Sinais e Sistemas

Sistemas LTI (*Linear Time Invariant*)

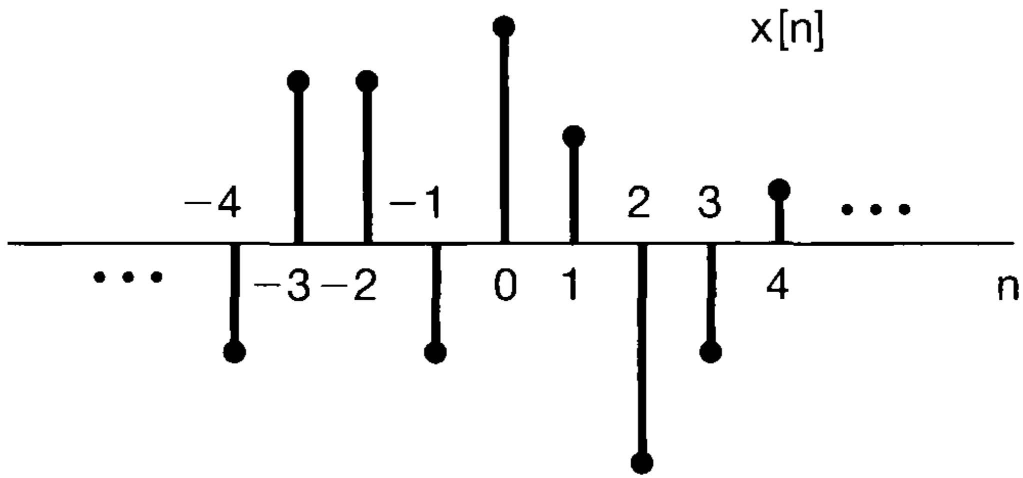
Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Introdução

- Como foi visto na aula anterior, é possível caracterizar um sistema LTI em função da sua resposta ao impulso unitário
- A representação da resposta de um sistema ao impulso unitário é designada por convolução
- No caso de tempo discreto corresponde a um somatório – *Convolution Sum*
- Em tempo contínuo corresponde a um integral – *Convolution Integral*

Sistemas Discretos LTI

- Para perceber como o impulso unitário pode ser usado para construir qualquer sinal de tempo discreto vamos considerar um sinal discreto como uma sequência de impulsos individuais
- Consideremos o exemplo seguinte:



Sistemas Discretos LTI

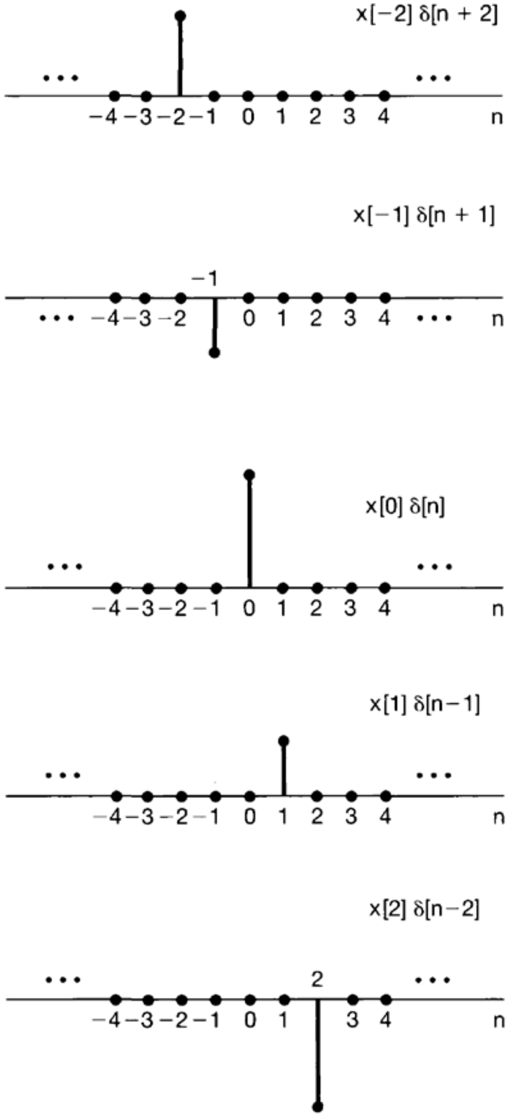
- Se considerarmos cada um dos impulsos individuais como impulsos unitários $\delta[n]$ deslocados no tempo e multiplicados pelo valor de $x[n]$ nesse instante. Por exemplo:

$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases},$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases},$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1], & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}.$$

Sistemas Discretos LTI



Sistemas Discretos LTI

- A soma dos sinais das 5 figuras anteriores para valores de *n* entre -2 e +2 é igual a *x*[*n*], ou seja:

$$x[n] = \ldots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] \\ + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \ldots.$$

- Para cada valor de *n* apenas um dos termos da equação é diferente de zero e a amplitude de cada impulso é igual a *x*[*n*]

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k].$$

Sistemas Discretos LTI

- A expressão anterior corresponde a representar uma sequência arbitrária através de uma combinação linear de impulsos unitários deslocados de $[n\text{-}k]$, onde os pesos são $x[k]$
- Consideremos $x[n] = u[n]$ – Degrau Unitário
- Como:
  - $u[k] = 0$ para $k < 0$ e $u[k] = 1$ para $k \geq 0$, temos:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

Sistemas Discretos LTI

- A equação:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k].$$

- representa a propriedade de deslocamento (*shifting property*) do impulso discreto unitário
- esta expressão será usada em sistemas LTI de tempo discreto para a representação destes sinais através de uma convolução
- $x[n]$ é a sobreposição de um conjunto simples de funções elementares: impulsos unitários $\delta[n\text{-}k]$ deslocados de k

Sistemas Discretos LTI

- A resposta de um sistema linear a $x[n]$ será a sobreposição das respostas ponderadas do sistema a cada um destes impulsos
- Além disso, a propriedade da invariância no tempo diz-nos que as respostas aos impulsos unitários deslocados no tempo são simplesmente versões deslocadas no tempo
- A representação através de uma convolução para sistemas de tempo discreto lineares e invariantes resulta da união desses dois factores

Sistemas Discretos LTI

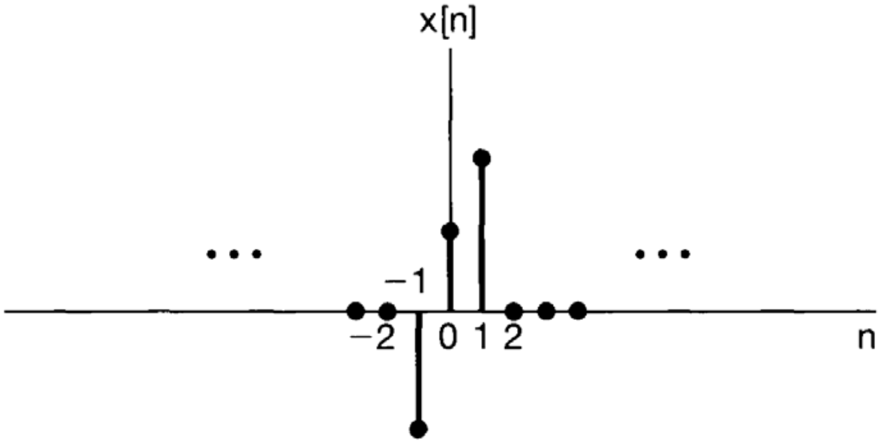
- Seja agora $h_k[n]$ a resposta do sistema linear ao impulso unitário deslocado $\delta[n - k]$
- A partir da propriedade da sobreposição de um sistema linear, a resposta $y[n]$ do sistema à entrada $x[n]$ é simplesmente a combinação linear ponderada dessas respostas básicas:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

