INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA

Teste 1 de Cálculo I

(Engenharia Biomédica)

2 de Dezembro de 2009 Duração: 1h30

Regras a respeitar adicionalmente:

- Não é permitida a consulta de quaisquer livros ou textos de apoio.
- A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação dos cálculos efectuados.
- Não serão prestados quaisquer esclarecimentos adicionais. Se tiver dúvidas, apresente-as por escrito no seu teste, para que as mesmas possam vir a ser tidas em conta na correcção.
- Qualquer tentativa de **fraude** será punida com a **anulação imediata** da prova.

---

1. (2.0val.) Considere a função $f(x) = 2 + \arcsin(2x+1)$.
   (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.
   (b) Calcule $f(\frac{-1}{4})$.
   (c) Caracterize f^{-1}.
   (d) Resolva a equação $f(x) = 2 + \frac{\pi}{6}$.
2. (2.0val.) Considere a equação $x^3 - xy - y^2 = 1$ que define implicitamente y em função de x.
   (a) Determine y'.
   (b) Obtenha a equação da recta tangente à curva no ponto $(1,-1)$.
3. (2.0 val.) Prove, usando a definição de primitiva que
   $\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}dx = \ln(\frac{1}{\sqrt{x}-1}) + c, c \in \mathbb{R}$.
4. (2.0 val.) Calcule a seguinte primitiva imediata $\int \frac{1}{4e^x + e^{-x}}dx$.
5. (2.0 val.) Usando primitivação de funções racionais, determine $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2}dx$.
6. (2.0 val.) Calcule por partes: $\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$.
7. (2.0 val.) Calcule por substituição: $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$.
8. (6.0 val.) Calcule as seguintes primitivas
   (a) $\int \sin^3(3x)\sqrt{\cos(3x)}dx$;
   (b) $\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx$;
   (c) $\int x^2\cos(2x)dx$

2009/10 CÁLCULO 1 (Eng Biomédica) 1

(1ª frequência)

1. $f(x) = 2 + \arcsin(2x+1)$

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x+1 \leq 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq 2x \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 0\} = [-1, 0]$

$D'_f = ?$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(2x+1) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$2 - \frac{\pi}{2} \leq 2 + \arcsin(2x+1) \leq 2 + \frac{\pi}{2}$$

$D'_f = \left[2 - \frac{\pi}{2}, 2 + \frac{\pi}{2}\right]$

b) $f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 + \arcsin\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 1\right)$

$= 2 + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 2 + \frac{\pi}{6}$

c) Função inversa.

$D_{f^{-1}} = D'_f$ $\qquad$ $D'_{f^{-1}} = D_f$

$= \left[2 - \frac{\pi}{2}, 2 + \frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad$ $= [-1, 0]$

$y = 2 + \arcsin(2x+1)$

$y - 2 = \arcsin(2x+1)$

$\sin(y-2) = (2x+1)$

$2x = \sin(y-2) - 1$

$x = \dfrac{-1 + \sin(y-2)}{2}$

$$f^{-1} : \left[2 - \frac{\pi}{2}, 2 + \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 0]$$
$$x \rightsquigarrow \frac{-1 + \sin(x-2)}{2}$$

d) $f(x) = 2 + \frac{\pi}{6}$

$2 + \arcsin(2x+1) = 2 + \frac{\pi}{6}$

$\arcsin(2x+1) = \frac{\pi}{6}$

$2x+1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

2 a) $x^3 \cdot xy - y^2 = 1$

$3x^2 - y - xy' - 2yy' = 0$

$3x^2 - y - y'(x+2y) = 0$

$-y'(x+2y) = -3x^2 + y$

$y' = \frac{y - 3x^2}{-(x+2y)} = \frac{3x^2 - y}{x+2y}$

b) $P(1,-1)$

Eq. da recta tangente

$y = mx + b$ com $m = y'(1)$

$y'(1) = \frac{3(1)^2 - (-1)}{1 + 2(-1)}$ (para $(1,-1)$)

$= \frac{3+1}{1-2} = -4$

$y = -4x + b$: cálculo de b:

No ponto de tangência $P(1,-1)$ tem-se:

$-1 = -4(1) + b \Rightarrow b = 3$

Eq. da recta tangente à função no ponto $P(1,-1)$

$\boxed{y = -4x + 3}$

3.

Por definição de primitiva de uma função

$$\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]' \overset{?}{=} \frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$$

$$\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]' = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)'}{\frac{1}{\sqrt{x}-1}} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}-1}} = -\frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$$

C.A.: $\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)' = \frac{0-(\sqrt{x}-1)'}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$

4. $$\int \frac{1}{4e^{x}+e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{e^{-x}(4e^{2x}+1)}\,dx =$$

$$= \int \frac{e^{x}}{\underbrace{4e^{2x}}_{f^2}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{x}}{(2e^{x})^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{arctg}\,(2e^{x})+C,$$

$C \in \mathbb{R}$

$f^2 \Rightarrow f = \sqrt{4e^{2x}}$

$= 2e^{x}$

$\Rightarrow f' = 2e^{x}$

5. $$\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2}\,dx$$

Passo1: A fracção é própria $gr\,N(x) < gr\,D(x)$

Passo2: Decomposição do denominador

$x^3+x^2 = x^2(x+1)$

Passo3: Decomposição da fracção numa soma de elementos simples.

