

# Leis de Kirchhoff e sua Aplicação na Análise de Circuitos



**Teresa Mendes de Almeida**

[TeresaMAlmeida@ist.utl.pt](mailto:TeresaMAlmeida@ist.utl.pt)

**DEEC**

**Área Científica de Electrónica**

Março de 2008

## Matéria

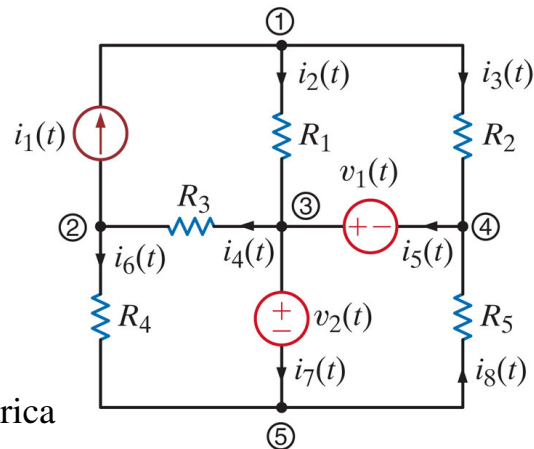
2

- **Lei de Kirchhoff das correntes**
  - KCL – lei dos nós
  - Generalização de KCL
- **Lei de Kirchhoff das tensões**
  - KVL – lei das malhas
- **Ligação de componentes em série e em paralelo**
- **Resistências em série e em paralelo**
  - Resistências em série
  - Resistências em paralelo
  - Simplificação de resistências
- **Divisor de Tensão**
- **Divisor de Corrente**
- **Análise e simplificação de circuitos**

- A soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que saem desse nó

$$\sum_e i_e = \sum_s i_s$$

- **Nó 1**  $i_1 = i_2 + i_3$
- **Nó 2**  $i_4 = i_1 + i_6$
- **Nó 3**  $i_2 + i_5 = i_4 + i_7$



- baseia-se na conservação da carga eléctrica
- também se chama Lei dos Nós
- equação tem tantos termos quantos os ramos que ligam ao nó
- quando correntes não estão com sentido marcado no circuito
  - é preciso arbitrar um sentido para a corrente em cada ramo
  - e escrever equação KCL concordante com os sentidos escolhidos

- **Nó 3**  $\underbrace{i_2 + i_5}_{\text{entrar}} = \underbrace{i_4 + i_7}_{\text{sair}}$

- equações matematicamente equivalentes

$$+i_2 - i_4 + i_5 - i_7 = 0$$

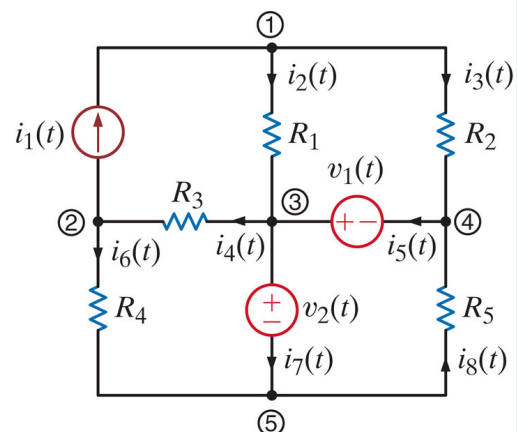
$$-i_2 + i_4 - i_5 + i_7 = 0$$

- então há outra formulação possível:

- Num nó, a soma algébrica das correntes é nula

$$\sum_k i_k = 0$$

- é preciso associar sinal algébrico (+/-) com sentido das correntes
  - correntes que entram são (+) e correntes que saem são (-)
  - ou
  - correntes que entram são (-) e correntes que saem são (+)



## Num circuito com N nós

- podem escrever-se N equações KCL – uma para cada nó
- apenas N-1 equações é que são linearmente independentes
  - N-ésima equação é redundante (pode obter-se a partir das restantes eq.)

## Calcular as correntes desconhecidas $I_1, I_4, I_5, I_6$ usando KCL

- Por onde começar? Qual a sequência de cálculos?
- Há mais do que uma forma de calcular? (sim!)

