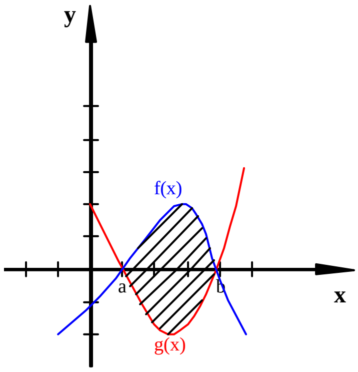
Teoria



A área definida por estas duas curvas é dada por:

$$A=\underbrace{\int_a^b \underbrace{\int_{g(x)}^{f(x)} (1)dy}_{1^{a}\text{ primitiva em ordem a y}} dx}_{2^{a}\text{ primitiva em ordem a x}} \Leftrightarrow A=\int_a^b [y]_{g(x)}^{f(x)}dx \Leftrightarrow A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

Nota: *Num integral duplo ou triplo, nunca pode existir o termo* **x** *nos extremos de integração do primeiro integral.*

1. Calcule os seguintes integrais duplos:

a) $\int_0^1\int_1^2 (x^2+3y)dxdy$

R:

$$\int_0^1\int_1^2 (x^2+3y)dxdy=\int_0^1\left[\frac{x^{2+1}}{2+1}+3xy\right]_1^2 dy=\int_0^1\left[\left(\frac{2^3}{3}+3\cdot 2\cdot y\right)-\left(\frac{1^3}{3}+3\cdot 1\cdot y\right)\right]dy=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{8}{3}+6\cdot y-\frac{1}{3}-3\cdot y\right]dy=\int_0^1\left[\frac{7}{3}+3\cdot y\right]dy=\left[\frac{7}{3}\cdot y+3\cdot\frac{y^{1+1}}{1+1}\right]_0^1=$$

$$=\left[\left(\frac{7}{3}\cdot 1+3\cdot\frac{1^2}{2}\right)-\left(\frac{7}{3}\cdot 0+3\cdot\frac{0^2}{2}\right)\right]=\frac{7}{3}+\frac{3}{2}=\frac{7\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{3\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{14+9}{6}=\frac{23}{6}$$

b) $\displaystyle\int_1^2\int_x^{3x}\frac{1}{(x+y)^2}\,dydx$

R:

$$\int_1^2\int_x^{3x}\frac{1}{(x+y)^2}\,dydx=\int_1^2\int_x^{3x}(x+y)^{-2}\,dydx=\int_1^2\int_x^{3x}\underset{u'}{1}\cdot\underbrace{(x+y)^{-2}}_{u^a}\,dydx\overset{1}{=}\int_1^2\left[\frac{(x+y)^{-2+1}}{-2+1}\right]_x^{3x}dx=$$

$$=\int_1^2\left[\frac{(x+3x)^{-1}}{-1}-\frac{(x+x)^{-1}}{-1}\right]dx=\int_1^2\left[-(x+3x)^{-1}+(x+x)^{-1}\right]dx=\int_1^2\left[\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x}\right]dx=\int_1^2\left[\frac{2-1}{4x}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\int_1^2\left[\frac{1}{x}\right]dx=\frac{1}{4}\cdot\left[\ln|x|\right]_1^2=\frac{1}{4}\cdot\left[\ln|2|-\underbrace{\ln|1|}_{=0}\right]=\frac{1}{4}\cdot\ln|2|$$

c) $\displaystyle\int_1^e\int_{\ln x}^{e^{x^2}}(x)\,dydx$

R:

$$\int_1^e\int_{\ln x}^{e^{x^2}}(x)\,dydx=\int_1^e[xy]_{\ln x}^{e^{x^2}}dx=\int_1^e\left[x\cdot e^{x^2}-x\cdot\ln x\right]dx=\int_1^e\left(x\cdot e^{x^2}\right)dx-\int_1^e(x\cdot\ln x)\,dx=$$

$$=\underbrace{\int_1^e\frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{2\cdot x}_{u'}\cdot\underbrace{e^{x^2}}_{e^u}\right)dx}_{\text{Integral rearranjado}}-\underbrace{\int_1^e\left(\underset{v'}{x}\cdot\underbrace{\ln x}_{u}\right)dx}_{\text{Integração por partes}}\overset{2}{=}☆$$

---

1 $P(u'\cdot u^a)=\dfrac{u^{a+1}}{a+1}+C$

2 $P(u'\cdot e^u)=e^u+C$; $P(u\cdot v')=u\cdot v-P(u'\cdot v)\rightarrow$ Primitivação por partes.

Cálculos Auxiliares para a Integração por Partes

$$\left\{\begin{array}{l} u=\ln x \Rightarrow u'=\dfrac{x'}{x}=\dfrac{1}{x} \\ v'=x \Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P(u\cdot v')=u\cdot v-P(u'\cdot v) \Leftrightarrow P(\ln x\cdot x)=\ln x\cdot\frac{x^2}{2}-P\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\ln x\cdot x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-P\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow P(\ln x\cdot x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\ln x\cdot x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\left(\frac{x^2}{4}\right)+C$$

Assim sendo teremos por substituição em ☆ que:

$$☆=\frac{1}{2}\cdot\left[e^{x^2}\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\left(\frac{x^2}{4}\right)\right]_1^e=\frac{1}{2}\cdot\left[e^{e^2}-\underbrace{e^{1^2}}_{=e}\right]-\left[\left(\frac{e^2}{2}\cdot\underbrace{\ln e}_{=1}-\left(\frac{e^2}{4}\right)\right)-\left(\frac{1^2}{2}\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0}-\left(\frac{1^2}{4}\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[e^{e^2}-e\right]-\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

d) $\int_0^{2p}\int_{3\cdot senq}^{2}(r\cdot\cos q)\,dr\,dq$

R:

$$\int_0^{2p}\int_{3\cdot senq}^{2}(r\cdot\cos q)\,dr\,dq=\int_0^{2p}\left[\frac{r^2}{2}\cdot\cos q\right]_{3\cdot senq}^{2}dq=\int_0^{2p}\left[\left(\frac{2^2}{2}\cdot\cos q\right)-\left(\frac{(3\cdot senq)^2}{2}\cdot\cos q\right)\right]dq=$$

$$=\int_0^{2p}\left[(2\cdot\cos q)-\left(\frac{9\cdot sen^2 q}{2}\cdot\cos q\right)\right]dq=\int_0^{2p}(2\cdot\cos q)\,dq-\int_0^{2p}\left(\frac{9\cdot sen^2 q}{2}\cdot\cos q\right)dq=$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2p} (\cos q) dq - \frac{9}{2} \cdot \int_0^{2p} \left(\underbrace{(senq)^2}_{u^a} \cdot \underbrace{\cos q}_{u'} \right) dq =^3 2 \cdot [senq]_0^{2p} - \frac{9}{2} \cdot \left[\frac{(senq)^{2+1}}{2+1} \right]_0^{2p} =$$

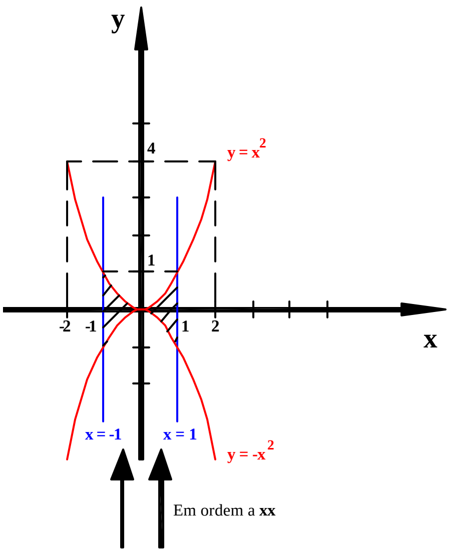
$$= 2 \cdot \left[\underbrace{sen(2p)}_{=0} - \underbrace{sen(0)}_{=0} \right] - \frac{9}{2} \cdot \left[\frac{\overbrace{(sen(2p))^3}^{=0}}{3} - \frac{\overbrace{(sen0)^3}^{=0}}{3} \right] = 0$$

2. Calcule o integral duplo:

a) $\iint_D (x^2 - 2y) dxdy$**, onde:** $D = \{x \in \Re : -1 \leq x \leq 1; -x^2 \leq y \leq x^2\}$

R:

Antes de mais vamos começar por representar graficamente o campo D:



$\Rightarrow$

A intersecção assinalada na figura ao lado resulta das condições:

$$D = \{x \in \Re : -1 \leq x \leq 1; -x^2 \leq y \leq x^2\}$$

Assim sendo teremos os seguintes limites de integração:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-x^2}^{x^2} (x^2 - 2y) dydx$$

---

[3] $P(u' \cdot u^a) = \dfrac{u^{a+1}}{a+1} + C$

Calculando agora o valor do integral teremos que:

$$\int_{-1}^{1}\int_{(-x^2)}^{x^2}(x^2-2y)dydx=\int_{-1}^{1}\left[x^2\cdot y-\frac{2\cdot y^{1+1}}{1+1}\right]_{-x^2}^{x^2}dx=\int_{-1}^{1}\left[x^2\cdot y-\frac{2\cdot y^2}{2}\right]_{-x^2}^{x^2}dx=$$

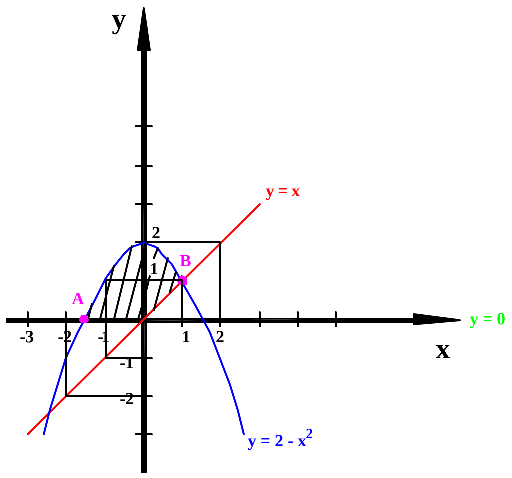
$$=\int_{-1}^{1}\left[\left(x^2\cdot x^2-\frac{2\cdot(x^2)^2}{2}\right)-\left(x^2\cdot(-x^2)-\frac{2\cdot(-x^2)^2}{2}\right)\right]dx=\int_{-1}^{1}\left[(x^4-x^4)-(-x^4-x^4)\right]dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[x^4-x^4+x^4+x^4\right]dx=\int_{-1}^{1}\left[2x^4\right]dx=2\cdot\left[\frac{x^{4+1}}{4+1}\right]_{-1}^{1}=2\cdot\left[\frac{1^5}{5}-\frac{(-1)^5}{5}\right]=\frac{4}{5}$$

b) $\iint_D (xy^2+1)dxdy$**, onde: D é um campo limitado** $y\le 2-x^2; y\ge 0 \text{ e } y\ge x$

R:

Antes de mais vamos começar por representar graficamente o campo D:



$\Rightarrow$

A intersecção assinalada na figura ao lado resulta das condições:

