7.4. Sobreposição de dois MHS (ou interferência)

Se uma partícula é simultaneamente sujeita a duas (ou mais) forças o movimento resultante pode ser analisado como a soma dos dois (ou vários) movimentos.

Se as forças forem do tipo: $\vec{F}_1 = k_1\vec{x}$ e $\vec{F}_2 = k_2\vec{x}$

➤

O movimento resultante é a soma de dois movimentos oscilatórios.

➤

Em cada instante:

$$\vec{F}_{\text{resultante}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \\ \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \end{cases}$$

7.4.1. Movimentos com a mesma direcção e frequência

Imaginemos um corpo de massa m que oscila sujeito a duas forças de restituição, que actuam na mesma direcção:

$$F_1 = F_2 = -kx$$

Então o movimento correspondente a cada uma das forças pode ser descrito pelas equações:

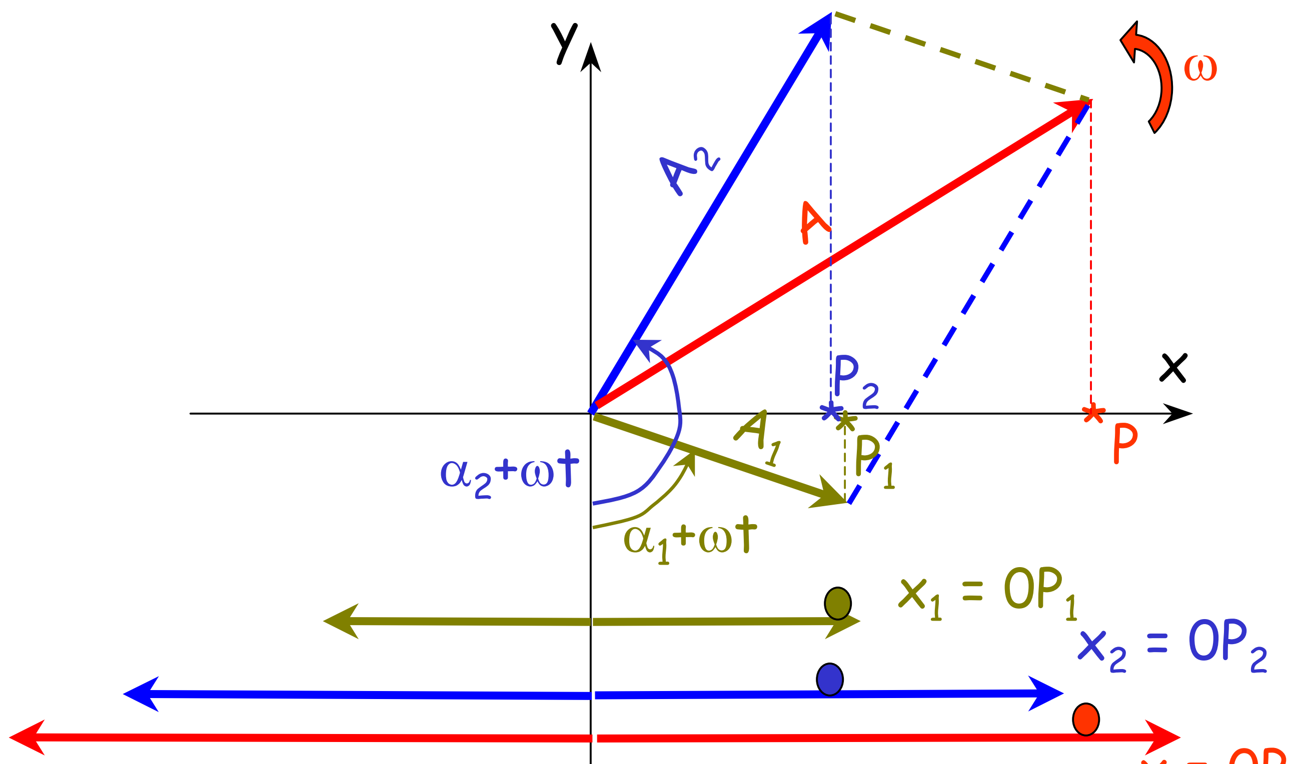
$$\begin{cases} x_1 = A_1 sen(\omega t + \alpha_1) \\ x_2 = A_2 sen(\omega t + \alpha_2) \end{cases}$$

Utilizando a analogia do vector girante, podemos representar cada um dos movimentos por um vector, x_1 e x_2, de módulo A_1 e A_2 a amplitude do movimento e que gire em torno da origem com velocidade $\underline{\omega}$.

O movimento resultante da sobreposição destes dois movimentos será representado pela soma dos dois vectores x_1 e x_2.

Movimentos com a mesma direcção e frequência

Utilizando a analogia do vector girante:



Movimentos com a mesma direcção e frequência

A equação do movimento resultante será: $x(t) = Asen(\omega t + \alpha)$

em que:

A $\rightarrow$ é a amplitude do movimento resultante, e pela analogia do vector girante:

$$A = \left|\vec{X}\right|,\ \vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2$$

ω $\rightarrow$ é a frequência angular, igual à frequência dos movimentos "simples"

α $\rightarrow$ Fase inicial do movimento resultante; depende de α_1 e α_2.

Da figura, pode-se calcular:

$$A^2 = A_1^2 + A_1^2 + 2A_1A_2\cos\delta,\ \ \delta = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$tg\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}$$

Exercícios

1. Considere as vibrações seguintes: $x_1 = 0.1 sen(0.2t+\alpha_1)$ e $x_2 = 0.1 sen(0.2t+\alpha_2)$

   Determine a amplitude do movimento resultante sabendo que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2,$$

Caso mais simples: $x_1 \ // \ x_2$, $2A_1=A_2$, $\omega_1=\omega_2$, $\phi_1=\phi_2$

$x_1 = 0.1 sen\ (0.2\ t+ \pi/2)$ e $x_2 = 0.1 sen\ (0.2\ t+ \pi/2)$

Então, $X = X_1 + X_2$

$\Leftrightarrow X = 0.1 sen\ (0.2\ t+ \pi/2) + 0.1 sen\ (0.2\ t+ \pi/2)$

$\Leftrightarrow X = (0.1+0.1)\ sen(0.2\ t+ \pi/2)$

$\Leftrightarrow X = 0.2\ sen(0.2\ t+ \pi/2)$

movimento resultante:

amplitude: $A=0.2 = (A_1+A_2)$

frequência: $\omega=\omega_1=\omega_2$

está "em fase" com x_1 e x_2

Exercícios

2. Considere as vibrações seguintes: $x_1 = 0.1sen(0.2t+\alpha_1)$ e $x_2 = 0.1sen(0.2t+\alpha_2)$
Determine a amplitude do movimento resultante sabendo que:

$$\alpha_1 = -\pi/2 \quad e \quad \alpha_2 = \pi/2$$

$x_1 \,//\, x_2$, $A_1=A_2$, $\omega_1 = \omega_2$, $\phi_2-\phi_1 = \pi$

$$x_1 = 0.1sen\,(0.2\,t - \pi/2\,) = 0.1cos\,(0.2\,t)$$

$$x_2 = 0.2sen\,(0.2\,t + \pi/2\,) = -0.1cos\,(0.2\,t)$$

Então: $X = x_1 + x_2 \Leftrightarrow X = 0.1cos(0.2t)-0.1cos(0.2t)$

$$\Leftrightarrow X = 0$$

O movimento resultante tem amplitude nula

Exercícios

3. Considere as vibrações seguintes: $x_1 = 0.1sen(0.2t+\alpha_1)$ e $x_2 = 0.1sen(0.2t+\alpha_2)$

Determine a amplitude do movimento resultante sabendo que:

$$\alpha_1 = 0 \quad e \quad \alpha_2 = \pi/4$$

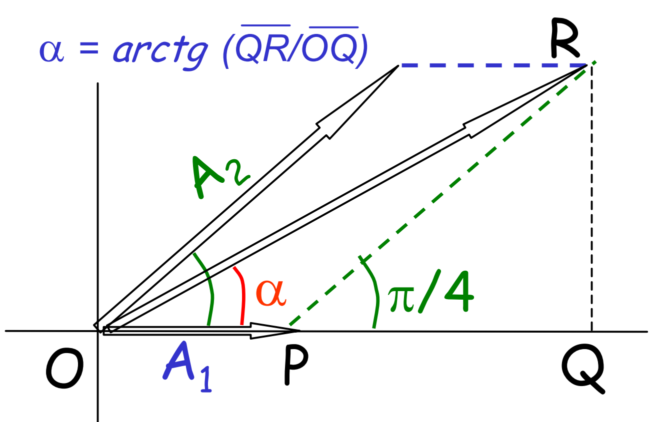
$x_1 // x_2$, $A_1 = A_2$, $\omega_1 = \omega_2$, $\phi_2 - \phi_1 = \pi/4$

$$x_1 = 0.1sen(0.2\,t) \quad e \quad x_2 = 0.1sen(0.2\,t + \pi/4)$$

Vamos utilizar a analogia do vector girante:

