1. Para cada uma das seguintes alíneas, verifique que a função dada é solução da respectiva equação diferencial homogénea, e obtenha a solução geral.

a) $\frac{x^2}{4}\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0 \quad , \quad y_1(x)=x^4$**.**

R:

1º) Verificar se $y(x)=x^4$ é solução da equação diferencial dada:

$$y(x)=x^4 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^4\right)=4x^3 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(4x^3\right)=12x^2$$

Substituindo agora estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$$\frac{x^2}{4}\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}\cdot 12x^2-x\cdot 4x^3+x^4=0 \Leftrightarrow 3x^4-4x^4+x^4=0 \Leftrightarrow 0=0 \Rightarrow y(x)=x^4$$

é solução da equação diferencial.

2º) Obter a solução geral através do método da redução de ordem:

O método da redução de ordem implica a seguinte mudança de variável:

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot v(x) \Leftrightarrow y_2(x)=x^4\cdot v(x)$$

Assim sendo teremos então que:

$$y_2(x)=x^4\cdot v(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^4\cdot v(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(x^4\right)\cdot v(x)+x^4\cdot\frac{d}{dx}\left(v(x)\right)=4x^3\cdot v+x^4\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=4x^3\cdot v+x^4\cdot\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left[4x^3\cdot v+x^4\cdot\frac{dv}{dx}\right]=\frac{d}{dx}\left[4x^3\cdot v\right]+\frac{d}{dx}\left[x^4\cdot\frac{dv}{dx}\right]=$$

$$=\left(\frac{d}{dx}\left(4x^3\right)\cdot v+4x^3\cdot\frac{d}{dx}v\right)+\left(\frac{d}{dx}\left(x^4\right)\cdot\frac{dv}{dx}+x^4\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)\right)=$$

$$=12x^2\cdot v+4x^3\cdot\frac{dv}{dx}+4x^3\cdot\frac{dv}{dx}+x^4\cdot\frac{d^2v}{dx^2}=x^4\cdot\frac{d^2v}{dx^2}+8x^3\cdot\frac{dv}{dx}+12x^2\cdot v$$

Substituindo agora estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$$\frac{x^2}{4}\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}\left(x^4\cdot\frac{d^2v}{dx^2}+8x^3\cdot\frac{dv}{dx}+12x^2\cdot v\right)-x\left(4x^3\cdot v+x^4\cdot\frac{dv}{dx}\right)+\left(x^4\cdot v\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^6}{4}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{8x^5}{4}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{12x^4}{4}\cdot v-4x^4\cdot v-x^5\cdot\frac{dv}{dx}+x^4\cdot v=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^6}{4}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{8x^5}{4}-x^5\right)\cdot\frac{dv}{dx}+\left(\frac{12x^4}{4}+x^4-4x^4\right)\cdot v=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^6}{4}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{8x^5-4x^5}{4}\right)\cdot\frac{dv}{dx}+\left(\frac{12x^4+4x^4-16x^4}{4}\right)\cdot v=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^6}{4}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}+x^5\cdot\frac{dv}{dx}=0$$

Fazendo agora uma nova mudança de variável do tipo: $w=\frac{dv}{dx}\Rightarrow\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(w)=\frac{dw}{dx}$

Agora teremos que re-escrever a equação diferencial anteriormente obtida que irá resultar numa nova equação diferencial de variáveis separáveis:

$$\frac{x^6}{4}\cdot\frac{dw}{dx}+x^5\cdot w=0 \Leftrightarrow \frac{x^6}{4}\cdot\frac{dw}{dx}=-x^5\cdot w \Leftrightarrow \frac{x^6}{4}dw=\left(-x^5\cdot w\right)dx \Leftrightarrow \underbrace{\left(x^5\cdot w\right)}_{w}dx+\underbrace{\frac{x^6}{4}}_{x^6}dw=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{1}{x^6\cdot w}\wedge x\neq 0\wedge w\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x^6\cdot w}\cdot\left(x^5\cdot w\right)dx+\frac{1}{x^6\cdot w}\cdot\frac{x^6}{4}dw=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}dx+\frac{1}{4w}dw=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{4w}dw=C \Leftrightarrow \int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{w}dw=C \Leftrightarrow \ln|x|+\frac{1}{4}\cdot\ln|w|=C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot\ln|x|+4\cdot\frac{1}{4}\cdot\ln|w|=4C,\ 4C=C_1 \Leftrightarrow 4\cdot\ln|x|+\ln|w|=C_1 \Leftrightarrow \ln|x|^4+\ln|w|=C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(|x|^4\cdot|w|\right)=C_1 \Leftrightarrow e^{\ln\left(|x|^4\cdot|w|\right)}=e^{C_1},\ e^{C_1}=C_2 \Leftrightarrow |x|^4\cdot|w|=C_2,\ C_3=C_2>0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |w| = \frac{C_3}{|x|^4}, C_3 = C \neq 0 \Leftrightarrow w = \frac{C}{x^4} \rightarrow$ Família de soluções para a equação afectada do factor integrante.

Vamos agora verificar se $x = 0 \wedge w = 0$ também poderão ser soluções. Para tal teremos que antes de mais re-escrever a equação diferencial: $\frac{x^6}{4} \cdot \frac{dw}{dx} = -x^5 \cdot w \Leftrightarrow \frac{x^6}{4}\frac{dw}{dx} + x^5 \cdot w = 0$

Então por substituição teremos que: $\frac{0^6}{4}\frac{dw}{dx} + 0^5 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow x = 0 \wedge w = 0$ também são soluções.

Logo a família de soluções neste momento é dada por: $w = \frac{C}{x^4} \wedge x = 0 \wedge w = 0$

Então agora teremos que: $w = \frac{dv}{dx} \Rightarrow v(x) = \int w \, dx$, logo:

$$w = \frac{C}{x^4} \Rightarrow v(x) = \int \frac{C}{x^4}\, dx \Leftrightarrow v(x) = C \cdot \int x^{-4}\, dx \Leftrightarrow v(x) = C \cdot \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + k \Leftrightarrow v(x) = -\frac{C}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(x) = k_1 \cdot \frac{1}{x^3} + k,\ k = 0 \Leftrightarrow v(x) = k_1 \cdot \frac{1}{x^3}$$

Substituindo agora este valor na primeira mudança de variável teremos que:

$$y_2(x) = x^4 \cdot v(x) \Leftrightarrow y_2(x) = x^4 \cdot k_1 \cdot \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow y_2(x) = k_1 \cdot x,\ k_1 = 1 \Leftrightarrow y_2(x) = x$$

Conclusão: A solução geral é: $y = c_1 \cdot x^4 + c_2 \cdot x$

b) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0 \quad , \quad x > 0 \quad , \quad y_1(x) = x^2$**.**

R:

1º) Verificar se $y(x) = x^2$ é solução da equação diferencial dada:

$$y(x) = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(2x) = 2$$

Substituindo agora estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot 2 - 2 \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow y(x) = x^2 \text{ é solução da equação diferencial.}$$

2º) Obter a solução geral através do método da redução de ordem:

O método da redução de ordem implica a seguinte mudança de variável:

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot v(x) \Leftrightarrow y_2(x) = x^2 \cdot v(x)$$

Assim sendo teremos então que:

$$y_2(x) = x^2 \cdot v(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2 \cdot v(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) \cdot v(x) + x^2 \cdot \frac{d}{dx}(v(x)) = 2x \cdot v + x^2 \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot v + x^2 \cdot \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[2x \cdot v + x^2 \cdot \frac{dv}{dx}\right] = \frac{d}{dx}[2x \cdot v] + \frac{d}{dx}\left[x^2 \cdot \frac{dv}{dx}\right] =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}(2x) \cdot v + 2x \cdot \frac{d}{dx}(v)\right) + \left(\frac{d}{dx}\left(x^2\right) \cdot \frac{dv}{dx} + x^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)\right) = 2 \cdot v + 2x \cdot \frac{dv}{dx} + 2x \cdot \frac{dv}{dx} + x^2 \cdot \frac{d^2v}{dx^2} =$$

$$= x^2 \cdot \frac{d^2v}{dx^2} + 4x \cdot \frac{dv}{dx} + 2 \cdot v$$

Substituindo agora estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(x^2 \cdot \frac{d^2v}{dx^2} + 4x \cdot \frac{dv}{dx} + 2 \cdot v\right) - 2 \cdot \left(x^2 \cdot v\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 \cdot \frac{d^2v}{dx^2} + 4x^3 \cdot \frac{dv}{dx} + 2 \cdot v \cdot x^2 - 2 \cdot x^2 \cdot v = 0 \Leftrightarrow x^4 \cdot \frac{d^2v}{dx^2} + 4x^3 \cdot \frac{dv}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{x^3} \cdot \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{4x^3}{x^3} \cdot \frac{dv}{dx} = 0 \Leftrightarrow x \cdot \frac{d^2v}{dx^2} + 4 \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

Fazendo agora uma nova mudança de variável do tipo: $w = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(w) = \frac{dw}{dx}$

Agora teremos que re-escrever a equação diferencial anteriormente obtida que irá resultar numa nova equação diferencial de variáveis separáveis:

$$x \cdot \frac{dw}{dx} + 4 \cdot w = 0 \Leftrightarrow x \cdot \frac{dw}{dx} = -4 \cdot w \Leftrightarrow (x)dw = -(4 \cdot w)dx \Leftrightarrow \underbrace{(x)}_{\downarrow \atop x}dw + \underbrace{(4 \cdot w)}_{\downarrow \atop w}dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{x \cdot w} \wedge w \neq 0 \text{ [1]} \Rightarrow \frac{1}{x \cdot w} \cdot (x)dw + \frac{1}{x \cdot w} \cdot (4 \cdot w)dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{w}\right)dw + \left(\frac{4}{x}\right)dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{w}\right)dw + \int \left(\frac{4}{x}\right)dx = C \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{w}\right)dw + 4 \cdot \int \left(\frac{1}{x}\right)dx = C \Leftrightarrow \ln|w| + 4 \cdot \ln|x| = C \Leftrightarrow$$

$$\ln|w| + \ln|x|^4 = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(|w| \cdot |x|^4\right) = C \Leftrightarrow e^{\ln\left(|w| \cdot |x|^4\right)} = e^C ,\ e^C = C_1 \Leftrightarrow |w| \cdot |x|^4 = C_1 ,\ C_2 = C_1 > 0 \Leftrightarrow |w| = \frac{C_2}{|x|^4} ,\ C_2 = C \neq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow w = \frac{C}{x^4}$ → Família de soluções para a equação afectada do factor integrante.

Vamos agora verificar se $w = 0$ também poderá ser solução. Para tal teremos que antes de mais re-escrever a equação diferencial na sua outra forma: $(x)dw + (4w)dx = 0 \Leftrightarrow (x)\frac{dw}{dx} + (4w) = 0$

[1] Como é dito no enunciado que $x > 0$ então não precisamos de mencionar no factor integrante que $x \neq 0$.

Então por substituição teremos que: $(x)\dfrac{d0}{dx}+(4\cdot 0)=0 \Leftrightarrow 0=0 \rightarrow w=0$ também é solução.

Logo a família de soluções neste momento é dada por: $w=\dfrac{C}{x^4} \wedge w=0$

Então agora teremos que: $w=\dfrac{dv}{dx} \Rightarrow v(x)=\int w\,dx$, logo:

$$w=\frac{C}{x^4} \Rightarrow v(x)=\int \frac{C}{x^4}\,dx \Leftrightarrow v(x)=C\cdot\int x^{-4}\,dx \Leftrightarrow v(x)=C\cdot\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+k \Leftrightarrow v(x)=-\frac{C}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(x)=k_1\cdot\frac{1}{x^3}+k,\ k=0 \Leftrightarrow v(x)=k_1\cdot\frac{1}{x^3}$$

Substituindo agora este valor na primeira mudança de variável teremos que:

$$y_2(x)=x^2\cdot v(x) \Leftrightarrow y_2(x)=x^2\cdot k_1\cdot\frac{1}{x^3} \Leftrightarrow y_2(x)=k_1\cdot\frac{1}{x},\ k_1=1 \Leftrightarrow y_2(x)=\frac{1}{x}$$

Conclusão: A solução geral é: $y=c_1\cdot x^2+c_2\cdot\dfrac{1}{x}$

c) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=0 \quad , \quad x>0 \quad , \quad y_1(x)=x$

R:

1º) Verificar se $y(x)=x$ é solução da equação diferencial dada:

$$y(x)=x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x)=1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(1)=0$$

Substituindo agora estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=0 \Leftrightarrow x^2\cdot 0+x\cdot 1-x=0 \Leftrightarrow 0=0 \Rightarrow y(x)=x$ é solução da equação diferencial.

2º) Obter a solução geral através do método da redução de ordem:

O método da redução de ordem implica a seguinte mudança de variável:

$$y_2(x) = y_1(x)\cdot v(x) \Leftrightarrow y_2(x) = x\cdot v(x)$$

Assim sendo teremos então que:

$$y_2(x) = x\cdot v(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x\cdot v(x)) = \frac{d}{dx}(x)\cdot v(x) + x\cdot\frac{d}{dx}(v(x)) = v + x\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\cdot\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[v + x\cdot\frac{dv}{dx}\right] = \frac{d}{dx}[v] + \frac{d}{dx}\left[x\cdot\frac{dv}{dx}\right] =$$

$$= \frac{dv}{dx} + \left(\frac{d}{dx}(x)\cdot\frac{dv}{dx} + x\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)\right) = \frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx} + x\cdot\frac{d^2v}{dx^2} = 2\cdot\frac{dv}{dx} + x\cdot\frac{d^2v}{dx^2}$$

Substituindo agora estes valores na equação diferencial dada teremos que:

$$x^2\left(2\cdot\frac{dv}{dx} + x\cdot\frac{d^2v}{dx^2}\right) + x\left(v + x\cdot\frac{dv}{dx}\right) - (x\cdot v) = 0 \Leftrightarrow 2x^2\cdot\frac{dv}{dx} + x^3\cdot\frac{d^2v}{dx^2} + x\cdot v + x^2\cdot\frac{dv}{dx} - (x\cdot v) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2\cdot\frac{dv}{dx} + x^3\cdot\frac{d^2v}{dx^2} + x^2\cdot\frac{dv}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^3\cdot\frac{d^2v}{dx^2} + 3x^2\cdot\frac{dv}{dx} = 0$$

Fazendo agora uma nova mudança de variável do tipo:

$$w = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(w) = \frac{dw}{dx}$$

Agora teremos que re-escrever a equação diferencial anteriormente obtida que irá resultar numa nova equação diferencial de variáveis separáveis:

$$x^3\cdot\frac{dw}{dx} + 3x^2\cdot w = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{dw}{dx} + \frac{3x^2}{x^3}\cdot w = 0 \Leftrightarrow \frac{dw}{dx} + \frac{3}{x}\cdot w = 0 \Leftrightarrow dw + \underbrace{\left(\frac{3}{x}\cdot w\right)}_{w}dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{w} \wedge w \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{w}\cdot dw + \frac{1}{w}\cdot\left(\frac{3}{x}\cdot w\right)dx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{w}\cdot dw + \frac{3}{x}dx = 0 \Leftrightarrow \int\frac{1}{w}\cdot dw + \int\frac{3}{x}dx = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{w}\cdot dw + 3\cdot\int \frac{1}{x}dx = C \Leftrightarrow \ln|w| + 3\cdot\ln|x| = C \Leftrightarrow \ln|w| + \ln|x|^3 = C \Leftrightarrow \ln\left(|w|\cdot|x|^3\right) = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln\left(|w|\cdot|x|^3\right)} = e^C,\ e^C = C_1 \Leftrightarrow |w|\cdot|x|^3 = C_1,\ C_2 = C_1 > 0 \Leftrightarrow |w| = \frac{C_2}{|x|^3},\ C_2 = C \neq 0 \Leftrightarrow w = \frac{C}{x^3} \rightarrow$$

Família de soluções para a equação afectada do factor integrante.

Vamos agora verificar se $w = 0$ também poderá ser solução.

$\frac{dw}{dx} + \frac{3}{x}\cdot w = 0 \Rightarrow \frac{d0}{dx} + \frac{3}{x}\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow w = 0$ também é solução.

Logo a família de soluções neste momento é dada por: $w = \frac{C}{x^3} \wedge w = 0$

Então agora teremos que: $w = \frac{dv}{dx} \Rightarrow v(x) = \int w\, dx$, logo:

$$w = \frac{C}{x^3} \Rightarrow v(x) = \int \frac{C}{x^3}\, dx \Leftrightarrow v(x) = C\cdot\int x^{-3}\, dx \Leftrightarrow v(x) = C\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + k \Leftrightarrow v(x) = -\frac{C}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(x) = k_1\cdot\frac{1}{x^2} + k,\ k = 0 \Leftrightarrow v(x) = k_1\cdot\frac{1}{x^2}$$

Substituindo agora este valor na primeira mudança de variável teremos que:

$$y_2(x) = x\cdot v(x) \Leftrightarrow y_2(x) = x\cdot k_1\cdot\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y_2(x) = k_1\cdot\frac{1}{x},\ k_1 = 1 \Leftrightarrow y_2(x) = \frac{1}{x}$$

Conclusão: A solução geral é: $y = c_1\cdot x + c_2\cdot\frac{1}{x}$