Complementos de Análise Matemática - EE

MIETI, MIEMAT, MIETEX
2016/2017

Folha de Exercícios 2

Resolução analítica de equações diferenciais de primeira ordem

---

Equações diferenciais exactas

1. Averigúe quais das seguintes equações diferenciais são exactas.

   (a) $2xy\ dx + \left(1+x^2\right) dy = 0.$

   (b) $3s\ dt - 3t\ ds = 0.$

   (c) $(x+\sin y)\, dx + (x\cos y - 2y)\, dy = 0.$

   (d) $\left(\dfrac{2x-1}{y}\right) dx + \left(\dfrac{x-x^2}{y^2}\right) dy = 0.$

2. Resolva as equações diferenciais exactas dadas no exercício anterior.

3. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial.

   (a) $\left(2x^2t - 2x^3\right) dt + \left(4x^3 - 6x^2t + 2xt^2\right) dx = 0,\ x(2) = 3.$

   (b) $\left(x + e^{x/y}\right)\ dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)\ dy = 0,\ y\,(1) = 1.$

4. Para cada uma das equações diferenciais seguintes determine a função mais geral $P\,(x,y)$ por forma a que sejam equações diferenciais exactas.

   (a) $P\,(x,y)\, dx + (xe^y + 2xy + 1)\, dy = 0.$

   (b) $\left(y^2+1\right)\cos x\ dx +\ P\,(x,y)\ dy = 0.$

5. Para cada alínea que se segue, verifique que a equação diferencial dada não é exacta, que μ é um factor integrante e, com base nisso, obtenha uma família de soluções.

   (a) $\left(2x^2+y\right) dx + \left(x^2y - x\right) dy = 0, \qquad \mu(x) = \dfrac{1}{x^2}.$

   (b) $x^2y^3\, dx + x(1+y^2)\, dy = 0, \qquad \mu(x,y) = \dfrac{1}{xy^3}.$

   (c) $\left(\dfrac{\sin y}{y} - 2e^{-x}\sin x\right)\, dx + \left(\dfrac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right)\, dy = 0, \qquad \mu(x,y) = ye^x.$

Equações diferenciais separáveis

6. Determine uma família de soluções de cada uma das seguintes equações diferenciais.

   (a) $4xy\ dx + \left(x^2+1\right) dy = 0$.

   (b) $(x+4)\left(y^2-1\right)\ dx + y\left(x^2+8x\right)\ dy = 0$.

   (c) $\dfrac{dt}{dr} = \dfrac{r+1}{t^4+1}$.

   (d) $\tan\theta\, dr + 2r\, d\theta = 0$.

   (e) $\left(e^{2y}+y\right) dy + e^{-y}\sin x\ dx = 0$.

7. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial.

   (a) $e^x\ dx - y\ dy = 0, \qquad y(0) = 1$.

   (b) $x\cos x\ dx + \left(1-6y^5\right) dy = 0, \qquad y(\pi) = 0$.

   (c) $8(\cos^2 y)\, dx + (\operatorname{cosec}^2 x)\, dy = 0, \qquad y\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

8. Determine uma família de soluções das seguintes equações diferenciais realizando uma mudança de variável adequada.

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = x - y$.

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = (y+x)^2$.

Equações diferenciais homogéneas

9. (a) Averigúe quais das seguintes equações diferenciais são homogéneas.

      i. $(x+y)\ dx - x\, dy = 0, x > 0$.

      ii. $\left(2xy - x^2\right)\ dx + x^2\, dy = 0, x > 0$.

      iii. $\dfrac{dy}{dx} = \ln(x/y) + xy$.

      iv. $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

   (b) Mostre que a mudança de variável $y = vx$ transforma a equação diferencial homogénea $y' = f(x,y)$ na seguinte equação de variáveis separáveis $xv' = f(1,v) - v$.

   (c) Usando o resultado obtido na alínea anterior resolva as equações diferenciais da alínea (a).

10. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial.

    (a) $y' = \dfrac{5y-2x}{4x-y}, \qquad y(0) = 12$.

    (b) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}, \qquad y(1) = -2$.

11. Resolva as seguintes equações diferenciais usando dois métodos diferentes.

(a) $(2x - y)\, y' + x + 2y = 0.$

(b) $\left(4xy - y^2\right) \dfrac{dy}{dx} + x^2 + 2y^2 = 0.$

Equações diferenciais lineares

12. Averigúe quais das seguintes equações diferenciais são lineares.

    (a) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{x}{t^2} = \dfrac{1}{t^2}.$

    (b) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^3 y^3}.$

    (c) $u\, dv - 2v\, du = (u + 1)\; du.$

    (d) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}.$

    (e) $xy' - 2y = x^3 e^x.$

    (f) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{t+1}{2t} x = \dfrac{t+1}{tx}.$

13. Resolva as equações diferenciais lineares dadas no exercício anterior.

14. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial.

