2. Lei de Gauss da eletrostática

Os relâmpagos são descargas elétricas atmosféricas. A velocidade pode atingir os 220 000 km/h e a temperatura os 30 000ºC (cerca de 5 vezes superior à temperatura superficial do Sol). São razões de perigo suficientes, particularmente:

(1) Se um relâmpago atingir uma pessoa ou algo que ela esteja a tocar, ocorrerá um fluxo de carga elétrica através do corpo, que será fatal.

(2) Se atingir um objeto próximo, parte do fluxo de carga elétrica pode atingir a pessoa através do ar (efeito *side flash*).

(3) Se atingir o solo perto de alguém, parte do fluxo de carga no solo, pode ser desviada através do corpo.

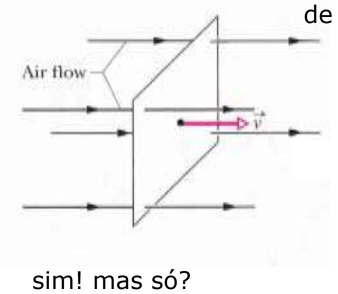
(4) Um outro perigo pode ocorrer. A imagem do relâmpago atingir uma árvore, contém uma pista.

Qual o perigo adicional?

2.1. Introdução ao conceito de fluxo de um vector

Vamos imaginar uma janela e uma corrente de ar;

Vamos admitir que a velocidade do ar é $\vec{v}$.



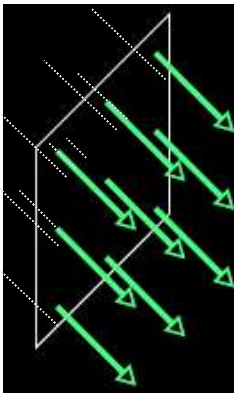
de que depende o efeito da corrente de ar?

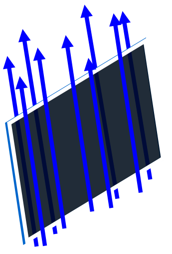
da velocidade do ar?

do tamanho (área) da janela?

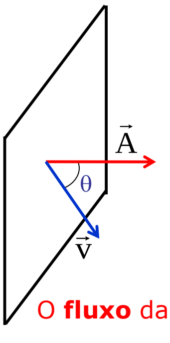
sim! mas só?

Também depende da orientação da velocidade do ar em relação à orientação da janela a velocidade do ar pode não ser perpendicular à janela...





é para quantificar o "efeito" de correntes através de superfícies que se define o "fluxo" - neste caso o "fluxo do **vector velocidade** do vento através da **área da janela**".



Primeiro, é necessário definir a orientação da corrente de ar em relação à janela. Para isso usa-se o ângulo entre dois vectores:

- o vector velocidade do ar – $\vec{v}$
- o vector perpendicular à superfície da janela - $\vec{A}$

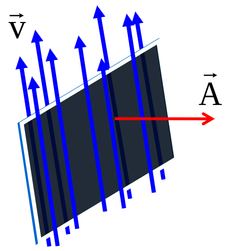
(com módulo igual à área da janela)

O **fluxo** da velocidade do ar através da janela depende:

do vector $\vec{v}$ e do vector $\vec{A}$

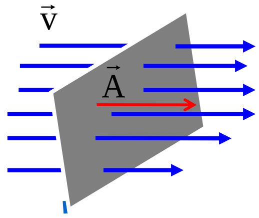
$$\boxed{\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Phi = v\,A\cos\theta}$$

$$\Phi = v\,A\cos\theta$$



se

$\theta = 90^{o} \Rightarrow \cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \Phi$ é nulo

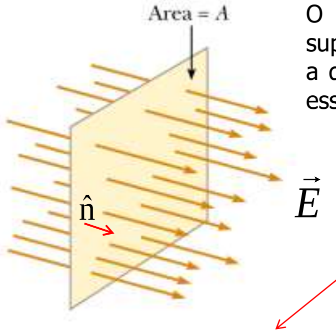


se

$\theta = 0^{o} \Rightarrow \cos\theta = 1 \;\Rightarrow\; \Phi$ é máximo

2.2. Fluxo do Campo Eléctrico

e se o vector não for a velocidade do ar, mas sim o campo eléctrico?



O fluxo do campo eléctrico através de uma superfície, pode ser determinado se conhecermos a densidade de linhas de campo que atravessam essa superfície.

$$\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A}$$

(vector com módulo igual à área da superfície)

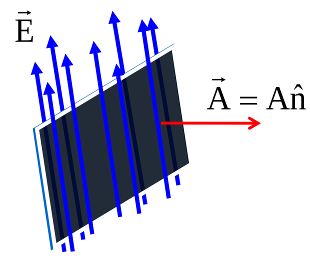
$$\vec{A} = A\hat{n}$$

Fluxo do campo eléctrico

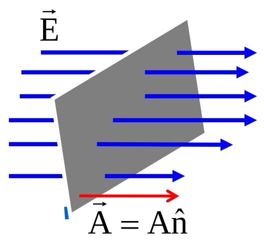
$$\Phi_E = \vec{E}\cdot A\hat{n}$$

Quais são as unidades SI de fluxo de campo eléctrico?

