

1. Considere a equação diferencial não homogénea  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2x$

a) Mostre que  $e^x$  e 1 são soluções linearmente independentes da equação homogénea associada.

R:

A equação homogénea associada à equação diferencial dada é:  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$

Vamos agora verificar se  $e^x$  e 1 são soluções:

Para: $y = e^x$	$y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot e^x = e^x$ $\frac{dy}{dx} = e^x \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot e^x = e^x$
Substituindo na equação diferencial teremos que:  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow e^x - e^x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow y = e^x \text{ é solução.}$	

Para: $y = 1$	$y = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1) = 0$ $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(0) = 0$
Substituindo na equação diferencial teremos que:  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ é solução.}$	

Posto isto, vamos agora verificar se estas soluções são linearmente independentes, recorrendo para tal ao Wronskiano:

$$W(e^x; 1) = \begin{vmatrix} e^x & 1 \\ (e^x)' & (1)' \end{vmatrix} \Leftrightarrow W(e^x; 1) = \begin{vmatrix} e^x & 1 \\ e^x & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow W(e^x; 1) = (e^x \times 0 - e^x \times 1) \Leftrightarrow W(e^x; 1) = -e^x \neq 0$$

Como:  $W(e^x; 1) = -e^x \neq 0$ , então as soluções são linearmente independentes.

**b) Qual é a função complementar da equação diferencial dada?**

**R:**

Função complementar ( $y_c$ )  $\equiv$  Solução geral da equação homogénea associada

Assim sendo teremos que:  $y_c = c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2$ , onde neste caso:  $\{f_1; f_2\} = \{e^x; 1\}$

Logo a função complementar será:  $y_c = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot 1 \Leftrightarrow y_c = c_1 \cdot e^x + c_2$

**c) Mostre que  $1 - 2x - x^2$  é um integral particular da equação dada.**

**R:**

Do enunciado pode concluir-se que:  $y_p = 1 - 2x - x^2$

Agora vamos determinar as derivadas deste integral particular para posteriormente as substituir na equação diferencial dada no enunciado:

$$y_p = 1 - 2x - x^2 \Rightarrow \frac{dy_p}{dx} = \frac{d}{dx}(1 - 2x - x^2) = -2 - 2x$$

$$\frac{dy_p}{dx} = -2 - 2x \Rightarrow \frac{d^2 y_p}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy_p}{dx} \right) = \frac{d}{dx}(-2 - 2x) = -2$$

$$\text{Substituindo teremos então que: } \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2x \Leftrightarrow -2 - (-2 - 2x) = 2x \Leftrightarrow 2x = 2x$$

Então:  $1 - 2x - x^2$  é um integral particular da equação diferencial dada.

**d) Qual é a solução geral da equação dada?**

**R:**

A solução geral da equação dada resulta da seguinte expressão:

$$y = y_C + y_P \Leftrightarrow y = c_1 \cdot e^x + c_2 + 1 - 2x - x^2$$

**2. Verifique que  $\frac{x^3}{8}$  é um integral particular da seguinte equação diferencial:**

$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^3$ . **Determine a sua solução geral sabendo que  $x$  e  $x^{-1}$  são soluções da equação homogênea associada.**

**R:**

Do enunciado pode concluir-se que:  $y_p = \frac{x^3}{8}$

Agora vamos determinar as derivadas deste integral particular para posteriormente as substituir na equação diferencial dada no enunciado:

$$y_p = \frac{x^3}{8} \Rightarrow \frac{dy_p}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^3}{8} \right) = \frac{3}{8} x^2$$

$$\frac{dy_p}{dx} = \frac{3}{8} x^2 \Rightarrow \frac{d^2 y_p}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy_p}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{3}{8} x^2 \right) = \frac{6}{8} x$$

$$\text{Substituindo: } x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^3 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left( \frac{6}{8} x \right) + x \cdot \left( \frac{3}{8} x^2 \right) - \frac{x^3}{8} = x^3 \Leftrightarrow \frac{6x^3 + 3x^3 - x^3}{8} = x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x^3}{8} = x^3 \Leftrightarrow x^3 = x^3 \rightarrow \frac{x^3}{8} \text{ é um integral particular da equação diferencial dada.}$$

Sabendo que a solução geral da equação é dada pela seguinte expressão:  $y = y_c + y_p$

Vamos antes de mais começar por determinar a função complementar, sendo que:

$$y_c = c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2, \text{ onde neste caso: } \{f_1; f_2\} = \{x; x^{-1}\} = \left\{ x; \frac{1}{x} \right\} \Rightarrow y_c = c_1 \cdot x + c_2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\text{Então a solução geral será: } y = y_c + y_p \Leftrightarrow y = \left( c_1 \cdot x + c_2 \cdot \frac{1}{x} \right) + \left( \frac{x^3}{8} \right)$$

3. Sabendo que um integral particular de  $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 1$  é  $y = \frac{1}{6}$ , que um integral particular de  $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x$  é  $y = \frac{x}{6} + \frac{5}{36}$  e que um integral particular de  $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^x$  é  $y = \frac{e^x}{2}$ . Determine um integral particular de  $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 2 - 12x + 6e^x$ .

R:

$$\begin{array}{lll} \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 1 & \Rightarrow & y_{P_1} = \frac{1}{6} \\ \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x & \Rightarrow & y_{P_2} = \frac{x}{6} + \frac{5}{36} \\ \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^x & \Rightarrow & y_{P_3} = \frac{e^x}{2} \end{array}$$

Daqui se pode concluir que cada um dos integrais particulares é obtido em função do resultado de cada uma das equações diferenciais apresentadas.

Estabelecendo agora um paralelismo com a equação geral, podemos concluir que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 2 - 12x + 6e^x \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 2 \times \underbrace{\left(1\right)}_{\substack{\text{Resultado da 1ª} \\ \text{eq. diferencial} \\ \downarrow \\ y_{P_1}}} - 12 \times \underbrace{\left(x\right)}_{\substack{\text{Resultado da 2ª} \\ \text{eq. diferencial} \\ \downarrow \\ y_{P_2}}} + 6 \times \underbrace{\left(e^x\right)}_{\substack{\text{Resultado da 3ª} \\ \text{eq. diferencial} \\ \downarrow \\ y_{P_3}}}$$

Ora, se as soluções particulares de cada uma das três equações diferenciais anteriores resultam numa relação que envolve o seu resultado, e sabendo que o resultado da equação geral é uma combinação dos resultados das três equações diferenciais iniciais, então:

$$\begin{aligned} y_{P_{\text{geral}}} &= 2 \times y_{P_1} - 12 \times y_{P_2} + 6 \times y_{P_3} \Leftrightarrow y_{P_{\text{geral}}} = 2 \times \frac{1}{6} - 12 \times \left(\frac{x}{6} + \frac{5}{36}\right) + 6 \times \left(\frac{e^x}{2}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y_{P_{\text{geral}}} &= \frac{2 - 12x}{6} - \frac{12 \times 5}{36} + \frac{6e^x}{2} \Leftrightarrow y_{P_{\text{geral}}} = \frac{12 - 60}{36} - \frac{72x}{36} + 3e^x \Leftrightarrow y_{P_{\text{geral}}} = -\frac{4}{3} - 2x + 3e^x \end{aligned}$$