O movimento resultante ($\vec{X} = \vec{OR}$) pode ser visto como o vector resultante da soma dos vectores que representam $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$:

$\alpha = arctg\,(\overline{QR}/\overline{OQ})$



$$|X| = \overline{OR}, \text{ mas } \overline{OR}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QR}^2$$

$$\overline{OQ} = A_1 + A_2\cos(\pi/4) = 0.241$$

$$\overline{QR} = A_2\sin(\pi/4) = 0.141$$

$$\overline{OR}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\pi/4)$$

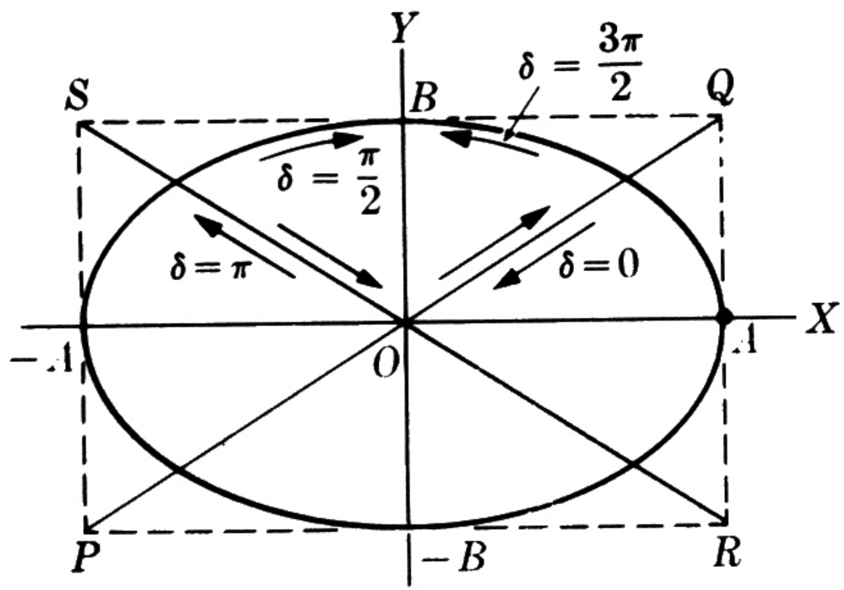
$/X/ = OR = 0.280$

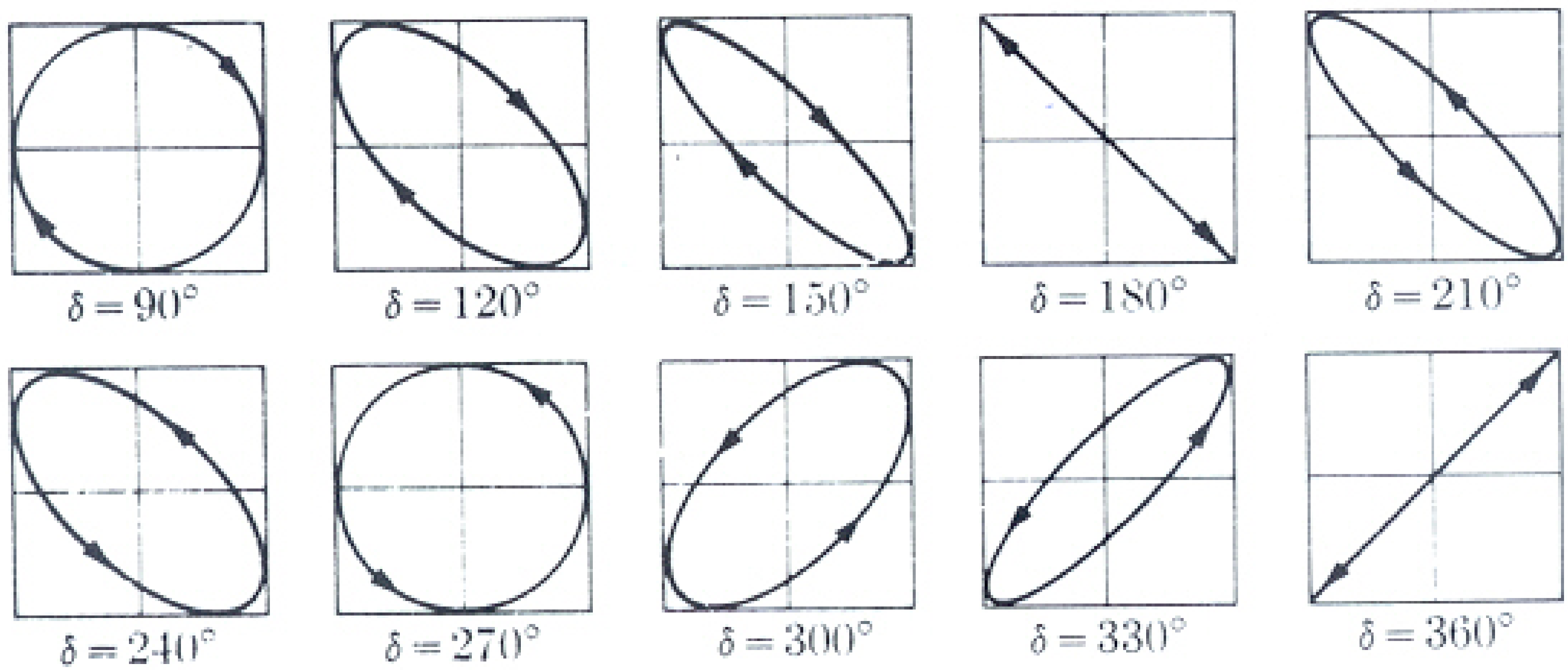
$\alpha = 30.36° \approx \pi/6$ rad

7.4.2. Interferência de dois MHS perpendiculares

Consideremos o caso de uma partícula que se move no plano de forma a que as suas coordenadas x e y oscilam com MHS.