$y\le 2-x^2; y\ge 0 \text{ e } y\ge x$

Assim sendo teremos os seguintes pontos de intersecção, ponto **A** e ponto **B**:

$$A\to\left\{2-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}\right\}\Rightarrow\left\{x=-\sqrt{2}\right\}$$

$$B\to\begin{cases}y=x\\y=2-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-----\\x=2-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-----\\x^2+x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-----\\x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ----- \\ x=1 \quad \vee \quad \underbrace{x=-2}_{\substack{\text{Pela observação do gráfico} \\ \text{este ponto é eliminado.}}} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=x=1 \end{cases}$$

Assim sendo teremos os seguintes limites de integração: $\int_{-\sqrt{2}}^{0}\int_{0}^{2-x^2}\left(xy^2+1\right)dydx+\int_{0}^{1}\int_{x}^{2-x^2}\left(xy^2+1\right)dydx$

Calculando agora o valor do integral teremos que:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0}\int_{0}^{2-x^2}\left(xy^2+1\right)dydx+\int_{0}^{1}\int_{x}^{2-x^2}\left(xy^2+1\right)dydx=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left[\frac{xy^{2+1}}{2+1}+y\right]_{0}^{2-x^2}dx+\int_{0}^{1}\left[\frac{xy^{2+1}}{2+1}+y\right]_{x}^{2-x^2}dx=$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left[\left(\frac{x\cdot\left(2-x^2\right)^3}{3}+\left(2-x^2\right)\right)-\left(\frac{x\cdot(0)^3}{3}+(0)\right)\right]dx+\int_{0}^{1}\left[\left(\frac{x\cdot\left(2-x^2\right)^3}{3}+\left(2-x^2\right)\right)-\left(\frac{x\cdot(x)^3}{3}+x\right)\right]dx=$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left[\left(\frac{x\cdot\left(2-x^2\right)^3}{3}+\left(2-x^2\right)\right)\right]dx+\int_{0}^{1}\left[\left(\frac{x\cdot\left(2-x^2\right)^3}{3}+\left(2-x^2\right)\right)-\left(\frac{x^4}{3}+x\right)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\int_{-\sqrt{2}}^{0}x\cdot\left(2-x^2\right)^3dx+\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left(2-x^2\right)dx+\frac{1}{3}\cdot\int_{0}^{1}x\cdot\left(2-x^2\right)^3dx+\int_{0}^{1}\left(2-x^2\right)dx-\frac{1}{3}\cdot\int_{0}^{1}x^4dx-\int_{0}^{1}xdx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\int_{-\sqrt{2}}^{0}\underbrace{-2x}_{u'}\cdot\underbrace{\left(2-x^2\right)^3}_{u^a}dx+\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left(2-x^2\right)dx+$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\int_{0}^{1}\underbrace{-2x}_{u'}\cdot\underbrace{\left(2-x^2\right)^3}_{u^a}dx+\int_{0}^{1}\left(2-x^2\right)dx-\frac{1}{3}\cdot\int_{0}^{1}x^4dx-\int_{0}^{1}xdx=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{\left(2-x^2\right)^{3+1}}{3+1}\right]_{-\sqrt{2}}^{0}+\left[2x-\frac{x^{2+1}}{2+1}\right]_{-\sqrt{2}}^{0}-\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{\left(2-x^2\right)^{3+1}}{3+1}\right]_{0}^{1}+\left[2x-\frac{x^{2+1}}{2+1}\right]_{0}^{1}-\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{x^{4+1}}{4+1}\right]_{0}^{1}-\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right]_{0}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{\left(2-x^2\right)^{4}}{4}\right]_{-\sqrt{2}}^{0}+\left[2x-\frac{x^{3}}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{0}-\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{\left(2-x^2\right)^{4}}{4}\right]_{0}^{1}+\left[2x-\frac{x^{3}}{3}\right]_{0}^{1}-\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{x^{5}}{5}\right]_{0}^{1}-\left[\frac{x^{2}}{2}\right]_{0}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{\left(2-0^2\right)^{4}}{4}-\frac{\left(2-\left(-\sqrt{2}\right)^2\right)^{4}}{4}\right]+\left[\left(2\cdot 0-\frac{0^3}{3}\right)-\left(2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)-\frac{\left(-\sqrt{2}\right)^3}{3}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{\left(2-1^2\right)^{4}}{4}-\frac{\left(2-0^2\right)^{4}}{4}\right]+\left[\left(2\cdot 1-\frac{1^3}{3}\right)-\left(2\cdot 0-\frac{0^3}{3}\right)\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}\right]-\left[\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{2^4}{4}\right]+\left[-\left(2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)-\frac{\left(-\sqrt{2}\right)^3}{3}\right)\right]-\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{1}{4}-\frac{2^4}{4}\right]+\left[\left(2-\frac{1}{3}\right)\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{5}\right]-\left[\frac{1}{2}\right]=$$

$$=-\frac{4}{6}+\left[-\left(2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)-\frac{\left(-\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)}{3}\right)\right]-\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{1}{4}-4\right]+\left[\left(2-\frac{1}{3}\right)\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{5}\right]-\left[\frac{1}{2}\right]=$$

$$=-\frac{4}{6}+\left[-\left(\frac{6\cdot\left(-\sqrt{2}\right)-2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)}{3}\right)\right]-\frac{1}{6}\cdot\left[-\frac{15}{4}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{5}\right]-\left[\frac{1}{2}\right]=$$

$$=-\frac{4}{6}+\frac{4\cdot\sqrt{2}}{3}+\frac{15}{24}+\frac{5}{3}-\frac{1}{15}-\frac{1}{2}=\left(\frac{-16+15+32\cdot\sqrt{2}+40-12}{24}\right)-\frac{1}{15}=\left(\frac{27+32\cdot\sqrt{2}}{24}\right)-\frac{1}{15}$$

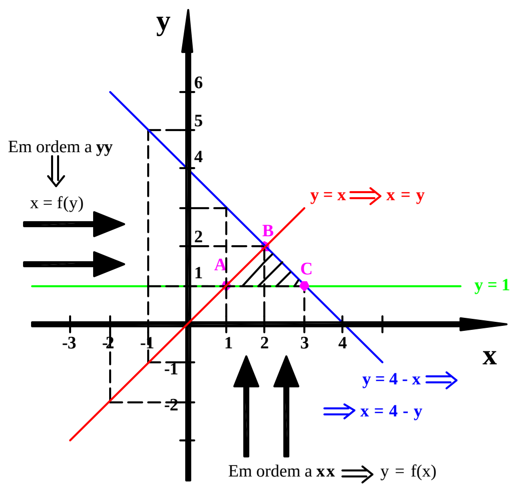
3. Coloque os limites de integração no integral duplo $\iint_S f(x;y)dxdy$. O campo S está definido pelas seguintes desigualdades:

a) $y \le x;\ x + y \le 4$ e $y \ge 1$

R:

Antes de mais, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades:

<table>
<tr><th>Expressão VS. Descrição</th><th colspan="6">Valores</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$y \le x \Rightarrow\ y = x \Rightarrow$ Recta obliqua.</td><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$y = x$</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x + y \le 4 \Rightarrow\ y = 4 - x \Rightarrow$ Recta obliqua.</td><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$y = 4 - x$</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="7">$y \ge 1 \Rightarrow\ y = 1 \Rightarrow$ Recta paralela ao eixo dos x.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Gráfico e respectiva Área resultante</th><th>Pontos de intersecção</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Ponto A:
$\begin{cases} y = x \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (1;1)$

Ponto B:
$\begin{cases} y = x \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow B = (2;2)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ponto C:
$\begin{cases} y = 1 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 1 = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow C = (3;1)$</td></tr>
</table>

Limites de integração

Em ordem a x: $\int_{1}^{2}\int_{1}^{x} f(x;y)dydx + \int_{2}^{3}\int_{1}^{(4-x)} f(x;y)dydx$

Em ordem a y: $\int_{1}^{2}\int_{y}^{(4-y)} f(x;y)dxdy$

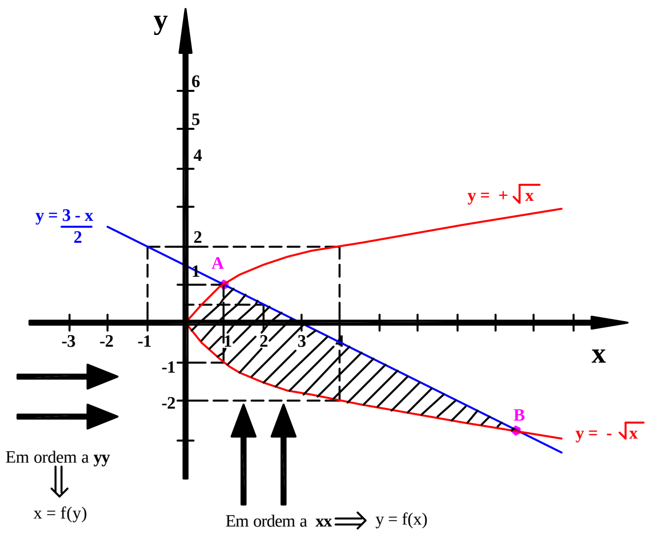
b) $y^2 \le x$ e $x \le 3-2y$

R:

Antes de mais, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades:

Expressão VS. Descrição	Valores					
$y^2 \le x \Rightarrow y^2 = x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x} \Rightarrow$ Parábola.	x	**0**	**1**	**4**		
	$y = \pm\sqrt{x}$	± 0	± 1	± 2		
$x \le 3-2y \Rightarrow y = \frac{3-x}{2} \Rightarrow$ Recta obliqua.	x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
	$y = \frac{3-x}{2}$	5/2	2	3/2	1	1/2

Gráfico e respectiva Área resultante	Pontos de intersecção



Pontos A e B:

$$\begin{cases} y = \frac{3-x}{2} \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{3-x}{2} \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(\frac{3-x}{2}\right)^2 \\ ---------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{(3-x)^2}{4} \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 9 - 6x + x^2 \\ --------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 9 = 0 \\ --------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\times1\times9}}{2\times1} \\ ------------------- \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10 \pm \sqrt{64}}{2} \\ ------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10 \pm 8}{2} \\ ------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10+8}{2} \vee x = \dfrac{10-8}{2} \\ ------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \vee x = 1 \\ y = \sqrt{9} \vee y = \sqrt{1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \vee x = 1 \\ y = 3 \vee y = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (1;1)$ e $B = (9;-3)$ → pelo observado no gráfico.

