Processamento Digital de Sinal

Teste 3 2010-2011

1. Considere um sinal discreto x[n] obtido por amostragem de uma realização de um processo ruído branco estacionário de média nula e variância s_x^2.
   a) Determine as médias temporais e de conjunto do PE.
   b) Considere a DFT de x[n]. Determine a sua média e sequência de autocorrelação.
   c) Determine a correlação cruzada entre os valores da DFT.

2. Considere um sistema discreto LTI caracterizado pela função de transferência

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

   e ao qual é aplicado um sinal ruído branco de média nula.
   a) Explique o que entende por um sinal ruído branco e caracterize-o em termos de estatística temporal e de conjunto.
   b) Dos métodos de estimação spectral que conhece qual o mais indicado para estimar a densidade espetral de potência do processo de saída? Justifique.

   Método de entropia máxima.
   O processo tem autocorrelação infinita e os métodos clássicos truncam a seq. de autocorrelação

   c) Mostre que a autocorrelação do sinal de saída é dada por

$$\varphi_{xx}(m) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_{xx}(m-k)$$

   d) Considere que dispõe de uma amostra do sinal de saída de 5 pontos {1, 0, -1, 0, 1}. Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para -4=m=4.
   e) Determine o erro do preditor.
   f) Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $m>4$ e $m<9$.
   g) Determine o espectro de máxima entropia do sinal de saída do sistema.

3. Suponha o caso da detecção da direcção de fontes radiantes ou puras superfícies reflectoras através de um agregado linear e uniforme de sensores.

   a) Em sua opinião o método da decomposição da matriz correlação espacial dos dados em valores singulares (SVD) é adequado para a resolução deste problema? Justifique.
   b) Um dos algoritmos de DoA mais usado é o MUSIC. Descreva convenientemente o algoritmo apresentando a sua pricipal desvantagem.
   c) Suponha um sistema de comunicações móveis onde o sinal chega à antena receptora degradado por 2 ecos. Suponha ainda que o ângulo de chegada do sinal directo é perpendicular ao eixo do agregado e os ângulos de

chegada das reflexões são respectivamente θ_1 e θ_2 relativamente à perpendicular ao eixo do agregado. Desenhe o diagrama de blocos e escreva neste caso um conjunto de equações lineares que lhe permitam determinar as amplitudes dos sinais provenientes de cada elemento do agregado necessárias para garantir a aniquilação das réplicas. Justifique os cálculos que efectuar.

Resolução do teste 3 - 2010/2011

1. Considere um sinal discreto $x[n]$ obtido por amostragem de uma realização de um processo de ruído branco estacionário média nula e variância σ_x^2.

a) Determine as médias temporais e de conjunto do P.E.

$$x[n] = [x[0] \quad x[1] \quad x[2] \quad \cdots \quad x[n]]$$

$$X_0 \qquad X_1 \qquad X_2 \qquad \rightarrow \text{Variáveis aleatórias}$$

→ média temporal

$$m = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} x[n] \quad \text{< média do processo >}$$

→ média do conjunto

$$\langle X \rangle = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} X_n \quad \text{< média de uma variável aleatória >}$$

Como o processo é estacionário significa que a média é constante independente do instante

b) Considere a DFT de $x[n]$. Determine a sua média e a sequência de autocorrelação.

$$x[n] \xrightarrow{DFT} X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn}$$

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} X[K] e^{j\frac{2\pi}{N}K} \;\overset{DFT}{\longleftrightarrow}\; X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi K n}{N}}}$$

Média:

$$E\{X(K)\} = E\left\{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn}\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{E\{x[n]\}}_{=0} e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn} =$$

$$= 0$$

Sequência de autocorrelação

$$\phi_{XX}[m] = E\{X(K)X^*(K)\} = E\left\{\sum_{n_1=0}^{N-1} x[n_1] e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn_1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x^*[n_2] e^{+j\frac{2\pi}{N}Kn_2}\right\} =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \underbrace{E\{x[n_1]x^*[n_2]\}}_{\phi_{xx}[n_2-n_1] = \sigma_x^2 \delta[n_2-n_1]} e^{-j\frac{2\pi}{N}K(n_1-n_2)} =$$

só qd $n_2 = n_1$ é que temos a função definida logo:

$$\sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \sigma_x^2 \delta[n_2-n_1] = \sum_{n=0}^{N} \sigma_x^2$$

