1. Indique o domínio de cada uma das funções:

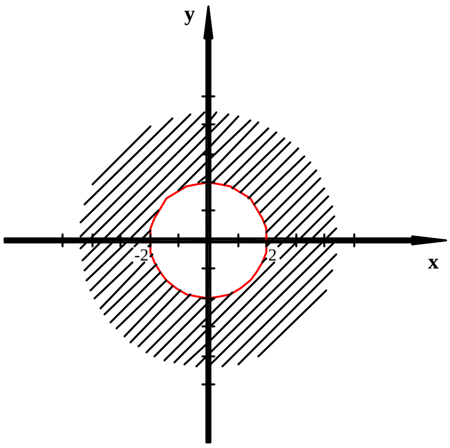
a) $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$

R:

$D_f=\{(x;y)\in\Re^2 : x^2+y^2-4\geq 0\}$

$x^2+y^2-4\geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\geq 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Parte exterior de uma circunferência $\begin{cases} centro \rightarrow (0;0) \\ raio \rightarrow \sqrt{4}=2 \end{cases}$



b) $f(x;y)=\ln(y-2x-6)$

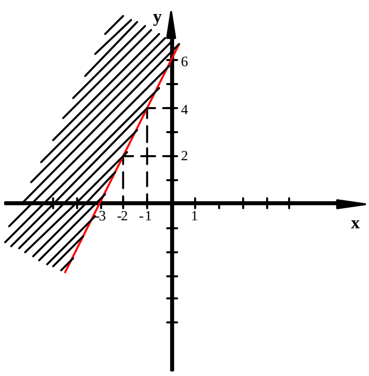
R:

$D_f=\{(x;y)\in\Re^2 : y-2x-6>0\}$

$y-2x-6>0 \Leftrightarrow y>2x+6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Parte superior de uma recta

x	y
-3	0
-2	2
-1	4
0	6



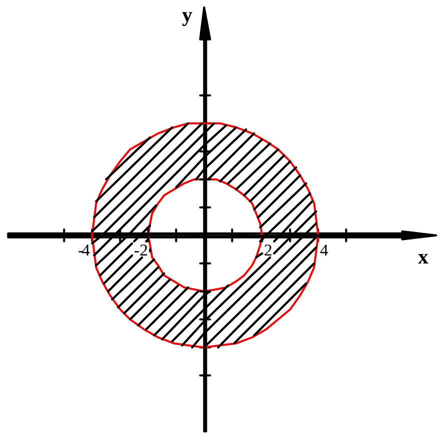
c) $f(x;y) = \ln\left(16 - x^2 - y^2\right) + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

R:

$$D_f = \left\{(x;y) \in \Re^2 : 16 - x^2 - y^2 > 0 \wedge x^2 + y^2 - 4 \geq 0\right\}$$

$$\begin{cases} 16 - x^2 - y^2 > 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Parte interior de uma circunferência } \begin{cases} \text{centro} \rightarrow (0;0) \\ raio \rightarrow \sqrt{16} = 4 \end{cases} \\ \\ \text{Parte exterior de uma circunferência } \begin{cases} centro \rightarrow (0;0) \\ raio \rightarrow \sqrt{4} = 2 \end{cases} \end{cases}$$



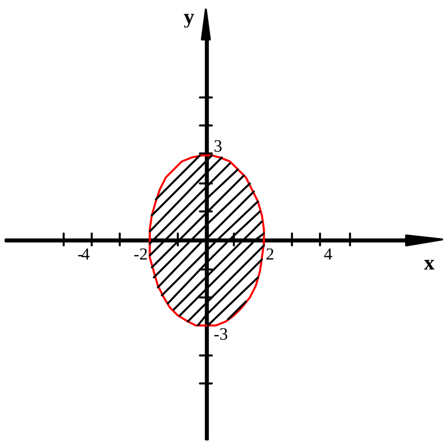
d) $f(x;y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$

R:

$$D_f = \left\{(x;y) \in \Re^2 : 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 0\right\}$$

$$1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Parte interior de uma elipse } \begin{cases} centro \rightarrow (0;0) \\ raio_x \rightarrow \sqrt{4} = 2 \\ raio_y \rightarrow \sqrt{9} = 3 \end{cases}$$



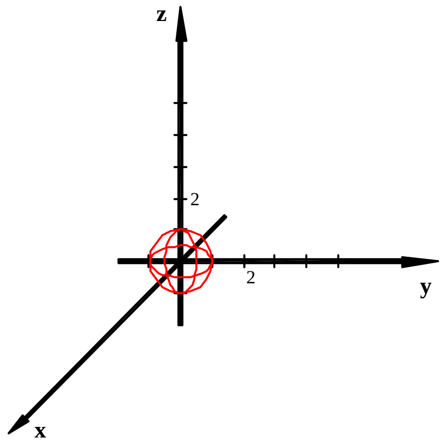
e) $f(x;y;z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

