# Complementos de Análise Matemática B/C

## Teste 1 – Algumas notas sobre a resolução

Duração: 40 minutos

---

1. Determine uma solução do PVI $\left(xe^x y + \dfrac{1}{x+1}\right)dx + \left((x-1)e^x + \cos(y) - y\,\mathrm{sen}(y)\right)dy = 0, \quad y(0) = 0.$ (1.75)

A equação é exacta. Logo admite uma família de soluções que se pode escrever na forma $F(x, y) = c,$ onde

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = xe^x y + \dfrac{1}{x+1} \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = (x-1)e^x + \cos(y) - y\,\mathrm{sen}(y) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} F(x,y) = (x-1)e^x y + \ln(x+1) + \phi(y) \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = (x-1)e^x + \cos(y) - y\,\mathrm{sen}(y) \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} F(x,y) = (x-1)e^x y + \ln(x+1) + \phi(y) \\ (x-1)e^x + \dfrac{d\phi(y)}{dy} = (x-1)e^x + \cos(y) - y\,\mathrm{sen}(y) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} F(x,y) = (x-1)e^x y + \ln(x+1) + \phi(y) \\ \phi(y) = y\cos(y) + k \end{cases} \longrightarrow$$

$$F(x,y) = (x-1)e^x y + \ln(x+1) + y\cos(y) + k$$

A família de soluções escreve-se, tomando $k = 0,$ $F(x,y) = c \Leftrightarrow (x-1)e^x y + \ln(x+1) + y\cos(y) = c$

Como $y(0) = 0,$ resulta $c = 0,$ sendo a solução do PVI: $(x-1)e^x y + \ln(x+1) + y\cos(y) = 0$

Confirmação:

$$(x-1)e^x y + \ln(x+1) + y\cos(y)\ \Big|_{x=0,\,y=0} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

$$d\left[(x-1)e^x y + \ln(x+1) + y\cos(y)\right] = d\left(0\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(xe^x y + \frac{1}{x+1}\right)dx + \left((x-1)e^x - y\,\mathrm{sen}(y) + \cos(y)\right)dy = 0$$

# Complementos de Análise Matemática B/C

## Teste 1 – Algumas notas sobre a resolução

Duração: 40 minutos

---

2. Determine uma família de $\cos x \dfrac{dy}{dx} + (\text{sen}(x) - 3\cos(x))\, y = 2\dfrac{\cos^3(x)}{\text{sen}(x)} e^{3x}, \quad x \in \left]0, \pi/2\right[.$ (1.75)

A equação é linear com: $P(x) = \text{tg}(x) - 3,$ logo
$\mu(x) = \exp\int \left(\text{tg}(x) - 3\right) dx = \exp\left(-\ln(\cos(x)) - 3x\right) = e^{-3x}\sec(x)$

Multiplicando toda a equação por $\mu(x)$ resulta:

$$e^{-3x}\sec(x)\frac{dy}{dx} + e^{-3x}\sec(x)(\text{tg}(x) - 3)\, y = 2\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} \Leftrightarrow \frac{d(e^{-3x}\sec(x)\, y)}{dx} = 2\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} \quad \longrightarrow$$

$$e^{-3x}\sec(x)\, y = 2\int \text{cotg}(x) dx + c \Leftrightarrow y = \left(2\ln(\text{sen}(x)) + c\right)\cos(x) e^{3x}$$

Nota: $\dfrac{d(e^{-3x}\sec(x)\, y)}{dx} = e^{-3x}\sec(x)\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{d(e^{-3x}\sec(x))}{dx}\, y = e^{-3x}\sec(x)\dfrac{dy}{dx} + e^{-3x}\sec(x)(\text{tg}(x) - 3)\, y$

---

3. Averigúe se $3x^2 - xy + y^2 = 3$ verifica formalmente o PVI $\left(y - 6x\right)dx + \left(x - 2y\right)dy = 0, \quad y(-1) = -1.$ (0.50)

$$3x^2 - xy + y^2\Big|_{x=-1,\, y=-1} = 3 \Leftrightarrow 3 - 1 + 1 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$$

$$d\left(3x^2 - xy + y^2\right) = d\left(3\right) \Leftrightarrow \left(6x - y\right)dx + \left(2y - x\right)dy = 0 \Leftrightarrow \left(y - 6x\right)dx + \left(x - 2y\right)dy = 0$$