$$\frac{2x^2+1}{x^3+x^2} = \frac{2x^2+1}{x^2(x+1)} = \underset{(x+1)}{\frac{A}{x^2}} + \underset{x(x+1)}{\frac{B}{x}} + \underset{x^2}{\frac{C}{x+1}}$$

$$2x^2+1 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2$$

$$\begin{matrix} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{matrix} \begin{cases} 1 = A+0+0 \\ 3 = 0+0+C \\ 3 = 2A+2B+C \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ C=3 \\ \cancel{3} = 2+2B+\cancel{3} \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ C=3 \\ B=-1 \end{cases}$$

Passo 4: cálculo da primitiva

$$\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} - \ln|x| + 3\ln|x+1| + C$$

$$= -\frac{1}{x} - \ln|x| + 3\ln|x+1| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

6. $$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \underbrace{x^2}_{D} \cdot \underbrace{x\sqrt{1+x^2}}_{P}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{f'}\,(\underbrace{1+x^2}_{f})^{1/2}\,dx \cdot x^2 - \int \left[\int x(1+x^2)^{1/2}dx\,(x^2)'\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} \cdot x^2 - \int \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} \cdot 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} \cdot x^2 - \frac{1}{3}\int (\underbrace{1+x^2}_{f})^{3/2} \cdot \underbrace{2x}_{f'}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} \cdot x^2 - \frac{1}{3}\frac{(1+x^2)^{5/2}}{5/2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} \cdot x^2 - \frac{2}{15}(1+x^2)^{5/2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

7. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx$ $x = 2\sec t$ $dx = 2\sec t \operatorname{tg} t\, dt$

$= \int \frac{2\sec t \operatorname{tg} t}{4\sec^2 t \sqrt{4\sec^2 t - 4}}\,dt = \int \frac{\cancel{2}\sec\!\!\!/ t \operatorname{tg} t}{\cancel{4}\sec^{\cancel{2}} t \sqrt{4\underbrace{(\sec^2 t - 1)}_{\operatorname{tg}^2 t}}}\,dt$

$= \int \frac{\cancel{\operatorname{tg} t}}{2\sec t \cdot 2\cancel{\operatorname{tg} t}}\,dt = \int \frac{1}{4\sec t}\,dt =$

$= \frac{1}{4}\int \cos t\,dt = \frac{1}{4}\operatorname{sen} t + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$

$x = 2\sec t \Rightarrow \frac{x}{2} = \sec t \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow \cos t = \frac{2}{x}$

$\Rightarrow t = \arccos\frac{2}{x}$

$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{2}{x}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$

8 a) $\int \sin^3(3x)\sqrt{\cos 3x}\,dx = \int \sin^3(3x)(\cos 3x)^{1/2}\,dx$

$= \int \sin 3x \sin^2 3x (\cos 3x)^{1/2}\,dx =$

$= \int \sin 3x(1-\cos^2 3x)(\cos 3x)^{1/2}\,dx =$

$= \int \sin 3x(\cos 3x)^{1/2} + \sin 3x \cos^2 3x(\cos 3x)^{1/2}\,dx =$

$= -\frac{1}{3}\int \underbrace{-3\sin 3x}_{f'}(\underbrace{\cos 3x}_{f})^{1/2}\,dx + \left(-\frac{1}{3}\right)\int \underbrace{-3\sin 3x}_{f'}(\underbrace{\cos 3x}_{f})^{5/2}\,dx$

$= -\frac{1}{3}\,\frac{(\cos 3x)^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{3}\,\frac{(\cos 3x)^{7/2}}{7/2} + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$

8 b) Substituição!

$$t = e^x$$
$$x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\, dt$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\, dx$$

$$\int \frac{t^{\cancel{3}\,2}}{t+1} \cdot \frac{1}{\cancel{t}}\, dt = \int \frac{t^2}{t+1}\, dt$$

fracção imprópria

$$\begin{array}{l|l} t^2 & t+1 \\ \hline -t^2 - t & t-1 \\ \hline -t & \\ +t \quad +1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$= \int t - 1 + \frac{1}{t+1}\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| + C$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\, dx = \frac{(e^x)^2}{2} - e^x + \ln|e^x+1| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

8 c)
$$\int \underbrace{x^2}_{D} \underbrace{\cos 2x}_{P}\, dx = \int \cos 2x\, dx \cdot x^2 - \int \left[\int \cos 2x\, dx \cdot (x^2)'\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x \cdot x^2 - \int \frac{1}{2}\sin 2x \cdot (2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x \cdot x^2 - \frac{1}{2}\int \underbrace{\sin 2x \cdot 2}_{P}\, \underbrace{x}_{D}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x \cdot x^2 - \frac{1}{2}\left[\int 2\sin 2x\, dx \cdot x - \int\left[\int 2\sin 2x\, dx \cdot (x)'\right] dx\right.$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x \cdot x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x \cdot x - \int \frac{1}{2}\cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x \cdot x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x \cdot x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int 2\cos 2x\, dx =$$

$$= 1/2\, \sin 2x \cdot x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x \cdot x - \frac{1}{4}\sin 2x + C,\ C \in \mathbb{R}$$