R:

$$D_f=\{(x;y;z)\in\Re^3:1-x^2-y^2-z^2\geq 0\}$$

$$1-x^2-y^2-z^2\geq 0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\leq 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Parte interior de uma esfera}\begin{cases}\text{centro}\rightarrow(0;0;0)\\ raio\rightarrow\sqrt{1}=1\end{cases}$$



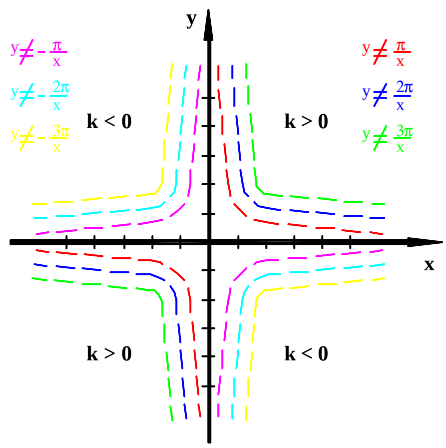
f) $f(x;y)=\dfrac{1}{sen(xy)}$

R:

$$D_f=\{(x;y)\in\Re^2:sen(xy)\neq 0\}$$

$$sen(xy)\neq 0\Rightarrow x\cdot y\neq k\cdot p\Leftrightarrow y\neq\frac{k\cdot p}{x}$$

k	y
-2	$-\dfrac{2\cdot p}{x}$
-1	$-\dfrac{p}{x}$
0	∞
1	$\dfrac{p}{x}$
2	$\dfrac{2\cdot p}{x}$



g) $f(x;y) = \ln\left[\left(x^2 - y\right) + \left(x^2 + y^2 - 4\right)\right]$

R:

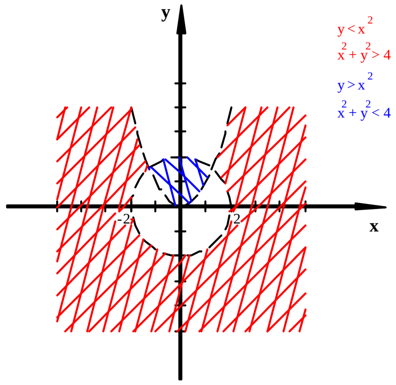
$$D_f = \left\{(x;y) \in \Re^2 : \left(x^2 - y\right) + \left(x^2 + y^2 - 4\right) > 0\right\}$$

$$\left(x^2 - y\right) + \left(x^2 + y^2 - 4\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \left(x^2 - y\right) > 0 \wedge \left(x^2 + y^2 - 4\right) > 0 \\ \left(x^2 - y\right) < 0 \wedge \left(x^2 + y^2 - 4\right) < 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y < x^2 \wedge \left(x^2 + y^2\right) > 4 \\ y > x^2 \wedge \left(x^2 + y^2\right) < 4 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} y = x^2 \Rightarrow \text{Parábola} \\ x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \text{Circunferência} \begin{Bmatrix} \text{centro} \rightarrow (0;0) \\ \text{raio} \rightarrow \sqrt{4} = 2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$



h) $f(x;y) = \sqrt{\left(x^2 + y^2 - 16\right) \cdot sen(x)}$

R:

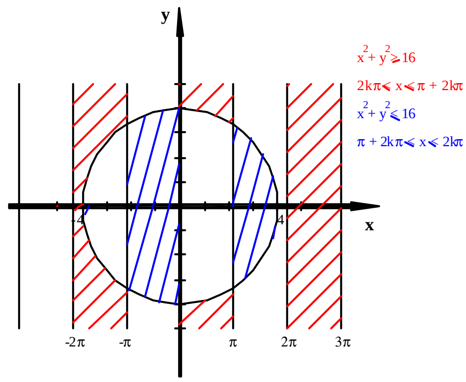
$$D_f = \left\{(x;y) \in \Re^2 : \left(x^2 + y^2 - 16\right) \cdot sen(x) \geq 0\right\}$$

$$\left(x^2 + y^2 - 16\right) \cdot sen(x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \left(x^2 + y^2 - 16\right) \geq 0 \wedge sen(x) \geq 0 \\ \left(x^2 + y^2 - 16\right) \leq 0 \wedge sen(x) \leq 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2 + y^2 \geq 16 \wedge 1^{\text{o}} \text{ ou } 2^{\text{o}} \text{ Quadrante} \\ x^2 + y^2 \leq 16 \wedge 3^{\text{o}} \text{ ou } 4^{\text{o}} \text{ Quadrante} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x^2 + y^2 \geq 16 \wedge 0 + 2kp \leq x \leq p + 2kp \\ x^2 + y^2 \leq 16 \wedge p + 2kp \leq x \leq 2kp \end{Bmatrix}$$