### Nó 4

$$30 + 20 = I_5 \quad I_5 = 50 \text{ mA}$$

### Nó 3

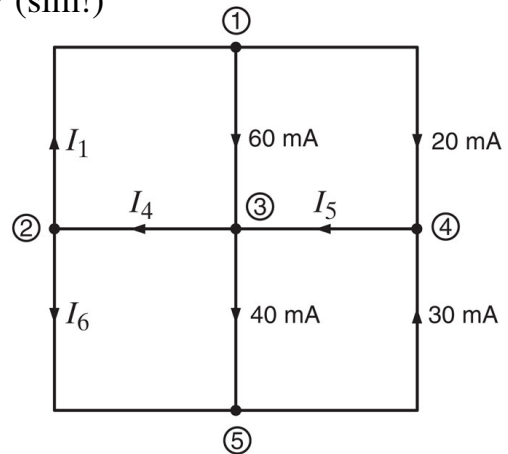
$$60 + I_5 = I_4 + 40 \quad I_4 = 70 \text{ mA}$$

### Nó 5

$$I_6 + 40 = 30 \quad I_6 = -10 \text{ mA}$$

### Nó 2

$$I_4 = I_1 + I_6 \quad I_1 = 80 \text{ mA}$$



## Pode generalizar-se a lei de Kirchhoff das correntes aplicando-a a uma superfície fechada

- superfície fechada
  - parte do circuito onde se verifique conservação da carga
  - conjunto de componentes (que não armazenam carga) interligados
  - pode ser vista como um nó gigante

### Superfície 1

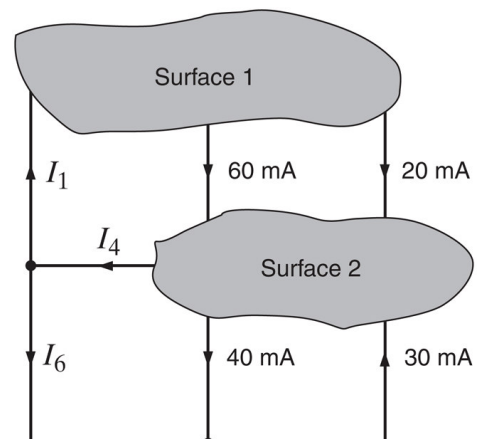
$$I_1 = 60 + 20 \quad I_1 = 80 \text{ mA}$$

### Superfície 2

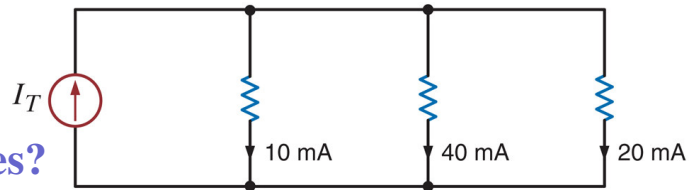
$$20 + 60 + 30 = I_4 + 40 \quad I_4 = 70 \text{ mA}$$

## $I_4$ foi calculada sem se saber $I_5$

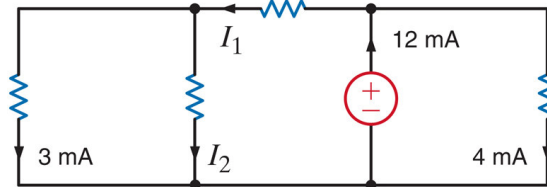
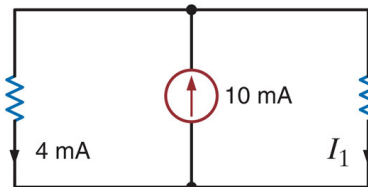
## Generalização pode ser muito útil em circuitos complexos



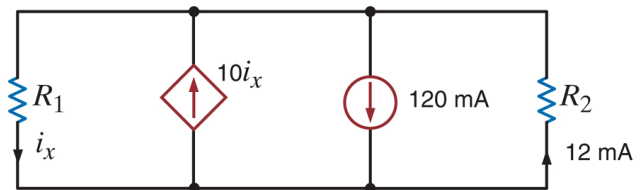
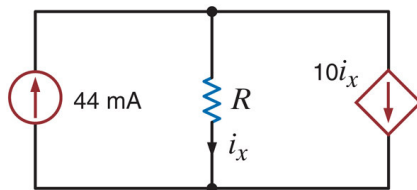
- Quantos nós?
- Quanto vale  $I_T$ ?
- Quantas eq. KCL diferentes?



