1. Determine a solução dos seguintes problemas de valores iniciais e problemas de valores de fronteira

a) $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=3+2x^2, \quad y(0)=6, \quad y(1)=9+e$

R:

Sabe-se que a solução geral para este tipo de problemas é dada por: $y = y_C + y_P$ [1], então:

- **Cálculo de y_C:**

Sabendo que a equação homogénea associada à equação dada é: $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$

Então: $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0 \Leftrightarrow m^2-3m+2=0 \Leftrightarrow m=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=\frac{3\pm1}{2} \Leftrightarrow m_1=1 \vee m_2=2 \rightarrow$ duas raízes reais e distintas.

Para este tipo de raízes sabemos que: $y_C = c_1\cdot e^{m_1\cdot x}+c_2\cdot e^{m_2\cdot x}$

Logo teremos que: $y_C = c_1\cdot e^{1\cdot x}+c_2\cdot e^{2\cdot x} \Leftrightarrow y_C = c_1\cdot e^{x}+c_2\cdot e^{2x}$

- **Cálculo de y_P:**

1. *Funções C.I.* [2] *existentes:* $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=3\cdot\underbrace{1}_{f_1}+2\cdot\underbrace{x^2}_{f_2}$

As funções C.I. são: $\begin{Bmatrix} f_1=1 \\ f_2=x^2 \end{Bmatrix}$

[1] $y_C \rightarrow$ Solução da equação diferencial homogénea associada; $y_P \rightarrow$ Solução particular associada às funções C.I. da equação;

[2] Designam-se por funções C.I. (coeficientes indeterminados) todas aquelas que se enquadram numa das seguintes: $x^n, n\in \mathbb{N}_0$; $e^{a\cdot x}, a\neq 0$; $sen(b\cdot x+c), b\neq 0$ e $\cos(d\cdot x+e), d\neq 0$, **excluindo-se as constantes múltiplos e as combinações lineares**.

2. *Determinação dos conjuntos C.I.*[3]*:*

$$f_1 = 1 \Rightarrow S_{f_1} = \{1\}$$

$$f_2 = x^2 \Rightarrow f'_2 = \left(x^2\right)' = \underbrace{2x}_{f'_2 = x} \Rightarrow f''_2 = (2x)' = \underbrace{2}_{f''_2 = 1} \Rightarrow S_{f_2} = \left\{ \underbrace{x^2}_{f_2}; \underbrace{x}_{f'_2}; \underbrace{1}_{f''_2} \right\}$$

3. *Procurar eliminar todos os subconjuntos obtidos em 2.:*

Como $S_{f_1} = \{1\}$ está contido em $S_{f_2} = \{x^2; x; 1\}$, então trata-se de um subconjunto e como tal deverá ser eliminado. Assim sendo, a restante resolução irá basear-se apenas em $S_{f_2} = \{x^2; x; 1\}$.

4. *Determinar se algum elemento de S_{f_2} verifica a solução da equação homogénea associada:*

Sendo: $y_C = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$, a solução da equação homogénea associada então:

Elemento: x^2	$x^2 = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$ → Não existe nenhum valor atribuível a c_1 e/ou a c_2 que possa resultar na identidade $x^2 = x^2$, logo x^2 não é solução da equação homogénea associada.

Elemento: x	$x = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$ → Não existe nenhum valor atribuível a c_1 e/ou a c_2 que possa resultar na identidade $x = x$, logo x não é solução da equação homogénea associada.

Elemento: 1	$1 = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$ → Não existe nenhum valor atribuível a c_1 e/ou a c_2 que possa resultar na identidade $1 = 1$, logo 1 não é solução da equação homogénea associada.

[3] Cada um dos conjuntos C.I. é constituído pela função C.I. previamente determinada e pelas respectivas derivadas (com a devida exclusão das suas constantes multiplicativas) até à máxima derivação possível.

5. *Determinar* $y_P(x)$*:*

Sendo: $S=\{x^2;x;1\}$, então: $y_P(x)=A\cdot x^2+B\cdot x+C\cdot 1 \Leftrightarrow y_P(x)=A\cdot x^2+B\cdot x+C$

6. *Determinar as derivadas de* $y_P(x)$ *até à ordem existente na equação diferencial dada:*

Sendo: $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=3+2x^2$, então:

$$y_P(x)=A\cdot x^2+B\cdot x+C \Rightarrow y'_P(x)=\left(A\cdot x^2+B\cdot x+C\right)'=2A\cdot x+B$$

$$y'_P(x)=2A\cdot x+B \Rightarrow y''_P(x)=\left(2A\cdot x+B\right)'=2A$$

7. *Substituir as derivadas obtidas na equação diferencial dada:*

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=3+2x^2 \Leftrightarrow y''-3\cdot y'+2\cdot y=3+2x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2A-3\cdot\left(2A\cdot x+B\right)+2\cdot\left(A\cdot x^2+B\cdot x+C\right)=3+2x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2A-6A\cdot x-3B+2A\cdot x^2+2B\cdot x+2C=3+2x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2A\cdot x^2+\left(2B-6A\right)\cdot x+2A-3B+2C=3+2x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2A=2 \\ 2B-6A=0 \\ 2A-3B+2C=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{2}{2}=1 \\ 2B-6\cdot 1=0 \\ 2\cdot 1-3B+2C=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=\frac{6}{2}=3 \\ 2-3\cdot 3+2C=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=\frac{6}{2}=3 \\ -7+2C=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=3 \\ C=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_P(x)=A\cdot x^2+B\cdot x+C \Leftrightarrow y_P(x)=1\cdot x^2+3\cdot x+5 \Leftrightarrow y_P(x)=x^2+3x+5$$

Logo: $y=y_C+y_P \Leftrightarrow y=\left(c_1\cdot e^x+c_2\cdot e^{2x}\right)+\left(x^2+3x+5\right)$

Assim sendo teremos então, com base nas condições iniciais $y(0)=6$; $y(1)=9+e$, que:

$$\begin{cases} y(0)=6 \\ y(1)=9+e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{2\cdot 0}\right)+\left(0^2+3\cdot 0+5\right)=6 \\ \left(c_1 \cdot e^1 + c_2 \cdot e^{2\cdot 1}\right)+\left(1^2+3\cdot 1+5\right)=9+e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1\right)+5-6=0 \\ \left(c_1 \cdot e + c_2 \cdot e^2\right)+1+3+5-9-e=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1+c_2-1=0 \\ \left(c_1 \cdot e + c_2 \cdot e^2\right)-e=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1-c_2 \\ \left((1-c_2)\cdot e + c_2 \cdot e^2\right)-e=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1-c_2 \\ c_2 \cdot e^2 + e - c_2 \cdot e - e=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1-c_2 \\ c_2 \cdot \left(e^2-e\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=0 \end{cases}$$

Então finalmente teremos que: $y=\left(1\cdot e^x + 0 \cdot e^{2x}\right)+\left(x^2+3x+5\right) \Leftrightarrow y=\left(e^x\right)+\left(x^2+3x+5\right)$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=(x+1)\cdot e^x+e^{2x}, \quad y(0)=0, \quad y^{'}0=2$

R:

Sabe-se que a solução geral para este tipo de problemas é dada por: $y=y_C+y_P$, então:

- **Cálculo de y_C :**

  Sabendo que a equação homogénea associada à equação dada é: $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=0$

  Então: $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=0 \Leftrightarrow m^2-3m+2=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow m=\dfrac{3\pm 1}{2} \Leftrightarrow m_1=1 \vee m_2=2 \rightarrow$ duas raízes reais e distintas.

  Para este tipo de raízes sabemos que: $y_C=c_1\cdot e^{m_1\cdot x}+c_2\cdot e^{m_2\cdot x}$

  Logo teremos que: $y_C=c_1\cdot e^{1\cdot x}+c_2\cdot e^{2\cdot x} \Leftrightarrow y_C=c_1\cdot e^{x}+c_2\cdot e^{2x}$

- **Cálculo de y_P:**

1. *Funções C.I. existentes:* $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \underbrace{xe^x}_{f_1} + \underbrace{e^x}_{f_2} + \underbrace{e^{2x}}_{f_3}$

   As funções C.I. são: $\begin{Bmatrix} f_1 = xe^x \\ f_2 = e^x \\ f_3 = e^{2x} \end{Bmatrix}$

2. *Determinação dos conjuntos C.I.:*

$$f_1 = xe^x \Rightarrow f'_1 = \left(xe^x\right)' = \underbrace{e^x + \overbrace{xe^x}^{f_1}}_{f'_1 = e^x} \Rightarrow f''_1 = \left(e^x\right)' = \underbrace{e^x}_{f''_1 = e^x = f'_1} \Rightarrow S_{f_1} = \left\{\underbrace{xe^x}_{f_1}; \underbrace{e^x}_{f'_1}\right\}$$

$$f_2 = e^x \Rightarrow S_{f_2} = \left\{e^x\right\}$$

$$f_3 = e^{2x} \Rightarrow f'_3 = \left(e^{2x}\right)' = \underbrace{2e^{2x}}_{f'_3 = e^{2x} = f_3} \Rightarrow f''_3 = \left(2e^{2x}\right)' = \underbrace{4e^{2x}}_{f'_3 = e^{2x} = f_3} \Rightarrow S_{f_3} = \left\{e^{2x}\right\}$$

3. *Procurar eliminar todos os subconjuntos obtidos em 2.:*

   Como $S_{f_2} = \left\{e^x\right\}$ está contido em $S_{f_1} = \left\{xe^x; e^x\right\}$, então trata-se de um subconjunto e como tal deverá ser eliminado. Assim sendo, a restante resolução irá basear-se apenas em $S_{f_1} = \left\{xe^x; e^x\right\}$ e $S_{f_3} = \left\{e^{2x}\right\}$.

4. *Determinar se algum elemento de* S_{f_1} e S_{f_3} *verifica a solução da equação homogénea associada:*

   Sendo: $y_C = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$, a solução da equação homogénea associada então:

Elemento: xe^x	$xe^x = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$ → Não existe nenhum valor atribuível a c_1 e/ou a c_2 que possa resultar na identidade $xe^x = xe^x$, logo xe^x não é solução da equação homogénea associada.

Elemento: e^x	$e^x = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} \rightarrow$ Se: $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ então teremos a identidade $e^x = e^x$, assim sendo teremos que multiplicar este elemento pela menor potência de x que permita inviabilizar este elemento como solução da equação homogénea associada. Então, para $x \cdot e^x$, já não se verifica a identidade $x \cdot e^x = x \cdot e^x$ e uma vez que este elemento pertence S_{f_1}, também teremos que multiplicar os restantes elementos desse conjunto por x, pelo que: $\left[S_{f_1}\right]_{alt} = \left\{x \cdot \left(xe^x\right); x \cdot e^x\right\} \Leftrightarrow \left[S_{f_1}\right]_{alt.} = \left\{x^2e^x; xe^x\right\}$

Elemento: e^{2x}	$e^{2x} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} \rightarrow$ Se: $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$ então teremos a identidade $e^{2x} = e^{2x}$, assim sendo teremos que multiplicar este elemento pela menor potência de x que permita inviabilizar este elemento como solução da equação homogénea associada. Então, para $x \cdot e^{2x}$, já não se verifica a identidade $x \cdot e^{2x} = x \cdot e^{2x}$, logo: $\left[S_{f_3}\right]_{alt} = \left\{x \cdot e^{2x}\right\}$

5. *Determinar $y_P(x)$:*

Sendo: $\left[S_{f_1}\right]_{alt.} = \left\{x^2e^x; xe^x\right\}$ e $\left[S_{f_3}\right]_{alt} = \left\{x \cdot e^{2x}\right\}$, então:

$$y_P(x) = A \cdot x^2e^x + B \cdot xe^x + C \cdot xe^{2x} \Leftrightarrow y_P(x) = \left(Ax^2 + Bx\right) \cdot e^x + (Cx) \cdot e^{2x}$$

6. *Determinar as derivadas de $y_P(x)$ até à ordem existente na equação diferencial dada:*

$$y_P(x) = \left(Ax^2 + Bx\right) \cdot e^x + (Cx) \cdot e^{2x} \Rightarrow y'_P(x) = \left(\left(Ax^2 + Bx\right) \cdot e^x + (Cx) \cdot e^{2x}\right)' =$$

$$= \left((2Ax + B) \cdot e^x + \left(Ax^2 + Bx\right) \cdot e^x\right) + \left(C \cdot e^{2x} + 2 \cdot (Cx) \cdot e^{2x}\right) =$$

$$= \left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B\right) \cdot e^x + (2Cx + C) \cdot e^{2x}$$

$$y'_P(x) = \left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B\right)\cdot e^x + \left(2Cx + C\right)\cdot e^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''_P(x) = \left(\left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B\right)\cdot e^x + \left(2Cx + C\right)\cdot e^{2x}\right)' =$$

$$= \left(\left(2Ax + B + 2A\right)\cdot e^x + \left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B\right)\cdot e^x\right) + \left(\left(2C\right)\cdot e^{2x} + 2\cdot\left(2Cx + C\right)\cdot e^{2x}\right) =$$

$$= \left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B + 2Ax + B + 2A\right)\cdot e^x + \left(2C + 4Cx + 2C\right)\cdot e^{2x} =$$

$$= \left(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A\right)\cdot e^x + \left(4Cx + 4C\right)\cdot e^{2x}$$

7. *Substituir as derivadas obtidas na equação diferencial dada:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = (x+1)\cdot e^x + e^{2x} \Leftrightarrow y'' - 3\cdot y' + 2\cdot y = (x+1)\cdot e^x + e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\left[\left(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A\right)\cdot e^x + \left(4Cx + 4C\right)\cdot e^{2x}\right] - \\ \Leftrightarrow &-3\cdot\left[\left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B\right)\cdot e^x + \left(2Cx + C\right)\cdot e^{2x}\right] + \quad \Leftrightarrow \\ &+2\cdot\left[\left(Ax^2 + Bx\right)\cdot e^x + \left(Cx\right)\cdot e^{2x}\right] = (x+1)\cdot e^x + e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A\right)\cdot e^x + \left(4Cx + 4C\right)\cdot e^{2x} + \\ \Leftrightarrow &+\left(-3Ax^2 - 3Bx - 6Ax - 3B\right)\cdot e^x + \left(-6Cx - 3C\right)\cdot e^{2x} + \Leftrightarrow \\ &+\left(2Ax^2 + 2Bx\right)\cdot e^x + \left(2Cx\right)\cdot e^{2x} = (x+1)\cdot e^x + e^{2x} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} &\left(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A - 3Ax^2 - 3Bx - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx\right)\cdot e^x + \\ &+\left(4Cx + 4C - 6Cx - 3C + 2Cx\right)\cdot e^{2x} = (x+1)\cdot e^x + e^{2x} \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} &\left(\left(A - 3A + 2A\right)\cdot x^2 + \left(B + 4A - 3B - 6A + 2B\right)\cdot x + 2B + 2A - 3B\right)\cdot e^x + \\ &+\left(\left(4C - 6C + 2C\right)\cdot x + 4C - 3C\right)\cdot e^{2x} = (x+1)\cdot e^x + e^{2x} \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-2A\cdot x + 2A - B\right)\cdot e^x + C\cdot e^{2x} = (x+1)\cdot e^x + e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2A\cdot xe^x + \left(2A - B\right)\cdot e^x + C\cdot e^{2x} = xe^x + e^x + e^{2x} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2A = 1 \\ 2A + B = 1 \\ C = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2} \right) + B = 1 \\ C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = 2 \\ C = 1 \end{cases} \Rightarrow y_P(x) = \left(Ax^2 + Bx \right) \cdot e^x + (Cx) \cdot e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_P(x) = \left(-\frac{1}{2} x^2 + 2x \right) \cdot e^x + (1 \cdot x) \cdot e^{2x} \Leftrightarrow y_P(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \cdot e^x + x \cdot e^{2x}$$

Logo: $y = y_C + y_P \Leftrightarrow y = \left(c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} \right) + \left(\left(-\dfrac{x^2}{2} + 2x \right) \cdot e^x + x \cdot e^{2x} \right)$

Assim sendo teremos então, com base nas condições iniciais $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$, que determinar antes de mais a derivada de y: $y = \left(c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} \right) + \left(\left(-\dfrac{x^2}{2} + 2x \right) \cdot e^x + x \cdot e^{2x} \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = \left(c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} \right)' + \left(\left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \cdot e^x + x \cdot e^{2x} \right)' =$$

$$= \left(c_1 \cdot e^x + 2 \cdot c_2 \cdot e^{2x} \right) + \left((-x + 2) \cdot e^x + \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \cdot e^x + e^{2x} + 2x \cdot e^{2x} \right) =$$

$$= \left(c_1 \cdot e^x + 2 \cdot c_2 \cdot e^{2x} \right) + \left(\left(-\frac{x^2}{2} + x + 2 \right) \cdot e^x + (1 + 2x) \cdot e^{2x} \right)$$

Logo: $\begin{cases} y(0) = 6 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{2 \cdot 0} \right) + \left(\left(-\dfrac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 \right) \cdot e^0 + 0 \cdot e^{2 \cdot 0} \right) = 6 \\ \left(c_1 \cdot e^0 + 2 \cdot c_2 \cdot e^{2 \cdot 0} \right) + \left(\left(-\dfrac{0^2}{2} + 0 + 2 \right) \cdot e^0 + (1 + 2 \cdot 0) \cdot e^{2 \cdot 0} \right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 6 \\ c_1 + 2 \cdot c_2 + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 6 - c_2 \\ (6 - c_2) + 2 \cdot c_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 13 \\ c_2 = -7 \end{cases}$$

Então finalmente teremos que: $y = \left(13 \cdot e^x - 7 \cdot e^{2x} \right) + \left(\left(-\dfrac{x^2}{2} + 2x \right) \cdot e^x + x \cdot e^{2x} \right)$

c) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\cos(x)+sen(x)+1, \quad y(\pi)=0, \quad y'(0)=0$

R:

Sabe-se que a solução geral para este tipo de problemas é dada por: $y = y_C + y_P$, então:

- **Cálculo de** y_C **:**

Sabendo que a equação homogénea associada à equação dada é: $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

Então: $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0 \Leftrightarrow m^2+1=0 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow m=\pm i \Leftrightarrow m=\underbrace{0}_{a}\pm i\cdot\underbrace{1}_{b}$

Para este tipo de raízes sabemos que: $y_C = c_1\cdot e^{a\cdot x}\cdot\cos(bx)+c_2\cdot e^{a\cdot x}\cdot sen(bx)$

Logo teremos que: $y_C = c_1\cdot e^{0\cdot x}\cdot\cos(1\cdot x)+c_2\cdot e^{0\cdot x}\cdot sen(1\cdot x) \Leftrightarrow y_C = c_1\cdot\cos(x)+c_2\cdot sen(x)$

- **Cálculo de** y_P **:**

1. *Funções C.I. existentes:* $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\underbrace{\cos(x)}_{f_1}+\underbrace{sen(x)}_{f_2}+\underbrace{1}_{f_3}$

   As funções C.I. são: $\left\{\begin{array}{l} f_1=\cos(x) \\ f_2=sen(x) \\ f_3=1 \end{array}\right\}$

2. *Determinação dos conjuntos C.I.:*

$$f_1=\cos(x) \Rightarrow f'_1=(\cos(x))' = \underbrace{-sen(x)}_{f'_1=sen(x)} \Rightarrow f''_1=(-sen(x))' = \underbrace{-\cos(x)}_{f''_1=\cos(x)=f_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{f_1}=\left\{\underbrace{\cos(x)}_{f_1};\underbrace{sen(x)}_{f'_1}\right\}$$

$$f_2 = \cos(x) \Rightarrow f'_2 = (sen(x))' = \underbrace{\cos(x)}_{f'_2=\cos(x)} \Rightarrow f''_2 = (\cos(x))' = \underbrace{-sen(x)}_{f''_2=sen(x)=f_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{f_2} = \left\{ \underbrace{sen(x)}_{f_2}; \underbrace{\cos(x)}_{f'_2} \right\}$$

$$f_3 = 1 \Rightarrow S_{f_3} = \{1\}$$

3. *Procurar eliminar todos os subconjuntos obtidos em 2.:*

Como $S_{f_2} = \{sen(x); \cos(x)\}$ é igual a $S_{f_1} = \{\cos(x); sen(x)\}$, então deverá ser eliminado. Assim sendo, a restante resolução irá basear-se apenas em $S_{f_1} = \{\cos(x); sen(x)\}$ e $S_{f_3} = \{1\}$.

4. *Determinar se algum elemento de* S_{f_1} e S_{f_3} *verifica a solução da equação homogénea associada:*

Sendo: $y_C = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot sen(x)$, a solução da equação homogénea associada então:

Elemento: $\cos(x)$	$\cos(x) = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot sen(x) \rightarrow$ Se: $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ então teremos a identidade $\cos(x) = \cos(x)$, assim sendo teremos que multiplicar este elemento pela menor potência de x que permita inviabilizar este elemento como solução da equação homogénea associada. Então, para $x \cdot \cos(x)$, já não se verifica a identidade $x \cdot \cos(x) = x \cdot \cos(x)$ e uma vez que este elemento pertence S_{f_1}, também teremos que multiplicar os restantes elementos desse conjunto por x, pelo que: $\lfloor S_{f_1} \rfloor_{alt} = \{x \cdot \cos(x); x \cdot sen(x)\}$

Elemento: $sen(x)$	Pode-se concluir o mesmo que foi concluído para o $\cos(x)$.

Elemento: 1	$1 = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot sen(x) \rightarrow$ Não existe nenhum valor atribuível a c_1 e/ou a c_2 que possa resultar na identidade $1 = 1$, logo 1 não é solução da equação homogénea associada.

5. *Determinar $y_P(x)$:*

Sendo: $\lfloor S_{f_1} \rfloor_{alt} = \{x \cdot \cos(x);\, x \cdot sen(x)\}$ e $S_{f_3} = \{1\}$, então:

$$y_P(x) = A \cdot x \cdot \cos(x) + B \cdot x \cdot sen(x) + C \cdot 1 \Leftrightarrow y_P(x) = (A \cdot \cos(x) + B \cdot sen(x)) \cdot x + C$$

6. *Determinar as derivadas de $y_P(x)$ até à ordem existente na equação diferencial dada:*

$$y_P(x) = (A \cdot \cos(x) + B \cdot sen(x)) \cdot x + C \Rightarrow y'_P(x) = ((A \cdot \cos(x) + B \cdot sen(x)) \cdot x + C)' =$$

$$= (-A \cdot sen(x) + B \cdot \cos(x)) \cdot x + (A \cdot \cos(x) + B \cdot sen(x)) =$$

$$= (-A \cdot x + B) \cdot sen(x) + (B \cdot x + A) \cdot \cos(x)$$

$$y'_P(x) = (-A \cdot x + B) \cdot sen(x) + (B \cdot x + A) \cdot \cos(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''_P(x) = ((-A \cdot x + B) \cdot sen(x) + (B \cdot x + A) \cdot \cos(x))' =$$

$$= (-A \cdot sen(x) + (-A \cdot x + B) \cdot \cos(x)) + (B \cdot \cos(x) - (B \cdot x + A) \cdot sen(x)) =$$

$$= (-A - B \cdot x - A) \cdot sen(x) + (-A \cdot x + B + B) \cdot \cos(x) =$$

$$= (-B \cdot x - 2A) \cdot sen(x) + (-A \cdot x + 2B) \cdot \cos(x)$$

7. *Substituir as derivadas obtidas na equação diferencial dada:*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cos(x) + sen(x) + 1 \Leftrightarrow y'' + y = \cos(x) + sen(x) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} [(-Bx - 2A) \cdot sen(x) + (-Ax + 2B) \cdot \cos(x)] + \\ + [(A \cdot \cos(x) + B \cdot sen(x)) \cdot x + C] = \cos(x) + sen(x) + 1 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-Bx-2A+Bx)\cdot sen(x)+(-Ax+2B+Ax)\cdot \cos(x)+C=\cos(x)+sen(x)+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2A\cdot sen(x)+2B\cdot \cos(x)+C=\cos(x)+sen(x)+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2A=1\\ 2B=1\\ C=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}A=-\dfrac{1}{2}\\ B=\dfrac{1}{2}\\ C=1\end{cases}\Rightarrow y_P(x)=\left(-\frac{1}{2}\cdot\cos(x)+\frac{1}{2}\cdot sen(x)\right)\cdot x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_P(x)=\frac{x}{2}\cdot sen(x)-\frac{x}{2}\cdot\cos(x)+1$$

Logo: $y=y_C+y_P\Leftrightarrow y=(c_1\cdot\cos(x)+c_2\cdot sen(x))+\left(\dfrac{x}{2}\cdot sen(x)-\dfrac{x}{2}\cdot\cos(x)+1\right)$

Assim sendo teremos então, com base nas condições iniciais $y(\pi)=0\,;\,y'(0)=0$, que determinar antes de mais a derivada de y:

$$y=(c_1\cdot\cos(x)+c_2\cdot sen(x))+\left(\frac{x}{2}\cdot sen(x)-\frac{x}{2}\cdot\cos(x)+1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=(c_1\cdot\cos(x)+c_2\cdot sen(x))'+\left(\frac{x}{2}\cdot sen(x)-\frac{x}{2}\cdot\cos(x)+1\right)'=$$

$$=(-c_1\cdot sen(x)+c_2\cdot\cos(x))+\left(\left(\frac{1}{2}\cdot sen(x)+\frac{x}{2}\cdot\cos(x)\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\cos(x)-\frac{x}{2}\cdot sen(x)\right)\right)=$$

$$=-c_1\cdot sen(x)+c_2\cdot\cos(x)+\frac{1}{2}\cdot sen(x)+\frac{x}{2}\cdot\cos(x)-\frac{1}{2}\cdot\cos(x)+\frac{x}{2}\cdot sen(x)=$$

$$=\left(-c_1+\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)\cdot sen(x)+\left(c_2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos(x)$$

Logo: $\begin{cases}y(\pi)=0\\ y'(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(c_1\cdot\underbrace{\cos(\pi)}_{-1}+c_2\cdot\underbrace{sen(\pi)}_{0}\right)+\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\underbrace{sen(\pi)}_{0}-\dfrac{\pi}{2}\cdot\underbrace{\cos(\pi)}_{-1}+1\right)=0\\ \left(-c_1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{0}{2}\right)\cdot\underbrace{sen(0)}_{0}+\left(c_2+\dfrac{0}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\underbrace{\cos(0)}_{1}=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -c_1 + \frac{\pi}{2} + 1 = 0 \\ c_2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{\pi + 2}{2} \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Então finalmente teremos que: $y = \left(\frac{\pi + 2}{2} \cdot \cos(x) + \frac{1}{2} \cdot sen(x) \right) + \left(\frac{x}{2} \cdot sen(x) - \frac{x}{2} \cdot \cos(x) + 1 \right)$

d) $\frac{d^2 y}{dx^2} = x \cdot e^{-x} \cdot \cos(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

R:

Sabe-se que a solução geral para este tipo de problemas é dada por: $y = y_C + y_P$, então:

- **Cálculo de** y_C **:**

  Sabendo que a equação homogénea associada à equação dada é: $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$

  Então: $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{0} \Leftrightarrow m_1 = 0 \vee m_2 = 0$

  Para este tipo de raízes sabemos que: $y = c_1 \cdot e^{\overbrace{m_1}^{=0} \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\overbrace{m_2}^{=0} \cdot x}$. Logo: $y = c_1 + c_2 \cdot x$

- **Cálculo de** y_P **:**

  1. *Funções C.I. existentes:* $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underbrace{x}_{f_1} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{f_2} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{f_3}$

     As funções C.I. são: $\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = e^{-x} \\ f_3 = \cos(x) \end{cases}$

2. *Determinação dos conjuntos C.I.:*

$$f_1 = x \Rightarrow f'_1 = (x)' = 1 \Rightarrow S_{f_1} = \left\{ \underbrace{x}_{f_1}; \underbrace{1}_{f'_1} \right\}$$

$$f_2 = e^{-x} \Rightarrow f'_2 = \left(e^{-x}\right)' = \underbrace{-e^{-x}}_{f'_2 = e^{-x} = f_2} \Rightarrow f''_2 = \left(-e^{-x}\right)' = \underbrace{e^{-x}}_{f''_2 = e^{-x} = f_2} \Rightarrow S_{f_2} = \left\{e^{-x}\right\}$$

$$f_3 = \cos(x) \Rightarrow f'_3 = (\cos(x))' = \underbrace{-sen(x)}_{f'_3 = sen(x)} \Rightarrow f''_3 = (-sen(x))' = \underbrace{-\cos(x)}_{f''_3 = \cos(x) = f_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{f_3} = \left\{ \underbrace{\cos(x)}_{f_3}; \underbrace{sen(x)}_{f'_3} \right\}$$

Assim sendo teremos que:

$$S_f = S_{f_1} \times S_{f_2} \times S_{f_3} \Leftrightarrow S_f = \{x;1\} \times \left\{e^{-x}\right\} \times \{\cos(x); sen(x)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_f = \{x;1\} \times \left\{e^{-x}\cos(x); e^{-x} sen(x)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_f = \left\{xe^{-x} \cdot \cos(x); xe^{-x} \cdot sen(x); e^{-x} \cdot \cos(x); e^{-x} \cdot sen(x)\right\}$$

3. *Procurar eliminar todos os subconjuntos obtidos em 2.:*

Não há subconjuntos para este exercício.

4. *Determinar se algum elemento de* S_{f_1} e S_{f_3} *verifica a solução da equação homogénea associada:*

Sendo: $y = c_1 + c_2 \cdot x$, a solução da equação homogénea associada então:

Consegue verificar-se facilmente que não existe nenhum valor atribuível a c_1 e/ou a c_2 que possa resultar numa identidade.

5. *Determinar $y_P(x)$:*

Sendo: $S_f = \{xe^{-x}\cdot\cos(x); xe^{-x}\cdot sen(x); e^{-x}\cdot\cos(x); e^{-x}\cdot sen(x)\}$ então:

$$y_P(x) = A\cdot xe^{-x}\cdot\cos(x) + B\cdot xe^{-x}\cdot sen(x) + C\cdot e^{-x}\cdot\cos(x) + D\cdot e^{-x}\cdot sen(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_P(x) = \left((Ax+C)\cdot e^{-x}\right)\cdot\cos(x) + \left((Bx+D)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x)$$

6. *Determinar as derivadas de $y_P(x)$ até à ordem existente na equação diferencial dada:*

$$y_P(x) = \left((Ax+C)\cdot e^{-x}\right)\cdot\cos(x) + \left((Bx+D)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_P = \left(\left((Ax+C)\cdot e^{-x}\right)\cdot\cos(x)\right)' + \left(\left((Bx+D)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x)\right)' =$$

$$= \left((A+C)\cdot e^{-x} - (Ax+C)\cdot e^{-x}\right)\cdot\cos(x) - \left((Ax+C)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x) +$$
$$+ \left((B+D)\cdot e^{-x} - (Bx+D)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x) + \left((Bx+D)\cdot e^{-x}\right)\cdot\cos(x) =$$

$$= \left((A+C-Ax-C)\cdot e^{-x} + (Bx+D)\cdot e^{-x}\right)\cdot\cos(x) +$$
$$+ \left((B+D-Bx-D)\cdot e^{-x} - (Ax+C)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x) =$$

$$= \left((A-Ax+Bx+D)\cdot e^{-x}\right)\cdot\cos(x) + \left((B-Bx-Ax-C)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x)$$

$$y'_P = \left((A-Ax+Bx+D)\cdot e^{-x}\right)\cdot\cos(x) + \left((B-Bx-Ax-C)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''_P = \left(\left((A-Ax+Bx+D)\cdot e^{-x}\right)\cdot\cos(x)\right)' + \left(\left((B-Bx-Ax-C)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x)\right)' =$$

$$= \left((-A+B)\cdot e^{-x} - (A-Ax+Bx+D)\cdot e^{-x}\right)\cdot\cos(x) - \left((A-Ax+Bx+D)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x) +$$
$$+ \left((-B-A)\cdot e^{-x} - (B-Bx-Ax-C)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x) + \left((B-Bx-Ax-C)\cdot e^{-x}\right)\cdot\cos(x) =$$

$$= \left((-A+B-A+Ax-Bx-D)\cdot e^{-x} + (B-Bx-Ax-C)\cdot e^{-x}\right)\cdot\cos(x) +$$
$$+ \left((-A+Ax-Bx-D-B-A)\cdot e^{-x} + (-B+Bx+Ax+C)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x) =$$

$$= \left((-2A+2B-C-D-2Bx)\cdot e^{-x}\right)\cdot\cos(x) + \left((-2A-2B+C-D+2Ax)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x)$$

7. *Substituir as derivadas obtidas na equação diferencial dada:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x \cdot e^{-x} \cdot \cos(x) \Leftrightarrow y'' = x \cdot e^{-x} \cdot \cos(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \left((-2A+2B-C-D-2Bx)\cdot e^{-x}\right)\cdot \cos(x)+ \\ +\left((-2A-2B+C-D+2Ax)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x) = x\cdot e^{-x}\cdot \cos(x) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \left((-2A+2B-C-D)\cdot e^{-x}\right)\cdot \cos(x)+\left((-2A-2B+C-D)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x)+ \\ +(-2B)\cdot x\cdot e^{-x}\cdot \cos(x)+(2A)\cdot x\cdot e^{-x}\cdot sen(x) = x\cdot e^{-x}\cdot \cos(x) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2A+2B-C-D=0 \\ -2A-2B+C-D=0 \\ -2B=1 \\ 2A=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\cdot 0+2\cdot(-1/2)-C-D=0 \\ -2\cdot 0-2\cdot(-1/2)+C-D=0 \\ B=-1/2 \\ A=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1-(D+1)-D=0 \\ C=D+1 \\ B=-1/2 \\ A=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-1/2 \\ C=-1+1 \\ D=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-1/2 \\ C=0 \\ D=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_P(x) = \left((Ax+C)\cdot e^{-x}\right)\cdot \cos(x)+\left((Bx+D)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_P(x) = \left((0\cdot x+0)\cdot e^{-x}\right)\cdot \cos(x)+\left(\left(-\frac{1}{2}x-1\right)\cdot e^{-x}\right)\cdot sen(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_P(x) = \left(-\frac{x}{2}-1\right)\cdot e^{-x}\cdot sen(x)$$

Logo: $y = y_C + y_P \Leftrightarrow y = (c_1 + c_2 \cdot x) + \left(\left(-\frac{x}{2}-1\right)\cdot e^{-x}\cdot sen(x)\right)$

Assim sendo teremos então, com base nas condições iniciais $y(0)=1; y'(0)=1$, que determinar antes de mais a derivada de y:

$$y = (c_1 + c_2 \cdot x) + \left(\left(-\frac{x}{2}-1\right)\cdot e^{-x}\cdot sen(x)\right) \Rightarrow y' = (c_1 + c_2 \cdot x)' + \left(\left(-\frac{x}{2}-1\right)\cdot e^{-x}\cdot sen(x)\right)' =$$

$$= c_2 + \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-x} - \left(-\frac{x}{2} - 1 \right) \cdot e^{-x} \right) \cdot sen(x) + \left(-\frac{x}{2} - 1 \right) \cdot e^{-x} \cdot \cos(x) =$$

$$= c_2 + \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right) \cdot e^{-x} \cdot sen(x) + \left(-\frac{x}{2} - 1 \right) \cdot e^{-x} \cdot \cos(x)$$

Logo: $\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y^{'}(0) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (c_1 + c_2 \cdot 0) + \left(\left(-\frac{0}{2} - 1 \right) \cdot e^{-0} \cdot \underbrace{sen(0)}_{=0} \right) = 1 \\ c_2 + \left(\frac{0}{2} + \frac{3}{2} \right) \cdot e^{-0} \cdot \underbrace{sen(0)}_{=0} + \left(-\frac{0}{2} - 1 \right) \cdot \underbrace{e^{-0}}_{=1} \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{array} \right\}$

Então finalmente teremos que: $y = 2x + 1 + \left(-\frac{x}{2} - 1 \right) \cdot e^{-x} \cdot sen(x)$

2. Determine a solução geral da equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 3x \cdot \cos(x) + 2e^x - x^2$ a partir da solução geral das equações diferenciais $\frac{d^2y}{dx^2} - y = x \cdot \cos(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x$ e $\frac{d^2y}{dx^2} - y = x^2$.

R:

Vamos começar por determinar a solução particular de cada uma das equações diferenciais que servem de base à obtenção da solução particular de $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 3x \cdot \cos(x) + 2e^x - x^2$.

- **Cálculo de y_C :**

Sabendo que a equação homogénea associada à equação dada é: $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

Então: $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow m_1 = -1 \vee m_2 = +1 \Rightarrow$ duas raízes reais distintas.

Sabe-se que para raízes reais distintas temos que: $y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + \ldots + c_n \cdot e^{m_n \cdot x}$

Então, neste caso: $y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} \Leftrightarrow y = c_1 \cdot e^{-1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{1 \cdot x} \Leftrightarrow y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^x$

- **Cálculo de y_P para $\frac{d^2y}{dx^2} - y = x \cdot \cos(x)$:**

1. *Funções C.I. existentes:* $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \underbrace{x}_{f_1} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{f_2}$

As funções C.I. são: $\left\{ \begin{array}{l} f_1 = x \\ f_2 = \cos(x) \end{array} \right\}$

2. *Determinação dos conjuntos C.I.:*

$$f_1 = x \Rightarrow f'_1 = (x)' = 1 \Rightarrow S_{f_1} = \left\{ \underbrace{x}_{f_1}; \underbrace{1}_{f'_1} \right\}$$

$$f_2 = \cos(x) \Rightarrow f'_2 = (\cos(x))' = \underbrace{-sen(x)}_{f'_2 = sen(x)} \Rightarrow f''_2 = (-sen(x))' = \underbrace{-\cos(x)}_{f''_2 = \cos(x) = f_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{f_2} = \left\{ \underbrace{\cos(x)}_{f_2}; \underbrace{sen(x)}_{f'_2} \right\}$$

Assim sendo teremos que:

$$S_f = S_{f_1} \times S_{f_2} \Leftrightarrow S_f = \{x;1\} \times \{\cos(x); sen(x)\} \Leftrightarrow S_f = \{x \cdot \cos(x); x \cdot sen(x); \cos(x); sen(x)\}$$

3. *Procurar eliminar todos os subconjuntos obtidos em 2.:*

Não há subconjuntos para este exercício.

4. *Determinar se algum elemento de S_f verifica a solução da equação homogénea associada:*

Sendo: $y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{x}$, a solução da equação homogénea associada então:

Consegue verificar-se facilmente que não existe nenhum valor atribuível a c_1 e/ou a c_2 que possa resultar numa identidade.

5. *Determinar $y_P(x)$:*

Sendo: $S_f = \{x \cdot \cos(x); x \cdot sen(x); \cos(x); sen(x)\}$ então:

$$y_P(x) = A \cdot x \cdot \cos(x) + B \cdot x \cdot sen(x) + C \cdot \cos(x) + D \cdot sen(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_P(x) = (Ax + C) \cdot \cos(x) + (Bx + D) \cdot sen(x)$$

6. *Determinar as derivadas de $y_P(x)$ até à ordem existente na equação diferencial dada:*

$$y_P(x) = (Ax + C)\cdot\cos(x) + (Bx + D)\cdot sen(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_P = ((Ax + C)\cdot\cos(x) + (Bx + D)\cdot sen(x))' =$$

$$= A\cdot\cos(x) - (Ax + C)\cdot sen(x) + B\cdot sen(x) + (Bx + D)\cdot\cos(x) =$$

$$= (A + Bx + D)\cdot\cos(x) + (B - Ax - C)\cdot sen(x)$$

$$y'_P(x) = (A + Bx + D)\cdot\cos(x) + (B - Ax - C)\cdot sen(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''_P = ((A + Bx + D)\cdot\cos(x) + (B - Ax - C)\cdot sen(x))' =$$

$$= B\cdot\cos(x) - (A + Bx + D)\cdot sen(x) - A\cdot sen(x) + (B - Ax - C)\cdot\cos(x) =$$

$$= (B + B - Ax - C)\cdot\cos(x) + (-A - A - Bx - D)\cdot sen(x) =$$

$$= (2B - Ax - C)\cdot\cos(x) + (-2A - Bx - D)\cdot sen(x)$$

7. *Substituir as derivadas obtidas na equação diferencial dada:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = x\cdot\cos(x) \Leftrightarrow y'' - y = x\cdot\cos(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} ((2B - Ax - C)\cdot\cos(x) + (-2A - Bx - D)\cdot sen(x)) - \\ -((Ax + C)\cdot\cos(x) + (Bx + D)\cdot sen(x)) = x\cdot\cos(x) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2B - Ax - C - Ax - C)\cdot\cos(x) + (-2A - Bx - D - Bx - D)\cdot sen(x) = x\cdot\cos(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2B - 2Ax - 2C)\cdot\cos(x) + (-2A - 2Bx - 2D)\cdot sen(x) = x\cdot\cos(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2B - 2C)\cdot\cos(x) - 2A\cdot x\cdot\cos(x) + (-2A - 2D)\cdot sen(x) - 2B\cdot x\cdot sen(x) = x\cdot\cos(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2B - 2C = 0 \\ -2A = 1 \\ -2A - 2D = 0 \\ -2B = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\cdot 0 - 2C = 0 \\ A = -1/2 \\ -2\cdot(-1/2) - 2D = 0 \\ B = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -1/2 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_P(x) = (Ax + C)\cdot\cos(x) + (Bx + D)\cdot sen(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_P(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 0\right)\cdot\cos(x) + \left(0\cdot x + \frac{1}{2}\right)\cdot sen(x) \Leftrightarrow y_{P1}(x) = -\frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos(x) + \frac{1}{2}\cdot sen(x)$$

- **Cálculo de y_P para $\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x$:**

1. *Funções C.I. existentes:* $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \underbrace{e^x}_{f_1}$

   As funções C.I. são: $\{f_1 = e^x\}$

2. *Determinação dos conjuntos C.I.:*

   $$f_1 = e^x \Rightarrow f'_1 = (e^x)' = e^x \Rightarrow S_{f_1} = \left\{\underbrace{e^x}_{f_1}\right\}$$

3. *Procurar eliminar todos os subconjuntos obtidos em 2.:*

   Não há subconjuntos para este exercício.

4. *Determinar se algum elemento de S_{f_1} verifica a solução da equação homogénea associada:*

   Sendo: $y = c_1\cdot e^{-x} + c_2\cdot e^x$, a solução da equação homogénea associada então:

Elemento: e^x	$e^x = c_1\cdot e^{-x} + c_2\cdot e^x \rightarrow$ Se: $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$ então teremos a identidade $e^x = e^x$, assim sendo teremos que multiplicar este elemento pela menor potência de x que permita inviabilizar este elemento como solução da equação homogénea associada. Assim teremos que: $[S_{f_1}]_{alt} = \{x\cdot e^x\}$

5. *Determinar $y_P(x)$:*

   Sendo: $\left[S_{f_1}\right]_{alt} = \{x \cdot e^x\}$ então: $y_P(x) = A \cdot x \cdot e^x$

6. *Determinar as derivadas de $y_P(x)$ até à ordem existente na equação diferencial dada:*

   $y_P(x) = A \cdot x \cdot e^x \Rightarrow y'_P(x) = A \cdot e^x + A \cdot x \cdot e^x \Rightarrow y''_P(x) = A \cdot e^x + A \cdot e^x + A \cdot x \cdot e^x \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow y''_P(x) = 2A \cdot e^x + A \cdot x \cdot e^x$

7. *Substituir as derivadas obtidas na equação diferencial dada:*

   $\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x \Leftrightarrow y'' - y = e^x \Leftrightarrow \left(2A \cdot e^x + A \cdot x \cdot e^x\right) - \left(A \cdot x \cdot e^x\right) = e^x \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow 2A \cdot e^x = e^x \Leftrightarrow A = \frac{e^x}{2 \cdot e^x} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow y_P(x) = A \cdot x \cdot e^x \Leftrightarrow y_{P2}(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^x$

- **Cálculo de y_P para $\frac{d^2y}{dx^2} - y = x^2$:**

1. *Funções C.I. existentes:* $\frac{d^2y}{dx^2} - y = x^2$

   As funções C.I. são: $\{f_1 = x^2\}$

2. *Determinação dos conjuntos C.I.:*

   $f_1 = x^2 \Rightarrow S_{f_1} = \{x^2; x; 1\}$

3. *Determinar se algum elemento de S_{f_1}, verifica a solução da equação homogénea associada:*

   Sendo: $y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{x}$, a solução da equação homogénea associada então:

   Não existe nenhum valor atribuível a c_1, e/ou a c_2 que possa resultar na identidade $x^2 = x^2$, $x = x$ ou $1 = 1$, logo $x^2, x \text{ e } 1$ não são soluções da equação homogénea associada.

4. *Determinar $y_P(x)$:*

   Sendo: $S_{f_1} = \{x^2; x; 1\}$, então: $y_P(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$

5. *Determinar as derivadas de $y_P(x)$ até à ordem existente na equação diferencial dada:*

   Sendo: $\frac{d^2y}{dx^2} - y = x^2$, então:

   $$y_P(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C \Rightarrow y'_P(x) = 2A \cdot x + B \Rightarrow y''_P(x) = 2A$$

6. *Substituir as derivadas obtidas na equação diferencial dada:*

   $$\frac{d^2y}{dx^2} - y = x^2 \Leftrightarrow y'' - y = x^2 \Leftrightarrow (2A) - \left(A \cdot x^2 + B \cdot x + C\right) = x^2 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow -A \cdot x^2 - B \cdot x + 2A - C = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -A = 1 \\ -B = 0 \\ 2A - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ 2 \cdot 1 - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow y_P(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C \Leftrightarrow y_P(x) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 2 \Leftrightarrow y_{P3}(x) = x^2 + 2$$

Conclusão: A solução geral da equação $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 3x \cdot \cos(x) + 2e^{x} - x^2$ será:

$$y = 3y_{P1} + 2y_{P2} - y_{P3} \Leftrightarrow y = 3\left(-\frac{1}{2} \cdot x \cdot \cos(x) + \frac{1}{2} \cdot sen(x)\right) + 2\left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{x}\right) - x^2 + 2$$