

tópicos de

ANÁLISE DE CIRCUITOS

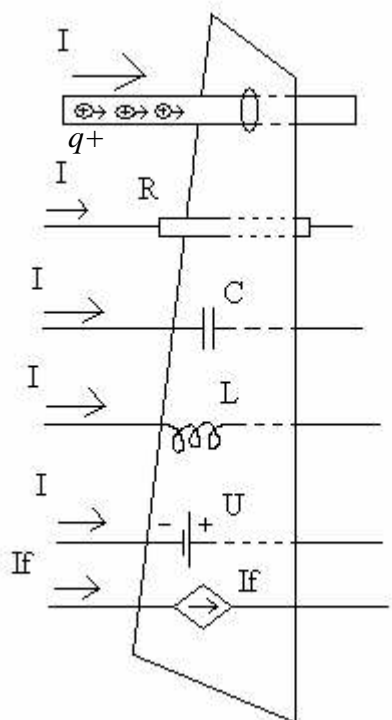
Unidade Curricular de Componentes e Circuitos Electrónicos

Mestrado Integrado em Engenharia das Comunicações

Luís Botelho Ribeiro
Universidade do Minho

1- Sistemas de corrente contínua ou regime estacionário

Carga e corrente eléctrica



Partículas carregadas com uma dada carga Q e com certa mobilidade podem deslocar-se em meios sólidos (metais, carvão, semicondutores, etc.), líquidos, plasmas e gasosos. Tais partículas podem ser mais ou mesmo elementares: electrão, protão, iões não neutros, partículas de água ionizadas.

Definimos corrente eléctrica como a taxa de passagem de carga eléctrica num dado ponto por unidade de tempo:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

I - ampére; Q - colomb; t - segundos;

Caso a corrente seja constituída pelo transporte de cargas elementares semelhantes a carga total corresponderá a $N \cdot q+$, em que N é o máximo de cargas que passam durante o

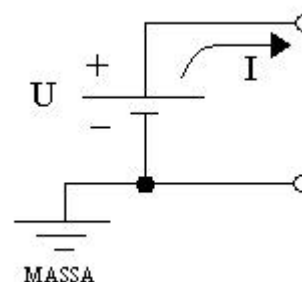
intervalo Δt e $q+$ é o valor da carga elementar presente em cada partícula contada.

NOTA IMPORTANTE! O sentido convencional da corrente define-se com cargas positivas.

As correntes nos circuitos e componentes que analisaremos são constituídas por electrões de carga negativa. O movimento destes, por conseguinte, terá sentido contrário ao da corrente convencional. Em materiais semicondutores, por exemplo de tipo P, o elemento de carga é positivo. Mas não estudaremos situações dessas no presente curso. Também convém notar que estas correntes poderão ser variáveis no tempo, como estudaremos na 2ª parte do curso. Nesta fase, consideramos sempre constantes todas as tensões e correntes nos circuitos, sejam nas fontes de tensão/corrente seja nos restantes componentes.

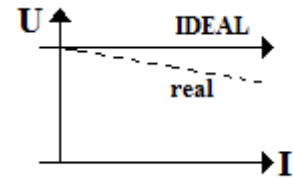
Tensão eléctrica – diferença de potencial eléctrico

As correntes eléctricas em circuitos têm a sua causa em forças electromotrizes originadas por fontes de tensão (também existem fontes de corrente mas estas podem ser consideradas como geradores de tensão controlados de molde a debitar uma determinada corrente específica). O símbolo de uma fonte de tensão é o seguinte, onde se



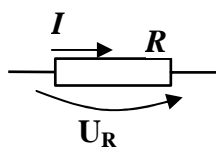
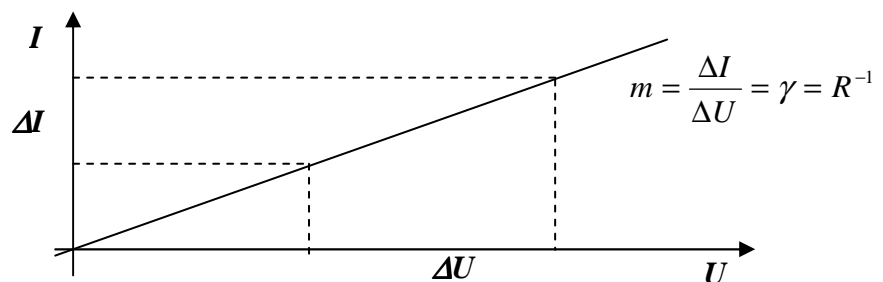
representa também a corrente com o sentido convencional.

FONTE DE TENSÃO IDEAL – neste curso consideramos sempre a tensão usada por uma fonte é completamente independente da corrente que lhe é pedida pelo circuito externo. Este é um cenário IDEAL que na realidade não se pode atingir.



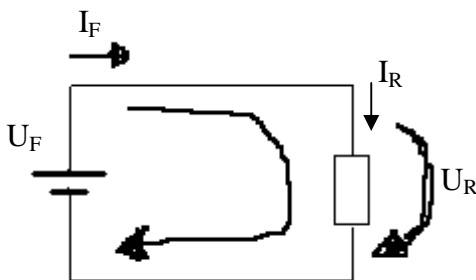
Lei de Ohm

A lei de Ohm descreve toda uma classe de componentes passivos nos quais se verifica uma proporcionalidade entre a tensão que lhes é aplicada e a corrente que os atravessa (do terminal mais positivo para o terminal mais negativo). Esta proporcionalidade tanto se manifesta como uma resistência (U/I) como da sua inversa (I/U) - condutância. Para já apenas lidamos com componentes sem parte complexa – mais tarde veremos como a resistência (real) pode ser generalizada numa impedância (complexa), e a condutância (real) numa admitância (complexa).



$$R = \frac{U}{I} \quad \begin{array}{l} \nearrow I = \frac{U}{R} \\ \searrow U = R \cdot I \end{array}$$

Circuito simples com resistências

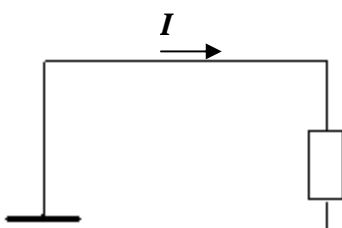


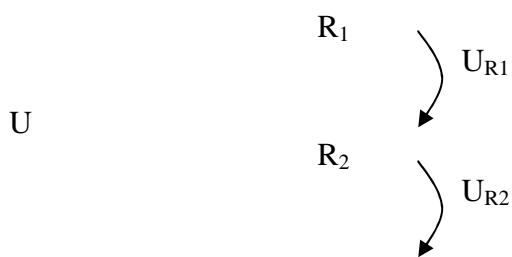
$$U_F = U_R = U$$

$$I_F = I_R = I$$

$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U}{I}$$

Associação em série: (R1 pode ser diferente de R2)





$$U = U_1 + U_2$$

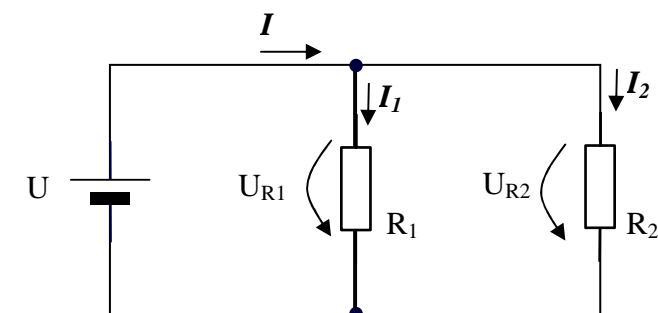
Aplicando a lei de Ohm a cada resistência, temos:

Mas se $U_1 = R_1 I$ e $U_2 = R_2 I$ então $U = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$. Se $R_1 + R_2 = \frac{U}{I}$ então, pela Lei de Ohm, existe

uma resistência $R_{\text{série}}$ que sujeita à mesma tensão U terá como resultado a mesma corrente I . Tal resistência será então equivalente à associação série apresentada desde que tenha o valor $R_{\text{eq}} = R_{\text{série}} = R_1 + R_2$

A resistência equivalente de uma série tem o valor da soma das resistências (podem ser mais do que duas)

Associação em paralelo:



$$U = U_{R1} = U_{R2}$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$\frac{U}{I} = R_{eq} \longrightarrow \frac{I}{U} = \frac{1}{R_{eq}}$$

$$\frac{I}{U} = \frac{I_1 + I_2}{U} = \frac{I_1}{U_{R1}} + \frac{I_2}{U_{R2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \longrightarrow R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Regra prática válida para 2 resistências em paralelo.

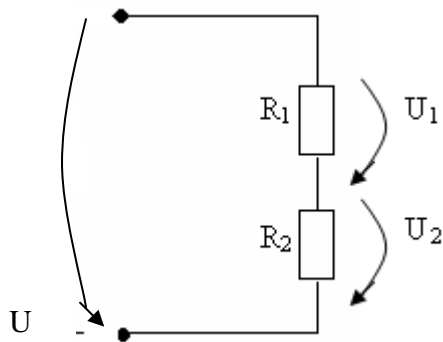
Havendo não duas mas N elementos ôhmicos (resistências) em paralelo, a condutância paralelo será a soma de todas as condutâncias e, inversamente, a resistência paralelo será dada por:

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_N$$

4

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}}$$

Divisor de Tensão



Que relação há entre U_2 e U ?
Ao estudar a associação série vimos que:

$$\begin{cases} U_2 = R_2 \cdot I \\ I = \frac{U}{R_1 + R_2} \end{cases} \Rightarrow U_2 = R_2 \cdot \left(\frac{U}{R_1 + R_2} \right)$$

$$\therefore U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$$

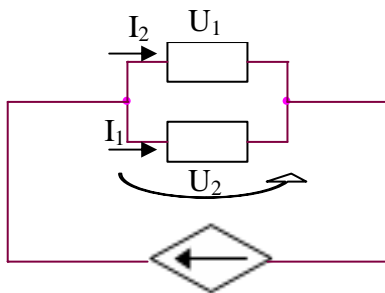
E a relação entre U_1 e U ??

$$\begin{cases} U_1 = R_1 \cdot I \\ I = \frac{U}{R_1 + R_2} \end{cases} \Rightarrow U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Então a tensão total U divide-se pelas duas resistências de modo proporcional ao valor de cada uma. Se forem iguais, a tensão divide-se igualmente. Se uma for duas vezes maior que a outra, a sua tensão será o dobro da outra, sendo que a soma dará sempre igual a U .

Divisor de Corrente

Como se divide uma corrente I por duas resistências em paralelo?



Vimos no estudo da associação paralelo que a tensão é comum as resistências R_1 e R_2 . A corrente I , essa irá dividir-se em duas!

Estudo de I_2

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = Y_2 \cdot U$$

$$U = R_{eq} \cdot I$$

$$com \quad R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = \frac{1}{R_2} \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I \right) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I$$

Se $R_1 < R_2$ então temos $I_1 > I_2$. Notar a diferença entre esta expressão e a obtida para o divisor de tensão!

Naturalmente para a resistência R_1 iríamos obter a corrente:

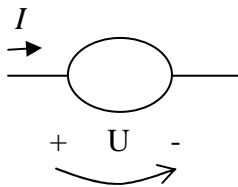
$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

Logicamente, a soma de correntes vai dar a corrente total disponível I :

$$I_1 + I_2 = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) I = 1 \cdot I$$

POTÊNCIA ELÉCTRICA

Define-se desta forma a potência eléctrica consumida num qualquer elemento de circuito eléctrico:

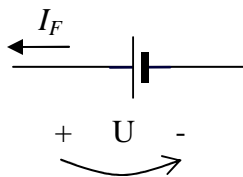


$$P_{\text{consumida}} = U \cdot I$$

(notar bem os sentidos convencionados para a corrente e a tensão)

Se num dado circuito um ou mais componentes consomem potência, é claro que outros terão que estar a fornecê-la ao mesmo tempo. Nesses elementos geradores de potência, o valor de P_{consum} irá seguramente aparecer com sinal negativo, o que é o sintoma inequívoco dessa situação, ou seja de que se trata de um elemento fornecedor de energia ao circuito e não consumidor.

Poderia igualmente definir-se a potência fornecida ao circuito por uma fonte, mudando o sentido da corrente convencionada, da forma ilustrada na figura para uma fonte de tensão:



$$P_{\text{fornecida}} = U \cdot I_F$$

(notar que a corrente tem agora o sentido contrário da tensão no componente)

Num circuito com várias fontes, podem algumas estar a fornecer e outras a receber/consumir potência. É o que sucede quando, por exemplo, recarregamos a bateria de um telemóvel. O carregador transfere energia da rede pública para a pilha acumuladora do dispositivo, o qual apresentará então $P_{\text{consumida}} > 0$ e $P_{\text{fornecida}} < 0$.

Durante o funcionamento normal, sem ligação a qualquer tomada, teríamos na pilha $P_{\text{consumida}} < 0$ e $P_{\text{fornecida}} > 0$.

Numa resistência, regida pela Lei de Ohm, a potência consumida pode exprimir-se em função de R :

$$P = UI \quad P = RI^2$$

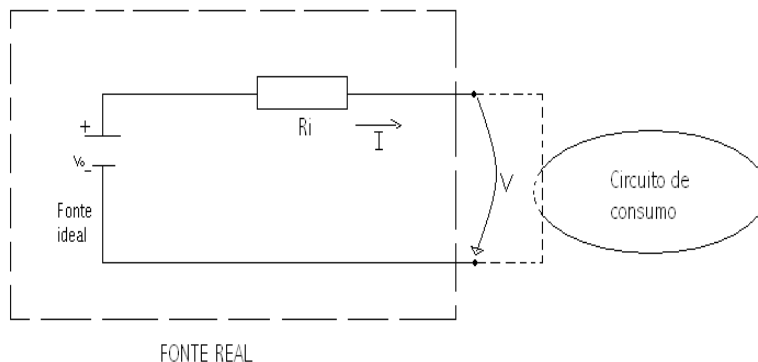
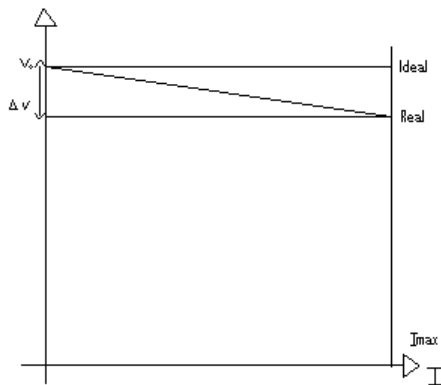
$$\Rightarrow$$

$$R = \frac{U}{I} \quad P = \frac{U^2}{R}$$

Nota: a potência consumida numa resistência será sempre positiva!!!

Teorema da máxima transferência de potência

As fontes de tensão na realidade apresentam uma diminuição da tensão disponível aos seus terminais quando se lhes pede corrente. Se este afastamento for aproximadamente proporcional á corrente solicitada, um modelo representativo da fonte real é constituído por uma fonte de tensão ideal em série com uma resistência – dita resistência interna R_i da fonte. O seu valor obtém-se facilmente do gráfico/característica $V \cdot I$ da fonte real;



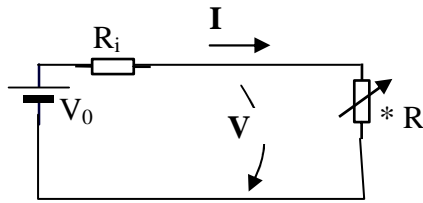
$V = V_0 - R_i \cdot I$

\nearrow *tensão ideal com fonte em aberto, quando $I=0$*
 \searrow *tensão disponível nos terminais da fonte.*

Pode-se querer saber qual é a máxima potência que esta fonte é capaz de debitar.

Vamos estudar a questão!

Ligamos a nossa fonte real a uma resistência R cujo valor vamos poder variar à procura do ponto de máxima potência consumida:



* este símbolo representa um potenciômetro, um componente que não é mais do que uma resistência variável, normalmente por meio de um cursor rotativo ou linear

A fonte de tensão real é fixa e fica completamente definida pelo par de valores V_0 e R_i . A potência consumida no potenciômetro R é então dada por

$$P = V \cdot I \quad (\text{os sentidos convencionados já são os correctos para } P_{\text{consum}}.)$$

Uma vez que R está em série com R_i , teremos $I = \frac{V_0}{R + R_i}$.

Constituindo R_i e R um divisor de tensão resistivo, tem-se

$$V = V_0 \cdot \frac{R}{R + R_i}$$

Então a potência consumida em R será expressa por

$$P_R = V_0 \cdot \frac{R}{R + R_i} \times \frac{V_0}{R + R_i} = V_0^2 \frac{R}{(R + R_i)^2}$$

Caso $R=0$

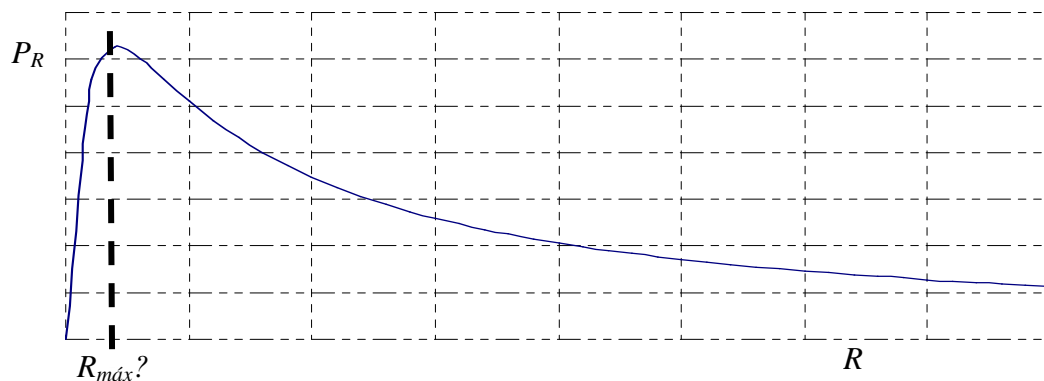
Temos o curto-circuito da fonte com a corrente no seu máximo. Mas como V será zero, a potência consumida em R será nula. Só há potência consumida em R_i , no interior da própria fonte, a qual deverá aquecer e pode mesmo danificar-se.

Caso $R=\infty$

A potência pode ser determinada com recurso à noção de limite:

$$P_{R=\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} P(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(V_0^2 \frac{R}{(R + R_i)^2} \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{V_0^2}{R} \right) = 0$$

Como a potência é nula para $R=0$ e $R=\infty$, e será sempre positiva por definição, a variação de P_R deverá apresentar algum máximo, conforme ilustra a figura.



O ponto de máxima potência obtém-se igualando a zero a derivada de P_R em ordem a R .

$$\frac{dPr}{dR} = V_0 * \frac{1 * (R + R_i)^2 - 2 * 1 * (R + R_i)^R}{(R + R_i)^4} = 0 \Leftrightarrow$$

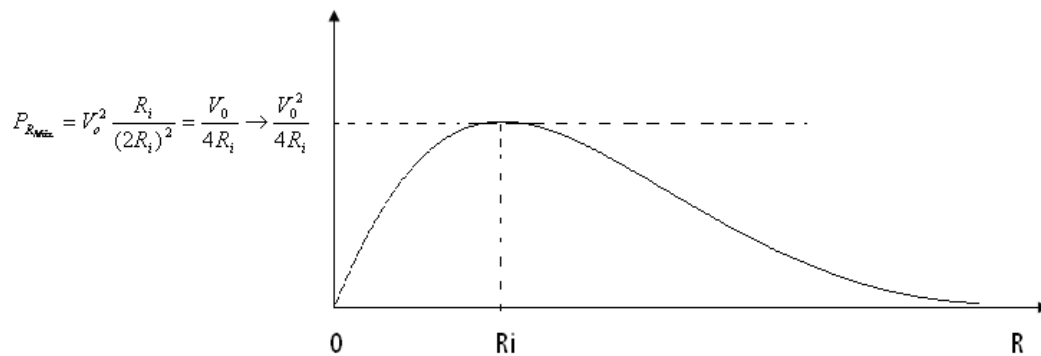
$$(R + R_i)^2 - 2R(R + R_i) = 0 * \frac{(R + R_i)^4}{V_0^2} \Leftrightarrow$$

$$R^2 + 2RR_i + R_i^2 - 2R^2 - 2RR_i = 0 \Leftrightarrow R_i^2 - R^2 = 0$$

$$R = R_i$$

Este resultado conduz ao enunciado do teorema de máxima transferência de potência:

- **Uma fonte de tensão (real) debita o máximo de potência sofre uma carga cuja resistência é igual à sua própria R_i .**



Rendimento

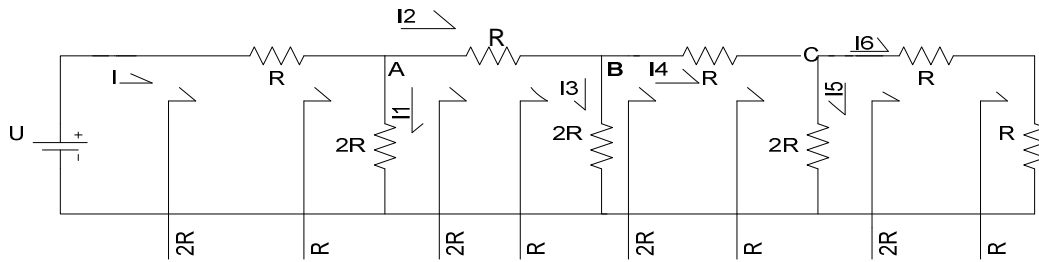
O rendimento define-se habitualmente como a razão entre a potência útil (consumida em R) e a potência total debitada pelo gerador (consumida em R e R_i):

$$n = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{total}}} * 100\% = \frac{RI^2}{(R + R_i)I^2} * 100\% = \boxed{\frac{R(I)}{R + R_i(I)} * 100\%} = \frac{V}{V_o} * 100\%$$

O valor do rendimento é, em qualquer sistema real, sempre inferior a 100%.

Alguns circuitos que talvez já saibamos analisar com o que já aprendemos:

a)



O circuito pode ser representado por uma resistência equivalente que se obtêm associando sucessivamente todas as resistências desde a mais afastada da fonte até à primeira.

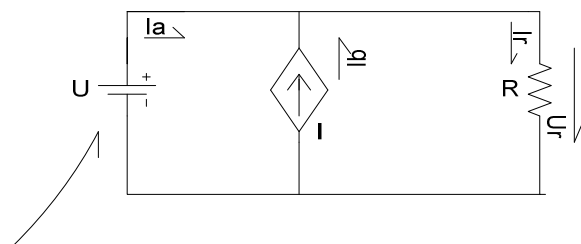
$$\therefore I = \frac{U}{2R}$$

Esta corrente dividir-se-á por I_1 e I_2 . Ora como I_2 vai para uma resistência de $2R$ e a resistência equivalente à direita de A também é $2R$, teremos sem dúvida:

$$I_1 \frac{2R}{2R + 2R} \cdot I = \frac{I}{2} = I_2$$

Por argumentos semelhantes temos $I_3 = I_4 = \frac{I_2}{2} = \frac{I}{4}$ e finalmente $I_5 = I_6 = \frac{I_4}{2} = \frac{I}{8}$

b)



Paralelo onde há uma fonte de tensão: U comum!

A solução da análise de um circuito é um estado em que todas as leis do circuito e dos componentes são respeitadas/conciliadas. Neste caso temos 3 componentes:

i) Fonte de tensão impõe que $U_R = U$

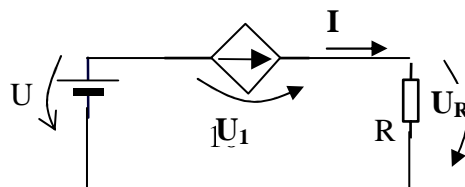
ii) Fonte de corrente impõe que $I_b = I$

iii) Resistência obedece à lei de Ohm $R = U_R/I_R$

Solução: $I_R = U/R$ (não depende de I !), conservação da carga $I_a + I_b = I_R \rightarrow \underline{I_a = I_R - I}$

Questão: Potência debitada ou consumida por cada componente?

c)



Nesta situação temos uma série de componentes dos quais consta uma fonte de corrente. Então a corrente que circula na malha **é comum a todos os componentes**, visto que não há qualquer derivação por onde a corrente se possa “escapar”.

A lei das tensões na malha garante-nos que


$$U = U_I + U_R$$

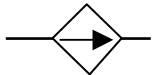
Aplicando a lei de Ohm à resistência R temos que $R = U_R / I$. Como as grandezas U e I estão definidas pelas respectivas fontes, só nos falta determinar qual será a tensão que vamos ter na fonte de corrente:

$$U_I = U - U_R = U - R \cdot I$$

Notar que a tensão U_I se pode tornar nula no caso $U = R \cdot I$ ou mesmo negativa se se verificar a condição $U < R \cdot I$.

Cálculos das potências nos diferentes elementos:

Fonte de tensão:  U e I com sentidos contrários \Rightarrow a fonte encontra-se a fornecer a potência $P_{fornecida} = U \cdot I$

Fonte de corrente:  U_I e I com sentidos concordantes \Rightarrow a fonte encontra-se a consumir a potência $P_{consumida} = U_I \cdot I$

Resistência R: uma resistência é sempre consumidora de potência, sendo o valor dado por $P_{consumida} = U_R \cdot I = R \cdot I^2$

Mas se a análise de circuito simples pode fazer-se com recurso a uma observação instantânea do esquema, quando estes ficam mais complexos há que obedecer a algumas regras de análise que nos permitam ser bem sucedidos.

Quantas equações? Quais equações?

Limitaremos o nosso estudo a circuitos planificáveis, ou seja, os que podem ser representados num diagrama plano sem linhas cruzadas. As Leis de Kirchof dão-nos tudo o que precisamos para obter o sistema de equações que nos dará a solução do (estudo de fundamento do) circuito. Na sua essência eles enumeram dois princípios:

- A soma algébrica das correntes num nó é nula.
- A soma algébrica das tensões ao longo de uma malha fechada é nula.

Em álgebra sabemos que um sistema de incógnitas só pode ter uma solução única se para descrever encontramos N equações linearmente independentes. Então os nossos circuitos

poderão ter solução quando deles conseguirmos extrair tantas equações de nós e malhas quantas as tensões e correntes que precisamos determinar para os descrever completamente.

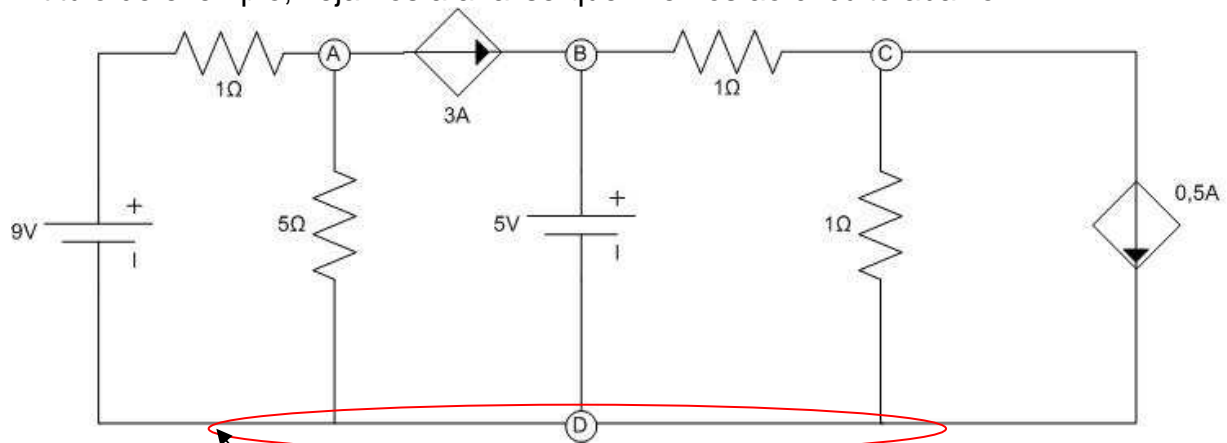
Definimos

- Nó – ponto de ligação de mais de dois ramos
- Malha – caminho fechado através de dois ou mais ramos
- Ramo – agregado de componentes e fios de ligação em série sem qualquer derivação intermédia

O número de nós linearmente independente de um circuito com N nós será $N-1$, visto que precisamos de definir um dos nós como referencia para todas as tensões (massa) e este não conta.

Na análise de uma malha é costume considerar-se com o sinal “+” as quedas de tensão (por exemplo em resistências) e com o sinal “-” os aumentos de potencial (fontes de tensão).

A título de exemplo, vejamos a análise que fizemos ao circuito abaixo



Não se consideram ramos quando não há componentes.

Há quatro nós: A,B,C,D; estes quatro, o nó D parece o mais indicado para Ser tomado como referencia, pois é a fonte de todos os ramos excepto A-B e B-C

Identificamos os ramos seguintes:

Ramo1: fonte 9V, $R=1\Omega$

Ramo2: $R=5\Omega$

Ramo3: fonte de corrente 3 A

Ramo4: fonte de tensão 5V

Ramo5: B-C (resistencia 1Ω)

Ramo6: C-D (resistência 1Ω)

Ramo7: C-D (fonte de corrente 0,5A)

Há 4 malhas elementares:

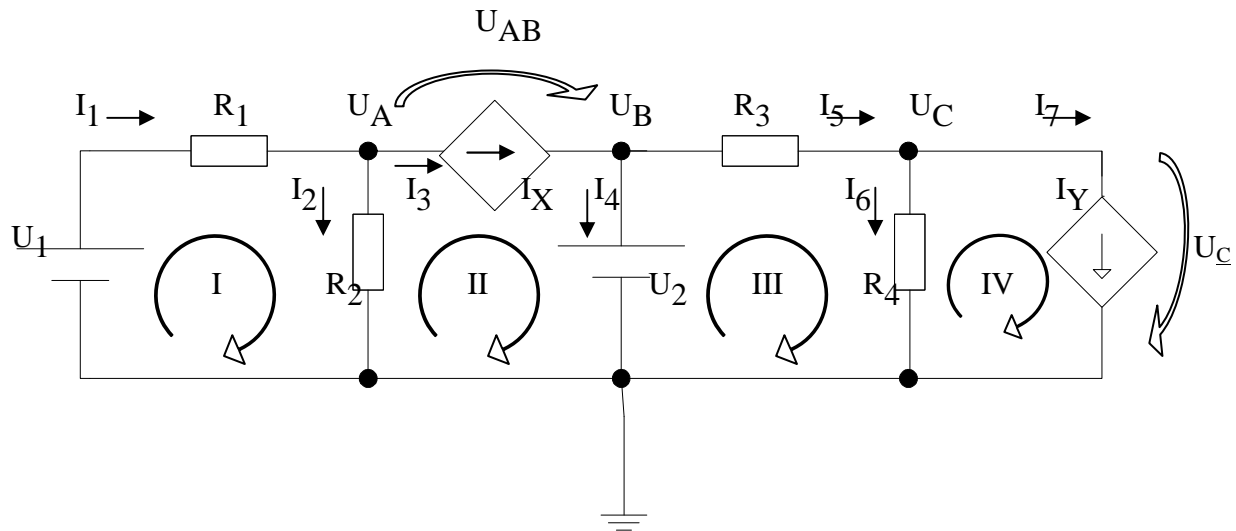
Malha1: FT 9V, $R=1\Omega$, $R=5\Omega$

Malha2: $R=5\Omega$, FC=3A, FT=5V

Malha3: $U_2=5V$, $R=1\ \Omega$, $R=1\ \Omega$

Malha4: $R=1\ \Omega$, $U_C=0,5A$

Vamos agora tentar analisar o circuito definindo tensões para TODOS os nós linearmente independentes e correntes em todos os ramos, sem procurar à partida qualquer tipo de simplificação – apenas a transcrição directa das leis de Kirchhoff para todas as malhas e nós. Redesenhamos o circuito com as variáveis de análise:



Aplicando as leis dos nós aos 3 nós independentes:

$$\text{Nó A: } I_1 = I_2 + I_3$$

$$\text{Nó B: } I_3 = I_4 + I_5$$

$$\text{Nó C: } I_5 = I_6 + I_7$$

Aplicamos a lei das malhas às 4 malhas existentes. A tensão nas fontes de corrente não é conhecida, devendo definir-se à custa das tensões convencionadas para os nós adjacentes a cada uma.

$$\text{Malha I: } -9V + 1\Omega \times I_1 + 5\ \Omega \times I_2 = 0$$

É costume e boa prática começar a descrição de um circuito utilizando os nomes das componentes. Quando estes são variáveis, como no caso de estar em fase de projecto, há toda a vantagem nesta postura. Assim:

$$\text{Malha I: } -U_1 + R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$$

$$\text{Malha II: } -R_2 I_2 + (U_A - U_B) + U_2 = 0$$

$$\text{Malha III: } -U_B + R_3 I_5 + R_4 I_6 = 0$$

$$\text{Malha IV: } -R_4 I_6 + U_C = 0$$

As variáveis a determinar são $I_1 \dots I_7$ e $U_A \dots U_C$, são 10 portanto. As equações que temos até agora são 3 dos nós e 4 das malhas. Faltam 3 para podermos almejar uma solução. Quais são?