Suponhamos então: $x = A.\cos(\omega t)$ e $y = B.\cos(\omega t + \delta)$




$\delta = 90°$
$\delta = 120°$
$\delta = 150°$
$\delta = 180°$
$\delta = 210°$
$\delta = 240°$
$\delta = 270°$
$\delta = 300°$
$\delta = 330°$
$\delta = 360°$

Interferência de dois MHS perpendiculares

Exercício

Determine o movimento resultante das seguintes vibrações:

$$x(t) = 0.1\,\mathrm{sen}(0.2t + \pi/2) \quad \text{e} \quad y(t) = 0.2\,\mathrm{sen}(0.2t - \pi/2)$$

A equação do movimento resultante será:

$$R(t) = [0.1\,\mathrm{sen}(0.2t+\pi/2)]\,\boldsymbol{i} + [0.2\,\mathrm{sen}(0.2t - \pi/2)]\,\boldsymbol{j}$$

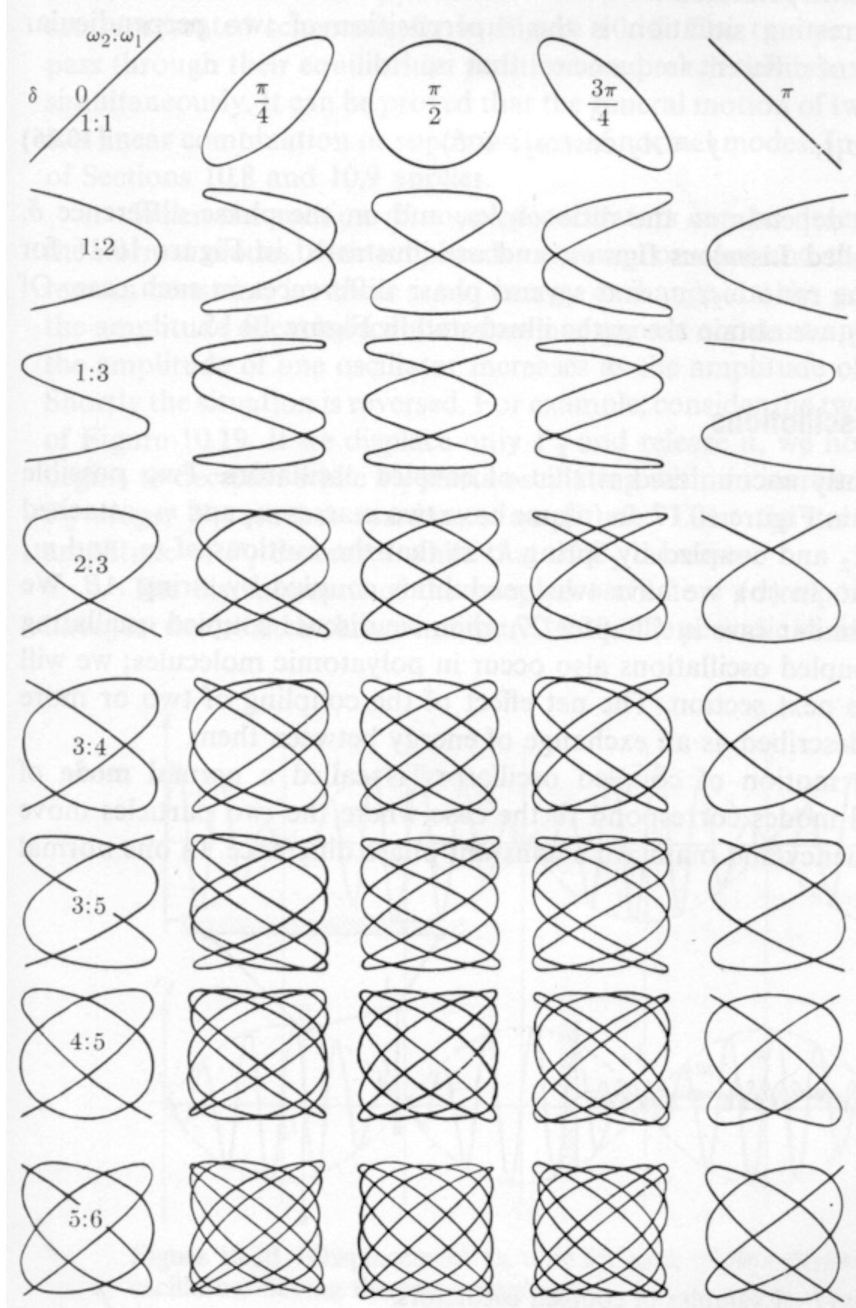
mas:

$$x(t)=0.1\mathrm{sen}(0.2t + \pi/2) = -0.1\cos(0.2t)$$

$$y(t)=0.2\mathrm{sen}(0.2t - \pi/2) = 0.2\cos(0.2t)$$

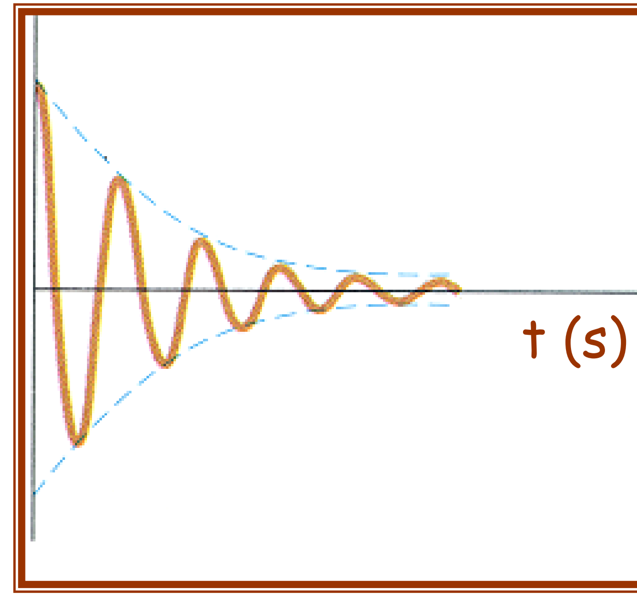
então:

$$\frac{y}{x} = -\frac{0.1}{0.2} \Leftrightarrow y = -2x \quad \Rightarrow \quad \text{A trajectória é uma recta}$$


$\omega_2:\omega_1$
δ
0
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
1:1
1:2
1:3
2:3
3:4
3:5
4:5
5:6

7.5. Oscilações amortecidas

No movimento harmónico simples até agora descrito as oscilações têm uma amplitude constante, e portanto o movimento mantém-se indefinidamente. No entanto a experiência diz-nos que, num corpo que oscila, a amplitude decresce gradualmente com o tempo até este parar, isto é, as oscilações são amortecidas.



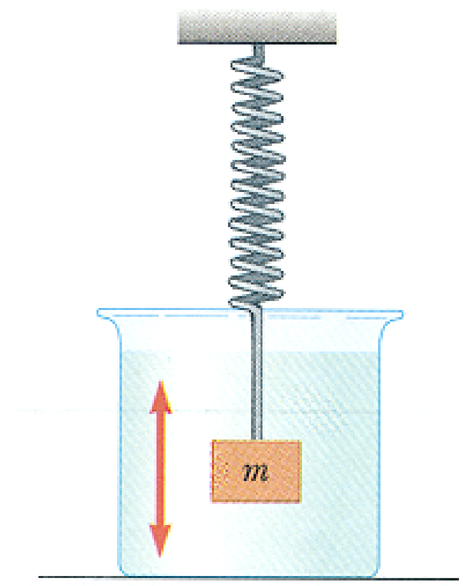
Este amortecimento, como se sabe, é devido a forças de atrito que se opõem ao movimento e que gradualmente degradam a amplitude das oscilações.

Um corpo que se desloque dentro de um fluido (um gás ou um líquido) sofre uma força de viscosidade (uma força de atrito) que, para velocidades relativamente baixas, se verifica que é proporcional à velocidade. Vamos assim tomar uma força de atrito da forma: $\boldsymbol{F_a = -\lambda . v}$.

Oscilações amortecidas

Força resultante:

$$\boldsymbol{R = F_e + F_a} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{m.a = -\,k.x - \lambda.v}$$



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

em que se fez $2\gamma = \lambda/m$ e $\omega_0^2 = k/m$

Oscilações amortecidas

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

A solução desta equação conduz a diferentes resultados, conforme a relação entre γ e ω_0. Temos:

$$\begin{cases} \gamma < \omega_0: & \textit{amortecimento fraco} \\ \gamma = \omega_0: & \textit{amortecimento critico} \\ \gamma > \omega_0: & \textit{amortecimento forte} \end{cases}$$

7.5.1. Amortecimento crítico e forte

Amortecimento forte: $\gamma > \omega_0$ $\Rightarrow$ $x = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$

Em que: $s_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ **< 0**

Amortecimento crítico: $\gamma = \omega_0$ $\Rightarrow$ $x = \left(C_1 + C_2 t\right) e^{-\omega_0 t}$

Em ambas estas situações *o sistema não oscila*.

