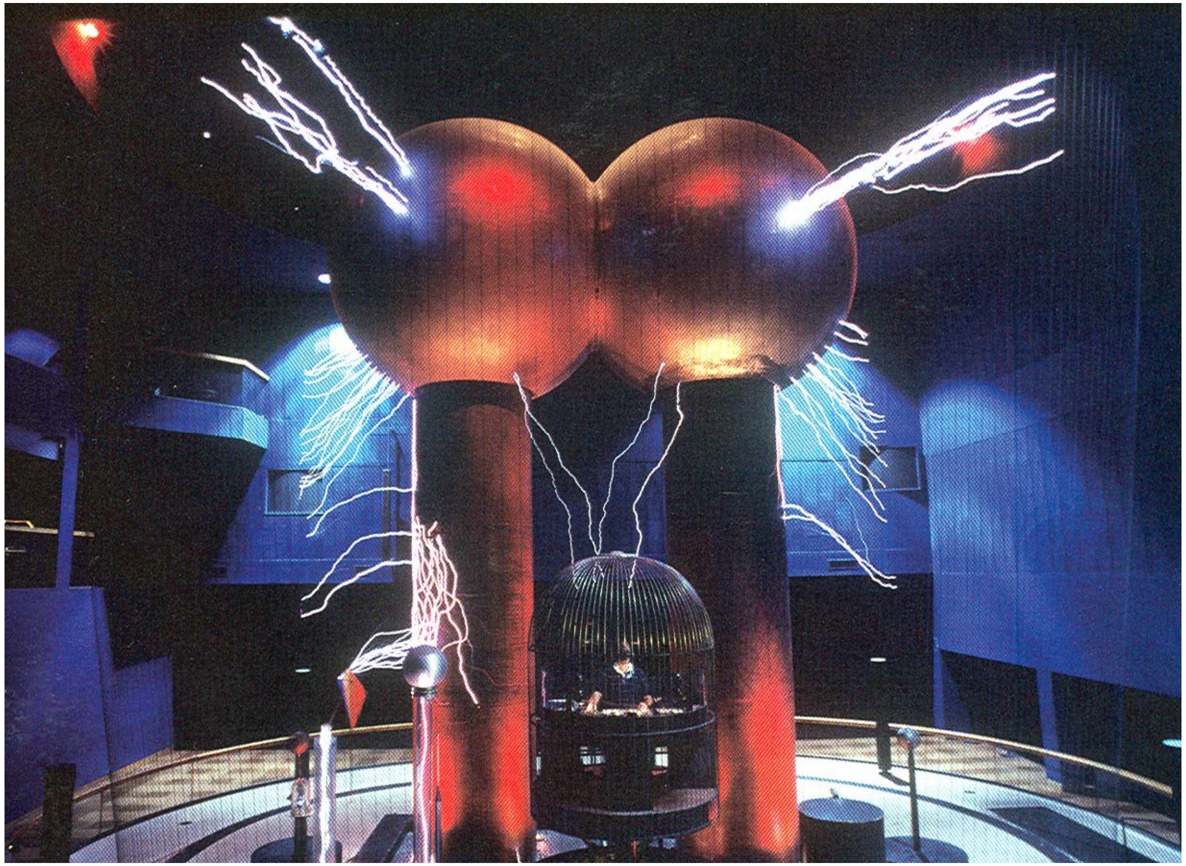
2. Lei de Gauss



Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

Lei de Gauss:

- É uma consequência da lei de Coulomb.
- Outro procedimento para o cálculo dos campos elétricos $\Rightarrow$ mais indicado para o cálculo do campo elétrico de distribuições de carga simétricas; por exemplo em cilindros, planos, esferas, etc.

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

2.1. Fluxo Elétrico

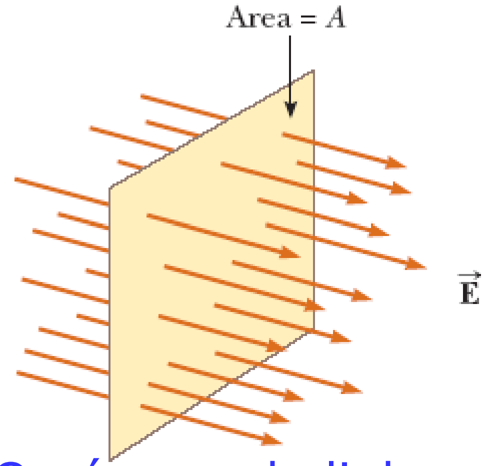
- Base quantitativa da ideia de linhas do campo elétrico. $\Rightarrow$

  O Fluxo elétrico é uma medida do número de linhas do campo elétrico que atravessam uma determinada superfície.

- Quando a superfície atravessada envolve uma determinada quantidade de carga elétrica, **o número líquido de linhas que atravessam a superfície é proporcional à carga líquida no interior da superfície**.

- O número de linhas contado é independente da forma da superfície que envolve a carga (Lei de Gauss).

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho



Campo elétrico uniforme
(em módulo e direção),
área A ⊥ ao campo

O número de linhas por unidade de área é proporcional ao módulo do campo elétrico.