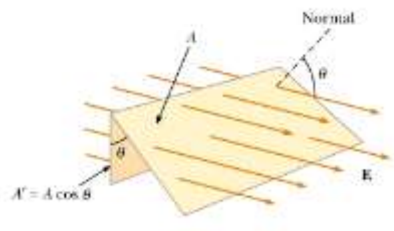
$$\Phi = E\,A\cos\theta$$



$$\Phi = E\ \ A\ cos\ 90^o \Rightarrow \Phi = 0$$

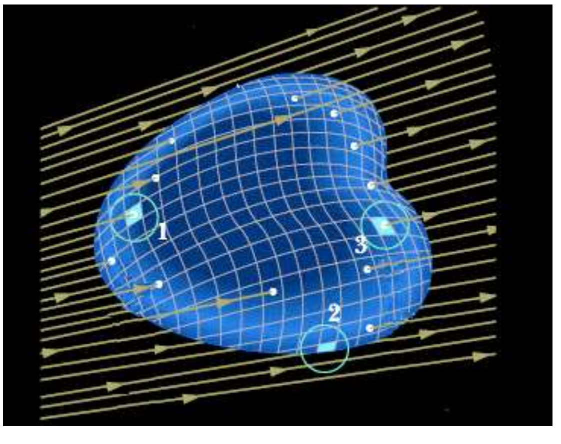


$$\Phi = E\,A cos 0^o \Rightarrow \Phi = E\,A$$

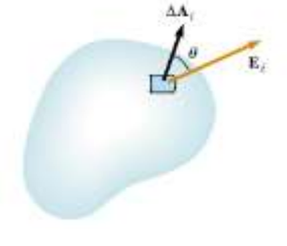


$$\Phi = EA' \Rightarrow \Phi = E\,A\cos\theta$$

mas nem sempre é assim tão fácil.... Imaginem que estamos interessados no fluxo através duma superfície fechada.



Qual a melhor forma de calcular o fluxo?

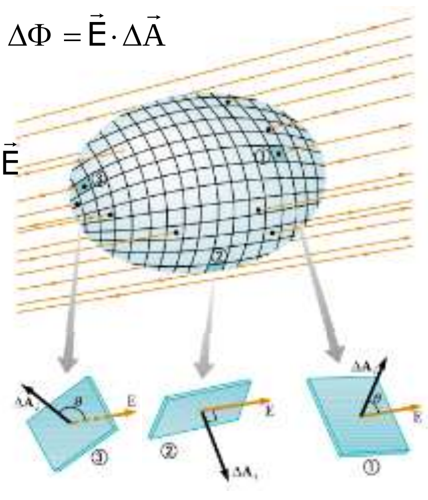


Essa superfície separa uma zona interior do exterior à superfície.

$$\Delta\Phi = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

$$\Delta\Phi = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}$$

$\vec{E}$



Elemento 1

$$\Delta\Phi_1 = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_1 \qquad \theta<90^o$$

$$\Delta\Phi_1 > 0$$

Elemento 2

$$\Delta\Phi_2 = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_2 \qquad \theta=90^o$$

$$\Delta\Phi_2 = 0$$

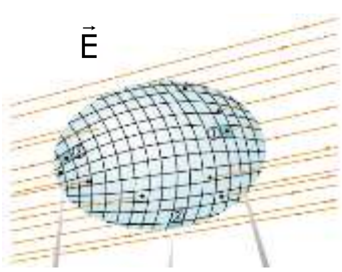
Elemento 3

$$\Delta\Phi_3 = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_3 \qquad 180>\theta>90^o$$

$$\Delta\Phi_3 < 0$$

Resumindo….

$\vec{E}$



1. Dividir a superfície em pequenas áreas
2. Calcular o fluxo do campo eléctrico através de cada uma das pequenas áreas :

