

Duração: 90 minutos

Teste de Análise Matemática EE - versão C

Nome: _____ Nr.: _____ Curso: _____

GRUPO I (7 valores)

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correcta no quadrado correspondente. Cada resposta correcta vale 1 valor.

1. Considere a função real $f(x, y) = xy - 5 \ln x$. Então f satisfaz a relação:

☐ $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

☐ $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

☐ $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - x \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

☐ $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

☐ Nenhuma das anteriores.

2. Considere a função real $f(x, y)$ definida e diferenciável no seu domínio. A função gradiente de f é dada por:

☐ $\vec{\nabla} f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

☐ $\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$

☐ $\vec{\nabla} f(x, y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$

☐ $\nabla f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

☐ Nenhuma das anteriores.

3. Considere a função real $f(x, y)$ definida e diferenciável no seu domínio. A taxa de variação de f no ponto (x_0, y_0) do seu domínio, na direção do vetor \vec{u} é dada por:

☐ $D_{\vec{u}/\|\vec{u}\|} f(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(\vec{u}) \cdot (x_0, y_0)$

☐ $D_{\vec{u}/\|\vec{u}\|} f(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

☐ $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0)$

☐ $D_{(x_0, y_0)} f(\vec{u}/\|\vec{u}\|) = \vec{\nabla} f(\vec{u}) \cdot (x_0, y_0)$

☐ Nenhuma das anteriores.

4. Considere a função real dada $f(x, y) = xy^2$ onde $x = t + \ln t^2$ e $y = e^t u$, com $t \neq 0$. A expressão de $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ é:

☐ $2xe^{2t}$

☐ $2u[e^{2t}(t + \ln t^2)]$

☐ $2e^{2t}xy$

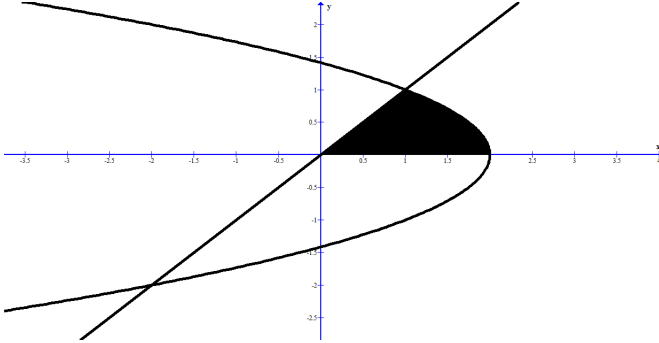
☐ $2e^{2t} \frac{\partial y}{\partial u}$

☐ Nenhuma dos anteriores.

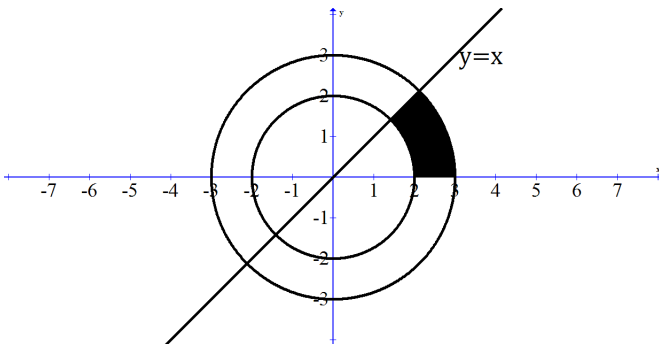
5. Seja $f(x, y) = \sin x + \cos y$. O polinómio de Taylor de grau 2 da função f na vizinhança do ponto $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$ é:

- ☐ $P_2(x, y) = 2 + x + y - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 - (y + \frac{\pi}{4})^2$
- ☐ $P_2(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}[x + y + (x - \frac{\pi}{4})^2 + (y + \frac{\pi}{4})^2]$
- ☐ $P_2(x, y) = x + y + (x - \frac{\pi}{4})^2 + (y + \frac{\pi}{4})^2$
- ☐ $P_2(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}[2 + x + y - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{2}(y + \frac{\pi}{4})^2]$
- ☐ Nenhum dos anteriores.

6. Considere o integral duplo $\iint_R dA$ definido na região sombreada na figura abaixo, limitada pelas curvas $y = x$ e $x = 2 - y^2$. Qual dos seguintes integrais iterados representa o integral duplo?



- ☐ $\int_0^2 \int_x^{2-x^2} dy dx$
- ☐ $\int_0^1 \int_y^{2-y^2} dx dy$
- ☐ $\int_0^2 \int_0^{2-x^2} dy dx$
- ☐ $\int_0^1 \int_0^{2-y^2} dx dy$
- ☐ Nenhum dos anteriores.
7. Considere a região sombreada na figura abaixo. A área da região sombreada é dada no seguinte integral iterado em coordenadas polares:



- ☐ $\int_2^3 \int_0^r r. d\theta dr$
- ☐ $\int_2^3 \int_0^{\pi/4} d\theta dr$
- ☐ $\int_2^3 \int_0^{\pi/4} r. d\theta dr$
- ☐ $\int_2^3 \int_0^{\pi/2} d\theta dr$
- ☐ Nenhuma das anteriores.

GRUPO II (13 valores)

Apresente todos os cálculos efectuados.

1. Considere a função $f(x, y) = x^2 - 4x + 2y^2 + 4y - 1$.

(a) Determine os pontos críticos de f .

(b) Verifique quais dos pontos críticos é maximizante ou minimizante da função.

2. Considere-se que, num determinado período de tempo, o número de unidades de produto produzidas quando se usa x unidades de trabalho e y unidades de material é $f(x, y) = 10x^{1/2}y^{1/4}$.

(a) Se considerarmos 25 unidades de trabalho e 16 unidades de material, quantas unidades de produto são produzidas?

(b) Determina o valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(25, 16)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(25, 16)$.

(c) Qual o significado do valor obtido para $\frac{\partial f}{\partial x}(25, 16)$?

3. Usando diferenciais, obtenha um valor aproximado de $\sqrt{1.001^2 + 0.003^2}$.

4. Determine o produto máximo de três números cuja soma é 24.