Ficha 4: Aplicação da derivada

4.1 Teoremas com a derivada

Definição 4.1 (extremo local) *Sejam f uma função, $I \subset D_f$ um intervalo e $x_0 \in I$.*

- *f admite um mínimo local em x_0 (ou x_0 é um minimizante local) se existe $\tau > 0$ tal que $\forall x \in I \cap B(x_0, \tau),\ f(x) \geq f(x_0)$.*
- *f admite um mínimo local estrito em x_0 (ou x_0 é um minimizante local estrito) se existe $\tau > 0$ tal que $\forall x \in I \cap B(x_0, \tau)$ e $x \neq x_0,\ f(x) > f(x_0)$.*
- *f admite um máximo local em x_0 (ou x_0 é um maximizante local) se existe $\tau > 0$ tal que $\forall x \in I \cap B(x_0, \tau),\ f(x) \leq f(x_0)$.*
- *f admite um máximo local estrito em x_0 (ou x_0 é um maximizante local estrito) se existe $\tau > 0$ tal que $\forall x \in I \cap B(x_0, \tau)$ e $x \neq x_0,\ f(x) < f(x_0)$.*

Chama-se extremo local (estrito) um máximo ou um mínimo local (estrito).

Teorema 4.1 (Fermat)
Seja f um função definida em $]a, b[$. Se $x_0 \in]a, b[$ é um extremo local e se f derivável em $\bar{x}$ então $f'(\bar{x}) = 0$.

Teorema 4.2 (Rolle)
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, derivável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b) = 0$ então existe $\bar{x} \in]a, b[$ tal que $f'(\bar{x}) = 0$.

Teorema 4.3 (Lagrange)
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, derivável em $]a, b[$. Então existe $\bar{x} \in]a, b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\bar{x})(b - a)$.

Do mesmo modo, uma outra forma popular do teorema é obtida notando $h = b - a$, $x_0 = a$.

Corolário 4.1
Seja f uma função contínua no intervalo $[x_0, x_0 + h]$, derivável em $]x_0, x_0 + h[$. Então existe $\theta \in]0, 1[$ tal que $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h)$.

Proposição 4.1
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, derivável em $]a, b[$. Se $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) = 0$ então f é uma função constante.

Proposição 4.2
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, derivável em $]a, b[$.

1. *f' é não negativa (resp. não positiva) $\Leftrightarrow$ f é crescente (resp. decrescente).*

2. *f' é positiva (resp. negativa) $\Rightarrow$ f é estritamente crescente (resp. decrescente).*

Proposição 4.3 (Regra de Cauchy)
Sejam f e g duas funções contínuas em $[a,b]$, deriváveis em $]a,b[$. Supomos além de mais que $g'(x) \neq 0$ no intervalo $]a,b[$, então existe $\bar{x} \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})}.$$

4.1.1 A regra de l'Hospital

Proposição 4.4 (Regra de l'Hospital)
Sejam f e g duas funções de $C^1(]x_0-\tau, x_0+\tau[)$ tal que

- *f, g são não nulas exceto em x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$.*
- *$g'(x_0) \neq 0$*

Então temos:
- *Se $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ então $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.*
- *Se $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ então $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.*

NOTA 4.1 A prova mostra que a regra de l'Hospital também funciona com as derivadas laterais e derivadas de ordem superior.

EXEMPLO 4.1 Calcular o limite em $x_0 = 0$ de $\frac{\sin(x)}{x}$. Sejam $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = x$. Verificamos que ambos $f(0) = g(0) = 0$. Do outro lado, temos $g'(0) = 1 \neq 0$. Por consequência, podemos aplicar a regra de l'Hospital e temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Tecnica de substituição Calcular o limite em $x_0 = 0$ de $\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}$ Consideramos a substituição $y = x^3$. Temos $\lim_{x\to 0} y = 0$ logo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}.$$

