Métodos Matemáticos I

Capítulo 6
Séries de Potências

2006/2007

Definição

Uma série de potências de $x - a$ é uma série da forma

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n.$$

Uma série de potências de $x - a$ é sempre convergente para $x = a$.

De facto, quando $x = a$, obtemos a série numérica $a_0 + 0 + 0 + \ldots$, cuja soma é $a_0 \in \mathbb{R}$.

Exemplos de séries de potências

- $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ é uma série de potências em que $a_n = 1$ e $a = 0$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n(x-3)^n$ é uma série de potências em que $a_n = 2^n$ e $a = 3$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{k!}$ é uma série de potências em que $a_n = \frac{1}{k!}$ e $a = 2$

Será que existem outros valores de x, diferentes de a para os quais a série de potências acima definida é convergente ?

Teorema de Abel - séries de potências de $x - a$

Dada a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, apenas uma das seguintes situações se verifica:

1. a série converge apenas para $x = a$;
2. a série converge absolutamente (e por isso converge) para todos os valores reais de x;
3. existe um número real R (chamado raio de convergência) tal que a série converge absolutamente para todos os valores de x para os quais $|x-a| < R$, e diverge para todos os valores de x para os quais $|x-a| > R$.

No teorema anterior, quando se verifica o 1º caso tem-se $R = 0$ e quando se verifica o 2º caso tem-se $R = +\infty$.

Definição

Chama-se intervalo de convergência da série de potências ao conjunto de todos os valores para os quais a série converge.

Vejamos agora como determinar o raio de convergência de uma série de potências de termos não nulos.

Teorema

O raio de convergência de uma série de potências da form $a_n(x-a)^n$ é dado por:

- $R = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$, desde que o limite exista ou seja $+\infty$.
  ou
- $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, desde que o limite exista ou seja $+\infty$.

Além disso,

1. se $R = 0$ a série converge para $x = a$;
2. se $R = +\infty$ então a série converge $\forall x \in \mathbb{R}$
3. se $R \in]0, +\infty[$ então a série converge pelo menos para todos os valores de $x \in]a - R, a + R[$.

Exemplo

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Resolução:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1/n!}{1/(n+1)!}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = +\infty$$

Como o raio de convergência é $+\infty$ a série dada converge $\forall x \in \mathbb{R}$

Exemplo

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$

Resolução:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$$

Como o raio de convergência é 0 a série dada converge apenas para $x = 0$.

Exemplo

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-5)^n}{n^2}$

Resolução:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1/n^2}{1/(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = 1$$

Como o raio de convergência é 1 a série dada converge pelo menos para $x \in]5-1, 5+1[=]4, 6[$.

Continuação da Resolução

Nos pontos terminais $x = 4$ e $x = 6$ é necessário analisar separadamente. Para $x = 4$ a série vem

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

que é uma série absolutamente convergente (justificar!) e por isso é convergente. Para $x = 6$ a série vem

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

que é uma série de Dirichlet com $p = 2$ e por isso é convergente. Assim o intervalo de convergência é $[4, 6]$.