Investigação Operacional

Métodos de Programação Linear: Simplex Dual, Revisto e Matricial

- Engenharia Comunicações (MIECom)

Universidade do Minho - Escola de Engenharia
Departamento de Produção e Sistemas

Autoria

- Este conjunto de slides contém slides da autoria do Doutor Filipe Alvelos (falvelos@dps.uminho.pt) do Departamento de Produção e Sistemas da Universidade do Minho,

Programação Linear – Métodos

Filipe Pereira e Alvelos
falvelos@dps.uminho.pt
www.dps.uminho.pt/pessoais/falvelos

Universidade do Minho
Escola de Ciências / Escola de Engenharia
Licenciatura em Matemática Aplicada
Investigação Operacional I

Universidade do Minho
Escola de Engenharia
Departamento de Produção e Sistemas

Versão 00 – 17 de Setembro de 2003
Versão 05 – 10 de Abril de 2006

Simplex DUAL

Vamos ver uma curiosidade…

$Max\ z = 10x_1 + 9x_2$

s.a:

$5x_1 + 4x_2 + x_3 = 200$

$4x_1 + 6x_2 + x_4 = 230$

$2x_1 + x_2 + x_5 = 70$

$x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,5$

Coluna pivot

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	5	4	1	0	0	200	(200/5)
x_4	4	6	0	1	0	230	(230/4)
x_5	2	1	0	0	1	70	(70/2)
z	–10	–9	0	0	0	0	

entra na base

VAMOS ERRAR !

Sai x_4

Simplex DUAL

Há valores negativos nos termos independentes !!!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	$-7/2$	1	$-5/4$	0	$-175/2$
x_1	1	$3/2$	0	$1/4$	0	$115/2$
x_5	0	-2	0	$-1/2$	1	-45
z	0	24	0	$5/2$	0	575

O que fazer?

Simplex DUAL

Reiniciar a partir do quadro original?

Desfazer o erro?

-sair x_1 e entrar x_4

E se fosse possível continuar, apesar da asneira !?!?

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	$-7/2$	1	$-5/4$	0	$-175/2$
x_1	1	$3/2$	0	$1/4$	0	$115/2$
x_5	0	-2	0	$-1/2$	1	-45
z	0	24	0	$5/2$	0	575

Simplex DUAL

O que é necessário fazer para reparar o erro ?

transformar termos independentes em valores positivos

manter a matriz identidade

iterar, escolhendo pivots negativos

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	$-7/2$	1	$-5/4$	0	$-175/2$
x_1	1	$3/2$	0	$1/4$	0	$115/2$
x_5	0	-2	0	$-1/2$	1	-45
z	0	24	0	$5/2$	0	575

sai a mais negativa

Pivots negativos

Qual é a que entra?

Simplex DUAL

O que é necessário fazer para reparar o erro ?

- transformar os negativos em positivos
- manter a matriz identidade
- iterar, escolhendo pivots negativos

Iterar, ***optimizando***, escolhe-se a menor razão em módulo!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	$-7/2$	1	$-5/4$	0	$-175/2$
x_1	1	$3/2$	0	$1/4$	0	$115/2$
x_5	0	-2	0	$-1/2$	1	-45
z	0	24	0	$5/2$	0	575

sai a mais negativa

Pivots negativos

Qual é a que entra?

Entra x4

Simplex DUAL

Ainda há valores negativos nos termos independentes !!!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	0	$14/5$	$-4/5$	1	0	70
x_1	1	$4/5$	$1/5$	0	0	40
x_5	0	$-3/5$	$-2/5$	0	1	-10
z	0	-1	2	0	0	400

Simplex DUAL

Quadro válido !!!

Falta Optimizar, resolução pelo Simplex PRIMAL

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	0	0	$-\frac{8}{3}$	1	$\frac{14}{3}$	$\frac{70}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{80}{3}$
x_2	0	1	$+\frac{2}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{50}{3}$
z	0	0	$+\frac{8}{5}$	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1250}{3}$

Simplex DUAL

Solução Óptima

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$	1	5
x_1	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	20
x_2	0	1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	0	25
z	0	0	$\frac{12}{7}$	$\frac{5}{14}$	0	425