Olhemos com atenção para o circuito à procura de condições sobre as nossas incógnitas que possam não estar contempladas nas equações que escrevemos.

- Começemos por olhar às tensões V_A , V_B e V_C . Notamos que V_B está ligada a uma fonte de tensão ideal entre o ponto B e a massa. Então temos mais uma equação:

$$U_B = U_2$$

- Olhando agora para as correntes notamos que duas delas coincidem com fontes de corrente, donde se tiram duas novas equações:

$$I_3 = I_x$$

$$I_7 = I_y$$

Temos finalmente um sistema de 10 equações e 10 incógnitas que podemos resolver por qualquer dos métodos aprendidos na álgebra linear.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 I_1 & -I_2 & -I_3 & & & & & & & & = 0 \\
 & & I_3 & -I_4 & -I_5 & & & & & & = 0 \\
 & & & & I_5 & -I_6 & -I_7 & & & & = 0 \\
 1.I_1 & +5.I_2 & & & & & & & & & = U_1 \\
 & -5.I_2 & & & & & & & & & = -U_2 \\
 & & & & 1.I_5 & +1.I_6 & & & & & = U_2 \\
 & & & & & -1.I_6 & & & & + U_C & = 0 \\
 & & & & & & & & & U_B & = U_2 \\
 & & I_3 & & & & & & & & = I_x \\
 & & & & & & & & & I_7 & = I_y
 \end{array}$$

Sabendo que $U_1 = +9V$, $U_2 = +5V$, $I_x = 3A$ e $I_y = 0,5A$ podemos descrever o sistema na forma dum produto matricial, reflectindo afinal as equações do circuito

$$\begin{bmatrix}
 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 I_1 \\
 I_2 \\
 I_3 \\
 I_4 \\
 I_5 \\
 I_6 \\
 I_7 \\
 U_A \\
 U_B \\
 U_C
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 9 \\
 -5 \\
 5 \\
 0 \\
 5 \\
 3 \\
 0,5
 \end{bmatrix}$$

Na forma matricial temos simplesmente um produto de uma matriz quadrada A (n linhas por n colunas) pela matriz-linha das n incógnitas, o que será igual a um vector com os termos independentes

$$A[n \times n] \cdot x[n \times 1] = b[n \times 1]$$

Colocado nesta forma, seria agora possível resolver o sistema utilizando qualquer algoritmo de resolução de equações matriciais que nos desse $x = A^{-1} \cdot b$. Um dos métodos mais

directos envolve a inversão da matriz A . Mas também se pode unilateralizar a matriz A , ou seja, transformá-la numa matriz triangular (com zeros na parte acima ou abaixo da diagonal principal). Pode-se inclusivamente diagonalizar A , tendo apensada a esta a matriz b de modo a que os termos independentes sejam também processados. Neste processo segue-se a chamada “regra de estrela”, a qual por meio de combinações lineares de linhas visa anular quaisquer elementos originalmente de A que estejam fora da diagonal principal. Em qualquer dos casos a solução que se obtém, com as tensões dadas em unidades de Volt e as correntes em Ampére, vem igual a,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,0 \\ 1,0 \\ 3,0 \\ 0,25 \\ 2,75 \\ 2,25 \\ 0,5 \\ 5 \\ 5 \\ 2,25 \end{bmatrix}$$

Qualquer destes métodos algébricos, porém, pode ser bastante trabalhoso se o número de equações do sistema for elevado, como é o caso. Também é verdade que um programa matemático como o MATLAB resolveria o problema muito facilmente, mas nem sempre estará disponível uma tal ferramenta. Convém-nos por isso procurar algum método que nos permita uma solução manual sem um risco excessivo de nos enganarmos nos cálculos.

Como se pode ver, a matriz dos coeficientes A , apresenta um grande número de elementos nulos. Por isso é possível que se consiga chegar a um resultado directamente a partir das equações, desde que se consiga identificar a primeira grandeza independente e ir obtendo todas as outras a partir dessa.

Observando com atenção o circuito percebemos que, com os dados disponíveis se pode obter directamente a corrente I_5 a partir da equação:

$$U_2 = R_3 \cdot I_5 + R_4 \cdot (I_5 - I_Y)$$

$$\text{Donde } I_5 = \frac{U_2 + R_4 \cdot I_Y}{R_3 + R_4} = \frac{5 + 1 \times 0,5}{2} = 2,75A$$

Daqui pode determinar-se imediatamente os valores de algumas outras incógnitas:

$$I_6 = I_5 - 0,5 = 2,25A$$

$$U_C = R_4 \cdot I_6 = 1 \times 2,25 = 2,25A$$

$$I_4 = I_3 - I_5 = 3 - 2,75 = 0,25A$$

A partir daqui já se poderia passar à análise da outra metade do circuito, obtendo-se então:

$$U_1 = R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_x) \Rightarrow I_1 = \frac{U_1 + R_2 I_x}{R_1 + R_2} = \frac{9 + 5 \times 3}{1 + 5} = 4A$$

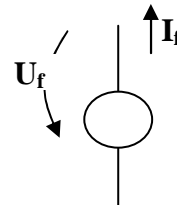
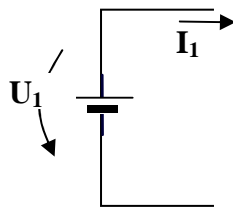
Donde se tira imediatamente o que falta:

$$I_2 = I_1 - I_3 = 1A$$

$$U_A = R_2 I_2 = 5 \times 1 = 5V$$

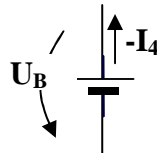
Podíamos perguntar a potência fornecida por cada fonte (talvez algumas sejam afinal consumidoras)

$$P_{fornec.U_1} = U_1 \cdot I_1 = (+9) \cdot (+4) = 36W \quad (\text{gerador})$$

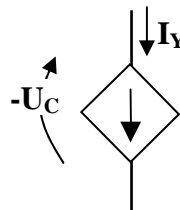


$$P_{fornec.I_x} = (U_B - U_A) \cdot I_3 = (5 - 5) \cdot 3 = 0W \quad (\text{não fornece nem consome potência})$$

$$P_{fornec.U_2} = U_B \cdot (-I_4) = 5 \cdot (-0,25) = -1,25W \quad (U_2 \text{ está a consumir potência afinal})$$



$$P_{fornec.I_Y} = (-V_C) \cdot I_Y = -2,25 \cdot 0,5 = -1,25W \quad (I_Y \text{ consome potência também})$$



O resultado é que há um saldo de $+36 + 0 - 1,25 - 1,25 = +33,625 W$! Esta potência tem de estar a ser dissipada nas resistências. Verifiquemos:

$$\begin{array}{l}
 \text{Potência consumida nas resistências:} \left\{ \begin{array}{l} R_1 : P_1 = R_1 \cdot I_1^2 = 1.4^2 = 16W \\ R_2 : P_2 = R_2 \cdot I_2^2 = 5.1^2 = 5W \\ R_3 : P_3 = R_3 \cdot I_5^2 = 1.2,75^2 = 7,5625W \\ R_4 : P_4 = R_4 \cdot I_6^2 = 1.2,25^2 = 5,0625W \end{array} \right. \\
 \text{soma:} \qquad \qquad \qquad : +33.6250W
 \end{array}$$

A soma destas parcelas dá exactamente 33,625 W. Confirma-se assim o resultado anterior. Podemos então dizer que este circuito consome um total de 36W, dos quais 33,625W são consumidos nas resistências por efeito de Joule (efeito térmico) e 2,375 W nas fontes U_2 e I_Y .

Métodos de análise

Parece haver, portanto, bastante interesse em “olhar” para o circuito duma forma mais inteligente para conseguir uma solução sem enveredar desde logo por uma solução matricial, eventualmente de ordem elevada. Na verdade a disposição alongada do circuito facilita a análise. Como já sabemos, o número de malhas linearmente independentes num circuito com R ramos e N nós será de exactamente $R - (N - 1) = R - (\text{nº de nós linearmente independentes})$.

Admitindo que um circuito tenha tantas incógnitas quantos os ramos R , então ele será resolúvel com $(N - 1)$ obtidos pela lei dos nós e as restantes $R - (N - 1)$ pela lei das malhas (Kirchoff).

Estas equações das malhas devem constituir um conjunto completo, contendo toda a informação de todos os ramos do circuito, ou não teremos uma solução no final da análise.

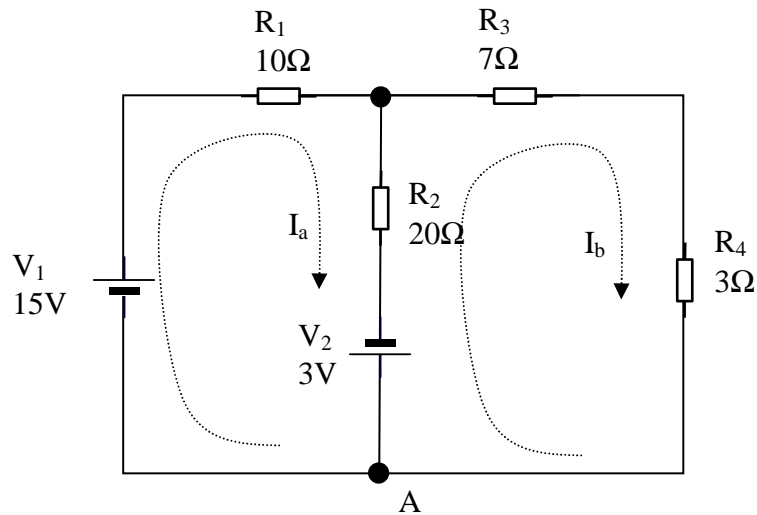
MÉTODO DAS CORRENTES FICTÍCIAS (DE MALHA)

Um circuito constituído por várias malhas comuns pode ser analisado com base em correntes supostamente circulando em cada malha fechada, desde que no final se aplique uma regra de conversão destas correntes nas correntes reais em cada ramo. Tais correntes reais não serão mais do que a sobreposição (soma algébrica) de todas as correntes as correntes fictícias a “passar” nesse ramo em estudo!

O método desenvolve-se nas seguintes fases:

- Escolha de $M = R - (N - 1)$ malhas linearmente independentes, no circuito;
- Atribuir a cada malha uma corrente de circulação fictícia – será a corrente de malha;
- Obter M equações de malha;
- Resolver o sistema a M equações - M incógnitas;
- Finalmente obtêm-se as correntes realmente presentes em cada ramo, através da regra de correntes adequada, obtida pela observação do esquema do circuito;

1º exemplo:



No circuito dado é evidente que o número de nós é $N=2$, o número de ramos $R=3$ e o número de malhas simples M virá igual a $3-(2-1)=2$.

Definamos a nossa circulação de corrente a partir do ponto A para ambas as malhas.

Obtemos então duas equações das malhas:

$$\begin{cases} -V_1 + R_1 I_a + R_2 (I_a - I_b) - V_2 = 0 \\ V_2 + R_2 (I_b - I_a) + R_3 I_b + R_4 I_b = 0 \end{cases}$$

Organizando as equações em torno das duas correntes fictícias I_a e I_b , o sistema fica assim:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) I_a + (-R_2) I_b = V_1 + V_2 \\ (-R_2) I_a + (R_2 + R_3 + R_4) I_b = -V_2 \end{cases}$$

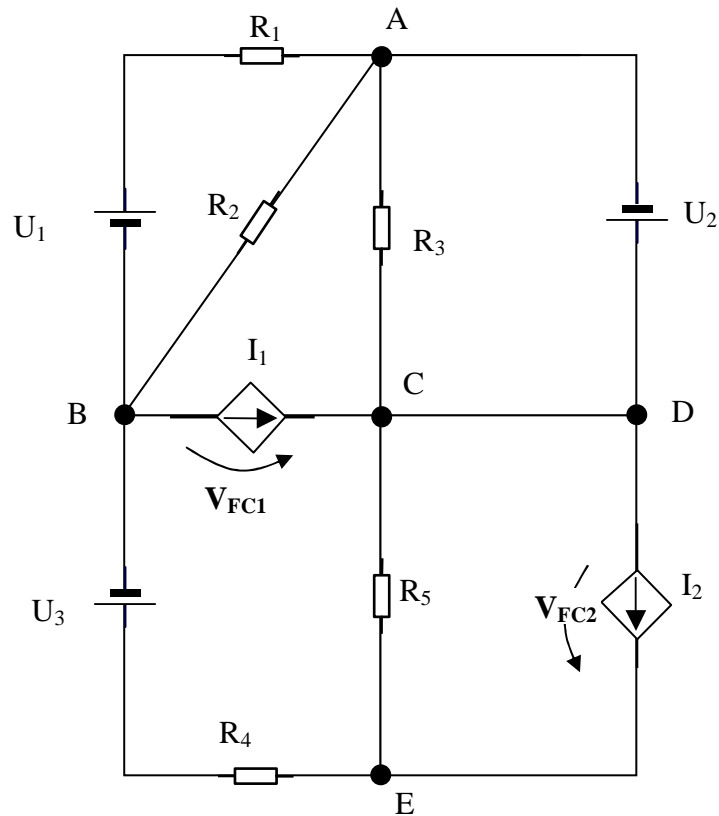
Resolvendo o sistema de duas equações a duas incógnitas, em ordem a I_b , obtemos:

$$I_b = \frac{V_1 + V_2 (-R_1/R_2)}{R_3 + R_4 + (R_2 + R_3 + R_4) R_1/R_2} = 0,54A$$

A seguir obtém-se I_a :

$$I_a = \frac{V_1 + V_2 + R_2 I_b}{R_1 + R_2} = 0,96A$$

2º exemplo:



Identificamos todos os nós por letras de A até E e contamos 5. Com $N=5$, o número de nós linearmente independentes será $N-1=4$. Contam-se $R=9$ ramos, o que leva a que o número de malhas para análise vem $M=R-(N-1) = 5$. Atribuímos então os sentidos de circulação das correntes fictícias em cada malha, de acordo com o movimento dos ponteiros do relógio.

A presença de fontes de corrente no circuito leva a que tenham de ser introduzidas novas variáveis no sistema a resolver: as tensões nessas mesmas fontes. Por outro lado, temos mais equações dadas pela relação entre as correntes conhecidas (das fontes) e as correntes fictícias.

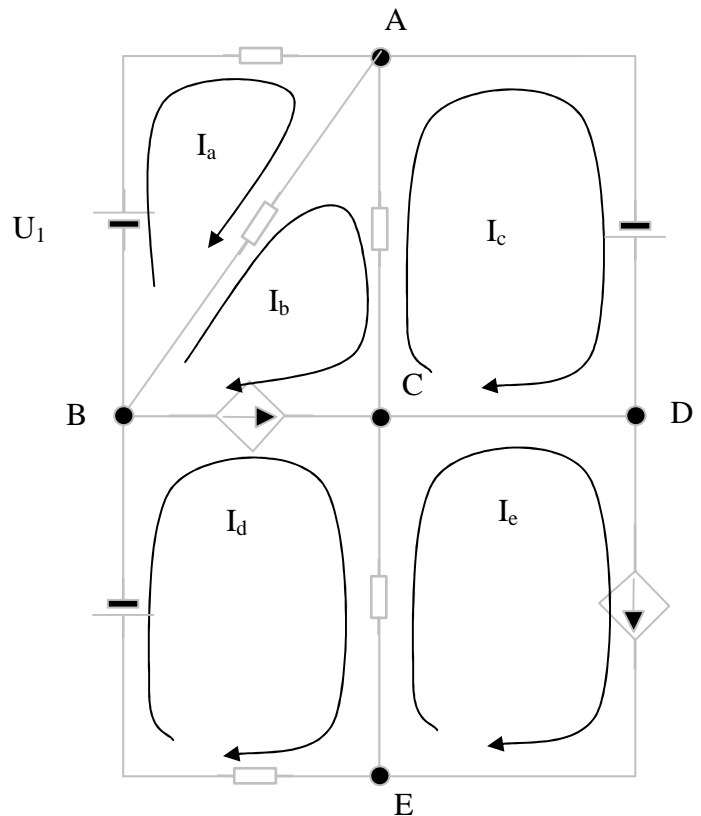
Leis das malhas:

- $-U_1 + R_1 I_a + R_2 (I_a - I_b) = 0$
- $R_2 (I_b - I_a) + R_3 (I_b - I_c) - V_{FC1} = 0$
- $R_3 (I_c - I_b) - U_2 + R_6 (I_c - I_e) = 0$
- $U_3 + V_{FC1} + R_5 (I_d - I_e) + R_4 I_d = 0$
- $R_5 (I_e - I_d) + R_6 (I_e - I_c) + V_{FC2} = 0$

Duas equações extras são dadas pelas fontes de corrente, compensando assim as duas variáveis extra V_{FC1} e V_{FC2} :

$$I_d - I_b = I_1 \quad e \quad I_e = I_2.$$

Ficamos finalmente com sete equações a sete incógnitas.



Método das Tensões Nodais

Este método procura descrever a dinâmica do circuito tanto quanto possível á custa das tensões dos nós linearmente independentes. Estas tensões será as incógnitas de trabalho e as equações a utilizar em primeira instância serão as equações de correntes naqueles N-1 nós.

A existência de eventuais fontes de tensão ideais cuja corrente ficara indeterminada, obriga á adição de mais incógnitas. Para o sistema ser resolúvel iremos buscar novas equações precisamente á relação entre a tensão dessa ou dessas fontes com as (incógnitas) tensões dos nós a que se liga(m).

1º Exemplo de Aplicação

Vamos tentar estabelecer o sistema de equações que descrevem o circuito do segundo exemplo da secção anterior, mas agora segundo o método das tensões nodais:

Incógnitas a considerar:

- Va, Vb, Vc, Vd
- Nó de referencia: E (massa)

Parâmetros dos componentes

R1...Re; U1...U3; I1... I2

Incógnita suplementar:

I_{U2} – Corrente na fonte ideal de tensão U2, a única existente (o respectivo sentido é o convencionado na figura)

Na presente análise, centrada nos nós, em principio dispensasse as variáveis V_{FC1} e V_{FC2} que só nos serviam no método anterior por assentar em equações de malhas

As equações de sistema podem então exprimir-se considerando sempre o sentido de entrada no nó:

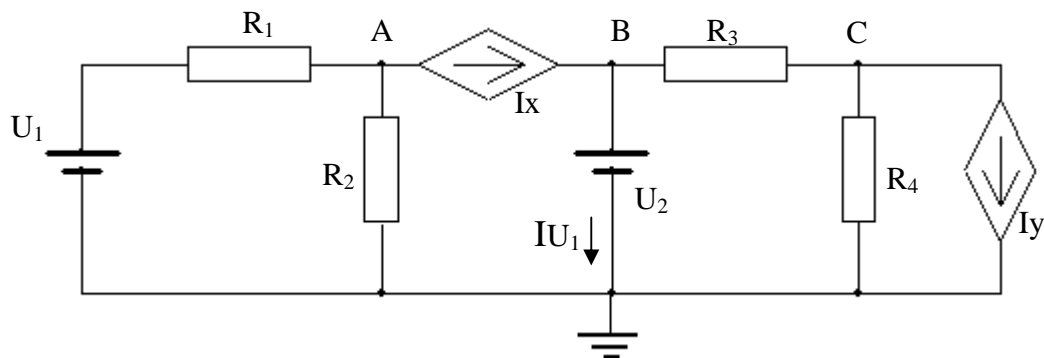
$$\text{Nó A: } \frac{U_B + U_1 - U_A}{R_1} + \frac{U_B - U_A}{R_2} + \frac{U_C - U_A}{R_3} + (-I_{U2}) = 0$$

$$\text{Nó B: } \frac{U_A - (U_B + U_1)}{R_1} + \frac{U_A - U_B - I_1}{R_2} + \frac{U_E (U_B + U_3)}{R_4} = 0$$

$$\text{Nó C: } I_1 + \frac{U_A - U_C}{R_3} + \frac{U_D - U_C}{R_6} - \frac{U_C}{R_5} = 0$$

$$\text{Nó D: } -I_2 + \frac{U_C - U_D}{R_6} + I_{U2} = 0$$

Equação extra derivada, derivada da fonte ideal de tensão $U_D - U_A = U_2$



A fonte ideal U_2 obriga a definir a sua corrente I_{U2}

Temos 3 nós linearmente independentes, logo:

$$\text{Nó A: } \frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{-U_A}{R_2} - I_x = 0$$

$$\text{Nó B: } I_x - I_{U2} + \frac{U_C - U_B}{R_3} = 0$$

$$\text{Nó C: } \frac{U_B - U_C}{R_3} + \frac{-U_C}{R_4} + (-I_y) = 0$$

$$\text{Equação extra: } U_B = U_2$$

Método da sobreposição (ou das fontes independentes)

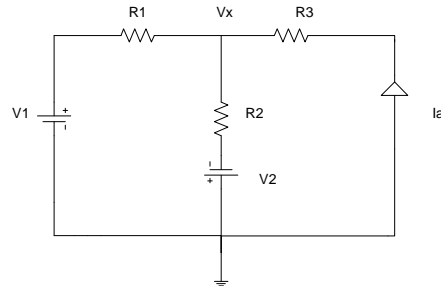
Um sistema linear responde a um conjunto de estímulos de uma forma equivalente à sobreposição das respostas parciais a cada estímulo aplicado separadamente. É assim com um sistema mecânico sujeito a um conjunto de forças, desde que o seu comportamento seja linear. E é também assim com circuitos eléctricos lineares. Com base neste princípio podemos desenvolver um outro método de análise.

Princípio da sobreposição

A resposta de um circuito eléctrico linear pode ser obtida somando as contribuições de N fontes independentes actuando sobre o mesmo, estudadas em separado, ou seja, ligando uma de cada vez e anulando todas as restantes. Notar que o açulamento de uma fonte de tensão corresponde a criar condição $v=0$., ou seja, à sua substituição no circuito por uma ligação em curto-circuito; uma fonte de corrente anulada corresponderá a fazer-se $I=0$, ou seja, a um circuito aberto entre os seus terminais. A análise de cada situação parcial fica muito simples na medida em que só intervém uma fonte de cada vez e alguns componentes podem ficar “fora de jogo”, na medida em que os terminais ligados a fontes de corrente anuladas ficarão no ar.

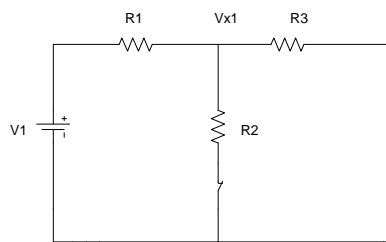
As variáveis que vamos analisar com este método podem ser as correntes nos ramos ou as tensões dos nós, ou seja, o estudo de cada configuração reduzida (só com uma fonte activa) pode ser levado a cabo pelo das tensões nodais ou dos circuitos fictícios ou... por análise directa, se for muito simples.

Ilustremos graficamente a utilização do método para o estudo de um circuito com 3 fontes independentes.



Pode fazer-se decompondo-o nas 3 situações seguintes:

Só v_1 activa.
 V_2 e I_a anulada

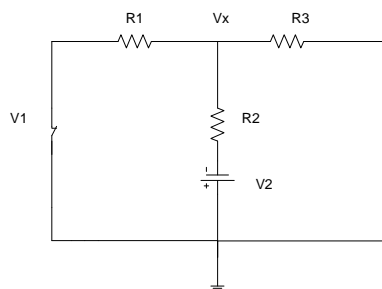


$$I_{11} = I_{x1} = \frac{V_1}{R_1 + R_2}$$

$$I_{21} = 0$$

$$V_{x1} = V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{divisor de tensão})$$

Só v_2 activa.
 V_1 e I_a anulada

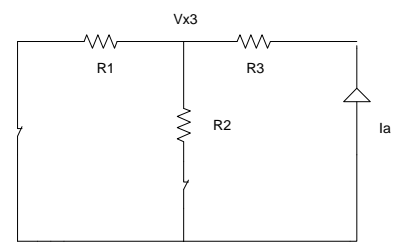


$$I_{12} = I_{x2} = \frac{V_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_{22} = 0$$

$$\begin{aligned} V_{x2} &= V_{R2} - V_2 \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_2 - V_2 \\ &= -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_2 \end{aligned}$$

Só I_a activa.
 V_1 e V_2 anulada



$$I_{23} = -I_a$$

$$I_{13} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} I_a \quad (\text{divisor de corrente})$$

$$I_{x3} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_a$$

$$\begin{aligned} V_{x3} &= R_2 I_{x3} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_a \\ &= R_1 // R_2 \cdot I_a \end{aligned}$$

O resultado completo obtém-se somando as constituições de cada um por 3 casos para as grandezas que queremos conhecer: V_x ou o conjunto I_1 , I_x , I_2 :

$$V_x = \sum_{i=1}^3 V_{xi} = V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - V_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} + R_1 // R_2 \cdot I_a = -\frac{V_1 R_2 - V_2 R_1 + R_1 \cdot R_2 \cdot I_a}{R_1 + R_2}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1 + R_2} + \frac{V_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_2 I_a}{R_1 + R_2} = \frac{V_1 + V_2 - R_2 \cdot I_a}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = 0 + 0 + (-I_a) = -I_a$$

$$I_x = \frac{V_1}{R_1 + R_2} + \frac{V_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 I_a}{R_1 + R_2} = \frac{V_1 + V_2 + R_1 I_a}{R_1 + R_2}$$

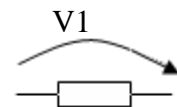
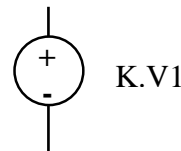
Estes resultados concordarão com o que obtínhamos com outros métodos.

Fontes dependentes

Os modelos dos componentes reais utilizados em electricidade e electrónica recorrem a um outro tipo de elemento: as fontes de corrente ou fontes de tensão dependentes, isto é, controlados por alguma variável do circuito (Tensão ou corrente). Normalmente a relação de controlo que se estabelece pura proporcionalidade sendo que a constante de proporcionalidade terá unidades dependendo da situação:

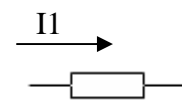
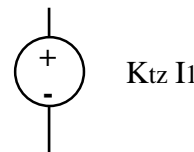
Caso I – FONTE DE TENSÃO CONTROLADA POR TENSÃO

$$\left[\frac{kV_1}{V_1} \right] = \frac{[V]}{[V]} \Rightarrow K \text{ é adimensional}$$



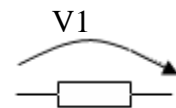
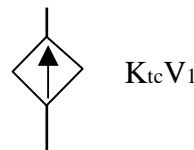
Caso II - FONTE DE TENSÃO CONTROLADA POR CORRENTE

$$\left[\frac{K_{tr} I_1}{I_1} \right] = \frac{[V]}{[I]} \Rightarrow [K_{tr}] = \frac{[V]}{[I]} \quad K_{tr} \text{ é uma transresistência (ou transimpedância)}$$



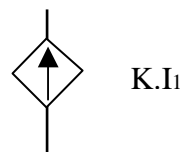
Caso III – FONTE DE CORRENTE CONTROLADA POR TENSÃO

$$\left[\frac{K_{tc} V_1}{I_1} \right] = \frac{[I]}{[V]} \Rightarrow [K_{tc}] = \frac{[I]}{[V]} \quad K_{tc} \text{ é uma transcondutância (ou transadmitância)}$$



Caso IV - FONTE DE CORRENTE CONTROLADA POR CORRENTE

$$\left[\frac{K I_1}{I_1} \right] = \frac{[I]}{[I]} \Rightarrow [K] \text{ é adimensional}$$



A presença de fontes dependentes num circuito formal faz mudar os métodos de análise de um circuito. Apenas pode acontecer que o uso de super-nós e super-malhas conduza a uma facilidade na solução.

Exemplo de análise de um circuito com uma fonte dependente (podia haver mais):

Vamos utilizar o método das correntes fictícias.

Malha a)

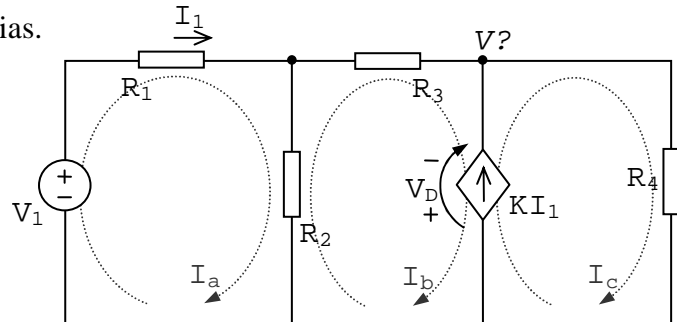
$$-V_1 + R_1 I_a + R_2 (I_a - I_b) = 0$$

Malha b)

$$R_2 (I_b - I_a) + R_3 I_b - V_D = 0$$

Malha c)

$$V_D + R_4 I_c = 0$$



Tivemos que usar uma variável V_D !

Há duas equações adicionais que surgem em função da fonte de corrente dependente:

$$\blacksquare KI_1 = I_c - I_b$$

A variável de controlo também se deve relacionar com as variáveis de trabalho. A relação que se pode estabelecer é, então:

$$\blacksquare I_1 = I_a$$

A solução do sistema não é complicada:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -V_D = R_4 I_c \\ R_1 I_a + R_2 (I_c - I_b) = 0 \\ R_2 (I_b - I_c) + R_3 I_b + R_4 I_c = 0 \\ I_c - I_b = KI_a \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 I_a + R_2 KI_a = V_1 \\ -R_2 KI_a + R_3 I_b + R_4 I_c = 0 \\ I_c = I_b + KI_a \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} I_a = \frac{V_1}{R_1 + KR_2} \\ R_3 I_b + R_4 (I_b + KI_a) = R_2 KI_a \\ I_c = I_b + KI_a \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} I_b = \frac{KI_a R_2 - KI_a R_4}{R_3 + R_4} \\ I_c = I_b + KI_a \end{cases} \end{aligned}$$

Introduzindo a expressão de I_a em I_b obtém-se:

$$I_b = \frac{KV_1(R_2 - R_4)}{(R_1 + KR_2)(R_3 + R_4)}$$

A expressão de I_c pode também obter-se:

$$I_c = I_b + KI_a = \frac{KV_1(R_2 - R_4)}{(R_1 + KR_2)(R_3 + R_4)} + \frac{KV_1}{R_1 + KR_2} = \frac{KV_1}{R_1 + KR_2} \left[1 + \left(\frac{R_2 - R_4}{R_3 + R_4} \right) \right] \Leftrightarrow$$

$$I_c = \frac{KV_1}{R_1 + KR_2} \left(\frac{R_2 + R_3}{R_3 + R_4} \right)$$

Dando valores aos componentes, obtenha-se agora todas as correntes.

