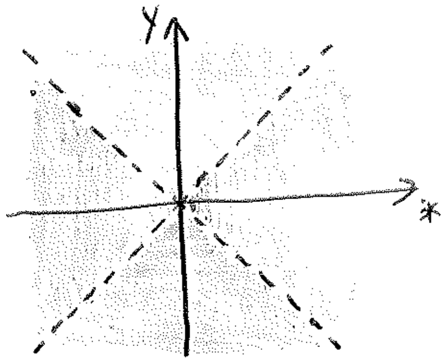
Ficha 4-A

(1) a) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2-y^2}$



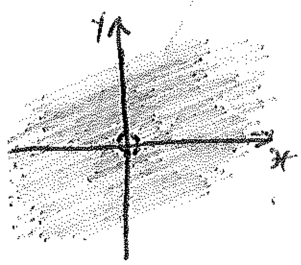
$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \neq 0\}$

$-y^2 \neq -x^2$

$y^2 \neq x^2$

$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm x\}$

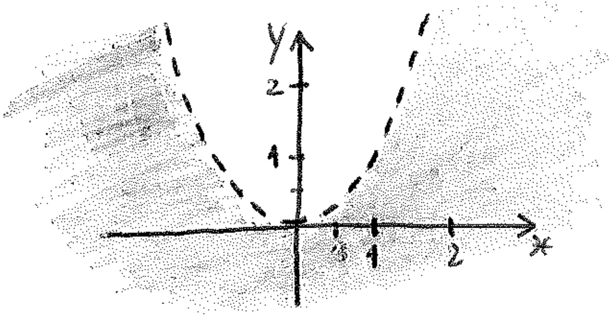
b) $g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$



$Dg = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$

$Dg = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

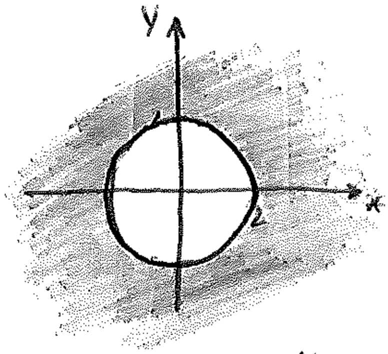
c) $Di = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y > 0\}$



$-y > -x^2$

$Di = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$

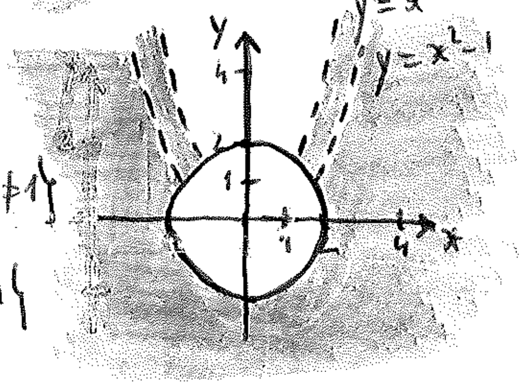
d) $b(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$



$Db = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 \geq 0\}$

$Db = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\}$

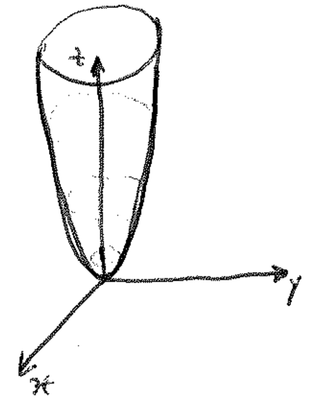
e) $d(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{\ln(x^2-y)}$



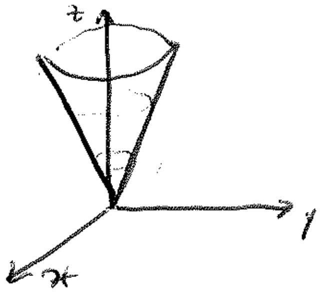
$Dd = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4 \wedge x^2 - y > 0 \wedge x^2 - y \neq 1\}$

$Dd = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4 \wedge y < x^2 \wedge y \neq x^2 - 1\}$

② a) $h(x,y) = x^2+y^2$ (parabolóide)

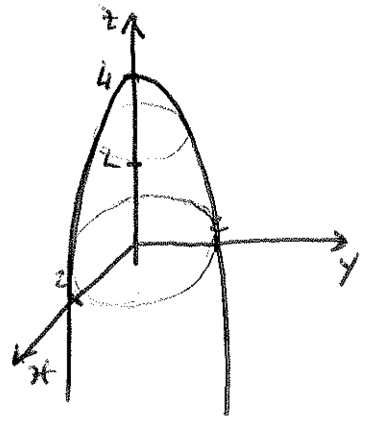


b) $j(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ (cone)



c) $l(x,y) = 4-x^2-y^2$ (parabolóide)

$z = 4-(x^2+y^2)$

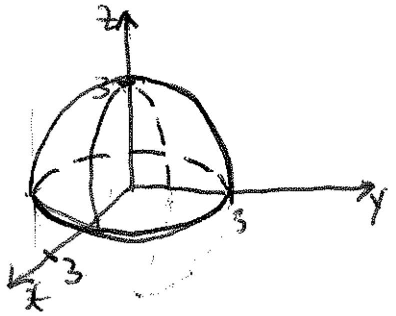


d) $m(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

$z = \sqrt{9-(x^2+y^2)} \Rightarrow z^2 = 9-(x^2+y^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = 9$

(semi-esfera)



b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2y}{x^3+y^3}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{4x^2y}{x^3+y^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{4x^2y}{x^3+y^3}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^3}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Como os limites iterados são iguais, o limite, se existir, é zero.

