1. Mostre que: $y = 2x \cdot e^{x-1}$ **é uma solução do problema de valores de fronteira:**

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ **,** $y(0) = 0$ **e** $y(1) = 2$ **.**

R:

Como este exercício pede para mostrar que a função é uma solução do problema de valores de fronteira, então teremos que começar por determinar as derivadas da função até à segunda ordem, para posteriormente se substituírem os valores obtidos na equação diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$.

Assim sendo teremos então que:

- $y = 2x \cdot e^{x-1}$

- $\frac{dy}{dx} = \left(2x \cdot e^{x-1}\right)' = \underbrace{\left(2x \cdot e^{x-1}\right)'}_{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} = \underbrace{(2x)'}_{=2} \cdot e^{x-1} + 2x \cdot \underbrace{\left(e^{x-1}\right)'}_{(e^u)' = u' \cdot e^u} = 2 \cdot e^{x-1} + 2x \cdot e^{x-1} = e^{x-1} \cdot (2 + 2x)$

- $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\underbrace{\left[e^{x-1} \cdot (2+2x)\right]}_{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} = \underbrace{\left(e^{x-1}\right)'}_{(e^u)' = u' \cdot e^u} \cdot (2+2x) + e^{x-1} \cdot \underbrace{(2+2x)'}_{=2} = e^{x-1} \cdot (2+2x) + 2 \cdot e^{x-1} =$

  $e^{x-1} \cdot (4 + 2x)$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \cdot (4+2x) - 2 \cdot \left(e^{x-1} \cdot (2+2x)\right) + \left(2x \cdot e^{x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x-1} \cdot (4+2x) - \left(e^{x-1} \cdot (4+4x)\right) + \left(2x \cdot e^{x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4e^{x-1} + 2x \cdot e^{x-1} - 4e^{x-1} - 4x \cdot e^{x-1} + 2x \cdot e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4e^{x-1} + 4x \cdot e^{x-1} - 4e^{x-1} - 4x \cdot e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Verificada a} \\ \text{identidade}\end{matrix}\right\}$$

Já se verificou que a função é explícita. Agora, falta verificar se $y(0)=0$ e $y(1)=2$, pelo que:

$y(0)=0 \Leftrightarrow 2\cdot 0\cdot e^{0-1}=0 \Leftrightarrow 0=0 \rightarrow$ Verifica

$y(1)=2 \Leftrightarrow 2\cdot 1\cdot e^{1-1}=2 \Leftrightarrow 2\cdot 1\cdot e^{0}=2 \Leftrightarrow 2\cdot 1\cdot 1=2 \Leftrightarrow 2=2 \rightarrow$ Verifica

2. Mostre que: $v(x) = \cos(x) + sen(x)$ **é uma solução do problema de valores de fronteira:** $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$**,** $y(0) = 1$ **e** $y(\pi) = -1$**. Averigúe se:** $u(x) = -\cos(x) - sen(x)$ **é uma solução do mesmo problema.**

R:

Como este exercício pede para mostrar que a função é uma solução do problema de valores de fronteira, então teremos que começar por determinar as derivadas da função até à segunda ordem, para posteriormente se substituírem os valores obtidos na equação diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

Assim sendo teremos então que:

- $y = v(x) = \cos(x) + sen(x)$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\cos(x) + sen(x)] = -(x)' \cdot sen(x) + (x)' \cdot \cos(x) = -sen(x) + \cos(x)$
- $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-sen(x) + \cos(x)) = -\cos(x) - sen(x)$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \Leftrightarrow (-\cos(x) - sen(x)) + (\cos(x) + sen(x)) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Verificada a} \\ \text{identidade} \end{Bmatrix}$$

Já se verificou que a função é explícita. Agora, falta verificar se $y(0) = 1$ e $y(\pi) = -1$, pelo que:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\cos(0)}_{=1} + \underbrace{sen(0)}_{=0} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \rightarrow \text{Verifica}$$

$$y(\pi) = -1 \Leftrightarrow \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \underbrace{sen(\pi)}_{=0} = -1 \Leftrightarrow -1 = -1 \rightarrow \text{Verifica}$$

Para o caso em que: $u(x) = -\cos(x) - sen(x)$, teremos então que repetir novamente o procedimento anterior pelo que:

- $y = u(x) = -\cos(x) - sen(x)$

- $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[-\cos(x) - sen(x)] = -(-sen(x)) - \cos(x) = sen(x) - \cos(x)$

- $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(sen(x) - \cos(x)) = \cos(x) - (-sen(x)) = \cos(x) + sen(x)$