Teorema de Thévenin

O teorema de Thévenin oferece-nos uma ferramenta poderosa de:

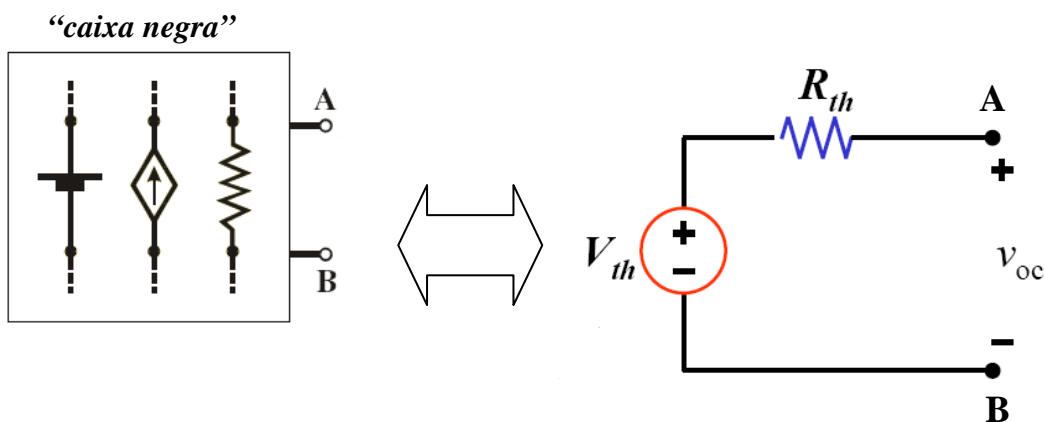
- Simplificação de circuitos complexos;
- Modelação de circuitos eléctricos amplificadores, etc...

No seu enunciado sucinto afirma-se que:

Qualquer (sub) circuito linear apresentando ao exterior um par de terminais, constituído por resistências e fontes independentes ou dependentes (desde que a variável de controlo seja interior ao circuito a tratar), pode ser modelado por uma fonte de tensão em série com uma resistência com os seus valores calculados assim:

V_{TH} (Tensão de Thévenin) – Este parâmetro terá o valor da tensão que se observa nos terminais acessíveis deixados em aberto, ou seja, sem qualquer ligação ao exterior.

R_{TH} (Resistência de Thévenin) – este parâmetro toma o valor da resistência medida por um ohmímetro ideal nos terminais de saída, quando no interior do (sub)circuito **anulamos todas as fontes independentes**. A anulação de uma fonte (independente) traduz-se na sua substituição por uma resistência que a represente do ponto de vista da resistência dinâmica ($R_d = dV/dI$). Assim, uma fonte de tensão será substituída por um curto-circuito ($R_d = 0$); uma fonte de corrente será substituída por um circuito aberto ($R_d = \infty$).

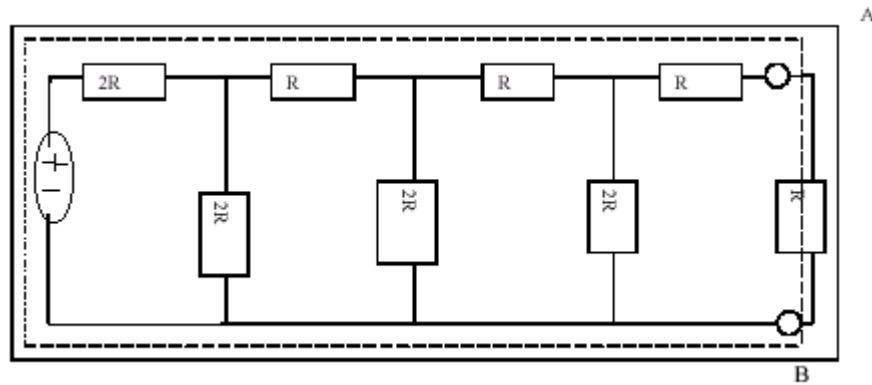


É muito importante delimitar a região de análise para não acontecer que:

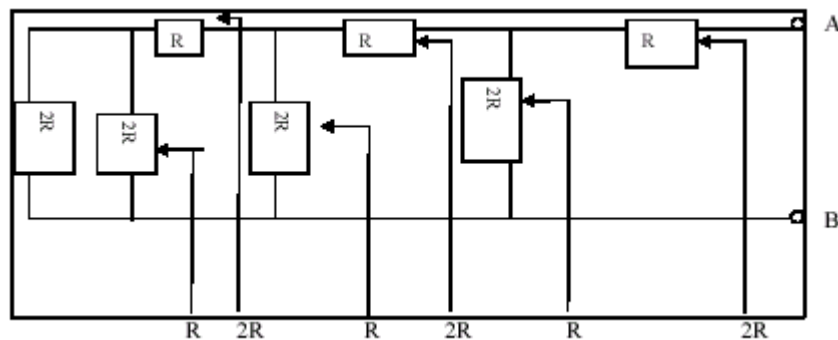
- Um componente ora se considere dentro ora fora da “caixa negra”;
- O teorema seja usado quando há variáveis de controlo externas à região analisada

Alguns Exemplos

EX1

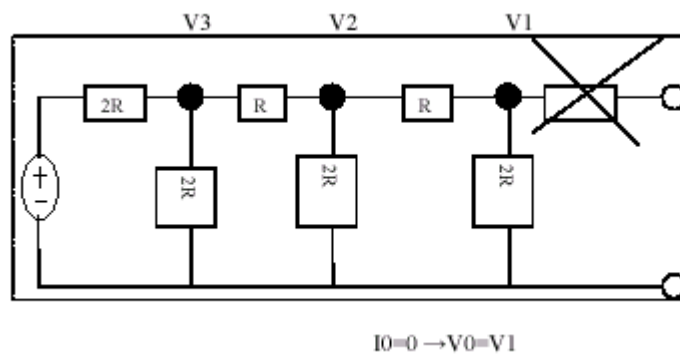


Fácil é saber a resistência de Thévenin da superfície delimitada pelo tracejado. Anulamos a fonte independente U.



Procedendo a sucessivas associações em série e paralelo conclui-se que $R_{th}=2R$.

Vamos agora tentar determinar a tensão em aberto em A-B, quando este terminal é desligado de R_{final} .



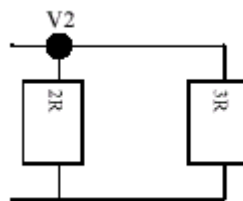
Não havendo corrente de saída, temos um divisor de tensão, pelo que:

$$V_1 = V_2 \frac{2R}{R + 2R} = \frac{2}{3} V_2$$

Associando as resistências temos em paralelo com

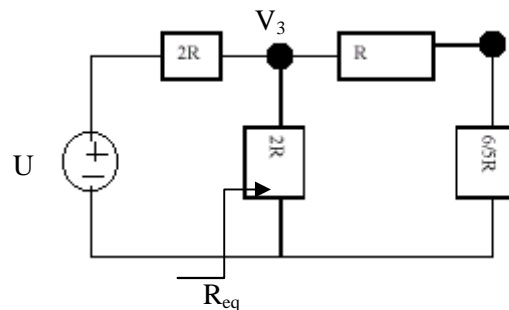
$$R_{//} = 2R // 3R = \frac{2R \cdot 3R}{2R + 3R} = \frac{6}{5} R$$

Determinação de V_2 :



De novo, pelo divisor de tensão, sabemos que:

$$V_2 = V_3 \frac{R_{//}}{R + R_{//}} = V_3 \frac{R \cdot 6/5}{R + R \cdot 6/5} = V_3 \cdot \frac{6}{11}$$



Associando aquela série $R + 6/5 \cdot R$ em paralelo com $2R$, temos então:

$$R_{eq} = \frac{11/5 R \cdot 2R}{11/5 R + 2R} = \frac{22}{21} R \approx R$$

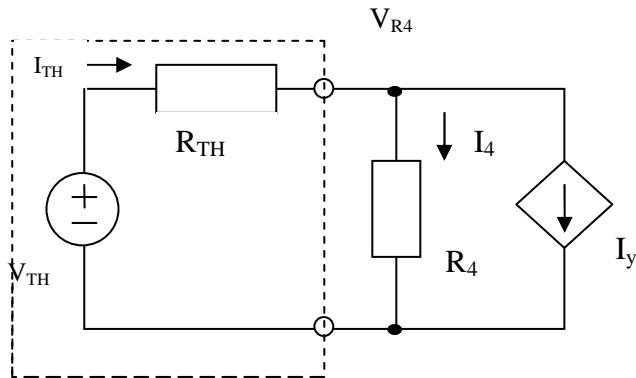
Finalmente temos um divisor da tensão U , dado por:

$$V_3 = U \frac{R_{eq}}{2R + R_{eq}} \cong U \frac{R}{2R + R} \cong V_3 \cdot \frac{1}{3}$$

Daqui obtém-se para a saída em aberto:

$$V_{TH} \cong U \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{2}{3} \cong U \frac{12}{99} \cong 0,12U$$

Esboçando o circuito simplificado pela aplicação do teorema obtemos facilmente o resultado pelo método das tensões nodais:



Pela lei dos nós, temos

$$I_{TH} = I_4 + I_Y$$

Determinando as diferentes correntes em jogo, obtém-se

$$\frac{V_{TH} - V_{R4}}{R_{TH}} = \frac{V_{R4}}{R_4} + I_Y$$

Desenvolvemos a expressão

$$\frac{V_{TH}}{R_{TH}} - \frac{V_{R4}}{R_{TH}} - I_Y = \frac{V_{R4}}{R_4} \Leftrightarrow \frac{V_{TH}}{R_{TH}} - I_Y = \frac{V_{R4}}{R_{TH}} + \frac{V_{R4}}{R_4} \Leftrightarrow \frac{V_{TH}}{R_{TH}} - I_Y = V_{R4} \left(\frac{1}{R_{TH}} + \frac{1}{R_4} \right) \Leftrightarrow \frac{V_{TH}}{R_{TH}} - I_Y = V_{R4} \cdot \frac{1}{R_{//}}$$

Com $R_{//}$ a valer pelo paralelo de R_4 com R_{TH} .

$$\frac{1}{R_{//}} = \frac{1}{R_{TH}} + \frac{1}{R_4}$$

Finalmente teremos,

$$V_{R4} = R_{//} \cdot \left(\frac{V_{TH}}{R_{TH}} - I_Y \right)$$

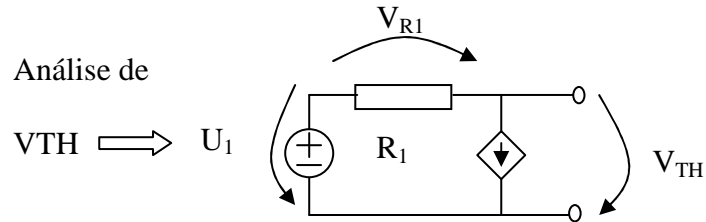
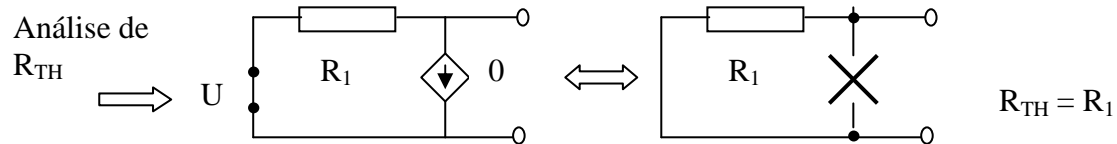
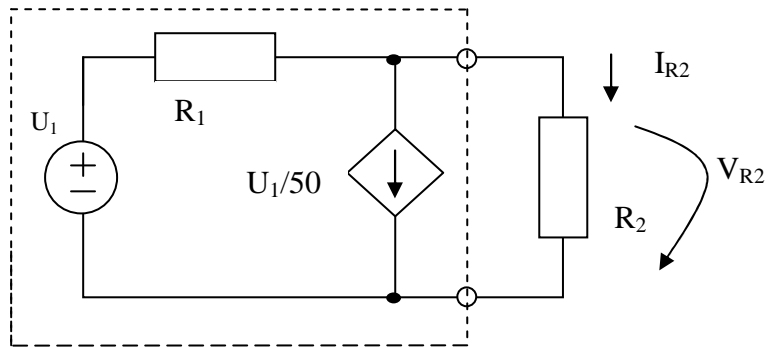
E a corrente I_4 será dada por

$$I_4 = \frac{V_{R4}}{R_4} = \frac{R_{//}}{R_4} \cdot \left(\frac{V_{TH}}{R_{TH}} - I_Y \right)$$

Exemplo 3

Consideremos agora os 4 seguintes circuitos em que intervém uma fonte dependente:

a)

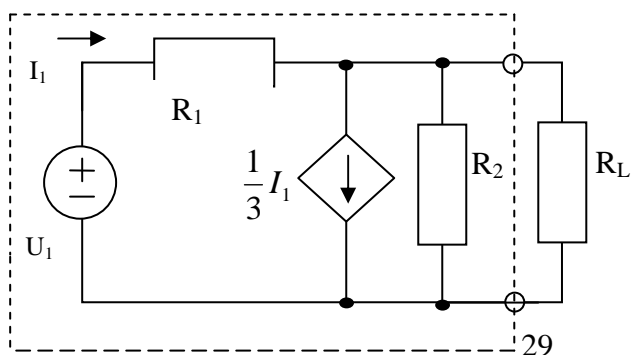


$$V_{TH} = U_1 - V_{R1} = U_1 - R_1 (U_1/50)$$

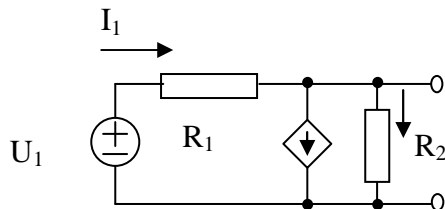
$$V_{TH} = U_1 (1 - R_1/50)$$

$$\therefore I_{R2} = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_2} \quad V_{R2} = R_2 \cdot I_{R2}$$

b)



Análise de V_{TH}

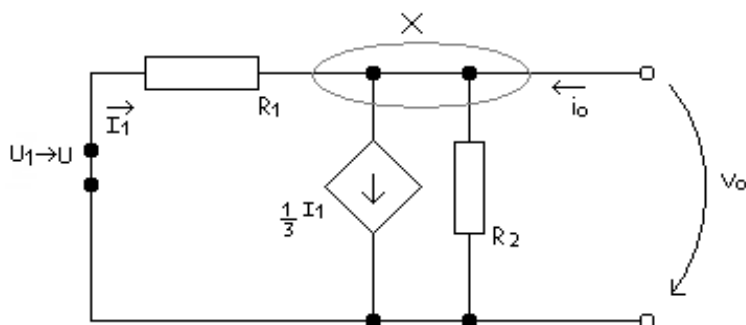


$$\underbrace{\frac{U_1 - U_0}{R_1}}_{I_1} = \frac{1}{3} \left(\frac{U_1 - U_0}{R_1} \right) + \frac{U_0}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{U_1 - U_0}{R_1} \right) = \frac{U_0}{R_2} \Rightarrow U_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2}{3} U_1$$

$$\therefore V_{TH} = \frac{\frac{2}{3} U_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Um pouco mais subtil é, neste caso, o cálculo da resistência de Thévenin. Para isso temos de recorrer à definição de resistência medida (por um ohmímetro p. ex.) entre um par de terminais. Considera-se uma tensão aplicada e uma corrente absorvida e a partir desses dados obtém-se a dita resistência. Claro que, conforme é exigido pelo teorema, previamente anulámos a fonte independente U_1 .



Equacionando o balanço de correntes no nó X, temos:

$$\begin{cases} i_0 = \frac{v_0}{R_2} + \frac{I_1}{3} - I_1 \\ I_1 = -\frac{v_0}{R_1} \end{cases}$$

De onde se tira:
$$i_o = \frac{1}{R_2} V_o + \frac{2}{3} \times \left(\frac{V_o}{R_1} \right)$$

$$i_o = v_o \cdot \frac{1}{R_2} + \frac{2}{3} \left(\frac{v_o}{R_1} \right)$$

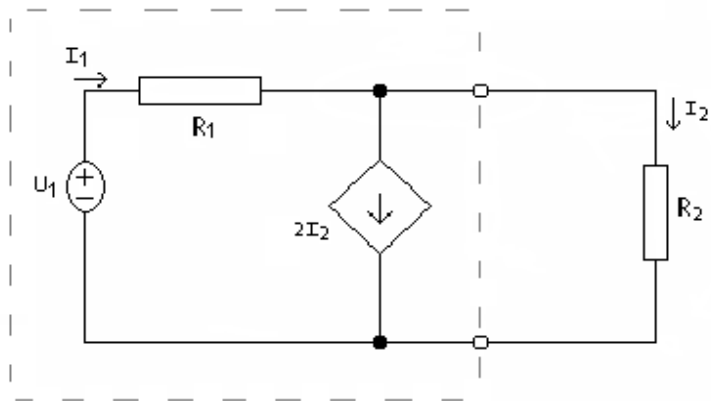
$$\dots = v_o \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{2}{3R_1} \right)$$

Por definição a resistência observada nos terminais de saída é dada por v_o/i_o ,

$$R_o = \frac{v_o}{i_o} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{2}{3R_1}}$$

Então a resistência de Thévenin R_{TH} será igual ao valor de R_o que acabamos de calcular.

C)



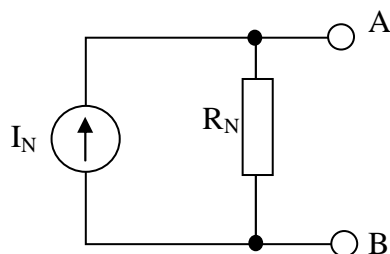
Na região a que se pretendia aplicar o teorema existe uma fonte de corrente dependente de uma variável de controlo exterior à região (I_2).

O circuito não pode ser analisado pelo teorema de Thévenin.

A análise completa (sem Thévenin) também não é difícil se notarmos que a fonte em paralelo com R_2 equivale a uma resistência R_2 .

Teorema de Norton

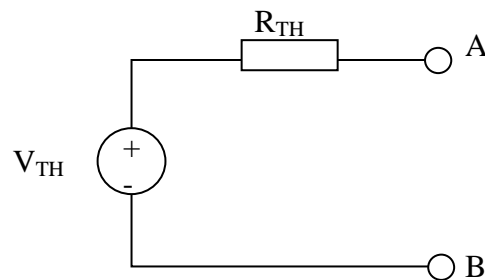
Qualquer circuito linear apresentando dois terminais ao exterior pode ser representado por um modelo simplificado constituído por uma fonte de corrente em paralelo com uma resistência, cujos valores podem ser assim calculados:



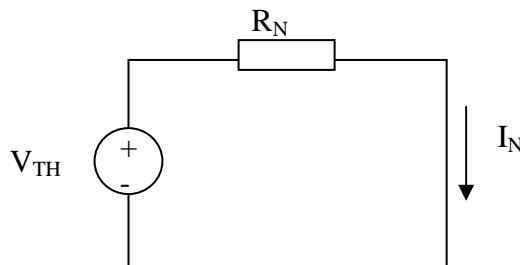
I_N – Corrente medida entre os terminais de saída quando colocados em curto circuito

R_N – Resistência medida por um ohmímetro nos terminais de saída, após anular todas as fontes independentes interiores ao circuito. (o modo de anular as fontes independentes foi já descrito na secção relativa ao teorema de Thévenin)

Aplicando este teorema à configuração canônica de Thévenin obtém-se uma regra de correspondência entre os dois modelos: Thévenin e Norton.

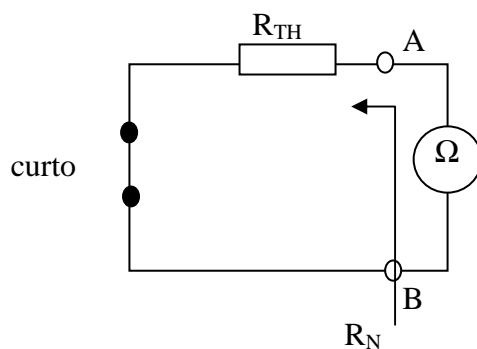


I_N será a corrente de curto-circuito da saída:



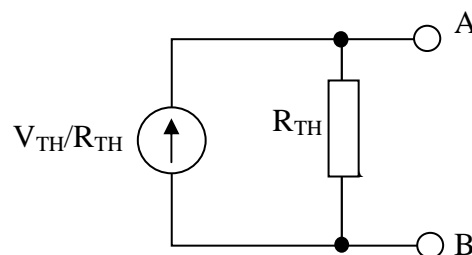
$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}}$$

Por seu lado a Resistência de Norton deverá ser a resistência observada à saída, anulando a fonte V_{TH} (independente), ou seja, substituindo-a por um curto-circuito. Obviamente o resultado será:



$$R_N = R_{TH}$$

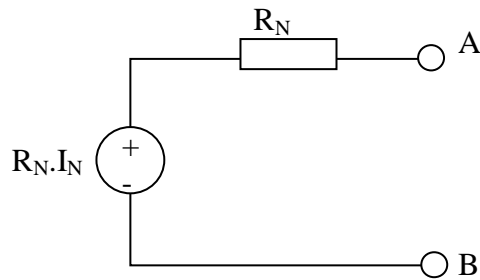
Então um circuito cujo modelo de Thévenin seja indicado acima terá como modelo de Norton o seguinte:



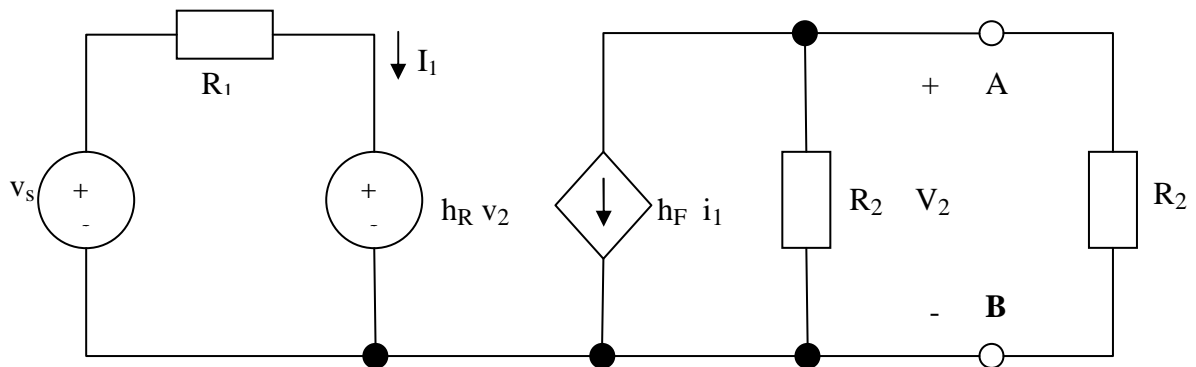
Em sentido contrário também se pode obter a correspondência de Norton para Thévenin:

$$V_{TH} = R_N \cdot I_N$$

$$R_{TH} = R_N$$

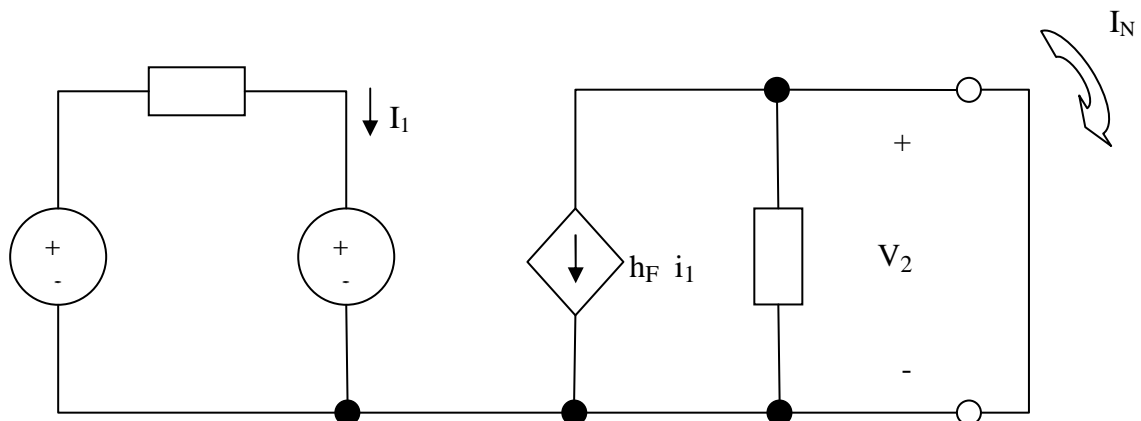


Exemplo 1 – Determine o equivalente do Norton para o circuito amplificador com terminais de saída AB



O circuito está claramente nas condições de aplicação do teorema de Norton, visto os componentes serem lineares e todas as variáveis de controlo lhe serem interiores.

Determinação do I_N : o circuito nas condições exigidas é o seguinte:

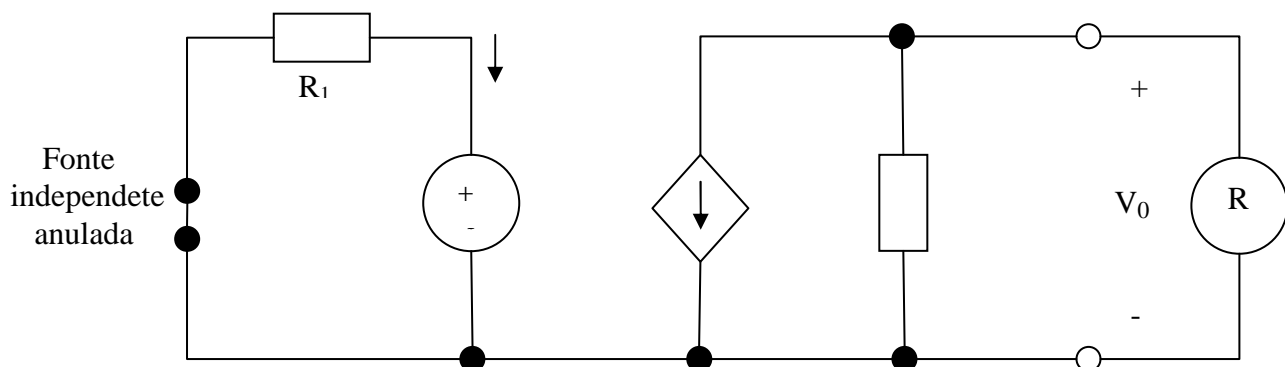


O curto-circuito na saída implica $v_2=0$. De onde se tira que a fonte $h_R v_2$ será anulada, o que permite concluir imediatamente

$$v_2=0 \Leftrightarrow h_R v_2=0 \Leftrightarrow i_1 = \frac{v_s}{r_1} \Leftrightarrow I_N = -h_F i_1 = -\frac{h_F}{R_1} \cdot v_s$$

Determinação de R_N

O circuito nas condições exigidas é o seguinte:



A impedância a medir corresponderá a $R_N = \frac{v_0}{i_0}$.

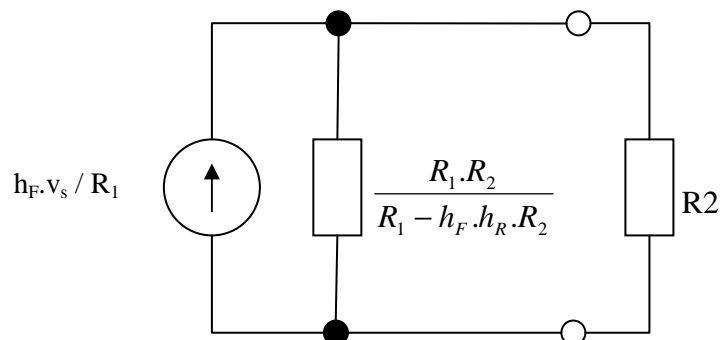
Para isso temos que analisar o circuito. Pode-se exprimir $i_1 = -\frac{h_F v_2}{r_1}$;

A tensão $v_2 = v_0$; De onde as correntes em A vêm

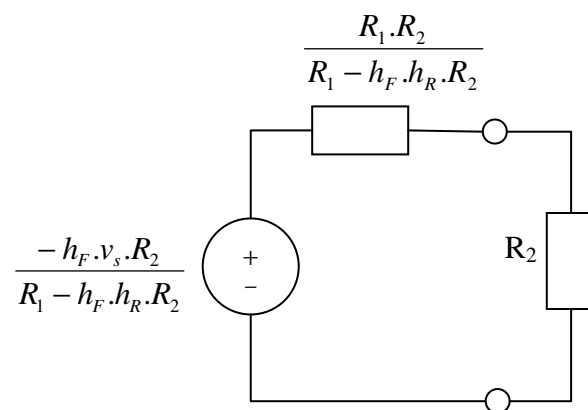
$$i_0 = h_F i_1 + i_{R_2} = h_F \times \left(-\frac{h_F v_2}{r_1} \right) + \frac{v_0}{r_2} = v_0 \left(-\frac{h_F h_R}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

$$i - R_N = \frac{v_0}{i_0} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} - \frac{h_F h_R}{R_1}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 - h_F h_R R_2}$$

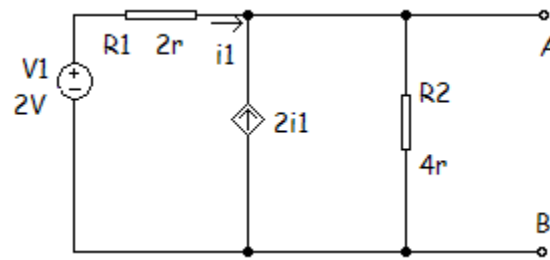
\therefore Equivalente de Norton:



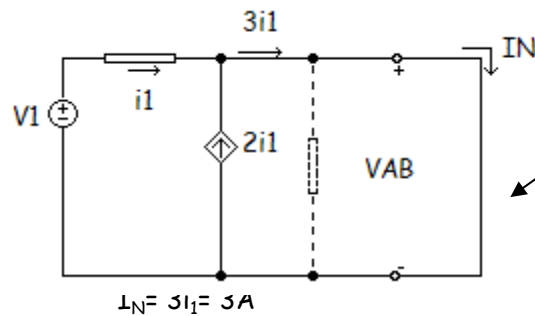
∴ Equivalente de Thévenin:



Exemplo 2:



Determinação de I_N :

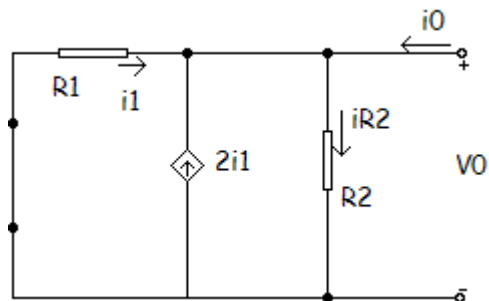


Saída curto-circuitada

$$V_{AB} = 0$$

$$i_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{2}{2} = 1$$

Determinação de R_N :



$$i_0 = i_{R2} - 2i_1 - i_1$$

$$i_{R2} = \frac{V_0}{R_2}$$

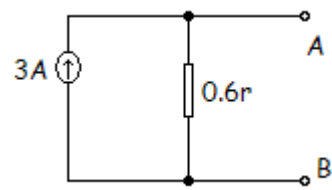
$$i_1 = -\frac{V_0}{R_1}$$

$$i_0 = \frac{V_0}{R_2} \left(3 \times -\frac{V_0}{R_1} \right) \Leftrightarrow i_0 = \left(V_0 \frac{1}{R_2} + \frac{3}{R_1} \right) \frac{V_0}{R_1}$$

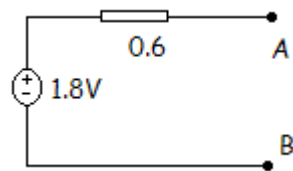
$$R_N = \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{3}{R_1}} \Leftrightarrow \frac{R_1 R_2}{R_1 + 3R_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{3}{R_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} (2//12) = \frac{1}{3} \times \frac{24}{14} = \frac{8}{14} \sim 0.5r$$

- Equivalente de Norton:



- Eq. de Thévenin:



Sinais variáveis no tempo

Em sistemas sem memória, constituídos apenas por fontes e resistências, os métodos que estudámos até aqui aplicam-se para obter de funcionamento de um dado circuito em cada instante de tempo. Daí a ênfase que temos posto na resolução analítica dos problemas, conduzindo a análise dos circuitos até tão longe quanto possível com as variáveis associadas aos diferentes sinais, em vez de as substituir cedo pelos respectivos valores numéricos das tensões e/ou das correntes. Conseguimos assim habituar-nos a uma descrição analítica que será normalmente válida quando se introduz a variável tempo.