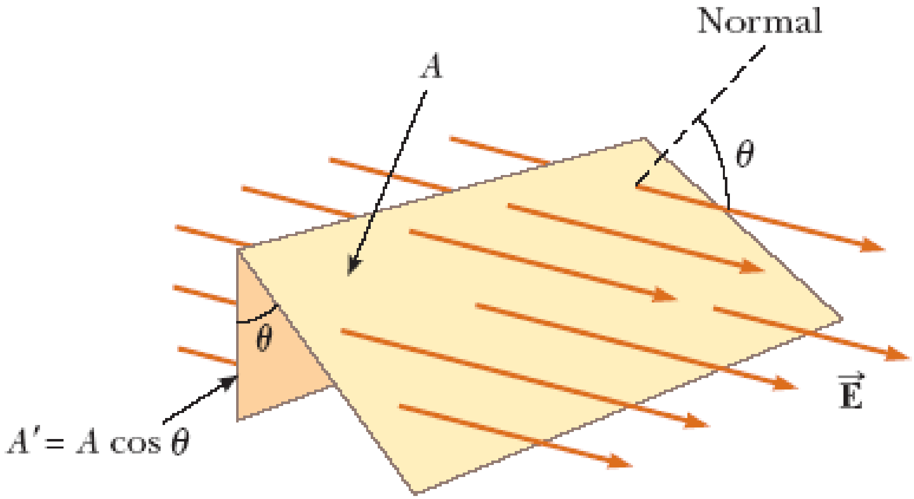
$$\boxed{\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A}} \qquad (\mathrm{N \cdot m^2/C})$$

Fluxo Elétrico

Campo Elétrico

Área da superfície ⊥ ao campo

- Se a superfície não for $\perp$ ao campo $\Rightarrow$ o número de linhas (ou o fluxo) através dela pode ser menor.



θ : ângulo entre a normal à superfície (***A***) e o campo elétrico uniforme $\vec{E}$.

Nº Linhas que atravessam A é igual ao número de linhas que atravessam a área projectada A′ (perpendicular a $\vec{E}$).

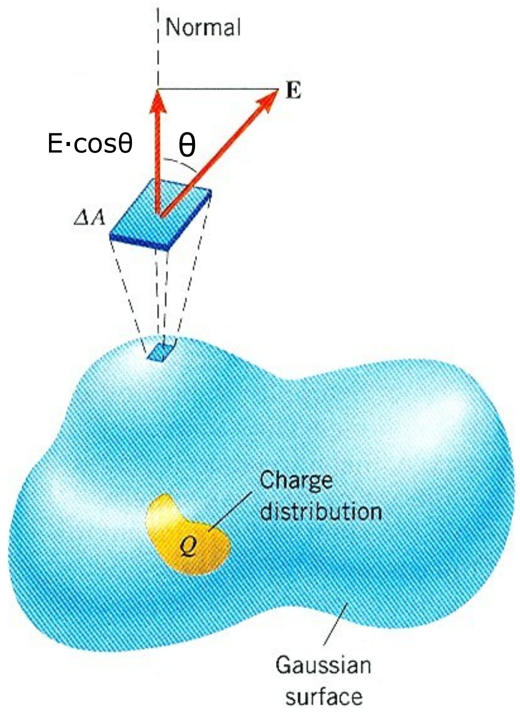
Logo, neste caso: $\Phi_A = \Phi_{A'}$

$$\boxed{\Phi = E \cdot A \cdot \cos\theta = E \cdot A_{\perp}}$$

Fluxo através de uma superfície de área fixa, tem:

- **Valor máximo**, **E·A**, quando a superfície é **perpendicular** ao campo elétrico (cos 0º = 1)
- **Valor nulo**, quando a superfície é **paralela** ao campo elétrico (cos 90º = 0)

⇒ Em situações mais gerais, o campo elétrico pode variar sobre a superfície considerada.



Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

O **fluxo total ou líquido**, através da superfície, é proporcional ao **número líquido** de linhas que atravessam a superfície.

nº de linhas que saem – nº de linhas que entram

Saem > entram $\Rightarrow$ fluxo líquido positivo

Entram > saem $\Rightarrow$ fluxo líquido negativo

Fluxo líquido:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n \cdot dA$$

Integral sobre uma superfície fechada

Componente do campo elétrico $\perp$ à superfície

O cálculo do fluxo líquido através de uma superfície fechada pode ser muito trabalhoso…

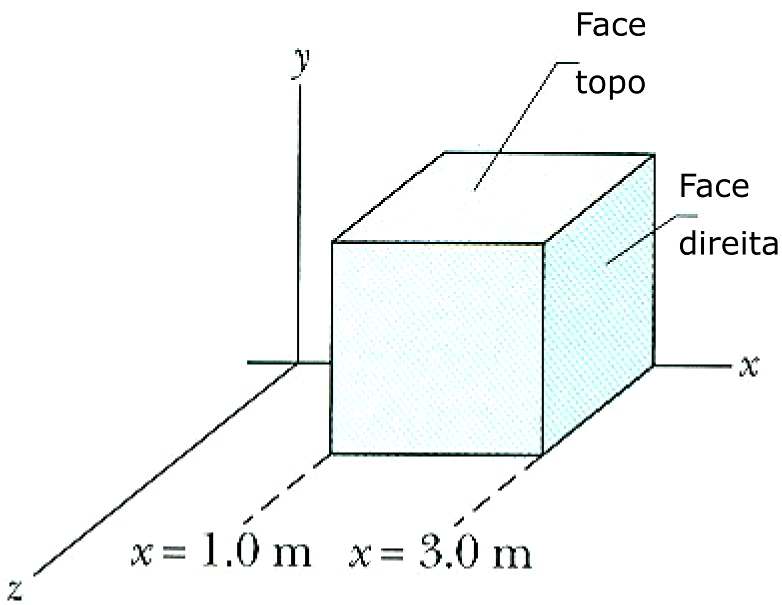
Porém, se o campo **E** $\perp$ à superfície, em cada ponto, e tiver módulo constante $\Rightarrow$ cálculo direto.