$$\Delta\Phi_i = \vec{E}_i\cdot\Delta\vec{A}_i$$

3. Calcula-se a soma dos fluxos calculados para cada umas das áreas:

$$\Phi = \sum \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}$$

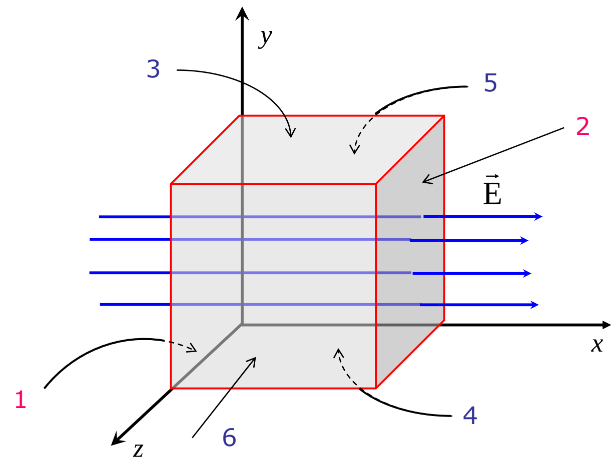
4. Fazendo com que cada área seja tão pequena quanto possível ($\Delta A\rightarrow 0$), o fluxo vem:

$$\boxed{\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}} \Longrightarrow \Phi = \oint E_n dA$$

Componente do campo eléctrico na direcção normal à superfície

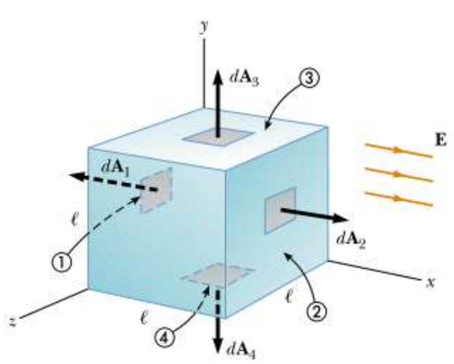
Checkpoint

Considere um campo eléctrico uniforme, orientado segundo a direcção positiva do eixo dos x. Calcular o fluxo resultante através das faces do cubo de lado ℓ



$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_{total} = \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A} + \cancel{\int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}} + \cancel{\int_4 \vec{E} \cdot d\vec{A}} + \cancel{\int_5 \vec{E} \cdot d\vec{A}} + \cancel{\int_6 \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$



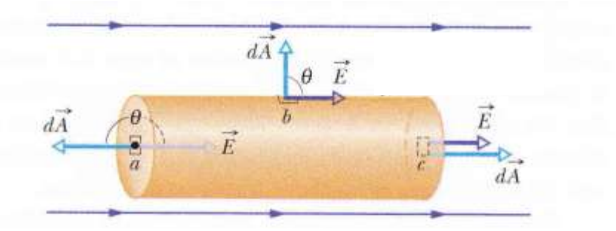
$$\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_1 E(\cos 180^o) dA = -E \int_1 dA = -E\ell^2$$

$$\int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_2 E(\cos 0^o) dA = +E \int_2 dA = E\ell^2$$

$$\Phi_{total} = -E\ell + E\ell = 0$$

Exemplo 2

Considere um cilindro de raio R, imerso num campo eléctrico uniforme. Qual o fluxo do campo eléctrico através da superfície cilíndrica?



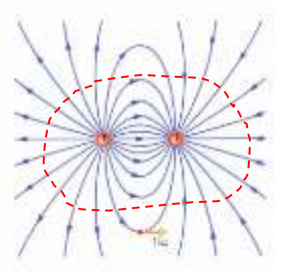
Existe alguma relação entre o fluxo do campo através duma superfície fechada e a carga eléctrica contida no interior dessa superfície?

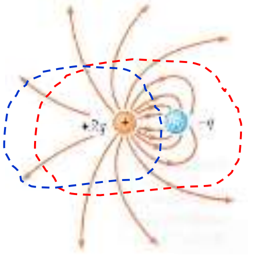
A densidade de linhas de campo (nº de linhas por unidade de superfície perpendicular às linhas de campo) em qualquer ponto é proporcional à intensidade do campo eléctrico nesse ponto.

$$\frac{N}{A} \propto E \qquad \Leftrightarrow N \propto EA \qquad \Leftrightarrow N \propto \Phi$$

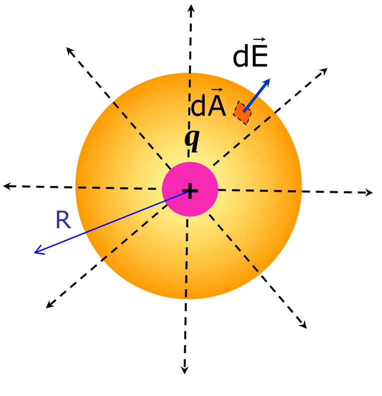
Portanto o nº de linhas é proporcional ao fluxo do campo eléctrico

O fluxo do campo eléctrico através de uma superfície é proporcional ao balanço entre o número de linhas de campo que saem de uma superfície, comparado com o nº de linhas de campo que entram.





O fluxo do campo eléctrico que atravessam uma superfície fechada é proporcional à carga contida na região limitada pela superfície.



Imaginemos uma carga pontual *q.*

O campo eléctrico criado por uma carga pontual positiva é radial e centrífugo.

