Análise Matemática EE
1ºano, 2ºsemestre

Exemplos de superfícies quádricas

Uma superfície quádrica é o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cujas coordenadas no referencial (O, e_1, e_2, e_3) são as soluções de uma equação polinomial de grau 2 de coeficientes reais nas variáveis x, y, z, isto é, são soluções da equação

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0$$

onde as constantes a_i, $i = 1, .., 10$ são reais, não todas nulas.
Aqui não será feito um estudo das quádricas mas serão apenas apresentados alguns exemplos de superfícies quádricas.

Esfera

Uma esfera de centro no ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e raio $k > 0$, é uma superfície que pode ser descrita da forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k^2$$

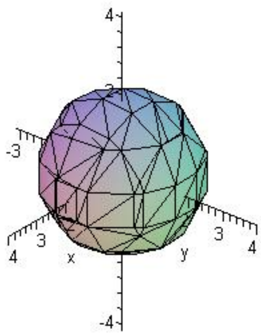

Figure 1: A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Note-se que
$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
é a parte da esfera, acima do plano XOY, $(z > 0)$ e
$z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$
é a parte da esfera, abaixo do plano XOY, $(z < 0)$.

Elipsóide

Um elipsóide de centro no ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, é uma superfície que pode ser descrita da forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

com a, b, c constantes reais, não nulas, não todas iguais.

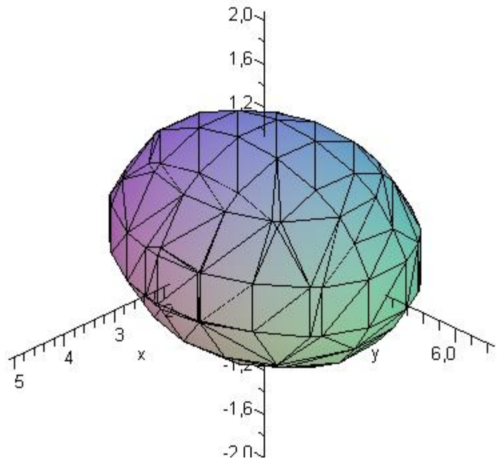

Figure 2: O elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$.

A função da forma

$$f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}},$$

definida em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \leq 1\}$ tem como gráfico, a parte superior do elipsóide $(z \geq 0)$.
E a função da forma

$$f(x, y) = -\sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}}$$

definida no mesmo conjunto, tem como gráfico, a parte inferior do elipsóide $(z \leq 0)$.

Parabolóide elíptico

A superfície

$$z = a + bx^2 + cy^2$$

onde a, b, c são constantes reais e b, c têm o mesmo sinal, é um parabolóide elíptico. Neste caso, é um parabolóide com vértice no eixo OZ, no ponto $(0, 0, a)$.

Se b, c são ambos positivos, o parabolóide está virado para cima:

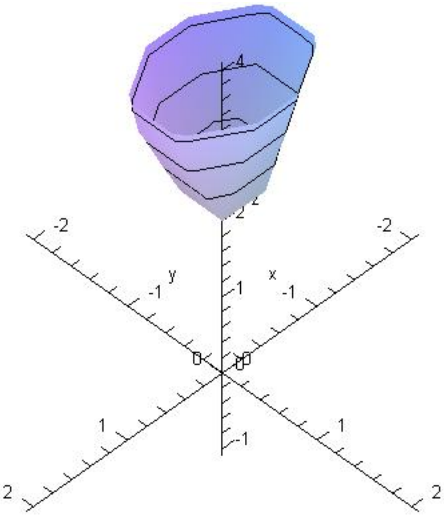

Figure 3: O parabolóide elíptico $z = 2 + 3x^2 + 5y^2$.

Se b, c são ambos negativos, o parabolóide está virado para baixo:

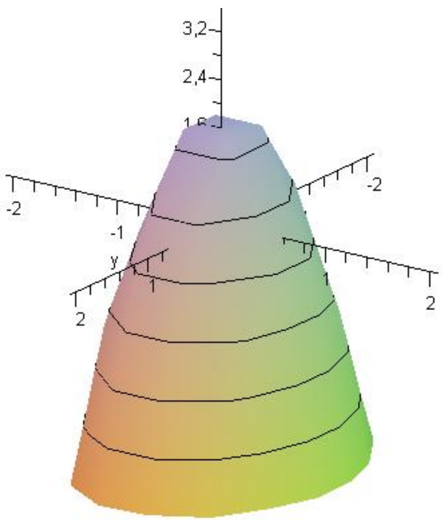

Figure 4: O parabolóide elíptico $z = 2 - 3x^2 - 5y^2$.

