Ficha 2: Função inversa

2.1 Bijeção

Definição 2.1 (injetiva) *Seja f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio. A função f é injetiva em E se temos*

$$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

A condição acima chama-se o critério de injetividade

Proposição 2.1
Seja f uma função estritamente monótona no subconjunto $E \subset D_f$. Então f é injetiva.

Definição 2.2 (sobrejetiva) *Seja f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio e $F \subset \mathbb{R}$. Dizemos que a função é sobrejetiva de E sobre F se $f(E) = F$. Por outras palavras*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tal que } f(x) = y.$$

Exemplo 2.1 Por exemplo a função $f(x) = x^2$ é sobrejetiva de $[-2, 2]$ em $[0, 4]$ mas não é injetiva porque $f(-2) = f(2) = 4$ (dois valores diferentes do domínio têm a mesma imagem).

Definição 2.3 (bijetiva) *Sejam f uma função e $E \subset D_f$ um subconjunto do domínio e $F \subset \mathbb{R}$. Dizemos que a função é bijetiva de E sobre F se ela é injetiva e sobrejetiva. Por outras palavras*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E : f(x) = y$$

e x é único.

Exemplo 2.2 Por exemplo a função $f(x) = x^2$ é bijetiva de $[0, 2]$ em $[0, 4]$.

Corolário 2.1
Seja f uma função estritamente monótona no subconjunto $E \subset D_f$. Então f é bijetiva de E em $f(E)$.

Definição 2.4 (função inversa (recíproca)) *Seja f uma função bijetiva de $E \subset D_f$ em $F \subset \mathbb{R}$. Então para qualquer $y \in F$, notamos por $x = f^{-1}(y)$ o único x tal que $f(x) = y$. Além de mais temos*

$$\forall x \in E,\ x = f^{-1}(f(x)), \qquad e \qquad \forall y \in F,\ y = f(f^{-1}(y)).$$

f^{-1} chama-se função inversa (ou recíproca) definida de F sobre E.

Nota 2.1 Infelizmente a notação f^{-1} pode ser ambígua porque podemos confundir com $\frac{1}{f(x)}$. Por exemplo a notação $(x^2)^{-1}$ não é clara porque pode ser o inverso algébrico $\frac{1}{x^2}$ ou a função inversa $\sqrt{x}$.

Notação 2.1 *Notamos* $f^{-1} \circ f = Id_E$ *e* $f \circ f^{-1} = Id_F$ *onde* Id_E *e* Id_F *são as funções identidades em* E *e* F*, respetivamente.*

Seja f é uma função bijetiva $E \subset D_f$ sobre F e f^{-1} a sua função inversa. Para qualquer ponto $M = (x, f(x))$ do gráfico de f, observamos que $M = (f^{-1}(y), y)$. Por consequência o ponto $M' = (y, f^{-1}(y))$ é o ponto simétrico de M relativamente à reta diagonal $y = x$. Concluimos que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à diagonal.

2.2 Funções potência, exponencial, logarítmica

Definição 2.5 *Seja* $a \in \mathbb{R}$*, notamos por* x^a *a função potência. O domínio depende do valor do* a*.* ① $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$, $D_f = [0, +\infty[$, ② $a \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$, $D_f =]0, +\infty[$. ③ $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ④ $a \in \mathbb{N}_0$, $D_f = \mathbb{R}$.
No caso particular $a = \frac{1}{n}$ *com* $n \in \mathbb{N}$*, notamos* $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$*.*

Nota 2.2 Os monómios x^5 ou o seu inverso algebrico x^{-5} são exemplos de funções potências.

Proposição 2.2
Seja $x > 0$*, temos as propriedades seguintes para qualquer* $a, b \in \mathbb{R}$*:*

$$x^0 = 1, \quad x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \quad \frac{1}{x^a} = x^{-a}, \quad (x^a)^b = (x^b)^a = x^{ab}.$$

Nota 2.3 As propridades são também verdadeira para $x \in \mathbb{R}$ desde que $a, b \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.3
Seja $a \neq 0$ *então* $f(x) = x^a$ *é uma bijecção de* $]0, +\infty[$ *sobre* $]0, +\infty[$ *e a sua função inversa é dada por* $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{a}}$

Nota 2.4 Temos casos mais complexos onde temos uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$. Por exemplo se $a = 2k + 1$ é um número inteiro ímpar, então x^a e $x^{\frac{1}{a}}$ faz sentido mesmo se $x \leq 0$.