Sejam $f(y) = \ln(1+y)$, $g(y) = y$, verificamos $f(0) = g(0) = 0$ assim que $g'(0) = 1 \neq 0$. Podemos usar a regras de l'Hospital e deduzimos

$$\lim_{y\to 0} \frac{1/(1+y)}{1} = 1.$$

Tecnica de separação Calcular o limite em $x_0 = 0^+$ de $\frac{\ln(1+x)}{x^3}$. Escrevemos a função em duas partes (separação) como

$$\frac{\ln(1+x)}{x^3} = \frac{\ln(1+x)}{x}\frac{1}{x^2} = \frac{f(x)}{g(x)}h(x).$$

Usando o caso anterior, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = 1 \times +\infty = +\infty.$$

4.2 Extremos locais, concavidade, convexidade

Definição 4.2 (Ponto crítico) *Seja $f \in C^1(I)$. $x_0 \in I$ é um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.*

Proposição 4.5
Seja $f \in C^1(I)$ tal que f' é derivável em I e $x_0 \in I$. Temos as asserções seguintes

1. *Se f admite um mínimo local em x_0 então $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$.*
2. *Se f admite um máximo local em x_0 então $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$.*
3. *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ então f admite um mínimo local estrito em x_0.*
4. *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ então f admite um máximo local estrito em x_0.*

NOTA 4.2 Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ nada podemos concluir com apenas estes dois argumentos.

Definição 4.3 (concavidade, convexidade) *Seja $f \in C^0(I)$.*

A função é concava em I se $\forall x, y \in I$, $\forall \theta \in [0,1]$ temos $f(\theta x + (1-\theta)y) \geq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$.

A função é convexa em I se $\forall x, y \in I$, $\forall \theta \in [0,1]$ temos $f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$.

Proposição 4.6
Seja $f \in C^2(I)$.

A função é concava em I se e somente se $\forall x \in]a,b[$, $f''(x) \leq 0$.

A função é concava em I se e somente se a função f' é decrescente em $]a,b[$.

A função é convexa em I se e somente se $\forall x \in]a,b[$, $f''(x) \geq 0$.

A função é convexa em I se e somente se a função f' é crescente em $]a,b[$.

Definição 4.4 (ponto de inflexão) *Seja $f \in C^2(I)$. x_0 é um ponto de inflexão de f se $f''(x_0) = 0$.*

4.3 Aproximação polinomial

Teorema 4.4 (desenvolvimento Taylor de ordem 2)
Seja uma função $f \in C^1([a,b])$ *tal que* $f^{(1)}$ *é derivável em* $]a,b[$*. Então existe* $\xi \in]a,b[$ *tal que*

$$f(b) \quad = \quad f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a)^1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(b-a)^2.$$

Seja $a = x_0$ e $b = x_0 + h$, existe $\theta \in]0,1[$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta h)}{2}h^2.$$

A extensão do teorema de Taylor para qualquer ordem é a seguinte.

Teorema 4.5 (desenvolvimento Taylor de ordem k)
Seja uma função $f \in C^k([a,b])$ *tal que* $f^{(k)}$ *é derivável em* $]a,b[$*. Então existe* $\xi \in]a,b[$ *tal que*

$$f(b) \quad = \quad \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}.$$

Em particular, seja $a = x_0$ e $b = x_0 + h$, existe $\theta \in]0,1[$ tal que

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i + \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta h)}{(k+1)!}h^{k+1}.$$

Definição 4.5 *As funções* $p_k(h;x_0) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i$ *e* $R_k(h;x_0) = \frac{f^{(k+1)}(x_0+\theta h)}{(k+1)!}h^{k+1}$ *são respetivamente o polínomio e o resto de Taylor de ordem* k*.* $p_k(h;x_0)$ *representa uma aproximação de* f *de ordem* k *na vizinhança do ponto* x_0*.*

Exemplo 4.2 Dar uma aproximação de ordem 3 no ponto $x_0 = 0$ da função $f(x) = e^x$. Calculamos as derivadas áte o ordem 3 e temos $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$ e deduzimos $p(h) = p_3(h;0) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}$. Podemos verificar que $p(h) \approx e^h$ quando $h < 0.1$.

