2.4 Funções diferenciáveis e diferenciais

2.4.1 Funções diferenciáveis

Definição 2.1. Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $(a_1, \ldots, a_n)$ um ponto interior de D. A função f diz-se **diferenciável** em $(a_1, \ldots, a_n)$ se existem as derivadas parciais $f_{x_1}(a_1, \ldots, a_n)$,..., $f_{x_n}(a_1, \ldots, a_n)$ e

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(a_1,\ldots,a_n)} \frac{E(x_1, \ldots, x_n)}{\|(x_1, \ldots, x_n) - (a_1, \ldots, a_n)\|} = 0,$$

onde $E(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - L(x_1, \ldots, x_n)$ denota o erro da aproximação linear $L(x_1, \ldots, x_n)$ a $f(a_1, \ldots, a_n)$,

$$L(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + (x_1 - a_1)m_1 + \cdots + (x_n - a_n)m_n.$$

Se f é diferenciável em $(a_1, \ldots, a_n)$ então $L(x_1, \ldots, x_n)$ diz-se **aproximação linear local** para f em $(a_1, \ldots, a_n)$.

Definição 2.2 (Caso $n = 2$)**.** Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e (a, b) um ponto interior de D. A função f diz-se **diferenciável** em (a, b) se

1. existem $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$, e

2. $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{E(x, y)}{\|(x - a, y - b)\|} = 0,$$

   onde $E(x, y) = f(x, y) - L(x, y)$ denota o erro da aproximação linear $L(x, y)$ a $f(a, b)$,
   $$L(x, y) = f(a, b) + (x - a)f_x(a, b) + (y - b)f_y(a, b).$$

Se f é diferenciável em (a, b) então $L(x, y)$ diz-se **aproximação linear local** para f em (a, b).

Exemplo 2.3. 1. Mostra-se, usando a definição, que a função $f(x, y) = x^2 + xy$ é diferenciável em todo o ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

As derivadas parciais de f são $f_x(x, y) = 2x + y$ e $f_y(x, y) = x$. Além disso, tomando $\Delta x = x - a$ e $\Delta y = y - b$ temos

$$L(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(a, b)+f_x(a, b)\Delta x+f_y(a, b)\Delta y = a^2+ab+(2a+b)\Delta x+a\Delta y.$$

Então

$$\begin{aligned} E(x, y) &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - L(a + \Delta x, b + \Delta y) \\ &= (a + \Delta x)^2 + (a + \Delta x)(b + \Delta y) - (a^2 + ab + (2a + b)\Delta x + a\Delta y) \\ &= (\Delta x)^2 + \Delta x\Delta y. \end{aligned}$$

Ora,

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{((\Delta x)^2+\Delta x\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}(\Delta x+\Delta y) = 0,$$

pois a função $g(\Delta x,\Delta y) = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ (de domínio $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$) é limitada e $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}(\Delta x+\Delta y) = 0$. Portanto, a função f é diferenciável em (a,b).

2. Mostra-se, usando a definição, que a função $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Definição 2.4. Uma função f é **diferenciável num aberto** A se é diferenciável em todos os pontos de A.

Observação 2.5. Seja $f : D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto interior (a,b) de D. Então existe uma bola $B((a,b),r)$ tal que, para todo o ponto $(x,y)\in B((a,b),r)$,

$$f(x,y)\sim L(x,y) = f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b),$$

de forma que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{E(x,y)}{\|(x-a,y-b)\|} = 0.$$

Portanto, o plano de equação

$$z = f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b),$$

dito plano tangente à superfície $z=f(x,y)$, "identifica-se"com a superfície numa vizinhança do ponto $(a,b,f(a,b))$.

Proposição 2.6. Sejam f e g funções diferenciáveis num aberto A.

1. As funções $f+g$ e fg são diferenciáveis em A.

2. Se g nunca se anula em A, então f/g é diferenciável em A.

Exemplos 2.7. As funções polinomiais são diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$. As funções racionais são diferenciáveis no seu domínio.

Proposição 2.8. (Condição suficiente para que uma função seja diferenciável)
Sejam $f : D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ uma função e $(a_1,\ldots,a_n)$ um ponto interior de D. Se existe $r>0$ tal que as derivadas parciais f_{x_i} $(i=1,\ldots,n)$ estão definidas em $B((a_1,\ldots,a_n),r)$ e são contínuas em $(a_1,\ldots,a_n)$ então f é diferenciável em $(a_1,\ldots,a_n)$.

Exemplos 2.9. 1. Seja $f(x,y,z) = x^2 \sin(x+y+z) - y^3 z$ uma função de domínio $\mathbb{R}^3$. As derivadas parciais de f,

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 2x\sin(x+y+z) + x^2\cos(x+y+z), \\ f_y(x,y,z) &= x^2\cos(x+y+z) - 3y^2 z, \\ f_z(x,y,z) &= x^2\cos(x+y+z) - y^3 \end{aligned}$$

são contínuas em $\mathbb{R}^3$. Pela condição suficiente de diferenciabilidade de uma função, f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$.

2. Seja $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{se } x \neq 0, \\ y^4 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Usando a definição, podemos mostrar que esta função é diferenciável em $(0,0)$.

   A função f tem derivadas parciais $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$. No entanto, f não admite derivada parcial de 1ª ordem relativamente a x nos pontos da forma $(0,y)$ com $y \neq -1, 0, 1$ e, por isso, não podemos usar a condição suficiente de diferenciabilidade de uma função.

Observação 2.10. O exemplo 2. anterior mostra que uma função pode ser f diferenciável num ponto P_0 e uma derivada parcial não existir em alguns pontos de qualquer bola aberta centrada em P_0.

Proposição 2.11. (Condição necessária para que uma função seja diferenciável) Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e seja $(a_1,\ldots,a_n)$ um ponto interior de D. Se f é diferenciável em $(a_1,\ldots,a_n)$ então f é contínua em $(a_1,\ldots,a_n)$.

Observação 2.12. Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável num ponto (a,b) então existem as derivadas parciais $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$. No entanto, a existência dessas derivadas parciais não basta para garantir a diferenciabilidade de f em (a,b), como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 2.13. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ 1, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \end{cases}$.

Tem-se $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$. Por outro lado, não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Portanto f não é contínua em $(0,0)$. Pela condição necessária de diferenciabilidade, f não é diferenciável em $(0,0)$.

2.4.2 Diferencial (total) de uma função

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $(a_1,\ldots,a_n)$. Sejam $dx_i = \Delta x_i = x_i - a_i$. Chama-se **diferencial (total)** df em $(a_1,\ldots,a_n))$ a

$$dz = df(a_1,\ldots,a_n) = f_{x_1}(a_1,\ldots,a_n)dx_1 + \cdots + f_{x_n}(a_1,\ldots,a_n)dx_n.$$

Seja $\Delta z = f(a_1+\Delta x_1,\ldots,a_n+\Delta x_n) - f(a_1,\ldots,a_n)$. Como

$$E(a_1+\Delta x_1,\ldots,a_n+\Delta x_n) = |\Delta z - dz|$$

e

$$\lim_{(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)\to(0,\ldots,0)} \frac{E(a_1+\Delta x_1,\ldots,a_n+\Delta x_n)}{\|(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)\|}=0,$$

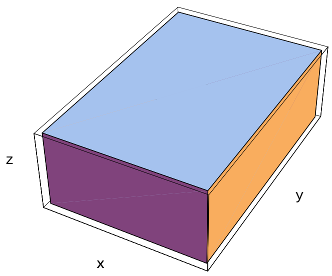
então dz é uma boa aproximação para Δz quando os dx_i $(i=1,\ldots,n)$ são suficientemente pequenos.

Exercícios 2.14. 1. Seja $T(x,y)=xe^{xy}$ a temperatura num ponto (x,y) de uma certa região do plano. Determine $T(1,0023;0,00012)$ e $T(0,00012;1,0023)$.

2. Suponha que $p(x,y)$ é a pressão atmosférica num ponto (x,y). Dado $p(100,98)=$ 1008 mb (milibares), $p_x(100,98)=-2$ mb/km e $p_y(100,98)=1$ mb/km, use uma aproximação linear local para estimar a pressão atmosférica no ponto $(104,103)$.

Exemplo 2.15. A largura, o comprimento e a altura de uma caixa rectangular são medidos com um erro não superior a 5%. Estimemos o erro cometido no cálculo da diagonal da caixa, usando diferenciais.

Admitamos que a, b e c são a largura, o comprimento e a altura da caixa, respectivamente.



A função $w=f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dá-nos a diagonal da caixa. Como

$$f_x(x,y,z)=\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad f_y(x,y,z)=\tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad f_z(x,y,z)=\tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

as derivadas parciais f_x, f_y e f_z existem e são contínuas, logo f é diferenciável em $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y,z>0\}$.

O erro cometido no cálculo da diagonal da caixa é $|\Delta w/\sqrt{a^2+b^2+c^2}|$. Vamos determinar um valor aproximado para o erro, estimando $|dw/\sqrt{a^2+b^2+c^2}|$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{dw}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| &= \left|\frac{f_x(a,b,c)\Delta x+f_y(a,b,c)\Delta y+f_z(a,b,c)\Delta z}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| \\
&= \left|\frac{\tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Delta x+\tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Delta y+\tfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Delta z}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| \\
&= \left|\frac{a\Delta x+b\Delta y+c\Delta z}{a^2+b^2+c^2}\right| \le \frac{a|\Delta x|+b|\Delta y|+c|\Delta z|}{a^2+b^2+c^2}.
\end{aligned}$$

Como $|\frac{\Delta x}{a}|\le 0,05$, $|\frac{\Delta y}{b}|\le 0,05$ e $|\frac{\Delta z}{c}|\le 0,05$, temos

$$a|\Delta x| = a^2|\tfrac{\Delta x}{a}| \leq 0,05a^2, \quad b|\Delta y| \leq 0,05b^2, \quad c|\Delta z| \leq 0,05c^2.$$

Então $|\dfrac{\Delta w}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}| \sim |\dfrac{dw}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}| \leq \dfrac{0,05(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = 0,05.$

2.5 Teorema da derivada da função composta

Recorde-se que, para funções reais de variável real, a regra de derivação de uma função composta permite calcular a derivada da função $g(t) = f(r(t))$ pela fórmula

$$g'(t) = f'(r(t))r'(t).$$

Consideramos em seguida uma extensão da fórmula para funções reais de várias variáveis.

Proposição 2.16. Se g é uma função diferenciável num conjunto aberto S de $\mathbb{R}^n$, e u_i $(i = 1, \ldots n)$ são funções reais de variável real diferenciáveis num intervalo aberto I tais que $(u_1(t), \ldots, u_n(t)) \in S$, para todo o $t \in I$, então a função composta $g(t) = f(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ é diferenciável em I e

$$\tfrac{dg}{dt}(t) \;= \tfrac{\partial f}{\partial u_1}(u_1(t), \ldots, u_n(t))\tfrac{du_1}{dt}(t) + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial u_n}(u_1(t), \ldots, u_n(t))\tfrac{du_n}{dt}(t).$$

Exemplo 2.17. Consideremos as funções $f(x,y) = \sin(xy^2)$, $x(t) = \frac{t}{2} + \pi$ e $y(t) = e^t$. Seja $h(t) = f(u(t), v(t))$. Calculemos $h'(0)$ usando o teorema da derivada da função composta.

As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2\cos(xy^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy\cos(xy^2).$$

Além disso, $\dfrac{dx}{dt}(t) = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{dy}{dt}(t) = e^t$. Quando $t = 0$, temos $(x(0), y(0)) = (\pi, 1)$. Assim

$$\frac{dh}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\pi,1)\frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\pi,1)\frac{dy}{dt}(0) = (\cos\pi)\frac{1}{2} + 2\pi\cos\pi = -\frac{1}{2} - 2\pi.$$

Proposição 2.18. Se $f(u,v)$ é diferenciável num aberto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ e $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são funções diferenciáveis num aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e tais que $(u(x,y), v(x,y) \in S$, para todo o $(x,y) \in A$, então a função $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ é diferenciável em S, e

$$\tfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) \;= \tfrac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y))\tfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \tfrac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\tfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \;.$$

$$\tfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) \;= \tfrac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y))\tfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \tfrac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\tfrac{\partial v}{\partial y}(x,y).$$

Exercícios 2.19. 1. Use uma forma apropriada do teorema da função composta para determinar $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ nos casos seguintes.

(a) $z = 6x^2y - 2x + 3y$, com $x = uv$ e $y = u - v$;

(b) $z = e^{x^2 y}$, com $x = \sqrt{uv}$ e $y = \frac{u}{v}$.

2. Seja $z = f(x^2 - y^2)$. Mostre que $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3. Suponha que uma partícula se move ao longo de uma placa de metal no plano $X0Y$ com velocidade $\vec{v} = \hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ cm/s no ponto $(3, 2)$. Sabendo que a temperatura $T(x, y) = y^2 \ln x$, $x \geq 1$, em graus Celsius, determine $\frac{dT}{dt}$ no ponto $(3, 2)$.

2.6 Gradiente

Definição 2.20. Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $(a_1, \ldots, a_n)$ um ponto interior de D. Suponhamos que f tem derivadas parciais de 1ª ordem em $(a_1, \ldots, a_n)$. Chama-se **gradiente** de f em $(a_1, \ldots, a_n)$ ao vector

$$(f_{x_1}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_{x_n}(a_1, \ldots, a_n)).$$

Exemplo 2.21. O gradiente da função $f(x, y, z) = xy - z^2$ no ponto $(1, 2, 3)$ é

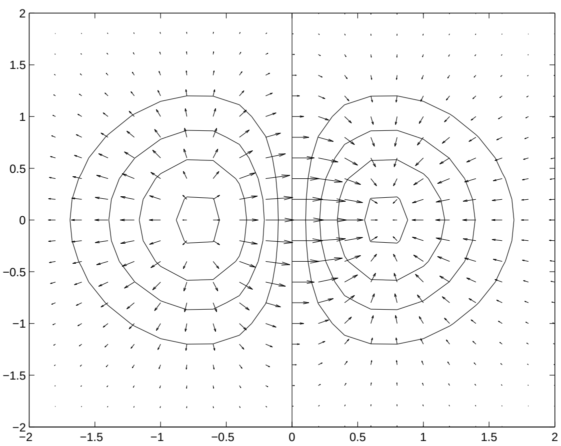
$$\nabla f(1, 2, 3) = (2, 1, -6).$$

O gradiente da função $f(x, y) = xy + \cos(x^2 y)$, no ponto $(1, \frac{\pi}{2})$ é

$$\nabla f(1, \frac{\pi}{2}) = (-\frac{\pi}{2}, 0).$$

Proposição 2.22. Se f tem derivadas parciais contínuas numa bola aberta centrada em P_0 e $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$ então $\nabla f(P_0)$ é normal ao conjunto de nível de f que contém o ponto P_0.

Observe as direcções dos gradientes de $f(x, y) = xe^{-x^2 - y^2}$ nos pontos das curvas de nível de f.



Exemplos 2.23. 1. Seja $f(x,y,z) = xy - z^2$. O vector $\nabla f(1,2,3)$ é normal à superfície $f(x,y,z) = f(1,2,3)$, isto é, o vector $(2,1,-6)$ é normal à superfície $xy - z^2 + 7 = 0$.

2. Seja $f(x,y) = xy + \cos(x^2y)$. O vector $\nabla f(1,\frac{\pi}{2})$ é normal à curva $f(x,y) = f(1,\frac{\pi}{2})$, ou seja, o vector $(-\frac{\pi}{2},0)$ é normal à curva $xy + \cos(x^2y) = \frac{\pi}{2}$.

2.7 Teorema da função implícita

Exemplos 2.24. Consideremos a equação $x^2 + y^2 = 25$ que define uma circunferência de centro $(0,0)$ e raio 5. Em vizinhanças dos pontos $(3,4)$ e $(2,-\sqrt{21})$ os arcos de circunferência são gráficos de funções na variável x. Numa vizinhança do ponto $(5,0)$, o arco de circunferência não é o gráfico de uma função na variável x.

1. A equação $x^2 + y^2 = 25$ define y como função de x numa vizinhança de $(3,4)$:

$$y = f_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

numa bola aberta $B((3,4),\frac{1}{2})$.

2. A equação $x^2 + y^2 = 25$ define y como função de x numa vizinhança do ponto $(2,-\sqrt{21})$

$$y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

numa bola aberta $B((2,-\sqrt{21});1)$.

3. A equação $x^2 + y^2 = 25$ não define y com função de x num aberto que contém o ponto $(5,0)$.

Teorema 2.25. Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto, $F : D \to \mathbb{R}$ uma função e $(a,b) \in D$. Se

(i) $F(a,b) = 0$,

(i) as derivadas parciais F_x e F_y existem e são contínuas em D, e

(ii) $F_y(a,b) \neq 0$,

então existe uma função f definida num intervalo aberto I que contém a, $f : I \to \mathbb{R}$, e um conjunto aberto $W \subseteq \mathbb{R}^2$ contendo (a,b), tal que

1. f tem derivada contínua em I,
2. para todo o $x \in I$, $(x,f(x)) \in W$ e $F(x,f(x)) = 0$,
3. se $(x,y) \in W$ e $F(x,y) = 0$ então $y = f(x)$ (e, portanto, $f(a) = b$).

Além disso, se $F_y(x, f(x)) \neq 0$ então

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

Note-se que a fórmula (1) deduz-se facilmente aplicando o teorema da derivada da função composta: se F e f são funções diferenciáveis, então, de $F(x, f(x)) = 0$ resulta

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0.$$

Se $F_y(x, f(x)) \neq 0$, tem-se (1).

Nas condições do teorema, diremos que a equação $F(x, y) = 0$ define implicitamente y como função de x num aberto A de $\mathbb{R}^2$ contendo o ponto (a, b).

Exemplo 2.26. Mostremos que a equação $y^2 - 2xy = 1$ define implicitamente y com função de x num aberto contendo $(0, 1)$ e calculemos $y'(0) = 1$.

De facto, tomando $F(x, y) = y^2 - 2xy - 1$ tem-se que $F(0, 1) = 1 - 0 - 1 = 0$,

$$F_x(x, y) = -2y \qquad F_y(x, y) = 2y - 2x,$$

logo F_x e F_y existem e são contínuas em $\mathbb{R}^2$, e $F_y(0, 1) = 2 - 0 = 2 \neq 0$. Portanto, pelo teorema da função implícita, existe uma função $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalo aberto) tais que $0 \in I$, $f(0) = 1$ e $(f(x))^2 - 2xf(x) - 1 = 0$.

Como $F_y(0, f(0)) = F_y(0, 1) = 2 \neq 0$, pelo teorema da função implícita vem que

$$y'(0) = f'(0) = -\frac{F_x(0, f(0))}{F_y(0, f(0))} = -\frac{F_x(0, 1)}{F_y(0, 1)} = -\frac{-2}{2} = 1.$$

Também podemos obter $y'(0)$ derivando a equação $y^2 - 2xy - 1 = 0$, não esquecendo que y é função de x:

$$y^2 - 2xy = 1 \Rightarrow 2yy' - 2y - 2xy' = 0 \Rightarrow yy' - y - xy' = 0$$

logo

$$y(0)y'(0) - y(0) - 0 \cdot y'(0) = 0 \Leftrightarrow y'(0) \cdot 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow y'(0) = 1.$$

Teorema 2.27. Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^3$ um aberto, $F : D \to \mathbb{R}$ uma função e $(a, b, c) \in D$. Se

(i) $F(a, b, c) = 0$,

(ii) as derivadas parciais F_x, F_y e F_z existem e são contínuas em D, e

(iii) $F_z(a, b, c) \neq 0$,

então existe uma função $f : B \to \mathbb{R}$, onde B é uma bola aberta centrada em (a, b), e um aberto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ contendo (a, b, c), tal que

(1) $(x, y, f(x, y)) \in W$ e $F(x, y, f(x, y)) = 0$, para todo o $(x, y) \in B$;

(2) as derivadas parciais f_x e f_y existem e são contínuas em B;

(3) se $(x, y, z) \in W$ e $F(x, y, z) = 0$ então $z = f(x, y)$ (e, portanto $f(a, b) = c$).

