

1. Considere um sinal discreto aleatório  $x[n]$  e a estimativa da sequência de autocorrelação dada por:

$$C_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n) \cdot x^*(n+m)$$

- a) Sabendo que quando  $N \gg |m|$  a variância deste estimador é dada por

$$\text{var}[C_{xx}(m)] \approx \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} [\phi_{xx}^2(r) + \phi_{xx}(r-m) + \phi_{xx}(r+m)]$$

como o classifica relativamente à consistência? Justifique.

- b) Mostre que o valor médio do periodograma é dado por:

$$E[I_N(\Omega)] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}(m) e^{-j\Omega m}$$

- c) Mostre que o valor médio do periodograma está relacionado com a densidade espectral de potência por

$$E[I_N(\Omega)] = P_{xx}(\Omega) * \frac{1}{N} \left( \frac{\sin\left(\Omega \frac{N}{2}\right)}{\sin \frac{\Omega}{2}} \right)^2$$

- d) Enuncie e justifique o método de Bartlett para a estimação da densidade espectral de potência. Mostre que este método diminui a resolução espectral. Proponha uma alteração ao método que não apresente esta desvantagem. Em sua opinião este aumento de resolução espectral é efetivo? Justifique.

2. Considere um sistema discreto LTI caracterizado pela função de transferência

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

e ao qual é aplicado um sinal ruído branco de média nula.

- Explique o que entende por um sinal ruído branco. Caracterize-o em termos de densidade espectral de potência e sequência de autocorrelação. Justifique.
- Dos métodos de estimação espectral que conhece qual o mais indicado para estimar a densidade espectral de potência do processo de saída? Justifique.
- Mostre que a autocorrelação do sinal de saída é dada por

$$\varphi_{xx}(m) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_{xx}(|m-k|)$$

- Considere que dispõe de uma amostra do sinal de saída de 5 pontos  $\{1, -1, 1, 0, -1\}$ . Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para  $-4 \leq m \leq 4$ .
- Determine o erro do preditor.
- Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para  $m > 4$  e  $m < -9$ .
- Determine o espectro de máxima entropia do sinal de saída do sistema.

PDS estudo - cont.

b)  $I_N(\omega) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} c_{xx}(m) e^{-j\omega m}$

$E\{I_N(\omega)\} = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}(m) e^{-j\omega m}$   
 → indo à linha anterior

c)  $E\{I_N(\omega)\} = P_{xx}(\omega) * \left( \frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2} \right)^2 \cdot \frac{1}{N}$

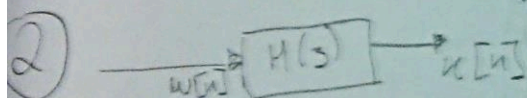
$$N-|m| \xleftrightarrow{\text{T.F.}} \text{sinc}^2(\omega/2)$$
  

$$\phi_{xx}(\omega) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} P_{xx}(\omega)$$

d) Devido ao facto da variância do periodograma não tender para 0 com o aumento do tamanho da amostra tentou-se arranjar métodos que diminuíssem a variância do periodograma.

Bartlett usou o conhecimento da estatística de que a soma de  $K$  variáveis aleatórias todas com a mesma variância geram uma variável aleatória cuja variância é  $\frac{1}{K}$  x a variância de cada uma. A forma de conseguir isto é dividir os dados em  $K$  segmentos, calcular o periodograma de cada segmento e estimar o espectro do sinal pela média dos periodogramas de cada segmento.

Fazendo uma amostra de  $N$  pontos, vamos ter  $N$  amostras. Com este método, em cada segmento vamos ter  $J$  pontos. No total, temos vamos ter  $N/J$  segmentos.



a) Ruído branco - sinal aleatório cujas amostras são não autocorrelacionadas

$\phi_{ww} = \sigma_w^2 \delta(m) + w_w^2 = \sigma_w^2 \delta(m)$

$P_{ww} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{ww}(m) e^{-j\omega m} = \sigma_w^2$

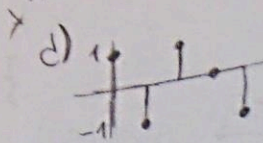
b) Método da entropia máxima, porque processos auto-regressivos têm sequência de autocorrelação infinito e os métodos clássicos truncam a sequência de autocorrelação.

c)  $H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{X(z)}{W(z)}$   $X(z) = \sum_{k=1}^N a_k X(z) z^{-k} + W(z)$   
(IDTFT)  $x[n] = \sum_{k=1}^N a_k x[n-k] + w[n]$   
 $\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^N a_k \hat{x}[n-k]$   $x[n] = \hat{x}[n] + w[n]$



$$\begin{aligned} \in \{x[n]x[n+m]\} &= \in \left\{ \sum_{k=1}^N a_k x[n-k]x[n-m] \right\} \\ \phi_{xx}(m) &= \sum_{k=1}^N a_k \in \{x[n-k]x[n-m]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n+m-(n-k) &= m+k \\ n-k-(n+m) &= -k-m \\ n-m-(n-k) &= k-m \\ n-k-(n-m) &= m-k \end{aligned}$$



$$c_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]x[n+m]$$

$$c_{xx}(0) = \frac{1}{5}(4) = \frac{4}{5}$$

sanatório

$$1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 4$$

$$c_{xx}(1) = c_{xx}(-1) = \frac{1}{5}(-1-1) = -2/5$$

$$c_{xx}(2) = c_{xx}(-2) = \frac{1}{5}(1-1) = 0$$

$$c_{xx}(3) = c_{xx}(-3) = \frac{1}{5}(1) = \frac{1}{5}$$

$$c_{xx}(4) = c_{xx}(-4) = \frac{1}{5}(-1) = -\frac{1}{5}$$

$$c_{xx}(k) = c_{xx}(-k)$$

Isto porque a função é par

e) MMSE — erro preditor

$$\text{MMSE} = \phi_{xx}(0) - \sum_{k=1}^N a_k \phi_{xx}(k)$$

Tes

① e

polinomial

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(2) & \phi_{xx}(3) \\ \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(2) \\ \phi_{xx}(2) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) \\ \phi_{xx}(3) & \phi_{xx}(2) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(1) \\ \phi_{xx}(2) \\ \phi_{xx}(3) \\ \phi_{xx}(4) \end{bmatrix}$$

substituir Indo à linha anterior, substituindo os  $\phi_{xx}(k)$  pelos  $c_{xx}(k)$ .

$$\begin{cases} 4a_1 - 2a_2 + a_4 = -2 \\ -2a_1 + 4a_2 - 2a_3 = 0 \\ -2a_2 + 4a_3 - 2a_4 = 1 \\ a_1 - 2a_3 + 4a_4 = -1 \end{cases}$$

$$\text{MMSE} = \frac{4}{5} - \left( a_1 \left( -\frac{2}{5} \right) + a_3 \left( \frac{1}{5} \right) + a_4 \left( -\frac{1}{5} \right) \right)$$

POS

$$f) \phi_{nn}(s) = a_1 \left( \underset{\substack{\downarrow \\ c_{nn}(4)}}{-1/s} \right) + a_2 \left( \underset{\substack{\downarrow \\ c_{nn}(3)}}{1/s} \right) + a_4 \left( \underset{\substack{\downarrow \\ c_{nn}(1)}}{-2/s} \right)$$

$$\phi_{nn}(6) = a_1 \phi_{nn}(5) + a_2 (-1/s) + a_3 (1/s) + 0$$

$$\phi_{nn}(7) = a_1 \phi_{nn}(6) + a_2 \phi_{nn}(5) + a_3 (-1/s) + a_4 (1/s)$$

$$\phi_{nn}(8) = a_1 \phi_{nn}(7) + a_2 \phi_{nn}(6) + a_3 \phi_{nn}(5) + a_4 (-1/s)$$

$$g) P_{nn}(\Omega) = \frac{MKSE}{1 - \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\Omega k}}$$