- Calcular  $I_1$  e  $I_2$

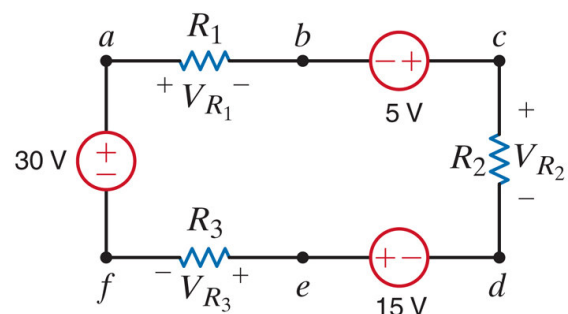


- Calcular  $i_x$

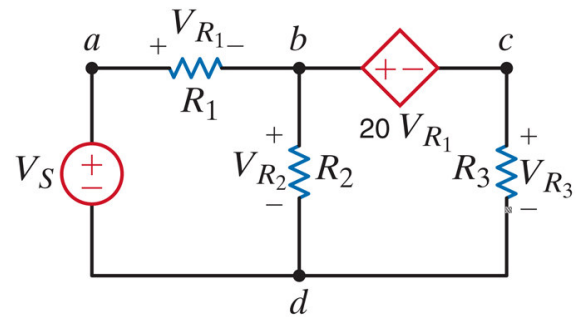


## Lei de Kirchhoff das tensões (KVL)

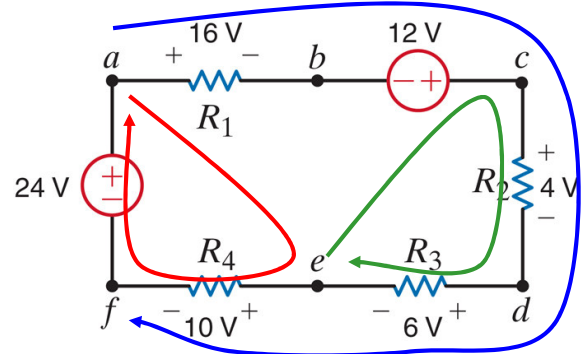
- A soma algébrica das tensões numa malha é zero  $\sum_k v_k = 0$ 
  - baseia-se na conservação da energia eléctrica
  - é preciso associar sinal algébrico com polaridade da tensão
    - quando se circula na malha
      - +  $\rightarrow$  quando se encontra primeiro o sinal +
      - -  $\rightarrow$  quando se encontra primeiro o sinal -
    - quando grandezas não estão marcadas no circuito
      - arbitrar sentidos e escrever equações KVL de acordo com sentidos
  - também se chama Lei das Malhas
- Sentido horário – abcdefa
  - $+ V_{R1} - 5 + V_{R2} - 15 + V_{R3} - 30 = 0$
- Sentido anti-horário – afedcba
  - $+ 30 - V_{R3} + 15 - V_{R2} + 5 - V_{R1} = 0$
- Basta escrever uma das equações
  - as 2 equações são equivalentes



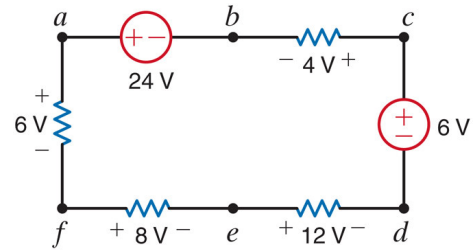
- **Quantas equações KVL se podem escrever?**
  - uma por cada malha do circuito
- **Quantas equações KVL são linearmente independentes?**
  - tantas quantas o número de malhas elementares
  - as restantes equações são redundantes
- **Circulando em sentido horário em todas as malhas do circuito**
  - Malha exterior – abcd
    - $+V_{R1} + (20 V_{R1}) + V_{R3} - V_S = 0$
  - Malha elementar à esquerda – abda
    - $+V_{R1} + V_{R2} - V_S = 0$
  - Malha elementar à direita – bcdb
    - $+(20 V_{R1}) + V_{R3} - V_{R2} = 0$
  - 2 malhas elementares
    - apenas 2 das 3 equações KVL são linearmente independentes
    - a 3ª equação que se considere é redundante
      - pode obter-se a partir das outras 2