i) $f(x;y)=\ln(5x-x^2-6)+\ln(1-y^2)$

R:

$$D_f=\{(x;y)\in\Re^2:(5x-x^2-6)>0\vee(1-y^2)>0\}$$

$(5x-x^2-6)>0\wedge(1-y^2)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(5x-x^2-6)>0\wedge y^2<1$[1]$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-2)\cdot(x-3)<0\wedge y^2-1<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-2)\cdot(x-3)<0\wedge(y-1)\cdot(y+1)<0$

Assim sendo teremos que:

$$D_f=\{(x;y)\in\Re^2:2\le x\le 3\wedge -1\le y\le 1\}$$

		2		3	
$x-2$	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
P	+	0	-	0	+

		-1		1	
$y-1$	-	-	-	0	+
$y+1$	-	0	+	+	+
P	+	0	-	0	+

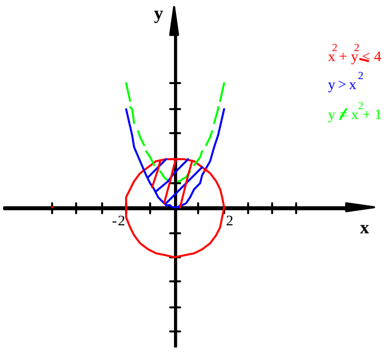
j) $f(x;y)=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(y-x^2)}$

R:

$$D_f=\left\{\begin{array}{l}(x;y)\in\Re^2:(4-x^2-y^2)\ge 0\wedge\ln(y-x^2)\ne 0\\ \wedge(y-x^2)>0\end{array}\right\}$$

$x^2+y^2\le 4\wedge y-x^2\ne e^0\wedge y>x^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2\le 4\wedge y\ne x^2+1\wedge y>x^2$



[1] Sabendo que a fórmula resolvente para uma equação do 2º grau: $ax^2+bx+c=0$ é dada por: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$ então para a equação: $(-x^2+5x-6)=0$ teremos as seguintes raízes calculadas pela fórmula resolvente: $x=3\vee x=2$

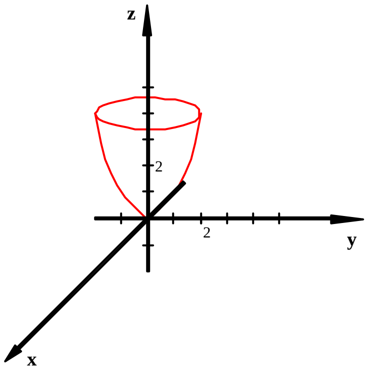
2. Represente geometricamente cada uma das seguintes funções:

a) $f(x;y) = x^2 + y^2$

R:

$f(x;y) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = x^2 + y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Parabolóide

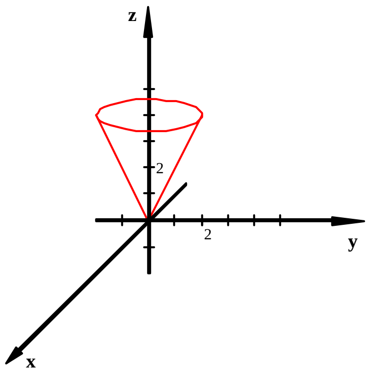


b) $f(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

R:

$f(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \Leftrightarrow z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$ Cone

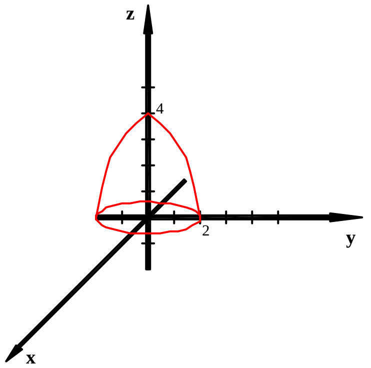


c) $f(x;y)=4-x^2-y^2$

R:

$f(x;y)=4-x^2-y^2 \Leftrightarrow z=4-x^2-y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=4-(x^2+y^2) \Rightarrow$ Parabolóide



d) $f(x;y)=x+y$

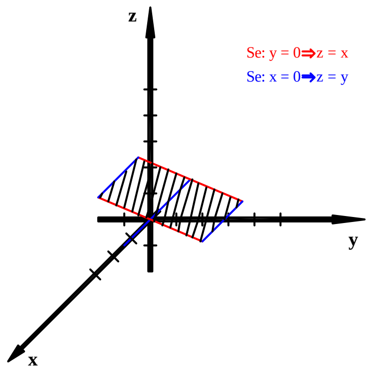
R:

