1. Considere a equação diferencial não homogénea $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=2x$

a) Mostre que e^x e 1 **são soluções linearmente independentes da equação homogénea associada.**

R:

A equação homogénea associada à equação diferencial dada é: $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0$

Vamos agora verificar se e^x e 1 são soluções:

Para: $y=e^x$	$y=e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=\frac{d}{dx}(x)\cdot e^x=e^x$ $\frac{dy}{dx}=e^x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=\frac{d}{dx}(x)\cdot e^x=e^x$
Substituindo na equação diferencial teremos que: $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow e^x-e^x=0 \Leftrightarrow 0=0 \Rightarrow y=e^x$ é solução.	

Para: $y=1$	$y=1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(1)=0$ $\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(0)=0$
Substituindo na equação diferencial teremos que: $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow 0-0=0 \Leftrightarrow 0=0 \Rightarrow y=1$ é solução.	

Posto isto, vamos agora verificar se estas soluções são linearmente independentes, recorrendo para tal ao Wronskiano:

$$W\left(e^x;1\right)=\begin{vmatrix} e^x & 1 \\ \left(e^x\right)'_x & (1)'_x \end{vmatrix} \Leftrightarrow W\left(e^x;1\right)=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ \begin{vmatrix} e^x & 1 \\ e^x & 0 \end{vmatrix} \end{array} \Leftrightarrow W\left(e^x;1\right)=\left(e^x\times 0-e^x\times 1\right)\Leftrightarrow W\left(e^x;1\right)=-e^x\neq 0$$

Como: $W\left(e^x;1\right)=-e^x\neq 0$, então as soluções são linearmente independentes.

b) Qual é a função complementar da equação diferencial dada?

R:

Função complementar $\left(y_C\right)\equiv$ Solução geral da equação homogénea associada

Assim sendo teremos que: $y_C=c_1\cdot f_1+c_2\cdot f_2$, onde neste caso: $\{f_1;\,f_2\}=\{e^x;1\}$

Logo a função complementar será: $y_C=c_1\cdot e^x+c_2\cdot 1\Leftrightarrow y_C=c_1\cdot e^x+c_2$

c) Mostre que $1-2x-x^2$ é um integral particular da equação dada.

R:

Do enunciado pode concluir-se que: $y_P=1-2x-x^2$

Agora vamos determinar as derivadas deste integral particular para posteriormente as substituir na equação diferencial dada no enunciado:

$$y_P=1-2x-x^2\Rightarrow \frac{dy_P}{dx}=\frac{d}{dx}\left(1-2x-x^2\right)=-2-2x$$

$$\frac{dy_P}{dx}=-2-2x\Rightarrow \frac{d^2y_P}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy_P}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(-2-2x\right)=-2$$

Substituindo teremos então que: $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=2x\Leftrightarrow -2-\left(-2-2x\right)=2x\Leftrightarrow 2x=2x$

Então: $1-2x-x^2$ é um integral particular da equação diferencial dada.

d) Qual é a solução geral da equação dada?

R:

A solução geral da equação dada resulta da seguinte expressão:

$$y = y_C + y_P \Leftrightarrow y = c_1 \cdot e^x + c_2 + 1 - 2x - x^2$$

2. Verifique que $\frac{x^3}{8}$ é um integral particular da seguinte equação diferencial: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=x^3$. Determine a sua solução geral sabendo que x e x^{-1} são soluções da equação homogénea associada.

R:

Do enunciado pode concluir-se que: $y_P=\frac{x^3}{8}$

Agora vamos determinar as derivadas deste integral particular para posteriormente as substituir na equação diferencial dada no enunciado:

$$y_P=\frac{x^3}{8}\Rightarrow\frac{dy_P}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{8}\right)=\frac{3}{8}x^2$$

$$\frac{dy_P}{dx}=\frac{3}{8}x^2\Rightarrow\frac{d^2y_P}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy_P}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{8}x^2\right)=\frac{6}{8}x$$

Substituindo: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=x^3\Leftrightarrow x^2\cdot\left(\frac{6}{8}x\right)+x\cdot\left(\frac{3}{8}x^2\right)-\frac{x^3}{8}=x^3\Leftrightarrow\frac{6x^3+3x^3-x^3}{8}=x^3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{8x^3}{8}=x^3\Leftrightarrow x^3=x^3\rightarrow\frac{x^3}{8}$ é um integral particular da equação diferencial dada.

Sabendo que a solução geral da equação é dada pela seguinte expressão: $y=y_C+y_P$

Vamos antes de mais começar por determinar a função complementar, sendo que:

$y_C=c_1\cdot f_1+c_2\cdot f_2$, onde neste caso: $\{f_1;f_2\}=\{x;x^{-1}\}=\left\{x;\frac{1}{x}\right\}\Rightarrow y_C=c_1\cdot x+c_2\cdot\frac{1}{x}$

Então a solução geral será: $y=y_C+y_P\Leftrightarrow y=\left(c_1\cdot x+c_2\cdot\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{x^3}{8}\right)$

3. Sabendo que um integral particular de $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=1$ é $y=\frac{1}{6}$, que um integral particular de $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=x$ é $y=\frac{x}{6}+\frac{5}{36}$ e que um integral particular de $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=e^x$ é $y=\frac{e^x}{2}$. Determine um integral particular de $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=2-12x+6e^x$.

R:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=1 \quad \Longrightarrow \quad y_{P_1}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=x \quad \Longrightarrow \quad y_{P_2}=\frac{x}{6}+\frac{5}{36}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=e^x \quad \Longrightarrow \quad y_{P_3}=\frac{e^x}{2}$$

Daqui se pode concluir que cada um dos integrais particulares é obtido em função do resultado de cada uma das equações diferenciais apresentadas.

Estabelecendo agora um paralelismo com a equação geral, podemos concluir que:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=2-12x+6e^x \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=2\times\underbrace{\underbrace{(1)}_{\substack{\text{Resultado da 1ª}\\ \text{eq. diferencial}}}}_{\substack{\Downarrow\\ y_{P1}}}-12\times\underbrace{\underbrace{(x)}_{\substack{\text{Resultado da 2ª}\\ \text{eq. diferencial}}}}_{\substack{\Downarrow\\ y_{P2}}}+6\times\underbrace{\underbrace{(e^x)}_{\substack{\text{Resultado da 3ª}\\ \text{eq. diferencial}}}}_{\substack{\Downarrow\\ y_{P3}}}$$

Ora, se as soluções particulares de cada uma das três equações diferenciais anteriores resultam duma relação que envolve o seu resultado, e sabendo que o resultado da equação geral é uma combinação dos resultados das três equações diferenciais iniciais, então:

$$y_{P_{geral}}=2\times y_{P_1}-12\times y_{P_2}+6\times y_{P_3} \Leftrightarrow y_{P_{geral}}=2\times\frac{1}{6}-12\times\left(\frac{x}{6}+\frac{5}{36}\right)+6\times\left(\frac{e^x}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_{P_{geral}}=\frac{2-12x}{6}-\frac{12\times5}{36}+\frac{6e^x}{2}\Leftrightarrow y_{P_{geral}}=\frac{12-60}{36}-\frac{72x}{36}+3e^x\Leftrightarrow y_{P_{geral}}=-\frac{4}{3}-2x+3e^x$$