equação diferencial: $y\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$, então isto implica que teremos que obter uma função: $y = f(x)$ para posteriormente ser derivada.

Assim sendo teremos então que: $y^2 + x = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1-x} \Rightarrow$[1] $y = \sqrt{1-x}$

Vamos então começar por determinar o domínio da função, e em seguida determinar a derivada e respectivo domínio que terá que ser substituída na equação diferencial dada:

- $y = f(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow D_f = \{x \in \Re : 1-x \geq 0\} \Rightarrow D_f =]-\infty;1]$

- $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \left(\sqrt{1-x}\right)' = \underbrace{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]'}_{(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'} = \frac{1}{2}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(1-x)' = \frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1) =$

$$= -\frac{1}{2\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{1-x}} \Rightarrow D_{f'} = \{x \in \Re : 1-x > 0\} \Rightarrow D_{f'} =]-\infty;1[$$

Assim sendo, por substituição em: $y\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$ teremos que:

$$y\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1-x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot\sqrt{1-x}}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Verificada a}\\ \text{identidade}\end{matrix}\right\}$$

Daqui se conclui que a função $y = \sqrt{1-x}$ verifica formalmente a equação diferencial, mas não é uma solução explicita dessa equação porque o intervalo $]0;2[$ não é um sub-intervalo de $]-\infty;1[$.

[1] Como a função obtida se divide em duas componentes, uma positiva e outra negativa, vamos optar por estudar apenas uma delas – neste caso a positiva – isto porque se essa componente não for solução implícita da equação diferencial dada, a outra também não será.

2. A relação: $y^2 - x = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$? Em que intervalo da recta real?

R:

Uma vez que temos a equação diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$, então isto implica que teremos que obter uma função: $y = f(x)$ para posteriormente ser derivada.

Assim sendo teremos então que: $y^2 - x = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x} \Rightarrow$[2] $y = \sqrt{x}$

Vamos então começar por determinar o domínio da função, e em seguida determinar a derivada e respectivo domínio que terá que ser substituída na equação diferencial dada:

- $y = f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = \{x \in \Re : x \geq 0\} \Rightarrow D_f = [0;+\infty[$

- $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \underbrace{\left[(x)^{\frac{1}{2}}\right]'}_{\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'} = \frac{1}{2} \cdot (x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x)' = \frac{1}{2} \cdot (x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1) = \frac{1}{2 \cdot (x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \Rightarrow$

  $\Rightarrow D_{f'} = \{x \in \Re : x > 0\} \Rightarrow D_{f'} =]0;+\infty[$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$ teremos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \Leftrightarrow \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Verificada a} \\ \text{identidade} \end{matrix}\right\}$$

Daqui se conclui que a função $y = \sqrt{x}$ é uma solução implícita da equação diferencial para o intervalo $]0;+\infty[$.

[2] Como a função obtida se divide em duas componentes, uma positiva e outra negativa, vamos optar por estudar apenas uma delas – neste caso a positiva – isto porque se essa componente não for solução implícita da equação diferencial dada, a outra também não será.

3. Mostre que a função: $x^2 + 2xy = 0$ **é uma solução implícita da equação diferencial:**

$x\dfrac{dy}{dx} + x + y = 0$ **em** $\Re \setminus \{0\}$**.**

R:

Uma vez que temos a equação diferencial: $x\dfrac{dy}{dx} + x + y = 0$, então isto implica que teremos que obter uma função: $y = f(x)$ para posteriormente ser derivada.

Assim sendo teremos então que: $x^2 + 2xy = 0 \Leftrightarrow 2xy = -x^2 \Leftrightarrow y = -\dfrac{x^2}{2x} \Leftrightarrow y = -\dfrac{x}{2} \wedge x \neq 0$

Vamos então começar por determinar o domínio da função, e em seguida determinar a derivada e respectivo domínio que terá que ser substituída na equação diferencial dada:

- $y = f(x) = -\dfrac{x}{2} \wedge x \neq 0 \Rightarrow D_f = \Re \setminus \{0\}$

- $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = \left(-\dfrac{x}{2}\right)' = \underbrace{\left(-\dfrac{1}{2}\cdot x\right)'}_{(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'} = \underbrace{\left(-\dfrac{1}{2}\right)'}_{=0}\cdot x + \left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot \underbrace{(x)'}_{=1} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow D_{f'} = ????$

Assim sendo, por substituição em: $x\dfrac{dy}{dx} + x + y = 0$ teremos que:

$$x\frac{dy}{dx} + x + y = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{2}\right) + x + \left(-\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot\left(-\frac{x}{2}\right) + x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Verificada a}\\ \text{identidade}\end{matrix}\right\}$$

Daqui se conclui que a função $y = -\dfrac{x}{2} \wedge x \neq 0$ é uma solução implícita da equação diferencial em $\Re \setminus \{0\}$.