Outros exemplos de parabolóides elípticos são descritos por

$$x = a + by^2 + cz^2$$

onde a, b, c são constantes reais e b, c têm o mesmo sinal. Neste caso, é um parabolóide com vértice no eixo OX, no ponto $(a, 0, 0)$. E

$$y = a + bx^2 + cz^2$$

onde a, b, c são constantes reais e b, c têm o mesmo sinal. Neste caso, é um parabolóide com vértice no eixo OY, no ponto $(0, a, 0)$.

Parabolóide hiperbólico

A superfície

$$z = a + bx^2 + cy^2$$

onde a, b, c são constantes reais e b, c têm sinais contrários, é um parabolóide hiperbólico.

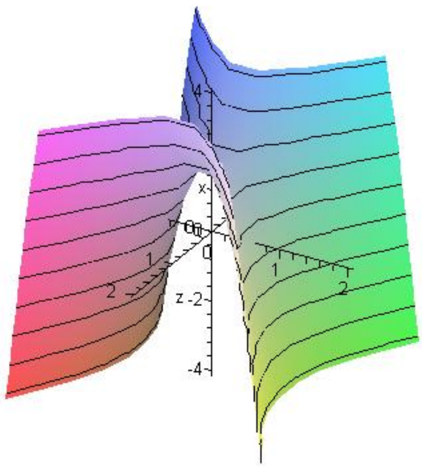

Figure 5: O parabolóide hiperbólico $z = 2 + 3x^2 - 5y^2$.

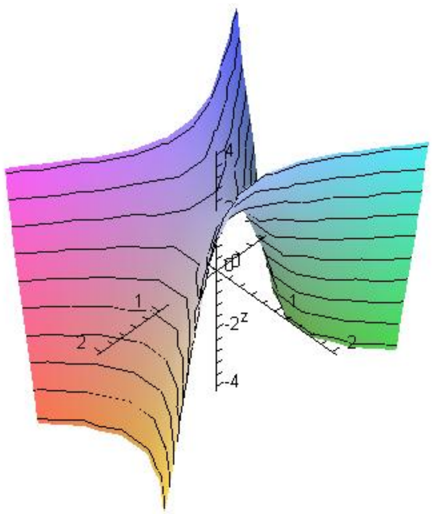

Figure 6: O parabolóide hiperbólico $z = 2 - 3x^2 + 5y^2$.

Outros exemplos de parabolóides hiperbólicos são

$$x = a + by^2 + cz^2$$

e

$$y = a + bx^2 + cz^2$$

onde a, b, c são constantes reais e b, c têm sinais contrários.

Superfície cónica

Uma superfície cónica é uma superfície gerada por uma reta que, quando se move, passa por uma curva plana fixa (*diretriz*) e por um ponto fixo (*vértice*) que não está no mesmo plano que a curva. Quando a reta é perpendicular ao plano da curva diretriz, o cone diz-se reto.

A superfície

$$z^2 = ax^2 + by^2$$

onde a, b são constantes reais positivas, é um cone que se encontra ao longo do eixo OZ.

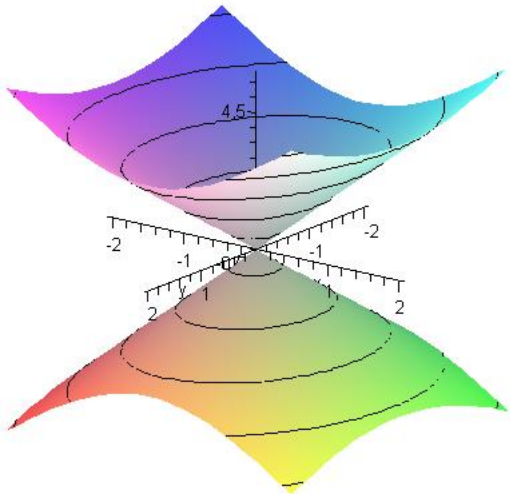

Figure 7: A superfície cónica $z^2 = 3x^2 + 5y^2$.

