Caderno de Exercícios de Análise Matemática II
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica, Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial
Cálculo Diferencial de Funções Reais

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra

2010-2011

1 Geometria no Espaço

1.1 Geometria no Espaço

1. (a) Um ponto P move-se de forma a que a soma das distâncias de P aos pontos $A = (-2, 3)$ e $B = (4, 3)$ é igual a 10. Deduza uma equação para a trajectória do ponto P.

   (b) Averigúe a posição da recta $y = x + 2$ relativamente à hipérbole de equação $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

   (c) Identifique o conjunto dos pontos P tais que a sua distância ao ponto $(0, 8)$ é igual ao dobro da sua distância à recta $y = 2$.

   (d) Determine uma equação de uma parábola de vértice na origem das coordenadas, simétrica em relação ao eixo $0Y$ e que passa pelo ponto $(-3, 3)$.

2. Sejam $P = (1, -1, 3)$, $Q = (0, 3, -1)$ e $R = (1, -1, 2)$. Calcule

   (a) $\overrightarrow{PQ}$;

   (b) $\|\overrightarrow{PQ}\|$;

   (c) a distância de Q a R;

   (d) o produto interno $\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle$;

   (e) o produto vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$;

   (f) a área do triângulo ΔPQR;

   (g) o ângulo entre $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$.

3. Indique equações vectoriais, paramétricas e cartesianas das seguintes rectas:

   (a) recta que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$ e é paralela ao vector $\vec{v} = (-2, 0, 1)$;

   (b) recta que contém o ponto $(1, 7, 4)$ e é perpendicular ao plano $x - y + 3z = 2$;

   (c) recta que contém os pontos $(1, 0, 2)$ e $(-2, 3, 4)$;

   (d) recta que resulta da intersecção dos planos $3x - 5y + 2z = 0$ e $z = 0$;

   (e) recta perpendicular ao plano $x - 2y - z = 1$ que contém o ponto $(1, 0, 9)$.

4. Indique uma equação de cada um dos planos seguintes:

   (a) plano que passa pelo ponto $(2, 6, 1)$ e é perpendicular ao vector $\vec{n} = (1, 4, 2)$;

   (b) plano que passa pelos pontos $(-2, 1, 1)$, $(0, 2, 3)$ e $(1, 0, -1)$;

   (c) plano que passa pelo ponto $(1, 0, 1)$ e é perpendicular ao vector $\vec{n} = (1, 1, 0)$;

   (d) plano que passa pelos pontos $(3, 2, 1)$, $(-1, 3, 2)$ e $(1, 1, -1)$;

   (e) plano que passa pela origem e é paralelo ao plano de equação $4x - 2y + 7z + 12 = 0$.

5. Indique a posição relativa dos seguintes planos.

   (a) $2x - 8y - 6z - 2 = 0$ e $-x + 4y + 3z - 5 = 0$;

   (b) $x - y + 3z - 2 = 0$ e $2x + z = 1$;

   (c) $x + 4y + 7z = 3$ e $5x - 3y + z = 0$.

6. Represente graficamente as superfícies em $\mathbb{R}^3$ descritas pelas equações:

   (a) $z = 3$;

   (b) $y = 5$;

   (c) $x + y = 2$;

   (d) $2x + 2y = 2$.

7. Mostre que $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ é a equação de uma esfera e determine o seu centro e o seu raio.

8. Represente graficamente o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ representados pelas desigualdades

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \quad \text{e} \quad z \geq 0.$$

9. Esboce as seguintes superfícies:

(a) $z = x^2$;

(b) $x^2 + y^2 = 1$;

(c) $y^2 + z^2 = 1$;

(d) $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$;

(e) $y^2 - x^2 = z$;

(f) $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$.

(g) $x^2 + y^2 + z^2 = -2\,z$;

(h) $y = z^2 - x^2$;

(i) $x^2 + y^2 = 4 - z$;

(j) $z = 2 + y^2$.

10. Considere as superfícies S_1 e S_2 definidas por

$$S_1: \; x^2 + 2\,y^2 - z^2 + 3\,x = 1; \qquad S_2: \; 2\,x^2 + 4\,y^2 - 2\,z^2 - 5\,y = 0.$$

(a) Identifique cada uma das superfícies e represente-as graficamente.

(b) Mostre que a curva definida pela intersecção de S_1 e S_2 é uma curva plana.

11. Considere as superfícies S_1 e S_2 definidas por

$$S_1: \; z = x^2 + y^2; \qquad S_2: \; z = 1 - y^2.$$

(a) Identifique e esboce cada uma das superfícies.

(b) Determine a curva $\mathcal{C}$ de intersecção de S_1 e S_2 e indique a projecção de $\mathcal{C}$ no plano XOY.

12. (a) Descreva e represente o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido pela equação $z = y^2$.

(b) Descreva e represente o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação $z = y^2$.

13. Represente as regiões de $\mathbb{R}^3$ definidas pelas condições seguintes:

(a) $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$;

(b) $0 \leq z \leq 2$ e $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$;
O que resultaria da substituição da condição $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$ por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$?

(c) $0 \leq z \leq 2 + y^2$ e $|\,x\,| \leq 2 \;\wedge\; |\,y\,| \leq 1$.

14. Faça o esboço do subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ definido por:

(a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \text{ e } 6x + 3y + 2z \leq 12\}$;

(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 + z \geq x^2 + y^2 \text{ e } 2 - z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

2 Cálculo Diferencial para Funções Reais

2.1 Funções reais: Domínios, representações gráficas.

15. Determine e esboce o domínio das funções seguintes.

(a) $f(x, y) = -x - y$

(b) $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$

(c) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}$

(d) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

16. A altura h de uma onda marítima depende da velocidade v do vento e do tempo t que este sopra com essa velocidade. Na tabela seguinte são apresentados valores da função $h = f(v,t)$ medidos em pés.

Duração (minutos)

Velocidade do vento (nós)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

(a) Qual é o valor de $h = f(40, 15)$? Qual o seu significado?

(b) Qual é o significado da função $h = f(30, t)$? Descreva o comportamento desta função.

(c) Qual é o significado da função $h = f(v, 30)$? Descreva o comportamento desta função.