4. Mostre que a função: $x^2y^2+x^2-9=0$ é uma solução implícita da equação diferencial: $yx\frac{dy}{dx}+y^2+1=0$ no intervalo $\left]-3;3\right[\setminus\{0\}$.

R:

Uma vez que temos a equação diferencial: $yx\frac{dy}{dx}+y^2+1=0$, então isto implica que teremos que obter uma função: $y=f(x)$ para posteriormente ser derivada.

Assim sendo teremos então que:

$$x^2y^2+x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2y^2=-x^2+9 \Leftrightarrow y^2=\frac{-x^2+9}{x^2} \Leftrightarrow y^2=\frac{9}{x^2}-1 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{9}{x^2}-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow^{3}\ y=\sqrt{\frac{9}{x^2}-1}$$

Vamos então começar por determinar o domínio da função, e em seguida determinar a derivada e respectivo domínio que terá que ser substituída na equação diferencial dada:

- $y=f(x)=\sqrt{\frac{9}{x^2}-1} \Rightarrow D_f=\left\{x\in\Re:\frac{9}{x^2}-1\geq 0\right\} \Rightarrow D_f=\left]-\infty;-3\right]\cup\left]0;3\right]$

$$\frac{9}{x^2}-1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{9}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{9-x^2}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-9+x^2}{x^2}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x^2}\leq 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix}-3\leq x\leq 3\\ x\leq 0\end{Bmatrix}$$

	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
x^2-9	+	0	-	-	-	0	+
x^2	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2-9}{x^2}\leq 0$	-	0	+	s.s.	-	0	+

$$\frac{x^2-9}{x^2}\leq 0 \Rightarrow D=\left]-\infty;-3\right]\cup\left]0;3\right]$$

[3] Como a função obtida se divide em duas componentes, uma positiva e outra negativa, vamos optar por estudar apenas uma delas – neste caso a positiva – isto porque se essa componente não for solução implícita da equação diferencial dada, a outra também não será.

- $$\frac{dy}{dx} = f^{'}(x) = \left(\sqrt{\frac{9}{x^2}-1}\right)^{'} = \underbrace{\left[\left(\frac{9}{x^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{'}}_{\left(u^{\alpha}\right)^{'}=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9}{x^2}-1\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(\frac{9}{x^2}-1\right)^{'} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9}{x^2}-1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{9^{'}\cdot x^2 - 9\cdot\left(x^2\right)^{'}}{\left(x^2\right)^2}\right) = \frac{1}{2\cdot\left(\frac{9}{x^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{-9\cdot 2x}{x^4}\right) = -\frac{9}{x^3\cdot\left(\frac{9}{x^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= -\frac{9}{x^3\cdot\sqrt{\frac{9}{x^2}-1}} \Rightarrow D_{f^{'}} = \left\{x\in\Re : x\neq 0 \wedge \frac{9}{x^2}-1>0\right\} \Rightarrow D_{f^{'}} = ????$$

Assim sendo, por substituição em: $yx\frac{dy}{dx}+y^2+1=0$ teremos que:

$$yx\frac{dy}{dx}+y^2+1=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{9}{x^2}-1}\right)\cdot x\cdot\left(-\frac{9}{x^3\cdot\sqrt{\frac{9}{x^2}-1}}\right)+\left(\sqrt{\frac{9}{x^2}-1}\right)^2+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{\left(\sqrt{\frac{9}{x^2}-1}\right)\cdot x\cdot 9}{x^3\cdot\sqrt{\frac{9}{x^2}-1}}\right)+\frac{9}{x^2}-1+1=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{9}{x^2}\right)+\frac{9}{x^2}-1+1=0 \Leftrightarrow 0=0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Verificada a}\\ \text{identidade}\end{array}\right\}$$

Daqui se conclui que a função $y=\sqrt{\frac{9}{x^2}-1}$ é uma solução implícita da equação diferencial em $\left]-3;3\right[\setminus\{0\}$.