Teoria

Sabendo que:

- O gradiente de uma dada função f é dado pelo seguinte: $\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z} \right)$;

- O vector $\vec{u}$ terá que ser sempre transformado em vector unitário normalizado, recorrendo para tal à seguinte expressão: $\vec{u}_{un} \rightarrow \frac{\vec{u}}{\left\| \vec{u} \right\|}$

Ex: Admitindo que: $\vec{u} = (2;1;-1)$

Então a norma do vector será dada por: $\left\| \vec{u} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

Logo, o vector unitário normalizado será: $\vec{u} \rightarrow \frac{\vec{u}}{\left\| \vec{u} \right\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{\sqrt{6}}{6} \right)$

Então a derivada dirigida será dada por: $D_{\vec{u}} f(x_0; y_0; z_0) = \vec{\nabla} f(x_0; y_0; z_0) \cdot \vec{u}_{un}$

1. Escreva a expressão de $\overrightarrow{gradU}$, quando U for uma função real que depende de n variáveis ($n > 1$).

R:

2. Determine $\vec{\nabla} f$, nos pontos indicados, das funções:

a) $f(x;y) = x^2 + y^2 \cdot (1 + sen(x))$ **e** $(a;b) = (p;2)$

R:

Sabendo que o gradiente da função para qualquer ponto é dado por: $\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right)$, vamos começar por determinar as derivadas parciais da função:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(x^2 + y^2 \cdot (1 + sen(x))\right)'_x = \left(x^2\right)'_x + \left(y^2 \cdot (1 + sen(x))\right)'_x =$$ [1]

$$= 2x + \left[\left(y^2\right)'_x \cdot (1 + sen(x)) + y^2 \cdot (1 + sen(x))'_x\right] = 2x + y^2 \cdot \left(sen(x)\right)'_x = 2x + y^2 \cdot \cos(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(p;2) = 2p + 2^2 \cdot \cos(p) = 2p + 2^2 \cdot (-1) = 2p - 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(x^2 + y^2 \cdot (1 + sen(x))\right)'_y = \left(x^2\right)'_y + \left(y^2 \cdot (1 + sen(x))\right)'_y =$$

$$= \left(y^2\right)'_y \cdot (1 + sen(x)) + y^2 \cdot (1 + sen(x))'_y = 2y \cdot (1 + sen(x)) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(p;2) = 2 \cdot 2 \cdot (1 + sen(p)) =$$

$$= 4 \cdot (1 + 0) = 4$$

Então teremos que o gradiente da função no ponto $(\pi;2)$ será: $\vec{\nabla} f(p;2) = (2p - 4;4)$

---

[1] $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

b) $f(x;y)=\dfrac{x+y}{1+y}$ **e** $(a;b)=(1;1)$

R:

Sabendo que o gradiente da função para qualquer ponto é dado por: $\vec{\nabla} f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x};\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, vamos começar por determinar as derivadas parciais da função:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(???)'_x=$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=(???)'_y=$$

Então teremos que o gradiente da função no ponto (?;?) será: $\vec{\nabla} f(?;?)=(?;?)$

c) $f(x;y;z)=\left(x^2+\cos(z)\right)\cdot e^{-x+y}$ **e** $(a;b;c)=(1;1;p)$

R:

Sabendo que o gradiente da função para qualquer ponto é dado por: $\vec{\nabla} f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x};\dfrac{\partial f}{\partial y};\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$, vamos começar por determinar as derivadas parciais da função:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\left(x^2+\cos(z)\right)\cdot e^{-x+y}\right)'_x \overset{2}{=}\left(x^2+\cos(z)\right)'_x\cdot e^{-x+y}+\left(x^2+\cos(z)\right)\cdot\left(e^{-x+y}\right)'_x=$$

---

[2] $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$ e $(e^u)'=u'\cdot e^u$

$$= 2x \cdot e^{-x+y} + \left(x^2 + \cos(z)\right) \cdot \left(-x + y\right)'_x \cdot e^{-x+y} = 2x \cdot e^{-x+y} + \left(x^2 + \cos(z)\right) \cdot (-1) \cdot e^{-x+y} =$$

$$= 2x \cdot e^{-x+y} - \left(x^2 + \cos(z)\right) \cdot e^{-x+y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1;1;p) = 2 \cdot 1 \cdot e^{-1+1} - \left(1^2 + \cos(p)\right) \cdot e^{-1+1} =$$

$$= 2 \cdot e^0 - \left(1 + (-1)\right) \cdot e^0 = 2 \cdot 1 - \left(1 + (-1)\right) \cdot 1 = 2 - 0 = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\left(x^2 + \cos(z)\right) \cdot e^{-x+y}\right)'_y = \left(x^2 + \cos(z)\right)'_y \cdot e^{-x+y} + \left(x^2 + \cos(z)\right) \cdot \left(e^{-x+y}\right)'_y =$$

$$= \left(x^2 + \cos(z)\right) \cdot \left(-x + y\right)'_y \cdot e^{-x+y} = \left(x^2 + \cos(z)\right) \cdot 1 \cdot e^{-x+y} = \left(x^2 + \cos(z)\right) \cdot e^{-x+y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1;1;p) = \left(1^2 + \cos(p)\right) \cdot e^{-1+1} = \left(1 + (-1)\right) \cdot e^0 = \left(1 + (-1)\right) \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\left(x^2 + \cos(z)\right) \cdot e^{-x+y}\right)'_z = \left(x^2 + \cos(z)\right)'_z \cdot e^{-x+y} + \left(x^2 + \cos(z)\right) \cdot \left(e^{-x+y}\right)'_z =$$

$$= \left(\cos(z)\right)'_z \cdot e^{-x+y} = -sen(z) \cdot e^{-x+y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1;1;p) = -sen(p) \cdot e^{-1+1} = -0 \cdot e^0 = 0$$

Então teremos que o gradiente da função no ponto (1;1;π) será: $\vec{\nabla} f(1;1;p) = (2;0;0)$

3. Calcule as derivadas direccionais dos seguintes campos escalares nos pontos e segundo as direcções indicadas.

a) $f(x;y)=\dfrac{x}{y}-4yx$ **com:** $(a;b)=(0;2)$ **e** $\vec{u}=(1;2)$

R:

Sabendo que: $D_{\vec{u}}f(x_0;y_0)=\vec{\nabla}f(x_0;y_0)\cdot\vec{u}_{un}$

Antes de mais teremos que determinar o vector unitário $\vec{u}_{un}$, pelo que:

$\vec{u}=(1;2)\Rightarrow\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ → Esta é a norma do vector.