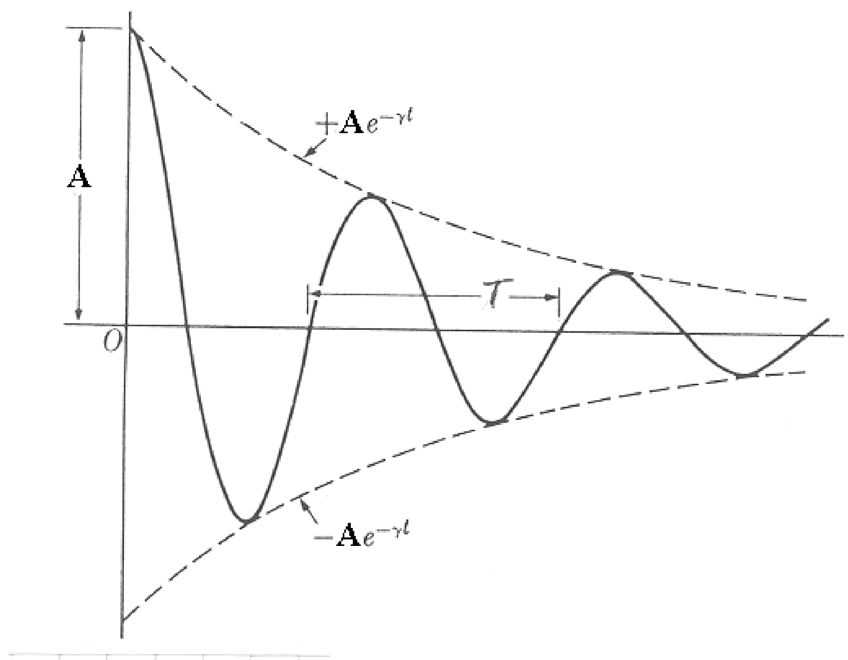
Os sistemas criticamente amortecidos são de particular interesse, pois readquirem, sem oscilar, o equilíbrio no mais curto espaço de tempo.

7.5.2. Amortecimento fraco

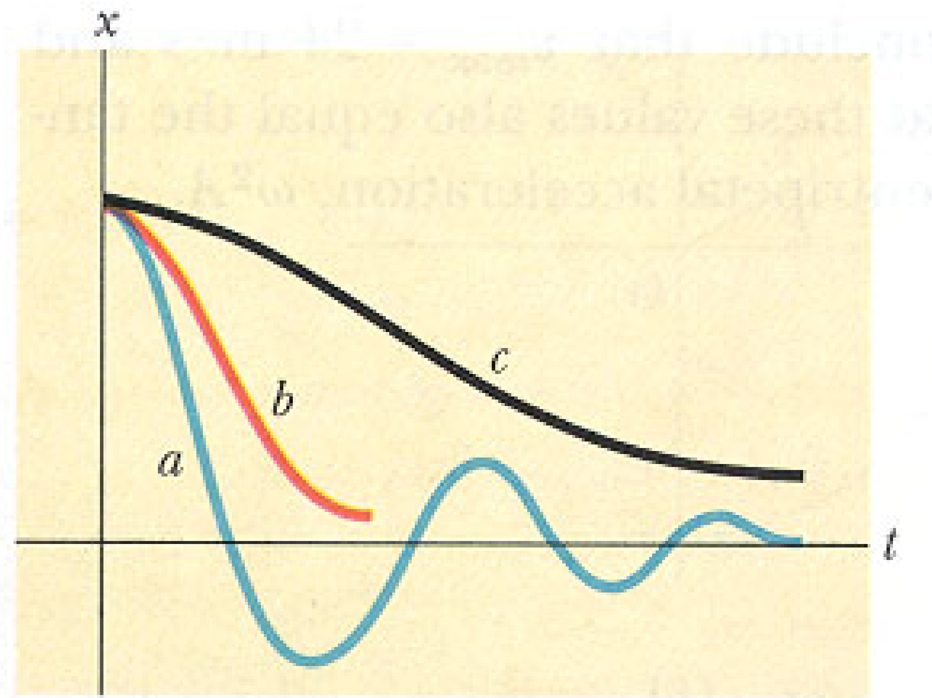
Neste caso temos uma solução do tipo:

$$x = A.e^{-\gamma t}.sen(\omega.t + \phi)$$

Com: $$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{k/m - \lambda^2/4m^2}$$



Oscilações amortecidas



(a) - amortecimento fraco
(b) - amortecimento critico
(c) - amortecimento forte

7.5.3. Energia do oscilador amortecido

Amortecimento fraco: $x = A_0 . e^{-\gamma t} . sen(\omega . t + \phi)$

A amplitude diminui porque o sistema "perde" energia para o exterior (atrito).

A energia do oscilador é proporcional à amplitude, então a energia (média, por ciclo) pode ser calculada por:

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \left[A_0 e^{-\gamma t} \right]^2$$

ou: $E = E_0 e^{-2\gamma t}, \quad em\ que: \ E_0 = \frac{1}{2} m\omega^2 A_0^2$ $\boxed{\text{constante}}$

7.6. Oscilações forçadas

No "mundo real" as oscilações são amortecidas - o sistema que oscila transfere energia para o meio em redor. Embora seja impossível evitar que o sistema "perca" energia para o exterior, pode-se compensar esse efeito fornecendo energia ao sistema.

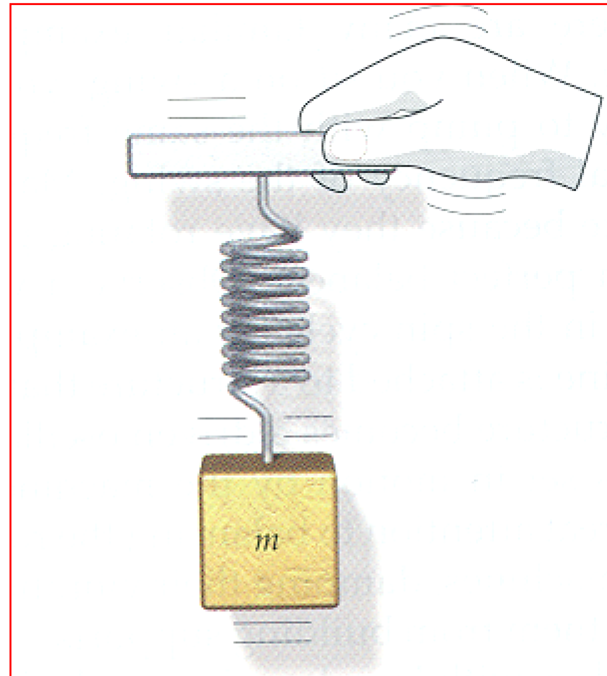
Na figura, as crianças conseguem manter o movimento com a mesma amplitude à custa da sua própria energia bioquímica.

Oscilações forçadas

Para que um sistema se mantenha a oscilar, é necessário fornecer energia ao sistema - dizemos neste caso que o **sistema é forçado**.

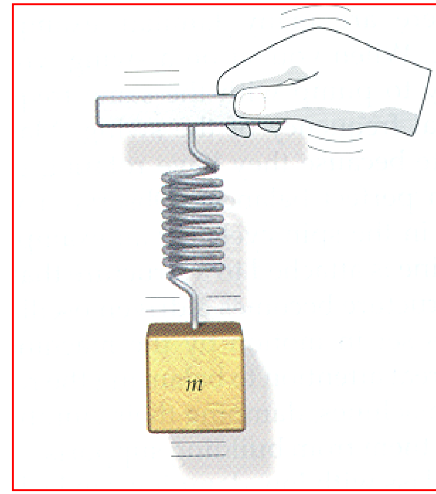
Por exemplo, quando num baloiço uma criança balança o corpo, fornece energia ao baloiço para que ele continue a oscilar.

Se a energia for fornecida à mesma taxa da energia perdida, a amplitude mantém-se constante.



Na figura, o movimento periódico da mão fornece energia ao sistema.

