Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

MIECOM

Análise Matemática B

—— folha 4 — Integração múltipla ———————————— 2011'12 ———

1. Calcule o valor do integral $\displaystyle\int_{\mathcal{A}} f$, onde:

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^2$ e $\mathcal{A} = [0,1] \times [0,1]$;

   (b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\,x+y}$ e $\mathcal{A} = [-1,0] \times [0,2]$;

   (c) $f(x,y,z) = xy^2 - 2z$ e $\mathcal{A} = [-1,1] \times [0,2] \times [2,3]$;

   (d) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} - 3zx^2$ e $\mathcal{A} = [-1,1] \times [1,e] \times [2,3]$;

2. Calcule o valor do integral $\displaystyle\int_{\mathcal{A}} f$, onde:

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^2$ e $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ x \le y \le -x^2 + 4x\}$;

   (b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\,x+y}$ e $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ x \le y \le -x + 2\}$;

   (c) $f(x,y,z) = xy^2 - 2z$ e
   $\mathcal{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le x^2 + y^2\}$;

   (d) $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x \le y \le -x + 2\}$;

3. Identifique o domínio de integração e inverta a ordem de integração nos seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{y+3} f(x,y)\, dxdy$;

   (b) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} f(x,y)\, dydx$;

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\, dxdy$;

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\, dydx$;

   (e) $\displaystyle\int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\, dydx$;

   (f) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\, dydx$.

4. Invertendo a ordem de integração, calcule:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\, dydx$;

   (b) $\displaystyle\int_1^{e^3} \int_{\log y}^3 dxdy$;

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\, dx\, dy$;

   (d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \int_{\log y}^1 \frac{(x^2+1)^{13}}{y}\, dx\, dy$.

5. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas R que se seguem:

   (a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ \mathrm{e}^{-x} \leq y \leq \mathrm{e}^{x}\}$;

   (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ y \leq -2x^2 - x + 3,\ y \leq -x + 1\}$;

   (c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2,\ y \leq 4 - x^2\}$;

6. Usando integrais duplos, calcule o volume de cada um dos sólidos S que se seguem:

   (a) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2,\ \mathrm{e}^{-x} \leq y \leq \mathrm{e}^{x},\ 0 \leq z \leq x + y\}$;

   (b) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ y \leq x^2 - 2x,\ x - y \leq z \leq x + y\}$;

   (c) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0,\ x \leq y^2 - y,\ x \leq z + y,\ y \leq -x - z\}$.

7. Determine as coordenadas polares dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (3, \sqrt{3}), \quad B = (0, 2), \quad C = (0, -2), \quad D = (-4, -4), \quad E = (1, 1).$$

8. Determine as coordenadas cartesianas dos pontos cuja representação polar é

$$A = \left(1, \frac{\pi}{4}\right), \quad B = \left(2, \frac{3\pi}{2}\right), \quad C = (5, 0), \quad D = \left(5, \frac{\pi}{2}\right), \quad E = \left(3, \frac{11\pi}{6}\right).$$

9. Passando para coordenadas polares, calcule $\displaystyle\int\!\!\int_{\mathcal{D}} f(x, y)\, d(x, y)$, onde:

   (a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$ e $\mathcal{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5\big\}$;

   (b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1} \log\,(x^2 + y^2)$ e $\mathcal{D}$ é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências de equações $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$;

   (c) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ e $\mathcal{D} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ \sqrt{3}y \geq x,\ \sqrt{3}x \geq y\Big\}$;

   (d) $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $\mathcal{D} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 2\,,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\Big\}$;

   (e) $f(x, y) = \big(x^2 + y^2\big)^{-\frac{1}{2}}$ e $\mathcal{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y \leq x\,,\ y \geq x^2\,,\ x \geq 0\big\}$.

10. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas R que se seguem:

    (a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x,\ y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 9\}$;

    (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \leq x,\ x \geq 0\}$;

    (c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16,\ (x + 2)^2 + y^2 \geq 4,\ y \geq 0\}$.

11. Usando integrais duplos, calcule o volume dos seguintes sólidos:

    (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$;

    (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq x \leq 2\,,\ 0 \leq y \leq 2\,,\ z \geq 0\,,\ y + z \leq 2\}$;

    (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq 1\,,\ z \geq 0\,,\ y + z \leq 3\}$.

12. Determine as coordenadas cilíndricas dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (1, \sqrt{3}, -1), \qquad B = (2, 0, 0), \qquad C = (0, -5, 3) \quad \text{e} \quad D = (3, -3, 2).$$

13. Usando coordenadas cilíndricas, calcule $\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_{\mathcal{R}} f(x, y, z)\, d(x, y, z)$, para

    (a) $f(x, y, z) = x$ e $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 3\,,\ x^2 + y^2 \leq z\}$;

    (b) $f(x, y, z) = z\, \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq z \leq 3\,,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$;

    (c) $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$ e $\mathcal{R}$ a região do primeiro octante limitada pelas superfícies cilíndricas de equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos de equações $z = 0\,,\ z = 1\,,\ x = 0$ e $x = y$.

14. Determine as coordenadas esféricas dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (1, -1, 0), \qquad B = (1, 1, \sqrt{2}), \qquad C = (-1, -1, \sqrt{2}) \quad \text{e} \quad D = (0, 1, -1).$$

15. Calcule o volume da esfera de centro na origem e raio 2.

16. Usando coordenadas esféricas, calcule o valor do integral

$$\int\!\!\int\!\!\int_{\mathcal{S}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\, d(x, y, z),$$

onde $\mathcal{S} = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4 \,\}$.

17. Calcule o volume do sólido que é:

    (a) definido pelas condições $3z \geq x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$;

    (b) definido pelas condições $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$;

    (c) limitado pela superfície esférica de equação $\rho = 1$ e pela superfície cónica de equação $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.