Logo, o vector unitário será: $\vec{u}_{un}\rightarrow\dfrac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}};\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5};\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

Sabendo que o gradiente da função para qualquer ponto é dado por: $\vec{\nabla}f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x};\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, vamos começar por determinar as derivadas parciais da função:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}-4yx\right)'_x=\left(\frac{x}{y}\right)'_x-(4yx)'_x=\left(\frac{(x)'_x\cdot y-x\cdot(y)'_x}{y^2}\right)-4y=\left(\frac{1\cdot y}{y^2}\right)-4y=\frac{1}{y}-4y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0;2)=\frac{1}{2}-4\cdot 2=\frac{1}{2}-8=-\frac{15}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}-4yx\right)_y^{'}=\left(\frac{x}{y}\right)_y^{'}-\left(4yx\right)_y^{'}=\left(\frac{(x)_y^{'}\cdot y-x\cdot (y)_y^{'}}{y^2}\right)-4x=-\frac{x}{y^2}-4x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0;2)=-\frac{0}{2^2}-4\cdot 0=-0-0=0$$

Então teremos que o gradiente da função no ponto (0;2) será: $\vec{\nabla} f(0;2)=\left(-\frac{15}{2};0\right)$

Assim sendo teremos então que:

$$D_{\vec{u}} f(0;2)=\vec{\nabla} f(0;2)\cdot \vec{u}_{un}\Leftrightarrow D_{\vec{u}} f(0;2)=\left(-\frac{15}{2};0\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_{\vec{u}} f(0;2)=\left(-\frac{15}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\left(0\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\Leftrightarrow D_{\vec{u}} f(0;2)=-\frac{15\sqrt{5}}{10}=-\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

b) $f(x;y;z)=x^2+2y^2+3z^2$ **com:** $(a;b;c)=(1;1;0)$ **e na direcção:** $\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

R:

Sabendo que o gradiente para qualquer ponto é dado por: $\vec{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, vamos começar por determinar as derivadas parciais da função:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(???)_x^{'}=$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (???)'_y =$$

Então teremos que o gradiente da função no ponto (?;?) será: $\vec{\nabla} f(?;?) = (?;?)$

c) $f(x;y;z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ **com:** $(a;b;c) = (1;1;1)$ **e** $\vec{u}$ **está na direcção** $2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

R:

Sabendo que: $D_{\vec{u}} f(x_0;y_0;z_0) = \vec{\nabla} f(x_0;y_0;z_0) \cdot \vec{u}_{un}$

Antes de mais teremos que determinar o vector unitário $\vec{u}_{un}$, pelo que:

Para: $2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (2;2;-2) \Rightarrow \left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ → Esta é a norma.

Logo, o vector unitário será: $\vec{u}_{un} \to \frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|} = \left(\frac{2}{2\sqrt{3}};\frac{2}{2\sqrt{3}};-\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Sabendo que o gradiente da função para qualquer ponto é dado por: $\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y};\frac{\partial f}{\partial z}\right)$, vamos começar por determinar as derivadas parciais da função:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\left(\frac{x}{y}\right)^z\right)'_x \overset{3}{=} z \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = z \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \left(\frac{(x)'_x \cdot y - x \cdot (y)'_x}{y^2}\right) = z \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow$$

[3] $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1;1;1)=1\cdot\left(\frac{1}{1}\right)^{1-1}\cdot\frac{1}{1}=1\cdot 1^{0}\cdot 1=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\right)_{y}^{'}=z\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_{y}^{'}=z\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\left(\frac{(x)_{y}^{'}\cdot y-x\cdot(y)_{y}^{'}}{y^{2}}\right)=z\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\left(-\frac{x}{y^{2}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1;1;1)=1\cdot\left(\frac{1}{1}\right)^{1-1}\cdot\left(-\frac{1}{1^{2}}\right)=1\cdot 1^{0}\cdot(-1)=-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\right)_{z}^{'}={}^{4}\,(z)_{z}^{'}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\cdot\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\cdot\ln\left(\frac{x}{y}\right)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial z}(1;1;1)=\left(\frac{1}{1}\right)^{1}\cdot\ln\left(\frac{1}{1}\right)=1\cdot\ln(1)=0$$

Então teremos que o gradiente da função no ponto $(1;1;1)$ será: $\vec{\nabla} f(1;1;1)=(1;-1;0)$

Assim sendo teremos então que:

$$D_{\vec{u}} f(1;1;1)=\vec{\nabla} f(1;1;1)\cdot\vec{u}_{un}\Leftrightarrow D_{\vec{u}} f(1;1;1)=(1;-1;0)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\Leftrightarrow$$

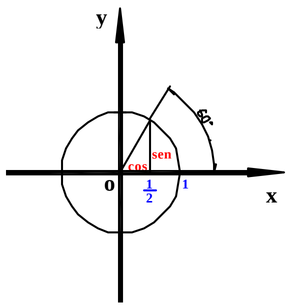
$$\Leftrightarrow D_{\vec{u}} f(1;1;1)=\left(1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\left(-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\left(0\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\Leftrightarrow D_{\vec{u}} f(1;1;1)=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=0$$

4 $\left(a^{u}\right)^{'}=u^{'}\cdot a^{u}\cdot\ln(a)$

d) $f(x;y)=5\cdot\ln\left(e^x+e^y\right)$**, na origem e na direcção que faz 60º com o eixo OX.**

R:

Pelo que é dito no enunciado, o ponto será $(a;b)=(0;0)$ e o vector será obtido a partir da seguinte circunferência trigonométrica:



Daqui se pode concluir que: $\begin{cases} x=\cos(60^o)=\dfrac{1}{2} \\ y=sen(60^o)=? \end{cases}$

Ora, sabendo do teorema de Pitágoras que: $h^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \Leftrightarrow 1=\frac{1}{4}+y^2 \Leftrightarrow \frac{4}{4}-\frac{1}{4}=y^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim sendo teremos que: $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Sabendo então que: $D_{\vec{u}}f(x_0;y_0)=\vec{\nabla}f(x_0;y_0)\cdot\vec{u}_{un}$

Antes de mais teremos que determinar o vector unitário $\vec{u}_{un}$, pelo que:

$$\vec{u}=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1 \rightarrow \text{ Esta é a norma.}$$

Logo, o vector unitário será: $\vec{u}_{un}\rightarrow\dfrac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}=\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{1};\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}\right)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Sabendo que o gradiente da função para qualquer ponto é dado por: $\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right)$, vamos começar por determinar as derivadas parciais da função:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(5 \cdot \ln\left(e^x + e^y\right)\right)'_x = 5 \cdot \ln\left(e^x + e^y\right)'_x =^5 5 \cdot \left(\frac{\left(e^x + e^y\right)'_x}{e^x + e^y} \right) = 5 \cdot \left(\frac{(x)'_x \cdot e^x}{e^x + e^y} \right) = \frac{5 \cdot e^x}{e^x + e^y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \frac{5 \cdot e^0}{e^0 + e^0} = \frac{5 \cdot 1}{1+1} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(5 \cdot \ln\left(e^x + e^y\right)\right)'_y = 5 \cdot \ln\left(e^x + e^y\right)'_y = 5 \cdot \left(\frac{\left(e^x + e^y\right)'_y}{e^x + e^y} \right) = 5 \cdot \left(\frac{(y)'_y \cdot e^y}{e^x + e^y} \right) = \frac{5 \cdot e^y}{e^x + e^y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = \frac{5 \cdot e^0}{e^0 + e^0} = \frac{5 \cdot 1}{1+1} = \frac{5}{2}$$

Então teremos que o gradiente da função no ponto (0;0) será: $\vec{\nabla} f(0;0) = \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right)$

Assim sendo teremos então que:

$$D_{\vec{u}} f(0;0) = \vec{\nabla} f(0;0) \cdot \vec{u}_{un} \Leftrightarrow D_{\vec{u}} f(0;0) = \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Leftrightarrow D_{\vec{u}} f(0;0) = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_{\vec{u}} f(0;0) = \frac{5}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

5 $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

4. Seja f uma função diferenciável num ponto (a;b).

a) Qual a direcção segundo a qual f tem maior taxa de variação? Nessa direcção, qual a taxa de variação de f?

R:

A derivada dirigida $D_{\vec{u}} f(a;b) = \left\| \vec{\nabla} f(a;b) \right\| \cdot \cos f$ toma o valor máximo quando $\cos f = 1 \Rightarrow f = 0^{o}$, isto é, quando $\vec{u}$ tem a mesma direcção de $\vec{\nabla} f(a;b)$. Nestas condições $D_{\vec{u}} f(a;b) = \left\| \vec{\nabla} f(a;b) \right\|$.

b) Qual a direcção segundo a qual f tem menor taxa de variação? Nessa direcção, qual a taxa de variação de f?

R:

A derivada dirigida $D_{\vec{u}} f(a;b) = \left\| \vec{\nabla} f(a;b) \right\| \cdot \cos f$ toma o valor mínimo quando $\cos f = -1 \Rightarrow f = 180^{o} = p$, isto é, quando $\vec{u}$ tem a direcção oposta à de $\vec{\nabla} f(a;b)$. Nestas condições $D_{\vec{u}} f(a;b) = -\left\| \vec{\nabla} f(a;b) \right\|$.

c) Qual a direcção segundo a qual f tem taxa de variação nula?

R:

A derivada dirigida $D_{\vec{u}} f(a;b) = \left\| \vec{\nabla} f(a;b) \right\| \cdot \cos f$ toma o valor nulo quando $\cos f = 0 \Rightarrow f = 90^{o} = p/2$, isto é, quando $\vec{u}$ tem a direcção oposta à de $\vec{\nabla} f(a;b)$.

5. Considere a equação $1+y=x^2-\ln(y)$

a) Mostre que a equação dada define y como função implícita de x numa vizinhança do ponto $(\sqrt{2};1)$**.**

R:

Para determinar o que nos é pedido temos que verificar cada um dos passos que se seguem:

i) Passar todos os elementos para o primeiro membro de forma a que se verifique a proposição: $F(x;y)=0$;

R: $1+y=x^2-\ln(y) \Leftrightarrow 1+y-x^2+\ln(y)=0 \Leftrightarrow \underbrace{y+\ln(y)-x^2+1}_{F(x;y)}=0 \Rightarrow F(x;y)=0$

ii) Verificar se: $F(a;b)=0$ é verdade;

R: $F(\sqrt{2};1)=1+\ln(1)-(\sqrt{2})^2+1=1+0-2+1=0 \Rightarrow F(\sqrt{2};1)=0 \rightarrow$ É verdade.

iii) Verificar se: $\frac{dy}{dx}(x_0)$ é contínua na vizinhança do ponto.

R: Sabendo que: $\frac{dy}{dx}(x_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)}$, vamos agora determinar as derivadas parciais respectivas:

$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0)=\left(y+\ln(y)-x^2+1\right)'_x=-2x$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)=\left(y+\ln(y)-x^2+1\right)'_y=1+\frac{1}{y}$

Estas derivadas são contínuas na vizinhança do ponto $\left(\sqrt{2};1\right)$.

Atendendo à expressão que permite o cálculo de $\frac{dy}{dx}(x_0)$, verificamos que ela não será válida se $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)=0$. Assim sendo, basta impor que: $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)\neq 0$ e calcular o valor desta derivada para o ponto $\left(\sqrt{2};1\right)$, pelo que teremos:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)=1+\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}\left(\sqrt{2};1\right)=1+\frac{1}{1}=2\neq 0$$

Conclusão: A equação dada define y como função implícita de x.

b) Determine $\frac{dy}{dx}\left(\sqrt{2}\right)$ **e** $\frac{d^2y}{dx^2}\left(\sqrt{2}\right)$

R:

$$\frac{dy}{dx}\left(\sqrt{2}\right)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\left(\sqrt{2};1\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\sqrt{2};1\right)}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}\left(\sqrt{2}\right)=-\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{1+\frac{1}{1}}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}\left(\sqrt{2}\right)=-\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x;y)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{-2x}{1+\frac{1}{y}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{\frac{y+1}{y}}\right)=2\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\frac{y+1}{y}}\right)=2\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x\cdot y}{y+1}\right)=$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{\frac{d}{dx}(x \cdot y) \cdot (y+1) - (x \cdot y) \cdot \frac{d}{dx}(y+1)}{(y+1)^2} \right) =^6 2 \cdot \left(\frac{\left(\frac{dx}{dx} \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx} \right) \cdot (y+1) - (x \cdot y) \cdot \frac{dy}{dx}}{(y+1)^2} \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{\left(y + x \cdot \frac{dy}{dx}(x;y) \right) \cdot (y+1) - (x \cdot y) \cdot \frac{dy}{dx}(x;y)}{(y+1)^2} \right) = ✪$$

Uma vez que se pretende determinar o valor de $\frac{d^2 y}{dx^2}\left(\sqrt{2};1\right)$, então vamos teremos que substituir agora os respectivos valores em ✪, pelo que teremos:

$$= 2 \cdot \left(\frac{\left(1 + \sqrt{2} \cdot \frac{dy}{dx}\left(\sqrt{2};1\right) \right) \cdot (1+1) - \left(\sqrt{2} \cdot 1\right) \cdot \frac{dy}{dx}\left(\sqrt{2};1\right)}{(1+1)^2} \right) =^7 2 \cdot \left(\frac{\left(1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot 2 - \left(\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2}}{2^2} \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{\left(1 + \left(\sqrt{2}\right)^2\right) \cdot 2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}{4} \right) = 2 \cdot \left(\frac{(1+2) \cdot 2 - 2}{4} \right) = 2 \cdot \left(\frac{6-2}{4} \right) = 2$$

c) Escreva a equação da recta tangente no ponto de abcissa $\sqrt{2}$.

R:

Sabendo que a equação de uma recta é dada por: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ e que o ponto de abcissa $\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$. Então teremos que:

---

6 Uma vez que **y** também depende de **x**, então não pode ser considerado como uma a constante aquando da derivação. Assim sendo, a derivada do cociente adoptou esta forma.

7 Uma vez que já se calculou o valor de $\frac{dy}{dx}\left(\sqrt{2};1\right) = \sqrt{2}$, então podemos substitui-lo já directamente.