Exercício 1:

Um campo elétrico não uniforme é dado por :

$$\vec{E} = 3x(\mathrm{N/C \cdot m})\hat{i} + 4(\mathrm{N/C})\hat{j}$$

Atravessa a superfície gaussiana **cúbica** mostrada na figura. Calcule o fluxo elétrico através da face direita e através da face do topo.



na face direita:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int 3x\hat{i} \cdot dA\hat{i} + \int 4\hat{j} \cdot dA\hat{i}$$

$$\Phi = 3\int xdA + 0 = 3\int 3dA = 9 \cdot 4 = 36\,Nm^2/C$$

na face do topo:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int 3x\hat{i} \cdot dA\hat{j} + \int 4\hat{j} \cdot dA\hat{j}$$

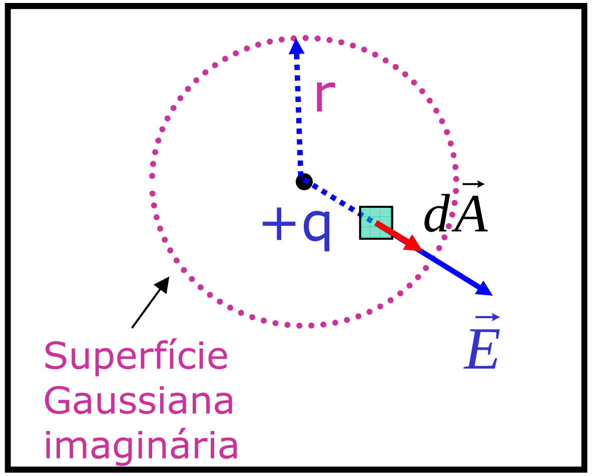
$$\Phi = 0 + 4\int dA = 4 \cdot 4 = 16\,Nm^2/C$$

Nota: tente calcular agora o fluxo na face esquerda

2.2. Lei de Gauss

Relação geral entre o fluxo elétrico líquido através de uma superfície fechada (superfície Gaussiana esférica) e a carga pontual no interior da superfície.

Carga ***+q*** no centro de uma esfera imaginária de raio ***r*:**



$$\boxed{\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r}}$$ Através da superfície Gaussiana esférica

$\vec{E}$ radial $\Rightarrow$ $\vec{E} \,//\, \Delta\vec{A}_i \,,\ \forall i$

$$\Phi_i = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_i = E_n\cdot\Delta A_i\cdot\cos 0^{o} = E\cdot\Delta A_i$$

$$\Phi = \oint E_n dA = \oint E dA = E\oint dA = k\frac{q}{r^2}\oint dA$$

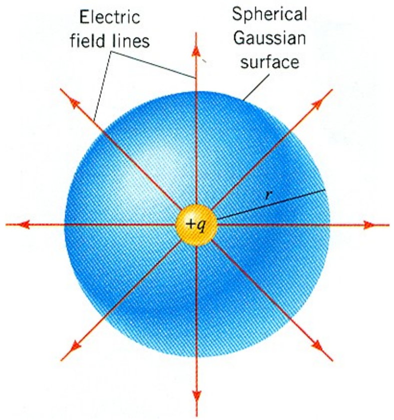
E = cte. na superfície

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

- Superfície Gaussiana Esférica $\Rightarrow$ $\oint dA = A = 4\pi r^2$

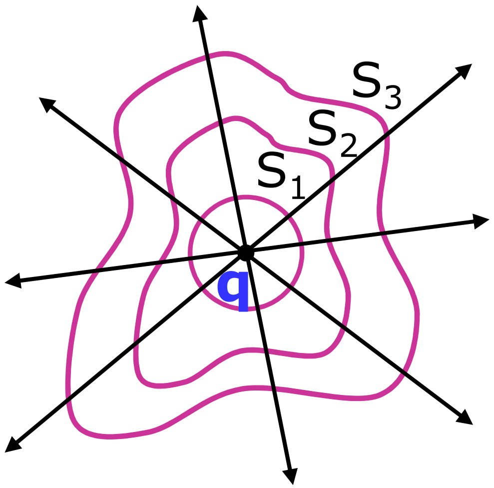
$$\Phi = \frac{kq}{r^2}\left(4\pi r^2\right) = 4\pi kq = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$



- **O fluxo é independente de r**

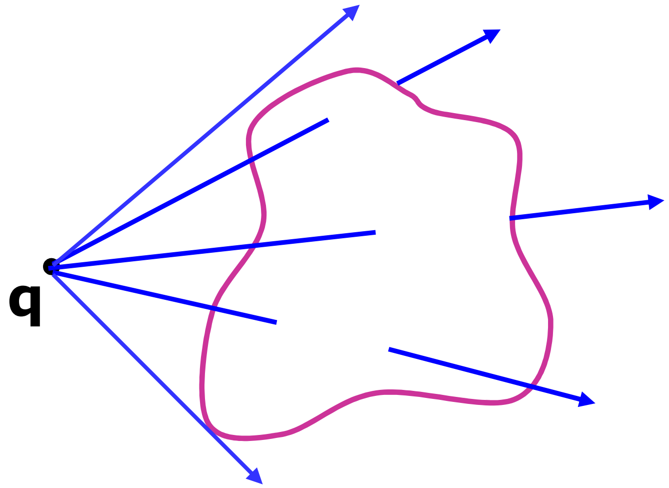
- O fluxo líquido através duma superfície Gaussiana esférica é proporcional à **carga líquida**, **q**, **no interior da superfície**.



- $\Phi \propto$ ao número de linhas que atravessam a superfície.
- O fluxo líquido através de qualquer superfície fechada que envolve uma carga pontual q é dado por $\boldsymbol{\Phi = q/\varepsilon_0}$

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

Carga pontual no exterior de uma superfície fechada.



nº de linhas que entram = nº de linhas que saem

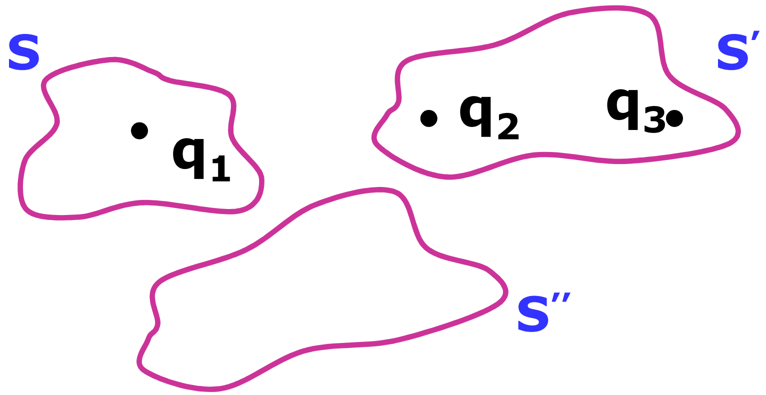
Logo:

- O fluxo líquido através de uma superfície fechada que não envolve nenhuma carga, é nulo.

