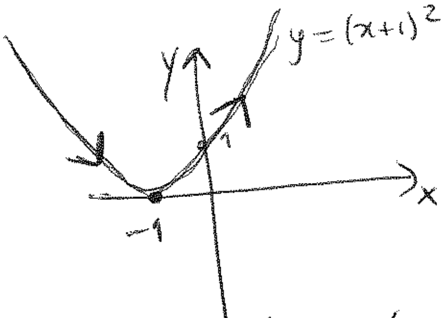
Curvas em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$

1.a) $\vec{f}(t) = (t-1, t^2) \quad , t \in \mathbb{R}.$

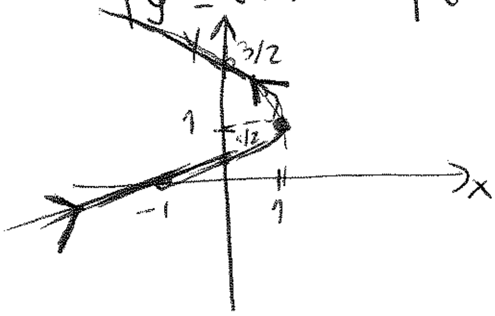
$\begin{cases} x = t-1 \\ y = t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t = x+1 \\ — \end{cases} \quad \begin{cases} y = (x+1)^2 \end{cases} , \ x \in \mathbb{R}$

Parábola com a concavidade voltada para cima e vértice em $(-1,0)$



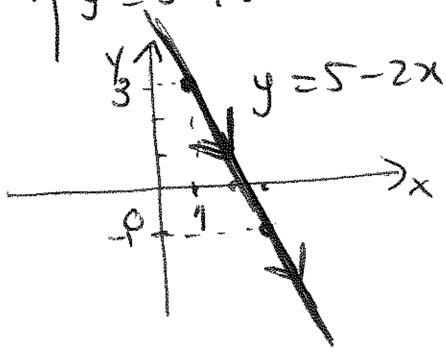
b) $\vec{f}(t) = (1-2t^2, t+1) \quad , t \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = 1-2t^2 \\ y = t+1 \end{cases} \quad \begin{cases} — \\ t = y-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1-2(y-1)^2 \Leftrightarrow \underbrace{x-1 = -2(y-1)^2}_{\text{parábola com a concavidade voltada para o lado esq. e vértice em } (1,1).} \end{cases} , \ y \in \mathbb{R}$



c) $\vec{f}(t) = (1+2t)\vec{e_1} + (3-4t)\vec{e_2} \quad , t \in \mathbb{R}.$

$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-4t \end{cases} , t \in \mathbb{R} \rightarrow$ Recta que passa em $(1,3)$ com a direcção do vector $(2,-4)$.



d) $\vec{f}(t) = (1+2t)\vec{e_1} + (3-4t)\vec{e_2} + 5\vec{e_3} \quad , t \in \mathbb{R}.$

É a recta anterior mas no plano $z = 5$.
horizontal.

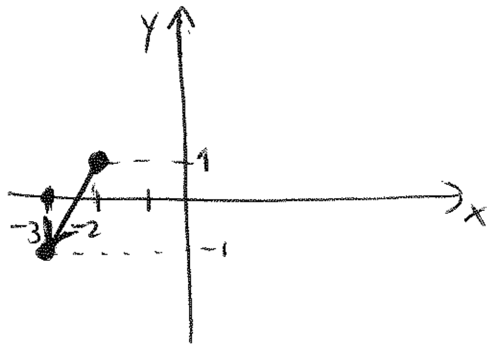
e) $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 2-t \end{cases}$, $t \in [1,2]$