$x=\sqrt{2} \Rightarrow 1+y=\left(\sqrt{2}\right)^2-\ln(y) \Leftrightarrow 1+y=2-\ln(y) \Leftrightarrow y+\ln(y)=2-1 \Leftrightarrow y+\ln(y)=1$

Ora, quando é que a igualdade anterior se verifica? Se tomar-mos y = 1, teremos que:

$y=1 \Rightarrow 1+\ln(1)=1 \Leftrightarrow 1+0=1 \Leftrightarrow 1=1 \rightarrow$ Proposição verdadeira.

Daqui se conclui então que y = 1.

Assim sendo, teremos então que: $x_0=\sqrt{2}$ e $y_0=1$.

Sabendo ainda que: $m=tga=\frac{df}{dx}(x_0;y_0)$ e que:[8] $\frac{df}{dx}(x_0;y_0)=-2x$

Logo: $\frac{df}{dx}\left(\sqrt{2};1\right)=-2\sqrt{2}$

Então, finalmente teremos que:

$y-y_0=m\cdot(x-x_0) \Leftrightarrow y-1=-2\sqrt{2}\cdot\left(x-\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow y=-2\sqrt{2}\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\left(-2\sqrt{2}\right)\cdot x+2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2+1 \Leftrightarrow y=\left(-2\sqrt{2}\right)\cdot x+2\cdot 2+1 \Leftrightarrow y=\left(-2\sqrt{2}\right)\cdot x+5$

[8] Já calculado anteriormente.

6. Determine $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ das funções dadas implicitamente pelas equações.

a) $x^2y^2 + x - 2y^3 = 0$.

R:

Antes de mais vamos começar por passar todos os elementos da equação para o primeiro membro, pelo que teremos:

$$\underbrace{x^2y^2 + x - 2y^3}_{F(x;y)} = 0 \Leftrightarrow F(x;y) = 0$$

Agora já podemos calcular o que nos é pedido, sabendo que: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$, logo teremos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\left(x^2y^2 + x - 2y^3\right)'_x}{\left(x^2y^2 + x - 2y^3\right)'_y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2 + 1}{2x^2y - 6y^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^2 - 1}{2x^2y - 6y^2}$$

Ora, conforme é sabido:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-2xy^2 - 1}{2x^2y - 6y^2}\right) =$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}\left(-2xy^2 - 1\right)\cdot\left(2x^2y - 6y^2\right) - \left(-2xy^2 - 1\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(2x^2y - 6y^2\right)}{\left(2x^2y - 6y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{d}{dx}\left(-2xy^2\right) - \frac{d}{dx}1\right)\cdot\left(2x^2y-6y^2\right) - \left(-2xy^2-1\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}\left(2x^2y\right) - \frac{d}{dx}\left(6y^2\right)\right)}{\left(2x^2y-6y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{d}{dx}(-2x)\cdot y^2 + (-2x)\frac{dy^2}{dx}\right)\cdot\left(2x^2y-6y^2\right) - \left(-2xy^2-1\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}\left(2x^2\right)\cdot y + \left(2x^2\right)\cdot\frac{dy}{dx} - 6\cdot\frac{dy^2}{dx}\right)}{\left(2x^2y-6y^2\right)^2} = \text{[9]}$$

$$= \frac{\left(-2\cdot\frac{dx}{dx}\cdot y^2 + (-2x)\frac{dy^2}{dx}\right)\cdot\left(2x^2y-6y^2\right) - \left(-2xy^2-1\right)\cdot\left(2\cdot\frac{dx^2}{dx}\cdot y + \left(2x^2\right)\cdot\frac{dy}{dx} - 6\cdot\frac{dy^2}{dx}\right)}{\left(2x^2y-6y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\begin{gathered}\left(-2\cdot1\cdot y^2 + (-2x)\cdot\frac{-2xy^4-1}{2x^2y^2-6y^4}\right)\cdot\left(2x^2y-6y^2\right) - \\ -\left(-2xy^2-1\right)\cdot\left(2\cdot2x\cdot y + \left(2x^2\right)\cdot\frac{-2xy^2-1}{2x^2y-6y^2} - 6\cdot\frac{-2xy^4-1}{2x^2y^2-6y^4}\right)\end{gathered}}{\left(2x^2y-6y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(-2y^2 - 2x\cdot\frac{-2xy^4-1}{2x^2y^2-6y^4}\right)\cdot\left(2x^2y-6y^2\right) - \left(-2xy^2-1\right)\cdot\left(4xy + 2x^2\cdot\frac{-2xy^2-1}{2x^2y-6y^2} - \frac{-12xy^4-6}{2x^2y^2-6y^4}\right)}{\left(2x^2y-6y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(-2y^2 + \frac{4x^2y^4+2x}{2x^2y^2-6y^4}\right)\cdot\left(2x^2y-6y^2\right) + \left(2xy^2+1\right)\cdot\left(\frac{-8x^2y^3-4xy-4x^3y^2-2x^2}{2x^2y-6y^2} + \frac{12xy^4+6}{2x^2y^2-6y^4}\right)}{\left(2x^2y-6y^2\right)^2}$$

---

[9] Como: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^2-1}{2x^2y-6y^2}$ (já calculado anteriormente), então: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^2-1}{2x^2y-6y^2} \Rightarrow \frac{dy^2}{dx} = \frac{-2x\left(y^2\right)^2-1}{2x^2y^2-6\left(y^2\right)^2}$

b) $x^2 - yx + y^2 = 1$.

R:

Antes de mais vamos começar por passar todos os elementos da equação para o primeiro membro, pelo que teremos:

$$x^2 - yx + y^2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - yx + y^2 - 1}_{F(x;y)} = 0 \Leftrightarrow F(x;y) = 0$$

Agora já podemos calcular o que nos é pedido, sabendo que: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$, logo teremos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\left(x^2 - yx + y^2 - 1\right)'_x}{\left(x^2 - yx + y^2 - 1\right)'_y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x - y}{-x + 2y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

Ora, conforme é sabido:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y-2x}{2y-x}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(y-2x)\cdot(2y-x) - (y-2x)\cdot\frac{d}{dx}(2y-x)}{(2y-x)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}(2x)\right)\cdot(2y-x) - (y-2x)\cdot\left(\frac{d}{dx}(2y) - \frac{dx}{dx}\right)}{(2y-x)^2} =$$

$$=\frac{\left(\frac{dy}{dx}-2\cdot\frac{dx}{dx}\right)\cdot(2y-x)-(y-2x)\cdot\left(2\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{dx}{dx}\right)}{(2y-x)^2}=^{10}$$

$$=\frac{\left(\frac{y-2x}{2y-x}-2\cdot 1\right)\cdot(2y-x)-(y-2x)\cdot\left(2\cdot\frac{y-2x}{2y-x}-1\right)}{(2y-x)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{y-2x-2\cdot(2y-x)}{2y-x}\right)\cdot(2y-x)-(y-2x)\cdot\left(\frac{2y-4x-(2y-x)}{2y-x}\right)}{(2y-x)^2}=$$

$$=\frac{(y-2x-4y+2x)-(y-2x)\cdot\left(\frac{2y-4x-2y+x}{2y-x}\right)}{(2y-x)^2}=\frac{(-3y)-(y-2x)\cdot\left(\frac{-3x}{2y-x}\right)}{(2y-x)^2}=$$

$$=\frac{(-3y)-\left(\frac{-3xy+6x^2}{2y-x}\right)}{(2y-x)^2}=\frac{-\left(\frac{9xy^2-18x^2y}{2y-x}\right)}{(2y-x)^2}=\frac{18x^2y-9xy^2}{(2y-x)^3}$$

[10] Como o valor da derivada de y em ordem a x já foi calculado anteriormente: $\frac{dy}{dx}=\frac{y-2x}{2y-x}$, agora é só substituir.