Definição 2.6 *Seja* $a > 0$*, notamos por* a^x *a função exponencial de base* a*. É a única função que satisfaz as propriedades* $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ① $a^{x+y} = a^x a^y$, ② $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$, ③ $a^0 = 1$ *e* $a^1 = a$*.*

Consideramos a sucessão $u_i = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$. Podemos mostrar que esta sucessão converge para um valor que notamos habitualmente e (o número de Neper) seja

$$\lim_{i \to \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = e$$

Simplificamos a notação por $\exp(x) = \exp_e(x)$ quando tratamos da função exponecial com $a = e$. A razão fundamental deste caso particular é que é o único valor que verifica a propriedade $(e^x)' = e^x$.

NOTA 2.5 É importante distinguir a função potência x^a da função exponencial a^x. Notamos também $\exp_a(x) = a^x$ a exponecial de base a.

NOTA 2.6 É facil verificar que $a^x \geq 0$ porque $a^x = a^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = a^{\frac{x}{2}} a^{\frac{x}{2}} \geq 0$. Por outro lado verificamos que $1 = a^0 = a^{x-x} = a^x a^{-x} \Rightarrow a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

Proposição 2.4
Se $a \in]0,1[$ a função é estritamente decrescente enquanto é estritamente crescente se $a > 1$.

Proposição 2.5
Seja $a > 0$, a função exponencial de base a é bijetiva de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$ e notamos por $\log_a(x)$ a função inversa (função logarítmica) tal que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exp_a(\log_a(x)) = x.$$

Notação 2.2 *Para tratar do logaritmo na base $a = e$ usamos a notação especial $\ln(x) = \log_e(x)$. Alguns autores usam também da notação $\log(x)$ ou $Log(x)$ para o logarítmo em base $a = 10$.*

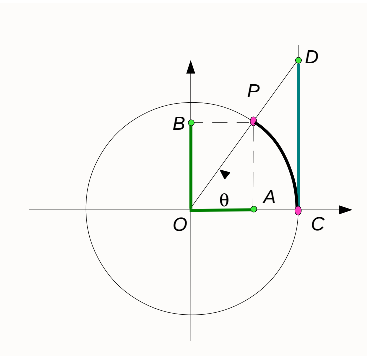
Recordadamos aqui as principais propriedades do logarítmo.

Proposição 2.6
Seja $a > 0$ e $x, y > 0$ então ① $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, ② $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$, ③ $\log_a(1/x) = -\log_a(x)$.

Proposição 2.7
Outras propriedades entre as diferentes bases e o logaritmo neperiano são dadas aqui. Seja $a, b > 0$ e $x > 0$ então ① $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$, ② $a^x = e^{x\ln(a)}$, ③ $\log_a(b^x) = x\dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$.

2.3 Funções trigonométricas elípticas

Definição 2.7 *Consideramos uma circunferência de raio 1 centrado em 0*



Seja P um ponto na circunferência, A e B são as projeções nos eixos horizontal e vertical respetivamente e a orientação trigonométrica é dada pelo vetor no ponto A de direção $(0,1)$.
O comprimento do arco entre C e P se chama ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$.
O seno é a medida algébrica $\overline{OB}$.
O cosseno é a medida algébrica $\overline{0A}$.

Como $\sin(0) = \sin(2\pi)$ e $\cos(0) = \cos(2\pi)$ depois fazer uma revolução completa, efetuamos uma extensão das funções por periodicidade do modo seguinte. Seja $x \in \mathbb{R}$, então existe

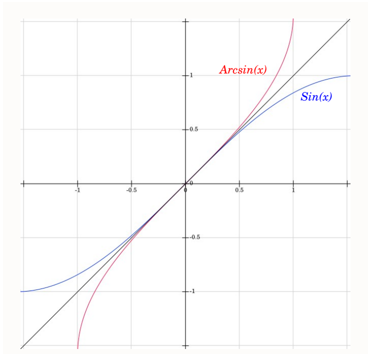
um único $n \in \mathbb{Z}$ é um único $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que $x = \theta + 2\pi n$ e definimos $\cos(x) = \cos(\theta)$, $\sin(x) = \sin(\theta)$.
A função sin é impar enquanto a função cos é par. Por construção, as duas funções são periódicas de periodo 2π.