Além disso, se $(x_1, y_1) \in B$ e $F_z(x_1, y_1, f(x_1, y_1)) \neq 0$ então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) &= -\frac{F_x(x_1, y_1, f(x_1, y_1))}{F_z(x_1, y_1, f(x_1, y_1))} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) &= -\frac{F_y(x_1, y_1, f(x_1, y_1))}{F_z(x_1, y_1, f(x_1, y_1))}.
\end{aligned}$$

Nas condições do teorema anterior, diremos que a equação $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente z como função de x e y, $z = f(x, y)$, numa numa bola aberta $B = B((a, b), r)$, com $r > 0$.

Exemplo 2.28. Considere a equação $x - z + (y + z)^2 - 6 = 0$.

(a) Mostremos que equação dada define implicitamente z como função de x e y numa bola aberta centrada no ponto $(3, -3, 1)$:

Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $F(x, y, z) = x - z + (y + z)^2 - 6$. Note-se que $F(3, -3, 1) = 0$ e a função F tem derivadas parciais

$$F_x(x, y, z) = 1, \quad F_y(x, y, z) = 2(y + z), \quad F_z = -1 + 2(y + z).$$

contínuas em $\mathbb{R}^3$. Além disso, vem $F_z(3, -3, 1) = -1 + 2(-3 + 1) = -5 \neq 0$.

Então, pelo teorema anterior, a equação $x - z + (y + z)^2 - 6 = 0$ define implicitamente uma função $f : B \to \mathbb{R}$, onde B é uma bola aberta centrada em $(3, -3)$ tal que as derivadas parciais f_x e f_y são contínuas em B, $f(3, -3) = 1$ e $F(x, y, f(x, y)) = x - f(x, y) + (y + f(x, y))^2 - 6 = 0$, para todo o $(x, y) \in B$.

(b) Calculemos $\dfrac{\partial z}{\partial x}(3, -3)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(3, -3)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(3, -3)$:

Como

$$F_x(3, -3, 1) = 1, \; F_y(3, -3, 1) = -4 \text{ e } F_z(3, -3, 1) = -5,$$

pelo teorema anterior vem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(3, -3) &= \frac{\partial f}{\partial x}(3, -3) = -\frac{F_x(3, -3, 1)}{F_z(3, -3, 1)} = \frac{1}{5}\,, \\
\frac{\partial z}{\partial y}(3, -3) &= \frac{\partial f}{\partial y}(3, -3) = -\frac{F_y(3, -3, 1)}{F_z(3, -3, 1)} = -\frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Pelo teorema anterior, para todo o $(x, y) \in B$ tal que $F_z(x, y, f(x, y)) \neq 0$, vem

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))} = -\frac{2(y + f(x, y))}{-1 + 2(y + f(x, y))}.$$

Logo
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{2(y+f(x,y))}{-1+2(y+f(x,y))}),$$
ou seja,
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2f_x(x,y)(-1+2(y+f(x,y))) - 2(y+f(x,y))(2f_x(x,y))}{(-1+2(y+f(x,y)))^2},$$
donde
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(3,-3) = -\frac{2\frac{1}{5}(-1+2(-3+1)) - 2(-3+1)2\frac{1}{5}}{(-5)^2} = -\frac{-10+8}{125} = \frac{2}{125}.$$

2.8 Plano tangente

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^3$ um aberto e $(a,b,c) \in D$. Seja $F : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que $F(a,b,c) = 0$, as derivadas parciais F_x, F_y e F_z existem e são contínuas e $\nabla F(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Então

