1. Determine o intervalo de convergência para as seguintes séries de potências:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$

R:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot (x-0)^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x-c)^n \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ c = 0 \end{Bmatrix}$$

Aplicando então a fórmula do raio teremos que:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}{\frac{(-1)^{(n+1)+1}}{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} + \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$$

Logo, a série converge para o intervalo: $x \in \left]c-R; c+R\right[\equiv x \in \left]0-1; 0+1\right[\equiv x \in \left]-1;1\right[$

Estudando agora os pontos extremos do intervalo teremos que:

Para: $x = -1$

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} \Rightarrow$ [1] Pelo **Critério de Riemann**: $\sum \frac{1}{n^a}$, onde neste caso $a = 1 \Rightarrow a \leq 1$, então a série é divergente neste extremo.

NOTA!!! $a > 1 \Rightarrow$ *Série Convergente.*

[1] $(-1)^{2n+1}$ passa a ser apenas (-1) porque o expoente $(2n+1)$ representa os números impares, o que significa que, independentemente do valor que **n** assumir, teremos sempre números impares no expoente.

Para: $x=1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\Rightarrow$$ Pelo **Teorema de Leibnitz**:

- $\lim_{n\to+\infty} an=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \rightarrow$ Verdade;
- $a_{n+1}\le a_n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{n\cdot(n+1)}\le\frac{n+1}{n\cdot(n+1)} \Leftrightarrow n\le n+1 \rightarrow$ Verdade.

Logo a série é convergente para este extremo em particular, ou seja, o intervalo é fechado neste extremo.

Conclusão: $x\in\,]-1;1]$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}$

R:

Neste caso $\left(x^{2n}\right)$ teremos que recorrer ao critério da razão: $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, pelo que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{[2\cdot(n+1)]!}\cdot x^{2\cdot(n+1)}}{\frac{2^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^n\cdot2^1}{(2n+2)!}\cdot x^{2n+2}}{\frac{2^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\cdot2^1\cdot(2n)!\cdot x^{2n}\cdot x^2}{2^n\cdot(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!\cdot x^{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^1\cdot x^2}{(2n+2)\cdot(2n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^1\cdot x^2}{[2\cdot(n+1)]\cdot(2n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2}{(n+1)\cdot(2n+1)}=x^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot(2n+1)}=$$

$$= x^2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2+3n+1} = x^2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = x^2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} =$$

$$= x^2 \cdot \frac{\frac{1}{+\infty}}{2+\frac{3}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}} = x^2 \cdot \frac{0}{2+0+0} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \rightarrow Convergente \\ \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \rightarrow Divergente \\ \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \Leftrightarrow Verificar \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ A série é convergente porque $0<1$.

2. Indique o domínio de cada uma das funções:

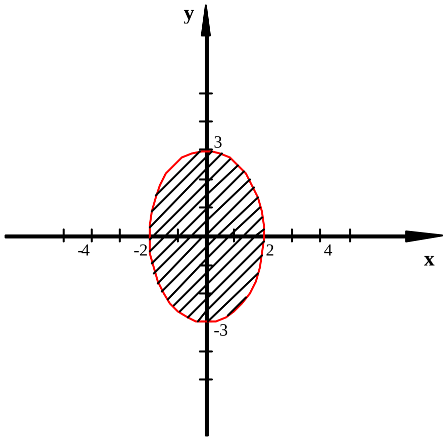
a) $f(x;y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$

R:

$$D_f = \left\{(x;y)\in \Re^2 : 1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9} \geq 0\right\}$$

$$1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Parte interior de uma elipse} \left\{ \begin{bmatrix} centro \rightarrow (0;0) \\ raio_x \rightarrow \sqrt{4}=2 \\ raio_y \rightarrow \sqrt{9}=3 \end{bmatrix} \right\}$$



b) $f(x;y) = \ln(5x - x^2 - 6) + \ln(1 - y^2)$

R:

$$D_f = \{(x;y) \in \Re^2 : (5x - x^2 - 6) > 0 \vee (1 - y^2) > 0\}$$

$$(5x - x^2 - 6) > 0 \wedge (1 - y^2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5x - x^2 - 6) > 0 \wedge y^2 < 1 \Leftrightarrow$$ [2]

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot(x-3) < 0 \wedge y^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot(x-3) < 0 \wedge (y-1)\cdot(y+1) < 0$$

Assim sendo teremos que:

$$D_f = \{(x;y) \in \Re^2 : 2 \le x \le 3 \wedge -1 \le y \le 1\}$$

		2		3	
$x-2$	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
P	+	0	-	0	+

		-1		1	
$y-1$	-	-	-	0	+
$y+1$	-	0	+	+	+
P	+	0	-	0	+

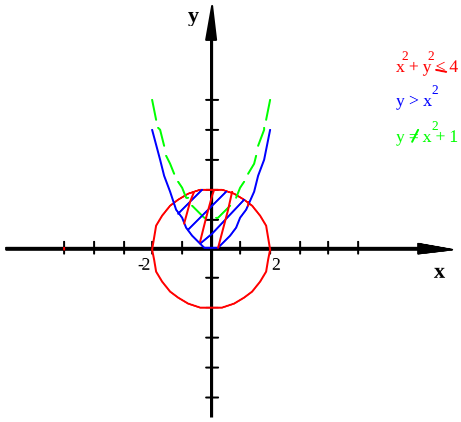
c) $f(x;y) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln(y - x^2)}$

R:

$$D_f = \left\{ \begin{array}{l} (x;y) \in \Re^2 : (4 - x^2 - y^2) \ge 0 \wedge \ln(y - x^2) \ne 0 \\ \wedge (y - x^2) > 0 \end{array} \right\}$$

$$x^2 + y^2 \le 4 \wedge y - x^2 \ne e^0 \wedge y > x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 4 \wedge y \ne x^2 + 1 \wedge y > x^2$$



[2] Sabendo que a fórmula resolvente para uma equação do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$ é dada por: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ então para a equação: $(-x^2 + 5x - 6) = 0$ teremos as seguintes raízes calculadas pela fórmula resolvente: $x = 3 \vee x = 2$

3. Estude a existência de limite das seguintes funções, nos pontos indicados:

a) $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$

R:

1º Passo: Determinação dos limites iterados:

- $$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x^2\cdot0}{x^4+0^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{0}{x^4}\right)=\lim_{x\to0}(0)=0$$

- $$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{2\cdot0^2\cdot y}{0^4+y^2}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{0}{y^2}\right)=\lim_{y\to0}(0)=0$$

Apesar dos limites iterados serem iguais, ainda nada se pode concluir, pelo que teremos que prosseguir com a resolução:

2º Passo: Aproximação à recta: $(y-y_0)=m\cdot(x-x_0) \Leftrightarrow y=m\cdot x$, pq $(x_0;y_0)=(0;0)$:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{2x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2\cdot(m\cdot x)}{x^4+(m\cdot x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot m\cdot x^3}{x^4+m^2\cdot x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot(2\cdot m\cdot x)}{x^2\cdot(x^2+m^2)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(2\cdot m\cdot x)}{(x^2+m^2)}=\frac{(2\cdot m\cdot 0)}{(0^2+m^2)}=\frac{0}{(m^2)}=0$$

Apesar deste limite ser igual aos limites iterados, continuamos a não poder concluir nada, pelo que teremos que prosseguir com a resolução:

3º Passo: Aproximação a uma parábola $y = k \cdot x^2$:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 \cdot (k \cdot x^2)}{x^4 + (k \cdot x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot k \cdot x^4}{x^4 + k^2 \cdot x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 \cdot (2 \cdot k)}{x^4 \cdot (1 + k^2)} =$$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(2 \cdot k)}{(1+k^2)} = \frac{(2 \cdot k)}{(1+k^2)} \Rightarrow$ Como depende de k então podemos concluir que a função não tem limite.

b) [3] $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{e^{(3x^2+3y^2)} - 1}{8x^2 + 8y^2}$

R:

1º Passo: Re-arranjo da função:

$$\frac{e^{(3x^2+3y^2)} - 1}{8x^2 + 8y^2} = \frac{e^{(3x^2+3y^2)} - 1}{8 \cdot (x^2 + y^2)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{e^{(3x^2+3y^2)} - 1}{(x^2 + y^2)} = \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot \frac{e^{(3x^2+3y^2)} - 1}{3 \cdot (x^2 + y^2)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{e^{(3x^2+3y^2)} - 1}{(3x^2 + 3y^2)}$$

Feito isto, segue-se a determinação do valor do limite:

2º Passo: Determinação do limite:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{3}{8} \cdot \frac{e^{(3x^2+3y^2)} - 1}{(3x^2 + 3y^2)} = \frac{3}{8} \cdot \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{e^{(3x^2+3y^2)} - 1}{(3x^2 + 3y^2)} = \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{3}{8}$$

Assim sendo este seria o limite da função.

---

[3] É conhecido o seguinte limite: $\lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$. Isto implica que se terão que proceder a re-arranjos na função dada de modo a adoptar a forma apresentada neste limite.

c) [4] $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{sen\left(\sqrt{9x^2+9y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

R:

1º Passo: Re-arranjo da função:

$$\frac{sen\left(\sqrt{9x^2+9y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{sen\left(\sqrt{9\cdot\left(x^2+y^2\right)}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{sen\left(3\cdot\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\cdot\frac{sen\left(3\cdot\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\right)}{3\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$$

Feito isto, segue-se a determinação do valor do limite:

2º Passo: Determinação do limite:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} 3\cdot\frac{sen\left(3\cdot\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\right)}{3\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = 3\cdot\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{sen\left(3\cdot\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\right)}{3\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = 3\cdot 1 = 3$$

Assim sendo este seria o limite da função.

[4] É conhecido o seguinte limite: $\lim_{u\to 0}\frac{sen(u)}{u}=1$. Isto implica que se terão que proceder a re-arranjos na função dada de modo a adoptar a forma apresentada neste limite.

4. Mostre que: $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

R:

Domínio da função: $D_f = \{(x;y)\in \Re^2 : (x^2+y^2)\neq 0\} \Rightarrow \Re^2 \setminus \{(0;0)\}$

Agora vamos aplicar directamente à definição de limite:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0} : (x;y)\in D_f \wedge 0 \leq \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < d \Rightarrow |f(x;y)-L| < e$$

Assim sendo teremos então por equivalência directa o seguinte:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0} : (x;y)\in \Re^2 \setminus \{(0;0)\} \wedge 0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < d \Rightarrow \left|\frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall_{e>0}\exists_{d>0} : (x;y)\in \Re^2 \setminus \{(0;0)\} \wedge \sqrt{x^2+y^2} < d \Rightarrow \left|\frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < e$$

Logo: $\left|\frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|2x^2-3y^2|}{\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|} \leq \frac{|2x^2+3y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq$ [5] $\frac{|3\cdot(x^2+y^2)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3\cdot(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 3\cdot(x^2+y^2)^{1-\frac{1}{2}} =$

$$= 3\cdot(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = 3\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = ?$$

Sabendo da definição que: $\sqrt{x^2+y^2} < d$, então teremos por substituição que:

$? \leq 3\cdot d = e \Rightarrow d = \frac{e}{3} \Rightarrow \forall_{e>0}\exists_{d=\frac{e}{3}>0} \Rightarrow$ Está então verificado que o limite da função é zero.

---

[5] Este passo é válido porque: $2x^2+3y^2 \leq 3x^2+3y^2$ é verdade.

5. Estude a continuidade das seguintes funções:

a) $f(x;y)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{x+y}{5x-y} & se:\ (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & se:\ (x;y)=(0;0)\end{array}\right\}$

R:

Domínio da função: $D_f=\Re^2$

Atendendo agora à continuidade da função no ponto $(0;0)$, uma vez que o enunciado afirma que a função toma o valor 0 quando $(x;y)=(0;0)$, teremos que verificar o seguinte:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x+y}{5x-y}=0$$

Observando o limite anteriormente referido, facilmente se conclui que a aplicação directa da definição de limite será bastante trabalhosa e complicada.

Assim sendo recorremos aos limites iterados e verificamos se estes são iguais a 0. Caso isso não aconteça então não existe limite para esta função.

