Complementos de Análise Matemática EE

Departamento de Matemática e Aplicações

2012/2013

Folha de Exercícios 5

Transformada de Laplace

Eng^{a}. de Comunicações, Eng^{a}. de Polímeros

Transformada de Laplace

1. Usar a definição para determinar a transformada de Laplace das seguintes funções:

   a) $f(t) = 1$ *b)* $h(t) = \sin(bt)$

   c) $r(t) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 < t < 1 \\ t & se \quad t > 1 \end{cases}$ *d)* $g(t) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 < t < 4 \\ 4 & se \quad 4 < t < 8 \\ 0 & se \quad t > 8 \end{cases}$

2. Utilizar a propriedade da linearidade para determinar $\mathcal{L}\left\{5\sin(2t) + 9t^2\right\}$.

3. Utilizar a propriedade da translação para determinar $\mathcal{L}\left\{e^{at}\sin(bt)\right\}$.

4. Utilizar a propriedade da transformada do produto $t^n f(t)$ para determinar $\mathcal{L}\left\{t^2 cos(at)\right\}$.

5. Determinar a transformada de Laplace das seguintes funções:

   (a) $f(t) = t + cost - 3\sin t$ (b) $f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < t < 5 \\ -3 & , \quad t > 5 \end{cases}$

   (c) $f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < t < 5 \\ t-3 & , \quad t \geq 5 \end{cases}$ (d) $g(t) = \begin{cases} 4 & , \quad 0 < t < 2 \\ -4 & , \quad t \geq 2 \end{cases}$

   (e) $g(t) = \begin{cases} \sin t & , \quad 0 < t < \pi \\ e^{-t} & , \quad t \geq \pi \end{cases}$ (f) $h(t) = \begin{cases} 2 & , \quad 0 < t < 3 \\ t-4 & , \quad 3 \leq t < 7 \\ 0 & , \quad t \geq 7 \end{cases}$

Transformada inversa de Laplace

6. Determinar a transformada inversa de Laplace:

   a) $F(s) = \dfrac{3}{s^3 + 4s^2 + 3s}$ *b)* $F(s) = \dfrac{2s+2}{s^2+4}$ *c)* $G(s) = \dfrac{1}{s\,(s^2+1)}$

   d) $G(s) = \dfrac{5s}{s^2+4s+4}$ *e)* $H(s) = \dfrac{5s+6}{s^2+9}e^{-\pi s}$ *f)* $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2}e^{-2s}$

   g) $H(s) = \dfrac{1-e^{-\pi s}}{(s^2+1)\,s^2}$ *h)* $H(s) = \dfrac{1}{s^3}e^{-s} + \dfrac{s+3}{s^2+s}$ *i)* $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2+2s+2}$

   j) $F(s) = \dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$

7. Utilizar a convolução para determinar a transformada Inversa de cada uma das seguintes funções:

$a)\quad H(s) = \dfrac{1}{s^2 - 7s + 10} \qquad b)\quad H(s) = \dfrac{1}{s^2(s+3)}$

$c)\quad H(s) = \dfrac{s}{(s^2+9)s} \qquad d)\quad H(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

Resolução de equações diferenciais usando a transformada de Laplace

8. Usar a transformada de Laplace para resolver os seguintes problemas de valores iniciais:

$a)\ y' + y = \sin(t), \quad y(0) = -1$

$b)\ y'' + y = t, \quad t > 2, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 0$

$c)\ y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

$d)\ y'' - 2y' + y = xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

$e)\ y'' - y' = 5u_4(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

$f)\ y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \text{ com } f(t) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 < t < 4 \\ 4 & se \quad 4 < t < 8 \\ 0 & se \quad t > 8 \end{cases}$

$g)\ y'' + 4y = h(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \text{ com } h(t) = \begin{cases} -4t + 8\pi & , \quad 0 < t < 2\pi \\ 0 & , \quad t > 2\pi \end{cases}$

9. Utilizar a transformadas de Laplace para resolver os seguintes problemas de valores iniciais:

$a) \begin{cases} y' - z = 0 \\ z' + y = t \end{cases} \quad y(0) = 0,\ z(0) = 1$

$b) \begin{cases} y' + z'' = \cos(x) \\ y'' - z = \sin(x) \end{cases} \quad y(0) = 1, y'(0) = 0,\ z(0) = -1, z'(0) = -1,$

$c) \begin{cases} y' + x = t \\ x' + y = 2e^t \end{cases} \quad y(0) = 0,\ x(0) = 0,$

$b) \begin{cases} w' + y = \sin(x) \\ y' - z = e^x \\ z' + w + y = 1 \end{cases} \quad w(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 1$

Soluções da folha de exercícios 5

1. *a)* $F(s) = \frac{1}{s},\ s > 0$

   b) $H(s) = \frac{b}{s^2 + b^2},\ s > 0$

   c) $R(s) = \frac{s+1}{s^2} e^{-s},\ s > 0$

   d) $G(s) = 4\left(\frac{e^{-4s} - e^{-8s}}{s}\right)$

2. $\frac{10}{s^2+4} + \frac{18}{s^3},\ s > 0$

3. $\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$

4. $-2s\frac{3a^2 - s^2}{(s^2+a^2)^3}$

5. *a)* $F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s-3}{s^2+1}$

   b) $F(s) = -3\frac{e^{-5s}}{s},\ s > 0$

   c) $G(s) = e^{-5s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right),\ s > 0$

   d) $G(s) = \frac{-4}{s}(2e^{-2s} - 1)$

   e) $G(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi(s+1)}}{s+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$

   f) $H(s) = \frac{2}{s} + e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{3}{s}\right) - e^{-7s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}\right)$

6. *a)* $f(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-t}$

   b) $f(t) = 2\cos(2t) + \sin(2t)$

   c) $g(t) = 1 - \cos(t)$

   d) $g(t) = -10te^{-2t} + 5e^{-2t}$

   e) $h(t) = 5u_\pi(t)\cos(3(t-\pi)) + 2u_\pi(t)\sin(3(t-\pi))$

   f) $h(t) = u_2(t) + u_2(t)(t-2)$

   g) $h(t) = t - \sin(t) - u_\pi(t)(t-\pi) + u_\pi(t)\sin(t-\pi)$

   h) $h(t) = u_1(t)\frac{(t-1)^2}{2} + 3 - 2e^{-t}$

   i) $f(t) = e^{-t}\cos(t) + 2e^{-t}\sin(t)$

   j) $f(t) = 6e^{2t}\cos(4t) + 2e^{2t}\sin(4t)$

7. *a)* $h(t) = \dfrac{-e^{2t}}{3} + \dfrac{e^{5t}}{3}$

   b) $h(t) = \dfrac{t}{3} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{e^{-3t}}{9}$

   c) $h(t) = \dfrac{\sin(3t)}{3}$

   d) $h(t) = t - \sin(t)$

8. *a)* $y(t) = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}e^{-t}$

   b) $y(t) = t - \cos(t-2) - \sin(t-2)$

   c) $y(t) = e^{2t}$

   d) $y(t) = e^{t} - te^{t} + \dfrac{1}{6}t^{3}e^{t}$

   e) $y(t) = -5u_4(t) - 5u_4(t)(t-4) + 5u_4(t)e^{t-4} - 2 + 3e^{t}$

   f) $y(t) = 4u_4(t) - 4u_4(t)\cos(t-4) - 4u_8(t) + 4u_8(t)\cos(t-8)$

   g) $y(t) = \frac{1}{2}\left[2t - 4\pi - \sin(2t)\right]u_2(t) + 2\pi(1-\cos(2t)) - \frac{1}{2}\left[2t - \sin(2t)\right] + 2\cos(2t)$

9. *a)* $\begin{cases} z = 1 \\ y = t \end{cases}$

   b) $\begin{cases} z = -\cos x - \sin x \\ y = \cos x \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x = t + te^{t} \\ y = -1 - te^{t} + e^{t} \end{cases}$

   d) $\begin{cases} z = \cos x \\ y = e^{x} + \sin x \\ w = 1 - e^{x} \end{cases}$