Limites de integração

Em ordem a x: $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x;y)\,dydx + \int_1^9 \int_{-\sqrt{x}}^{\left(\frac{3-x}{2}\right)} f(x;y)\,dydx$

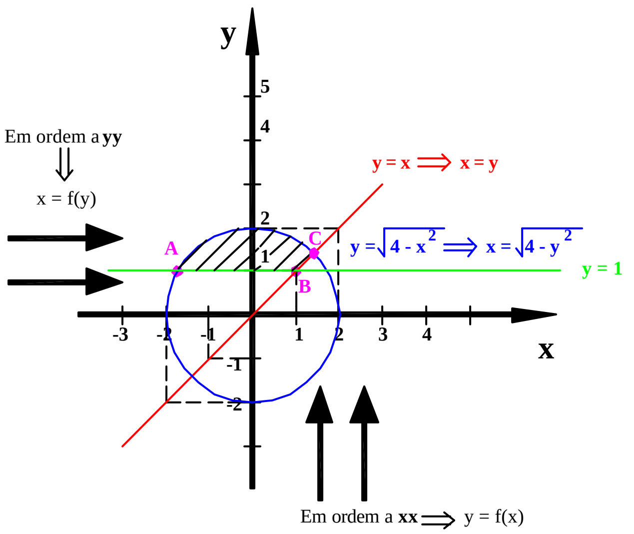
Em ordem a y: $\displaystyle\int_{-3}^{1} \int_{y^2}^{(3-2y)} f(x;y)\,dxdy$

c) $y \geq x; x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq 1$

R:

Antes de mais, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades:

<table>
<tr><td>Expressão VS. Descrição</td><td colspan="6">Valores</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y \geq x \Rightarrow y = x \Rightarrow$ Recta obliqua.</td><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$y = x$</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="7">$x^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio 2.</td></tr>
<tr><td colspan="7">$y \geq 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$ Recta paralela ao eixo dos x.</td></tr>
</table>

Gráfico e respectiva Área resultante	Pontos de intersecção
 	Ponto A: $\begin{cases} y=1 \\ y=\sqrt{4-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ 1=\sqrt{4-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ (1)^2=\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ 1=4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{A=\left(-\sqrt{3};1\right)}_{\text{Pelo que se pode ver no gráfico}}$

Ponto B:

$$\begin{cases} y=1 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B=(1;1)$$

Ponto C:

$$\begin{cases} y=x \\ y=\sqrt{4-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ x=\sqrt{4-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ (x)^2=\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ x^2=4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{C=\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)}_{\text{Pelo que se pode ver no gráfico}}$$

Limites de integração

Em ordem a x: $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{1}\int_{1}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dydx+\int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{x}^{\left(\sqrt{4-x^2}\right)} f(x;y)\,dydx$

Em ordem a y: $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{\sqrt{4-y^2}}^{y} f(x;y)\,dxdy$

d) $x^2+y^2 \le 4x$

R:

Perante esta desigualdade, teremos que antes de mais proceder ao seu rearranjo:

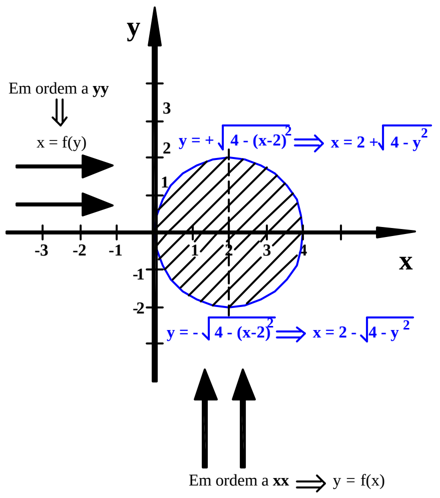
$$x^2+y^2 \le 4x \Rightarrow x^2+y^2=4x \Leftrightarrow x^2-4x+y^2=0 \Leftrightarrow \left(x^2-4x+y^2\right)+4=(0)+4^{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+4\right)+y^2=4 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4 \Rightarrow Circunferência\begin{Bmatrix} Centro \to (2;0) \\ Raio \to \sqrt{4}=2 \end{Bmatrix}$$

Assim sendo teremos então que começar por descrever cada uma das desigualdades:

Expressão VS. Descrição	Valores
$(x-2)^2+y^2=4 \Rightarrow$ Circunferência de centro (2;0) e raio 2.	

Gráfico e respectiva Área resultante



[4] Somar e subtrair o mesmo valor em ambos os membros de uma mesma expressão nunca altera o resultado final. Neste caso procedeu-se a este passo para conseguir obter a expressão: $(x-2)^2$

Limites de integração

Em ordem a x: $\int_{0}^{4} \int_{-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x;y)dydx$

Em ordem a y: $\int_{-2}^{2} \int_{\left(2-\sqrt{4-y^2}\right)}^{\left(2+\sqrt{4-y^2}\right)} f(x;y)dxdy$

4. Inverta a ordem de integração dos seguintes integrais:

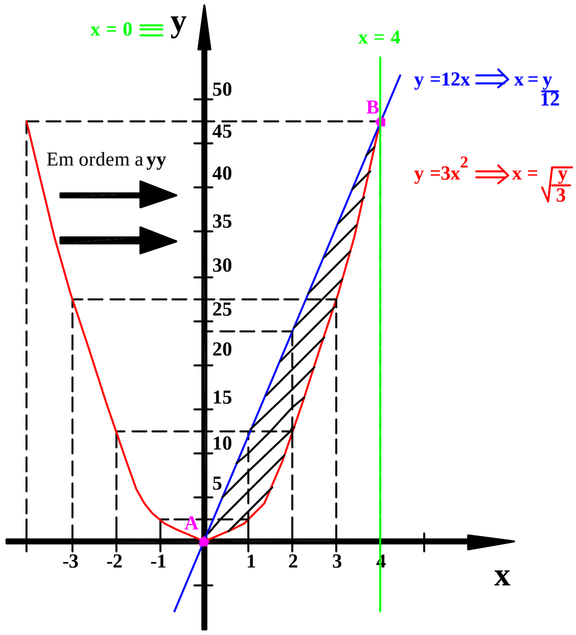
a) $\int_{0}^{4} \int_{3x^2}^{12x} f(x;y)dydx$

R:

Sabendo que: $\int_{0}^{4} \int_{3x^2}^{12x} f(x;y)dydx = \int_{x=0}^{x=4} \int_{y=3x^2}^{y=12x} f(x;y)dydx \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \le x \le 4 \\ 3x^2 \le y \le 12x \end{Bmatrix}$

Então, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades:

Expressão VS. Descrição	Valores					
$x \ge 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ Recta coincidente com o eixo dos y. $x \le 4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow$ Recta paralela ao eixo dos y.						
$y \ge 3x^2 \Rightarrow y = 3x^2 \Rightarrow$ Parábola.	x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
	$y = 3x^2$	12	3	0	3	12
$y \le 12x \Rightarrow y = 12x \Rightarrow$ Recta obliqua.	x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
	$y = 12x$	-24	-12	0	12	24

Gráfico e respectiva Área resultante	Pontos de intersecção
	Pontos A e B: $\begin{cases} x=\frac{y}{12}\\ x=\sqrt{\frac{y}{3}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ----- \\ \left(\frac{y}{12}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{y}{3}}\right)^2\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} ----- \\ \frac{y^2}{12^2}=\frac{y}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ----- \\ 3y^2-144y=0\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y}{12}\\ y\cdot(3y-144)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=4 \\ \overbrace{y=0}^{\Uparrow} \vee \overbrace{y=48}^{\Uparrow}\end{cases} \Rightarrow$ $\underbrace{A=(0;0)}_{\text{Pelo que se pode ver no gráfico}}$ e $\underbrace{B=(4;48)}_{\text{Pelo que se pode ver no gráfico}}$

O que é dado no enunciado é em ordem a x: $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x;y)\,dydx$

O que se pretende é inverter para em ordem a y: $\int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x;y)\,dxdy$

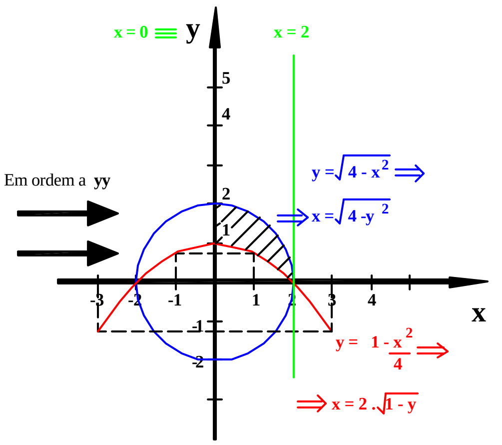
b) $\int_0^2 \int_{1-\frac{x^2}{4}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dydx$

R:

Sabendo que: $\int_0^2 \int_{1-\frac{x^2}{4}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dydx = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=1-\frac{x^2}{4}}^{y=\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dydx \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 1-\frac{x^2}{4} \le y \le \sqrt{4-x^2} \end{cases}$

Então, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades:

Expressão VS. Descrição	Valores					
$x \geq 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ Recta coincidente com o eixo dos y. $x \leq 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ Recta paralela ao eixo dos y.						
$y \geq 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow$ Parábola.	x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
	$y = 1 - \frac{x^2}{4}$	0	3/4	1	3/4	0
$y \leq \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow y^2 = \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{4} = 2$.						

Gráfico e respectiva Área resultante


O que é dado no enunciado é em ordem a x: $\int_0^2 \int_{1-\frac{x^2}{4}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dydx$

O que se pretende é inverter para em ordem a y: $\int_0^1 \int_{2\cdot\sqrt{1-y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x;y)\,dxdy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x;y)\,dxdy$

c) $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x;y)dxdy$

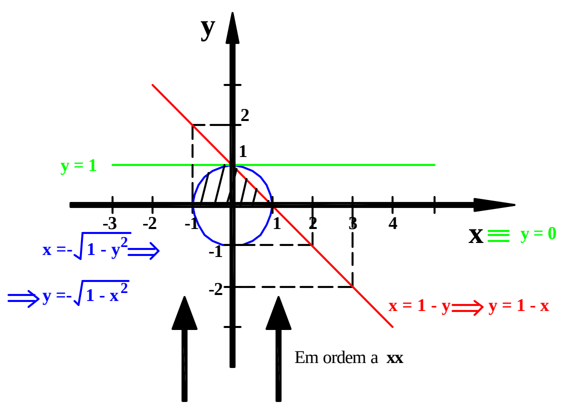
R:

Sabendo que: $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x;y)dxdy = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=1-y} f(x;y)dxdy \Rightarrow \begin{Bmatrix} -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1-y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{Bmatrix}$

Então, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades:

<table>
<tr><th>Expressão VS. Descrição</th><th colspan="6">Valores</th></tr>
<tr><td colspan="7">$y \geq 0 \Rightarrow\ y = 0 \Rightarrow$ Recta coincidente com o eixo dos x.

