1. Mostre que as funções $sen(\pi \cdot x)$, $sen(2\pi \cdot x)$, $sen(3\pi \cdot x)$,… são as funções próprias do problema de valores de fronteira: $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda \cdot y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$ no intervalo $[0;1]$.

R:

Vamos começar por determinar as raízes associadas à equação diferencial dada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda \cdot y = 0 \Leftrightarrow m^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{-\lambda}$$

Posto isto, vamos estudar individualmente cada um dos valores que λ poderá tomar e encontrar para cada caso uma solução geral:

Se: $\lambda = 0$	$m = \pm\sqrt{-0} \Leftrightarrow m_1 = 0 \vee m_2 = 0 \rightarrow$ Uma raiz real de multiplicidade 2. Para este tipo de raízes temos a seguinte solução na forma geral: $y = c_1 \cdot x^{1-1} \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot x^{2-1} \cdot e^{m_2 \cdot x} + \ldots + c_n \cdot x^{k-1} \cdot e^{m_n \cdot x}, k = 1,2,3,\ldots$ Logo, neste caso teremos: $y = c_1 \cdot e^{0 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{0 \cdot x} \Leftrightarrow y = c_1 + c_2 \cdot x$

Se: $\lambda < 0$	$m = \pm\sqrt{\underbrace{-\underbrace{\lambda}_{<0}}_{>0}} \Leftrightarrow m_1 = -\sqrt{-\lambda} \vee m_2 = +\sqrt{-\lambda} \rightarrow$ Duas raízes reais distintas. Para este tipo de raízes temos a seguinte solução na forma geral: $y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + \ldots + c_n \cdot e^{m_n \cdot x}$ Logo, neste caso teremos: $y = c_1 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda} \cdot x} + c_2 \cdot e^{\sqrt{-\lambda} \cdot x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = c_1 \cdot \cosh\left(\sqrt{-\lambda} \cdot x\right) + c_2 \cdot senh\left(\sqrt{-\lambda} \cdot x\right)$

Se: $\lambda > 0$	$m = \pm\sqrt{\underbrace{-\underbrace{\lambda}_{>0}}_{<0}} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{-\lambda} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\lambda}\cdot\underbrace{\sqrt{-1}}_{=i} \Leftrightarrow m_1 = -\sqrt{\lambda}\cdot i \vee m_2 = +\sqrt{\lambda}\cdot i \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m_1 = \underbrace{0}_{a} - \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{b}\cdot i \vee m_2 = \underbrace{0}_{a} + \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{b}\cdot i \rightarrow$ Duas raízes imaginárias distintas. Para este tipo de raízes temos a seguinte solução na forma geral: $y = c_1\cdot e^{a\cdot x}\cdot\cos(bx) + c_2\cdot e^{a\cdot x}\cdot sen(bx)$ Logo, neste caso teremos: $y = c_1\cdot e^{0\cdot x}\cdot\cos(\sqrt{\lambda}\cdot x) + c_2\cdot e^{0\cdot x}\cdot sen(\sqrt{\lambda}\cdot x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = c_1\cdot\cos(\sqrt{\lambda}\cdot x) + c_2\cdot sen(\sqrt{\lambda}\cdot x)$

Atendendo agora aos valores de fronteira apresentados conjuntamente com a equação diferencial, constatamos que os mesmos se reportam à função y.

Assim sendo, vamos proceder em seguida à substituição dos mesmos nas soluções gerais obtidas para cada caso.

Para: $\lambda = 0$	Aplicando as condições de fronteira, teremos que: $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2\cdot 0 = 0 \\ c_1 + c_2\cdot 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow$ Não se consegue determinar qualquer valor próprio capaz de satisfazer a equação diferencial dada.

Para: $\lambda < 0$	Aplicando as condições de fronteira, teremos que: $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 0} + c_2\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 0} = 0 \\ c_1\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 1} + c_2\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}} + c_2\cdot e^{\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}} + c_2\cdot e^{\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}} & e^{\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Chegados a esta matriz, devemos verificar se o seu determinante é igual a zero, pois só no caso do determinante ser igual a zero é que existirá um ou mais valores próprios capazes de satisfazer a equação diferencial dada.