Podemos imaginar uma superfície esférica, de raio *R,* centrada na carga.

Consideramos uma pequena área $d\vec{A}$, na superfície e o campo $d\vec{E}$ criado pela carga q

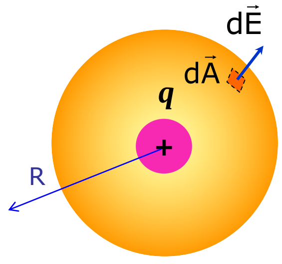
Calculamos fluxo do campo através da superfície esférica.

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi \approx \sum_i E dA_i$$

Nota: a intensidade do campo eléctrico causado por *q* na superfície esférica é constante.

$\vec{E}$ paralelo a $d\vec{A}$



O campo eléctrico em qualquer ponto da superfície esférica é:

$$E = k\frac{q}{R^2}$$

Então o fluxo é:

$$\Phi = \oint k\frac{q}{R^2}(\cos 0^o)\,dA \equiv \sum k\frac{q}{R^2}(\cos 0^o)\,dA$$

$$\Phi = k\frac{q}{R^2}\oint dA \equiv k\frac{q}{R^2}\sum dA$$

Área da esfera

$$4\pi R^2$$

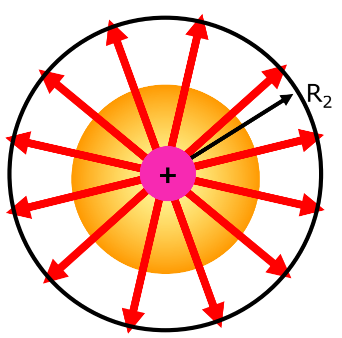
$$\Phi = k\frac{q}{R^2}4\pi R^2$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$$

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon_o}}$$

E qual o fluxo através da superfície de uma esfera com o dobro do raio?

$$R_2 \neq R_1$$



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_2^2}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_2^2}\times 4\pi R_2^2$$

$$\boxed{\Phi_2 = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

O fluxo é o mesmo...

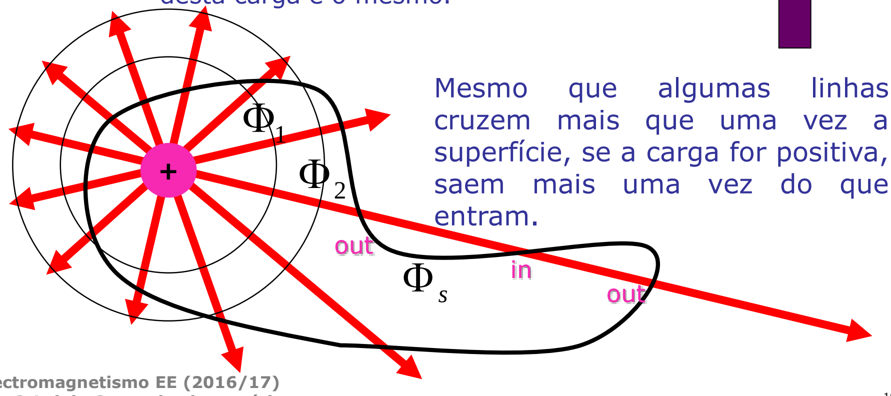
$$\boxed{\Phi_2 = \Phi_1 = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

O resultado é o esperado, porque o nº de linhas a passar através de cada uma das esferas é o mesmo!

$$\boxed{N \propto \Phi} \qquad \boxed{\Phi \propto N}$$

$$\boxed{\Phi_S = \Phi_2 = \Phi_1 = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

De facto, o nº de linhas de campo que atravessam qualquer superfície em torno desta carga é o mesmo.



Mesmo que algumas linhas cruzem mais que uma vez a superfície, se a carga for positiva, saem mais uma vez do que entram.

2.3 Lei de Gauss

Karl Friedrich Gauss
matemático e astrónomo alemão
(1777 – 1855)

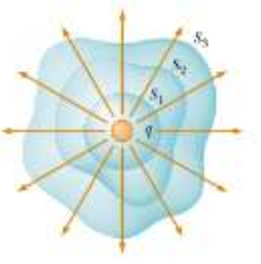
Quando uma superfície fechada (superfície gaussiana) envolve certa carga eléctrica, o número líquido de linhas que atravessam a superfície é proporcional à carga líquida no interior da superfície

O número de linhas contado é independente da forma da superfície que envolve a carga

O fluxo do campo eléctrico através de qualquer superfície fechada, é proporcional à carga total no interior da superfície.

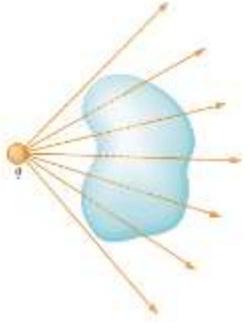
$$\boxed{\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}}$$

Qual o fluxo através da superfície S_1, S_2, S_3?