$y \leq 1 \Rightarrow\ y = 1 \Rightarrow$ Recta paralela ao eixo dos x.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x \leq 1-y \Rightarrow\ x = 1-y \Rightarrow$ Recta.</td><td>y</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$x = 1-y$</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr>
<tr><td colspan="7">$\mathrm{x} \geq -\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \mathrm{x} = \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 = \left(\sqrt{1-y^2}\right)^2 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 1 \Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{1} = 1$.</td></tr>
</table>

Gráfico e respectiva Área resultante


O que é dado no enunciado é em ordem a y: $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x;y)\,dxdy$

O que se pretende é inverter para em ordem a x: $\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x;y)\,dydx+\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} f(x;y)\,dydx$

d) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\int_{y}^{0} f(x;y)\,dxdy+\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} f(x;y)\,dxdy$

R:

Sabendo que:

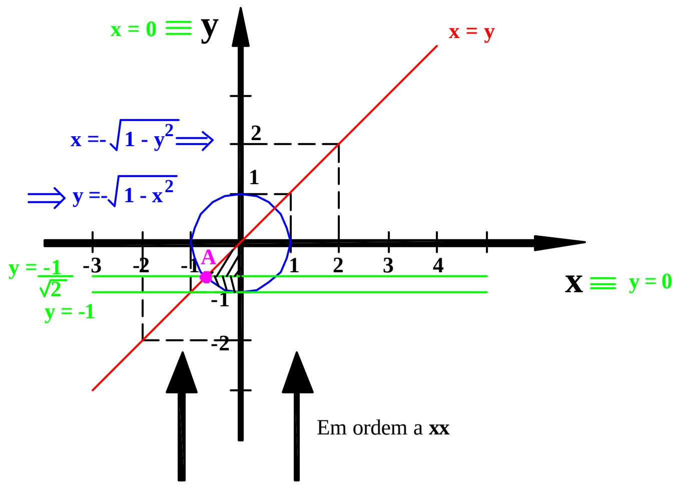
$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\int_{y}^{0} f(x;y)\,dxdy+\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} f(x;y)\,dxdy=\underbrace{\int_{y=-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{y=0}\int_{x=y}^{x=0} f(x;y)\,dxdy}_{\left\{\begin{array}{l} y\le x\le 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\le y\le 0\end{array}\right\}}+\underbrace{\int_{y=-1}^{y=-\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=0} f(x;y)\,dxdy}_{\left\{\begin{array}{l} -\sqrt{1-y^2}\le x\le 0 \\ -1\le y\le -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}}$$

Então, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades:

Expressão VS. Descrição	Valores
$x\le 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ Recta coincidente com o eixo dos y.	
$y\le 0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow$ Recta coincidente com o eixo dos x.	
$y\ge -1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow$ Recta paralela ao eixo dos x.	
$y\ge -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ Recta paralela ao eixo dos x.	
$y\le -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ Recta paralela ao eixo dos x.	

$x \geq y \Rightarrow x = y \Rightarrow$ Recta oblíqua.	y	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
	$x = y$	-2	-1	0	1	2

$x \geq -\sqrt{1-y^2} \Rightarrow x = -\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow (x)^2 = \left(-\sqrt{1-y^2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{1} = 1$.

Gráfico e respectiva Área resultante	Pontos de intersecção
	Ponto A: $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\sqrt{1-y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------- \\ x = -\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -------- \\ x = -\sqrt{1-\dfrac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -------- \\ x = -\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow A = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

O que é dado no enunciado é em ordem a y: $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\int_{y}^{0} f(x;y)dxdy + \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} f(x;y)dxdy$

O que se pretende é inverter para em ordem a x: $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \int_{\underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{\text{Porque é a zona correspondente ao gráfico}}}^{x} f(x;y)\, dydx$

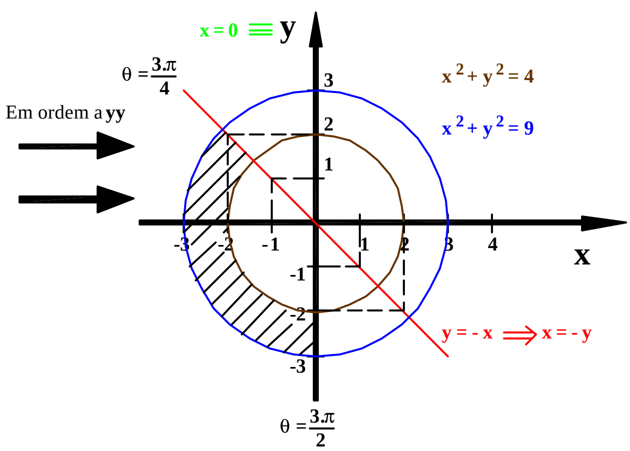
5. Calcule os integrais duplos:

a) $\iint_A \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$, **onde:** $A=\left\{(x;y)\in\Re^2 : 4\le x^2+y^2\le 9\ ;\ y\le -x\ ;\ x\le 0\right\}$

R:

Antes de mais, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades do domínio A:

<table>
<tr><th>Expressão VS. Descrição</th><th colspan="6">Valores</th></tr>
<tr><td colspan="7">$x^2+y^2\ge 4 \Rightarrow x^2+y^2=4 \Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{4}=2$.</td></tr>
<tr><td colspan="7">$x^2+y^2\le 9 \Rightarrow x^2+y^2=9 \Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{9}=3$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y\le -x \Rightarrow y=-x \Rightarrow$ Recta obliqua.</td><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$y=-x$</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>-2</td></tr>
<tr><td colspan="7">$x\le 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ Recta coincidente com o eixo dos y.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Gráfico e respectiva Área resultante</th><th>ATENÇÃO!!!</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Sempre que a área em estudo assume a forma de circunferências, anéis ou cilindros, temos que recorrer sempre a uma mudança de variáveis para coordenadas polares, onde:
$\begin{cases} x = r\cdot\cos q \\ y = r\cdot \operatorname{sen} q \end{cases}$; $|J| = r$
Sendo: $r \rightarrow$ raio (sempre positivo);
$q \rightarrow$ ângulo abrangido pela área;</td></tr>
</table>

Da observação atenta do gráfico anterior, podemos concluir que teremos os seguintes limites de integração: $\left\{\begin{array}{l} 2 \le r \le 3 \\ \dfrac{3p}{4} \le q \le \dfrac{3p}{2} \end{array}\right\}$

Sabendo da teoria que: $\iint_D f(x;y)dxdy \equiv \iint_{D'}\left[f(r\cdot\cos q; r\cdot sen q)\cdot|J|\right]dqdr$ e sabendo desta alínea que: $f(x;y) = x^2 + y^2$, então teremos que:

$$f(r\cdot\cos q; r\cdot sen q) = (r\cdot\cos q)^2 + (r\cdot sen q)^2 \Leftrightarrow f(r\cdot\cos q; r\cdot sen q) = r^2\cdot\cos^2 q + r^2\cdot sen^2 q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(r\cdot\cos q; r\cdot sen q) = r^2\cdot\underbrace{\left(\cos^2 q + sen^2 q\right)}_{=1} \Leftrightarrow f(r\cdot\cos q; r\cdot sen q) = r^2$$

Assim sendo, o integral e respectivos limites de integração para a área obtida será o seguinte:

$$\iint_A \ln\left(x^2 + y^2\right)dxdy \equiv \int_{\frac{3p}{4}}^{\frac{3p}{2}}\int_2^3\left[\underbrace{\ln\left(r^2\right)}_{u}\cdot\underbrace{r}_{v'}\right]drdq = {}^{5}\ldots$$

Cálculos Auxiliares para a Integração por Partes
$\left\{\begin{array}{l} u = \ln r^2 \Rightarrow u' = \dfrac{\left(r^2\right)'}{r^2} = \dfrac{2r}{r^2} = \dfrac{2}{r} \\ v' = r \Rightarrow v = \dfrac{r^{1+1}}{1+1} = \dfrac{r^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P(u\cdot v') = u\cdot v - P(u'\cdot v) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P\left(\ln r^2\cdot r\right) = \ln r^2\cdot\dfrac{r^2}{2} - P\left(\dfrac{2}{r}\cdot\dfrac{r^2}{2}\right) = \dfrac{r^2}{2}\cdot\ln r^2 - P(r) = \dfrac{r^2}{2}\cdot\ln r^2 - \dfrac{r^2}{2} = \dfrac{r^2}{2}\cdot\left(\ln r^2 - 1\right)$

[5] $P(u\cdot v') = u\cdot v - P(u'\cdot v) \longrightarrow$ Primitivação por partes.

Assim sendo e por substituição directa em ✧ teremos que:

$$✧ = \int_{\frac{3p}{4}}^{\frac{3p}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \cdot \left(\ln r^2 - 1\right) \right]_2^3 dq = \int_{\frac{3p}{4}}^{\frac{3p}{2}} \left[\frac{3^2}{2} \cdot \left(\ln 3^2 - 1\right) - \frac{2^2}{2} \cdot \left(\ln 2^2 - 1\right) \right] dq =$$

$$= \int_{\frac{3p}{4}}^{\frac{3p}{2}} \left[\frac{9}{2} \cdot (\ln 9 - 1) - 2 \cdot (\ln 4 - 1) \right] dq = \left[\frac{9}{2} \cdot (\ln 9 - 1) - 2 \cdot (\ln 4 - 1) \right] \cdot \int_{\frac{3p}{4}}^{\frac{3p}{2}} 1 dq =$$

$$= \left[\frac{9}{2} \cdot (\ln 9 - 1) - 2 \cdot (\ln 4 - 1) \right] \cdot [q]_{\frac{3p}{4}}^{\frac{3p}{2}} = \left[\frac{9}{2} \cdot (\ln 9 - 1) - 2 \cdot (\ln 4 - 1) \right] \cdot \left[\frac{3p}{2} - \frac{3p}{4} \right] =$$

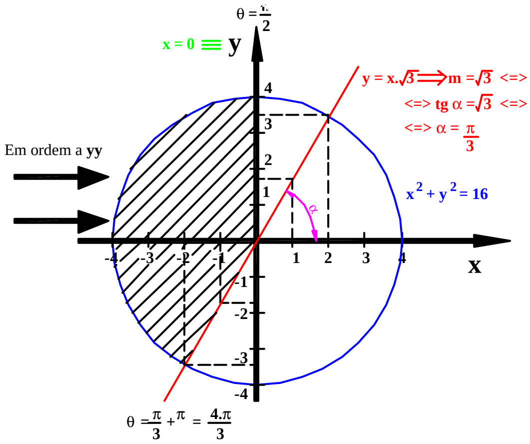
$$= \left[\frac{9}{2} \cdot (\ln 9 - 1) - 2 \cdot (\ln 4 - 1) \right] \cdot \left[\frac{6p - 3p}{4} \right] = \left[\frac{9}{2} \cdot (\ln 9 - 1) - 2 \cdot (\ln 4 - 1) \right] \cdot \left[\frac{3p}{4} \right]$$

b) $\iint_B \left(e^{1+x^2+y^2}\right) dxdy$**, onde:** $B = \left\{(x;y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \le 16 \ ; \ y \ge x\sqrt{3} \ ; \ x \le 0\right\}$

R:

Antes de mais, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades do domínio A:

<table>
<tr><th colspan="2">Expressão VS. Descrição</th><th colspan="5">Valores</th></tr>
<tr><td colspan="7">$x^2 + \mathrm{y}^2 \le 16 \Rightarrow x^2 + \mathrm{y}^2 = 16 \Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{16} = 4$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y \ge x\sqrt{3} \Rightarrow y = x\sqrt{3} \Rightarrow$ Recta obliqua.</td><td>x</td><td>**-2**</td><td>**-1**</td><td>**0**</td><td>**1**</td><td>**2**</td></tr>
<tr><td>$y = x\sqrt{3}$</td><td>$-2\sqrt{3}$</td><td>$-\sqrt{3}$</td><td>0</td><td>$-\sqrt{3}$</td><td>$2\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$x \le 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ Recta coincidente com o eixo dos y.</td></tr>
</table>

