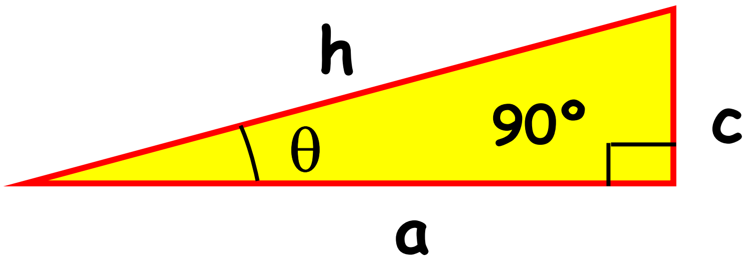
# II - Introdução Matemática

## 2.1. Trigonometria




h = comp. da hipotenusa

c = comp. do lado oposto ao ângulo θ

a = comp. do lado adjacente ao ângulo θ

### 2.1.1. Funções Trigonométricas

$$tg\theta = \frac{c}{a} \qquad \cot g\theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{h} \qquad \cos ec\theta = \frac{h}{a}$$

$$sen\theta = \frac{c}{h} \qquad \sec\theta = \frac{h}{c}$$

Funções Inversas:

$$\left\{ \begin{array}{l} arctg\dfrac{c}{a} = \theta \\ arccos\dfrac{a}{h} = \theta \\ arcsen\dfrac{c}{h} = \theta \end{array} \right.$$

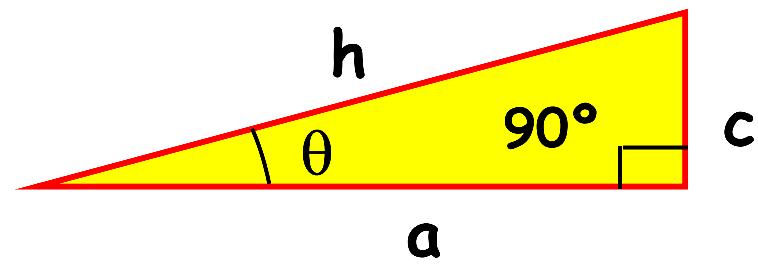
# 2.1.2. Triângulos e trigonometria

- Triângulos rectângulos

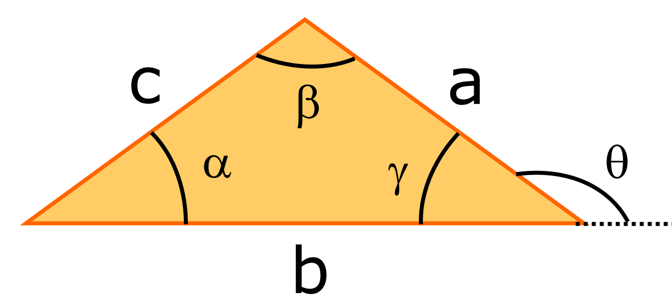
**Teorema de Pitágoras:**

Num triângulo rectângulo o quadrado da hipotenusa é igual á soma do quadrado dos catetos:

$$h^2 = c^2 + a^2$$




- Outros triângulos




Lei dos senos: $$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

Lei dos cosenos: $$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\cos\theta$$

## 2.1.3. Relações trigonométricas

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot g^2\theta = \cos ec^2\theta$$

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen\,\alpha.\cos\beta \pm sen\beta.\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha.\cos\beta \mp sen\,\alpha.sen\beta$$

$$sen(2\alpha) = 2.sen\,\alpha.\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

$$sen\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}$$

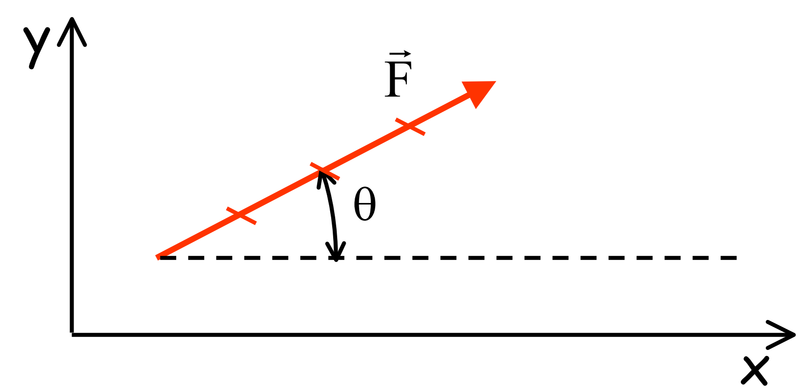
$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}$$

# 2.2. Cálculo Vectorial

## 2.2.1. Representação gráfica de vectores

**Características de um vector:**

- módulo
- direcção
- sentido

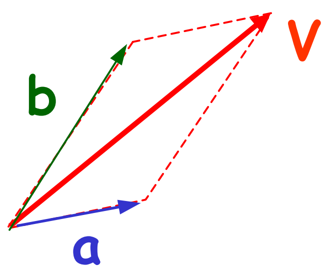



Um vector pode ser representado graficamente por um segmento de recta orientado, que tem a mesma direcção e sentido que o vector considerado e cujo comprimento é proporcional ao módulo do mesmo.

Notação: **F** ou $\vec{F}$

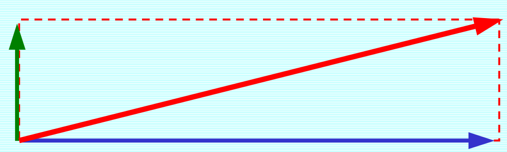
## 2.2.2. Componentes de um vector

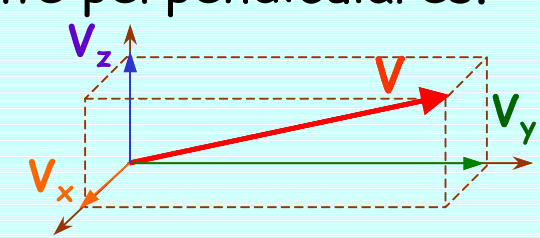
Qualquer vector, $\vec{V}$, pode ser considerado como o resultado da soma de dois ou mais vectores. Os vectores que somados dão origem ao vector $\vec{V}$ são chamados de vectores componentes de $\vec{V}$.




$$\vec{V} = \underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\text{vectores componentes}}$$

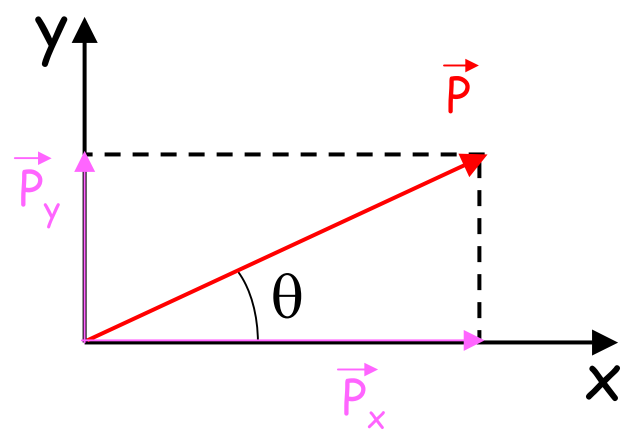
As componentes mais frequentemente usadas são as componentes ortogonais. Neste caso o vector é expresso como o resultado da soma de dois ou três vectores mutuamente perpendiculares.





## 2D

A duas dimensões um vector fica perfeitamente caracterizado por um módulo e um ângulo com um dos eixos de referência.




$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y$$

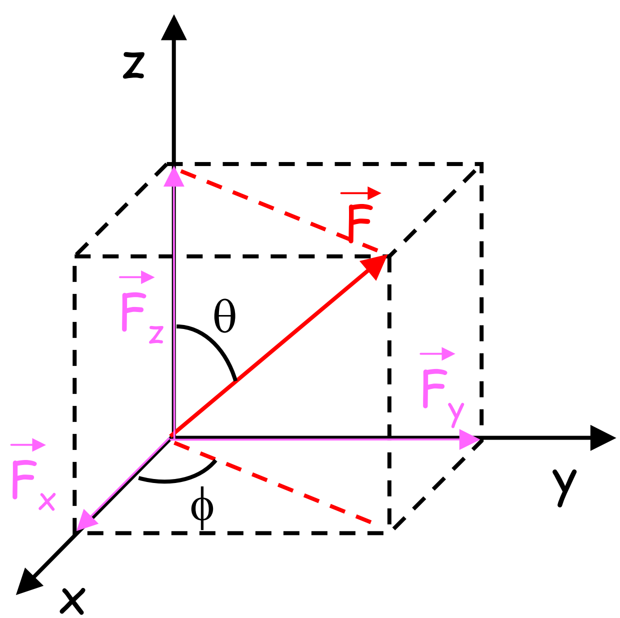
$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

$$P_x = P.\cos\theta$$

$$P_y = P.sen\theta$$

# 3D

A três dimensões, a caracterização de um vector necessita já de dois ângulos, para além do módulo.




$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

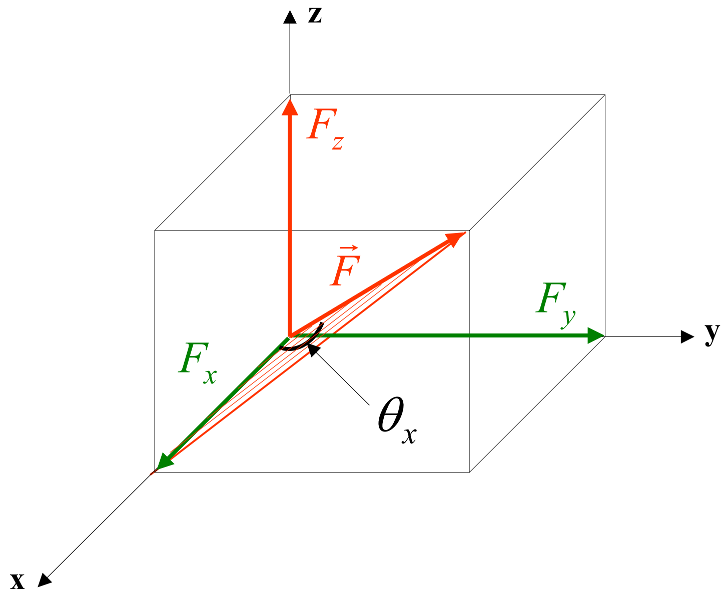
$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{\left|\vec{F}_x\right|^2 + \left|\vec{F}_y\right|^2 + \left|\vec{F}_z\right|^2}$$

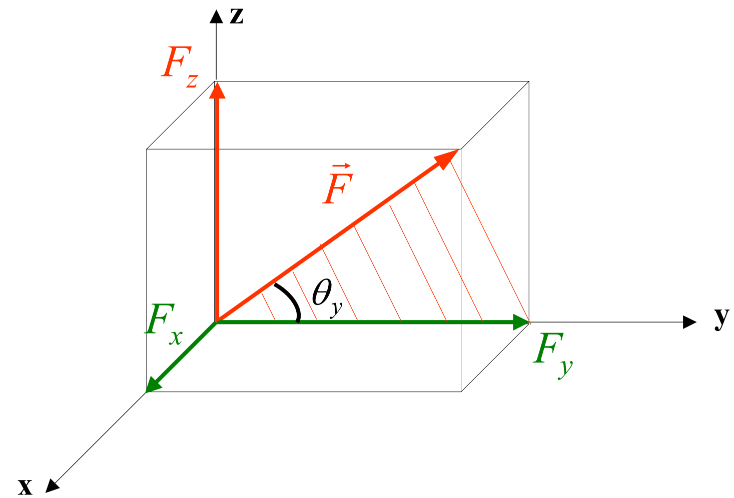
$$\left|\vec{F}_x\right| = \left|\vec{F}\right|.sen\theta.\cos\phi$$

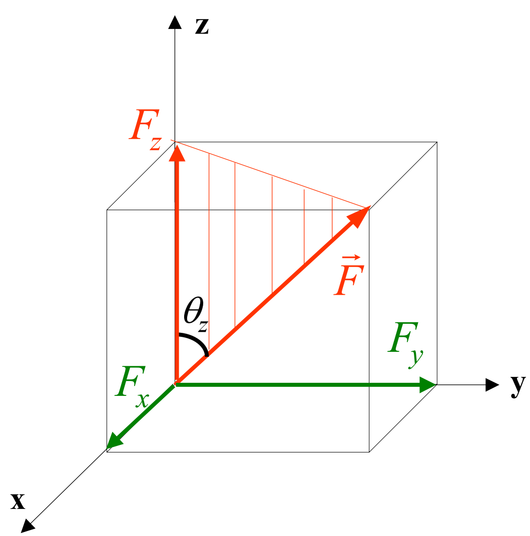
$$\left|\vec{F}_y\right| = \left|\vec{F}\right|.sen\theta.sen\phi$$

$$\left|\vec{F}_z\right| = \left|\vec{F}\right|.\cos\theta$$

# Co-senos directores




$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$F_x = F \cos\theta_x$$
$$F_y = F \cos\theta_y$$
$$F_z = F \cos\theta_z$$

## 2.2.3. Vectores unitários

Qualquer vector, $\vec{F}$ , pode ser escrito como: $\vec{F} = \boxed{F}\,\boxed{\hat{u}}$

módulo do vector $\vec{F}$

vector unitário com a mesma direcção de $\vec{F}$

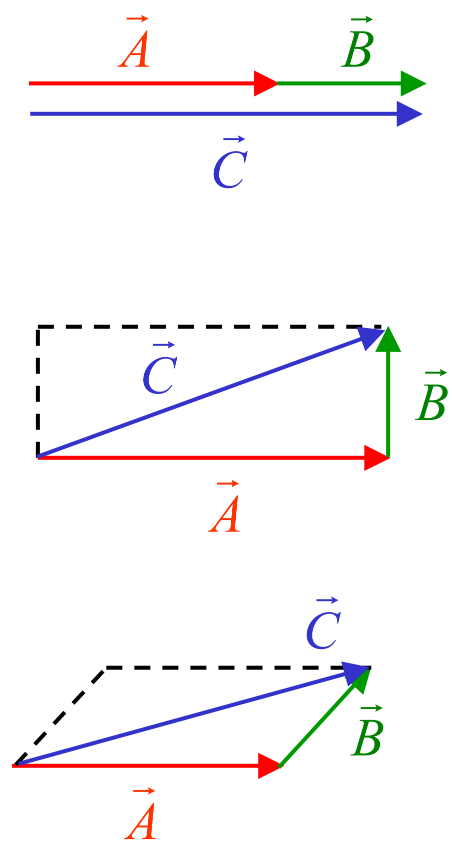
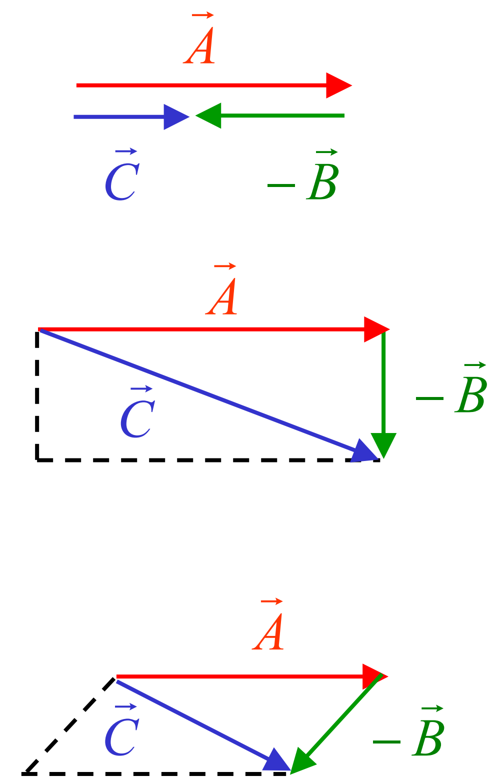
$$\hat{u} = \frac{\vec{F}}{\left|\vec{F}\right|}$$

Definindo três vectores unitários $\hat{i}, \hat{j}$ e $\hat{k}$ paralelos aos eixos cartesianos ***x***, ***y*** e ***z***, respectivamente, podemos escrever:

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

onde $F_x$, $F_y$ e $F_z$ são os módulos dos vectores componentes de F, segundo os eixos ***x***, ***y*** e ***z***.

# 2.2.4. Adição e subtracção gráfica de vectores

| adição | subtracção |
| --- | --- |
|  |  |

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C} \qquad \vec{A}-\vec{B}=\vec{C}$$

## Soma de vectores a partir dos vectores componentes

Suponhamos que o vector **D** é a resultante da soma dos vectores **A**, **B** e **C**:

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

Se substituirmos cada vector pelas suas componentes, obteremos as seguintes equações:

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &= A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \\ \vec{B} &= B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \\ \vec{C} &= C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k} \end{aligned}\right\} \quad \vec{D} = D_x\hat{i} + D_y\hat{j} + D_z\hat{k}$$

$$\begin{aligned} D_x &= A_x + B_x + C_x \\ D_y &= A_y + B_y + C_y \\ D_z &= A_z + B_z + C_z \end{aligned}$$

- Um vector é nulo se todas as suas componentes forem nulas.

- Dois vectores são iguais se e só se tiverem o mesmo módulo, direcção e sentido:

$$\vec{A} = \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A}_x = \vec{B}_x \\ \vec{A}_y = \vec{B}_y \\ \vec{A}_z = \vec{B}_z \end{cases}$$

## 2.2.5. Multiplicação de um vector por um escalar

$$\boxed{\vec{A} = a\vec{F}}$$

O vector **A** tem:

Módulo: $\left|\vec{A}\right| = a\left|\vec{F}\right|$

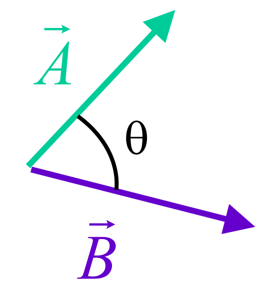
Direcção de $\vec{F}$

Sentido de **F** ou -**F** , dependendo do escalar b ser positivo ou negativo.

# 2.2.6. Produtos escalar, vectorial e misto

## Produto escalar ou interno

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{A}\,|\,\vec{B} = \left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|.\cos\theta \qquad \mathbf{0} \leq \theta \leq \pi$$




Define-se produto escalar ou interno de dois vectores **A** e **B** como a quantidade escalar obtida efectuando o produto da grandeza de um vector pela projecção do outro sobre o primeira.

## Propriedades do produto escalar

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

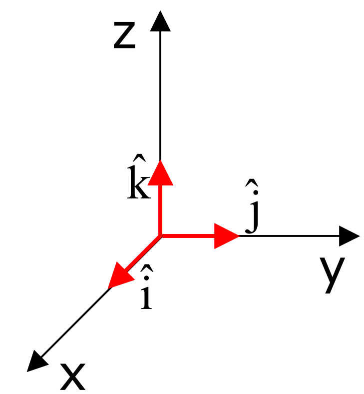
$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$m\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \left(m\vec{A}\right)\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot\left(m\vec{B}\right)$$

$$\begin{cases}\vec{A}\neq\vec{0};\vec{B}\neq\vec{0}\\ \vec{A}\cdot\vec{B}=0\end{cases} \Rightarrow \vec{A}\perp\vec{B}$$

# Produto escalar de vectores unitários

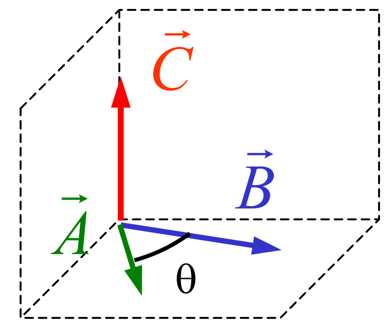
$$\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$
$$\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{i}\cdot\hat{k}=\hat{j}\cdot\hat{k}=0$$
$$\hat{j}\cdot\hat{i}=\hat{k}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{j}=0$$




$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

# Produto vectorial ou externo

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$




- **direcção**: perpendicular ao plano que contém os dois vectores.
- **sentido**: dado pela regra da mão direita
- **módulo**: $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| . \left|\vec{B}\right| . sen\,\theta$

## Propriedades do produto vectorial

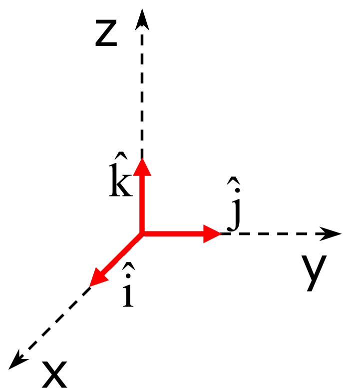
$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$$m\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \left(m\vec{A}\right) \times \vec{B} = \vec{A} \times \left(m\vec{B}\right)$$

$$\begin{cases} \vec{A} \neq \vec{0}; \vec{B} \neq \vec{0} \\ \vec{A} \times \vec{B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{A} // \vec{B}$$

## Produto vectorial de vectores unitários




$$\boxed{\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}}$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \qquad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \qquad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k} \qquad \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i} \qquad \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}\right)\times\left(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}A_x & A_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\hat{k}=$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}-(A_xB_z-A_zB_x)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$$

# 2.3. Introdução ao cálculo diferencial e integral

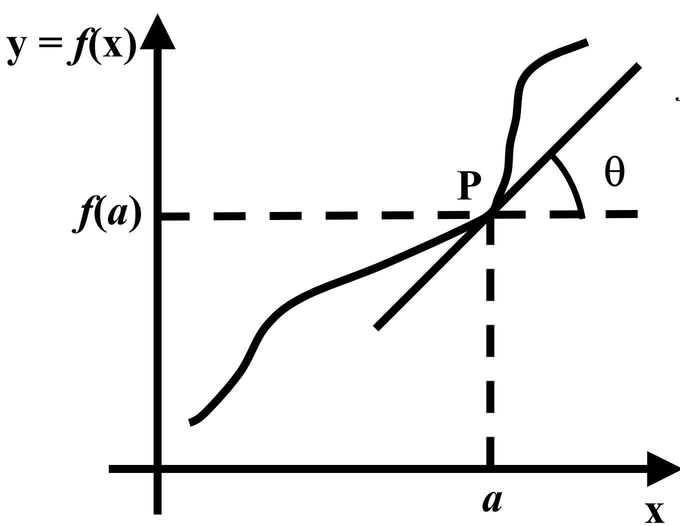
## 2.3.1. Derivada de uma função

A derivada de uma função *f(x)* para *x* = a é definida como:

$$f'(a) \overset{def}{\equiv} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ou, alternativamente, fazendo *x* = a + h $\Leftrightarrow$ h = *x* - a, obtemos

$$f'(a) \overset{def}{\equiv} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$




Tangente ao gráfico de $f$(x) no ponto P

$f'(a)$ = tg (θ) – a derivada é igual ao declive da tangente à curva para x = $a$.

# 2.3.1.1. Regras básicas de derivação de funções

Derivada da soma de funções: $\left[f(x)+g(x)\right]' = f'(x)+g'(x)$

Derivada do produto de funções: $\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

Derivada do cociente de funções: $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Derivada da função composta: $(f o g)'(x) = f'\left(g(x)\right)g'(x)$

Derivada da função inversa: $\left[f^{-1}(x)\right]' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

# 2.3.1.2. Derivadas imediatas

- $(x^{a})' = a.x^{a-1}$
- $[\mathrm{sen}(x)]' = \cos(x)$
- $[\cos(x)]' = \mathrm{sen}(x)$
- $[\mathrm{tg}(x)]' = 1/\cos^2(x) = \sec^2(x) = 1 + \mathrm{tg}^2(x)$
- $[\log_a(x)]' = 1/[x.\ln(a)] \Rightarrow [\ln(x)]' = 1/x$
- $(a^x)' = a^x.\ln(a) \Rightarrow (e^x)' = e^x$

# 2.3.2. Integrais definidos e indefinidos

Chama-se função primitiva da função $f(x)$ uma função $F(x)$ cuja derivada é $f(x)$, isto é:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

**Exemplo:**

*Primitiva de* $f(x) = 8x^3$ *é:* $F(x) = 2x^4$,

*mas também pode ser* $F(x) = 2x^4+6$ *ou* $F(x) = 2x^4+9$ *ou ainda* $F(x) = 2x^4 - 890$ .........

*Logo, genericamente, posso escrever:*

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[F(x)+k\right] = f(x)$$

*Qualquer que seja* $k$ = *const.*

$$\boxed{\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[F(x) + k\right] = f(x)}$$

Se F(x) é uma primitiva de $f$(x), toda a função

$$\Phi(x) = F(x) + k$$

é também uma função primitiva de $f$(x).

A Φ(x) chama-se também função integral ou integral indefinido de $f$(x) e escreve-se:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \Phi(x) = F(x) + k}$$

# 2.3.2.1. Algumas regras de primitivação

- **Primitiva da soma de funções:**

Sejam $F(x)$ e $G(x)$ duas funções tais que:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{e} \quad G'(x) = g(x)$$

Então $[F(x) + G(x)]' = f(x) + g(x)$. Da mesma forma também se verifica

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

- **Primitiva de uma constante vezes uma função:**

Se $F'(x) = f(x)$ então $(c.F(x))' = c.f(x)$.

Assim também se verifica que:

$$\int c.f(x)dx = c\int f(x)dx$$

## 2.3.2.2. Primitivas imediatas

$$\int a\,dx = a.x + C \qquad \forall a \in \Re$$

$$\int x^{a}dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad \forall a \neq -1 \in \Re$$

$$\int x^{-1}dx = \ln|x| + C$$

$$\int sen(x)dx = -\cos(x) + C \qquad \int \cos(x)dx = sen(x) + C$$

$$\int \sec^{2}(x)dx = \int \frac{1}{\cos^{2}(x)}dx = tg(x) + C$$

$$\int e^{x}dx = e^{x} + C$$

# 2.3.2.3. Integral de uma função

O integral (definido) de uma função *f(x)*, no intervalo *[a, b]*, escreve-se

Limite superior de integração $\rightarrow b$

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{Função integranda}}\underbrace{dx}_{\text{Variável de integração}}$$

Limite inferior de integração $\rightarrow a$

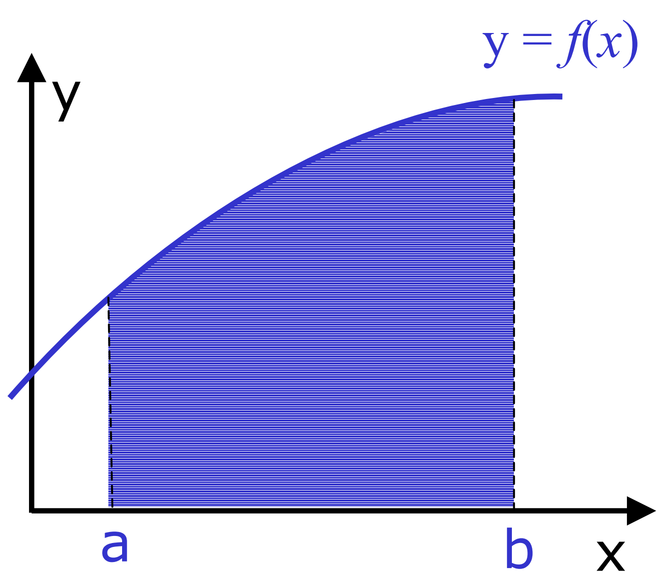
e é tal que, se tivermos $F'(x) = f(x)$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

Temos assim que:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

**As regras de primitivação são igualmente aplicáveis à integração de funções.**




Geometricamente, o integral de *f(x)* no intervalo *[a, b]*, é numericamente igual à área entre o gráfico de *f(x)* e o eixo *Ox*, como se indica na figura.