O fluxo não depende da forma da superfície.
O fluxo não depende da distância a q

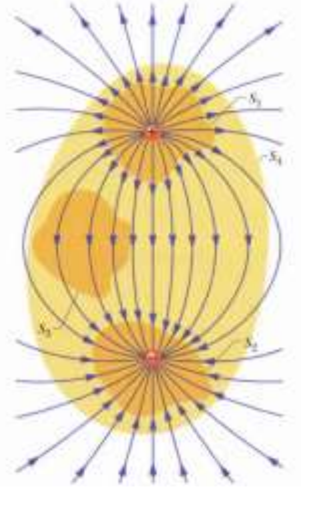
Qual o fluxo através da superfície S ?



O fluxo líquido através duma superfície Gaussiana é proporcional à carga, q, **<u>no interior da superfície</u>**.

$$\boxed{\Phi = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}}$$

Qual o fluxo através da superfície S_1, S_2, S_3, S_4, ?



Para que serve a lei de Gauss?

A lei de Gauss não diz nada de realmente novo. Não é uma nova lei da Física, mas pode olhar-se como uma versão diferente da lei de Coulomb, como veremos.

Em algumas situações, a lei de Gauss é mais fácil de usar que a lei de Coulomb.

Na prática, a Lei de Gauss só é útil num limitado número de situações, nas quais existe um elevado grau de simetria (distribuições de cargas que têm simetria esférica, cilíndrica ou plana).

A superfície Gaussiana é uma superfície matemática - não tem "existência física".

Se a superfície Gaussiana for cuidadosamente escolhida $\Rightarrow$ o integral é fácil de calcular.

Para simples utilização da lei de Gauss, a superfície Gaussiana deve satisfazer uma, ou mais, das seguintes condições:

1. Poder facilmente intuir que a intensidade do campo eléctrico é constante em toda a superfície.
2. O produto escalar da lei:

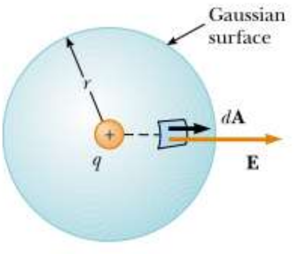
$$\Phi_S = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

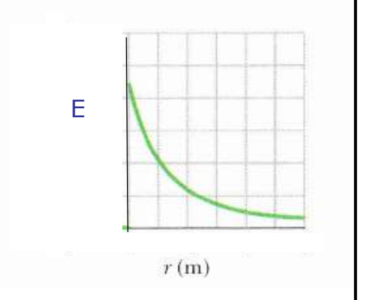
pode obter-se facilmente pela multiplicação ***EdA***, porque $\vec{E}$ e $d\vec{A}$ são paralelos.
3. O mesmo produto ser nulo devido ao facto de $\vec{E}$ e $d\vec{A}$ serem perpendiculares.
4. Poder-se facilmente intuir que o campo é nulo em toda a superfície.

1º Exemplo: Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma carga pontual positiva.

Calcular o campo eléctrico a uma distância *r* de uma carga eléctrica *q*, usando a Lei de Gauss

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}$$



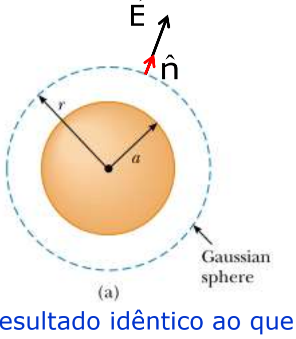


$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}$$

Resultado idêntico ao que seria obtido usando a Lei de Coulomb

2º Exemplo: Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma esfera isoladora, de raio ***a***, com densidade volúmica de carga *ρ*, uniformemente distribuída.

1 - Calcular o campo eléctrico a uma distância $r > a$, usando a Lei de Gauss. A carga total da esfera é +Q



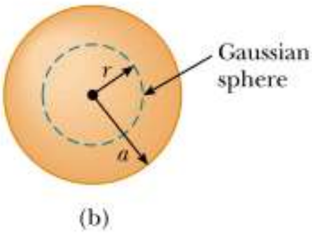
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}$$

Resultado idêntico ao que foi obtido para uma carga pontual ⇒ equivalente!!!

2 – Para a esfera isoladora, com distribuição uniforme de carga, calcular o campo eléctrico para uma distância *r* < *a*, usando a Lei de Gauss. A carga total da esfera é +Q

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}$$



$$q_{in} = Q\frac{r^3}{a^3}$$

Porquê?