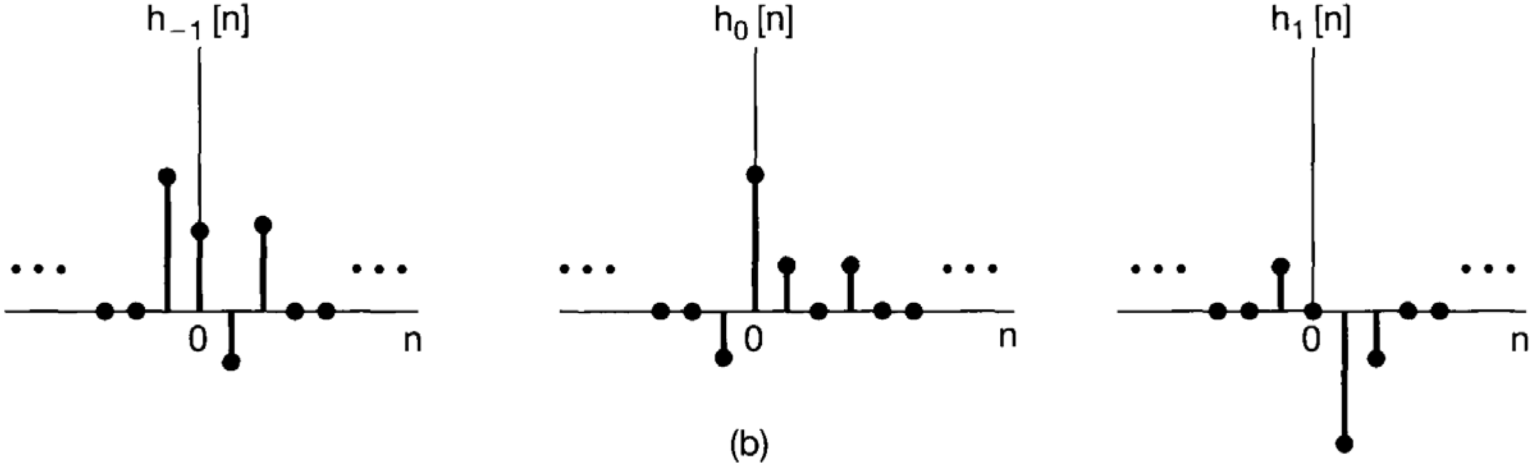
Sistemas Discretos LTI

- Assim, de acordo com a equação anterior, se conhecermos a resposta de um sistema linear ao conjunto de impulsos unitários deslocados, podemos construir a resposta a uma entrada arbitrária
- Uma interpretação da equação anterior é mostrada na figura seguinte

Sistemas Discretos LTI



(a)



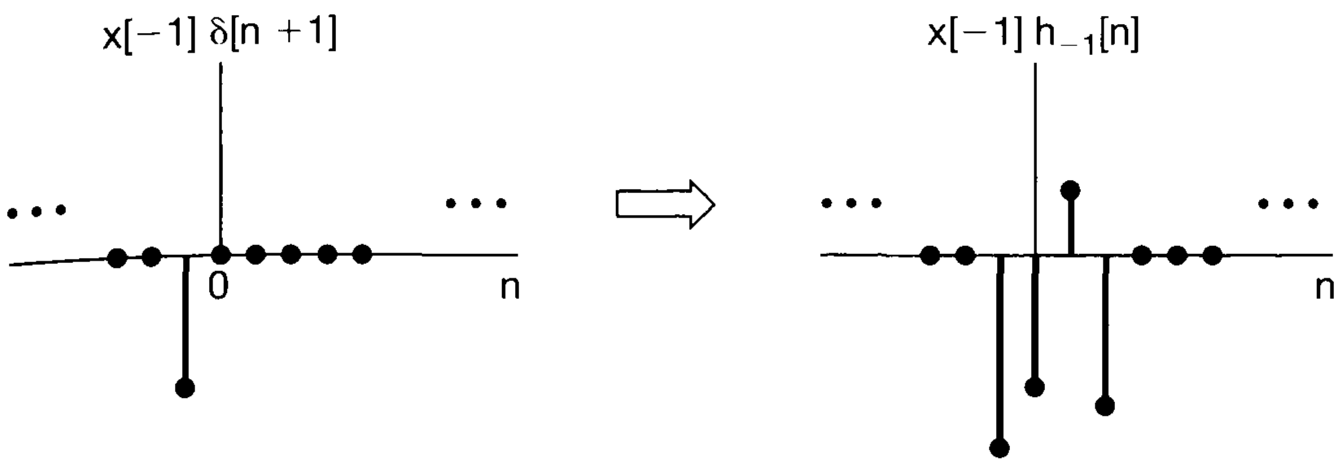
(b)

Sistemas Discretos LTI

- O sinal $x[n]$ é aplicado como entrada de um sistema linear em que $h_{-1}[n]$, $h_0[n]$ e $h_1[n]$ são as respostas aos sinais $\delta[n+1]$, $\delta[n]$ e $\delta[n-1]$, respectivamente
- Como $x[n]$ pode ser obtido através da combinação linear de $\delta[n+1]$, $\delta[n]$ e $\delta[n-1]$, o t. sobreposição permite determinar a resposta a $x[n]$ como uma combinação linear das respostas aos impulsos individuais deslocados

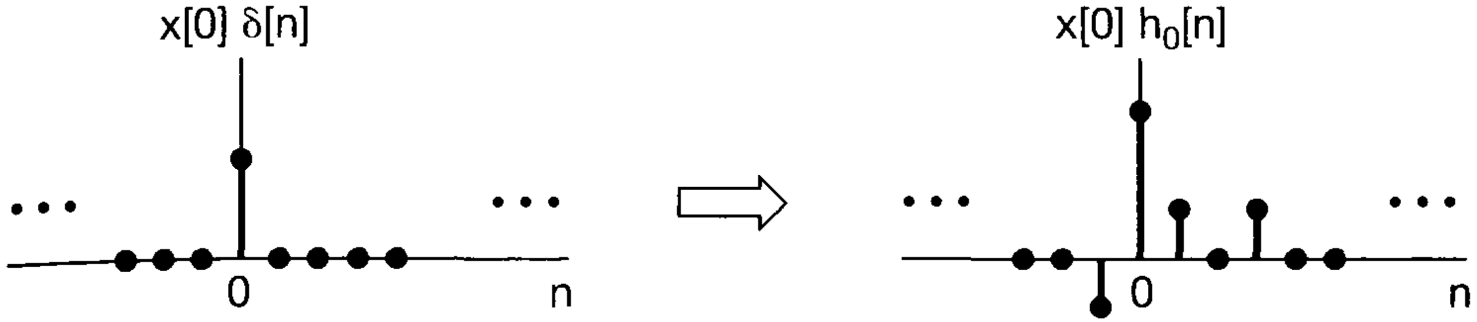
Sistemas Discretos LTI

- O impulso x[-1] deslocado pertencente a $x[n]$ é ilustrado no lado esquerdo da figura e a resposta é mostrada no lado direito



