Departamento de Matemática e Aplicações 06/05/ 2015

Duração: 90 minutos

2º Teste de Análise Matemática EE

Nome: ____________________ Nr.: __________ Curso:

GRUPO I

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correta no quadrado correspondente

1. Se a taxa de variação instantânea da função $z = f(x,y)$ no ponto $(1,-1)$ na direção do vector $\vec{u} = (1,0)$ é -5, significa que:

☐ $f'_y(1,-1) = -5$; ☐ $f'_z(1,-1) = -5$; ☐ $f'_x(1,-1) = -5$; ☐ $f'_y(1,0) = -5$.

2. Considere a função $z = f(x,y)$ tal que $f'_x(2,3)$ existe. Geometricamente, $f'_x(2,3)$ representa o declive da recta tangente à curva obtida pela interseção do gráfico de f com o:

☐ Plano $y = 3$; ☐ Plano $x = 2$; ☐ Plano $z = f(2,3)$; ☐ Plano $2x + 3y = f(2,3)$.

3. Considere uma função $z = f(x,y)$ definida em $\mathbb{R}^2$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

☐ Se f admite derivadas parciais no ponto (x_0, y_0) então f é diferenciável em (x_0, y_0);

☐ Se f é diferenciável no ponto (x_0, y_0) então f é contínua em (x_0, y_0);

☐ Se f admite derivadas direccionais no ponto (x_0, y_0) na direção de qualquer vector $\vec{u}$ então f é diferenciável em (x_0, y_0);

☐ Se $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0)$ então f é diferenciável em (x_0, y_0).

4. Considere uma função $z = f(x,y)$ diferenciável em $(0,0)$, com $f(0,0) = 0$, $f'_x(0,0) = 2$ e $f'_y(0,0) = 3$. Então para os pontos (x,y) pertencentes a uma vizinhança de $(0,0)$, tem-se:

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$;

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (f(x,y) - 2x - 3y) = 0$;

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-3x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$;

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-2x-3y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

5. Considere uma função $z = f(x,y)$ diferenciável em (x_0, y_0), com $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0)$ e $f''_{x^2}(x_0, y_0) = 0$. Então:

☐ $f(x_0, y_0)$ é máximo local de f;

☐ $f(x_0, y_0)$ é mínimo local de f;

☐ (x_0, y_0) é ponto de sela de f;

☐ Nada se pode concluir sobre o ponto (x_0, y_0).

6. Seja $f(x,y)$ diferenciável em $(-1,1)$ e considere um vector $\vec{u} = (2,-3)$. A taxa de variação instantânea de f na direção do vector $\vec{u}$ é dada por:

☐ $\frac{2}{\sqrt{13}} f'_x(-1,1) - \frac{3}{\sqrt{13}} f'_y(-1,1)$; ☐ $-\frac{3}{\sqrt{13}} f'_x(-1,1) + \frac{2}{\sqrt{13}} f'_y(-1,1)$;

☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}} f'_x(2,-3) + \frac{1}{\sqrt{2}} f'_y(2,-3)$; ☐ $f'_x(-1,1) + f'_y(-1,1)$.

7. Seja $f(x,y)$ diferenciável em (x_0, y_0). O plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é horizontal se

☐ $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ não existe; ☐ $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0)$;

☐ $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (1,0)$; ☐ $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,1)$.

GRUPO II

Em cada uma das perguntas seguintes, responda sem apresentar cálculos.

1. Seja f definida em $\mathbb{R}^2$ que admite derivadas parciais contínuas até à ordem 2 em $(0,0)$, com $f(0,0)=1$, $f'_x(0,0)=-2$, $f'_y(0,0)=3$, $f''_{x^2}(0,0)=-1$, $f''_{xy}(0,0)=\frac{1}{3}$ e $f''_{y^2}(0,0)=4$.

   (a) O diferencial de f no ponto $(0,0)$ é dado por:

   (b) A equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,0,f(0,0))$ é:

   (c) O polinómio de grau 2 que melhor se aproxima à função f para (x,y) pertencente a uma vizinhança de $(0,0)$ é:

GRUPO III

Apresente todos os cálculos efetuados.

1. Considere a relação $z=2t+3x+\sin y$, onde $x=\dfrac{t}{u}$ e $y=t^2u$. Sem determinar a função composta, determine

   (a) $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

   (b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial t}$

2. A área de um triângulo é dado por $A=\frac{1}{2}ab\cos C$, onde a,b são os comprimentos de dois lados do triângulo e C é a medida do ângulo entre os lados referidos. Considere $a=20$, $b=16$ e $C=\frac{\pi}{3}$radianos. Usando diferenciais, determine o valor aproximado da variação da área do triângulo se ambos os comprimentos a e b forem aumentados em $0,01$, mantendo o ângulo C constante.

3. Seja $h(x,y) = 2\exp(xy) + \exp(x^2)$ a função que representa a altura de uma montanha na posição (x,y).

   (a) Determine a derivada direccional de h no ponto $P = (0,2)$ na direção do vector $\vec{u}$ que faz com o semi - eixo positivo OX um ângulo de $\frac{\pi}{4}$radianos.

   (b) Qual a direção (a partir do ponto P) se deve caminhar, de modo a escalar a montanha mais rapidamente? Qual é a taxa de variação de h nessa direção? Justifique adequadamente a sua resposta.

   (c) Qual a direção, a partir do ponto P, segundo a qual a altura da montanha não se altera? Justifique adequadamente.

4. Considere a função $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$.

   (a) Determine os pontos críticos de f.

   (b) Classifique os pontos críticos verificando se são extremantes de f