1. o gradiente $\nabla F(a,b,c)$ é normal à superfície $F(x,y,z) = 0$ no ponto P_0;
2. o plano tangente à superfície $F(x,y,z) = 0$ no ponto P_0 tem uma equação
$$F_x(a,b,c)(x-a) + F_y(a,b,c)(y-b) + F_z(a,b,c)(z-c) = 0,$$
ou seja, $(x-a, y-b, z-c) \cdot \nabla F(a,b,c) = 0$.
3. a recta normal à superfície $F(x,y,z) = 0$ no ponto (a,b,c) tem uma equação vectorial
$$(x,y,z) = (a,b,c) + \lambda(F_x(a,b,c), F_y(a,b,c), F_z(a,b,c)), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.29. Consideremos o elipsóide de equação $x^2 + 4y^2 + z^2 = 18$.

1. O plano tangente ao elipsóide no ponto $(1,2,1)$ tem equação $x + 8y + z = 18$.
2. Uma equação da recta normal ao elipsóide no ponto $(1,2,1)$ é
$$(x,y,z) = (1,2,1) + \lambda(1,8,1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
3. O ângulo agudo que o plano tangente faz com o plano xOy é arccos $\frac{1}{\sqrt{66}}$.

   Note-se que o ângulo agudo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ entre os planos α e β é o ângulo entre os vectores $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ ou entre os vectores $\vec{n_1}$ e $-\vec{n_2}$, onde $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ são vectores normais aos planos α e β, respectivamente.

2.9 Derivadas direccionais

Definição 2.30. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e P_0 um ponto interior de D. Seja $\vec{u}$ um vector não nulo. Chama-se **derivada direccional** de f no ponto P_0 segundo o vector $\vec{u}$ ao limite, caso exista,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\hat{u}) - f(P_0)}{t},$$

onde $\hat{u}$ é o vector unitário $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Esta derivada denota-se por $D_{\vec{u}} f(P_0)$.

Observação 2.31. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e P_0 um ponto inteior de D. Seja $\vec{u}$ um vector não nulo. Considere-se a função

$$F(t) = f(P_0 + t\hat{u}).$$

A derivada direccional de f no ponto P_0 segundo o vector $\vec{u}$, $D_{\vec{u}} f(P_0)$, é $F'(0)$, caso esta derivada exista.

Exercícios 2.32. Determine as derivadas direccionais das seguintes funções nos pontos indicados.

1. $f(x, y) = xy + x + y$ no ponto $(\pi, 1)$ segundo o vector $(1, 0)$.

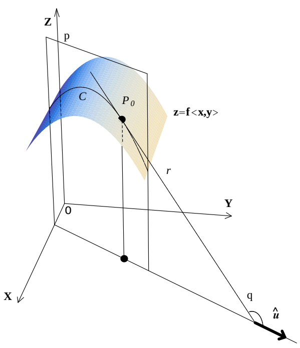
2. $f(x, y, z) = xy - z^2$ no ponto $(1, 2, 3)$ segundo o vector $\vec{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e segundo o vector $\vec{v} = (0, 1, 0)$.

Interpretação geométrica: Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função, (a, b) um ponto de D e $\hat{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ um vector unitário.

- Obtemos a curva C intersectando a superfície $z = f(x, y)$ com o plano vertical

$$(x, y, z) = (a, b, f(a, b)) + \alpha(u_1, u_2, 0) + \beta(0, 0, 1)$$

- A derivada direccional $D_{\hat{u}} f(a, b)$ é o declive da recta r (ou seja, é igual a $\tan q$) da figura seguinte.



Observação 2.33. 1. A derivada direccional de f em P_0 segundo o vector $\vec{u}$ é a taxa de variação de f em P_0 na direcção (e sentido) de $\vec{u}$.

2. Se $D_{\hat{\imath}}f(a,b)$ existe então $D_{\hat{\imath}}f(a,b) = f_x(a,b)$, se $D_{\hat{\jmath}}f(a,b)$ existe então $D_{\hat{\jmath}}f(a,b) = f_y(a,b)$.

Proposição 2.34. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto interior P_0 de D. Então, para qualquer vector $\hat{u}$ unitário, a derivada direccional $D_{\hat{u}}f(P_0)$ existe e

$$D_{\hat{u}}f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \hat{u}.$$

Exercícios 2.35. Calcule as derivadas direccionais das funções seguintes nos pontos dados e segundo os vectores indicados.

