

Cálculo
Teste 2—Proposta de correção

Nome completo

Número

JUSTIFIQUE CUIDADOSAMENTE TODAS AS SUAS RESPOSTAS.

I
(4 valores)

Relativamente às questões deste grupo indique se a afirmação é **verdadeira** ou **falsa**.

1. Se f é uma função ímpar e $\int_{-2}^0 f(x) dx = 4$ então $\int_0^2 f(x) dx = 4$.

Falso.

Se f é uma função ímpar, o seu gráfico é simétrico relativamente à origem. Assim, a área limitada pelo gráfico da função e o eixo das abcissas entre $x = -2$ e $x = 0$ é igual à área limitada pelo gráfico da função e o eixo das abcissas entre $x = 0$ e $x = -2$. No entanto, num caso a região encontra-se acima do eixo das abcissas e na outra abaixo: no primeiro caso o valor do integral será positivo e no segundo negativo.

2. Se f é contínua em $[1, 2]$ então $\int_1^2 x f(x) dx = x \int_1^2 f(x) dx$.

Falso.

O resultado do lado esquerdo da igualdade é um número e do lado direito é uma função (depende de x).

3. Se f é contínua e $G(x) = \int_1^{x^2} f(t) dt$ então $G'(x) = 2xf(x^2)$.

Verdade.

Seja $F(x) = \int_1^x f(t) dt$. Do Teorema Fundamental do Cálculo, sabemos que $F'(x) = f(x)$. Ora $G(x) = F(x^2)$. Assim, da derivada da função composta

$$G'(x) = [F(x^2)]' = 2x f(x^2).$$

4. Se a sucessão de termo geral u_n é convergente então $\sum_{n \geq 1} u_n$ é convergente.

Falso.

Considere-se a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$. Tem-se $\lim_n u_n = 0$, pelo que a sucessão converge. No entanto a série $\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ é a série harmónica que é divergente.

1. (2 valores)

Considere o integral $\int_1^2 \frac{1}{t} dt$.

- (a) Calcule uma soma inferior, com $n = 2$ que aproxime o valor do integral.
(b) Estabeleça uma comparação entre o valor obtido na alínea anterior e $\ln 2$.

(a) Escolhendo $[1, 2] = [1, \frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 2]$ tem-se

$$S_{inf} = \frac{1}{2} f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} f(2) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

(b) Comece-se por notar que

$$\int_1^2 \frac{1}{t} dt = \left[\ln t \right]_{t=1}^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Sendo uma soma inferior, o valor encontrado na alínea anterior é uma aproximação por defeito para o valor do integral, isto é

$$\frac{7}{12} \leq \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln 2.$$

2. (3 valores)

Considere o integral $\int_1^2 \frac{e^x}{1 - e^{2x}} dx$.

- (a) Usando a substituição $x = \ln t$, mostre que o integral anterior se pode escrever como $\int_e^{e^2} \frac{1}{1 - t^2} dt$.
(b) Calcule o integral dado.

(a) Do teorema da mudança de variável em integrais sabe-se que, considerando a mudança de variável definida por $x = g(t)$ se tem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t) dt.$$

Sejam, então, $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{2x}}$ e $g(t) = \ln t, t \in \mathbb{R}^+$ e considere-se a mudança de variável definida por $x = g(t)$.
Tem-se

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow \ln t = 1 \Rightarrow t = e \\ x = 2 &\Rightarrow \ln t = 2 \Rightarrow t = e^2 \end{aligned} \quad f(g(t)) = \frac{t}{1 - t^2}, \quad \text{e} \quad g'(t) = \frac{1}{t}$$

Assim,

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1 - e^{2x}} dx = \int_e^{e^2} \frac{t}{1 - t^2} \frac{1}{t} dt = \int_e^{e^2} \frac{1}{1 - t^2} dt.$$

(b) Atendendo a alínea anterior, recorrendo ao método das frações parciais e às propriedades da função logaritmo