Caso o determinante seja diferente de zero, então apenas $c_1 = 0$ *e* $c_2 = 0$ *(soluções triviais) satisfarão a equação.*

Assim sendo teremos neste caso que:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}} & e^{\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(1 \times e^{\sqrt{-\lambda}}\right) - \left(-e^{-\sqrt{-\lambda}} \times 1\right) = 0 \Leftrightarrow e^{\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \text{ [1]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\right) = 0 \Leftrightarrow \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\right) = 0$$

Conclusão a retirar daqui ??????????

Para: $\lambda > 0$

Aplicando as condições de fronteira, teremos que:

$$\begin{Bmatrix} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1 \cdot \underbrace{\cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot 0\right)}_{\cos(0)=1} + c_2 \cdot \underbrace{sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot 0\right)}_{sen(0)=0} = 0 \\ c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot 1\right) + c_2 \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot 1\right) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1 = 0 \\ 0 \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda}\right) + c_2 \cdot sen\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1 = 0 \\ c_2 \cdot sen\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow sen\left(\sqrt{\lambda_n}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\lambda_n} = arcsen(0) \Leftrightarrow \sqrt{\lambda_n} = n \cdot \pi \Leftrightarrow \lambda_n = n^2 \cdot \pi^2, \quad n = 1,2,3,...$$

Assim sendo, e uma vez que $c_2 = 0$ teremos que:

$$y = 0 \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) + c \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) \Leftrightarrow y = c \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) \Leftrightarrow y = c \cdot sen\left(\sqrt{n^2 \cdot \pi^2} \cdot x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = c \cdot sen(n \cdot \pi \cdot x)$$

---

[1] Consultando o formulário, verifica-se que: $\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \Leftrightarrow e^u + e^{-u} = 2 \cdot \cosh(u)$, onde neste caso: $u = \sqrt{-\lambda}$

2. **Mostre que as funções** 1, $\cos(\pi \cdot x)$, $\cos(2\pi \cdot x)$, $\cos(3\pi \cdot x)$,**… são as funções próprias do problema de valores de fronteira:** $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda \cdot y = 0, \quad y'(0) = y'(1) = 0$ **no intervalo** $[0;1]$.

R:

Vamos começar por determinar as raízes associadas à equação diferencial dada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda \cdot y = 0 \Leftrightarrow m^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{-\lambda}$$

Posto isto, vamos estudar individualmente cada um dos valores que λ poderá tomar e encontrar para cada caso uma solução geral:

Se: $\lambda = 0$	$m = \pm\sqrt{-0} \Leftrightarrow m_1 = 0 \vee m_2 = 0 \rightarrow$ Uma raiz real de multiplicidade 2. Para este tipo de raízes temos a seguinte solução na forma geral: $y = c_1 \cdot x^{1-1} \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot x^{2-1} \cdot e^{m_2 \cdot x} + \ldots + c_n \cdot x^{k-1} \cdot e^{m_n \cdot x}, k = 1,2,3,\ldots$ Logo, neste caso teremos: $y = c_1 \cdot e^{0 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{0 \cdot x} \Leftrightarrow y = c_1 + c_2 \cdot x$

Se: $\lambda < 0$	$m = \pm\sqrt{\underbrace{-\underbrace{\lambda}_{<0}}_{>0}} \Leftrightarrow m_1 = -\sqrt{-\lambda} \vee m_2 = +\sqrt{-\lambda} \rightarrow$ Duas raízes reais distintas. Para este tipo de raízes temos a seguinte solução na forma geral: $y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + \ldots + c_n \cdot e^{m_n \cdot x}$ Logo, neste caso teremos: $y = c_1 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda} \cdot x} + c_2 \cdot e^{\sqrt{-\lambda} \cdot x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = c_1 \cdot \cosh\left(\sqrt{-\lambda} \cdot x\right) + c_2 \cdot senh\left(\sqrt{-\lambda} \cdot x\right)$

Se: $\lambda > 0$	$m = \pm\sqrt{\underbrace{-\underbrace{\lambda}_{>0}}_{<0}} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{-\lambda} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\lambda}\cdot\underbrace{\sqrt{-1}}_{=i} \Leftrightarrow m_1 = -\sqrt{\lambda}\cdot i \vee m_2 = +\sqrt{\lambda}\cdot i \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m_1 = \underbrace{0}_{a} - \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{b}\cdot i \vee m_2 = \underbrace{0}_{a} + \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{b}\cdot i \rightarrow$ Duas raízes imaginárias distintas. Para este tipo de raízes temos a seguinte solução na forma geral: $y = c_1\cdot e^{a\cdot x}\cdot\cos(bx) + c_2\cdot e^{a\cdot x}\cdot sen(bx)$ Logo, neste caso teremos: $y = c_1\cdot e^{0\cdot x}\cdot\cos(\sqrt{\lambda}\cdot x) + c_2\cdot e^{0\cdot x}\cdot sen(\sqrt{\lambda}\cdot x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = c_1\cdot\cos(\sqrt{\lambda}\cdot x) + c_2\cdot sen(\sqrt{\lambda}\cdot x)$