Caso geral de muitas cargas pontuais, ou de uma distribuição continua de cargas.

- Princípio de sobreposição: o campo elétrico de muitas cargas é igual à soma vetorial dos campos elétricos provocados pelas cargas individuais. Logo o fluxo total será:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \ldots \right) \cdot d\vec{A}$$



$$\Phi_S = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{S'} = \left(\frac{q_2 + q_3}{\varepsilon_0} \right)$$

$$\Phi_{S''} = 0$$

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

- Na prática, a **Lei de Gauss** só é útil num limitado número de situações, nas quais existe um elevado grau de simetria (distribuições de cargas que têm simetria esférica, cilíndrica ou plana).

- A Superfície Gaussiana é uma superfície matemática.

- Se a Superfície Gaussiana é cuidadosamente escolhida $\Rightarrow$ o integral do fluxo será fácil de calcular.

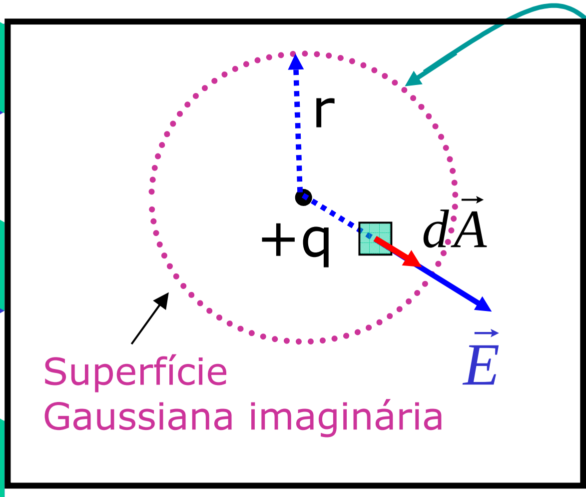
2.3. Aplicações da Lei de Gauss.

Universidade do Minho

- Cálculo do campo elétrico, $\vec{E}$, de uma dada distribuição de cargas.
- A Lei de Gauss é útil quando há um elevado grau de simetria na distribuição de cargas: e.g., esferas, cilindros compridos ou chapas planas, todas uniformemente carregadas.
- A superfície deve ser sempre escolhida de modo que tenha a mesma simetria da distribuição de carga.

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

a) Campo elétrico de uma carga pontual (revisão)



Superfície Gaussiana esférica, raio r

Campo radial, para fora

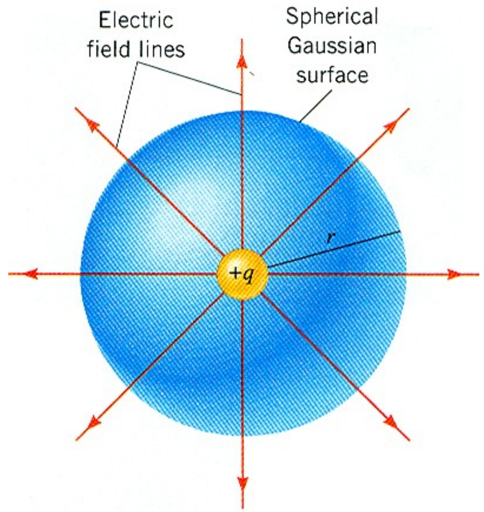
$\vec{E} \perp$ à superfície $\forall P_{sup.}$

$$\vec{E} \,//\, d\vec{A} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA \cdot \cos 0^{o} = E \cdot dA$$

Lei de Gauss: $\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \dfrac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$$\oint E dA = E \oint dA = E.4\pi\, r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

E = cte. na superfície



⇒ Módulo do campo

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\frac{q}{r^2}}$$

⇒ Força eletrostática sobre uma segunda carga pontual q_0

Módulo ⇒

$$\boxed{F = q_0 E = k\frac{q q_0}{r^2}}$$

Lei de Coulomb

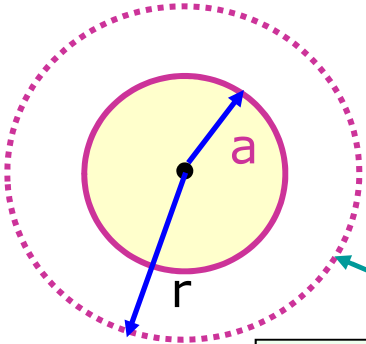
Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

b) Distribuição de carga num isolante com simetria esférica

Universidade do Minho

Esfera isolante; raio ***a***; densidade de carga ***σ*** uniforme; carga total ***+Q***.

1) Intensidade do campo num ponto externo à esfera, $r > a$.



Superfície Gaussiana esférica, raio r concêntrica

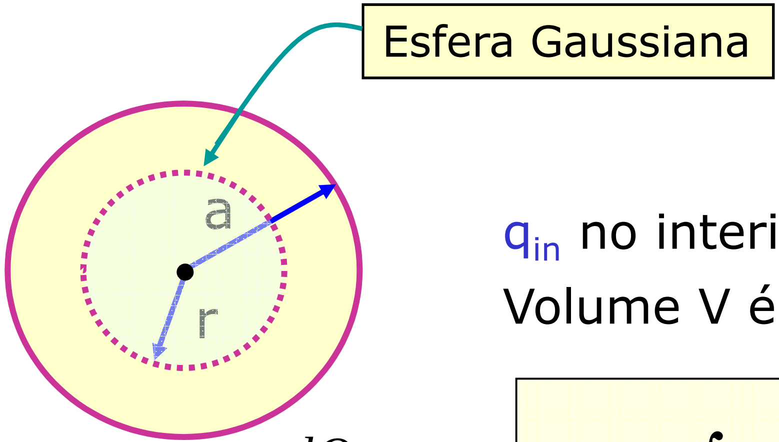
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint E dA = E \oint dA = E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = k\frac{Q}{r^2}$$

Resultado equivalente ao que foi obtido para uma carga pontual!!! (*não depende do raio a da esfera isolante*!)

