INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ENGENHARIA BIOMÉDICA – 1º ano /1º Semestre

2ªParte

27-Jan-2010 **Duração:2h**

Importante:
Não é permitida a consulta de quaisquer livros ou textos de apoio
A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efectuados.

---

1. Considere a seguinte região do plano:

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 1 \leq y \leq x+2 \wedge y \geq -x+2 \right\}$$

a)Represente A geometricamente e calcule a medida da sua área.

b)Determine uma expressão, definida por integrais simples, que lhe permita calcular a medida do comprimento total da região A.

c) Estabeleça o integral que lhe permite calcular a medida do volume do sólido obtido por rotação de A em torno do eixo do yy.

2. Considere a seguinte região do plano:

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge (y+1)^2 \geq -x+1 \wedge y \leq 0 \right\}$$

a)Represente R geometricamente e calcule a medida da sua área (Sugestão: Na resolução desta questão utilize conceitos de geometria elementar para simplificar os cálculos.)

b) Calcule a medida do volume do sólido gerado pela rotação da região R,em torno do eixo dos xx.

3. Considere a região $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0 \wedge 0 \leq y \leq \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right\}$.Verifique que a medida da área de B é finita.

4. a)Determine a natureza do seguinte integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x \sqrt[3]{1+e^{-x}}}\,dx$

b)Baseando-se na alínea anterior diga, justificando, qual a natureza da série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{e^{n+1}\left(\sqrt[3]{1+e^{-n}}\right)}$$

5. Aplicando o critério da razão, determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série é convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n (n+1)^2}$$

6. Estude a natureza da série:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left((-1)^n \frac{(2n+5)}{n!} + \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \right)$$

Cotação

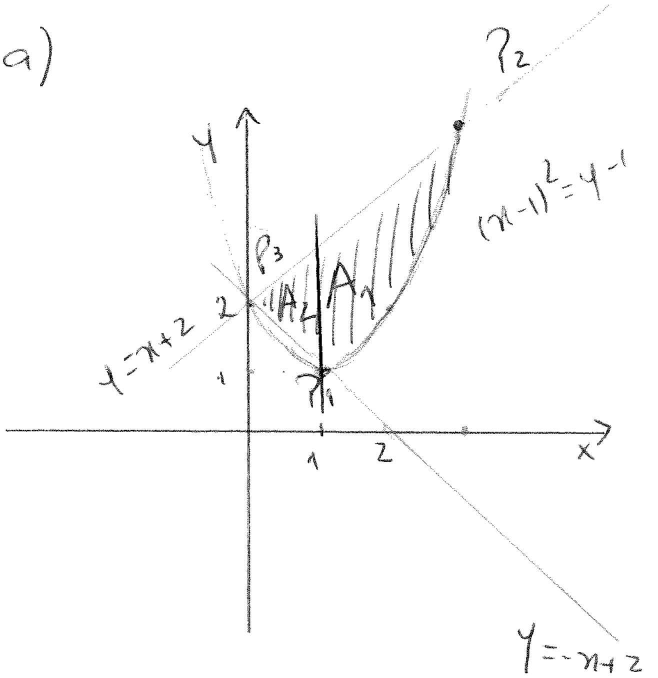
1a	1b	1c	2a	2b	3	4a	4b	5	6
2	1	1	2	2	2	2	2	3	3

2ª Parte – 27. Jan. 2010

(Eng. Biomédica)

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 1 \leq y \leq x+2 \wedge y \geq -x+2\}$

a)



$(x-1)^2 + 1 = y$

$(x-1)^2 = y - 1$

└ parábola de vértice em $(1,1)$

x	y
1	1
0	2
2	2

$y = x+2$

x	y
0	2
1	3

$y = -x+2$

x	y
0	2
1	1

Determinação dos pontos P_1, P_2, P_3:

P_1 e P_3 $\begin{cases} (x-1)^2 = y-1 \\ y = -x+2 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)^2 = -x+2-1 \\ \text{—} \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)^2 = -x+1 \\ \text{—} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = -x+1 \\ \text{—} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ \text{—} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \quad \vee \quad x = 1 \\ y = 2 \quad \vee \quad y = 1 \end{cases}$