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r}{a^3} \Leftrightarrow E = k\frac{Q}{a^3}r$$

$$r \to 0 \Rightarrow E \to 0$$

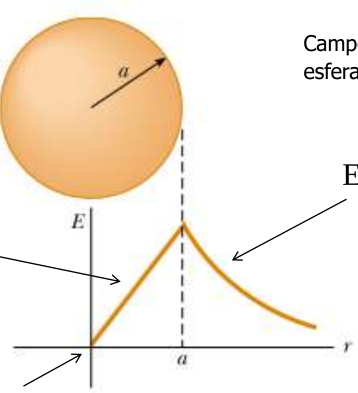
Campo eléctrico de uma esfera isoladora carregada com distribuição homogénea de carga

Campo **no exterior** de uma esfera isoladora carregada:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}$$

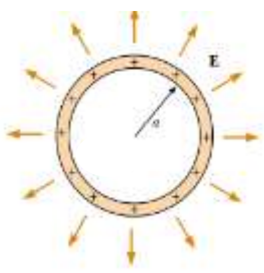
Campo **no interior** de uma esfera isoladora carregada:

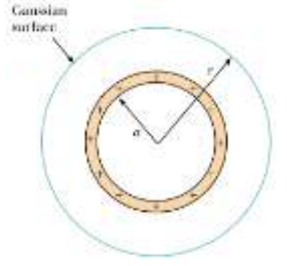
$$E = k\frac{Q}{a^3}r$$



$$r \to 0 \Rightarrow E \to 0$$

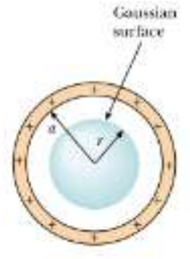
3º Exemplo: Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma casca isoladora com carga +Q uniformemente distribuída.





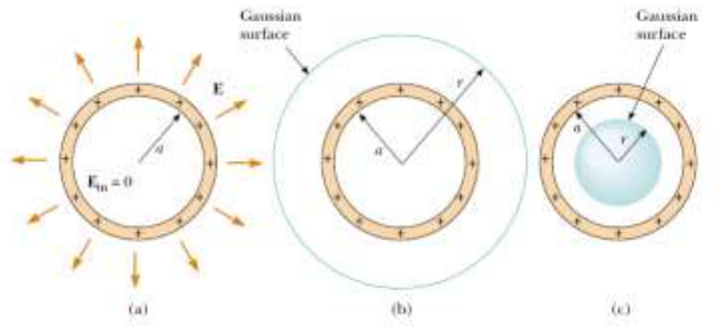
para uma distância $r > a$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}$$

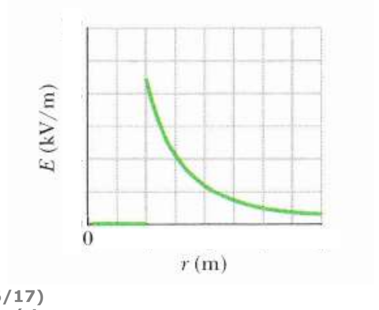


para uma distância $r < a$

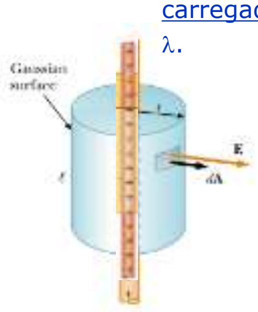
$$E = 0$$



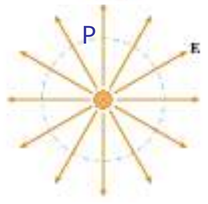
Como varia o campo eléctrico desde r = 0 até r = ∞?



4º Exemplo: Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma linha carregada "infinita", com carga uniformemente distribuída, λ.

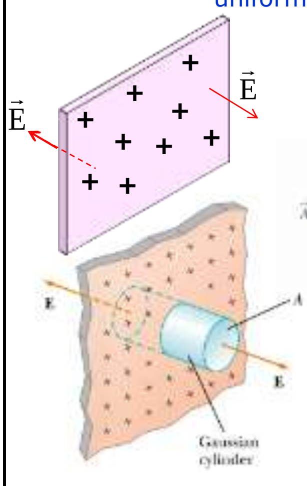


1. Desenhar a linha e o campo eléctrico
2. Desenhar o ponto P
3. Escolher a superfície gaussiana, que passe no ponto P

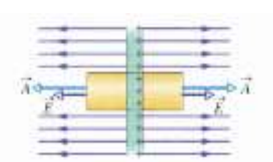


$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r} = 2k\frac{\lambda}{r}$$

5º Exemplo: Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma placa isoladora carregada, com densidade superficial de carga uniformemente distribuída, σ