Oscilações forçadas



Se a força exterior tiver a expressão:

$$F = F_0 \cos(\omega_f t)$$

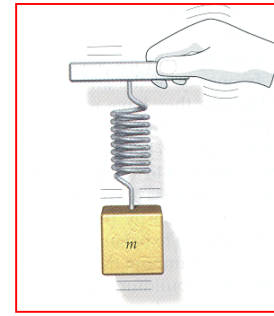
a equação diferencial do movimento é:

$$-kx - \lambda \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega_f t) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{\lambda}{m}}_{2\gamma}\frac{dx}{dt} + \overbrace{\frac{k}{m}}^{\omega_0^2} x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)}$$

Oscilações forçadas

Se o regime estacionário for atingido o sistema passa a oscilar com uma amplitude A e uma frequência igual à da força aplicada.



No regime estacionário, a equação do movimento é:

$$x = Asen(\omega_f t - \varphi)$$

Em que ω_f é a frequência da força exterior, e a amplitude e a fase inicial são dadas por:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_f\right)^2}}$$

e

$$tg\phi = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2.\gamma.\omega_f}$$

7.6.1. Oscilações forçadas - Ressonância

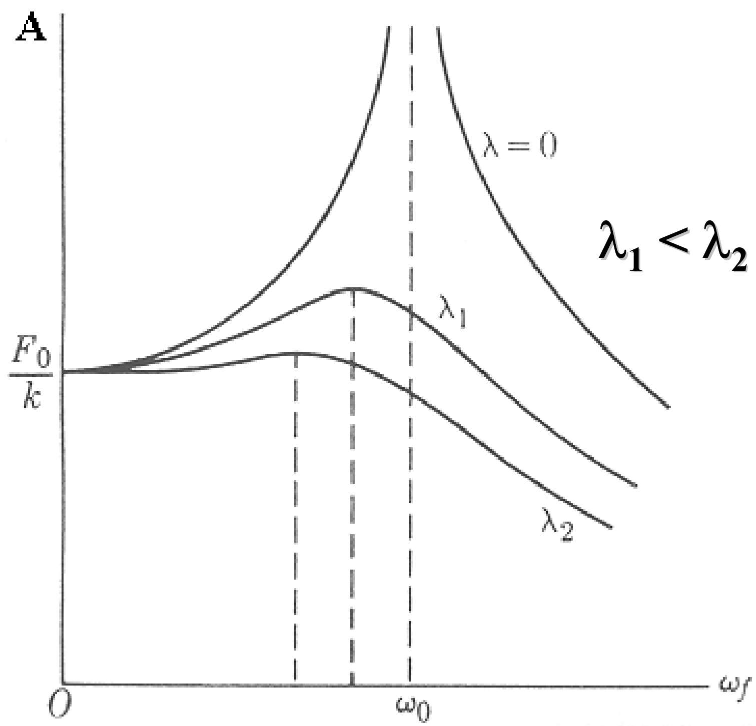
$$\boxed{A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_f\right)^2}}}$$

Esta amplitude apresenta um máximo quando o denominador é mínimo, o que ocorre para uma frequência:

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{2m^2}}$$

Quando a frequência da força aplicada é igual a ω_A ($\omega_f = \omega_A$) dizemos que há ***ressonância na amplitude***.

Oscilações forçadas - Ressonância



Quanto mais pequeno for o amortecimento, isto é, λ, maior é o valor da amplitude na ressonância, divergindo ($A \to \infty$) quando não existe amortecimento ($\lambda = 0$), caso em que

$$\omega_A = \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Oscilações forçadas - Ressonância (Energia)

Para fazer a análise da energia deste movimento é necessário analisar a sua velocidade, pois esta está directamente ligada à energia cinética da partícula. A velocidade é dada por

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_f \, . A.cos\left(\omega_f t - \phi\right) = v_0 \, cos\left(\omega_f t - \phi\right)$$

ϕ representa a diferença de fase entre a velocidade e a força aplicada.

$$v_0 = \omega_f A = \frac{\omega_f \, F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{\left(m\omega_f - k/\omega_f\right)^2 + \lambda^2}}$$

Oscilações forçadas - Ressonância (Energia)

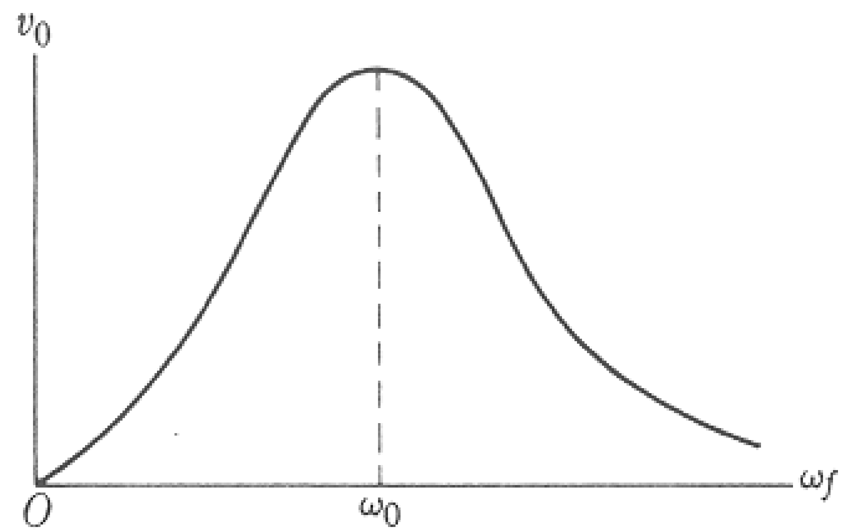
Amplitude máxima da velocidade quando o denominador for mínimo, o que ocorre quando

$$m.\omega_f - k/\omega_f = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_f = \sqrt{k/m} = \omega_0$$

Neste caso a velocidade é máxima e a energia cinética $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ também será. De notar também que neste caso

$$tg\phi = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2.\gamma.\omega_f} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi = 0$$

Oscilações forçadas - Ressonância (Energia)