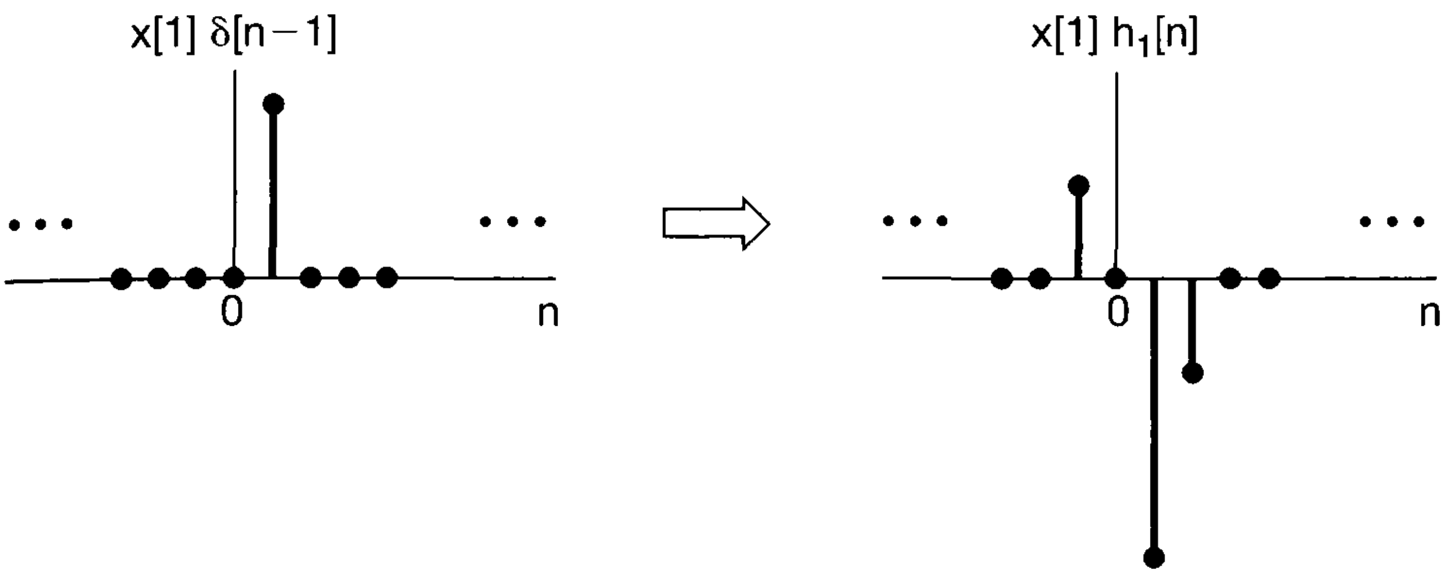
Sistemas Discretos LTI

- O impulso $x[0]$ deslocado pertencente a $x[n]$ é ilustrado no lado esquerdo da figura e a resposta é mostrada no lado direito



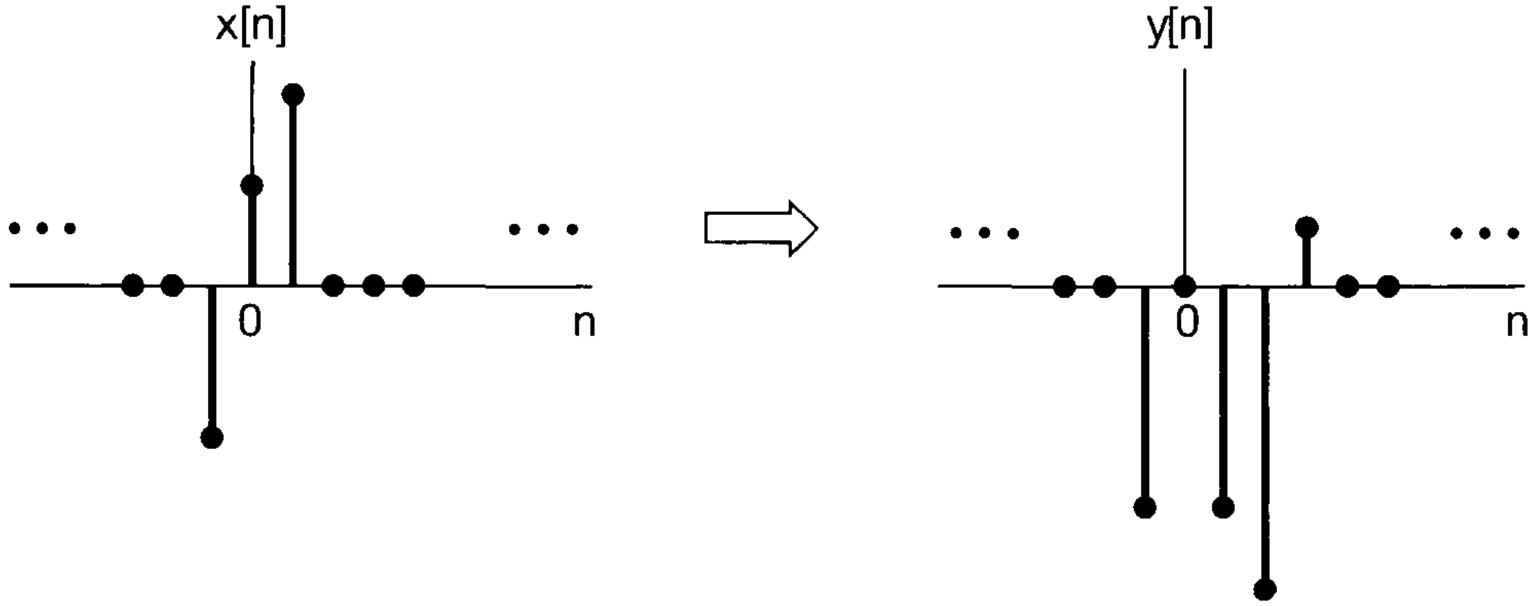
Sistemas Discretos LTI

- O impulso $x[1]$ deslocado pertencente a $x[n]$ é ilustrado no lado esquerdo da figura e a resposta é mostrada no lado direito



Sistemas Discretos LTI

- Finalmente $y[n]$ será obtido através da soma das contribuições anteriores:



Sistemas Discretos LTI

- Em geral as respostas $h_k[n]$ não precisam de estar relacionadas entre si para diferentes valores de k
- No entanto, se o sistema linear também é invariante no tempo, as respostas aos impulsos unitários com deslocamento no tempo são todas versões com deslocamento no tempo

Sistemas Discretos LTI

- Especificamente, como $\delta[n\text{-}k]$ é uma versão de $\delta[n]$ com desvio de tempo, a resposta $h_k[n]$ é uma versão com desvio no tempo de $h_0[n]$, ou seja:

$$h_k[n] = h_0[n-k]$$

- Ou seja, $h[n]$ é a saída do sistema LTI quando $\delta[n]$ é a entrada. Então, para um sistema LTI:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Sistemas Discretos LTI