7. Mostre que as seguintes equações definem z como função implícita de x e y numa vizinhança dos pontos mencionados. Calcule: $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ nesses pontos.

a) $-\cos(x+2y+z)=2x+y-3z-1$**, na vizinhança de** $(0;0;0)$**.**

R:

Para determinar o que nos é pedido temos que verificar cada um dos passos que se seguem:

i) Passar todos os elementos para o primeiro membro de forma a que se verifique a proposição: $F(x;y;z)=0$;

R: $-\cos(x+2y+z)=2x+y-3z-1 \Leftrightarrow \underbrace{-\cos(x+2y+z)-2x-y+3z+1}_{F(x;y;z)}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x;y;z)=0$

ii) Verificar se: $F(a;b;c)=0$ é verdade;

R: $F(0;0;0)=-\cos(0+2\cdot 0+0)-2\cdot 0-0+3\cdot 0+1=-\cos(0)-0-0+0+1=$

$-1+1=0 \Rightarrow F(0;0;0)=0 \rightarrow$ É verdade.

iii) Verificar se: $\frac{dz}{dx}(x_0;y_0)$ e $\frac{dz}{dy}(x_0;y_0)$ são contínuas na vizinhança do ponto.

R: Sabendo que: $\frac{dz}{dx}(x_0;y_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)}$ e que: $\frac{dz}{dy}(x_0;y_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)}$,

vamos agora determinar as derivadas parciais respectivas:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0) = (-\cos(x+2y+z)-2x-y+3z+1)'_x =$$

$$= \left(-(x+2y+z)'_x \cdot (-sen(x+2y+z))\right) - (2x+y-3z-1)'_x = (1\cdot sen(x+2y+z)) - 2 =$$

$$= sen(x+2y+z) - 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0) = (-\cos(x+2y+z)-2x-y+3z+1)'_y =$$

$$= \left(-(x+2y+z)'_y \cdot (-sen(x+2y+z))\right) - (2x+y-3z-1)'_y = (2\cdot sen(x+2y+z)) - 1 =$$

$$= 2\cdot sen(x+2y+z) - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0) = (-\cos(x+2y+z)-2x-y+3z+1)'_z =$$

$$= \left(-(x+2y+z)'_z \cdot (-sen(x+2y+z))\right) - (2x+y-3z-1)'_z = (1\cdot sen(x+2y+z)) + 3 =$$

$$= sen(x+2y+z) + 3$$

Estas derivadas são contínuas na vizinhança do ponto $(0;0;0)$, porque o $sen(0)=0$ e os restantes elementos de cada uma das derivadas são constantes, portanto contínuas.

Atendendo às expressões que permitem o cálculo de $\frac{dz}{dx}(x_0;y_0)$ e de $\frac{dz}{dy}(x_0;y_0)$, verificamos que elas não serão válidas se: $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)=0$. Assim sendo, basta impor que: $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)\neq 0$ e calcular o valor desta derivada para o ponto $(0;0;0)$, pelo que teremos:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)=sen(x+2y+z)+3\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(0;0;0)=sen(0+2\cdot 0+0)+3=0+3=3\neq 0$$

Conclusão: A equação dada define z como função implícita de x e de y.

b) $x+y+z=sen(xyz)$**, na vizinhança de** $(0;0;0)$**.**

R:

Para determinar o que nos é pedido temos que verificar cada um dos passos que se seguem:

i) Passar todos os elementos para o primeiro membro de forma a que se verifique a proposição: $F(x;y;z)=0$;

R: $x+y+z=sen(xyz)\Leftrightarrow \underbrace{x+y+z-sen(xyz)}_{F(x;y;z)}=0\Leftrightarrow F(x;y;z)=0$

ii) Verificar se: $F(a;b;c)=0$ é verdade;

R: $F(0;0;0)=0+0+0-sen(0\cdot 0\cdot 0)=0-0=0\Rightarrow F(0;0;0)=0\rightarrow$ É verdade.

iii) Verificar se: $\frac{dz}{dx}(x_0; y_0)$ e $\frac{dz}{dy}(x_0; y_0)$ são contínuas na vizinhança do ponto.

R: Sabendo que: $\frac{dz}{dx}(x_0; y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0; z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0; y_0; z_0)}$ e que: $\frac{dz}{dy}(x_0; y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0; z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0; y_0; z_0)}$,

vamos agora determinar as derivadas parciais respectivas:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0; z_0) = (x + y + z - sen(xyz))'_x = (x + y + z)'_x - ((xyz)'_x \cdot \cos(xyz)) = 1 - yz \cdot \cos(xyz)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0; z_0) = (x + y + z - sen(xyz))'_y = (x + y + z)'_y - ((xyz)'_y \cdot \cos(xyz)) = 1 - xz \cdot \cos(xyz)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0; y_0; z_0) = (x + y + z - sen(xyz))'_z = (x + y + z)'_z - ((xyz)'_z \cdot \cos(xyz)) = 1 - xy \cdot \cos(xyz)$$

Estas derivadas são contínuas na vizinhança do ponto $(0;0;0)$, porque se substituirmos o valor do ponto em cada uma das derivadas parciais, obteremos constantes, portanto contínuas.

Atendendo às expressões que permitem o cálculo de $\frac{dz}{dx}(x_0; y_0)$ e de $\frac{dz}{dy}(x_0; y_0)$, verificamos que elas não serão válidas se: $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0; y_0; z_0) = 0$.

Assim sendo, basta impor que: $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)\neq 0$ e calcular o valor desta derivada para o ponto $(0;0;0)$, pelo que teremos:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)=1-xy\cdot\cos(xyz)\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial z}(0;0;0)=1-0\cdot 0\cdot\cos(0\cdot 0\cdot 0)=1-0=1\neq 0$$

Conclusão: A equação dada define z como função implícita de x e de y.