Simplex DUAL

Só mudou a ordem das linhas

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	0	$-4/7$	$3/14$	1	5
x_1	1	0	$3/7$	$-2/7$	0	20
x_2	0	1	$-2/7$	$5/14$	0	25
z	0	0	$12/7$	$5/14$	0	425

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	–6/21	5/14	0	25
x_5	0	0	–4/7	3/14	1	5
x_1	1	0	3/7	–2/7	0	20
z	0	0	12/7	5/14	0	425

Simplex DUAL

Exemplo

$$\begin{aligned} &Min\ z = 2x_1 + x_3 \\ &s.a: \\ &x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ &x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ &x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Max\ \text{-}z = -2x_1 - x_3 \\ &s.a: \\ &-x_1 - x_2 + x_3 \leq -5 \\ &-x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq -8 \\ &x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Max\ \text{-}z = -2x_1 - x_3 \\ &s.a: \\ &-x_1 - x_2 + x_3 + s_1 = -5 \\ &-x_1 + 2x_2 - 4x_3 + s_2 = -8 \\ &x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
s_1	-1	-1	1	1	0	-5
s_2	-1	2	-4	0	1	-8
$-z$	2	0	1	0	0	0

solução básica não admissível

Simplex DUAL

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
s_1	-1	-1	1	1	0	-5	
s_2	-1	2	-4	0	1	-8	sai
$-z$	2	0	1	0	0	0	
	(2)		(1/4)				

entra

Síntese:

Sai da base a variável com o valor mais negativo (que é "menos admissível").

Entra na base a variável que tem menor razão em módulo entre o coeficiente da linha da função objectivo e o coeficiente da linha pivot, considerando apenas as que têm coeficientes negativos na linha pivot.

Simplex DUAL

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
s_1	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	-7	sai
x_3	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	2	
$-z$	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	-2	

entra

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_2	$5/2$	1	0	-2	$-1/2$	14
x_3	$3/2$	0	1	-1	$-1/2$	9
$-z$	$1/2$	0	0	1	$1/2$	-9

Solução Óptima

Simplex DUAL

Resumo da Iteração do algoritmo simplex dual:

1. Teste de optimalidade (a solução básica actual é óptima se todos os termos independentes são não negativos e todos os coeficientes da linha da função objectivo são não negativos). Se a solução é óptima, parar. Se não, prosseguir com o passo 2.
2. Decidir qual a variável que sai da base (é aquela que tem o valor mais negativo - em caso de empate decidir arbitrariamente). Prosseguir com o passo 3.
3. Decidir qual a variável não básica que entra na base (é aquela que tem a menor razão em módulo do critério de entrada - excluindo as variáveis que têm coeficiente positivo ou nulo na linha pivot; em caso de empate, escolher maior pivot em módulo). Se não houver nenhuma variável com coeficiente negativo na linha pivot, o problema é impossível, parar. Se não, prosseguir para 4.
4. Actualizar o quadro simplex para a base actual e passar à iteração seguinte (passo 1).

Simplex

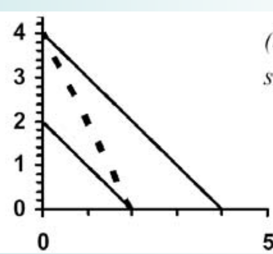
•Como obter um quadro simplex válido para um problema que tenha restrições de igualdade e/ou de maior ou igual?

- Note-se que, se o problema só tiver restrições de "menor ou igual", temos sempre uma base "à mão": a constituída pelas variáveis de folga, *i.e.*
- O ponto de solução nula pertence ao espaço de soluções válidas, e forma-se a base com as variáveis de folga.

(a) $Max\ z = 2x_1 + x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$



(b) $Max\ z = 2x_1 + x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 - t = 2$$
$$x_1 + x_2 + s = 4$$
$$x_1 , x_2, s, t \geq 0$$

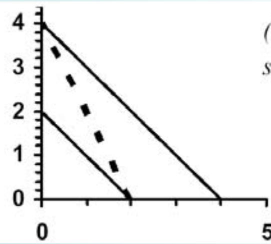
Simplex

- Modelos *(a)* e *(b)* são equivalentes.
  - O modelo *(b)* está na forma estandardizada e inclui uma variável de excesso (primeira restrição) e uma variável de folga (segunda restrição).
  - Para a segunda linha é fácil encontrar uma variável básica inicial (tem coeficiente 1 na própria linha e 0 nas restantes).
  - Qual a variável básica a associar à primeira linha? Não é claro. Não há nenhuma variável que tenha coeficiente 1 na própria linha e 0 nas restantes.