Definição 2.8 *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ definimos* $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. *Esta função corresponde a medida algebrica $\overline{CD}$ quando $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.*
Do mesmo modo, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ definimos $\cot(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
As duas funções são ímpares e periódicas de período π.

Proposição 2.8 (arco-seno)
A função $x \to y = \sin(x)$ é uma bijeção de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sobre $[-1, 1]$ e notamos por $y \to x = \arcsin(y)$ a função inversa (recíproca) definida de $[-1, 1]$ sobre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(x)) = x, \quad \forall y \in [-1, 1], \sin(\arcsin(y)) = y.$$

Nota 2.7 Os conjuntos de partida e chegada são muito importantes. Podemos também usar a notação $\sin^{-1}(y)$ para a função inversa mas existe um risco muito elevado de confusão com a função $\dfrac{1}{\sin(y)}$ que usa exatamente a mesma notação. Por isso aconselhamos usar a notação $\arcsin(y)$.

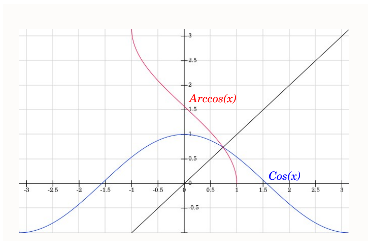


Funções $\sin(x)$ e $\arcsin(x)$.

Exercício 2.1 Resolver as equações $\sin(x) = \frac{1}{2}$, $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arcsin(y) = -\frac{\pi}{4}$.

Proposição 2.9 (arco-cosseno)
A função $x \to y = \cos(x)$ é uma bijeção de $[0, \pi]$ sobre $[-1, 1]$ e notamos por $y \to x = \arccos(y)$ a função inversa (recíproca) definida de $[-1, 1]$ sobre $[0, \pi]$

$$\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall y \in [-1, 1], \cos(\arccos(y)) = y.$$



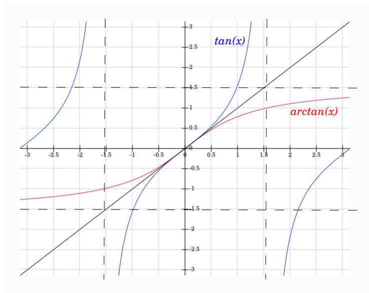
Funções $\cos(x)$ e $\arccos(x)$.

Nota 2.8 Podemos também usar a notação $\cos^{-1}(y)$ para a função inversa.

Exercício 2.2 Resolver as equações $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(-x) = \frac{1}{2}$, $\arccos(y/2) = 0$.

Proposição 2.10 (arco-tangente)
A função $x \to y = \tan(x)$ é uma bijeção de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sobre $\mathbb{R}$ e notamos por $y \to x = \arctan(y)$ a função inversa (recíproca) definida de $\mathbb{R}$ sobre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(y)) = y.$$



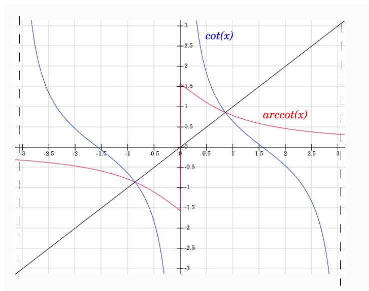
Funções $\tan(x)$ e $\arctan(x)$.

NOTA 2.9 Podemos também usar a notação $\tan^{-1}(y)$ para a função inversa.

EXERCÍCIO 2.3 Resolver as equações $\tan(x) = \frac{1}{3}$, $\tan(1/x) = -1$, $\arctan(y) = \pi/3$.

Proposição 2.11 (arco-cotangente)
A função $x \to y = \cot(x)$ é uma bijeção de $]0, \pi[$ sobre $\mathbb{R}$ e notamos por $y \to x = \operatorname{arccot}(y)$ a função inversa (recíproca) definida de $\mathbb{R}$ sobre $[0, \pi]$

$$\forall x \in]0, \pi[, \operatorname{arccot}(\cot(x)) = x, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \cot(\operatorname{arccot}(y)) = y.$$



Funções $\cot(x)$ e $\operatorname{arccot}(x)$.

EXERCÍCIO 2.4 Resolver as equações $\cot(x) = -1$, $\operatorname{arccot}(y) = \pi/4$.