Conforme se disse, a Lei de Ohm que rege o funcionamento das resistências pode ser generalizada para o caso em que as grandezas variam no tempo, uma vez que sabemos que a proporcional tensão – corrente se irá manter em qualquer instante:

$$u(t) = R.i(t)$$

É costume convencionar-se o uso de letras minúsculas (v, i, \dots) para designar grandezas variáveis no tempo e maiúsculas para as grandezas constantes (V, I, \dots). Mais adiante introduziremos dois componentes cuja descrição no domínio do tempo nos obrigará a recorrer a equações diferenciais.

Para já concentremo-nos em diversos aspectos que caracterizarão os sinais com que iremos trabalhar. Como se disse, vamos agora estender a análise do comportamento de circuitos eléctricos a diversas situações em que um ou vários estímulos do circuito deixam de ser constantes no tempo. Em geral, assumiremos que apenas uma fonte será variável. Fora desta situação, apenas analisaremos o comportamento face a fontes sinusoidais em regime estacionário e a funcionar todas à mesma frequência angular, ou seja, dentro das condições de validade da análise fasorial mais simples que iremos estudar.

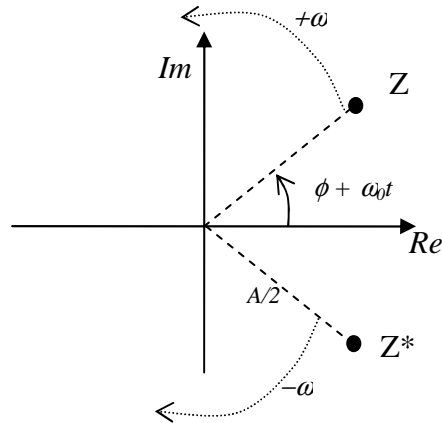
SINAIS SINUSOIDAIS

Consideremos um sinal sinusoidal qualquer $v(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$, com a frequência angular assim definida $\omega_0 = 2\pi/T_0$ (unidades rad/s).

O mesmo poderia ser expresso na forma exponencial complexa:

$$v(t) = \operatorname{Re} [A \cdot e^{j(\omega_0 t + \phi)}] = \underbrace{A/2 \cdot e^{j\phi}}_Z \cdot e^{j\omega_0 t} + \underbrace{A/2 \cdot e^{-j\phi}}_{Z^*} \cdot e^{-j\omega_0 t}.$$

as grandezas complexas Z e Z^* contêm toda a informação de amplitude e fase inicial da senoide, constituindo um par de FASORES conjugados. Gráficamente, estes correspondem a dois vectores girantes à frequência ω_0 (ou $-\omega_0$) que se podem representar no plano complexo deste modo:



SINAIS PERIÓDICOS

Esta classe de sinais, que inclui os sinais sinusoidais já referidos, é frequentemente caracterizada através de um conjunto de parâmetros como os que a seguir se discutem. Em primeiro lugar, a própria característica da “periodicidade” pode ser traduzida pela seguinte propriedade para algum valor de T (designado por período do sinal):

$v(t) = v(t \pm mT)$ com m inteiro, para qualquer instante de tempo t .

As características que mais nos interessam para o estudo do processamento de sinais por circuitos eléctricos simples, são as seguintes:

Amplitude média:

$$\langle v(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T v(t).dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t).dt$$

Potência média:

$$\bar{P} = \langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v^2(t).dt$$

Considerando que o sinal de tensão está aplicado sobre uma resistência normalizada de 1Ω .

Valor eficaz:

(também conhecido por Valor Quadrático médio, ou valor RMS, do inglês *root-mean square*)

$$V_{ef} = \sqrt{\bar{P}} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} v^2(t).dt}$$

No caso de um sinal sinusoidal de média nula e valor de pico igual a A, facilmente se demonstra que $V_{ef} = A/\sqrt{2}$.

SÉRIE DE FOURIER

Qualquer sinal periódico de potência finita pode ser decomposto harmonicamente por uma soma de sinusóides de frequência múltipla de uma frequência fundamental $\omega_0=2\pi/T_0$, de acordo com o seguinte desenvolvimento em série:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j2\pi f_0 t},$$

Em que os coeficientes complexos c_n são calculados através da seguinte expressão:

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} dt$$

Na internet podem ser encontrados numerosos sítios onde se demonstra de forma interactiva a análise de Fourier para diversos tipos de sinais. A título de exemplo, no endereço <http://www.falstad.com/fourier/> encontra-se uma demonstração JAVA que permite analisar sinais de tipo seno, coseno, dente de serra, onda triangular, onda quadrada e até ruído aleatório. Para cada sinal é possível ver o efeito que sobre o erro da aproximação terá o número de termos considerados da série, o efeito da quantização, de deslocamento de fase de uma operação de rectificação de meia onda ou onda completa. O resultado pode ser visualizado em termos do desenvolvimento em cosenos, senos, amplitude-fase e pode mesmo ser escutado o resultado áudio na saída multimédia do PC.

Algumas propriedades da série de Fourier

Da análise da expressão acima resulta imediatamente que o coeficiente c_0 corresponde ao valor médio do sinal.

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \cdot e^{-j0} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \cdot dt = \langle v(t) \rangle$$

Também se pode facilmente deduzir o efeito sobre os coeficientes c_n (da função original $v(t)$) de Fourier correspondente a algumas operações sobre funções definidas no domínio do tempo:

<u>Operação no tempo</u>	<u>Novos coeficientes</u>
$v(t)$	c_n
$A \cdot v(t) + B$	$\begin{cases} A \cdot c_0 + B, & n = 0 \\ A \cdot c_n, & n \neq 0 \end{cases}$

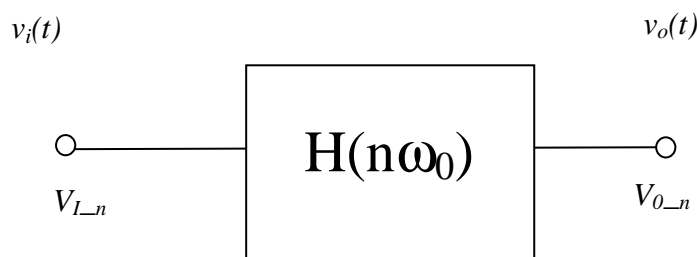
$$v(t-t_d) \quad c_n \cdot e^{-jn\omega_0 t_d}$$

$$dv(t)/dt \quad jn\omega_0 \cdot c_n$$

$$v(t) \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot t + \phi) \quad 1/2 \cdot c_{n-m} \cdot e^{j\phi} + 1/2 \cdot c_{n+m} \cdot e^{-j\phi}$$

Aplicação da análise de Fourier ao processamento de sinais periódicos

Admitindo que um sistema eléctrico linear possa ser descrito por uma função transferência $H(\omega)$ que não carregue a fonte de sinal de tensão de entrada, pode-se estudar o seu funcionamento como um bloco com uma entrada e uma saída em tensão como ilustra a figura:



Num tal sistema, o sinal (periódico) de entrada $v_i(t)$ transforma-se num sinal também periódico de saída $v_o(t)$ modificado/filtrado pelo sistema/circuito caracterizado por $H(\omega)$. A relação de transformação no domínio do tempo caracteriza-se por uma operação de convolução (que não será alvo de estudo neste curso). No caso, porém de sinais periódicos, esta transformação operada por $H(\omega)$ sobre o sinal pode também ser descrita através dos coeficientes da série de Fourier. Assim, cada coeficiente V_{o_n} do sinal filtrado será obtido pela multiplicação complexa do coeficiente correspondente do sinal de entrada pelo valor da função $H(\omega)$ à frequência $n\omega_0$. Assim,

$$V_{o_n} = V_{I_n} \cdot H(n\omega_0)$$

Deste modo, o sinal de saída pode agora ser determinado a partir da sucessão de coeficientes V_{o_n} como definimos acima,

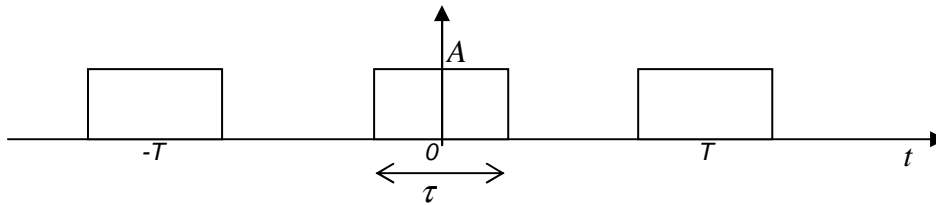
$$v_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_{o_n} \cdot e^{j2\pi n f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_{I_n} \cdot H(n\omega_0) \cdot e^{j2\pi n f_0 t}$$

A determinação da função de transferência (de tensão) $H(\omega)$ também não oferecerá especial dificuldade, conhecida a composição interna do circuito de filtragem. Para tanto, determinar-se-á uma expressão (função de ω) da razão entre o fasor da tensão de saída e o fasor da tensão de entrada. Mais adiante, quando apresentarmos os diversos componentes reactivos ver-se-á em concreto como estabelecer esta função para situações reais.

Exemplo: filtragem passa-baixo de um trem de impulsos rectangulares

A título de exemplo, tome-se a análise de um trem periódico de impulsos rectangulares de largura τ e amplitude A .

$$v(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A \cdot \text{rect}\left(\frac{t - iT_0}{\tau}\right)$$



Utilizando a definição, facilmente se chega à expressão do termo geral dos coeficientes c_n :

$$c_n = \frac{A\tau}{T_0} \cdot \text{sinc}(n \cdot f_0 \cdot \tau)$$

Admitamos que o filtro utilizado na filtragem possui a seguinte função de transferência,

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

em que RC não é mais do que uma constante, que resulta do produto de uma resistência por uma capacidade, que poderemos afinar conforme nos interessar.

Estamos então em condições para obter os coeficientes de Fourier do sinal filtrado através da expressão,

$$V_{0-n} = V_{I-n} \cdot H(n\omega_0) = \frac{A\tau}{T_0} \cdot \text{sinc}(n \cdot f_0 \cdot \tau) \cdot \frac{1}{1 + jn\omega_0 RC}$$

A descrição temporal do sinal de saída resulta então do somatório

$$v_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_{0-n} \cdot e^{j2\pi n f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A\tau}{T_0} \cdot \text{sinc}(n \cdot f_0 \cdot \tau) \cdot \frac{1}{1 + jn\omega_0 RC} \cdot e^{j2\pi n f_0 t}$$

Aplicação

Considerando um sinal rectangular de período $T_0 = 1\text{s}$, uma largura de impulso $\tau = 0.2\text{s}$ e uma amplitude $A=1$, escrevemos uma pequena rotina em linguagem MATLAB para calcular a distribuição dos coeficientes c_n . Eis a parte relevante do código:

```

% Código de cálculo dos coef.s da série de Fourier para ambiente MATLAB
% http://www.mathworks.com/
MAX = 100; n = [-MAX:MAX]; LIM = 10; B = [MAX-LIM:MAX+LIM];
A = 1; tau = 0.2; T0 = 1; f0 = 1/T0; w0 = 2*pi*f0;

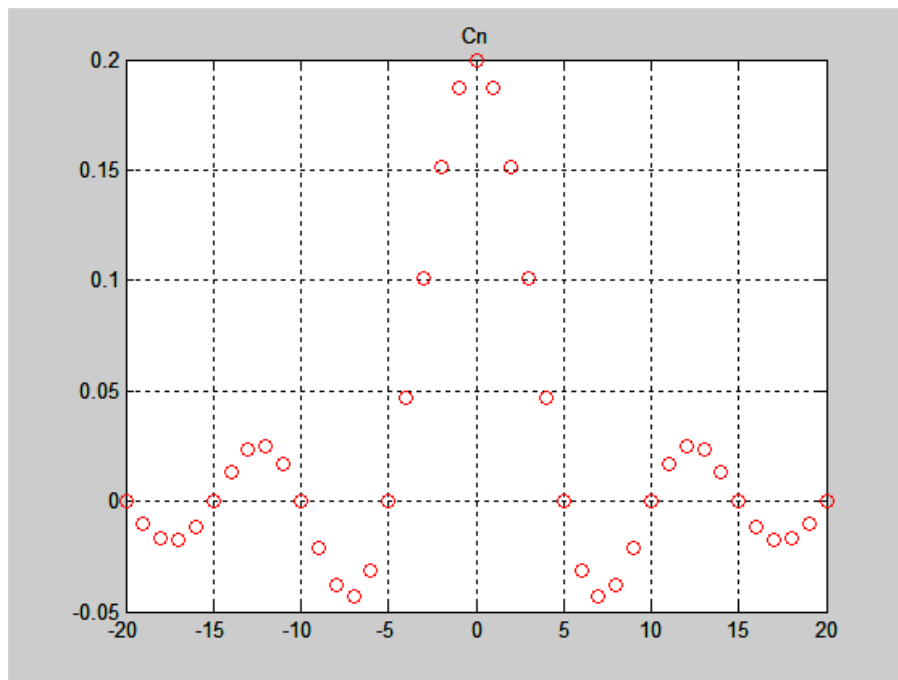
C = input('Condensador (uF)? ');
RC = 100e3 * C * 1e-6; % 100k ohm x 1 uF

VI = A*tau/T0*sinc(f0*tau*n);
H = 1./(1 + j*n*2*pi*f0*RC);
VO = VI.*H;

tt = []; vit = []; vot = [];
for t = -T0 : T0/(10*MAX) : T0
    tt = [tt; t];
    vit = [vit; sum( VI.*exp(j*n.*w0*t))];
    vot = [vot; sum( VO.*exp(j*n.*w0*t))];
end

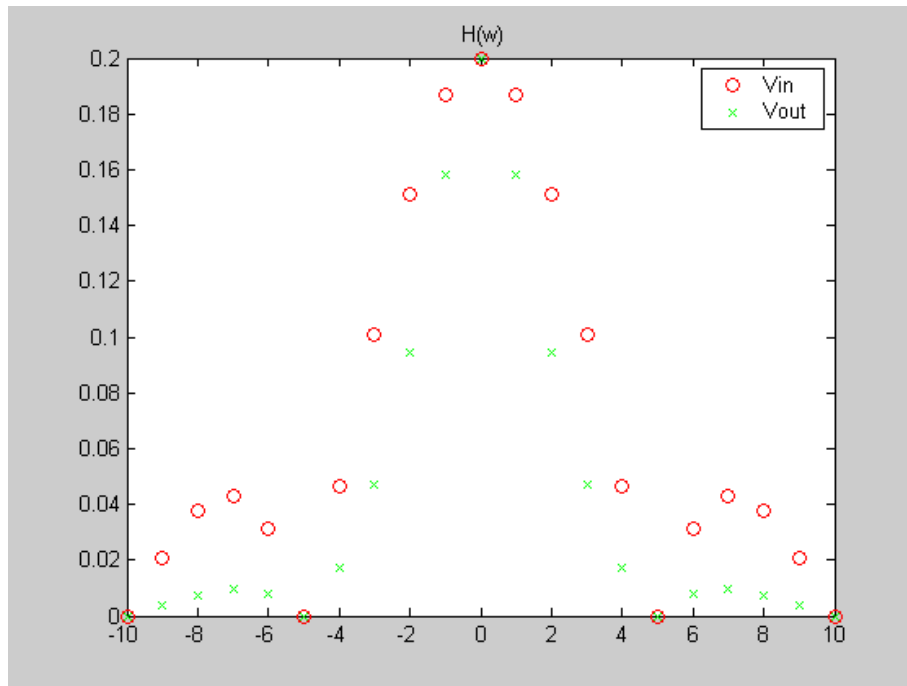
```

No código acima analisa-se a filtragem dum trem de impulsos rectangulares por uma malha RC passa-baixo de primeira ordem. Na figura seguinte, mostra-se a parte real dos coeficientes c_n do sinal de entrada:

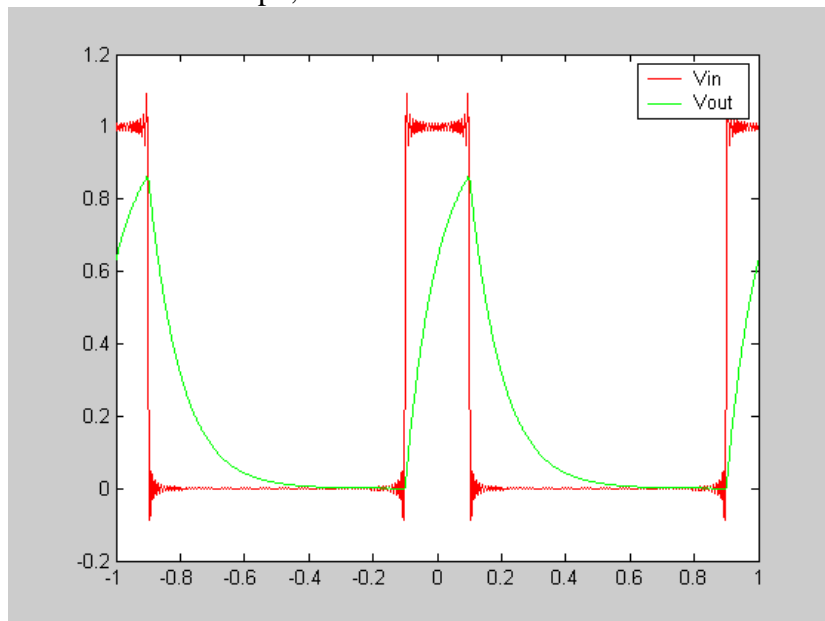


Parte real dos coeficientes c_n com $A=1$, $t = 0.2s$ e $T0 = 1s$. Merece nota o facto de c_0 valer 0.2, ou seja, exactamente o valor médio do trem de impulsos considerado.

Olhando para o módulo dos coeficientes c_n , o resultado seria o seguinte



No domínio do tempo, observaríamos uma forma de onda como se mostra a seguir:



As oscilações visíveis juntos aos flancos do sinal de entrada são causadas numericamente pelo conhecido fenómeno de Gibbs, resultante de limitações da transformada inversa de Fourier em pontos de derivada infinita.

Outras formas de onda:

Naturalmente, diferentes sinais de entrada, implicarão diferentes séries c_n . Eis alguns exemplos:

Trem de impulsos (Dirac)

$$v(t) = \delta(t) \quad , |t| < T_0 / 2 \quad \xrightarrow{\text{FOURIER}} c_n = 1/T_0$$

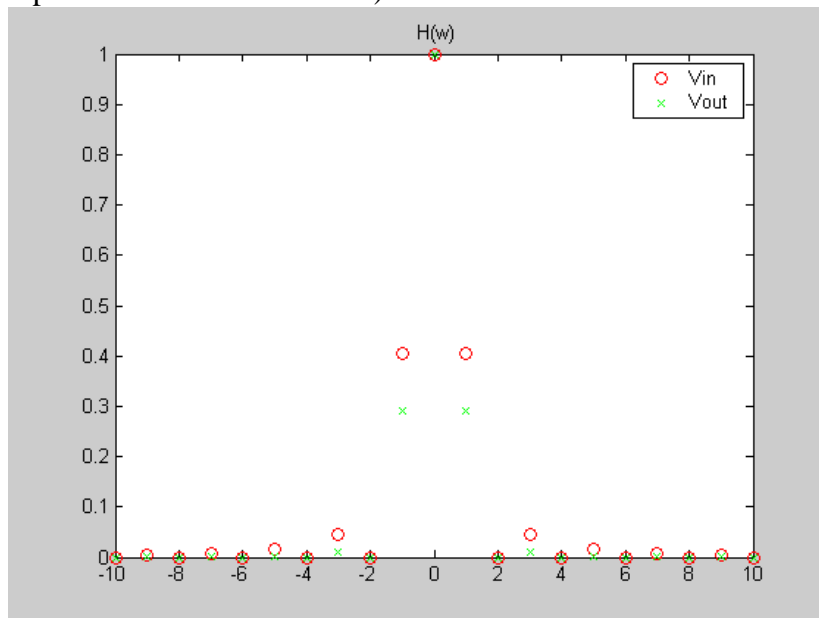
Onda triangular

$$v(t) = 1/T_0 \left[1 - \frac{2|t|}{T_0} \right] \quad , -T_0/2 < t < T_0/2$$

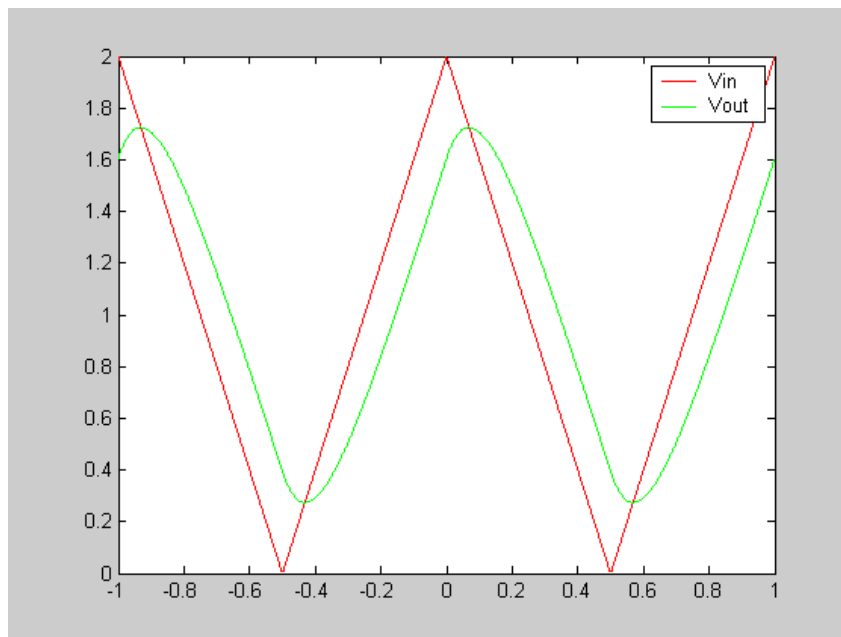
Sendo o período T_0 e a amplitude $1/T_0$ resulta que a área de cada impulso será igual a $1/2$. Então teremos,

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{T_0} & , n = 0 \\ \frac{4}{n^2 \pi^2 T_0} & , n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Passando este sinal por um filtro RC de primeira ordem com constante de tempo $RC=0.1s$, igual ao já utilizado, obtém-se o seguinte efeito sobre os coeficientes de Fourier (sendo complexos, representamos o seu módulo):



E no domínio temporal, o efeito da filtragem pode ser visto na figura seguinte com $RC = 0.1s$,

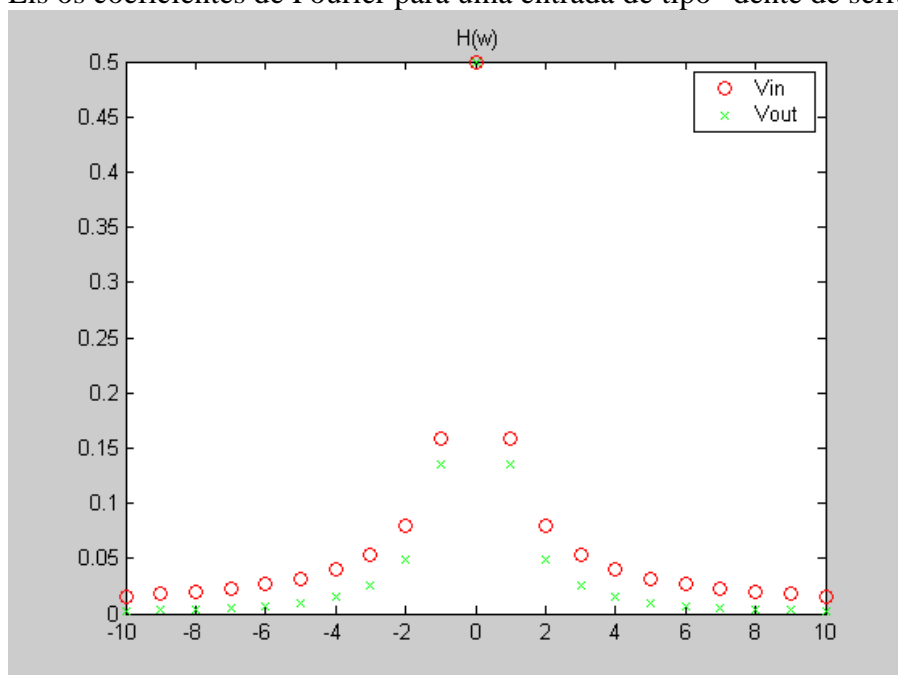


Dente de serra

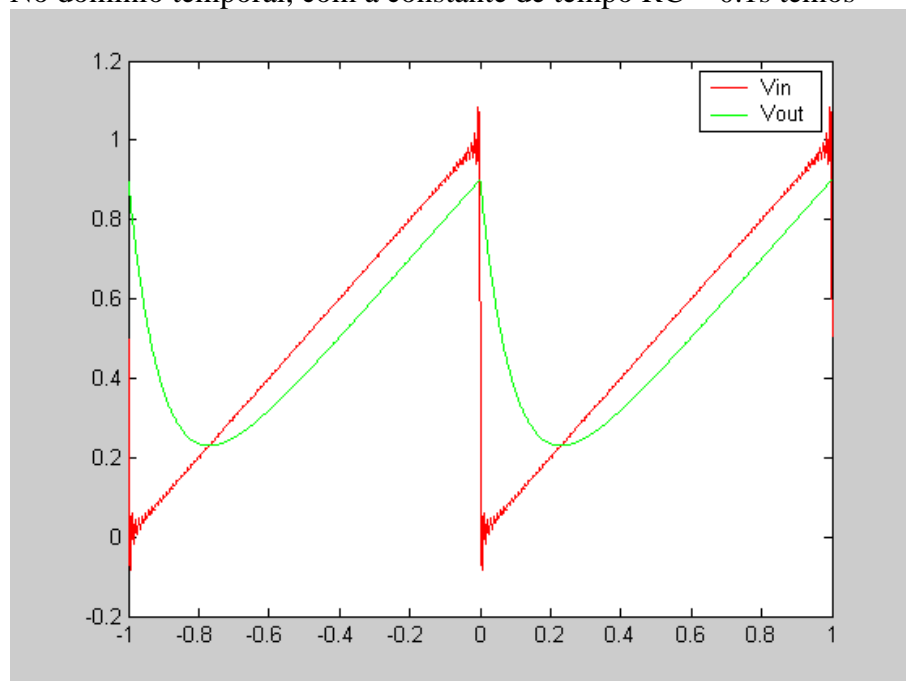
$$v(t) = t/T_0, 0 < t < T_0$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & , n = 0 \\ \frac{j}{2\pi n} & n \neq 0 \end{cases}$$

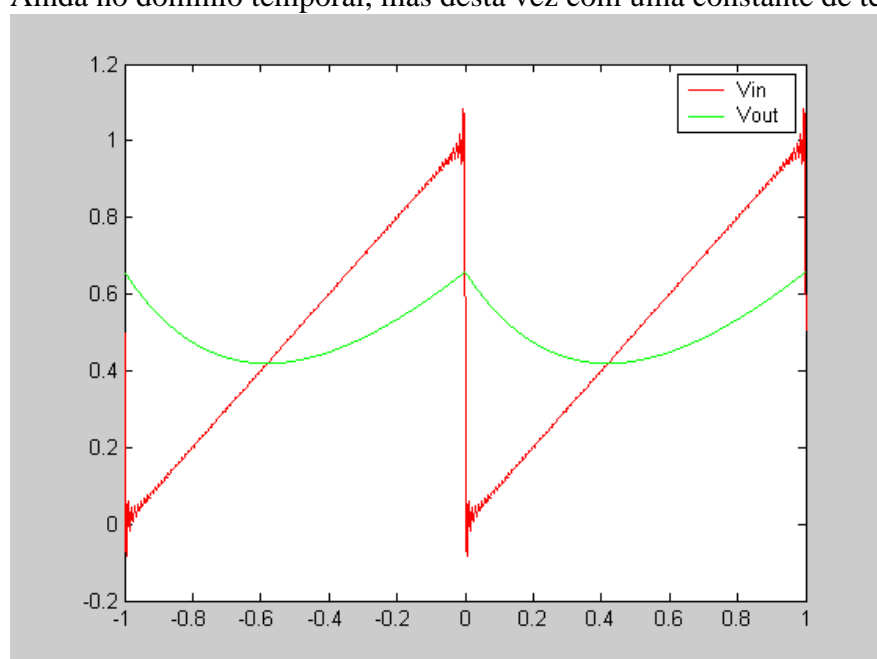
Eis os coeficientes de Fourier para uma entrada de tipo “dente de serra”,



No domínio temporal, com a constante de tempo $RC = 0.1s$ temos



Ainda no domínio temporal, mas desta vez com uma constante de tempo $RC = 0.5s$ teremos,



Sinusoide após rectificação de meia onda

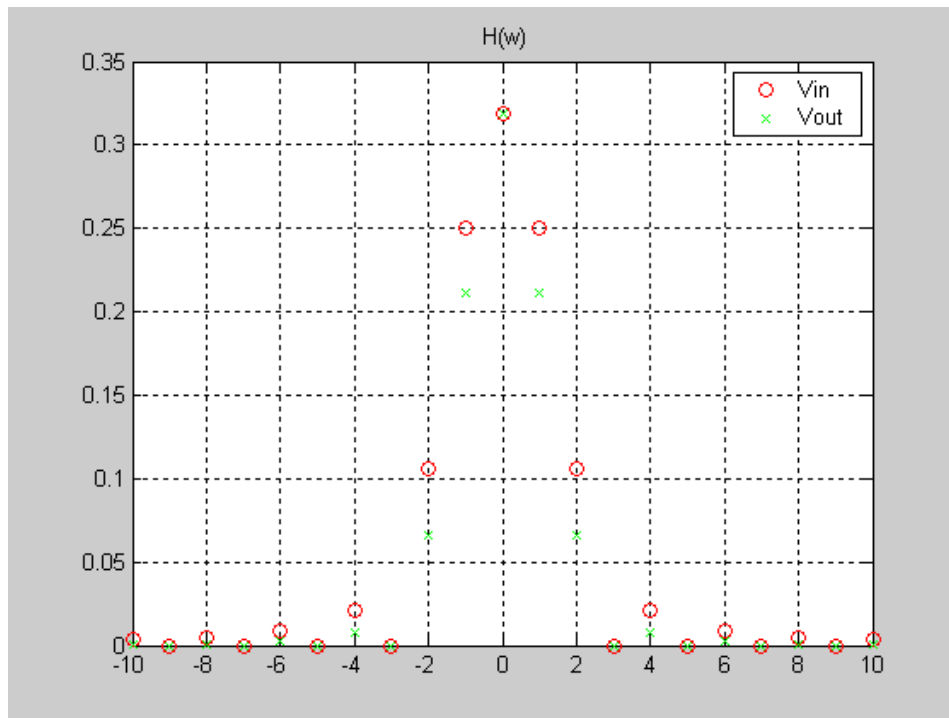
Uma sinusóide processada por um rectificador (ideal) de meia onda terá anuladas as suas arcadas negativas e conservará apenas as positivas. O resultado, no domínio do tempo, será

$$v_{mo}(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & , 0 < t < T_0 / 2 \\ 0 & T_0 / 2 \leq t < T_0 \end{cases}$$

