Complementos de Análise Matemática B/C

Teste 1 – Algumas notas sobre a resolução

Duração: 40 minutos

---

1. Determine uma solução do PVI $\left(x^{3/2}+\left(x+1\right)e^{x}y\right)dx+\left(xe^{x}+\cosh(y)+y\,\mathrm{senh}(y)\right)dy=0,\quad y(1)=0.$ (1.75)

A equação é exacta. Logo admite uma família de soluções que se pode escrever na forma $F(x,y)=c,$ onde

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\left(x+1\right)e^{x}y+x^{3/2}\\[2mm] \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=xe^{x}+\cosh(y)+y\,\mathrm{senh}(y)\end{cases}\longrightarrow\quad \begin{cases}F(x,y)=xe^{x}y+\dfrac{2}{5}x^{5/2}+\phi(y)\\[2mm] \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=xe^{x}+\cosh(y)+y\,\mathrm{senh}(y)\end{cases}\longrightarrow$$

$$\begin{cases}F(x,y)=xe^{x}y+\dfrac{2}{5}x^{5/2}+\phi(y)\\[2mm] xe^{x}+\dfrac{d\phi(y)}{dy}=xe^{x}+\cosh(y)+y\,\mathrm{senh}(y)\end{cases}\longrightarrow\quad \begin{cases}F(x,y)=xe^{x}y+\dfrac{2}{5}x^{5/2}+\phi(y)\\[2mm] \phi(y)=y\cosh(y)\end{cases}\longrightarrow$$

$$F(x,y)=xe^{x}y+\frac{2}{5}x^{5/2}+y\cosh(y)+k$$

A família de soluções escreve-se, tomando $k=0,$ $F(x,y)=c\Leftrightarrow xe^{x}y+\frac{2}{5}x^{5/2}+y\cosh(y)=c$

Como $y(1)=0,$ resulta $c=\frac{2}{5},$ sendo a solução do PVI: $xe^{x}y+\frac{2}{5}x^{5/2}+y\cosh(y)=\frac{2}{5}$

Confirmação:

$$\left.xe^{x}y+\frac{2}{5}x^{5/2}+y\cosh(y)\right|_{x=1,\,y=0}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$$

$$d\left[xe^{x}y+\frac{2}{5}x^{5/2}+y\cosh(y)\right]=d\left(\frac{2}{5}\right)\Leftrightarrow\left((x+1)e^{x}y+x^{3/2}\right)dx+\left(xe^{x}+y\,\mathrm{senh}(y)+\cosh(y)\right)dy=0$$

Complementos de Análise Matemática B/C

Teste 1 – Algumas notas sobre a resolução

Duração: 40 minutos

---

2. Determine uma família de $\operatorname{cotg}(x)\dfrac{dy}{dx}+(1-4x\operatorname{cotg}(x))\,y=-\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{tg}^2(x)}e^{2x^2}$, $x\in\left]0,\pi/2\right[$. (1.75)

A equação é linear com: $P(x)=\operatorname{tg}(x)-4x$, logo

$\mu(x)=\exp\int\left(\operatorname{tg}(x)-4x\right)dx=\exp\left(-\ln(\cos(x))-2x^2\right)=e^{-2x^2}\sec(x)$

Multiplicando toda a equação por $\mu(x)$ resulta:

$$e^{-2x^2}\sec(x)\frac{dy}{dx}+e^{-2x^2}\sec(x)(\operatorname{tg}(x)-4x)\,y=-\operatorname{cotg}(x)\Leftrightarrow\frac{d(e^{-2x^2}\sec(x)\,y)}{dx}=-\operatorname{cotg}(x)\quad\longrightarrow$$

$$e^{-2x^2}\sec(x)\,y=-\ln(\operatorname{sen}(x))+c\Leftrightarrow y=(c-\ln(\operatorname{sen}(x)))e^{2x^2}\cos(x)$$

Nota: $\dfrac{d(e^{-2x^2}\sec(x)\,y)}{dx}=e^{-2x^2}\sec(x)\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{d(e^{-2x^2}\sec(x))}{dx}y=e^{-2x^2}\sec(x)\dfrac{dy}{dx}+e^{-2x^2}\sec(x)(\operatorname{tg}(x)-4x)\,y$

---

3. Averigúe se $3x^2-xy+y^2=9$ verifica formalmente o PVI $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6\,x/y-1}{x/y-2}$, $y(-1)=2$. (0.50)

$$3x^2-xy+y^2\Big|_{x=-1,\,y=2}=9\Leftrightarrow 3+2+4=9\Leftrightarrow 9=9$$

$$d\left(3x^2-xy+y^2\right)=d\left(9\right)\Leftrightarrow\left(6x-y\right)dx+\left(2y-x\right)dy=0\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{6\,x/y-1}{x/y-2}$$