(d) Estime um valor aproximado para $f(18, 30)$.

17. Considere as funções

(i) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to x^2 + y^2 \end{array}$;

(ii) $f: \begin{array}{c} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to \sqrt{9 - x^2 - y^2} \end{array}$;

(iii) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to 2x^2 + 3y^2 \end{array}$.

(a) Represente graficamente as funções anteriores.

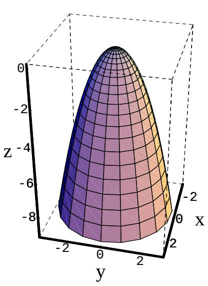
(b) Para cada uma das funções anteriores, identifique as curvas de nível de f e as secções produzidas pelas intersecções dos planos coordenados e a superfície que corresponde ao gráfico de f.

18. Os números na grelha seguinte representam a profundidade de um determinado lago, em metros, medida em locais igualmente espaçados. Esboce curvas de nível "razoáveis"para as profundidades 2, 6 e 8 metros.

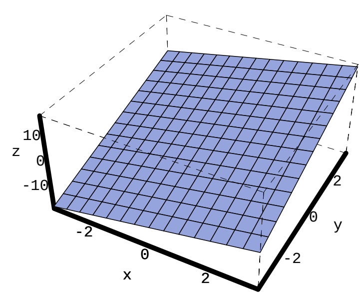
8,6	9,4	9,3	9,2	9,1	8,4
9,3	11,6	11,7	8,4	8,1	7,6
9,1	8,3	8,1	7,4	7,6	6,9
5,1	5,6	5,6	5,6	6,3	5,9
2,8	3,2	3,4	4,5	5,2	5,8
0,7	0,9	2,2	4,3	6,8	6,3

19. As figuras seguintes são representações de funções (II) e curvas de nível (I) das mesmas funções. Faça a correspondência entre a **representação gráfica** e as respectivas **curvas de nível**:

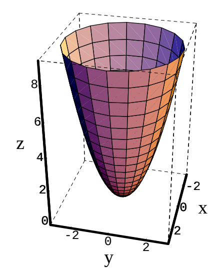
I



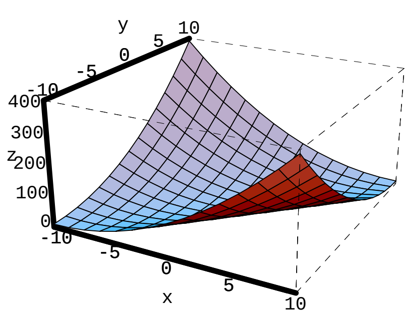
(1.)



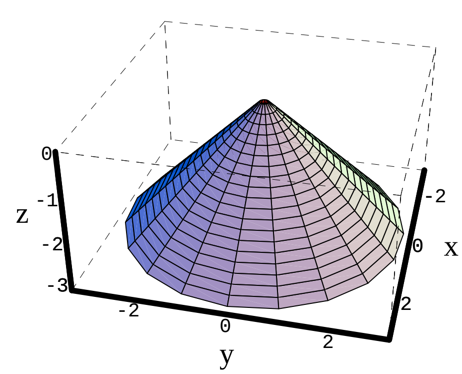
(2.)



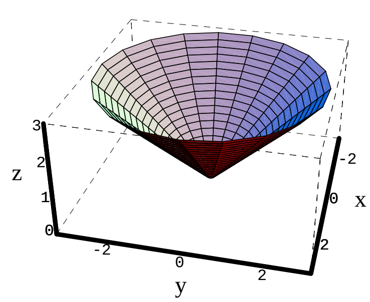
(3.)



(4.)



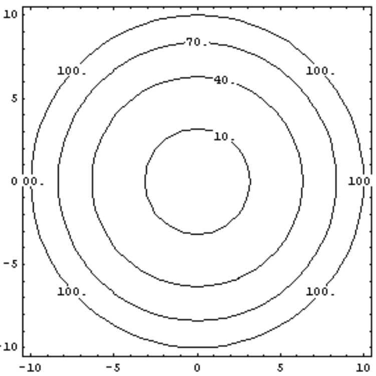
(6.)



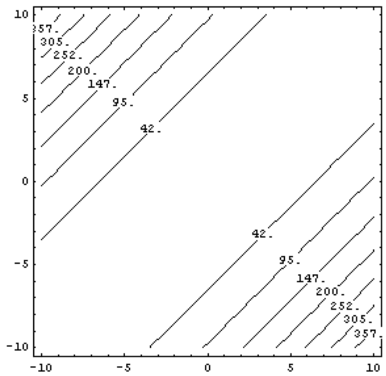
(5.)

II

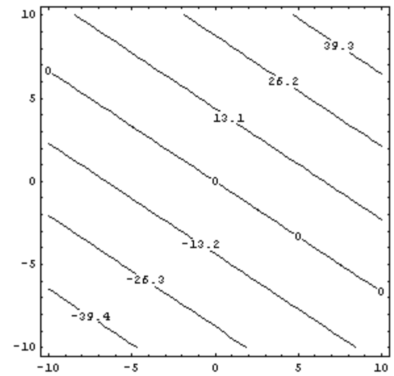
(a)



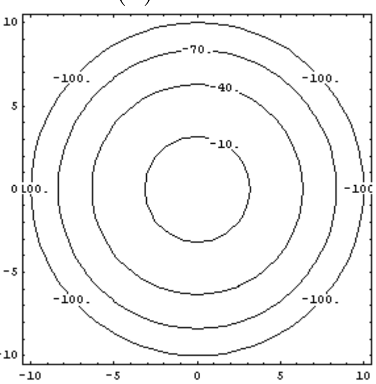
(c)



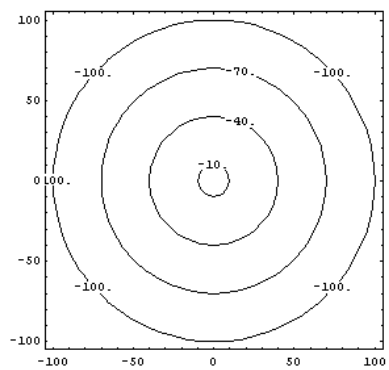
(e)



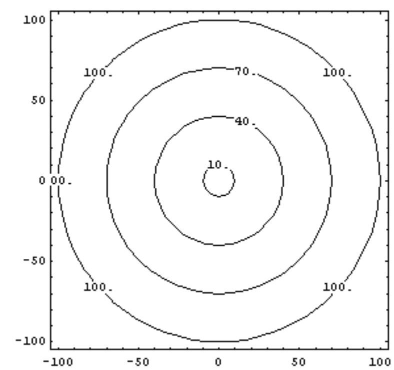
(b)



(d)



(f)



20. Para cada uma das seguintes funções, faça a correspondência entre a **expressão analítica** e a respectiva **representação gráfica**.

