b) O periodograma é a T.F. da estimativa da autocorrelação ($c_{xx}[m]$).

$E\{I_N(\Omega)\} = ?$

$$I_N(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{xx}[m]\, e^{-j\Omega m} \quad \text{(Definição de DTFT)}$$

$$E\{I_N(\Omega)\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E\{c_{xx}[m]\}\, e^{-j\Omega m}$$

$$E\{c_{xx}[m]\} = \underbrace{\frac{N-|m|}{N}\phi_{xx}[m]}\quad \text{(alínea anterior)}$$

Então $$E\{I_N(\Omega)\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{N-|m|}{N}\phi_{xx}[m]\, e^{-j\Omega m}$$

Nos métodos clássicos $\phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[-m]$ e $\phi_{xx}[m] = 0 \ \forall |m| > N-1$

Então podemos tirar os valores nulos do somatório e

$$\boxed{E\{I_N(\Omega)\} = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N}\phi_{xx}[m]\, e^{-j\Omega m}} \quad \text{c.q.d}$$

c) A propriedade da convolução da T.F. diz que:

$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$

$x[n]\cdot y[n] \longleftrightarrow X(\Omega) * Y(\Omega)$

Como $$E\{I_N(\Omega)\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{N-|m|}{N}\phi_{xx}[m]\, e^{-j\Omega m}$$

Então pela prop. conv.: $\text{DTFT}\{x[m]\cdot y[m]\}$

$$E\{I_N(\Omega)\} = X(\Omega) * Y(\Omega) = P_{xx}(\Omega) * \underbrace{\frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{N}{2}\Omega}{\sin\Omega/2}\right)^2}$$

D.T.F.T da janela triangular

d) O método de Bartlett surge da necessidade de diminuir a variância do periodograma. De facto esperava-se que o periodograma por ser a T-F. da ~~est~~ estimativa ($C_{xx}[m]$) da sequência de autocorrelação fosse um estimador consistente por ser a T-F. de um estimador também ele consistente. Mas de facto não é isso que acontece e a variância do periodograma não desce c/ o aumento da amostra. Sabe-se da estatística que a soma de K variáveis aleatórias independentes e idênticas distribuídas (i.i.d.) gera uma v.a. cuja variância é $\frac{1}{K}$ x a var de cada uma das v.a. somadas. Por esta razão Bartlett sugeriu a média de periodogramas como uma forma de diminuição da variância do periodograma. O método consiste então em dividir os dados (N) em K segmentos de M dados. Fazer o periodograma de cada segmento e a média dos K periodogramas. O método reduz a resolução espectral de $K = \frac{N}{M}$ uma vez que o periodograma de N pontos tem também N pontos na frequência, logo cada periodograma de M pontos terá $M = N/K$ pontos na frequência. No entanto como o periodograma pode ser calculado via FFT pois $I_N(k) = |X(k)|^2/M$ podemos calcular uma FFT de N pontos para um sinal de M pontos mantendo assim a resolução espectral. Isto é conseguido juntando $N-M$ zeros aos M pontos do sinal. A inclusão de zeros não traz mais informação e por isso o aumento de resolução espectral por esta via não é efectivo ou seja não melhora o conhecimento do sinal.

e) $x[n]$ tem média nula e variância σ_x^2

$$\mathrm{var}\{X(k)\} = E\{|X(k)|^2\} - E^2\{X(k)\}$$ por definição.

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} \Rightarrow E\{X(k)\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{E\{x[n]\}}_{0} e^{-j\ldots} = 0$$

Então $$\mathrm{var}\{X(k)\} = E\{|X(k)|^2\} = E\{X(k).X^*(k)\}$$

$$= E\left\{\frac{1}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1} x[n_1]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_1} \; \frac{1}{N}\sum_{n_2=0} x[n_2]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n_2}\right\}$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum\sum \underbrace{E\{x[n_1]\,x[n_2]\}}_{\sigma_x^2\,\delta[n_1-n_2]} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n_1-n_2)}$$

$$\text{var}\{X(n)\} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n^2 \, e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n_1-n_2)} = \boxed{\frac{\sigma_n^2}{N}}$$

$=0$

f) Para um sinal de média nula a sua potência será

$$E\{x^2[n]\} = \sigma_n^2 + m_n^2 = \sigma_n^2$$

No domínio das frequências temos que a densidade espectral é $|X(n)|^2$. A potência será a densidade espectral ~~de tod~~ somada em todas as k componentes ou seja

$$P = \sum_k E\{|X(n)|^2\} = N \cdot \frac{\sigma_n^2}{N} = \sigma_n^2 = \text{ao calculado}$$

no domínio do tempo.

