

Universidade do Minho

Escola de Engenharia



# Codificação e Transmissão

*Engenharia de Comunicações*

3º Ano - 1º Trimestre

2004/05

Draft

Editado em 2004/10/6 por:

*Joaquim Neves*

# Folha de Apresentação da Disciplina

<b>Universidade do Minho</b> <b>Escola de Engenharia</b>		
<b>Ano Lectivo:</b>	2004/05	3º Ano, 1º Trimestre
<b>Disciplina:</b>	<b>Codificação e Transmissão</b>	
<b>Cursos:</b>	Engenharia de Comunicações	
<b>Equipa docente :</b>	Joaquim Neves (2T+2TP)	

## Objectivos da Aprendizagem

- Domínio dos conceitos e das técnicas tradicionais de transmissão analógica, bem como dos modernos sistemas de codificação e de transmissão digital.

## Conhecimentos, Pré-requisitos e Enquadramento no Curso

-Para frequentar esta disciplina, recomenda-se o conhecimento das tecnologias, dos conceitos básicos e das ferramentas de análise e de cálculo, leccionados em disciplinas anteriores, nomeadamente, nas disciplinas de Análise Matemática, Física, Álgebra, Sistemas Digitais. Electrónica, Teoria de Sistemas, Estatística e Processamento de Sinal.

- Por outro lado, recomenda-se a frequência de Laboratórios Integrados V e Radiação e Propagação, onde serão explorados conceitos relacionados com as matérias leccionadas nesta disciplina.

## Conteúdos Programáticos

### Programa Proposto

- Meios de transmissão: conceitos de sinal, ruído e interferências; transmissão analógica e digital; multiplexagem. Técnicas de modulação analógicas e digitais: modulações por onda contínua e de impulso; relação sinal ruído e probabilidades de erro; códigos de linha; técnicas de extracção de relógio; espalhamento espectral. Codificação digital da informação: códigos lineares, cíclicos e convolucionais; algoritmos de decodificação; detecção e correcção de erros.

### Elementos de Estudo; Bibliografia

#### Essencial

- Apontamentos de Codificação e Transmissão do curso de Licenciatura de Comunicações, da Escola de Engenharia da Universidade do Minho.
- A.Bruce Carlson, Sistemas de Comunicação, McGraw-Hill.
- Mischa Schwartz, Information, Transmission, Modulation and Noise, McGraw-Hill.
- H. Taub e D. Schilling, Principles of Communication Systems, McGraw-Hill, 2ª Ed., 1986.
- Bernard Sklar, Digital Communications, Fundamentals and Applications, Prentice-Hall Int. Editions, 1988.

#### Para Consulta

- Andrew J. Viterbi, Jim K. Omura, Principles of Digital Communication and Coding, McGraw-Hill.
- Simon Haykin, Communication Systems, Wiley, 3ª Ed., 1994.
- L. Couch II, Digital and Analogue Communication Systems, MacMillan.
- Dunlop e Smith, Telecommunication Engineering, Van Nostrand.
- G. Kennedy e B. Davis, Electronic Communication Systems, McGraw-Hill, 4ª Ed., 1993.
- Edward C. Jordan & Keith G. Balmain, Electromagnetic Waves and Radiating Systems, Prentice Hall Series, 1968.

- Akira Ishimaru, Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering, Prentice-Hall Int. Editions, 1991.
- David Parsons, The Mobile radio Propagation Channel, Pentech Press, 1993.

## **Número e Natureza das Provas de Avaliação**

A classificação final será obtida por mini-testes (peso de 25%), a realizar nas sessões lectivas, e por um exame final (peso de 75%), a realizar nas épocas oficiais de exames.

## **Método de Obtenção da Classificação Final**

O exame terá duas horas de duração, integrando, com pesos iguais, uma componente teórica e uma componente teórico-prática.

## **Horários Semanais e locais de Atendimento da Equipa Docente**

### **Aulas teóricas**

- Terças-feiras das 14:00 às 16:00 em EE0.07.

### **Aulas teórico-práticas**

- Quintas-feiras das 11:00 às 13:00 e das 11:00 às 12:00 em EE0.08.

### **Atendimento**

- Terças-feiras das 16:00 às 18:00 em B2.42.
- Quintas-feiras das 14:00 às 16:00 em B2.42.

## **Outros Aspectos Relevantes**

<http://www.dsi.uminho.pt/lecom>

Email: [Joaquim.Neves@dei.uminho.pt](mailto:Joaquim.Neves@dei.uminho.pt)

Draft

# Índice de Matérias

<b>Folha de Apresentação da Disciplina</b>	<b>1</b>
<b>I Aulas Teóricas</b>	<b>9</b>
<b>Revisão de Conceitos Básicos e Fundamentais</b>	<b>11</b>
1.1 Análise espectral de Sinais . . . . .	13
1.1.1 Sinais periódicos e não periódicos . . . . .	13
1.1.2 Transformada de Fourier para sinais periódicos . . . . .	15
1.1.3 Transformada de Fourier para sinais não periódicos . . . . .	18
1.1.4 Convolução e Correlação . . . . .	20
1.1.5 Função de densidade espectral . . . . .	21
1.1.6 Função de Transferência . . . . .	22
1.2 Sinais Aleatórios . . . . .	24
1.2.1 Funções de Distribuição . . . . .	24
1.2.2 Médias e Momentos Estatísticos . . . . .	25
1.2.3 Variância . . . . .	25
1.2.4 Desvio padrão . . . . .	25
1.2.5 Variáveis aleatórias Múltiplas . . . . .	25
1.2.6 Correlação de Variáveis Aleatórias . . . . .	26
1.2.7 Densidade Espectral de Variáveis Aleatórias . . . . .	26
1.3 Ruído . . . . .	27
1.3.1 Ruído Térmico . . . . .	27
1.3.2 Ruído Branco . . . . .	28
1.4 Relação Sinal Ruído . . . . .	31
1.4.1 Repetidores Regenerativos . . . . .	32
1.4.2 Relação do Ruído com a Probabilidade de Erro . . . . .	32

1.4.3	Capacidade de Transmissão . . . . .	33
1.5	Propagação Electromagnética . . . . .	34
1.5.1	Equações de Maxwell . . . . .	34
1.5.2	Campos produzidos por um dipolo elementar . . . . .	37
1.6	Linhas de Transmissão . . . . .	38
1.6.1	Impedância de Onda . . . . .	38
1.6.2	Linha Adaptada . . . . .	39
1.6.3	Perdas de Transmissão . . . . .	39
1.7	Antenas . . . . .	40
<b>Modulações Analógicas e Digitais</b>		<b>43</b>
2.1	Modulações Lineares . . . . .	44
2.1.1	Modulação em Amplitude . . . . .	44
2.1.2	Desmoduladores em Amplitude . . . . .	47
2.1.3	Banda Lateral Dupla . . . . .	48
2.1.4	Banda Lateral Única . . . . .	49
2.1.5	Banda Vestigial . . . . .	50
2.1.6	Indicadores Comparativos . . . . .	51
2.2	Modulações Exponenciais . . . . .	52
2.2.1	Modulação de Fase . . . . .	52
2.2.2	Modulação de Frequência . . . . .	53
2.2.3	Exemplo . . . . .	53
2.2.4	Distribuição Espectral . . . . .	54
2.2.5	Relação Sinal Ruído . . . . .	56
2.3	Multiplexagem por divisão em Frequência . . . . .	56
2.4	Modulação de Impulsos . . . . .	56
2.4.1	Relação Sinal do Ruído . . . . .	57
2.4.2	Amostragem do Sinal . . . . .	58
2.4.3	Reconstituição do Sinal . . . . .	59
2.5	Multiplexagem por divisão no Tempo . . . . .	61
2.6	Modulações Digitais . . . . .	61
2.6.1	Modulações por Onda Contínua . . . . .	61
2.6.2	Espalhamento Espectral . . . . .	66
2.7	Multiplexagem por divisão do código . . . . .	68



<b>Codificação Digital da Informação</b>	<b>71</b>
3.1 Quantificação da Informação . . . . .	71
3.1.1 Conversão Analógico-Digital . . . . .	72
3.1.2 Relação Sinal do Ruído de Quantificação . . . . .	72
3.1.3 Modulações de Impulso . . . . .	72
3.1.4 Quantificação não Linear . . . . .	74
3.2 Codificação da Informação . . . . .	76
3.2.1 Códigos de blocos . . . . .	76
3.2.2 Códigos Cíclicos . . . . .	78
3.2.3 Controlo de Erros . . . . .	79
3.2.4 Codificação Convolutacional . . . . .	80
3.3 Codificação de Canal . . . . .	82
3.3.1 Recuperação do Relógio . . . . .	82
3.3.2 Códigos de Linha . . . . .	82
<b>Introdução aos Sistemas de Comunicação Digital</b>	<b>87</b>
4.1 Sincronização, concentração e comutação de canais digitais . . . . .	87
4.1.1 Multiplexagem . . . . .	88
4.1.2 Controlo de Acesso . . . . .	89
4.1.3 Sistemas de Comutação . . . . .	90
4.2 Qualidade de serviço . . . . .	91
4.3 Gestão de Sistemas de Comunicação . . . . .	91
<b>II Aulas Teórico-Práticas</b>	<b>95</b>
<b>Resolução e discussão de problemas numéricos</b>	<b>97</b>
1.1 Análise de Sinais . . . . .	97
1.2 Resposta em Frequência . . . . .	98
1.3 Propagação Electromagnética . . . . .	99
1.4 Modulações analógicas e digitais . . . . .	100
1.5 Codificação Digital da Informação . . . . .	102

Draft

**I**

**Aulas Teóricas**

Draft

# Revisão de Conceitos Básicos e Fundamentais

Genericamente, podemos descrever os processos de comunicação segundo modelos que caracterizam a interação dialéctica da informação, transferida entre duas ou mais entidades terminais (emissoras e/ou receptoras). Neste contexto, quando as entidades terminais estão distantes, é necessário recorrer a meios físicos e a tecnologias apropriadas para segurar a transferência da informação, sem degradação significativa das suas características originais.

A figura 1.1 ilustra este conceito, apresentando os principais componentes de

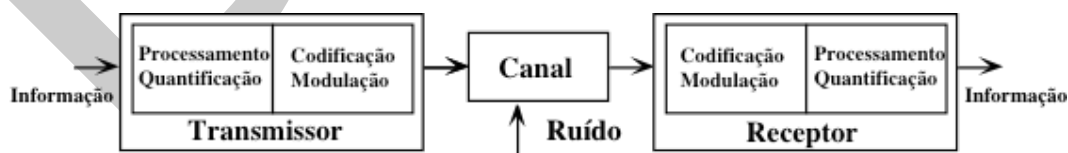


Figura 1.1: Componentes de um sistema de comunicação.

um sistema de comunicação. A transferência da informação, é assegurada pelo canal de transmissão sem garantia de poder ser integralmente recuperada no destino, uma vez que outras fontes exteriores de ruído (sempre presente nos processos de comunicação) podem causar perturbações aleatórias que conduzem à perda ou à degradação esporádica da informação. Por outro lado, dada a limitação da capacidade de transmissão do canal, mesmo que o efeito do ruído possa ser desprezado, como no caso representado na figura 1.2, a recuperação da informação na recepção pode obrigar à utilização de técnicas de processamento de sinal, mais ou menos complexas.

Como as características físicas e lógicas das entidades extremo onde a informação

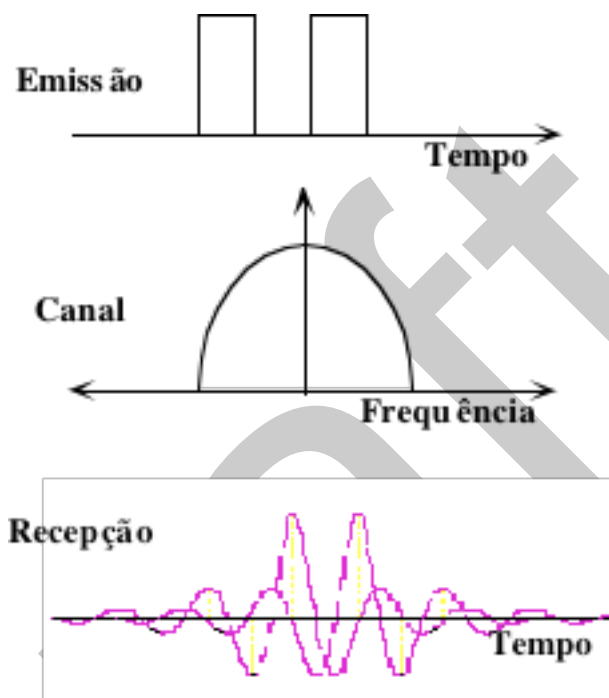


Figura 1.2: Transformação pelo canal da sinal emitido.

é gerada, processada ou recebida, poderão ser muito diferentes das dos canais de transmissão, é necessário o recurso a diferentes níveis de adaptação da informação aos diferentes meios onde é representada.

Para sistematizar e flexibilizar diferentes níveis de compatibilidade entre fontes de informação, por um lado, e canais de transmissão, por outro, o processo de adaptação comporta normalmente duas vertentes distintas: o processamento e quantificação da informação de modo a garantir compatibilidade extremo a extremo, independentemente do canal utilizado; e a codificação e modulação para garantir a transmissão, num dado canal, de qualquer tipo de fonte de informação.

O estudo aprofundado destes modelos, recorre a alguns conceitos matemáticos e físicos, nomeadamente, cálculo vectorial e integral, teoria dos campos, electromagnetismo e transformadas que, tendo já sido apresentados noutras disciplinas precedentes, merecem ser revistos.

A aplicação desses conceitos permitirá abordar, de seguida, os principais fenómenos de interesse para as telecomunicações, relativos à propagação electromagnética, às modulações analógicas e digitais, bem como, ao efeito do ruído na recepção dos sinais. Segue-se a introdução de conceitos relativos à codificação digital de informação tendo

em vista a sua transmissão em diferentes tipos de canal, que será complementada com a apresentação de outros mecanismos de sincronização e concentração da informação, bem como, de controlo de tráfego e da qualidade de serviço, assim como, da gestão das redes de telecomunicações. Finalmente apresentam-se sumariamente alguns sistemas e redes de telecomunicações, bem como uma breve referência aos organismos internacionais que estão da base dos processos de standardização e de evolução dos sistemas de comunicação.

## 1.1 Análise espectral de Sinais

Como é sabido, os sinais que transportam informação podem ser caracterizados por funções, lineares ou não lineares de sinais sinusóidais, do tipo  $v(t) = A \cos(w_o t + \theta)$ , onde a Amplitude ( $A$ ), a Frequência ( $f_o = \frac{w_o}{2\pi}$ ), e a Fase ( $\theta$ ), podem ser representados graficamente como mostra a figura 1.3.

Em alternativa, o mesmo sinal  $v(t)$  pode também ser representado graficamente

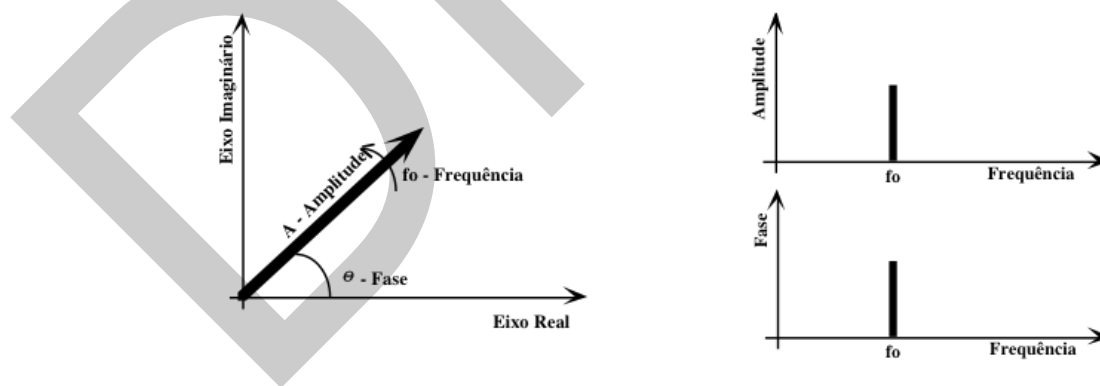


Figura 1.3: Sinais sinusóidais: - Representação, em dois planos (esquerda) e no plano complexo (direita), da Amplitude e da Fase em função da frequência.

como a figura 1.4 documenta, uma vez que em notação exponencial:

$$v(t) = A \cos(wt + \theta) = \frac{A}{2} (e^{j\theta} e^{j\omega t} + e^{-j\theta} e^{-j\omega t})$$

### 1.1.1 Sinais periódicos e não periódicos

Um Sinal  $v(t)$  diz-se periódico se

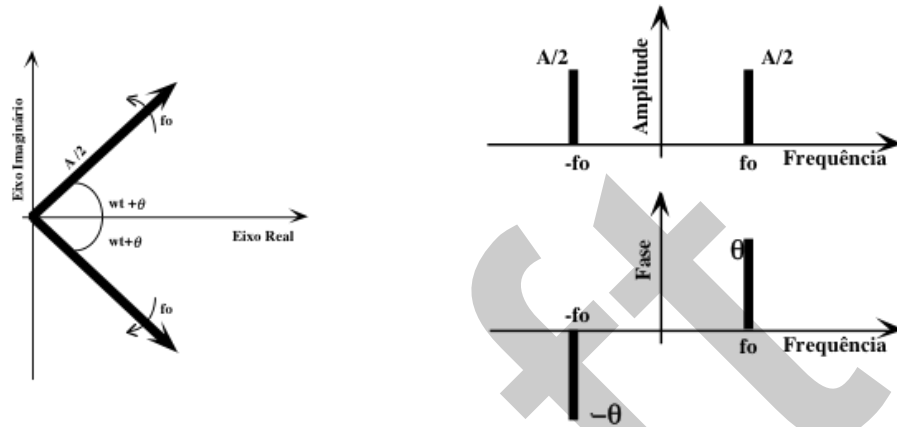


Figura 1.4: Sinais sinusóidais: - Representação, em dois planos (esquerda) e no plano complexo (direita), da Amplitude e da Fase em função da frequência.

$$v(t \pm mT_0) = v(t),$$

onde  $m$  é um número inteiro e  $T_0$ , o período do sinal.

### Valor Médio

O Valor Médio  $\langle v(t) \rangle$  do Sinal  $v(t)$  pode ser calculado por

$$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) dt.$$

### Potência Média

O Valor da Potência Média  $P$  do Sinal  $v(t)$  pode ser calculado por

$$P = \langle |v(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t)|^2 dt.$$

### Exemplo

Verificar que o sinal  $v(t) = A \cos(wt + \theta)$ , com  $w = \frac{2\pi}{T_0}$ , tem valor médio nulo ( $\langle v(t) \rangle = 0$ ) e potência média  $\langle |v(t)|^2 \rangle = \frac{A^2}{2}$ .



### 1.1.2 Transformada de Fourier para sinais periódicos

Se o Sinal  $v(t)$  for periódico, pode ser representado por:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t},$$

com  $c(nf_0)$  calculador por:

$$c(nf_0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt.$$

Repare que, para  $n=0$ ,  $c(0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) dt = \langle v(t) \rangle$  traduz o valor médio do sinal  $v(t)$ .

Por outro lado, se  $v(t)$  for real, então

$$c(nf_0) = |c(nf_0)| e^{j \arg[c(nf_0)]}$$

e

$$c(-nf_0) = c^*(nf_0) = |c(nf_0)| e^{-j \arg[c(nf_0)]}.$$

Do mesmo modo, se  $v(t)$  tiver simetria par, isto é se  $v(-t) = v(t)$ , então

$$\arg[c(nf_0)] = 0 \text{ ou } \pm\pi.$$

Enquanto que, se tiver simetria impar ( $v(-t) = -v(t)$ ), então

$$\arg[c(nf_0)] = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Note ainda que, se  $v(t)$  for periódico e real, então

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t} \\ &= c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} |2c(nf_0)| \cos(2\pi n f_0 t + \arg[c(nf_0)]), \end{aligned}$$

uma vez que,  $c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t} + c^*(nf_0) e^{-j2\pi n f_0 t} = 2 |c(nf_0)| \cos(2\pi n f_0 t + \arg[c(nf_0)])$ .

**Exemplo**

Seja  $v(t) = A$ , se  $|t \pm mT_0| < \frac{\tau}{2}$ , e  $v(t) = 0$ , se  $|t \pm mT_0| > \frac{\tau}{2}$ , com  $m$  inteiro, como se representa na figura 1.5.

A transformada de Fourier  $c(nf_0)$ , de  $v(t)$ , representada na figura 1.6, será então:

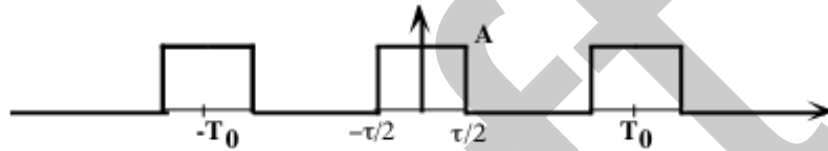


Figura 1.5: Trem de Impulsos Rectangulares.

$$c(nf_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$c(nf_0) = \frac{A}{-j2\pi n f_0 T_0} (e^{-j\pi n f_0 \tau} - e^{j\pi n f_0 \tau})$$

$$c(nf_0) = \frac{A}{\pi n} \text{sen}(\pi n f_0 \tau) = (A f_0 \tau) \text{senc}(n f_0 \tau)$$

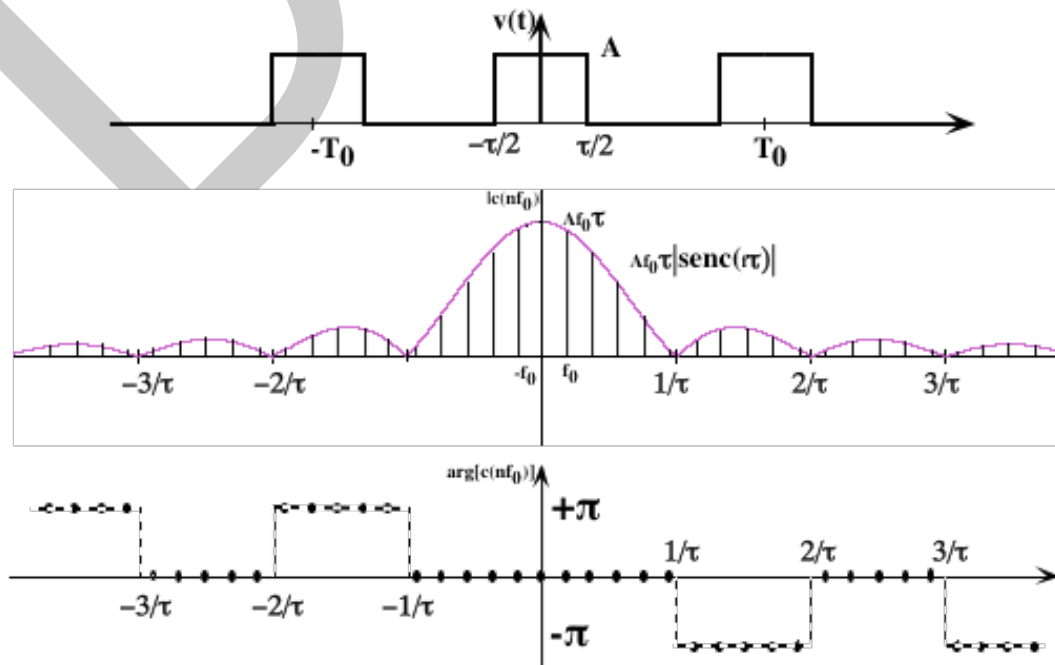


Figura 1.6: Transformada de Fourier dum trem de Impulsos Rectangulares.

### Função Seno Cardinal

Repare que a Função Seno Cardinal  $\text{senc}\lambda$ , definida por<sup>1</sup>

$$\text{senc}\lambda = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda},$$

apresenta o valor de 1 para  $\lambda = 0$  e de 0 para  $\lambda = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  e tende para 0 quando  $\lambda$  tende para  $\pm\infty$ , como se mostra na figura 1.7.

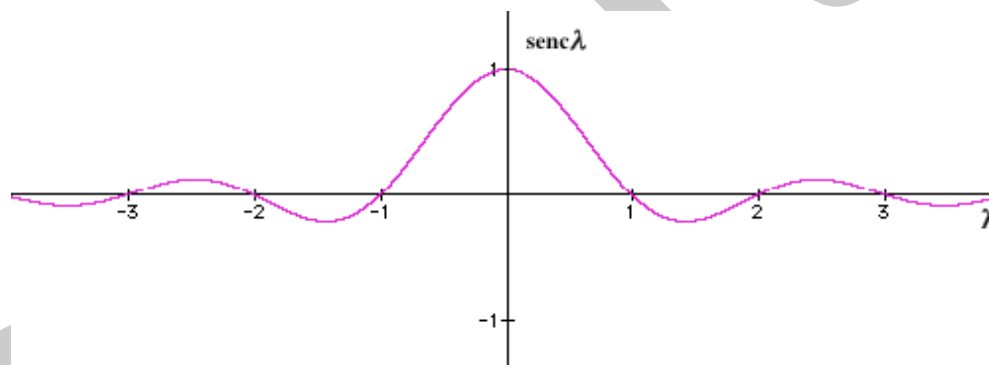


Figura 1.7: Função Seno Cardinal.

### Teorema de Parseval

A Potência Média  $P$  do sinal  $v(t)$  pode ser calculada por:

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c(nf_0)|^2$$

Repare que:

$$P = \langle |v(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t)|^2 dt$$

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \cdot v^*(t) dt$$

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c^*(nf_0) e^{-j2\pi nf_0 t} \right) dt$$

---

<sup>1</sup> $\lambda = nf_0\tau$ .

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \right) \cdot c^*(n f_0)$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(n f_0) \cdot c^*(n f_0)$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c(n f_0)|^2$$

### 1.1.3 Transformada de Fourier para sinais não periódicos

Se  $v(t)$  não for periódico, pode ser representado por:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) e^{j2\pi f t} df,$$

sendo a sua Transformada de Fourier ( $\mathcal{F}$ ), calculada por:

$$V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Note que  $V(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) dt = \langle v(t) \rangle$ , representa o valor médio de  $v(t)$ .

Por outro lado, se  $v(t)$  for real, então  $V(-f) = V^*(f)$ , do mesmo modo que, se  $v(t)$  tiver simetria par  $v(-t) = v(t)$ , então  $\arg[V(f)] = 0$  ou  $\pm\pi$ , e se  $v(t)$  tiver simetria ímpar  $v(-t) = -v(t)$ , então  $\arg[V(f)] = \pm\frac{\pi}{2}$

#### Exemplo

Seja  $v(t) = A$ , se  $|t| < \frac{\tau}{2}$ , e  $v(t) = 0$ , se  $|t| > \frac{\tau}{2}$ , como se representa na figura 1.8.

A transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  de  $v(t)$ , representada na figura 1.9, será então:

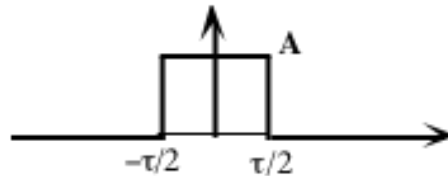


Figura 1.8: Impulso com duração  $T_0$ .

$$V(f) = 2 \int_0^{\frac{T_0}{2}} A \cos(2\pi f t) dt$$

$$V(f) = \frac{2A}{2\pi f} \text{senc}(\pi f \tau)$$

$$V(f) = (A\tau) \text{senc}(f\tau)$$

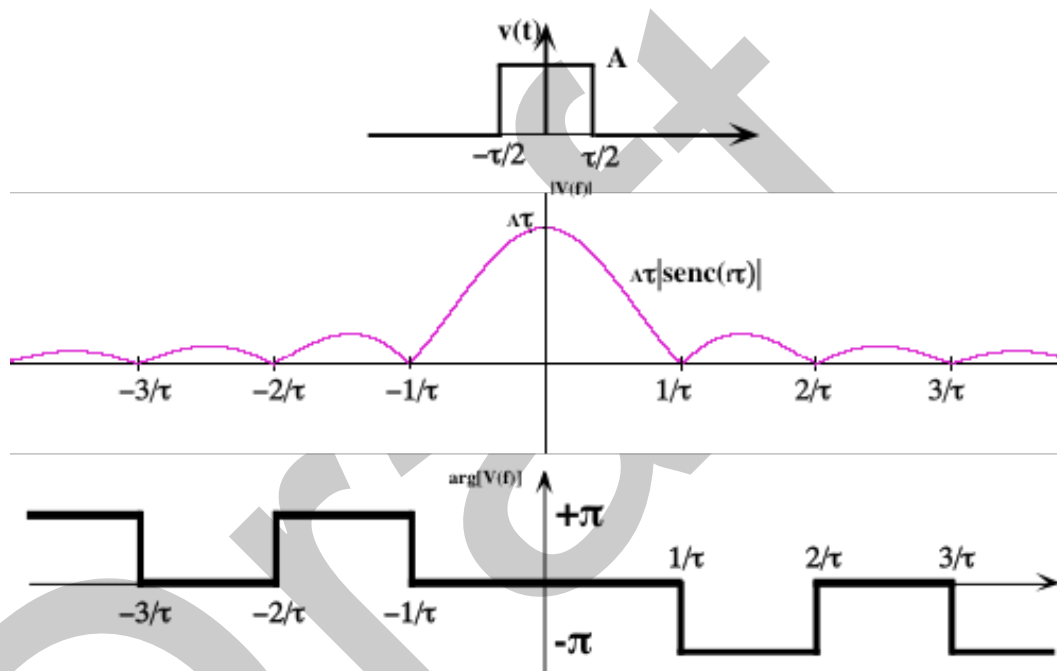


Figura 1.9: Transformada de Fourier dum Impulso com duração  $T_0$ .

### Questão

- Quais as semelhanças e diferenças entre as transformadas de Fourier dum Impulso e de um trem de Impulsos?

### Teorema de Rayleigh

Uma vez que  $\int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot w^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) \cdot W^*(f) df$ , então a Energia  $E$  do sinal  $v(t)$  ( $E = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot v^*(t) dt$ ), pode ser calculada por:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) \cdot V^*(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |V(f)|^2 df$$

### Propriedades

As seguintes propriedades das Transformadas de Fourier são de extrema utilidade em muitos cálculos e demonstrações.

Linearidade:  $av(t) + bv(t) \Leftrightarrow aV(f) + bV(f)$

Atraso Temporal:  $v(t - t_a) \Leftrightarrow V(f)e^{-j\omega t_a}$

Translação de Frequência:  $v(t)e^{j\omega_c t} \Leftrightarrow V(f - f_c)$

Escala:  $v(at) \Leftrightarrow (\frac{1}{|a|})V(\frac{f}{a})$

Dualidade: se  $v(t) \Leftrightarrow V(f)$  então  $\mathcal{F}[V(t)] \Leftrightarrow v(-f)$

Diferenciação:  $\frac{\partial v(t)}{\partial t} \Leftrightarrow j2\pi f.V(f)$

Integração:  $\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)dt \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f}.V(f)$

### 1.1.4 Convolução e Correlação

#### Função de Convolução

Define-se Convolução  $v(t) * w(t)$  entre os sinais  $v(t)$  e  $w(t)$ , como:

$$v(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\lambda).w^*(t - \lambda)d\lambda$$

#### Propriedades

Destacam-se as seguintes propriedades da Convolução  $v(t) * w(t)$  entre os sinais  $v(t)$  e  $w(t)$ .

$$v(t) * w(t) \Leftrightarrow V(f)W(f)$$

$$v(t)w(t) \Leftrightarrow V(f) * W(f)$$

#### Função de Correlação

Representa-se a Função de Correlação  $R_{vw}(\tau)$  entre os sinais  $v(t)$  e  $w(t)$ , por

$$R_{vw}(\tau) = \langle v(t), w(t - \tau) \rangle.$$

Conforme os sinais  $v(t)$  e  $w(t)$  são de energia, de potência ou periódicos,  $R_{vw}(\tau)$  é definida, respectivamente, por:

$$R_{vw}(\tau) = \langle v(t), w(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t).w^*(t - \tau)dt$$

$$R_{vw}(\tau) = \langle v(t), w(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t) \cdot w^*(t - \tau) dt$$

$$R_{vw}(\tau) = \langle v(t), w(t - \tau) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \cdot w^*(t - \tau) dt$$

Repare que se  $v(t) = w(t)$ , a função de autocorrelação  $R_v(\tau) = R_{vv}(\tau)$  representa a variação no tempo de  $v(t)$ .

### 1.1.5 Função de densidade espectral

#### Teorema de Wiener-Kinchine

A Função de densidade espectral  $G_v(f)$  dum sinal  $v(t)$  é equivalente à transformada de Fourier da sua função de autocorrelação  $R_v(\tau)$ .

$$R_v(\tau) \Leftrightarrow G_v(f)$$

$$G_v(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \Leftrightarrow R_v(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Note que  $R_v(0)$  representa a potência ou a energia do  $v(t)$ , uma vez que:

$$R_v(0) = \langle v(t), v(t) \rangle$$

$$R_v(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f) df$$

Verifique ainda que  $|R_v(\tau)| \leq R_v(0)$

#### Outras Propriedades

Se  $v(t)$  for real, então  $G_v(f)$  é real e par, uma vez que  $R_v(\tau)$  é real e par.

Se  $v(t)$  for um sinal periódico de potência, então a sua densidade de potência é impulsiva e localizada nas frequências  $f = nf_0$ , uma vez que:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_x(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$R_v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_y(nf_0)|^2 e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$Gv(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_y(nf_0)|^2 \delta(f - nf_0)$$

### 1.1.6 Função de Transferência

Um sistema, cujas entradas  $x(t)$  e saídas  $y(t)$  são descritas por equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, do tipo:

$$a_n \left( \frac{\partial^n y}{\partial t^n} \right) + \dots + a_1 \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + a_0 y(t) = b_m \left( \frac{\partial^m x}{\partial t^m} \right) + \dots + b_1 \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) + a_0 x(t),$$

tem como Função de Transferência, no domínio  $s$ , da transformada de Laplace:

$$H(s) = |H(s)| e^{j \arg[H(s)]} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

ou se se pretender apenas analisar a sua resposta em frequência ( $s = jw$ ),

$$H(f) = \frac{b_m \cdot (j2\pi f)^m + \dots + b_1 \cdot (j2\pi f) + b_0}{a_n \cdot (j2\pi f)^n + \dots + a_1 \cdot (j2\pi f) + a_0}$$

### Resposta do Sistema

Um sistema com função de transferência  $H(f)$  quando estimulado por um sinal  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} cx(nf_0)e^{j2\pi nf_0 t}$ , responde com  $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} cy(nf_0)e^{j2\pi nf_0 t}$ , onde:

$$c_y(nf_0) = H(nf_0)c_x(nf_0), \text{ o que significa que,}$$

$$|c_y(nf_0)| = |H(nf_0)| \cdot |c_x(nf_0)|;$$

e

$$\arg[c_y(nf_0)] = \arg[H(nf_0)] + \arg[c_x(nf_0)].$$

Note que, atendendo às propriedades da convolução anteriormente referidas, este resultado também poderia ser obtido por:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \cdot x(t - \lambda) d\lambda.$$

Por outro lado, se  $x(t)$  for periódico, a potência  $P$  de  $y(t)$  será dada por:

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_y(nf_0)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |H(nf_0)|^2 |c_x(nf_0)|^2;$$



enquanto que se  $x(t)$  não for periódico,

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2,$$

e a sua função de densidade espectral de energia  $G_Y(f)$  será:

$$G_Y(f) = |H(f)|^2 G_X(f)$$

### Questão

- Sendo  $H(f)$  a Função de Transferência de um sistema, o que representa fisicamente  $h(t)$ ?

### Densidade espectral

A expressão da função densidade espectral de energia  $G_Y(f)$  da saída dum sistema, com função de transferência  $H(f)$  e estimulado por um sinal  $x(t)$ , resulta dos teoremas de Rayleigh e Wiener-Kinchine, como se pode verificar por:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \cdot x^*(t - \lambda) d\lambda$$

$$R_y(\tau) = \langle y(t), y(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot y^*(t - \tau) dt$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \cdot x(t - \lambda) d\lambda \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\theta) \cdot x^*(t - \tau - \theta) d\theta dt$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \cdot h^*(\theta) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \lambda) \cdot x^*(t - \tau - \theta) d\lambda d\theta dt$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \cdot h^*(\theta) \cdot R_x(t - \lambda + \theta) d\lambda d\theta$$

$$G_y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \cdot e^{-j2\pi f\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\theta) \cdot e^{-j2\pi f\theta} d\theta \cdot G_x(f)$$

$$\|y\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_y(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \cdot G_x(f) df$$

### Canal de Transmissão

A função de transferência  $H(f)$  ideal para um canal de transmissão seria dada por:

$H(f) = Ke^{-j\omega t_a}$ , com  $K$  e  $t_a$  constantes,

uma vez que conduziria a que o sinal  $y(t)$  na recepção apresenta-se uma atenuação e um atraso constantes, relativamente ao sinal  $x(t)$  emitido. Isto é  $y(t) = K.x(t - t_a)$ .

## 1.2 Sinais Aleatórios

Quer a informação quer o ruído associados aos processos de comunicação são de natureza aleatória. Por isso, em regra, estes sinais são representados por variáveis aleatórias que poderão ser contínuas ou discretas, conforme a natureza das suas fontes ou das tecnologias de transmissão e comutação.

### 1.2.1 Funções de Distribuição

A cada valor  $X$  de uma variável aleatória  $x$  está associada uma probabilidade de ocorrência  $p_X(x)$  ou  $P(X = x)$ .

Podemos definir diferentes funções de probabilidade para a variável  $X$ , como a Função de Probabilidade Cumulativa  $F_X(x)$ , que será definida por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p(\lambda) d\lambda, \text{ para } x \text{ continua, ou,}$$

$$F_X(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{i=-\infty}^X p(x_i), \text{ para } x \text{ discreta.}$$

Em ambos os casos  $F_X(-\infty) = 0 \leq F_X(x) \leq 1 = F_X(+\infty)$ , pelo que

$$P(X > x) = 1 - F_X(x).$$

Poderíamos igualmente definir a Função Densidade de Probabilidade  $p_X(x)$  a partir da Função de Probabilidade Cumulativa, ou seja:

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

### Exemplos

As seguintes Funções de Distribuição de Probabilidade, são usadas com muita frequência para descrever diversos fenómenos na áreas das telecomunicações.

**Função de Distribuição Uniforme:**  $p_X(x) = \frac{1}{2\pi}$ , para  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

**Função de Distribuição Binomial:**  $p_X(x) = \binom{n}{x} \alpha^x (1 - \alpha)^{n-x}$ , com  $x = 0, 1, \dots, n$   
e  $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ .

**Função de Distribuição de Poisson:**  $p_X(x) = e^{-m} \frac{m^x}{x!}$ .

**Função de Distribuição Gaussiana:**  $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ .

### 1.2.2 Médias e Momentos Estatísticos

Se  $X$  representar um valor da variável aleatória  $x$  e  $g(X) = X^n$  (com  $n = 1, 2, \dots$ ), então os valores esperados  $E[g(X)]$  de  $g(x)$  representam os momentos da variável  $X$ . Assim, sendo que

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p_X(x) dx:$$

para  $n = 1$ ,  $E[X]$  representa o primeiro momento ( $m_x$ ) ou a média da variável  $x$ ; e para  $n = 2$ ,  $E[X^2]$  representa o segundo momento ou valor médio quadrático.

### 1.2.3 Variância

Define-se Variância  $\sigma_x^2$  da variável  $X$ , como  $\sigma_x^2 = E[(X - E[X])^2] = \overline{x^2} - m_x^2$

### 1.2.4 Desvio padrão

O Desvio padrão  $\sigma_x$  da variável  $X$  é igual à raiz quadrada da sua Variância.

$$\sigma_x = \sqrt{E[(X - E[X])^2]} = \sqrt{\overline{x^2} - m_x^2}$$

### 1.2.5 Variáveis aleatórias Múltiplas

Podemos igualmente calcular os valores esperados para funções aleatórias de múltiplas variáveis. Por exemplo, o valor esperado das variáveis  $X$  e  $Y$ , será:

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) p_{XY}(x, y) dx dy,$$

se  $g(X, Y)$  definir a função das variáveis  $X$  e  $Y$  e  $P_{XY}(x, y)$ , a respectiva função de distribuição de probabilidade.

No caso particular, (mas frequente) das variáveis  $X$  e  $Y$  serem independentes,  $g(X, Y) = g_1(X)g_2(Y)$  e  $P_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ , pelo que:

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x) p_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(y) p_Y(y) dy = E[g_1(X)] E[g_2(Y)].$$

### Exemplo

A Função de Distribuição Rayleigh  $p_R(r)$  é especificada a partir de duas variáveis aleatórias independentes  $X$  e  $Y$ , com distribuição gaussiana com  $m_x = m_y = 0$  e  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$  e  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , pelo que:

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

### 1.2.6 Correlação de Variáveis Aleatórias

A função de Correlação das variáveis aleatórias  $v$  e  $w$  é dada por:

$$R_{vw}(\tau) = \langle v(t), w(t - \tau) \rangle = E[v(t) \cdot w^*(t - \tau)]$$

Se  $R_{vw}(\tau) = R_{wv}(\tau) = 0$ , então  $v(t)$  e  $w(t)$  são ortogonais ou estatisticamente independentes.

### 1.2.7 Densidade Espectral de Variáveis Aleatórias

A função de densidade espectral da variável aleatória  $v$  é dada pela transformada de Fourier da sua função de auto-correlação ( $R_v(\tau)$ ).

$$G_v(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} E[v(t) \cdot v^*(t - \tau)] e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Repare que  $G_v(f) = G_v(-f)$  e que  $\int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f) df = R_v(0) = E[v^2]$

**Exemplo**

Para  $v(t) = A \cos(w_0 t + \theta)$ , com fase  $\theta$  aleatória e uniformemente distribuída no intervalo  $-\pi < \theta < +\pi$ , a sua função de auto-correlação ( $R_y(\tau)$ ) é dada por:

$$R_y(\tau) = E[v(t) \cdot v^*(t - \tau)] = \frac{A^2}{2} (E[\cos w_0 \tau] + E[\cos 2w_0 \tau - w_0 \tau + 2\theta]).$$

$$R_y(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos w_0 \tau.$$

Deste modo a função de densidade espectral de  $v(t)$  é impulsiva, uma vez que:

$$G_v(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0),$$

e, por isso, a sua potência será dada por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f) df = \frac{A^2}{2}.$$

**1.3 Ruído**

Tão importante como a caracterização do sinal, que transporta a informação, num sistema de comunicação, é igualmente necessário caracterizar o sinal de Ruído, presente em qualquer meio de transmissão. De acordo com os modelos mais usados para caracterizar o ruído, este pode ser definido como *Ruído Térmico* ou *Ruído Branco*

**1.3.1 Ruído Térmico**

O sinal de ruído associado a uma resistência  $R$ , pode definir-se por uma função de densidade espectral dependente da sua temperatura  $\mathcal{T}$ , sendo por isso designado por ruído térmico. De acordo com a teoria cinética do movimento das partículas eléctricas dos meios condutores, a função de densidade espectral  $G(f)$  da fonte de ruído térmico de uma resistência  $R$  é dada por:

$$G(f) = \frac{2Rh|f|}{e^{h|f|k\mathcal{T}} - 1} \text{ (V}^2/\text{Hz)},$$

onde:

$$k = 1,37 \cdot 10^{-23} \text{ J/o - Constante de Boltzmann;}$$

$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$  - Constante de Planck;

$\mathcal{T}$  - Temperatura em graus Kelvin;

R - Resistência.

Segundo este modelo, o sinal de ruído  $G(f)$  é gerado numa fonte ideal, com uma resistência interna (R) ligada em série ou paralelo, conforme se adopte os modelos de Thévenin ou de Norton.

Dado que a inclinação da função exponencial de ruído térmico é muito pequena, por vezes, para a temperatura de trabalho, esta função é linearizada (na origem), conduzindo a expressões simplificadas, como:

$$G_v(f) = 2Rk\mathcal{T} \text{ (V}^2/\text{Hz)} \text{ (Modelo de Thévenin)}$$

$$G_i(f) = \frac{G_v(f)}{R^2} = \frac{2k\mathcal{T}}{R^2} \text{ (I}^2/\text{Hz)} \text{ (Modelo de Norton)}$$

$$G_a(f) = \frac{G_v(f)}{4R} = \frac{k\mathcal{T}}{2} \text{ (W/Hz)} \text{ (Carga adaptada)}$$

O valor médio do sinal de ruído térmico é nulo ( $\bar{v} = 0$ ) e sua variância ( $\sigma_v^2$ ) igual a:

$$\sigma_v^2 = 1,9 \cdot 10^{-12} \text{ K } \mathcal{T}^2 R = \frac{2(\pi k\mathcal{T})^2 R}{3h} \text{ (V}^2\text{)},$$

### 1.3.2 Ruído Branco

O sinal de ruído branco é caracterizados por apresentar uma função de densidade espectral constante, sendo  $G(f)$  dada por:

$$G(f) = \frac{\eta}{2},$$

que traduz a sua natureza implulsiva, no domínio do tempo, uma vez que:

$$R_v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{2} e^{j2\pi ft} df$$

$$R_v(\tau) = \frac{\eta}{2} \delta(\tau)$$

### Relação com o Ruído Térmico

Para uma dada resistência  $R$ , pode estabelecer-se as seguintes relações entre as funções de densidade espectral das fontes de ruído térmico e de ruído branco:

$$\eta_a = K\mathcal{T}; \eta_i = \frac{4k\mathcal{T}}{R}; \eta_v = 4Rk\mathcal{T},$$

respectivamente, para os modelos de adaptada, de Norton e de Thévenin.

### Filtragem do Ruído

Se a entrada dum filtro com função de transferência  $H(f)$ , for estimulada por um sinal de ruído  $G_x(f)$ , o sinal de ruído presente na sua saída será caracterizado por:

$$G_Y(f) = |H(f)|^2 G_X(f)$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 G_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$E[y^2] = R_y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 G_x(f) df$$

Assim, o sinal aleatório de ruído com largura de banda infinita, ( $G_x(f) = \frac{\eta}{2}$ ), presente na entrada dum filtro passa baixo com largura de Banda  $B$ , produz uma saída com densidade espectral dada por:

$$G_y(f) = \frac{\eta}{2} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right),$$

que representa um sinal de ruído com Banda Finita.

Uma vez que:

$$R_y(\tau) = \eta B \text{sinc}(2B\tau),$$

e

$$E[y^2] = \eta B,$$

o sinal de ruído na saída do filtro, apresenta uma correlação, no tempo, em intervalos de  $\frac{1}{2B}$  e uma potência proporcional à largura de banda do filtro, como se mostra na figura 1.10.

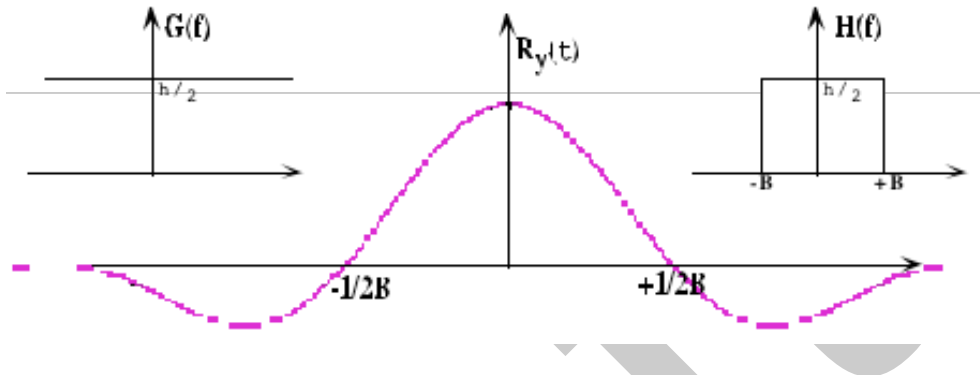


Figura 1.10: Filtragem do Ruído Branco.

### Banda Equivalente do Ruído

Para simplificar o cálculo da potência de ruído, em vez da expressão exacta

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \eta/2 df = \eta \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df,$$

utiliza-se frequentemente um modelo linearizado, onde os filtros são caracterizados por apresentar uma largura de banda de ruído  $B_R$  e um ganho constante na banda passante, como se mostra na figura 1.11.

A largura de banda de ruído  $B_R$  pode então ser calculada por:

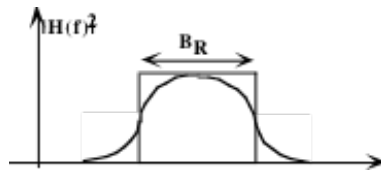


Figura 1.11: Banda Equivalente do Ruído.

$$B_R = \frac{1}{|H(f)|_{max}^2} \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df.$$

A potência de ruído será então:

$$E[y^2] = \eta |H(f)|_{max}^2 B_R.$$



## 1.4 Relação Sinal Ruído

Define-se *Relação Sinal Ruído* como o razão entre a Potência do Sinal  $S$  e a Potência de Ruído  $R$ , num dado ponto  $p$  de uma linha de transmissão.

$$\left(\frac{S}{R}\right)_p = \frac{R_s(0)_p}{E[r^2]_p}$$

### Exemplo

Como se mostra na figura 1.12, a potência de sinal  $S_r$  com largura de banda  $W$ , recebida à saída dum receptor  $r$  será dada pelo produto da potência do sinal na emissão  $S_e$  e pelos ganhos das antenas (emissora  $G_e$  e receptora  $G_r$ ) a dividir pelas perdas na transmissão  $P_t$ .

$$S_r = \frac{S_e G_e G_r}{P_t}$$

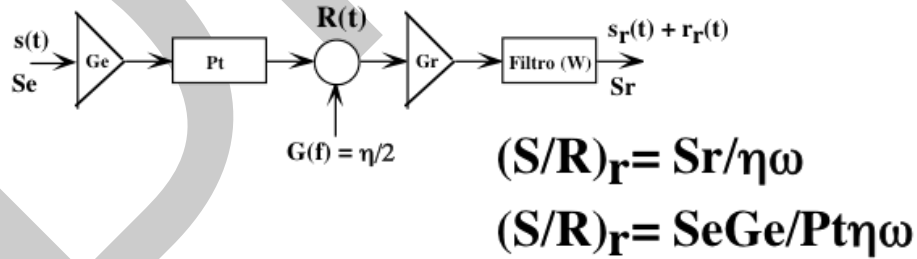


Figura 1.12: Relação Sinal Ruído na Recepção.

Por outro lado, a potência de ruído  $S_r$  será dada pelo produto da sua densidade espectral  $G(f)$  pelo ganho das antena receptora  $G_r$  e pela largura de banda  $W$  do filtro.

$$R_r = \eta G_r W$$

A relação sinal ruído é por isso inversamente proporcional à largura de banda do filtro, uma vez que:

$$\left(\frac{S}{R}\right)_r = \frac{S_e G_e}{P_t \eta W}$$

### 1.4.1 Repetidores Regenerativos

Para melhorar a relação sinal ruído na recepção, é mais conveniente a utilização de sistemas de transmissão com  $m$  repetidores regenerativos, igualmente espaçados em troços com perdas iguais ( $P_{t1}$ ), do que elevar a potência de emissão para compensar directamente as perdas totais de transmissão ( $P_t$ ). Pode demonstrar-se que a relação sinal ruído  $(\frac{S}{R})_r$ , no caso do exemplo da figura 1.12, mas com  $m$  repetidores iguais, seria aproximadamente:

$$(\frac{S}{R})_r = \frac{1}{m} (\frac{S}{R})_{r1} = (\frac{P_t}{mP_{t1}}) (\frac{S_e G_e}{P_t \eta w}),$$

obtendo-se um ganho de  $(\frac{P_t}{mP_{t1}})$ .

### 1.4.2 Relação do Ruído com a Probabilidade de Erro

Uma linha de transmissão digital (binária) a probabilidade de erro  $P_e$  pode ser calculada por:

$$P_e = P_0 P_{e0} + P_1 P_{e1},$$

onde  $P_0$  e  $P_1$  representam as probabilidades de serem emitido um símbolo zero e um símbolo um, respectivamente. Do mesmo modo,  $P_{e0}$  e  $P_{e1}$  representam as probabilidades erro associadas ao símbolo zero e ao símbolo um, respectivamente.

Como se mostra na figura 1.13, para uma distribuição de ruído Gaussiana, se for  $A$  o intervalo entre as tensões  $v$  correspondentes à codificação de cada símbolo,  $P_{e0}$  e  $P_{e1}$  podem ser calculados por:

$$P_{e0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_V^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = Q(\frac{(V)}{\sigma}),$$

e

$$P_{e1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^V e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = Q(\frac{(A-V)}{\sigma})$$

Se os símbolos forem igualmente prováveis ( $P_0 = P_1$ ), então a probabilidade de erro  $P_e$ , será dada por:

$$P_e = \frac{1}{2}(P_{e0} + P_{e1}) = Q(\frac{A}{2\sigma})$$

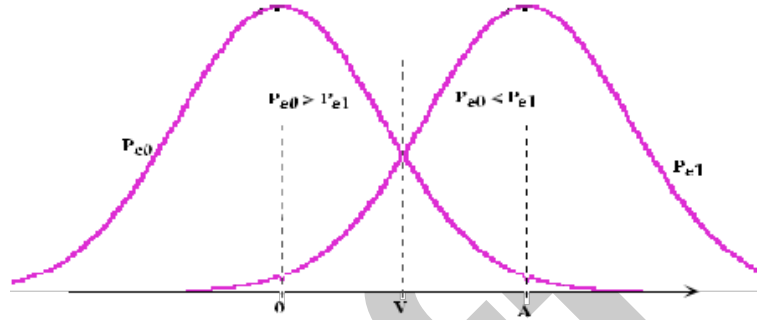


Figura 1.13: Relação Sinal Ruído e Probabilidade de Erro Ruído.

Repare que, para uma codificação unipolar ( $zero \rightarrow 0; um \rightarrow A$ ), como a representada na figura 1.13, sendo neste caso  $S_r = \frac{A^2}{4}$ , então  $(\frac{A}{2\sigma})^2$  corresponde à relação sinal ruído:

$$(\frac{A}{2\sigma})^2 = \frac{A^2}{4N_r} = (\frac{S}{N})_r,$$

enquanto que, numa codificação bipolar ( $zero \rightarrow -A; um \rightarrow A$ ), como agora  $S_r = \frac{A^2}{2}$ , então  $(\frac{A}{2\sigma})^2$  corresponde a metade da relação sinal ruído:

$$(\frac{A}{2\sigma})^2 = \frac{A^2}{4N_r} = \frac{1}{2}(\frac{S}{N})_r.$$

Por outro lado, tal como na transmissão analógica, a utilização de  $m$  repetidores regenerativos iguais ( $r1$ ) conduz também à diminuição da probabilidade erro  $Pe$ .

$$Pe = Q(\sqrt{\frac{1}{m}(\frac{S}{R})_{r1}}) \approx m Q(\sqrt{(\frac{S}{R})_{r1}})$$

### 1.4.3 Capacidade de Transmissão

De acordo com a teoria da comunicação a capacidade de transmissão esta limitada, não só pela largura de Banda disponível  $B_T$ , mas também pela relação sinal  $S$  ruído  $R$ . A máxima capacidade de transmissão  $C$  pode ser então calculada por:

$$C = B_T \log(1 + \frac{S}{R})$$

## 1.5 Propagação Electromagnética

O Meio de Transmissão, onde pode ser transportada a informação analógica e/ou digital, caracteriza-se pelos fenómenos da propagação electromagnética, descritos pelas leis de Maxwell e pelas capacidades de radiação e de absorção de energia electromagnética dos materiais, que permitem a conversão de tensões e de correntes eléctricas dos condutores em ondas electromagnéticas nos dieléctricos, e vice-versa.

### 1.5.1 Equações de Maxwell

Na tabela 1.1, apresentam-se as quatro leis de Maxwell, partir das quais se pode obter as equações de propagação das ondas electromagnéticas<sup>2</sup>.

A integração das Equações de Maxwell, conduz às equações de gerais dos Vec-

Tabela 1.1: Propagação Electromagnética - Equações de Maxwell.

Leis de Maxwell	
Campo Eléctrico	Campo Magnético
$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	$div \vec{H} = 0$
$rot \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -jw\mu \vec{H}$	$rot \vec{H} = \vec{I} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{I} + jw\epsilon \vec{E}$

tores dos Campos Eléctrico  $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$  e Magnético  $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$ , que num referencial Cartesiano de coordenadas  $x$ ,  $y$ , e  $z$  e em cada instante  $t$ , se descrevem da seguinte forma:

$$\vec{E} = E_x(x, y, z, t) \cdot \vec{u}_x + E_y(x, y, z, t) \cdot \vec{u}_y + E_z(x, y, z, t) \cdot \vec{u}_z$$

e

$$\vec{H} = H_x(x, y, z, t) \cdot \vec{u}_x + H_y(x, y, z, t) \cdot \vec{u}_y + H_z(x, y, z, t) \cdot \vec{u}_z$$

### Integração das Equações de Maxwell

Considerando as características dos diferentes dos meios (Condutores e Dialectricos), a integração das Equações de Maxwell, produz diferentes soluções gerais para os campos

<sup>2</sup>Onde:  $\vec{E}$  - vector campo eléctrico;  $\vec{H}$  - vector campo magnético;  $\rho$  - densidade de carga;  $\vec{I}$  - densidade de corrente;  $\epsilon$  - permitividade (no vazio  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ );  $\mu$  - permeabilidade magnética (no vazio  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ ).

eléctrico e magnético.

### Meio Condutor

Num meio condutor (i.e. com perdas) a densidade de corrente ( $\vec{\tau}$ ) é proporcional ao Campo Eléctrico  $\vec{E}$ , sendo dada por:

$$\vec{\tau} = \sigma \vec{E}.$$

Podemos assim relacionar os campos eléctrico e magnético por:

$$\text{rot} \vec{H} = (\sigma + jw\varepsilon) \vec{E} = jw\varepsilon(1 + \frac{\sigma}{jw\varepsilon}) \vec{E},$$

onde  $\underline{\varepsilon} = \varepsilon(1 + \frac{\sigma}{jw\varepsilon})$  representa uma constante complexa, equivalente à constante dialéctrica do condutor, enquanto que  $\text{tg}\gamma = \frac{\sigma}{jw\varepsilon}$  representa o ângulo de perdas do meio condutor.

### Meio sem cargas

Como, num meio sem cargas  $\rho = 0$ , então também  $\text{div} \vec{E} = 0$ , pelo que:

$$\text{rot} \vec{E} = -jw\mu \vec{H}$$

e

$$\text{rot} \vec{H} = jw\underline{\varepsilon} \vec{E}.$$

Por isso, dizemos que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são duais, não podendo existir um sem o outro. Assim:

$$\vec{E}_d = Z \vec{H}$$

e

$$\vec{H}_d = -\frac{\vec{E}}{Z},$$

onde  $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\underline{\varepsilon}}}$  representa a *Impedância de Onda*.

### Energia Transportada

O vector  $S$ , que representa a energia transportada pelo campo electromagnético, resulta do produto vectorial dos vectores dos campos eléctrico e magnético.

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

### Potencial Escalar e Potencial Vectorial

Podemos exprimir  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  em função de dois potenciais  $\vec{U}$  (Vectorial) e  $U$  (Escalar), de tal modo que:

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{U}$$

e

$$\vec{E} = -jw\mu\vec{U} - \text{grad}U,$$

onde o Potencial Escalar  $U$  é função do Potencial Vectorial  $\vec{U}$ , definida por:

$$U = -\frac{1}{jw\epsilon} \cdot \text{div} \vec{U}.$$

### Condição de Propagação

Podemos então estabelecer a condição de propagação de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  em função apenas do Potencial Vectorial  $\vec{U}$ . Assim:

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial^2 z} = -w^2 \mu \epsilon \vec{U},$$

evidencia a proporcionalidade entre a segunda derivada temporal ( $-w^2$ ) e uma função das segundas derivadas espaciais<sup>3</sup>.

### Equação Geral de Propagação

Num referencial esférico, para um ponto à distância  $r$  da origem, a solução geral da condição de propagação é do tipo:

---

<sup>3</sup>Note que  $\sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}}$  representa a velocidade de propagação.

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{r} e^{\gamma r} + \frac{\vec{B}}{r} e^{-\gamma r},$$

onde  $\gamma = jw\sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{-w^2\mu\varepsilon + jw\sigma\mu} = \alpha + j\beta$  representa a *Constante de Propagação* ( $\alpha$  está associada à atenuação e  $j\beta$  à transmissão). Note que o primeiro termo representa uma onda reflexa (crescente com  $r$ ), enquanto o segundo representa uma onda directa, que é atenuada por  $r$ .

Repare ainda que, num meio sem perdas  $\sigma = 0$ ,  $\alpha = 0$  e  $\gamma = j\beta = jw\sqrt{\mu\varepsilon}$ , enquanto que num meio ilimitado  $\vec{U} = \frac{\vec{B}}{r} e^{-\gamma r}$ , pois não há onda reflexa.

As equações de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , resultando da Integração das Equações de Maxwell em espaços limitados pelas fronteiras entre condutores e dielécticos, adquirem soluções específicas de acordo com os meios de transmissão quer em espaço aberto, quer em transmissão guiada por linhas bifilares, cabos coaxiais, fibras ópticas ou guias de onda.

### 1.5.2 Campos produzidos por um dipolo elementar

Em espaço aberto, um dipolo elementar (antena) de comprimento  $dl$ , percorrido por uma corrente  $I$ , produz no ponto  $r$  um Potencial Vectorial  $\vec{U}$ , dado por:

$$\vec{U} = \frac{\vec{I} dl}{4\pi r} e^{-\gamma r}.$$

Deste vector podem então extrair-se as expressões de  $\vec{H}$  e  $\vec{E}$ , obtendo-se:

$$\vec{H} = -\left(\frac{1}{r} + \gamma\right) U \sin\theta. \vec{h}$$

e

$$\vec{E} = \frac{1}{jw\varepsilon} \left( \frac{2}{r^2} + \frac{3\gamma}{r} \right) U \cos\theta. \vec{r} - \frac{1}{jw\varepsilon} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\gamma}{r} + \gamma^2 \right) U \sin\theta. \vec{e}.$$

Na figura 1.14, representam-se estes vectores num ponto  $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$ .

Repare que, para  $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$ :

$$\vec{H}_h = -\gamma \frac{\vec{I} dl}{4\pi r} e^{-\gamma r} \sin\theta. \vec{h}$$

e

$$\vec{E}_h = -\frac{\gamma^2}{jw\varepsilon} \frac{\vec{I} dl}{4\pi r} e^{-\gamma r} \sin\theta. \vec{e},$$

enquanto que, o vector de energia propagada, é dado por

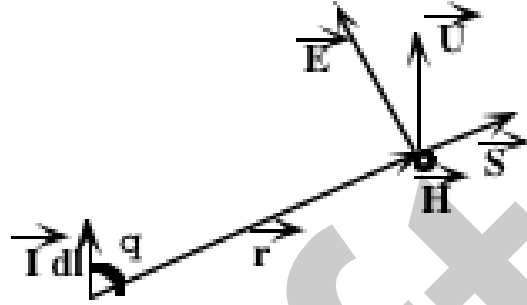


Figura 1.14: Campos propagados por um dipolo elementar.

$$\vec{S} \cdot \vec{r} = \vec{E} \cdot \vec{e} \wedge \vec{H} \cdot \vec{h} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \cdot \vec{r} = \frac{1}{2} \mu H^2 \cdot \vec{r}$$

## 1.6 Linhas de Transmissão

Aplicando a numa linha transmissão guiada por dois condutores, a Equação Geral de Propagação:

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{r} e^{\gamma r} + \frac{\vec{B}}{r} e^{-\gamma r}$$

podemos obter a Tensão ( $U$ ) e a corrente ( $I$ ) ao longo ( $d$ ) da linha, em função da tensão ( $U_1$ ) e da corrente ( $I_1$ ) no início da linha. Assim:

$$U = \frac{1}{2}(U_1 + Z_0 I_1) e^{-\gamma d} + \frac{1}{2}(U_1 - Z_0 I_1) e^{\gamma d}$$

e

$$I = \frac{1}{2Z_0}(U_1 + Z_0 I_1) e^{-\gamma d} - \frac{1}{2Z_0}(U_1 - Z_0 I_1) e^{\gamma d}$$

Repare que  $\frac{1}{2}(U_1 + Z_0 I_1) e^{-\gamma d}$  e  $\frac{1}{2Z_0}(U_1 + Z_0 I_1) e^{-\gamma d}$  representam ondas directas (atenuadas ao longo da linha), enquanto que  $\frac{1}{2}(U_1 - Z_0 I_1) e^{\gamma d}$  e  $\frac{1}{2Z_0}(U_1 - Z_0 I_1) e^{\gamma d}$ , representam ondas reflexas (atenuadas do fim para o início da linha).

### 1.6.1 Impedância de Onda

Designa-se por *Impedância de Onda* a razão entre a tensão e a corrente das ondas directas.



$$Z_0 = \frac{U_d}{I_d} = -\frac{U_r}{I_r}$$

Por outro lado, ao longo da linha, a impedância na linha pode variar, sendo dada por:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_d + U_r}{I_d + I_r}$$

### 1.6.2 Linha Adaptada

Se a linha for terminada por uma impedância (de carga) igual à sua *Impedância de Onda* ( $Z = Z_0$ ), a linha diz-se *adaptada*, não havendo, neste caso, onda reflexa. ( $U_r = 0$ )

### 1.6.3 Perdas de Transmissão

Como já foi anteriormente referido, a parte real ( $\alpha$ ) da *Constante de Propagação*  $\gamma = jw\sqrt{\mu\epsilon} = \sqrt{-w^2\mu\epsilon + jw\sigma\mu} = \alpha + j\beta$ , é responsável pelas perdas de transmissão (atenuação) nos condutores.

Em espaço aberto, além da eventual atenuação das ondas devido à *Constante de Propagação*  $\gamma r$ , existe o efeito da dispersão espacial do campo electromagnético, traduzido pelo decréscimo ( $\frac{\vec{A}}{r}$ ) da amplitude das ondas com a distância  $r$ . A potência de perdas  $P_t$  associada a este factor, resulta proporcional ao quadrado da distância  $r$  e da frequência  $f$  transmitida, podendo ser calculada por<sup>4</sup>:

$$P_t = \left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{4\pi f r}{c}\right)^2$$

### Ganho de Potência

Ao longo de uma linha de transmissão, além das perdas de potência causadas pelas atenuações das ondas, podemos ter também amplificadores (repetidores regenerativos). Assim podemos definir o ganho em potência  $\mathcal{G}$  numa linha de transmissão como a razão entre a potência de saída  $\mathcal{P}_o$  e a potência de entrada  $\mathcal{P}_i$ .

$$\mathcal{G} = \frac{\mathcal{P}_o}{\mathcal{P}_i}$$

---

<sup>4</sup> $c \approx 3 \cdot 10^5$  Km/s.

### Ganho em Décibéis

O ganho em potência em Décibéis  $\mathcal{G}_{dB}$  é equivalente a 10 vezes o logaritmo decimal do ganho em potência  $\mathcal{G}$ .

$$\mathcal{G}_{dB} = 10 \log_{10} \mathcal{G}.$$

Por vezes aparecem (impropriamente) referidas potências em Décibéis, que traduzem, de facto, rácios de potência. Assim:

$$\mathcal{P}_{dBw} = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{P}}{1W}$$

e

$$\mathcal{P}_{dBm} = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{P}}{1mW}$$

### Exemplo

Uma vez que, em espaço aberto, a potência de perdas  $P_t$ , em função da distância  $r$ , devido ao efeito da dispersão espacial do campo electromagnético, é dada por  $P_t = (\frac{4\pi fr}{c})^2$ , o seu valor em Décibéis ( $P_t dB$ ) será:

$$P_t dB = 94.2 + 20 \log(f_{GHz}) + 20 \log(r_{Km}).$$

## 1.7 Antenas

Como foi anteriormente referido um dipolo elementar percorrido por uma corrente, produz um campo electromagnético radiante. Por outro lado, uma linha de transmissão aberta (ou em curto-circuito), apesar de apresentar um valor nulo de corrente (ou de tensão) nessa extremidade, apresenta valores diferentes de zero ao longo da linha, devido não só à onda directa, mas também à reflectida na extremidade da linha, por esta não se apresentar adaptada.

Para construir uma antena, podemos então abrir (ou fechar) os condutores na extremidade de uma linha bifilar. Na figura 1.15, representa-se um Dipolo Radiante Eléctrico de Comprimento  $L$  (formado por abertura dos condutores paralelos numa linha de transmissão bifilar, alimentada pela tensão  $U_1$  e corrente  $I_1$ ) e um Dipolo Radiante Magnético (formado pelo curto-circuito desses condutores em torno de uma superfície plana de área  $A$ ).

Repare que, como a corrente, quer ao longo da antena quer ao longo da linha que

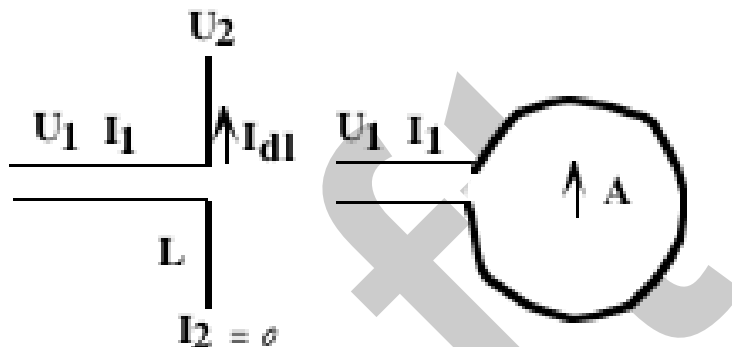


Figura 1.15: Antenas - Dipolos Radiantes.

a alimenta, apresenta um valor nulo em intervalos múltiplos de  $\frac{\lambda}{2}$  e valores máximos (negativos ou positivos) em intervalos múltiplos de  $\frac{\lambda}{4}$ , ao contrário da tensão que apresenta valores máximos (negativos ou positivos) em intervalos múltiplos de  $\frac{\lambda}{2}$  e valores mínimos em intervalos múltiplos de  $\frac{\lambda}{4}$ . Por isso, o comprimento ideal de Dipolo Radiante Elétrico só poderá ser:

$$L \approx \frac{\lambda}{4}$$

Em regra as antenas, podem ser construídas, com vários elementos radiantes (dipolos eléctricos e/ou magnéticos) que podem apresentar diferentes distribuições de corrente, de modo a favorecer a radiação numa dada direcção em detrimento de outra.

Importa ainda referir que as antenas apresentam características simétricas quando são usadas como emissoras ou como receptoras.

### Impedância de Entrada

A razão entre a tensão e a corrente à entrada do elemento radiante designa-se por *Impedância de Entrada*  $Z_i$ , que representa, além da Resistência de Radiação ( $R_o$ ), a Resistência de Perdas  $R_p$  e a Reactância  $X$ .

$$Z_i = R_o + R_p + jX.$$

### Resistência de Radiação

Para Dipolos Eléctricos de comprimento não superiores a um quarto do comprimento de onda ( $L \leq \frac{\lambda}{4}$ ), a *Resistência de Radiação*  $R_o$ , pode ser aproximada por:

$$R_o = 20\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$$

Para Dipolos Magnéticos (com área  $A$ ), a *Resistência de Radiação*  $R_o$ , é dada por:

$$R_o = 20(2\pi)^4 \frac{A^2}{\lambda^4}.$$

### Potência de Radiação

A *Potência de Radiação*  $P_r$  de uma antena pode ser aproximada por:

$$P_r = \frac{1}{2} R_o I_1^2.$$

### Ganho das Antenas

O ganho de uma antena (quer emissora quer receptora) depende essencialmente das sua área de abertura efectiva  $A_e$  e da frequência transmitida<sup>5</sup>.

$$\mathcal{G} = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2} = \frac{4\pi A_e f^2}{c^2}$$

---

<sup>5</sup> $c \approx 3 \cdot 10^5$  Km/s.