(a) $Max\ z = 2x_1 + x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 ,\ x_2 \geq 0$$



(b) $Max\ z = 2x_1 + x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 - t = 2$$
$$x_1 + x_2 + s = 4$$
$$x_1 ,\ x_2,\ s,\ t \geq 0$$

- **Modifica-se** o modelo por inclusão de variáveis artificiais

Grande M «» 2 Fases

(a) $Max\ z = 2x_1 + x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 ,\ x_2 \geq 0$$

(b) $Max\ z = 2x_1 + x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 - t = 2$$
$$x_1 + x_2 + s = 4$$
$$x_1 ,\ x_2,\ s,\ t \geq 0$$

(c) $Max\ z = 2x_1 + x_2 - \boldsymbol{Ma}$

s.a:

$$x_1 + x_2 - t + \boldsymbol{a} = 2$$
$$x_1 + x_2 + s = 4$$
$$x_1 ,\ x_2,\ t,\ s,\ \boldsymbol{a} \geq 0$$

1ª FASE

Para obter uma base inicial, utiliza-se um problema auxiliar que consiste em minimizar a soma das variáveis artificiais.

- Elimina-se a distância à zona de soluções válidas.

(d) $\boldsymbol{Min\ w = a}$

s.a:

$$x_1 + x_2 - t + \boldsymbol{a} = 2$$
$$x_1 + x_2 + s = 4$$
$$x_1 ,\ x_2,\ s,\ t,\ \boldsymbol{a} \geq 0$$

Grande M «» 2 Fases

(a) $\text{Max } z = 2x_1 + x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$$

(b) $\text{Max } z = 2x_1 + x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 - t = 2$$
$$x_1 + x_2 + s = 4$$
$$x_1\ ,\ x_2,\ s,\ t \geq 0$$

(c) $\text{Max } z = 2x_1 + x_2 - \mathbf{M}\boldsymbol{a}$

s.a:

$$x_1 + x_2 - t + \boldsymbol{a} = 2$$
$$x_1 + x_2 + s = 4$$
$$x_1\ ,\ x_2,\ t,\ s,\ \boldsymbol{a} \geq 0$$

2ª FASE

Se não houver variáveis artificias na base, procede-se com a função objectivo original

Senão, o problema é impossível !

- É necessário validar o quadro

(d) $\text{Max } z = 2x_1 + x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 - t = 2$$
$$x_1 + x_2 + s = 4$$
$$x_1\ ,\ x_2,\ s,\ t \geq 0$$

Grande M «» 2 Fases

Exemplo:

1ª Fase

	x_1	x_2	t	s	a	
a	1	1	–1	0	**1**	2
s	1	1	0	1	0	4
$-w$	0	0	0	0	**1**	0

Validação do Quadro Simplex

	x_1	x_2	t	s	a	
a	**1**	1	-1	0	1	2
s	1	1	0	1	0	4
$-w$	-1	-1	1	0	0	-2

Grande M «» 2 Fases

Exemplo:

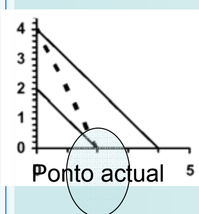
1ª Fase

	x_1	x_2	t	s	a	
a	**1**	1	-1	0	1	2
s	1	1	0	1	0	4
$-w$	-1	-1	1	0	0	-2

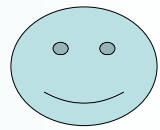
(2)
(4)

mais pequeno sai da base

negativa (empate), entra na base



	x_1	x_2	t	s	a	
x_1	1	1	-1	0	1	2
s	0	0	1	1	-1	2
$-w$	0	0	0	0	1	0



Não há artificiais na base, podem ser removidas do quadro e passa-se à 2ª fase...