I

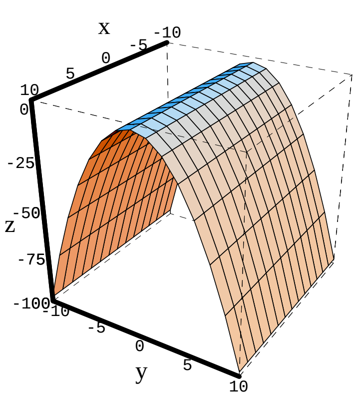
(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = x + 2y + 3$

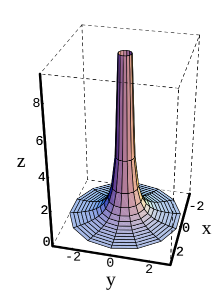
(c) $f(x,y) = -y^2$

(d) $f(x,y) = -e^{-x^2-y^2}$.

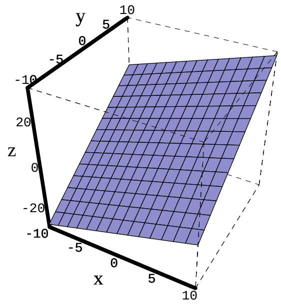
II



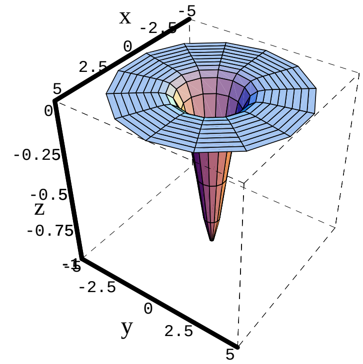
(a)



(b)



(c)



(d)

21. Uma placa fina de metal ocupa uma região D do plano XOY. A placa foi aquecida e, em cada ponto (x, y), a temperatura é dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + y^2}.$$

(a) Identifique e esboce as linhas isotérmicas da placa, ou seja, as linhas ao longo das quais a temperatura permanece constante.

(b) Uma formiga, localizada no ponto $(1, 4)$, anda sobre a placa de modo que a temperatura ao longo da sua trajectória permanece constante. Qual é a trajectória tomada pela formiga e qual é a temperatura ao longo da trajectória?

2.2 Limites e continuidade

22. Considere a função $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, com $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a) Calcule os limites

$$\lim_{(x,y)\in\{(x,y):y=0\},(x,y)\to(0,0)} f(x, y) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\in\{(x,y):y=x\},(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

(b) O que conclui acerca da existência do limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$?

23. Considere a função $f(x, y) = -\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, com $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a) Determine o domínio de f.

(b) Calcule os limites

$$\lim_{(x,y)\in\{(x,y):y=x\},(x,y)\to(0,0)} f(x, y) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\in\{(x,y):y=x^2\},(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

(c) O que conclui acerca da existência de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$?

24. Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{x^6 + y^2}$.

25. Determine o domínio das seguintes funções e estude o limite nos pontos indicados.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2-y^2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$;

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+xy+y^2}$;

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\in\{(x,y):y=-x^2\},(x,y)\to(1,-1)} \frac{2xy}{(x+y)^2}$;

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.

26. Atendendo a que "o produto de uma função limitada por um infinitésimo é um infinitésimo", calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+2y^2)\sin\frac{1}{xy}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+2y^2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2\sin y}{x^2+2y^2}$.

27. Determine o domínio de continuidade das funções seguintes.

(a) $f(x,y) = y\ln(1+x)$;

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$;

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$;

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

28. Use as propriedades da continuidade para calcular os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} (4xy^2-x)$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\frac{1}{2},\pi)} x^2y\sin(xy)$;

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{xy}{1+x^2+y^2}\right)$;

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,-2)} x\sqrt{y^3+2x}$.

29. Calcule os limites seguintes depois de escrever cada uma das funções como composição de duas outras funções.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$.

30. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{se } x\geq 0 \\ \sin(xy), & \text{se } x<0 \end{cases}$.

Calcule, se possível, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)$.

31. Seja $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2-y^2}$.

(a) Determine e esboce o domínio de f.

(b) Sejam $m\in\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ constante e $A_m = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=mx\}$. Calcule, caso exista,

$$\lim_{(x,y)\in A_m,\ (x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

(c) Diga, justificando, se existe ou não $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2.3 Derivadas parciais.

32. Dado $f(x,y)=x^2y$, determine $f_x\,(0,0)$ e $f_y\,(1,2)$, usando a definição de derivada parcial.

33. A altura h de uma onda marítima depende da velocidade v do vento e do tempo t que este sopra com essa velocidade. Na tabela seguinte são apresentados valores da função $h=f(v,t)$ medidos em pés.

Duração (minutos)

Velocidade do vento (nós)	v \ t	5	10	15	20	30	40	50
	10	2	2	2	2	2	2	2
	15	4	4	5	5	5	5	5
	20	5	7	8	8	9	9	9
	30	9	13	16	17	18	19	19
	40	14	21	25	28	31	33	33
	50	19	29	36	40	45	48	50
	60	24	37	47	54	62	67	69

(a) Qual é o significado físico das derivadas parciais $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial v}$?

(b) Calcule valores aproximado para as derivadas parciais $\dfrac{\partial h}{\partial t}(40,15)$ e $\dfrac{\partial h}{\partial v}(40,15)$ e interprete os resultados obtidos.