# Modulações Analógicas e Digitais

A propriedade da *Linearidade*<sup>1</sup> da função de transferência de alguns sistemas de transmissão (invariantes no tempo) permite a partilha desses sistemas por mais do que um canal de informação, que poderá ser codificada em *banda base* (codificação da fonte<sup>2</sup>) ou em *banda canal* (modulação).

Além de adaptarem o sinal ao meio (Canal) de transmissão, para reduzir a *Distorção, Interferência e Ruído*, as Modulações dos sinais permitem a identificação dos canais (facilitando o seu acesso ao meio), bem como a sua (eventual) comutação, recorrendo às diferentes técnicas de multiplexagem<sup>3</sup>.

Serão apresentadas de seguida as Modulações Analógicas em *Banda de Canal*<sup>4</sup>, que incluem as Modulação por Onda Contínua, Lineares e Exponenciais (Angulares) e as Modulações de Impulsos.

Por outro lado, as Modulações Digitais em Banda Base, nomeadamente a Modulações de Impulsos e Codificadas, serão abordadas no capítulo seguinte, conjuntamente com a codificação digital da informação. Serão ainda apresentadas as Modulações Digitais em Banda de canal, nomeadamente as Modulações por Onda Contínua, Multi-simbólicas e por Espalhamento Espectral.

---

<sup>1</sup> $[av(t) + bv(t) \Leftrightarrow aV(f) + bV(f)]$ .

<sup>2</sup>Por exemplo, a Voz no Telefone.

<sup>3</sup>Multiplexagem por divisão no tempo, em frequência e, nos sistemas ópticos, por divisão do comprimento de onda.

<sup>4</sup>Banda limitada superior e inferiormente.

## 2.1 Modulações Lineares

Em qualquer modulação por onda contínua, é suposto que o sinal aleatório  $x(t)$  que representa as mensagens a transmitir, tenha uma largura de banda limitada ( $B_x \leq W$ ), e uma amplitude que não exceda a unidade ( $x(t) \leq 1$ ), de modo que o limite superior da sua potência seja igualmente unitário.

$$\langle x^2(t) \rangle = S_x = x^2 \leq 1.$$

Conforme o tipo de modulação (Linear ou Exponencial) o sinal aleatório  $x(t)$  é transmitido na amplitude ou no ângulo de uma onda sinusoidal.

As Modulações Lineares diferem na forma como o sinal é transportado na amplitude da onda sinusoidal da sua portadora. Além das diferentes larguras de banda e relações sinal ruído na recepção, é conveniente considerar também a complexidade dos respectivos sistemas de Modulação e de Desmodulação.

### 2.1.1 Modulação em Amplitude

O sinal  $x(t)$ , com uma largura de banda  $B_x$ , quando modulado ( $x_p(t)$ ) em amplitude (AM) por uma portadora de Amplitude  $A_p$  e frequência  $f_p$ , com um índice de modulação  $0 < m < 1$ , dá origem ao sinal:

$$x_p(t) = A_p(1 + mx(t))\cos(w_pt)$$

ou

$$x_p(t) = A_p\cos(w_pt) + A_pmx(t)\cos(w_pt)$$

O espectro  $X_P(f)$  do sinal modulado em amplitude será dado por:

$$X_P(f) = \frac{A_p}{2}[\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p)] + \frac{mA_p}{2}[X(f - f_p) + X(f + f_p)]$$

Note que, na modulação em amplitude, a frequência da portadora  $f_p$  é muito maior do que a largura de banda  $B_x$  do sinal original. Normalmente:

$$0.01 < \frac{B_x}{f_p} < 0.1.$$

Por outro lado, a *Largura de Banda* necessária para transmitir o sinal modulado  $B_T$  é duas vezes maior que a do sinal original.

$$B_T \geq 2B_x$$

### Exemplo

A figura 2.1 representa o espectro do sinal  $X_P(f)$ , resultante da Modulação em Amplitude, por uma portadora de frequência  $f_p$ , de um sinal sinusoidal  $x(t)$ , de frequência  $f_m$ .

Assim, sendo:

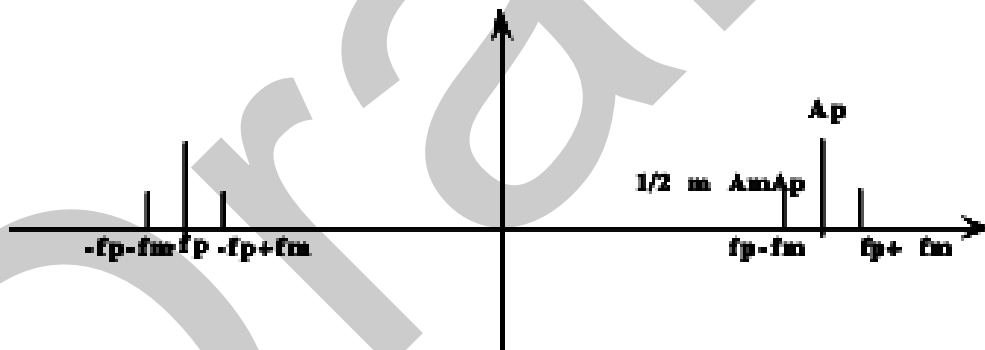


Figura 2.1: Espectro da Modulação em Amplitude de um Sinal Sinusoidal.

$$x(t) = A_m \cos(2\pi f_m t),$$

então

$$X(f) = \frac{A_m}{2} [\delta(f - f_m) + \delta(f + f_m)],$$

pelo que

$$X_P(f) = \frac{A_p}{2} [\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p)] + \frac{A_p A_m}{2} [\delta(f - f_m - f_p) + \delta(f + f_m - f_p) + \delta(f - f_m + f_p) + \delta(f + f_m + f_p)].$$

Na figura 2.2 mostra-se a respectiva representação temporal de  $x_p(t)$ .

$$x_p(t) = A_p(1 + A_m \cos(w_m t)) \cos(w_p t)$$

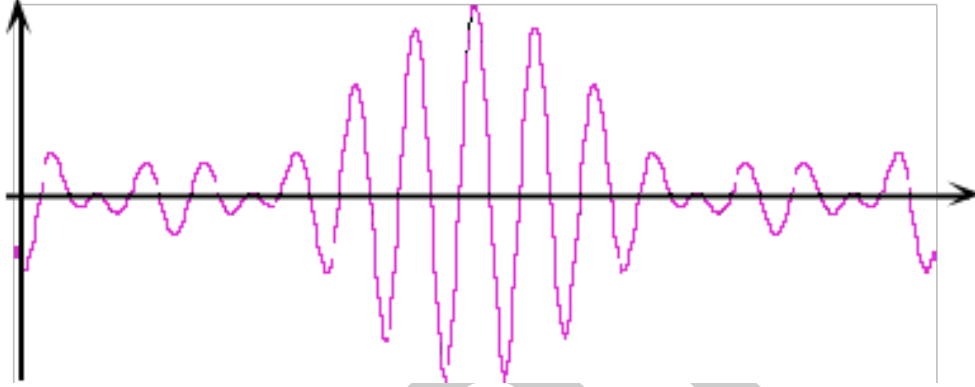


Figura 2.2: Representação Temporal de um Sinal Sinusoidal Modulado em Amplitude.

### Potência Média Transmitida

A Potência Média Transmitida  $S_T$  num sinal modulado em Amplitude pode ser calculada, em função da Potência Média do Sinal  $x(t)$  ( $S_x$ ), e do índice de modulação ( $m$ ), sendo dada por:

$$S_T = E[y^2(t)] = \frac{A_p^2}{2}(1 + m^2 x^2) = \frac{A_p^2}{2}(1 + m^2 S_x).$$

Repare que, como  $(mx)^2 < 1$ , mais de metade da potência é transportada pela portadora.

### Relação Sinal Ruído

Para comparar a eficiência das diferentes tipos de modulação, é conveniente analisar a relação Sinal Ruído na recepção, antes  $(\frac{S_r}{R})_r$  e depois  $(\frac{S_d}{R})_d$  da desmodulação, tendo em consideração, não só as larguras de banda do filtro do receptor ( $W$ ) e do sinal desmodulado, mas também o tipo de desmodulação, tal como se representa na figura 2.3.

Se, para a Modulação em Amplitude  $B_T = 2B_x = 2W$ , a relação sinal ruído depois da desmodulação pode ser calculada a partir da relação sinal ruído à chegada ao receptor, por:



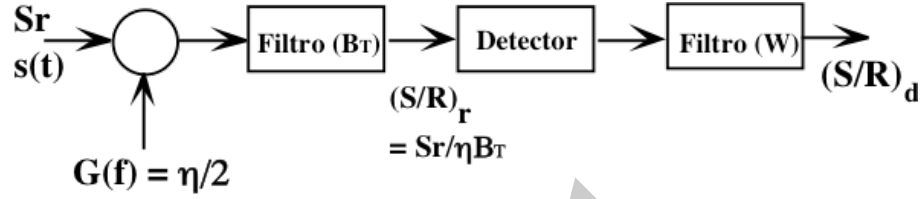


Figura 2.3: Relação Sinal Ruído na recepção, antes e depois da desmodulação.

$$\left(\frac{S_d}{R}\right)_d = 2 \frac{m^2 S_x}{1+m^2 S_x} \left(\frac{S_r}{R}\right)_r.$$

### 2.1.2 Desmoduladores em Amplitude

Existem várias técnicas de Desmodulação em Amplitude, destacando-se a *Detecção Coerente* que necessita de extracção da frequência da portadora<sup>5</sup> que multiplicará o sinal modulado, de modo a que o sinal original possa ser recuperado por um filtro passa baixo. Assim, sendo

$$x_p(t) = A_p(1 + mx(t))\cos(w_pt),$$

então,

$$x_p(t)\cos(w_pt) = A_p(1 + mx(t))\cos^2(w_pt) = \frac{A_p}{2}(1 + mx(t))(1 + \cos(2w_pt)).$$

Este sinal apresenta duas componentes espectrais distintas: uma, representando o sinal original; e outra, representando esse sinal modulado em Amplitude pela frequência dupla da portadora original. Assim, o sinal:

$$x_p(t)\cos(w_pt) = \frac{A_p}{2}[(1 + mx(t)) + (1 + mx(t))\cos(2w_pt)],$$

depois de filtrado por um filtro passa baixo, com largura de banda  $W < f_p$ , resulta:

$$x(t) = \frac{A_p}{2}(1 + mx(t)),$$

<sup>5</sup>Normalmente efectuado numa malha de sincronismo de fase (PLL).

que representa o sinal  $x(t)$  atenuado por  $\frac{mA_p}{2}$ , com uma componente contínua ( $\frac{A_p}{2}$ ) que poderá ser facilmente suprimida.

Note que, o processo de desmodulação Coerente, não introduzindo ruído adicional ( $\frac{S}{R} = 0dB$ ), não altera a relação sinal ruído no receptor.

Outras técnicas alternativas (*Detecção Não Coerente*) não necessitam de extracção da frequência da portadora, sendo o sinal original igualmente recuperado por filtragem passa baixo (FPB), após a *Detecção da Envoltória* ou outro processamento não linear (*Lei quadrática*).

Repare que, se a desmodulação for efectuada por *Detecção da Envoltória*, a relação sinal ruído será ainda afectada pelo ruído introduzido neste processo de desmodulação (tipicamente  $\frac{S}{R} \leq 10dB$ ).

### 2.1.3 Banda Lateral Dupla

A Modulação em Amplitude pode ser efectuada com supressão da Portadora, também designada *Modulação em Banda Lateral Dupla* (DSB). Assim, o sinal  $x_p(t)$ , resultante da modulação em Banda Lateral Dupla (por uma portadora de Amplitude  $A_p$  e frequência  $f_p$ , com um índice de modulação  $0 < m < 1$ ), de um sinal  $x(t)$ , com uma largura de banda  $B_x \leq W$ , será dado por:

$$x_p(t) = A_p m x(t) \cos(\omega_p t).$$

O espectro deste sinal, sendo dado por:

$$X_P(f) = \frac{mA_p}{2} [X(f - f_p) + X(f + f_p)],$$

requer, para transmissão, uma largura de banda  $B_T$  dupla da do sinal  $x(t)$ .

$$B_T \geq 2B_x$$

### Potência Média Transmitida

A Potência Média Transmitida  $S_T$  num sinal modulado em Banda Lateral Dupla é dada por:

$$S_T = \frac{1}{2} S_x A_p^2 = \frac{1}{2} x^2 A_p^2$$

### Relação Sinal Ruído

Para  $B_T = 2W$ , a relação sinal ruído depois da desmodulação pode ser calculada a partir da relação sinal ruído à chegada ao receptor, por:

$$\left(\frac{S_d}{R}\right)_d = 2\left(\frac{S_r}{R}\right)_r$$

### Questão

- Como efectua a desmodulação dum sinal modulado em Banda Lateral Dupla?

### 2.1.4 Banda Lateral Única

O sinal resultante da Modulação em Amplitude, além da Portadora, pode também suprimir uma das bandas laterais, designado-se, neste caso *Modulação em Banda Lateral Única* (SSB). Assim, o sinal  $x_p(t)$ , resultante da modulação em Banda Lateral Única (por uma portadora de Amplitude  $A_p$  e frequência  $f_p$ , com um índice de modulação  $0 < m < 1$ ), de um sinal  $x(t)$ , com uma largura de banda  $B_x \leq W$ , será dado por:

$$x_p(t) = A_p \frac{mx(t)}{2} \cos(w_p t \pm w_m t).$$

O espectro deste sinal é dado por:

$$X_P(f) = \frac{mA_p}{4} [1 \pm \text{sgn} f] X(f),$$

onde  $\text{sgn} f$  representa a função sinal de  $f$ .

A largura de banda necessária à transmissão do sinal  $X_P(f)$  é igual à largura de banda do sinal  $x(t)$ .

$$B_T \geq B_x$$

### Exemplo

Se for  $mx(t) = A_m \cos(w_m t)$ , então o sinal modulado em Banda Lateral Única será

$$x_p(t) = \frac{A_p}{2} [A_m \cos(w_p t) \cos(w_m t) \pm A_m \sin(w_p t) \sin(w_m t)].$$

### Questão

- Qual a expressão  $X_P(f)$  do espectro do sinal modulado do exemplo anterior?

### Potência Média Transmitida

A Potência Média Transmitida num sinal modulado em Banda Lateral Única é dada por:

$$S_T = \frac{1}{4} S_x A_p^2.$$

### Relação Sinal Ruído

Para  $B_T = W$ , a relação sinal ruído depois da desmodulação pode ser calculada a partir da relação sinal ruído à chegada ao receptor, por:

$$\left(\frac{S_d}{R}\right)_d = \left(\frac{S_r}{R}\right)_r$$

### 2.1.5 Banda Vestigial

A componente contínua, bem como as componentes de baixa frequência, são fortemente atenuados pelos filtros passa banda reais, tornando a filtragem de uma banda lateral, por vezes, complexa. Para compensar esta dificuldade e sem desperdiçar significativamente a largura de banda disponível nos sistemas de transmissão, a Modulação em Banda Vestigial (VSB), em vez de filtrar completamente uma banda lateral, deixa passar a zona espectral de baixas frequências na banda lateral suprimida. Assim se  $X_P(f)$  for um sinal modulado em Banda Lateral Dupla, o sinal  $Y_v(f)$  modulado em Banda Vestigial, será dado por:

$$Y_v(f) = H(f)X_P(f),$$

onde  $H(f) = U(f - f_p) - H_b(f - f_p)$ , representa a função de transferência do filtro, cuja característica se ilustra na figura 2.4.

Repare que a largura do sinal modulado ( $W$ ) em Banda Vestigial  $Y_v(f)$ , é maior do

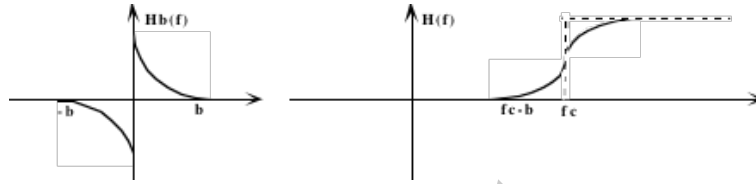


Figura 2.4: Modulação em Banda Vestigial - Característica do filtro.

que a do sinal original ( $B_x$ ), pelo que a largura de banda requerida para transmissão será.

$$B_T \geq W > B_x$$

### Potência Média Transmitida

A Potência Média Transmitida ( $S_T$ ) por um sinal modulado em Banda Vestigial, não sendo fácil de calcular, está limitado por:

$$\frac{1}{4} S_x A_p^2 < S_T < \frac{1}{2} S_x A_p^2$$

### Relação Sinal Ruído

Dado que  $B_T > B_x$ , a relação sinal ruído depois da desmodulação está relacionada com a relação sinal ruído à chegada ao receptor, por:

$$\left(\frac{S_d}{R}\right)_d \approx \frac{S_x}{1+S_x} \left(\frac{S_r}{R}\right)_r.$$

## 2.1.6 Indicadores Comparativos

Na tabela 2.1, apresentam-se as expressões de alguns indicadores comparativos da qualidade das diferentes Modulações em Amplitude, nomeadamente a largura de banda do sinal modulado  $B_T$ , a potência associada ao sinal transmitido  $S_T$ , e a relação sinal ruído depois da desmodulação  $\left(\frac{S_d}{R}\right)_d$  em função a relação sinal ruído à chegada ao receptor  $\left(\frac{S_r}{R}\right)_r$ .

Tabela 2.1: Indicadores Comparativos das Modulações em Amplitude.

Modulações em Amplitude			
Tipo de Modulação	Largura de Banda	Potência Transmitida	Relação Sinal Ruído
<b>AM</b>	$B_T \geq 2B_x$	$S_T = \frac{A_p^2}{2}(1 + m^2x^2)$	$(\frac{S_d}{R})_d = 2 \frac{m^2 S_x}{1+m^2 S_x} (\frac{S_r}{R})_r$
<b>DSB</b>	$B_T \geq 2B_x$	$S_T = \frac{1}{2}x^2 A_p^2$	$(\frac{S_d}{R})_d = 2(\frac{S_r}{R})_r$
<b>SSB</b>	$B_T \geq B_x$	$S_T = \frac{1}{4}x^2 A_p^2$	$(\frac{S_d}{R})_d = (\frac{S_r}{R})_r$
<b>VSB</b>	$B_T \geq W > B_x$	$\frac{1}{4}x^2 A_p^2 < S_T < \frac{1}{2}x^2 A_p^2$	$(\frac{S_d}{R})_d \approx \frac{S_x}{1+S_x} (\frac{S_r}{R})_r$

## 2.2 Modulações Exponenciais

As Modulações Exponenciais (ou Angulares) diferem na forma como o sinal é transportado no ângulo (frequência ou fase) da onda sinusoidal da respectiva portadora.

O sinal  $x_p(t)$ , resultante da modulação exponencial por uma portadora de Amplitude  $A_p$  e Frequência  $f_p$ , é do tipo:

$$x_p(t) = A_p \cos(w_p t + \phi(t)),$$

onde  $\theta_p(t) = w_p t + \phi(t)$ , representa o ângulo instantâneo do sinal modulado. Por isso,  $x_p(t)$  pode também ser representado pela parte real de  $A_p e^{j\theta_p(t)}$ .

A potência transportada nos sinais modulados exponencialmente é igual à potência da portadora:

$$S_T = \frac{1}{2}A_p^2$$

### 2.2.1 Modulação de Fase

Na Modulação de Fase (PM),  $\phi(t)$  é proporcional ao sinal  $x(t)$ , resultando:

$$x_p(t) = A_p \cos(w_p t + \phi_\Delta x(t)),$$

com  $\phi_\Delta \leq \pi$ .

Repare que a frequência instantânea de  $x_p(t)$  é  $f_c + \frac{1}{2\pi}\phi_\Delta \frac{\partial x(t)}{\partial t}$ .

### 2.2.2 Modulação de Frequência

Na Modulação de Frequência (FM),  $\phi(t)$  é proporcional ao integral do sinal  $x(t)$ , resultando:

$$x_p(t) = A_p \cos(w_p t + 2\pi f_\Delta \int_0^t x(\lambda) d\lambda),$$

com  $f_\Delta < f_p$ .

Repare que a frequência instantânea de  $x_p(t)$  é  $f_c + f_\Delta x(t)$ .

### 2.2.3 Exemplo

Na figura 2.5 representa-se a evolução temporal de um Sinal Sinusoidal  $x(t) = A_m \sin(w_m t + \theta)$  Modulado Exponencialmente, em frequência ou fase.

Repare que em qualquer dos casos o sinal modulado  $x_p(t)$  é dado por:

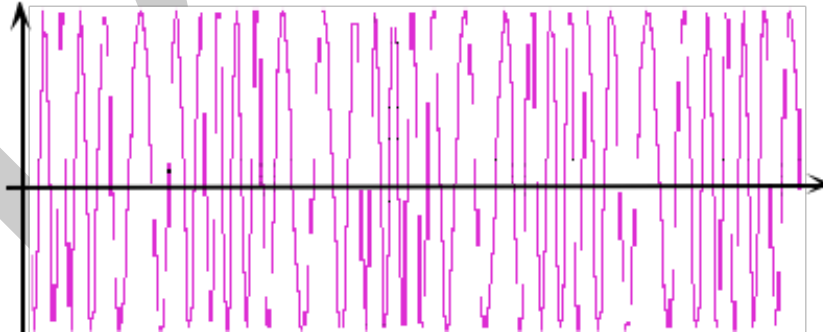


Figura 2.5: Representação Temporal de um Sinal Sinusoidal Exponencialmente Modulado.

$$x_p(t) = A_p \cos(w_p t + \beta \sin(w_m t + \varphi)),$$

onde  $\beta = \phi_\Delta A_m$  e  $\theta = \varphi$ , na modulação em fase, e  $\beta = \frac{A_m}{f_m} f_\Delta$ , na modulação em frequência.

### 2.2.4 Distribuição Espectral

Apesar da densidade espectral de potência se concentrar na vizinhança da frequência da portadora, o espectro do sinal  $x_p(t)$  apresenta largura de banda infinita<sup>6</sup>.

Por isso, de acordo com o valor de  $\beta$  adoptado, podemos definir as modulações exponenciais, em função da largura de banda, como modulações de *banda estreita* ou de *banda larga*.

#### Banda Estreita

O critério de banda estreita aproxima o sinal modulado  $x_p(t)$  apenas dos dois primeiros termos da série que o representa. Assim, para o exemplo anterior, tal como se mostra na figura 2.6,  $x_p(t)$  pode ser calculado por:

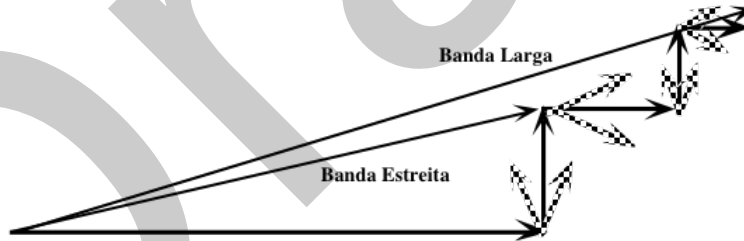


Figura 2.6: Modulações Exponenciais: - Largura de Banda.

$$x_p(t) = A_p \cos(w_p t) + \left(\frac{A_m}{f_m}\right) f_{\Delta} \sin(w_m t) \sin(w_p t),$$

ou

$$x_p(t) = A_p \cos(w_p t) + \left(\frac{A_m}{2f_m}\right) f_{\Delta} [\cos(w_p + w_m)t - \cos(w_p - w_m)t].$$

#### Espectro

No caso geral, o espectro do sinal modulado exponencialmente em banda estreita, pode ser aproximado a  $X_p(f)$ , dado por:

<sup>6</sup>O cálculo da transformada de Fourier (de um sinal exponencialmente modulado) é de grande complexidade, uma vez que este sinal é representado por uma série infinita, onde os coeficientes da série são funções de *Bessel*.



$$X_p(f) = \frac{A_p}{2} [\delta(f - f_p) + \frac{j A_p}{2} \Phi(f - f_p)],$$

onde,

$\Phi(f) = \phi_\Delta X(f)$ , na modulação de fase, e

$\Phi(f) = (\frac{-j f \Delta}{f}) X(f)$ , na modulação de frequência.

### Largura de Banda

A largura de banda  $B_T$  do sinal modulado exponencialmente, sendo difícil de calcular, poderá ser aproximada, tendo conta a largura de banda ( $W$ ) do sinal  $x(t)$ , e de  $\phi_\Delta$  ou  $f_\Delta$ .

### Banda Estreita

Em banda estreita, largura de banda  $B_T$  do sinal Modulado em Frequência (FM) pode ser aproximada por:

$$B_T \approx 2(f_\Delta + 2W), \text{ para } \beta > 2$$

$$B_T \approx 2W, \text{ para } \beta \ll 1.$$

Enquanto que para Modulação de Fase (PM), a largura de banda  $B_T$ , é aproximadamente:

$$B_T \approx 2(\phi_\Delta + 1)W.$$

### Banda Larga

Não existe modulação em fase de banda larga, um vez que  $(\phi_\Delta \leq \pi)$ . Por outro lado, para os sinais modulados em frequência, a largura de banda  $B_T$  é muito maior do que  $W$ , uma vez que, na modulação de banda larga,  $1 \ll \beta$ . Por isso,

$$B_T \approx 2f_\Delta.$$

## 2.2.5 Relação Sinal Ruído

### Modulação de Fase

Na Modulação de Fase, a relação sinal ruído depois da desmodulação  $(\frac{S_d}{R})_d$  pode ser calculada a partir da relação sinal ruído à chegada ao receptor  $(\frac{S_r}{R})_r$ , por:

$$(\frac{S_d}{R})_d \approx \phi_{\Delta}^2 S_x (\frac{S_r}{R})_r$$

### Modulação de Frequência

Na Modulação de Frequência, enquanto que em Banda Estreita, a relação sinal ruído, depois da desmodulação  $(\frac{S_d}{R})_d$ , pode ser calculada a partir da relação sinal ruído à chegada ao receptor  $(\frac{S_r}{R})_r$ , por:

$$(\frac{S_d}{R})_d \approx 3(\frac{f_{\Delta}}{W})^2 S_x (\frac{S_r}{R})_r,$$

em banda larga é calculada por:

$$(\frac{S_d}{R})_d \approx \frac{3}{4}(\frac{B_T}{W})^2 S_x (\frac{S_r}{R})_r.$$

## 2.3 Multiplexagem por divisão em Frequência

Quer as modulações lineares, quer as exponenciais, são frequentemente utilizadas para permitir um meio físico (linha de transmissão) possa ser partilhado por sinais provenientes de várias fontes de informação (canais).

Por exemplo, a transmissão dos sinais nos sistemas de radiodifusão (Rádio e Televisão), bem como nos sistemas telefónicos (analógicos), é baseada nesta técnica, que atribui uma portadora diferente a cada canal.

## 2.4 Modulação de Impulsos

Na Modulação de Impulsos, o sinal analógico  $x(t)$ , de largura de banda  $B_x = W$ , é previamente amostrado a uma frequência  $f_0$ , sendo depois transmitidos (a esta frequência) impulsos de duração constante e amplitude proporcional aos valores de  $x(t)$  amostrados (*Modulação da Amplitude de Impulso - PAM*); ou impulsos de amplitude constante e

duração proporcional aos valores de  $x(t)$  amostrados (*Modulação da Duração de Impulso - PDM*); ou impulsos de amplitude e duração constante, com posições relativas (esfasamentos) proporcionais aos valores de  $x(t)$  amostrados (*Modulação da Posição de Impulso - PPM*), como se mostra na figura 2.7.

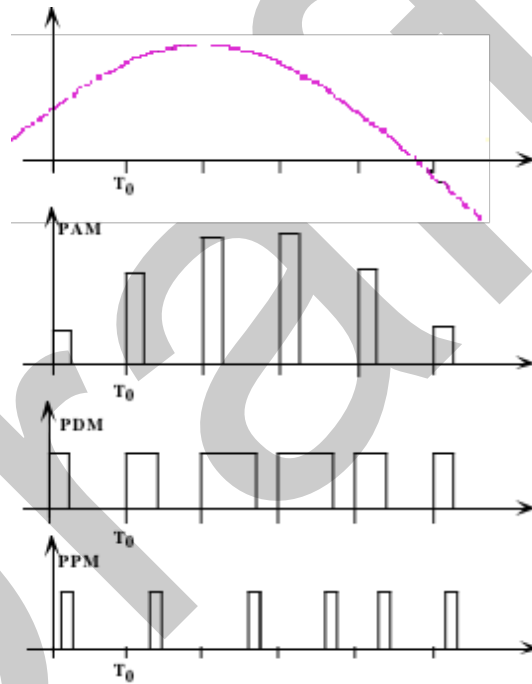


Figura 2.7: Modulações de Impulsos.

### 2.4.1 Relação Sinal do Ruído

Nas Modulações de Impulso além do ruído inerente a cada tipo de modulação, há que considerar o *Ruído de Quantificação*, resultante do processo de amostragem. Assim, no caso da amostragem com conversão analógica digital linear, para palavras de  $n$  bits, relação Sinal Ruído de Quantificação, é dado por:

$$\left(\frac{S}{R}\right) = 3S_x(2^n)^2.$$

$$\left(\frac{S}{R_{dB}}\right) \leq 4.8 + 6.0n \text{ dB}.$$

Para cada tipo de Modulação, a relação sinal ruído depois da desmodulação  $\left(\frac{S_d}{R}\right)_d$

pode ser calculada a partir da relação sinal ruído à chegada ao receptor  $(\frac{S}{R})_r$ , em função da Potência Média dos Impulsos  $S_x$ , da largura de banda filtro da recepção  $W$ , e do canal de transmissão  $B_T$ , e da frequência dos impulsos  $f_0$ .

### Modulação da Amplitude do Impulso

Na Modulação da Amplitude do Impulso (PAM), a relação sinal ruído depois da desmodulação  $(\frac{S}{R})_d$  pode ser calculada a partir da relação sinal ruído à chegada ao receptor  $(\frac{S}{R})_r$ , por:

$$(\frac{S}{R})_d = \frac{S_x}{1+S_x} 2 \frac{W}{f_0} (\frac{S}{R})_r$$

### Modulação da Duração do Impulso

Modulação da Duração do Impulso (PDM), a relação sinal ruído depois da desmodulação  $(\frac{S}{R})_d$  pode ser calculada a partir da relação sinal ruído à chegada ao receptor  $(\frac{S}{R})_r$ , por:

$$(\frac{S}{R})_d \leq \frac{S_x}{2} (\frac{B_T}{W}) (\frac{S}{R})_r$$

### Modulação da Posição do Impulso

Modulação da Posição do Impulso (PPM), a relação sinal ruído depois da desmodulação  $(\frac{S}{R})_d$  pode ser calculada a partir da relação sinal ruído à chegada ao receptor  $(\frac{S}{R})_r$ , por:

$$(\frac{S}{R})_d \leq \frac{S_x}{8} (\frac{B_T}{W})^2 (\frac{S}{R})_r$$

## 2.4.2 Amostragem do Sinal

Como se mostra na figura 2.8, a amostragem de um sinal  $x_a(t)$  resulta da multiplicação do sinal analógico  $x(t)$  por um outro sinal  $a(t)$ :

$$x_a(t) = x(t) \cdot a(t).$$

Um vez que  $a(t)$  é periódico, pode ser representado por uma série de Fourier:

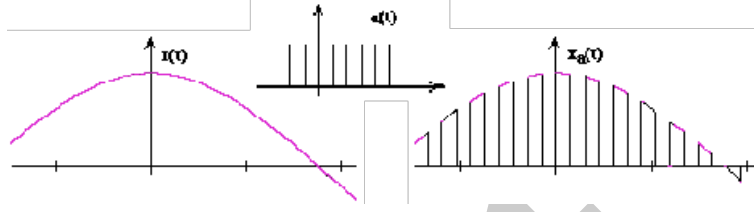


Figura 2.8: Amostragem de um sinal analógico.

$$a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (Af_0\tau) \text{senc}(nf_0\tau) e^{j2\pi f_0 t},$$

ou

$$a(t) = c(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} |2c(nf_0)| \cos(2\pi n f_0 t + \arg[c(nf_0)]).$$

O sinal  $x_a(t)$ , que representa a Modulação da Amplitude de Impulso (PAM) de  $x(t)$ , pode então ser calculado por:

$$x_a(t) = c(0)x(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} |2c(nf_0)| x(t) \cos(2\pi n f_0 t + \arg[c(nf_0)]);$$

enquanto o seu espectro será:

$$X_a(f) = c_0 X(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n [X(f - nf_0) + X(f + nf_0)].$$

Repare que, a frequência de amostragem terá de ser duas vezes superior à largura de banda do sinal analógico para que não haja sobreposição das bandas espectrais centradas nas diferentes frequências  $nf_0$ .

### 2.4.3 Reconstituição do Sinal

Se  $a(t)$  representar um trem de impulsos rectangulares de duração  $\tau$ , poderá ser dado por:

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_0}{\tau}\right).$$

Quando  $\tau$  é suficientemente pequeno (amostragem ideal)  $a_\delta(t)$ , representa a série de valores instantâneos de  $x(t)$ , em cada instante  $kT_0$ .

$$a_\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0).$$

O sinal resultante da amostragem pode então ser dado por:

$$x_d(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_0) \delta(t - kT_0).$$

O espectro de  $X_d(f)$ , que se representa na figura 2.9, será então dado por:

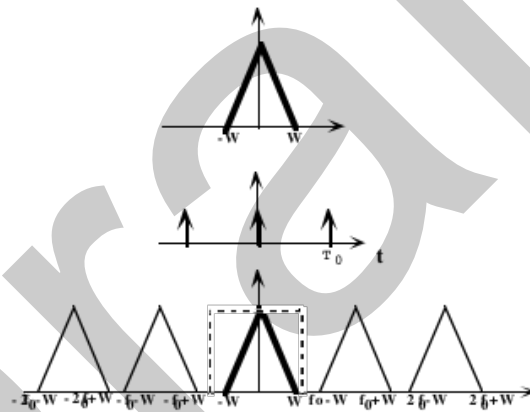


Figura 2.9: Espectro do sinal resultante da amostragem de um sinal analógico.

$$X_d(f) = f_0 X(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} f_0 [X(f - kf_0) + X(f + kf_0)], \text{ ou}$$

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_0 X(f - kf_0).$$

Se a linha de transmissão, for representada por um Filtro Passa Baixo ideal, que apresente, como já foi referido<sup>7</sup>, na banda passante  $B$ , um ganho  $K$  e um atraso  $t_d$ , a sua função de transferência será:

$$H(f) = k \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j\omega t_d},$$

resultando na recepção um sinal com um espectro  $Y(f)$ ,

$$Y(f) = H(f)X_d(f) = kf_0 X(f) e^{-j\omega t_d}.$$

<sup>7</sup>No Capítulo I.

No domínio de tempo,  $y(t)$  pode ser representado por:

$$y(t) = kf_0x(t - t_d),$$

que traduz o sinal original, atrasado  $t_d$  e amplificado por  $kf_0$ .

## 2.5 Multiplexagem por divisão no Tempo

Geralmente, quer as modulações de Implusos, quer Modulações Digitais, permitem que uma linha de transmissão seja partilhada por várias fontes de informação (canais), uma vez, que cada sinal, ao utilizar apenas uma fracção do tempo total disponível, permite que o restante tempo seja atribuído outros sinais. Grande parte dos sistemas digitais de transmissão utilizam esta técnica.

## 2.6 Modulações Digitais

Apresentam-se de seguida as Modulações em Banda de Canal, nomeadamente, por Onda Contínua, Multi-simbólica e por Espalhamento Espectral.

Por outro lado, as Modulações Digitais em Banda Base, nomeadamente, de Amplitude do Impulso, de Código do Impulso, Diferencial do Código do Impulso, Delta e Delta Adaptativa, estando directamente relacionadas com a codificação da informação, são apresentadas no capítulo seguinte.

### 2.6.1 Modulações por Onda Contínua

Qualquer sinal modulado por onda contínua, em banda de canal, pode ser representado na forma de portadora em quadratura, por:

$$x_p(t) = A_p[x_i(t)\cos(w_pt + \theta) + x_q(t)\sin(w_pt + \theta)],$$

onde a portadora é representada por  $A_p$  (amplitude),  $f_p$  (frequência) e  $\theta$  (fase), sendo o sinal representado pelas suas componentes em fase  $x_i(t)$  e em quadratura  $x_q(t)$  com a portadora. O espectro do sinal modulado pode também ser representado pelas componentes em fase  $i$  e em quadratura  $q$ , sendo dado por:

$$X_p(f) = \frac{A_p^2}{4} [G_i(f - f_p) + G_i(f + f_p) + G_q(f - f_p) + G_q(f + f_p)].$$

Na figura 2.10 representa-se as formas de onda resultantes das Modulação de Amplitude, Frequência e Fase, para uma pequena sequência de símbolos de um sinal binário.

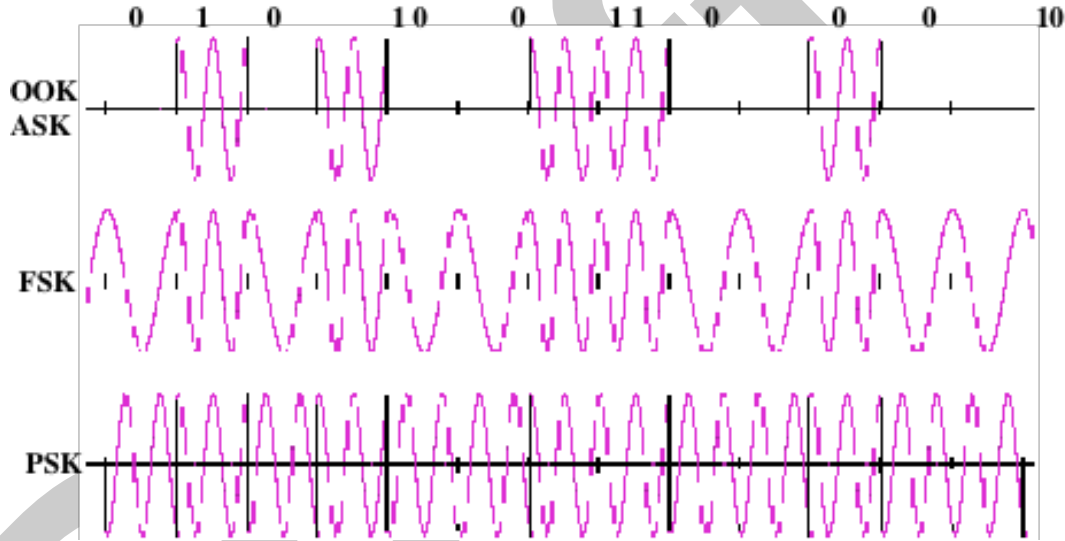


Figura 2.10: Formas de onda resultantes das Modulação de Amplitude, Frequência e Fase.

### Modulação de Amplitude

Na Modulação de Amplitude (OOK) o sinal digital  $x(t)$ , é convertido em sequências de palavras, com amplitude máxima de  $M - 1$ , constituídas por símbolos binários, gerados a uma cadência  $r$ , sendo representado por:

$$x_q(t) = 0;$$

e

$$x_i(t) = \sum_k a_k [u(t - \frac{k}{r}) - u(t - \frac{(k+1)}{r})],$$

onde,

$$a_k = 0, 1, 2, \dots, M - 1, \text{ com valor médio dado por:}$$



$$E[a_k] = \frac{(M-1)}{2},$$

sendo desvio padrão dado por.

$$\sigma^2 = E[a_k^2] - E^2[a_k] = \frac{M^2-1}{12}.$$

O espectro do sinal  $X_p(f)$ , que se representa na figura 2.11, pode ser calculado por:

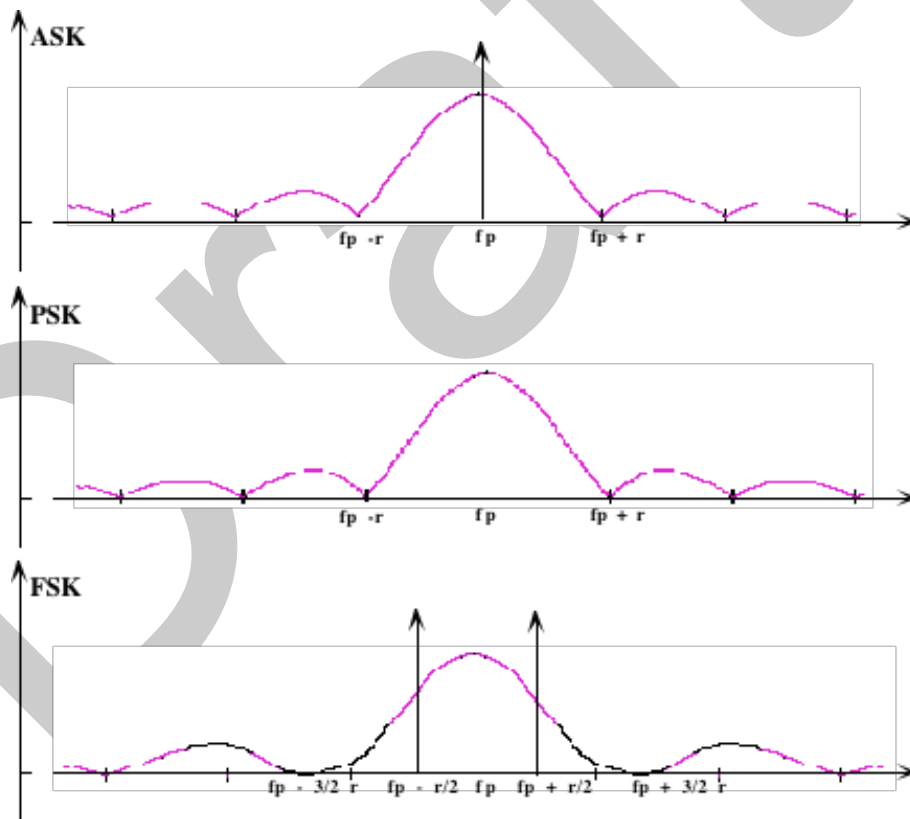


Figura 2.11: Espectros dos sinais Modulados por Onda Contínua.

$$X_p(f) = \frac{A_p^2}{4} \left[ \frac{M^2-1}{12r} \text{sinc}^2\left(\frac{f-f_p}{r}\right) + \frac{(M-1)^2}{4} \delta(f-f_p) + \frac{M^2-1}{12r} \text{sinc}^2\left(\frac{f+f_p}{r}\right) + \frac{(M-1)^2}{4} \delta(f+f_p) \right]$$

## Modulação de Frequência

Na Modulação de Frequência (FSK) o sinal digital  $x(t)$ , convertido em sequências de palavras, com amplitude máxima de  $M-1$ , constituídas por símbolos binários, gerados a uma cadência  $r$ , é representado por:

$$x_i(t) = \cos(\pi r t);$$

e

$$x_q(t) = \sum_k a_k \operatorname{sen}(\pi r t) [u(t - \frac{k}{r}) - u(t - \frac{k+1}{r})],$$

onde,

$$a_k = \pm 1, \pm 3, \dots \pm 5, \pm(M-1);$$

O espectro do sinal  $X_p(f)$ , que se representa na figura 2.11, pode ser calculado por:

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{A_p^2}{4} \left( \frac{1}{4} [\delta(f - f_p - \frac{r}{2}) + \delta(f - f_p + \frac{r}{2})] + \frac{4}{\pi^2 r} \left( \frac{\cos(\pi \frac{f-f_p}{r})}{(2 \frac{f-f_p}{r})^2 - 1} \right)^2 \right) \\ &+ \frac{A_p^2}{4} \left( \frac{1}{4} [\delta(f + f_p - \frac{r}{2}) + \delta(f + f_p + \frac{r}{2})] + \frac{4}{\pi^2 r} \left( \frac{\cos(\pi \frac{f+f_p}{r})}{(2 \frac{f+f_p}{r})^2 - 1} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

### Modulação de Fase

Na Modulação de Fase (PSK) o sinal digital  $x(t)$ , convertido em sequências de palavras, com amplitude máxima de  $M-1$ , constituídas por símbolos binários, gerados a uma cadência  $r$ , é representado por:

$$x_i(t) = \sum_k \cos(\pi \frac{2a_k + N}{M}) [u(t - \frac{k}{r}) - u(t - \frac{k+1}{r})];$$

e

$$x_q(t) = \sum_k \operatorname{sen}(\pi \frac{2a_k + N}{M}) [u(t - \frac{k}{r}) - u(t - \frac{k+1}{r})],$$

onde,

$$a_k = 0, 1, 2, \dots M-1; N = 0 \text{ ou } N = 1.$$

O espectro do sinal  $X_p(f)$ , que se representa na figura 2.11, pode ser calculado por:

$$X(f) = \frac{A_p^2}{4} \left[ \frac{1}{r} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f-f_p}{r}\right) + \frac{1}{r} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f+f_p}{r}\right) \right]$$

### Modulação Multi-simbólica

As Modulações Multi-simbólicas procuram aproveitar melhor a largura de banda disponível permitindo que cada uma das  $M$  possíveis palavras, formadas por sequências de  $r =$

$\log_2 M$  símbolos binários possa ser transmitida no mesmo instante, na Amplitude (M-APK) e/ou na Fase (M-PSK) de uma só portadora<sup>8</sup>.

Na figura 2.15 apresentam-se exemplos de uma constelação de palavras de  $r = 2$  símbolos na Modulação de Fase em Quadratura (QPSK) e de palavras de  $r = 3$  símbolos na Modulação de Amplitude em Quadratura (QAM).

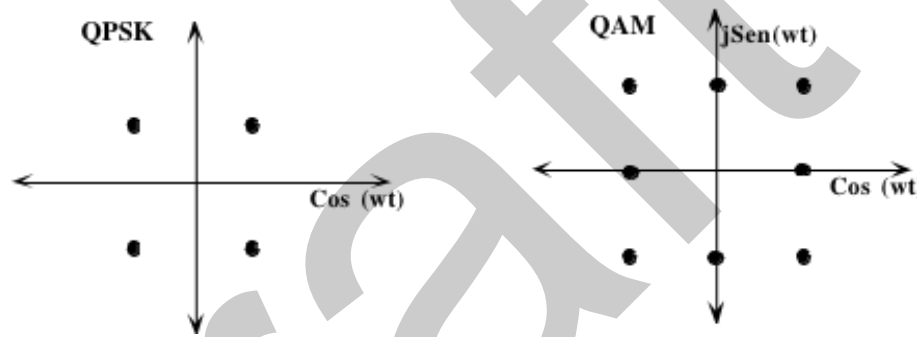


Figura 2.12: Constelações das Modulações de Fase em Quadratura (QPSK) de Amplitude em Quadratura (QAM).

### Desmoduladores de Onda Contínua

Na Recepção, os Desmoduladores de Onda Contínua, podem efectuar a Detecção Coerente (Recuperação do Relógio), Detecção da Envolvente (Processo não Linear) do sinal ou por comparação de fase. Estas técnicas apresentam diferentes valores para a Relação Sinal Ruído no sinal desmodulado.

Na figura 2.13, ilustra-se o processo de cálculo da Relação Sinal Ruído nos desmoduladores com detecção coerente.

### Probabilidade de Erro

A Probabilidade de Erro na recuperação de informação transmitida por modulação digital em onda contínua, depende não só do tipo de modulação, mas também da relação Sinal Ruído.

<sup>8</sup>Os Modems utilizados para transmitir dados digitais nas linhas telefónicas analógicas utilizam Modulações Multi-simbólicas, o mesmo acontecendo com as linhas digitais de acesso às redes públicas, como a RDIS (Rede Digital com Integração de Serviços).

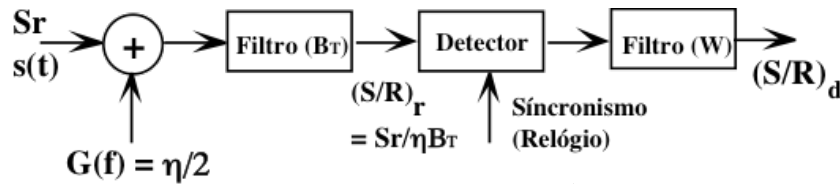


Figura 2.13: Relação Sinal Ruído nos desmoduladores com detecção coerente.

Na tabela 2.2, apresentam-se expressões para cálculo de probabilidade de erro em diferentes modulações digitais, considerando uma distribuição Gaussiana do ruído.

Tabela 2.2: Probabilidade de Erro em função da Relação Sinal Ruído.

Distribuição Gaussiana do Ruído	
Modulação	Probabilidade de Erro
<b>OOK, FSK</b>	$P_e = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}(\frac{A_p}{\sigma})^2}$
<b>PSK</b>	$P_e = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{A_p}{\sigma})^2}$
<b>M - APK</b>	$P_e = 2(1 - \frac{1}{M})Q(\frac{A_p}{\sqrt{\eta B_T \log_2 M}})$
<b>M - PSK</b>	$P_e \approx 2Q(\frac{A_p}{\sigma} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{M}})$

## 2.6.2 Espalhamento Espectral

Além das modulações em banda base e por onda contínua, existem outras técnicas de modulação baseadas em processos aleatórios. Estas técnicas, genericamente conhecidas por *Espalhamento Espectral* permitem controlar eficazmente o acesso de vários canais a meios de transmissão partilhados e garantem uma maior imunidade ao ruído.

Estão amplamente divulgadas duas espécies de modulações por Espalhamento Espectral: *Sequência Directa*, onde a informação digital em banda base  $i(t)$  é multiplicada por sequência de símbolos binários  $c(t)$  gerados por uma chave conhecida; e *Saltos de Frequência*, onde a portadora de cada canal não é fixa, mas pseudo-aleatória, saltando numa sequência de frequências geradas por uma chave conhecida ( $k(t)$ ).

Note-se que a frequência dos impulsos da sequência binária ( $f_i = \frac{1}{T_i}$ ) de Informação  $i(t)$ , deverá ser muito menor do que a frequência dos impulsos da sequência ( $f_c = \frac{1}{T_c}$ )

pseudo-aleatória  $c(t)$ , ( $f_i \ll f_c$ ), como se mostra na figura 2.14.

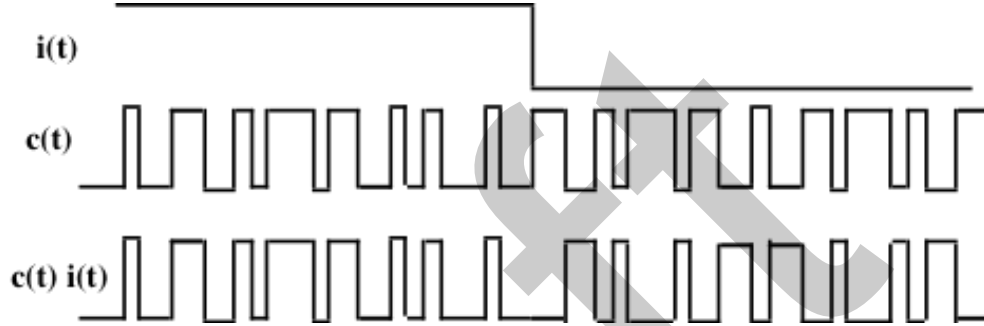


Figura 2.14: Multiplicação da sequência de informação  $i(t)$  por uma sequência pseudo-aleatória  $c(t)$ .

### Relação Sinal Ruído

Como a duração dos impulsos  $T_c$  da sequência pseudo-aleatória é muito menor do que a dos impulsos de informação  $T_i$ , a largura de Banda do canal de transmissão  $B_T$ , terá de ser muito mais elevada, do que a que seria necessária para transmitir a informação. Por outro lado, a relação sinal  $S$  ruído  $R$  poderá ser muito mais baixa, um vez que a capacidade de transmissão  $C$  é dada por:

$$C = B_T \log(1 + \frac{S}{R}),$$

o que permite concluir que o espalhamento espectral aumenta a imunidade ao ruído.

São muitas as aplicações comerciais e militares que recorrem a técnicas de Espalhamento Espectral, destacando-se por exemplo algumas redes locais, e as redes telefónicas celulares.

### Sequência Directa

A expressão do sinal  $v_{ds}$  resultante da modulação por espalhamento espectral do sinal  $i(t)$ , pode ser obtida, pela multiplicação desse sinal pela sequência directa  $c(t)$  e por uma função sinusoidal de frequência  $w_0 = 2\pi f_0$ , podendo ser dada por:

$$v_{ds}(t) = c(t)i(t)Am \cos(w_o t).$$

A figura 2.15 representa esquematicamente a modulação por espalhamento espectral, mostrando o processamento do sinal  $i(t)$ , na Emissão<sup>9</sup> e Recepção, onde o sinal é amostrado à frequência  $f_i = \frac{1}{T_b}$ .

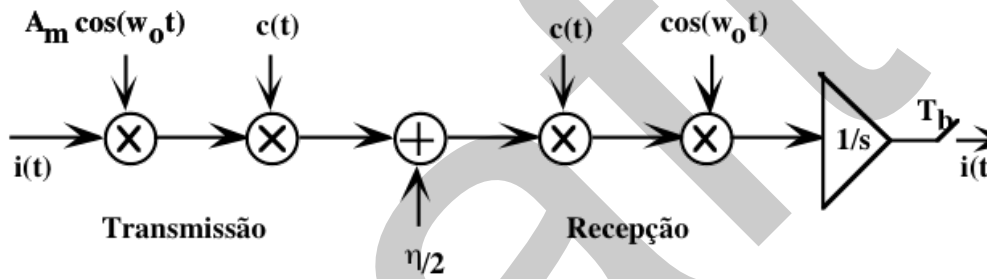


Figura 2.15: Emissão e Recepção do sinal  $i(t)$ .

### Saltos de Frequência

No caso de espalhamento espectral por saltos de frequência, a expressão do sinal modulado  $v_{fh}$ , resulta da multiplicação do sinal  $i(t)$  por uma função sinusoidal de frequência variável<sup>10</sup>, podendo ser dada por:

$$v_{fh}(t) = i(t)Am \cos(2\pi k(t)f_o t)$$

## 2.7 Multiplexagem por divisão do código

As técnicas de Multiplexagem por divisão do código(CDM), utilizam a codificação aleatória do fluxo de informação, efectuada por polinómios apropriados, de modo a permitir o *Controlo de Acesso ao Meio* (CDMA) físico, partilhado por vários canais, e recorrem às técnica de Espalhamento Espectral, que utilizam sequências Pseudo-Aleatórias de palavra binárias para alterar a frequência da portadora (Saltos de Frequência) ou o fluxo de informação (Sequência Directa).

<sup>9</sup>E transmissão com adição de Ruído Branco com densidade espectral  $\frac{\eta}{2}$ .

<sup>10</sup> $k(t)$  é função de  $c(t)$

No caso de  $k$  sinais ( $x(t)$ ) independentes serem modelados por Sequência Directa, resultará no canal de transmissão o sinal  $r_{sd}(t)$ , dado por:

$$r_{sd}(t) = \sum_k c_k(t) x_k(t) A_{mk} \cos(w_o t - \varphi_k).$$

Na recepção, para recuperar um desses sinais ( $r_i(t)$ , com  $0 < i \leq k$ ), é necessário multiplicar o sinal  $r_{sd}(t)$  por  $c_i(t)$  e por  $\cos(w_o t + \varphi_i)$ , resultando:

$$r_i(t) = r_{sd}(t) c_i(t) \cos(w_o t + \varphi_i),$$

ou,

$$r_i(t) = \sum_k c_i(t) c_k(t) x_k(t) A_{mk} \cos(\varphi_i - \varphi_k),$$

que poderá ser dividida em duas parcelas:

$$r_i(t) = x_i(t) A_{mi} + \sum_{k \neq i} c_i(t) c_k(t) x_k(t) A_{mk} \cos(\varphi_i - \varphi_k),$$

$$r_i(t) = x_i(t) + \text{Sinal Interferente},$$

uma contendo o Sinal Pretendido  $x_i(t)$  e outra o Sinal Interferente, representando ruído com efeito desprezável, se  $f_c \gg f_i \frac{(k-1)}{2}$ .

Os sistemas transmissão por Satélites, bem como os de telefonia móvel, constituem exemplos onde a CDM e o CDMA são amplamente utilizados.

Draft



# Codificação Digital da Informação

A Codificação Digital da Informação inclui as técnicas de quantificação das fontes analógicas de sinal, bem como de codificação do fluxo de informação digital.

Assim, as diferentes técnicas de quantificação do sinal procuram, genericamente, obter uma representação do sinal (analogico ou digital) nas seus componentes ortogonais, com uma aceitável taxa de geração de informação digital. Para isso, poderá ser necessário proceder a filtragens, utilizando filtros lineares ou transversais (*igualizadores*); a conversões analógico-digital, utilizando frequências (emissão) e instantes de amostragem (recepção) adequados; bem como a modulações binárias ou multi-simbólicas.

Por outro lado, a codificação do fluxo de informação digital é imprescindível para garantir uma adequada representação da informação, de modo a permitir a efectiva recuperação (na recepção) do sinal que transporta essa informação, a minimizar os efeitos do ruído e a propiciar um eficiente controlo de erros, qualquer que seja o sistema de transmissão.

## 3.1 Quantificação da Informação

As fontes digitais de informação caracterizam-se pela geração de sequências de  $n$  símbolos binários, cada uma das quais constitui uma das  $M$  possíveis palavras, resultantes de conversão analógico-digital ou geradas directamente pelas fontes.

Estas palavras geradas à cadência  $r_n$ , podem então ser seriadas numa sequência de símbolos binários, gerados a uma cadência  $r$ , igual ao inverso do tempo de duração  $T_b$  de cada símbolo.

Assim, sendo  $r_n$  a taxa de geração de palavras, o débito binário  $r$  da fonte, pode

ser calculado por:

$$r = \frac{1}{T_b} = r_n \log_2 M.$$

### 3.1.1 Conversão Analógico-Digital

Como foi referido no capítulo anterior, segundo a *Teoria da Amostragem*, um sinal  $x(t)$  deve ser lido a uma frequência duas vezes superior à da sua largura de banda  $W$ :

$$r_n = f_0 > 2W.$$

O sinal resultante da amostragem  $x_d(t)$  pode, se o tempo de leitura for muito curto, ser representado por:

$$\begin{aligned} x_d(t) &\approx x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \frac{k}{r_n}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(t - \frac{k}{r_n}). \end{aligned}$$

onde,

$$a_k = 0, 1, 2, \dots, M - 1.$$

### 3.1.2 Relação Sinal do Ruído de Quantificação

No caso da conversão analógico-digital, além do ruído inerente a cada tipo de modulação, há que considerar o *Ruído de Quantificação* resultante da substituição de  $x(t)\delta(t - \frac{k}{r_n})$  por  $a_k\delta(t - \frac{k}{r_n})$ , no processo de amostragem. Assim, para palavras de  $n$  símbolos binários, a relação Sinal Ruído de Quantificação, é dado por:

$$\left(\frac{S}{R}\right) = 3S_x(2^n)^2,$$

ou

$$\left(\frac{S}{R}\right)_{dB} \leq 4.8 + 6.0n \text{ dB}.$$

### 3.1.3 Modulações de Impulso

As Modulações de Impulso são utilizadas na quantificação da informação transportada num sinal analógico, que se pretende transmitir numa linha digital.

A quantificação do sinal pode ser de diferentes tipos, nomeadamente, *Linear*, nas modulações de Amplitude do Impulso (PAM) e do Código de Impulso (PCM); *Diferencial*, na Modulação do Código de Impulso Diferencial (DPCM), na Modulação Delta (DM) e na Codificação por Predição Linear (LPC); ou *Adaptativa*, na Modulação do Código de Impulso Diferencial Adaptativa (ADPCM), Modulação Delta Adaptativa (ADM).

### Modulação do Código de Impulso

A Modulação do Código de Impulso, tanto pode resultar da natural geração de palavras de  $n$  símbolos binários por uma fonte digital de informação, como da conversão analógico-digital do sinal gerado pela modulação de amplitude do impulso (PAM), apresentada no capítulo anterior.

Na figura 3.1 apresentam-se, em diagramas de blocos, um sistema de codificação e decodificação de um sinal analógico, recorrendo às Modulação do Amplitude do Impulso (PAM) e do Código de Impulso (PCM).

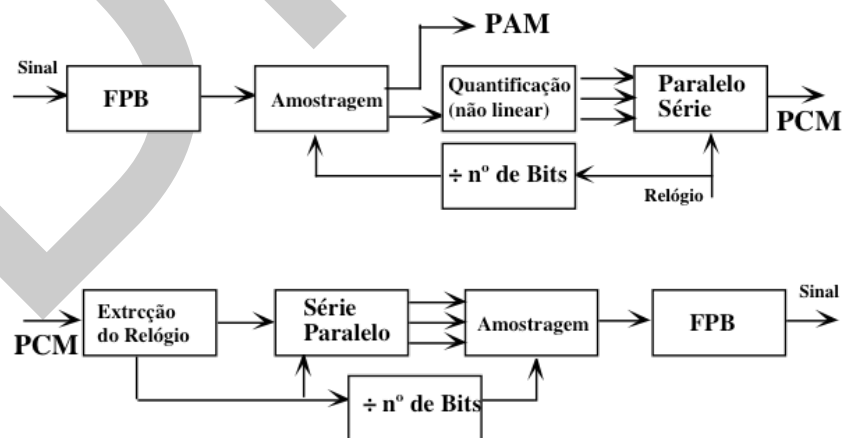


Figura 3.1: Codificação e decodificação do sinal analógico pelas Modulações de Impulso.

### Quantificação Diferencial

Na Quantificação por Modulação do Código de Impulso Diferencial (DPCM), a codificação por modulação do código de impulso, não é efectuada directamente sobre o

sinal amostrado, mas sobre a previsão do valor desse sinal, a partir dos valores das amostras anteriores.

Na figura 3.2 apresentam-se, em diagramas de blocos, um sistema de codificação e decodificação de um sinal analógico, recorrendo à Modulação do Código de Impulso Diferencial.

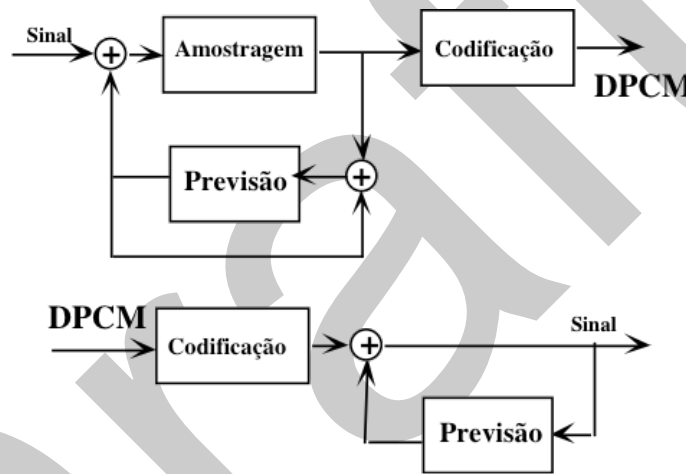


Figura 3.2: Codificação e decodificação do sinal analógico pela Modulação do Código de Impulso Diferencial.

### 3.1.4 Quantificação não Linear

A conversão analógico-digital, em sempre é linear. É frequente a utilização de resoluções diferentes conforme os níveis do sinal analógico ou a filtragem do sinal por um filtro não linear, que apresente, por exemplo, maior ganho para os valores mais baixos da amplitude. Deste modo, a filtragem aumenta a resolução nos níveis baixos do sinal, diminuindo o erro relativo da sua quantificação.

Existem igualmente outro tipos de codificação da informação, como a Modulação Delta e a Predição Linear, que são por natureza não lineares.

#### Modulação Delta

Ao contrário da Modulação do Código de Impulso Diferencial (DPCM) (que transmite uma palavra de  $n$  símbolos binários, em cada instante de codificação), a Modulação

Delta (DM) envia apenas um símbolo, conforme a amostra actual é maior ou menor que a anterior.

Na figura 3.3 apresentam-se, em diagramas de blocos, um sistema de codificação e decodificação de um sinal analógico, recorrendo à Modulação Delta.

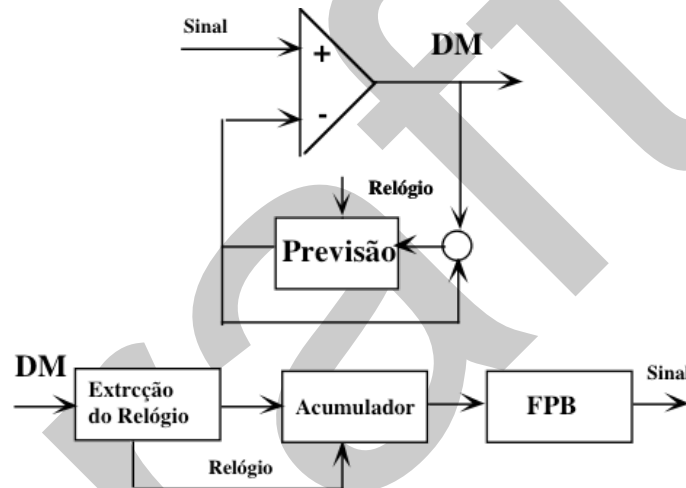


Figura 3.3: Codificação e decodificação do sinal analógico pela Modulação Delta.

### Predição Linear

Na Codificação por Predição Linear (LPC), o sinal analógico é processado de modo a obter um conjunto de parâmetros (análise) que, podem constituir os vectores da base de um espaço, onde o sinal pode ser representado (síntese). O sinal resultante deste tipo de codificação, combina estes vectores com a diferença entre o sinal original e o gerado por estes vectores.

Na figura 3.4 apresentam-se, em diagramas de blocos, um sistema de codificação e decodificação de um sinal analógico, recorrendo à Predição Linear.

### Quantificação Adaptativa

A filtragem e/ou a quantificação não linear dos sinais analógicos, quando usadas na modulações *Diferencial* e *Delta* dão origem às Modulações do Código de Impulso Diferencial Adaptativa (ADPCM) e Delta Adaptativa - ADM.

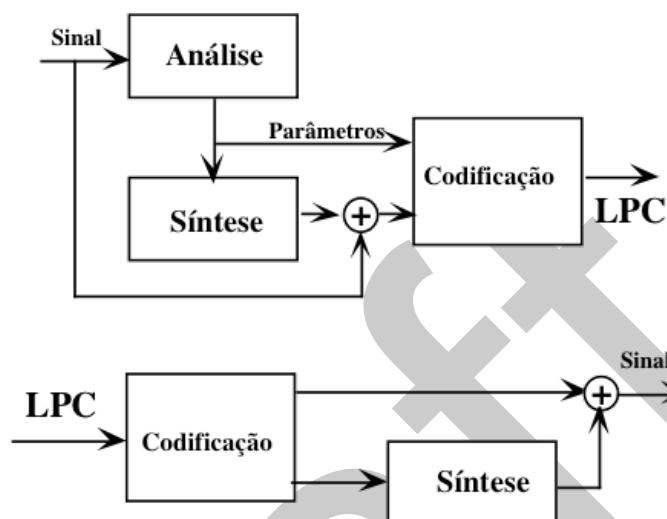


Figura 3.4: Codificação e decodificação do sinal analógico Predição Linear.

## 3.2 Codificação da Informação

As diferentes técnicas de codificação da informação digital, permitem aproveitar melhor as características dos canais de transmissão e garantir um certo controlo sobre os eventuais erros, resultantes do efeito do ruído.

Na Codificação Multi-Simbólica, os Códigos de Blocos Lineares (definidos por Matrizes) e Cíclicos (definidos por Polinómios) permitem a detecção e correcção de alguns tipos de erros, enquanto que os Códigos Convolucionais (definidos por máquinas de estados ou diagramas em árvore) garantem sequências de símbolos mais adequadas às características do canal.

Por outro lado, os Códigos de Linha, como o BnZS, o nBmB, o AMI, o HDB3 e o CMI, permitem que qualquer sequência de símbolos binários possa ser emitida numa linha de transmissão e recuperada adequadamente na recepção.

### 3.2.1 Códigos de blocos

Na codificação em blocos, cada palavra  $Y$  com  $k$  símbolos binários  $i$ ,

$$Y = i_1, i_2, \dots, i_k,$$

é transformada numa outra  $W$  com  $n = k + r$  símbolos binários,

$$W = i_1, i_2, \dots, i_k, p_1, p_2, \dots, p_r,$$

constituída pelos  $k$  símbolos da palavra  $Y$ , seguidos de  $r$  símbolos  $(p_1, p_2, \dots, p_r)$ , gerados pela seguinte Matriz.

$$\begin{aligned} p_1 &= z_{11}i_1 + z_{12}i_2 + \dots + z_{1k}i_k \\ p_2 &= z_{21}i_1 + z_{22}i_2 + \dots + z_{2k}i_k \\ &\dots \\ p_r &= z_{r1}i_1 + z_{r2}i_2 + \dots + z_{rk}i_k \end{aligned}$$

Por ser a geradora do código, a matriz de coeficientes binários  $G$ , de dimensão  $(k \times n)$ , é designada por Matriz Geradora, sendo constituída por uma matriz identidade  $I$ , de dimensão  $k^2$ , e pela transposta da matriz dos coeficientes  $Z$ , de dimensão  $r \times k$ , que determina as propriedades particulares de cada código.

$$G = [I|Z]$$

Assim, cada palavra do código  $W$  é gerada por  $G$  a partir de  $Y$ , ou:

$$W = YG.$$

Para cada código particular, existe uma *Matriz Verificadora*  $H^T$ , de dimensão  $(n \times r)$ , que pode ser calculada por:

$$H^T = \left[ \frac{Z^T}{I} \right].$$

Quando uma palavra, de dimensão  $n = k + r$ , é multiplicada por  $H^T$ , o resultado é um vector  $S$ , de dimensão  $r$ , chamado *Síndrome*, que permite detectar e corrigir erros.

Assim, se uma palavra  $W$  pertence ao código, o Síndrome gerado por  $H^T$  é um vector nulo ( $S = 0$ ), o que significa que  $W$  não tem erros.

$$S = WH^T$$

Caso contrário, o Síndrome é um vector não nulo, que resulta da presença de erros  $E$  em  $W$ , uma vez que:

$$S = (W + E)H^T = EH^T.$$

Deste modo, além da detecções de erros, o Síndrome permite também a sua correcção pois, a partir de  $S$  e de  $H$  pode obter-se  $E$ , que somado (ou exclusivo) à palavra com erros resulta  $W$  (sem erros).

### 3.2.2 Códigos Cíclicos

Nos Códigos Cíclicos  $(n,k)$ , que constituem um subconjunto de códigos de blocos, cada palavra do código  $W$  é constituída pelos  $k$  símbolos da palavra original  $Y$ , seguida de  $r = n - k$  símbolos gerados a partir do Polinómio Gerador do código. Assim, a palavra

$$W = i_1, i_2, \dots, i_k, p_1, p_2, \dots, p_r,$$

onde  $i_1, i_2, \dots, i_k$  representam os  $k$  símbolos da palavra original  $Y$  e  $p_1, p_2, \dots, p_r$ , os  $r$  símbolos gerados pelo Polinómio  $G(x)$ , pode ser escrita na forma polinomial por:

$$W(x) = i_1x^{n-1} + i_2x^{n-2} + \dots + i_kx^{n-k} + p_1x^{r-1} + p_2x^{r-2} + \dots + p_{r-1}x + p_r.$$

Os  $r$  símbolos  $(p_1, p_2, \dots, p_r)$  gerados pelo Polinómio  $G(x)$ , resultam do resto da divisão de  $i_1x^{n-1} + i_2x^{n-2} + \dots + i_kx^{n-k}$  por  $G(x)$ .

$$p(x) = \text{resto}\left[\frac{i_1x^{n-1} + i_2x^{n-2} + \dots + i_kx^{n-k}}{g(x)}\right].$$

Esta operação de aritmética binária pode ser efectuada por registos de deslocamento e portas *ou exclusivo*, como se mostra na figura 3.5.

Alternativamente, o mesmo resultado pode ser obtido por uma matriz  $G$ , onde cada linha  $Z_i$  da submatriz  $Z$  poderá ser calculada, por diferentes métodos, nomeadamente, por:

$$Z_i(x) = \text{Resto}\left[\frac{X^{n-i}}{G(x)}\right],$$

com  $1 \leq i \leq k$ .



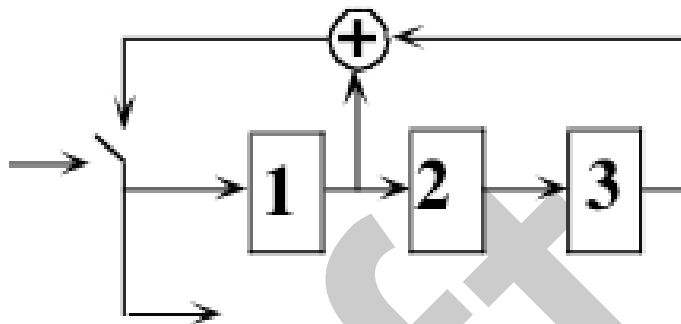


Figura 3.5: Gerador do palavras pelo polinómio  $P_x = x^3 + x^2 + 1$ .

### Questão

- Utilizando a equação anterior, mostrar que na última linha ( $i = k$ ) da Matriz Geradora  $G$  está representado o polinómio gerador do código  $G(x)$ .

### 3.2.3 Controlo de Erros

Para uma dada probabilidade de erro  $P_e$ , a probabilidade de existirem  $i$  símbolos errados, numa palavra de  $n$  símbolos  $P(i|n)$ , pode calculada por:

$$P(i|n) = \binom{n}{i} P_e^i (1 - P_e)^{n-i},$$

onde  $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ .

### Distância entre Vectores

Define-se *Distância* entre dois vectores, como o número dos seus elementos (símbolos) diferentes.

A distância mínima  $d$  entre as palavras de um código, determina a sua capacidade de Detecção e de Correção de erros. Assim, um código linear tem capacidade de:

*Detecção de  $i$  Erros, se  $d \geq i + 1$ ;*

*Correção de  $j$  Erros, se  $d \geq 2j + 1$ ;*

*Detecção de  $i$  e Correção de  $j$  Erros, se  $d \geq i + j + 1$ .*

Para efectuar a correção dos símbolos errados, adiciona-se à palavra (vector) recebida um vector gerado a partir do Síndrome.

### Códigos de Hamming

Um código de Hamming é um código de blocos com capacidade de detecção de dois símbolos ou de correção de um símbolo, uma vez que apresenta distância mínima  $d = 3$ .

Existe uma infinidade de códigos de Hamming  $(n, k)$ , para  $(n, k) = (2^m - 1, 2^m - 1 - m)$ , com  $m \geq 3$ .

Note no entanto que, quando  $m$  se torna grande, os códigos de Hamming tornam-se ineficientes, uma vez que  $\frac{k}{n} = \frac{2^m - 1 - m}{2^m - 1} = 1 - \frac{m}{2^m - 1}$ , tende para 1.

### 3.2.4 Codificação Convolutional

Na Codificação Convolutional cada sequência de  $k$  símbolos é transformada noutra sequência de  $n$  símbolos, que resultam da codificação de  $L + 1$  símbolos.

Na figura 3.6, apresenta-se o diagrama de conexão dum codificador convolutional, com  $n = 2$ ,  $k = 1$  e  $L = 2$  (2,1,2), que pode ser implementado com registos de deslocamento e somadores binários .

Além do diagrama de conexão, um *Código Convolutional* pode ser representado por dum diagrama de estados, por um diagrama em árvore, ou pelo diagrama de *Trellis*.

### Cadência de Transmissão

A codificação convolutional, além de memorizar os  $L$  símbolos, presentes na entrada à cadência  $r_k$ , altera também a sua cadência  $r_n$  na saída.

$$r_n = \frac{n}{k} r_k.$$

### Descodificação dos Códigos Convolucionais

Para descodificar os Códigos Convolucionais, recorre-se a algoritmos de Descodificação. Um destes algoritmos, conhecido pela sua eficiência, é o *Algoritmo de Viterbi* , que não

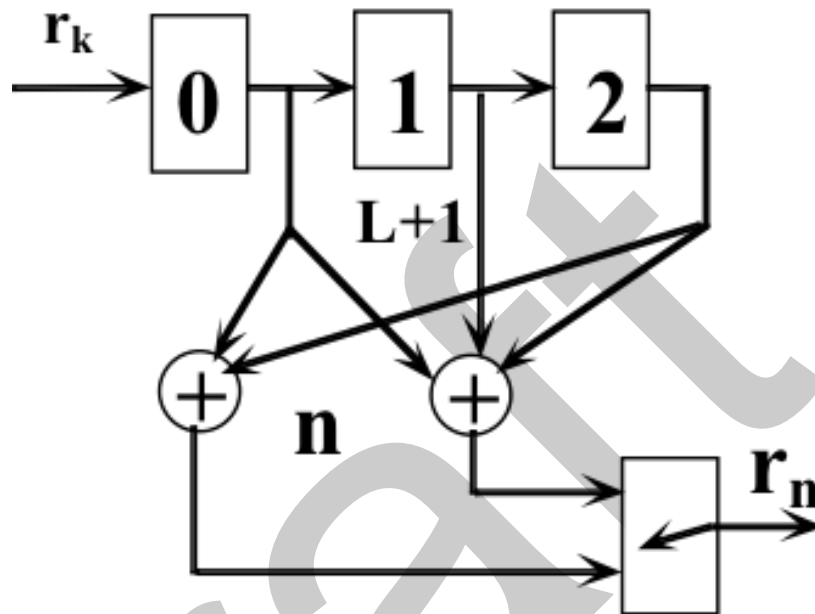


Figura 3.6: Exemplo de um codificador convolucional (2,1,2).

considerando os percursos de codificação de baixa probabilidade em cada estado, reduz o numero total de percursos de descodificação a considerar.

### Capacidade de Correção de erros

Tal com a distância mínima dos códigos lineares, a distância livre  $d_f$  dos códigos Convolucionais (um pouco mais difícil de calcular)<sup>1</sup>, determina a sua capacidade de Correção de erros. Assim, um código Convolucional tem capacidade de:

$$\text{Correcção de } t \text{ Erros, se } d_f \geq 2t + 1;$$

### Códigos Turbo

Os códigos Turbo são uma variante dos Códigos Convolucionais, que incluem uma realimentação (da saída para a entrada), introduzida, designadamente, por um código linear.

<sup>1</sup>Pode ser calculada a partir das várias distâncias mínimas de Hamming, referentes aos diferentes percursos possíveis de codificação.

### 3.3 Codificação de Canal

As técnicas de codificação de canal, contornando com eficiência os principais efeitos do ruído, permitem que o fluxo de informação (transportado numa sequência de símbolos binários, com uma cadência fixa) possa ser adequadamente recuperado na recepção da linha de transmissão.

Os códigos de linha, ao efectuarem a modulação do fluxo de informação para a banda do canal, integrando a informação do relógio (que traduz a cadência do fluxo de informação) na sequência de símbolos binários, possibilitam não só a sua recuperação, mas também a sua Multiplexagem e demultiplexagem.

#### 3.3.1 Recuperação do Relógio

A inserção e recuperação do sinal de relógio, constitui uma das principais capacidades dos códigos de linha.

Apesar de serem utilizados (pelas diferentes técnicas de codificação de canal) vários métodos de sincronismo do sinal de relógio (inserido e extraído da linha) com a do fluxo de informação, os circuitos de extracção de relógio incluem normalmente *Malhas de Sincronismo de Fase (PLLs)* e *Filtros*, baseados em circuitos ressonantes.

O efeito do ruído e da banda de transmissão ser finita, juntamente com algumas sequências de símbolos menos favoráveis, obrigam a um controlo apertado da fase do relógio (*Jitter*) extraído da linha, uma vez que, um relógio estável é fundamental para recuperar o fluxo de informação (sem erros) da sequência de símbolos da linha de transmissão.

#### 3.3.2 Códigos de Linha

Sem os códigos de linha, a transmissão dum fluxo de informação (representada numa sequência de símbolos binários) necessitaria de duas linhas: uma para a transmissão dos símbolos binários, usando as técnicas de representação NRZ (No Return to Zero) ou a RZ (Return to Zero); e outra para transmissão do sinal do Relógio da cadência de geração, que permite a leitura dos símbolos transmitidos, como se mostra na figura 3.7.

Os códigos de linha (como o AMI, HDB3, CMI, kBnB, entre outros) permitem integrar no sinal que representa o fluxo de informação a transmitir, a informação necessária

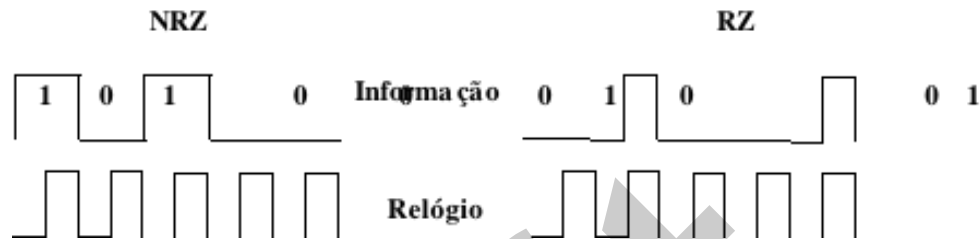


Figura 3.7: Exemplo de uma sequência de símbolos binários em NRZ (esquerda) e em RZ (direita).

à eficiente recuperação do sinal de relógio na recepção, permitindo que os sistemas de transmissão utilizem apenas uma linha.

### AMI

O código AMI (Alternate Mark Inversion), é um código ternário, onde se alterna a polaridade do símbolo binário *um*, de modo a eliminar a componente contínua da energia do sinal, que representa o fluxo de informação, e a introduzir no sinal um número suficiente de transições para permitir a recuperação do relógio no receptor.

Na figura 3.8 apresenta-se uma pequena sequência de símbolos binários codificados pelo código AMI.

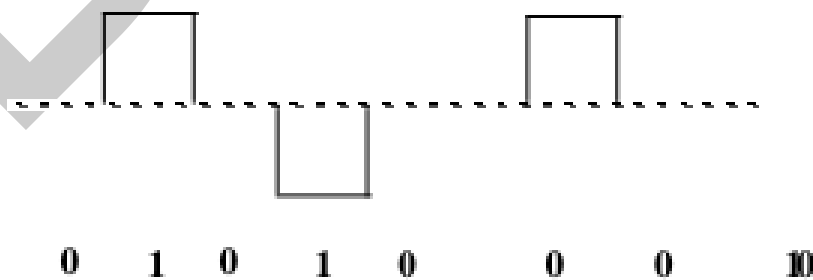


Figura 3.8: Exemplo de uma sequência de símbolos binários no código AMI.

### HDB3

O código HDB3 (High Density Bipolar), é um código ternário, baseado no código AMI, onde se limita (em três), o comprimento máximo das sequências de símbolos *zero*, por

introdução de violações à regra de codificação dos símbolos *um*. Estas violações são posteriormente compensadas, para garantir a eliminação da componente contínua.

Na figura 3.9 apresenta-se uma pequena sequência de símbolos binários codificados pelo código HDB3.

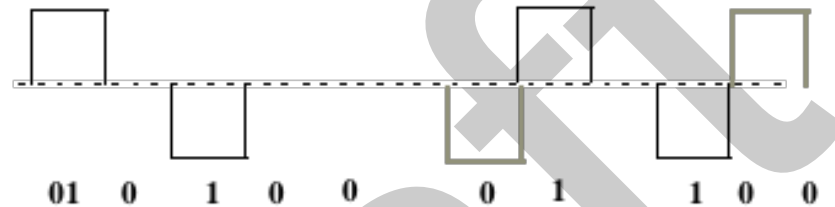


Figura 3.9: Exemplo de uma sequência de símbolos binários no código HDB3.

### CMI

O código CMI (Code Mark Inversion) é um código binário, muito usado nas linhas de transmissão de muito alto débito, onde os símbolos *zero* são codificados pelo sinal de relógio, enquanto os símbolos *um* são codificados por alternância de polaridade.

Na figura 3.10 apresenta-se uma pequena sequência de símbolos binários codificados pelo código CMI, enquanto que na figura 3.11 se representa, em diagramas de blocos, o processo de codificação e de descodificação deste código.

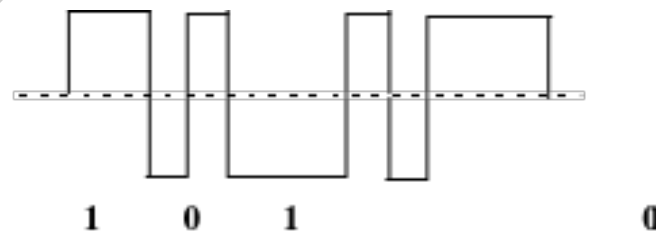


Figura 3.10: Exemplo de uma sequência de símbolos binários no código CMI.

Repare que esta técnica de processamento de sinal, para recuperação de relógio, baseada no atraso do tempo duração de meio símbolo, só é possível para cadências de transmissão elevadas.

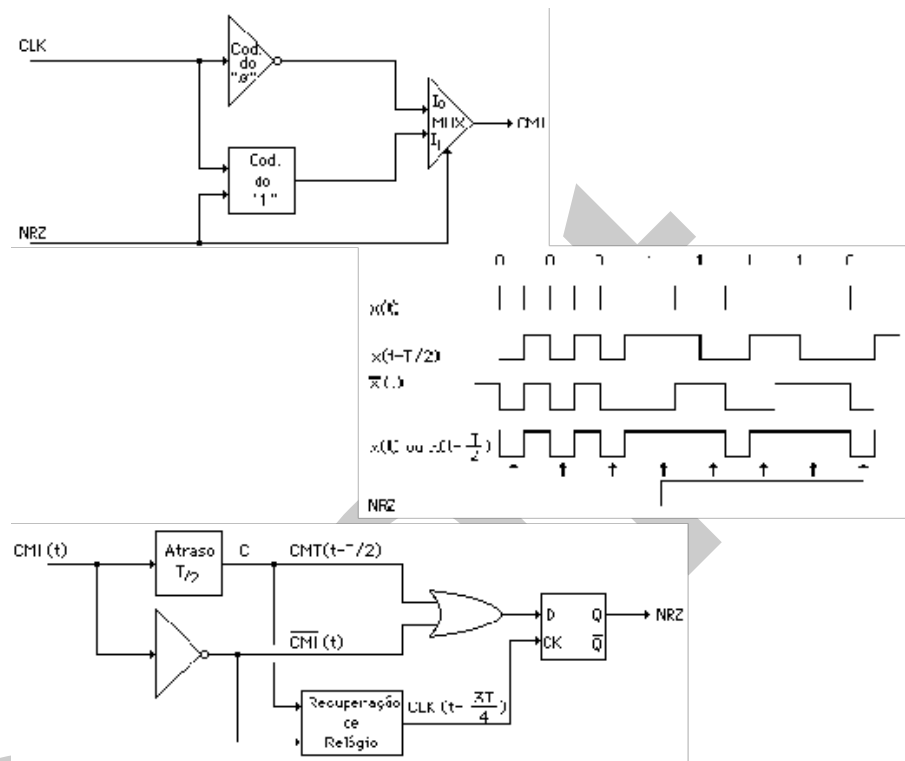


Figura 3.11: Codificador e decodificador de CMI.

## kBnB

Os códigos de linha kBnB, muito utilizados em sistemas de transmissão óptica, fazem corresponder a cada sequência (palavra) de  $k$  símbolos, uma sequência  $n$  símbolos, sendo implementados por memórias, registros de deslocamento e sintetizadores de frequência, para sincronizar as cadências de entrada e de saída.

Como  $n > k$ , a cadência de transmissão é mais elevada, mas as sequências de símbolos nas palavras que são enviadas para a linha facilitam a recuperação do relógio na recepção.

## Baralhadores

Os baralhadores alteram a sequência dos símbolos que são gerados, garantido um limite para o comprimento das sequências de símbolos iguais, mas mantêm a cadência de transmissão. A codificação e decodificação resulta da multiplicação e divisão por polinômios apropriados, podendo ser utilizada conjuntamente com outro código de linha.

Na figura 3.12 apresenta-se um baralhador do fluxo de informação digital pelo polinómio  $x^3 + x + 1$ .

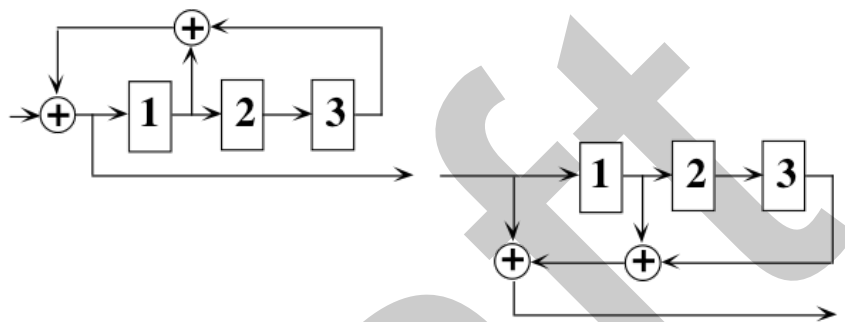


Figura 3.12: Baralhador do fluxo de informação digital pelo polinómio  $x^3 + x + 1$ .

### Questão

- Como destingue na prática o processo de geração de um código cíclico por um dado polinómio gerador, do processo de baralhar o fluxo de informação por esse mesmo polinómio?



# Introdução aos Sistemas de Comunicação Digital

Além da transmissão, incluindo o processamento da informação para controlo de controlo de erros (*Detecção, Correção e Retransmissão*), as redes de comunicação têm igualmente de assegurar a concentração, comutação e controlo do tráfego transportado entre os diferentes utilizadores.

Para satisfazer a critérios de *Fiabilidade*, devem ainda dispor de capacidade de *Detecção de Falhas* e de alguma *Redundância*, de modo a poder garantir a continuidade de serviço, mesmo em condições de avaria parcial dos sistemas.

A qualidade de serviço constitui outro requisito das redes de comunicação, que devem igualmente suportar mecanismos de gestão que permitam, nomeadamente, configurar e monitorar remotamente os equipamentos e os sistemas envolvidos.

## 4.1 Sincronização, concentração e comutação de canais digitais

Existindo mais do que uma fonte a partilhar, temporariamente, os recursos necessários à transmissão, concentração e comutação dos respectivos fluxos de informação, é conveniente sistematizar os mecanismos que disciplinem eficazmente a utilização desses recursos.

### 4.1.1 Multiplexagem

Enquanto nos sistemas analógicos, a partilha de uma linha de transmissão por vários canais de informação recorre a técnicas de Multiplexagem por Divisão em Frequência (FDM), as técnicas de multiplexagem utilizadas em redes digitais recorrem predominantemente à:

*TDM - Multiplexagem por Divisão no Tempo;*

*CDM - Multiplexagem por Divisão no Código;*

e, em sistemas ópticos,

*WDM - Multiplexagem por Divisão no Comprimento de Onda.*

#### Multiplexagem por Divisão no Tempo

Numa linha de transmissão, a Multiplexagem por Divisão no Tempo consiste na atribuição cíclica de intervalos temporais aos diferentes canais afluentes. Para que seja possível a recuperação da informação transmitida (desmultiplexagem), num dos intervalos é enviada um padrão conhecido (palavra de alinhamento), que é utilizado como referência do início do ciclo. Ao agregado de intervalos temporais, correspondente a um ciclo de repetição dos canais, incluindo o padrão de sincronismo, designa-se por trama. Na figura 4.1 ilustra-se o mecanismo de multiplexagem e desmultiplexagem temporal.

Alguns sistemas de transmissão podem expandir-se em hierarquias de Multiplexagem por Divisão no Tempo, na medida em que as tramas dos níveis superiores, podem ser constituídas por intervalos temporais (canais) afectos a tramas dos níveis hierárquicos inferiores.

#### Sincronização dos Fluxos de Informação

Numa trama além do padrão de sincronismo para referenciar o início da trama, sincronizando os intervalos dos canais afluentes com débitos síncronos<sup>1</sup>, podem existir outras informações destinada a controlar, acomodar e a sincronizar os canais não síncronos.

Por exemplo, num sistema plesiócrono, os canais afluentes, tendo débitos nominais adequados aos intervalos que lhes são atribuídos, não são gerados por um relógio comum a todos os canais. Por isso, é de esperar que os débitos dos fluxos de informação de cada

---

<sup>1</sup>A taxa de transmissão de cada canal corresponde exactamente à capacidade da fracção temporal que lhe é atribuída na trama.

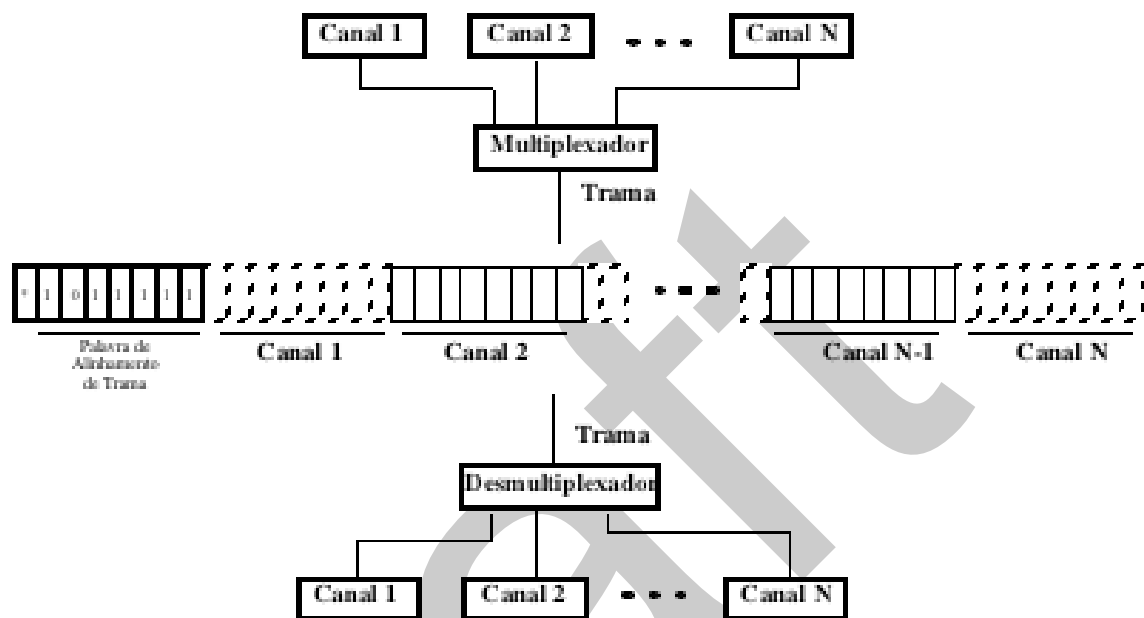


Figura 4.1: Multiplexagem e Desmultiplexagem Temporal.

um dos canais possam apresentar um pequeno deslizamento em relação às capacidade dos respectivos intervalos na trama.

Recorrendo à técnica da Justificação (Positiva, Negativa e Nula) pode controlar-se a transmissão sem perda e com atraso constante do fluxo de informação dos canais, adaptando a capacidade atribuída ao débito gerado. Assim, se o débito observado num dos canais exceder a capacidade atribuída, aumenta-se ligeiramente essa capacidade (Justificação Positiva) caso contrário diminui-se a capacidade atribuída (Justificação Negativa) a esse canal, excepto se o débito for igual à capacidade (Justificação Nula), que não obriga a qualquer alteração.

Numa trama, pode existir igualmente um intervalo pré-definido, reservado ao transporte da informação de controlo (sinalização), que na fase de estabelecimento e terminação das chamadas é transferido entre as entidades de controlo, para identificar e atribuir o(s) intervalo(s) a cada canal<sup>2</sup>.

#### 4.1.2 Controlo de Acesso

Quando um terminal acede directamente a um meio físico partilho por vários canais, existem técnicas de controlo de acesso que disciplinam e/ou controlam a partilha de

<sup>2</sup>Sinalização por canal comum.

recursos pelos diferentes utilizadores. As principais técnicas de controlo de acesso a meios partilhados são:

*FDMA - Acesso Múltiplo por Divisão na Frequência;*

*TDMA - Acesso Múltiplo por Divisão no Tempo;*

*CDMA - Acesso Múltiplo por Divisão no Código;*

e, em sistemas ópticos,

*WDMA - Acesso Múltiplo por Divisão no Comprimento de Onda.*

### 4.1.3 Sistemas de Comutação

As redes digitais de comunicação, além do transporte ponto-a-ponto, ou ponto-a-multiponto, do fluxo de informação dos diferentes canais, permitem estabelecer conexões entre diferentes pontos (de uma rede ou de várias redes), atribuindo temporariamente os recursos necessários à transferência da informação dos canais estabelecidos.

As redes comutadas podem suportar dois tipos de comutação:

*Comutação de Circuitos (Rede Telefónica, RDIS);*

*Comutação de Pacotes (Redes ATM, Redes Computadores).*

Na Comutação de Circuitos, geralmente, existe uma fase de estabelecimento de chamada, onde as entidades envolvidas iniciam a abertura de conexões que são atribuídas a cada canal e libertadas no final da chamada. Como os sistemas de *Multiplexagem por Divisão no Tempo* permitem a comutação espacial de circuitos por troca dos respectivos intervalos temporais nas tramas (comutação temporal), o estabelecimento das conexões pode ser baseado na atribuição dos intervalos temporais nas tramas das linhas de transmissão.

Pelo contrário, na Comutação de Pacotes pode ou não existir o conceito de conexão, mas pressupõe-se a existência de canais físicos abertos entre os pontos terminais da transferência da informação. Neste caso, o emissor compõe uma mensagem (de comprimento variável), que inclui a identificação do destinatário (ou do circuito virtual), e envia-a para o nó de acesso à rede. Este nó, analisando essa identificação e o comprimento da mensagem, fragmenta-a em pacotes apropriados que são memorizados e transferidos sequencialmente entre os nós intermediários da rede até chegarem ao destinatário.

## 4.2 Qualidade de serviço

Como é sabido, do ponto de vista comercial, cada operador dispõe de diferentes parâmetros e indicadores associados a custos e a lucros de exploração, dos diferentes sistemas e serviços, que reflectem a rentabilidade das diferentes opções de carácter operacional disponíveis. À semelhança dos mecanismos de gestão comercial, que garantem a rentabilidade da exploração dos serviços, também poderão existir mecanismos de controlo que conduzam, do ponto de vista operacional, a um objectivo sistemático de incremento da mais valia qualitativa, nas variáveis características dos serviços.

Para além da disponibilidade do serviço, sem a qual é inviável a aplicação de qualquer critério de avaliação da qualidade de serviço, uma rede de comunicação terá que garantir a *Transparência Semântica e Temporal* do fluxo de informação que transporta.

Refira-se ainda que, dada a complexidade de cálculo das estimativas da qualidade de serviço, são utilizados frequentemente métodos não algorítmicos, como redes neurais e outras técnicas de inteligência artificial, na previsão dos principais parâmetros característicos do tráfego.

## 4.3 Gestão de Sistemas de Comunicação

Os equipamentos de suporte dos sistemas de transmissão e de comutação trocam entre si fluxos de informação de gestão, que poderão ser utilizados pelas entidades de controlo e de gestão para fins de Operação e Manutenção (*Fluxos OAM*). Na figura 4.2 identificam-se alguns (F1, F2, F3, F4 e F5) fluxos OAM transmitidos entre diferentes equipamentos<sup>3</sup> ao longo de uma linha de acesso.

A avaria de equipamentos pode produzir perturbações no tráfego, incompatíveis

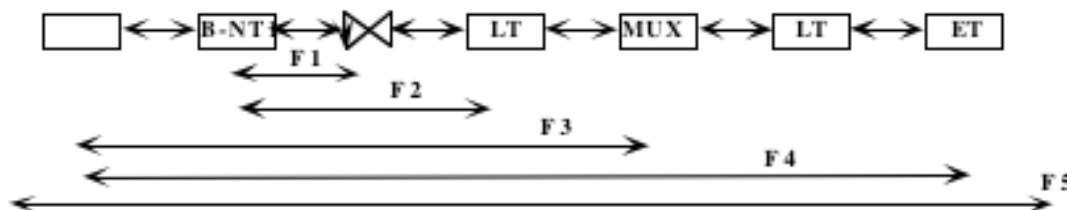


Figura 4.2: Fluxos de informação de Gestão.

com a qualidade de serviço estabelecida. Por este facto, as entidades de gestão poderão

<sup>3</sup>NT - Terminação de rede; LT Terminação de Linha; MUX - Multiplexador.

usar os sinais gerados pelos mecanismos de controlo dos parâmetros de utilização ou pelos equipamentos de transmissão e comutação para identificar anomalias e executar as acções adequadas ao respectivo isolamento.

Uma vez definidos os Objectivos e Objectos de Gestão, é necessário estabelecer uma Estrutura da Informação de Gestão, integrando Bases de Informação de Gestão (MIBs) e respectivos Protocolos de Gestão (SMNP; CMIP; RMON; TMN), tendo em vista a constituição de Redes de Gestão (TMN, Telecommunications Management Network) e de Redes Inteligentes (IN, Intelligent Network), que serão tratadas noutras disciplinas.

# Bibliografia

- A. Bruce Carlson, Sistemas de Comunicação, McGraw-Hill.
- Mischa Schwartz, Information, Transmission, Modulation and Noise, McGraw-Hill.
- H. Taub e D. Schilling, Principles of Communication Systems, McGraw-Hill, 2ª Ed., 1986.
- Bernard Sklar, Digital Communications, Fundamentals and Applications, Prentice-Hall Int. Editions, 1988.
- Andrew J. Viterbi, Jim K. Omura, Principles of Digital Communication and Coding, McGraw-Hill.
- Simon Haykin, Communication Systems, Wiley, 3ª Ed., 1994.
- L. Couch II, Digital and Analogue Communication Systems, MacMillan.
- Dunlop e Smith, Telecommunication Engineering, Van Nostrand.
- G. Kennedy e B. Davis, Electronic Communication Systems, McGraw-Hill, 4ª Ed., 1993.
- Edward C. Jordan & Keith G. Balmain, Electromagnetic Waves and Radiating Systems, Prentice Hall Series, 1968.
- Akira Ishimaru, Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering, Prentice-Hall Int. Editions, 1991.
- David Parsons, The Mobile radio Propagation Channel, Pentech Press, 1993.

Draft



**II**

**Aulas Teórico-Práticas**

Draft

# Resolução e discussão de problemas numéricos

## 1.1 Análise de Sinais

1 - Determinar  $V(f)$  para  $v(t) = Ae^{-\pi(\frac{t}{\tau})^2}$ . Esboçar  $V(f)$  e  $v(t)$  para  $\tau = 1$  e  $\tau = 2$ .

Resp:  $V(f) = A\tau e^{-\pi(f\tau)^2}$ .

2 - Determinar  $Z(f)$  em função de  $V(f)$  se  $z(t) = v(at - t_d)$ .

Resp:  $Z(f) = \frac{V(\frac{f}{a})}{|a|} \times e^{-j\frac{wt_d}{a}}$ .

3 - Determinar  $V(f)$  para  $v(t) = \Pi(\frac{t}{\tau}) = 1$ , se  $|t| < \frac{\tau}{2}$  e 0 se  $|t| > \frac{\tau}{2}$ .

Resp:  $V(f) = \tau \text{sinc}(f\tau)$ .

4 - Determinar  $V(f)$  para  $v(t) = A\Pi(\frac{t}{\tau}) \cos w_c t$ .

Resp:  $V(f) = \frac{A\tau}{2} \text{sinc}((f - f_c)\tau) + \frac{A\tau}{2} \text{sinc}((f + f_c)\tau)$ .

5 - Determinar  $V(f)$  para  $v(t) = A(\Pi(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{2}) - \Pi(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2}))$

Resp:  $V(f) = (A\tau \text{sinc} f\tau)(j2 \sin \pi f\tau) = (j2\pi f\tau)A\tau \text{sinc}^2(f\tau)$ .

6 - Determinar  $V(f)$  para  $v(t) = A(1 - \frac{|t|}{\tau})$ , se  $|t| < \tau$  e 0, se  $|t| > \tau$ .

Resp:  $V(f) = A\tau \text{sinc}^2 f\tau$ .

7 - Verificar que  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \Pi(\frac{t}{\tau}) = (1 - \frac{|t|}{\tau}) = \delta(t)$ .

8 - Calcular  $c(nf_0)$  para  $v(t) = A \cos(\frac{2\pi t}{T_0})$ .

Resp:  $c(nf_0) = \frac{A}{2}$  para  $n = -1$  e  $n = 1$ , sendo  $c(nf_0) = 0$  nos restantes casos.

9 - Calcular  $\langle v(t) \rangle$ ,  $P$  e  $c(nf_0)$  para  $v(t) = A|\sin(\frac{2\pi t}{T_0})|$ .

Resp:  $c(nf_0) = \frac{2A}{\pi(1-n^2)}$  para  $n$  par, e  $c(nf_0) = 0$  para  $n$  ímpar.

## 1.2 Resposta em Frequência

10 - Mostrar que a Função da Resposta em Frequência de uma linha de transmissão ideal é do tipo  $H(f) = K e^{-j\omega t_d}$ .

Resp:  $Y(f) = H(f)X(f)$ ,  $y(t) = Kx(t - t_d)$ .

11 - Determinar a resposta  $y(t)$  de  $H(j\omega) = 15 + j(\frac{\omega}{\pi})$  a  $x(t) = 2\cos(20\pi t)$ .

Resp:  $50\cos(20\pi t + 53^\circ)$ .

12 - Determinar a expressão da Função da Resposta em Frequência dum filtro passa baixo RC e esboçar a respectiva característica em função da frequência.

Resp:  $H(f) = \frac{1}{1+j\frac{f}{B}}$ , com  $B = \frac{1}{2\pi RC}$ ;  $|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{f}{B})^2}}$ ;  $\arg[H(f)] = -\arctg \frac{f}{B}$ .

13 - Se a resistência do filtro passa baixo representar uma fonte de Ruído Térmico à temperatura ambiente ( $T_0 = 290^\circ K$ ), determine:

a) A função de densidade espectral do ruído no Condensador.

b) A função de autocorrelação do ruído no Condensador.

c) A Potência e a tensão no condensador de  $0,1\mu F$ .

Resp: a)  $G_R = 2RKT$ ;  $G_c(f) = \frac{2RKT}{1+(\frac{f}{B})^2}$ . b)  $R_c(\tau) = \frac{kT}{C} e^{\frac{-|\tau|}{RC}}$ . c)  $R_c(0) = \frac{kT}{C} = \langle v^2 \rangle = 4 \times 10^{-14} V^2$  ( $0,2\mu V$ ), pois  $kT_0 = 4 \times 10^{-21}$  (Apesar de gerado por R, não depende do valor de R.)

14 - Compare as características de transferência da linha de transmissão ideal e do filtro Passa Baixo. - Qual a largura de banda de Ruído do Filtro Passa Baixo?

Resp:  $B_R = \int_0^\infty \frac{1^2}{1+(\frac{f}{B})^2} = \frac{\pi}{2} B = \frac{1}{4RC}$ .

### 1.3 Propagação Electromagnética

15 - Num sistema de transmissão por satélite geoestacionário (órbita a cerca de  $3,6 \times 10^4$  km da superfície da terra), caracterizado pelos seguinte parâmetros:

*Emissão:* Potência 60 dBm; Ganho da antena 80 dB; Banda  $6,427 \text{ GHz} \pm 2 \text{ MHz}$ .

*Retransmissão:* Ganho da antena receptora 30 dB; Ganho do Amplificador 80 dB; Ganho da antena emissora 30 dB.

*Recepção:* Ganho da antena 60 dB; Banda  $4,202 \text{ GHz} \pm 2 \text{ MHz}$ .

*Perdas de transmissão:*  $L = (\frac{4\pi}{\lambda} \cdot d)^2$  ou  $L_{dB} = 94.2 + 20\log(f_{GHz}) + 20\log(d_{Km})$ .

a) Calcular a Potência recebida.

b) Se a largura de banda do sistema for  $100 \text{ kHz}$ , qual a densidade espectral do ruído (branco) para obter, na recepção, uma relação Sinal Ruído de  $(\frac{S}{N}) = 10 \text{ dB}$ .

c) A que temperatura de ruído corresponde o valor da densidade espectral obtido? Comente.

Resp:  $(P_{dB} = 10\log_{10}\frac{P}{1W})$  a)  $-60 \text{ dBm}$  ( $10^{-6} \text{ mW}$  ou  $10^{-9} \text{ W}$ ); b)  $\eta = 10^{-19}$ ; c)  $73^\circ \text{ K}$ . Muito baixa. Tipicamente  $0,2T_0 < T < 10T_0$ , [ $60^\circ \text{ K} < T < 3000^\circ \text{ K}$ ]. O receptor terá de ser arrefecido!

16 - Num sistema de transmissão de 1 MHz de Largura de Banda, é constituído por um emissor com um ganho de 100 dB e um receptor com um ganho de 100 dB. Apresenta, igualmente perdas de transmissão 200 DB e densidade espectral de ruído  $\eta = 10^{-18} \text{ W/Hz}$ .

a) Qual a relação sinal ruído na recepção, quando a fonte na emissão for de 1 W.

b) Se, a meio da distância de transmissão, introduzir um repetidor com um ganho de 50 dB, reduzindo em igual valor o ganho do receptor, qual o novo valor da relação sinal ruído na recepção, para a mesma fonte emissora (1 W).

c) Se, a meio da distância de transmissão, introduzir um repetidor com um ganho de 50 dB, reduzindo em igual valor o ganho do emissor (em vez do do receptor), qual o novo valor da relação sinal ruído na recepção, para a mesma fonte emissora (1 W).

d) Que concluiu?

Resp: a)  $(\frac{S}{N}) = 20 \text{ dB}$ . b)  $(\frac{S}{N}) \leq 70 \text{ dB}$ . c)  $(\frac{S}{N}) \leq 20 \text{ dB}$ . d) O ganho do receptor não deve ser muito elevado (amplifica quer o sinal quer o ruído. É preferível introduzir repetidores intermediários, reduzindo o ganho dos receptores).

17 - Dado o vector de campo magnético  $\vec{H} = H_m e^{j(\omega t + \beta z)} \vec{u}_x$  no espaço livre, calcular o

vector do campo eléctrico.

$$\text{Resp: } \nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; j\beta H_m e^{j(wt+\beta z)} \cdot \vec{u}_y = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \vec{E} = \frac{\beta H_m}{\epsilon_0 w} e^{j(wt+\beta z)} \cdot \vec{u}_x$$

18 - Dado o vector de campo eléctrico  $\vec{E} = E_m \sin(wt - \beta z) \cdot \vec{u}_y$  no espaço livre, calcular o vector do campo magnético e representar, no instante  $t=0$ , os vectores  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  no espaço.

$$\text{Resp: } \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \beta E_m \cos(wt - \beta z) \cdot \vec{u}_x = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \vec{H} = -\frac{\beta E_m}{\mu_0 w} \sin(wt - \beta z) \cdot \vec{u}_x$$

19 - Mostrar que os vectores  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  do problema anterior constituem uma onda que se propaga no espaço na direcção  $\vec{u}_z$  e que a velocidade de propagação só depende das propriedades do espaço.

$$\text{Resp: } wt - \beta z = \text{const.} = wt_0 \text{ ou } z = \frac{w}{\beta}(t - t_0) = c(t - t_0);$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\beta^2 E_m}{\mu_0 w} \cos(wt - \beta z) \cdot \vec{u}_y = \epsilon_0 w E_m \cos(wt - \beta z) \cdot \vec{u}_y;$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{w^2}{\beta^2}; c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}; Z_0 = \sqrt{\frac{E}{H}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \Omega.$$

20 - Numa linha de transmissão o sinal de tensão (V) ou de corrente (I) à distância (d) do fim da linha pode ser calculada a partir da tensão ( $V_2$ ) e da corrente ( $I_2$ ) na carga (fim da linha) pelas expressões seguintes:

$$V = \frac{1}{2}(V_2 + Z_0 I_2)e^{\gamma d} + \frac{1}{2}(V_2 - Z_0 I_2)e^{-\gamma d}$$

$$I = \frac{1}{2Z_0}(V_2 + Z_0 I_2)e^{\gamma d} - \frac{1}{2Z_0}(V_2 - Z_0 I_2)e^{-\gamma d}$$

a) Calcular a tensão e a corrente no início da linha nas situações de circuito aberto ( $I_2 = 0$ ) e de curto-circuito ( $v_2 = 0$ ).

b) Nas situações anteriores (ca e cc), calcular a impedância  $Z = \frac{V}{I}$  de entrada (início) da linha.

$$\text{c) Mostrar que } Z_{ca} \times Z_{cc} = Z_0^2.$$

$$\text{d) Mostrar que no caso geral } Z = \frac{V}{I} = Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 \cdot \tanh \gamma d}{Z_0 + Z_2 \cdot \tanh \gamma d}.$$

$$\text{e) Calcule as Perdas na linha } (P = V_1 I_1^* - V_2 I_2^*).$$

$$\text{Resp: b) e c) } Z_{cc} = Z_0 \tanh \gamma d \text{ e } Z_{ca} = Z_0 \coth \gamma d$$

## 1.4 Modulações analógicas e digitais

21 - Considere o sinal modulador  $X_m(t) = k(3 \sin 3 \times 10^3 \pi t + 4 \cos 10^3 \pi t)$ .

a) Esboce a representação temporal de  $x_m$ .

b) Qual expressão da modulação em amplitude deste sinal.

c) Represente o espectro do sinal modulado.

d) Qual a potência associada à portadora e às sub-bandas laterais?

e) Se  $\mu = 1$  e  $f_p = 1\text{MHz}$ . Calcular K para que o sinal seja AM normalizado.

Resp: b)  $X_p(t) = A_p(1 + X_m(t))\cos(2\pi f_p t)$ ; d)  $S_T = \frac{1}{2}(A_p^2(1 + \mu^2 S_x)) = P_p + 2P_{sb}$ ;  $P_{sb} = \frac{1}{4}A_p^2\mu^2 S_x$ ; com  $S_x = \langle x^2(t) \rangle$ ; e)  $k(3 + 4) < 1$ .

22 - Um sinal normalizado  $x_m(t)$  com largura de banda de 15 kHz, é transmitido em modulação de amplitude, sem portadora, com a frequência de 1 MHz. Para uma potência de emissão de 1 W e 20 dB de perdas na transmissão, calcular:

a) A expressão do sinal modulado, na emissão e na recepção.

b) A Largura de Banda necessária para a transmissão do sinal, bem como os seus limites inferior e superior. Justifique.

c) Se a densidade espectral de ruído na recepção for  $\eta = 10^{-18}\text{W/Hz}$ , qual a relação sinal ruído. Justifique.

23 - Mensagens com largura de banda de  $10\text{kHz}$  são transmitidas em Frequência Modulada com  $f_p = 100\text{MHz}$ .

a) Quais as expressões dos sinais modulados  $f_\Delta = 100\text{Hz}$ ,  $10\text{kHz}$ ,  $100\text{kHz}$  e  $1\text{MHz}$ .

b) Nas condições anteriores, qual a Largura de banda necessária para transmitir o sinal modulado.

Resp: a)  $X_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + 2\pi \Delta \int_0^t x_m(\lambda) d\lambda)$ . Como  $x_m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ , então  $X_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + \frac{f_\Delta}{f_m} A_m \sin(2\pi f_m t))$ .

b)  $\Delta = \frac{f_\Delta}{W}$ ;  $B_T = 2(f_\Delta + 2W)$ , se  $2 < \Delta < 10$ .

$B_T = 2(f_\Delta + W) = 2(\Delta + 1)W$ , se  $1 \ll \Delta$  ou  $\Delta \ll 1$ .

$B_T = 2f_\Delta$ , se  $1 \ll \Delta$  e  $B_T = 2W$ , se  $\Delta \ll 1$

24 - Um sinal normalizado  $x_m(t)$  com largura de banda de 15 kHz, é transmitido em frequência modulada numa portadora de 10 MHz, num sistema com  $f_\Delta = 10\text{kHz}$ , potência da emissão de 1 W e 20 dB de perdas. Nestas circunstâncias, calcular:

a) A expressão do sinal modulado, na emissão e na recepção .

b) A Largura de Banda necessária para a transmissão do sinal, bem como os seus limites inferior e superior. Justifique.

c) Se a densidade espectral de ruído na recepção for  $\eta = 10^{-18}\text{W/Hz}$ , qual a relação sinal ruído. Justifique.

## 1.5 Codificação Digital da Informação

25 - Um sinal analógico com largura de banda inferior a 4 kHz é transmitido num sistema PCM. Para uma relação de sinal ruído superior a 50 dB, calcule o valores mínimos para a taxa de amostragem e o número de símbolos por amostra e o débito binário.

Resp: 8 kHz;  $(\frac{S}{N_d}) = 10 \log_{10}(3 \times 2^{2n} S_x) < 4.8 + 6n$  dB;  $n = 8$  bits; 64kbit/s.

26 - Num sistema PCM (polar) a 64 Kbit/s sujeito a ruído branco com densidade espectral de  $\eta = 1 \times 10^{-20}$ , qual a mínima potência do sinal para uma taxa de erro inferior a  $3 \times 10^{-10}$ .

Resp: Para  $P_e = 3 \times 10^{-10} = Q(\frac{A}{2\sigma})$ ,  $(\frac{A}{2\sigma}) \geq 6.2 = \sqrt{\frac{S}{N_d}}$ ;  $N_d = \eta B_R \leq \eta \frac{64 \times 10^3}{2}$ .

27 - Numa linha de transmissão digital com uma taxa de erro de  $10^{-6}$ , qual a probabilidade de existirem dois bits errados um dado octeto recebido?

Resp:  $P(2, 8) = (\frac{8!}{2!(8-2)!})(10^{-6})^2(1 - 10^{-6})^{8-2}$

28 - O quinto octeto do cabeçalho de uma célula ATM é gerado a partir dos quatro octetos anteriores pelo polinómio  $x^8 + x^2 + x + 1$ . Calcule o cabeçalho da célula, quando os 4 primeiros octetos são F0, F1, F2 e F3, respectivamente.

Resp: 11110000111100011111001011110011????????

29 - No problema anterior qual a capacidade de detecção e de correcção de erros?

Resp: Este código é capaz de corrigir erros simples e detectar erros múltiplos.

30 - Considere o código cíclico (7,4) gerado pelo polinómio  $1 + x + x^3$ .

a) Apresente a matriz geradora do código.

b) Qual a distância mínima deste código, bem com a respectiva capacidade de detecção e correcção. Justifique.

c) Se a informação assim codificada for transmitida num sistema que presente um taxa de erro de  $10^{-8}$ , qual a probabilidade de, numa palavra, serem recebidos 3 bits errados.

d) Nas condições anteriores, qual a probabilidade de uma palavra ser recebida sem erros.

e) Nas condições anteriores, qual a probabilidade de ser gerado um pedido de retransmissão?



31 - Considere que as palavras 0 0 1 0 1 1 0; 0 1 1 0 0 0 1; 1 0 0 0 1 0 1; 1 0 0 1 1 1 0; foram geradas por um código linear (7,4).

a) Calcule a matriz geradora desse código.

b) Qual a distância mínima do código, bem com a respectiva capacidade de detecção e correcção. Justifique.

32 - Um sinal normalizado  $x_m(t)$  com largura de banda de 15 kHz, é transmitido num canal com uma largura de banda de 75 kHz.

a) Para uma quantificação linear, qual o número de símbolos por amostra, para ter uma relação sinal ruído superior a 50 dB?

b) Qual o débito binário do sinal?

c) Como poderá ser transmitido este sinal neste canal? Qual o ritmo de transmissão (palavras por segundo)? Justifique.

33 - Num sistema de multiplexagem temporal, como controla a perda de informação provocada pela não sincronização dos canais afluentes?

Draft