Assim sendo os limites iterados serão os seguintes:

- $\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\dfrac{x+y}{5x-y}\right)=\lim_{x\to0}\left(\dfrac{x+0}{5x-0}\right)=\lim_{x\to0}\left(\dfrac{x}{5x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{5}$

- $\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\dfrac{x+y}{5x-y}\right)=\lim_{y\to0}\left(\dfrac{0+y}{5\cdot0-y}\right)=\lim_{y\to0}\left(\dfrac{y}{-y}\right)=\lim_{y\to0}(-1)=-1$

Conclusão: A função não é contínua.

b) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{7x^2y}{x^2+y^2} & se:\ (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & se:\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$

R:

Domínio da função: $D_f=\Re^2$. Agora, teremos que verificar que: $\lim_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{7x^2y}{x^2+y^2}=0$

Pela definição de limite teremos que:

$$\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in\Re^2\wedge 0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<d\Rightarrow\left|\frac{7x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall_{e>0}\exists_{d>0}:(x;y)\in\Re^2\wedge\sqrt{x^2+y^2}<d\Rightarrow\left|\frac{7x^2y}{x^2+y^2}\right|<e$$

Logo: $\left|\dfrac{7x^2y}{x^2+y^2}\right|=\dfrac{|7x^2y|}{|x^2+y^2|}\leq\dfrac{|7x^2y|}{x^2+y^2}\leq\dfrac{7\cdot|x|^2\cdot|y|}{(x^2+y^2)}=¤$

Sabendo que: $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ e que: $|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$. Então teremos por substituição que:

$$¤=\frac{7\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}\leq 7\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\leq ?$$

Sabendo da definição que: $\sqrt{x^2+y^2}<d$, então teremos por substituição que:

$?\leq 7\cdot d=e\Rightarrow d=\dfrac{e}{7}\Rightarrow\forall_{e>0}\exists_{d=\frac{e}{7}>0}\Rightarrow$ Está então verificado que o limite da função é zero.

Conclusão: O limite existe logo a função é contínua no seu domínio porque se trata do quociente de duas funções polinomiais também elas continuas.

6. Usando a definição calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no pontos indicado:

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(x^4+y^4+1\right)}{x-y} & se:\ x\neq y\\ 0 & se:\ x=y\end{cases} \text{ no ponto } (0;0)$$

R:

Domínio da função: $D_f=\Re^2$.

Calculando agora a **derivada em ordem a x**, teremos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h;y_0)-f(x_0;y_0)}{h}\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h;0)-f(0;0)}{h}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h;0)-f(0;0)}{h}\Leftrightarrow¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(0;0)=0\to$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $x=y$ então a função assume o valor 0. $f(x;y)=\frac{\ln\left(x^4+y^4+1\right)}{x-y}\Rightarrow f(h;0)=\frac{\ln\left(h^4+0^4+1\right)}{h-0}\Leftrightarrow f(h;0)=\frac{\ln\left(h^4+1\right)}{h}$

Assim sendo, teremos que: ¤ $\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln\left(h^4+1\right)}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(h^4+1\right)}{h^2}=$[6]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\ln\left(h^4+1\right)\right)'}{\left(h^2\right)'}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\left(h^4+1\right)'}{\left(h^4+1\right)}}{\left(h^2\right)'}==\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4h^3}{\left(h^4+1\right)}}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h^3}{2h\cdot\left(h^4+1\right)}=$$

---

[6] Indeterminação do tipo $0/0$ que pode ser levantada utilizando a **regra de Cauchy**: $\frac{(\text{numerador})'}{(\text{denominador})'}$; $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h^2}{\left(h^4+1\right)} = 2\cdot \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{\left(h^4+1\right)} = 2\cdot \frac{0^2}{\left(0^4+1\right)} = 0$$

Calculando agora a **derivada em ordem a y**, teremos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0;y_0+k)-f(x_0;y_0)}{k} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0;0+k)-f(0;0)}{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0;k)-f(0;0)}{k} \Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$f(0;0)=0 \rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $x=y$ então a função assume o valor 0. $f(x;y) = \frac{\ln\left(x^4+y^4+1\right)}{x-y} \Rightarrow f(0;k) = \frac{\ln\left(0^4+k^4+1\right)}{0-k} \Leftrightarrow f(0;k) = -\frac{\ln\left(k^4+1\right)}{k}$

Assim sendo, teremos que: ¤ $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = \lim_{k\to 0} \frac{-\frac{\ln\left(k^4+1\right)}{k}-0}{k} = -\lim_{k\to 0} \frac{\ln\left(k^4+1\right)}{k^2} =$[7]

$$= -\lim_{k\to 0} \frac{\left(\ln\left(k^4+1\right)\right)'}{\left(k^2\right)'} = = -\lim_{k\to 0} \frac{\frac{\left(k^4+1\right)'}{\left(k^4+1\right)}}{\left(k^2\right)'} = -\lim_{k\to 0} \frac{\frac{4k^3}{\left(k^4+1\right)}}{2k} = -\lim_{k\to 0} \frac{4k^3}{2k\cdot\left(k^4+1\right)} =$$

$$= -\lim_{k\to 0} \frac{2k^2}{\left(k^4+1\right)} = -2\cdot \lim_{k\to 0} \frac{k^2}{\left(k^4+1\right)} = -2\cdot \frac{0^2}{\left(0^4+1\right)} = 0$$

[7] Indeterminação do tipo $0/0$ que pode ser levantada utilizando a **regra de Cauchy**: $\frac{(\text{numerador})'}{(\text{denominador})'}$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

7. Determine as derivadas parciais de 1ª ordem das seguintes funções e calcule-as nos pontos indicados:

a) $\mathrm{h}(x;y)=(\cot g(x))^{\mathrm{tg}(y)};\ \mathrm{P}=\left(\frac{p}{4};-\frac{p}{4}\right)$

R:

$$\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial x}(x;y)=\left([\cot g(x)]^{tg(y)}\right)_x'={}^{8}\underbrace{tg(y)}_{a}\cdot\underbrace{[\cot g(x)]^{tg(y)-1}}_{u^{a-1}}\cdot\underbrace{[\cot g(x)]_x'}_{u'}=$$

$$=tg(y)\cdot[\cot g(x)]^{tg(y)-1}\cdot\left[-\operatorname{cosec}^2(x)\cdot(x)_x'\right]=tg(y)\cdot[\cot g(x)]^{tg(y)-1}\cdot\left[-\frac{1}{sen^2(x)}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{p}{4};-\frac{p}{4}\right)=tg\left(-\frac{p}{4}\right)\cdot\left[\cot g\left(\frac{p}{4}\right)\right]^{tg\left(-\frac{p}{4}\right)-1}\cdot\left[-\frac{1}{sen^2\left(\frac{p}{4}\right)}\right]=-1\cdot 1^{-1-1}\cdot\left[-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right]=$$

$$=-1\cdot\left[-\frac{1}{\frac{2}{4}}\right]=-\left(-\frac{4}{2}\right)=2$$

$$\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial y}(x;y)=\left([\cot g(x)]^{tg(y)}\right)_y'={}^{9}\underbrace{[\cot g(x)]^{tg(y)}}_{a^u}\cdot\underbrace{(tg(y))_y'}_{u'}\cdot\underbrace{\ln[\cot g(x)]}_{\ln a}=$$

---

8 Aqui temos uma derivada do tipo: $\left(u^a\right)'=a\cdot u^{a-1}\cdot u'$

9 Aqui temos uma derivada do tipo: $\left(\frac{a^u}{\ln(a)}\right)'=a^u\cdot u'\Leftrightarrow\frac{1}{\ln(a)}\cdot\left(a^u\right)'=a^u\cdot u'\Leftrightarrow\left(a^u\right)'=a^u\cdot u'\cdot\ln(a)$

$$= [\cot g(x)]^{tg(y)} \cdot \left(\sec^2(y)\cdot(y)'_x\right)\cdot \ln[\cot g(x)] = [\cot g(x)]^{tg(y)} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2(y)}\right)\cdot \ln[\cot g(x)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{p}{4};-\frac{p}{4}\right) = \left[\cot g\left(\frac{p}{4}\right)\right]^{tg\left(-\frac{p}{4}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2\left(-\frac{p}{4}\right)}\right)\cdot \ln\left[\cot g\left(\frac{p}{4}\right)\right] = 1^{-1}\cdot\left[\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right]\cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} = 0$$

b) $\mathrm{i}(x;y) = e^x \cdot \ln\left(y^2 + 3x\right);\ P = (0;2)$

R:

$$\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial x}(x;y) = \left(e^x \cdot \ln\left(y^2+3x\right)\right)'_x = \left(e^x\right)'_x . \ln\left(y^2+3x\right) + e^x . \left(\ln\left(y^2+3x\right)\right)'_x =$$ [10]

$$= (x)'_x \cdot \left(e^x\right) . \ln\left(y^2+3x\right) + e^x . \frac{\left(y^2+3x\right)'_x}{y^2+3x} = e^x . \ln\left(y^2+3x\right) + e^x . \frac{3}{y^2+3x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x}(0;2) = e^0 . \ln\left(2^2+3\cdot 0\right) + e^0 . \frac{3}{2^2+3\cdot 0} = 1.\ln(4) + 1.\frac{3}{4} = \ln(4) + \frac{3}{4}$$

$$\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial y}(x;y) = \left(e^x \cdot \ln\left(y^2+3x\right)\right)'_y = \left(e^x\right)'_y . \ln\left(y^2+3x\right) + e^x . \left(\ln\left(y^2+3x\right)\right)'_y =$$

$$= e^x . \frac{\left(y^2+3x\right)'_y}{y^2+3x} = e^x . \frac{2y}{y^2+3x} \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial y}(0;2) = e^0 . \frac{2\cdot 2}{2^2+3\cdot 0} = 1\cdot\frac{4}{4} = 1$$

[10] $\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$ e $\left(\ln(u)\right)' = \frac{u'}{u}$

c) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3}{x^2+3y^2} & se{:}(x;y)\neq(0;0)\\ 0 & se{:}(x;y)=(0;0)\end{cases}$

R:

Para este tipo de casos teremos que transformar a função da seguinte forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2x^3}{x^2+3y^2}\right) & se{:}(x;y)\neq(0;0)\\ \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h;y_0)-f(0;0)}{h} & se{:}(x;y)=(0;0)\end{cases}\Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^3}{x^2+3y^2}\right)=\frac{(2x^3)'_x\cdot(x^2+3y^2)-2x^3\cdot(x^2+3y^2)'_x}{(x^2+3y^2)^2}=\frac{6x^2\cdot(x^2+3y^2)-2x^3\cdot 2x}{(x^2+3y^2)^2}=$ $=\frac{6x^4+18x^2y^2-4x^4}{(x^2+3y^2)^2}=\frac{2x^4+18x^2y^2}{(x^2+3y^2)^2}$ $f(0;0)=0\rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $(x;y)=(0;0)$ então a função assume o valor 0 (zero). $f(x;y)=\frac{2x^3}{x^2+3y^2}\Rightarrow f(0+h;0)=\frac{2h^3}{h^2+3\cdot 0^2}\Leftrightarrow f(h;0)=2h$ $\lim_{h\to 0}\frac{2h-0}{h}=\lim_{h\to 0}2=2$

$$¤\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\begin{cases}\dfrac{2x^4+18x^2y^2}{(x^2+3y^2)^2} & \text{se}:(x;y)\neq(0;0)\\ 2 & \text{se}:(x;y)=(0;0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2x^3}{x^2+3y^2}\right) & se{:}(x;y)\neq(0;0)\\ \lim_{k\to 0}\dfrac{f(x_0;y_0+k)-f(0;0)}{k} & se{:}(x;y)=(0;0)\end{cases}\Leftrightarrow ¤$$

CÁLCULOS AUXILIARES
$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x^3}{x^2+3y^2}\right)=\frac{(2x^3)'_y\cdot(x^2+3y^2)-2x^3\cdot(x^2+3y^2)'_y}{(x^2+3y^2)^2}=\frac{-2x^3\cdot 6y}{(x^2+3y^2)^2}=\frac{-12x^3y}{(x^2+3y^2)^2}$ $f(0;0)=0\rightarrow$ Atendendo ao que é apresentado no enunciado, se $(x;y)=(0;0)$ então a função assume o valor 0 (zero). $f(x;y)=\frac{2x^3}{x^2+3y^2}\Rightarrow f(0;0+k)=\frac{2\cdot 0^3}{0^2+3\cdot k^2}\Leftrightarrow f(0;k)=0$ $\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=\lim_{k\to 0}0=0$

$$¤\ \Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\begin{cases}\dfrac{-12x^3y}{(x^2+3y^2)^2} & \text{se}:(x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se}:(x;y)=(0;0)\end{cases}$$

8. Determine as derivadas parciais de 2ª ordem da função:

$$\mathrm{f}(x;y)=x^2(1+y^2+x^3)\Leftrightarrow \mathrm{f}(x;y)=x^2+x^2y^2+x^5$$

R:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=(x^2+x^2y^2+x^5)'_x=2x+2xy^2+5x^4\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=(2x+2xy^2+5x^4)'_x=2+2y^2+20x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\left(x^2+x^2y^2+x^5\right)_y^{'}=2x^2y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=\left(2x^2y\right)_y^{'}=2x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+2xy^2+5x^4\right)=4xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y\right)=4xy$$

Daqui se pode concluir que esta função verifica o teorema de Schwarz, isto é:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x;y)$$

9. Mostre que a função $f(x;y)=3x^2y-y^3$, é harmónica em $\Re^2$.

R:

Uma função diz-se harmónica quando: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ *sendo estas derivadas contínuas.*

Determinação das derivadas parciais de 1ª e de 2ª ordem da função:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\left(3x^2y\right)_x^{'}-\left(y^3\right)_x^{'}=6xy \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y)=\left(6xy\right)_x^{'}=6y$$

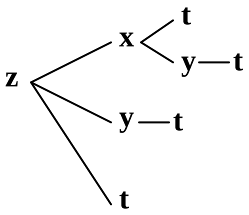
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\left(3x^2y\right)_y^{'}-\left(y^3\right)_y^{'}=3x^2-3y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y)=\left(3x^2\right)_y^{'}-\left(3y^2\right)_y^{'}=-6y$$

Como: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ e as derivadas são contínuas então a função é harmónica em $\Re^2$.