Atendendo agora aos valores de fronteira apresentados conjuntamente com a equação diferencial, constatamos que os mesmos se reportam à primeira derivada de y.

Assim sendo, vamos derivar apenas uma vez, cada uma das três soluções que se acabaram de determinar, para posteriormente substituirmos nessas derivadas os valores dados como valores de fronteira.

Para: $\lambda = 0$	$y = c_1 + c_2\cdot x \Rightarrow y' = (c_1 + c_2\cdot x)' \Leftrightarrow y' = 0 + c_2\cdot 1 \Leftrightarrow y' = c_2$ Aplicando as condições de fronteira à derivada que se obteve, teremos que: $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = c_1 + 0\cdot x \Leftrightarrow y = c_1 \Leftrightarrow y = 1$

Para: $\lambda < 0$	$y = c_1\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x} + c_2\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x} \Rightarrow y' = \left(c_1\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x} + c_2\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x}\right)' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y' = c_1\cdot\left(-\sqrt{-\lambda}\cdot x\right)'\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x} + c_2\cdot\left(\sqrt{-\lambda}\cdot x\right)'\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y' = -c_1\cdot\sqrt{-\lambda}\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x} + c_2\cdot\sqrt{-\lambda}\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x}$

Aplicando as condições de fronteira à derivada que se obteve, teremos que:

$$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c_1 \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 0} + c_2 \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 0} = 0 \\ -c_1 \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 1} + c_2 \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -c_1 \cdot \sqrt{-\lambda} + c_2 \cdot \sqrt{-\lambda} = 0 \\ -c_1 \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}} + c_2 \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot e^{\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-c_1 + c_2) \cdot \sqrt{-\lambda} = 0 \\ \left(-c_1 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}} + c_2 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}}\right) \cdot \sqrt{-\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}} + c_2 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -e^{-\sqrt{-\lambda}} & e^{\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chegados a esta matriz, devemos impor que o seu determinante seja igual a zero, pois só no caso do determinante ser igual a zero é que existirá um ou mais valores próprios capazes de satisfazer a equação diferencial dada.

Caso o determinante seja diferente de zero, então apenas $c_1 = 0$ *e* $c_2 = 0$ *(soluções triviais) satisfarão a equação.*

Assim sendo teremos neste caso que:

$$\det \begin{pmatrix} \overbrace{-1}^{+} & \overbrace{1}^{-} \\ -e^{-\sqrt{-\lambda}} & e^{\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(-1 \times e^{\sqrt{-\lambda}}\right) - \left(-e^{-\sqrt{-\lambda}} \times 1\right) = 0 \Leftrightarrow -e^{\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0$$ [2] $$\Leftrightarrow 2 \cdot senh\left(\sqrt{-\lambda}\right) = 0 \Leftrightarrow senh\left(\sqrt{-\lambda}\right) = 0$$

Esta igualdade só se verifica no caso de $\lambda = 0$. Ora, como $senh\left(\sqrt{-\lambda}\right) = 0$ foi obtido no pressuposto que $\lambda < 0$, então facilmente se deduz que o determinante nunca poderá ser 0 (zero) *porque a conclusão que se retira do resultado do determinante vai contra o pressuposto a partir do qual ele foi obtido*, logo daqui se conclui que apenas $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ conseguem satisfazer a equação dada.

[2] Consultando o formulário, verifica-se que: $senh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \Leftrightarrow e^u - e^{-u} = 2 \cdot senh(u)$, onde neste caso: $u = \sqrt{-\lambda}$

Para: $\lambda > 0$	$y = c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) + c_2 \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) \Rightarrow y' = \left(c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) + c_2 \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right)\right)' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y' = c_1 \cdot \left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right)' \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) - c_2 \cdot \left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right)' \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y' = c_1 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) - c_2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right)$ Aplicando as condições de fronteira à derivada que se obteve, teremos que: $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \underbrace{sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot 0\right)}_{sen(0)=0} - c_2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \underbrace{\cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot 0\right)}_{\cos(0)=1} = 0 \\ c_1 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot 1\right) - c_2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -c_2 \cdot \sqrt{\lambda} = 0 \\ c_1 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot sen\left(\sqrt{\lambda}\right) - c_2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ \left(c_1 \cdot sen\left(\sqrt{\lambda}\right) - 0 \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda}\right)\right) \cdot \sqrt{\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 \cdot sen\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow sen\left(\sqrt{\lambda_n}\right) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{\lambda_n} = arcsen(0) \Leftrightarrow \sqrt{\lambda_n} = n \cdot \pi \Leftrightarrow \lambda_n = n^2 \cdot \pi^2, \quad n = 1,2,3,...$ Assim sendo, e uma vez que $c_2 = 0$ teremos que: $y = c \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) + 0 \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) \Leftrightarrow y = c \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) \Leftrightarrow y = c \cdot \cos\left(\sqrt{n^2 \cdot \pi^2} \cdot x\right) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = c \cdot \cos(n \cdot \pi \cdot x)$

3. Determine os valores próprios e as funções próprias dos seguintes problemas de valores de fronteira:

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda \cdot y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0$

R:

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \lambda \cdot y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0$

R:

c) $\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda\cdot y=0,\quad y(0)-y'(0)=0,\quad y(\pi)-y'(\pi)=0$

R:

É sabido da primeira questão que:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda\cdot y=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\Rightarrow y=c_1+c_2\cdot x\\ y<0\Rightarrow y=c_1\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x}+c_2\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x}\\ y>0\Rightarrow y=c_1\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right)+c_2\cdot sen\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\Rightarrow y'=c_2\\ y<0\Rightarrow y'=-c_1\cdot\sqrt{-\lambda}\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x}+c_2\cdot\sqrt{-\lambda}\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x}\\ y>0\Rightarrow y'=c_1\cdot\sqrt{\lambda}\cdot sen\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right)-c_2\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right)\end{array}\right\}$$

Recorrendo agora aos valores de fronteira apresentados teremos que:

Para: $y=0$
$\left\{\begin{array}{l}y(0)-y'(0)=0\\ y(\pi)-y'(\pi)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(c_1+c_2\cdot 0)-(c_2)=0\\ (c_1+c_2\cdot\pi)-(c_2)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}c_1-c_2=0\\ c_1+(\pi-1)\cdot c_2=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}c_1=c_2\\ c_2+(\pi-1)\cdot c_2=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}c_1=c_2\\ (\pi-1+1)\cdot c_2=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}c_1=c_2\\ \pi\cdot c_2=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}c_1=0\\ c_2=0\end{array}\right\}\rightarrow$ Não se consegue determinar qualquer valor próprio capaz de satisfazer a equação diferencial dada.

Para: $y<0$
$\left\{\begin{array}{l}y(0)-y'(0)=0\\ y(\pi)-y'(\pi)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(c_1\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 0}+c_2\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 0}\right)-\left(-c_1\cdot\sqrt{-\lambda}\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 0}+c_2\cdot\sqrt{-\lambda}\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 0}\right)=0\\ \left(c_1\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}+c_2\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}\right)-\left(-c_1\cdot\sqrt{-\lambda}\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}+c_2\cdot\sqrt{-\lambda}\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}\right)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}c_1+c_2+c_1\cdot\sqrt{-\lambda}-c_2\cdot\sqrt{-\lambda}=0\\ c_1\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}+c_2\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}+c_1\cdot\sqrt{-\lambda}\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}-c_2\cdot\sqrt{-\lambda}\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(1+\sqrt{-\lambda}\right)\cdot c_1 + \left(1-\sqrt{-\lambda}\right)\cdot c_2 = 0 \\ \left(e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\pi} + \sqrt{-\lambda}\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}\right)\cdot c_1 + \left(e^{\sqrt{-\lambda}\cdot\pi} - \sqrt{-\lambda}\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}\right)\cdot c_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(1+\sqrt{-\lambda}\right)\cdot c_1 + \left(1-\sqrt{-\lambda}\right)\cdot c_2 = 0 \\ \left(1+\sqrt{-\lambda}\right)\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}\cdot c_1 + \left(1-\sqrt{-\lambda}\right)\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}\cdot c_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+\sqrt{-\lambda} & 1-\sqrt{-\lambda} \\ \left(1+\sqrt{-\lambda}\right)\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\pi} & \left(1-\sqrt{-\lambda}\right)\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot\pi} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chegados a esta matriz, devemos impor que o seu determinante seja igual a zero, pois só no caso do determinante ser igual a zero é que existirá um ou mais valores próprios capazes de satisfazer a equação diferencial dada.

Caso o determinante seja diferente de zero, então apenas $c_1 = 0$ *e* $c_2 = 0$ *(soluções triviais) satisfarão a equação.*

Assim sendo teremos neste caso que:

$$\det\begin{pmatrix} \overbrace{1+\sqrt{-\lambda}}^{+} & \overbrace{1-\sqrt{-\lambda}}^{-} \\ \left(1+\sqrt{-\lambda}\right)\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\pi} & \left(1-\sqrt{-\lambda}\right)\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot\pi} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(1+\sqrt{-\lambda}\right)\cdot\left(1-\sqrt{-\lambda}\right)\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}\right] - \left[\left(1+\sqrt{-\lambda}\right)\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}\cdot\left(1-\sqrt{-\lambda}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(1+\sqrt{-\lambda}\right)}_{\text{Sempre} \neq 0,\text{ pq } \lambda<0}\cdot\left(1-\sqrt{-\lambda}\right)\cdot\underbrace{\left[e^{\sqrt{-\lambda}\cdot\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\pi}\right]}_{\text{Sempre} \neq 0,\text{ pq } \lambda<0} = 0 \Rightarrow \left(1-\sqrt{-\lambda}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda} = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{-\lambda}\right)^2 = (1)^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1 \rightarrow$ Valor próprio encontrado para este caso.

Para: $y > 0$

$$\begin{cases} y(0) - y'(0) = 0 \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(c_1 \cdot \underbrace{\cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot 0\right)}_{\cos(0)=1} + c_2 \cdot \underbrace{sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot 0\right)}_{sen(0)=0} \right) - \left(c_1 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \underbrace{sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot 0\right)}_{sen(0)=0} - c_2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \underbrace{\cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot 0\right)}_{\cos(0)=1} \right) = 0 \\ \left(c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) + c_2 \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right)\right) - \left(c_1 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) - c_2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right)\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 \cdot \sqrt{\lambda} = 0 \\ c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) + c_2 \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) - c_1 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) + c_2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 \cdot \sqrt{\lambda} = 0 \\ \left(\cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) - \sqrt{\lambda} \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right)\right) \cdot c_1 + \left(sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right)\right) \cdot c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\lambda} \\ \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) - \sqrt{\lambda} \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) & sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chegados a esta matriz, devemos impor que o seu determinante seja igual a zero, pelo que teremos:

Assim sendo teremos neste caso que:

$$\det \begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overbrace{\sqrt{\lambda}}^{-} \\ \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) - \sqrt{\lambda} \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) & sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[1 \cdot \left(sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right)\right)\right] - \left[\left(\cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) - \sqrt{\lambda} \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right)\right) \cdot \sqrt{\lambda}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) - \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) \cdot \sqrt{\lambda} + \left(\sqrt{\lambda}\right)^2 \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) + \lambda \cdot sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) = 0 \Leftrightarrow sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) \cdot (1 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow sen\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\lambda_n} \cdot \pi = arcsen(0) \Leftrightarrow \sqrt{\lambda_n} \cdot \pi = n \cdot \pi \Leftrightarrow \sqrt{\lambda_n} = n \Leftrightarrow \lambda_n = n^2, \quad n = 1,2,3,...$$

Assim sendo, teremos que: $y = c_1 \cdot \cos(n \cdot x) + c_2 \cdot sen(n \cdot x)$

d) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda\cdot y=0,\quad y(0)-y'(0)=0,\quad y(1)=0$

R:

4. Para que valores de λ é que o problema de valores de fronteira $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda\cdot y=0,\quad y(0)=y(2\pi),\quad y'(0)=y'(2\pi)$, tem solução não trivial?

R:

5. Para que valores de λ é que o problema de valores de fronteira $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+(1+\lambda)\cdot y=0,\quad y(0)=0,\quad y(1)=0$, tem solução não trivial?

R: