CAPÍTULO 2

SUCESSÕES NUMÉRICAS

2.1 Definição e propriedades

Definição 2.1.1
Uma sucessão u de $\mathbb{R}$ é uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ associamos um número real $u(i)$.

NOTA 2.1.1 Podemos iniciar a sucessão com o indice 0 considerando aplicações u de $\mathbb{N}_0$ em $\mathbb{R}$. Por outro lado, falamos de sucessão de $\mathbb{Z}$, (resp. $\mathbb{Q}$) quando $u(i) \in \mathbb{Z}$ (resp. $u(i) \in \mathbb{Q}$.

Notação 2.1.1
No contexto das sucessões, é mais habitual usar a notação $u_i = u(i)$ para designar um elemento da sucessão enquanto $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ representa a sucessão completa (a função u). Para simplificar a notação, usamos também a forma mais curta (u_i) para designar uma sucessão.

Existem duas maneiras para definir as sucessões: por termo geral ou por recorrência.
A sucessão $u_i = \frac{i+1}{i^2+2}$ é difinida por termo geral. Podemos determinar u_{51} sem saber os valores anteriores.
A sucessão $i_{i+1} = u_i - 2u_{i-1}$ é definida por recorrência. Precisamos dos elementos anteriores para avaliar o valor seguinte. Além de mais, para inicializar a sucessão, é necessario dar o valor de u_1 e u_2.

EXEMPLO 2.1.1 (SUCESSÕES DE RELEVO) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

A sucessão de termo geral $u_i = \alpha^i$ se chama sucessão geométrica (progressão geométrica).
A sucessão de termo geral $u_i = \alpha i$ se chama a sucessão aritmética (progressão aritmética).
A sucessão de termo geral $u_i = \dfrac{\alpha}{i}$ se chama a sucessão harmónica.

EXEMPLO 2.1.2 (APROXIMAÇÃO COM SUCESSÇÃO) Seja $a > 0$ e consideramos a sucessão definida por recorrência $u_1 = a$, $u_{i+1} = \dfrac{u_i^2 + a}{2u_i}$. Esta sucessão converge para $\sqrt{a}$. As sucessões permitem calcular aproximações numéricas de valores como π.

Definição 2.1.2

Sejam $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de $\mathbb{R}$. Notamos por $(u_i + v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a sucessão soma, $(u_i v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a sucessão produto e $(u_i/v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a sucessão quociente. Neste último caso, todos os termos v_i devem ser não nulos.

EXEMPLO 2.1.3 Seja a sucessão de termo geral $u_i = \dfrac{1}{i}$. A sucessão ao quadrado é $u_i^2 = \dfrac{1}{i^2}$, a sucessão ao cubo $u_i^3 = \dfrac{1}{i^3}$.

Introduzimos aqui várias definições importantes para trabalhar com as sucessões.

Definição 2.1.3

Seja $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de $\mathbb{R}$.

- A sucessão é crescente se $u_{i+1} \geq u_i$.
- A sucessão é estritamente crescente se $u_{i+1} > u_i$.
- A sucessão é decrescente se $u_{i+1} \leq u_i$.
- A sucessão é estritamente decrescente se $u_{i+1} < u_i$.
- A sucessão é majorada por M se $\forall i \in \mathbb{N}$, $u_i \leq M$.
- A sucessão é minorada por m se $\forall i \in \mathbb{N}$, $u_i \geq m$.

NOTA 2.1.2 Uma sucessão crescente ou decrescente diz-se sucessão monótona.
Uma sucessão majorada e minorada é limitada.

EXEMPLO 2.1.4 Mostrar que a sucessão $u_i = \frac{i}{i+1}$ é crecente.
Determinamos a diferença entre dois termos consecutivos

$$u_{i+1} - ui = \frac{i+1}{i+2} - \frac{i}{i+1} = \frac{(i+1)(i+1) - (i+2)(i)}{(i+1)(i+2)} = \frac{1}{(i+1)(i+2)} > 0.$$

En conclusão, $u_{i+1} - u_i > 0$ quer dizer $u_{i+1} > u_i$. A sucessão é (estritamente) crescente.

Recordamos uma técnica de demonstração importante em análise matemátematica: a prova por indução.

Teorema 2.1.1 (Prova por indução)

Seja $\mathcal{H}(i)$ uma propriedade que depende do indice $i \in \mathbb{N}$ e supomos que temos as duas asserções.

- Existe um indice I_0 tal que $\mathcal{H}(I_0)$ é verdadeira.
- Para qualquer $i \geq I_0$, $\mathcal{H}(i)$ verdadeira implica $\mathcal{H}(i+1)$ verdadeira.

Então, para qualquer $i \geq I_0$ a propriedade $\mathcal{H}(i)$ é verdadeira.

Vamos aplicar este teorema com o exemplo seguinte.

Exemplo 2.1.5 Seja a sucessão definida por $u_i = 2$, $u_{i+1} = \frac{u_i+1}{2}$. Mostrar que 1 é um minorante da sucessão.
Seja $\mathcal{H}(i)$ a propriedade $u_i \geq 1$. É claro que temos $\mathcal{H}(1)$ proque $u_1 = 2 > 1$. Agora supomos que $\mathcal{H}(i)$ é verdadeira, quer dizer que $u_i > 1$, então $u_i + 1 > 2$ e finalmente $u_{i+1} = \dfrac{u_i+1}{2} > 1$. Isto significa que $\mathcal{H}(i+1)$ é verdadeira e concluimos que $u_i > 1$ para qualquer $i \in \mathbb{N}$.

Definição 2.1.4 (subsucessão)

Sejam $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de $\mathbb{R}$ e $(i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sucessão estritamente crescente de elementos de $\mathbb{N}$. Então a sucessão $(u_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ se chama subsucessão da sucessão $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 2.1.6 Seja a sucessão $u_i = 2^i$, então a sucessão $u_{i_j} = 2^{2j} = 4^j$ é uma subsucessão de u_i com $i_j = 2j$.

2.2 Limite de Sucessões

Definição 2.2.1

Sejam $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de $\mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$. A sucessão converge para ℓ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_\varepsilon, \text{ tal que se } i \geq I_0, \ |u_i - \ell| < \varepsilon.$$

Escrivemos que $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = \ell$.

Proposição 2.2.1
Sejam $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de $\mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = \ell$. Então o limite é único.

Este última proposta justifica o facto que dizemos **o** limite da sucessão e não **um** limite da sucessão.

NOTA 2.2.1 A únicidade do limite é de um ponto prático muito importante porque garante que podemos implementar algoritmos informáticos baseado numa sucessão que converge.

Proposição 2.2.2
Seja $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de $\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = \ell \in \mathbb{R}$. Então a sucessão é limitada.

DEMONSTRAÇÃO. Escolhemos o caso particular $\varepsilon = 1$ na definição de convergência. Existe então $I_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $i \geq I_0$ temos $\ell - 1 \leq u_i \leq \ell + 1$. Do outro lado notamos por $a = \min_{i\leq I_1} u_i$ e por $b = \max_{i\leq I_1} u_i$ o mínimo e o máximo dos valores de i_i **num conjunto finito**. Tomando $m = \min(a, \ell - 1)$ e $M = \max(b, \ell + 1)$, verificamos que para qualquer $i \in \mathbb{N}$, temos $m \leq u_i \leq M$. $\square$

Proposição 2.2.3 (monótona limitada)
Seja $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de $\mathbb{R}$.

- Se (u_i) é crescente majorada então converge.
- Se (u_i) é decrescente minorada então converge.

EXEMPLO 2.2.1 Seja a sucessão $u_i = 2$, $u_{i+1} = \frac{u_i+1}{2}$. Mostramos que a ela é minorada pelo 1. Agora temos

$$u_{i+1} - u_i = \frac{u_i + 1}{2} - u_i = \frac{u_i - 2u_i + 1}{2} = \frac{1 - u_i}{2} < 0$$

porque $u_i > 1$. Deduzimos que $u_{i+1} < u_i$ então é decrescente. Da proposição anterior concluimos que u_i converge para um limite ℓ.

NOTA 2.2.2 A proposição não dá o valor do limite. A única coisa que podemos afirmar é que $\ell \geq 1$.

Proposição 2.2.4 (sucessões enquadradas)
Sejam $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de $\mathbb{R}$ tal que ambos

$$\lim_{i\to\infty} u_i = \lim_{i\to\infty} w_i = \ell \in \mathbb{R}.$$

Seja uma sucessão $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $I_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall i \geq I_o, \qquad u_i \leq w_i \leq v_i.$$

Então $\lim_{i\to\infty} w_i = \ell$.

Exemplo 2.2.2 Seja a sucessão $w_i = \sqrt{\frac{i+1}{i}}$. Temos então

$$u_i = 1 \leq \sqrt{\frac{i+1}{i}} \leq \frac{i+1}{i} = 1 + \frac{1}{i} = v_i$$

Claramente $\lim_{i\to\infty} u_i = \lim_{i\to\infty} v_i = 1$ e concluimos que $\lim_{i\to\infty} w_i = 1$.

Definição 2.2.2
Uma sucessão $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ é uma sucessão de Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_\varepsilon \text{ tal que } \forall p.q \geq I_\varepsilon \text{ temos } |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

A principal propriedade da sucessão de Cauchy é que elas são convergentes.

Proposição 2.2.5 (sucessão de Cauchy)
Se $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy, então ela converge.

Nota 2.2.3 As sucessões de Cauchy são muita importantes do ponto de vista teórico.

Uma outra propriedade das sucessões convergentes é que qualquer sua subsucessão também converge.

Proposição 2.2.6
Sejam $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de $\mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{i\to\infty} u_i = \ell$. Então, qualquer subsucessão $(u_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge para ℓ,

EXEMPLO 2.2.3 Seja a sucessão $u_i = (-1)^i$. Mostrar que a sucessão não converge.
Fazemos um raciocínio por absurdo. Supomos que a sucessão converge para um limite ℓ e consideramos as duas subsucessões $(u_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ e$(u_{2j+1})_{j\in\mathbb{N}}$. Obtemos que $u_{2j} = (-1)^{2j} = 1$ enquanto $u_{2j+1} = (-1)^{2j+1} = -1$. Deduzimos que $\lim_{j\to\infty} u_{2j} = 1$ e $\lim_{j\to\infty} u_{2j+1} = -1$. Os dois limites são diferentes o que traz uma contradição com a hipótese que a sucessão converge. Conclusão: a sucessão não é convergente.

Definição 2.2.3

Sejam $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de $\mathbb{R}$.

- A sucessão tende para $+\infty$ se

$$\forall M > 0, \exists I_M, \text{ tal que se } i \geq I_0, \; u_i \geq M.$$

  Escrevemos que $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = +\infty$ ou ainda $u_i \xrightarrow[i\to\infty]{} +\infty$.

- A sucessão tende para $-\infty$ se

$$\forall M > 0, \exists I_M, \text{ tal que se } i \geq I_0, \; u_i \leq -M.$$

  Escrevemos que $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = -\infty$ ou ainda $u_i \xrightarrow[i\to\infty]{} -\infty$.

EXEMPLO 2.2.4 A sucessão $u_i = 5i$ tende para $+\infty$. Com efeito seja $M > 0$, existe um indice I_M tal que temos o enquadramento $I_M - 1 \leq M \leq I_M$. Em particular se $i \geq I_M$, então $5i \geq 5I_M \geq I_M \geq M$.
Concluimos que para qualquer $M > 0$, encontramos um $I_M \in \mathbb{N}$ tal que se $i \geq I_M$, temos $u_i \geq M$ e u_i tende para $+\infty$.

Proposição 2.2.7

Seja $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de $\mathbb{R}$.

- Se existe uma outra sucessão $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e um indice $I_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $i \geq I_0$ temos $u_i \geq v_i$ e $\lim\limits_{i\to\infty} v_i = +\infty$ então $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = +\infty$.
- Se existe uma outra sucessão $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e um indice $I_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $i \geq I_0$ temos $u_i \leq w_i$ e $\lim\limits_{i\to\infty} w_i = -\infty$ então $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = -\infty$.

EXEMPLO 2.2.5 Consideramos a sucessão $u_i = \dfrac{i^2 - 3i + 1}{2i + 1}$. Podemos verificar que $u_i \geq \dfrac{i}{2} = v_i$ e como $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{i}{2} = +\infty$ então deduzimos $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = +\infty$.

2.3 Aritmética dos limites

Damos aqui alguns limites de revelo

EXEMPLO 2.3.1 Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e consideramos a sucessão $u_i = \alpha^i$.

- Se $\alpha \leq -1$, a sucessão não converge.
- Se $|\alpha| < 1$, a sucessão converge para 0.
- Se $\alpha = 1$, a sucessão converge para 1.
- Se $\alpha > 1$, a sucessão tende para $+\infty$.

EXEMPLO 2.3.2 Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ a consideramos sucessão $u_i = i^\alpha$.

- Se $\alpha < 0$, a sucessão converge para 0.
- Se $\alpha = 0$, a sucessão converge para 1.
- Se $\alpha > 0$, a sucessão tende para $+\infty$.

Sejam $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de $\mathbb{R}$. As tabelas seguintes correspondem aos limites da soma, do produto e do quociente. O símbolo $\star$ significa que não podemos diretamente determinar o limite.

$\lim v_i$ \ $\lim u_i$	$-\infty$	ℓ	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\star$
ℓ'	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$\star$	$+\infty$	$+\infty$

$\lim v_i$ \ $\lim u_i$	$-\infty$	$\ell < 0$	$\ell = 0$	$\ell > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\star$	$-\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$+\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$
$\ell' = 0$	$\star$	0	0	0	$\star$
$\ell' > 0$	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\star$	$+\infty$	$+\infty$

Figura 2.1: Soma (esquerda) e produto (direita) de limites.

$\lim v_i$ \ $\lim u_i$	$-\infty$	$\ell < 0$	$\ell = 0$	$\ell > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$\star$	0	0	0	$\star$
$\ell' < 0$	$+\infty$	ℓ/ℓ'	0	ℓ/ℓ'	$-\infty$
$\ell' = 0$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
$\ell' > 0$	$-\infty$	ℓ/ℓ'	0	ℓ/ℓ'	$+\infty$
$+\infty$	$\star$	0	0	0	$\star$

Figura 2.2: Quociente (u_i/v_i) de limites.

EXEMPLO 2.3.3 Seja $\lim_{i\to\infty} u_i = 4$ e $\lim_{i\to\infty} v_i = -3$. Usando as tabelas podemos afirmar

$$\lim_{i\to\infty} u_i + v_i = 1, \quad \lim_{i\to\infty} u_i v_i = -12, \quad \lim_{i\to\infty} u_i/v_i = -4/3.$$