INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

**ENGENHARIA BIOMÉDICA – 1º ano /1º Semestre**

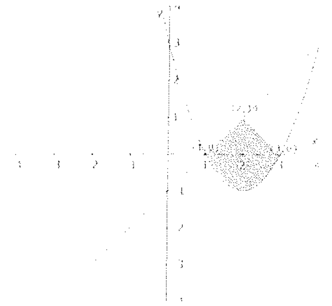
**Frequência-Parte I**

**30-Nov-2011** **Duração:2h**

**Importante:**
Não é permitida a consulta de quaisquer livros ou textos de apoio
A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efectuados.

---

1.Considere a seguinte região do plano representada na figura



a)Um dos conjuntos seguintes define a região da figura. Indique, justificando, a sua opção:

$$A=\{(x,y)\in\Re^2 : y\geq -1+(x-2)^2 \wedge y\leq -x-1 \wedge y\leq x+3\}$$

$$B=\{(x,y)\in\Re^2 : y\geq 1+(x-2)^2 \wedge y\leq x-1 \wedge y\leq x+3\}$$

$$C=\{(x,y)\in\Re^2 : y\geq -1+(x-2)^2 \wedge y\leq x-1 \wedge y\leq -x+3\}$$

$$D=\{(x,y)\in\Re^2 : y\geq 1+(x-2)^2 \wedge y\leq -x-1 \wedge y\leq -x+3\}$$

b)Calcule a área da região identificada na figura

c)Calcule o volume do sólido de revolução obtido por rotação da região identificada na figura em torno do eixo dos OX.

d)Indique, sem calcular, uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro da região representada na figura

2. Considere a região do plano $R=\{(x,y)\in\Re^2 : (x-1)^2+y^2\leq 1 \wedge y\geq -(x-2)^2\}$.

a)Represente graficamente a região R.

b)Utilizando conceitos de geometria elementar e recorrendo ao integral definido, calcule a área da região $R$.

3. Considere a seguinte região do plano $M = \{(x,y) \in \Re^2 : y \geq ln(x) \wedge y \leq -x^2 + 1 \wedge x \geq 0\}$

a) Represente graficamente a região $M$.

b) Explicite, através da utilização de integrais simples, uma expressão que permita calcular a medida do volume do sólido de revolução obtido por rotação da região em torno do eixo OY.

c) Que pode concluir da existência da medida identificada na alínea anterior?

4. Considere a seguinte função real de variável real $f(x) = \dfrac{1}{x(1 - ln(x))}$

a) Determine o domínio da função e averigúe a continuidade da função.

b) Justifique que o seguinte integral $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x(1 - ln(x))} dx$ é de 1ª espécie e determine a sua natureza.

c) Que pode concluir da natureza do integral $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(1 - ln(x))} dx$ ?

5. Aplicando o critério da razão, determine os valores de $x \in \Re$ para os quais a série é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^{2n+1}}{3^{2n}(3n-1)^2}$$

6. Considere a seguinte série numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+4}$$

a) Estude a natureza da série dada.

b) Que pode concluir sobre a sua convergência absoluta?

7. a) Prove que a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^{2n+1}} \quad \text{é igual a} \quad \frac{4}{39}$$

b) Que pode concluir da natureza da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^{2n}} + \frac{3}{\sqrt[3]{n^5}}$ ?

**Cotação**

| 1a | 1b | 1c | 1d | 2a | 2b | 3a | 3b | 3c | 4a | 4b | 4c | 5 | 6a | 6b | 7a | 7b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 1,5 | 1,5 | 1,0 | 1,0 | 1,5 | 1,0 | 1,5 | 1,0 | 0,5 | 1,5 | 1,0 | 2 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 |

1.

a) Parábola

$V(2,-1)$, logo $y = a(x-2)^2 - 1$ o que exclui os conjuntos B e D (ou é o A ou o C)

Rectas

1) Passa em $(1,0)$ e $(2,1)$: $y = x - 1$ exclui o conj. A

Logo tem que ser o C.