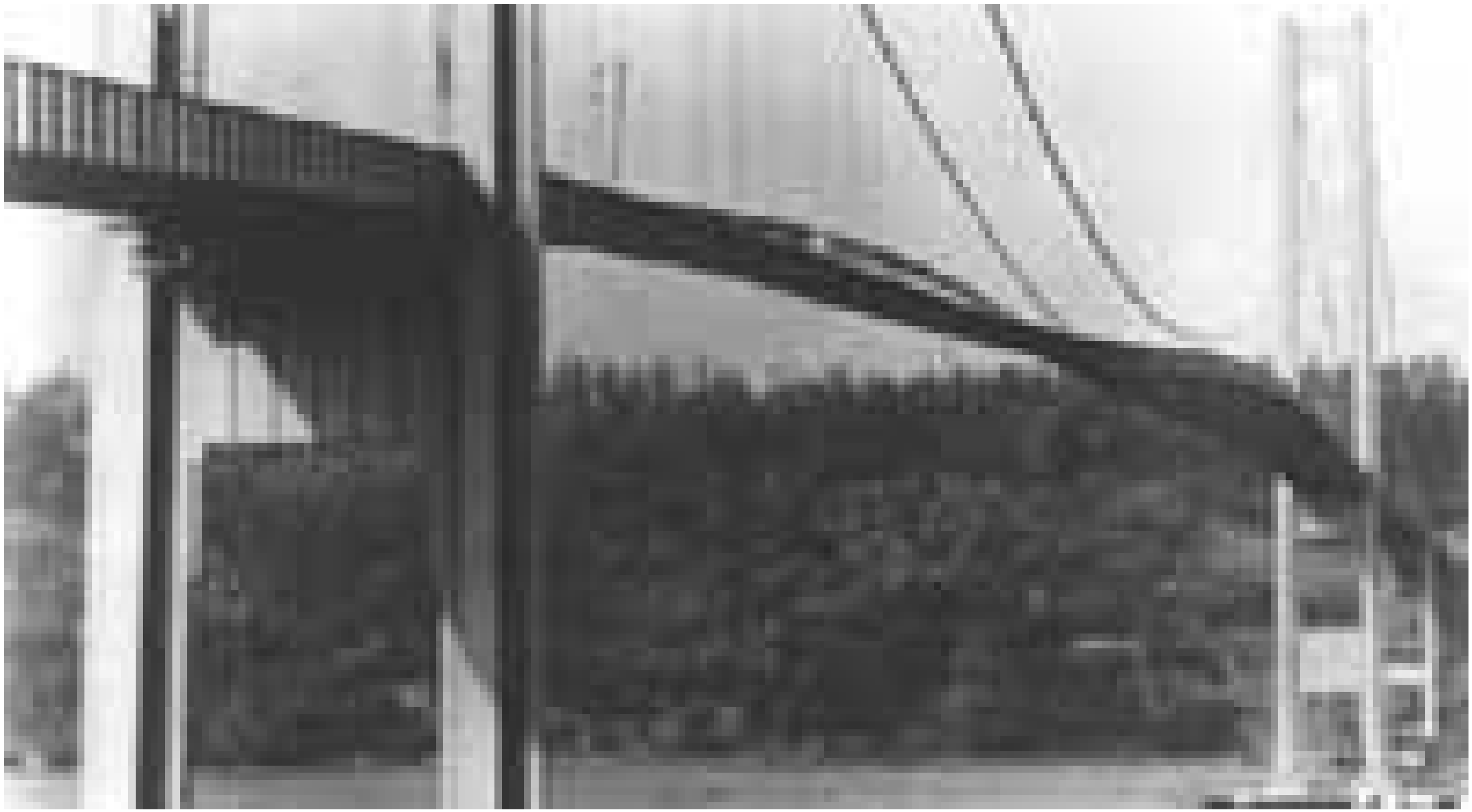


Nesta situação dizemos que há ***ressonância na energia***, isto é, a transferência de energia para o sistema é máxima nesta situação.