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

2) Intensidade do campo no interior da esfera ($r < a$).



q_{in} no interior da Superfície Gaussiana de Volume V é < Q

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow \quad \boxed{q_{in} = \rho \int dV = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}$$

de a) vimos que $\Rightarrow$ $\boxed{E = cte; \ \vec{E} \perp \ Sup.\ Gauss. \forall P_{sup}}$

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

Lei de Gauss r < a

$$\oint E dA = E\oint dA = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{in}}{\left(4\pi\varepsilon_0 r^2\right)} = \frac{\rho\, \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

$$Como\ \ \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)}$$

(Definição)

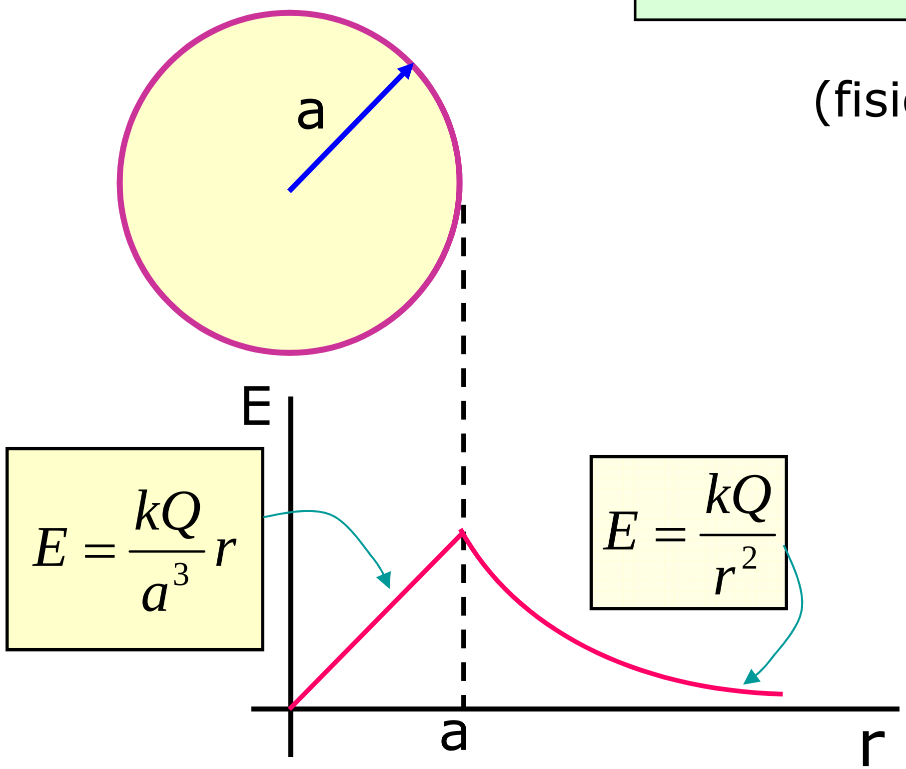
$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = \frac{kQ}{a^3} r$$

para: **r < a**

- E ⇒ 0 quando r ⇒ 0 (simetria)

$$Quando: E \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow E = \infty \; em \; r = 0!!$$

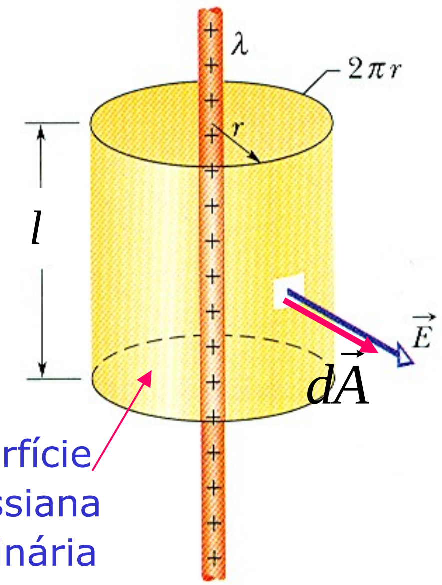
(fisicamente impossível)

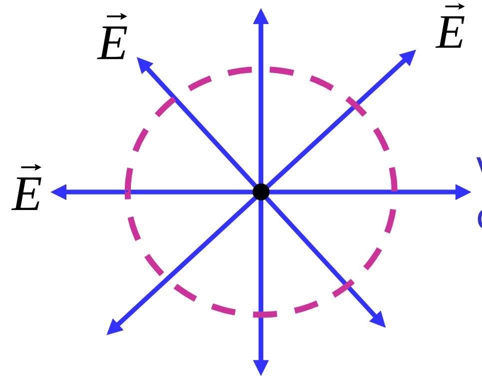


c) Distribuição de cargas num fio isolante com simetria cilíndrica

•Achar $\vec{E}$ à distância r de de um fio ou uma **reta uniformemente carregada**, com carga ***+q***, com **comprimento <u>infinito</u>** e **densidade de carga linear constante (λ=*q/l* = cte.)**

•Simetria : $\vec{E}$ $\perp$ reta e tem direção radial.





$$q_{in} = \lambda \cdot l$$

Sobre a Superfície Gaussiana *S*: $E = cte,\ \vec{E} \perp S\ \forall P_{\text{sup}}\ \left(\vec{E} \,//\, d\vec{A}\right)$

Fluxo nas partes terminais do cilindro Gaussiano é nulo.

$$\left(\vec{E} \,//\, faces;\ \vec{E} \perp d\vec{A}\right)$$

Lei de Gauss:

$$\phi_c = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0}$$

$q_{in} = \lambda l$

$A = 2\pi r \cdot \ell$ (área da superfície cilíndrica) $\Rightarrow$

$$E \oint dA = E(2\pi\, rl) = \frac{\lambda\, \ell}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} = 2k\frac{\lambda}{r}} \quad (1)$$

- $E \propto \dfrac{1}{r}$
- Cálculo mais trabalhoso pela Lei de Coulomb.
- Reta <u>finita</u> $\Rightarrow$ E $\neq$ (1) $E \neq cte;\ \vec{E} \not\perp Sup.\ \forall P_{\text{sup}}$

Lei de Gauss <u>não</u> tem utilidade para o cálculo preciso de uma reta <u>finita</u> carregada.