Grande M «» 2 Fases

Exemplo:

2ª Fase

	x_1	x_2	t	s	
x_1	1	1	-1	0	2
s	0	0	1	1	2
z	-2	-1	0	0	0

Validação do Quadro Simplex

	x_1	x_2	t	s	
x_1	1	1	-1	0	2
s	0	0	**1**	1	2
z	0	1	-2	0	4

Grande M «» 2 Fases

Exemplo:

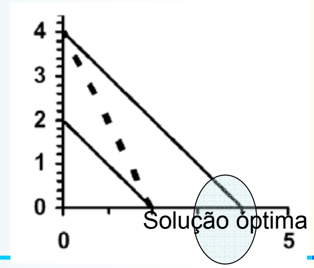
2ª Fase

	x_1	x_2	t	s		
x_1	1	1	-1	0	2	(-)
s	0	0	**1**	1	2	(2)
z	0	1	-2	0	4	

sai da base

negativa, entra na base

	x_1	x_2	t	s	
x_1	1	1	0	1	4
t	0	0	1	1	2
z	0	1	0	2	8



Simplex Matricial «» Revisto

Quadro Inicial

	x	s	
s	A	I	b
z	$-c$	0	0

Quadro numa qualquer iteração

	x	s	
x_B	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
z	$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

Simplex Matricial «» Revisto

Quadro Inicial

	x	s	
s	A	I	b
z	$-c$	0	0

- A Matriz tecnológica (coeficientes das restrições)
- I Matriz Identidade
- b Termos independentes
- c Coeficientes na Função Objectivo
- x Variáveis de decisão
- s Variáveis de folga

Simplex Matricial «» Revisto

$$
\begin{array}{l}
Max\ z = 2x_1 + \tfrac{5}{4}x_2 + 3x_3 \\
s.a: \\
\begin{array}{cccc}
2x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq 7 \\
3x_1 & +x_2 & & \leq 6 \\
 & +x_2 & +6x_3 & \leq 9
\end{array} \\
x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,2,3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
Max\ z = 2x_1 + \tfrac{5}{4}x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\
s.a: \\
\begin{array}{ccccccc}
2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & & & = 7 \\
3x_1 & +x_2 & & & +x_5 & & = 6 \\
 & +x_2 & +6x_3 & & & +x_6 & = 9
\end{array} \\
x_j \geq 0 \ , j = 1,2,3,4,5,6
\end{array}
$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 2 & \tfrac{5}{4} & 3 \end{bmatrix}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	2	1	2	1	0	0	7
x_5	3	1	0	0	1	0	9
x_6	0	1	6	0	0	1	6
	-2	$-\tfrac{5}{4}$	-3	0	0	0	0

Simplex Matricial «» Revisto

B Matriz formada pelas colunas da Matriz A das variáveis básicas

B^{-1} Matriz Inversa da Matriz B

c_B Matriz dos coeficientes na Função Objectivo das variáveis básicas

x_B Vector das variáveis básicas

Na Análise de Sensibilidade é esta forma matricial que se usa.

Quase Sempre a Matriz B^{-1} é dada.

Quadro numa qualquer iteração

	x	s	
x_B	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} b$
z	$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

Simplex Matricial «» Revisto

A Revisão do Simplex teve como objectivo a definição de uma metodologia mais eficiente para uso do cálculo automático.

Dantzig e Orchard-Hays desenvolveram para a RAND Corporation uma metodologia que visava tratar a informação estritamente necessária para o cálculo automático.

O Simplex revisto permite reduzir o número de operações a efectuar em cada iteração, o espaço de memória, e o tempo de computação.

Simplex Matricial «» Revisto

No percurso para a solução óptima só importa conhecer os vectores (colunas) fora da base, em termos da base actual (colunas das variáveis básicas):

- calculo dos custos reduzidos;
- determinação do vector a sair da base
- obtenção da nova solução por mudança de base.

Não se actualiza todo o quadro simplex, somente interessa identificar o novo elemento pivot.

A forma revista explora o facto de se poder obter todo o quadro simplex respeitante a qualquer SBA a partir do conhecimento da matriz inversa da base B^{-1} dessa solução.

Simplex Matricial «» Revisto

Atendendo ao conceito de base de um espaço vectorial, qualquer vector P_j é dado por:

$$P_j = BX_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

em que X_j é a representação do vector P_j em termos de base B. Donde

$$X_j = B^{-1} P_j$$

em que B^{-1} designa a matriz inversa da base actual.

Qualquer solução básica resulta de igualar a zero as variáveis não básicas.

$$BX_B = b \longrightarrow X_B = B^{-1} b$$

Simplex Matricial «» Revisto

Ver Simplex Matricial em Excel