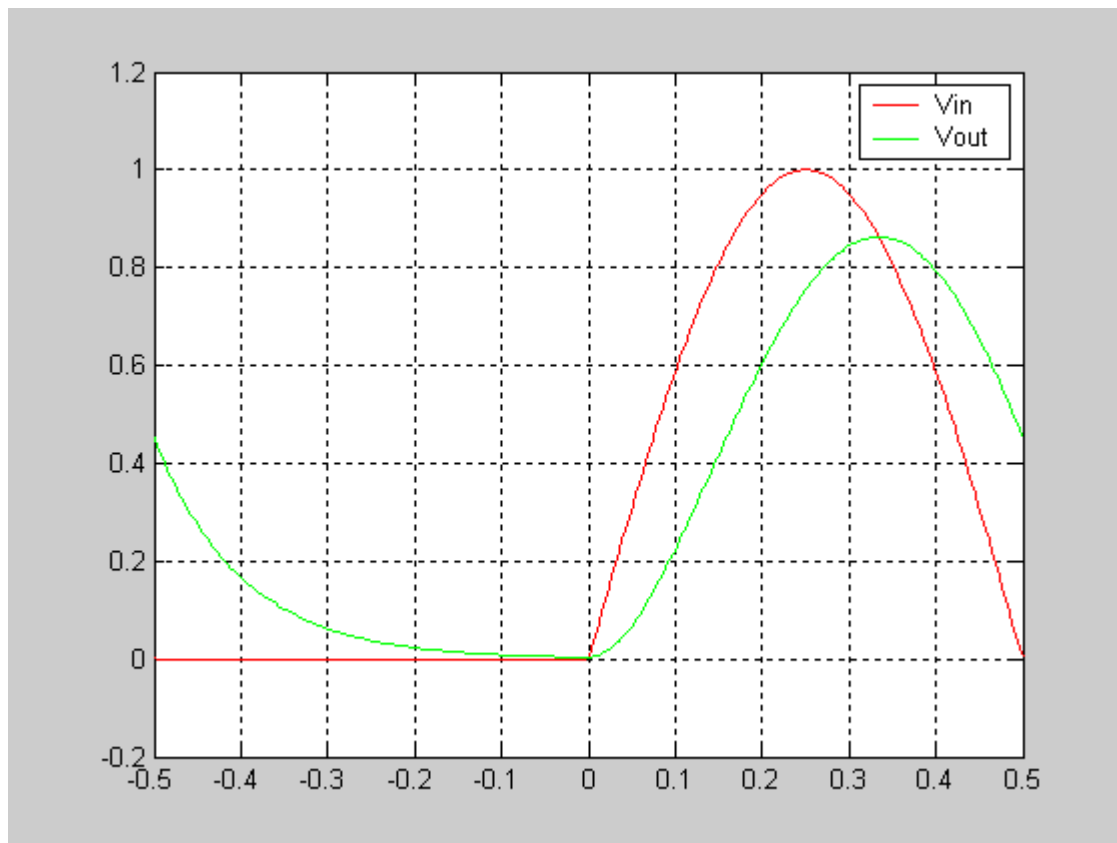
Daqui resultará uma série de Fourier com os coeficientes seguintes

$$cmo_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1-n^2)} & , n = 2, 4, 6, \dots \\ -jn/4 & n = \pm 1 \\ 0 & \text{outros } n \end{cases}$$

Eis os primeiros coeficientes de Fourier para uma entrada de tipo sinusoidal após rectificação de meia onda,



No domínio temporal, e considerando a filtragem com um passa-baixo de constante de tempo RC = 0.1s teremos



Sinusoide após rectificação de onda completa

Uma sinusóide processada por um rectificador (ideal) de onda completa poderá ser representado analiticamente pela operação módulo:

$$v_{oc}(t) = |\sin(\omega_0 t)|$$

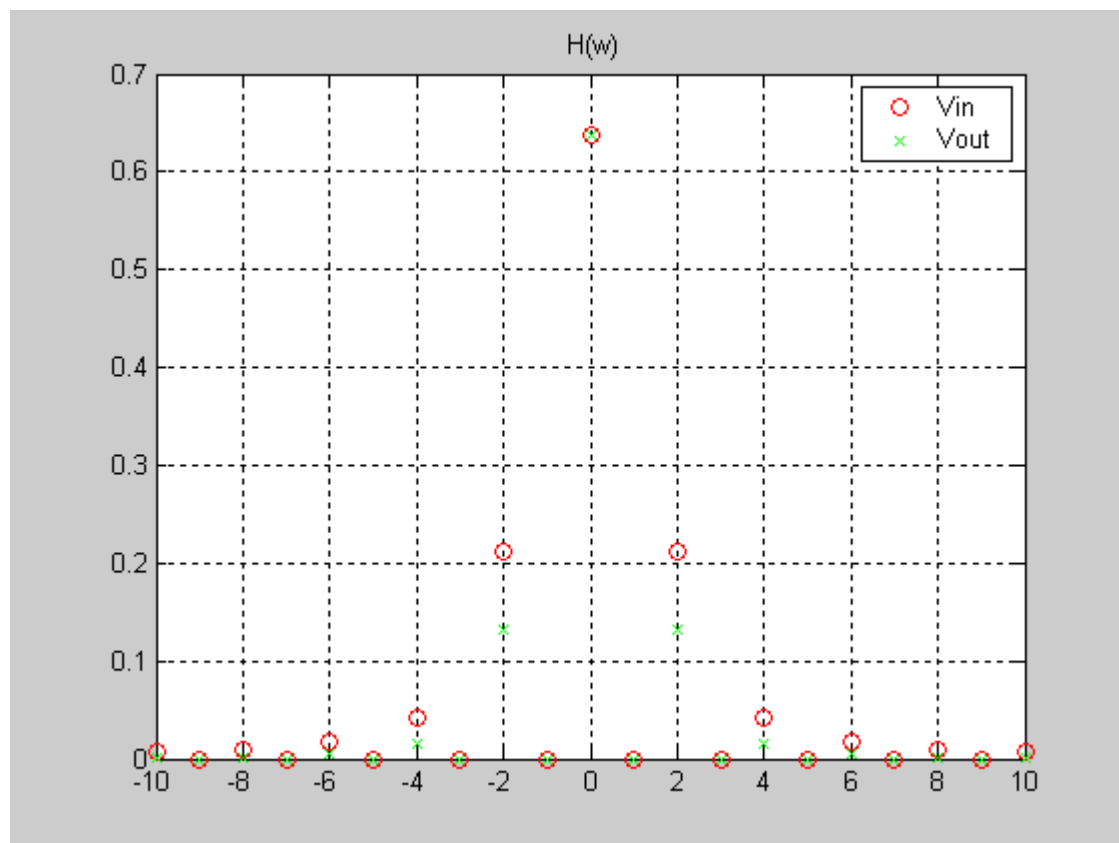
No entanto é possível uma outra formulação que facilite a obtenção dos coeficientes de Fourier à custa do caso anterior. Podemos então representar $v_{oc}(t)$ com a soma do sinal $v_{mo}(t)$ com uma sua cópia diferida no tempo de meio período. Nesta formulação alternativa teremos então,

$$v_{oc}(t) = v_{mo}(t) + v_{mo}(t - T/2)$$

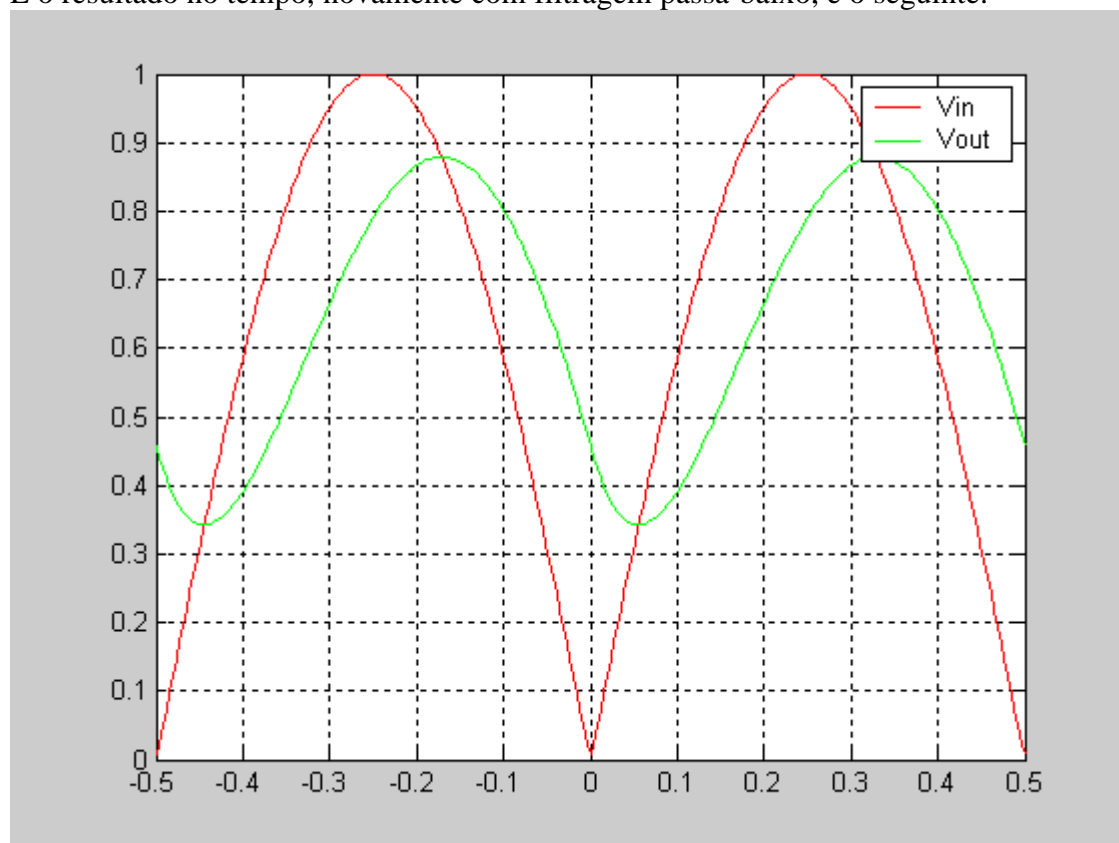
Recorrendo às propriedades já estudadas da série de Fourier, teremos então que os coeficientes desta série serão obtidos assim:

$$cmo_n = cmo_n + cmo_n \cdot e^{-jn2\pi T/2}$$

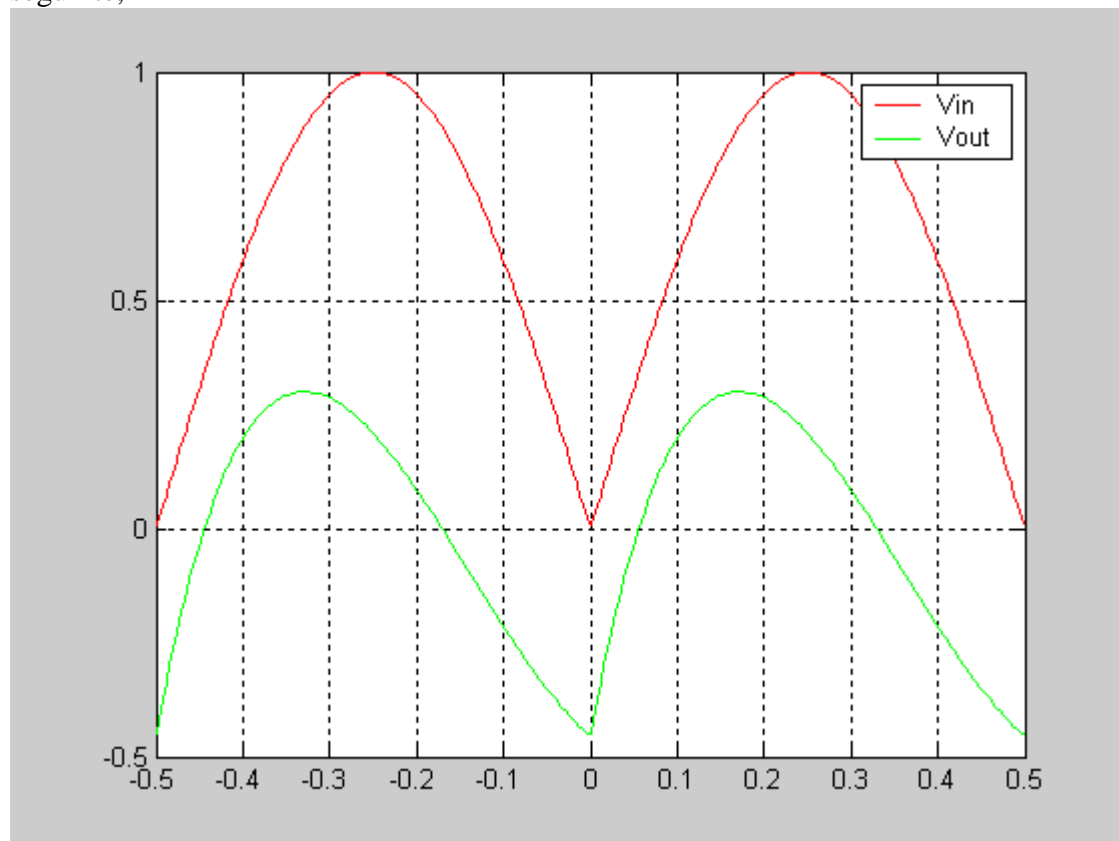
O novos coeficientes serão então os seguintes,



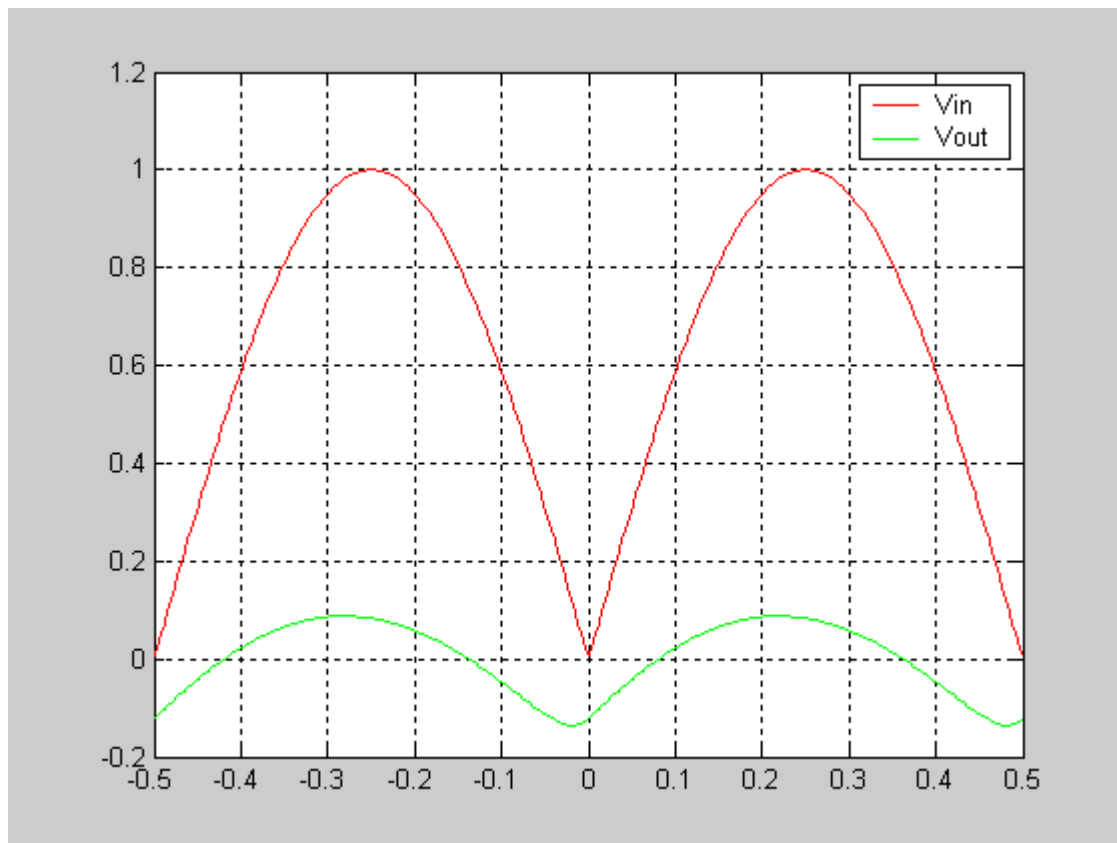
E o resultado no tempo, novamente com filtragem passa-baixo, é o seguinte:



Com um filtro passa-alto de primeira ordem com $R=100\text{k}\Omega$ e $C=1\mu\text{F}$ teremos o resultado seguinte,



Com um filtro passa-banda constituído por um ramo RC série e um ramo RC-paralelo em paralelo, com $R=100\text{k}\Omega$ e $C=1\mu\text{F}$ teremos o resultado seguinte,



TEOREMA DE PARSEVAL

Como veremos, a potência de um sinal definido no domínio do tempo, pode ser encontrada também no domínio (dos coeficientes) de Fourier.

$$\bar{P} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v^2(t).dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Demonstração:

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t).v^*(t).dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t). \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* . e^{-j2\pi f_0 t} \right].dt =$$

Invertendo a ordem de cálculo do integral e do somatório infinito, obtém-se a seguinte expressão:

$$\dots = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* \left[\frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t).e^{-j2\pi f_0 t}.dt \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* . c_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad q.e.d.$$

Exprimindo por palavras este teorema dir-se-ia que a potência de um sinal é igual à soma das potências de todas as suas componentes (sinusoidais) de Fourier. Na realidade a potência associada a cada harmónico c_n é a potência média do fasor que lhe está associado à frequência angular $n.\omega_0$:

$$\left\langle \left| c_n \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \right|^2 \right\rangle = |c_n|^2$$

Exercício de projecto

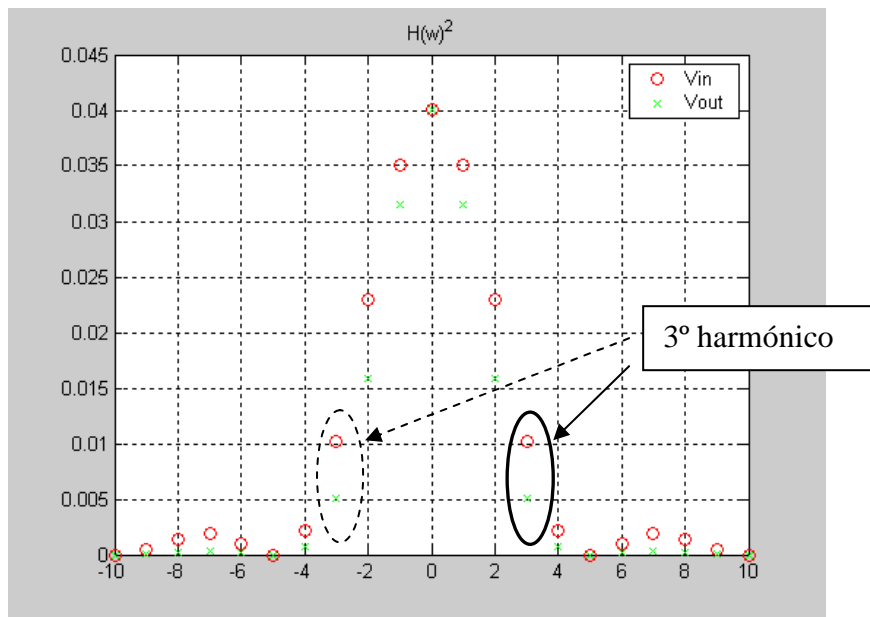
Suponha que no caso de filtragem de um sinal rectangular por um filtro RC de primeira ordem, já estudado, se pretendia otimizar a constante de tempo em ordem a um certo objectivo. Suponhamos, então, que nos era pedido que o filtro fosse tal que provocasse uma atenuação de $\frac{1}{2}$ do terceiro harmónico do sinal de entrada (componente $n=3$). Como proceder?

Conforme se discutiu durante a demonstração do teorema de Parseval, a cada harmónico corresponde uma potência $|c_n|^2$. Assim, o nosso problema terá uma solução que concilie duas equações: a primeira, descreverá a variação do termo V_{0-3} em função da constante de tempo do filtro usado; a segunda condição irá exprimir o objectivo pedido, ou seja, $|V_{0-3}|^2 = \frac{|V_{1-3}|^2}{2}$.

Assim, teremos

$$\left\{ \begin{array}{l} |V_{0-3}|^2 = \frac{|V_{1-3}|^2}{2} \\ V_{0-3} = H(3\omega_0)V_{1-3} \end{array} \right. \quad \text{Daqui resultando } |H(3\omega_0)|^2 = 0.5 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{1 + j3\omega_0 RC} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Para $T_0=1$ e $R=100\text{k}\Omega$, resulta imediatamente a solução analítica $C=0.53\mu\text{F}$. Uma vez que temos o nosso “simulador” disponível no MATLAB, podemos chamar novamente o programa e verificar o gráfico com as potências dos diferentes harmónicos,



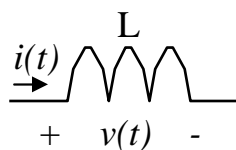
A figura confirma que a série dos coeficientes c_n ao quadrado apresenta uma atenuação de 50% para o terceiro harmónico, conforme se pedia.

Componentes reactivos lineares

Vamos agora introduzir dois componentes muito importantes para o nosso estudo. Estes componentes – condensador e bobine – designam-se em geral como componentes reactivos, sendo que, na situação ideal, não se verifica aí qualquer dissipação (consumo) activa de energia. Toda a energia que numa dado momento acumulem, será em princípio devolvida mais tarde, decorrendo este processo de forma cíclica quando o regime de funcionamento for sinusoidal.

BOBINE

Este componente obtém-se enrolando um certo número de espiras de fio condutor (normalmente isolado com uma camada de verniz dieléctrico) em torno de um núcleo de ar ou de um material ferromagnético. Numa bobine manifesta-se o fenómeno da auto-indução que corresponde à criação de forças contra-electromotrizes em resultado da variação da corrente. O comportamento da tensão e corrente numa bobine de coeficiente de auto-indução igual a L , conforme ilustrado na figura, obedece então a uma lei da seguinte forma $v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$



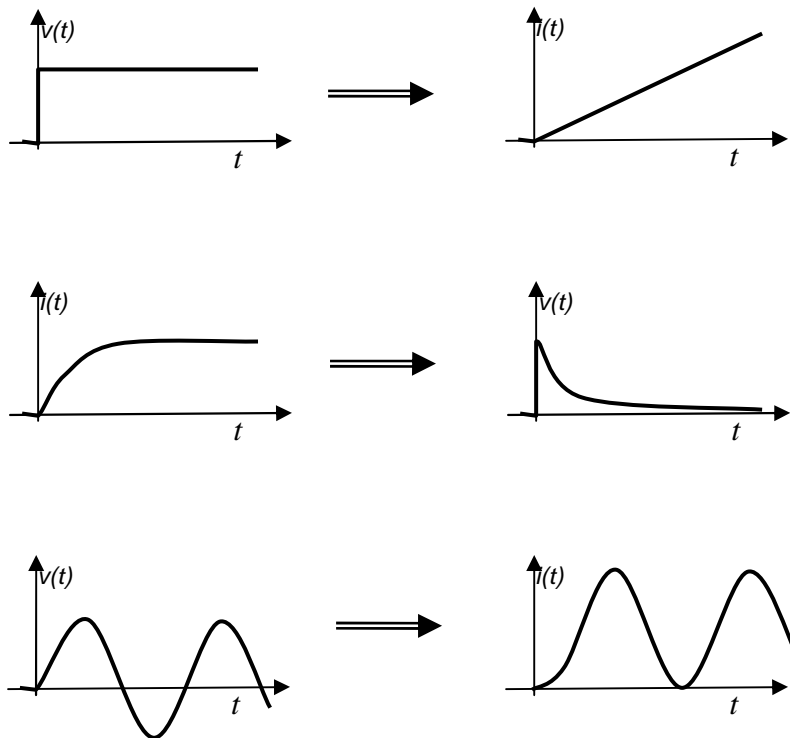
Inversamente, a corrente na bobine pode ser obtida a partir da dinâmica observada para a tensão da seguinte forma:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt$$

Em geral, a tendência de variação do valor de L com o número de espiras é aproximadamente quadrática, se não se alterar muito dimensões mecânicas tais como a secção toroidal, o calibre do fio ou o comprimento da bobine:

$L \propto N^2$ (leia-se: o valor de L varia proporcionalmente com N ao quadrado)

Alguns exemplos de resposta de uma bobine a determinados tipos de estímulos, qualitativamente deduzidos a partir da lei diferencial apresentada:



Regime sinusoidal / fasorial:

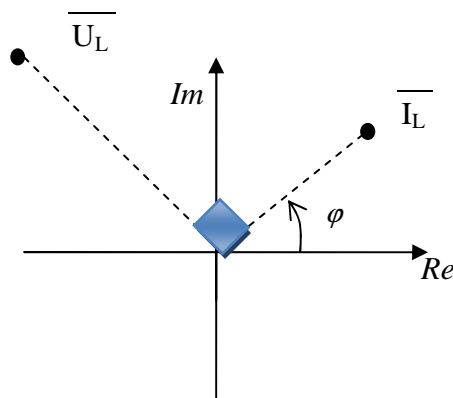
Consideremos agora a situação em que a bobine se encontra sob regime sinusoidal. Admitamos que sobre a bobine é forçada de alguma maneira uma corrente sinusoidal $i = I \cdot \sin(\omega t)$. A tensão na bobine será então expressa na seguinte forma:

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L\omega I \cos(\omega t)$$

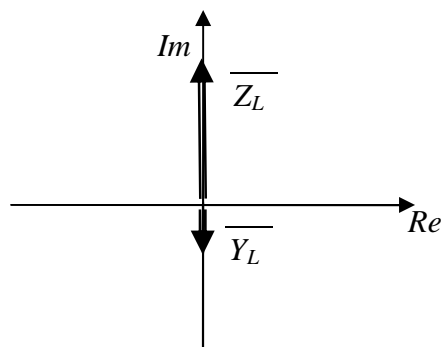
A partir desta expressão podemos concluir duas coisas:

- quanto à amplitude de pico de $v(t)$, V , iremos concluir que esta se pode relacionar com I através da expressão: $V = \omega L \cdot I$. Por semelhança com a lei de Ohm, vamos definir $X_L = \omega L$ como o módulo da impedância daquela bobine. Ao módulo de um elemento puramente reactivo, dá-se o nome de reactância (X), a qual pode ser capacitiva (X_C) ou indutiva (X_L), e que relaciona o módulo da tensão e da corrente. Neste caso, estamos perante uma reactância indutiva, ou seja, baseada no fenómeno da auto-indução.

- quanto à fase, facilmente verificamos que a tensão ficou 90° avançada em relação à corrente; deste modo ao definirmos a impedância complexa da bobine teremos que considerar uma forma que dá como resultado a expressão de que com $\vec{V} = \vec{Z} \cdot \vec{I}$ resulta uma corrente atrasada 90° face à tensão. Então temos a impedância complexa de uma bobine $Z_L = j\omega L$. Num diagrama fasorial iremos encontrar a tensão avançada de 90 graus face à corrente, o que se pode facilmente traduzir num diagrama gráfico (**diagrama fasorial**),

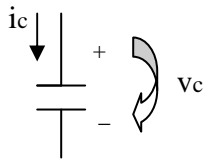


O **diagrama de impedâncias** representa no plano complexo as diferentes impedâncias de um circuito (ou as admitâncias, quando se torna necessário estudar o funcionamento dum paralelo). Para uma bobine a representação no diagrama de impedâncias de \vec{Z}_L e \vec{Y}_L (admitância) é como se segue



Condensador

Um condensador armazena energia no campo eléctrico que se estabelece após um par de placas paralelas separadas por um isolador (dieléctrico). A relação entre a corrente de carga/descarga e a tensão nos terminais depende essencialmente dum parâmetro C que designamos por capacidade. A capacidade de um condensador é determinada pela área de sobreposição das placas a carregar – A – e pela distância entre placas – d – segundo a tendência $C \propto \frac{A}{d}$

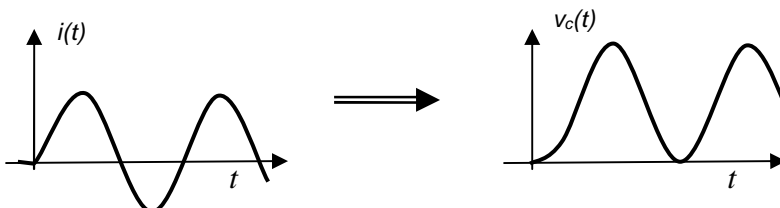
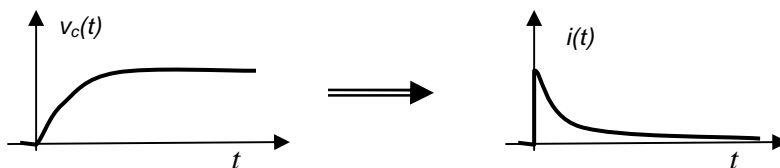
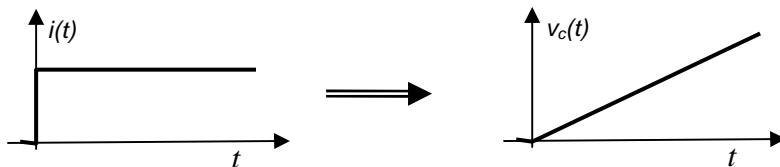


símbolo eléctrico
de um condensador

$$i_c(t) = C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int i_c(t) dt$$

Eis alguns exemplos de comportamento de um condensador para diversas entradas conhecidas em corrente ou tensão:



Regime sinusoidal / fasorial:

Tal como se fez no estudo da bobine, vamos agora considerar o comportamento sob regime sinusoidal. Admitamos que no condensador é aplicada uma tensão sinusoidal $v_c = V \cdot \sin(\omega t)$. A corrente que irá percorrê-lo, segundo a equação diferencial característica, será assim:

$$i_c(t) = C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} = C\omega V \cdot \cos(\omega t)$$

As conclusões a extrair seriam agora as seguintes:

- quanto à amplitude: o valor de pico da corrente I pode relacionar-se com V através da expressão: $V = \frac{1}{\omega C} I$. Por semelhança com a lei de Ohm, vamos agora uma reactância capacitiva

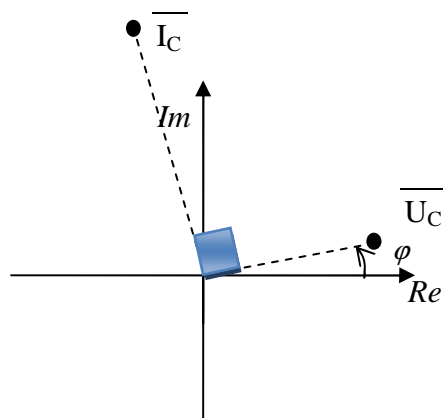
$X_C = 1 / \omega C$ que corresponderá ao módulo da impedância que nos aparece na Lei de Ohm generalizada:

$$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$$

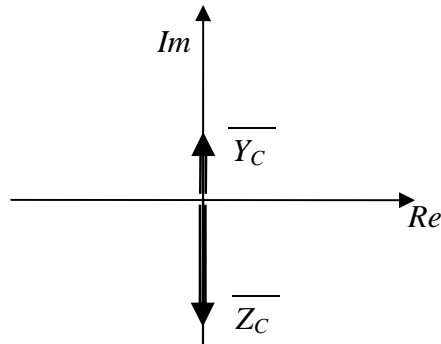
- quanto à fase, facilmente verificamos que a tensão no condensador estará 90° atrasada em relação à corrente injectada. Então teremos a impedância complexa de um condensador da forma

$$\overline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}.$$

No diagrama fasorial iremos agora representar a relação entre tensão e corrente com esta avançada de 90 graus face à tensão:



No **diagrama de impedâncias** do condensador vamos encontrar a impedância $\overline{Z_C}$ no semi-eixo imaginário negativo e $\overline{Y_C}$ no semi-eixo positivo, ou seja, exactamente o contrário do que sucedia com a bobine.



