CAPÍTULO 5

DERIVAÇÃO

5.1 Definições e propriedades elementares

5.1.1 Derivadas e derivadas laterais

Definição 5.1.1 (derivada lateral à esquerda)
Seja f uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Supomos que existe $\tau > 0$ tal que o intervalo $]x_0 - \tau, x_0] \subset D_f$. A função f admite uma derivada lateral à esquerda de x_0 (ou f é derivável em x_0^-) se a taxa de variação

$$\Delta f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

converge quando x tende para x_0 por valores inferiores. Notada $f'_e(x_0)$ o limite

$$f'_e(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

NOTA 5.1.1 Existe também um outra notação onde consideramos o acréscimo $h = x - x_0 < 0$ e a taxa de variação escreve-se

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Da mesma maneira definimos a derivada à direita.

Definição 5.1.2 (derivada lateral à direita)
Seja f uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Supomos que existe $\tau > 0$ tal que o intervalo $[x_0, x_0 + \tau[\subset D_f$. A função f admite uma derivada lateral à direita de x_0 (ou f é derivável em x_0^+) se a taxa de variação

$$\Delta f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

converge quando x tende para x_0 por valores superiores. Notada $f'_d(x_0)$ o limite

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Finalmente, definimos a derivada em x_0.

Definição 5.1.3 (derivada)
Seja f uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Supomos que existe $\tau > 0$ tal que o intervalo $]x_0 - \tau, x_0 + \tau[\subset D_f$. A função f admite uma derivada em x_0 (ou f é derivável em x_0) se a taxa de variação

$$\Delta f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

converge quando x tende para x_0. Notada $f'_d(x_0)$ o limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Proposição 5.1.1
Se f admite uma derivada em x_0 (resp. à esquerda de x_0 ou à direita de x_0) então esta derivada é única.

DEMONSTRAÇÃO. Em exercício □

NOTA 5.1.2 A função f admite uma derivada em x_0 se e somente se f admite derivadas laterais em x_0 tal que $f'_e(x_0) = f'_d(x_0)$.

Consideramos agora intervalos da forma $I = [a.b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Definição 5.1.4
Seja f uma função contínua num intervalo I. A função é derivável em I se f é derivável em qualquer ponto $x_0 \in]a,b[$. Além de mais, se $a \in I$, f é derivável à direita de a e se $b \in I$, f é derivável à esquerda de b.

EXEMPLO 5.1.1 Seja $I = [-1, 1[$, a função é derivável em I se para qualquer $x_0 \in]-1, 1[$, podemos calcular $f'(x_0)$ e se $f'_d(-1)$ existe.

Notação 5.1.1
Notamos por f' a função derivada que para cada $x \in I$ associa o valor $f'(x)$ (resp. $f'_d(a)$ ou $f'_e(b)$ se $a \in I$ ou $b \in I$).
Notamos por $C^1(I)$ o conjunto das funções f deriváveis em I tal que $f' \in C^0(I)$ (quer dizer a função derivada é contínua).

NOTA 5.1.3 Podemos estendir este definição para qualquer reunião de intervalos. Por exemplo se $E =]-1, 4[\cup [12, +\infty[$, a função é $C^1(E)$ se $f \in C^1(]-1, 4[)$ e $f \in C^1([12, +\infty[)$.

EXEMPLO 5.1.2 Seja $f(x) = |x|$, determinar as derivadas em 0^- e 0^+. Que podemos concluir sobre a existência de derivada em $x_0 = 0$?
Seja $x < 0$ e calculamos a taxa de variação em $x_0 = 0$

$$\Delta f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = -1.$$

Deduzimos que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \Delta f_0(x) = -1$ é então $f'_e(0) = -1$. Da mesma maneira podemos mostrar que $f'_d(0) = 1$ e concluimos que f admite derivadas laterais em 0 mas não admite uma derivada em 0.

5.1.2 Diferencial

Definição 5.1.5
Seja f uma função definida em $]x_0 - \tau, x_0 + \tau[\subset D_f$ tal que f admite uma derivada em x_0. A aplicação linear $df(x_0)$ definida por

$$h \to df(x_0)h$$

se chama diferencial de f no ponto x_0.

NOTA 5.1.4 Em particular a função identidade $x \to x$ tem um diferencial para qualquer ponto que se denota por dx.

Notação 5.1.2
Para indicar que as variações infinitesimais de f são linearmente dependentes das variações infinitesimais de x notamos $df(x_0) = f'(x_0)dx$ que introduz a notação diferencial

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0).$$

Consideramos a quantidade

$$R(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = f(x_0) + df(x_0)h.$$

Como f admite uma derivada em x_0, deduzimos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0.$$

Isto significa que a função polinomial de grau 1 definida por $p(h) = f(x_0) + f'(x_0)h$ é uma primeira aproximação da função f no ponto x_0.

Exemplo 5.1.3 Seja $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$. Temos $f(0) = f'(0) = e^0 = 1$ e deduzimos a primeira aproximação polinomial $p(h) = 1 + x$.

5.1.3 Derivada e continuidade

Proposição 5.1.2

- Se f admite uma derivada à direita em x_0 então f é contínua em x_0 à direita.
- Se f admite uma derivada à esquerda em x_0 então f é contínua em x_0 à esquerda.
- Se f admite uma derivada em x_0 então f é contínua em x_0.

Demonstração. Supomos que f seja derivável pela esquerda em x_0 e $\tau > 0$ tal que f definida em $]x_0 - \tau, x_0]$. Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 \in]0, \tau[$ tal que se $x \in]x_0 - \delta_1, x_0]$ temos

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'_e(x_0) \right| < \varepsilon/2.$$

Em particular temos $|f(x) - f(x_0)| < (|f'_e(x_0)| + \varepsilon/2)|x - x_0|$. Como $f'_e(x_0) \in \mathbb{R}$, podemos escolher $\delta = \min(1, \delta_1, |f'_e(x_0)|\varepsilon/2) > 0$ e obtemos $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0]$

$$|f(x) - f(x_0)| < |f'_e(x_0)||x - x_0| + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Concluimos então que f é contínua à esquerda em 0. A prova faz.se da mesma maneira para os outros casos. □

Corolário 5.1.1
Se f é derivável num intervalo I então f é contínua no mesmo intervalo.

Nota 5.1.5 Cuidado: f derivável $\Rightarrow f$ contínua mais a recíproca é falsa como nós vimos como exemplo da função $|x|$.

5.1.4 Derivada de soma, de produto e de quociente

Proposição 5.1.3
Sejam f e g duas funções definidas em $]x_0-\tau, x_0+\tau[\subset D_f\cap D_g$ tal que as duas funções são deriváveis em x_0. Então a função soma é derivável em x_0 e temos

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Demonstração. Seja $\varepsilon>0$, existe $\delta_1\in]0,\tau[$ tal que if $x\in]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[$, $|\Delta f_{x_0}(x)-f'(x_0)|<\varepsilon/2$. Do mesmo modo temos um $\delta_2\in]0,\tau[$ tal que if $x\in]x_0-\delta_2, x_0+\delta_2[$, $|\Delta g_{x_0}(x)-g'(x_0)|<\varepsilon/2$. Escrevemos

$$\left|\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}-[f'(x_0)+g'(x_0)]\right|\leq$$
$$|\Delta f_{x_0}(x)-f'(x_0)|+|\Delta g_{x_0}(x)-g'(x_0)|<\varepsilon.$$

Concluimos que a função $(f+g)$ admite uma derivada em x_0 e da unicidade da derivada deduzimos que $(g+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$. □

Exemplo 5.1.4

Proposição 5.1.4
Sejam f e g duas funções definidas em $]x_0-\tau, x_0+\tau[\subset D_f\cap D_g$ tal que as duas funções são deriváveis em x_0. Então a função produto é derivável em x_0 e temos

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

DEMONSTRAÇÃO. Para qualquer $x \in]x_0 - \tau, x_0 + \tau[$, temos

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} - [f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)]\right| \leq \\
&\left|\frac{[f(x) - f(x_0)]g(x) + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} - [f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)]\right| \leq \\
&\qquad g(x)|\Delta f_{x_0}(x) - f'(x_0)| + f(x_0)|\Delta g_{x_0}(x) - g'(x_0)|.
\end{aligned}$$