34. Atendendo à tabela de valores de uma função $f(x,y)$, faça corresponder a cada derivada parcial o valor apropriado.

y \ x	-4	-2	0	2	4
4	20	17	16	17	20
2	8	5	4	5	8
0	4	1	0	1	4
-2	8	5	4	5	8
-4	20	17	16	17	20

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)$ — (i) 0

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)$ — (ii) -4

(c) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)$ — (iii) 1

(d) $\frac{\partial f}{\partial y}(-2,-2)$ — (iv) 4

35. Na tabela seguinte indica-se a intensidade I, medida em amperes (A), de uma corrente eléctrica em função da voltagem V, medida em volts (V), e da resistência R, medida em ohms (Ω). Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

V / R	180	200	220	240	260
1	180	200	220	240	260
5	36	40	44	48	52
10	18	20	22	24	26
15	12	13,3	14,7	16	17,3
20	9	10	11	12	13

(a) $\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \mathrm{V}}(220,5) > \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \mathrm{R}}(220,5)$

(b) A taxa de variação instantânea da intensidade I em relação à voltagem, se a voltagem for $220V$ e a resistência permanecer fixa em 10Ω é aproximadamente igual a $0,1A/V$.

36. Considere as funções $f(x,y) = 4e^{x^2y^3}$ e $g(x,y) = \cos(x^5y^4)$. Calcule

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ (c) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ (e) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ (g) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ (d) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ (f) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ (h) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y)$.

37. Sendo $f(x,y,z) = x^2y + z^2x + y^2z$, calcule:

(a) (i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, (ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$, (iii) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

(b) (i) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)$, (ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z)$, (iii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)$.

(c) (i) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z)$, (ii) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y,z)$, (iii) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x,y,z)$.

38. Dada a função $f(x,y,z) = xze^{y^2} - \ln(xz)$, determine o seu domínio e calcule o gradiente de f no ponto $(1,0,2)$.

39. De acordo com a lei dos gases ideais, a pressão P, a temperatura T e o volume V de um gás estão relacionados por

$$P = k\frac{T}{V},$$

em que k é uma constante de proporcionalidade. Suponha que V é medido em decímetros cúbicos (dm^3), T é medido em kelvins (K), P é medido em atmosferas (atm) e que para um certo gás, a constante de proporcionalidade é $k = 10$.

(a) Determine a taxa de variação instantânea da pressão em relação à temperatura, se a temperatura for $80K$ e o volume permanecer fixo em $50dm^3$.

(b) Determine a taxa de variação instantânea do volume em relação à pressão, se o volume é $50dm^3$ e a temperatura permanece fixa em $80K$.

40. A força gravitacional F (em $Newtons$) exercida sobre uma massa de $m\ Kg$ situada a uma distância de r $metros$ do centro da Terra, é dada por

$$F = \frac{GMm}{r^2},$$

em que $M = 6 \cdot 10^{24}Kg$ representa a massa da Terra e $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$.

(a) Determine a força gravitacional exercida sobre uma pessoa com $70Kg$ de massa e situada na superfície da Terra ($r = 6.4 \cdot 10^6$).

(b) Calcule $\dfrac{\partial F}{\partial m}$ e $\dfrac{\partial F}{\partial r}$ para os valores de m e r considerados em a). Interprete os resultados encontrados em termos da força gravitacional.

41. Seja x o número de anúncios das lâmpadas Aurora que passam na TV por dia e seja y o número, em milhões, de telespectadores que vêem o anúncio diariamente. Suponhamos que o número de lâmpadas vendidas diariamente é dado pela fórmula $V(x, y) = 5000xy + 1000$. Determine as derivadas parciais seguintes e interprete os resultados obtidos.

(a) $\dfrac{\partial V}{\partial x}(x, y)$; (b) $\dfrac{\partial V}{\partial x}(x, 5)$; (c) $\dfrac{\partial V}{\partial y}(x, y)$; (d) $\dfrac{\partial V}{\partial y}(2, y)$.

42. A temperatura T no instante t (medido em dias) e a uma profundidade x (medida em pés) pode ser modelada pela função

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x),$$

onde T_0 e T_1 são constantes, $\omega = \dfrac{2\pi}{365}$ e λ é uma constante positiva.

(a) Determine $\dfrac{\partial T}{\partial x}$. Qual o seu significado físico?

(b) Determine $\dfrac{\partial T}{\partial t}$. Qual o seu significado físico?

(c) Mostre que T satisfaz a equação do calor, $T_t = kT_{x^2}$, para uma certa constante k.

43. Determine uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x(x, y) = 2x + y$ e $f_y(x, y) = x - 2y$.

Será que a função f obtida é a única que satisfaz as igualdades anteriores?

44. Usando o Teorema de Clairaut, mostre que não existe nenhuma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_x(x, y) = xy^2 + 1 \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = y^2.$$

45. O gráfico seguinte representa algumas curvas de nível de uma função $z = f(x, y)$.

(a) Indique se as derivadas parciais seguintes são nulas, positivas ou negativas:

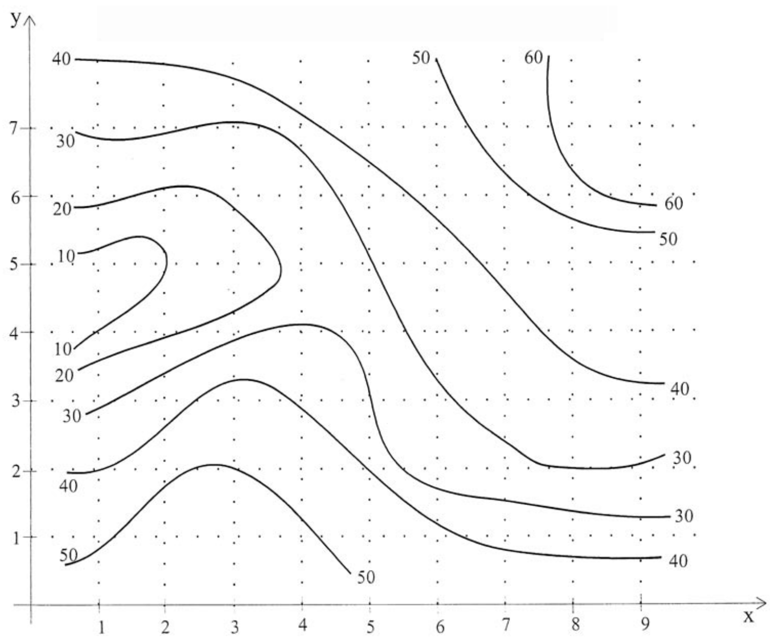
$f_x(3, 2)$, $f_x(1, 2)$, $f_x(5, 1)$, $f_x(2, 4)$, $f_x(7, 5)$

$f_y(3, 2)$, $f_y(1, 2)$, $f_y(5, 1)$, $f_y(2, 4)$, $f_y(7, 5)$.