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy$, no ponto $(1,2)$ segundo o vector $\hat{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$;
2. $g(x,y) = \sin(xy)$, no ponto $(1,\pi)$ segundo o vector $\hat{u} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

Na proposição anterior não é possível remover a hipótese "f é diferenciável", como veremos no exercício seguinte.

Exercício 2.36. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x-y}\sin(x-y) & \text{se } |x| \neq |y|, \\ \\ y^2, & \text{se } |x| = |y| \end{cases}.$$

1. Mostre que $f_x(0,0) = 1$ e $f_y(0,0) = 1$.
2. Mostre, usando a definição, que a derivada direccional de f segundo um vector unitário $\hat{u} = (\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5})$ é $D_{\hat{u}}f(0,0) = \dfrac{8}{5}$.
3. Verifique que $D_{\hat{u}}f(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \hat{u}$.
4. Analise a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

Nas condições da proposição anterior, visto

$$D_{\hat{u}}f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \hat{u} = \|\nabla f(P_0)\| \|\hat{u}\| \cos\theta = \|\nabla f(P_0)\| \cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre os vectores $\hat{u}$ e $\nabla f(P_0)$, temos o resultado seguinte.

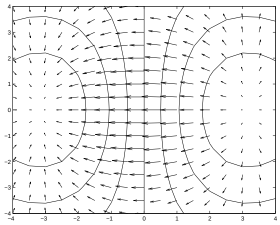
Proposição 2.37. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto interior P_0 de D.

1. Se $\nabla f(P_0) = \vec{0}$ então todas as derivadas direccionais de f em P_0 são nulas.

2. Se $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$ então o valor máximo da derivada direccional de f em P_0 segundo um vector unitário $\hat{u}$ é $\|\nabla f(P_0)\|$ e esse máximo é atingido quando
$$\hat{u} = \frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}.$$
3. Se $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$ então o valor mínimo da derivada direccional de f em P_0 segundo um vector unitário $\hat{u}$ é $-\|\nabla f(P_0)\|$ e esse mínimo é atingido quando
$$\hat{u} = -\frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}.$$

Exercícios 2.38. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 e^y$.

1. Determine o valor máximo e o valor mínimo da derivada direccional de f em $(-2, 0)$ e indique os vectores unitários $\hat{u}$ e $\hat{v}$ que tornam a derivada direccional em $(-2, 0)$ máxima e mínima, respectivamente.
2. Determine os vectores unitários $\hat{u}$ tais que $D_{\hat{u}} f(-2, 0) = 0$.
3. A base de uma certa montanha é representada por uma região R no plano $x0y$ considerada ao nível do mar. A altitude z sobre o ponto (x, y) de R é dada por $z = 2000 - 0,02x^2 - 0,04y^2$, sendo x, y e z expressos em metros. Considera-se que o eixo positivo $0x$ tem a direcção Este e que o eixo positivo $0y$ tem a direcção Norte. Um alpinista está no ponto $(-20, 5, 1991)$.
   (a) Se o alpinista pretender seguir para Oeste, ele sobe ou desce?
   (b) Se o alpinista pretende seguir para nordeste, ele sobe ou desce? Indique a taxa de variação da altitude a que se encontra o alpinista.
   (c) Diga qual a direcção que o alpinista deve escolher para
   (i) ascender mais rapidamente; (ii) percorrer um caminho plano.
4. Considere uma placa de metal aquecida tal que em cada ponto (x, y) a temperatura é dada por $T(x, y) = 80 - 20xe^{-\frac{1}{20}(x^2+y^2)}$. Um insecto está no ponto $(2, 1)$.
   (a) O insecto desloca-se na direcção do ponto $(1, -2)$. Qual a taxa de variação da temperatura nessa direcção?
   (b) Em que direcção se deve mover o insecto para se aquecer o mais rapidamente possível? Qual a variação da temperatura nessa direcção?
   (c) Observe o campo de vectores gradientes de T e tire conclusão acerca da temperatura da placa.


4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4