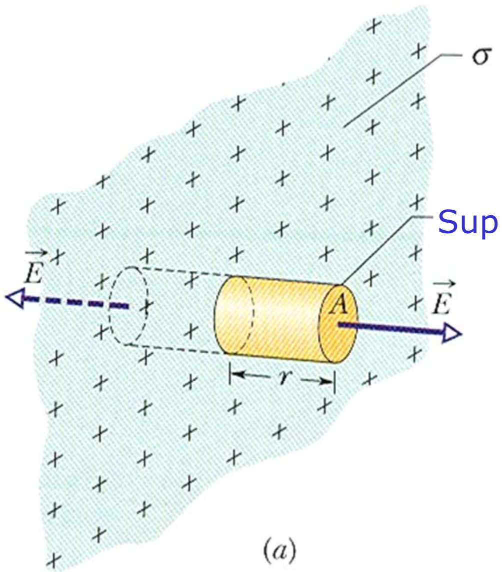
Para pontos vizinhos da reta, e afastados das extremidades $\Rightarrow$ (1) boa estimativa do valor real do campo.

Pouca simetria na distribuição de carga $\Rightarrow$ é necessário calcular mediante a Lei de Coulomb

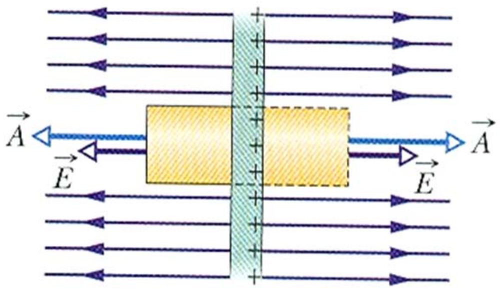
Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

d) Folha Isolante Plana e Infinita Eletricamente Carregada

Densidade de carga σ por unidade de área uniforme



(a)


(b)

- $\vec{E} \perp$ plano folha, direção $\vec{E}$ oposta em cada face.
- Cilindro reto equidistante do plano.
- $\vec{E}$ // superfície cilíndrica $S \Rightarrow \Phi_{sup}=0$
- Φ para fora, de cada base do cilindro $\Rightarrow \Phi = E \cdot A$ $\left(\vec{E} \perp base\right)$
- Fluxo total $\Rightarrow \Phi_{total}=2EA$
- E ≠ E(r) (não depende de r: a qualquer distância do plano o campo é uniforme)

$$\boxed{\Phi = 2EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2\boldsymbol{\varepsilon}_0}}$$

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

Universidade do Minho

2.4. Condutores em Equilíbrio Eletrostático

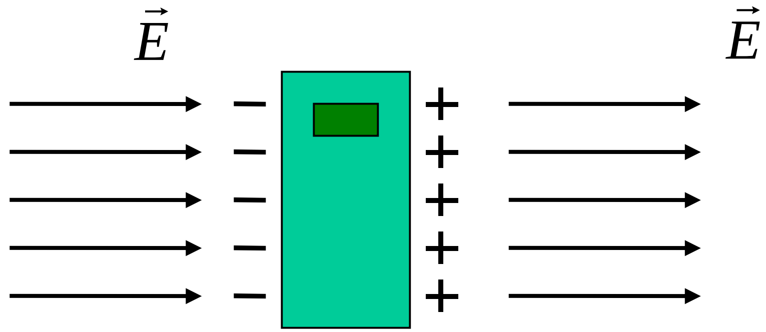
- Um bom **condutor elétrico** (ex: cobre) contém cargas (e^-) que não estão ligadas a nenhum átomo e podem deslocar-se no seu interior.
- **Condutor em equilíbrio eletrostático**: quando não há um movimento líquido de cargas no interior do metal.

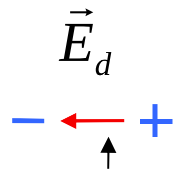
Propriedades de um condutor em equilíbrio eletrostático:

1. O campo elétrico é nulo em qualquer ponto no interior do condutor.
2. Qualquer excesso de carga, num condutor isolado, deve estar, necessária e inteiramente, na superfície do condutor.
3. O campo elétrico na face externa (extremidade) da superfície de um condutor é perpendicular à superfície do condutor e tem o módulo igual a $\mathbf{E=\sigma/\varepsilon_0}$, onde σ é **densidade a carga por unidade de** área no ponto da superfície.
4. Num condutor com forma irregular, a carga tende a acumular-se nos locais onde o raio de curvatura da superfície é pequeno, isto é, onde a superfície é pontiaguda.

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

Propriedade 1 $\Rightarrow$ Placa condutora num campo elétrico





O campo interno opõe-se ao campo externo

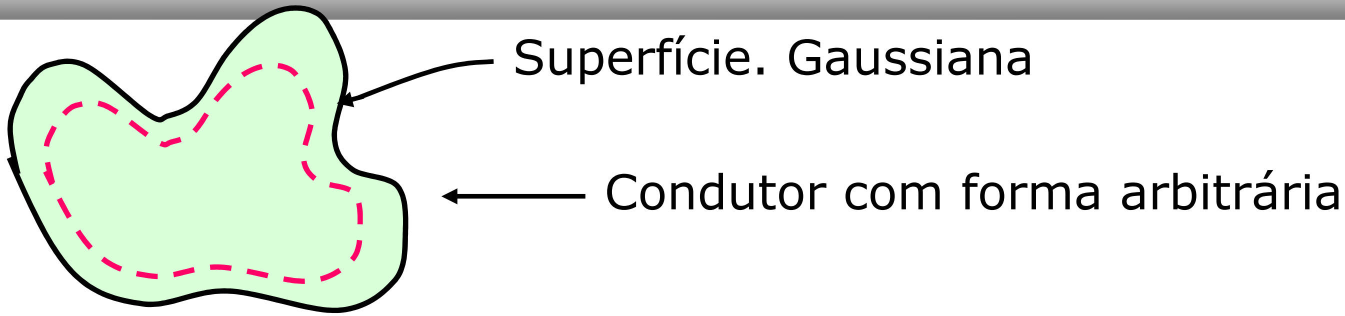
$$\boxed{\vec{E}+\vec{E}_d=\vec{0}}$$ ← No interior do condutor

Bom condutor $\Rightarrow$ equilíbrio em ~ 10^{-16} s (~ instantâneo)

¡! Se $\vec{E}\neq\vec{0}\Rightarrow$ as cargas livres seriam aceleradas.