$f(x;y)=x+y \Leftrightarrow z=x+y \Rightarrow$ Plano

Se: $y=0 \Rightarrow XOZ \Leftrightarrow z=x$

Se: $x=0 \Rightarrow YOZ \Leftrightarrow z=y$

y = 0		x = 0	
x	**z**	**y**	**z**
-1	-1	-1	-1
0	0	0	0
1	1	1	1



3. **Considere o gráfico da função $f(x;y) = x^2 + y^2$. Represente geometricamente a intersecção do gráfico de f com:**

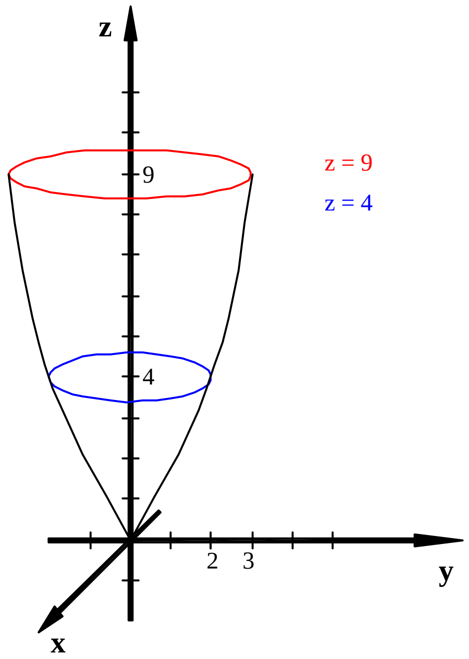
a) O plano Z = 4.

R:

$f(x;y) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = x^2 + y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Circunferência} \begin{cases} centro \to (0;0) \\ raio \to \sqrt{4} = 2 \end{cases}$



b) O plano Z = 9.

R:

$f(x;y) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 = x^2 + y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Circunferência} \begin{cases} centro \to (0;0) \\ raio \to \sqrt{9} = 3 \end{cases}$

4. **Qual a projecção do gráfico da função f referida na alínea 1.a) sobre o plano XOY?**

R:

A projecção é uma circunferência de centro (0;0) e raio igual a $\sqrt{4} = 2$.

5. Averigúe a forma das curvas de nível das funções:

a) $f(x;y) = x^2 + y^2 - 1$

R:

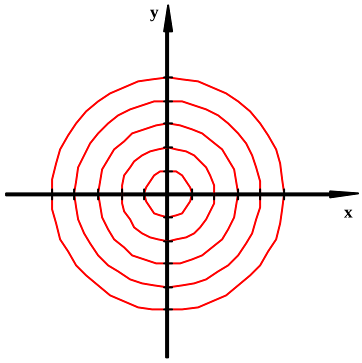
$f(x;y) = k \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = k + 1$

Se: $k = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \rightarrow$ Ponto (0;0);

Se: $k < -1 \Rightarrow x^2 + y^2 < 0 \rightarrow$ Impossível;

Se: $k > -1 \Rightarrow x^2 + y^2 > 0 \rightarrow$ Circunf. $\begin{cases} centro \rightarrow (0;0) \\ raio \rightarrow \sqrt{k+1} \end{cases}$



b) $f(x;y) = x + y^2$

R:

$f(x;y) = k \Leftrightarrow x + y^2 = k \Leftrightarrow$

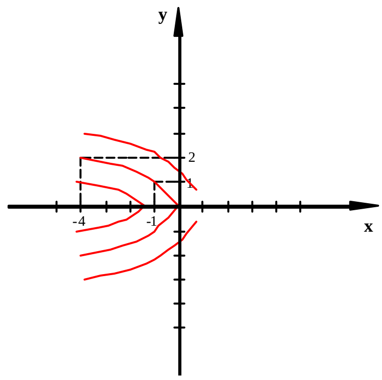
$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{k - x}$

Se: $k = x \Rightarrow y = 0 \rightarrow$ Ponto (0;0);

Se: $k < x \Rightarrow y = \pm\sqrt{k - x} < 0 \rightarrow$ Impossível;

Se: $k > x \Rightarrow y = \pm\sqrt{k - x} > 0 \rightarrow$ Parábola.