(b) Em cada par de derivadas parciais seguintes, identifique aquela que possui maior valor.

1. $f_x(3, 2)$, $f_x(2, 3)$; 2. $f_x(3, 7)$, $f_y(3, 7)$ 3. $f_x(8, 3)$, $f_y(8, 3)$

4. $f_x(8, 2)$, $f_x(3, 5)$; 5. $f_y(2, 5)$, $f_y(1, 1)$ 3. $f_y(9, 2)$, $f_x(1, 7)$



2.4 Diferenciabilidade. Planos tangentes. Diferenciais. Aproximação Linear.

46. Usando a definição, verifique se as seguintes funções são diferenciáveis nos pontos indicados.

   (a) $f(x) = x^2 - y^2$, em $(0,0)$;
   (b) $f(x,y) = xy$, em $(1,2)$.

47. Aplicando uma **condição necessária** ou uma **condição suficiente** para a diferenciabilidade de uma função num dado ponto, verifique se são diferenciáveis as funções seguintes, nos pontos indicados.

   (a) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, em $(2,1)$;
   (b) $f(x,y,z) = x^2e^{yz} + y\ln z$, em $(1,2,1)$;
   (c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{se } x \neq 0 \\ y^4, & \text{se } x = 0 \end{cases}$, em $(0,2)$;
   (d) $f(x,y) = \cos(y\sqrt{x^2+y^2})$, em $(0,0)$;
   (e) $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq y^2 \\ y-1, & \text{se } x = y^2 \end{cases}$, em $(0,0)$.

48. Seja f a função real definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

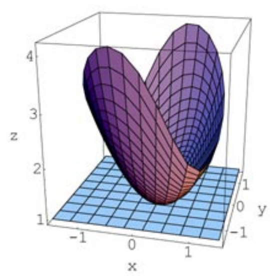
   (a) Estude a continuidade de f em $(0,0)$.
   (b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
   (c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

49. Obtenha uma equação do plano tangente e uma equação da recta normal a cada uma das superfícies, nos pontos dados.

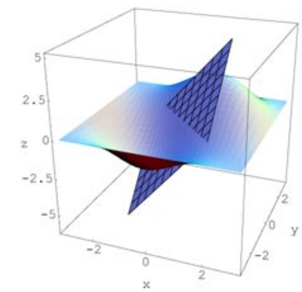
   (a) $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$, no ponto $(1,0,2)$;
   (b) $z = 4x^3y^2 + 2y$, no ponto $(1,-2,12)$;
   (c) $z = xe^{-y}$, no ponto $(1,0,1)$;
   (d) $3xyz = x^3 + y^3$, no ponto $(1,2,3/2)$;
   (e) $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$, no ponto $(0,0,0)$.

Representações gráficas de algumas funções e dos seus planos tangente.

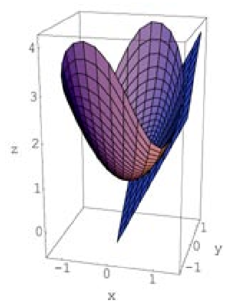
$z = x^2 + y^4 + e^{xy}$



$z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$

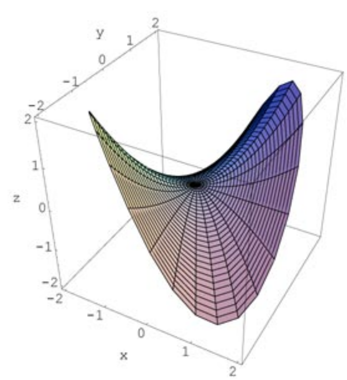


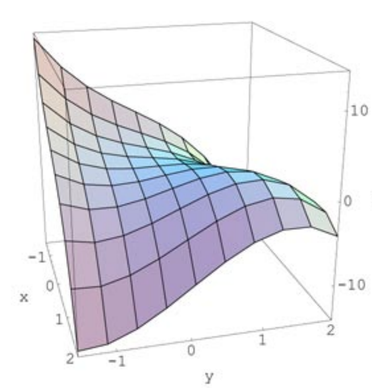
$z = x^2 + y^4 + e^{xy}$



50. Para cada uma das superfícies, indique os pontos em que o plano tangente à superfície é um plano horizontal.

    (a) $z = xy$; (b) $z = 3xy - x^3 - y^3$.





51. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \ln(x - 3y)$ no ponto $(7, 2)$ e use-a para aproximar $f(7,01; 1,98)$.

52. Use diferenciais para calcular um valor aproximado para cada uma das funções nos pontos indicados.

    (a) $f(x, y) = \cos(x^2 + y)$ no ponto $(0,1; 3,14)$;

    (b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ no ponto $(2,001; 0,003; -0,001)$.

53. Calcule um valor aproximado para $(3.05)^2 \times (2,01)^3 \times (1,006)^6$.

54. Um fluido circula num tubo com raio $r = 0,005 \pm 0,00025m$ e comprimento $1m$, sujeito a uma pressão $p = 10^5 \pm 1000\ pascais$, à taxa de $v = 0,625 \cdot 10^{-9} m^3$ por unidade de tempo. Determine o erro máximo da viscosidade η dada por

$$\eta = \frac{\pi p r^4}{8v}.$$

2.5 Regra da Cadeia. Teorema da função implícita.

55. Em cada um dos casos, use a regra da cadeia para calcular $\dfrac{dz}{dt}$.

(a) $z = 3x^2y^3$ onde $x = t^4$ e $y = t^2$;

(b) $z = 3\cos t - \sin(xy)$ onde $x = \frac{1}{t}$ e $y = 3t$;

(c) $z = e^{1-xy}$ onde $x = t^{\frac{1}{3}}$ e $y = t^3$.

56. Um pato enquanto nada descreve uma circunferência de equações paramétricas

$$x = \cos t \text{ e } y = \sin t.$$

A temperatura da água é dada pela fórmula $T(x, y) = x^2e^y - xy^3$. Determine $\dfrac{dT}{dt}$:

(a) usando a **regra da cadeia**;

(b) expressando T em função de t e derivando.

57. Para uma mole de um dado gás, a pressão P, medida em atmosferas (atm), a temperatura T, medida em Kelvins (K), e o volume V, medido em decímetros cúbicos (dm^3), verificam a equação $\mathrm{P} = 15\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{V}}$. Os parâmetros do gás variam com o tempo e sabemos que num dado instante t_0 a temperatura é igual a $75K$ e está a aumentar a uma taxa de $5K/s$ e o volume é igual a $15dm^3$ e está a diminuir a uma taxa de $1dm^3/s$. Determine a taxa de variação da pressão nesse instante t_0.

58. O comprimento x, a largura y e a altura z de uma caixa variam com o tempo. Num certo instante, as dimensões da caixa são $x = 1$m e $y = z = 2$m, e x e y estão aumentando a uma taxa de 2m/s e z está diminuindo a uma taxa de 3m/s. Determine as taxas de variação das quantidades seguintes nesse instante.

(a) O volume; (b) A área da superfície; (c) O comprimento da diagonal.

59. Use a regra da cadeia para calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(a) $z = u^2 + v^2$ onde $u = 2x + 7$ e $v = 3x + y + 7$;

(b) $z = \sin u \cos v$ onde $u = 3x^2 - 2y$ e $v = x - 3y$;

(c) $z = x^2 - 2y + 3w$ onde $w = 5x + 4y$.

60. Se $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ e f é diferenciável, mostre que g satisfaz a equação

$$t.\frac{\partial g}{\partial s} + s.\frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

2.6 Teorema da função implícita.

61. Indique se os conjuntos seguintes podem ser gráficos de funções reais $z = f(x,y)$ e, no caso tal aconteça, estabeleça a função.

    (a) $G_1 = \{(1,2,1),(1,1,2),(1,3,1),(1,2,2)\}$;

    (b) $G_2 = \{(x,y,z) : \cos z - x + y = 0, |z| < \frac{\pi}{2}\}$;

    (c) $G_3 = \{(x,y,z) : x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0, z \geq 0\}$.

62. (a) Mostre que a equação $y^2 - 2xy = 1$ define $y = g(x)$ como função implícita de x numa vizinhança de 0 e calcule $g'(0)$.

    (b) Indique os pontos (a,b) tais que a expressão $y^2 - 2xy = 1$ define
    (i) y como função implícita de x; (ii) x como função implícita de y.

63. Mostre que a equação

$$x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$$

define $z = f(x,y)$ como função implícita de x e y numa vizinhança de $(1,1,1)$ e calcule $f_x(1,1)$ e $f_y(1,1)$.

64. A equação

$$x^2y^5z^2w^5 + 2xy^2w^3 - 3x^3z^2w = 0$$

define $w = f(x,y,z)$ com $f(1,1,1) = 1$. Calcule $f_x(1,1,1)$, $f_y(1,1,1)$ e $f_z(1,1,1)$.

65. Em cada caso, determine o plano tangente e a recta normal à superfície no ponto indicado.

    (a) $\sin(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ no ponto $(\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \sqrt{\frac{\pi}{3}}, \sqrt{\frac{\pi}{3}})$;

    (b) $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1$ no ponto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0)$;

    (c) $\sin(xyz) + \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) = \ln 2$ no ponto $(1,0,0)$.

2.7 Derivadas direccionais.

66. Calcule o gradiente das funções seguintes nos pontos indicados.

    (a) $f(x, y) = \ln(x/y)$, no ponto $P = (1, 1)$.

    (b) $f(x, y, z) = \cos(x + y + z)$, nos pontos $P = (\pi, \pi, \pi)$ e $Q = (0, 0, \pi/2)$.

67. Usando a definição, calcule a derivada direccional da função $f(x, y) = x^2 - xy$ no ponto $P_0 = (0, 1)$ e na direcção do vector $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$.

68. Determine os vectores v unitários para os quais existe $D_{\vec{v}}f\,(P_0)$, sendo

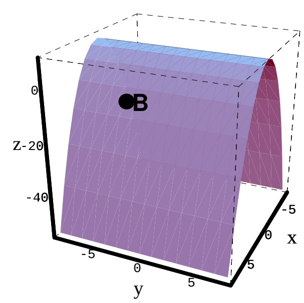
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } P_0 = (0, 0).$$

69. Sejam $f(x, y) = \sin(xy)$ e $g(t) = \sin((\pi + \frac{t}{\sqrt{2}})(\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}}))$.

    (a) Calcule $g'(0)$.

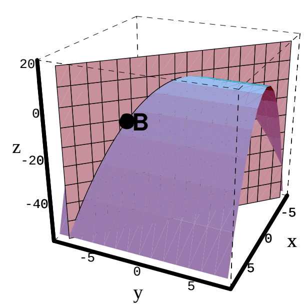
    (b) Utilize o resultado da alínea (a) para determinar $D_{\vec{v}}f(\pi, \frac{1}{2})$, sendo $\vec{v} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{\jmath}}{\sqrt{2}}$.

70. Considere a superfície de equação $z = g(x, y)$ com a seguinte representação gráfica:

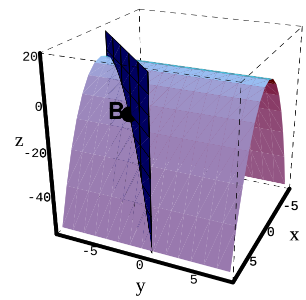


Seja $B = (4, -3, g(4, -3))$ um ponto pertencente à superfície.

   (a) Com base no gráfico seguinte, diga qual o sinal de $D_{\vec{u}}g(4, -3)$ segundo o vector $\vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$.



   (b) Com base no gráfico seguinte, diga qual o sinal de $D_{\vec{v}}g(4, -3)$ segundo o vector $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$.