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

Propriedade 2 ⇒ Lei de Gauss



- (de 1.) $\vec{E} = \vec{0}$ em todos os pontos do interior do condutor
- $\vec{E} = \vec{0}$ em qualquer ponto da Superfície Gaussiana $\Rightarrow$ **Φ=0**
- Lei de Gauss $\Rightarrow$ **q_{in} = 0**

Como não pode haver carga líquida no interior da Superfície Gaussiana que está arbitrariamente próxima da superfície do condutor $\Rightarrow$ qualquer excesso de carga, num condutor, deve estar na superfície do condutor.

A Lei de Gauss não nos diz como o excesso de carga se distribui sobre a superfície (será provado mais a frente).

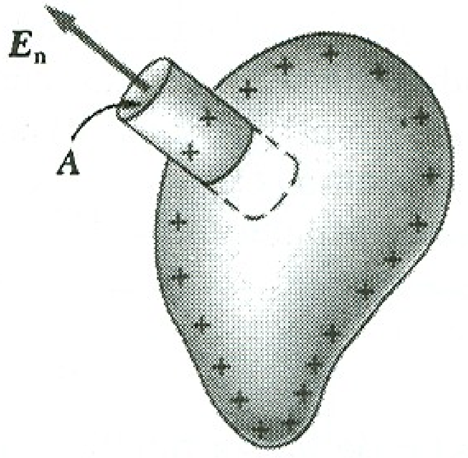
Propriedade 3 ⇒ Lei de Gauss

Considerando uma superfície Gaussiana cilíndrica:

⇒ $\mathbf{\Phi_{superfície}=0}$ (através da superfície cilíndrica)

⇒ **Φ (fluxo líquido) = $\mathbf{E_n \cdot A}$** (através da base)

campo elétrico na face externa perpendicular à superfície.



Lei de Gauss: $$\boxed{\Phi = \oint E_n dA = E_n A = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}}$$

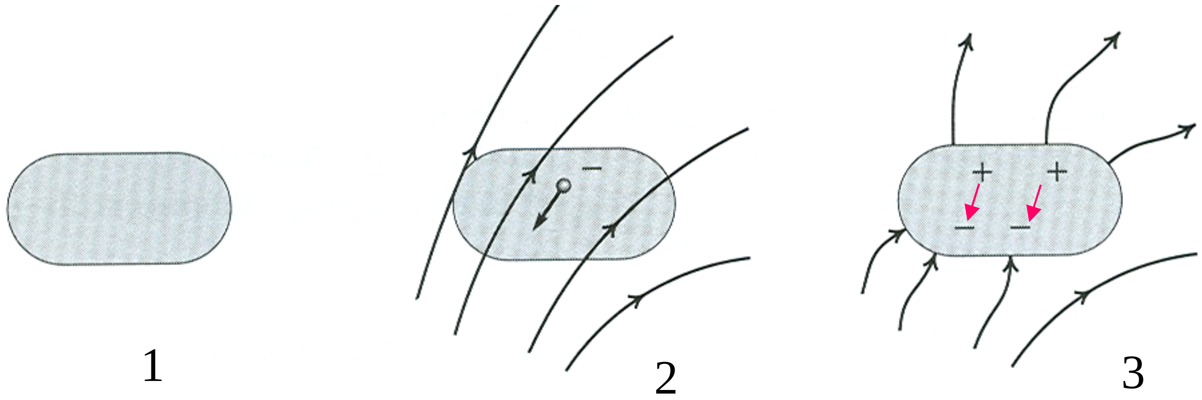
$$\boxed{q_{in} = \sigma A}$$

Carga (local) por Unidade de área

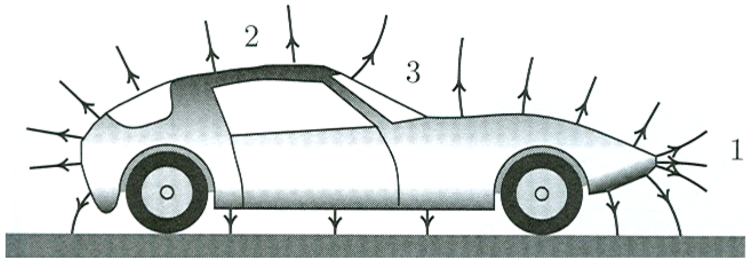
Área da base do cilindro

⇒ $$\boxed{E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Propriedade 4 $\Rightarrow$ Lei de Gauss: relacionar o campo elétrico sobre a face externa da superfície de um condutor em equilíbrio com a distribuição de carga no condutor à <u>superfície</u>.