O segmento de recta com início no ponto

$t=1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1-1 = -2 \\ y = 2-1 = 1 \end{cases}$ $(-2,1)$

e fim no ponto

$t=2 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$ $(-3,-1)$

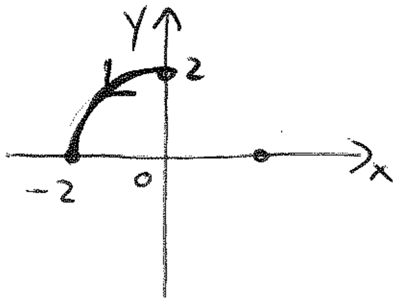


f) $\vec{f}(t) = (2\,\text{sen}(2t), 2\cos(2t))$ → parte da circunferência de raio 2, centrada em $(0,0)$.
$t \in [0,\pi]$

$t=0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ $(0,2)$

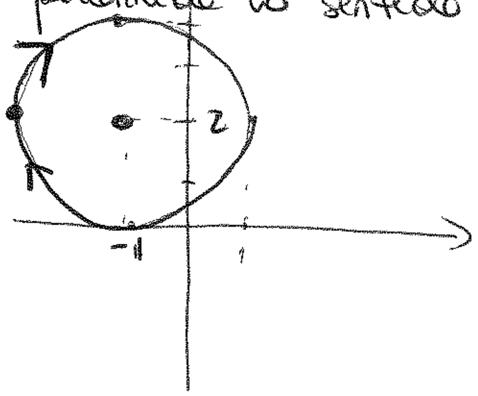
$t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\,\text{sen}\,\pi = 0 \\ y = 2\cos\pi = -2 \end{cases}$ $(0,-2)$

$t=\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ $(0,2)$



g) $\vec{f}(t) = (-1 + 2\cos(\pi - t), 2 + 2\,\text{sen}(\pi - t))$, $t \in \mathbb{R}$.

circunferência centrada em $(-1,2)$ e raio 2 percorrida no sentido indicado

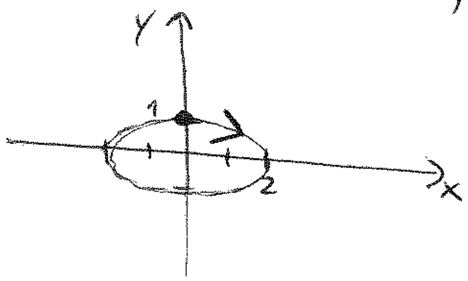


Curvas

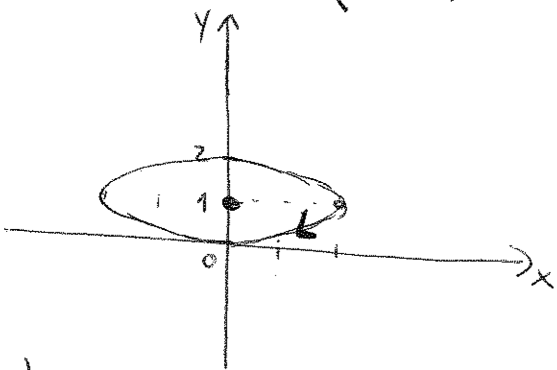
h) $\vec{f}(t) = \left(-1+2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), 4, 2+2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \quad , t \in [0, 2\pi]$

Mesma circunferência que a anterior mas no plano vertical $y=4$ e percorrida com outra velocidade, no mesmo sentido

i) $\vec{f}(t) = (2\,\mathrm{sen}\,t, \cos t) \quad , t \in \mathbb{R}$ → elipse centrada em $(0,0)$

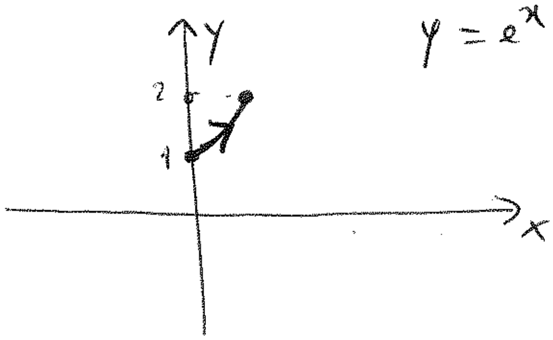


j) $\vec{f}(t) = \left(2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+t\right), 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right) \quad t \in \mathbb{R}$, elipse centrada em $(0,1)$