Gráfico e respectiva Área resultante	ATENÇÃO!!!
 6	*Mudança de variáveis para coordenadas polares, onde:* $\left\{\begin{matrix} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot sen q \end{matrix}\right\}$; $\lvert J \rvert = r$ Sendo: $r \to raio$ (sempre positivo); $q \to$ ângulo abrangido pela área;

Da observação atenta do gráfico anterior, podemos concluir que teremos os seguintes limites de integração: $\left\{\begin{matrix} 0 \leq r \leq 4 \\ \dfrac{p}{2} \leq q \leq \dfrac{4p}{3} \end{matrix}\right\}$

Sabendo da teoria que: $\iint_D f(x;y)dxdy \equiv \iint_{D'} \left[f(r \cdot \cos q; r \cdot sen q) \cdot \lvert J \rvert \right] dq dr$ e sabendo desta alínea que: $f(x;y) = e^{1+x^2+y^2}$, então teremos que:

$$f(r \cdot \cos q; r \cdot sen q) = e^{1+(r \cdot \cos q)^2 + (r \cdot sen q)^2} \Leftrightarrow f(r \cdot \cos q; r \cdot sen q) = e^{1+r^2 \cdot \underbrace{(\cos^2 q + sen^2 q)}_{=1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(r \cdot \cos q; r \cdot sen q) = e^{1+r^2}$$

6

α	$p/6$	$p/4$	$p/3$
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Assim sendo, o integral e respectivos limites de integração para a área obtida será o seguinte:

$$\iint_B \left(e^{1+x^2+y^2}\right)dxdy \equiv \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}}\int_0^4 \left[e^{1-r^2}\cdot r\right]drdq = \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}} -\frac{1}{2}\cdot\int_0^4\left[\underbrace{e^{1-r^2}}_{e^u}\cdot\underbrace{(-2r)}_{u'}\right]drdq = \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}} -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{1-r^2}\right]_0^4 dq =$$

$$= \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}} -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{1-4^2} - e^{1-0^2}\right]dq = \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}} -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-15}-e^1\right]dq = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-15}-e^1\right]\cdot\int_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}} 1dq = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-15}-e^1\right]\cdot\left[q\right]_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-15}-e^1\right]\cdot\left[\frac{4p}{3}-\frac{p}{2}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-15}-e^1\right]\cdot\left[\frac{8p-3p}{6}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-15}-e^1\right]\cdot\left[\frac{5p}{6}\right]$$

c) $\iint_C \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$ **, onde:** $C = \left\{(x;y)\in \Re^2 : x^2+y^2 \le 2x\right\}$

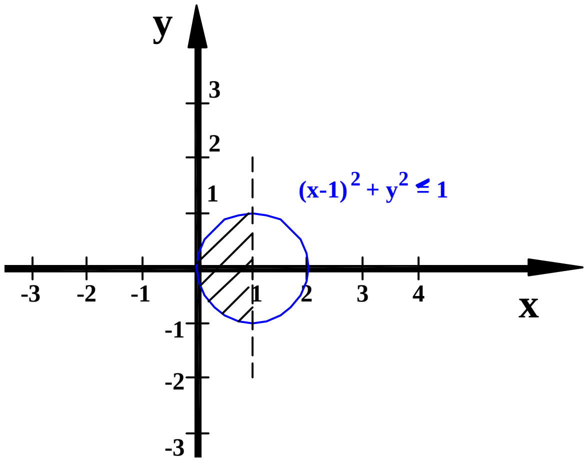
R:

Perante esta desigualdade, teremos que antes de mais proceder ao seu rearranjo:

$$x^2 + y^2 \le 2x \Rightarrow x^2+y^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow^{7} \left(x^2-2x+y^2\right)+1 = (0)+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x+1\right)+y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow Circunferência\begin{cases} Centro \rightarrow (1;0) \\ Raio \rightarrow \sqrt{1} = 1\end{cases}$$

[7] Somar e subtrair o mesmo valor em ambos os membros de uma mesma expressão nunca altera o resultado final. Neste caso procedeu-se a este passo para conseguir obter a expressão: $(x-1)^2$

Gráfico e respectiva Área resultante	ATENÇÃO!!!
	*Mudança de variáveis para coordenadas polares, onde:* $\begin{Bmatrix} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot sen q \end{Bmatrix}$; $\lvert J \rvert = r$ Sendo: $r \rightarrow$ *raio* (sempre positivo); $q \rightarrow$ ângulo abrangido pela área;

Uma vez que a circunferência está descentrada em relação à origem, então teremos que:

$$\begin{Bmatrix} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot sen q \\ x^2 + y^2 = 2x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow (r \cdot \cos q)^2 + (r \cdot sen q)^2 = 2 \cdot (r \cdot \cos q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (r^2 \cdot \cos^2 q) + (r^2 \cdot sen^2 q) = 2 \cdot r \cdot \cos q \Leftrightarrow r^2 \cdot \underbrace{(\cos^2 q \cdot sen^2 q)}_{=1} = 2 \cdot r \cdot \cos q \Leftrightarrow r = 2 \cdot \cos q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{2 \cdot \cos q}{2} \Leftrightarrow r = \cos q$$ → porque a área é apenas metade da circunferência.

Da observação atenta do gráfico anterior e do que se obteve nos cálculos anteriores, podemos concluir que teremos os seguintes limites de integração: $\begin{Bmatrix} 0 \leq r \leq \cos q \\ -\frac{p}{2} \leq q \leq \frac{p}{2} \end{Bmatrix}$

Sabendo da teoria que: $\iint_D f(x;y)dxdy \equiv \iint_{D'} [f(r \cdot \cos q; r \cdot sen q) \cdot \lvert J \rvert] dq dr$ e sabendo desta alínea que: $f(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, então teremos que:

$$f\left(r\cdot\cos q;\, r\cdot sen q\right)=\sqrt{\left(r\cdot\cos q\right)^{2}+\left(r\cdot sen q\right)^{2}}\Leftrightarrow f\left(r\cdot\cos q;\, r\cdot sen q\right)=\sqrt{r^{2}\cdot\left(\cos^{2} q+sen^{2} q\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(r\cdot\cos q;\, r\cdot sen q\right)=\sqrt{r^{2}\cdot 1}\Leftrightarrow f\left(r\cdot\cos q;\, r\cdot sen q\right)=r$$

Assim sendo, o integral e respectivos limites de integração para a área obtida será o seguinte:

$$\iint_{C}\left(\sqrt{x^{2}+y^{2}}\right)dxdy\equiv\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\int_{0}^{\cos q}\left[r\cdot r\right]drdq=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\int_{0}^{\cos q}\left[r^{2}\right]drdq=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\left[\frac{r^{2+1}}{2+1}\right]_{0}^{\cos q}dq=$$

$$=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\left[\frac{\left(\cos q\right)^{3}}{3}-\frac{0^{3}}{3}\right]dq=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\left[\frac{\cos^{3} q}{3}\right]dq=\frac{1}{3}\cdot\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\left(\cos^{3} q\right)dq=\frac{1}{3}\cdot\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cos q\cdot\left(\cos^{2} q\right)dq=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cos q\cdot\left(1-sen^{2} q\right)dq=\frac{1}{3}\cdot\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\left(\cos q\right)dq-\frac{1}{3}\cdot\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\left(\underbrace{\cos q}_{u'}\cdot\underbrace{sen^{2} q}_{u^{a}}\right)dq=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[-sen q\right]_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{sen^{2+1} q}{2+1}\right]_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\left[-sen\frac{p}{2}-\left(-sen\left(-\frac{p}{2}\right)\right)\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{sen^{3}\frac{p}{2}}{3}-\frac{sen^{3}\left(-\frac{p}{2}\right)}{3}\right]=$$

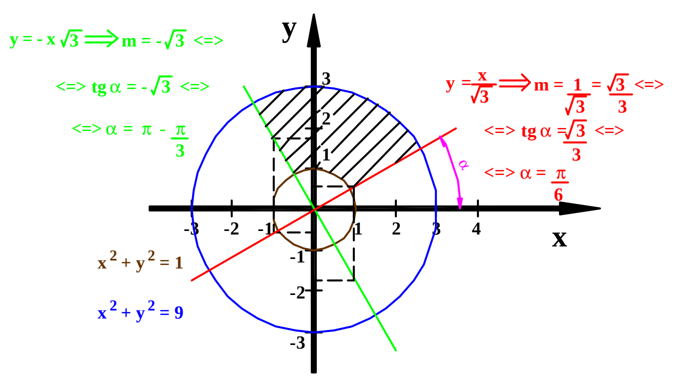
$$=\frac{1}{3}\cdot\left[-1-\left(-\left(-1\right)\right)\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{3}\cdot\left[-2\right]=-\frac{2}{3}$$

d) $\iint\limits_D arctg\left(\frac{y}{x}\right)dxdy$**, onde:** $D=\left\{(x;y)\in\Re^2 : 1\le x^2+y^2\le 9\ ;\ y\ge\frac{x}{\sqrt{3}}\ ;\ y\ge -x\sqrt{3}\right\}$

R:

Antes de mais, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades do domínio A:

<table>
<tr><th>Expressão VS. Descrição</th><th colspan="6">Valores</th></tr>
<tr><td colspan="7">$x^2+y^2\le 9\Rightarrow x^2+y^2=9\Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{9}=3$.</td></tr>
<tr><td colspan="7">$x^2+y^2\ge 1\Rightarrow x^2+y^2=1\Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{1}=1$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y\ge\frac{x}{\sqrt{3}}\Rightarrow y=\frac{x}{\sqrt{3}}\Rightarrow$ Recta obliqua.</td><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$</td><td>$-\frac{2}{\sqrt{3}}$</td><td>$-\frac{1}{\sqrt{3}}$</td><td>0</td><td>$\frac{1}{\sqrt{3}}$</td><td>$\frac{2}{\sqrt{3}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y\ge -x\sqrt{3}\Rightarrow y=-x\sqrt{3}\Rightarrow$ Recta obliqua.</td><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$y=-x\sqrt{3}$</td><td>$2\sqrt{3}$</td><td>$\sqrt{3}$</td><td>0</td><td>$-\sqrt{3}$</td><td>$-2\sqrt{3}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Gráfico e respectiva Área resultante</th><th>ATENÇÃO!!!</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Mudança de variáveis para coordenadas polares, onde:
$\left\{\begin{array}{l} x=r\cdot\cos q \\ y=r\cdot sen q\end{array}\right\}\ ;\ \lvert J\rvert = r$
Sendo: $r\rightarrow raio$ (sempre positivo);
$q\rightarrow$ ângulo abrangido pela área;</td></tr>
</table>

Da observação atenta do gráfico anterior, podemos concluir que teremos os seguintes limites de integração: $\left\{\begin{array}{l} 1\le r\le 3 \\ \frac{p}{6}\le q\le p-\frac{p}{3}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 1\le r\le 3 \\ \frac{p}{6}\le q\le\frac{2p}{3}\end{array}\right\}$

Sabendo da teoria que: $\iint\limits_{D} f(x;y)dxdy \equiv \iint\limits_{D'} \left[f(r\cdot\cos q;\, r\cdot senq)\cdot |J| \right] dq dr$ e sabendo desta alínea que: $f(x;y) = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, então teremos que:

$$f(r\cdot\cos q;\, r\cdot senq) = arctg\left(\frac{r\cdot senq}{r\cdot\cos q}\right) \Leftrightarrow f(r\cdot\cos q;\, r\cdot senq) = arctg\left(\frac{senq}{\cos q}\right)$$