Exemplo 4.3 Determinar $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ usando o desenvolvimento de Taylor de ordem 2. Temos $f(x) = f^{(0)}(x) = \cos(x) - 1$, $f^{(1)}(x) = -\sin(x)$, $f^{(2)} = -\cos(x)$, $f^{(3)}(x) = \sin(x)$. O polinómio e o resto de Taylor escreve-se

$$p_2(h;0) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}h^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}h^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}h^2 = -\frac{h^2}{2}, \quad R_2(h;0) = \frac{f^{(3)}(\theta h)}{h!}h^3, \quad \theta \in]0,1[.$$

Usando o desenvolvimento de Taylor $f(h) = p_2(h;0) + R_2(h;0)$ deduzimos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2/2 + \sin(\theta h)h^3/6}{h^2} = -\frac{1}{2} + \lim_{h\to 0} \frac{h}{6}\sin(\theta h) = -\frac{1}{2}.$$

4.4 Exercícios

Exercício 1 Demonstrar que se $f'(x) > 0$ no intervalo $]a,b[$ então f é estritamente crescente no intervalo $I = [a,b]$.

Exercício 2 Demonstrar que $x \to y = f(x)$ é uma equação da reta no intervalo $[a,b]$ se e somente se $f'(x)$ é constante no intervalo $]a,b[$ usando o teorema de Lagrange.

Exercício 3 Usando a regra de l'Hospital, determine os limites seguintes.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh(x)}{x}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan(x)}{\sqrt{x}}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(2x)-1}{3x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\arcsin(x)}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arg\sinh(x)}{x}$, $\quad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(x-1)-1}{x-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\pi x)}{\sin(x)}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x^3}$, $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$, $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan(x)}{x^3}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sinh(x^2)}{x^2}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x^3)}{x}$.

Exercício 4 Determinar os extremos locais (relativos) das funções seguintes e precisar se são estritos ou não.

1. $f(x) = x - 3x^{1/3}$, $\quad f(x) = x + \cos(x)$, $\quad f(x) = x - \ln(x)$, $\quad f(x) = (1+x)e^{-x}$,
2. $f(x) = |x^2 - x|$, $\quad ,f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $\quad f(x) = x - \arctan(x)$ $\quad f(x) = x\cosh(x)$.

Exercício 5 Determinar os pontos críticos, a natureza dos pontos críticos e os intervalos onde a função é concava ou convexa.

1. $f(x) = x\ln(x^2+1)$, $\quad f(x) = \arctan(4x)$, $\quad f(x) = x + \sin(x)$.
2. $f(x) = x\ln(|1+x|)$, $\quad f(x) = e^{x^2+1}$.

Exercício 6 Determinar o desenvolvimento de Taylor de ordem k no ponto 0 das funções seguintes.

1. $f(x) = e^{3x}$ com $k = 3$, $\quad f(x) = \sin(2x)$ com $k = 3$, $\quad f(x) = \frac{1}{1-x}$ com $k = 4$.
2. $f(x) = \ln(1+x)$ com $k = 2$ e deduzir o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.
3. $f(x) = \ln(1-2x)$ com $k = 2$ e deduzir o limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

Exercício 7 Calcular uma aproximação usando o polinómio de Taylor.

1. $\exp(\frac{1}{10})$ com $p_3(h;0)$ da função $\exp(x)$.
2. $\ln(0.9)$ com $p_2(h;0)$ da função $\ln(1-x)$.
3. $\sin(\pi/2+\pi/10)$ com $p_3(h;0)$ da função $\sin(\pi/2+x)$.

Solução 1

Sejam $x, y \in I$ tal que $x < y$. O teorema de Lagrange implica que existe $z \in]x, y[$ tal que $f(y) - f(x) = f'(z)(y-x)$. Como $y - x > 0$ e $f'(z) > 0$ por hipotese, temos $f(y) - f(x) > 0$. Logo f é estritamente crescente.

Solução 2

$\Rightarrow$ Suposmos que $f'(z) = \alpha$, para qualquer $z \in I$ então seja $x > a$, existe $z \in]a, x[$ tal que $f(x) - f(a) = \alpha(x-a)$, seja $f(x) = \alpha x + f(a) - \alpha a$.
$\Leftarrow$ Se f é a equação de uma reta então $f(x) = \alpha x + \beta$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Logo $f'(x) = \alpha$.

