Sumários Alargados de Análise Matemática II
Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

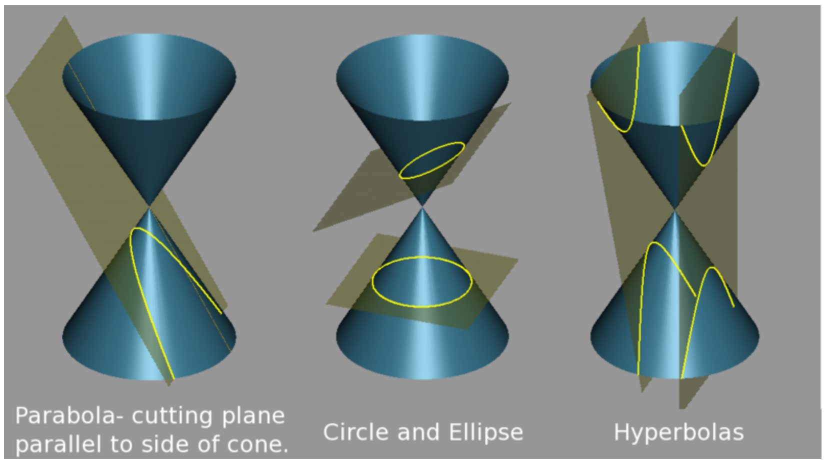
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra

2010-2011

1 Geometria do Espaço

1.1 Cónicas

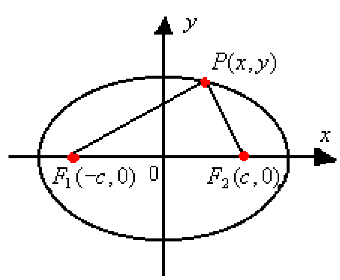
Chamamos **cónicas** às curvas obtidas quando se intersectam um cone duplo e um plano que não contém o vértice do cone.



(em http://schools-wikipedia.org/wp/c/Conic*underline*section.htm)

Também podemos obter definições equivalentes de cónicas baseadas nas suas propriedades geométricas.

Definição 1.1. Uma **elipse** é o conjunto de pontos do plano tal que soma das distâncias a dois pontos fixos, ditos **focos**, é constante e maior que a distância entre os focos.

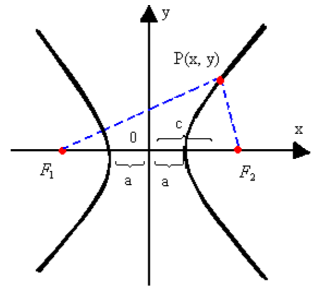


Uma equação da elipse centrada na origem, de eixos de simetria $0X$ e $0Y$, com focos $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, e que contém o ponto $(a, 0)$ é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde $b^2 = a^2 - c^2$.

Definição 1.2. Uma **hipérbole** é o conjunto dos pontos do plano tais que o módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos, ditos **focos**, é constante e menor que a distância entre os focos.

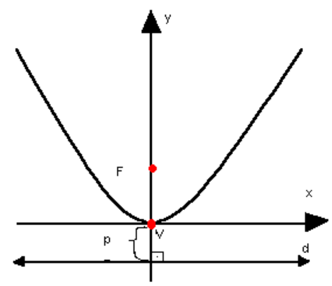


Uma equação da hipérbole centrada na origem e de **eixo focal** $0X$ e **eixo conjugado** $0Y$, com focos $(c, 0)$ e $-c, 0)$, que contém o ponto $(a, 0)$ é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Note-se que $c^2 = a^2 + b^2$.

Definição 1.3. Uma **parábola** é o conjunto de pontos do plano equidistantes de uma recta fixa, dita **directriz**, e de um ponto fixo fora dessa recta, dito **foco**.



Uma equação da parábola de vértice na origem, com foco $(0, p)$, directriz $y = -p$ e eixo de simetria $0Y$ é

$$x^2 = 4\,p\,y.$$

Proposição 1.4. As cónicas são definidas por equações de 2º grau nas variáveis x e y

$$\textbf{(1)} \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

com A, B e C não simultaneamente nulos.

Uma cónica tem os eixos de simetria (ou o eixo de simetria) paralelos aos eixos coordenados se e só se $B = 0$. Neste caso, a partir da equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ obtemos, por exemplo, equações

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	Elipse centrada em (x_0, y_0)
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	Hipérbole centrada em (x_0, y_0)
$(x-x_0)^2 = 4p(y-y_0)$	Parábola com vértice em (x_0, y_0)

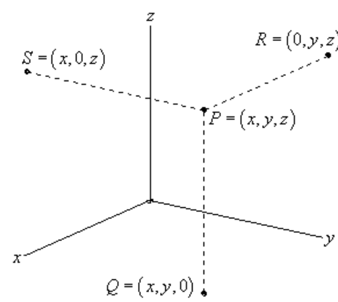
Note-se que a equação (1) pode representar uma cónica degenerada (um ponto, uma recta, duas rectas, o conjunto vazio, *etc*).

1.2 Vectores de $\mathbb{R}^3$

Um **sistema de coordenadas cartesianas do espaço** é constituído por três eixos perpendiculares dois a dois, ditos **eixos coordenados**, que se intersectam num ponto, **a origem**. Em cada um dos eixos fixa-se um sentido como positivo. Adopta-se para os três eixos uma unidade de comprimento. Geralmente, verifica-se o seguinte quanto à orientação dos eixos: um observador, com os pés na origem e a cabeça na parte positiva do eixo $0Z$, que olha para o menor ângulo entre as partes positivas dos eixos $0X$ e $0Y$ vê o eixo $0X$ à direita e o eixo $0Y$ à esquerda.

Cada par de eixos define um plano, dito plano coordenado: os eixos $0X$ e $0Z$ definem o plano $X0Z$, os eixos $0X$ e $0Y$ definem o plano $X0Y$, etc.

Após a escolha de um sistema de coordenadas, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e ternoss ordenados de números reais: cada ponto P identifica-se com o terno (a, b, c) das suas coordenadas.



Geometricamente, um vector $\vec{v}$ é um segmento de recta orientado que não é afectado pela translação: dois vectores são iguais se têm a mesma direcção, sentido e comprimento. A cada vector $\overrightarrow{v}$ com ponto inicial na origem e ponto final P associamos as coordenadas cartesianas de P. Se $P = (a, b, c)$ também identificamos $\overrightarrow{v}$ com o triplo (a, b, c).

Denotamos por $\overrightarrow{P_1P_2}$ o vector com ponto inicial $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e ponto final $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Note-se que $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{0P_2} - \overrightarrow{0P_1}$. Algebricamente, verifica-se

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{0P_2} - \overrightarrow{0P_1} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Os vectores unitários (de norma 1) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ denotam-se por, respectivamente, $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$. O vector nulo representa-se por $\overrightarrow{0}$.

Definição 1.5. 1. A **norma** de um vector $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ é o número real não negativo

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

2. A **distância** entre os pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ é igual à norma do vector $\overrightarrow{P_1P_2}$:
$$\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3. O **produto interno** ou **escalar** de dois vectores $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2, c_2)$ representa-se por $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ e é o número real

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

4. O **ângulo** $\theta \in [0, \pi]$ entre os vectores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é dado por

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos\theta,$$

ou seja, $\theta = \arccos\left(\dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}\right)$.

5. A **projecção** do vector $\overrightarrow{v}$ sobre o vector $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ é o vector

$$\text{proj}_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u}.$$

Definição 1.6. O **produto vectorial** ou **externo** dos vectores $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2, c_2)$ é o vector

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w} &= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{\imath} - (a_1c_2 - a_2c_1)\hat{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}. \end{aligned}$$

Note-se que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (determinante formal).

Observe-se que produto escalar de dois vectores é um número real. O produto vectorial de dois vectores de $\mathbb{R}^3$ é um vector de $\mathbb{R}^3$.

Proposição 1.7 (Propriedades do produto externo)**.** Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ e α um número real.

1. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$;

2. $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w})$;

3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$;

4. $\alpha(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = (\alpha\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\alpha\overrightarrow{v})$;

5. $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$;

6. Se θ é o ângulo entre os vectores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, então

$$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin\theta.$$

   Em particular, se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vectores linearmente independentes, então $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|$ é igual à área do paralelogramo que tem como dois lados adjacentes os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

7. Os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são linearmente dependentes (isto é, um deles é múltiplo do outro) se e só se $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Em particular, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

8. O vector $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

1.3 Rectas e Planos

A recta r que contém o ponto P_0 e é paralela ao vector $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é o conjunto dos pontos

$$\{P_0 + \alpha \overrightarrow{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Supondo que $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, obtemos várias equações da recta r:

- Equação vectorial da recta r:

  $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(v_1, v_2, v_3), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$

- Equações paramétricas da recta r:

  $$x = x_0 + \alpha v_1, \; y = y_0 + \alpha v_2, \; z = z_0 + \alpha v_3$$

  com $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Alguns exemplos de equações cartesianas da recta r:

  Se $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$: $\quad \dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2} = \dfrac{z - z_0}{v_3}.$

  Se $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ e $v_3 = 0$: $\quad \dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2}, \quad z = z_0.$

  Se $v_1 \neq 0$, $v_2 = 0$ e $v_3 = 0$: $\quad y = y_0, \qquad z = z_0.$

Sejam P_0 um ponto e $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vectores linearmente independentes. O conjunto

$$\{P_0 + \overrightarrow{w} : \overrightarrow{w} \in \text{ger}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}\}$$

é um **plano** Π que contém o ponto P_0 e é **paralelo** aos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Note-se que

$$\Pi = \{P_0 + \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Supondo que $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, temos as seguintes equações do plano Π:

- Equação vectorial do plano:

  $$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3),$$

  cm $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Equações paramétricas do plano:

  $$x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1, \quad y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2, \quad z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3$$

  com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.8. Sejam P_0 um ponto e $\overrightarrow{n}$ um vector não nulo. O conjunto dos pontos P tais que $\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ é um plano que contém o ponto P_0 e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{n}$.

Reciprocamente, se Π é um plano então existem um ponto P_0 e um vector não nulo $\overrightarrow{n}$ tais que $\Pi = \{P : \overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{n} = 0\}$.

O plano Π que contém o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vector não nulo $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ tem uma equação cartesiana

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \text{ou seja} \quad ax + by + cz + d = 0 \quad (2),$$

onde $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Definição 1.9. Dois planos de equações $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ dizem-se

1. **paralelos** se (a, b, c) e (a', b', c') são linearmente dependentes;

2. **perpendiculares** se (a, b, c) e (a', b', c') são perpendiculares, isto é, $(a, b, c) \cdot (a', b', c') = 0$.

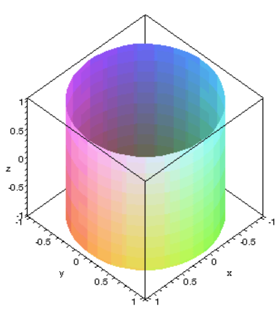
Exemplo 1.10. Os planos $x + 2y - z = 1$ e $-2x - 4y + 2z = 9$ são paralelos. Os planos $x + 2y - z = 1$ e $x - y - z + 3 = 0$ são perpendiculares.

1.4 Superfícies Cilíndricas

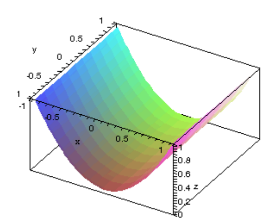
Definição 1.11. Chama-se **traço** da superfície num plano à curva que resulta da intersecção da superfície com o plano.

Se fizermos deslizar uma curva contida num plano Γ ao longo de um eixo que não está contido em Γ, geramos um superfície, dita **superfície cilíndrica**. Assim, uma superfície cilíndrica é constituída por todas as rectas paralelas a uma dada recta e que passam pelos pontos de uma curva plana.

Cilindro elíptico



Cilindro parabólico



Num sistema de coordenadas $0XYZ$, uma equação em duas (das três) variáveis define uma superfície cilíndrica. A superfície pode ser esboçada traçando uma curva plana num plano perpendicular ao eixo da variável ausente da equação e efectuando uma translação dessa curva ao longo de uma recta paralela a esse eixo.

Exemplo 1.12. A equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ define um cilindro elíptico. Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Y$ são elipses. Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Z$ ou ao plano $Y0Z$ são uma ou duas rectas paralelas, ou o conjunto vazio.