b)

$$Area = \int_1^2 (x-1) - (-1 + (x-2)^2)\,dx + \int_2^3 (-x+3) - (-1 + (x-2)^2)\,dx$$

$$= \int_1^2 x - 1 + 1 - (x-2)^2\,dx + \int_2^3 -x + 3 + 1 - (x-2)^2\,dx =$$

$$= \int_1^2 x - (x^2 - 4x + 4)\,dx + \int_2^3 -x + 4 - (x^2 - 4x + 4)\,dx =$$

$$= \int_1^2 -x^2 + 5x - 4\,dx + \int_2^3 -x^2 + 3x\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_2^3 =$$

$$= -\frac{8}{3} + 10 - 8 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right) + (-9) + \frac{27}{2} - \left(-\frac{8}{3} + 6\right) =$$

$$= -\cancel{\frac{8}{3}} + 2 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + \cancel{4} - 9 + \frac{27}{2} + \cancel{\frac{8}{3}} - \cancel{6} =$$

$$= \frac{1}{3} + 11 - 9 = \frac{1}{3} + \underset{(3)}{2} = \frac{7}{3}$$

1

c) A rotação da região acima da parábola e abaixo do eixo Ox sobrepõe a restante região aquando da rotação

$$V = \pi \int_1^3 \left[-1+(x-2)^2\right]^2 - 0^2\,dx = \pi \int_1^3 1 - 2(x-2)^2 + (x-2)^4\,dx =$$

$$= \pi \left[ x - \frac{2(x-2)^3}{3} + \frac{(x-2)^5}{5} \right]_1^3 =$$

$$= \pi \left[ 3 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \left( 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) \right] =$$

$$= \pi \left( 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) = \pi\, \frac{30-20+6}{15} = \frac{16}{15}\pi$$

d) Distância entre $A(1,0)$ e $B(2,1)$: $\overline{AB} = \sqrt{(1-2)^2+(0-1)^2} = \sqrt{2}$

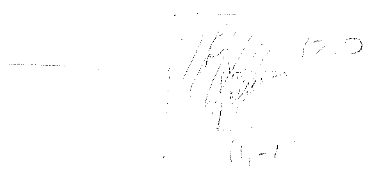
Distância entre $B(2,1)$ e $C(3,0)$: $\overline{BC} = \sqrt{(2-3)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$

Arco da parábola entre $x=1$ e $x=3$:

$$\int_1^3 \sqrt{1+\left[\left(-1+(x-2)^2\right)'\right]^2}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1+\left(2(x-2)\right)^2}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1+4(x-2)^2}$$

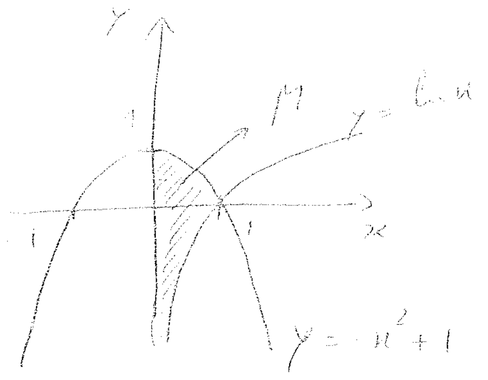
Logo, o perímetro é $2\sqrt{2} + \int_1^3 \sqrt{1+4(x-2)^2}\,dx$

2/



3.

a)




b) $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^{y}$

$y = -x^2+1 \Leftrightarrow -x^2 = y-1 \Leftrightarrow x^2 = 1-y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1-y}$

$$V = \pi \int_{-\infty}^{0} (e^{y})^2 - 0^2 \, dy + \pi \int_{0}^{1} (\sqrt{1-y})^2 - 0^2 \, dy$$

c) $$\int_{-\infty}^{0} e^{2y} dy = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} e^{2y} dy = \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{2} \left[ e^{2y} \right]_{t}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \to -\infty} \left( 1 - e^{2t} \right) \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

$e^{2t} \to 0$ qdo $t \to -\infty$

Verifica-se a existência da medida do volume tendo o valor de

$$V = \frac{\pi}{2} + \pi \int_{0}^{1} 1-y \, dy = \frac{\pi}{2} + \pi \left[ y - \frac{y^2}{2} \right]_{0}^{1} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \pi \left[ 1 - \frac{1}{2} - 0 \right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