Assim sendo, o integral e respectivos limites de integração para a área obtida será o seguinte:

$$\iint\limits_{D} arctg\left(\frac{y}{x}\right)dxdy \equiv \int_{\frac{p}{6}}^{\frac{2p}{3}}\int_{1}^{3}\left[arctg\left(\frac{senq}{\cos q}\right)\cdot r\right]dr dq = \int_{\frac{p}{6}}^{\frac{2p}{3}} arctg\left(\frac{senq}{\cos q}\right)\cdot\int_{1}^{3}[r]dr dq =$$

$$= \int_{\frac{p}{6}}^{\frac{2p}{3}} arctg\left(\frac{senq}{\cos q}\right)\cdot\left[\frac{r^{1+1}}{1+1}\right]_{1}^{3} dq = \int_{\frac{p}{6}}^{\frac{2p}{3}} arctg\left(\frac{senq}{\cos q}\right)\cdot\left[\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right]dq = \int_{\frac{p}{6}}^{\frac{2p}{3}} arctg\left(\frac{senq}{\cos q}\right)\cdot[4]dq =$$

$$= 4\cdot\int_{\frac{p}{6}}^{\frac{2p}{3}} \underset{v'}{1}\cdot \underbrace{arctg\left(\frac{senq}{\cos q}\right)}_{u} dq =^{8} ✪$$

Cálculos Auxiliares para a Integração por Partes
$\left\{\begin{array}{l} u = arctg\left(\frac{senq}{\cos q}\right) \Rightarrow u' = \frac{1}{1+\left(\frac{senq}{\cos q}\right)^2}\cdot\left(\frac{(senq)'_q\cdot\cos q - senq\cdot(\cos q)'_q}{(\cos q)^2}\right) \\ v' = 1 \Rightarrow v = q \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

---

[8] $P(u\cdot v') = u\cdot v - P(u'\cdot v) \rightarrow$ Primitivação por partes e $(arctg(u))' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{1}{1+\dfrac{sen^2 q}{\cos^2 q}} \cdot \left(\dfrac{\overbrace{(\cos q)\cdot \cos q - sen q \cdot (-sen q)}^{=\cos^2 q + sen^2 q = 1}}{(\cos q)^2} \right) \\ v = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{1}{\dfrac{\cos^2 q + sen^2 q}{\cos^2 q}} \cdot \left(\dfrac{1}{(\cos q)^2} \right) \\ v = q \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 q}} \cdot \left(\dfrac{1}{(\cos q)^2} \right) \\ v = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = \cos^2 q \cdot \left(\dfrac{1}{(\cos q)^2} \right) \\ v = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = q \end{cases}$$

$$P(u \cdot v') = u \cdot v - P(u' \cdot v) \Leftrightarrow P\left(arctg\left(\frac{sen q}{\cos q} \right) \cdot 1 \right) = arctg\left(\frac{sen q}{\cos q} \right) \cdot q - P(1 \cdot q) =$$

$$= arctg\left(\frac{sen q}{\cos q} \right) \cdot q - P(q) = arctg\left(\frac{sen q}{\cos q} \right) \cdot q - \left(\frac{q^{1+1}}{1+1} \right) = arctg\left(\frac{sen q}{\cos q} \right) \cdot q - \left(\frac{q^2}{2} \right)$$

Assim sendo, por substituição directa em ✪ teremos que:

$$✪ = 4 \cdot \left[arctg\left(\frac{sen q}{\cos q} \right) \cdot q - \left(\frac{q^2}{2} \right) \right]_{\frac{p}{6}}^{\frac{2p}{3}} =$$

$$= 4 \cdot \left[\left(arctg\left(\frac{sen \frac{2p}{3}}{\cos \frac{2p}{3}} \right) \cdot \frac{2p}{3} - \left(\frac{\left(\frac{2p}{3} \right)^2}{2} \right) \right) - \left(arctg\left(\frac{sen \frac{p}{6}}{\cos \frac{p}{6}} \right) \cdot \frac{p}{6} - \left(\frac{\left(\frac{p}{6} \right)^2}{2} \right) \right) \right] =$$

$$= 4 \cdot \left[\left[\left(arctg\left(\frac{sen\frac{2p}{3}}{\cos\frac{2p}{3}} \right) \cdot \frac{2p}{3} - \left(\frac{\left(\frac{4p^2}{9} \right)}{2} \right) \right) - \left(arctg\left(\frac{sen\frac{p}{6}}{\cos\frac{p}{6}} \right) \cdot \frac{p}{6} - \left(\frac{\left(\frac{p^2}{36} \right)}{2} \right) \right) \right] \right] =$$

$$= 4 \cdot \left[\left[\left(arctg\left(\frac{sen\frac{2p}{3}}{\cos\frac{2p}{3}} \right) \cdot \frac{2p}{3} - \left(\frac{4p^2}{18} \right) \right) - \left(arctg\left(\frac{sen\frac{p}{6}}{\cos\frac{p}{6}} \right) \cdot \frac{p}{6} - \left(\frac{p^2}{72} \right) \right) \right] \right]$$

6. Calcule o integral duplo: $\iint_A \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) dxdy$, onde A é a região do plano limitado pela elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, usando coordenadas polares generalizadas r e q segundo as fórmulas: $\frac{x}{a} = r \cdot \cos q$ e $\frac{y}{b} = r \cdot sen q$.

R:

Sendo a equação geral da elipse: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, então e por comparação com o que é dito no enunciado podemos concluir que a elipse deste exercício está centrada na origem, isto porque: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow (x_0; y_0) = (0;0)$.

Também é mencionado no enunciado que as coordenadas polares generalizadas para uma elipse são dadas por: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = r \cdot \cos q \\ \frac{y}{b} = r \cdot sen q \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = a \cdot r \cdot \cos q \\ y = b \cdot r \cdot sen q \end{array} \right\}$

Assim sendo teremos agora, para o cálculo do Jacobiano o seguinte:

$$|J| = \begin{bmatrix} (a\cdot r\cdot \cos q)'_r & (a\cdot r\cdot \cos q)'_q \\ (b\cdot r\cdot sen q)'_r & (b\cdot r\cdot sen q)'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a\cdot \cos q) & (-a\cdot r\cdot sen q) \\ (b\cdot sen q) & (b\cdot r\cdot \cos q) \end{bmatrix} =$$

$$= [(a\cdot \cos q)\times(b\cdot r\cdot \cos q)] - [(b\cdot sen q)\times(-a\cdot r\cdot sen q)] = (a\cdot b\cdot r\cdot \cos^2 q) - (-a\cdot b\cdot r\cdot sen^2 q) =$$

$$= (a\cdot b\cdot r)\times \underbrace{(\cos^2 q + sen^2 q)}_{=1} \Leftrightarrow |J| = a\cdot b\cdot r$$

De igual forma, também teremos que:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{a} = r\cdot \cos q \\ \frac{y}{b} = r\cdot sen q \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = (r\cdot \cos q)^2 + (r\cdot sen q)^2 =$$

$$= (r^2\cdot \cos^2 q) + (r^2\cdot sen^2 q) = r^2\cdot \underbrace{(\cos^2 q + sen^2 q)}_{=1} = r^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$$

Assim sendo, teremos então que: $\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow r = 1$, porque o raio é sempre positivo.

Sabendo que a restrição geral para θ nas coordenadas polares é: $0 \le q \le 2p$, então o integral e respectivos limites de integração serão os seguintes:

$$\iint_A \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) dxdy \equiv \int_0^{2p}\int_0^1 \left[\sqrt{1-r^2} \cdot (a \cdot b \cdot r) \right] dr dq = a \cdot b \cdot \int_0^{2p}\int_0^1 \left[(1-r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (r) \right] dr dq =$$

$$= a \cdot b \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \int_0^{2p}\int_0^1 \left[\underbrace{(-2 \cdot r)}_{u'} \cdot \underbrace{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}_{u^a} \right] dr dq = \left(-\frac{a \cdot b}{2} \right) \cdot \int_0^{2p} \left[\frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 dq =$$

$$= \left(-\frac{a \cdot b}{2} \right) \cdot \int_0^{2p} \left[\frac{(1-1^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(1-0^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] dq = \left(-\frac{a \cdot b}{2} \right) \cdot \int_0^{2p} \left[-\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] dq = \left(-\frac{a \cdot b}{2} \right) \cdot \int_0^{2p} \left[-\frac{2}{3} \right] dq =$$

$$= \left(-\frac{a \cdot b}{2} \right) \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot \int_0^{2p} 1 dq = \left(\frac{a \cdot b}{3} \right) \cdot [q]_0^{2p} = \left(\frac{a \cdot b}{3} \right) \cdot [2p - 0] = 2p \cdot \frac{a \cdot b}{3}$$

7. **Usando integrais duplos, calcule as áreas das regiões planas limitadas pelas curvas seguintes:**

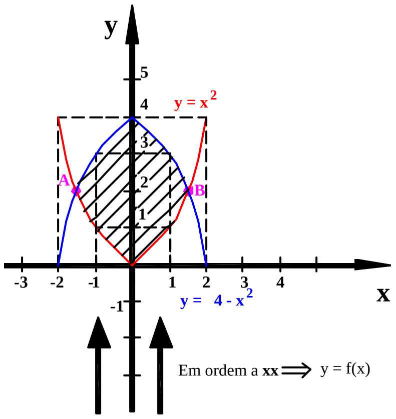
a) $\begin{Bmatrix} y \geq x^2 \\ y \leq 4 - x^2 \end{Bmatrix}$

R:

Atendendo às expressões apresentadas nesta alínea, vamos começar por desenhar a área correspondente:

Expressão VS. Descrição	Valores					
$y \geq x^2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow$ Parábola.	x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
	$y = x^2$	4	1	0	1	4

<table>
<tr><td rowspan="2">$y \le 4 - x^2 \Rightarrow y = 4 - x^2 \Rightarrow$ Parábola.</td><td>x</td><td>**-2**</td><td>**-1**</td><td>**0**</td><td>**1**</td><td>**2**</td></tr>
<tr><td>$y = 4 - x^2$</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Gráfico e respectiva Área resultante</th><th>Pontos de intersecção</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Pontos A e B:
$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ x^2 = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ 2x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$</td></tr>
</table>

Observando atentamente o gráfico e a área obtida, temos o seguinte integral em ordem a x:

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{4-x^2} [1] dydx \Leftrightarrow A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [y]_{x^2}^{4-x^2} dx \Leftrightarrow A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[\left(4 - x^2\right) - \left(x^2\right) \right] dx \Leftrightarrow A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[4 - 2x^2\right] dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \left[4x - \frac{2x^{2+1}}{2+1} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \Leftrightarrow A = \left[\left(4 \cdot \sqrt{2} - \frac{2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3}{3} \right) - \left(4 \cdot \left(-\sqrt{2}\right) - \frac{2 \cdot \left(-\sqrt{2}\right)^3}{3} \right) \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \left[\left(\frac{12 \cdot \sqrt{2}}{3} - \frac{2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{2}}{3} \right) - \left(\frac{12 \cdot \left(-\sqrt{2}\right)}{3} - \frac{2 \cdot \left(-\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(-\sqrt{2}\right)}{3} \right) \right] \Leftrightarrow$$