g) $x[n] \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow y[n]$ $\quad H(z) = \dfrac{1}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$\Leftrightarrow Y(z)\left[1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right] = X(z)$$

Aplicando a T.Z. inversa a ambos os membros da eq. temos

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \underbrace{x[n]}_{\text{ruído branco}}$$

ou seja

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

$n-m-(n-k)$

$k-m = m-k$

par

$$y[n]\cdot y[n-m] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\, y[n-m]. \text{ Aplicando } E\{\cdot\}$$

$$\boxed{\phi_{yy}[-m] = \phi_{yy}[m] = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[m-k]}$$

causal

Universidade do Minho

(a) ______ Unidade Curricular ______

Curso ______ Docente ______

ALUNO (b) ______ em __/__/____

h) Com 4 amostras podemos calcular $(4-1)\times 2+1=7$ valores de autocorrelação

$C_{uu}[-3]$, $C_{uu}[-2]$, $C_{uu}[-1]$, $C_{uu}[0]$, $C_{uu}[1]$, $C_{uu}[2]$, $C_{uu}[3]$

Usando a eq. obtida na alínea anterior:

$\phi_{44}[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{44}[n-k]$ podemos escrever um

sistema de 3 eq. a 3 incógnitas (eq. de Yule-Walker)

$$\begin{bmatrix} \phi_{44}[0] & \phi_{44}[1] & \phi_{44}[2] \\ \phi_{44}[1] & \phi_{44}[0] & \phi_{44}[1] \\ \phi_{44}[2] & \phi_{44}[1] & \phi_{44}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{44}[1] \\ \phi_{44}[2] \\ \phi_{44}[3] \end{bmatrix}$$

Os $\hat{a}_k$'s determinados pela solução deste sistema são os que minimizam o erro quadrático médio, ou seja:

$$MSE = E\{(X_n-\hat{X}_n)^2\} = E\{(X_n-\hat{X}_n)(X_n-\hat{X}_n)\}$$

$$= E\{X_n(X_n-\hat{X}_n)\} - E\{\underbrace{\hat{X}_n}_{\text{dado}}(\underbrace{X_n-\hat{X}_n}_{\text{erro}})\}$$

Como o erro é ortogonal aos dados então,

$$MSE = E\{X_nX_n - X_n\hat{X}_n\} = E\{X_nX_n - X_n\sum_{k=1}^{N} a_k X_{n-k}\}$$

$$= E\{X_n^2\} - \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{nn}(k)$$

$$= \phi_{44}[0] - \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{44}(k)$$

(a) - Exercício escrito ou exame final

(b) - Nome completo em letra de imprensa

Universidade do Minho

(a)

Curso Teste 2 2020_2021 Unidade Curricular Docente

ALUNO (b) MIETI em __/__/__

1.

a) Um estimador é consistente se quer a sua polarização quer a sua variância tenderem para zero quando se vai tendo mais conhecimento sobre o processo ($N \to +\infty$)

No caso concreto a variância é proporcional a $\frac{1}{N}$ logo

$\lim_{N \to +\infty} var\{C_{xx}[m]\} = 0$, o que significa que à medida que se vai aumentando o nº de dados a variância vai diminuindo. É preciso que se verifique o mesmo c/ a polarização para que o estimador $C_{xx}[m]$ seja consistente.

$$B_{C_{xx}} = \phi_{xx}[m] - E\{C_{xx}[m]\}$$

$$E\{C_{xx}[m]\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E\{x[n]\, x[n+m]\} = \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}[m]$$

$$B_{C_{xx}} = \phi_{xx}[m] - \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[m]\left(1 - \frac{N-|m|}{N}\right)$$

$$= \frac{|m|}{N} \phi_{xx}[m]$$

$\lim_{N \to +\infty} B_{C_{xx}} = 0 \Rightarrow$ O estimador $C_{xx}[m]$ é consistente.

(a) - Exercício escrito ou exame final (b) - Nome completo em letra de imprensa

2. $s[n] \rightarrow m_s, \sigma_s^2$ $\qquad e[n] \xrightarrow{\text{w.n.}} m_e, \sigma_e^2$

a) $x[n] = s[n] + e[n]$

$\phi_{xx}[m] = E\{x[n]\, x[n+m]\} = E\{(s[n] + e[n])(s[n+m] + e[n+m])\}$

$= E\{s[n]\, s[n+m] + s[n]\, e[n+m] + e[n]\, s[n+m] + e[n]\, e[n+m]\}$

$* \quad \phi_{xx}[m] = \phi_{ss}[m] + 2\phi_{se}[m] + \phi_{ee}[m]$

se $s[n] = A\cos(w_0 n + \varphi)$ então $\boxed{m_s = 0}$

$\phi_{ss}[m] = \gamma_{ss}[m] = E\{s[n]\, s[n+m]\} = A^2 E\{\cos(w_0 n + \varphi)\cos(w_0(n+m) + \varphi)\}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$+ \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \Rightarrow \cos a \cos b = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

$\phi_{ss}[m] = \dfrac{A^2}{2} E\{\cos(2w_0 n + w_0 m + 2\varphi) + \cos(w_0 m)\}$

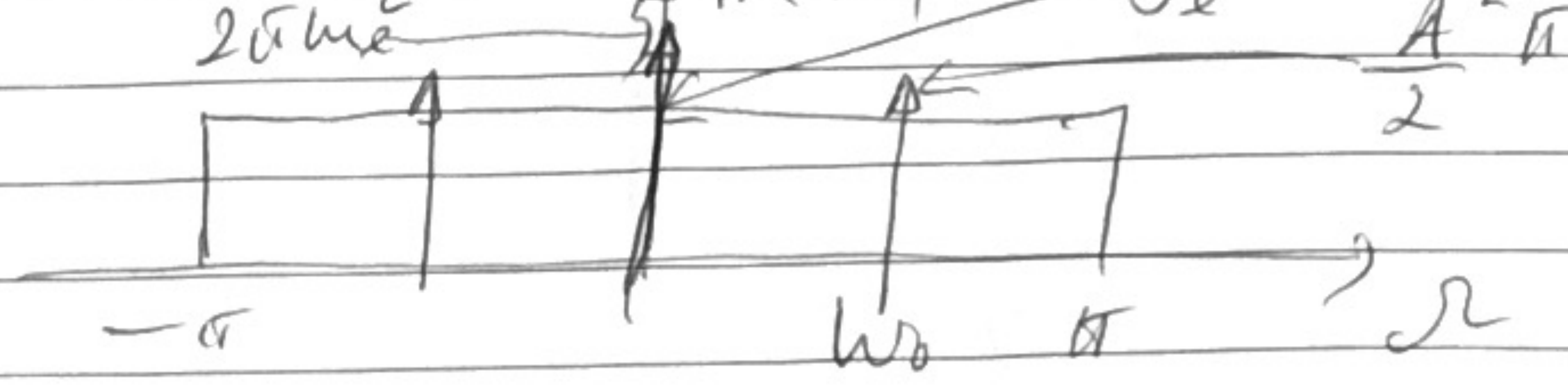
$= \dfrac{A^2}{2}\cos(w_0 m)$. Substituindo este resultado

em $*$ ficamos c/

$\phi_{xx}[m] = \dfrac{A^2}{2}\cos(w_0 m) + \underbrace{2 m_s m_e}_{=0} + \sigma_e^2 \delta[m] + m_e^2$ c.q.

b) $P_{xx}(w) = \text{DTFT}\{\phi_{xx}[m]\}$

$= \dfrac{A^2\pi}{2}\left(\delta(\Omega - w_0) + \delta(\Omega + w_0)\right) + \sigma_e^2 + 2\pi m_e^2 \delta(\Omega)$



c) $$P_{xx}(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow \underbrace{P_{ss}(\omega)}_{\text{sinal limpo}}$$

$$H(\omega) = \frac{P_{ss}(\omega)}{P_{ss}(\omega) + P_{ee}(\omega)} \underset{\text{estacionaridade}}{=} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_e^2 + m_e^2}$$

$$h[n] = \text{IDTFT}\{H(\omega)\} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_e^2 + m_e^2}\,\delta[n]$$

d) $$s[n] = m_x + (x[n] - m_x) * h[n]$$

$$= m_x + (x[n] - m_x)\frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_e^2 + m_e^2}$$

Como $m_x = m_s + m_e$ e $m_s = 0$ temos

$$\boxed{s[n] = m_e + (x[n] - m_e)\frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_e^2 + m_e^2}}$$

É preciso estimar m_e e σ_s^2

m_e e σ_e^2 podem ser estimados no início do áudio quando ainda só há ruído.

$\sigma_s^2 = \sigma_x^2 - \sigma_e^2$ e pode ser estimado online pela variância do sinal observado (σ_x^2) e σ_e^2 estimado antes.