10. Sendo $z = txy^2$ **, onde** $x = t + \ln\left(y + t^2\right)$ **e** $y = e^t$ **, calcule** $\frac{\partial z}{\partial t}$ **e** $\frac{dz}{dt}$**.**

R:

Antes de mais vamos começar por representar o diagrama de derivadas da função:



$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial z}{\partial t}$$

Calculando as derivadas: $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(txy^2\right)'_x = ty^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(txy^2\right)'_y = 2txy$; $\frac{\partial z}{\partial t} = \left(txy^2\right)'_t = xy^2$

→ $\frac{\partial x}{\partial t} = \left(t + \ln\left(y + t^2\right)\right)'_t = (t)'_t + \left(\ln\left(y + t^2\right)\right)'_t = 1 + \frac{\left(y + t^2\right)'_t}{y + t^2} = 1 + \frac{2t}{y + t^2}$

→ $\frac{\partial y}{\partial t} = \left(e^t\right)'_t = (t)'_t \cdot e^t = e^t$

→ $\frac{\partial x}{\partial y} = \left(t + \ln\left(y + t^2\right)\right)'_y = (t)'_y + \left(\ln\left(y + t^2\right)\right)'_y = \frac{\left(y + t^2\right)'_y}{y + t^2} = \frac{1}{y + t^2}$

Logo teremos que: $\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial z}{\partial t} \Leftrightarrow$

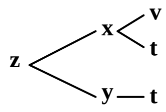
$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = \left(ty^2 \cdot \left(1 + \frac{2t}{y + t^2}\right)\right) + \left(ty^2 \cdot \frac{1}{y + t^2} \cdot e^t\right) + \left(2txy \cdot e^t\right) + xy^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = \left(ty^2 \cdot \left(1 + \frac{2t}{y + t^2}\right)\right) + \left(\frac{ty^2 \cdot e^t}{y + t^2}\right) + \left(2txy \cdot e^t\right) + xy^2$$

11. Seja $z = f(x;y)$**, onde** $x = 2v + \ln(t)$ **e** $y = \frac{1}{t}$**. Calcule:** $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ **e** $\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial t}$**.**

R:

Antes de mais vamos começar por representar o diagrama de derivadas da função:

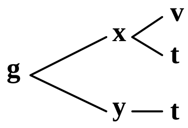


Para: $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, teremos que: $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) =$ [11] $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) =$ ¤

Sabendo que: $x = 2v + \ln(t)$, então teremos: $\frac{\partial x}{\partial v} = (2v + \ln(t))'_v = (2v)'_v + (\ln(t))'_v = 2 + 0 = 2$

Pelo que, por substituição em ¤ implicará o seguinte: ¤ $= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 2\right) = 2\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$ ¤

Admitindo que: $\frac{\partial z}{\partial x} = g(x;y)$ $\Rightarrow$



Logo, substituindo em ¤ implicará o seguinte: ¤ $= 2\cdot\frac{\partial}{\partial v}(g) =$ [12] $2\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) =$ ¤ ¤

Sabendo que: $x = 2v + \ln(t)$, então teremos: $\frac{\partial x}{\partial v} = (2v + \ln(t))'_v = (2v)'_v + (\ln(t))'_v = 2 + 0 = 2$

[11] Pela observação do esquema apresentado no início da resolução temos o seguinte desenvolvimento.

[12] Pela observação do segundo esquema apresentado temos o novo desenvolvimento.

Substituindo em ¤ ¤ implicará o seguinte: ¤ ¤ $= 2 \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x} \cdot 2 \right) = 4 \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) =$ ¤¤

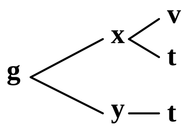
Uma vez que se admitiu: $\frac{\partial z}{\partial x} = g(x; y)$, então teremos que: ¤¤ $= 4 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 4 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

⌦ **Para:** $\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial t}$, teremos que: $\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) =$ [13] $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right) =$ ¤

Sabendo que: $x = 2v + \ln(t)$, então teremos: $\frac{\partial x}{\partial v} = (2v + \ln(t))'_v = (2v)'_v + (\ln(t))'_v = 2 + 0 = 2$

Pelo que, por substituição em ¤ implicará o seguinte: ¤ $= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot 2 \right) = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) =$ ¤

Admitindo que: $\frac{\partial z}{\partial x} = g(x; y)$ $\Rightarrow$



Logo, substituindo em ¤ implicará o seguinte: ¤ $= 2 \cdot \frac{\partial}{\partial t}(g) =$ [14] $2 \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right) =$ ¤ ¤

Sabendo que: $x = 2v + \ln(t)$ e $y = \frac{1}{t}$, então teremos:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (2v + \ln(t))'_t = (2v)'_t + (\ln(t))'_t = 0 + \frac{(t)'_t}{t} = \frac{1}{t} \qquad ; \qquad \frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{t} \right)'_t = \frac{(1)'_t \cdot t - 1 \cdot (t)'_t}{t^2} = -\frac{1}{t^2}$$

[13] Pela observação do esquema apresentado no início da resolução temos o seguinte desenvolvimento.

[14] Pela observação do segundo esquema apresentado temos o novo desenvolvimento.

Substituindo em ¤ ¤ implicará que: ¤ ¤ $= 2\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{1}{t}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right)=\frac{2}{t}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{2}{t^2}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}$ ¤¤

Uma vez que se admitiu que: $\frac{\partial z}{\partial x}=g(x;y)$, então teremos agora que:

$$¤¤ = \frac{2}{t}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{2}{t^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{2}{t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{2}{t^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

12. Seja f a função real definida por $f(x;y)=\begin{cases}\frac{5xy^3}{x^2+y^2} & \text{se}:(x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{se}:(x;y)=(0;0)\end{cases}$

a) Mostre que f admite derivadas parciais no ponto (0;0).

R:

Para a derivada em ordem a x teremos que transformar a função:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5xy^3}{x^2+y^2}\right) & se{:}(x;y)\neq(0;0)\\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h;y_0)-f(0;0)}{h} & se{:}(x;y)=(0;0)\end{cases}$$

Logo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{5xy^3}{x^2+y^2}\right)'_x=\left(\frac{(5xy^3)'_x\cdot(x^2+y^2)-(5xy^3)\cdot(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2}\right)=\left(\frac{5y^3\cdot(x^2+y^2)-(5xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{5x^2y^3+5y^5-10x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right)=\left(\frac{5y^5-5x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{5y^3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Sabendo que: $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h;y_0)-f(x_0;y_0)}{h}$, então no ponto (0;0) teremos que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h;0)-f(0;0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h;0)-f(0;0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{5h\cdot 0^3}{(h^2+0^2)}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

Assim sendo a derivada parcial em ordem a x será definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\begin{cases}\dfrac{5y^3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se}:(\text{x; y})\neq(0;0)\\ 0 & \text{se}:(\text{x; y})=(0;0)\end{cases}$$

Para a derivada em ordem a y teremos que transformar a função:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{5xy^3}{x^2+y^2}\right) & se:(x;y)\neq(0;0)\\ \lim_{k\to 0}\dfrac{f(x_0;y_0+k)-f(0;0)}{k} & se:(x;y)=(0;0)\end{cases}$$

Logo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{5xy^3}{x^2+y^2}\right)'_y=\left(\frac{(5xy^3)'_y\cdot(x^2+y^2)-(5xy^3)\cdot(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2}\right)=\left(\frac{15xy^2\cdot(x^2+y^2)-(5xy^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{15x^3y^2+15xy^4-10xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right)=\left(\frac{15x^3y^2+5xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{5xy^2\cdot(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Sabendo que: $\lim_{k\to 0}\dfrac{f(x_0;y_0+k)-f(x_0;y_0)}{k}$, então no ponto (0;0) teremos que:

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(0;0+k) - f(0;0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(0;k) - f(0;0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{5 \cdot 0 \cdot k^3}{(0^2 + k^2)} - 0}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0 - 0}{k} = 0$$

Assim sendo a derivada parcial em ordem a y será definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \begin{cases} \frac{5xy^2 \cdot (3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se}: (\text{x; y}) \neq (0;0) \\ 0 & \text{se}: (\text{x; y}) = (0;0) \end{cases}$$

b) Mostre que f é diferenciável no ponto (0;0).

R:

Uma função é diferenciável se $\frac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *forem funções continuas numa vizinhança do ponto (a;b)* – neste caso (0;0) – o que já está demonstrado na alínea a).

Mostrar que é diferenciável, implica a utilização directa da definição de limite, pelo que teremos para a *derivada em ordem a x*:

$$\forall_{e>0} \exists_{d>0} : (x;y) \in \Re^2 \wedge 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < d \Rightarrow \left| \frac{5y^3 \cdot (y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} - 0 \right| < e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall_{e>0} \exists_{d>0} : (x;y) \in \Re^2 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} < d \Rightarrow \left| \frac{5y^3 \cdot (y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right| < e$$

Logo: $\left| \frac{5y^3 \cdot (y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \frac{\left|5y^3 \cdot (y^2 - x^2)\right|}{\left|(x^2 + y^2)^2\right|} = \frac{5 \cdot (y^2 - x^2) \cdot |y^3|}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{5 \cdot (y^2 + x^2) \cdot |y^3|}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{5 \cdot |y^3|}{x^2 + y^2} =$

$$= \frac{5 \cdot |y|^2 \cdot |y|}{x^2 + y^2} = ¤$$

Sabendo que: $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Então teremos por substituição que:

$$¤ \;= \frac{5 \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{5 \cdot \left(x^2 + y^2\right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = 5 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \leq ?$$

Sabendo da definição que: $\sqrt{x^2 + y^2} < d$, então teremos por substituição que:

$? \leq 5 \cdot d = e \Rightarrow d = \frac{e}{5} \Rightarrow \forall_{e>0} \exists_{d=\frac{e}{5}>0} \Rightarrow$ Está então verificado que o limite da função é zero.

Conclusão: O limite existe logo a função é contínua no seu domínio porque se trata do quociente de duas funções polinomiais também elas continuas, logo é diferenciável.

Para a *derivada em ordem a y*, teremos então:

$$\forall_{e>0} \exists_{d>0} : (x;y) \in \Re^2 \wedge 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < d \Rightarrow \left| \frac{5xy^2 \cdot \left(3x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} - 0 \right| < e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall_{e>0} \exists_{d>0} : (x;y) \in \Re^2 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} < d \Rightarrow \left| \frac{5xy^2 \cdot \left(3x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \right| < e$$

Logo:

$$\left| \frac{5xy^2 \cdot \left(3x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \right| = \frac{\left|5xy^2 \cdot \left(3x^2 + y^2\right)\right|}{\left|\left(x^2 + y^2\right)^2\right|} \leq \frac{\left|5xy^2 \cdot \left(3x^2 + 3y^2\right)\right|}{\left|\left(x^2 + y^2\right)^2\right|} = \frac{\left|5xy^2 \cdot 3 \cdot \left(x^2 + y^2\right)\right|}{\left|\left(x^2 + y^2\right)^2\right|} =$$

$$= \frac{15 \cdot \left(x^2 + y^2\right) \cdot \left|xy^2\right|}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{15 \cdot |x| \cdot |y|^2}{x^2 + y^2} = ¤$$

Sabendo que: $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ e que: $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Então teremos por substituição que:

$$¤ \quad = \frac{15 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}{x^2 + y^2} = \frac{15 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} = 15 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \leq ?$$

Sabendo da definição que: $\sqrt{x^2 + y^2} < d$, então teremos por substituição que:

$? \leq 15 \cdot d = e \Rightarrow d = \dfrac{e}{15} \Rightarrow \forall_{e>0} \exists_{d=\frac{e}{15}>0} \Rightarrow$ Está então verificado que o limite da função é zero.