De um lado temos $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} \Delta f_{x_0}(x) = f'(x_0)$ enquanto do outro lado temos $\lim_{x \to x_0} \Delta g_{x_0}(x) = g'(x_0)$. Deduzimos então

$$\lim_{x \to x_0} \left|\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} - [f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)]\right|$$

o que significa que (fg) é derivável em x_0) Concluimos com a unicidade dos limites que $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. □

NOTA 5.1.6 Um corolário importante deste resultado é que se f é derivável em x_0 então para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ temos $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

EXEMPLO 5.1.5

Proposição 5.1.5

Seja f e g duas funções definidas em $]x_0 - \tau, x_0 + \tau[\subset D_f \cap D_g$ tal que as duas funções também são deriváveis em x_0. Supomos além de mais que $g(x_0) \neq 0$, então a função produto é derivável e temos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

DEMONSTRAÇÃO. A prova é muito semelhente ao caso anterior usando a igualdade

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} = \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0) - f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{g(x)g(x_0)}$$

Concluimos com dois argumentos: 1) que numa vizinhnaça $g(x) \neq 0$ porque $g(x_0) \neq 0$ e g contínua em x_0; 2) passamos ao limite quando $x \to x_0$. □

EXEMPLO 5.1.6

Temos várias notas importantes sobre esta secção

NOTA 5.1.7 Todos os resultados enunciados neste paragráfo são também verdadeiros com à derivada à direita ou à esquerda. Por exemplo se ambas f e g admitem uma derivada à direita em x_0, então (fg) admite também derivada à direita e temos

$$(fg)'_d(x_0) = f'_d(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'_d(x_0).$$

NOTA 5.1.8 Seja um intervalo $I \subset D_f \cap D_g$. Se as funções são deriváveis no intervalo I então $f+g$ e fg são também deriváveis em I. Além de mais, se $g(x)$ não se anula em I então o quociente $\frac{f}{g}$ é também derivável em I.

5.1.5 Derivada da função composta e da função recíproca

Proposição 5.1.6 (Derivada de funções compostas)
Sejam f, g duas funções tal que f éderivável em x_0 e g é derivável em $y_0 = f(x_0)$. Então a função composta $g \circ f$ é derivável em x_0 é temos

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Esta fórmula chama-se regra da cadeia.

DEMONSTRAÇÃO. Em primeiro lugar temos que mostrar que existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tal que

$$f(]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[) \subset]y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2[\subset D_g$$

o que corresponde ao critério de compatibilidade para a composta.
Com efeito, a derivabilidade de g no ponto y_0 implica que existe $\delta_2 > 0$ tal que $]y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2[\subset D_g$. Agora para este δ_2 dado, a continuidade de f no ponto x_0 implica que existe $\delta_1 > 0$ tal que $]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\subset D_f$ e se $|x - x_0| < \leq \delta_1$ então $|f(x) - f(x_0)| < \delta_2$, quer dizer $f(]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[) \subset]y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2[$.
• Se a função $f(x)$ é uma função constante então $g \circ f$ é também uma função constante e temos $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) = 0$. Concluimos que $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = 0$.
• Agora supomos que f não é constante tal que $f(x) \neq f(x_0)$ podemos então escrever

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Passando ao limite nas expressões

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \quad \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0)$$

Notando que a continuidade de f implica $y = f(x) \to y_0 = f(x_0)$ quando $x \to x_0$, concluimos que $g \circ f$ admite uma derivada em x_0 e a unicidade da derivada implica $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$. □

NOTA 5.1.9 O resultado é verificado em qualquer intervalo $I \subset D_f$ tal que $f(I) \subset J \subset D_g$ onde f e g são ambas deriváveis.

EXEMPLO 5.1.7 Desta fórmula geral obtemos várias derivadas de funções compostas de revelo. Por exemplo, seja $U(x)$ é uma função derivável, temos

- $(U(x)^\alpha)' = \alpha U(x)^{\alpha-1}U'(x)$.
- $\ln(U(x))' = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$, $(\exp(U(x))' = \exp(U)U'(x)$.
- $\sin(U(x))' = \cos(U(x))U'(x)$, $\cos(U(x))' = -\sin(U(x))U'(x)$.
- $\tan(U(x))' = [1+\tan^2(U(x))]U'(x)$, $\cot(U(x))' = -[1+\cot^2(U(x))]U'(x)$.

Proposição 5.1.7 (função recíproca)
Seja f uma bijeção de I sobre $J = f(I)$ derivável em $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) \neq 0$. Seja f^{-1} a função reciproca. Então a função f^{-1} é derivável em $y_0 = f(x_0)$ é temos

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Como $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f^{-1}(f(x_0)) = x_0$ a quantidade seguinte dá

$$\frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1.$$

Como $f'(x_0) \neq 0$, a continuidade implica que existe $\tau > 0$ tal que $\Delta f_{x_0}(x) \neq 0$ para $x \in]x_0-\tau, x_0+\tau[$ e podemos calcular

$$\frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x)-(x_0)} \times \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1$$

Deduzimos então

$$\frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Por continuidade, quando $x \to x_0$ temos $f(x) \to f(x_0)$ e por outro lado o limite de $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe. Concluimos que podemos passar ao limite é obtemos $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. □

Vamos procurar alguns exemplos de relevo usando este resultado crucial.

EXEMPLO 5.1.8 Determinar a função derivada de arcsin.
Sabemos que a função $\sin(x)$ é uma bijeção de $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sobre $J = [-1,1]$ e admite uma função recíproca $\arcsin(y)$. Para qualquer $x \in I$ tal que $\cos(x) \neq 0$, temos

$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Como $\cos(x) \leq 0$ no intervalo I, podemos escrever $\cos(x) = \sqrt{\cos^2(x)} = \sqrt{1-\sin^2(x)}$. Notando $y = \sin(x)$, deduzimos

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Nota que a função arcsin é derivável apenas no intervalo $]-1,1[$.

Exemplo 5.1.9 Determinar a função derivada de arctan.
Sabemos que a função tan é uma bijeção de $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ para $\mathbb{R}$ e a sua função reciproca é $\arctan(y)$. Para qualquer $x \in I$, temos

$$\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(x)}.$$

Pomos $y = \tan(x)$ e deduzimos que para qualquer $y \in \mathbb{R}$, $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

5.2 Teoremas com a derivada

Definição 5.2.1 (extremo local)
Sejam f uma função, $I \subset D_f$ um intervalo e $x_0 \in I$.

- f admite um mínimo local em x_0 (ou x_0 é um minimizante local) se existe $\tau > 0$ tal que
$$\forall x \in I \cap B(x_0, \tau),\ f(x) \geq x_0.$$
- f admite um mínimo local estrito em x_0 (ou x_0 é um minimizante local estrito) se existe $\tau > 0$ tal que
$$\forall x \in I \cap B(x_0, \tau) \text{ e } x \neq x_0,\ f(x) > x_0.$$
- f admite um máximo local em x_0 (ou x_0 é um maximizante local) se existe $\tau > 0$ tal que
$$\forall x \in I \cap B(x_0, \tau),\ f(x) \geq x_0.$$
- f admite um máximo local estrito em x_0 (ou x_0 é um maximizante local estrito) se existe $\tau > 0$ tal que
$$\forall x \in I \cap B(x_0, \tau) \text{ e } x \neq x_0,\ f(x) > x_0.$$

Nota 5.2.1 Chama.se extremo local (estrito) um máximo ou um mínimo local (estrito).

Consideramos um intervalo I da forma $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$. Temos o resultado fundamental seguinte.

Teorema 5.2.1 (Fermat)
Seja f um função tal que $I \subset D_f$. Se $x_0 \in]a,b[$ é um extremo local e se f derivável em x_0 então $f'(x_0) = 0$.

Demonstração. Supomos que $x_0 \in]a,b[$ corresponde a um mínimo, então existe $\tau > 0$ tal que $\forall x \in]x_0 - \tau, x_0 + \tau[\subset I$ temos $f(x) \geq f(x_0)$. Vamos em primeiro lugar considerar a derivada à esquerda. Se $x < x_0$, temos

$$\Delta f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

e como a função é derivável deduzimos, passando ao limite, $f'(x_0) = f'_e(x_0) \geq 0$. Do mesmo modo se $x < x_0$, temos

$$\Delta f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

e deduzimos que passando ao limite $f'(x_0) = f'_d(x_0) \leq 0$. Conclusão, a única possibilidade é $f'(x_0) = 0$. □

Teorema 5.2.2 (Rolle)
Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$, derivável em $]a,b[$. Se $f(a) = f(b) = 0$ então existe $x_0 \in]a,b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Demonstração. Da continuidade, deduzimos que $f([a,b]) = [c,d]$.
• Se $c = d$, temos $f(x) = 0$ então a função é constante. Escolhamos $x_0 = (a+b)/2$ e $f'(x_0) = 0$.
• Supomos agora que $c \neq d$ e por examplo $d > 0$. Então existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = d$. Notamos que $x_0 \neq a, b$ porque $f(x_0) > 0$. Por outro lado x_0 é um máximo local porque $d = f(x_0) \leq f(x)$ para qualquer $x \in]a,b[$. Do teorema de Fermat deduzimos que $f'(x_0) = 0$.
□
Finalmente chegamos ao teorema principal desta secção

Teorema 5.2.3 (Lagrange)
Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$, derivável em $]a,b[$. Então existe $x_0 \in]a,b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$.

Demonstração. Seja $p = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ e consideramos a função $g(x) = f(x) - f(a) - p(x - a)$. A função g é contínua em $[a,b]$, derivável em $]a,b[$ e verificamos que $g(a) = g(b) = 0$.

Podemos aplicar o teorema de Rolle: existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $g'(x_0) = 0$, quer dizer $g'(x_0) = f'(x_0) - p = 0$ seja ainda

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

de onde concluimos. □

Notando $\theta = \dfrac{x_0 - a}{b - a} \in]0, 1[$, temos uma outra apresentação do teorema.

Corolário 5.2.1
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, derivável em $]a, b[$. Então existe $\theta \in]0, 1[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\theta a + (1 - \theta)b)(b - a)$.

Do mesmo modo, uma outra forma popular do teorema é obtida notando $h = b - a$.

Corolário 5.2.2
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, a + h]$, derivável em $]a, a + h[$. Então existe $\theta \in]0, 1[$ tal que $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$.

Do teorema de Lagrange, deduzimos muitas propriedades que vamos apresentar agora.

Proposição 5.2.1
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, derivável em $]a, b[$. Se $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$ então f é uma função constante.

Demonstração. Para qualquer $x \in]a, b]$, consideramos o intervalo $[a, x]$. A função é contínua em $[a, x]$, derivável em $]a, x[$ então podemos aplicar o teorema de Lagrange. Existe $x_0 \in]a, x[$ tal que $f(x) - f(a) = f'(x_0)(x - a)$. Como $f'(x_0) = 0$ deduzimos $f(x) = f(a)$ e concluimos que a função f é constante. □

Proposição 5.2.2
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, derivável em $]a, b[$.

i f' é não negativa $\Leftrightarrow$ f é crescente.

ii f' é não positiva $\Leftrightarrow$ f é decrescente .

iii f' é positiva $\Rightarrow$ f é estritamente crescente.

iv f' é negativa $\Rightarrow$ f é estritamente decrescente.

Demonstração. Vamos demostrar para o caso crescente e estritamente crescente.
i $\Rightarrow$) Seja $x < y$ dois pontos de $[a, b]$, então podemos usar o teorema de Lagrange no intervalo $[x, y]$ e deduzir que existe $x_0 \in]x, y[\subset]a, b[$ tal que $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x) \geq 0$. Concluimos que $f(y) \geq f(x)$.
i $\Leftarrow$) Seja $x_0 \in]a, b[$. Como a função é crecente temos $\Delta f_{x_0}(x) \leq 0$. Passando ao limite deduzimos que $f'(x_0) \leq 0$.
iii $\Rightarrow$) Seja $x < y$ dois pontos de $[a, b]$, então podemos usar o teorema de Lagrange no intervalo $[x, y]$ e deduzir que existe $x_0 \in]x, y[\subset]a, b[$ tal que $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x)$. Como desta vez $f'(x_0) > 0$, concluimos que $f(y) > f(x)$. $\square$
Outra extensão do teorema de Lagrange é a seguinte

Proposição 5.2.3 (Cauchy)

Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$, deriváveis em $]a, b[$. Supomos além de mais que $g'(x) \neq 0$ no intervalo $]a, b[$, então existe $x_0 \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Demonstração. Seja a função $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x) - f(b)g(a) + g(b)f(a)$. Verificamos que $h(a) = h(b) = 0$ e aplicamos o teorema de Rolle. Deduzimos então existe x_0 tal que $h'(x_0) = 0$ e concluimos que

$$[f(b) - f(a)]g'(x_0) - [g(b) - g(a)]f'(x_0) = 0.$$

Donde vem a formula de Cauchy. $\square$

Proposição 5.2.4 (Regra de l'Hospital)

Sejam f e g duas funções de $C^1(]x_0 - \tau, x_0 + \tau[)$ tal que f, g são não nulas exceto em x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Supomos além de mais que $g'(x) \neq 0$ no intervalo $]a, b[$, temos as duas situações seguintes:

- Se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ então $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$.
- Se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ então $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

Demonstração. Consideramos apenas o primeiro caso, Os outros casos tratam-se da mesma maneira. Usamos o teorema de Cauchy com $a = x$ e $b = x_0$. Como g' é positiva, a função g é estritamente crecente então $g(x) - g(x_0) \neq 0$. Dedizimos que existe $x_e \in]x, x_0[$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_e)}{g(x_e)}.$$

Como $x_e \to x_0$ quando $x \to x_0$, deduzimos que o quociente admite um limite lateral à esquerda e temos

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Do mesmo modo, podemos mostrar que o quociente admite um limite lateral à direita e temos

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Em conclusão vem que os dois limites laterais são iguais. □

Nota 5.2.2 A prova mostra que a regra de l'Hospital também funciona com as derivadas laterais.

5.2.1 Primitivas

Definição 5.2.2
Seja f uma função definida num interval $I \subset D_f$. Uma função F definida no intervalo I é uma primitiva de f se

- F é derivável em I.
- $F'(x) = f(x)$ para qualquer $x \in X$.

Proposição 5.2.5
Seja f uma função definida num interval $I \subset D_f$. Supomos que existem duas primitivas F e G de f então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + C$.

Demonstração. Seja $H(x) = F(x) - G(x)$. Então $H' = F' - G' = f - f = 0$, Da proposição 5.2.1, deduzimos que H é uma função constante, seja $H(x) = C$ com $C \in \mathbb{R}$. □

Exemplo 5.2.1 Seja $f(x) = \cos(2x)$ então a função $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + 3.14$ é uma primitiva de f.

Notação 5.2.1
Notamos por $Pf = F$ uma primitiva de f. Devemos ter algum cuidado com esta notação porque não temos unicidade da primitiva. Em consequência o operador "primitivação "$f \to F = Pf$ faz sentido apenas para funções que diferem de uma constante.
Seja $x_0 \in I$ tal que $Pf(x_0) = 0$, então dizemos que Pf é a primitiva que se anula em x_0 (desta vez temos a unicidade da primitiva).

Proposição 5.2.6
Sejam f e g duas funções que admitem uma primitiva em I então para qualquer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$P(\lambda f + \mu g) = \lambda Pf + \mu Pg.$$

Demonstração. Esta propriedade vem diretamente da linearidade do operador de derivação. □

Teorema 5.2.4
Seja f una função contínua num intervalo $I \subset D_f$. Então f admite uma primitiva.

As primitivas imediatas são aqulas que vêm de funções com derivadas previamente conhecidas. De facto a tabela das derivadas fornece também a tabela das derivadas.

Exemplo 5.2.2 Determinar uma primitiva de $\cos(2\pi x)$.
Como $[\sin(2\pi x)]' = 2\pi\cos(2\pi x)$ deduzimos que $\frac{1}{2\pi}[\sin(2\pi x)]' = \cos(2\pi x)$ e finalmente $F(x) = \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$ é uma primitiva de f.

Proposição 5.2.7 (Primitivação por substituição)
Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a,b]$ e supomos que podemos escrever f como $f(t) = G'(u(t))u'(t)$ então $Pf(t) = G(u(t))$.

Demonstração. A justificação deste resultado vem da fórmula da derivação de uma função composta, seja

$$[G(u(t))]' = G'(u(t))u'(t).$$

Obtemos assim por definição da primitiva que $G(u(t)) = P\Big\{G'(u(t))u'(t)\Big\} = Pf$. □

EXEMPLO 5.2.3 Seja $f(t) = \cos^{14}(t)\sin(t)$. Podemos reescrever esta expressão como $f(t) = G'(u(t))u'(t)$ onde $G'(u) = u^{14}$ e $u(t) = -\cos(t)$. Como $G(u) = \frac{u^{15}}{15}$, concluimos então que $Pf = -\frac{\cos^{15}(t)}{15}$.

NOTA 5.2.3 A primitivação por partes faz parte do capítulo sobre o intergral onde corresponde a um caso particular da técnica de integração por partes.

5.3 Derivada de ordem superior

Definição 5.3.1 (segunda derivada)
Sejam f uma função, $x_0 \in D_f$ e $\tau > 0$ tal que $f \in C^1(]x_0 - \tau, x_0 + \tau[)$. f admite uma segunda derivada (ou derivada de ordem dois) em x_0 se f' é derivável no ponto x_0 e notamos

$$f^{(2)}(x_0) = f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

Seja $I \subset D_f$, notamos por $C^2(I)$ as funções duas vezes deriváveis tal que f'' seja uma função contínua em I.

NOTA 5.3.1 Temos uma definição semelhante com as derivadas laterais de ordem dois o que permite tratar o caso dos extremos dum intervalo.

Do mesmo modo definimos as derivadas de ordem superior.

Definição 5.3.2 (derivada de ordem superior)
Por indução indicamos formalmente por $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$ a derivada de ordem $k+1$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Indicamos por $C^k(I)$ as funções k vezes deriváveis tal que $f^{(k)}$ seja contínua em I.

NOTA 5.3.2 A definição estende-se com as derivadas laterais de ordem k para tratar dos extremos do intervalo.

Proposição 5.3.1 (fórmula de Leibniz)
Supomos que f e g são duas funções de $C^k(I)$ então temos $f + g$, $fg \in C^k(I)$ com $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$ e

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{i}{k} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

onde $\binom{i}{k} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$.

Exemplo 5.3.1

$$\begin{aligned}(\sin(x)\cos(x))^{(4)} &= \sin^{(4)}(x)\cos(x) + 4\sin(x)^{(3)}\cos^{(1)}(x) + 6\sin^{(2)}(x)\cos^{(2)}(x) \\ &\quad +4\sin^{(1)}(x)\cos^{(3)}(x) + \sin(x)\cos^{(4)}(x) \\ &= \sin(x)\cos(x) + 4\cos(x)\sin(x) + 6\cos(x)\sin(x) \\ &\quad +4\cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x) \\ &= 16\sin(x)\cos(x).\end{aligned}$$

5.3.1 Concavidade, convexidade

Definição 5.3.3 (concavidade, convexidade)
Seja $f \in C^0(I)$.

- A função é concava em I se $\forall x, y \in I$, $\forall \theta \in [0,1]$

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \geq \theta f(x) + (1-\theta) f(y).$$

- A função é convexa em I se $\forall x, y \in I$, $\forall \theta \in [0,1]$

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y).$$

Proposição 5.3.2
Seja $f \in C^2(I)$.

- A função é concava em I se e somente se $\forall x \in]a,b[$, $f''(x) \leq 0$.
- A função é convexa em I se e somente se $\forall x \in]a,b[$, $f''(x) \geq 0$.

Demonstração. Ver exercício □

Definição 5.3.4 (ponto de inflexão)
Seja $f \in C^2(I)$. x_0 é um ponto de inflexão de f se $f''(x_0) = 0$.

5.4 Extremos locais

Teorema 5.4.1 (desenvolvimento Taylor ordem 2)
Seja uma função $f \in C^1([a,b])$ tal que $f^{(1)}$ é derivável em $]a,b[$. Então existe $\xi \in]a,b[$ tal que

$$f(b) \;=\; f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a)^1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(b-a)^2.$$

Demonstração. Consideramos a função $g(x) = f(x) - [f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\alpha]$. Podemos escolher a constante α tal que $g(b) = 0$ com

$$\alpha = \frac{f(b) - [f(a) + (b-a)f'(a)]}{(b-a)^2}.$$

Agora como $g(a) = g(b) = 0$ existe $\zeta \in]a,b[$ tal que $g'(\zeta) = 0$. Por outro lado temos $g'(a) = 0$ e deduzimos que existe $\xi \in]a,b[$ tal que $g''(\xi) = 0$ quer dizer $f''(\xi) - 2c = 0$. Com $g(b) = 0$, concluimos assim que existe $\xi \in]a,b[$ tal que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(\xi).$$

□

Nota 5.4.1 Seja $a = x_0$ e $b = x_0 + h$, existe $\theta \in]0,1[$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta h)}{2}h^2.$$

Temos a fórmula do desenvolvimento de Taylor de ordem dois.

A extensão do teorema de Taylor para qualquer ordem é a seguinte.

Teorema 5.4.2 (desenvolvimento Taylor ordem k)
Seja uma função $f \in C^k([a,b])$ tal que $f^{(k)}$ é derivável em $]a,b[$. Então existe $\xi \in]a,b[$ tal que

$$f(b) \;=\; \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}.$$

Nota 5.4.2 Em particular, seja $a = x_0$ e $b = x_0 + h$, existe $\theta \in]0,1[$ tal que

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i + \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta h)}{(k+1)!}h^{k+1}.$$

Temos a fórmula do desenvolvimento de Taylor de ordem k.

Agora vamos explorar a ligação entre derivada e extremos locais. Definimos em primeiro lugar ponto crítico.

Definição 5.4.1 (Ponto crítico)

Seja $f \in C^1(I)$. $x_0 \in I$ é um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Para determinar os extremos locais, temos a proposição seguinte.

Proposição 5.4.1

Seja $f \in C^1(I)$ tal que $f^{(1)}$ é derivável em I e $x_0 \in I$. Temos as asserções seguintes

1. Se f admite um mínimo local em x_0 então $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$.
2. Se f admite um máximo local em x_0 então $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$.
3. Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ então f admite um mínimo local estrito em x_0.
4. Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ então f admite um máximo local estrito em x_0.

Demonstração. (1) Supomos que admite um mínimo local em x_0 então o teorema de Fermat dá que $f'(x_0) = 0$. Por definição existe $\tau > 0$ tal que $\forall x \in]x_0 - \tau, x_0 + \tau[\subset I$ temos $f(x) \geq f(x_0)$. Usando o desenvolvimento de Taylor de ordem dois, temos $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(\xi)$ com $x \in]\min(x, x_0), \max(x, x_0)[$. Deduzimos assim

$$0 < f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(\xi).$$

Obtemos então que $f''(\xi)$. Quando $x \to x_0$, temos $\xi \to x_0$ e deduzimos passando ao limite $f''_e(x_0) \geq 0$.
(2) prova-se com (1).
(3) Supomos que $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$. Por definição da derivada existe $\delta > 0$ tal que se $\xi \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ temos

$$\left| \frac{f'(\xi) - f'(x_0)}{\xi - x_0} - f''(x_0) \right| < \frac{f''(x_0)}{2}$$

O que implica

$$\begin{aligned}
\frac{f'(\xi) - f'(x_0)}{\xi - x_0} &= \frac{f'(\xi) - f'(x_0)}{\xi - x_0} - f''(x_0) + f''(x_0) \\
&\geq f''(x_0) - \left| \frac{f'(\xi) - f'(x_0)}{\xi - x_0} - f''(x_0) \right| \\
&> \frac{f''(x_0)}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Seja agora $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $x \neq x_0$. Usando o teorema de Lagrange, existe $\xi \in]\min(x, x_0), \max(x, x_0)[$ tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = \frac{f'(\xi) - f'(x_0)}{\xi - x_0}(x - x_0)(\xi - x_0).$$

Por definição de ξ, temos $(x - x_0)(\xi - x_0) >$ e concluimos que $f(x) - f(x_0) > 0$. Então x_0 é um minimizante estrito.
(4) se prova com (3) □

NOTA 5.4.3 Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ nada podemos concluir com apenas estes dois argumentos.