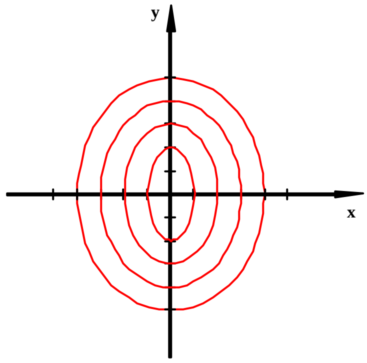
k = 0 e x	y
-4	2
-1	1
0	0



c) $f(x;y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$

R:

$f(x;y)=k \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=k$



Se: $k=0 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=0 \rightarrow$ Ponto (0;0);

Se: $k<0 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<0 \rightarrow$ Impossível;

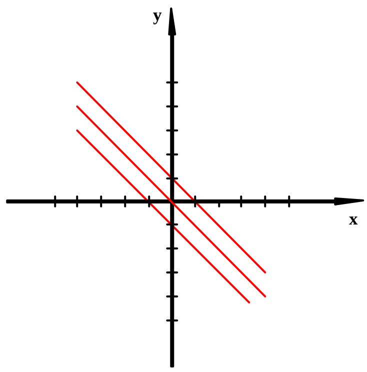
Se: $k>0 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}>0 \Rightarrow \frac{x^2}{4k}+\frac{y^2}{9k}=\frac{k}{k} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2\sqrt{k}}\right)^2+\left(\frac{y}{3\sqrt{k}}\right)^2=1 \rightarrow$ Elipse $\begin{cases} OX \rightarrow \pm 2\sqrt{k} \\ OY \rightarrow \pm 3\sqrt{k} \end{cases}$

d) $f(x;y)=x+y$

R:

$f(x;y)=k \Leftrightarrow x+y=k$



Se: $k=0 \Rightarrow x+y=0 \rightarrow$ Ponto (0;0);

Se: $k<0 \Rightarrow x+y<0 \rightarrow$ Impossível;

Se: $k>0 \Rightarrow x+y>0 \rightarrow$ Recta: $y=-x+k$

6. Estude a existência de limite das seguintes funções, nos pontos indicados:

a) $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$

R:

1º Passo: Determinação dos limites iterados:

- $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^2\cdot 0}{x^4+0^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{0}{x^4}\right)=\lim_{x\to 0}(0)=0$
- $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\dfrac{2\cdot 0^2\cdot y}{0^4+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\dfrac{0}{y^2}\right)=\lim_{y\to 0}(0)=0$

Apesar dos limites iterados serem iguais, ainda nada se pode concluir, pelo que teremos que prosseguir com a resolução:

2º Passo: Aproximação a uma recta $y=m\cdot x$:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{2x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\cdot(m\cdot x)}{x^4+(m\cdot x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot m\cdot x^3}{x^4+m^2\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(2\cdot m\cdot x)}{x^2\cdot(x^2+m^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2\cdot m\cdot x)}{(x^2+m^2)}=\frac{(2\cdot m\cdot 0)}{(0^2+m^2)}=\frac{0}{(m^2)}=0$$

Apesar deste limite ser igual aos limites iterados, continuamos a não poder concluir nada, pelo que teremos que prosseguir com a resolução:

3º Passo: Aproximação a uma parábola $y=k\cdot x^2$:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{2x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\cdot(k\cdot x^2)}{x^4+(k\cdot x^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot k\cdot x^4}{x^4+k^2\cdot x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\cdot(2\cdot k)}{x^4\cdot(1+k^2)}=$$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{(2\cdot k)}{(1+k^2)}=\dfrac{(2\cdot k)}{(1+k^2)}\Rightarrow$ Como depende de k então podemos concluir que a função não tem limite.

b) $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{2x-y}{x+3y}$

R:

1º Passo: Determinação dos limites iterados:

- $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{2x-y}{x+3y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-0}{x+3\cdot 0}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(2) = 2$

- $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{2x-y}{x+3y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{2\cdot 0-y}{0+3y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{-y}{3y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

Como os limites iterados são diferentes, então pode concluir-se que a função não tem limite.

c) [2] $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{e^{\left(3x^2+3y^2\right)}-1}{8x^2+8y^2}$

R:

1º Passo: Re-arranjo da função:

$$\frac{e^{\left(3x^2+3y^2\right)}-1}{8x^2+8y^2} = \frac{e^{\left(3x^2+3y^2\right)}-1}{8\cdot\left(x^2+y^2\right)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{e^{\left(3x^2+3y^2\right)}-1}{\left(x^2+y^2\right)} = \frac{1}{8}\cdot 3\cdot\frac{e^{\left(3x^2+3y^2\right)}-1}{3\cdot\left(x^2+y^2\right)} = \frac{3}{8}\cdot\frac{e^{\left(3x^2+3y^2\right)}-1}{\left(3x^2+3y^2\right)}$$

Feito isto, segue-se a determinação do valor do limite:

2º Passo: Determinação do limite:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{3}{8}\cdot\frac{e^{\left(3x^2+3y^2\right)}-1}{\left(3x^2+3y^2\right)} = \frac{3}{8}\cdot\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{e^{\left(3x^2+3y^2\right)}-1}{\left(3x^2+3y^2\right)} = \frac{3}{8}\cdot 1 = \frac{3}{8}$$

Assim sendo este seria o limite da função.