8. Considere a igualdade: $\cos(x^2)\cdot z+e^x=2zy$ **. Mostre que define uma função implícita z de x e y numa vizinhança de** $(0;1;c)$**. Calcule:** $\frac{\partial z}{\partial x}(0;1)$ **e** $\frac{\partial z}{\partial y}(0;1)$**.**

R:

Para determinar o que nos é pedido temos que verificar cada um dos passos que se seguem:

i) Passar todos os elementos para o primeiro membro de forma a que se verifique a proposição: $F(x;y;z)=0$;

R: $\cos(x^2)\cdot z+e^x=2zy\Leftrightarrow\underbrace{\cos(x^2)\cdot z+e^x-2zy}_{F(x;y;z)}=0\Leftrightarrow F(x;y;z)=0$

ii) Verificar se: $F(a;b;c)=0$ é verdade;

R: $F(0;1;c)=\cos(0^2)\cdot c+e^0-2\cdot c\cdot 1=1\cdot c+1-2c=1-c$

Se: $c=1\Rightarrow F(0;1;1)=1-1=0\rightarrow$ É verdade.

iii) Verificar se: $\frac{dz}{dx}(x_0;y_0)$ e $\frac{dz}{dy}(x_0;y_0)$ são contínuas na vizinhança do ponto.

R: Sabendo que: $\frac{dz}{dx}(x_0;y_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)}$ e que: $\frac{dz}{dy}(x_0;y_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)}$,

vamos agora determinar as derivadas parciais respectivas:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)=\left(\cos\left(x^2\right)\cdot z+e^x-2zy\right)'_x=\left(\cos\left(x^2\right)\cdot z\right)'_x+\left(e^x-2zy\right)'_x=$$

$$=\left(\left(-\left(x^2\right)'_x\cdot sen\left(x^2\right)\right)\cdot z+\cos\left(x^2\right)\cdot(z)'_x\right)+\left((x)'_x\cdot e^x-(2zy)'_x\right)=$$

$$=\left(\left(-2x\cdot sen\left(x^2\right)\right)\cdot z+\cos\left(x^2\right)\cdot 0\right)+\left(1\cdot e^x-0\right)=e^x-2xz\cdot sen\left(x^2\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)=\left(\cos\left(x^2\right)\cdot z+e^x-2zy\right)'_y=\left(\cos\left(x^2\right)\cdot z\right)'_y+\left(e^x-2zy\right)'_y=$$

$$=\left(\left(-\left(x^2\right)'_y\cdot sen\left(x^2\right)\right)\cdot z+\cos\left(x^2\right)\cdot(z)'_y\right)+\left((x)'_y\cdot e^x-(2zy)'_y\right)=$$

$$=\left(\left(-0\cdot sen\left(x^2\right)\right)\cdot z+\cos\left(x^2\right)\cdot 0\right)+\left(0\cdot e^x-2z\right)=-2z$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)=\left(\cos\left(x^2\right)\cdot z+e^x-2zy\right)'_z=\left(\cos\left(x^2\right)\cdot z\right)'_z+\left(e^x-2zy\right)'_z=$$

$$=\left(\left(-\left(x^2\right)'_z\cdot sen\left(x^2\right)\right)\cdot z+\cos\left(x^2\right)\cdot(z)'_z\right)+\left((x)'_z\cdot e^x-(2zy)'_z\right)=$$

$$=\left(\left(-0\cdot sen\left(x^2\right)\right)\cdot z+\cos\left(x^2\right)\cdot 1\right)+\left(0\cdot e^x-2y\right)=\cos\left(x^2\right)-2y$$

Estas derivadas são contínuas na vizinhança do ponto $(0;1;1)$, porque se substituirmos o valor do ponto em cada uma das derivadas parciais, obteremos constantes, portanto contínuas.

Atendendo às expressões que permitem o cálculo de $\frac{dz}{dx}(x_0;y_0)$ e de $\frac{dz}{dy}(x_0;y_0)$, verificamos que elas não serão válidas se: $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)=0$.

Assim sendo, basta impor que: $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)\neq 0$ e calcular o valor desta derivada para o ponto $(0;0;0)$, pelo que teremos:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)=\cos(x^2)-2y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(0;1;1)=\cos(0^2)-2\cdot 1=1-2=-1\neq 0$$

Conclusão: A equação dada define z como função implícita de x e de y.

9. Considere a equação: $x+2yx+3z^2+x^2z=1$**.**

a) Diga para que valores de k esta equação define z implicitamente como função de x e y na vizinhança do ponto $(1;0;k)$**.**

R:

Para determinar o que nos é pedido temos que verificar cada um dos passos que se seguem:

i) Passar todos os elementos para o primeiro membro de forma a que se verifique a proposição: $F(x;y;z)=0$;

R: $x+2yx+3z^2+x^2z=1 \Leftrightarrow \underbrace{x+2yx+3z^2+x^2z-1}_{F(x;y;z)}=0 \Leftrightarrow F(x;y;z)=0$

ii) Verificar se: $F(a;b;c)=0$ é verdade;

R: $F(1;0;k)=1+2\cdot 0\cdot 1+3\cdot k^2+1^2\cdot k-1=3\cdot k^2+k=k\cdot(3\cdot k+1)$

Assim sendo teremos: $k\cdot(3\cdot k+1)=0 \Leftrightarrow k=0 \vee k=-\dfrac{1}{3}$

iii) Verificar se: $\dfrac{dz}{dx}(x_0;y_0)$ e $\dfrac{dz}{dy}(x_0;y_0)$ são contínuas na vizinhança do ponto.

R: Sabendo que: $\dfrac{dz}{dx}(x_0;y_0)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)}$ e que: $\dfrac{dz}{dy}(x_0;y_0)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)}$,

vamos agora determinar as derivadas parciais respectivas:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)=\left(x+2yx+3z^2+x^2z-1\right)'_x=1+2y+2xz$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)=\left(x+2yx+3z^2+x^2z-1\right)'_y=2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)=\left(x+2yx+3z^2+x^2z-1\right)'_z=6z+x^2$$

Estas derivadas são contínuas na vizinhança dos pontos $(1;0;0)$ e $\left(1;0;-\dfrac{1}{3}\right)$, porque quer para um quer para o outro, resultam constantes da sua substituição nas expressões das derivadas parciais calculadas.

Atendendo às expressões que permitem o cálculo de $\frac{dz}{dx}(x_0;y_0)$ e de $\frac{dz}{dy}(x_0;y_0)$, verificamos que elas não serão válidas se: $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)=0$.

Assim sendo, basta impor que: $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)\neq 0$ e calcular o valor desta derivada para cada um dos pontos referidos anteriormente, pelo que teremos:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)=6z+x^2 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(1;0;0)=6\cdot 0+1^2=1\neq 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)=6z+x^2 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}\left(1;0;-\frac{1}{3}\right)=6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1^2=-1\neq 0$$

Conclusão: A equação dada define z como função implícita de x e de y para $k\in\left\{0;-\frac{1}{3}\right\}$

b) Calcule as derivadas parciais da função nos referidos pontos.

R:

Para o ponto $(1;0;0)$ teremos o seguinte:

$$\frac{dz}{dx}(x_0;y_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)}=-\frac{1+2y+2xz}{6z+x^2}\Rightarrow\frac{dz}{dx}(1;0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1;0;0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1;0;0)}=-\frac{1+2\cdot 0+2\cdot 0\cdot 0}{6\cdot 0+1^2}=$$

$$=-\frac{1}{1}=-1$$

$$\frac{dz}{dy}(x_0;y_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)}=-\frac{2x}{6z+x^2}\Rightarrow\frac{dz}{dy}(1;0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1;0;0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1;0;0)}=-\frac{2\cdot 1}{6\cdot 0+1^2}=-2$$

Para o ponto $\left(1;0;-\frac{1}{3}\right)$ teremos o seguinte:

$$\frac{dz}{dx}(x_0;y_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)}=-\frac{1+2y+2xz}{6z+x^2}\Rightarrow\frac{dz}{dx}(1;0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\left(1;0;-\frac{1}{3}\right)}{\frac{\partial F}{\partial z}\left(1;0;-\frac{1}{3}\right)}=$$

$$=-\frac{1+2\cdot 0+2\cdot 0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1^2}=-\frac{1}{-1}=1$$

$$\frac{dz}{dy}(x_0;y_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)}=-\frac{2x}{6z+x^2}\Rightarrow\frac{dz}{dy}(1;0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\left(1;0;-\frac{1}{3}\right)}{\frac{\partial F}{\partial z}\left(1;0;-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{2\cdot 1}{6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1^2}=$$

$$-\frac{2}{-1}=2$$

c) Calcule ainda $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ nos pontos considerados.

R:

Sabendo que: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ e que: $\frac{dz}{dx}(x_0;y_0) = -\frac{1+2y+2xz}{6z+x^2}$. Então teremos que:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{1+2y+2xz}{6z+x^2} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}(1+2y+2xz)\cdot(6z+x^2)-(1+2y+2xz)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(6z+x^2)}{(6z+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{\left(\frac{\partial}{\partial y}(1)+2\cdot\frac{\partial y}{\partial y}+2\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xz)\right)\cdot(6z+x^2)-(1+2y+2xz)\cdot\left(6\cdot\frac{\partial}{\partial y}(z)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2)\right)}{(6z+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{\left(0+2\cdot 1+2\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial y}\cdot z+x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right)\cdot(6z+x^2)-(1+2y+2xz)\cdot\left(6\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(x^2)\right)}{(6z+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{\left(2+2\cdot\left(0+x\cdot\left(-\frac{2x}{6z+x^2}\right)\right)\right)\cdot(6z+x^2)-(1+2y+2xz)\cdot\left(6\cdot\left(-\frac{2x}{6z+x^2}\right)+0\right)}{(6z+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{\left(2-\left(\frac{4x^2}{6z+x^2}\right)\right)\cdot(6z+x^2)-(1+2y+2xz)\cdot\left(-\frac{12x}{6z+x^2}\right)}{(6z+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{\left(\frac{2\cdot(6z+x^2)-4x^2}{6z+x^2}\right)\cdot(6z+x^2)+\frac{(1+2y+2xz)\cdot 12x}{6z+x^2}}{(6z+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{\left(12z + 2x^2 - 4x^2\right)\cdot\left(6z + x^2\right) + 12x + 24xy + 24x^2 z}{\left(6z + x^2\right)^3} =$$

$$= -\frac{\left(12z - 2x^2\right)\cdot\left(6z + x^2\right) + 12x + 24xy + 24x^2 z}{\left(6z + x^2\right)^3} =$$

$$= -\frac{72z^2 + 12x^2 z - 12x^2 z - 2x^4 + 12x + 24xy + 24x^2 z}{\left(6z + x^2\right)^3} =$$

$$= -\frac{-2x^4 + 12x + 24xy + 24x^2 z + 72z^2}{\left(6z + x^2\right)^3} = \frac{2x^4 - 12x - 24xy - 24x^2 z - 72z^2}{\left(6z + x^2\right)^3}$$

Assim sendo teremos, para o ponto $(1;0;0)$ teremos o seguinte:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2x^4 - 12x - 24xy - 24x^2 z - 72z^2}{\left(6z + x^2\right)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1;0;0) = \frac{2\cdot 1^4 - 12\cdot 1 - 24\cdot 1\cdot 0 - 24\cdot 1^2\cdot 0 - 72\cdot 0^2}{\left(6\cdot 0 + 1^2\right)^3} = \frac{2 - 12 - 0 - 0 - 0}{(1)^3} = -10$$

Para o ponto $\left(1;0;-\frac{1}{3}\right)$ teremos o seguinte:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2x^4 - 12x - 24xy - 24x^2 z - 72z^2}{\left(6z + x^2\right)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(1;0;-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\cdot 1^4 - 12\cdot 1 - 24\cdot 1\cdot 0 - 24\cdot 1^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) - 72\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 1^2\right)^3} = \frac{2 - 12 - 0 + \frac{24}{3} - \frac{72}{9}}{(-1)^3} =$$

$$= \frac{\frac{-(10\cdot 9)+(24\cdot 3)-72}{9}}{-1} = \frac{-90+72-72}{-9} = 10$$

10. Mostre que o sistema $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ define implicitamente y e z como funções de x na vizinhança de $P=(1;2;-1)$. Determine o valor de $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ nesse ponto.

R:

Para este tipo de casos teremos que verificar as seguintes três condições:

i) Verificar se $f(a;b;c)=0$ é verdade;

R: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(1;2;-1)=0 \\ f_2(1;2;-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2+2^2+(-1)^2-6=0 \\ 1-2-(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+4+1-6=0 \\ 1-2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$ → Verdade.

ii) Determinar a matriz definida pelo sistema, sabendo que: $\begin{cases} y=f(x) \\ z=f(x) \end{cases}$[11] e verificar se o valor do seu determinante no ponto P é diferente de zero;

R: $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^2+y^2+z^2-6)'_y & (x^2+y^2+z^2-6)'_z \\ (x-y-z)'_y & (x-y-z)'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2z \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

[11] No enunciado é dit o que y e z, são funções de x, logo temos esta igualdade.

O determinante no ponto $(1;2;-1)$ será dado por:

$$\Delta(1;2;-1)=\begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot(-1) \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Delta(1;2;-1)=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Delta(1;2;-1)=(4\times(-1))-(-1\times(-2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta(1;2;-1)=-6\neq 0$$

iii) Determinar as derivadas totais de cada ramo da função em ordem a x.