Assim sendo, por substituição em: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \Leftrightarrow (\cos(x) + sen(x)) + (-\cos(x) - sen(x)) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Verificada a} \\ \text{identidade} \end{Bmatrix}$$

Já se verificou que a função é explícita. Agora, falta verificar se $y(0) = 1$ e $y(\pi) = -1$, pelo que:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{-\cos(0)}_{=-1} - \underbrace{sen(0)}_{=0} = 1 \Leftrightarrow -1 \neq 1 \rightarrow \text{Não Verifica}$$

$$y(\pi) = -1 \Leftrightarrow \underbrace{-\cos(\pi)}_{=-(-1)=1} - \underbrace{sen(\pi)}_{=0} = -1 \Leftrightarrow 1 \neq -1 \rightarrow \text{Não Verifica}$$

3. Sabendo que toda a solução da equação diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ pode ser escrita na forma: $u(x)=c_1\cdot\cos(x)+c_2\cdot sen(x)$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, determine qual deverá ser o valor de c_1 e c_2 por forma a que $u(x)$ seja uma solução do problema de valores de fronteira: $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$, $y(0)=0$ e $y'(\pi)=-1$.

R:

Para se determinarem os valores de c_1 e c_2, conforme é pedido, teremos que recorrer aos valores iniciais $y(0)=0$ e $y'(\pi)=-1$. Sabendo que: $y(x)=u(x)=c_1\cdot\cos(x)+c_2\cdot sen(x)$.

Então: $y'(x)=u'(x)=(c_1\cdot\cos(x)+c_2\cdot sen(x))' \Leftrightarrow y'(x)=(c_1\cdot\cos(x))'+(c_2\cdot sen(x))' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y'(x)=-c_1\cdot sen(x)+c_2\cdot\cos(x)$

Assim sendo e por substituição teremos agora que:

$$y(0)=0\Leftrightarrow c_1\cdot\underbrace{\cos(0)}_{=1}+c_2\cdot\underbrace{sen(0)}_{=0}=0\Leftrightarrow c_1=0$$

$$y'(\pi)=-1\Leftrightarrow -c_1\cdot\underbrace{sen(\pi)}_{=0}+c_2\cdot\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}=-1\Leftrightarrow c_2=1$$

Este exercício termina por aqui porque no enunciado é afirmado que toda a solução da equação diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$, pode ser escrita na forma: $u(x)=c_1\cdot\cos(x)+c_2\cdot sen(x)$, onde c_1 e c_2 são as constantes que se acabaram de calcular.

4. Sabendo que toda a solução da equação diferencial: $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 0$ pode ser escrita na forma: $y(x) = c_1 + c_2 \cdot x^2$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, mostre que o problema de valores de fronteira: $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 0$, $y(1) = 1$ e $y(-1) = 1$ não tem solução única.

R:

Para se determinarem os valores de c_1 e c_2, conforme é pedido, teremos que recorrer aos valores iniciais $y(1) = 1$ e $y(-1) = 1$, sendo $y(x) = c_1 + c_2 \cdot x^2$.

Assim sendo e por substituição teremos agora que:

$$y(1) = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 \cdot 1^2 = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 1$$

$$y(-1) = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 \cdot (-1)^2 = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 1$$

Daqui se pode concluir que: $c_1 + c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1 - c_1$

Logo por substituição: $y(x) = c_1 + c_2 \cdot x^2 \Leftrightarrow y(x) = c_1 + (1 - c_1) \cdot x^2$

Este exercício termina por aqui porque existirão tantas soluções quantos os valores que c_1 assumir.

5. Sabendo que toda a solução da equação diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ pode ser escrita na forma: $y(x)=c_1\cdot\cos(x)+c_2\cdot sen(x)$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, mostre que o problema de valores de fronteira: $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$, $y(0)=1$ e $y(\pi)=5$ não tem solução.

R:

Para se determinarem os valores de c_1 e c_2, conforme é pedido, teremos que recorrer aos valores iniciais $y(0)=1$ e $y(\pi)=5$, sendo $y(x)=c_1\cdot\cos(x)+c_2\cdot sen(x)$.

Assim sendo e por substituição teremos agora que:

$$y(0)=1\Leftrightarrow c_1\cdot\underbrace{\cos(0)}_{=1}+c_2\cdot\underbrace{sen(0)}_{=0}=1\Leftrightarrow c_1=1$$

$$y(\pi)=5\Leftrightarrow c_1\cdot\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}+c_2\cdot\underbrace{sen(\pi)}_{=0}=5\Leftrightarrow c_1=-5$$

Daqui se pode concluir que não existe solução porque c_1 não pode assumir simultaneamente os valores 1 e -5.