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^x}{1 - e^{2x}} dx &= \int_e^{e^2} \frac{1}{1 - t^2} dt = - \int_e^{e^2} \frac{1}{t^2 - 1} dt = - \frac{1}{2} \int_e^{e^2} \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} dt \\ &= - \frac{1}{2} \left[\ln(t - 1) - \ln(t + 1) \right]_{t=e}^{t=e^2} \\ &= - \frac{1}{2} \left[(\ln(e^2 - 1) - \ln(e^2 + 1)) - (\ln(e - 1) - \ln(e + 1)) \right] \\ &= - \frac{1}{2} \left[\ln \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} - \ln \frac{e - 1}{e + 1} \right] = - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} \times \frac{e + 1}{e - 1} \right) \\ &= - \ln \sqrt{\frac{(e + 1)^2}{e^2 + 1}} = \ln \sqrt{\frac{e^2 + 1}{(e + 1)^2}} \end{aligned}$$

3. (2 valores)

Estabeleça um integral que lhe permita determinar o comprimento da curva de equação $y = \sqrt{1-x^2}$ entre os pontos cujas abcissas são 0 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Por definição a medida do comprimento da curva definida pela equação $y = f(x)$ entre os os de abcissas α e β é

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Neste caso, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ pelo que, da derivada da função composta,

$$f'(x) = [(1-x^2)^{1/2}]' = \frac{1}{2} \times (1-x^2)'(1-x^2)^{1/2-1} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

e o integral pedido é

$$L = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

4. (3 valores)

Calcule, se possível, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$.

Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ cujo domínio é $] -\infty, 1[$. A função integranda torna-se ilimitada num dos extremos do integral ($x = 1$) pelo que o integral em estudo é um integral impróprio (do tipo 2). Por definição

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b (1-x)^{-1/2} dx \\ &= - \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b -(1-x)^{-1/2} dx \\ &= - \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[2(1-x)^{1/2} \right]_{x=0}^b = -2 \lim_{b \rightarrow 1^-} [\sqrt{1-b} - \sqrt{1}] = 2. \end{aligned}$$

5. (3 valores)

Considere a série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n^3}$.

- (a) Defina o termo geral da sucessão geradora da série.
- (b) Indique o termo de ordem 5 da sucessão das somas parciais.
- (c) Estude a natureza da série.

(a) O termo geral da sucessão geradora da série é $u_n = \frac{\cos n}{n^3}$.

(b) O termo geral da sucessão das somas parciais é $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Assim, o termo de ordem 5 é

$$s_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \cos 1 + \frac{\cos 2}{2^3} + \frac{\cos 3}{3^3} + \frac{\cos 4}{4^3} + \frac{\cos 5}{5^3}.$$

(c) A série em estudo é uma série cujos termos não têm sinal fixo. De facto, basta notar que $u_1 = \cos 1 > 0$ mas $u_2 = \frac{\cos 2}{2^3} < 0$. Há, então, que estudar a série dos módulos

$$\sum_{n \geq 1} |u_n| = \sum_{n \geq 1} \left| \frac{\cos n}{n^3} \right|.$$

Uma vez que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $|\cos x| \leq 1$, para $n \geq 1$ vale

$$|u_n| = \left| \frac{\cos n}{n^3} \right| = |\cos n| \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

Mas a série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ é uma série de Riemann de expoente 3 (> 1), logo é uma série convergente. Pelo primeiro critério de comparação para séries de termos não negativos, conclui-se que

$$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{\cos n}{n^3} \right|$$

é uma série convergente. Então, a série dada é absolutamente convergente.

6. (3 valores)

Escreva a série de Taylor em torno de $a = 0$ da função $f(x) = \ln(1+x)$ indicando o seu domínio de convergência.

Dada uma função infinitamente derivável, a sua série de Taylor em torno do ponto $a = 0$ é

$$\sum_{n \geq 0} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}.$$

Aqui $f(x) = \ln(1+x)$ e $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, mas esta última função pode ser vista como a soma de uma série de potências de razão $r = -x$ desde que $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n \geq 1} (-x)^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Então, como f' é integrável

$$\int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n t^n \right) dt = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\int_0^x t^n dt \right) = \sum_{n \geq 0} \left((-1)^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{t=0}^x \right) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Por outro lado

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) = f(x).$$

Isto é,

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1.$$

e esta é a expansão em série de potências de x da função f . Sabe-se que se f é representada por uma série de potências de x , então a série de potências é a série de Taylor da função em torno de $a = 0$.