3e) Determine a correlação cruzada entre os valores da DFT.

$$\phi_{X(k)X(n)} = E\left\{X(k)\overset{*}{X}(n)\right\} =$$

$$= E\left\{\sum_{m_1=0}^{N-1} x[m_1]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}m_1} \sum_{m_2=0}^{N-1} \overset{*}{x}[m_2]\, e^{+jn\frac{2\pi}{N}m_2}\right\} =$$

$$= E\left\{\sum_{m_1=0}^{N-1}\sum_{m_2=0}^{N-1} \underbrace{x[m_1]\overset{*}{x}[m_2]}_{\substack{\phi_{xx}[m_2-m_1]= \\ = \sigma_x^2\,\delta[m_2-m_1]}}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(m_1k - m_2n)}\right\} =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{N-1}\sum_{m_2=0}^{N-1} \sigma_x^2\,\delta[m_2-m_1]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(m_1k - m_2n)} =$$

$$m_2 = m_1$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \sigma_x^2\, e^{-j\frac{2\pi}{N}m(k-n)} =$$

$$= N\,\sigma_x^2\,\delta[k-n]$$

2. Considere um sistema LIT caracterizado pela função de transferência

$$H(z) = \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

e ao qual é aplicado um sinal ruído branco de média nula. ~~e caracterize-o em termos das estatísticas temporal e de conjunto~~

a) Explique o que entende por um sinal ruído branco e caracterize em termos de estatística temporal e de conjunto.

O ruído branco corresponde a uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas com variância σ_x^2.

$$\phi_{xx}[m] = \sigma_x^2\,\delta[m]$$

$$\gamma_{xx}[m] = E\left\{(x[n]-\mu_x)\overset{*}{(x[n]-\mu_x)}\right\} = E\left\{x[n]\overset{*}{x}[m]\right\} =$$

$$= \phi_{xx}[m]$$

b) Dos métodos de estimação espectral que conhece qual o mais indicado para estimar a densidade espectral de potência do processo de saída? Justifique.

O método mais indicado seria o método do máximo entropia pois este é um sistema só com polos e auto regressivo.

c) Mostre que a autocorrelação do sinal de saída é dado por:

$$\phi_{xx}[m] = \sum_{K=1}^{N} a_K \phi_{xx}[m-K]$$

→ Um processo estocástico é da forma:

$$X[n] = a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + \dots a_K x[n-K] + w[n] =$$

$$= \sum_{n=1}^{K} a_K x[n-n] + w[n]$$

→ A sequência de autocorrelação é dado por:

$$x[n] \cdot x^*[n+m] = a_1 x[n-1] x[n+m] + a_2 x[n-2] x[n+m] + a_3 x[n-3] x[n+m]$$
$$+ a_4 x[n-4] x[n+m] + \dots$$

Aplicando o operador E{} a ambos os termos

$$E\{x[n] x^*[n+m]\} = \phi_{xx}[m] = \sum_{k=1}^{N} \phi_{xx}[m-K] a_K$$

d) Considere que dispõe de uma amostra do sinal de saída de 5 pontos {1, 0, -1, 0, 1}. Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $-4 \leq m \leq 4$.