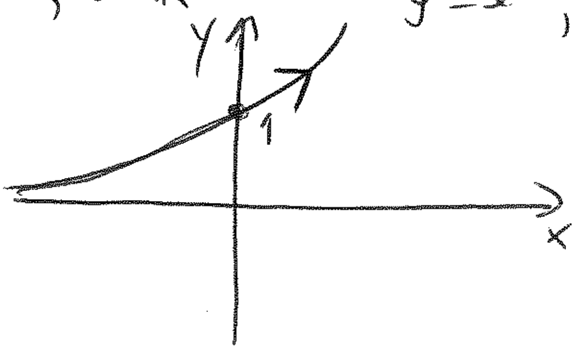
k) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t \end{cases} \quad , t \in [1,2]$

$x = \ln y$, com $y \in [1,2]$
$y = e^x$

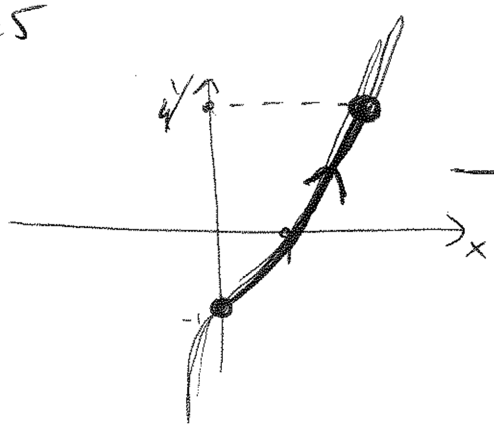


l) $\begin{cases} x = t \\ y = e^t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$

$y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$



m) $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^3 \\ z = 5 \end{cases}$, $t \in [0,4]$ Corresponde à curva $\begin{cases} y = (x-1)^3 \\ z = 5 \end{cases}$

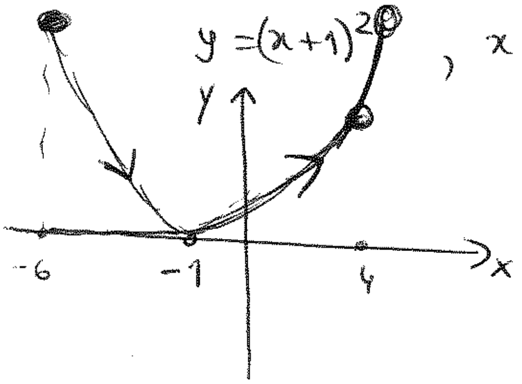


$\longrightarrow$ no plano horizontal $z = 5$

2.a) $\vec{f}(t) = (t-1, t^2)$, $t \in [-5,5[$

$\begin{cases} x = t-1 \\ y = t^2 \end{cases}$, $t \in [-5,5[$

$y = (x+1)^2$, $x \in [-6,4]$



Pt^o inicial

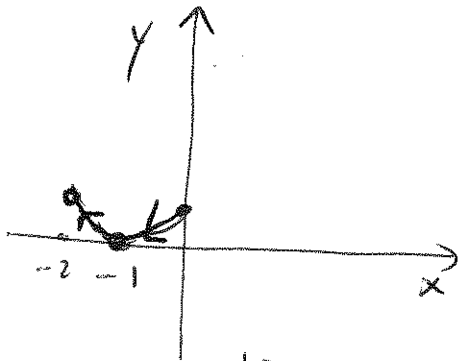
$t = -5 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 25 \end{cases}$ $(-6,25)$

Pt^o final (aberto)

$t = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 25 \end{cases}$ $(4,25)$

$\begin{cases} x = \cos t - 1 \\ y = \cos^2 t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi[$

$\Rightarrow y = (x+1)^2$, $x \in [-2,0]$



Pt^o inicial

$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow (0,1)$

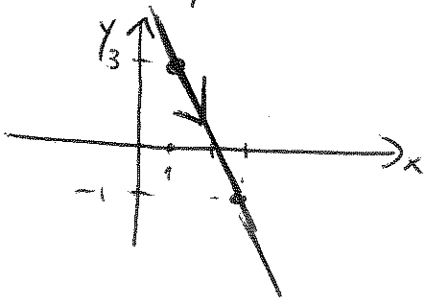
$t = 2\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Este ~~curva~~ partícula inicia o seu percurso em $(0,1)$ e vai até ao ponto $(-2,1)$ (quando $t = \pi$) e depois ~~volta~~ regressa ao ponto $(0,1)$.

Curvas

b) $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-4t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

Recta $y = 5-2x$



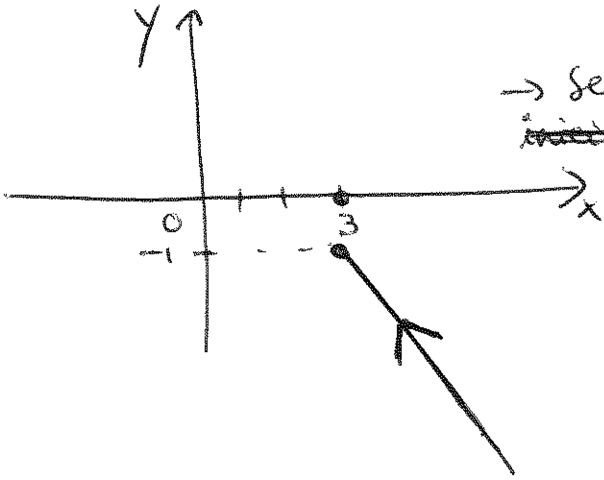
$\begin{cases} x = 1+2\cosh t \\ y = 3-4\cosh t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

$y = 5-2x$, mas como $\cosh t \geq 1$, então

$\cosh t = \frac{x-1}{2} \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 2$

$x \geq 3$

→ semi-recta ~~que~~ percorrida ~~início ...~~ com o sentido indicado.



c) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \end{cases}, t\in[0,2\pi[$

$\begin{cases} x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \\ y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \end{cases}, t\in[0,2\pi]$

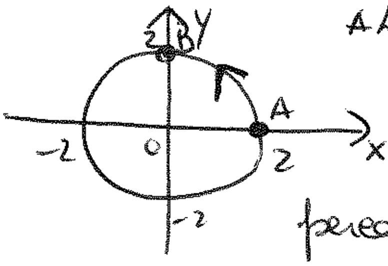
Ambas fazem parte da circunferência centrada em $(0,0)$ e raio 2.

Mas a 1ª

pt° inicial

$A\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (2,0)$

$t = \pi/2 \Rightarrow B\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

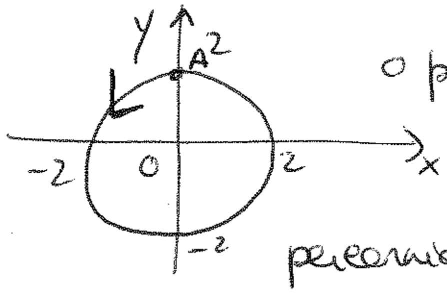


percorrida uma vez

A 2ª

$t = 0 \Rightarrow A\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

o pt° inicial é $\neq$.



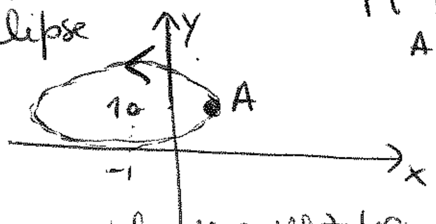
percorrida uma vez.

d) $\begin{cases} x = -1+2\cos t \\ y = 1+\operatorname{sen} t \end{cases}, t\in[0,2\pi[$

pt° inicial

$A\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

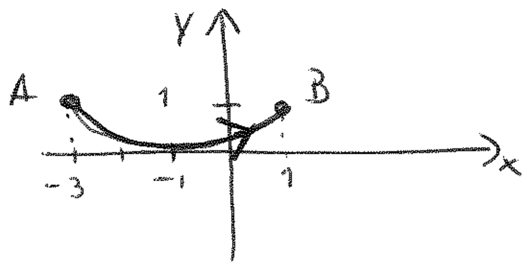
elipse



percorrida uma vez no sentido indicado

d) $\begin{cases} x = -1 + 2\cos(\pi - 3t) \\ y = 1 + \text{sen}(\pi - 3t) \end{cases}$, $t \in [0, \pi[$

Semi-elipse percorrida entre o pt^o inicial A $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$ $(-3,1)$ e o ponto $B(1,1)$ no sentido indicado



e) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$, $t \in [0, 2[$ e $\begin{cases} x = -1 + 2u \\ y = 7 - 4u \end{cases}$, $u \in [1, 3[$

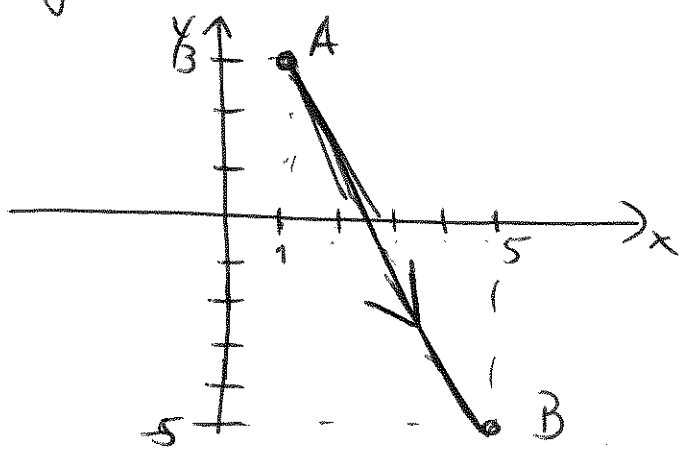
$t = 0 \Rightarrow A \to (1,3) \to$ pt^o inicial

$t = 2 \quad B \to (5,-5)$ pt^o final

$u = 1 \Rightarrow A \to (1,3) \to$ pt^o inicial

$u = 3 \Rightarrow B \to (5,-5)$ pt^o final

São duas parametrizações diferentes do mesmo segmento de recta.



3.a) $\vec{R}(t) = (t-1, t^2)$

$\vec{R}'(t) = (1, 2t) \longrightarrow \vec{R}'(2) = (1,4) \to$ vector tangente

Eq. vectorial da recta tangente à curva em $\vec{R}(2)$

$(x,y) = \vec{R}(2) + t\,\vec{R}'(2) \quad , t \in \mathbb{R}$

$(x,y) = (1,4) + t(1,4) \quad , t \in \mathbb{R}$

b) $\vec{R}(t) = \left(e^{t^3}, \ln(t+1) - t^3\right) \quad , t \geq 0, \quad t_0 = 1$

$\vec{R}'(t) = \left(3t^2 e^{t^3}, \frac{1}{t+1} - 3t^2\right)$

$\vec{R}'(1) = \left(3e, \frac{1}{2} - 3\right) = \left(3e, -\frac{5}{2}\right) \to$ vector tangente

Eq. da recta tangente à curva em $\vec{R}(1)$:

$(x,y) = \vec{R}(1) + t\,\vec{R}'(1) \quad , t \in \mathbb{R}$

$(x,y) = (e, \ln 2 - 1) + t\left(3e, -\frac{5}{2}\right)$

c) $\vec{R}(t) = \left(\frac{t^2-1}{t+2}, \tan t\right) \quad t_0 = 0. \quad , t \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$

$\vec{R}'(t) = \left(\frac{t^2+4t+1}{(t+2)^2}, \frac{1}{\cos^2 t}\right)$

$\vec{R}'(0) = \left(\frac{1}{4}, 1\right) \to$ vector tangente

Recta tangente à curva em $\vec{R}(0)$:

$(x,y) = \vec{R}(0) + t\,\vec{R}'(0) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) + t\left(\frac{1}{4}, 1\right) \quad , t \in \mathbb{R}.$

3.d) $\vec{R}(t) = \left(\sqrt{t-1}\,,\ 3t^4-1\right)$, $t \geq 1$, $t_0 = 3$.

$\vec{R}'(t) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}\,,\ 12t^3\right)$

$\vec{R}'(3) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,,\ 324\right) \rightarrow$ vector tangente

Recta tangente:

$(x,y) = \left(\sqrt{2}, 242\right) + t\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, 324\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

4. O vector tangente à curva $\vec{R}(t) = (t^3-1, t^2+t)$, $t \in \mathbb{R}$

é, em cada instante, dado por

$\vec{R}'(t) = (3t^2, 2t+1)$

Se ele deve ser paralelo à recta $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 4-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

deve ser paralelo ao vector $(3,-1)$

$\vec{R}'(t) = (3t^2, 2t+1) = (3,-1)$

$\begin{cases} 3t^2 = 3 \\ 2t+1 = -1 \end{cases} \begin{cases} t^2 = 1 \\ 2t = -2 \end{cases} \begin{cases} \cancel{t=1} \vee t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$

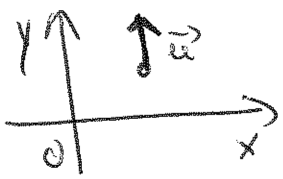
Quando $t=-1$, $\vec{R}'(-1)$ é paralelo ao vecto $(3,-1)$.

5. $\vec{R}(t) = (\cos t, t^2-t)$, $t \in \mathbb{R}$

$\vec{R}'(t) = (-\operatorname{sen} t, 2t-1)$, $t \in \mathbb{R}$. $\rightarrow$ vector tangente à curva em $\vec{R}(t)$.

Curvas.

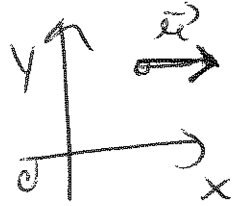
5. a) Vector tangente à curva é vertical quando



$$\vec{R}'(t) = (0, k)$$

logo $-\operatorname{sen} t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

b) Vector tangente à curva é horizontal quando a 2ª coordenada é nula.



$$2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1/2$$

6. $\vec{R}(t) = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + 1, \frac{t^3}{3} + 2t - 1\right)$

$$\vec{R}'(t) = (t^3 + t^2, t^2 + 2)$$

$$\vec{u}(t) = \left(\frac{t^4}{4} + t - 1, \frac{t^2}{2} + 2t\right)$$

$$\vec{u}'(t) = (t^3 + 1, t + 2)$$

a) $\vec{R}'(t) \parallel \vec{u}'(t)$

$$\vec{R}'(t) = k\,\vec{u}'(t) \qquad , k \in \mathbb{R}$$

$$\frac{t^3 + t^2}{t^3 + 1} = \frac{t^2 + 2}{t + 2} \Leftrightarrow$$

$(t^3 + t^2)(t + 2) = (t^3 + 1)(t^2 + 2) \qquad , t \neq -2 \wedge t \neq -1$.

$-t^5 + t^4 + t^3 + t^2 - 2 = 0 \rightarrow t = 1$ é uma raiz real desta equação

logo quando $t = 1$, os vectores são paralelos.

b) Eq. da recta tangente à curva $\vec{R}(t)$ no ponto $\vec{R}(1)$

$$(x,y) = \vec{R}(1) + t\,\vec{R}'(1) \quad , t \in \mathbb{R}$$

$$(x,y) = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+1, \frac{1}{3}+2-1\right) + t\,(2,3) \quad , t \in \mathbb{R}$$

$$(x,y) = \left(\frac{19}{12}, \frac{4}{3}\right) + t\,(2,3) \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Eq. da recta tangente à curva $\vec{u}(t)$ no ponto $\vec{u}(1)$

$$(x,y) = \vec{u}(1) + t\,\vec{u}'(1) \quad , t \in \mathbb{R}.$$

$$(x,y) = \left(\frac{1}{4}+1-1, \frac{1}{2}+2\right) + t\,(2,3) \quad , t \in \mathbb{R}.$$

$$(x,y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right) + t\,(2,3) \quad , t \in \mathbb{R}.$$