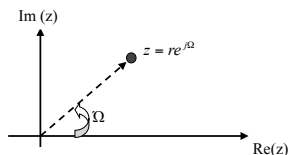


Transformada Z

Definição

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$



$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n]r^{-n})e^{-jn\Omega} = T.F.\{x[n]r^{-n}\}$$

$$X(z)_{z=re^{j\Omega}} = X(\Omega)$$

A transformada-z converge ou não dependendo de r (amplitude de z). Logo associada à transformada-z existe o conceito de região de convergência (ROC).

A transformada de Fourier de uma sequência converge ou não converge independentemente de qualquer parâmetro.

93

Processamento de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

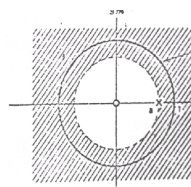
Transformada Z

Exemplo 1: Calcule a transformada-z de $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \dots = \frac{z}{z-a}$$

$$ROC \equiv |z| > |a|$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}$$

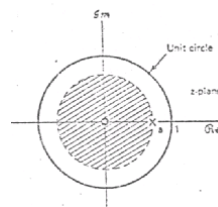


Exemplo 2: Calcule a transformada-z de $x[n] = -a^n u[-n-1]$

$$X(z) = \dots = \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = \dots = \frac{z}{z-a}$$

$$ROC \equiv |z| < |a|$$

$$-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}$$



Uma sequência não fica unicamente determinada por X(z) sendo necessário especificar a ROC.

94

Processamento de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

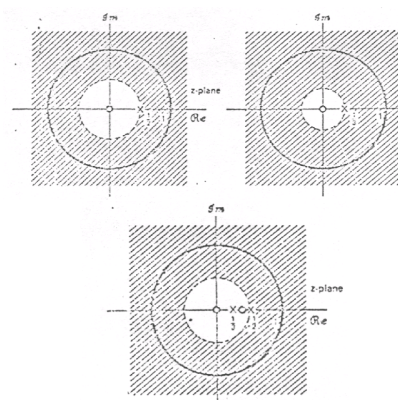
Transformada Z

Exemplo 3: Calcule a transformada-z de $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \right\} z^{-n} = \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} = \dots = 2 \frac{z \left(z - \frac{5}{12} \right)}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{3} \right)}$$

$$ROC = |z| > \frac{1}{2} \wedge |z| > \frac{1}{3}$$

$$ROC = |z| > \frac{1}{2}$$



95

Processamento de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Transformada Z

• Propriedades da ROC da Transformada-z

- 1. A ROC de $X(z)$ é um anel no plano-z centrado na origem
- 2. A ROC não contém pólos.
- 3. Se $x[n]$ tem duração finita a ROC é todo o plano-z, excepto possivelmente $z=0$ ou $z=\infty$.

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n}$$

- 4. Se $x[n]$ é uma sequência do lado direito a ROC é o exterior de um círculo excepto possivelmente em $z=\infty$. (exemplo 1).
- 5. Se $x[n]$ é uma sequência do lado esquerdo a ROC é o interior de um círculo excepto possivelmente em $z=0$. (exemplo 2).
- 6. Se $x[n]$ é uma sequência dos dois lados a ROC é uma coroa circular.

96

Processamento de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Transformada Z

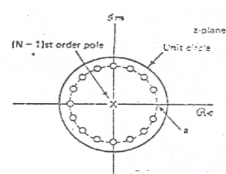
Exemplo 4: Calcule a transformada-z de

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \quad a > 0 \\ 0, & \text{outros } n \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{z^N - a^N}{z^{N-1}(z - a)}$$

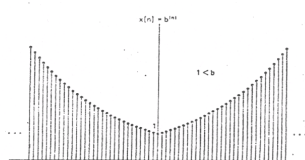
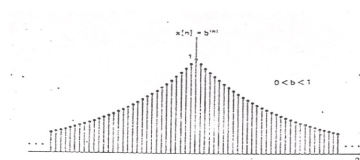
$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 1, \dots, N-1$$