Algumas diferenças entre o comportamento capacitivo e indutivo que importa ter bem presentes.

Numa bobine:

- A corrente não pode dar saltos bruscos.
- Uma tensão aplicada sinusoidal cairá uma corrente sinusoidal atrasada $\frac{1}{4}$ de ciclo.

Num condensador:

- A tensão não pode variar bruscamente.
- Uma corrente sinusoidal aplicada cairá uma tensão também sinusoidal atravessada de $\frac{1}{4}$ de ciclo relativamente á primeira.

Função-transferência de sistemas lineares e invariantes no tempo

Estamos agora em condições de analisar um pouco melhor o conceito de função de transferência e resposta em frequência de circuitos RLC, o qual já anteriormente aplicámos embora sem a devida fundamentação.

Considera-se linear um sistema cuja resposta obedece ao princípio da linearidade e da sobreposição. Pelo princípio da linearidade, um sistema que apresenta uma resposta $y(t)$ a uma entrada $v(t)$, há-de necessariamente responder com $K.y(t)$ a uma entrada $K.v(t)$. Por outro lado o princípio da sobreposição garante-nos adicionalmente uma expressão para a resposta perante uma entrada igual à soma $v(t) + w(t)$, sendo que a $w(t)$, por sua vez, corresponde uma resposta $z(t)$. O princípio da sobreposição impõe que a resposta ao conjunto seja $y(t) + z(t)$.

Definimos $h(t)$ como a resposta impulsional de um sistema (circuito) com um par de terminais de entrada e um par de terminais de saída, ou seja a saída que será observada à saída quando na entrada se aplica um impulso. Se nada for dito, consideremos que as nossas entradas e saídas são tensões eléctricas. Na verdade a teoria de sistemas aplicar-se-á, qualquer que seja a natureza física dos sinais em causa (forças, pressões, deslocamentos, correntes eléctricas, campos magnéticos, etc.).

Define-se a Função de transferência $H(f)$ do sistema como a transformada de Fourier da resposta impulsional $h(t)$, segundo a expressão seguinte – a qual (e não é por acaso) apresenta algumas semelhanças com a expressão dos coeficientes da série de Fourier:

$$H(f) \equiv \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t).e^{-j2\pi ft} dt$$

Admita-se a excitação do sistema com um sinal de entrada sinusoidal (como as componentes do desenvolvimento de um sinal periódico na série de Fourier) assim expresso na forma fasorial:

$$v(t) = A_x . e^{j\phi_x} . e^{j2\pi f_0 t}$$

Considerando o sinal $x(t)$ estável ao longo do tempo, sem a perturbação de qualquer transitório de arranque, a resposta do circuito em regime estacionário será dada pela convolução $v(t)*h(t)$,

$$\begin{aligned} y(t) &= v(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).A_x . e^{j\phi_x} . e^{j2\pi f_0(t-\tau)} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).e^{-j2\pi f_0 \tau} \right) . A_x . e^{j\phi_x} . e^{j2\pi f_0 t} \\ &= H(f_0).A_x . e^{j\phi_x} . e^{j2\pi f_0 t} \end{aligned}$$

Mas como a saída, sendo o sistema linear, deve ser também sinusoidal, podemos escrever,

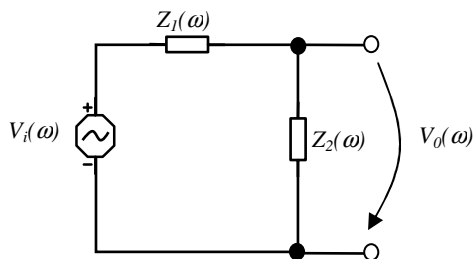
$y(t) = A_y . e^{j\phi_y} . e^{j2\pi f_0 t}$, com as seguintes condições de igualdade a valer para a amplitude e para a fase do fasor de $y(t)$: $A_y = |H(f_0)|.A_x$ e $\phi_y = \arg(H(f_0)) + \phi_x$.

Da análise desta expressão concluiremos imediatamente que $|H(f_0)| = A_y / A_x$ representa a resposta em amplitude do sistema (ou ganho). Da mesma forma, $\arg(H(f_0)) = \phi_y - \phi_x$

corresponderá concretamente ao desfasamento introduzido pelo sistema à frequência f_0 e é frequentemente designado como a “resposta de fase”. É comum a representação gráfica de ambas as respostas referidas através do diagrama de Bode, no qual a frequência é apresentada num eixo logaritmo, a resposta de fase num eixo linear em unidades de graus ou radianos, e a resposta em amplitude normalmente em unidades decibel (dB), obtidas pela seguinte transformação logarítmica $20 \cdot \log_{10} |H(f)|$. Normalmente é mais utilizada a função de transferência definida segundo a variação da frequência angular ω em vez da frequência linear f . Isto tem que ver com o facto de as impedâncias dos elementos reactivos clássicos (L e C) terem uma expressão mais simples se usarmos a frequência angular.

Alguns filtros R-C simples

O processo de obtenção da função $H(\omega)$, para um sistema com entrada e saída definidas em tensão, vai agora ser ilustrado para algumas situações concretas. Para tal, consideraremos ideais quer a fonte de sinal de entrada quer a carga de saída. Significa isto que a fonte terá uma resistência interna nula e a carga de saída terá uma resistência infinita de modo a não pedir qualquer corrente ao circuito. Assim, nas situações mais simples que iremos estudar, a análise de $H(\omega)$ não implica mais do que o cálculo da relação entrada – saída num divisor de tensão. Consideremos então um circuito com duas impedâncias complexas quaisquer Z_1 e Z_2 , ligadas em série como ilustra a figura.



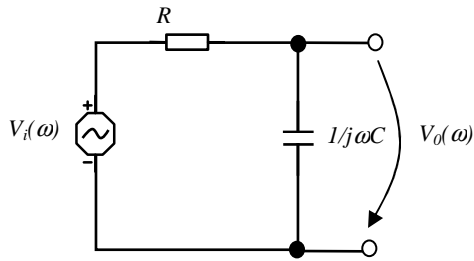
Na medida em que não haja qualquer fuga de corrente na ligação à carga de saída, verificam-se os pressupostos de um divisor de tensão, ou seja, Z_1 e Z_2 deverão ser percorridos pela mesma corrente, resultando o seguinte

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = \frac{Z_2(\omega)}{Z_1(\omega) + Z_2(\omega)}$$

Agora que já estudámos expressões para as impedâncias complexas qualquer que seja o componente ou grupo de componentes associados para formar Z_1 e Z_2 , facilmente poderemos calcular $H(\omega)$.

Filtro passa-baixo

Um filtro passa-baixo de primeira ordem pode ser obtido associando uma resistência de valor R na posição de Z_1 e um condensador de capacidade C na posição de Z_2 .



A função transferência complexa virá assim,

$$H(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

A resposta em amplitude, ou ganho, pode então obter-se a partir daqui

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

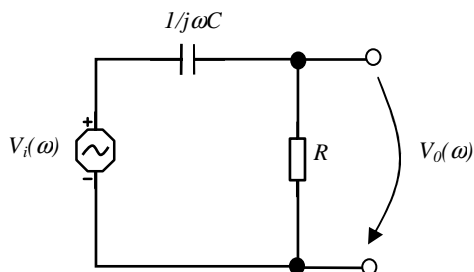
E a resposta de fase será

$$\arg|H(\omega)| = 0 - \tan^{-1}(\omega RC/1) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

No exemplo de análise de Fourier, o circuito considerado foi exactamente do tipo que acabámos de descrever. A função $\mathbf{H}(\mathbf{n}\omega_0)$ então utilizada não era mais do que $\mathbf{H}(\omega)$ com $\omega = \mathbf{n}\cdot\omega_0$. A razão de ser do nome deste tipo de filtro resulta evidente do gráfico da resposta em amplitude onde se observa que as baixas frequências experimentam um ganho próximo da unidade e, à medida que a frequência aumenta, o “ganho” vai sendo cada vez menor, tendendo mesmo para zero com a frequência ω a tender para infinito.

Filtro passa-alto

Um filtro passa-alto de primeira ordem pode ser obtido associando um condensador de capacidade C na posição de Z_1 e uma resistência de valor R na posição de Z_2 .



A função transferência complexa virá assim,

$$H(\omega) = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}$$

A resposta em amplitude, ou ganho, pode então obter-se a partir daqui

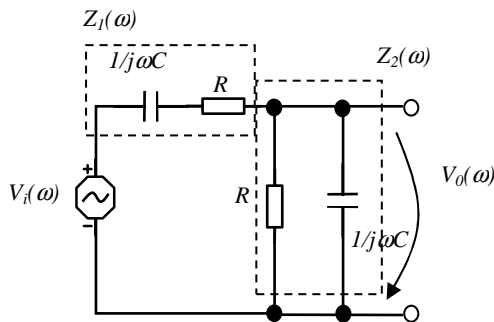
$$|H(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Ao contrário do filtro anterior, este apresentará uma boa resposta em amplitude apenas para as frequências elevadas, ficando as baixas frequências muito atenuadas. A resposta de fase será

$$\arg|H(\omega)| = \pi / 2 - \operatorname{tg}^{-1}(\omega RC)$$

Filtro passa-banda

Um filtro passa-banda de primeira ordem pode ser obtido associando um condensador de capacidade C na posição de Z_1 e uma resistência de valor R na posição de Z_2 .



Começamos por obter as expressões das impedâncias série e paralelo, Z_1 e Z_2 .

$$Z_1(\omega) = R + \frac{1}{j\omega C} \quad Z_2(\omega) = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{j\omega RC + 1}$$

A função transferência complexa virá assim,

$$H(\omega) = \frac{Z_2(\omega)}{Z_1(\omega) + Z_2(\omega)} = \frac{\frac{R}{j\omega RC + 1}}{\left[R + \frac{1}{j\omega C} \right] + \frac{R}{j\omega RC + 1}}$$

Para simplificar esta expressão, podemos agora multiplicar ambos os termos da função racional por $1 + j\omega RC$. Obtemos então

$$H(\omega) = \frac{R}{\frac{1 + j\omega RC}{j\omega C} + R \cdot (1 + j\omega RC + 1)} \cdot \frac{(j\omega C)}{(j\omega C)} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC + R \cdot (2 + j\omega RC) \cdot j\omega C}$$

Resulta finalmente,

$$H(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 - (\omega RC)^2 + 3j\omega RC}$$

Com um polinómio do segundo grau em denominador e o termo $j\omega RC$ em numerador, facilmente se conclui que esta função tenderá para zero com $\omega \rightarrow 0$ e com $\omega \rightarrow \infty$. Eis a razão de ser do nome “passa-banda”. Existirá uma banda de frequência intermédias passadas pelo filtro à saída sem grande atenuação, e às baixas e altas frequências o filtro irá cortar qualquer sinal. A resposta em amplitude, ou ganho, pode então obter-se a partir daqui

$$|H(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{[1 - (\omega RC)^2]^2 + (3\omega RC)^2}}$$

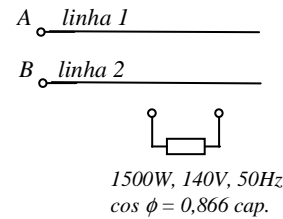
A resposta de fase obedecerá à seguinte expressão

$$\arg|H(\omega)| = \pi/2 - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3\omega RC}{1 - (\omega RC)^2}\right)$$

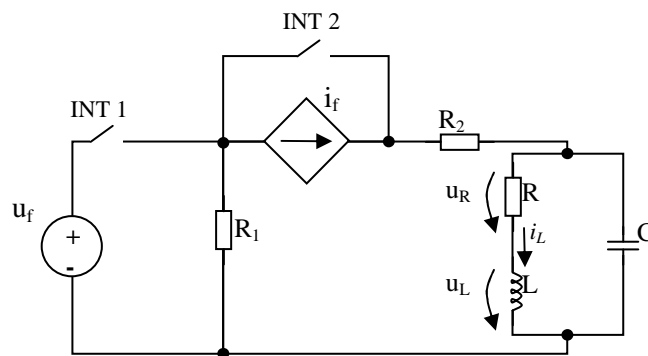
Exercícios:

1. Na figura ao lado, as linhas 1 e 2 são alimentadas por tensão alternada sinusoidal de 230V, 50Hz. As características nominais do receptor são as indicadas.

Proponha e dimensione uma solução para alimentar o receptor nas suas condições nominais



2. Pretende-se analisar o circuito a seguir com os interruptores INT1 e INT2 fechados.



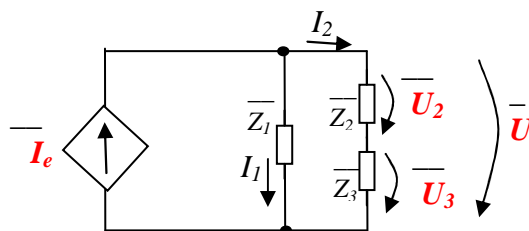
$$L = 10\text{mH} \quad R_1 = 100\text{k}\Omega \quad R_2 = 1\text{k}\Omega \quad R = 100\Omega$$

Consideramos u_f uma fonte de tensão alternada sinusoidal de valor eficaz U e frequência 1 kHz.

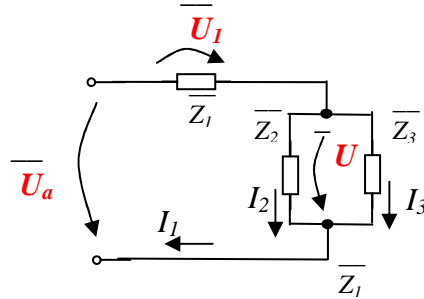
Calcule o valor de C de modo a que o circuito esteja em ressonância àquela frequência.

NOTA: pode utilizar o método de cálculo que quiser mas é-lhe expressamente pedido o diagrama fasorial do circuito.

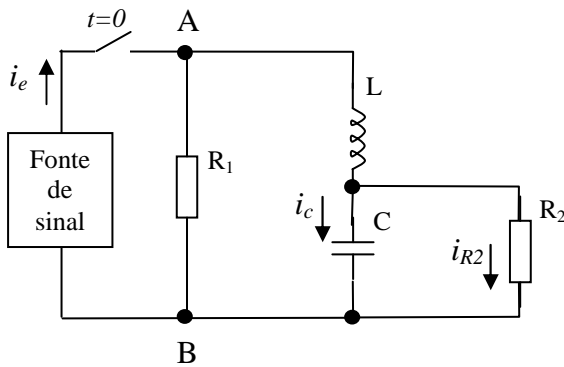
3. Na figura em baixo, determine a que condições devem obedecer as impedâncias \overline{Z}_1 , \overline{Z}_2 e \overline{Z}_3 para que $I_e = I_1 + I_2$ e $U = U_2 + U_3$. Justifique devidamente a sua resposta.



4. Na figura ao lado, a que condições devem obedecer as impedâncias $\overline{Z_1}$, $\overline{Z_2}$ e $\overline{Z_3}$ para que se tenha $I_1 = I_2 + I_3$ e $U_a = U_1 + U$? Justifique devidamente a sua resposta.



5. No circuito seguinte, considere que a alimentação se faz com uma fonte de corrente alternada sinusoidal de valor eficaz I_e .



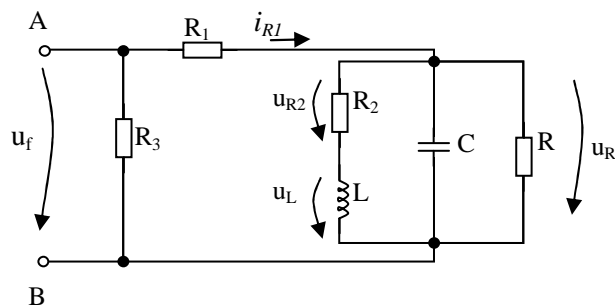
- Como é a lei de variação de i_c com o tempo?
- Sendo I_c o valor eficaz de $i_c(t)$, sobre que característica da fonte deve actuar-se de modo a obter diferentes relações I_c/I_e ?
- Estabeleça a expressão do desfasamento entre i_c e i_e . Comente o resultado.
- Calcule o valor da frequência de ressonância f_r do circuito.
- Faça o diagrama fasorial do circuito à freq. de ressonância (se não calculou f_r , faça o diagrama fasorial para uma frequência de 6kHz).

f) Determine a gama de valores da frequência para os quais o circuito amplifica pelo

menos 10^6 vezes o valor da corrente I_e , ou seja, para os quais se tem $\frac{I_c}{I_e} \geq 10^6$.

g) Actuou-se na fonte de sinal aumentando a frequência mas mantendo o valor eficaz da corrente I_{R2} . Diga que consequências daí resultarão para: tensão no condensador; corrente no condensador, tensão e corrente na bobine, tensão da fonte e factor de potência do circuito.

6. Pretende-se analisar o circuito representado no esquema.



Com este objectivo, o circuito é alimentado entre os pontos A e B com diferentes fontes de tensão u_f , sendo-lhe propostas as seguintes situações e grupos de questões:

Situação 1

A fonte u_f é uma fonte de tensão alternada sinusoidal de valor eficaz U .

$$R_1 = 100 \, \Omega$$

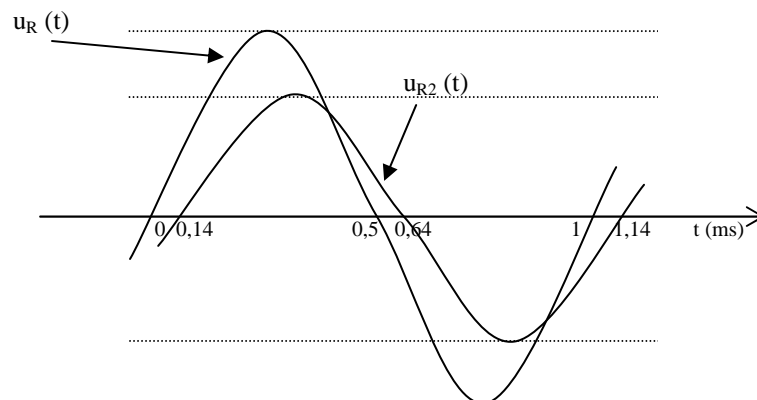
$$C = 0,1 \, \mu\text{F}$$

$$R_2 = 5 \, \Omega$$

$$R = 10 \, \text{k}\Omega$$

$$R_3 = 100 \, \text{k}\Omega$$

As tensões u_R e u_{R2} observadas num osciloscópio estão representadas na Fig. 1.



- a) Calcule o valor de L .
- b) Faça o diagrama fasorial do circuito.
- c) Esboce na Fig. 1 a tensão u_L que se observaria no osciloscópio.

Situação 2

A fonte u_f é uma fonte de tensão alternada sinusoidal de valor eficaz U e frequência f .

$$R_1 = 100 \, \Omega \quad C = 0,1 \, \mu\text{F}$$

$$R_2 = 5 \, \Omega \quad L = 1 \, \text{mH}$$

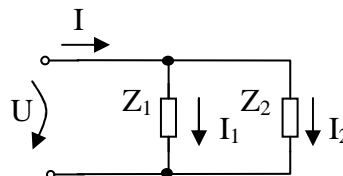
$$R_3 = 100 \, \text{k}\Omega$$

$$R = 10 \, \text{k}\Omega$$

- d) Estabeleça a expressão do desfasamento entre as tensões u_R e a corrente i_{R1} em função dos valores dos diferentes componentes. (NOTA: Não faça cálculos, não apresente um resultado numérico)
- e) Qual a frequência que deve ter a fonte para que o circuito esteja em ressonância?

7. O circuito seguinte é alimentado por uma entrada sinusoidal U e absorve uma corrente total I .

Estabeleça a condição a que devem obedecer as impedâncias Z_1 e Z_2 para que o valor eficaz de I igual à soma dos valores eficazes de I_1 e I_2 , isto é, $I = I_1 + I_2$.



seja

8. Uma instalação de energia monofásica é constituída por vários receptores que no seu conjunto absorvem uma potência activa P com factor de potência indutivo k .

A instalação é alimentada com a tensão alternada U a **50Hz**, por meio de um cabo com dois condutores cuja corrente admissível é I_n .

A empresa fornecedora vende a energia activa a um preço de p €/kW.h. A energia reactiva custará q €/kVAr.h.

O dono da instalação encomenda-lhe um estudo para:

- Redução do custo da energia gasta pela instalação;
- Redução da perda de energia nos condutores do cabo de alimentação da instalação;
- Redução da corrente nos condutores do cabo de alimentação da instalação de modo a mantê-la abaixo do valor admissível;
- Redução da queda de tensão nos condutores do cabo de alimentação da instalação.

Proponha uma solução para atingir estes objectivos, justificando.

9. Dispõe-se de uma tensão alternada sinusoidal de 230V, 50Hz. Pretende-se alimentar com essa tensão um receptor com as características nominais seguintes

receptor: $U_n=180V$ $P=2200W$ $\cos\phi=0,75$ (ind.)

Dispomos de uma bobine com as seguintes características nominais

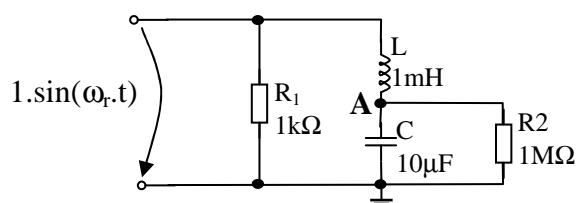
bobine: $U_n=60V$ $L=15mH$ $I_{m\acute{a}x}=20A$

Admita que o funcionamento do receptor é aceitável desde que a sua tensão de alimentação não se afaste mais do que $\pm 5\%$ da sua tensão nominal e que a bobine suporta sobretensões de 30%.

Indique uma solução para pôr a funcionar o receptor em condições satisfatórias.

Nota: pode basear a sua resposta nos raciocínios e cálculos que quiser mas é-lhe expressamente pedido um diagrama fasorial da solução que propuser.

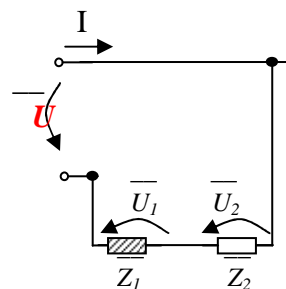
10. Considere o circuito da figura seguinte. A entrada foi ligada a um gerador de tensão sinusoidal com 1V de amplitude e frequência igual à frequência de ressonância do circuito ω_r .



A questão que se põe é a seguinte: poderá uma pessoa tocar sem perigo em qualquer ponto do circuito, nomeadamente no ponto A? Justifique quantitativamente.

11. Um receptor apresenta uma impedância complexa $\overline{Z}_1 = Z_1 \cdot \cos(\varphi) + jZ_1 \cdot \sin(\varphi)$. Em série com este receptor vai ser ligada uma carga complexa \overline{Z}_2 .

- Estabeleça a condição a que deve obedecer a carga \overline{Z}_2 para o factor de potência do conjunto seja o mesmo que se obtém com a carga \overline{Z}_1 sozinha.
- Nessas circunstâncias, qual será a relação entre os valores das tensões U , U_1 e U_2 ?



12. Uma instalação de energia monofásica é constituída por vários receptores que no seu conjunto absorvem uma potência activa $P=11\text{kW}$ com um factor de potência $k=0,866$ indutivo.

A instalação é alimentada com a tensão alternada $U=230\text{V} / 50\text{Hz}$, por meio de um cabo com dois condutores. Podemos optar entre dois tipos de cabo. O primeiro tipo de cabo é constituído por condutores de 10mm^2 com uma intensidade máxima admissível de 50 A. O segundo é constituído por condutores de 16mm^2 com uma intensidade máxima admissível de 70 A.

A empresa fornecedora vende a energia activa a um preço de $p=70,4 \text{ €/MWh}$. A energia reactiva custará $q=74,5 \text{ €/MVar.h}$.

- Proponha uma solução que permita a redução do custo da energia gasta pela instalação.
- Qual o custo da energia gasta por mês, antes e depois da instalação da sua solução.
- A sua solução terá também impacto sobre o tipo de cabo a usar na alimentação da instalação? Justifique.

13. Dispõe-se de uma tensão alternada sinusoidal de $230\text{V} / 50\text{Hz}$. Pretende-se alimentar com essa tensão um receptor com as características nominais seguintes

Receptor: $U_n=110\text{V}$ $P=735\text{W}$ $\cos\phi=0,966$ (ind.)

Dispomos apenas de um condensador com as seguintes características nominais

Condensador: $C=100\mu\text{F}$ $V_{\text{máx}}=450\text{V}$; $I_{\text{máx}} = 10\text{A}$

Admita que a tensão de rede pode ser ligeiramente ajustada por um regulador dentro dos limites de $\pm 3\%$ do valor nominal.

Será possível pôr o receptor a funcionar exactamente nas suas condições nominais associando-o de alguma forma ao outro componente disponível e ajustando a tensão da instalação dentro dos limites dados? Apresente uma solução.

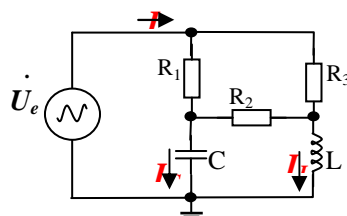
Nota: pode basear a sua resposta nos raciocínios e cálculos que quiser mas é-lhe expressamente pedido um diagrama fasorial ilustrativo da sua solução.

14. Sabe-se que é possível analisar um tri-polo com três cargas ligadas internamente em triângulo (fig. esq.) através de um equivalente em estrela (fig. dir.) recorrendo ao conjunto de expressões que se segue



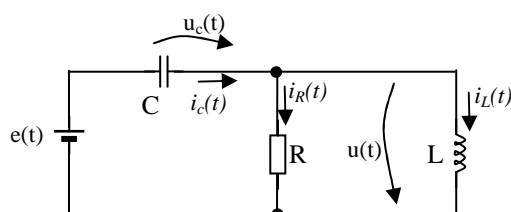
$$R_1 = \frac{R_{12} \times R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad R_2 = \frac{R_{12} \times R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad R_3 = \frac{R_{23} \times R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

a) Recorrendo, se necessário, à transformação acima, obtenha o diagrama fasorial do seguinte circuito monofásico sabendo que $R_1=R_2=R_3=6\Omega$, $C=1\text{mF}$ a $L=1\text{mH}$. Considere que a frequência angular da tensão de entrada v_e é $\omega=1000 \text{ rad/s}$.

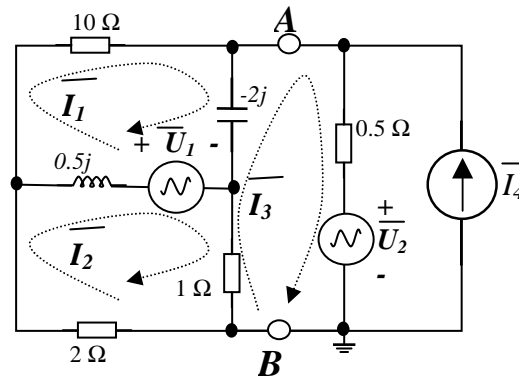


b) Tendo a tensão de entrada uma amplitude de 12V de pico, determine o módulo e fase do seguinte conjunto de fasores de corrente $\{\bar{I}, \bar{I}_C, \bar{I}_L\}$ e de tensão $\{\bar{V}_C, \bar{V}_L\}$.

15. Esboce o diagrama fasorial do circuito indicado para $\omega=1 \text{ rad/s}$, $C=0,1\text{F}$, $L=5\text{H}$, $R=10\Omega$.



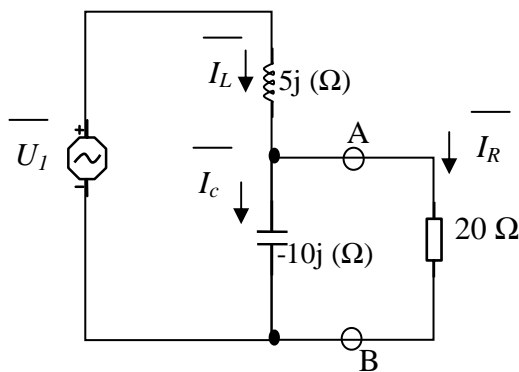
16. Considere o circuito da figura seguinte e calcule:



- os valores dos fasores de corrente \bar{I}_1 , \bar{I}_2 e \bar{I}_3 .
- o equivalente de Thévenin do circuito à esquerda do par de terminais A – B.
- O valor dos componentes reactivos, sabendo que a frequência de trabalho é de 200kHz.

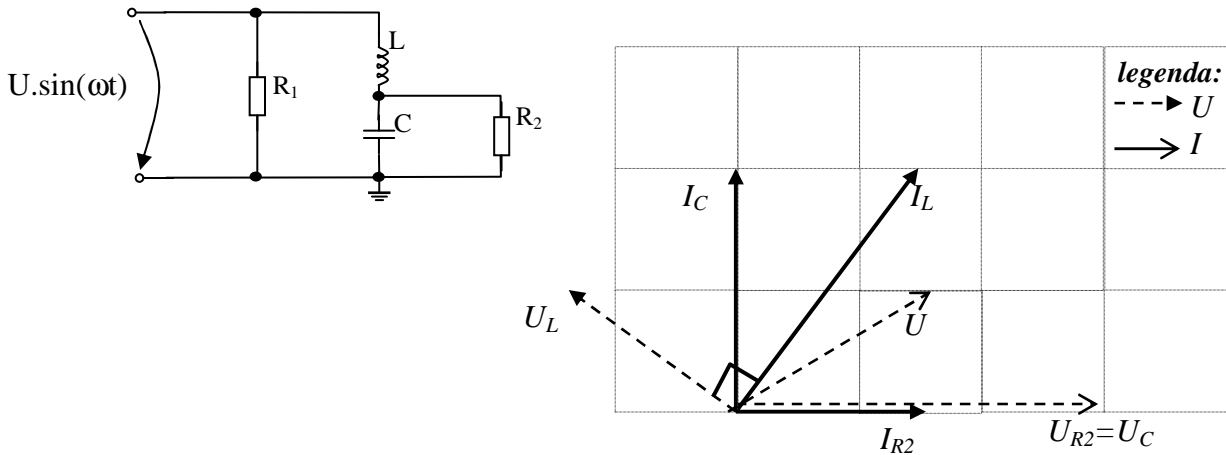
17. Considerando o sinal $v(t) = 3 + 3.\sin(10t - \pi/4)$, esboce o seu comportamento temporal e determine o respectivo valor médio, valor de pico e valor eficaz. (5 v.)

18. Considere o circuito seguinte, alimentado por uma fonte de tensão alternada sinusoidal.

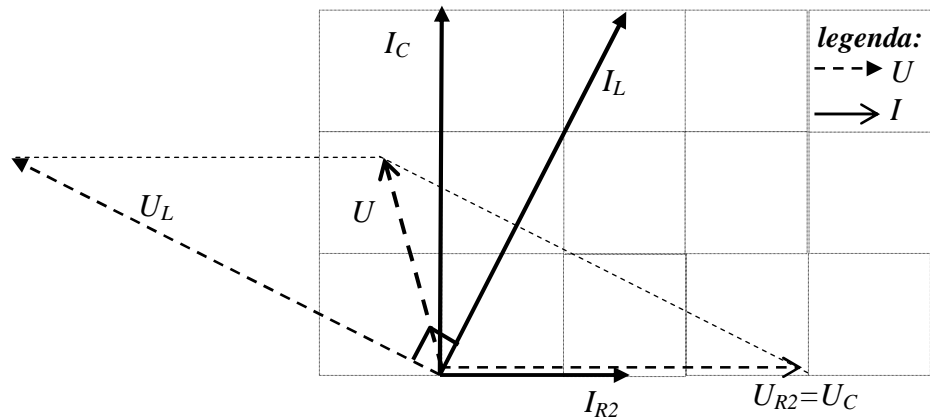


- Como é a lei de variação de i_c com o tempo? Justifique.
- Esboce o diagrama de impedâncias/admitâncias do circuito vistas a partir da fonte.
- Esboce o diagrama fasorial do circuito
- Determine numericamente os fasores de corrente do circuito sabendo que a fonte de tensão se caracteriza pelo fador $\bar{U}_1 = 10\angle 45^\circ \text{ (V)}$.
- Determine o equivalente de Norton do sub-circuito à direita do par de terminais A – B.
- Sabendo que a frequência de trabalho para os valores indicados das impedâncias é de 100Hz, determine os valores da capacidade e da indutância presentes no circuito.

19. Montou-se o circuito da figura seguinte com uma entrada ligada a um gerador sinusoidal **de tensão e frequência variáveis**. O diagrama fasorial então obtido é o que se apresenta ao lado do esquema.

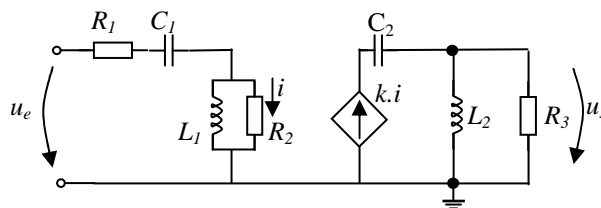


- a) Num dado momento algum parâmetro da fonte foi ajustado de tal maneira que o diagrama fasorial passou a ter o aspecto da figura seguinte. O que é que mudou no sinal de entrada que o possa justificar cabalmente? Note que o diagrama fasorial exprime relações de amplitude e desfasamento entre fasores, podendo ser-lhe aplicado sempre um factor de escala.



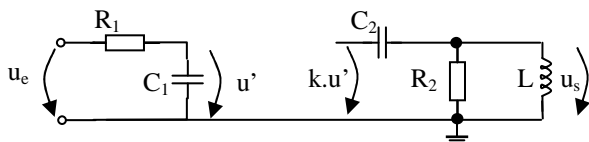
- b) Sabendo que em qualquer caso se tinha $I_{R2}=1$ A, diga qual o valor da tensão de entrada na situação original e após a modificação operada na alínea a). Considere 1V e 1A por divisão.

20. Considere o circuito seguinte:



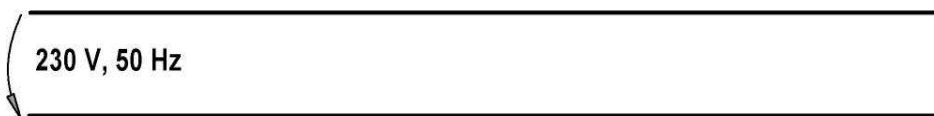
Estabeleça a expressão da Função de Transferência de tensão $\overline{H}(s) = \overline{u_s} / \overline{u_e}$ com $s=j\omega$. Tenha o cuidado de apresentar o resultado tanto quanto possível como uma função racional, factorizada em termos de 1ª ou, no máximo, 2ª ordem.

21. Considere o circuito seguinte:



Obtenha a sua Função de Transferência de tensão $\overline{H}(j\omega) = \overline{U_s} / \overline{U_e}$ para os valores seguintes dos componentes: $R_1=100\Omega$, $C_1=10\text{nF}$, $k=50$, $C_2=1000\mu\text{F}$, $R_2=100\Omega$ e $L=100\text{mH}$.

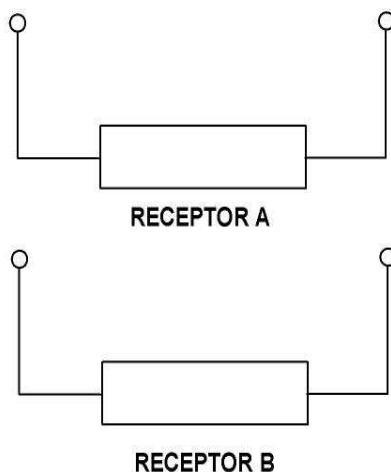
22. Pretende-se ligar os dois receptores seguintes à rede eléctrica indicada.



As características nominais dos receptores A e B são as seguintes:

Receptor A: 386 W, 5.2 A, $\cos\Phi = 0.707$ (ind)

Receptor B: 306 W, 4.7 A, $\cos\Phi = 0.5$ (ind)



a) Desenhe no **esquema eléctrico dado**, uma ligação possível dos dois receptores A e B, **sem ligar qualquer outro componente**.

b) Admitindo que os receptores A e B funcionam aceitavelmente desde que as suas

condições de alimentação não se afastem mais de 10% das suas características nominais, verifique se a ligação que indicou na alínea a) é aceitável

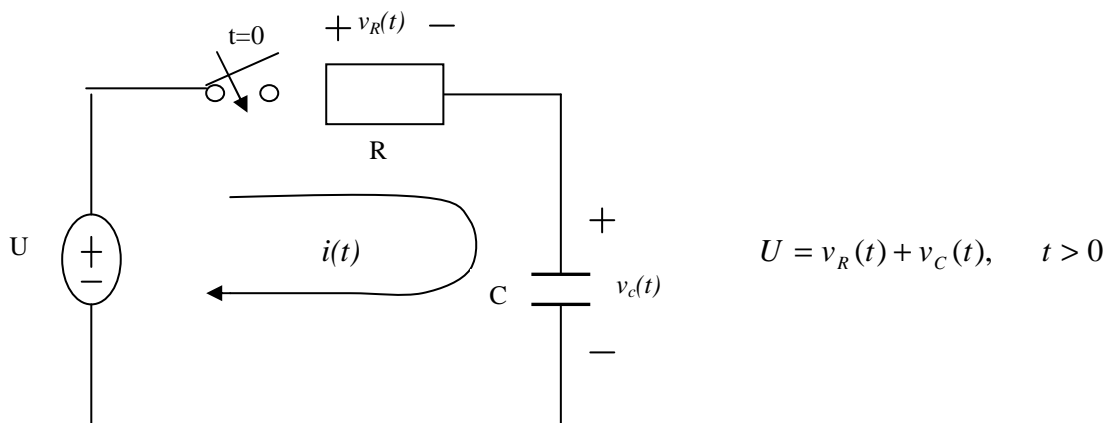
Nota : pode usar o método de cálculo que entender mas é-lhe expressamente pedido que desenhe o diagrama fasorial da instalação

Análise diferencial da resposta temporal de circuitos lineares

Vamos agora estudar a solução geral para o problema da resposta temporal de circuitos lineares. Agora já não limitaremos a nossa análise ao reduzido número de casos considerados para o sinal de entrada.

Começaremos por estudar o comportamento de alguns circuitos de primeira ordem para depois apresentarmos uma metodologia de análise.

Exemplo 1 – carga de um condensador inicialmente descarregado $v_c(0^-) = 0$



Aplicando a lei das malhas ao circuito dado, obtemos para $t > 0$ a equação seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} U = v_R(t) + v_C(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) \cdot d\tau \\ i(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} \end{array} \right.$$

Para exprimirmos a equação em termos de derivadas faz-se:

$$U = RC \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)$$

A solução de uma equação diferencial desta forma é do tipo exponencial. O método habitual de resolução seguido na análise passa pelo estudo da resposta para a equação homogénea (considerando $U=0$). Nesta situação, obtém-se a resposta natural do circuito e a seguir vai-se incluir o termo forçado pela fonte de tensão U , ou seja, a resposta forçada a qual, somada à resposta natural, nos daria então a resposta completa. Neste caso, vamos tentar uma abordagem

simplificada, procurando uma solução num único passo admitindo desde logo a existência de um termo na solução com forma semelhante¹ à de U, neste caso constante.

A tensão no condensador deverá então ser da forma

$$v_C(t) = A.e^{-k.t} + B$$

Precisamos da forma geral da derivada para incluir na equação diferencial do circuito,

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -kA.e^{-k.t}$$

Introduzindo esta forma da solução,

$$U = RC \cdot \underbrace{[-kA.e^{-k.t}]}_{v'_C(t)} + \underbrace{[A.e^{-k.t} + B]}_{v_C(t)} = A.e^{-k.t} \cdot [-k.R.C + 1] + B$$

Se o segundo membro é igual ao primeiro, ou seja igual a uma constante U (para todo $t > 0$), então o próprio segundo membro deve ser independente de t, isto é, constante no tempo.

Daqui resulta que o coeficiente do termo em t, ou seja de $e^{-k.t}$, deve ser nulo. Isto para que o segundo membro possa ser independente de t. Por outro lado devemos também igualar os termos independentes de t nos dois membros. Abtemos assim um sistema de 2 equações:

$$\begin{cases} -kR.C + 1 = 0 \\ B = U \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{RC} \\ B = U \end{cases}$$

Definimos a constante de tempo do sistema como aquele produto $\tau = RC$ que rege o decaimento exponencial.

35

Constantes iniciais

Falta-nos determinar o valor A. Este consegue-se facilmente sabendo que a tensão no condensador é uma função contínua no tempo, e em particular em torno do instante zero $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$. A solução vai emergir da introdução das condições iniciais do sistema na expressão analítica cuja forma temos vindo a considerar:

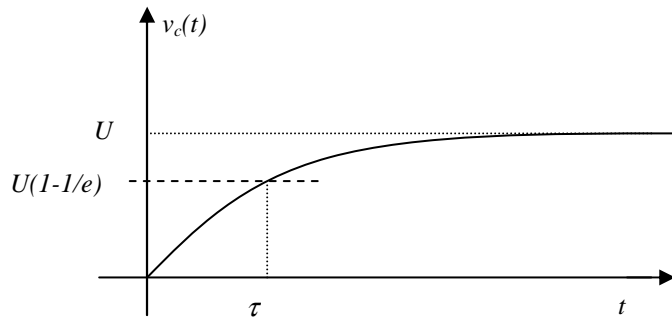
$$v_C(0^+) = 0 = A.e^{-k.t} + B \Big|_{t=0^+} = A.e^0 + B = A + B \Rightarrow A = -B = -U$$

Daqui resulta finalmente,

$$v_C(t) = -U.e^{-t/\tau} + U = U \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \text{com} \quad \tau = RC$$

¹ Se a fonte for de tipo polinomial, e de ordem 1, 2, ... 3, devia-se considerar-se igualmente na saída um termo polinomial da mesma ordem.

Eis finalmente o aspecto gráfico da nossa solução,



A interpretação gráfica da figura confirma a interpretação da constante t como o período de tempo que leva ao termo $U \cdot e^{-t/\tau}$ a atenuar-se a $1/e$ do seu valor inicial ($t=0$).

Exemplo 2 – carga de um condensador inicialmente carregado

Vamos agora tentar perceber o que mudaria na solução anterior se o condensador tivesse uma carga inicial não nula, ou seja, se tivéssemos uma tensão $v_c(0^-) \neq 0V$.

Uma vez que se trata do mesmo circuito, deve manter-se a equação característica do circuito. Mantém-se portanto válida a análise da malha e os pressupostos que nos levaram a concluir pela forma geral $v_c(t) = A \cdot e^{-k \cdot t} + B$, com $k = 1/\tau = 1/RC$ e ainda $U = B$.

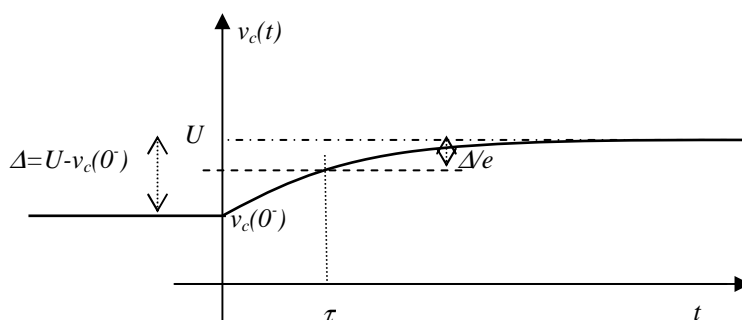
A diferença está nas condições iniciais, verificando-se agora o seguinte:

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = A \cdot e^0 + B \Rightarrow A = v_c(0^-) - B = v_c(0^-) - U$$

Neste cenário, a expressão da tensão no condensador virá agora assim,

$$v_c(t) = \begin{cases} v_c(0^-), & t < 0 \\ U - [U - v_c(0^-)] e^{-t/\tau}, & t \geq 0 \end{cases}$$

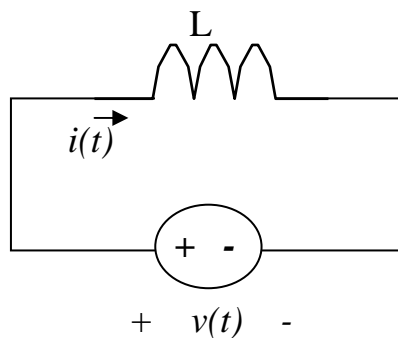
Graficamente esta solução traduz-se no seguinte diagrama temporal



Exemplo 3 – análise dinâmica de um circuito indutivo

Como sabemos, uma bobine funciona de acordo com um efeito de auto-indução, o que estabelece uma determinada interacção (e dependência) entre a corrente que a atravessa e o campo electromagnético criado por ela própria ao seu redor.

Consideremos o circuito da figura seguinte, com os sentidos das tensões e corrente conforme convencionado,



O comportamento da bobine deverá obedecer à seguinte lei diferencial

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Caso 1 – tensão constante

Suponha-se que a tensão $v(t)$ é constante e igual a U . De acordo com aquela lei, a derivada da corrente será constante e dada pela seguinte expressão,

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{U}{L}$$

Verifica-se, pois, que a corrente irá experimentar um incremento linear de declive constante igual a U/L . Se nenhuma condicionante real for capaz de limitar a corrente, esta deveria teoricamente crescer até infinito.

Caso 2 – entrada sinusoidal

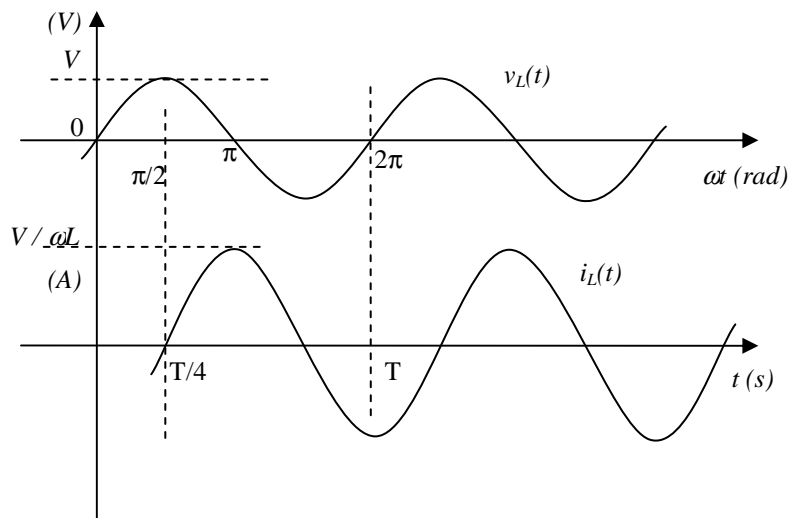
No caso de uma entrada $v(t)$ sinusoidal (média nula) já não teremos aquele comportamento divergente da corrente. Atendendo novamente à característica diferencial da bobine, teremos:

$$\begin{cases} v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \\ v(t) = A \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$$

Daqui resulta que a corrente pode ser descrita pela integral indefinida de $v(t)$,

$$i(t) = \frac{1}{L} \int A \cdot \sin(\omega t) = -\frac{A}{\omega L} \cdot \cos(\omega t) + C$$

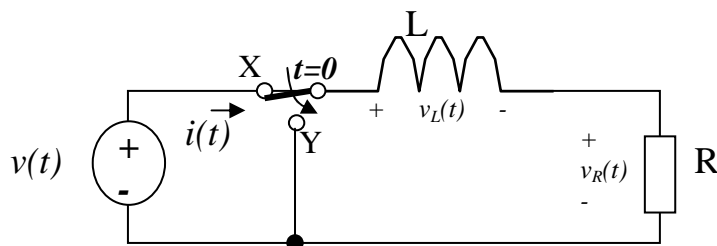
Traçando o diagrama temporal de v e i , obtemos assim uma corrente atrasada de um quarto de ciclo em relação à tensão



De notar a correspondência entre as diferentes possibilidades de representação do eixo tempo, em segundos ou em radianos.

Análise de um circuito R – L de primeira ordem

Consideremos agora o circuito mostrado na figura seguinte. Este circuito corresponde a uma fonte de tensão que alimenta uma malha série com uma bobine e uma resistência.



No instante $t=0$, o comutador passa da posição X para a posição Y, deixando a série R-L para todos os efeitos desligada da fonte, embora de alguma forma conserve uma “memória” da

ligação que existia em $t < 0$. Esta memória fica registada pela corrente que circulava na malha no instante da comutação.

O comportamento da bobine, como já vimos, deverá obedecer à seguinte lei diferencial

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Uma reflexão atenta sobre aquela equação leva-nos a concluir que não é possível dar-se qualquer salto brusco na corrente. Se assim não fosse, no instante em que tivéssemos o “salto”

observaríamos o correspondente valor da derivada $\frac{di(t)}{dt} = \infty$, o que levaria a tensão na bobine

também a um valor infinito, rompendo quaisquer isolamentos dielétricos presentes. Uma bobine real poderá experimentar, sem dúvida, aumentos bruscos de tensão quando sujeita a cortes bruscos da corrente. Neste curso, porém, não analisaremos em detalhe esta situação, sendo preferível limitarmo-nos a estudar circuitos em que tal não acontece.

Admitindo, portanto, que a corrente irá variar em contínuo, este dado pode ajudar-nos a analisar o circuito acima, em especial o instante crítico $t=0$ e, que o desenho do circuito sofre uma alteração – na prática é como se removéssemos a fonte de tensão, colocando em seu lugar um curto-circuito.

Se a variação da corrente é uma função contínua, então pode-se dizer que

$$i(0^+) = i(0^-)$$

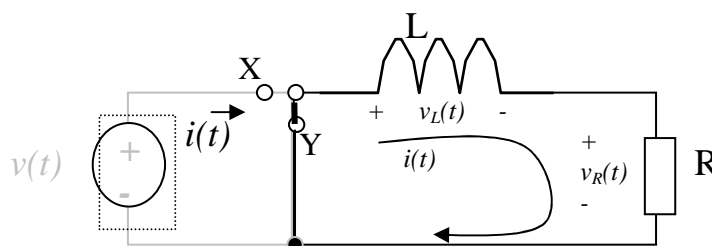
Admitindo que, antes da transição, a corrente na bobine estivesse há muito estabilizada, a respectiva derivada poderia considerar-se nula, o que leva a termos também nula a tensão na mesma bobine:

$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t < 0} = 0 \Rightarrow v_L(0^-) = 0$$

E pode dizer-se que

$$v_e = R \cdot i \Big|_{t < 0} \Rightarrow i(0^-) = \frac{v_e}{R}, \text{ com } v_e \text{ constante.}$$

Depois de ter ocorrido a comutação, o circuito ficará com a seguinte configuração:



A fonte de tensão fica agora fora do circuito, não contribuindo de qualquer forma prática para a evolução do seu estado quando $t > 0$. Podia mesmo ser desligada. O circuito R-L- que resta, constitui uma malha fechada obedecendo à lei das malhas:

$$v_L(t) + v_R(t) = 0 \Leftrightarrow L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = 0$$

Desta forma conseguimos uma equação diferencial expressa em termos de uma única variável $i_L(t)$. Esta é uma equação linear diferencial de primeira ordem. A ordem tem que ver com a máxima ordem de derivação presente na expressão. Como neste caso nos limitamos à 1ª derivada, a ordem da equação será um. A forma canónica consegue-se normalizando a um o coeficiente da derivada mais alta da expressão. Obtém-se assim:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i(t) = 0$$

Pela análise matemática sabemos que a única função que pode satisfazer aquela igualdade é do tipo exponencial:

$$i(t) = A \cdot e^{s \cdot t}$$

Dizemos, então, que esta será a forma da solução da equação diferencial. A solução em concreto, só será achada quando as constantes A e s puderem ser determinadas em face dos dados do problema. Da expressão acima, resulta que

$$\frac{di(t)}{dt} = A \cdot s \cdot e^{s \cdot t}$$

Substituindo as expressões de $i(t)$ e da sua derivada na equação diferencial completa, obtém-se

$$\underbrace{A \cdot s \cdot e^{s \cdot t}}_{\frac{di(t)}{dt}} + \frac{R}{L} \underbrace{A \cdot e^{s \cdot t}}_{i(t)} = 0 \Leftrightarrow A \cdot e^{s \cdot t} \cdot \left(s + \frac{R}{L} \right) = 0$$

Pela **lei do anulamento do produto** sabemos que se o primeiro factor não for necessariamente zero (e não o é porque A poderá ser não-nulo), então a única solução possível depende de se ter

$$s + \frac{R}{L} = 0, \text{ esta equação é conhecida como equação característica do circuito (sistema). A}$$

respectiva solução (que será única, no caso de um sistema de primeira ordem) é habitualmente designada em teoria de sistemas como o **valor característico**:

$$s = -\frac{R}{L}.$$

Do que acima ficou referido se depreende que o número de valores característicos de um sistema acompanha a respectiva ordem. A nossa solução está, para já, neste ponto:

$$i(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Em que $\tau=L/R$ se designa como a constante de tempo do circuito (a unidades será o segundo), o qual corresponde à demora da descarga de uma amplitude de corrente inicial A para um valor de A/e .

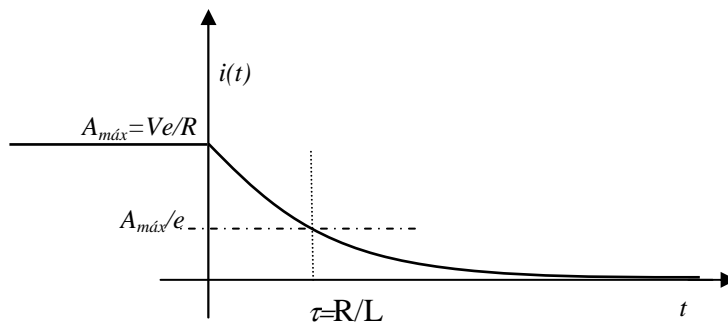
Esta forma geral da resposta designa-se como a RESPOSTA NATURAL do sistema, a lei de evolução por ele seguida quando não é forçado por acções (fontes) externas.

CONDIÇÕES INICIAIS

Para obter o valor da incógnita da resposta natural, devemos impor que a expressão da resposta respeite o conjunto de condições iniciais que nos forem dadas. Neste caso, a continuidade da corrente na bobine impõe que:

$$\begin{cases} i(o^+) = i(o^-) \\ i(o^+) = A.e^0 \\ i(o^-) = \frac{V_e}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{V_e}{R} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{cases}$$

Assim fica completamente determinada a resposta do sistema que poderemos representar num gráfico cartesiano:



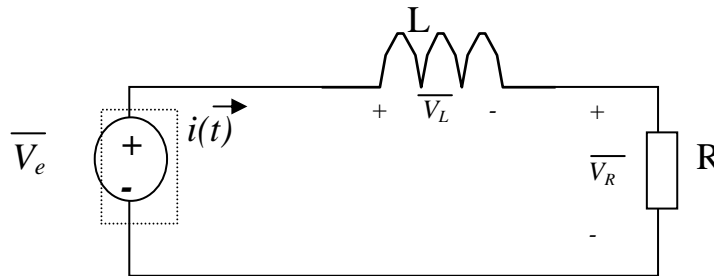
Caso sinusoidal

Se o sinal em $t \leq 0$ fosse sinusoidal e não constante, o que sucederia? Teríamos então:

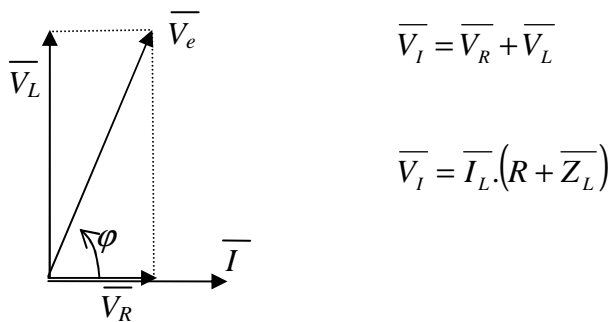
$$v_e(t) = \begin{cases} A_v \cdot \cos(\omega t), & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Neste caso teríamos que determinar o valor da corrente $i(o^-)$, admitindo o sistema em regime estacionário, para depois estudar o sistema para $t > 0$ exactamente da mesma maneira que acabamos de fazer. Ou seja, onde surge V_e/R colocaríamos agora o novo valor de $i(o^-)$. O problema está agora na determinação deste valor.

Para isso podemos proceder à análise fasorial, que já conhecemos, uma vez que estamos em regime sinusoidal. Definamos os fasores com que iremos trabalhar



A tensão na resistência estará alinhada em fase com a corrente, comum a ambos os componentes. Por sua vez a tensão na bobine sabemos que estará 90 graus adiantada face à mesma corrente:



Agora pode-se calcular a amplitude da corrente através da impedância complexa:

$$V_e = A_v = I_L \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow I_L = \frac{A_v}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Pela parte da fase a análise pode prosseguir assim,

$$\varphi = \arg(V_e) = \arg(I_L) + \arg(R + j\omega L) \Rightarrow \varphi = 0 + \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Tendo assim determinado o defasamento φ e sabendo que para $t < 0$ a expressão de $v_e(t)$ segue o cosseno $\cos(\omega t)$, então a corrente $i(t)$ estará atrasada de φ radianos em relação àquela. Com também já conhecemos a respectiva amplitude, a expressão temporal virá assim (só nos interessa descrever $t < 0$):

$$i(t) = \begin{cases} I_L \cdot \cos(\omega t - \varphi), & t < 0 \\ -?-, & t \geq 0 \end{cases}$$

Para conhecer a corrente no instante da transição basta agora fazer $t=0^-$, resultando

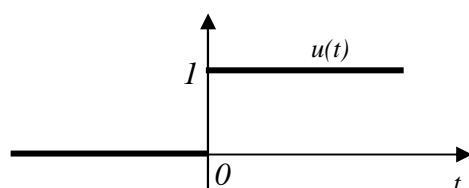
$$i(0^-) = I_L \cdot \cos(-\varphi) \Big|_{t>0}$$

FUNÇÃO DEGRAU DE HEAVYSIDE

Define-se esta função, normalmente representada por $u(t)$, através da seguinte expressão matemática:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

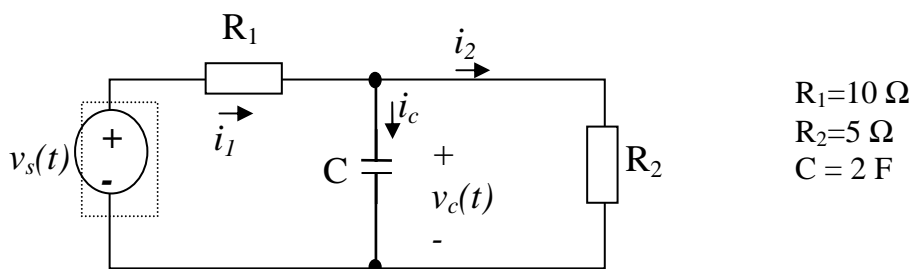
A representação gráfica é como se segue,



RESPOSTA COMPLETA DE SISTEMAS DE 1ª ORDEM AO DEGRAU

A resposta completa de um sistema linear pode obter-se pela soma da sua resposta natural, já estudada, com a resposta forçada pela fonte de tensão ou de corrente que lhe está aplicada. Por resposta do sistema pode entender-se uma tensão entre quaisquer dois pontos, ou a corrente atravessando um dado ramo.

As constantes que resultam da expressão geral da resposta natural podem ser determinadas por meio da aplicação das **condições iniciais**. Veremos como chegar a uma via de solução através da análise do seguinte circuito R-C:



Consideremos uma fonte $v_s(t) = 6 \cdot u(t)$ e admitamos que o condensador está completamente descarregado no instante inicial $t=0$. Observando o circuito, verificamos que basta uma variável de tensão $v_c(t)$ para, dado $v_s(t)$, podermos obter igualmente expressões para todas as correntes assinaladas. Assim sendo, o objectivo da presente análise é simplesmente encontrar uma expressão para a resposta completa $v_c(t)$.