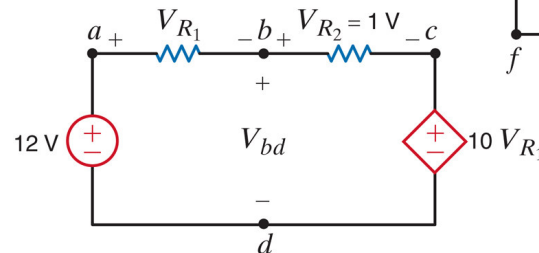
- **Usar KVL para determinar tensão entre dois nós do circuito**
- **Quanto vale  $V_{ae}$ ?**
  - $V_{ae} = +V_a - V_e$  é a incógnita
  - circulando no sentido horário
  - $V_{ae} + 10 - 24 = 0 \quad V_{ae} = 14V$
- **Quanto vale  $V_{ec}$ ?**
  - $V_{ec} = +V_e - V_c$  é a incógnita
  - circulando no sentido horário
  - $V_{ec} + 4 + 6 = 0 \quad V_{ec} = -10V$
- **Quanto vale  $V_{af}$ ?**
  - pelo ramo da esquerda (gerador de tensão)
    - $V_{af} = +V_a - V_f = 24 V$
  - circulando pelos componentes do lado direito
    - $V_{af} = +V_a - V_f = +16 - 12 + 4 + 6 + 10 = +24 V$



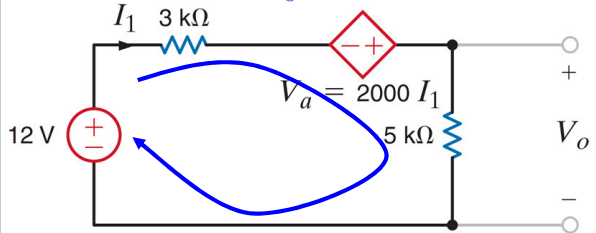
- Calcular  $V_{ec}$ ,  $V_{ad}$  e  $V_{eb}$



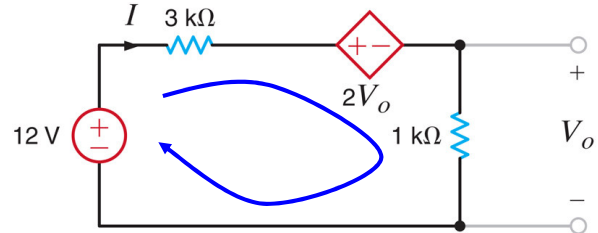
- Calcular  $V_{bd}$



- Calcular  $V_o$



$$\begin{cases} 3I_1 - V_a + 5I_1 - 12 = 0 \\ V_a = 2I_1 \end{cases} \quad I_1 = 2mA \quad V_o = 10V$$

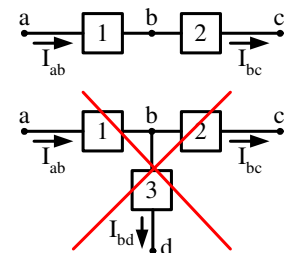


$$\begin{cases} 3000I + (2V_o) + V_o - 12 = 0 \\ V_o = 1000I \end{cases} \quad \begin{cases} I = 2mA \\ V_o = 2V \end{cases}$$

## Ligação em série e em paralelo

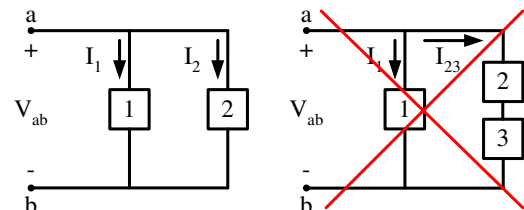
- Componentes 1 e 2 ligados em série

- têm um nó comum
  - nó b
- passa a mesma corrente nos dois componentes  $I_{ab} = I_{bc}$