$P_1 \rightarrow (1,1)$

$P_3 \rightarrow (0,2)$

P_2 $\begin{cases} y = x+2 \\ y - 1 = (x-1)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)^2 + 1 = x+2 \\ y = (x-1)^2 + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + 1 = x+2 \\ \text{—} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ \text{—} \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \quad \vee \quad x = 3 \\ y = 2 \quad \vee \quad y = 5 \end{cases}$

$$A = \underbrace{\int_1^3 (x+2) - \left[(x-1)^2+1\right] dx}_{A_1} + \underbrace{\int_0^1 x+2 - (-x+2)\, dx}_{A_2}$$

$$= \int_1^3 x+2 - (x^2-2x+1+1)\, dx + \int_0^1 x+2+x-2\, dx$$

$$= \int_1^3 -x^2+3x \, dx + \int_0^1 2x\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_1^3 + \left[x^2\right]_0^1 = -\frac{27}{3} + \frac{3\times 9}{2} - \left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)+1$$

$$= -9+\frac{1}{3}+\frac{27}{2}+1-\frac{3}{2} = 4+\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$$

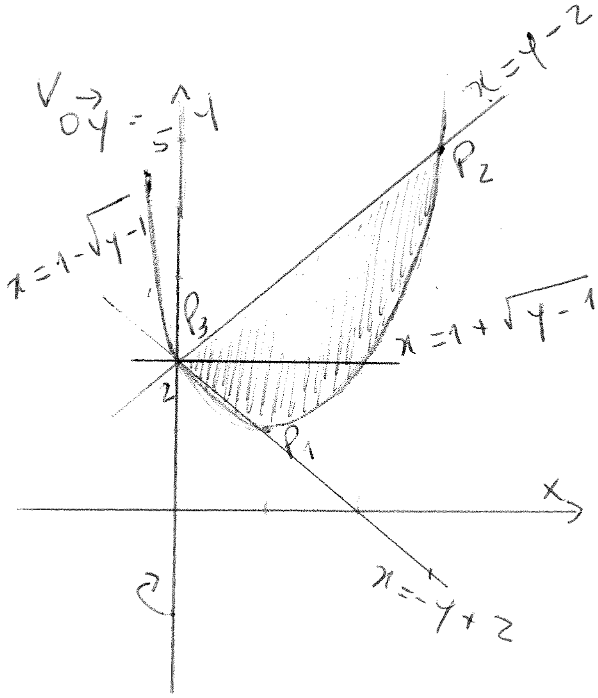
b) $C = C_{\widehat{P_1P_2}} + C_{\overline{P_1P_3}} + C_{\overline{P_1P_3}}$

$$= \int_1^3 \sqrt{1+\left(\left[(x-1)^2+1\right]'\right)^2}\, dx + \int_0^3 \sqrt{1+\left((x+2)'\right)^2}\, dx +$$

$$+ \int_0^1 \sqrt{1+\left[(-x+2)'\right]^2}\, dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{1+(2x-2)^2}\, dx + \int_0^3 \sqrt{2}\, dx + \int_0^1 \sqrt{2}\, dx$$

c)



- $(x-1)^2 + 1 = y$

  $(x-1)^2 = y - 1$

  $x - 1 = \pm\sqrt{y-1}$

  $x = 1 \pm \sqrt{y-1}$

- $y = x + 2$

  $x = y - 2$

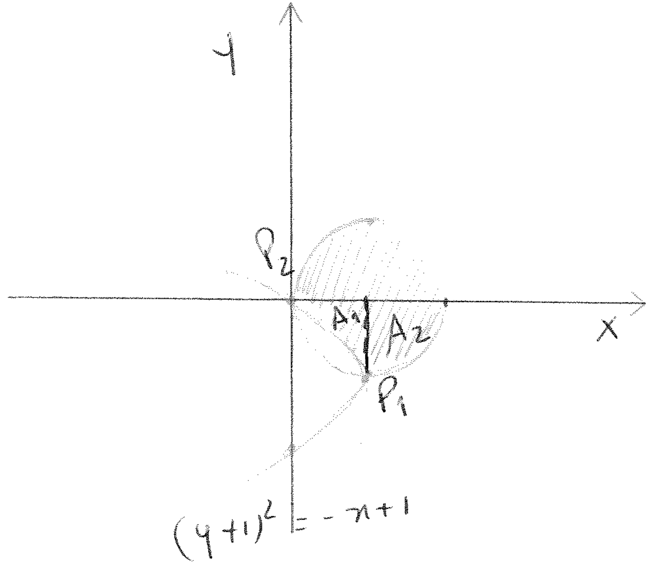
- $y = -x + 2 \Rightarrow x = -y + 2$

$$V_{\vec{Oy}} = \pi \int_1^2 (1 + \sqrt{y-1})^2 - (2 - y)^2 +$$

$$+ \pi \int_2^5 (1 + \sqrt{y-1})^2 - (y-2)^2 \, d$$

2. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge (y+1)^2 \geq -x+1 \wedge y \leq 0\}$

a)



$(x-1)^2 + y^2 = 1$

↳ circunferência centro $(1,0)$ raio 1

$(y+1)^2 = -x+1 \Leftrightarrow (y+1)^2 = -(x-1)$

↳ parábola vértice $(1,-1)$

x	y
1	-1
0	0
0	-2

$A(R) = A_1 + A_2$

$$= \int_{-1}^{0} 1 - \left[1 - (y+1)^2\right] dy + \frac{\pi (1)^2}{4} =$$

Observação:
$A_{\odot} = \pi R^2$

$$= \int_{-1}^{0} 1 - 1 + (y+1)^2 \, dy + \frac{\pi}{4}$$

$$= \int_{-1}^{0} (y+1)^2 \, dy + \frac{\pi}{4}$$

$$= \left[\frac{(y+1)^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}$$

b) $V_{\vec{Ox}} = \pi \int_0^1 \left(-1 + \sqrt{-x+1}\right)^2 dx$

$$+ \pi \int_1^2 \left(-\sqrt{1-(x-1)^2}\right)^2 dx$$

$(y+1)^2 = -x+1$

$y+1 = \pm\sqrt{-x+1}$

$y = -1 \pm \sqrt{-x+1}$

$\boxed{y = -1 + \sqrt{-x+1}}$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$

$y^2 = 1 - (x-1)^2$

$y = \pm\sqrt{1-(x-1)^2}$

$\boxed{y = -\sqrt{1-(x-1)^2}}$

$$= \pi \int_0^1 1 - 2\sqrt{-x+1} + (-x+1) \, dx$$

$$+ \pi \int_1^2 1 - (x-1)^2 \, dx$$

$$= \pi \left[x + 2\frac{(-x+1)^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \pi \left[x - \frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \pi \left[1 + \frac{4}{3} \times 0 - \frac{1}{2} + 1 - 0 - \frac{4}{3} - 0 + 0 \right] +$$

$$\pi \left[2 - \frac{1}{3} - 1 + 0 \right] =$$

$$= \pi \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \pi \left(3 - \frac{1}{2} - \frac{5}{3} \right) =$$

$$= \pi \left(\frac{18 - 3 - 10}{6} \right) = \frac{5}{6} \pi$$

3. $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0 \wedge 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right\}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ e' continua

$Df = \{ x \in \mathbb{R} : \quad 4 - x^2 > 0 \} =]-2, 2[$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in Df$

$$A(B) = \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx =$$

$\varepsilon > 0$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-2+\varepsilon}^{0} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-2+\varepsilon}^{0} \frac{1}{\sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)}} \, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-2+\varepsilon}^{0} \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-2+\varepsilon}^{0} \cancel{2} \frac{\frac{1}{2}}{\cancel{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\arcsen \frac{x}{2} \right]_{-2+\varepsilon}^{0} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \underbrace{\arcsen 0}_{0} - \underbrace{\arcsen \frac{-2+\varepsilon}{2}}_{-\pi/2}$$

$$= \pi/2$$

4 a) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x \sqrt[3]{1+e^{-x}}}\,dx$$

$$Df = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{e^x \sqrt[3]{1+e^{-x}}} \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}$$

f é contínua em Df

$[0,+\infty[$ é não limitado

$\Big\}$ integral impróprio do 2ª espécie.

$t > 0$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{e^x \sqrt[3]{1+e^{-x}}}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[-\int \underbrace{-e^{-x}}_{f'} (\underbrace{1+e^{-x}}_{f})^{-1/3} dx \right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{(1+e^{-x})^{-\frac{1}{3}+1}}{\frac{2}{3}} \right]_0^t = \lim_{t\to+\infty} -\frac{3}{2}(1+e^{-t})^{2/3} + \frac{3(2)^{2/3}}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

o integral é convergente

b)

$$u_n = \frac{2}{e^{n+1}(\sqrt[3]{1+e^{-n}})} = \frac{2}{e.e^n(\sqrt[3]{1+e^{-n}})} = \frac{2}{e} \cdot \frac{1}{e^n \sqrt[3]{1+e^{-n}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e} \frac{1}{e^n \sqrt[3]{1+e^{-n}}} \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \sqrt[3]{1+e^{-n}}}$$

têm a mesma natureza.

$$f(x) = \frac{1}{e^x \sqrt[3]{1+e^{-x}}} \quad \text{é}$$

- contínua
- não negativa
- $f(x)$ é decrescente pois

$x \geq 1 \quad e^x > 1 \quad e \quad 1+e^{-x} > 1$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \sqrt{1+e^{-n}}}$ tem a mesma natureza que o integral impróprio

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{n+1} \left(\sqrt[3]{1+e^{-n}}\right)}$ é convergente

5. Aplicando o critério d'Alembert tem-se que.

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)^2}}{\frac{(x-3)^n}{2^n(n+1)^2}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n (n+1)^2}{2^{n+1}(n+2)^2} |x-3| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \underbrace{\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}}_{1} |x-3| = \frac{1}{2}|x-3|$$

A série é convergente se $\frac{1}{2}|x-3| < 1$

$\Leftrightarrow |x-3| < 2$

$\Leftrightarrow -2 < x-3 < 2$

$\Leftrightarrow 1 < x < 5$

$x=5$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n}{2^n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

Critério de comparação: comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que é convergente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow$$ as séries são da mesma natureza

$x=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

série alternada

Critério de Leibniz

$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

a_n é decrescente

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

a série é convergente.

Conclusão: Intervalo de convergência:

$x \in [1, 5]$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \left((-1) \frac{2n+5}{n!} + \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \right)$

A) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1) \frac{2n+5}{n!}$

série alternada:

$a_n = \frac{2n+5}{n!} = \frac{2n+5}{n(n-1)\dots 2\times 1}$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$a_n \geq 0$

a_n é decrescente: $a_{n+1} - a_n = \frac{2n+7}{(n+1)!} - \frac{2n+5}{n!} =$

$= \frac{2n+7 - (2n+5)(n+1)}{(n+1)!} = \frac{\cancel{2n}+7-2n^2-5n-\cancel{2n}-5}{(n+1)!} =$

$= \frac{-2n^2-5n+7}{(n+1)!}$

$-2n^2-5n+7=0 \Rightarrow n = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{-4}$ $\begin{cases} n = \frac{5+9}{-4} = -7 \\ n = \frac{5-9}{-4} = 1 \end{cases}$

$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ & -7 & & 1 & \end{array}$

ou seja

$a_{n+1} - a_n < 0 \ , \ n \geq 1$ $\Rightarrow$ a sucessão é decrescente

$\Rightarrow$ a série é convergente.

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

Aplicar o critério de comparação e utilizar a

série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ série convergente

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$ $\Rightarrow$ são da mesma natureza.

Como a soma de séries convergentes é convergente

então a série dada é convergente.