Do que antes se disse retira-se que será possível obter aquela resposta completa, a partir da soma da resposta natural $v_{cn}(t)$ e da resposta forçada $v_{cf}(t)$, estudadas separadamente.

$$v_c(t) = v_{cn}(t) + v_{cf}(t)$$

Analisando o circuito pela lei dos nós, obtemos a seguinte equação

$$i_1 = i_2 + i_c \Leftrightarrow \frac{v_s - v_c}{R_1} = \frac{v_c}{R_2} + C \cdot \frac{dv_c}{dt}$$

Dividindo ambos os membros pelo valor de C, ficamos com a equação diferencial na sua forma canônica:

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_c = \frac{1}{R_1 \cdot C} v_s$$

Atentando na expressão acima, vemos que ali aparece a expressão da resistência do paralelo entre R_1 e R_2 , o que é curioso. $1/R_{//} = 1/R_1 + 1/R_2$. Podemos assim simplificar um pouco a expressão,

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{R_{//} \cdot C} v_c = \frac{1}{R_1 \cdot C} v_s$$

RESPOSTA NATURAL

Nesta análise, interessa-nos o comportamento do circuito na ausência de qualquer fonte, ou seja, com $v_s(t)=0$. A equação do sistema fica então sem o termo independente (onde temos v_s) designando-se a nova forma como a **equação homogênea do sistema**. Na presente situação obtemos uma forma já nossa conhecida

$$\frac{dv_{cn}}{dt} + \frac{1}{R_{//} \cdot C} v_{cn} = 0$$

A solução será uma exponencial do tipo

$$v_{cn} = A \cdot e^{-t/(R_{//} \cdot C)} = A \cdot e^{-t/(100/15)}$$

RESPOSTA FORÇADA

Vamos agora determinar o contributo da fonte de sinal $v_s(t)$ para o nosso resultado. Neste estudo tem-se sempre em atenção a forma concreta do sinal de entrada imposto pela fonte. Significa isto que o resultado dependerá do tipo de sinal de entrada considerado. Será portanto uma **resposta particular** aquela que buscamos. No caso em apreço, temos $v_s(t) = 6 \cdot u(t)$, donde se retira que,

$$\frac{dv_{cf}}{dt} + \frac{1}{R_{//} \cdot C} v_{cf} = \frac{1}{R_1 \cdot C} \cdot 6, \quad t > 0$$

Considerando os valores conhecidos dos componentes, teremos:

$$R_{//} = 50/15 \, \Omega$$

$$1 / (R_{//} \cdot C) = 15/100 \, s^{-1}$$

$$1 / (R_1 \cdot C) = 1/20 \, s^{-1}$$

Daqui vem $\frac{dv_{cf}}{dt} + \frac{3}{20}v_{cf} = 0.3, \quad t > 0$

Uma vez que a resposta completa será uma função do mesmo tipo do que está presente na fonte, uma vez que esta é constante para $t > 0$ (visto ser um degrau de amplitude 6), então também $v_{cf}(t)$ deve ser uma função constante. Consideremos K_f o seu valor a determinar.

$$v_{cf} = K_f$$

Naturalmente, a derivada $v'_{cf}(t)$ será nula para qualquer instante $t > 0$. Desta forma a nossa equação diferencial terá uma solução muito simples,

$$0 + \frac{3}{20}K_f = 0.3 \Leftrightarrow K_f = 2 \quad (volt)$$

Então a expressão da nossa **resposta forçada**, também designada por **resposta particular**, será tão simples quanto isto:

$$v_{cf}(t) = 2 \quad (t > 0)$$

A resposta completa pode agora ser determinada assim

$$v_c(t) = v_{cn}(t) + v_{cf}(t) = A.e^{-t/(100/15)} + 2$$

Só nos falta determinar o valor de A, o que se consegue facilmente recorrendo às condições iniciais que nos foram dadas. Atendendo a que o condensador é um elemento que não permite senão variações contínuas da tensão aos seus terminais, então a tensão em torno do instante 0 terá de ter continuidade. Assim, sabendo que o condensador se encontra descarregado em $t=0$, teremos

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) \Leftrightarrow A.e^{0/(100/15)} + 2 = 0 \Leftrightarrow A = -2$$

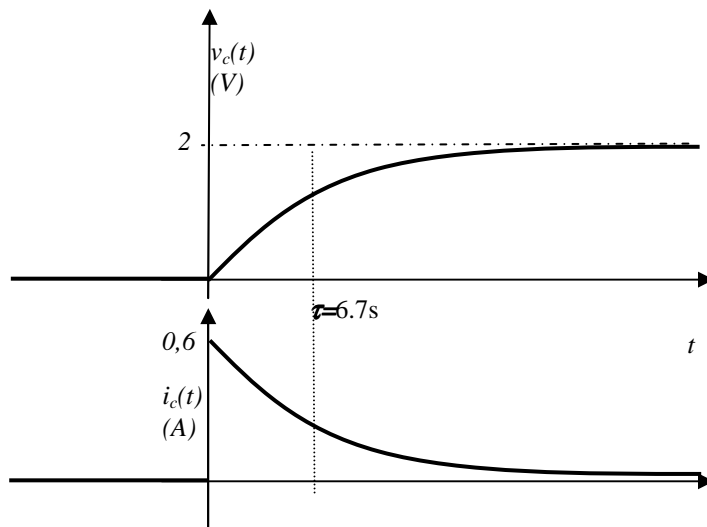
Daqui resulta finalmente a expressão da resposta completa que vimos procurando

$$v_c(t) = -2.e^{-0.15t} + 2 = 2(1 - e^{-0.15t}), \quad t > 0$$

Se quisermos agora determinar a expressão da corrente no condensador, por exemplo, não teríamos que fazer mais do que aplicar a lei diferencial do condensador,

$$i_c(t) = C \cdot \frac{dv_c}{dt} = 2 \cdot \frac{d}{dt} [2(1 - e^{-0.15t})] = 4 \times 0.15 e^{-0.15t} \quad (A)$$

Pode-se agora ilustrar graficamente o resultado



Da análise do presente gráfico pode-se destacar o seguinte conjunto de observações:

- passada a perturbação (ocorrida em $t=0$) a tensão no condensador tenderá a estabilizar em torno do valor de tensão que se encontraria no ponto intermédio entre as resistências R_1 e R_2 caso não houvesse qualquer condensador. R_1 e R_2 funcionam como um divisor de tensão resistivo de uma fonte de 6V.

- a corrente no condensador tende para zero, o que levará a que quando o tempo t tender para infinito este se comportará como um circuito aberto, na medida em que deixará de ser percorrido por qualquer corrente.

- com o condensador substituído pelo seu equivalente para $t \rightarrow \infty$, um circuito aberto, a tensão $v_c(t)$ tenderá de facto o valor intermédio de R_1 e R_2 sem condensador, ou seja, 2V. Eis a resposta forçada. Eis o regime estacionário

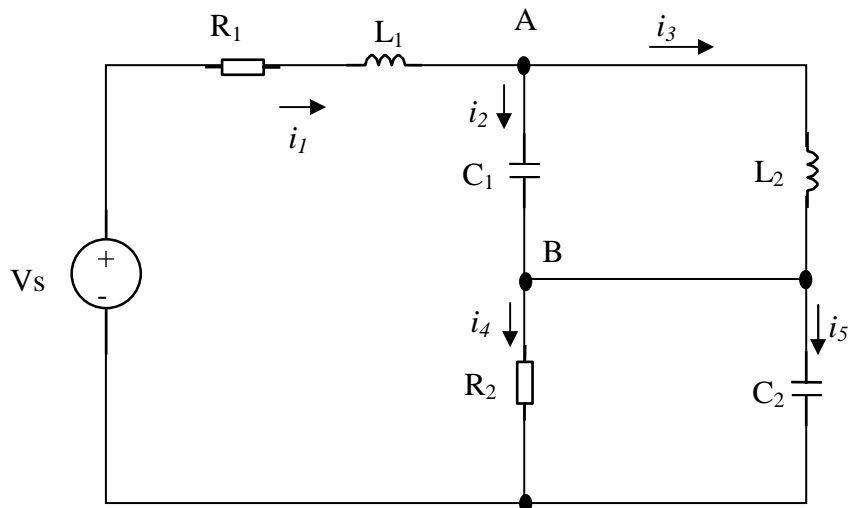
Tudo isto concorre para a seguinte conclusão:

Com entradas de Heavyside, a resposta forçada pode ser obtida pela análise do circuito “equivalente” para regime estacionário, ou seja, quando $t \rightarrow \infty$. O regime estacionário obtém-se “anulando” todos os elementos reactivos, o que corresponderá a substituir os condensadores por circuitos abertos e as bobinas por curto-circuitos.

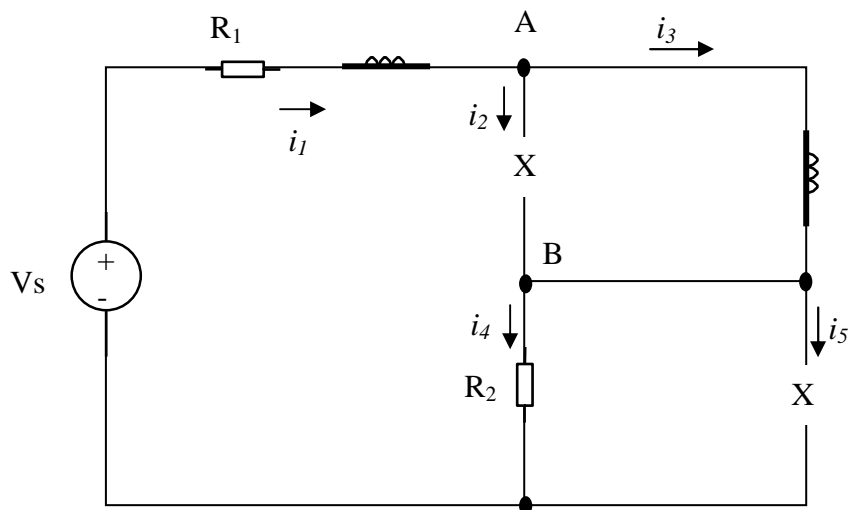
Em jeito de corolário, pode ainda dizer-se que todo o estado de um circuito com componentes R, L e C pode ser determinado para $t \rightarrow \infty$ sem necessidade de procurar as expressões da resposta natural ou completa. Bastará substituir os componentes reactivos pelo seu “equivalente” para regime estacionário e analisar o circuito que fica então só com resistências e fontes de corrente ou tensão.

Exemplo de aplicação:

Considerando que o circuito é excitado por uma entrada em degrau de amplitude V_s , determine a resposta em regime estacionário do seguinte circuito relativamente às tensões v_A , v_B e as correntes i_1 , i_2 , i_3 , i_4 e i_5 .



O circuito equivalente para regime estacionário será como se segue,

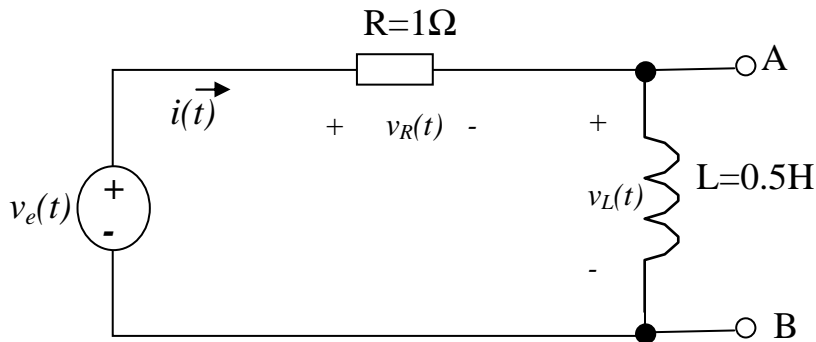


Então quando $t \rightarrow \infty$, teremos $v_A = v_B = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_s$, visto que R_1 e R_2 formam um divisor de

tensão. As correntes determinam-se agora $i_1 = i_3 = i_4 = \frac{V_s}{R_1 + R_2}$ e por fim $i_2 = i_5 = 0$.

Exercícios:

1. Neste exercício será ilustrada a relação entre a análise temporal e a análise fasorial para circuitos com excitação sinusoidal. Considere-se o seguinte circuito, cuja fonte de entrada tem forma sinusoidal,



- Determine a corrente $i(t)$ no circuito sabendo que $v(t)=4.\cos(3t).u(t)$ e $i_L(0^-)=4$ A.
- Analise fasorialmente o circuito e compare com o resultado anterior
- Obtenha o equivalente de Norton do circuito para a frequência indicada, entre os terminais A-B
- Quais os valores das potências activa e reactiva totais do circuito?

Resolução:

- A resposta natural do circuito obtém-se assim, anulando a fonte de entrada

$$v_e(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} \Big|_{v_e(t)=0}$$

A forma obtida tem como solução uma exponencial $i_n(t) = A.e^{-s.t}$. Introduzindo esta expressão na equação acima obtém-se:

$$0 = R.[A.e^{-s.t}] + L.[-sA.e^{-s.t}] \Rightarrow s = -\frac{R}{L}$$

A resposta forçada terá a mesma forma do sinal de entrada, ou seja sinusoidal com frequência angular 3, uma vez que o sinal de entrada tem também $\omega=3$. A equação diferencial para achar a resposta forçada vem então assim na forma canónica

$$\frac{1}{L}v_e(t) = \frac{R}{L}.i(t) + \frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow 8.\cos(3t) = 2.i(t) + \frac{di(t)}{dt} \quad , t > 0$$

Admitimos uma solução do mesmo tipo da forma da fonte mas para considerar o possível desfasamento, vamos exprimir a corrente como uma soma de um seno e um coseno à mesma frequência angular de 3 rad/s. É certo que se poderia ter optado por incluir uma fase ϕ no argumento do coseno, mas isso iria complicar um pouco os cálculos a seguir. Então temos

$$i_f(t) = B_1 \cdot \cos(3t) + B_2 \cdot \sin(3t)$$

$$i'_f(t) = -3B_1 \cdot \sin(3t) + 3B_2 \cdot \cos(3t)$$

Incluindo a corrente e a sua derivada temporal na equação diferencial acima, obtém-se

$$8 \cdot \cos(3t) = 2 \cdot [B_1 \cdot \cos(3t) + B_2 \cdot \sin(3t)] + \underbrace{\left(-3B_1 \cdot \sin(3t) + 3B_2 \cdot \cos(3t) \right)}_{i'_f}$$

Arranjando os termos sin e cos, temos

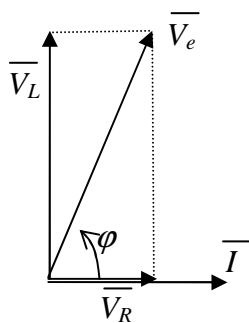
$$8 \cdot \cos(3t) + 0 \cdot \sin(3t) = \cos(3t) \cdot [2B_1 + 3B_2] + \sin(3t) \cdot [2B_2 - 3B_1]$$

esta igualdade se poderá manter se os coeficientes do coseno e do seno forem respectivamente iguais,

$$\begin{cases} 8 = 2B_1 + 3B_2 \\ 0 = 2B_2 - 3B_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{16}{13} \\ B_2 = \frac{24}{13} \end{cases}$$

$$\text{Então tem-se } i_f(t) = \frac{16}{13} \cdot \cos(3t) + \frac{24}{13} \cdot \sin(3t) = 2.22 \cos(3t - 56.3^\circ)$$

b) A análise fasorial do circuito é muito simples:



A amplitude da corrente pode ser obtida muito facilmente, conhecendo a impedância da série bobine – resistência.

$$\overline{Z}_{eq} = R + \overline{Z}_L = R + j\omega L = 1 + j1.5 = 1.803 \angle 56.3^\circ \quad (\Omega)$$

A corrente na malha terá então o seguinte módulo

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{4}{1.803} = 2.22 \quad (A)$$

A fase da corrente obtém-se assim

$$\angle \bar{I} = \angle \bar{V}_e - \angle \overline{Z}_{eq} = 0 - 56.3^\circ$$

\therefore A corrente assim obtida tem exactamente a mesma amplitude e fase que a sinusóide que obtivemos pelo estudo da resposta forçada para regime estacionário. Assim se confirma, portanto, que a análise fasorial corresponde ao estudo do funcionamento de um circuito com excitação sinusoidal em **regime estacionário**.

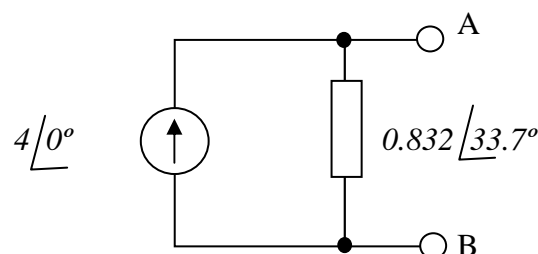
c) O equivalente de Norton é também bastante simples de obter. A corrente de Norton, como se sabe, é a corrente medida entre os terminais de saída na situação de curto-circuito. Fazendo isso, a fonte de sinal fica apenas ligada à resistência, deixando a bobine de interferir no resultado, visto estar curto-circuitada. A expressão da corrente de Norton, sinusoidal também, será então

$$i_n(t) = v_e(t) / R = v_e(t) = 4 \cdot \cos(3t) \quad (A)$$

A impedância de Norton, obtém-se pela observação da resistência interna a partir de A-B, anulando todas as fontes. Neste caso há apenas uma fonte de tensão independente. Colocando um curto-circuito em seu lugar, da saída vemos uma bobine em paralelo com a resistência de 1Ω .

A impedância resultante, com $\overline{Z}_L = j\omega L = j1.5$ será então

$$\overline{Z}_N = \overline{Z}_L // R = \frac{\overline{Z}_L \cdot R}{\overline{Z}_L + R} = \frac{j1.5}{1 + j1.5} = 0.832 \angle 33.7^\circ \quad (\Omega)$$



d) Considerando para as tensões e correntes os valores de pico, atendendo às expressões das sinusóides, a potência activa do circuito obtém-se assim

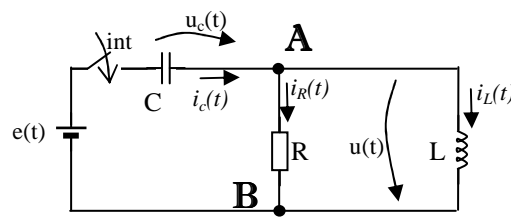
$$P_{act} = \frac{1}{2} V_e \cdot I \cdot \cos \varphi \quad \text{com } \varphi = \angle \bar{V} - \angle \bar{I} = +56.3^\circ$$

Considerando os valores já obtidos teremos $P_{act} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2.22 \cdot 0.83 = 3.7W$.

Para a potência reactiva considera-se o seno do desfasamento, resultando assim

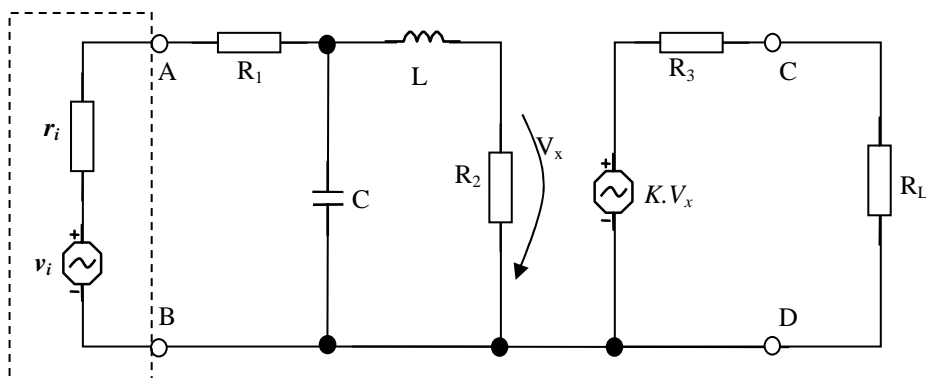
$$P_{react} = \frac{1}{2} V_e \cdot I \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2.22 \cdot 0.5548 = 2.46 \quad VA_R$$

2. No circuito indicado, o condensador C está descarregado. No instante $t=0$, o interruptor é fechado aplicando ao circuito uma fonte de tensão variável no tempo segundo a lei $e(t) = k t^2$. A constante k tem unidades $V \cdot s^{-2}$.



Esboce o gráfico da tensão observável entre os pontos A e B.

3. Considere o circuito seguinte. Nas primeiras alíneas será analisado o seu comportamento em corrente contínua e nas últimas a resposta para corrente alternada.



$$\begin{aligned} K &= 100 \\ L &= 10 \mu H \\ C &= 47 \text{ nF} \\ r_i &= 600 \Omega \\ R_1 &= 2,2 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 10 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 50 \Omega \\ R_L &= 300 \Omega \end{aligned}$$

a) Classifique e descreva o comportamento da fonte de tensão que aparece associada ao valor $K \cdot V_x$.

b) Suponha que $v_i = 1\text{ V}$ (contínuo). Determine as correntes em todos os ramos do circuito por meio de qualquer método de análise à sua escolha. Nota: substitua todos os elementos reactivos pelo respectivo modelo ideal para corrente contínua.

c) Diga, justificando, qual o valor da resistência R_L para a qual se teria o máximo valor da potência dissipada e determine esse mesmo valor máximo.

d) Considerando agora que o circuito tem excitação sinusoidal, obtenha uma expressão que relacione a tensão na resistência de carga com a entrada $v_{RL}(\omega) / v_i(\omega)$.

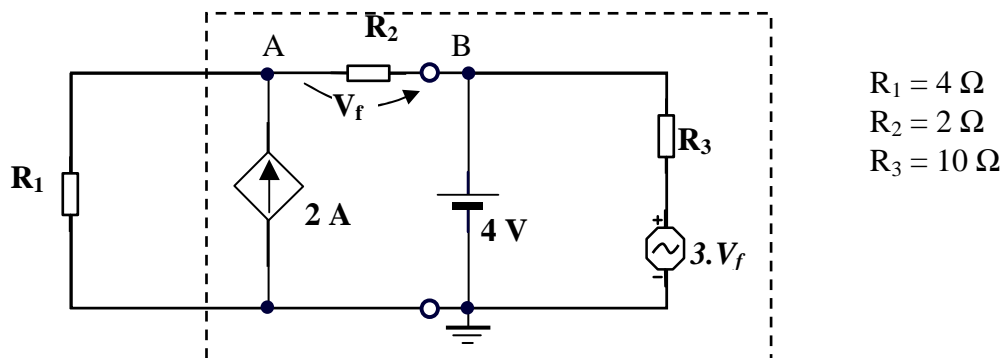
(Na resolução das questões seguintes deverá ter em conta o seu número mecanográfico. Assim, o valor de N que aparece nos enunciados será calculado como o resto da divisão por 3 do número mecanográfico de cada aluno. N valerá então 0 se esse número for múltiplo de 3. Mas poderá também valer 1 ou 2 noutros casos.)

e) Determine a impedância do circuito à direita dos terminais A-B, para a frequência angular $\omega = (0,5 + 0,5N) \times 1,4 \times 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$

f) Trace o diagrama fasorial do circuito para a frequência considerando o valor da frequência angular $\omega = 10^{N-1} \times 1,5 \times 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$

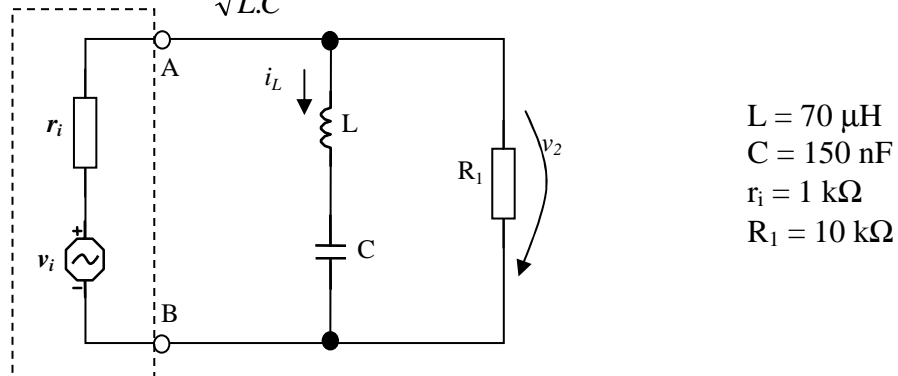
g) Substituindo a bobine L por um curto-circuito, ficamos com um circuito R-C de primeira ordem. Supondo que a este circuito é aplicada uma entrada $v_i(t) = 2.u(t)$ e que o condensador C está inicialmente carregado com -1 V no instante $t=0$, esboce justificando a forma de onda da tensão que espera observar na resistência R_L .

4. Considere o seguinte circuito de corrente contínua.



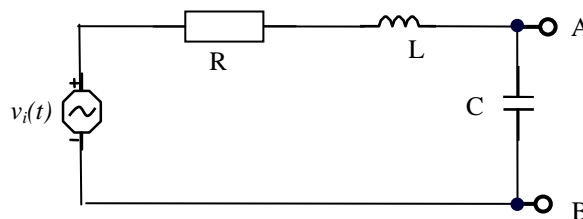
- Determine as correntes em todos os ramos do circuito pelo método da sobreposição.
- Determine as tensões nos nós A e B, através do método das tensões nodais.
- Obtenha um equivalente de Thévenin do circuito contido no interior do rectângulo tracejado.

5. Considere o seguinte circuito com uma fonte $v_i(t)$ sinusoidal. O ramo que contém a série bobina-condensador é habitualmente designado como um “circuito-tanque” e caracteriza-se por uma frequência de ressonância $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$ (rad/s).



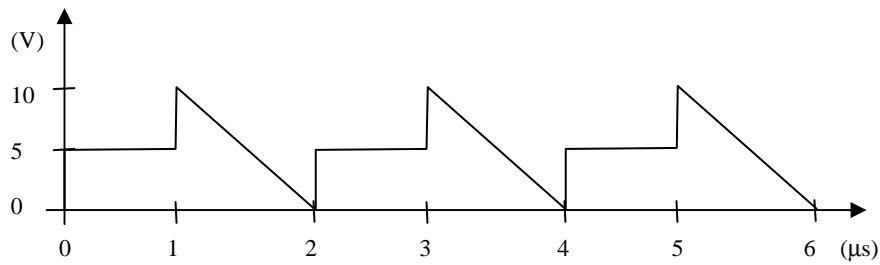
- Determine uma expressão da impedância $Z(\omega)$ do circuito à direita do par de terminais A-B.
- Trace o diagrama fasorial do circuito para a frequência $\omega = \omega_0/2$.
- Foi retirado o condensador C, substituindo-o por um curto-circuito. Ficámos com um circuito R-L de primeira ordem. A este circuito foi aplicada uma entrada $v_i(t) = 10.u(t)$, admitindo que a corrente inicial na bobina é $i_L=0$, esboce a forma de onda da tensão que espera observar na resistência R_1 .
- Obtenha uma expressão da variação do ganho de tensão $v_2(\omega)/v_i(\omega)$ em função da frequência.

6. Enuncie o teorema de Norton e aplique-o na simplificação do circuito seguinte ao qual se acede do exterior através do par de terminais A-B. Considere que a amplitude da fonte de sinal é de 1V e a frequência é 1,5 MHz e que $R = 3,5 \text{ k}\Omega$, $L = 1\text{mH}$ e $C = 10 \text{ pF}$.



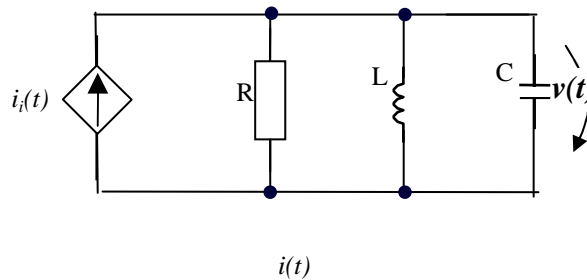
- Considere que a um sinal $v(t)$ com valor médio de tensão de 1V e potência de 10W é adicionada uma tensão contínua de 2V. Qual será a tensão média do sinal soma?

7. Considere o seguinte sinal em tensão

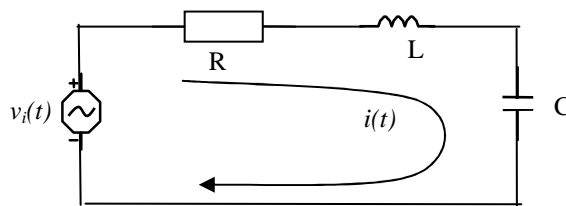


- Determine o valor médio e o valor eficaz deste sinal
- Determine agora o período, a frequência fundamental e o valor do coeficiente c_0 do desenvolvimento em série de Fourier

8. Partindo da descrição diferencial da bobine e do condensador, descreva os passos do método a seguir para se obter a resposta temporal completa $v(t)$ do seguinte circuito RLC, excitado por uma entrada em degrau $i_i(t) = 10.u(t)$ (A)



9. Partindo da descrição diferencial da bobine e do condensador, explique o método a seguir para se obter a resposta temporal completa $i(t)$ do seguinte circuito RLC série, excitado por uma entrada sinusoidal $v_i(t) = A.\sin(\omega t).u(t)$



- Enuncie o método das **correntes fictícias** e aplique-o na análise de um circuito de corrente contínua desenhado por si contendo obrigatoriamente os seguintes elementos: Duas resistências; Uma fonte de **tensão** dependente da corrente; Uma fonte de corrente (independente)

10. Considerando o que aprendeu sobre o **Diagrama Fasorial**

- defina-o por palavras suas
- descreva a sua construção
- diga em que condições se pode utilizar
- que relação existe entre este tipo de análise e a resposta completa?

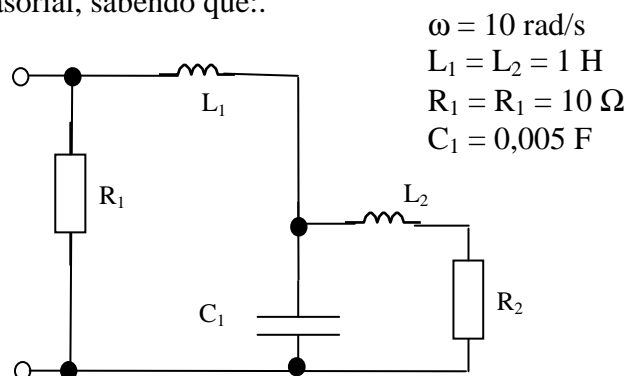
11. O que entende por nós, ramos e malhas no contexto da análise de circuitos eléctricos?

12. Como se determina o número de **nós** linearmente independentes num circuito eléctrico?

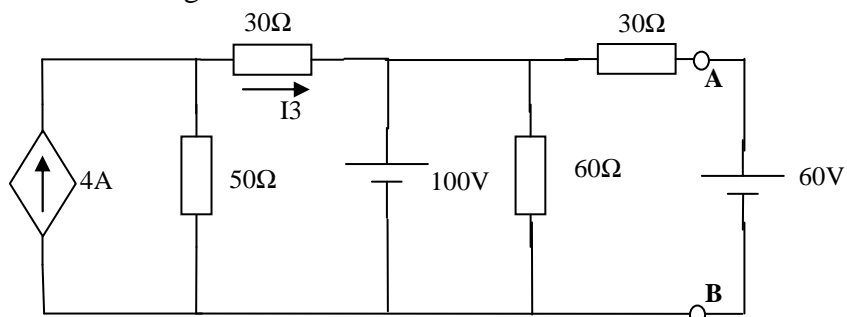
13. Enuncie e explique resumidamente por palavras suas as Leis de Kirchhoff

14. Por que razão se recorre a equações diferenciais na análise da resposta de circuitos eléctricos contendo elementos reactivos para sinais variáveis no tempo?

15. Atribua nomes e sentidos às tensões e correntes do circuito, esboçando a seguir o correspondente diagrama fasorial, sabendo que:.

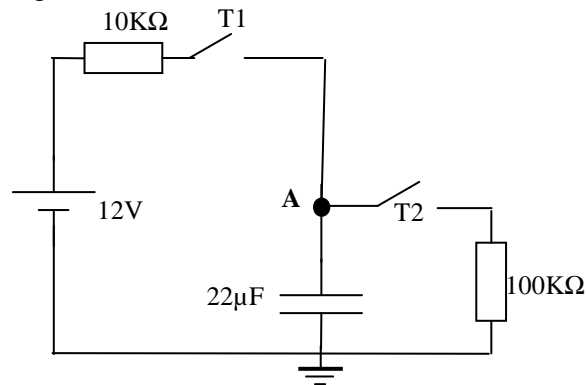


16. Considere o circuito seguinte.



- Utilize o método das tensões nodais para calcular I_3 .
- Calcule a potência fornecida ao circuito pela fonte de tensão de 100V
- Determine o equivalente de Thévenin do circuito à esquerda do terminal A-B (removendo, portanto, a fonte de tensão de 60V)

17. Considere o circuito seguinte:



Suponha que para $t < 0s$ o condensador está descarregado. No instante $t=0s$ é fechado o interruptor T1. No instante $t=1s$ é aberto T1; no instante $t=2s$ é fechado T2.

- Obtenha a expressão matemática da resposta completa $v_A(t)$
- Apresente as constantes de tempo do circuito relevantes para as fases $[0s, 1s]$ e $[2s, +\infty]$
- Desenhe a evolução da tensão em A a partir do instante $t=0$.

Agradecimentos aos alunos que digitaram parte importante deste documento:

Ana Patrícia Fernandes Cruz
Ana Raquel da Silva Ribeiro
Ana Rita Ferraz Barbosa
André Duarte Lopes
Carlos Manuel Dias Ferreira das Dores
César Alexandre Pinheiro de Oliveira
Cristiano Gonçalves Pendão
Diogo José Pereira Pinheiro Mendes
Diogo Miguel Ferreira Taveira Gomes
Hugo Virgílio Pereira Roupas Leite
Joana Alexandra Ferreira da Silva
João Alexandre Machado da Silva Fernandes
Jorge André Duarte Monteiro
José Miguel Fernandes Teixeira
Luís Filipe Fernandes Couto
Luís Miguel Nascimento Duarte
Manuel Frederico da Costa Dias Pereira
Marco António Abreu Ribas
Marco Paulo Fernandes Costa
Marta Patrícia Teixeira Fernandes
Pedro Filipe Mendes Queirós
Raul António Pereira Chamusca
Renata Alexandra Rodrigues Alves
Renato André Ferreira Martins
Ricardo Daniel Fernandes Maciel
Ricardo de Sousa Fernandes
Ricardo Jorge Carvalho Rodrigues
Rui Miguel Costa Rodrigues
Sérgio Miguel Pereira da Silva
Simão Azevedo Machado
Tiago Miguel da Cunha Pimenta