Vamos calcular o limite através de trajectórias diferentes que passam no ponto $(0,0)$.

Vamos estudar para as rectas $y = mx$, $m \neq 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{4x^2y}{x^3+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2(mx)}{x^3+(mx)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3m}{x^3(1+m^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{4m}{1+m^3} = \frac{4m}{1+m^3}$$

Ora, o valor do limite depende de m, ou seja, depende da recta pela qual se aproxima do ponto $(0,0)$, logo não existe limite.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$

limites iterados

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{0}{x^4}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{0}{y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0 \end{array}\right\} \text{ o limite, se existir, é zero.}$$

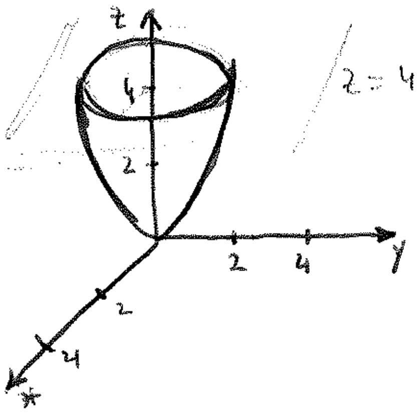
Ao longo das rectas $y = mx$, $m \neq 0$

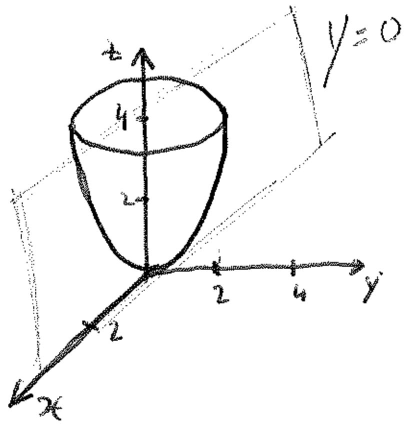
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(mx)}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3m}{x^2(x^2+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2xm}{x^2+m^2} = 0$$

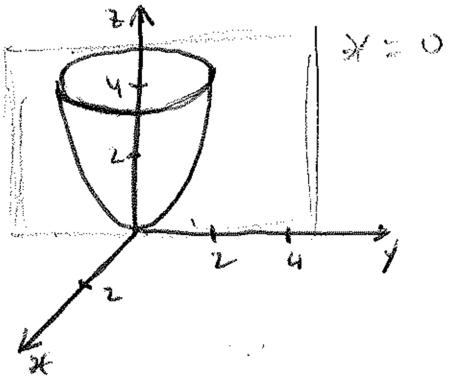
O limite se existir é zero e não depende da família das rectas que passam no ponto $(0,0)$.

Vamos verificar para a família das parábolas que passam no ponto $(0,0)$

(3) $z = x^2+y^2$







$z=4 \Rightarrow 4 = x^2+y^2$

Circunferência $C_1(0,0)$

$R=2$

$y=0 \Rightarrow z = x^2$

parábola

$x=0 \Rightarrow z = y^2$

parábola

(4)

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (2x - y^2) = 2\times 2 - 3^2 = 4-9 = -5$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{3},2\right)} y \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\times\frac{1}{2} = 1$

(5)

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

Calculemos os limites iterados no ponto $(0,0)$, isto é, vamos aproximar (x,y) a $(0,0)$ através da recta $y=0$ e depois através da recta $x=0$

Ao longo do eixo OX $(y=0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

Ao longo do eixo OY $(x=0)$

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{0}{y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

Como os limites iterados são diferentes, não existe limite.

Vamos estudar para as parábolas $y = mx^2$, $m \neq 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y=mx^2}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(mx^2)}{x^4+(m^2x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4m}{x^4(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2m}{1+m^2} =$$

$$= \frac{2m}{1+m^2}$$

Como o valor do limite depende de m, ou seja, depende da parábola pela qual se aproxima do ponto $(0,0)$, logo não existe limite.

(6) a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$(a,b) = (0,0)$

$L = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|(x,y)-(a,b)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$$

Tem-se que,

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Como $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, tem-se que $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \delta$.

Daqui podemos escolher $\delta = \varepsilon$

Então

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon : 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon$$

logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

b) $f(x,y) = \frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad (a,b) = (0,0) \qquad L = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \varepsilon$$

Tem-se que

$$\left| \frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{4|x^3|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4x^2|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{4x^2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 4x^2 \leq 4(x^2+y^2) = 4\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

Como $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, tem-se que

$$\left| \frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < 4\delta^2.$$

Daqui podemos escolher

$$4\delta^2 = \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta^2 = \frac{\varepsilon}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$$

Então, podemos afirmar que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} : 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \frac{4x^2|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon,$$

logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$