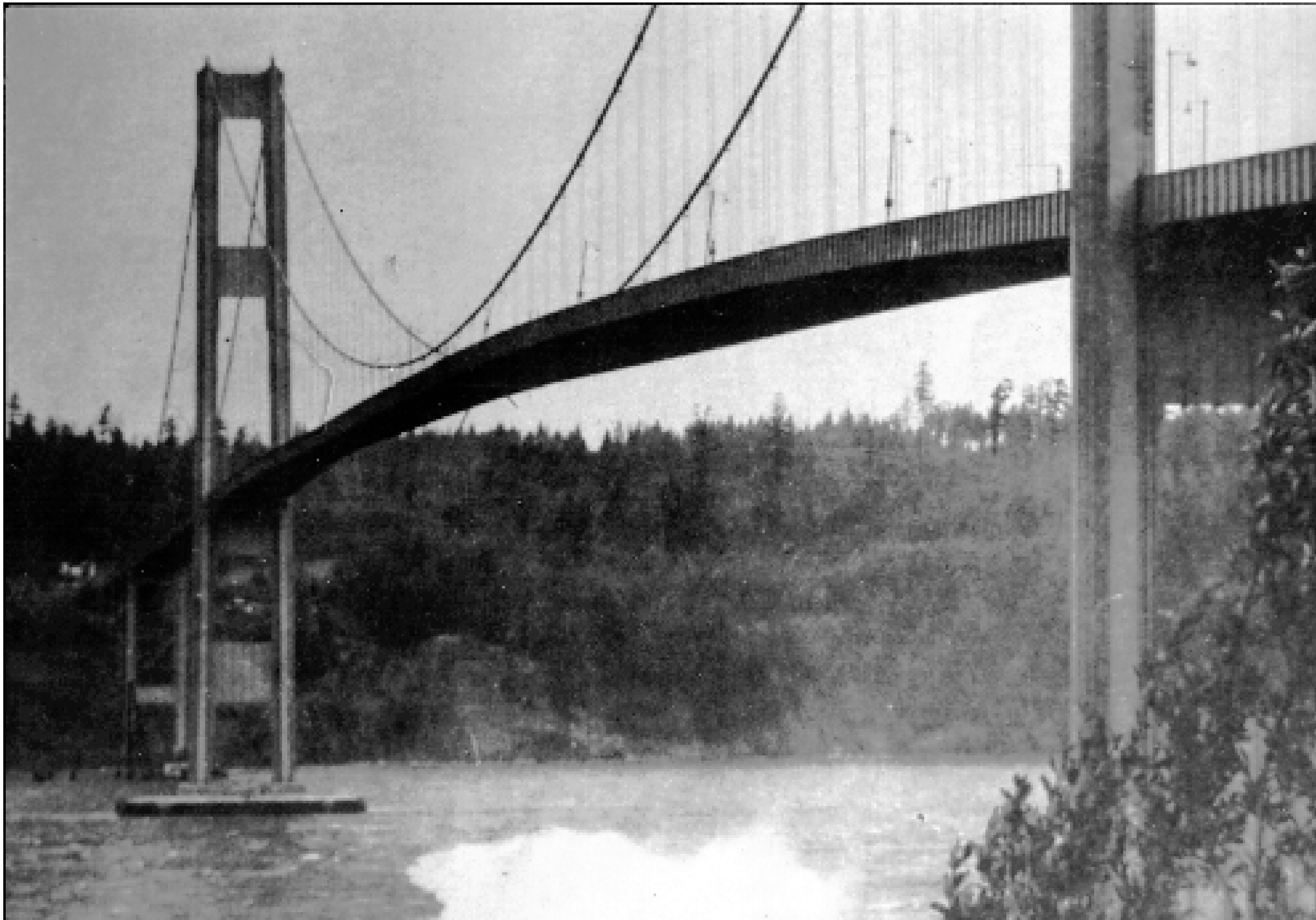
Ressonância - Queda da ponte de Tacoma

Ressonância – Queda da ponte de Tacoma

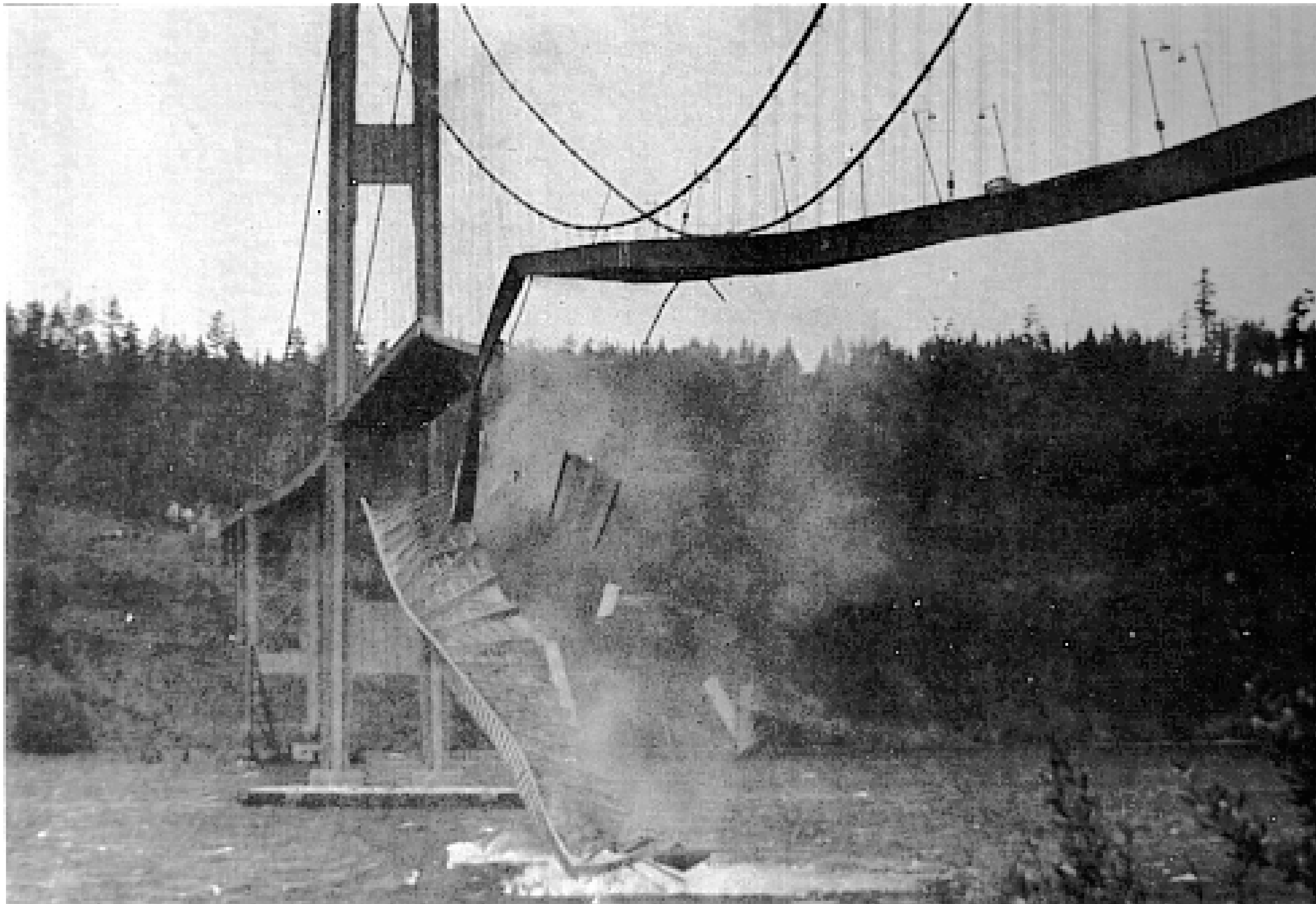
Ressonância – Queda da ponte de Tacoma



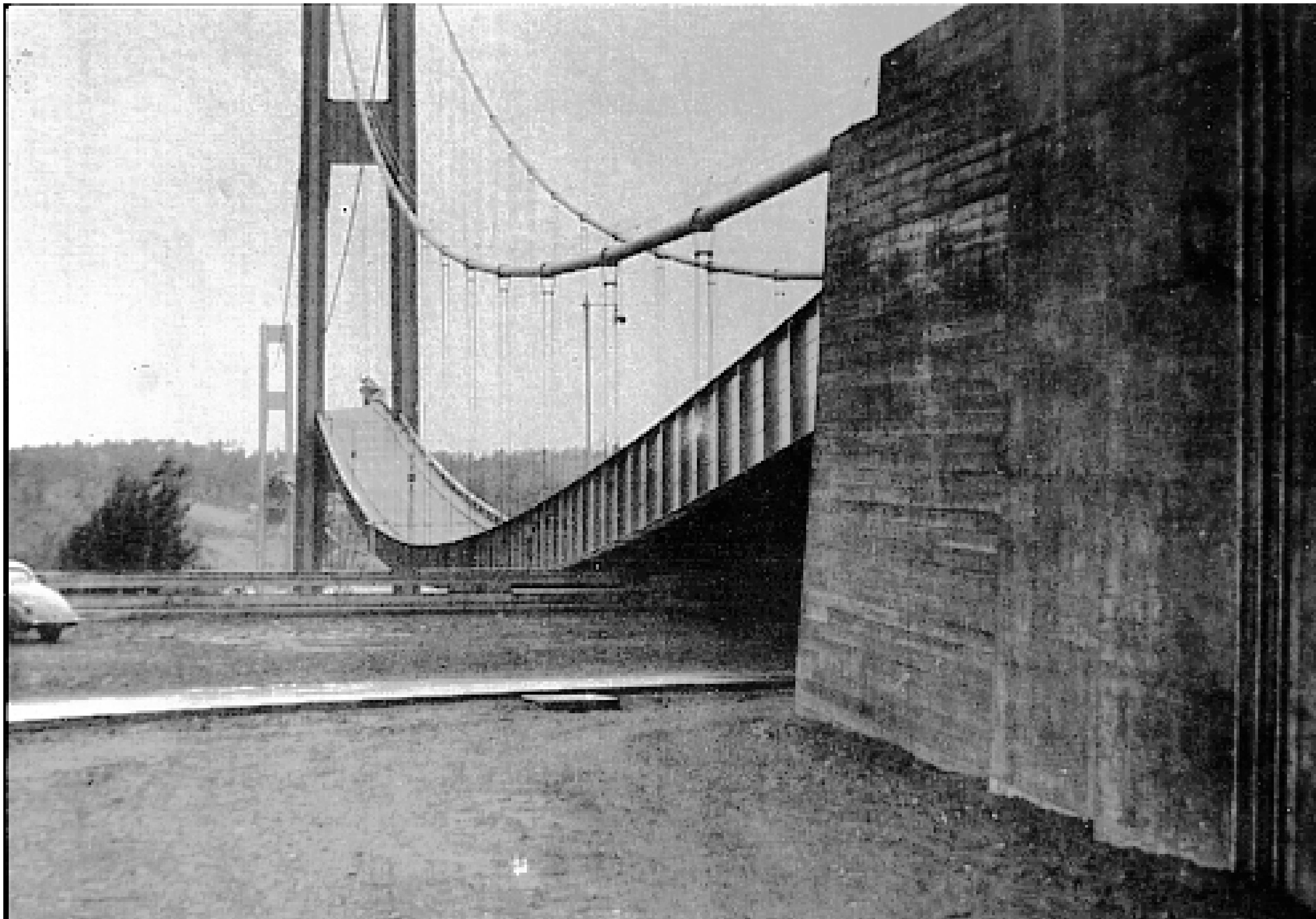
Ressonância – Queda da ponte de Tacoma



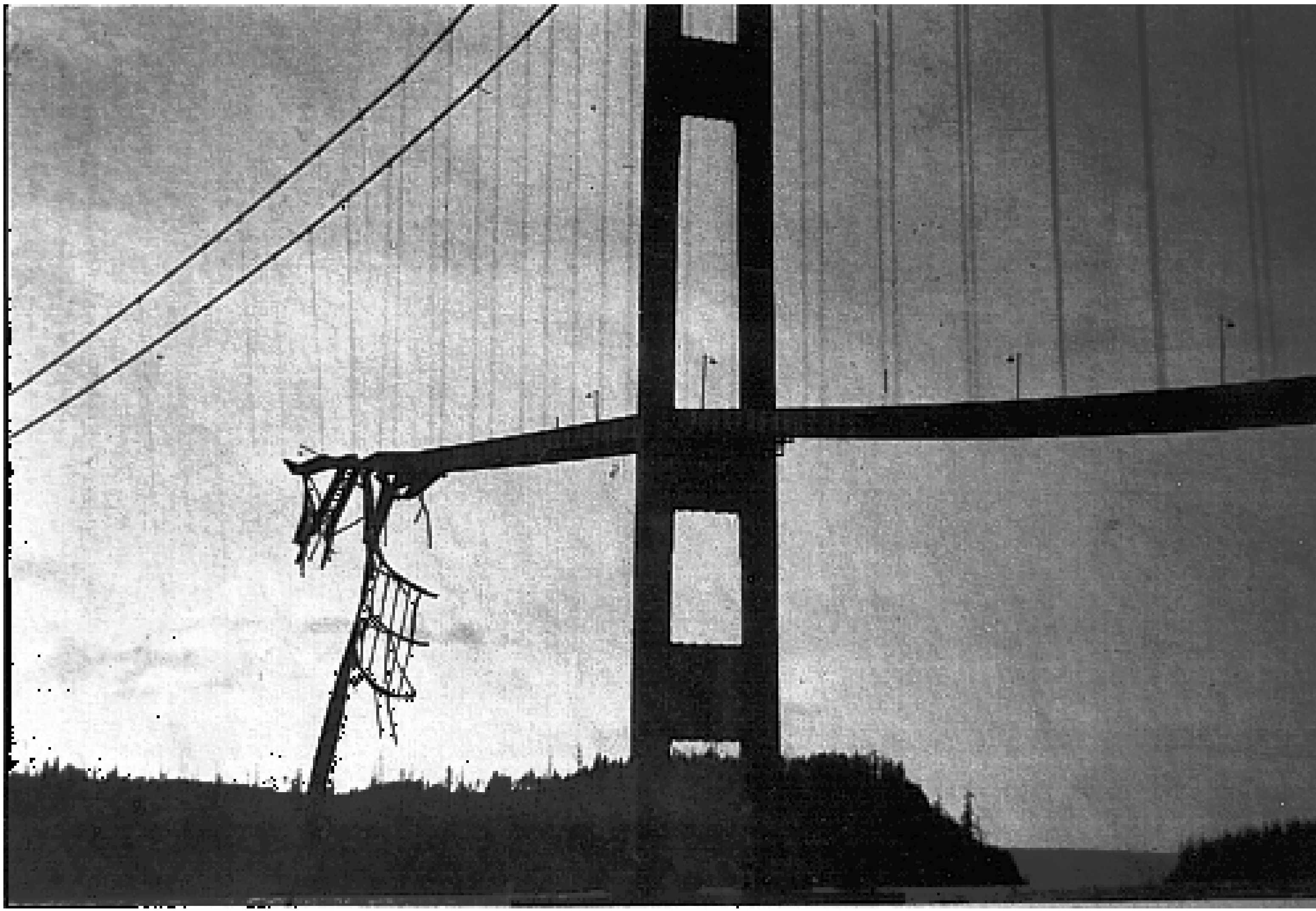
Ressonância – Queda da ponte de Tacoma



Ressonância – Queda da ponte de Tacoma



Ressonância - Queda da ponte de Tacoma



Ressonância - Queda da ponte de Tacoma