1. Desenhar a linha e o campo eléctrico
2. Escolher a superfície gaussiana, que passe no ponto P



$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{q_{in}}{2A\varepsilon_o}$$

$$q_{in} = \sigma A$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

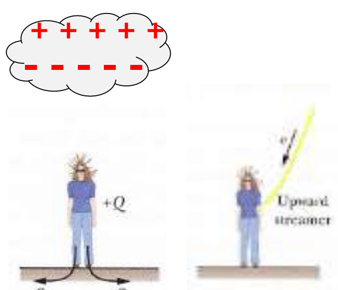
Campo eléctrico é uniforme

TABLE 24.1 Typical Electric Field Calculations Using Gauss's Law

Charge Distribution	Electric Field	Location
Insulating sphere of radius R, uniform charge density, and total charge Q	$k_e \frac{Q}{r^2}$	$r > R$
	$k_e \frac{Q}{R^3} r$	$r < R$
Thin spherical shell of radius R and total charge Q	$k_e \frac{Q}{r^2}$	$r > R$
	0	$r < R$
Line charge of infinite length and charge per unit length λ	$2k_e \frac{\lambda}{r}$	Outside the line
Nonconducting, infinite charged plane having surface charge density σ	$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	Everywhere outside the plane

Resposta à questão inicial do capítulo...

A rapariga da figura estava num miradouro quando uma núvem com a base carregada negativamente se posicionou sobre o local. Alguns dos eletrões de condução do seu corpo foram repelidos para a terra deixando-a carregada positivamente (e por isso os seus cabelos foram atraídos para a núvem e repelidos entre si).



Por sorte não ocorreram as condições para haver uma descarga, mas não faltou muito. A rapariga esteve numa situação de risco muito elevado.

Além do perigo da descarga direta, pode dar-se outra situação. Pode ocorrer descarga através de um percurso com início na rapariga, tal como se pode ver na imagem inicial deste capítulo (mas neste caso a partir da árvore).

Essa descarga a partir da rapariga é muito perigosa porque a ionização rápida das moléculas de ar liberta um grande nº de eletrões que tenderiam a neutralizar a carga positiva acumulada pela rapariga, produzindo uma grande descarga através do seu corpo, que poderia ser fatal.

Moro Rock – Sequoia National Park, California

Falaremos sobre trovoadas e relâmpagos noutros capítulos desta UC.

- Quando uma superfície fechada (superfície gaussiana) envolve certa carga eléctrica, o número líquido de linhas que atravessam a superfície é proporcional à carga líquida no interior da superfície
- O número de linhas contado é independente da forma da superfície que envolve a carga
- O fluxo do campo eléctrico através de qualquer superfície fechada, é proporcional à carga total no interior da superfície.

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot\vec{A} = \oint E\cos\theta\, dA = \oint E_n\, dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}$$

2.4. Condutores em equilíbrio electrostático

Diz-se que um condutor está em equilíbrio electrostático quando não há um movimento "orientado" das cargas no interior do material.

$$\Downarrow$$

Que no interior do condutor em equilíbrio, o campo eléctrico é nulo.

e se não fosse assim?

vamos imaginar um condutor em equilíbrio electrostático e vamos supor que no seu interior o campo não era nulo:

$$\vec{E} \neq 0$$

$$\Downarrow$$

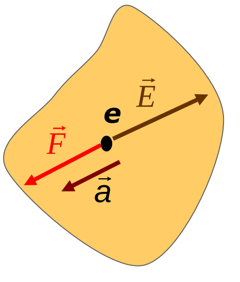
$$\vec{F}_{cargas} \neq 0$$

$$\Downarrow$$

movimento orientado de cargas

$$\Downarrow$$

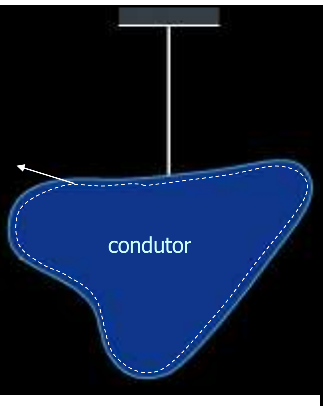
O condutor não está em equilíbrio



E haverá uma carga líquida no interior de um condutor em equilíbrio electrostático?

Usando a lei de Gauss sabemos que:

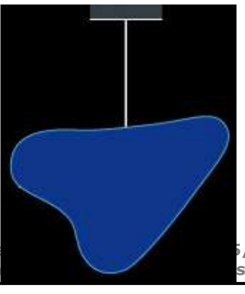
Superfície gaussiana



$$\Phi_{\text{sup.gaussiana}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

mas como no interior do condutor o campo é nulo, o fluxo através da superfície gaussiana também é nulo, então:

$$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \Phi = 0 \qquad \Rightarrow Q_{\text{int}} = 0$$

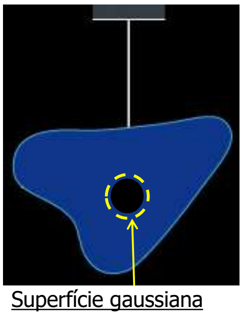


Conclusão: Num condutor em equilíbrio eletrostático

- não há excesso de cargas no interior

- todo o excesso de cargas está na superfície

E haverá uma carga líquida na superfície de uma cavidade interna de um condutor em equilíbrio electrostático?



