Ficha n° 9

1. a) $\int_{\Gamma} f\, ds = \int_{\Gamma} f(x,y,z) \cdot \|\vec{c}\,'(t)\|\, dt = \int_a^b f(\vec{c}(t)) \cdot \|\vec{c}\,'(t)\| dt$

$f(x,y,z) = x + y + z$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

O valor de f nos pontos da curva Γ é dado por:

$$f(\vec{c}(t)) = f(\operatorname{sen} t, \cos t, t) \quad , t \in [0, 2\pi]$$
$$= \operatorname{sen} t + \cos t + t.$$

Por outro lado, é necessário calcular

$$\vec{c}\,'(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$$

e a sua norma:

$$\|\vec{c}\,'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

Assim,

$$\int_{\Gamma} f\, ds = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t + \cos t + t) \cdot \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left[-\cos t + \operatorname{sen} t + \frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{2}\left[-\cos(2\pi) + \operatorname{sen} 2\pi + \frac{4\pi^2}{2} + \cos 0 - \operatorname{sen} 0 - \frac{0}{2}\right] =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \pi^2.$$

b) $f(x,y,z) = \cos z \quad , \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2$

O valor de f nos pontos da curva Γ é dado por:

$$f(\vec{c}(t)) = f(\operatorname{sen} t, \cos t, t) \quad , t \in [0, 2\pi]$$
$$= \cos t$$

Por outro lado, pelo exercício anterior, já sabemos que $\|\vec{c}'(t)\| = \sqrt{2}$.

Assim,

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2} \left[\operatorname{sen} t\right]_0^{2\pi} = 0.$$

c) $f(x,y,z) = y \quad , \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

O valor de f nos pontos da curva Γ é dado por

$$\begin{aligned} f(\vec{c}(t)) &= f(0,0,t) \quad , t \in [0,1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\vec{c}'(t) = (0,0,1) \quad \text{e} \quad \|\vec{c}'(t)\| = 1.$$

Assim,

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_0^1 0 \cdot 1 \, dt = 0.$$

d) $f(x,y,z) = yz$

O valor de f nos pontos da curva Γ é dado por:

$$\begin{aligned} f(\vec{c}(t)) &= f(t, 3t, 2t) \quad , t \in [1,3] \\ &= 3t \cdot 2t = 6t^2 \quad , t \in [1,3] \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\vec{c}\,'(t) = (1, 3, 2)$$

e $$\|\vec{c}\,'(t)\| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}.$$

Assim,

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_1^3 (6t^2)\,\sqrt{14}\, dt = 6\sqrt{14}\int_1^3 t^2\, dt =$$

$$= 6\sqrt{14}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^3 = 6\sqrt{14}\left[\frac{3^3}{3} - \frac{1}{3}\right] = 52\sqrt{14}.$$

2. A massa total do fio é dada por $\int_\Gamma f\, ds$ onde f é a função de densidade de massa e Γ é o fio.

Neste caso, $f(x,y,z) = 2$ e Γ é a curva descrita por $\vec{c}(t) = (0, 3\,\text{sen}\,t, 3\cos t)$, $t \in [0, \pi]$.

Tem-se

$$\vec{c}\,'(t) = (0, 3\cos t, -3\,\text{sen}\,t)$$

e $$\|\vec{c}\,'(t)\| = \sqrt{9\cos^2 t + 9\,\text{sen}^2 t} = 3.$$

Assim,

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_0^\pi 2 \times 3\, dt = 6\pi.$$

3. A área de um dos lados da cerca é dada por

$\int_\Gamma f\, ds$ onde $f(x,y)$ representa a altura da cerca para cada ponto (x,y) da curva Γ. A curva Γ onde se apoia a cerca é parametrizada por $\vec{c}(t) = (3\cos^3 t, 3\,\text{sen}^3 t)$.

Tem-se

$$f(\vec{c}(t)) = f(3\cos^3 t, 3\,\text{sen}^3 t) = 1 + \frac{3 \cdot \text{sen}^3 t}{3} = 1 + \text{sen}^3 t,$$

$$t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

Por outro lado, $\vec{c}\,'(t) = (9\cos^2 t(-\text{sen}\,t), 9\,\text{sen}^2 t . \cos t)$ e

$$\|\vec{c}\,'(t)\| = \sqrt{81 \cos^4 t . \text{sen}^2 t + 81\,\text{sen}^4 t . \cos^4 t} =$$

$$= 9 \sqrt{\cos^2 t . \text{sen}^2 t}\,\sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t} = 9 \cos t . \text{sen}\,t.$$

Assim, a área da cerca é

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_0^{\pi/2} (1 + \text{sen}^3 t)\, 9\,\text{sen}\,t . \cos t .\, dt =$$

$$= 9 \int_0^{\pi/2} (\text{sen}\,t . \cos t + \text{sen}^4 t . \cos t)\, dt =$$

$$= 9 \left[\frac{\text{sen}^2 t}{2} + \frac{\text{sen}^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = 9 \left[\frac{(\text{sen}\,\pi/2)^2}{2} + \frac{(\text{sen}\,\pi/2)^5}{5}\right] =$$

$$= 9 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right] = \frac{9 \times 7}{10} = \frac{63}{10}.$$

4. O comprimento da linha Γ é dado por

$$l(\Gamma)=\int_{\Gamma} ds \,, \quad \text{onde } \Gamma \text{ é parametrizada pela}$$

curva $\vec{c}(t)=(t^2,t,3)$, $t\in[0,1]$.

Tem-se $ds=\|\vec{c}\,'(t)\|\,dt=\|(2t,1,0)\|=\sqrt{4t^2+1}$.

Assim,

$$l(\Gamma)=\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt.$$

Para calcular este integral definido, é necessário fazer uma mudança de variável:

Seja $t=\frac{1}{2}\operatorname{sh} u$. Nesse caso, $dt=\frac{1}{2}\operatorname{ch} u\,du$

e quando $t=0 \Rightarrow 0=\frac{1}{2}\operatorname{sh} u \Leftrightarrow u=0$

e $t=1 \Rightarrow 1=\frac{1}{2}\operatorname{sh} u \Leftrightarrow u=\operatorname{argsh} 2$.

Assim,

$$l(\Gamma)=\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt=\int_0^{\operatorname{argsh} 2}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{ch} u\,du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{argsh} 2}\operatorname{ch} u\cdot\operatorname{ch} u\,du=\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{argsh} 2}\operatorname{ch}^2 u\,du=\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{argsh} 2}\frac{\operatorname{ch}(2u)+1}{2}\,du$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\operatorname{argsh} 2}(\operatorname{ch}(2u)+1)\,du=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2u)+u\right]_0^{\operatorname{argsh} 2}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} 2)+\operatorname{argsh} 2\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sqrt{5}+\operatorname{argsh} 2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[2\sqrt{5}+\operatorname{argsh} 2\right].$$

Integrais de linha de campos vetoriais

1. a) $\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{c}$

onde $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$

A função $\vec{F}$ nos pontos da curva Γ é definida por

$$\vec{F}(\vec{c}(t)) = \vec{F}(\text{sen}t, \cos t, t) = (\text{sen}t, \cos t, t) \quad , t \in [0, 2\pi]$$

e $d\vec{c} = (\cos t, -\text{sen}t, 1) . dt$.

Assim,

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{c} = \int_0^{2\pi} (\text{sen}t, \cos t, t) \circ (\cos t, -\text{sen}t, 1)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t . \text{sen}t - \text{sen}t . \cos t + t)\, dt = \int_0^{2\pi} t\, dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 .$$

b) $\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{c}$ $\qquad \vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$

A função $\vec{F}$ nos pontos da curva Γ é definida por

$$\vec{F}(\vec{c}(t)) = \vec{F}(t,t,t) = (t,t,t) \quad , t \in [0,1]$$

e $d\vec{c}(t) = (1,1,1)\, dt$

Assim,

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{c} = \int_0^1 (t,t,t) \circ (1,1,1)\, dt = \int_0^1 3t . dt = 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

2. $\int_{\Gamma} x^2\,dx + xy\,dy + dz$

onde Γ é a curva definida por $\vec{c}(t) = (t, t^2, 1)$, $t \in [0,1]$

Neste caso,

$$\begin{aligned} x &= t & &\Rightarrow dx = dt \\ y &= t^2 & &\Rightarrow dy = 2t\,dt \\ z &= 1 & &\Rightarrow dz = 0. \end{aligned}$$

Substituindo no integral de linha,

$$\int_{\Gamma} x^2 dx + xy\,dy + dz = \int_0^1 t^2 . dt + t.t^2(2t)dt + 0 =$$

$$= \int_0^1 (t^2 + 2t^4)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

3. $\int_{\Gamma} \cos z\,dx + e^x dy + e^y dz$

onde Γ é a curva definida por $\vec{c}(t) = (1, t, e^t)$, $t \in [0,2]$.

Ou seja, neste caso, tem-se

$$\begin{aligned} x &= 1 & &\Rightarrow dx = 0 \\ y &= t & &\Rightarrow dy = dt \\ z &= e^t & &\Rightarrow dz = e^t\,dt \end{aligned}$$

Substituindo no integral de linha,

$$\int_{\Gamma} \cos z\,dx + e^x dy + e^y dz = \int_0^2 \cos e^t . 0 + e^1 dt + e^t . e^t dt =$$

$$= \int_0^2 (e + e^{2t})\,dt = \left[e . t + \frac{1}{2} e^{2t}\right]_0^2 = 2e + \frac{1}{2} e^4 - e.0 - \frac{1}{2} e^0 =$$

$$= 2e + \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2} \quad //$$

4. O trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ ao longo da parábola $y=x^2, z=0$ para $x=-1$ até $x=2$, calcula-se por $w=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{c}$

A parametrização da curva Γ pode ser dada por

$$\vec{c}(t)=(t,t^2,0) \quad , t\in[-1,2].$$
$$d\vec{c}(t)=(1,2t,0)dt$$

e $\vec{F}(\vec{c}(t))=\vec{F}(t,t^2,0)=(t,t^2,0)$

Assim,

$$w=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{c}=\int_{-1}^{2}(t,t^2,0)\cdot(1,2t,0)\,dt=$$

$$=\int_{-1}^{2}(t+2t^3)\,dt=\left[\frac{t^2}{2}+\frac{2t^4}{4}\right]_{-1}^{2}=\frac{4}{2}+\frac{2\times 2^4}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=$$

$$=9$$

5. $w=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{c}$ para $\vec{F}(x,y,z)=(x^3,y,z)$
e $\vec{c}(t)=(0,2\cos t,2\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$

Tem-se que

$$\vec{F}(\vec{c}(t))=\vec{F}(0,2\cos t,2\operatorname{sen} t)=(0,2\cos t,2\operatorname{sen} t)$$

e $d\vec{c}=(0,-2\operatorname{sen} t,2\cos t)\,dt$.

Assim,

$$w=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{c}=\int_0^{2\pi}(0,2\cos t,2\operatorname{sen} t)\cdot(0,-2\operatorname{sen} t,2\cos t)\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(-4\operatorname{sen} t\cos t+4\operatorname{sen} t\cdot\cos t)\,dt=\int_\Gamma 0=0.$$

6. Se no integral $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ o campo vectorial $\vec{F}$ é conservativo, então o integral é independente da curva Γ.

É preciso verificar se $\vec{F}$ é conservativo.

a) $\vec{F}(x,y) = (\underbrace{x+y}_{F_1(x,y)}, \underbrace{x+y^3}_{F_2(x,y)})$

Determina-se $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$ e $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$.

Se fossem diferentes, podiamos afirmar que $\vec{F}$ não era conservativo.

Como são iguais, vamos tentar encontrar uma função potencial f para $\vec{F}$, isto é, determinar $f(x,y)$ tal que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$, isto é, f tal que $(f'_x, f'_y) = (F_1, F_2)$.

Se $\vec{F}$ for conservativo, então F_1 será a derivada parcial de uma função f relativamente a x, isto é,

$$f'_x = x+y.$$

Para determinar f, primitiva-se esta função relativamente a x:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + \underbrace{g(y)}$$

↳ função de y que não depende de x.

Seguidamente, deriva-se esta função $f(x,y)$ relativamente a y

$$f'_y = x + g'(y)$$

e esta função tem que ser igual a F_2, isto é,

$$f'_y = x + g'(y) = x + y^3 \quad \text{, isto é, } g'(y) = y^3.$$

Se $g'(y) = y^3$ então $g(y) = \frac{y^4}{4} + C$, C constante real.

Assim,

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + \frac{y^4}{4} + C.$$

Podemos considerar $C = 0$ para o efeito.

Então $\vec{F}$ é conservativo e o seu potencial é $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + \frac{y^4}{4}$

Assim, o cálculo do integral é independente do caminho:

$$\int_{\Gamma} (x+y)dx + (x+y^3)dy = f(2,2) - f(1,1) =$$

$$= \frac{4}{2} + 4 + \frac{2^4}{4} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{4} = \frac{33}{4}.$$

$=$

Da mesma forma para a alínea b)

b) $\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ onde $P(x,y) = x^2 - xy$
$Q(x,y) = y^2 - \frac{x^2}{2}$

Verifica se $\vec{F} = \left(x^2 - xy,\ y^2 - \frac{x^2}{2}\right)$ é conservativo.

Como $\frac{\partial P}{\partial y} = -x$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = -x$ são iguais, nada se pode concluir. Vamos determinar um potencial f para $\vec{F}$ (se existir): $\vec{\nabla} f = \vec{F}$

$$(f'_x, f'_y) = (P, Q)$$

Da igualdade $f'_x = P$, tem-se

$$f'_x = x^2 - xy$$

Primitivando relativamente a x:

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}y + g(y)$$ → função de y que não depende de x.

Derivando f relativamente a y:

$f'_y = -\frac{x^2}{2} + g'(y)$ que tem de ser igual à função $Q(x,y)$

$$f'_y = -\frac{x^2}{2} + g'(y) = Q(x,y) = y^2 - \frac{x^2}{2}$$

Daqui, $g'(y) = y^2$ e $g(y) = \frac{y^3}{3} + C$, C constante real.

Assim, $\vec{F}$ é conservativo e um seu potencial f é

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}y + \frac{y^3}{3}.$$

Podemos determinar

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = f(2,4) - f(-1,1)$$

$$= \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\times 4 + \frac{4^3}{3} - \left(-\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{33}{5}.$$

7. $\vec{F}(x,y) = (3+2xy, x^2-2y) = (F_1, F_2)$

a) $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x$ e $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$

Então $\vec{F}$ pode ser campo conservativo.

Determina f, tal que

$$(3+2xy, x^2-2y) = (f'_x, f'_y)$$

Da relação

$f'_x = 3+2xy \Rightarrow \int (3+2xy)\,dx = 3x + x^2y + C(y)$

Se existir, o potencial f é da forma:

$$f(x,y) = 3x+x^2y + C(y). \quad (C(y) \text{ função de } y)$$

Deriva-se em ordem a y:

$f'_y = x^2 + C'(y)$ e isto tem que ser igual à 2ª componente de $\vec{F}$:

$$x^2 + C'(y) = x^2 - 2y \Leftrightarrow C'(y) = -2y \Leftrightarrow$$

$$C(y) = -y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$f(x,y) = 3x + x^2y - y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) Como $\vec{F}$ é campo conservativo,

$\int_\Gamma \vec{F} \circ d\vec{r}$ só depende do ponto final e inicial.

$\vec{R}(\pi) = (e^\pi \operatorname{sen} \pi, e^\pi \cos \pi) = (0, -e^\pi)$

$\vec{R}(0) = (0,1).$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{R}(\pi)) - f(\vec{R}(0)) =$$
$$= f(0, -e^{\pi}) - f(0,1) =$$
$$= 0 + 0 - e^{2\pi} - 0 - 0 + 1 = 1 - e^{2\pi}.$$

8. $\vec{F}(x,y) = (6x+5y, 5x+4y)$

a) $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 5 = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$, pode ser que $\vec{F}$ seja campo conservativo.

Determinar função potencial f $(\vec{F} = \vec{\nabla} f)$.

De $f'_x = 6x+5y \Rightarrow f(x,y) = \int (6x+5y)\,dx = 3x^2 + 5yx + C(y)$

Se existir, $f(x,y) = 3x^2 + 5yx + C(y)$.

Derivando em ordem a y

$f'_y = 5x + C'(y)$ tem que ser igual a $5x+4y$.

$5x + C'(y) = 5x + 4y \Leftrightarrow C'(y) = 4y \Leftrightarrow$
$C(y) = 2y^2 + C \quad , C \in \mathbb{R}$.

Assim,

$f(x,y) = 3x^2 + 5yx + 2y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

8b) Como $\vec{F}$ é conservativo

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{R}(2)) - f(\vec{R}(0))$$

onde $\vec{r}(2) = (1+2, 2^2) = (3,4)$

$\vec{R}(0) = (1,0)$.

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(3,4) - f(1,0) =$$

$$= 3 \times 9 + 5 \times 4 \times 3 + 2 \times 16 - 3$$

$$= 27 + 60 + 32 - 3 = 116$$

Teorema de Green

1. $\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4+2})\,dy$

$F_1(x,y) = 3y - e^{\operatorname{sen} x} \Rightarrow (F_1)'_x = -\cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}$

$(F_1)'_y = 3$

$F_2(x,y) = 7x + \sqrt{y^4+2} \Rightarrow (F_2)'_x = 7$

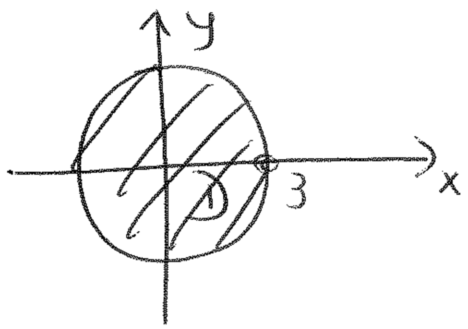
$(F_2)'_y = \frac{4y^3}{2}(y^4+2)^{-1/2}$

As derivadas parciais de F_1 e F_2 são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e a circunferência C é uma curva simples, fechada e contínua.

Assim, é possível aplicar o Teor. de Green.

$$\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4+2})\,dy = \iint_D (7-3)\,dA$$

onde D é o círculo limitado pela circunf. C.



$$\cancel{4}\iint_D 1 \cdot dA = \cancel{4} \times \text{área do circunf. de raio } 3$$
$$= \cancel{4} \times \pi \times 9^2 = 36\pi.$$

2. $\oint_C (xy^2)\,dx + x^3\,dy$

$F_1 = xy^2 \Rightarrow (F_1)'_x = y^2$ e $(F_1)'_y = 2xy$

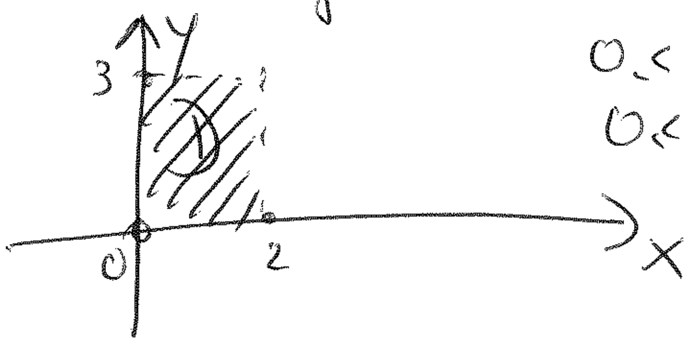
$F_2 = x^3 \Rightarrow (F_2)_x = 3x^2$ e $(F_2)'_y = 0$

As derivadas parciais de F_1 e F_2 são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e o retângulo C é uma curva simples, fechada e seccionalmente contínua.

Assim, é possível aplicar o Teor. de Green.

$$\oint_C (xy^2)\,dx + (x^3)\,dy = \iint_D (3x^2 - 2xy)\,dA$$

onde D é a região sombreada na figura



$0 \leq x \leq 2$
$0 \leq y \leq 3$

$$= \int_0^2 \int_0^3 (3x^2 - 2xy)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[3x^2y - xy^2\right]_0^3 dx =$$
$$= \int_0^2 (9x^2 - 9x)\,dx = \left[3x^3 - \frac{9x^2}{2}\right]_0^2 = 3\times 8 - 9\times 2 = 6.$$

③ $\oint_C (xy)dx + (x^2y^3)dy$

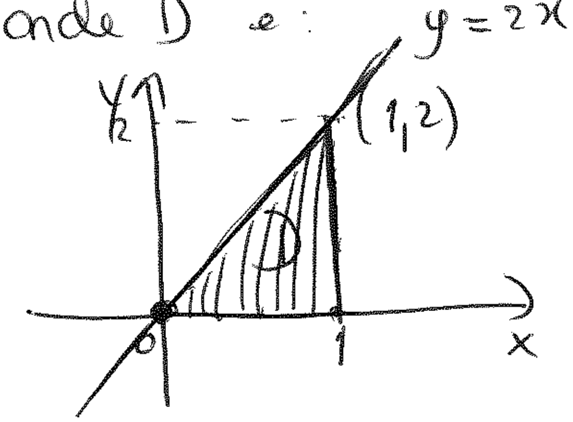
$F_1 = xy \Rightarrow (F_1)'_x = y \quad e \quad (F_1)'_y = x$

$F_2 = x^2y^3 \Rightarrow (F_2)'_x = 2xy^3 \quad e \quad (F_2)'_y = 3x^2y^2$

As derivadas parciais de F_1 e F_2 são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$ e o triângulo é uma curva simples, fechada e seccionalmente contínua, por isso, é possível aplicar o Teor. de Green:

$$\oint_C (xy)dx + (x^2y^3)dy = \iint_D (2xy^3 - x)\,dA$$

onde D é:



$0 \leq x \leq 1$
$0 \leq y \leq 2x$

$$\int_0^1 \int_0^{2x} (2xy^3 - x)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^4}{2} - xy\right]_{y=0}^{y=2x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2^4 x . x^4}{2} - 2x^2\right) dx = \int_0^1 (8x^5 - 2x^2)\,dx = \left[\frac{4x^6}{3} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \;//$$