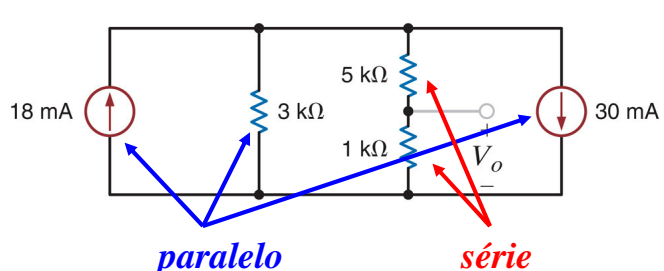
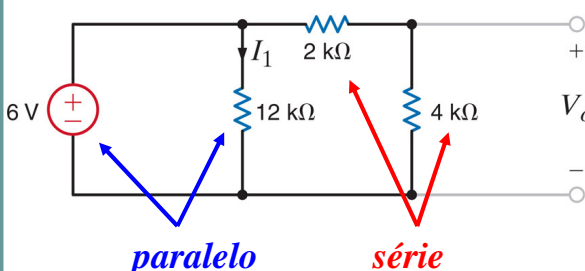


- Componentes 1 e 2 ligados em paralelo

- têm dois nós comuns
  - nós a e b
- tensão aos terminais é a mesma  $V_{ab}$



- Ligação série / paralelo?



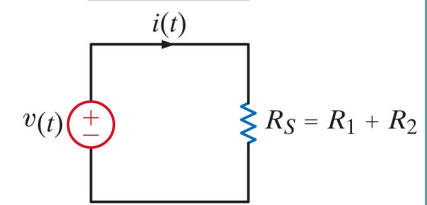
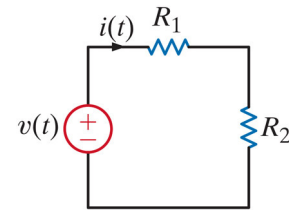
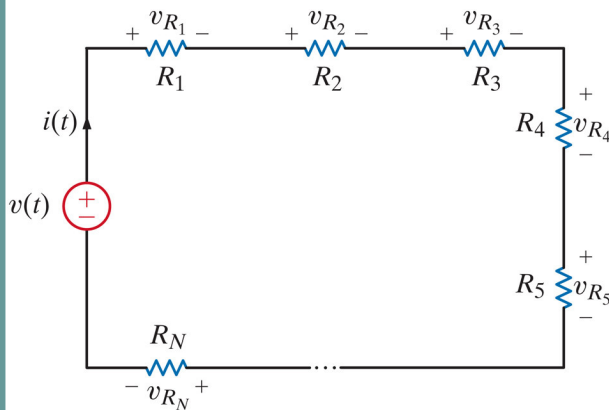
- Duas resistências em série somam-se**

$$R_s = R_1 + R_2$$

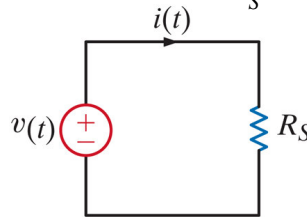
- KVL**

$$R_1 i + R_2 i - v = 0 \quad v = (R_1 + R_2) i \quad \frac{v}{i} = R_1 + R_2$$

- N resistências em série somam-se**



$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N$$



- RS é sempre maior do que as resistências da série**

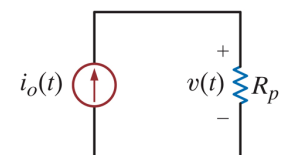
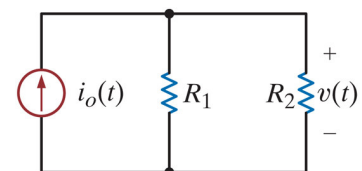
# Resistências em paralelo