→ Estimar a sequência de autocorrelação

$$C_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n] x[n+m]$$

$$C_{xx}[m] = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{4-|m|} x[n] x[n+m] =$$

$$C_{xx}[0] = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{4} x[n] x[n] = \frac{1}{5}[\underbrace{x[0]x[0]}_{1} + x[1]x[1] + \underbrace{x[2]x[2]}_{1} + x[3]x[3] + \underbrace{x[4]x[4]}_{1}] = \frac{3}{5}$$

$$C_{xx}[|1|] = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{3} x[n] x[n+1] = \frac{1}{5}[\underbrace{x[0]x[1]}_{0} + \underbrace{x[1]x[2]}_{0} + \underbrace{x[2]x[3]}_{0} + \underbrace{x[3]x[4]}_{0}] = 0$$

$$C_{xx}[|2|] = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{2} x[n] x[n+2] = \frac{1}{5}[\underbrace{x[0]x[2]}_{1} + x[1]x[3] + \underbrace{x[2]x[4]}_{1}] = \frac{2}{5}$$

$$C_{xx}[|3|] = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{1} x[n] x[n+3] = \frac{1}{5}[x[0]x[3] + x[1]x[4]] = 0$$

$$C_{xx}[|4|] = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{0} x[n] x[n+4] = \frac{1}{5}[x[0]x[4]] = 1/5$$

...mine o erro do predictor.
...predictor é uma somatório dos valores passados.

$$\overline{e^2} = MMSE = \phi_{xx}(0) - \sum_{K=1}^{N} a_i \phi_{xx}(i)$$

Cálculo dos Coeficientes

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}(0) & \cdots & \phi_{xx}(N-1) \\ \vdots & & \\ \phi_{xx}(N-1) & \cdots & \phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(1) \\ \\ \phi_{xx}(N) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + 2a_4 = 2 \\ 2a_1 + a_3 = 0 \\ 2a_2 + a_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 - 4a_1 = 0 \\ a_2 = 2 - 2a_4 \\ a_3 = -2a_1 \\ 2(2-2a_4) + a_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_1 = 0 \\ \\ a_3 = 0 \\ 4 - \underbrace{4a_4 + a_4}_{-3a_4} = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \\ \\ -3a_4 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 2 - 2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 1 \end{cases}$$

$$\underset{(\mathcal{E})}{MMSE} = \phi_{xx}(0) - \sum_{K=1}^{N} a_i \phi_{xx}(i) =$$

$$= \underline{1} - \frac{4}{5}\phi_{xx}(4) =$$

$$= \frac{1}{5}$$

f) Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $m > 4$ e $m < 9$

$$m = [5, 6, 7, 8]$$

Utilizando a pergunta anterior podemos concluir que:

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{5} x[n-4]$$

<u>Sequência de autocorrelação:</u>

- $$C_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \hat{x}[n] \hat{x}[n+m]$$

$$N = 8$$

$$C_{xx}[5] = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{7-5} \hat{x}[n] \hat{x}[n+5] = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{2} \hat{x}[n] \hat{x}[n+5] =$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{5} x[-4] \frac{1}{5} x[-4+5] + \right.$$

$$=$$

$$\dots$$

g) Determine o espectro de máxima entropia do sinal de saída do sistema.

<u>O espectro de máxima entropia é dado por:</u>

$$Y(\Omega) = |H(\Omega)|^2 X(\Omega)$$

$$\Big\downarrow \text{espectro de máxima entropia}$$

$$P_{mem} = |H(\Omega)|^2 \mathcal{E} = |H(\Omega)|^2 \, MMSE$$

- $$P_{mem} = \frac{MMSE}{\left|1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right|^2} = \frac{\phi_{xx}(0) - \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_{xx}(i)}{\left|1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right|^2}$$

3. Suponha-se o caso da detecção da direcção de fontes radiantes ou puros superfícies reflectoras através de um agregado dired e uniforme de sensores.

a) Em sua opinião o método da decomposição da matriz de correlação espacial dos dados em valores singulares (SVD) é adequado para a resolução deste problema? Justifique

O método baseia-se:

→ Scanning ao espaço através de l sensores.

→ Criação da matriz de correlação com os vectores próprios, onde estes apresentam direcção.

→ Cálculo do produto interno da matriz para ver os direcção de máxima potência.

→ Separa os vectores de espaço-ruído dos de detecção de maior potência.

Adequado se:

→ Sinal e ruído forem não correlados.

→ os sinais provenientes dos diversos fontes forem não correlados de forma a evitar a dispersão em.

b) Um dos algoritmos DOA mais usado é o MUSIC. Descreva convenientemente o algoritmo apresentando a sua principal desvantagem.

→ Vantagens:

• Utiliza os vectores ortogonais que dizem respeito ao ruído, desprezando os vectores que dizem respeito à direcção da fonte.

• Trabalha com um grande número de amostras.

• Os vectores espaço-ruído menores darão origem a valores altos no espectro (são os vectores mais próximos da direcção de chegada).

•

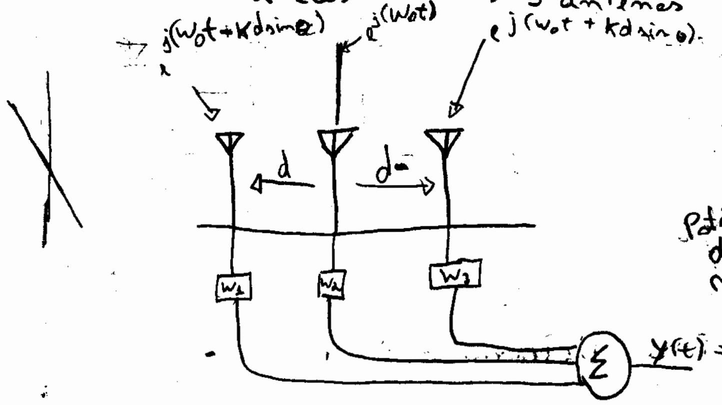
→ Desvantagem:

• O sinal proveniente das fontes deverá ser não correlado para o bom funcionamento do algoritmo, o que raramente acontece.

e) Suponha um sistema de comunicações móveis onde o sinal chega à antena receptora degradado por 2 ecos. Suponha ainda que o ângulo de chegada do sinal directo é perpendicular ao eixo do agregado e os ângulos de chegada das reflexões são respectivamente θ_1 e θ_2 relativamente à perpendicular do eixo do agregado.

Desenhe o diagrama de blocos e escreva neste caso um conjunto de equações lineares que lhe permitam determinar as amplitudes dos sinais provenientes de cada elemento do agregado necessários para garantir a aniquilação das réplicas. Justifique os cálculos que efectuar.

- 2 ecos $\longrightarrow$ 3 antenas



Potência do sinal recebido

$$y(t) = P \cdot e^{jwt}[w_1 + w_2 + w_3]$$

1º Caso:

- Recepção do sinal que chega à antena:

$$Y(t) = P \cdot e^{jwt}[w_1 + w_2 + w_3]$$

$$\boxed{w_1 + w_2 + w_3 = 1}$$

2º Caso:

- Eliminação da primeira réplica (N_1)

$$N_1 e^{jwt}[e^{jkd\sin\theta_1} w_1 + 1 w_2 + e^{-jkd\sin\theta_1} w_3] =$$

$$= N_1 e^{jwt}[(\cos(kd\sin\theta_1) - \sin(kd\sin\theta_1))w_1 + w_2 + \alpha^* w_3]$$

$$\boxed{e^{j\alpha} = \cos\alpha - j\sin\alpha}$$

$$\boxed{\alpha_1 w_1 + w_2 + \alpha_1^* w_3 = 0}$$

3º Caso:

- Eliminação da segunda réplica $N = N_2$, $\theta = \theta_2$

$$N_2 e^{jwt}[e^{jkd\sin\theta_2} w_1 + w_2 + e^{-jkd\sin\theta_2} w_3] =$$

$$= N_2 e^{jwt}[\underbrace{(\cos(kd\sin\theta_2) - j\sin(kd\cos\theta_2))}_{\alpha_2} w_2 + w_2 + \alpha_2^* w_3]$$

$$\boxed{\alpha_2 w_2 + w_2 + \alpha_2^* w_3 = 0}$$