Departamento de Matemática e Aplicações

Analise Matemática B

Ficha 7b

MIECOM

Gradiente, Derivadas direccionais, Fórmula de Taylor, Plano tangente, Recta normal

1. Determine o campo vectorial gradiente (grad $f = \vec{\nabla} f$) das seguintes funções

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$,

   (b) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2. Determine o gradiente (grad $f = \vec{\nabla} f$) da função $f(x, y, z) = (x^2 + \cos z) \exp(-x + y)$ no ponto $(a, b, c) = (1, 1, \pi)$.

3. Seja $f(x, y) = \ln \|\vec{r}\|$, onde $\vec{r} = (x, y)$. Mostre que $\vec{\nabla} f = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^2}$

4. Calcule as derivadas dirigidas

   (a) da função $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ no ponto $(2, 1, 3)$ na direcção que vai deste ponto para o ponto $M = (5, 5, 15)$.

   (b) da função $f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$ no ponto $(1, 2)$ na direcção que faz com o eixo $\overrightarrow{OX}$ um ângulo de $60°$.

5. Sabendo que $D_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})} f(a, b) = 3\sqrt{2}$ e $D_{(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})} f(a, b) = 5$, determine $\vec{\nabla} f(a, b)$.

6. Em que direcção a partir do ponto (2,0) a função $f(x, y) = xy$ tem taxa de variação -1?

7. A temperatura no local (x, y) numa região do plano XOY é $T°C$ onde $T(x, y) = x^2 e^{-y}$.

   (a) Em que direcção a partir do ponto (2,1) a temperatura aumenta mais depressa?

   (b) Qual a taxa de crescimento nessa direcção?

8. Em que direcção a partir do ponto (a, b, c) a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ aumenta metade da sua taxa de variação máxima nesse ponto?

9. Seja $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$

   (a) Determine a derivada de f no ponto $P = (3, 4)$ segundo o vector $\cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2$.

   (b) Em que direcção se deve sair de P para que os valores da função aumentem o mais rapidamente possível?

   (c) Interprete geometricamente o resultado, atendendo ao gréfico de f.

10. Desenvolva a fórmula de Taylor até aos termos de 2^a ordem da função $f(x, y) = xy^2$, em torno do ponto $(1, 2)$.

11. Determine polinómio de Taylor do grau indicado para as seguintes funções em torno dos pontos indicados

(a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, grau 3, em torno do ponto $(1,0)$;

(b) $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{x+y^2} \exp(-t^2)dt$, grau 3, em torno do ponto $(0,0)$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{y}$, grau 2, em torno do ponto $(\frac{\pi}{2},1)$;

12. Determine as equações do plano tangente e da recta normal à superfície $x^2+y^2=4z$ no ponto $(2,-4,5)$.

13. Mostre que o plano tangente ao parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ em (0,0,0) intersecta a superfície em duas linhas rectas.

14. Mostre que a superfície $x^2 - 2xyz + y^3 = 4$ é perpendicular à superfície $x^2+1 = -2y^2+z^2$ no ponto de intersecção $(1,-1,2)$.