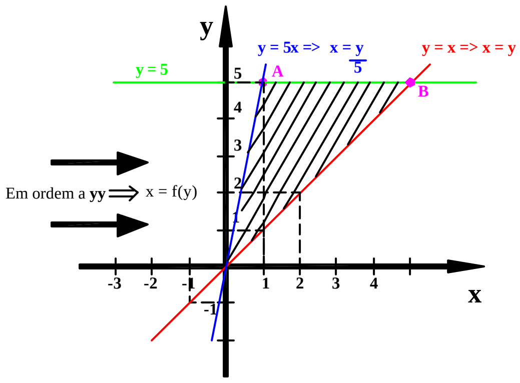
$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{12 \cdot \sqrt{2} - 4 \cdot \sqrt{2}}{3} - \left(\frac{-12 \cdot \sqrt{2} - 4 \cdot \left(-\sqrt{2}\right)}{3} \right) \right] \Leftrightarrow A = \left[\frac{24 \cdot \sqrt{2} - 8 \cdot \sqrt{2}}{3} \right] \Leftrightarrow A = \frac{16}{3} \cdot \sqrt{2}$$

b) $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq 5x \\ y \leq 5 \end{cases}$

R:

Atendendo às expressões apresentadas nesta alínea, vamos começar por desenhar a área correspondente:

Expressão VS. Descrição	Valores					
$y \geq x \Rightarrow y = x \Rightarrow$ Recta obliqua.	x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
	$y = x$	-2	-1	0	1	2
$y \leq 5x \Rightarrow y = 5x \Rightarrow$ Recta obliqua.	x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
	$y = 5x$	-10	-5	0	5	10
$y \leq 5 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow$ Recta paralela a x.						

Gráfico e respectiva Área resultante	Pontos de intersecção
	Ponto A: $\begin{cases} y = 5x \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$ Ponto B: $\begin{cases} y = x \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$

Observando atentamente o gráfico e a área obtida, temos o seguinte integral em ordem a y:

$$A = \int_0^5 \int_{\frac{y}{5}}^{y} [1] dxdy \Leftrightarrow A = \int_0^5 [x]_{\frac{y}{5}}^{y} dy \Leftrightarrow A = \int_0^5 \left[y - \frac{y}{5} \right] dy \Leftrightarrow A = \left[\frac{y^{1+1}}{1+1} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{y^{1+1}}{1+1} \right) \right]_0^5 \Leftrightarrow A = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{10} \right]_0^5 \Leftrightarrow$$

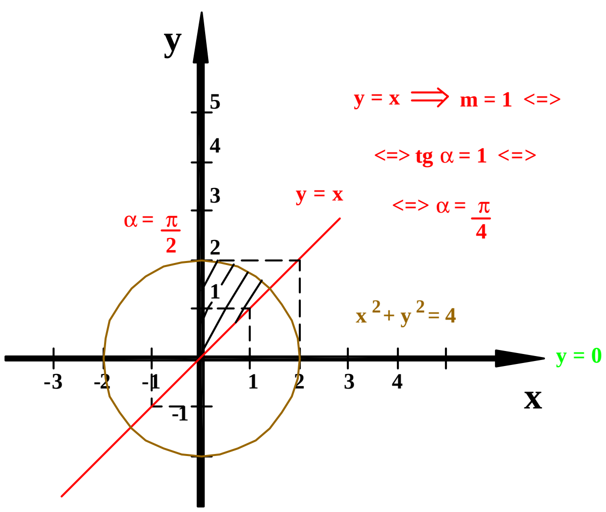
$$\Leftrightarrow A=\left[\left(\frac{5^2}{2}-\frac{5^2}{10}\right)-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{0^2}{10}\right)\right] \Leftrightarrow A=\left[\frac{5^3-5^2}{10}\right] \Leftrightarrow A=\frac{100}{10} \Leftrightarrow A=10$$

c) $\begin{cases} y \geq x \\ x^2+y^2 \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$

R:

Atendendo às expressões apresentadas nesta alínea, vamos começar por desenhar a área correspondente:

<table>
<tr><td>Expressão VS. Descrição</td><td colspan="6">Valores</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y \geq x \Rightarrow y = x \Rightarrow$ Recta obliqua.</td><td>x</td><td>**-2**</td><td>**-1**</td><td>**0**</td><td>**1**</td><td>**2**</td></tr>
<tr><td>$y = x$</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="7">$x^2+y^2 \leq 4 \Rightarrow x^2+y^2=4 \Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{4}=2$.</td></tr>
<tr><td colspan="7">$y \geq 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ Recta coincidente com o eixo x.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Gráfico e respectiva Área resultante</td><td>ATENÇÃO!!!</td></tr>
<tr><td>
</td><td>*Mudança de variáveis para coordenadas polares, onde:*
$\begin{cases} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot sen q \end{cases}$; $\left|J\right| = r$
Sendo: $r \rightarrow$ *raio* (sempre positivo);
$q \rightarrow$ ângulo abrangido pela área;</td></tr>
</table>

Da observação atenta do gráfico anterior, podemos concluir que teremos os seguintes limites de integração: $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ \dfrac{p}{4} \le q \le \dfrac{p}{2} \end{cases}$

Assim sendo, o integral em coordenadas polares para a área obtida será:

$$A = \int_0^2 \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} [1] \cdot (r) dq dr \Leftrightarrow A = \int_0^2 r \cdot [q]_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} dr \Leftrightarrow A = \int_0^2 r \cdot \left[\frac{p}{2} - \frac{p}{4}\right] dr \Leftrightarrow A = \left[\frac{p}{2} - \frac{p}{4}\right] \cdot \left[\frac{r^{1+1}}{1+1}\right]_0^2 \Leftrightarrow$$

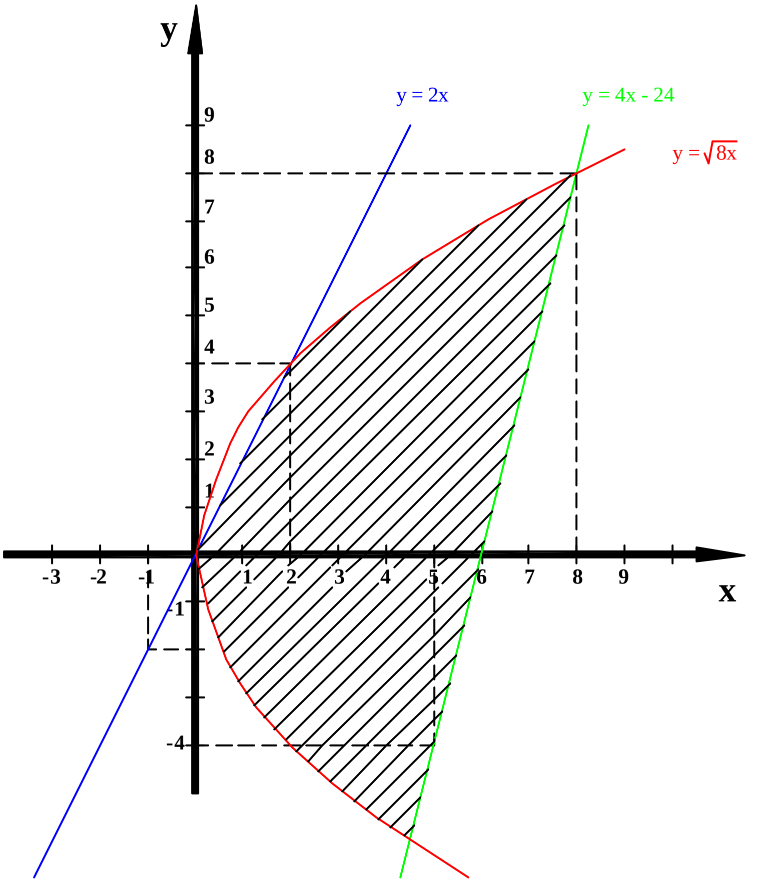
$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{2p - p}{4}\right] \cdot \left[\frac{2^2}{2}\right] \Leftrightarrow A = \frac{p}{2}$$

d) $\begin{cases} y^2 \le 8x \\ y \le 2x \\ y \ge 4x - 24 \end{cases}$

R:

Atendendo às expressões apresentadas nesta alínea, vamos começar por desenhar a área correspondente:

Expressão VS. Descrição	Valores					
$y^2 \le 8x \Rightarrow y^2 = 8x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{8x}$	x	**0**	**1**	**2**	**3**	
	$y = \sqrt{8x}$	0	$\sqrt{8}$	4	$\sqrt{24}$	
$y \le 2x \Rightarrow y = 2x \Rightarrow$ Recta.	x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
	$y = 2x$	-4	-2	0	2	4
$y \le 4x - 24 \Rightarrow y = 4x - 24 \Rightarrow$ Recta.	x	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
	$y = 4x - 24$	-12	-8	-4	0	4

Gráfico e respectiva Área resultante


Observando atentamente o gráfico e a área obtida, temos o seguinte integral em ordem a y:

$$A = \int_{-4}^{0} \int_{\frac{y^2}{8}}^{\frac{y+24}{4}} [1] dxdy + \int_{0}^{4} \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y+24}{4}} [1] dxdy + \int_{4}^{8} \int_{\frac{y^2}{8}}^{\frac{y+24}{4}} [1] dxdy \Leftrightarrow (\ldots)$$

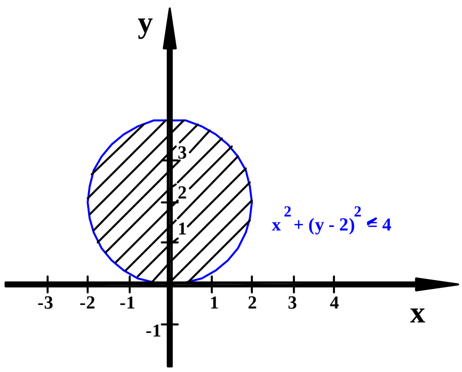
e) $x^2 + y^2 \leq 4y$

R:

Antes de mais vamos proceder ao rearranjo da expressão dada:

$$x^2 + y^2 \leq 4y \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 - 4y\right) + 4 \leq 0 + 4 \Leftrightarrow x^2 + \left(y-2\right)^2 \leq 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 + \left(y-2\right)^2 = 4 \Rightarrow$ Circunferência de centro (0;2) e raio $\sqrt{4} = 2$.