2.4 Funções trigonométrias hiperbólicas

Definição 2.9 (Cosseno hiperbólico) *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ definimos o cosseno hiperbólico por*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

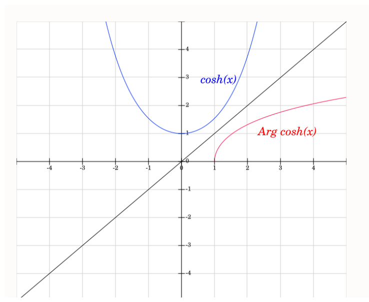
Notamos que a função é par e positiva.

Proposição 2.12
A função $x \to y = \cosh$ é uma bijeção de $[0, +\infty[$ sobre $[1, +\infty[$ e notamos por $y \to x = \arg\cosh(y)$ a função inversa (recíproca) de $[1, +\infty[$ sobre $[0, +\infty[$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ \arg\cosh(\cosh(x)) = x,$$
$$\forall y \in [1, +\infty[, \ \cosh(\arg\cosh(y)) = y.$$

Além de mais, para qualquer $y \in [1, +\infty[$, temos

$$\arg\cosh(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$



Funções $\cosh(x)$ e $\arg\cosh(x)$.

Definição 2.10 (Seno hiperbólico) *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ definimos o seno hiperbólico por*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

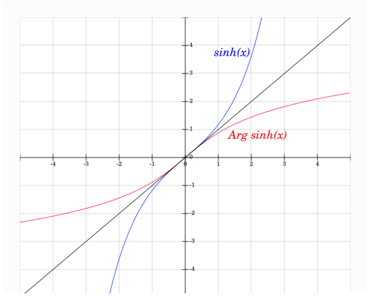
Notamos que a função é ímpar.

Proposição 2.13
A função $x \to y = \sinh$ é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e notamos por $y \to x = \arg\sinh(y)$ a função inversa (recíproca) de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arg\sinh(\sinh(x)) = x,$$
$$\forall y \in \mathbb{R},\ \sinh(\arg\sinh(y)) = y.$$

Além de mais, para qualquer $y \in \mathbb{R}$, temos

$$\arg\sinh(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$



Funções $\sinh(x)$ e $\arg\sinh(x)$.

Definição 2.11 (tangente hiperbólica) *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ definimos a tangente hiperbólica por*

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

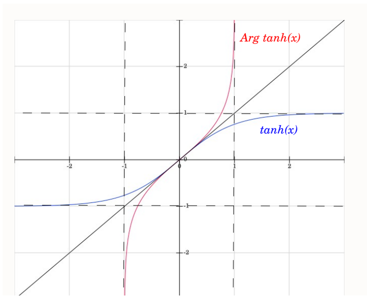
Notamos que a função é ímpar.

Proposição 2.14
A função $x \to y = \tanh$ é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $]-1,1[$ e notamos por $y \to x = \arg\tanh(y)$ a função inversa (recíproca) de $]-1,1[$ sobre $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arg\tanh(\tanh(x)) = x,$$
$$\forall y \in]-1,1[,\ \tanh(\arg\tanh(y)) = y.$$

Além de mais, para qualquer $y \in]-1,1[$, temos

$$\arg\tanh(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$



Funções $\tanh(x)$ e $\arg\tanh(x)$.

Definição 2.12 (cotangente hiperbólica) *Para qualquer $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ definimos a cotangente hiperbólica por*

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

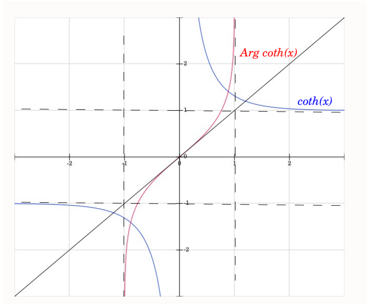
Notamos que a função é ímpar.

Proposição 2.15
A função $x \to y = \coth$ *é uma bijeção de* $]0,+\infty[$ *sobre* $]1,+\infty[$ *e notamos por* $y \to x = \arg\coth(y)$ *a função recíproca de* $]1,+\infty[$ *sobre* $]0,+\infty[$.

