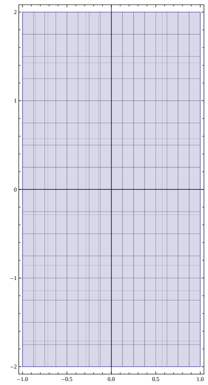
Uma proposta de resolução da Frequência de 7/4/2010

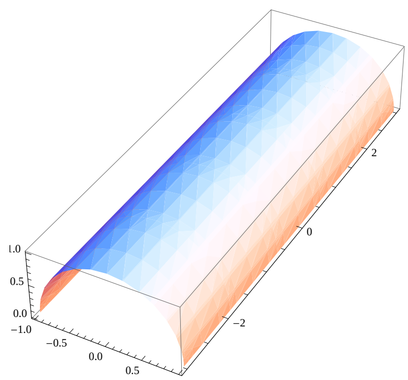
1. (a) $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$.



(b) Note-se que $Gr(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1-x^2}\}$. Ora,

$$z = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 + z^2 = 1 \quad \text{e} \quad z \geq 0.$$

Assim, uma representação gráfica de f é um semi-cilindro de raio 1 com eixo OY.



2. (a) **Resolução:** Visto

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{1}{\pi},1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(\frac{1}{\pi},1)} \left(x\sin(\frac{1}{x}) - y \right) = \frac{1}{\pi}\sin\pi - 1 = -1 = f(\frac{1}{\pi},1),$$

tem-se que f é contínua no ponto $(\frac{1}{\pi},1)$.

A função $g(x,y) = x\sin(\frac{1}{x})$, definida no conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, pode ser vista como o produto da função $h(x,y) = x$ pela função $l(x,y) = \sin(\frac{1}{x})$. Ora, $\lim_{(x,y)\to(0,1)} h(x,y) = 0$, enquanto que l é limitada. Portanto, $\lim_{(x,y)\to(0,1),\ x\neq 0} g(x,y) = 0$, e

$$\lim_{(x,y)\to(0,1),\ x\neq 0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1),\ x\neq 0} (g(x,y) - y) = -1.$$

Por outro lado, $\lim_{(x,y)\to(0,1),\ x=0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1),\ x=0} (-y) = -1$. Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = -1 = f(0,1).$$

Conclui-se que f é contínua no ponto $(0,1)$.

(b) **Resolução:** Como $(\frac{1}{\pi}, 1)$ é ponto interior do conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, existe uma bola aberta B centrada no ponto $(\frac{1}{\pi}, 1)$ e contida nesse conjunto. Para todo o $(x,y) \in B$, tem-se $f(x,y) = x \sin(\dfrac{1}{x}) - y$, logo, para qualquer $(x,y) \in B$,

$$f_x(x,y) = \sin(\frac{1}{x}) + x(-\frac{1}{x^2})\cos(\frac{1}{x}) = \sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x}), \qquad f_y(x,y) = -1.$$

Então $f_x(\dfrac{1}{\pi}, 1) = \sin\pi - \pi\cos\pi = \pi$ e $f_y(\dfrac{1}{\pi}, 1) = -1$.

(c) **Resolução:** O plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(\dfrac{1}{\pi}, 1, -1)$ tem uma equação

$$z + 1 = f_x(\frac{1}{\pi}, 1)(x - \frac{1}{\pi}) + f_y(\frac{1}{\pi}, 1)(y-1), \text{ isto é,}$$
$$z + 1 = \pi(x - \frac{1}{\pi}) - 1(y-1),$$

ou seja, $\pi x - y - z = 1$.

3. (a) **Resolução:** Note-se que $V_h(h,r) = \dfrac{\pi}{3}r^2$ e $V_r(h,r) = \dfrac{2\pi}{3}hr$. Portanto,

$$dV = V_h(12,3)dh + V_r(12,3)dr = \frac{3^2\pi}{3}dh + \frac{2 \cdot 12 \cdot 3\pi}{3}dr = 3\pi dh + 24\pi dr.$$

(b) **Resolução:** Tomemos $dh = 12,01 - 12 = 0,01$ e $dr = 2,999 - 3 = -0,001$. Então

$$\tilde{V} = V(12,3) + dV = 36\pi + 3\pi(0,01) + 24\pi(-0,001) = (36 + 0,03 - 0,024)\pi = 36,006\pi.$$

4. (a) Para que f seja constante na direcção do vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$, a derivada direccional de f em $(1,2)$ na direcção de $\vec{u}$ deve ser 0. Como f tem derivadas parciais contínuas, f é diferenciável. Então

$$D_{\vec{u}}f(1,2) = \nabla f(1,2). \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

Assim, para que $D_{\vec{u}}f(1,2)$ seja igual a 0, o vector $\vec{u}$ deve ser perpendicular ao vector $\nabla f(1,2)$.

Como a derivada de f no ponto $(1,2)$ é máxima na direcção e sentido de $(-3,-4)$, o gradiente $\nabla f(1,2)$ tem a mesma direcção e sentido do vector $(-3,-4)$. Um vector perpendicular a $(-3,-4)$ é, por exemplo, o vector $(4,-3)$.

(b) O vector $\vec{v} = (3,4)$ faz um ângulo de π rad com $\nabla f(1,2)$. Então

$$D_{\vec{u}}f(1,2) = \nabla f(1,2). \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \|\nabla f(1,2)\| \cos\pi = -\|\nabla f(1,2)\| = -10.$$

5. (a) **Resolução:** Consideremos $v = (v_1, v_2)$ um vector unitário de $\mathbb{R}^2$, isto é, tal que $\|v\| = 1$. Por definição, temos

$$\begin{aligned} D_v g(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(0 + tv_1, 0 + tv_2) - g(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{g(tv_1, tv_2) - 1}{t}. \end{aligned}$$

Atendendo à definição da função g, temos de considerar dois casos distintos:

$$D_v g(0,0) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \frac{1+tv_1+tv_2-1}{t}, & \text{se } v_1 \neq v_2; \\ \\ \lim\limits_{t\to 0} \frac{1-1}{t}, & \text{se } v_1 = v_2. \end{cases}$$

Portanto,

$$D_v g(0,0) = \begin{cases} v_1 + v_2, & \text{se } v_1 \neq v_2; \\ \\ 0, & \text{se } v_1 = v_2. \end{cases}$$

(b) **Resolução:** Temos de calcular as derivadas parciais $g_x(0,0)$ e $g_y(0,0)$. Para tal basta usar a alínea (a) e calcular as derivadas direccionais de g no ponto $(0,0)$ nas direcções dos vectores $(1,0)$ e $(0,1)$, respectivamente. Assim,

$$g_x(0,0) = D_{(1,0)} g(0,0) = 1 + 0 = 1; \qquad g_y(0,0) = D_{(0,1)} g(0,0) = 0 + 1 = 1.$$

Assim, o gradiente de g no ponto $(0,0)$ é dado por $\nabla g(0,0) = (1,1)$.

(c) **Resolução:** Se g fosse diferenciável em $(0,0)$ teríamos, para qualquer vector unitário $v = (v_1, v_2)$,

$$D_v g(0,0) = \nabla g(0,0) \cdot v = (1,1) \cdot (v_1, v_2) = v_1 + v_2.$$

Mas, pela alínea (a), se considerarmos $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, por exemplo, temos

$$D_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} g(0,0) = 0 \neq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto, g não é diferenciável em $(0,0)$.