Gráfico e respectiva Área resultante


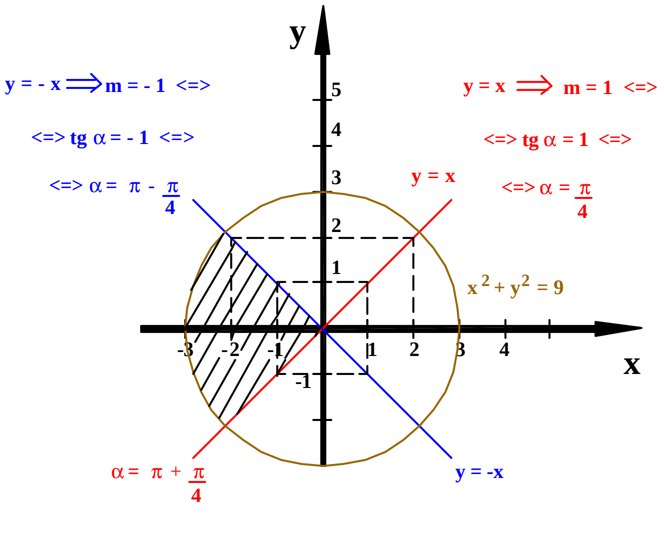
Da observação atenta do gráfico anterior, podemos concluir que teremos os seguintes limites de integração: $\begin{Bmatrix} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq q \leq 2p \end{Bmatrix}$

f) $\begin{Bmatrix} y \geq x \\ x^2 + y^2 \leq 9 \\ y \leq -x \end{Bmatrix}$

R:

Atendendo às expressões apresentadas nesta alínea, vamos começar por desenhar a área correspondente:

<table>
<tr><td>Expressão VS. Descrição</td><td colspan="6">Valores</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y \geq x \Rightarrow \; y = x \Rightarrow$ Recta obliqua.</td><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$y = x$</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="7">$x^2 + y^2 \leq 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{9} = 3$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y \leq -x \Rightarrow \; y = -x \Rightarrow$ Recta obliqua.</td><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$y = -x$</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>-2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Gráfico e respectiva Área resultante</td><td>ATENÇÃO!!!</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Mudança de variáveis para coordenadas polares, onde:
$\begin{Bmatrix} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot sen q \end{Bmatrix} \; ; \; |J| = r$
Sendo: $r \rightarrow$ raio (sempre positivo);
$q \rightarrow$ ângulo abrangido pela área;</td></tr>
</table>

Da observação atenta do gráfico anterior, podemos concluir que teremos os seguintes limites de integração: $\left\{\begin{array}{l} 0 \le r \le 3 \\ p - \dfrac{p}{4} \le q \le p + \dfrac{p}{4} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \le r \le 3 \\ \dfrac{3p}{4} \le q \le \dfrac{5p}{4} \end{array}\right\}$

Assim sendo, o integral em coordenadas polares para a área obtida será:

$$A = \int_0^3 \int_{\frac{3p}{4}}^{\frac{5p}{4}} [1] \cdot (r) dq dr \Leftrightarrow A = \int_0^3 \int_{\frac{3p}{4}}^{\frac{5p}{4}} (r) dq dr \Leftrightarrow A = \int_0^3 (r) \cdot [q]_{\frac{3p}{4}}^{\frac{5p}{4}} dr \Leftrightarrow A = \int_0^3 (r) \cdot \left[\frac{5p}{4} - \frac{3p}{4} \right] dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{2p}{4} \right] \cdot \int_0^3 (r) \cdot dr \Leftrightarrow A = \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{r^{1+1}}{1+1} \right]_0^3 \Leftrightarrow A = \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] \Leftrightarrow A = \frac{9p}{4}$$

8. Calcule através de integrais duplos os seguintes volumes:

a) Da pirâmide que é limitada pelos três planos coordenados e pelo plano:

$$x+2y+3z=6$$

R:

No enunciado é dito que para além do plano referido, a pirâmide também é limitada pelos três planos coordenados, isto significa que: $x=0$; $y=0$ e $z=0$, pelo que teremos:

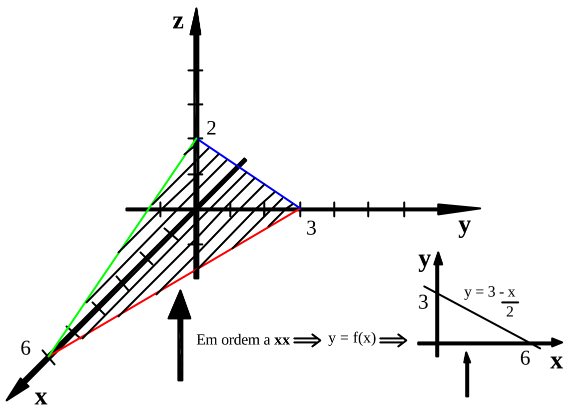
$$x+2y+3z=6 \Leftrightarrow 3z=6-x-2y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=2-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}y \Rightarrow 0\le z\le 2-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}y$$

$$z=0 \Rightarrow 0=2-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}y \Leftrightarrow \frac{x}{3}+\frac{2}{3}y=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}y=2-\frac{x}{3} \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}\cdot\left(2-\frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow y=3-\frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\le y\le 3-\frac{x}{2}$$



$$\left.\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow 0=2-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\cdot 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3}=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=6 \Rightarrow 0\le x\le 6$$

$$V=\int_0^6\int_0^{3-\frac{x}{2}}\left(2-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}y\right)dydx$$

Calculando agora o integral teremos que:

$$V=\int_0^6\int_0^{3-\frac{x}{2}}\left(2-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}y\right)dydx \Leftrightarrow V=\int_0^6\left[2\cdot y-\frac{x}{3}\cdot y-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{y^{1+1}}{1+1}\right)\right]_0^{3-\frac{x}{2}}dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^6\left[2\cdot\left(3-\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{3}\cdot\left(3-\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\left(3-\frac{x}{2}\right)^2}{2}\right)\right]dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^6\left[(6-x)+\left(-x+\frac{x^2}{6}\right)-\frac{\left(3-\frac{x}{2}\right)^2}{3}\right]dx\Leftrightarrow V=\int_0^6\left[(6-x)+\left(-x+\frac{x^2}{6}\right)-\frac{\frac{x^2}{4}-3x+9}{3}\right]dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^6\left[(6-x)+\left(-x+\frac{x^2}{6}\right)-\left(\frac{x^2}{12}-\frac{3x}{3}+\frac{9}{3}\right)\right]dx\Leftrightarrow V=\int_0^6\left[6-x-x+\frac{x^2}{6}-\frac{x^2}{12}+x-3\right]dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^6\left[3-x+\frac{2x^2-x^2}{12}\right]dx\Leftrightarrow V=\int_0^6\left[\frac{x^2}{12}-x+3\right]dx\Leftrightarrow V=\left[\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)-\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)+3\cdot x\right]_0^6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\left[\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{6^3}{3}\right)-\left(\frac{6^2}{2}\right)+3\cdot 6\right]\Leftrightarrow V=\left[\frac{1}{12}\cdot\left(6\cdot\frac{36}{3}\right)-\left(\frac{36}{2}\right)+18\right]\Leftrightarrow V=\left[\frac{1}{2}\cdot 12-18+18\right]\Leftrightarrow$$

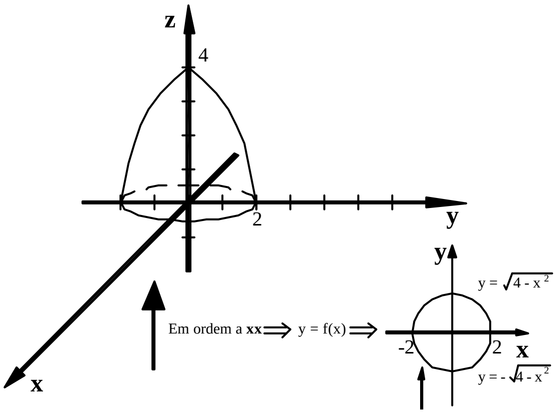
$$\Leftrightarrow V=6$$

b) Do sólido limitado pela superfície de equação: $z = 4 - x^2 - y^2$ **e pelo plano:** $z = 0$

R:

No enunciado é dito que para além do plano referido, o sólido também é limitado por $z = 0$, pelo que teremos:

$$z = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$$



$$z = 0 \Rightarrow 0 = 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$$

$$\left.\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow 0 = 4 - x^2 - 0^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{\left(-\sqrt{4-x^2}\right)}^{\left(\sqrt{4-x^2}\right)} \left(4 - x^2 - y^2\right) dydx$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Calculando agora o integral teremos que:

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{\left(-\sqrt{4-x^2}\right)}^{\left(\sqrt{4-x^2}\right)} \left(4 - x^2 - y^2\right) dydx \Leftrightarrow V = \int_{-2}^{2} \int_{\left(-\sqrt{4-x^2}\right)}^{\left(\sqrt{4-x^2}\right)} \left(4 - \left(x^2 + y^2\right)\right) dydx \Leftrightarrow$$ [9] ☆

$$-2 \leq x \leq 2 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq r \leq 2$$

$$-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq q \leq 2p$$

---

[9] Uma vez que a área representada no plano XOY é uma circunferência, então vamos proceder à transformação das coordenadas cartesianas em coordenadas polares.

Sabendo da teoria que: $\iint_{D} f(x;y)dxdy \equiv \iint_{D'} \left[f\left(r \cdot \cos q ; r \cdot sen q\right) \cdot |J| \right] dq dr$ e sabendo desta alínea que: $f(x;y) = 4 - \left(x^2 + y^2\right)$, então teremos que:

$$f\left(r \cdot \cos q ; r \cdot sen q\right) = 4 - r^2 \cdot \underbrace{\left(\cos^2 q + sen^2 q\right)}_{=1} \Leftrightarrow f\left(r \cdot \cos q ; r \cdot sen q\right) = 4 - r^2$$

Assim sendo, e por substituição dos respectivos valores em ☆, teremos que:

$$V = \int_0^2 \int_0^{2p} \left(4 - r^2\right) \cdot [r] dq dr \Leftrightarrow V = \int_0^2 \int_0^{2p} \left(4 \cdot r - r^3\right) dq dr \Leftrightarrow V = \int_0^2 \left(4 \cdot r - r^3\right) \cdot [q]_0^{2p} dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \int_0^2 \left(4 \cdot r - r^3\right) \cdot [2p - 0] dr \Leftrightarrow V = 2p \cdot \int_0^2 \left(4 \cdot r - r^3\right) dr \Leftrightarrow V = 2p \cdot \left[4 \cdot \frac{r^{1+1}}{1+1} - \frac{r^{3+1}}{3+1}\right]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = 2p \cdot \left[4 \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{2^4}{4}\right] \Leftrightarrow V = 2p \cdot \left[4 \cdot \frac{4}{2} - \frac{4 \cdot 4}{4}\right] \Leftrightarrow V = 8p$$

c) Do sólido limitado pelo parabolóide hiperbólico: $z = x^2 - y^2$ **e os planos:** $y = 0$ **;** $z = 0$ **e** $x = 1$**.**

R:

No enunciado é dito que para além do plano referido, o sólido também é limitado pelos planos $z = 0$, $z = 0$ e $x = 1$, pelo que teremos:

$$z = x^2 - y^2 \Rightarrow 0 \leq z \leq x^2 - y^2$$

$$z = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - y^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2} \Rightarrow -\sqrt{x^2} \leq y \leq \sqrt{x^2}$$

$$\begin{Bmatrix} y = 0 \\ z = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 0 = x^2 - 0^2 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{\left(-\sqrt{4-x^2}\right)}^{\left(\sqrt{4-x^2}\right)} \left(4 - x^2 - y^2\right) dydx$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$