Conclusão: O limite existe logo a função é contínua no seu domínio porque se trata do quociente de duas funções polinomiais também elas continuas, logo é diferenciável.

13. Usando diferenciais, calcule um valor aproximado para: $\sqrt{9(1,85)^2 + (8,1)^2}$ **.**

R:

Antes de mais temos que obter uma função a partir da expressão dada, pelo que teremos:

$$\sqrt{9(1,85)^2 + (8,1)^2} \Rightarrow f(x; y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$$

Atendendo agora aos valores presentes na expressão concluímos que: $\begin{Bmatrix} 1,85 \cong 2 \Rightarrow x_0 = 2 \\ 8,1 \cong 8 \Rightarrow y_0 = 8 \end{Bmatrix}$

Sabendo da teoria que a aproximação de funções de variável real é dada por:

$$f(x + dx; y + dy) \approx df(x_0; y_0) + f(x_0; y_0), \text{ onde: } df(x_0; y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot dy$$

Então, quando (x;y) varia de (2;8) para (1,85;8,1) teremos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = 1{,}85 - 2 = -0{,}15 = -\dfrac{15}{100} \\ dy = 8{,}1 - 8 = 0{,}1 = \dfrac{1}{10} \end{array} \right\} \Rightarrow f(2-0{,}15;8+0{,}1) \approx df(2;8) + f(2;8) \Leftrightarrow$$ ¤

Antes de mais, podemos determinar o valor da função no ponto pedido pelo que:

$$f(2;8) = \sqrt{9 \cdot 2^2 + 8^2} = \sqrt{9 \cdot 4 + 64} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Vamos então determinar a diferencial: $df(2;8) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(2;8) \cdot dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(2;8) \cdot dy \Leftrightarrow$ ¤

Determinação das derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \left(\sqrt{9x^2+y^2}\right)'_x = \left(\left(9x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_x = \frac{1}{2} \cdot \left(9x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(9x^2+y^2\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(9x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 18x = \frac{18x}{2 \cdot \left(9x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{9x}{\sqrt{9x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2;8) = \frac{9 \cdot 2}{\sqrt{9 \cdot 2^2 + 8^2}} = \frac{18}{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \left(\sqrt{9x^2+y^2}\right)'_y = \left(\left(9x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_y = \frac{1}{2} \cdot \left(9x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(9x^2+y^2\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(9x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{2y}{2 \cdot \left(9x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{\sqrt{9x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2;8) = \frac{8}{\sqrt{9 \cdot 2^2 + 8^2}} = \frac{8}{10}$$

Substituindo então em ¤, teremos o seguinte:

$$df(2;8)=\frac{18}{10}\cdot\left(-\frac{15}{100}\right)+\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{10}\Leftrightarrow df(2;8)=-\frac{270}{1000}+\frac{8}{100}\Leftrightarrow df(2;8)=-\frac{270}{1000}+\frac{80}{1000}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow df(2;8)=-\frac{190}{1000}=-\frac{19}{100}=-0{,}19$$

Substituindo então os respectivos valores em ¤ , teremos: $f(1{,}85;8{,}1)\approx -0{,}19+10\approx 9{,}81$

14. Calcule as derivadas direccionais do seguinte campo escalar no ponto e segundo a direcção indicada: $f(x;y)=\frac{x}{y}-4yx$ **com:** $(a;b)=(0;2)$ **e** $\vec{u}=(1;2)$

R:

Sabendo que: $D_{\vec{u}}f(x_0;y_0)=\vec{\nabla}f(x_0;y_0)\cdot\vec{u}_{un}$

Determinando a norma do vector: $\vec{u}=(1;2)\Rightarrow\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

Teremos, o seguinte vector unitário: $\vec{u}_{un}\rightarrow\frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

Sabendo que o gradiente da função para qualquer ponto é dado por: $\vec{\nabla}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, então:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}-4yx\right)'_x=\left(\frac{x}{y}\right)'_x-(4yx)'_x=\left(\frac{(x)'_x\cdot y-x\cdot(y)'_x}{y^2}\right)-4y=\left(\frac{1\cdot y}{y^2}\right)-4y=\frac{1}{y}-4y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0;2)=\frac{1}{2}-4\cdot 2=\frac{1}{2}-8=-\frac{15}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}-4yx\right)_y^{'}=\left(\frac{x}{y}\right)_y^{'}-(4yx)_y^{'}=\left(\frac{(x)_y^{'}\cdot y-x\cdot(y)_y^{'}}{y^2}\right)-4x=-\frac{x}{y^2}-4x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0;2)=-\frac{0}{2^2}-4\cdot 0=-0-0=0$$

Logo, o gradiente da função no ponto (0;2) será: $\vec{\nabla} f(0;2)=\left(-\frac{15}{2};0\right)$

Pelo que teremos: $D_{\vec{u}} f(0;2)=\vec{\nabla} f(0;2)\cdot\vec{u}_{un}\Leftrightarrow D_{\vec{u}} f(0;2)=\left(-\frac{15}{2};0\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow D_{\vec{u}} f(0;2)=\left(-\frac{15}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\left(0\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\Leftrightarrow D_{\vec{u}} f(0;2)=-\frac{15\sqrt{5}}{10}=-\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

15. Considere a equação $1+y=x^2-\ln(y)$

a) Mostre que a equação dada define y como função implícita de x numa vizinhança do ponto $\left(\sqrt{2};1\right)$**.**

R:

Para determinar o que nos é pedido temos que antes de mais passar todos os elementos para o primeiro membro:

$$1+y=x^2-\ln(y)\Leftrightarrow 1+y-x^2+\ln(y)=0\Leftrightarrow\underbrace{y+\ln(y)-x^2+1}_{F(x;y)}=0\Rightarrow F(x;y)=0$$

Agora temos que verificar os seguintes itens:

i) **Verificar se:** $F(x_0;y_0)=0$ **é verdade;**

R: $F\left(\sqrt{2};1\right)=1+\ln(1)-\left(\sqrt{2}\right)^2+1=1+0-2+1=0 \Rightarrow F\left(\sqrt{2};1\right)=0 \rightarrow$ É verdade.

ii) **Verificar se as derivadas parciais são continuas na vizinhança de** $(x_0;y_0)$**;**

R: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0)=\left(y+\ln(y)-x^2+1\right)'_x=-2x \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)=\left(y+\ln(y)-x^2+1\right)'_y=1+\dfrac{1}{y} \end{array}\right\} \Rightarrow$

As derivadas parciais resultam em funções polinomiais contínuas, logo as derivadas são contínuas.

iii) Verificar se: $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)\neq 0$**.**

R: $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)=1+\dfrac{1}{y} \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\sqrt{2};1\right)=1+\dfrac{1}{1}=2\neq 0$

Conclusão: A equação dada define y como função implícita de x.

b) Determine $\dfrac{dy}{dx}\left(\sqrt{2}\right)$**.**

R:

$$\frac{dy}{dx}\left(\sqrt{2}\right)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\left(\sqrt{2};1\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\sqrt{2};1\right)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\left(\sqrt{2}\right)=-\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{1+\frac{1}{1}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\left(\sqrt{2}\right)=-\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$$

16. Mostre que o sistema $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ **define implicitamente y e z como funções de x na vizinhança de** $P=(1;2;-1)$**. Determine o valor de** $\frac{dy}{dx}$ **e** $\frac{d^2y}{dx^2}$ **nesse ponto.**

R:

Para este tipo de casos teremos que verificar as seguintes três condições:

i) Verificar se $f(x_0;y_0;z_0)=0$ **é verdade;**

R: $$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(1;2;-1)=0 \\ f_2(1;2;-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2+2^2+(-1)^2-6=0 \\ 1-2-(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \checkmark$$

ii) Sabendo que: $\{y=f(x)\wedge z=f(x)\}$[15]**. Verificar se o valor do seu determinante no ponto P é diferente de zero;**

R: $$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^2+y^2+z^2-6)'_y & (x^2+y^2+z^2-6)'_z \\ (x-y-z)'_y & (x-y-z)'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2z \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

O determinante no ponto $(1;2;-1)$ será dado por:

$$\Delta(1;2;-1)=\begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Delta(1;2;-1)=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Delta(1;2;-1)=(4\times(-1))-(-1\times(-2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta(1;2;-1)=-6\neq 0$$

[15] No enunciado é dito que **y e z, são funções de x,** logo temos esta igualdade.

iii) Determinar as derivadas totais de cada ramo da função em ordem a x.

R: $\begin{cases} \dfrac{df_1}{dx}=0 \\ \dfrac{df_2}{dx}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(x^2+y^2+z^2-6\right)=0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(x-y-z\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(x^2\right)+\dfrac{d}{dx}\left(y^2\right)+\dfrac{d}{dx}\left(z^2\right)-\dfrac{d6}{dx}=0 \\ \dfrac{dx}{dx}-\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$[16]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\cdot\dfrac{dx}{dx}+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}-0=0 \\ \dfrac{dx}{dx}-\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\cdot 1+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 1-\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dz}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y\cdot\left(1-\dfrac{dz}{dx}\right)+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dz}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-2y\cdot\dfrac{dz}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dz}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=2y\cdot\dfrac{dz}{dx}-2z\cdot\dfrac{dz}{dx} \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dz}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=\dfrac{dz}{dx}\cdot\left(2y-2z\right) \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dz}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x+2y}{2y-2z} \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dz}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x+2y}{2y-2z} \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{2x+2y}{2y-2z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x+2y}{2y-2z} \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y-2z}{2y-2z}-\dfrac{2x+2y}{2y-2z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x+2y}{2y-2z} \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x-2z}{2y-2z} \end{cases}$$

---

[16] As derivadas aqui são do tipo: $\left(u^a\right)'=a\cdot u^{a-1}\cdot u'$

Assim sendo teremos que: $\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-2z}{2y-2z}\Rightarrow\frac{dy}{dx}(1;2;-1)=\frac{-2\cdot1-2\cdot(-1)}{2\cdot2-2\cdot(-1)}=0$

Sabendo que: $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Então teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{-2x-2z}{2y-2z}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(-2x-2z)\cdot(2y-2z)-(-2x-2z)\cdot\frac{d}{dx}(2y-2z)}{(2y-2z)^2}=$$

$$=\frac{\left(-2\cdot\frac{dx}{dx}-2\cdot\frac{dz}{dx}\right)\cdot(2y-2z)+(2x+2z)\cdot\left(2\cdot\frac{dy}{dx}-2\cdot\frac{dz}{dx}\right)}{(2y-2z)^2}=$$ [17]

$$=\frac{\left(-2\cdot1-2\cdot\frac{2x+2y}{2y-2z}\right)\cdot(2y-2z)+(2x+2z)\cdot\left(2\cdot\frac{-2x-2z}{2y-2z}-2\cdot\frac{2x+2y}{2y-2z}\right)}{(2y-2z)^2}=(\ldots)$$

$$=\frac{-16x^2-16xy-16xz-16y^2+16yz-16z^2}{(2y-2z)^3}$$

Logo, para o ponto (1;2;-1), teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-16x^2-16xy-16xz-16y^2+16yz-16z^2}{(2y-2z)^3}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}(1;2;-1)=\frac{-144}{216}$$

[17] Como $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$, já foram calculados anteriormente, então basta substituir pelos respectivos valores.

17. Determine as equações do plano tangente e da recta normal ao gráfico da função dada no ponto: $4x^2+2y^2+z^3=9$ **em** $(1;4;z_0)$

R:

Antes de mais vamos começar por rearranjar a expressão dada:

$$4x^2+2y^2+z^3=9 \Leftrightarrow 4x^2+2y^2+z^3-9=0 \Leftrightarrow F(x;y;z)=0$$

Posto isto e, sabendo que temos actualmente apenas as coordenadas em x_0 e em y_0, vamos determinar em seguida o valor da coordenada z_0:

$$z_0=\sqrt[3]{9-4x_0{}^2-2y_0{}^2} \Leftrightarrow z_0=\sqrt[3]{9-4\cdot 1^2-2\cdot 4^2} \Leftrightarrow z_0=\sqrt[3]{9-4-2\cdot 16} \Leftrightarrow z_0=\sqrt[3]{-27} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_0=\sqrt[3]{-3^3} \Leftrightarrow z_0=-3 \Rightarrow (x_0;y_0;z_0)=(1;4;-3)$$

Agora teremos que determinar as primeiras derivadas de $F(x;y;z)$ para posteriormente as substituir nas equações pedidas:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x;y;z)=\left(4x^2+2y^2+z^3-9\right)'_x=8x \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1;4;-3)=8\cdot 1=8$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x;y;z)=\left(4x^2+2y^2+z^3-9\right)'_y=4y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(1;4;-3)=4\cdot 4=16$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x;y;z)=\left(4x^2+2y^2+z^3-9\right)'_z=3z^2 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(1;4;-3)=3\cdot(-3)^2=27$$

Assim sendo, teremos então que:

→ Equação do **plano tangente** à superfície de equação $F(x;y;z)=0$, em: $P=(1;4;-3)$;

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P)\cdot(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\cdot(x-1)+16\cdot(y-4)+27\cdot(z-(-3))=0 \Leftrightarrow 8\cdot(x-1)+16\cdot(y-4)+27\cdot(z+3)=0$$

→ Equação da **recta normal** ao gráfico de $F(x;y;z)=0$, em: $P=(1;4;-3)$;

$$\frac{(x-x_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(P)}=\frac{(y-y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)}=\frac{(z-z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)} \Leftrightarrow \frac{(x-1)}{8}=\frac{(y-4)}{16}=\frac{(z+3)}{27}$$

18. Seja $\vec{v}(x;y)=x\cdot\vec{e}_1+tg(y)\cdot\vec{e}_2$ um campo vectorial. Calcule a função real f, com derivadas parciais contínuas no seu domínio, tal que $\vec{v}$ seja um "campo de gradientes".

R:

Uma vez que: $\vec{v}(x;y)=\vec{\nabla} f(x;y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\cdot\vec{e}_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\cdot\vec{e}_2=\left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Então, por equivalência directa com o campo vectorial dado no enunciado, teremos que:

$$\vec{v}(x;y)=\vec{\nabla} f(x;y)=x\cdot\vec{e}_1+tg(y)\cdot\vec{e}_2=(x;tg(y))$$

Assim sendo teremos então que: $\left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = tg(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f(x;y) = \dfrac{x^2}{2} + j(y) \\ f(x;y) = -\ln\left|\cos(y)\right| + f(x) \end{matrix}\right\}$

Pelo que a função será dada por: $f(x;y) = \dfrac{x^2}{2} - \ln\left|\cos(y)\right| + C$

19. Nota teórica:

- A **matriz Jacobiana** é dada por: $J = \begin{bmatrix} \overbrace{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}}^{+} & \overbrace{\dfrac{\partial f_1}{\partial y}}^{-} & \overbrace{\dfrac{\partial f_1}{\partial z}}^{+} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}$ e o **Jacobiano é dado pelo determinante da matriz Jacobiana**.

- A **matriz Hessiana** é dada por: $H = \begin{bmatrix} \overbrace{\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}}^{+} & \overbrace{\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}}^{-} & \overbrace{\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z}}^{+} \\ \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} \end{bmatrix}$ e o **Hessiano é dado pelo determinante da matriz Hessiana**.

O **polinómio de Taylor** para qualquer ordem n, pode ser obtido recorrendo à seguinte pirâmide de derivadas (neste caso construída até à ordem n = 3):

$$1\cdot f(x;y)$$

$$1\cdot\frac{\partial f}{\partial x} \qquad\qquad 1\cdot\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$1\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \qquad 1\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$1\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \qquad 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} \qquad 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} \qquad 1\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

Daqui resulta a seguinte fórmula de Taylor (até à ordem n = 3, neste caso):

$$F(x;y)=F(a;b)+\left[\frac{\partial F}{\partial x}(a;b)\cdot(x-a)+\frac{\partial F}{\partial y}(a;b)\cdot(y-b)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a;b)\cdot(x-a)^2+2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(a;b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a;b)\cdot(y-b)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\left[\begin{array}{l}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(a;b)\cdot(x-a)^3+3\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}(a;b)\cdot(x-a)^2\cdot(y-b)+3\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}(a;b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)^2+\\ +\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}(a;b)\cdot(y-b)^3\end{array}\right]+R_{n=3}$$

Pontos Críticos ou Pontos Extremos de Funções		
Sem restrições		**Com restrições**
$\Delta>0\wedge f''(a;b)>0\rightarrow$ Ponto mínimo; $\Delta>0\wedge f''(a;b)<0\rightarrow$ Ponto Máximo;	$\Delta<0\rightarrow$ Ponto de sela; $\Delta=0\rightarrow$ Nada se pode concluir;	$\Delta>0\rightarrow$ Ponto Máximo; $\Delta<0\rightarrow$ Ponto mínimo;

20. Determine e classifique os pontos críticos da função: $f(x;y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$

R:

i) Condições de 1ª ordem: $\vec{\nabla} f(x;y) = \vec{0}$ **;**

$$\vec{\nabla} f(x;y) = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0;0) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ f_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ O ponto crítico é: $(2;-1)$

ii) Condições de 2ª ordem;

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(2x - 4) & \dfrac{\partial}{\partial y}(2x - 4) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(4y + 4) & \dfrac{\partial}{\partial y}(4y + 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Então: $H(2;-1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Assim sendo teremos então que: $\Delta = \det \begin{array}{c} \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array} = (2 \times 4) - (0 \times 0) = 8$

Conclusão: Como: $\Delta = 8 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2;-1) = 2 > 0$, então $f(2;-1)$ é mínimo relativo.

21. Determine os máximos e os mínimos da função: $f(x;y)=x^2+3y^2$ com as variáveis sujeitas à restrição: $x+y=20$.

R:

Sabendo que: $x+y=20 \Leftrightarrow \underbrace{x+y-20}_{j(x;y)}=0 \Leftrightarrow j(x;y)=0$

E que: $F(x;y;l)=f(x;y)+l\cdot j(x;y) \Rightarrow F(x;y;l)=(x^2+3y^2)+l\cdot(x+y-20)$

Então teremos que:

i) Condições de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} F=\vec{0} \\ \text{Restrição} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0 \\ x+y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left((x^2+3y^2)+(lx+ly-20l)\right)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left((x^2+3y^2)+(lx+ly-20l)\right)=0 \\ x+y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+l=0 \\ 6y+l=0 \\ x+y=20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{l}{2} \\ y=-\dfrac{l}{6} \\ -\dfrac{l}{2}+\left(-\dfrac{l}{6}\right)=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -------- \\ -------- \\ \dfrac{-6l-2l}{12}=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -------- \\ -------- \\ -8l=12\cdot 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -------- \\ -------- \\ l=\dfrac{12\cdot 20}{-8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -------- \\ -------- \\ l=\dfrac{3\cdot 20}{-2}=3\cdot(-10)=-30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{-30}{2} \\ y=-\dfrac{-30}{6} \\ l=-30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=5 \\ l=-30 \end{cases} \Rightarrow \text{Ponto crítico: } (15;5;-30)$$

ii) Condições de 2ª ordem (matriz Hessiana orlada $\overline{H}$):

$$\overline{H}=\begin{bmatrix}0 & \frac{\partial j}{\partial x} & \frac{\partial j}{\partial y}\\ \frac{\partial j}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial j}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\end{bmatrix}\Leftrightarrow \overline{H}=\begin{bmatrix}0 & \frac{\partial}{\partial x}(x+y-20) & \frac{\partial}{\partial y}(x+y-20)\\ \frac{\partial}{\partial x}(x+y-20) & \frac{\partial}{\partial x}(2x+l) & \frac{\partial}{\partial y}(2x+l)\\ \frac{\partial}{\partial y}(x+y-20) & \frac{\partial}{\partial x}(6y+l) & \frac{\partial}{\partial y}(6y+l)\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{H}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

Assim sendo:

$$\Delta=\det\left|\overline{H}\right|=\det\begin{array}{c}\begin{matrix}+ & - & +\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 6\end{bmatrix}\end{array}=\underbrace{0\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}}_{=0}\underbrace{-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 6\end{vmatrix}}_{=-6}+\underbrace{1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}}_{=-2}=-6-2=-8$$

Ora, neste tipo de casos, quando $\Delta<0\Rightarrow$ Ponto mínimo, pelo que:

$\Delta=-8<0\Rightarrow$ o ponto $(15;5;-30)$ é ponto mínimo.

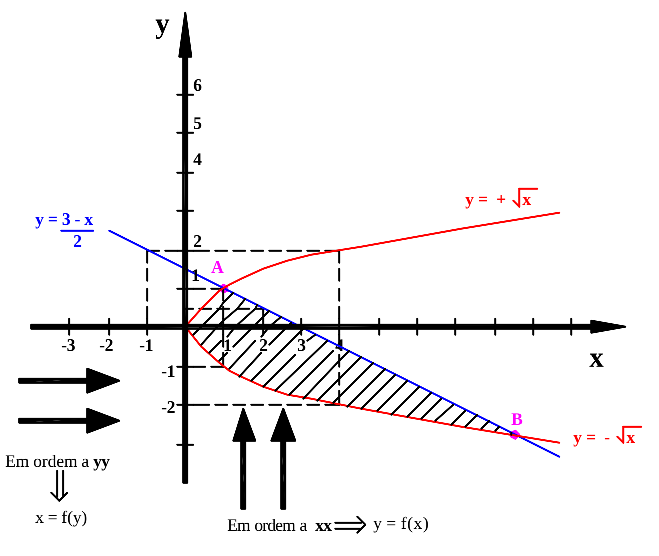
22. Coloque os limites de integração no integral duplo $\iint\limits_S f(x;y)dxdy$. O campo S está definido pela seguinte desigualdade: $y^2 \leq x$ e $x \leq 3-2y$

R:

Antes de mais, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades:

Expressão VS. Descrição	Valores					
$y^2 \leq x \Rightarrow y^2 = x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x} \Rightarrow$ Parábola.	x	**0**	**1**	**4**		
	$y = \pm\sqrt{x}$	± 0	± 1	± 2		
$x \leq 3-2y \Rightarrow y = \dfrac{3-x}{2} \Rightarrow$ Recta obliqua.	x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
	$y = \dfrac{3-x}{2}$	5/2	2	3/2	1	1/2

Gráfico e respectiva Área resultante	Pontos de intersecção



Pontos A e B:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3-x}{2} \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{3-x}{2} \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(\dfrac{3-x}{2}\right)^2 \\ ---------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{(3-x)^2}{4} \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 9-6x+x^2 \\ -------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-10x+9=0 \\ -------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\times1\times9}}{2\times1} \\ ------------------ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10\pm\sqrt{64}}{2} \\ ------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10\pm 8}{2} \\ ------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10+8}{2} \vee x=\dfrac{10-8}{2} \\ ------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \vee x=1 \\ y=\sqrt{9} \vee y=\sqrt{1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \vee x=1 \\ y=3 \vee y=1 \end{cases} \Rightarrow A=(1;1) \text{ e } B=(9;-3)$$ → pelo observado no gráfico.

Limites de integração

Em ordem a x: $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x;y)dydx+\int_{1}^{9}\int_{-\sqrt{x}}^{\left(\frac{3-x}{2}\right)} f(x;y)dydx$

Em ordem a y: $\int_{-3}^{1}\int_{y^2}^{(3-2y)} f(x;y)dxdy$

23. Inverta a ordem de integração do seguinte integral: $\int_{0}^{4}\int_{3x^2}^{12x} f(x;y)dydx$

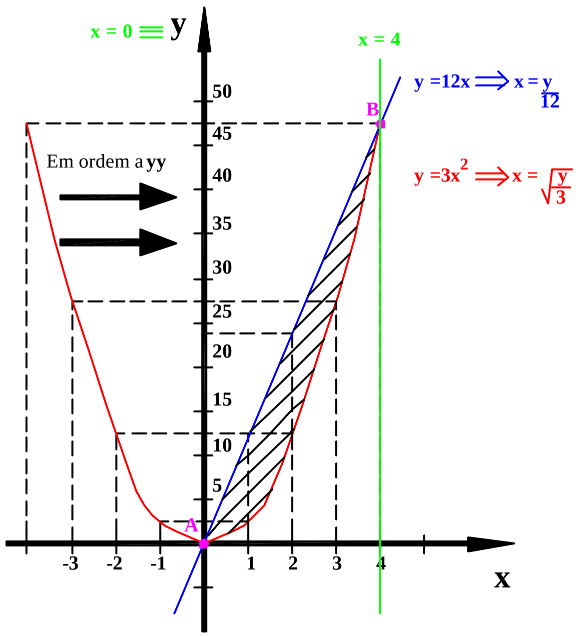
R:

Sabendo que: $\int_{0}^{4}\int_{3x^2}^{12x} f(x;y)dydx=\int_{x=0}^{x=4}\int_{y=3x^2}^{y=12x} f(x;y)dydx \Rightarrow \begin{cases} 0\le x\le 4 \\ 3x^2\le y\le 12x \end{cases}$

Então, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades:

<table>
<tr><th>Expressão VS. Descrição</th><th colspan="6">Valores</th></tr>
<tr><td colspan="7">$x\ge 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ Recta coincidente com o eixo dos y.
$x\le 4 \Rightarrow x=4 \Rightarrow$ Recta paralela ao eixo dos y.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y\ge 3x^2 \Rightarrow y=3x^2 \Rightarrow$ Parábola.</td><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$y=3x^2$</td><td>12</td><td>3</td><td>0</td><td>3</td><td>12</td></tr>
</table>

$y \le 12x \Rightarrow y = 12x \Rightarrow$ Recta obliqua.	x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
	$y = 12x$	-24	-12	0	12	24

Gráfico e respectiva Área resultante	Pontos de intersecção
	Pontos A e B: $\begin{cases} x = \frac{y}{12} \\ x = \sqrt{\frac{y}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ----- \\ \left(\frac{y}{12}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{y}{3}}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} ----- \\ \frac{y^2}{12^2} = \frac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ----- \\ 3y^2 - 144y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{12} \\ y \cdot (3y - 144) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 4 \\ \Uparrow \quad\quad \Uparrow \\ y = 0 \vee y = 48 \end{cases} \Rightarrow$ $\underbrace{A = (0;0)}_{\text{Pelo que se pode ver no gráfico}}$ e $\underbrace{B = (4;48)}_{\text{Pelo que se pode ver no gráfico}}$

O que é dado no enunciado é em ordem a x: $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x;y)\,dydx$

O que se pretende é inverter para em ordem a y: $\int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x;y)\,dxdy$

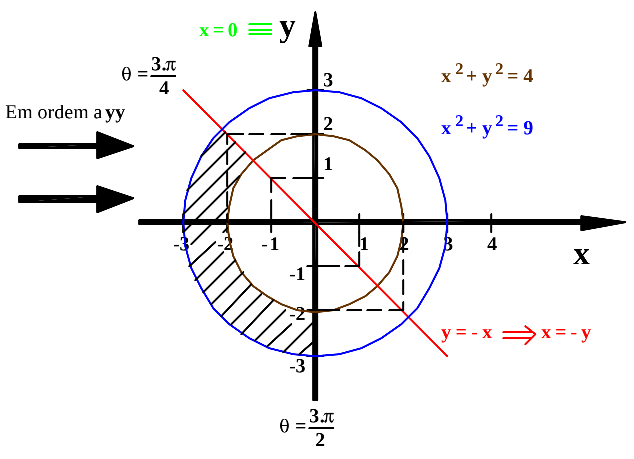
24. Calcule os integrais duplos:

a) $\iint_A \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$, **onde:** $A=\left\{(x;y)\in\Re^2 : 4\le x^2+y^2\le 9\ ;\ y\le -x\ ;\ x\le 0\right\}$

R:

Antes de mais, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades do domínio A:

<table>
<tr><th>Expressão VS. Descrição</th><th colspan="6">Valores</th></tr>
<tr><td colspan="7">$x^2+y^2\ge 4\Rightarrow x^2+y^2=4\Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{4}=2$.</td></tr>
<tr><td colspan="7">$x^2+y^2\le 9\Rightarrow x^2+y^2=9\Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{9}=3$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y\le -x\Rightarrow y=-x\Rightarrow$ Recta obliqua.</td><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$y=-x$</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>-2</td></tr>
<tr><td colspan="7">$x\le 0\Rightarrow x=0\Rightarrow$ Recta coincidente com o eixo dos y.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Gráfico e respectiva Área resultante</th><th>ATENÇÃO!!!</th></tr>
<tr><td>


</td><td>
Sempre que a área em estudo assume a forma de circunferências, anéis ou cilindros, temos que recorrer sempre a uma mudança de variáveis para coordenadas polares, onde:
$\begin{cases} x=r\cdot\cos q \\ y=r\cdot sen q\end{cases}\ ;\ |J|=r$
Sendo: $r\rightarrow raio$ (sempre positivo);
$q\rightarrow$ ângulo abrangido pela área;
</td></tr>
</table>

Do gráfico conclui-se: $\begin{cases} 2 \le r \le 3 \\ \dfrac{3\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$. Para a mudança de coordenadas: $\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot sen\theta \end{cases}$, teremos:

$$f(x;y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f(r \cdot \cos\theta; r \cdot sen\theta) = (r \cdot \cos\theta)^2 + (r \cdot sen\theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(r \cdot \cos\theta; r \cdot sen\theta) = r^2 \cdot \cos^2\theta + r^2 \cdot sen^2\theta \Leftrightarrow f(r \cdot \cos\theta; r \cdot sen\theta) = r^2 \cdot \underbrace{(\cos^2\theta + sen^2\theta)}_{=1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(r \cdot \cos\theta; r \cdot sen\theta) = r^2$$

Assim sendo, o integral e respectivos limites de integração para a área obtida será o seguinte:

$$\iint_A \ln(x^2 + y^2)\,dxdy \equiv \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_2^3 \left[\underbrace{\ln(r^2)}_{u} \cdot \underbrace{r}_{v'} \right] dr\,d\theta =^{18} ✧$$

Cálculos Auxiliares para a Integração por Partes
$\left\{\begin{array}{l} u = \ln r^2 \Rightarrow u' = \dfrac{(r^2)'}{r^2} = \dfrac{2r}{r^2} = \dfrac{2}{r} \\ v' = r \Rightarrow v = \dfrac{r^{1+1}}{1+1} = \dfrac{r^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P(u \cdot v') = u \cdot v - P(u' \cdot v) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P(\ln r^2 \cdot r) = \ln r^2 \cdot \dfrac{r^2}{2} - P\left(\dfrac{2}{r} \cdot \dfrac{r^2}{2}\right) = \dfrac{r^2}{2} \cdot \ln r^2 - P(r) = \dfrac{r^2}{2} \cdot \ln r^2 - \dfrac{r^2}{2} = \dfrac{r^2}{2} \cdot (\ln r^2 - 1)$

[18] $P(u \cdot v') = u \cdot v - P(u' \cdot v) \longrightarrow$ Primitivação por partes.

Assim sendo e por substituição directa em ✧ teremos que:

✧ $= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[\frac{\rho^2}{2} \cdot \left(\ln \rho^2 - 1 \right) \right]_2^3 d\theta = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[\frac{3^2}{2} \cdot \left(\ln 3^2 - 1 \right) - \frac{2^2}{2} \cdot \left(\ln 2^2 - 1 \right) \right] d\theta =$

$$= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[\frac{9}{2} \cdot (\ln 9 - 1) - 2 \cdot (\ln 4 - 1) \right] d\theta = \left[\frac{9}{2} \cdot (\ln 9 - 1) - 2 \cdot (\ln 4 - 1) \right] \cdot \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} 1 d\theta =$$

$$= \left[\frac{9}{2} \cdot (\ln 9 - 1) - 2 \cdot (\ln 4 - 1) \right] \cdot [\theta]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} = \left[\frac{9}{2} \cdot (\ln 9 - 1) - 2 \cdot (\ln 4 - 1) \right] \cdot \left[\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} \right] =$$

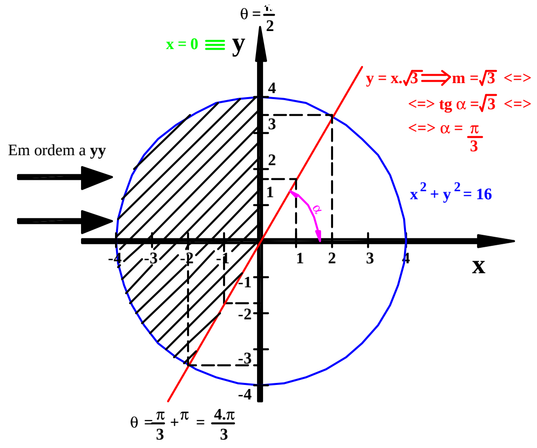
$$= \left[\frac{9}{2} \cdot (\ln 9 - 1) - 2 \cdot (\ln 4 - 1) \right] \cdot \left[\frac{6\pi - 3\pi}{4} \right] = \left[\frac{9}{2} \cdot (\ln 9 - 1) - 2 \cdot (\ln 4 - 1) \right] \cdot \left[\frac{3\pi}{4} \right]$$

b) $\iint_B \left(e^{1+x^2+y^2} \right) dxdy$**, onde:** $B = \left\{ (x;y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \leq 16 \ ; \ y \geq x\sqrt{3} \ ; \ x \leq 0 \right\}$

R:

Antes de mais, vamos começar por descrever cada uma das desigualdades do domínio A:

<table>
<tr><td>Expressão VS. Descrição</td><td colspan="6">Valores</td></tr>
<tr><td colspan="7">$x^2 + y^2 \leq 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $\sqrt{16} = 4$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y \geq x\sqrt{3} \Rightarrow y = x\sqrt{3} \Rightarrow$ Recta obliqua.</td><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$y = x\sqrt{3}$</td><td>$-2\sqrt{3}$</td><td>$-\sqrt{3}$</td><td>0</td><td>$-\sqrt{3}$</td><td>$2\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$x \leq 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ Recta coincidente com o eixo dos y.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Gráfico e respectiva Área resultante</th><th>ATENÇÃO!!!</th></tr>
<tr><td>


19
</td><td>
Mudança de variáveis para coordenadas polares, onde:

$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$; $|J| = r$

Sendo: $r \rightarrow raio$ (sempre positivo);

$\theta \rightarrow$ ângulo abrangido pela área;
</td></tr>
</table>

Do gráfico conclui-se: $\begin{cases} 0 \le r \le 4 \\ \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$. Para a mudança de coordenadas: $\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$, teremos:

$$f(x;y) = e^{1+x^2+y^2} \Rightarrow f(r \cdot \cos\theta; r \cdot \operatorname{sen}\theta) = e^{1+(r\cdot\cos\theta)^2+(r\cdot\operatorname{sen}\theta)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(r \cdot \cos\theta; r \cdot \operatorname{sen}\theta) = e^{1+r^2\cdot\underbrace{(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}_{=1}} \Leftrightarrow f(r \cdot \cos\theta; r \cdot \operatorname{sen}\theta) = e^{1+r^2}$$

19

α	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
	30º	45º	60º
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Assim sendo, o integral e respectivos limites de integração para a área obtida será o seguinte:

$$\iint_B \left(e^{1+x^2+y^2}\right)dxdy \equiv \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}} \int_0^4 \left[e^{1-r^2}\cdot r\right]drdq = \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}} -\frac{1}{2}\cdot\int_0^4 \left[\underbrace{e^{1-r^2}}_{e^u}\cdot\underbrace{(-2r)}_{u'}\right]drdq = \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}} -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{1-r^2}\right]_0^4 dq =$$

$$= \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}} -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{1-4^2}-e^{1-0^2}\right]dq = \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}} -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-15}-e^{1}\right]dq = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-15}-e^{1}\right]\cdot\int_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}} 1dq = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-15}-e^{1}\right]\cdot\left[q\right]_{\frac{p}{2}}^{\frac{4p}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-15}-e^{1}\right]\cdot\left[\frac{4p}{3}-\frac{p}{2}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-15}-e^{1}\right]\cdot\left[\frac{8p-3p}{6}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-15}-e^{1}\right]\cdot\left[\frac{5p}{6}\right]$$

c) $\iint_C \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$ **, onde:** $C=\left\{(x;y)\in\Re^2 : x^2+y^2\leq 2x\right\}$

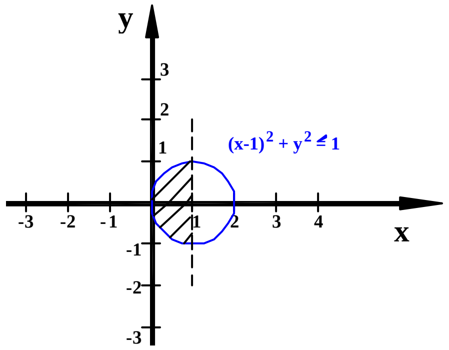
R:

Perante esta desigualdade, teremos que antes de mais proceder ao seu rearranjo:

$$x^2+y^2\leq 2x \Rightarrow x^2+y^2=2x \Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0 \Leftrightarrow^{20} \left(x^2-2x+y^2\right)+1=(0)+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x+1\right)+y^2=1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow Circunferência\begin{cases} Centro \rightarrow (1;0) \\ Raio \rightarrow \sqrt{1}=1 \end{cases}$$

[20] Somar e subtrair o mesmo valor em ambos os membros de uma mesma expressão nunca altera o resultado final. Neste caso procedeu-se a este passo para conseguir obter a expressão: $(x-1)^2$

Gráfico e respectiva Área resultante	ATENÇÃO!!!
	*Mudança de variáveis para coordenadas polares, onde:* $\left\{\begin{matrix} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot sen q \end{matrix}\right\}$; $\lvert J \rvert = r$

Uma vez que a circunferência está descentrada em relação à origem, então teremos que:

$$\left\{\begin{matrix} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot sen q \\ x^2 + y^2 = 2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow (r \cdot \cos q)^2 + (r \cdot sen q)^2 = 2 \cdot (r \cdot \cos q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (r^2 \cdot \cos^2 q) + (r^2 \cdot sen^2 q) = 2 \cdot r \cdot \cos q \Leftrightarrow r^2 \cdot \underbrace{(\cos^2 q \cdot sen^2 q)}_{=1} = 2 \cdot r \cdot \cos q \Leftrightarrow r = 2 \cdot \cos q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{2 \cdot \cos q}{2} \Leftrightarrow r = \cos q$$ → porque a área é apenas metade da circunferência.

Uma vez que **a circunferência está descentrada e situada nos, 1º e 4º quadrantes**, então teremos que: $\left\{ 0 \leq r \leq \cos q \quad \wedge \quad -\frac{p}{2} \leq q \leq \frac{p}{2} \right\}$

Sabendo ainda que para a mudança de coordenadas: $\left\{\begin{matrix} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot sen q \end{matrix}\right\}$, teremos que:

$$f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow f(r \cdot \cos q; r \cdot sen q) = \sqrt{(r \cdot \cos q)^2 + (r \cdot sen q)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(r \cdot \cos q; r \cdot sen q) = \sqrt{r^2 \cdot \underbrace{(\cos^2 q + sen^2 q)}_{=1}} = \sqrt{r^2} = r$$

Assim sendo, o integral e respectivos limites de integração serão:

$$\iint_C \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy \equiv \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \int_0^{\cos q} [r \cdot r]\,dr dq = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \int_0^{\cos q} [r^2]\,dr dq = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left[\frac{r^{2+1}}{2+1}\right]_0^{\cos q} dq =$$

$$= \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left[\frac{(\cos q)^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] dq = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left[\frac{\cos^3 q}{3}\right] dq = \frac{1}{3} \cdot \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left(\cos^3 q\right) dq = \frac{1}{3} \cdot \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \cos q \cdot \left(\cos^2 q\right) dq =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \cos q \cdot \left(1 - sen^2 q\right) dq = \frac{1}{3} \cdot \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} (\cos q)\,dq - \frac{1}{3} \cdot \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left(\underbrace{\cos q}_{u'} \cdot \underbrace{sen^2 q}_{u^a}\right) dq =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot [-sen q]_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{sen^{2+1} q}{2+1}\right]_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \left[-sen\frac{p}{2} - \left(-sen\left(-\frac{p}{2}\right)\right)\right] - \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{sen^3 \frac{p}{2}}{3} - \frac{sen^3\left(-\frac{p}{2}\right)}{3}\right] = -\frac{2}{3}$$

25. Determine o volume dos seguintes sólidos:

a) O sólido limitado pelas superfícies: $x^2+z^2=4$ **e pelos planos:** $y=1$ **e** $y=4$**.**

R:

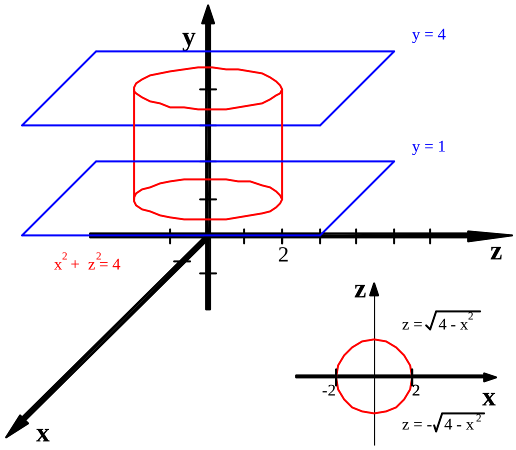
Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

$$x^2+z^2=4 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{4-x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{4-x^2} \le z \le \sqrt{4-x^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y=1 \rightarrow \text{Plano paralelo ao plano XOZ} \\ \text{y}=4 \rightarrow \text{Plano paralelo ao plano XOZ} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \le y \le 4$$



$x^2+z^2=4 \rightarrow$ Circunferência de centro (0;0) e raio $2 \Rightarrow -2 \le x \le 2$

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{1}^{4}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 1\, dzdydx$$

Do gráfico conclui-se que: $\left\{\begin{array}{l} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le q \le 2p \\ 1 \le y \le 4 \end{array}\right\}$.

Logo, o integral triplo será:

$$V=\int_0^2\int_0^{2p}\int_1^4\left(1\times \overbrace{r}^{Jacobiano}\right)dydqdr \Leftrightarrow V=\int_0^2\int_0^{2p} r\cdot[y]_1^4\, dqdr \Leftrightarrow V=\int_0^2\int_0^{2p} r\cdot[4-1]dqdr \Leftrightarrow$$

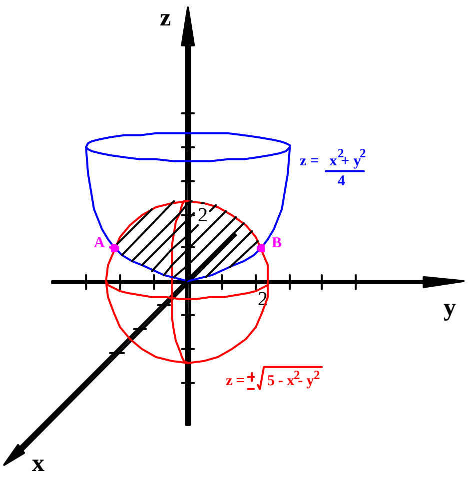
$$\Leftrightarrow V=\int_0^2 3r\cdot[q]_0^{2p}\, dr \Leftrightarrow V=\int_0^2 3r\cdot[2p]dr \Leftrightarrow V=6p\cdot\left[\frac{r^{1+1}}{1+1}\right]_0^2 \Leftrightarrow V=6p\cdot\left[\frac{2^2}{2}\right] \Leftrightarrow V=12p$$

b) O sólido limitado superiormente pela esfera de equação: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ **e inferiormente pelo parabolóide de equação:** $x^2 + y^2 = 4z$**.**

R:

Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

$x^2 + y^2 + z^2 = 5 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{5 - x^2 - y^2} \Rightarrow$ Esfera de centro (0;0;0) e raio $\sqrt{5} = 2{,}4...$



$x^2 + y^2 = 4z \Leftrightarrow z = \dfrac{x^2 + y^2}{4} \Rightarrow$ Parabolóide com vértice em (0;0;0).

Pontos de intersecção A e B:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z + z^2 = 5 \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 4z - 5 = 0 \\ -------- \end{cases} \Leftrightarrow^{21} \begin{cases} z = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} \\ ------------- \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} \\ ------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-4 \pm 6}{2} \\ ------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-4-6}{2} \vee z = \dfrac{-4+6}{2} \\ -------------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -5 \vee z = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \cdot z \end{cases} \Leftrightarrow^{22}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \cdot 1 \rightarrow \text{Circunferência de centro (0;0) e r} = \sqrt{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = \pm\sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

---

[21] A fórmula resolvente para uma equação do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$ é dada por: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

[22] O ponto $z = -5$ não serve porque não corresponde a zona da área assinalada no gráfico.

Do gráfico conclui-se que: $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \\ \dfrac{x^2+y^2}{4} \leq z \leq \sqrt{5-\left(x^2+y^2\right)} \end{cases} \Rightarrow V = \int_{-2}^{2} \int_{\left(-\sqrt{4-x^2}\right)}^{\left(\sqrt{4-x^2}\right)} \int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^{\sqrt{5-\left(x^2+y^2\right)}} (1)\, dzdydx$

Agora teremos que recorrer à mudança de coordenadas: $\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq q \leq 2p \end{cases}$, onde: $\begin{cases} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot sen q \\ |J| = r \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (r \cdot \cos q)^2 + (r \cdot sen q)^2 = r^2 \cdot \underbrace{\left(\cos^2 q + sen^2 q\right)}_{=1} = r^2$$

Pelo que o integral será agora escrito na seguinte forma:

$$V = \int_0^2 \int_0^{2p} \int_{\frac{r^2}{4}}^{\sqrt{5-r^2}} (1 \cdot r)\, dzdqdr \Leftrightarrow V = \int_0^2 \int_0^{2p} [r \cdot z]_{\frac{r^2}{4}}^{\sqrt{5-r^2}}\, dqdr \Leftrightarrow V = \int_0^2 \int_0^{2p} \left[\left(r \cdot \sqrt{5-r^2}\right) - \left(r \cdot \frac{r^2}{4}\right)\right] dqdr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \int_0^2 \int_0^{2p} \left[\left(\sqrt{r^2 \cdot \left(5-r^2\right)}\right) - \left(\frac{r^3}{4}\right)\right] dqdr \Leftrightarrow V = \int_0^2 \int_0^{2p} \left[\left(r^2 \cdot \left(5-r^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{r^3}{4}\right)\right] dqdr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \int_0^2 \int_0^{2p} \left[\left(5 \cdot r^2 - r^4\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{r^3}{4}\right)\right] dqdr \Leftrightarrow V = \int_0^2 \int_0^{2p} \left[\left(5 \cdot r^{2 \cdot \frac{1}{2}} - r^{4 \cdot \frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{r^3}{4}\right)\right] dqdr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \int_0^2 \int_0^{2p} \left[\left(5 \cdot r^1 - r^2\right) - \left(\frac{r^3}{4}\right)\right] dqdr \Leftrightarrow V = \int_0^2 \left[\left(5 \cdot r^1 - r^2\right) - \left(\frac{r^3}{4}\right)\right] \cdot [q]_0^{2p}\, dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \int_0^2 \left[\left(5 \cdot r^1 - r^2\right) - \left(\frac{r^3}{4}\right)\right] \cdot [2p]\, dr \Leftrightarrow V = 2p \cdot \left[\left(5 \cdot \frac{r^{1+1}}{1+1} - \frac{r^{2+1}}{2+1}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{r^{3+1}}{3+1}\right)\right]_0^2 \Leftrightarrow V = \frac{38}{3} p$$

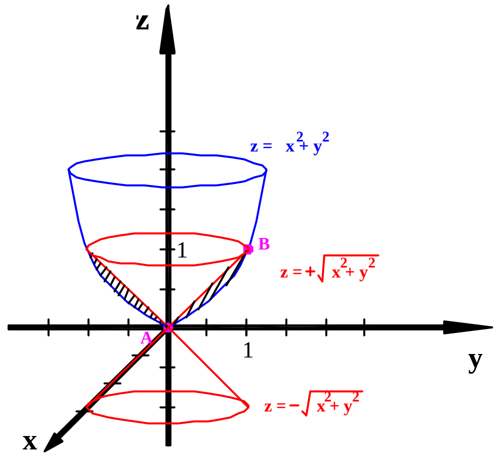
c) O sólido limitado pelo parabolóide: $z = x^2 + y^2$ e pelo cone: $z^2 = x^2 + y^2$.

R:

Atendendo ao que é referido no enunciado teremos então que:

$z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow 2$ Cones de vértices (0;0;0), um na zona positiva de z e outro na negativa;

$z = x^2 + y^2 \Rightarrow$ Parabolóide com vértice em (0;0;0).



Pontos de intersecção A e B:

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = z \\ ---- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - z = 0 \\ ---- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \cdot (z-1) = 0 \\ ---- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{z=0}_{\Downarrow} \quad \vee \quad \underbrace{z=1}_{\Downarrow} \\ x^2 + y^2 = 0 \vee x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \to Ponto(0;0;0) \\ x^2 + y^2 = 1 \to Circunferência \begin{cases} Centro(0;0) \\ Raio = \sqrt{1} = 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ponto(0;0;0) \\ y = \pm\sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

Do gráfico conclui-se que: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow V = \int_{-1}^{1} \int_{\left(-\sqrt{1-x^2}\right)}^{\left(\sqrt{1-x^2}\right)} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} (1)\, dzdydx$

Agora teremos que recorrer à mudança de coordenadas: $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le q \le 2p \end{cases}$, onde: $\begin{cases} x = r \cdot \cos q \\ y = r \cdot sen q \\ |J| = r \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (r \cdot \cos q)^2 + (r \cdot sen q)^2 = r^2 \cdot \underbrace{\left(\cos^2 q + sen^2 q\right)}_{=1} = r^2$$

Pelo que o integral será agora escrito na seguinte forma:

$$V=\int_0^1\int_0^{2p}\int_{r^2}^{\sqrt{r^2}}(1\cdot r)\,dz\,dq\,dr \Leftrightarrow V=\int_0^1\int_0^{2p}\int_{r^2}^{r}(r)\,dz\,dq\,dr \Leftrightarrow V=\int_0^1\int_0^{2p}\left[r\cdot z\right]_{r^2}^{r}dq\,dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^1\int_0^{2p}\left[(r\cdot r)-\left(r\cdot r^2\right)\right]dq\,dr \Leftrightarrow V=\int_0^1\int_0^{2p}\left[r^2-r^3\right]dq\,dr \Leftrightarrow V=\int_0^1\left[r^2-r^3\right]\cdot\left[q\right]_0^{2p}dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V=\int_0^1\left[r^2-r^3\right]\cdot\left[2p\right]dr \Leftrightarrow V=2p\cdot\left[r^2-r^3\right]_0^1 \Leftrightarrow V=2p\cdot\left[1^2-1^3\right]\Leftrightarrow V=0$$

26. Calcule os integrais curvilíneos:

a) $\int_L \frac{ds}{x-y}$ **onde L é o segmento de recta que une os pontos:** $A(0;-2)$ **e** $B(4;0)$**.**

R:

Uma vez que: $\begin{Bmatrix} A=(0;-2) \\ B=(4;0) \end{Bmatrix}$, então teremos que: $\vec{AB}=B-A=(4;0)-(0;-2)=(4;2)$

Sabendo que a *equação paramétrica de uma recta* é dada por: $(x;y)=(x_0;y_0)+t\cdot\left(\vec{AB}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x;y)=(0;-2)+t\cdot(4;2)\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x=0+4t \\ y=-2+2t \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x=4t \\ y=2t-2 \end{Bmatrix}$$

$$A=\begin{Bmatrix} x=0 \\ y=-2 \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} 0=4t \\ -2=2t-2 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} t=0 \\ t=0 \end{Bmatrix} \qquad B=\begin{Bmatrix} x=4 \\ y=0 \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} 4=4t \\ 0=2t-2 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} t=1 \\ t=1 \end{Bmatrix}$$

Desta forma se pode concluir que: $\overset{A}{\overbrace{0}} \leq t \leq \overset{B}{\overbrace{1}}$

Ora, sabendo ainda que: $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t - 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \frac{dx}{dt} = 4; \frac{dy}{dt} = 2 \right\}$

E que: $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \Leftrightarrow ds = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} dt \Leftrightarrow ds = \sqrt{20} dt$

Então: $\int_L \frac{ds}{x-y} = \int_0^1 \frac{\sqrt{20}}{4t-(2t-2)} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{20}}{2t+2} dt = \sqrt{20} \cdot \int_0^1 \frac{1}{2t+2} dt =$[23] $\sqrt{20} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \int_0^1 (2) \cdot \frac{1}{2t+2} dt =$

$$= \frac{\sqrt{20}}{2} \cdot [\ln(2t+2)]_0^1 = \frac{\sqrt{20}}{2} \cdot [\ln(2 \cdot 1 + 2) - \ln(2 \cdot 0 + 2)] = \frac{\sqrt{20}}{2} \cdot [\ln(4) - \ln(2)] = \frac{\sqrt{20}}{2} \cdot \ln(2)$$

b) $\int_L (x-y) ds$ **onde L é a circunferência:** $x^2 + y^2 = 2 \cdot a \cdot x$**.**

R:

Antes de mais vamos determinar a equação da circunferência:

$$x^2 + y^2 = 2 \cdot a \cdot x \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2 \cdot a \cdot x = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2 \cdot a \cdot x + y^2) + a^2 = 0 + a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow Circunferência \begin{cases} Centro \rightarrow (a;0) \\ Raio \rightarrow \sqrt{a^2} = a \end{cases}$$

---

[23] Derivada do tipo: $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ → teremos então que rearranjar o integral multiplicando e dividindo por 2 para se poder aplicar isto.

Para uma qualquer circunferência a parametrização a fazer será: $\begin{cases} x - x_0 = r \cdot \cos q \\ y - y_0 = r \cdot sen q \end{cases}$

Então teremos para este caso particular, onde: $\begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq q \leq 2p \end{cases}$[24] que:

$$\begin{cases} x - x_0 = r \cdot \cos q \\ y - y_0 = r \cdot sen q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - a = a \cdot \cos q \\ y - 0 = a \cdot sen q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + a \cdot \cos q \\ y = a \cdot sen q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a \cdot sen q \\ \dfrac{dy}{dt} = a \cdot \cos q \end{cases}$$

Logo: $ds = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \Leftrightarrow ds = \sqrt{(-a \cdot sen q)^2 + (a \cdot \cos q)^2}\, dt \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow ds = \sqrt{a^2 \cdot \underbrace{(sen^2 q + \cos^2 q)}_{=1}}\, dt \Leftrightarrow ds = \sqrt{a^2}\, dt \Leftrightarrow ds = (a) dt$$

Assim sendo teremos finalmente que:

$$\int_L (x - y) ds = \int_0^{2p} (a + a \cdot \cos(t) - a \cdot sen(t)) \cdot (a) dt = \int_0^{2p} a \cdot (1 + \cos(t) - sen(t)) \cdot (a) dt =$$

$$= a^2 \cdot \int_0^{2p} (1 + \cos(t) - sen(t)) dt = a^2 \cdot [t + sen(t) - (-\cos(t))]_0^{2p} =$$

$$= a^2 \cdot \left[\left(2p + \underbrace{sen(2p)}_{=0} + \underbrace{\cos(2p)}_{=1} \right) - \left(0 + \underbrace{sen(0)}_{=0} + \underbrace{\cos(0)}_{=1} \right) \right] = 2pa^2$$

---

[24] **ATENÇÃO!!! As regras utilizadas nas transformações de coordenadas não são aplicáveis nos integrais curvilíneos.** Isto significa que ρ e θ são sempre valores fixos. De notar que: θ = t.

27. Calcule o trabalho W realizado pelo campo de forças: $\vec{F}(x;y)=\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\vec{e}_1-\left(\frac{1}{2}y\right)\cdot\vec{e}_2$ **quando uma partícula se desloca ao longo da elipse** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ **superior, percorrida no sentido dos ponteiros do relógio.**

R:

Sabendo que:

$$W=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} \Leftrightarrow W=\int_L \vec{F}\cdot(\vec{v}dt) \Leftrightarrow W=\int_a^b [F_1(j(t);y(t))\cdot j'(t)+F_2(j(t);y(t))\cdot y'(t)]dt \Leftrightarrow$$ ✪

Sendo que: $\vec{F}(x;y)=\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\vec{e}_1-\left(\frac{1}{2}y\right)\cdot\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{F}=\begin{cases}[F_1(x;y)]=\frac{1}{2}x\\ [F_2(x;y)]=-\frac{1}{2}y\end{cases}$

Uma vez que o trajecto percorrido pela partícula é a parte superior de uma elipse, então teremos que proceder à sua parametrização sabendo que a equação de uma qualquer elipse é dada por: $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$

Logo a parametrização que se aplica para estes casos será a seguinte: $\begin{cases}\frac{x-x_0}{a}=r\cdot\cos q\\ \frac{y-y_0}{b}=r\cdot sen q\end{cases}$

Onde: $\begin{cases}r=1\\ 0\le q\le 2p\end{cases}$[25] e $|J|=a\cdot b\cdot r$

[25] Quando se trata de elipses, ρ é sempre igual a 1.

Pelo enunciado temos que: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \rightarrow$ Elipse com centro (0;0), raio 1 e $\begin{Bmatrix} a=\sqrt{4}=2 \\ b=\sqrt{9}=3 \end{Bmatrix}$

Aplicando isto ao caso que se está a estudar nesta alínea, teremos então que:

$$\begin{Bmatrix} \frac{x-0}{2}=1\cdot\cos q \\ \frac{y-0}{3}=1\cdot senq \end{Bmatrix}^{26} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=-2\cdot\cos q \\ y=3\cdot senq \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\begin{Bmatrix} j\,'(t)=(-2\cdot\cos(q))'=2\cdot sen(q) \\ y\,'(t)=(3\cdot sen(q))'=3\cdot\cos(t) \end{Bmatrix}$$

$$\text{Logo: } \vec{F}=\begin{Bmatrix} [F_1(j\,(t);y\,(t))]=\frac{1}{2}\cdot(-2\cdot\cos(t)) \\ [F_2(j\,(t);y\,(t))]=-\frac{1}{2}\cdot(3\cdot sen(t)) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \vec{F}=\begin{Bmatrix} [F_1(j\,(t);y\,(t))]=-\cos(t) \\ [F_2(j\,(t);y\,(t))]=-\frac{3}{2}\cdot sen(t) \end{Bmatrix}$$

Logo, como se pretende apenas metade da elipse então: $0\le t\le p$:

$$✪\Leftrightarrow W=\int_0^p\left[-\cos(t)\cdot 2\cdot sen(t)-\frac{3}{2}\cdot sen(t)\cdot 3\cdot\cos(t)\right]dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W=\int_0^p\left[-2\cdot\cos(t)\cdot sen(t)-\frac{9}{2}\cdot sen(t)\cdot\cos(t)\right]dt\Leftrightarrow W=\int_0^p\left[\cos(t)\cdot sen(t)\cdot\left(-2-\frac{9}{2}\right)\right]dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W=-\frac{13}{2}\cdot\int_0^p\left[\underbrace{\cos(t)}_{=u'}\cdot\underbrace{sen(t)}_{u^a}\right]dt\Leftrightarrow W=-\frac{13}{2}\cdot\left[\frac{sen^{1+1}(t)}{1+1}\right]_0^p\Leftrightarrow W=-\frac{13}{2}\cdot\left[\frac{sen^2(p)}{2}-\frac{sen^2(0)}{2}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W=-\frac{13}{2}\cdot\left[\frac{0}{2}-\frac{0}{2}\right]\Leftrightarrow W=0$$

---

[26] Uma vez que se pretende apenas a região superior da elipse, percorrida no sentido dos ponteiros do relógio então temos que reescrever a parametrização em x da forma que se vê.

28. Calcule o seguinte integral curvilíneo: $\int_L (x\cdot y+x+y)dx+(x\cdot y+x-y)dy$ **onde L é dada pela elipse:** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$**.**

R:

Como se trata de uma curva fechada, então podemos aplicar directamente o teorema de Green: $\int_L F_1(x;y)dx+F_2(x;y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy$

Ora: $\int_L (x\cdot y+x+y)dx+(x\cdot y+x-y)dy \Rightarrow \begin{cases} F_1(x;y)=x\cdot y+x+y \\ F_2(x;y)=x\cdot y+x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x;y)=x+1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x;y)=y+1 \end{cases}$

Agora teremos que determinar os limites que definem a região D, pelo que:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow$ Elipse de centro (0;0), raio $\sqrt{1}=1$ e $\begin{cases} a=\sqrt{4}=2 \\ b=\sqrt{9}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\leq r\leq 1 \\ 0\leq q\leq 2p \end{cases}$

A parametrização a seguir será a seguinte: $\begin{cases} \frac{x-x_0}{a}=r\cdot\cos q \\ \frac{y-y_0}{b}=r\cdot sen q \end{cases}$ e $|J|=a\cdot b\cdot r$

Pelo que: $\begin{cases} \frac{x-0}{2}=r\cdot\cos q \\ \frac{y-0}{3}=r\cdot sen q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\cdot r\cdot\cos q \\ y=3\cdot r\cdot sen q \end{cases}$ e $|J|=a\cdot b\cdot r=2\cdot 3\cdot r=6\cdot r$

Então finalmente teremos que:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D \left(y + 1 - (x+1) \right) dxdy = \iint_D (y - x) dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2p} [3 \cdot r \cdot senq - 2 \cdot r \cdot \cos q] \cdot (6 \cdot r) dq dr = \int_0^1 \int_0^{2p} r \cdot [3 \cdot senq - 2 \cdot \cos q] \cdot (6 \cdot r) dq dr =$$

$$= \int_0^1 6 \cdot r^2 \cdot \int_0^{2p} [3 \cdot senq - 2 \cdot \cos q] dq dr = \int_0^1 6 \cdot r^2 \cdot [-3 \cdot \cos q - 2 \cdot senq]_0^{2p} \, dr =$$

$$= \int_0^1 6 \cdot r^2 \cdot \left[\left(-3 \cdot \underbrace{\cos(2p)}_{=1} - 2 \cdot \underbrace{sen(2p)}_{=0} \right) - \left(-3 \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} - 2 \cdot \underbrace{sen(0)}_{=0} \right) \right] dr = \int_0^1 6 \cdot r^2 \cdot [0] dr = 0$$