Superfície gaussiana

Usando a lei de Gauss sabemos que:

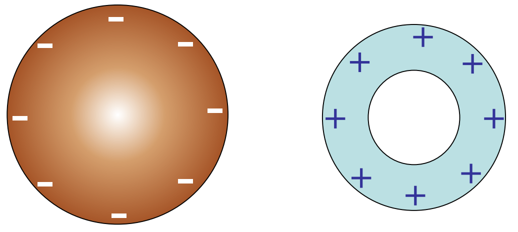
$$\Phi_{\text{sup.gaussiana}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

mas como no interior do condutor o campo é nulo, o fluxo através da superfície gaussiana também é nulo, então:

$$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \Phi = 0 \qquad \Rightarrow Q_{\text{int}} = 0$$

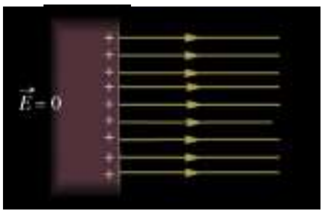
Conclusão: Não há carga acumulada na superfície de uma cavidade de condutor em equilíbrio eletrostático. Todo o excesso de carga se acumula na superfície externa do condutor.

Consequências

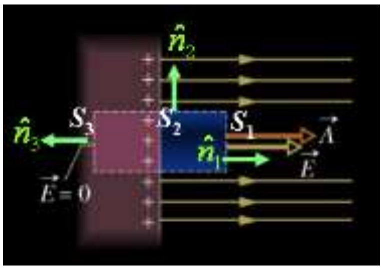


Esferas, cascas, superfícies condutoras, etc. acumulam carga à superfície exterior.

Campo eléctrico no exterior de um condutor



no exterior do condutor o campo é perpendicular à superfície (porquê?)



Pela lei de Gauss:

$$\Phi_{\text{sup.gaussiana}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

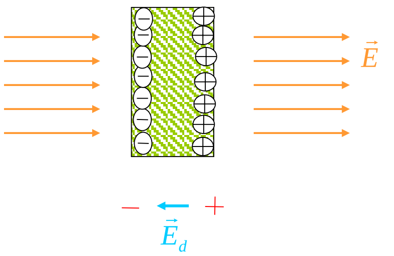
$$\Phi_1 + \cancel{\Phi_2} + \cancel{\Phi_3} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\int \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Campo no interior de uma placa condutora, colocada numa região em que existe campo eléctrico.



No interior do condutor as cargas distribuem-se, criando um campo, $\boldsymbol{E_d}$ de sentido oposto ao campo exterior: $\vec{E} + \vec{E}_d = \vec{0}$

Observações:

Bom condutor $\Rightarrow$ equilíbrio em ~ 10^{-16} s (~ instantâneo)

Se no interior o campo fosse não nulo, as cargas seriam sujeitas a uma força eléctrica, seriam aceleradas na direcção do campo e não haveria equilíbrio electrostático.

Quando um condutor está em equilíbrio electrostático:

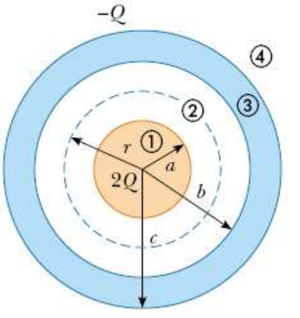
O campo eléctrico é nulo em qualquer ponto no interior do condutor.

Qualquer excesso de carga, num condutor isolado, deve estar, necessária e inteiramente, na superfície do condutor.

O campo eléctrico na face externa da superfície de um condutor é perpendicular à superfície do condutor e tem o módulo igual a σ/ε_0, onde σ é a carga por unidade de área no ponto da superfície.

Num condutor com forma irregular, a carga tende a acumular-se nos locais onde o raio de curvatura da superfície é pequeno, isto é, onde a superfície é pontiaguda.

Exemplo



Considere uma esfera condutora de raio ***a***, com uma carga positiva ***2Q*** e uma casca condutora de raio interno ***b***, de raio externo ***c*** e carga ***-Q***, concêntrica com a esfera.

A) Calcule o campo eléctrico nas regiões 1, 2, 3 e 4.

B) Qual a distribuição de carga na casca quando todo o sistema está em equilíbrio?

A)

$$E_1 = 0 \qquad E_3 = 0$$

$$E_2 = \frac{k2Q}{r^2} \qquad E_4 \leq \frac{KQ}{c^2}$$

B)