4/

4.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x(1-\ln x) \neq 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{$

C. Aux.

$x(1-\ln x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 1-\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \ln$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = e$

A função é o quociente de funções contínuas pelo que contínua em todo o seu domínio.

b) Todos os valores do domínio de integração fazem parte do domínio pelo que sendo também a função contínua nesses, o integral não é de 2ª espécie. (note-se que $3 > e$)

O limite de integração superior é $+\infty$ pelo que é de 1ª

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_3^t \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = -\lim_{t\to+\infty} \left[\ln|1-\ln x|\right]_3^t$$

C. Aux:

$$\int \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = -\int \frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx = -\ln|1-\ln x| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$= -\lim_{t\to+\infty} \left[\ln|1-\ln t| - \ln|1-\ln 3\right.$$

$= -\infty$, logo é divergente

$\ln t \to +\infty,\ t \to +\infty$

$|1-\ln t| \to +\infty,\ t \to +\infty$

c) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = \int_e^3 \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx + \int_3^{+\infty} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx$, como a ...

2ª parcela é div. o integral $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx$ é divergente.

5/

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^{2n-1}}{3^n(3n-1)^2}$$

$$\lim_n \frac{\left|\frac{(3x-1)^{2n+1}}{3^{n+1}(3n+2)^2}\right|}{\left|\frac{(3x-1)^{2n-1}}{3^n(3n-1)^2}\right|} = \lim_n \left| \frac{(3x-1)^{2n+1}}{(3x-1)^{2n}} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} \frac{(3n-1)^2}{(3n+2)^2} \right| =$$

$$= \lim_n \left| |3x-1|^2 \frac{1}{3} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^2 \right| = \frac{1}{3}|3x-1|^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow |3x-1|^2 < 3$$

$$|3x-1| < \sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3} < 3x-1 < \sqrt{3}$$

$$\frac{-\sqrt{3}+1}{3} < x < \frac{\sqrt{3}+1}{3}$$

$x = -\frac{\sqrt{3}+1}{3}$

C.A

$$(3x-1)^{2n-1} = \left(3\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{3}\right)-1\right)^{2n-1}$$

$$= (-\sqrt{3}+1-1)^{2n-1}$$

$$= (-\sqrt{3})^{2n-1}$$

$$= \left[(-\sqrt{3})^2\right]^n \cdot (-\sqrt{3})^{-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sqrt{3})^{2n-1}}{3^n} \frac{1}{(3n-1)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-\sqrt{3})^{-1} \frac{1}{(3n-1)^2}$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{3}} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}}_{\text{critério de comparação}}$$

$$\lim_n \frac{\frac{1}{(3n-1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{(3n-1)^2} = \frac{1}{9}$$

logo a série é convergente

e pelas propriedades das séries $-\frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$ é convergente

$x = \frac{\sqrt{3}+1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^{2n-1}}{3^n} \frac{1}{(3n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3})^{-1} \frac{1}{(3n-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}}_{\text{convergente}}$$

A série é convergente $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}+1}{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{3}\right]$

6. $$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n+4}}_{a_n}$$

a) É uma série alternada aplica-se o critério de Leibniz

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+4}$$

$a_n \geq 0 \ \forall n$ e $\lim \frac{\sqrt{n}}{n+4} = 0$

$a_n$ é decrescente? Seja $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+4) - \sqrt{x}}{(x+4)^2} = \frac{x+4-2x}{2\sqrt{x}(x+4)^2} = \frac{-x+4}{2\sqrt{x}(x+4)^2} < 0$$

para $x > 4$

$a_n$ é decrescente para $n > 4$

Como os primeiros termos de uma série não alteram a natureza da série tem-se que a série alternada é convergente

b) Série dos módulos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{n+4} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$$ é uma série

divergente pois

$$\lim_n \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+4}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$ e $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é uma série

de Dirichlet com $\alpha = \frac{1}{2}$

logo divergente

7. a) $\sum_{n=0} \underbrace{\frac{3^{n-1}}{4^{2n+1}}}_{u_n} = \frac{4}{39}$ (ERRO no enunciado!)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^n}{4^{2n+3}}}{\frac{3^{n-1}}{4^{2n+1}}} = \frac{3^n}{3^{n-1}} \frac{4^{2n+1}}{4^{2n+3}} = \frac{3}{4^2} = \frac{3}{16} = \text{constante}$$

logo trata-se de uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{16} < 1$ convergente