R: $$\begin{cases} \dfrac{df_1}{dx}=0 \\ \dfrac{df_2}{dx}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(x^2+y^2+z^2-6\right)=0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(x-y-z\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(x^2\right)+\dfrac{d}{dx}\left(y^2\right)+\dfrac{d}{dx}\left(z^2\right)-\dfrac{d6}{dx}=0 \\ \dfrac{dx}{dx}-\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Leftrightarrow^{12}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\cdot\dfrac{dx}{dx}+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}-0=0 \\ \dfrac{dx}{dx}-\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\cdot 1+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 1-\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dz}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y\cdot\left(1-\dfrac{dz}{dx}\right)+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dz}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-2y\cdot\dfrac{dz}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dz}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=2y\cdot\dfrac{dz}{dx}-2z\cdot\dfrac{dz}{dx} \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dz}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow$$

[12] As derivadas aqui são do tipo: $\left(u^a\right)'=a\cdot u^{a-1}\cdot u'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=\dfrac{dz}{dx}\cdot(2y-2z) \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dz}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x+2y}{2y-2z} \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{dz}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x+2y}{2y-2z} \\ \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{2x+2y}{2y-2z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x+2y}{2y-2z} \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y-2z}{2y-2z}-\dfrac{2x+2y}{2y-2z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x+2y}{2y-2z} \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x-2z}{2y-2z} \end{cases}$$

Assim sendo teremos que: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x-2z}{2y-2z} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}(1;2;-1)=\dfrac{-2\cdot 1-2\cdot(-1)}{2\cdot 2-2\cdot(-1)}=0$

Sabendo que: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$. Então teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{-2x-2z}{2y-2z}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(-2x-2z)\cdot(2y-2z)-(-2x-2z)\cdot\frac{d}{dx}(2y-2z)}{(2y-2z)^2}=$$

$$=\frac{\left(-2\cdot\frac{dx}{dx}-2\cdot\frac{dz}{dx}\right)\cdot(2y-2z)+(2x+2z)\cdot\left(2\cdot\frac{dy}{dx}-2\cdot\frac{dz}{dx}\right)}{(2y-2z)^2}=$$ [13]

$$=\frac{\left(-2\cdot 1-2\cdot\frac{2x+2y}{2y-2z}\right)\cdot(2y-2z)+(2x+2z)\cdot\left(2\cdot\frac{-2x-2z}{2y-2z}-2\cdot\frac{2x+2y}{2y-2z}\right)}{(2y-2z)^2}=$$

[13] Como $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dz}{dx}$, já foram calculados anteriormente, então basta substituir pelos respectivos valores.

$$= \frac{\left(-2+\frac{-4x-4y}{2y-2z}\right)\cdot(2y-2z)+(2x+2z)\cdot\left(\frac{-4x-4z}{2y-2z}+\frac{-4x-4y}{2y-2z}\right)}{(2y-2z)^2}=$$

$$= \frac{\left(\frac{-2\cdot(2y-2z)}{2y-2z}+\frac{-4x-4y}{2y-2z}\right)\cdot(2y-2z)+(2x+2z)\cdot\left(\frac{-8x-4y-4z}{2y-2z}\right)}{(2y-2z)^2}=$$

$$= \frac{\left(\frac{-4y+4z}{2y-2z}+\frac{-4x-4y}{2y-2z}\right)\cdot(2y-2z)+\left(\frac{-16x^2-8xy-8xz-16zx-8yz-8z^2}{2y-2z}\right)}{(2y-2z)^2}=$$

$$= \frac{\left(\frac{-4x-8y+4z}{2y-2z}\right)\cdot(2y-2z)+\left(\frac{-16x^2-8xy-24xz-8yz-8z^2}{2y-2z}\right)}{(2y-2z)^2}=$$

$$= \frac{\left(\frac{-8xy-16y^2+8yz+8xz+16yz-8z^2}{2y-2z}\right)+\left(\frac{-16x^2-8xy-24xz-8yz-8z^2}{2y-2z}\right)}{(2y-2z)^2}=$$

$$= \frac{-16x^2-16xy-16xz-16y^2+16yz-16z^2}{(2y-2z)^3}$$

Logo, para o ponto (1;2;-1), teremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-16x^2-16xy-16xz-16y^2+16yz-16z^2}{(2y-2z)^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}(1;2;-1)=\frac{-16\cdot1^2-16\cdot1\cdot2-16\cdot1\cdot(-1)-16\cdot2^2+16\cdot2\cdot(-1)-16\cdot(-1)^2}{(2\cdot2-2\cdot(-1))^3}=\frac{-144}{216}$$

11. Prove que o sistema $\begin{cases} xy-\ln(z+w)=0 \\ zw-\ln(x+y)=0 \end{cases}$ **define z e w, como funções implícitas de x e y na vizinhança do ponto** $(1;0;1;0)$ **calcule** $\frac{\partial z}{\partial x}$**,** $\frac{\partial z}{\partial y}$**,** $\frac{\partial w}{\partial x}$ **e** $\frac{\partial w}{\partial y}$**, no ponto** $(1;0)$**.**

R:

Para este tipo de casos teremos que verificar as seguintes três condições:

i) Verificar se $f(a;b;c;d)=0$ é verdade;

R: $\begin{cases} xy-\ln(z+w)=0 \\ zw-\ln(x+y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(1;0;1;0)=0 \\ f_2(1;0;1;0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\cdot 0-\ln(1+0)=0 \\ 1\cdot 0-\ln(1+0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0-\ln(1)=0 \\ 0-\ln(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0-0=0 \\ 0-0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \rightarrow$ Verdade.

ii) Determinar a matriz definida pelo sistema, sabendo que: $\begin{cases} z=f(x;y) \\ w=f(x;y) \end{cases}$ e verificar se o valor do seu determinante no ponto P é diferente de zero;

R: $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (xy-\ln(z+w))'_z & (xy-\ln(z+w))'_w \\ (zw-\ln(x+y))'_z & (zw-\ln(x+y))'_w \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \left((xy)'_z - \frac{(z+w)'_z}{z+w}\right) & \left((xy)'_w - \frac{(z+w)'_w}{z+w}\right) \\ \left((zw)'_z - \frac{(x+y)'_z}{x+y}\right)'_z & \left((zw)'_w - \frac{(x+y)'_w}{x+y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{z+w} & -\frac{1}{z+w} \\ w & z \end{bmatrix}$$

O determinante no ponto $(1;2;-1)$ será dado por:

$$\Delta(1;0;1;0)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{1+0} & -\frac{1}{1+0}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\Delta(1;0;1;0)=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\Delta(1;0;1;0)=(-1\times1)-(0\times(-1))\Leftrightarrow\Delta(1;0;1;0)=-1\neq0$$

iii) Determinar as derivadas totais de cada ramo da função em ordem a x e a y.

R: $$\begin{cases}\frac{df_1}{dx}=0\\ \frac{df_2}{dx}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{d}{dx}(xy-\ln(z+w))=0\\ \frac{d}{dx}(zw-\ln(x+y))=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{d}{dx}(xy)-\frac{d}{dx}(\ln(z+w))=0\\ \frac{d}{dx}(zw)-\frac{d}{dx}(\ln(x+y))=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{dx}{dx}\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{\frac{dz}{dx}+\frac{dw}{dx}}{z+w}=0\\ \frac{dz}{dx}\cdot w+z\cdot\frac{dw}{dx}-\frac{\frac{dx}{dx}+\frac{dy}{dx}}{x+y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{\frac{dz}{dx}+\frac{dw}{dx}}{z+w}=0\\ \frac{dz}{dx}\cdot w+z\cdot\frac{dw}{dx}-\frac{1+\frac{dy}{dx}}{x+y}=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

Comentário: Tenho aqui um sistema de três incógnitas e apenas duas equações.