Estimação Espectral Moderna (M. E. M.)

- Teorema da projecção (princípio da ortogonalidade)
  - Métodos clássicos truncam a sequência de autocorrelação, que pode em certas condições ser extrapolada para m>N.
  - Problema: Como estimar uma v. a. X_N a partir de *N* v. a. $X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}$, de modo que seja mínimo o valor quadrático médio do erro.

$$\hat{X}_N = a_1 X_{N-1} + a_2 X_{N-2} + \ldots + a_N X_0$$

$$MMSE = E\left\{\left(X_N - a_1 X_{N-1} - a_2 X_{N-2} - \ldots - a_N X_0\right)^2\right\}$$

Pretende-se então determinar as *N* constantes (a_k) que minimizam MMSE

$$MMSE = E\left\{\left(X_N - \sum_{i=1}^{N} a_i X_{N-i}\right)^2\right\} = E\left\{\left(X_N - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{N} a_i X_{N-i} - a_k X_{N-k}\right)^2\right\} = E\left\{\left(A - a_k X_{N-k}\right)^2\right\}$$

Minimizando em ordem a a_k

$$\frac{\partial(MMSE)}{\partial a_k} = E\left\{-2X_{N-k}A + 2a_k X_{N-k}^2\right\} = -2E\left\{\left(A - a_k X_{N-k}\right)X_{N-k}\right\}$$

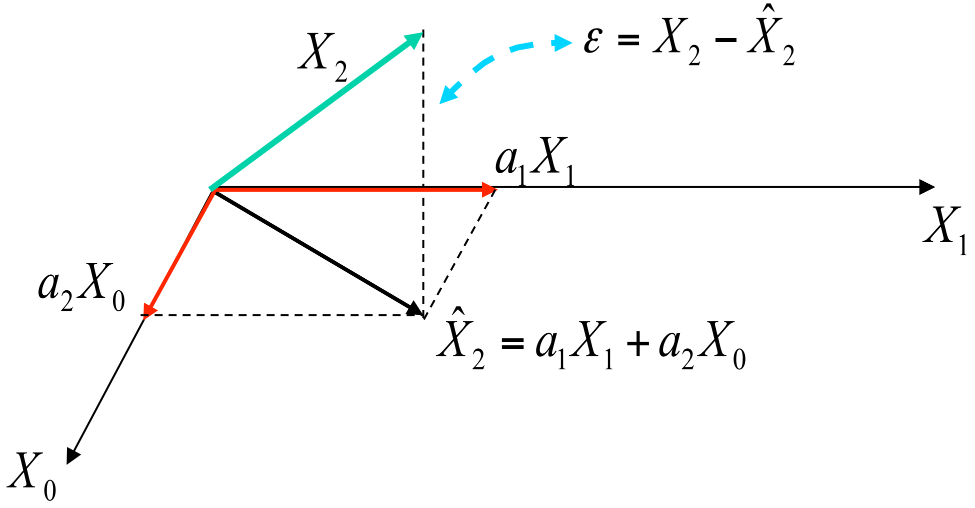
$$= -2E\left\{\left(X_N - \hat{X}_N\right)X_{N-k}\right\}$$

- A solução do problema é então:

  – Os a_k satisfazem $E\left\{\left(X_N - \hat{X}_N\right)X_{N-k}\right\} = 0 \qquad k = 1,2,\ldots,N$

  – Duas v. a. X e Y são ortogonais se $E\{X.Y\} = 0$

  – Os ak são tais que o erro é ortogonal aos dados. Isto é o enunciado do teorema da projecção ou principio da ortogonalidade.



Estimação Espectral Moderna (M. E. M.)

– Se as v. a. correspondem a um P. E. estacionário $\phi_{xx}(N, N-k) = \phi_{xx}(-k)$

$$E\left\{\left(X_N - \sum_{i=1}^{N} a_i X_{N-i}\right) . X_{N-k}\right\} = 0 \qquad k = 1 \ldots N \qquad \Longrightarrow \qquad \phi_{xx}(k) = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_{xx}(|k-i|)$$

$$\begin{cases} a_1\phi(0) + a_2\phi(1) + \ldots + a_N\phi(N-1) = \phi(1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1\phi(N-1) + a_2\phi(N-2) + \ldots + a_N\phi(0) = \phi(N) \end{cases}$$

Equações de Yule-Walker ou equações normais

$$\begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(1) & \ldots & \phi(N-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \phi(N-1) & \phi(N-2) & \ldots & \phi(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \ldots \\ \phi_N \end{bmatrix}$$

– O erro mínimo é

$$MMSE_{\min} = E\left\{\left(X_N - \hat{X}_N\right)^2\right\} = E\left\{\left(X_N - \hat{X}_N\right)\left(X_N - \hat{X}_N\right)\right\}$$

$$= E\left\{X_N . \left(X_N - \hat{X}_N\right)\right\} - \underbrace{E\left\{\hat{X}_N . \left(X_N - \hat{X}_N\right)\right\}}_{=0;\ \text{erro} \perp \text{aos dados}} = \phi_{xx}(0) - \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_{xx}(i)$$

Estimação Espectral Moderna (M. E. M.)

- Modelos para processos estocásticos
  - Geralmente a sequência x[n] é modelada como sendo a saída de um sistema LTI causal cuja entrada é uma sequência ruído branco w[n] de média nula e variância σ_e^2

$$w[n] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow x[n]$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h[n] z^{-n} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Equação de diferenças $x[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k x[n-k] + \sum_{k=0}^{q} b_k w[n-k]$

- Relação entre espectros $P_{xx}(\Omega) = |H(\Omega)|^2 . P_{ww}(\Omega) = \sigma_w^2 \left| \frac{B(\Omega)}{A(\Omega)} \right|^2$

  - Classificação dos P. E.
    - Autoregressive Moving Average (ARMA) process se N e q ambos $\neq 0$
    - Moving Average (MA) process se N=0 e $q \neq 0$ => $A(\Omega)=1$
    - Autoregressive (AR) process se q=0 e $N \neq 0$ => $B(\Omega)=1$

Estimação Espectral Moderna (M. E. M.)

- Método de Estimação Espectral da Entropia Máxima (MEM)
  - Conhecendo M+1 valores de $\varphi_{xx}(m)$: $\varphi_{xx}(-M)$ ... $\Phi_{xx}(0)$, ..., $\varphi_{xx}(M)$, em vez de fazer $\varphi_{xx}(m)=0$ para |m|>M, determinamos o preditor linear de ordem M resolvendo os a_k das equações:

$$\begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(1) & \dots & \phi(M-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi(M-1) & \phi(M-2) & \dots & \phi(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \dots \\ \phi_M \end{bmatrix}$$

  - Se o PE é autorregressivo de ordem M e estimamos x[n] como $\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{M} a_k x[n-k]$

    Então o erro de predição é ruído branco, ou seja a predição é a melhor possível

$$x[n] - \hat{x}[n] = w(n) \qquad x[n] = \sum_{k=1}^{M} a_k x[n-k] + w(n)$$

$$\sigma_w^2 = E\left\{\left[(x[n]-\hat{x}[n])-0\right]^2\right\} = MMSE = \phi_{xx}(0) - \sum_{k=1}^{M} a_k \phi_{xx}(k)$$

No caso de PE autorregressivos temos

$$P_{MEM}(\Omega) = \frac{MMSE}{\left|1 - \sum_{k=1}^{M} a_k e^{-jk\Omega}\right|^2}$$

Estimação Espectral Moderna (M. E. M.)

- Algumas notas sobre o estimador de entropia máxima
  - A informação existente numa sequência é definida em termos da entropia de Shannon. Para um PE Gaussiano a taxa de entropia (entropia por amostra) é proporcional a:

$$H \propto \int_{-\pi}^{\pi} \log P(\Omega) d\Omega$$

A ideia é escolher P(Ω) de modo a maximizar H mas com a restrição de

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\Omega) e^{-jm\Omega} d\Omega = \phi_{xx}(m) \quad |m| = 0,1,2...M$$

Deste modo os valores de autocorrelação correspondentes ao espectro de máxima entropia coincidem com os valores dados (|m|<M), sendo os valores de autocorrelação para fora desta gama estimados pelo estimador linear de ordem M. Deste modo a extrapolação da sequência de autocorrelação não adiciona nenhuma informação ao processo ou seja a entropia (incerteza sobre o processo) é mantida e é máxima, daí a designação de método da entropia máxima.

Estimação Espectral Moderna (M. E. M.)

- Problemas
  - O processo pode ser MA ou ARMA.
  - Mesmo que seja AR não se conhece a ordem

  - Algumas pistas
    - Se houver fundamento para supor que o processo é AR (p. e. fala) nunca se deverá utilizar um método clássico. A autocorrelação é infinita e os métodos clássicos truncam a autocorrelação.
    - Se houver fundamento para supor que se trata de um processo MA de ordem N a autocorrelação é finita e de comprimento N. Os métodos clássicos serão de aplicar.

  - Resumo do método da entropia máxima
    - Calcular a seq. de autocorrelação $\varphi_{xx}(m)$ (com base na realização do processo) para $|m|<M$
    - Extrapolar a sequência de autocorrelação para $|m|>M$ através de

$$\phi_{xx}(m) = \sum_{i=1}^{M} a_i \phi_{xx}(m-i) \qquad m = M+1, \ldots +\infty$$

Estimação Espectral Moderna (M. E. M.)

- Exemplo: Considere o segmento de um sinal de potência de comprimento N=5 como sendo x[n]={0, 1, 0, -1, 0}.

  a) Obtenha uma estimativa dos valores da autocorrelação Cxx(m) para -4≤m≤4

  b) Determine o preditor linear de ordem 4 que minimiza o erro quadrático médio entre a estimativa do sinal e o seu verdadeiro valor. Calcule a estimativa de x[5], x[6], x[7], e x[8].

  c) Calcule o erro do preditor

  d) Determine o espectro de máxima entropia

a)

$$C_{xx}(m)=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4-|m|}x[n]x[n+m]=\begin{cases}2/5 & m=0\\ 0 & |m|=1\\ -1/5 & |m|=2\\ 0 & |m|=3\\ 0 & |m|=4\end{cases}$$

b) Equações de Yule-Walker

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}a_1=a_3=0\\ a_2=2a_4=-\frac{2}{3}\end{matrix} \Rightarrow \hat{x}[n]=-\frac{2}{3}x[n-2]-\frac{1}{3}x[n-4]$$

$$\hat{x}[5]=\frac{1}{3} \qquad \hat{x}[6]=0 \qquad \hat{x}[7]=\frac{1}{9} \qquad \hat{x}[8]=0$$

Estimação Espectral Moderna (M. E. M.)

c) O erro do preditor é dado por $MMSE = \phi_{xx}(0) - \sum_{k=1}^{4} a_k \phi_{xx}(k) = \frac{4}{15}$

d) O espectro de entropia máxima é dado por $P_{MEM}(\Omega) = \frac{MMSE}{\left|1 - \sum_{k=1}^{M} a_k e^{-jk\Omega}\right|^2}$

– Problemas

1) Mostre que o MMSE do preditor linear de ordem N é dado por $MMSE = \frac{\Delta_{N+1}}{\Delta_N}$ em que Δ_N é o determinante da matriz de autocorrelação de ordem N

2) Mostre que os parâmetros de um processo autorregressivo de ordem M são os coeficientes de predição linear do processo.

3) Mostre que o preditor linear de ordem N de um Processo AR de ordem M (M<N) tem coeficientes a_k dados por

$$\begin{cases} a_k = c_k, & k = 1,2,..M \\ a_k = 0, & k = M+1, M+2, \ldots N \end{cases}$$

Em que c_k são os parâmetros autoregressivos.

4) Mostre que num processo autoregressivo de ordem M se tem

$$\phi_{xx}(m) = \sum_{k=1}^{M} a_k \phi_{xx}(m-k)$$

- Problemas (cont)

5) Relacione numericamente os resultados dos problemas 1, 3 e 5. Considere um processo AR de 1ª ordem de que se conhecem $\varphi(0)=2$ e $\varphi(1)=1$.

a) Determine o preditor linear de ordem 1.

b) Determine $\varphi(2)$

c) Determine o preditor linear de ordem 2 e verifique o resultado do problema 3.

d) Calcule os erros de predição dos preditores de 1ª e 2ª ordem e comente.

6) Resolva o projecto 1 do capítulo 6 (parte de estimação espectral moderna) do livro de exercícios com Matlab.