1. Recorde que uma função $g(x;y)$ diz-se homogénea de grau n se $g(tx;ty) = t^n \cdot g(x;y)$. Uma equação diferencial da forma $y' = f(x;y)$ diz-se homogénea se a função $f(x;y)$ é homogénea de grau zero.

a) Verifique se as seguintes funções $f(x;y)$ são homogéneas. Em caso afirmativo, indique o respectivo grau.

i. $f(x;y) = x^2 + 3xy$

R:

Para que a função seja homogénea é necessário que se verifique a seguinte igualdade: $f(tx;ty) = t^n \cdot f(x;y)$, onde : n $\rightarrow$ grau da equação;

Assim sendo teremos então que:

$$f(x;y) = x^2 + 3xy \Rightarrow f(tx;ty) = (tx)^2 + 3 \cdot (tx) \cdot (ty) \Leftrightarrow f(tx;ty) = t^2x^2 + 3t^2xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(tx;ty) = t^{\overset{n}{2}} \cdot \underbrace{\left(x^2 + 3xy\right)}_{f(x;y)}$$

Conclusão: Esta função é homogénea de grau $n = 2$, porque verifica a igualdade geral $f(tx;ty) = t^n \cdot f(x;y)$

ii. $f(x;y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + xy$

R:

Para que a função seja homogénea é necessário que se verifique a seguinte igualdade: $f(tx;ty) = t^n \cdot f(x;y)$, onde : n $\rightarrow$ grau da equação;

Assim sendo teremos então que:

$$f(x;y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + xy \Rightarrow f(tx;ty) = \ln\left(\frac{tx}{ty}\right) + (tx) \cdot (ty) \Leftrightarrow f(tx;ty) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + t^2xy$$

Conclusão: Esta função não é homogénea, porque não verifica a igualdade geral $f(tx;ty) = t^n \cdot f(x;y)$

b) Mostre que a mudança de variável $y = v \cdot x$ transforma a equação diferencial homogénea $y' = f(x;y)$ na seguinte equação de variáveis separáveis: $x \cdot v' = f(1;v) - v$.

R:

Sabendo que: $y' = \frac{dy}{dx}$

Então para a mudança de variável: $y = v \cdot x$ teremos a seguinte derivada em ordem a x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(v \cdot x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{d}{dx}(v)}_{=v'} \cdot x + v \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(x)}_{=1} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{dv}{dx} + v \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x \cdot v' + v$$

Também é sabido que: $y = f(x;y)$, o que com a mudança de variável $y = v \cdot x$, se transforma em: $y = f(x; v \cdot x)$. Derivando isto em ordem a x teremos que: $y' = f(1;v)$

Desta forma, teremos que:

$$\left.\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} = x \cdot v' + v \\ y' = \dfrac{dy}{dx} = f(1;v) \end{cases}\right\} \Rightarrow x \cdot v' + v = f(1;v) \Leftrightarrow x \cdot v' = f(1;v) - v$$

c) Usando o resultado obtido na alínea anterior resolva as seguintes equações diferenciais:

i. $(x+y)dx - (x)dy = 0 \quad , \quad x > 0$

R:

Antes de mais vamos começar por verificar se a equação é ou não homogénea, pois *só se conseguirá resolver se os termos que a compõem forem homogéneos do mesmo grau.*

$$\underbrace{(x+y)}_{M(x;y)}dx - \underbrace{(x)}_{N(x;y)}dy = 0$$

Para que a função seja homogénea é necessário que se verifique a seguinte igualdade:

$$\left.\begin{cases} M(tx;ty) = t^n \cdot M(x;y) \\ N(tx;ty) = t^n \cdot N(x;y) \end{cases}\right\}, \text{onde: n} \rightarrow \text{grau da equação (igual para ambos)}$$

Assim sendo teremos então que:

$$M(x;y) = x + y \Rightarrow M(tx;ty) = tx + ty \Leftrightarrow M(tx;ty) = t^{\overset{n}{\hat{1}}} \cdot \underbrace{(x+y)}_{M(x;y)}$$

$$N(x;y) = -x \Rightarrow N(tx;ty) = -tx \Leftrightarrow N(tx;ty) = t^{\overset{n}{\hat{1}}} \cdot \underbrace{(-x)}_{N(x;y)}$$

Conclusão: Esta função é homogénea de grau $n = 1$, porque verifica a igualdade geral $\begin{Bmatrix} M(tx;ty) = t^n \cdot M(x;y) \\ N(tx;ty) = t^n \cdot N(x;y) \end{Bmatrix}$, onde : n $\rightarrow$ grau da equação (igual para ambos)

Assim sendo e sabendo que: $y = v \cdot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{dv}{dx} + v$, teremos então que:

$$(x+y)dx - (x)dy = 0 \Leftrightarrow (x+y)\frac{dx}{dx} - (x)\frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx} \Leftrightarrow (x+y) - (x)\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + (v \cdot x)) - x \cdot \left(x \cdot \frac{dv}{dx} + v \right) = 0 \Leftrightarrow x + v \cdot x - x^2 \cdot \frac{dv}{dx} - x \cdot v = 0 \Leftrightarrow x - x^2 \cdot \frac{dv}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \frac{dv}{dx} = x \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{x}{x^2} \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow dv = \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \frac{1}{x}dx - dv = 0$$

Uma vez que a expressão obtida após a aplicação da mudança de variável já se apresenta sob a forma de variáveis separáveis, então não há necessidade de aplicar um factor integrante. Procedendo então à resolução desta equação teremos que:

$$\underbrace{\int \frac{\overset{u'}{\overbrace{1}}}{\underbrace{x}_{u}} dx}_{\ln|u|} - \underbrace{\int 1 dv}_{v} = C \Leftrightarrow \ln \underbrace{|x|}_{\substack{\text{no enunciado é dito que:} \\ \text{x>0, logo podemos retirar} \\ \text{o módulo.}}} - v = C \Leftrightarrow \ln x - v = C \Leftrightarrow \underbrace{\ln x - \frac{y}{x} = C}_{\text{Família de Soluções}}$$

ii. $\left(2xy - x^2\right)dx + \left(x^2\right)dy = 0 \quad , \quad x > 0$

R:

Antes de mais vamos começar por verificar se a equação é ou não homogénea, pois *só se conseguirá resolver se os termos que a compõem forem homogéneos do mesmo grau.*

$$\underbrace{\left(2xy - x^2\right)}_{M(x;y)}dx + \underbrace{\left(x^2\right)}_{N(x;y)}dy = 0$$

Para que a função seja homogénea é necessário que se verifique a seguinte igualdade:

$$\left.\begin{cases} M(tx;ty) = t^n \cdot M(x;y) \\ N(tx;ty) = t^n \cdot N(x;y) \end{cases}\right\}, \text{onde: n} \rightarrow \text{grau da equação (igual para ambos)}$$

Assim sendo teremos então que:

$$M(x;y) = 2xy - x^2 \Rightarrow M(tx;ty) = 2(tx)(ty) - (tx)^2 \Leftrightarrow M(tx;ty) = t^{\overset{n}{2}} \cdot \underbrace{(2xy - x)}_{M(x;y)}$$

$$N(x;y) = x^2 \Rightarrow N(tx;ty) = (tx)^2 \Leftrightarrow N(tx;ty) = t^{\overset{n}{2}} \cdot \underbrace{\left(x^2\right)}_{N(x;y)}$$

Conclusão: Esta função é homogénea de grau $n = 2$, porque verifica a igualdade geral

$$\left.\begin{cases} M(tx;ty) = t^n \cdot M(x;y) \\ N(tx;ty) = t^n \cdot N(x;y) \end{cases}\right\}, \text{onde: n} \rightarrow \text{grau da equação (igual para ambos)}$$

Assim sendo e sabendo que: $y = v \cdot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{dv}{dx} + v$, teremos então que:

$$\left(2xy - x^2\right)dx + \left(x^2\right)dy = 0 \Leftrightarrow \left(2xy - x^2\right)\frac{dx}{dx} + \left(x^2\right)\frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx} \Leftrightarrow \left(2xy - x^2\right) + \left(x^2\right)\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2x \cdot (v \cdot x) - x^2\right) + x^2 \cdot \left(x \cdot \frac{dv}{dx} + v\right) = 0 \Leftrightarrow \left(2x^2 \cdot v - x^2\right) + x^3 \cdot \frac{dv}{dx} + x^2 \cdot v = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2 \cdot v - x^2 + x^2 \cdot v\right) + x^3 \cdot \frac{dv}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (2v - 1 + v) + x^3 \cdot \frac{dv}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (3v - 1) + x^3 \cdot \frac{dv}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 \cdot \frac{dv}{dx} = -x^2 \cdot (3v-1) \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{x^2}{x^3} \cdot (3v-1) \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot (3v-1) \Leftrightarrow dv = -\frac{1}{x} \cdot (3v-1)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{x} \cdot (3v-1)}_{\downarrow \, (3v-1)} dx + dv = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{3v-1} \quad \wedge \quad v \neq \frac{1}{3}$$

Com este factor integrante, vamos agora determinar a equação sob a sua forma de variáveis separáveis, pelo que:

$$\frac{1}{3v-1} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot (3v-1) \right) dx + \frac{1}{3v-1} dv = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} dx + \frac{1}{3v-1} dv = 0$$

Procedendo então à resolução desta equação teremos que:

$$\underbrace{\int \frac{\overbrace{1}^{u'}}{\underbrace{x}_{u}} dx}_{\ln|u|} + \int \frac{1}{\underbrace{3v-1}_{u}} dv = C \Leftrightarrow \underbrace{\int \frac{\overbrace{1}^{u'}}{\underbrace{x}_{u}} dx}_{\ln|u|} + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\int \frac{\overbrace{3 \cdot 1}^{u'}}{\underbrace{3v-1}_{u}} dv}_{\ln|u|} = C \Leftrightarrow \ln \underbrace{|x|}_{\substack{\text{no enunciado é dito que:} \\ \text{x>0, logo podemos retirar} \\ \text{o módulo.}}} + \frac{1}{3} \cdot \ln|3v-1| = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{3} \cdot \ln|3v-1| = C \Leftrightarrow 3 \cdot \ln x + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \ln|3v-1| = 3C, \; 3C = C_1 \Leftrightarrow 3 \cdot \ln x + \ln|3v-1| = C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x^3 + \ln|3v-1| = C_1 \Leftrightarrow^{1} \ln\left(x^3 \cdot |3v-1|\right) = C_1 \Leftrightarrow e^{\ln\left(x^3 \cdot |3v-1|\right)} = e^{C_1}, \; e^{C_1} = C_2 \Leftrightarrow x^3 \cdot |3v-1| = C_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^3 \cdot (3v-1) = C_3, \; C_3 \neq 0}_{\text{Família de Soluções}}$$

Como esta família de soluções foi obtida no pressuposto de que $v \neq \frac{1}{3}$, temos agora que verificar se $v = \frac{1}{3}$ também é solução da equação diferencial.

---

[1] $\ln u + \ln v = \ln(u \cdot v)$; $\ln u - \ln v = \ln\left(\frac{u}{v}\right)$

Para tal temos que substituir este valor na equação que precede a obtenção do factor integrante μ, e caso se verifique a identidade $0=0$, então $v=\frac{1}{3}$ também será solução da equação.

Assim sendo teremos então que:

$$\frac{1}{x}\cdot(3v-1)dx+dv=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\cdot(3v-1)\frac{dx}{dx}+\frac{dv}{dx}=\frac{0}{dx} \Leftrightarrow \frac{1}{x}\cdot(3v-1)+\frac{dv}{dx}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\cdot\left(3\cdot\frac{1}{3}-1\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\cdot\underbrace{(1-1)}_{0}+\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\right)}_{0}=0 \Leftrightarrow 0=0$$

Como $v=\frac{1}{3}$ também é solução da equação, então C_3 poderá assumir qualquer valor, o que significa que teremos a seguinte família de soluções:

$$x^3\cdot(3v-1)=C \Leftrightarrow x^3\cdot\left(3\frac{y}{x}-1\right)=C \Leftrightarrow 3x^3\cdot\frac{y}{x}-x^3=C \Leftrightarrow 3x^2y-x^3=C$$

iii. $y'=\frac{5y-2x}{4x-y}$, $y(1)=4$

R:

Antes de mais vamos começar por re-arranjar a equação de forma a termos uma expressão do género: $M(x;y)dx+N(x;y)dy=0$

$$y'=\frac{5y-2x}{4x-y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{5y-2x}{4x-y} \Leftrightarrow (4x-y)dy=(5y-2x)dx \Leftrightarrow \underbrace{(5y-2x)}_{M(x;y)}dx\underbrace{-(4x-y)}_{N(x;y)}dy=0$$

Posto isto, vamos verificar se a equação é ou não homogénea, pois *só se conseguirá resolver se os termos que a compõem forem homogéneos do mesmo grau.*

Para que a função seja homogénea é necessário que se verifique a seguinte igualdade:

$$\begin{Bmatrix} M(tx;ty)=t^n\cdot M(x;y) \\ N(tx;ty)=t^n\cdot N(x;y) \end{Bmatrix}, \text{onde: n} \rightarrow \text{grau da equação (igual para ambos)}$$

Assim sendo teremos então que:

$$M(x;y)=5y-2x \Rightarrow M(tx;ty)=5(ty)-2(tx) \Leftrightarrow M(tx;ty)=t^{\overset{n}{\hat{1}}}\cdot\underbrace{(5y-2x)}_{M(x;y)}$$

$$N(x;y)=-(4x-y) \Rightarrow N(x;y)=-(4(tx)-(ty)) \Leftrightarrow N(x;y)=t^{\overset{n}{\hat{1}}}\cdot\underbrace{(-(4x-y))}_{N(x;y)}$$

Conclusão: Esta função é homogénea de grau $n=1$, porque verifica a igualdade geral $\begin{cases} M(tx;ty)=t^n\cdot M(x;y) \\ N(tx;ty)=t^n\cdot N(x;y) \end{cases}$, onde: n $\rightarrow$ grau da equação (igual para ambos)

Assim sendo e sabendo que: $y=v\cdot x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=x\cdot\frac{dv}{dx}+v$, teremos então que:

$$(5y-2x)dx-(4x-y)dy=0 \Leftrightarrow (5y-2x)\frac{dx}{dx}-(4x-y)\frac{dy}{dx}=\frac{0}{dx} \Leftrightarrow (5y-2x)-(4x-y)\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5(v\cdot x)-2x)-(4x-(v\cdot x))\cdot\left(x\cdot\frac{dv}{dx}+v\right)=0 \Leftrightarrow (5vx-2x)-\left(4x^2\frac{dv}{dx}+4x\cdot v-vx^2\frac{dv}{dx}-v^2x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5vx-2x)-4x^2\frac{dv}{dx}-4x\cdot v+vx^2\frac{dv}{dx}+v^2x=0 \Leftrightarrow (5vx-2x-4vx+v^2x)+(vx^2-4x^2)\frac{dv}{dx}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (vx-2x+v^2x)+x^2\cdot(v-4)\frac{dv}{dx}=0 \Leftrightarrow x\cdot(v-2+v^2)+x^2\cdot(v-4)\frac{dv}{dx}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\cdot(v^2+v-2)+x^2\cdot(v-4)\frac{dv}{dx}=0 \Leftrightarrow x^2\cdot(v-4)\frac{dv}{dx}=-x\cdot(v^2+v-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (v-4)\frac{dv}{dx}=-\frac{x}{x^2}\cdot(v^2+v-2) \Leftrightarrow (v-4)\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{x}\cdot(v^2+v-2) \Leftrightarrow (v-4)dv=-\frac{1}{x}\cdot(v^2+v-2)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\cdot\underbrace{(v^2+v-2)}_{\downarrow\, v^2+v-2}dx+(v-4)dv=0 \Rightarrow \mu=\frac{1}{v^2+v-2} \quad \wedge \quad \begin{cases} v\neq -2 \\ v\neq 1 \end{cases}$$ [2]

[2] $v^2+v-2=0 \Leftrightarrow v=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1} \Leftrightarrow v=\frac{-1\pm3}{2} \Leftrightarrow v=1 \vee v=-2$

Com este factor integrante, vamos agora determinar a equação sob a sua forma de variáveis separáveis, pelo que:

$$\frac{1}{v^2+v-2}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot\left(v^2+v-2\right)\right)dx+\frac{1}{v^2+v-2}\cdot(v-4)dv=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}dx+\frac{v-4}{(v-1)\cdot(v+2)}dv=0$$

Procedendo então à resolução desta equação teremos que:

$$\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{v-4}{(v+2)\cdot(v-1)}dv=C \Leftrightarrow \int\frac{1}{x}dx+\left(\int\frac{A}{(v+2)}dv+\int\frac{B}{(v-1)}dv\right)=C \Leftrightarrow ☼$$