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \arg\coth(\coth(x)) = x,$$
$$\forall y \in]1,+\infty[,\ \coth(\arg\coth(y)) = y.$$

Além de mais, para qualquer $y \in]1,+\infty[$, *temos*

$$\arg\coth(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$



Funções $\coth(x)$ e $\arg\coth(x)$.

2.5 Exercícios

Exercício 1 Determinar os ângulos seguintes:

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\arcsin\left(\sin(\frac{5\pi}{6})\right)$, $\arctan\left(\tan(\frac{7\pi}{4})\right)$.
2. $\arcsin(\sin(\frac{18\pi}{5}))$, $\arccos(\cos(\frac{18\pi}{5}))$ $\arcsin(-\sin(-\frac{15\pi}{7}))$, $\arccos(\cos(-\frac{10\pi}{3}))$.

Exercício 2 Determinar o conjunto solução:

1. $\cos(x) > \frac{1}{2}$, $|\tan(x)| > 1$, $\sin^2(x) < \frac{1}{4}$.

Exercício 3 Mostrar as relações seguintes:

1. $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,
2. $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,
3. $\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x) = \sqrt{1-x^2}$,

Exercício 4 Mostrar as propriedade seguintes

1. $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$,
2. $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$,
3. $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Exercício 5 Simplificar as relações seguintes:

1. $f(x) = \log_{10}(2x^n)$, $f(x) = \exp(2+x)\exp(2x-3)$, $f(x) = \ln(x+1)+\ln(x-1)-\ln(x^2-1)$.
2. $f(x,y) = e^{x\ln(y)-y\ln(x^2)}$, $f(x) = \cosh(x) - \sinh(x)$, $f(x) = \sin(\pi\sinh(\ln(2)))$.
3. $f(x,y) = e^{3x\ln(5)+y\ln(2)}$, $f(x) = 2\ln(e^{\frac{x}{2}}) - 2e^{\ln(\frac{x}{2})}$, $f(x) = \ln(2xe^{4x})$.

Exercício 6 Determine o conjunto solução das equações seguintes:

1. $\ln(x-1) = 2\ln(x+1), \quad e^{x+4} = 3e^{2x-1}, \quad 25^x + 5^{x+1} - 6 = 0.$

2. $2^x > 3^x, \quad \ln(x+2) + \ln(x+3) = \ln(x+11), \quad -\cosh(x) + 2\sinh(x) = -1.$

Solução 1

1. *(i)* $\pi/6$, *(ii)* $3\pi/4$, *(iii)* $\pi/6$, *(iv)* $\pi/4$.

2. *(i)* $-2\pi/5$, *(ii)* $2\pi/5$, *(iii)* $\pi/7$, *(iv)* $2\pi/3$.

Solução 2

1. *(i)* $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi[$, *(ii)* $S = \left(\cup_{k\in\mathbb{Z}}] - \frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi[\right) \bigcup \left(\cup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\right)$, *(iii)* $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}] - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi[$.

Solução 3

1. *Seja* $y = \arctan(x)$, *mostrar que* $\frac{\sqrt{1-\cos^2(y)}}{\cos(y)} = x$ *usando* $\tan = \frac{\sin}{\cos}$. *Deduzir* $\cos(y)$ *en função de* x.

2. *Usar de novo* $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

3. *Usar* $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Solução 4

As relações se deduzem da definição de $\sinh$ *e de* $\cosh$ *em função de* e^x.

Solução 5

1. *(i)* $f(x) = \frac{1}{\ln(10)}(n\ln(x) + \ln(2))$, *(ii)* $f(x) = \exp(3x-1)$, *(iii)* $f(x) = 0$.

2. *(i)* $f(x) = \frac{y^x}{x^{2y}}$, *(ii)* $f(x) = e^{-x}$, *(iii)* $f(x) = -1$.

3. *(i)* $f(x,y) = 125^x 2^y$, *(ii)* $f(x) = 0$, *(iii)* $f(x) = \ln(2) + \ln(x) + 4x$.

Solução 6

1. *(i)* $S = \emptyset$, *(ii)* $S = \left\{\frac{\ln(3)+4}{\ln(3)-1}\right\}$, *(iii) Fazer* $X = 5^x$ *e obtemos* $S = \{1\}$.

2. *(i)* $S =]-\infty, 0[$, *(ii)* $S = \{-5, 1\}$, *(iii) Fazer* $X = e^x$ *e obtemos* $S = \{0\}$.