A função

$$z = \sqrt{ax^2 + by^2}$$

definida em $\mathbb{R}^2$, tem como gráfico a parte da superfície cónica que se encontra acima do plano XOY.

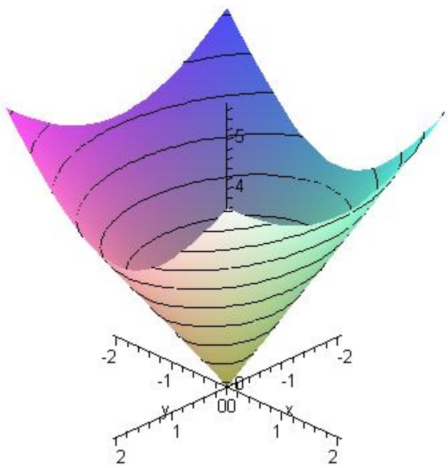

Figure 8: A superfície cónica $z = \sqrt{3x^2 + 5y^2}$.

A função

$$z = -\sqrt{ax^2 + by^2}$$

definida em $\mathbb{R}^2$, tem como gráfico a parte da superfície cónica que se encontra abaixo do plano XOY.

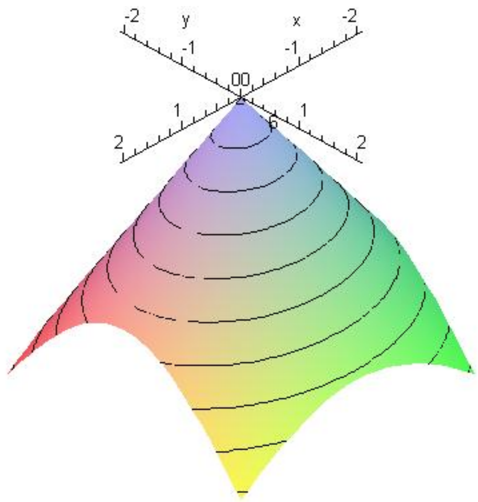

Figure 9: A superfície cónica $z = -\sqrt{3x^2 + 5y^2}$.

Outros exemplos de cones são

$$x^2 = ay^2 + bz^2$$

onde a, b são constantes reais positivas. Este encontra ao longo do eixo OX.

$$y^2 = ax^2 + bz^2$$

onde a, b são constantes reais positivas. Este encontra ao longo do eixo OY.

Hiperbolóide de uma folha

A superfície definida por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é um hiperbolóide de uma folha que não interseta com o eixo OZ.

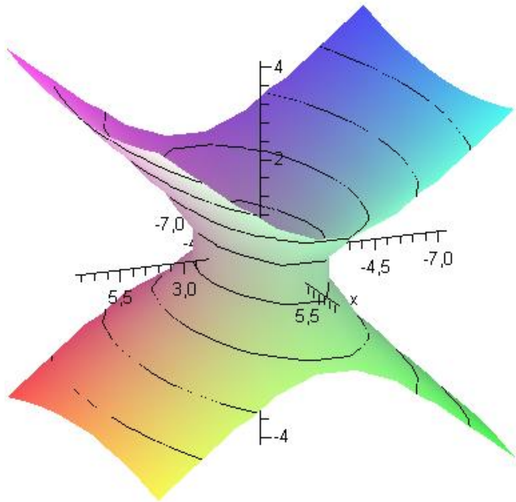

Figure 10: Hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-z^2=1$.

A função

$$z=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}$$

definida no exterior da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$, tem como gráfico a parte do hiperbolóide que se encontra acima do plano XOY.

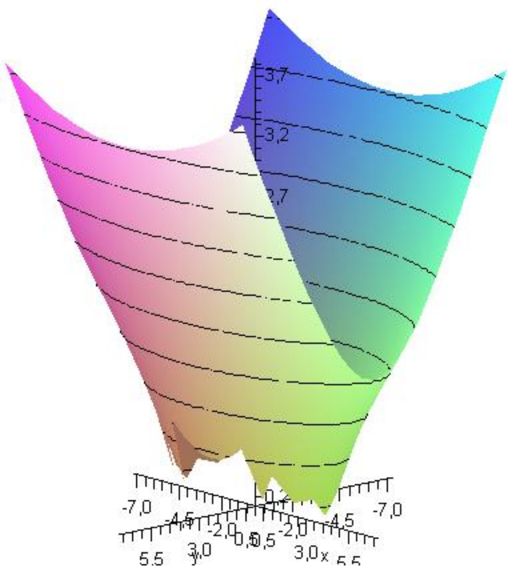

Figure 11: Hiperbolóide de uma folha $z=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-1}$.

A função

$$z=-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}$$

definida no exterior da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$, tem como gráfico a parte do hiperbolóide que se encontra abaixo do plano XOY

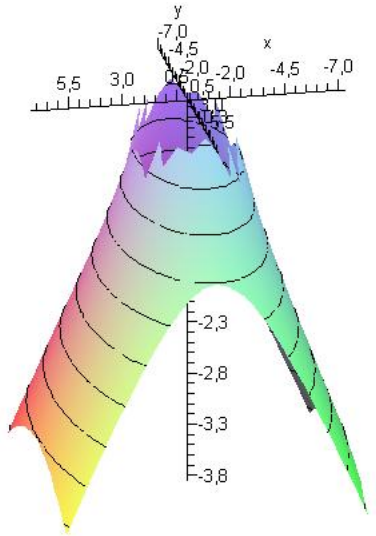

Figure 12: Hiperbolóide $z = -\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - 1}$.

Outros exemplos de hiperbolóides de uma folha são

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hiperbolóide de duas folhas

A superfície definida por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é um hiperbolóide de duas folhas que não interseta o eixo OZ e o eixo OY.

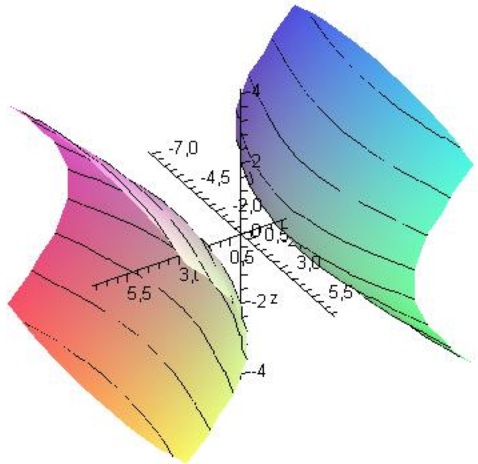

Figure 13: Hiperbolóide de duas folhas $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} - z^2 = 1$.

A função

$$z = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1}$$

definida no exterior da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$, tem como gráfico a parte do hiperbolóide que se encontra acima do plano XOY.

A função

$$z = -\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1}$$

definida no exterior da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$, tem como gráfico a parte do hiperbolóide que se encontra abaixo do plano XOY.

De modo semelhante, podemos definir o hiperbolóide de duas folhas

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que não interseta o eixo OZ e o eixo OX.

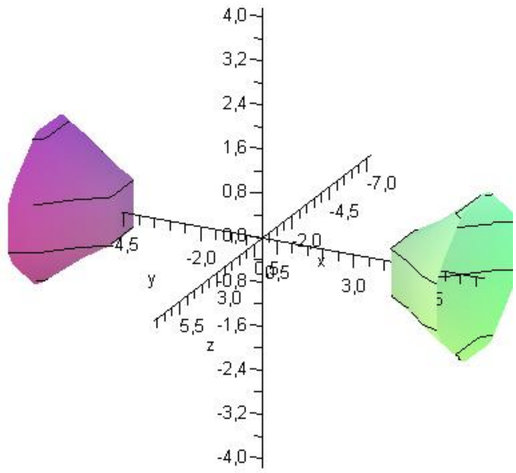

Figure 14: Hiperbolóide de duas folhas $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - z^2 = 1$.

Outros exemplos de hiperbolóides de uma folha são

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Superfícies cilíndricas

As superfícies cilíndricas são superfícies geradas pelo movimento de uma reta (denominada *geratriz*) ao longo de uma curva plana (denominada *diretriz*), paralelamente a outra reta. Se a diretriz é perpendicular à geratriz, dizemos que a superfície é reta.

Aqui, apresentaremos exemplos de superfícies cuja diretriz é uma curva do plano XOY e a geratriz é uma recta paralela ao eixo OZ. Neste caso, note-se a semelhança entre a equação da superfície e da diretriz: a equação nas variáveis x, y é igual nos dois casos, mas na equação da curva, tem-se que $z = 0$ e na equação da superfície, tem-se que a variável z varia livremente em $\mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$.

Em geral, uma equação que envolve duas das três variáveis x, y, z é um cilindro cuja geratriz é uma reta paralela ao eixo da terceira coordenada.

Exemplo: uma circunferência no plano XOY tem por equação $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$. A superfície cilíndrica tem por equação $x^2 + y^2 = 4$.

Superfície cilíndrica circular

Se definirmos no espaço

$$x^2 + y^2 = k^2, \quad z \in \mathbb{R}$$

temos uma superfície cuja geratriz é paralela a OZ, e a diretriz é uma circunferência no plano XOY.

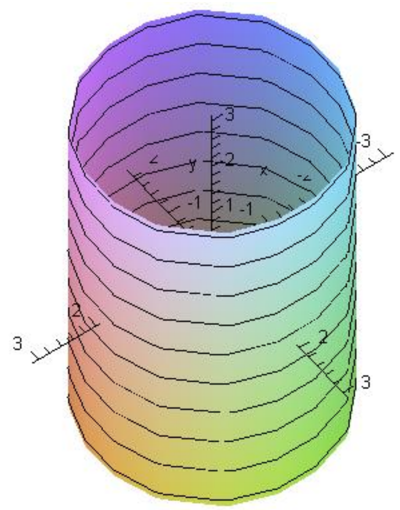

Figure 15: O cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

Se definirmos no espaço

$$x^2 + z^2 = k^2, \quad y \in \mathbb{R}$$

temos uma superfície cuja geratriz é paralela a OY, e a diretriz é uma circunferência no plano XOZ.
Se definirmos no espaço

$$y^2 + z^2 = k^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

temos uma superfície cuja geratriz é paralela a OX, e a diretriz é uma circunferência no plano YOZ.

Superfície cilíndrica elíptica

Quando a diretriz é uma elipse, denominamos a superfície cilíndrica de elíptica.
No exemplo abaixo, a diretriz é uma elipse no plano XOY do tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b \in \mathbb{R})$ e a geratriz uma reta paralela ao eixo OZ.

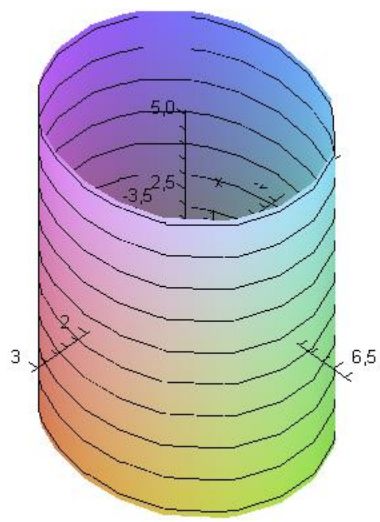

Figure 16: O cilindro $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$.

No exemplo seguinte, a diretriz é uma elipse no plano XOZ do tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ $(a,b\in\mathbb{R})$ e a geratriz uma reta paralela ao eixo OY.

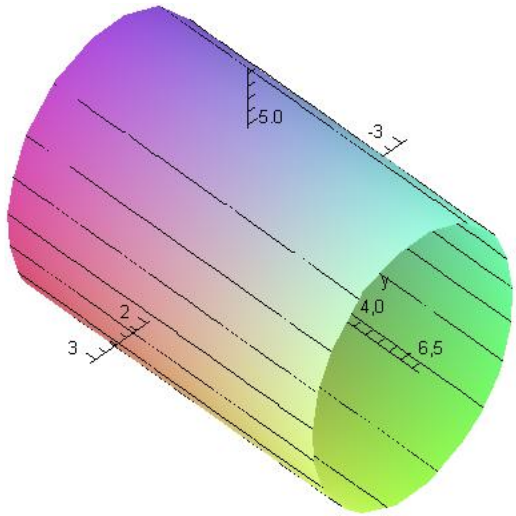

Figure 17: O cilindro $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$.