- Duas resistências em paralelo**

- KCL**

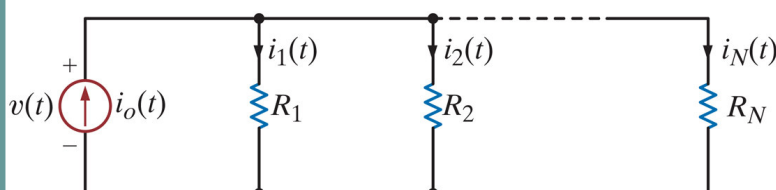
$$i_o = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} \quad i_o = v \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \frac{i_o}{v} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad G_p = G_1 + G_2 \quad R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



$$R_p = R_1 // R_2$$

- N resistências em paralelo**

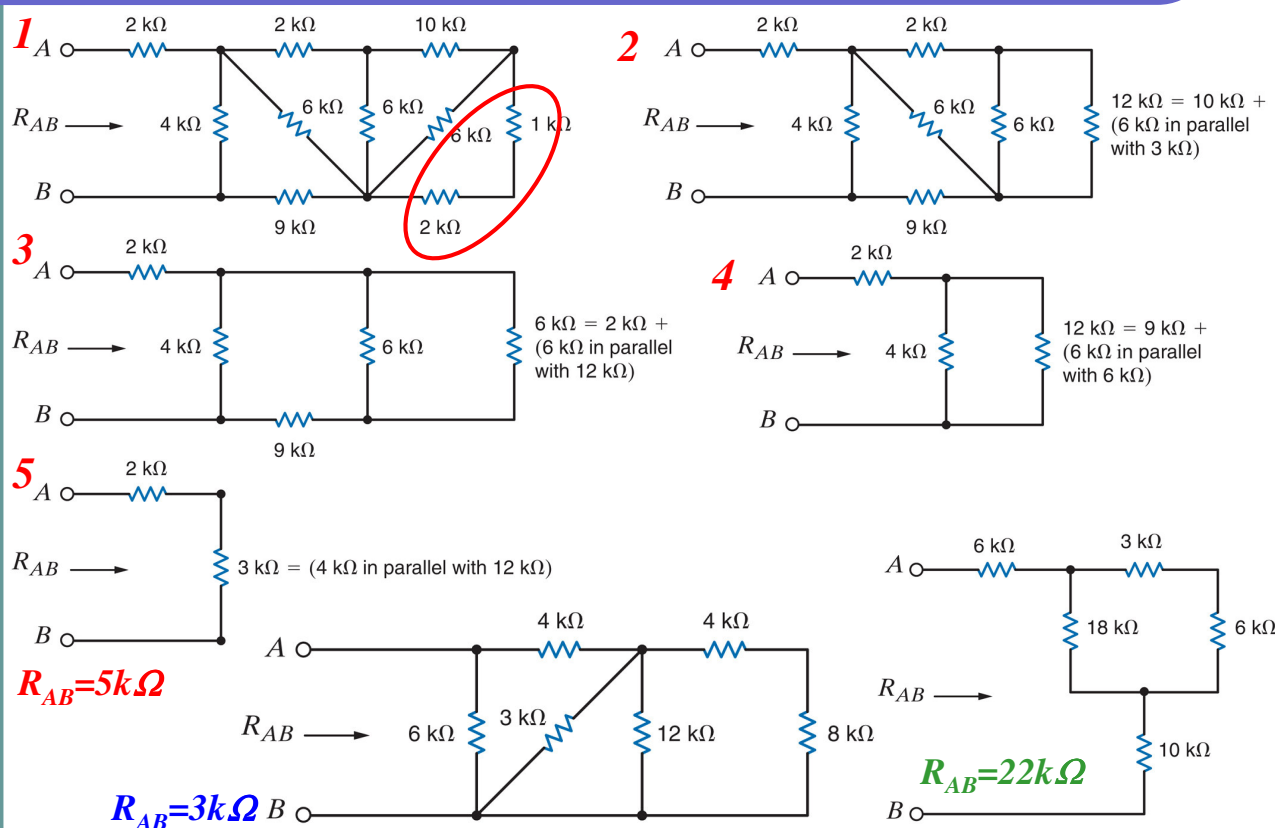


$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

$$R_p = R_1 // R_2 // R_3 // \dots // R_N$$

- RP é sempre menor do que as resistências do paralelo**

- N resistências iguais**  $R_p = R / N$



## Divisor de Tensão

- A tensão divide-se entre duas resistências em série na proporção directa do valor das suas resistências

KCL

$$\begin{cases} i = i_{ab} = i_{R1} \\ i_{ab} = i_{bc} = i_{R2} \end{cases} \quad i = i_{R1} = i_{R2}$$

KVL (abca)

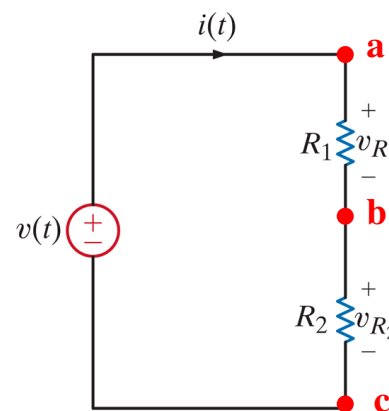
$$v_{R1} + v_{R2} - v = 0$$

Lei Ohm

$$\begin{cases} v_{R1} = R_1 i \\ v_{R2} = R_2 i \end{cases} \quad R_1 i + R_2 i - v = 0$$

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2} \quad v_{R1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v \quad v_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

$R_1 = R_2$   $v_{R1} = v_{R2} = \frac{v}{2}$   $R_1 = 0$   $\begin{cases} v_{R1} = 0 \\ v_{R2} = v \end{cases}$   $R_1 = +\infty$   $\begin{cases} v_{R1} = v \\ v_{R2} = 0 \end{cases}$

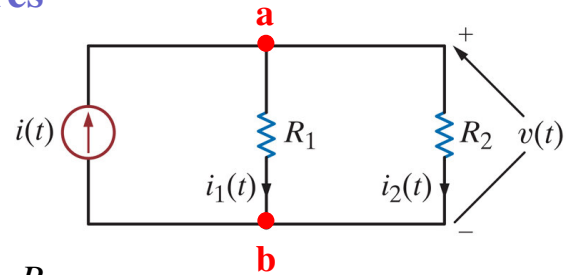




- A corrente divide-se entre duas resistências em paralelo na proporção inversa dos seus valores

- KCL  $i = i_1 + i_2$

- Lei Ohm  $\begin{cases} v = v_{ab} = R_1 i_1 \\ v = v_{ab} = R_2 i_2 \end{cases}$



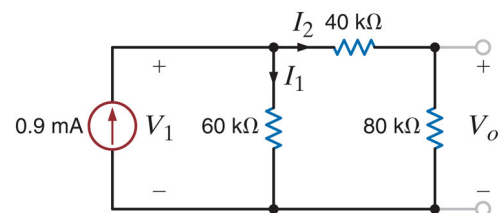
$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \quad i_2 = \frac{R_1}{R_2} i_1 \quad i = i_1 + \frac{R_1}{R_2} i_1$$

$$\begin{cases} i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \\ i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \end{cases} \quad G = \frac{1}{R} \quad \begin{cases} i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i \\ i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i \end{cases}$$

- $R_1 = R_2$   $i_1 = i_2 = \frac{i}{2}$   $R_1 = 0$   $\begin{cases} i_1 = i \\ i_2 = 0 \end{cases}$   $R_1 = +\infty$   $\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = i \end{cases}$

## Exemplo de aplicação

- Calcular  $I_1$ ,  $I_2$  e  $V_o$
- Divisor de corrente e Lei de Ohm

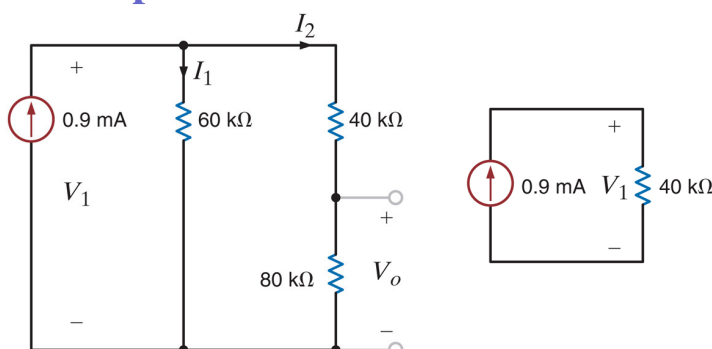


$$I_1 = \frac{40 + 80}{60 + (40 + 80)} 0.9 = 0.6 \text{ mA}$$

$$V_o = 80 \text{ k} \times I_2 = 24 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{60}{60 + (40 + 80)} 0.9 = 0.3 \text{ mA}$$

- Simplificar resistências e usar divisor de tensão



$$R_1 = 60 \parallel (80 + 40) = 40 \text{ k} \Omega$$

$$V_1 = R_1 I_1 = 40 \times 0.9 = 36 \text{ V}$$

$$V_o = \frac{80}{80 + 40} V_1 = 24 \text{ V}$$

- Calcular  $V_S$  sabendo que a potência fornecida pela fonte de corrente é 0W

- identificar nós

- $P_{\text{fonte I}} = 0W$

$$P_{\text{fonte I}} = V_{\text{fonte I}} I_{\text{fonte I}} = V_{eb} I_{eb} = 0 \Rightarrow V_{eb} = 0$$

- marcar corrente  $I_E$

- KCL nós a e f  $I_E = I_{ab} = I_{fa} = I_{ef}$

- KVL malha elementar à esquerda (abefa)

$$3I_E + \underbrace{V_{be}}_0 + 2I_E - 18 = 0 \quad I_E = \frac{18}{5} A$$

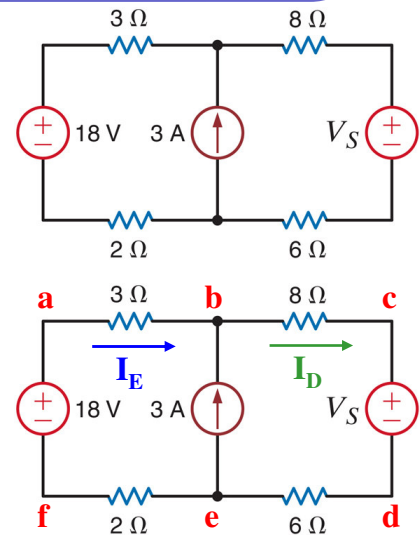
- marcar corrente  $I_D$

- KCL nó b  $I_E + 3 = I_D \quad I_D = \frac{33}{5} A$

- KCL nós c e d  $I_D = I_{bc} = I_{cd} = I_{de}$

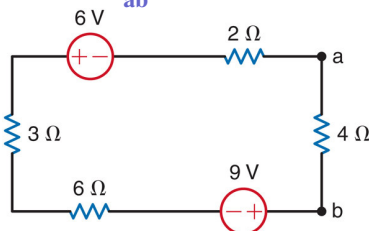
- KVL malha elementar à direita (bcdeb)

$$8I_D + V_S + 6I_D + \underbrace{V_{eb}}_0 = 0 \quad V_S = -14I_D = -92,4V$$

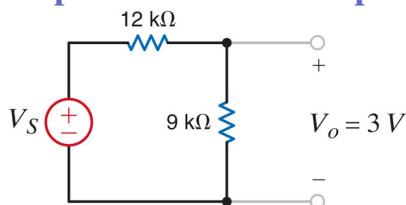


## Exemplos de aplicação

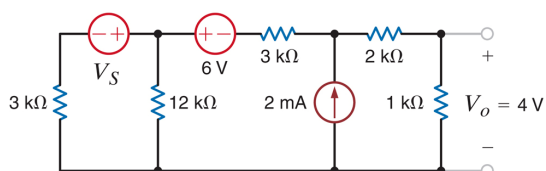
- Calcular  $V_{ab}$



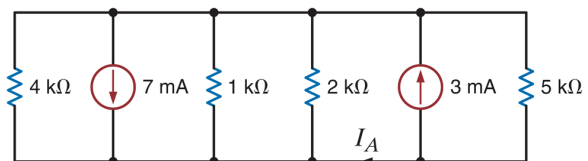
- Qual a potência fornecida por  $V_S$ ?



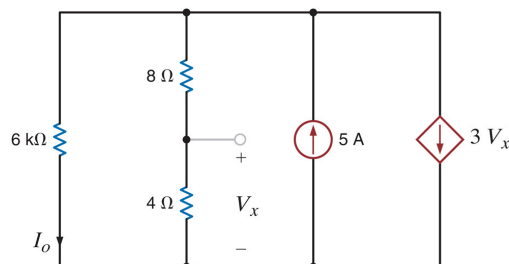
- Quanto vale  $V_S$ ?



- Quanto vale  $I_A$ ?



- Calcular  $I_o$



- Quanto vale  $V_1$ ?