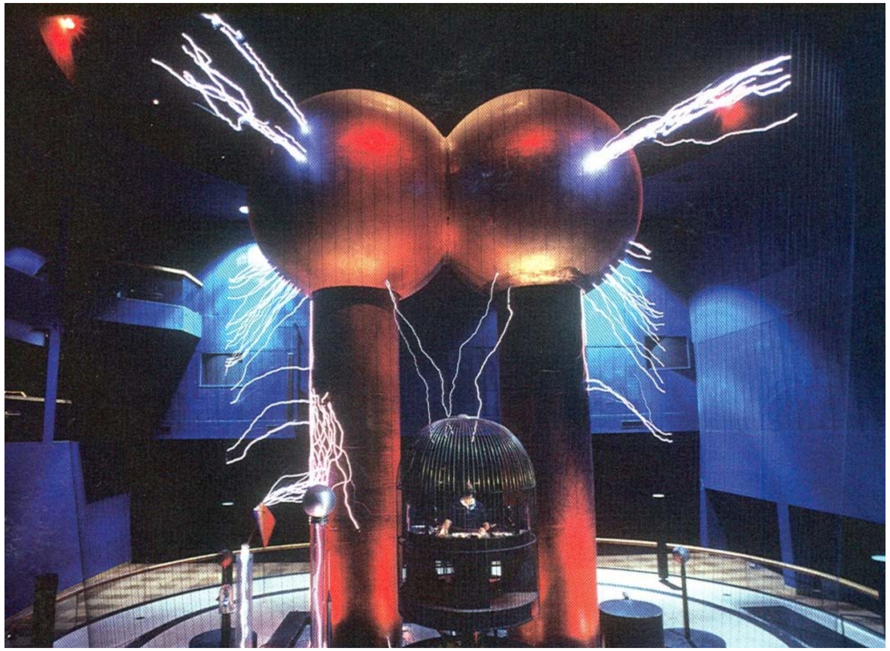
A introdução de um campo externo num condutor sem carga (1) produz deslocamento dos eletrões livres (2) de modo a que a carga induzida na superfície anule o campo no interior do condutor (3)



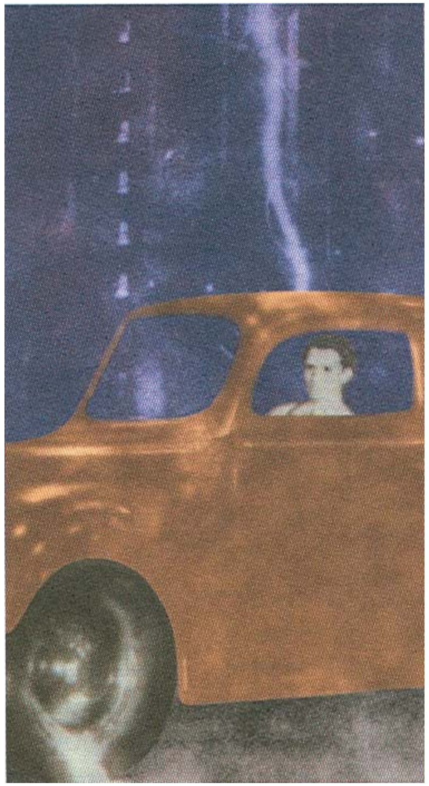
- $\vec{E}$ interior $\Rightarrow$ $\Phi = 0$ ($q_{in}=0$) através da superfície gaussiana interior.
- $\vec{E}$ perpendicular à superfície (se $\vec{E}$ tivesse uma componente tangencial, as cargas livres deslocar-se-iam sobre a superfície, criariam correntes, e o condutor não estaria em equilíbrio).

Carlos Tavares - Depto. Física - Universidade do Minho

Exemplo (Gaiola de Faraday)



Gaiola de Faraday. Os corpos dentro da gaiola condutora isolada estão protegidos dos raios externos, mesmo ao tocarem a parte interior da gaiola. Este fenómeno é chamado de blindagem eletrostática.



Os passageiros de automóveis e aviões ficam protegidos dos raios em dias de tempestade, dado estarem isolados da terra.

Exemplo (Gaiola de Faraday) ⇒ Como funciona?

A gaiola de Faraday consiste numa blindagem elétrica que é conseguida ao criarmos uma superfície oca feita com uma rede ou malha metálica, isolada da terra. No caso da gaiola da página anterior, a cavidade ocupa a maior parte do volume do material. Se a rede ou malha metálica for relativamente fina, as cargas poderão se espalhar uniformemente na superfície externa da gaiola. Esta estrutura previne que sinais elétricos muito fortes, por exemplo provenientes de um relâmpago, criem campo elétricos muito intensos dentro da gaiola.

Isto é conseguido pelo facto que de o campo elétrico externo induzir a mobilidade de cargas na superfície da gaiola cujo campo elétrico vai cancelar o campo elétrico externo no interior da superfície da gaiola. Este fenómeno elétrico ocorre naturalmente e está previsto pela Lei de Gauss. Deste modo um demonstrador dentro da gaiola não sofre qualquer choque elétrico ao tocar a superfície interna quando esta é atingida por uma descarga elétrica proveniente de um raio.

É precisamente este princípio que faz com que os viajantes de um automóvel ou de um avião permaneçam em segurança em condições adversa de tempestades elétricas.

Exemplo (balde de Faraday)

A figura seguinte mostra outra experiência de Faraday relacionada com o equilíbrio eletrostático de um material condutor. Ao aproximarmos uma esfera metálica carregada positivamente de um balde de forma circular, que se encontra eletricamente isolado (a), verificamos que ocorre um desvio no ponteiro do eletrómetro ligado ao balde quando a esfera se encontra no seu interior (b). A deflexão no ponteiro deve-se ao facto que a carga positiva da esfera induzir uma carga negativa (atracão) na superfície interna do balde e uma distribuição de carga positiva (repulsão) na superfície externa do balde. Faraday constatou que o ponteiro não se desviou mais, mesmo quando a esfera tocou no fundo do balde (C) e quando foi retirada do balde (d). Contudo constatou que após retirar a esfera do balde esta encontrava-se agora descarregada. Aparentemente, quando a esfera tocou no fundo do balde houve uma passagem de uma quantidade de carga negativa, do balde para a esfera, exatamente igual à quantidade de carga positiva que se encontrava na esfera, logo ficando eletricamente neutra (equilíbrio eletrostático). O balde ao perder a carga negativa ficou só com uma quantidade de carga positiva exatamente igual à que a esfera possuía.