1.5 Superfícies Quádricas

Definição 1.13. Uma **quádrica** é o conjunto de pontos (x, y, z) que satisfazem uma equação de segundo grau nas variáveis x, y e z:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

com A, B, C, D, E, F, G, H, I, J números reais. Efectuando, se necessário, rotações e translações, as quádricas têm equações do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad \text{ou} \quad Ax^2 + By^2 + Iz + J = 0.$$

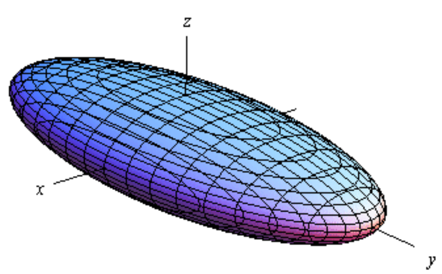
Há seis tipos de quádricas (não degeneradas): elipsóides, hiperbolóides de uma folha, hiperbolóides de duas folhas, cones elípticos, parabolóides elípticos e parabolóides hiperbólicos.

As quádricas com equações do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad \text{ou} \quad Ax^2 + By^2 + Iz + J = 0$$

podem ser identificadas determinando os traços nos planos paralelos aos planos coordenados.

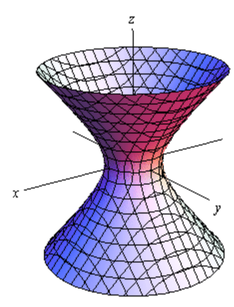
1. **Elipsóide**: quádrica de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.



Os traços nos planos paralelos aos planos coordenados que intersectam a superfície em mais do que um ponto são elipses.

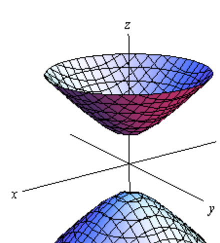
Se $a = b = c$, o elipsóide é uma **superfície esférica**.

2. **Hiperbolóide de uma folha**: quádrica de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.



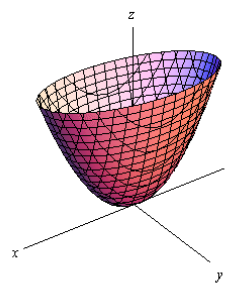
Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Y$ são elipses, os traços nos planos paralelos ao plano $X0Z$ que não contêm os pontos $(0, b, 0)$ e $(0, -b, 0)$ são hipérboles e os traços nos planos paralelos ao plano $Y0Z$ que não contêm os pontos $(a, 0, 0)$ e $(-a, 0, 0)$ são hipérboles. O eixo $0Z$ é o **eixo do hiperbolóide**.

3. **Hiperbolóide de duas folhas**: quádrica de equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.



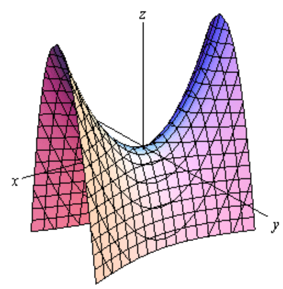
Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Y$ que intersectam a superfície em mais do que um ponto são elipses. Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Z$ ou ao plano $Y0Z$ são hipérboles. O eixo $0Z$ é o eixo do hiperbolóide.

4. **Parabolóide elíptico**: quádrica de equação $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.



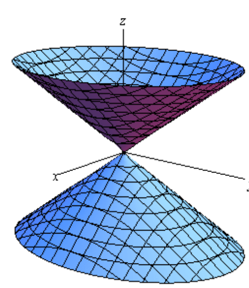
Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Y$ que intersectam a superfície em mais do que um ponto são elipses. Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Z$ ou ao plano $Y0Z$ são parábolas.

5. **Parabolóide hiperbólico**: quádrica de equação $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.



Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Y$, distintos do plano $X0Y$, são hipérboles. Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Z$ ou ao plano $Y0Z$ são parábolas.

6. **Cone elíptico**: quádrica de equação $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.



Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Y$, distintos do plano $X0Y$, são elipses. Os traços nos planos $X0Z$ e $Y0Z$ são rectas que se intersectam em $(0, 0, 0)$. Os traços nos planos paralelos ao plano $X0Z$ ou ao plano $Y0Z$, distintos dos planos $X0Z$ e $Y0Z$, são hipérboles.

As imagens das superfícies quádricas estão em http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII.