Sinais e Sistemas Discretos

1. Determine a resposta impulsional dos seguintes sistemas discretos:

   a) $y(n) = 0.4x(n) + 0.3x(n-1) + 0.2x(n-2) + 0.1x(n-3)$

   b) $y(n) = x(n) + a\,y(n-1)$

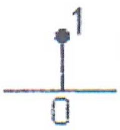
2. Verifique se os seguintes sistemas são ou não lineares:

   a) $y(n) = \frac{1}{3}\left[x(n+1) + x(n) + x(n-1)\right]$

   b) $y(n) = x^2(n)$

3. Calcular a resposta impulsional do sistema seguinte, para os impulsos:

$$y(n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}y(n-1) + x(n) & ; n \geq 0 \\ 0 & ; - \end{cases}$$

a) 

$\delta(n)$

b) 

$\delta(n-1)$

$x(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)\, e^{-jwn}$

$H(e^{jw}) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{jw})\, e^{jwn}\, dw$

$x(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-jwn}$

$X(e^{jw}) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})\, e^{jwn}\, dw$

4. Considere o seguinte sistema:

$$T[x(n)] = \alpha\, x(n) + \beta$$

Verifique se é estável, causal, linear e invariante.

5. Determine se o seguinte sistema é estável, causal, linear e invariante à translação:

$$T[x(n)] = x(n - n_0)$$

6. Determine a resposta do sistema discreto com resposta impulsional $h(n) = 2^{-n}u(n)$, quando a entrada é $x(n) = u(n) - u(n-8)$

DUV

7. Se: $h(n) = \alpha^n u(n)$ e $x(n) = \beta^n u(n)$,

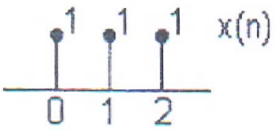
prove que: $y(n) = (k_1 \alpha^n + k_2 \beta^n) u(n)$

8. Dada a seguinte saída de um sinal não recursivo:

$$y(n) = \frac{1}{3}x(n+1) + \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{3}x(n-1).$$

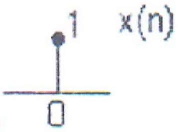
Calcule a resposta desse sistema quando a entrada é:

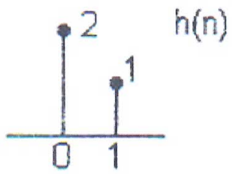
a) $x(n) = \delta(n)$

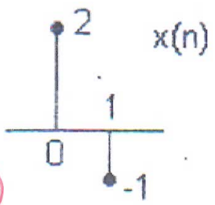
b) 

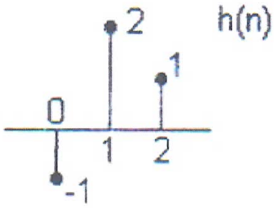
c) Verifique a estabilidade deste sistema.

9. Para as sequências seguintes, use a convolução discreta para calcular a resposta à entrada x(n) quando a resposta impulsional é a indicada.

a) 



b) 



10. Considere o sistema discreto

$$y(n) = \frac{3x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)}{6}$$

a) Determine a sua resposta impulsional h(n).

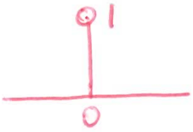
b) Determine a resposta do sistema à entrada $x(n) = u(n) - u(n-4)$.

Processamento Digital de Sinal

EXERCICIOS 2008 (2)

$\boxed{3}$ Calcular a resposta impulsional do sistema seguinte, para os impulsos:

$$y(n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}\, y(n-1) + x(n) & ;\ n \geq 0 \\ 0 & ;\ \text{———} \end{cases}$$

a)  $\delta(n)$

$$h(n) = \frac{1}{n+1} h(n-1) + \delta(n)$$

$h(n) = ?$

$\delta[0] = 1$

considerando as condições iniciais nulas.

$n=0 \Rightarrow h(0) = \frac{1}{0+1} h(-1) + \delta(0) = 1$

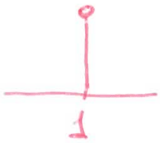
$n=1 \Rightarrow h(1) = \frac{1}{1+1} h(0) + \delta(1) = \frac{1}{2} \cdot 1$

$n=2 \Rightarrow h(2) = \frac{1}{1+2} h(1) + \delta(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$

$n=3 \Rightarrow h(3) = \frac{1}{1+3} h(2) + \delta(3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)!} & ;\ n \geq 0 \\ 0 & ;\ n < 0 \end{cases}$$

IIR

b)  $\delta(n-1)$

$$h(n) = \frac{1}{n+1} h(n-1) + \delta(n-1)$$

$n=0 \Rightarrow h(0) = \frac{1}{0+1} \cancel{h(-1)}^{0} + \cancel{\delta(-1)}^{0} = 0$

$n=1 \Rightarrow h(1) = \frac{1}{1+1} h(0) + \cancel{\delta(0)}^{1} = 1 \ = 2/2$

$n=2 \Rightarrow h(2) = \frac{1}{1+2} h(1) + \cancel{\delta(1)}^{0} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2$

$n=3 \Rightarrow h(3) = \frac{1}{1+3} h(2) + \cancel{\delta(2)}^{0} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2$

$n=4 \Rightarrow h(4) = \frac{1}{1+4} h(3) + \cancel{\delta(3)}^{0} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2}{(n+1)!} & ;\ n > 0 \\ 0 & ;\ n \leq 0 \end{cases}$$

IIR

$\boxed{4}$ Considere o seguinte sistema

$$T[x(n)] = \alpha x(n) + \beta$$

Verifique se é estável, causal, linear e invariante.

- *Linear*

Pelo Teorema da sobreposição

$$x_1(n) \longrightarrow y_1(n)$$
$$x_2(n) \longrightarrow y_2(n)$$

$$T\{a x_1(n) + b x_2(n)\} = a T\{x_1(n)\} + b T\{x_2(n)\}$$

$$|x(n)| < M_1 \Rightarrow |y(n)| < M_2$$

$$T\{a x_1(n) + b x_2(n)\} = \alpha(a x_1(n) + b x_2(n)) + \beta =$$
$$= \alpha a x_1(n) + \alpha b x_2(n) + \beta$$

$$a T\{x_1(n)\} + b T\{x_2(n)\} = a(\alpha x(n) + \beta) + b(\alpha x_2(n) + \beta) =$$
$$= \alpha a x_1(n) + a\beta + b\alpha x_2(n) + b\beta$$

$\neq$ logo é não linear.

- *Causal*

Usa apenas entradas *presentes* ou *passadas* $[n \text{ ou } (n-1)]$

$$y(n) = f(x(n) + x(n-1))$$
$$y(n) = \frac{1}{2}(x(n) + y(n-1))$$

- Não causal

$$y(n) = x(n) + x(n+1)$$

Processamento Digital de Sinal

EXERCICIOS 2008 3

$$T[x(n)] = \alpha\, x(n) + \beta$$

$x(n)$ logo é causal! Se fosse $x(n+1)$ era ñ causal.

• Sistema estável?

Se para uma sequência limitada na entrada o sistema produz uma saída limitada

$$|x(n)| < M_1$$

$$y(n) = |\alpha\, x(n) + \beta|$$

$$= \alpha\, |x(n)| + \beta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(n) = \alpha M_1 + \beta}$$

Ou seja, estável para $\alpha + \beta$ finitos.

Também se podemos dizer: $|x[n]| < \infty$
como é um sistema não recursivo então é estável

• Invariante

$$T\{x(n-nd)\} = \alpha\, x(n-nd) + \beta$$

sendo $n = n \pm nd$

$$= y(n-nd)$$

é invariante.

[5] Determine se o seguinte sistema é estável, causal, linear e invariante à translação: $T[x(n)] = x(n-n_0) = y[n]$

- Estabilidade $\Rightarrow$ $|x[n]| < \infty \longrightarrow |x[n-n_0]| < \infty$

como se trata de um sistema não recursivo, o sistema é estável.

- Causalidade $\Rightarrow$ A saída não precede as entradas

$n_0 > 0$: $y[1] = x(1-1) \Leftrightarrow y[1] = x[0] \Rightarrow$ causal

$n_0 < 0$: $y[1] = x(1+1) \Leftrightarrow y[1] = x[2] \Rightarrow$ não causal.

- Linearidade $\Rightarrow T\{\underbrace{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]}_{x[n]}\} = \alpha_1 T\{x_1[n]\} + \alpha_2 T\{x_2[n]\}$

$\alpha_1 x_1(n-n_0) + \alpha_2 x_2(n-n_0) = \alpha_1 x_1[n-n_0] + \alpha_2 x_2[n-n_0]$

$\therefore$ O sistema é linear

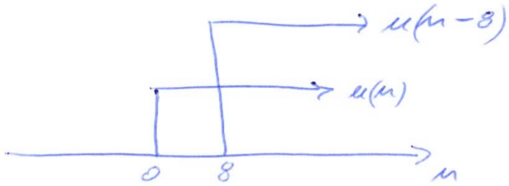
- Invariância à translação

$T\{x[n-n_d]\} = x[n-n_d] = y(n-n_d)$

$\therefore$ O sistema é invariante à translação

$\boxed{6}$ Determine a resposta do sistema discreto com resposta impulsional $h(n) = 2^{-n} u(n)$, quando a entrada é $x(n) = u(n) - u(n-8)$

$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * u[n]$



$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] * h[n-k] = \sum_{k} h[k] \cdot x[n-k]$$

$$= \sum_{n=\infty}^{+\infty} 2^{-n} u(n) - x(n-k)$$

$\boxed{7}$ Se $h(n) = \alpha^n u(n)$ e $x(n) = \beta^n u(n)$.

Prove que: $y(n) = (K_1 \alpha^n + K_2 \beta^n)\, u(n)$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \xrightarrow{y(n)} = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^k u[k] \cdot \beta^{n-k} \cdot u[n-k] =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{-k} \beta^n = \beta^n \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{-k} = \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k =$$

$$= \beta^n \frac{1 - \left(\alpha/\beta\right)^{n+1}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}} = \beta^n \frac{1 - \frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}}}{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} = \beta^n \frac{\beta}{\beta-\alpha} - \beta^n \left(\frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}}}{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} \right) =$$

$$= \beta^n \frac{\beta}{\beta-\alpha} - \cancel{\beta^n} \frac{\cancel{\beta}\, \alpha^{n+1}}{(\beta-\alpha)\, \underbrace{\cancel{\beta^{n+1}}}_{\beta^n \cdot \beta^1}} = \beta^n \frac{\beta}{\beta-\alpha} - \frac{\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} = \beta^n \frac{\beta}{\beta-\alpha} - \alpha^n \frac{\alpha}{\beta-\alpha}$$

$$K_2 = \frac{\beta}{\beta-\alpha} \qquad K_1 = \frac{\alpha}{\beta-\alpha}$$

$$y[n] = (K_1 \alpha^n + K_2 \beta^n)\, u_n$$

$\boxed{8}$ Dado a seguinte saída de um sinal não recursivo:

$$y(n) = \tfrac{1}{3}\, x(n+1) + \tfrac{1}{3}\, x(n) + \tfrac{1}{3}\, x(n-1).$$

Calcule a resposta desse sistema quando a entrada é:

$\boxed{a)}$ $x(n) = \delta(n)$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(k)\, h(n-k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k)\, x(n-k)$$

1ª opção $\Longrightarrow$ Pela definição.

$\boxed{n=-1}$

$$y(-1) = \frac{1}{3}\, \overset{1}{\cancel{x(-1+1)}} + \frac{1}{3}\, x(-1) + \frac{1}{3}\, x(-1-1) = 1/3$$

$\boxed{n=0}$

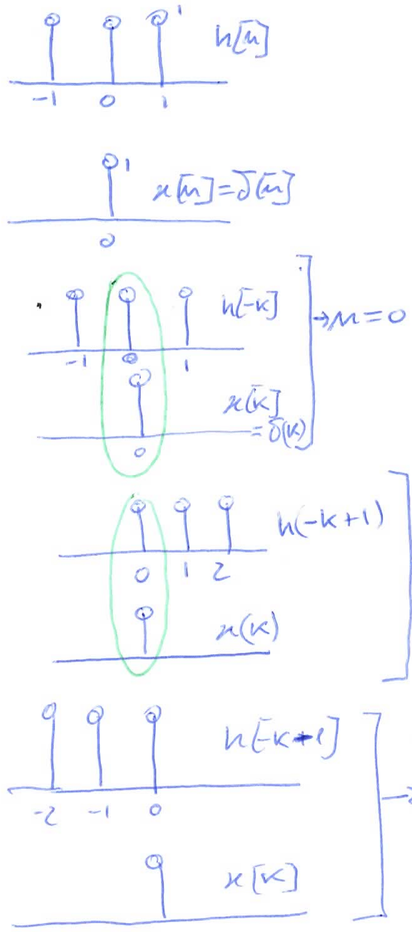
$$y(0) = \frac{1}{3}\, x(0+1) + \frac{1}{3}\, \overset{1}{\cancel{x(0)}} + 1/3\, x(0-1) = 1/3$$

$\boxed{n=1}$

$$y(1) = \frac{1}{3}(1+1) + \frac{1}{3}\, x(1) + \frac{1}{3}\, \overset{1}{\cancel{x(1-1)}} = 1/3$$

$$y(n) = \begin{cases} 1/3 \;; & n = -1;\, 0;\, 1 \\ 0 \;; & \text{\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$$

2ª opção $\Rightarrow$ Pelo método gráfico.



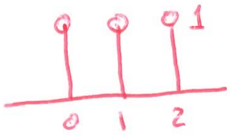
$y(0) = 1/3$

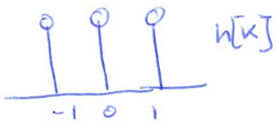
$y(1) = 1/3$

$y(-1) = 1/3$

$$y(n) = \begin{cases} 1/3 \;; & n = -1, 0, 1 \\ 0 \;; & \text{\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$$

b) $x(n)$





Pelo definição

$$y(-1) = \tfrac{1}{3}x(-1+1) + \tfrac{1}{3}x(-1) + \tfrac{1}{3}x(-1-1) = \tfrac{1}{3}$$

$$y(0) = \tfrac{1}{3}x(1+0) + \tfrac{1}{3}x(0) + \tfrac{1}{3}x(0-1) = \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}$$

$$y(1) = \tfrac{1}{3}x(1+1) + \tfrac{1}{3}x(1) + \tfrac{1}{3}x(1-1) = \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}$$

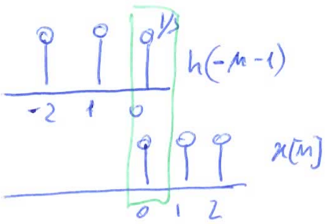
$$y(2) = \tfrac{1}{3}x(2+1) + \tfrac{1}{3}x(2) + \tfrac{1}{3}x(2-1) = \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}$$

$$y(3) = \tfrac{1}{3}x(3+1) + \tfrac{1}{3}x(3) + \tfrac{1}{3}x(3-1) = \tfrac{1}{3}$$

$$y[n] = \begin{cases} 1/3 & ; n = -1;3 \\ 2/3 & ; n = 0,2 \\ 1 & ; n = 1 \\ 0 & ; \text{---} \end{cases}$$

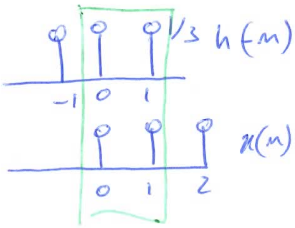
Pelo método gráfico

$\boxed{n=-1}$



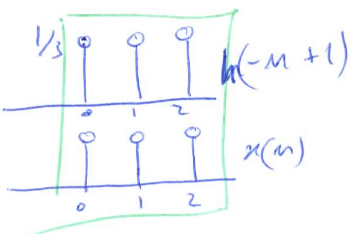
$y(-1) = 1/3$

$\boxed{n=0}$



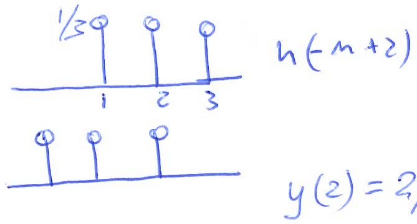
$y(0) = 2/3$

$\boxed{n=1}$



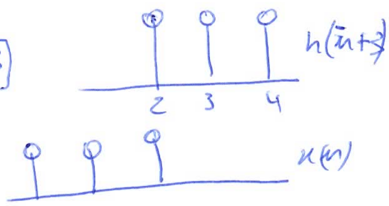
$y(1) = 1$

$\boxed{n=2}$



$y(2) = 2/3$

$\boxed{n=3}$



$y(3) = 1/3$

$$y(n) = \begin{cases} 1/3 & ; n = -1;3 \\ 2/3 & ; n = 0,2 \\ 1 & ; n = 1 \\ 0 & ; \text{---} \end{cases}$$

c) Verifique a estabilidade deste sistema

Como $|y(n)| < \infty$ para haver estabilidade $\left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{2}{3}\right| + |1| + \left|\frac{2}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| < \infty$

$3 < \infty$ ✓ ESTÁVEL!

O sistema é FIR, resposta do sistema finita, sistema é estável!

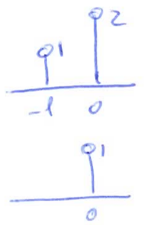
Ad mais não seja o sistema é estável só por dizer que é não recursivo.

9 Para as sequências seguintes, use a convolução discreta para calcular a resposta à entrada $x(n)$ quando a resposta impulsional é a indicada:

a)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

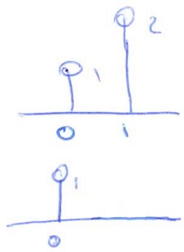
$n=0$



$h(-k) = h(-k+0)$

$y(0) = 2$

$n=1$



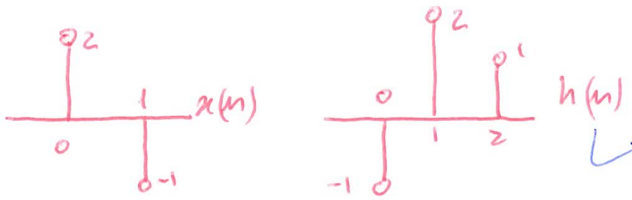
$h(-k+1)$

$x(0)$

$y(1) = 1$

$$y(n) = \begin{cases} 2 & ; n = 0 \\ 1 & ; n = 1 \\ 0 & ; \text{———} \end{cases}$$

b)



$\hookrightarrow h(n) = -\delta(n) + 2\,\delta(n-1) + \delta(n-2)$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(k)\, h(n-k)$$

$n=0 \Rightarrow y(0) = -2$

$n=1 \Rightarrow y(1) = -1 \times (-1) + 2 \times 2 = 5$

$n=2 \Rightarrow y(2) = -1 \times 2 + 2 = 0$

$$y(n) = \begin{cases} -2 & ; n = 0 \\ 5 & ; n = 1 \\ 0 & ; \text{———} \end{cases}$$

$\boxed{10}$ Considere o sistema discreto

$$y(n) = \frac{3x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)}{6}$$

a) Determine a sua resposta impulsional $h(n)$

$$h(n) = \frac{3}{6}\delta(n) + \frac{2}{6}\delta(n-1) + \frac{1}{6}\delta(n-2)$$

$n=0 \Rightarrow h(0) = 3/6$

$n=1 \Rightarrow h(1) = 2/6$

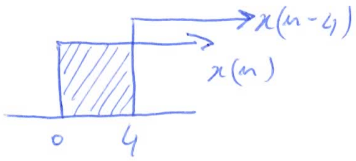
$n=2 \Rightarrow h(2) = 1/6$

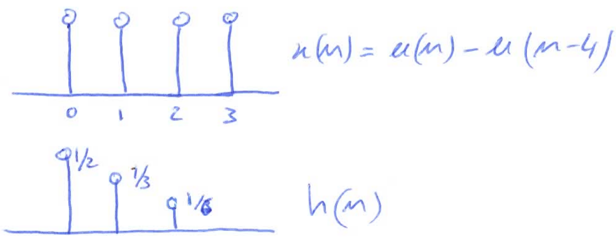
$$h(n) = \begin{cases} 1/2 \ ; & n=0 \\ 1/3 \ ; & n=1 \\ 1/6 \ ; & n=2 \\ 0 \ ; & \text{———} \end{cases}$$

b) Determine a resposta do sistema à entrada $x(n) = u(n) - u(n-4)$

$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k)\, x(n-k)$

$x(n) \Rightarrow$





$x(0) = x(1) = x(2) = x(3) = 1$

→ Pela definição

$n=0 \Rightarrow y(0) = 1/2\, x(0) + 1/3\, x(0-1) + 1/6\, x(0-2) = 1/2$ (1)   0   0

$n=1 \Rightarrow y(1) = 1/2\, x(1) + 1/3\, x(1-1) + 1/6\, x(1-2) = 1/2 + 1/3 = 5/6$

$n=2 \rightarrow y(2) = 1/2\, x(2) + 1/3\, x(2-1) + 1/6\, x(2-2) = 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$

$n=3 \Rightarrow y(3) = 1/2\, x(3) + 1/3\, x(3-1) + 1/6\, x(3-2) = 1$

$n=4 \Rightarrow y(4) = 1/2\, x(4) + 1/3\, x(4-1) + 1/6\, x(4-2) = 1/2$

$n=5 \Rightarrow y(5) = 1/2\, x(5) + 1/3\, x(5-1) + 1/6\, x(5-2) = 1/6$

$$y(n) = \begin{cases} 1/2 \ ; & n=0,4 \\ 5/6 \ ; & n=1 \\ 1 \ ; & n=2,3 \\ 1/6 \ ; & n=5 \\ 0 \ ; & \text{———} \end{cases}$$