Outro exemplo de superfície cilíndrica elíptica é uma cuja diretriz é uma elipse no plano YOZ do tipo $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ $(a,b\in\mathbb{R})$ e a geratriz uma reta paralela ao eixo OX.

Superfície cilíndrica parabólica

Nas superfícies cilíndricas parabólicas, a diretriz é uma parábola, por exemplo, do tipo

$$y=ax^2,\quad x=ay^2,$$

no plano XOY;

$$z=ax^2\quad x=az^2,$$

no plano XOZ;

$$y=az^2,\quad z=ay^2$$

no plano YOZ, com $a\in\mathbb{R}$.

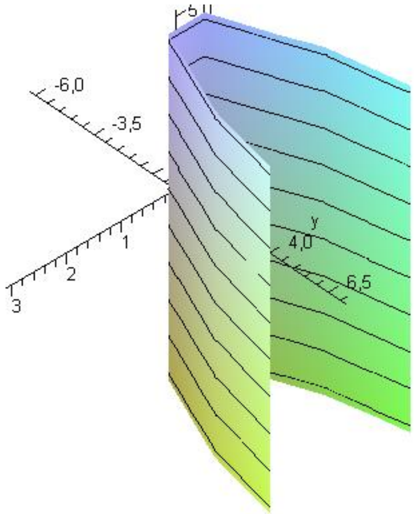

Figure 18: O cilindro $y = 4x^2$.

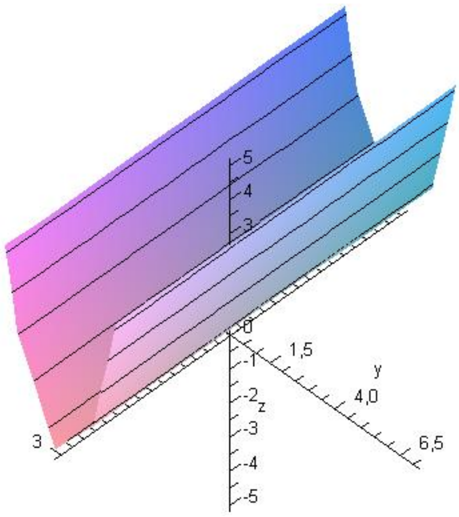

Figure 19: O cilindro $z = 4y^2$.

Superfície cilíndrica hiperbólica

Nas superfícies cilíndricas hiperbólicas, a diretriz é uma hipérbole.

Exemplos de superfícies cuja diretriz está no plano XOY e a geratriz é paralela ao eixo OZ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

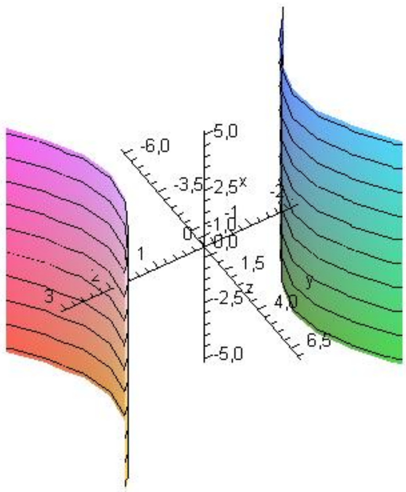

Figure 20: O cilindro $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$.

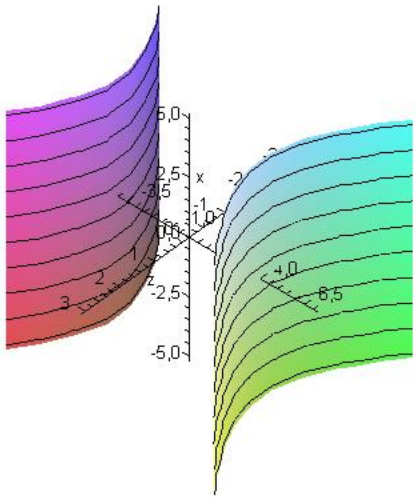

Figure 21: O cilindro $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$.

Outros exemplos, com a diretriz no plano XOZ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

ou

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

com a diretriz no plano YOZ:

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$