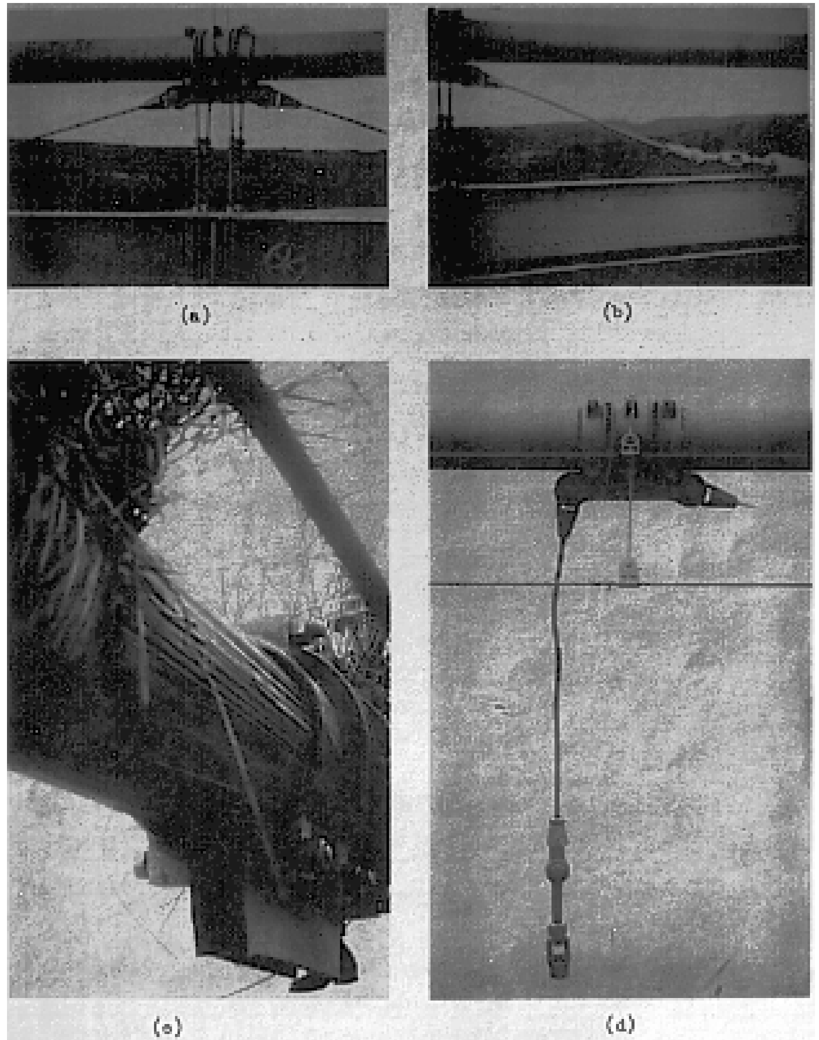
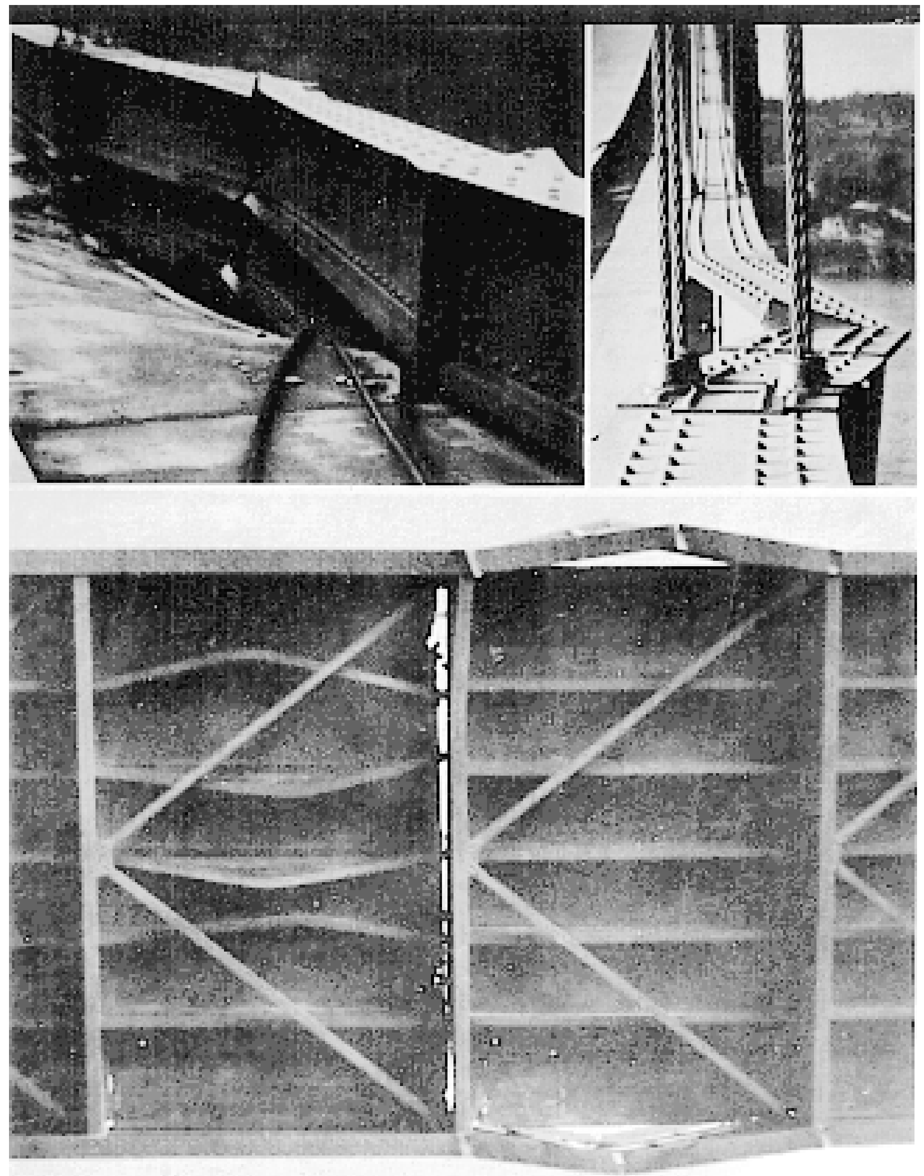


Fig. 6. Center Ties. (a) and (b) are of north cable taken at 9:30 A.M. on day of failure. (b) shows slackness of diagonal ties. (c) center of north cable after failure. About 500 wires are cut and longitudinal movement had amplitude of about 3-1/2 ft. Note missing bolts. (d) south cable after failure.

Ressonância - Queda da ponte de Tacoma



Ressonância – Queda da ponte de Tacoma