Solução 3

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sinh(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\exp(2x)-1}{3x} = \dfrac{2}{3}$.
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} = 0$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\arcsin(x)} = 1$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arg\sinh(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 1} \dfrac{\cos(x-1)-1}{x-1} = 0$.
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(\pi x)}{\sin(x)} = \pi$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x^3} = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Solução 4

1. *(i) $f(x) = x - 3x^{1/3}$: mínimo estrito em 1, (ii) $f(x) = x + \cos(x)$: pontos críticos $-\pi/2 + 2k\pi$, ponto de inflexão, (iii) $f(x) = x - \ln(x)$: mínimo estrito em 1, (iv) $f(x) = (1+x)e^{-x}$: máximo estrito em 0,*
2. *(i) $f(x) = |x^2 - x|$: mínimo estrito em 0 e 1, (ii) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$: mínimo estrito em -1 e máximo estrito em 1, (iii) $f(x) = x - \arctan(x)$: ponto de inflexão em 0, (iv) $f(x) = x\cosh(x)$: ponto de inflexão em 0 .*

Solução 5

1. *(i) $f(x) = x\ln(x^2+1)$: ponto de infexão em 0, função convexa em $\mathbb{R}$, (ii) $f(x) = \arctan(4x)$: não há ponto crítico, função convexa em $\mathbb{R}$, (iii) $f(x) = x + \sin(x)$: pontos de inflexão em $\pi + 2k\pi$, função convexa em $\mathbb{R}$.*
2. *(i) $f(x) = x\ln(|1+x|)$: ponto de infexão em 0, concava se $x < -2$ e convexa se $x > -2$, (ii) $f(x) = e^{x^2+1}$: função convexa com mínimo estrito em 0.*

Solução 6

1. *(i) $p_3(h;0) = 1 + 3h + \frac{9}{2}h^2 + \frac{9}{2}h^3$ e $R_3(h;0) = \frac{27}{4}\exp(\theta h)h^4$, (ii) $p_3(h;0) = 2h - \frac{4}{3}h^2$ e $R_3(h;0) = \frac{3}{2}\sin(\theta h)h^4$, (iii) $P_4(h;0) = 1 + h + h^2 + h^3 + h^4$ e $R_4(h;0) = \frac{h^5}{1-\theta h}$.*

2. $f(x) = \ln(1+x)$, $f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}$, $f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$. $p_2(h;0) = h - \frac{h^2}{2}$ *e* $R_2(h;0) = \frac{h^3}{3(1+\theta h)^3}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2/2 + \frac{h^3}{3(1+\theta h)^3}}{h^2} = \lim_{h\to 0} -1/2 + \frac{h}{3(1+\theta h)^3} = -\frac{1}{2}.$$

3. $f(x) = \ln(1-2x)$, $f^{(1)}(x) = \frac{-2}{1-2x}$, $f^{(2)}(x) = \frac{-4}{(1-2x)^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{-16}{(1-2x)^3}$. $p_2(h;0) = -2h - 2h^2$ $R_2(h,0) = -\frac{8}{3}\frac{h^3}{(1-2\theta h)^3}$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1-2h)}{h^2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h - 2h^2 - 8/3\frac{h^3}{(1-2\theta h)^3}}{h^2} == \lim_{h\to 0^+} -\frac{2}{h} - 2 - 8/3 \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{(1-2\theta h)^3} = -\infty.$$

Solução 7

1. $p_3(h,0) = 1 + h + h^2/2 + h^3/6$ *logo* $exp(0.1) \approx p_3(1/10,0) = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} = \frac{6631}{6000}$.

2. $p_2(h,0) = -h - h^2$ *logo* $\ln(0.9) \approx p_2(0.1,0) = -\frac{11}{100}$.

3. $p_3(h,0) = 1 - h^2/2$ *logo* $\sin(\pi/2 + \pi/10) \approx \frac{200-\pi^2}{200}$.