Exemplo 5: Calcule a transformada-z de

$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0$$



97

Processamento de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

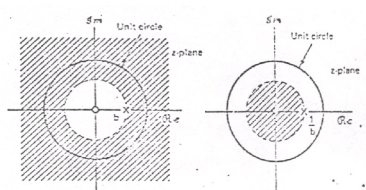
Transformada Z

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

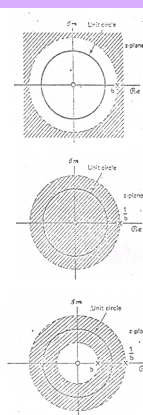
$$b^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - bz^{-1}} \quad \text{ROC} = |z| > |b|$$

$$b^{-n} u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}} \quad \text{ROC} = |z| < \frac{1}{|b|}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} - \frac{1}{1 - b^{-1}z^{-1}} = \frac{b^2 - 1}{b} \frac{z}{(z - b)(z - b^{-1})}, \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$



b > 1



98

Processamento de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Transformada Z

• Transformada-z Inversa

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-jn\Omega} = T.F. \{x[n]r^{-n}\}$$

$$x[n] = r^{-n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega}) (re^{j\Omega})^n d\Omega = \dots = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

A equação anterior é a expressão formal da transformada-z inversa. O seu uso envolve o cálculo de um integral de linha ao longo de um contorno fechado. Por isso muito raramente é usado dado existirem métodos alternativos, onde o mais comum é a decomposição em fracções parciais.

Exemplo 6: Determine $x[n]$ para $X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$, $|z| > \frac{1}{3}$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

99

Processamento de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Transformada Z

Exemplo 7: Considere o exemplo 6 com $ROC = \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{3}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

100

Processamento de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Transformada Z

• Propriedades da Transformada-z

Linearidade

Se $X_1(z)$ e $X_2(z)$ são respectivamente as transformadas-z de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ com ROC R_1 e R_2 então:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z) \quad \text{ROC contém } R_1 \cap R_2$$

Deslocamento no tempo

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z) \quad \text{ROC} = R_x \quad \text{Excepto possivelmente } z=0 \text{ ou } z=\infty$$

Deslocamento na frequência

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{Z} X(e^{-j\Omega_0} z) \quad \text{ROC} = R_x$$

Inversão do eixo dos tempos

$$x[-n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{ROC} = \frac{1}{R_x}$$

101

Processamento de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Transformada Z

Convolução

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z) \quad \text{ROC contém } R_1 \cap R_2$$

Diferenciação no domínio-z

$$nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad \text{ROC} = R_x$$

Exemplo 8: Determine a transformada-z inversa de $X(z) = \log(1 + az^{-1})$, $|z| > |a|$

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}} \quad (-a)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 + az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1] \quad a(-a)^n u[n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

Exemplo 9: Considere o exemplo 8 com $X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$, $|z| > |a|$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

102

Processamento de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Transformada Z

Teorema do valor inicial

Se $x[n]=0$ para $n<0$ então $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

• Análise de Sistemas LTI através da utilização da Transformada-z

Se um sistema é causal a sua ROC deve estar fora do pólo com módulo mais elevado.

Se um sistema é estável então a ROC inclui o círculo de raio unitário.

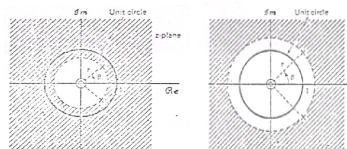
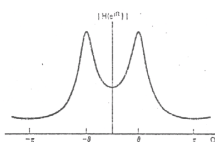
Então para que um sistema seja estável e causal todos os pólos de $H(z)$ terão que estar localizados dentro do círculo de raio unitário.

Exemplo 10: A F. T. de um sistema de 2ª ordem com pólos complexos é dada por

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$z_1 = re^{j\theta}$$

$$z_2 = re^{-j\theta}$$



Sistema instável para $|r|>1$

103

Processamento de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)

Transformada Z

Exemplo 11: Determine a função de transferência em z do sistema LTI caracterizado pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Para $|z|>1/2$ $h[n]$ será uma sequência do lado direito (sistema causal), senão ...

• Problemas para resolução em casa

– 1. Determine a T.-z de
$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{5}\right)^n u[-n-1]$$

– 2. Determine $x[n]$ para
$$X(z) = \frac{4 - \frac{3}{5}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}, \quad \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$$

104

Processamento de Sinal Carlos Lima (DEI-Universidade do Minho)