    (a) $\dfrac{dz}{dx} - xz = -x, \qquad z(0) = -4.$

    (b) $y' + y = \sin x, \qquad y\,(\pi) = -1.$

Exercícios gerais

15. Classifique e resolva as seguintes equações diferenciais determinando uma família de soluções.

    (a) $e^x\, dx + x^3\, dy + 4x^2 y\, dx = 0$

    (b) $2r\left(s^2 + 1\right)\, dr + \left(r^4 + 1\right)\, ds = 0$

    (c) $y' = y^{\frac{1}{2}}.$

    (d) $(y + \cos x)\, dx + (x + \sin y)\, dy = 0.$

    (e) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}.$

16. Resolva os seguintes problemas de valor inicial.

    (a) $\left(\dfrac{1}{y^2} \ln x - y\right) dy - \dfrac{1}{xy}\, dx = 0, x > 0, y\,(1) = 2$

    (b) $\left(x^3 + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}\right)\, dx - xy\sqrt{x^2 + y^2}\, dy = 0, x > 0,\; y\,(1) = 0$

    (c) $\dfrac{dy}{dx} - y\; \tan(x) = \sec(x) \quad y(0) = 0$

Soluções da folha de exercícios 2

1. (a), (c) e (d) são exactas e (b) não é exacta.
2. (a) $x^2y + y = c$
   (b) não é exacta
   (c) $\frac{1}{2}x^2 + x\sin y - y^2 = c$
   (d) $\dfrac{x^2 - x}{y} = c$
3. (a) $x^2t^2 - 2x^3t + x^4 = 9$
   (b) $\dfrac{x^2}{2} + ye^{x/y} = \frac{1}{2} + e$
4. (a) $P(x, y) = e^y + y^2 + \phi(x)$
   (b) $P(x, y) = 2y\sin x + \phi(y)$
5. (a) $4x^2 - 2y + xy^2 = cx$
   (b) $x^2 - \dfrac{1}{y^2} + \ln y^2 = c$, $y = 0$
   (c) $e^x \sin y + 2y\cos x = c$
6. (a) $y(x^2 + 1)^2 = c$
   (b) $(y^2 - 1)(x^2 + 8x) = c$
   (c) $\dfrac{r^2}{2} + r - \dfrac{t^5}{5} - t = c$
   (d) $r\sin^2\theta = c$
   (e) $e^{3y} + 3e^y(y - 1) = 3\cos x + c$
7. (a) $y^2 = 2e^x - 1$
   (b) $x\sin x + \cos x + 1 = y^6 - y$
   (c) $4x - 2\sin(2x) + \tan y = \frac{\pi}{3}$
8. (a) $y = x - 1 + ce^{-x}$
   (b) $y = \tan(x - c) - x$
9. (a) *i.*, *ii.*, e *iv* são homogénas,, *iii.* não é homogénea
   (c) *i.* $x\ln x - cx = y$ *ii.* $3yx^2 - x^3 = c$ *iv.* $x^2 + y^2 = cy$
10. (a) $y = 6\sqrt{1 - x} - 2x + 6$
    (b) $y = -\sqrt{x^2 lnx^2 + 4x^2}$
11. (a) $y^2 - 4yx - x^2 = c$
    (b) $x^3 + 6xy^2 - y^3 = c$
12. (a), (c), (e) são lineares, (b), (d), (f) não são lineares
13. (a) $x(t) = 1 + ce^{1/t}$
    (c) $v = cu^2 - u - \dfrac{1}{2}$
    (e) $y = x^2e^x + cx^2$

14. (a) $z = 1 - 5e^{x^2/2}$

    (b) $y = \dfrac{1}{2}\left(e^{\pi - x} + \sin x - \cos x\right)$

15. (a) linear, $\quad y = 1/x^4\left((1-x)e^x + c\right)$

    (b) v. separáveis, $\quad \mathrm{arctg} r^2 + \mathrm{arctg} s = c$

    (c) v. separáveis, $\quad x - 2\sqrt{y} = c$

    (d) exacta, $\quad xy + \sin x - \cos y = c$

    (e) homogénea, $\quad y^2 = x^2(\ln x^2 + c)$

16. (a) $\dfrac{1}{y}\ln x + \dfrac{y^2}{2} = 2$

    (b) $3\ln x - \left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2}\right)^{3/2} = -1$

    (c) $y = x\sec x$