71. Calcule as derivadas direccionais das funções seguintes.

   (a) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$, no ponto $(1,0)$, segundo a direcção $\vec{v} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\hat{\imath} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}$.

   (b) $f(x,y) = e^x \cos(xy)$, no ponto $(0,-1)$, segundo a direcção $\vec{v} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}\hat{\imath} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}$.

   (c) $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + z^3$, no ponto $(1,-1,2)$, segundo a direcção $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{11}}\hat{\imath} + \dfrac{3}{\sqrt{11}}\hat{\jmath} + \dfrac{1}{\sqrt{11}}\hat{k}$.

   (d) $f(x,y) = 4\,x^3y^2$, no ponto $(2,1)$, segundo a direcção $\vec{v} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$.

   (e) $f(x,y) = e^x \cos y$, no ponto $(0, \frac{\pi}{4})$, segundo a direcção $\vec{v} = 5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$.

72. Para cada uma das funções do exercício 71., determine os valores máximos e mínimos que as derivadas direccionais podem atingir nos pontos indicados e diga em que direcção é que são obtidos esses valores.

73. A base de uma certa montanha é representada por uma região R no plano $x0y$ considerada ao nível do mar. A altitude z sobre o ponto (x,y) de R é dada por $z = 2000 - 0,02x^2 - 0,04y^2$, sendo x, y e z expressos em metros. Considera-se que o eixo positivo $0x$ tem a direcção Este e que o eixo positivo $0y$ tem a direcção Norte. Um alpinista está no ponto $(-20, 5, 1991)$.

   (a) Se o alpinista pretender seguir para Oeste, ele sobe ou desce?

   (b) Se o alpinista pretende seguir para nordeste, ele sobe ou desce? Indique a taxa de variação da altitude a que se encontra o alpinista?

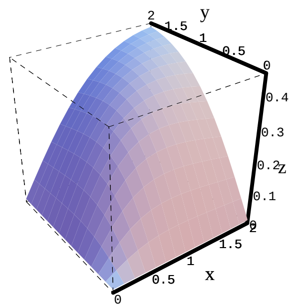
   (c) Qual a direcção que o alpinista deve escolher para viajar ao longo de uma curva de nível?

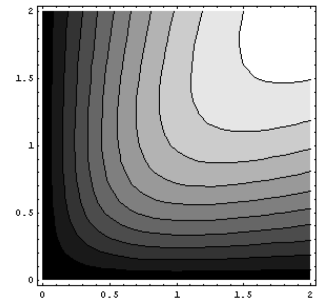
74. A temperatura num ponto (x,y) de uma placa de metal é dada, em graus Celsius, por

$$T(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}.$$

   (a) Determine a direcção e sentido para os quais um robot, saindo do ponto $(1,1)$, se deve deslocar, para que a temperatura baixe mais rapidamente.

   (b) Considerando as representações gráficas seguintes, relativas à função T, verifique geometricamente o resultado que obteve na alínea anterior.





75. Num ponto $P = (x, y, z)$ de uma bola de metal de raio r, a temperatura $T(x, y, z)$ é inversamente proporcional à distância de P ao centro $(0, 0, 0)$ da bola, isto é,

$$T(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ com } k > 0.$$

   (a) Sabendo que a temperatura no ponto $Q = (1, 2, 2)$ é de $120°$, determine a taxa de variação de T no ponto Q e na direcção e sentido do vector $v = (1, -1, 1)$.
   (b) Mostre que a direcção de maior crescimento da temperatura, em qualquer ponto da bola, é dada pelo vector que aponta para o seu centro.

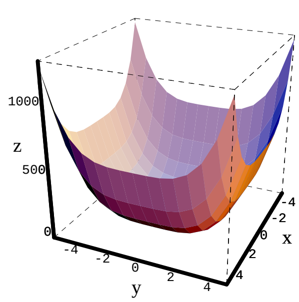
76. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(x, y) = e^{x+y} + \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}\, dt.$

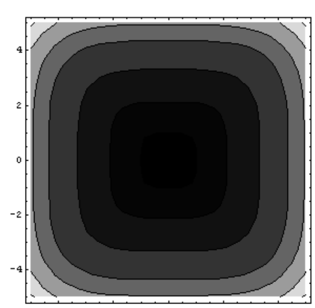
   (a) Mostre que g é diferenciável.
   (b) Calcule a derivada direccional de g no ponto $(0, 0)$ segundo a direcção $\vec{v} = (1, 2)$.
   (c) Em que direcção é máxima a derivada direccional em $(0, 0)$? Indique o seu valor.

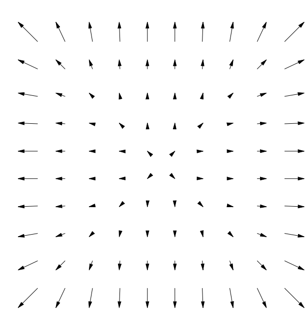
2.8 Máximos e mínimos. Multiplicadores de Lagrange

77. Analise os elementos gráficos de cada uma das funções e estabeleça conclusões acerca da existência de máximos locais, mínimos locais ou pontos sela. Confirme as suas conclusões através do estudo do comportamento da função nas vizinhanças desses pontos.