Soma da série

$$u_1 = \frac{3^{-1}}{4} = \frac{1}{12}$$

$$S = \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{3}{16}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{16-3}{16}} = \frac{16}{12 \times 13} = \frac{4}{39}$$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{4^{2n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1} \cdot 3}{4^{2n+1} \cdot 4^{-2}} = 48 \underbrace{\sum_{n=2} \frac{3^{n-1}}{4^{2n+1}}}_{\text{série convergente}}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n^5}} = 3 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}}}_{\text{convergente pois } \alpha = 5/3 > 1}$ série de Dirichlet

A soma das séries é também convergente.

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

**ENGENHARIA BIOMÉDICA – 1º ano /1º Semestre**

## Mini-teste-Séries

**07-Dez-2011**

**Duração:30'**

**Importante:**

Não é permitida a consulta de quaisquer livros ou textos de apoio

A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efectuados.

---

1.Aplicando o critério da razão, determine os valores de $x \in \Re$ para os quais a série é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n-1}}{4^n (2n+1)!}$$

2.Determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n^2+2}$.

3.Considere as seguintes séries numéricas:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \qquad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{2n+1}}$$

a)Classifique cada uma das séries dadas.

b)Estude a natureza da série i). Que pode concluir sobre a sua convergência absoluta?

c) Prove que série ii) é convergente de soma igual a $\frac{3}{14}$.

d)Utilizando os resultado anteriores e as propriedades das séries numéricas, que pode concluir da natureza da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{9^n} + \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ ?

---

**Cotação**

| 1 | 2 | 3a | 3b | 3c | 3d |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 |

Mini Teste - 7 Dez. 11

1. Critério da razão

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \left|\frac{\frac{(2x-1)^{2n+1}}{4^{n+1}(2n+3)!}}{\frac{(2x-1)^{2n-1}}{4^n(2n+1)!}}\right| = \lim_n \left|\frac{(2x-1)^{2n+1}}{(2x-1)^{2n-1}} \frac{4^n(2n+1)!}{4^{n+1}(2n+3)!}\right|$$

$$= \lim_n |2x-1|^2 \frac{1}{4} \cancel{\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}}^{\to 0} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a série é absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$

2. Pela condição necessária de convergência

$\lim_n \frac{3n^2+1}{n^2+2} = 3 \neq 0$ logo a série é divergente

3. a) i) série alternada pois o termo geral da série é do tipo $(-1)^n a_n$, isto é, toma alternadamente valores positivos e negativos

ii) série geométrica uma vez que o termo geral é uma progressão geométrica

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^n}{3^{2n+3}}}{\frac{2^{n-1}}{3^{2n+1}}} = \frac{2^n \; 3^{2n+1}}{2^{n-1} \; 3^{2n+3}} = \frac{2}{9}$$

b) Critério de Leibniz

$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$a_n$ é decrescente?

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \qquad f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1}$$

$f'(x) < 0 \quad \forall x > 1$

pelo que $a_n$ será decrescente

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$$

pelo critério de Leibniz a série é convergente.

Convergência absoluta:

Análise da série dos módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

Critério da comparação:

$$\lim_n \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0, +\infty$$

série de Dirichlet divergente pois $\alpha = 1/2$

as séries são da mesma natureza logo a série dos módulos é divergente e a série dada não é absolutamente convergente.

c) (i) série geométrica de razão $\frac{2}{9} < 1$ é convergente

$$S = \frac{a}{1-R} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{2}{9}} = \qquad a = u_0 = \frac{2^{-1}}{3} = \frac{1}{6}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7 \times 6} = \frac{3}{14}.$$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot 2^2 \times 3}{3^{2n} \cdot 3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{12\, 2^{n-1}}{3^{2n+1}} =$

$$\underbrace{= 12 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{2n+1}}}_{conv}}_{conv.}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ e' Divergente a serie

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{9^n} + \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ e' divergente.