Cálculos Auxiliares
$\frac{v-4}{(v+2)\cdot(v-1)}=\frac{A}{(v+2)}+\frac{B}{(v-1)} \Leftrightarrow \frac{v-4}{(v+2)\cdot(v-1)}=\frac{A\cdot(v-1)+B\cdot(v+2)}{(v+2)\cdot(v-1)} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow v-4=A\cdot v-A+B\cdot v+2B \Leftrightarrow \begin{cases}1=A+B\\-4=-A+2B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=1-B\\-4=-(1-B)+2B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=1-B\\-4+1=3B\end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$

Então teremos agora que reescrever o integral por substituição em ☼:

$$☼\Leftrightarrow \int\frac{1}{x}dx+\left(\int\frac{2}{(v+2)}dv+\int\frac{-1}{(v-1)}dv\right)=C \Leftrightarrow \underbrace{\int\frac{\overset{u'}{1}}{\underset{u}{x}}dx}_{\ln|u|}+2\cdot\underbrace{\int\frac{\overset{u'}{1}}{\underbrace{(v+2)}_{u}}dv}_{\ln|u|}-\underbrace{\int\frac{\overset{u'}{1}}{\underbrace{(v-1)}_{u}}dv}_{\ln|u|}=C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|x|+2\cdot\ln|v+2|-\ln|v-1|=C \Leftrightarrow \ln|x|+\ln|v+2|^2-\ln|v-1|=C \Leftrightarrow \ln\left(\frac{|x|\cdot|v+2|^2}{|v-1|}\right)=C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{|x|\cdot|v+2|^2}{|v-1|}\right)}=e^C,\quad e^C=C_1 \Leftrightarrow \frac{|x|\cdot|v+2|^2}{|v-1|}=C_1 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x\cdot(v+2)^2}{v-1}=C_2}_{\text{Família de Soluções}},\quad C_2\neq 0$$

Como esta família de soluções foi obtida no pressuposto de que $v \neq -2 \wedge v \neq 1$, temos agora que verificar se $v = -2 \wedge v = 1$ também são soluções da equação diferencial.
Para tal temos que substituir estes valores na equação que precede a obtenção do factor integrante μ, e caso se verifique a identidade $0 = 0$, então $v = -2 \wedge v = 1$ também será solução da equação.

Assim sendo teremos então que:

$$\frac{1}{x} \cdot \left(v^2 + v - 2\right)dx + (v-4)dv = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \cdot \left(v^2 + v - 2\right)\frac{dx}{dx} + (v-4)\frac{dv}{dx} = \frac{0}{dx} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \cdot \left(v^2 + v - 2\right) + (v-4)\frac{dv}{dx} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = -2 \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\left((-2)^2 - 2 - 2\right)}_{=0} + (-2-4)\underbrace{\frac{d}{dx}(-2)}_{=0} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \\ v = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\left(1^2 + 1 - 2\right)}_{=0} + (1-4)\underbrace{\frac{d}{dx}(1)}_{=0} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \end{array} \right\}$$

Como $v = -2 \wedge v = 1$ também são soluções da equação, então C_2 poderá assumir qualquer valor, o que significa que teremos a seguinte família de soluções:

$$\frac{x \cdot (v+2)^2}{v-1} = C \Leftrightarrow \frac{x \cdot \left(\frac{y}{x} + 2\right)^2}{\frac{y}{x} - 1} = C \Leftrightarrow \frac{x \cdot \left[\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} + 4\right]}{\frac{y}{x} - 1} = C \Leftrightarrow \frac{x \cdot \frac{y^2}{x^2} + 2x \cdot \frac{y}{x} + 4x}{\frac{y}{x} - 1} = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{y^2}{x} + 2y + 4x}{\frac{y}{x} - 1} = C \Leftrightarrow \frac{\frac{y^2}{x} + 2y + 4x}{\frac{y}{x} - 1} = C$$

Assim, para: $y(1) = 4 \Rightarrow \{x = 1 \, ; \, y = 4\} \Rightarrow \dfrac{\frac{4^2}{1} + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{\frac{4}{1} - 1} = C \Leftrightarrow \dfrac{16 + 8 + 4}{4 - 1} = C \Leftrightarrow C = \dfrac{28}{3}$

Logo: $\dfrac{\frac{y^2}{x} + 2y + 4x}{\frac{y}{x} - 1} = \dfrac{28}{3}$