---

[2] É conhecido o seguinte limite: $\lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$. Isto implica que se terão que proceder a re-arranjos na função dada de modo a adoptar a forma apresentada neste limite.

d) $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

R:

1º Passo: Determinação dos limites iterados:

- $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}(1)=1$
- $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0^2-y^2}{0^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{-y^2}{y^2}\right)=\lim_{y\to 0}(-1)=-1$

Como os limites iterados são diferentes, então pode concluir-se que a função não tem limite.

e) [3] $\lim_{(x;y)\to(0;0)} (x^2+y^2)\cdot sen\left(\frac{1}{xy}\right)$

R:

1º Passo: Determinação do limite:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}(x^2+y^2)\cdot sen\left(\frac{1}{xy}\right)=\lim_{(x;y)\to(0;0)}(0^2+0^2)\cdot sen\left(\frac{1}{xy}\right)=\lim_{(x;y)\to(0;0)}0\cdot sen\left(\frac{1}{xy}\right)=$$

$$=\lim_{(x;y)\to(0;0)}0=0$$

Assim sendo este seria o limite da função.

[3] É sabido que a multiplicação de zero por qualquer variável limitada resulta no valor zero, logo substituindo parcialmente o valor zero na função poderemos aplicar este princípio determinando assim directamente o limite da função, sabendo que: $-1\leq sen(u)\leq 1$

f) [4] $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{sen\left(\sqrt{9x^2+9y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

R:

1º Passo: Re-arranjo da função:

$$\frac{sen\left(\sqrt{9x^2+9y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{sen\left(\sqrt{9\cdot\left(x^2+y^2\right)}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{sen\left(3\cdot\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\cdot\frac{sen\left(3\cdot\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\right)}{3\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$$

Feito isto, segue-se a determinação do valor do limite:

2º Passo: Determinação do limite:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} 3\cdot\frac{sen\left(3\cdot\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\right)}{3\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = 3\cdot\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{sen\left(3\cdot\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\right)}{3\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = 3\cdot 1 = 3$$

Assim sendo este seria o limite da função.

[4] É conhecido o seguinte limite: $\lim_{u\to 0}\frac{sen(u)}{u} = 1$. Isto implica que se terão que proceder a re-arranjos na função dada de modo a adoptar a forma apresentada neste limite.

7. Mostre que:

a) $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$

R:

Como se pede para mostrar que o valor do limite é o valor dado então, temos que recorrer directamente à definição de limite:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in D_f \wedge 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<d \Rightarrow |f(x;y)-L|<e$$

Assim sendo teremos então por equivalência directa o seguinte:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in \Re^2 \setminus \{(0;0)\} \wedge 0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<d \Rightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in \Re^2 \setminus \{(0;0)\} \wedge \sqrt{x^2+y^2}<d \Rightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right|<e$$

Logo:

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|3x^2y|}{|x^2+y^2|} = \frac{3\cdot|x|^2\cdot|y|}{x^2+y^2} = ¤$$

Sabendo que: $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ e que: $|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$. Então teremos por substituição que:

$$¤ = \frac{3\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} \leq \frac{3\cdot(x^2+y^2)\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} \leq 3\cdot\sqrt{x^2+y^2} \leq ?$$

Sabendo da definição que: $\sqrt{x^2 + y^2} < d$, então teremos por substituição que:

$? \leq 3 \cdot d < e \Rightarrow d < \frac{e}{3} \Rightarrow$ Está então verificado que o limite da função é zero.

b) $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{4x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

R:

Como se pede para mostrar que o valor do limite é o valor dado então, temos que recorrer directamente à definição de limite:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0} : (x;y) \in D_f \wedge 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < d \Rightarrow \left| f(x;y) - L \right| < e$$

Assim sendo teremos então por equivalência directa o seguinte:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0} : (x;y) \in \Re^2 \setminus \{(0;0)\} \wedge 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < d \Rightarrow \left| \frac{4x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall_{e>0}\exists_{d>0} : (x;y) \in \Re^2 \setminus \{(0;0)\} \wedge \sqrt{x^2 + y^2} < d \Rightarrow \left| \frac{4x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| < e$$

Logo:

$$\left| \frac{4x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{\left|4x^3\right|}{\left|\sqrt{x^2 + y^2}\right|} = \frac{4 \cdot |x|^2 \cdot |x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = ¤$$

Sabendo que: $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Então teremos por substituição que:

$$¤ = \frac{4 \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 4 \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \leq ?$$

Sabendo da definição que: $\sqrt{x^2+y^2}<d$, então teremos por substituição que:

$? \leq 4\cdot d^2 < e \Rightarrow d < \sqrt{\frac{e}{4}} \Rightarrow$ Está então verificado que o limite da função é zero.

c) $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

R:

Como se pede para mostrar que o valor do limite é o valor dado então, temos que recorrer directamente à definição de limite:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in D_f \wedge 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<d \Rightarrow |f(x;y)-L|<e$$

Assim sendo teremos então por equivalência directa o seguinte:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in \Re^2\setminus\{(0;0)\}\wedge 0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<d \Rightarrow \left|\frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in \Re^2\setminus\{(0;0)\}\wedge \sqrt{x^2+y^2}<d \Rightarrow \left|\frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|<e$$

Logo:

$$\left|\frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|2x^2-3y^2|}{\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|} \leq \frac{|2x^2+3y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq^{5} \frac{|3\cdot(x^2+y^2)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3\cdot(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 3\cdot(x^2+y^2)^{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= 3\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = ?$$

[5] Este passo é válido porque: $2x^2+3y^2 \leq 3x^2+3y^2$ é verdade.

Sabendo da definição que: $\sqrt{x^2 + y^2} < d$, então teremos por substituição que:

$? \leq 3 \cdot d < e \Rightarrow d < \frac{e}{3} \Rightarrow$ Está então verificado que o limite da função é zero.

8. Estude a continuidade das seguintes funções:

a) $\mathrm{f}(x;\, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{5x^2 - y^2} & \text{se}: (x;\, y) \neq (0;0) \\ 1 & \text{se}: (x;\, y) = (0;0) \end{cases}$

R:

Antes de mais vamos começar por determinar o domínio da função:

$$D_f = \left\{(x;y) \in \Re^2 : 5x^2 - y^2 \neq 0\right\} \Leftrightarrow D_f = \left\{(x;y) \in \Re^2 : y \neq \sqrt{5} \cdot x\right\}$$

Atendendo agora à continuidade da função no ponto $(0;0)$, uma vez que o enunciado afirma que a função toma o valor 1 quando $(x;y) = (0;0)$, teremos que verificar o seguinte:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{2xy}{5x^2 - y^2} = 1$$

Observando atentamente o limite anteriormente referido, facilmente se conclui que a aplicação directa da definição de limite será bastante trabalhosa e complicada.

Assim sendo, será desejável enveredar por um outro caminho que permita provar se o limite da função é igual a 1, por exemplo, recorrer aos limites iterados e verificar se estes são iguais a 1.

Caso isso não aconteça então não existe limite para esta função.

Assim sendo os limites iterados serão os seguintes:

- $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{5x^2-y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x\cdot 0}{5x^2-0^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{5x^2}\right)=\lim_{x\to 0}(0)=0$
- $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{5x^2-y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{2\cdot 0\cdot y}{5\cdot 0^2-y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{-y^2}\right)=\lim_{y\to 0}(0)=0$

Como os limites iterados para esta função são iguais a zero (e portanto diferentes de 1), então isto implica que o limite a existir teria que ser igual a zero, o que significa que a função não tem limite.

Conclusão: A função é contínua no seu domínio porque se trata do quociente de duas funções polinomiais também elas continuas.

b) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{5x-y} & \text{se}: (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se}: (x;y)=(0;0)\end{cases}$

R:

Antes de mais vamos começar por determinar o domínio da função:

$D_f=\{\Re^2\}$

Atendendo agora à continuidade da função no ponto $(0;0)$, uma vez que o enunciado afirma que a função toma o valor 0 quando $(x;y)=(0;0)$, teremos que verificar o seguinte:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x+y}{5x-y}=0$$

Observando atentamente o limite anteriormente referido, facilmente se conclui que a aplicação directa da definição de limite será bastante trabalhosa e complicada.

Assim sendo, será desejável enveredar por um outro caminho que permita provar se o limite da função é igual a 0, por exemplo, recorrer aos limites iterados e verificar se estes são iguais a 0.

Caso isso não aconteça então não existe limite para esta função.

Assim sendo os limites iterados serão os seguintes:

- $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\dfrac{x+y}{5x-y}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x+0}{5x-0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{5x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{5}$
- $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\dfrac{x+y}{5x-y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\dfrac{0+y}{5\cdot 0-y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\dfrac{y}{-y}\right)=\lim_{y\to 0}(-1)=-1$

Como os limites iterados para esta função são diferentes (e também diferentes de 0), então isto implica que o limite a existir teria que ser igual a $1/5$, o que significa que a função não tem limite.

Conclusão: A função é contínua no seu domínio porque se trata do quociente de duas funções polinomiais também elas continuas.

c) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{7x^2y}{x^2+y^2} & \text{se: } (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se: } (x;y)=(0;0)\end{cases}$

R:

Antes de mais vamos começar por determinar o domínio da função:

$D_f=\{\Re^2\}$

Atendendo agora à continuidade da função no ponto $(0;0)$, uma vez que o enunciado afirma que a função toma o valor 0 quando $(x;y)=(0;0)$, teremos que verificar o seguinte:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{7x^2y}{x^2+y^2}=0$$

Pela definição de limite teremos que:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in\Re^2 \wedge 0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<d \Rightarrow \left|\frac{7x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in\Re^2 \wedge \sqrt{x^2+y^2}<d \Rightarrow \left|\frac{7x^2y}{x^2+y^2}\right|<e$$

Logo:

$$\left|\frac{7x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|7x^2y|}{|x^2+y^2|} \le \frac{|7x^2y|}{x^2+y^2} \le \frac{7\cdot|x|^2\cdot|y|}{(x^2+y^2)} = ¤$$

Sabendo que: $|x|\le\sqrt{x^2+y^2}$ e que: $|y|\le\sqrt{x^2+y^2}$. Então teremos por substituição que:

$$¤ = \frac{7\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} \le 7\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \le ?$$

Sabendo da definição que: $\sqrt{x^2+y^2}<d$, então teremos por substituição que:

$? \le 7\cdot d < e \Rightarrow d < \frac{e}{7} \Rightarrow$ Está então verificado que o limite da função é zero.

Conclusão: O limite existe logo a função é contínua no seu domínio porque se trata do quociente de duas funções polinomiais também elas continuas.

d) $\mathrm{f}(\mathrm{x};\,\mathrm{y}) = \begin{cases} x^2 + \mathrm{y}^2 & \mathrm{se}: x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 & \mathrm{se}:\ x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$

R:

Antes de mais vamos começar por determinar o domínio da função:

$$D_f = \{\Re^2\}$$

Atendendo a que: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \to 1^- \\ x^2 + y^2 > 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \to 1^+ \end{cases}$ Então teremos que:

$\underbrace{\lim_{(x^2+y^2)\to 1^-} f(x;y)}_{\text{Pontos interiores à circunferência}} = \underbrace{\lim_{(x^2+y^2)\to 1^+} f(x;y)}_{\text{Pontos exteriores à circunferência}} \Leftrightarrow 1 = 0 \Rightarrow$ Esta proposição é falsa, logo o limite não existe.

Conclusão: A função é contínua no seu domínio.

e) $\mathrm{f}(\mathrm{x};\,\mathrm{y}) = \begin{cases} \dfrac{sen(7x^2 + 7\mathrm{y}^2)}{\mathrm{x}^2 + y^2} & \mathrm{se}: x^2 + y^2 \ne 0 \\ 7 & \mathrm{se}:\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

R:

Antes de mais vamos começar por determinar o domínio da função:

$$D_f = \{\Re^2\}$$

Atendendo agora à continuidade da função no ponto $(0;0)$, uma vez que o enunciado afirma que a função toma o valor 7 quando $x^2 + y^2 = 0$, teremos que verificar o seguinte:

$$\lim_{(x;\,y)\to(0;0)} \frac{sen(7x^2 + 7y^2)}{x^2 + y^2} = 7$$

É sabido que: $\lim_{u \to o} \frac{sen(u)}{u} = 1$, ora se observarmos atentamente o limite em causa e o re-arranjarmos teremos o seguinte:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{sen\left(7x^2+7y^2\right)}{x^2+y^2} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{sen\left[7\cdot\left(x^2+y^2\right)\right]}{x^2+y^2} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} 7\cdot\frac{sen\left[7\cdot\left(x^2+y^2\right)\right]}{7\cdot\left(x^2+y^2\right)} =$$

$$= 7\cdot\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{sen\left[7\cdot\left(x^2+y^2\right)\right]}{7\cdot\left(x^2+y^2\right)} = 7\cdot 1 = 7$$

Conclusão: O limite existe logo a função é contínua no seu domínio porque se trata do quociente de duas funções polinomiais também elas continuas.