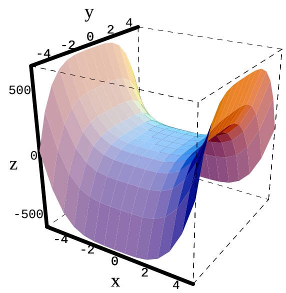
   (a) $f(x, y) = x^4 + y^4$

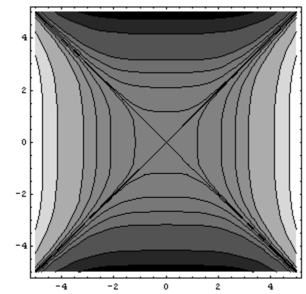


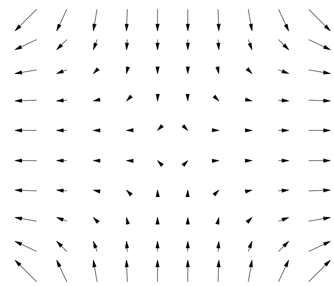




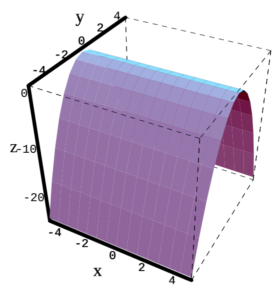
   (b) $f(x, y) = x^4 - y^4$

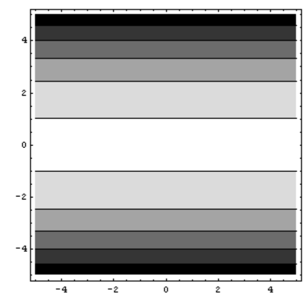


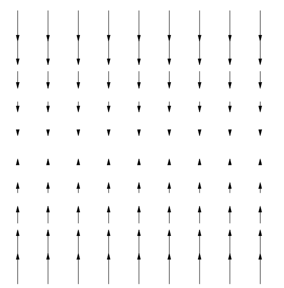




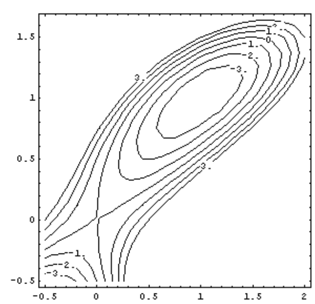
(c) $f(x,y) = -y^2$







78. Determine os extremos locais da seguinte função $f(x,y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$.



79. Estude quanto aos extremos locais (ou relativos) as funções seguintes:

(a) $f(x,y) = x + y$;

(b) $f(x,y) = x^4 + y^6$;

(c) $f(x,y) = (4 - x^2 - y^2)^2$;

(d) $f(x,y) = 4 - x^2$.

80. Determine os máximos, os mínimos relativos e os pontos sela das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$;

(b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$;

(c) $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$;

(d) $f(x,y) = y \sin x$;

(e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

(f) $f(x,y) = x^2y^2 - 2xy$;

(g) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$;

(h) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$.

81. Determine o máximo e o mínimo absolutos das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = xy - 2x$, na região triangular definida pelos vértices $(0,0)$, $(0,4)$ e $(4,0)$.

(b) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$, na região quadrangular definida pelos vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$ e $(2,0)$.

(c) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$, na região rectangular definida por $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ em $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

82. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + (y-2)^2$.

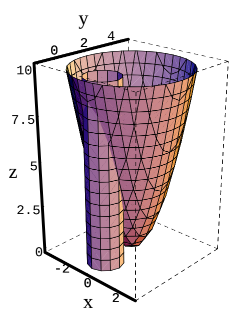
(a) Determine, caso existam, os máximos e mínimos locais e os pontos sela de f em todo o seu domínio.

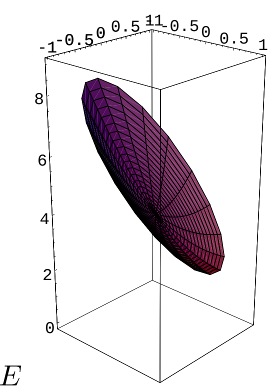
(b) Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange determine:

i. Os extremos absolutos de $f_{|_D}$, sendo
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

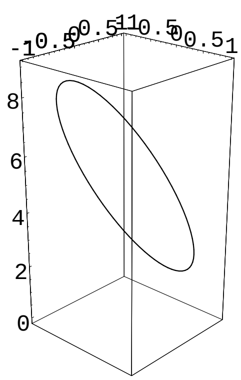
ii. Os extremos absolutos de $f_{|_E}$, sendo
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(c) Analisando os seguintes gráficos, verifique geometricamente os resultados que obteve nas alíneas anteriores.





Restrição de f a E

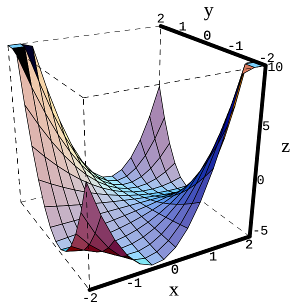


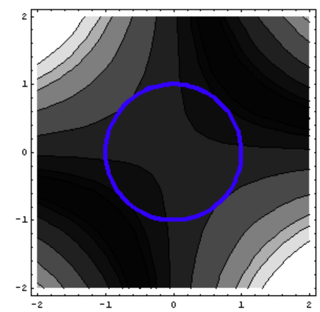
Restrição de f a D

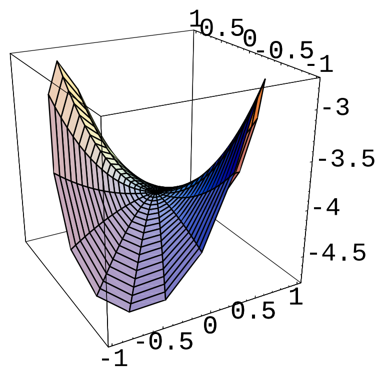
83. Considere a função g definida em $\mathbb{R}^2$ por $g(x,y) = x^2y^2 - 2xy - 4$.

(a) Determine, caso existam, os extremos locais de g.

(b) Determine os extremos absolutos da restrição de g ao conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.







84. Determine os valores extremos das funções seguintes sujeitas às respectivas restrições (condições de ligação):

(a) $f(x,y) = x^3$, no conjunto $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

(b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, no conjunto $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}$.

(c) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, no conjunto $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

85. Suponha que a temperatura num ponto (x,y) duma placa metálica é $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Determine a temperatura máxima que uma formiga, que se desloca sobre a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1, vai encontrar no seu movimento.

86. Determine o vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ cujo comprimento é 5 e cujas componentes têm a soma máxima.

87. Determine o ponto da recta $2x - 4y = 3$ no plano que está mais próximo da origem.

88. Determine os valores extremos das funções seguintes sujeitas às respectivas restrições (condições de ligação):

(a) $f(x,y,z) = 3x + 6y + 2z$, no conjunto $A = \{(x,y,z) : 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 70\}$.

(b) $f(x,y,z) = xyz$, no conjunto $A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

89. Encontre os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ mais próximos do ponto $(1,2,2)$.