- O resultado anterior é chamado de soma de convolução ou soma de sobreposição

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

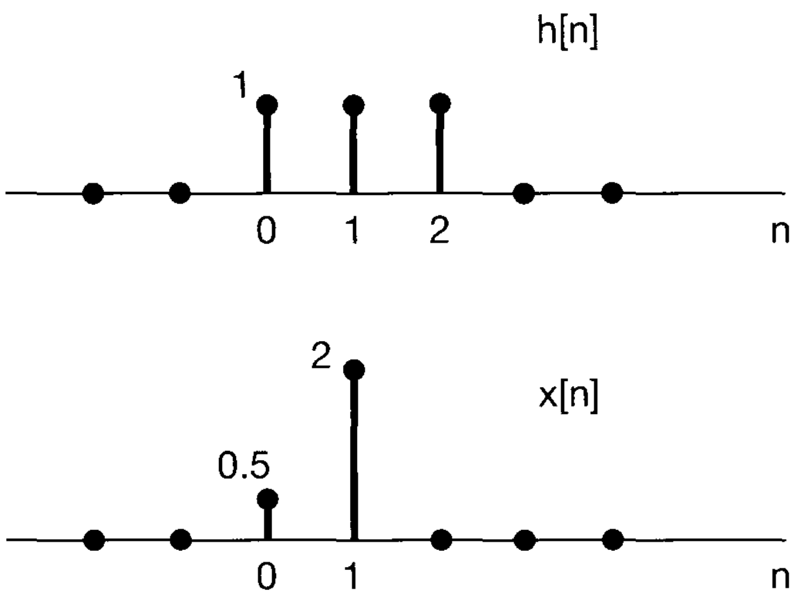
$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Sistemas Discretos LTI

- A equação anterior define a resposta de um sistema LTI a uma entrada arbitrária, em função da resposta do sistema ao impulso unitário
- Deste modo, um sistema LTI é completamente caracterizado pela sua resposta a um único sinal - $\delta[n]$
- A resposta à entrada $x[k]$ no instante de tempo k é $x[k].h[n-k]$
  - é uma versão deslocada e escalada (um "eco") de $h[n]$
  - o resultado real é a sobreposição de todas essas respostas

Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - Considere um sistema LTI com resposta impulsional $h[n]$ e entrada $x[n]$ definidas em baixo:



Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - Como apenas $x[0]$ e $x[1]$ são diferentes de 0, a equação:

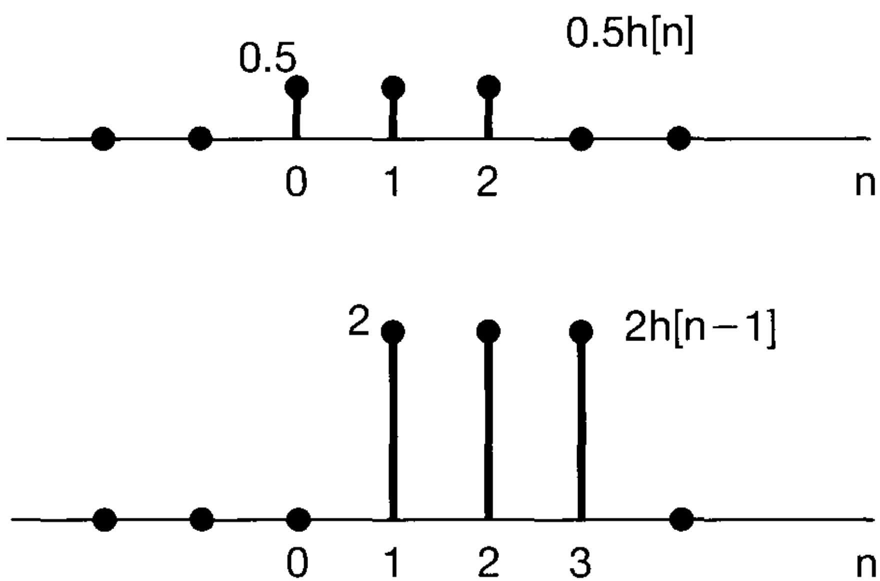
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

  - fica reduzida a:

  - $y[n] = x[0].h[n\text{-}0] + x[1].h[n\text{-}1] = 0.5h[n] + 2h[n\text{-}1]$

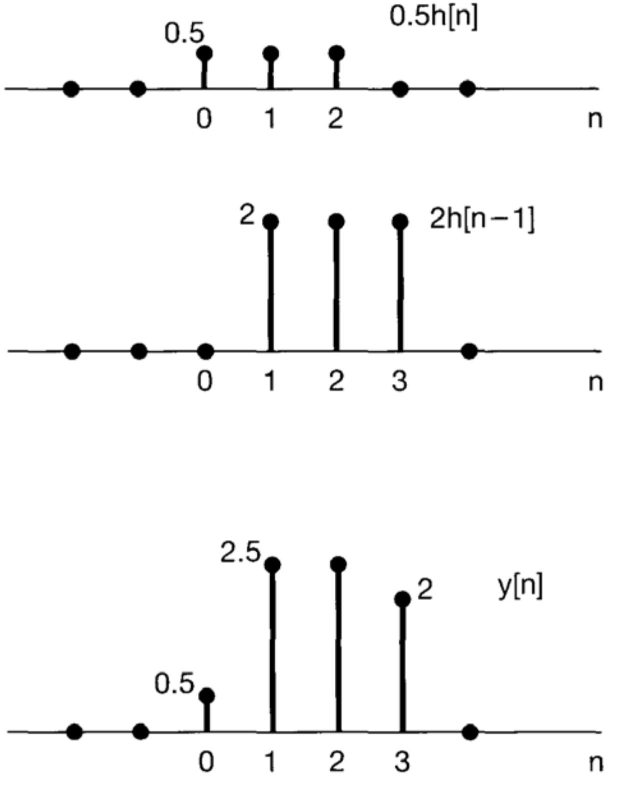
Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - As sequências $0.5h[n]$ e $2h[n\text{-}1]$ são dois ecos da resposta ao impulso necessárias para a sobreposição envolvida na geração de $y[n]$



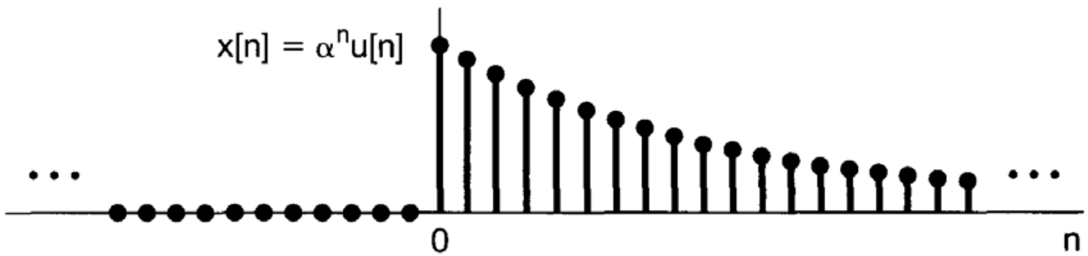
Sistemas Discretos LTI

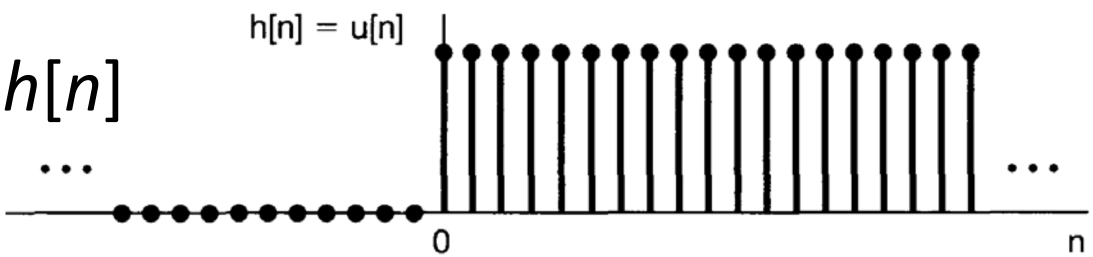
- Exemplo:
  - Somando os dois ecos para cada valor de *n*, obtemos *y*[*n*]



Sistemas Discretos LTI

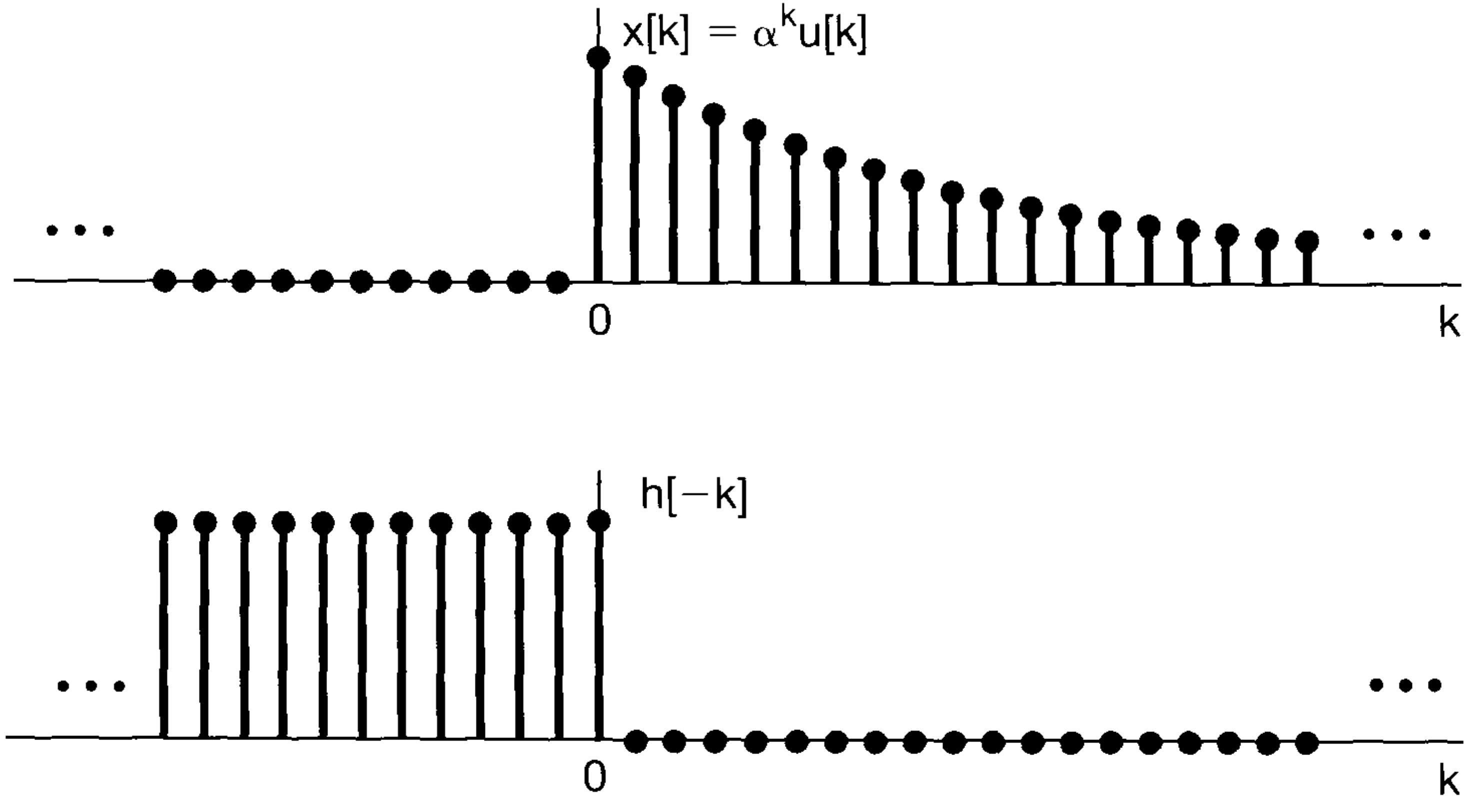
- Exemplo:
  - Considere uma entrada $x[n]$ e o impulso unitário $h[n]$ dados por:
  - $x[n] = \alpha^n u[n]$
  - $h[n] = u[n]$
  - $0 < \alpha < 1$
  - Calcular $x[n]*h[n]$





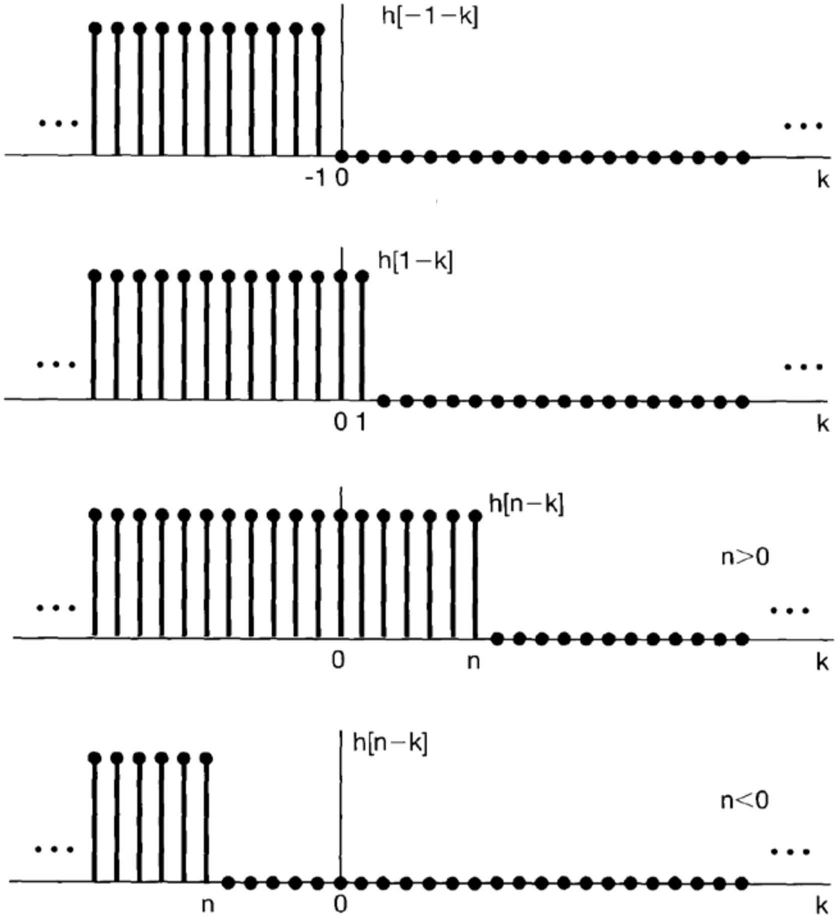
Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:



Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:



Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - Para $n < 0$, $x[k].h[n-k]=0$ para todos os valores de k
    - portanto: $y[n] = 0$ para $n < 0$
  - Para n ≥ 0:

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

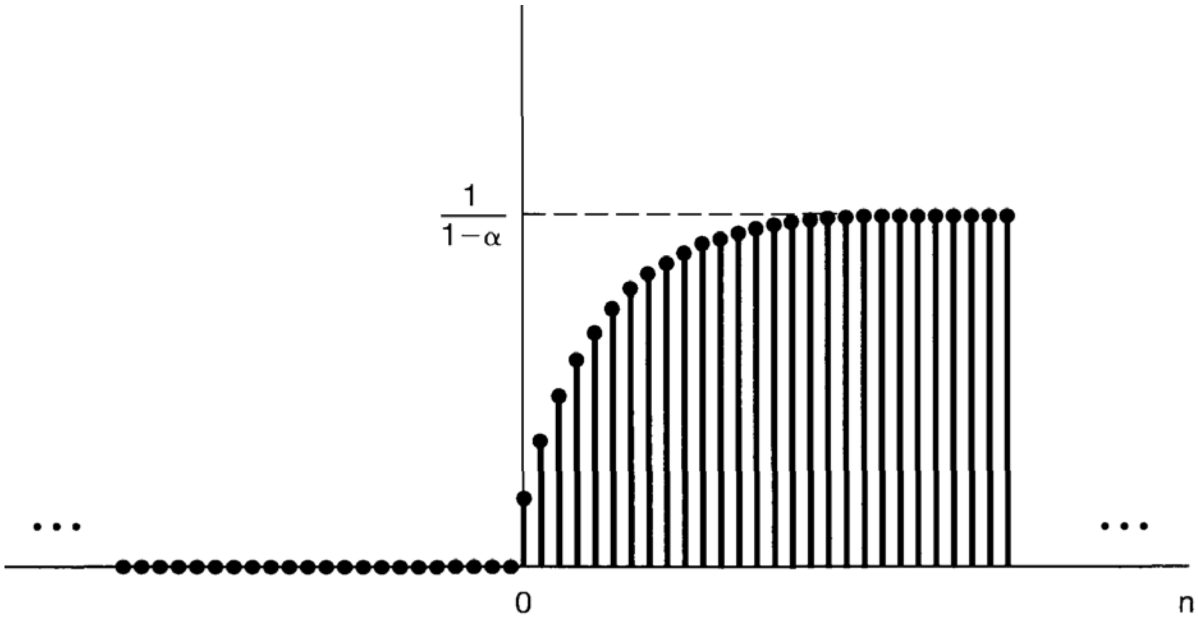
  - e:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - Finalmente:

$$y[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n]$$



Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - Calcular a convolução das sequências seguintes:

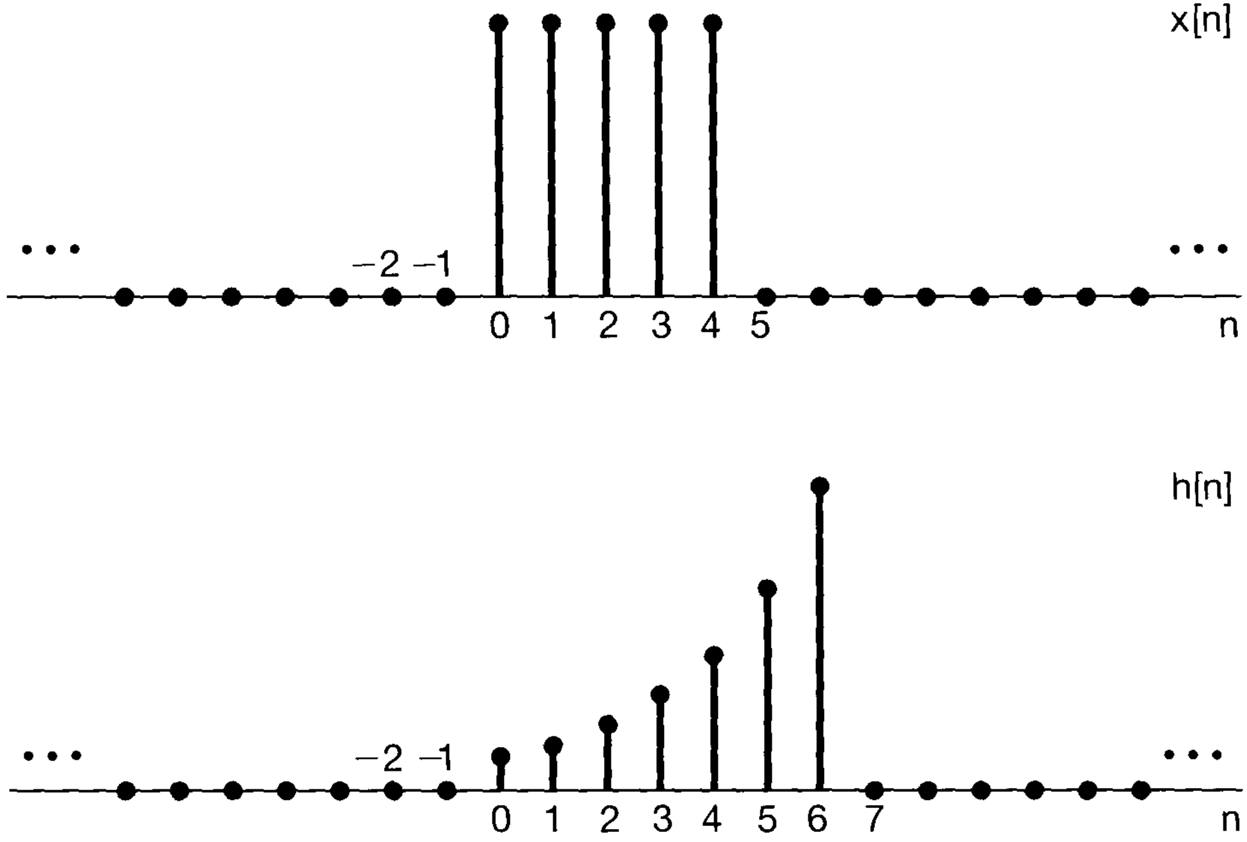
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^{n}, & 0 \le n \le 6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\pm > 1$$

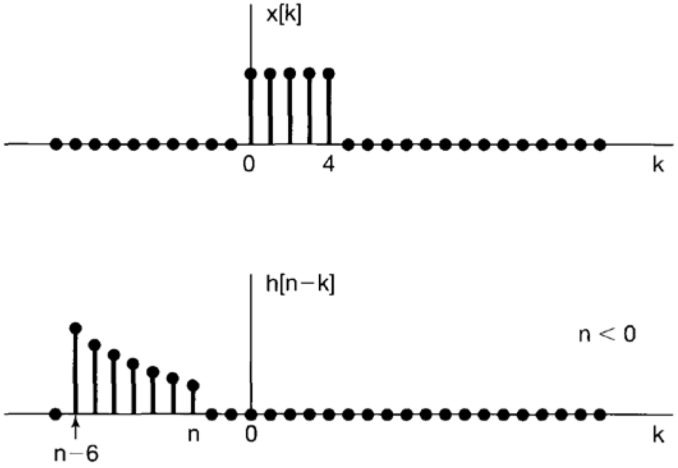
Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:



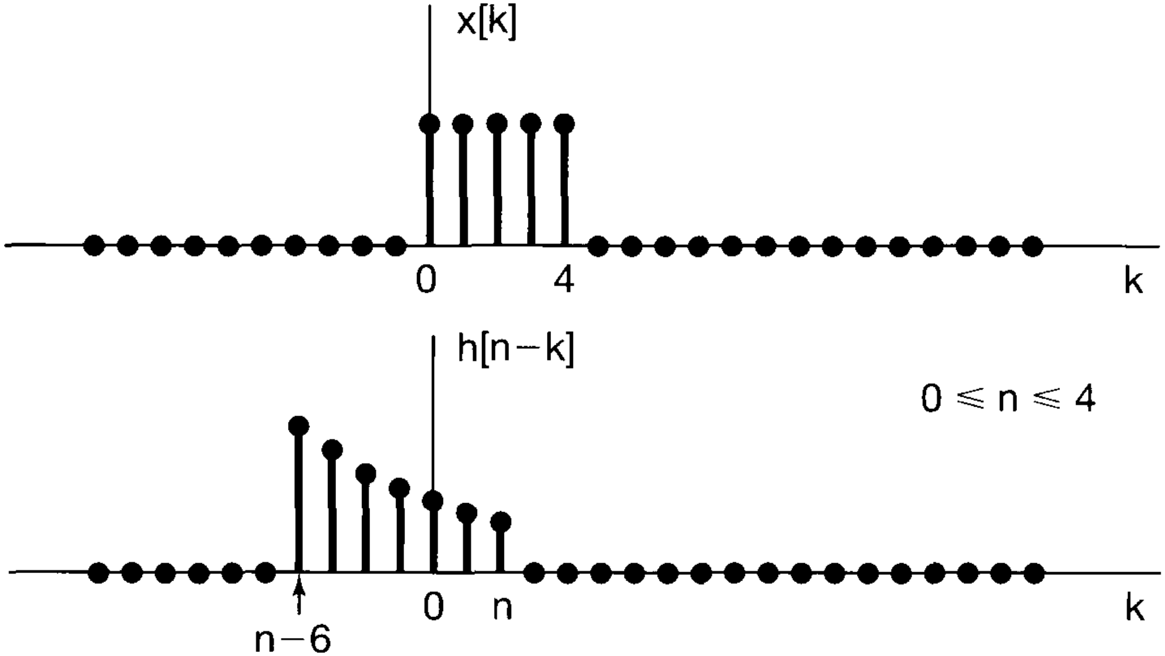
Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - Para calcular a convolução, é conveniente considerar cinco intervalos separados para *n*
  - **Intervalo 1**: Para $n < 0$, não há sobreposição entre as partes diferentes de zero de $x[k]$ e $h[n - k]$ e, consequentemente, $y[n] = 0$



Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - **Intervalo 2**: Para $0 \leq n \leq 4$



$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

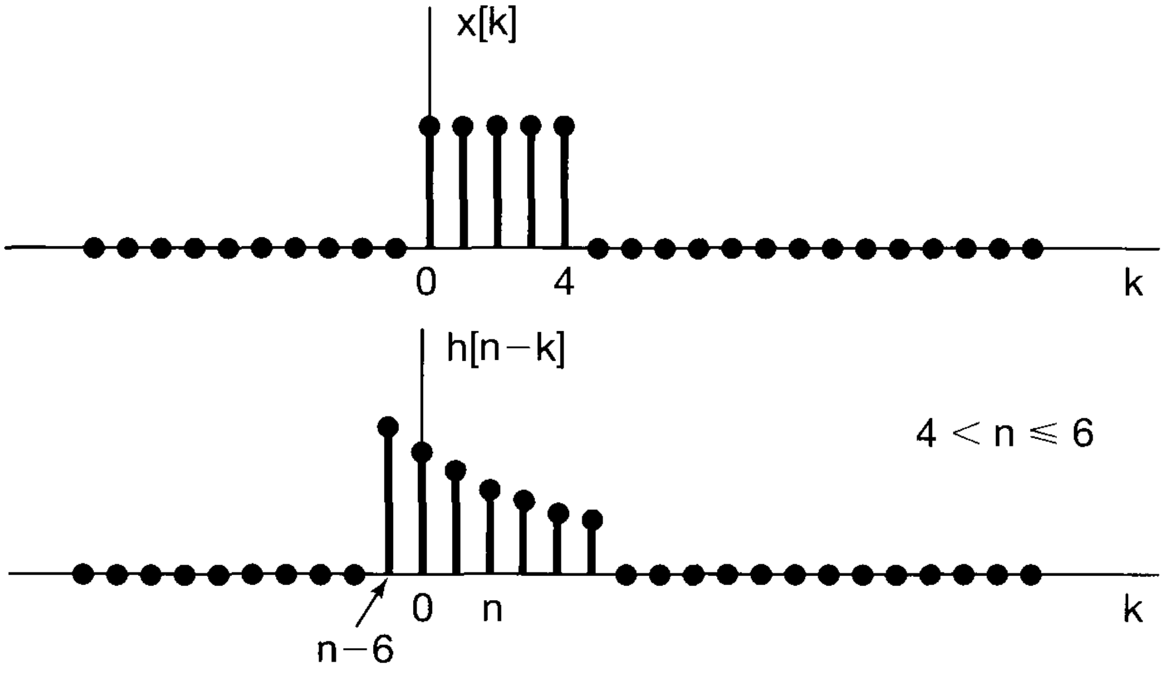
Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - **Intervalo 2**: Assim, o valor de *y*[*n*] é:

$$y[n] = \sum_{r=0}^{n} \alpha^r = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - **Intervalo 3**: Para $n > 4$ e $n - 6 \leq 0$ -->> $4 < n \leq 6$



Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - **Intervalo 3**: Neste intervalo temos:

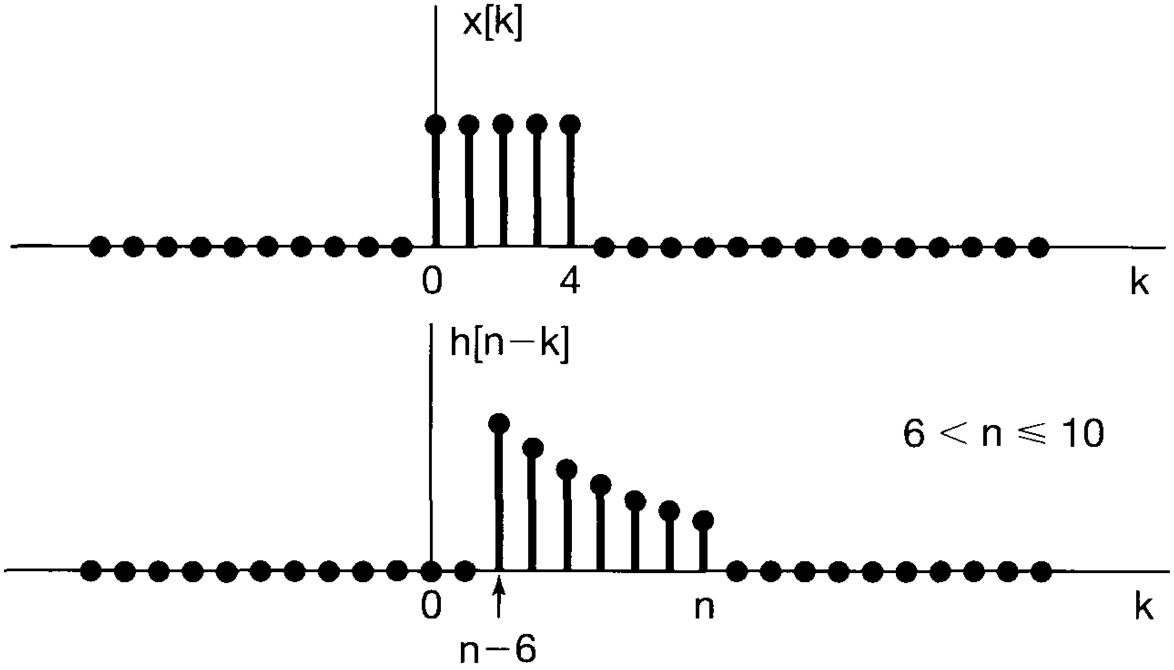
$$y[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k}$$

  - Usando a expressão da progressão geométrica:

$$y[n] = \alpha^{n} \sum_{k=0}^{4} (\alpha^{-1})^{k} = \alpha^{n} \frac{1-(\alpha^{-1})^{5}}{1-\alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - **Intervalo 4**: Para $n > 6$ e $n - 6 \leq 4$ -->> $6 < n \leq 10$



Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - **Intervalo 4**: Neste intervalo temos:

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & (n-6) \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k}$$

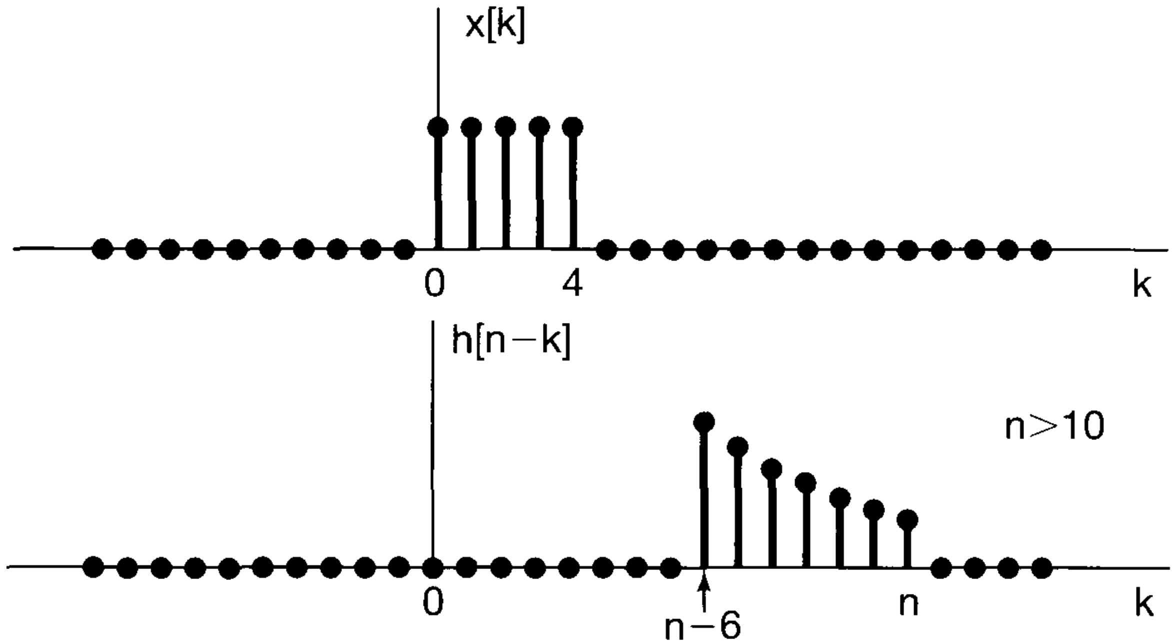
  - Usando a expressão da progressão geométrica:

$$y[n] = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^r = \alpha^6 \frac{1-\alpha^{n-11}}{1-\alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^7}{1-\alpha}$$

    - Com: $r = k - n + 6$

Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - **Intervalo 5**: Para $n - 6 > 4$ -->> $n > 10$

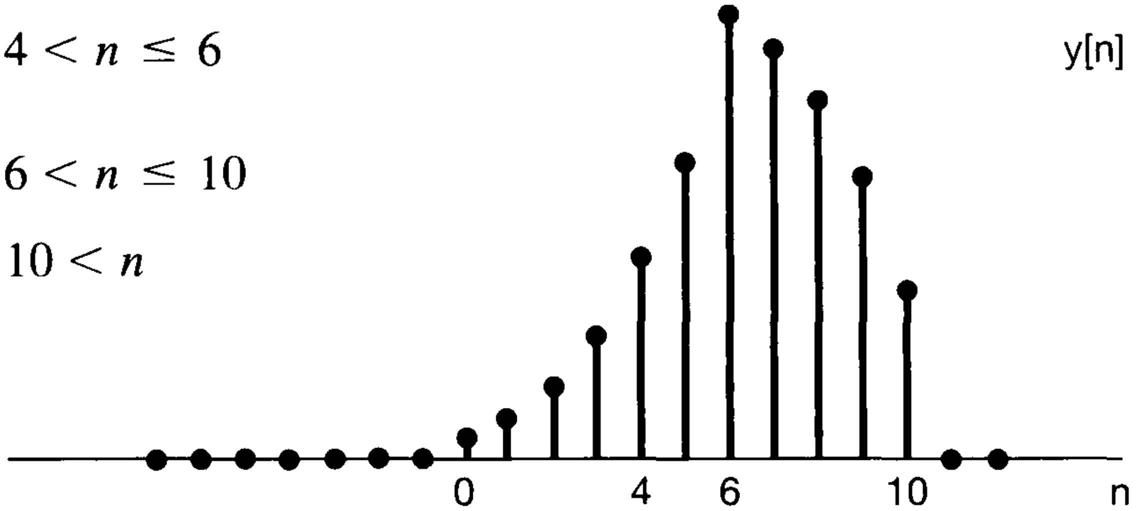


  - Não existe sobreposição, logo: $y[n] = 0$

Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - Assim, em resumo temos:

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 0 \leq n \leq 4 \\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 4 < n \leq 6 \\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}, & 6 < n \leq 10 \\ 0, & 10 < n \end{cases}$$

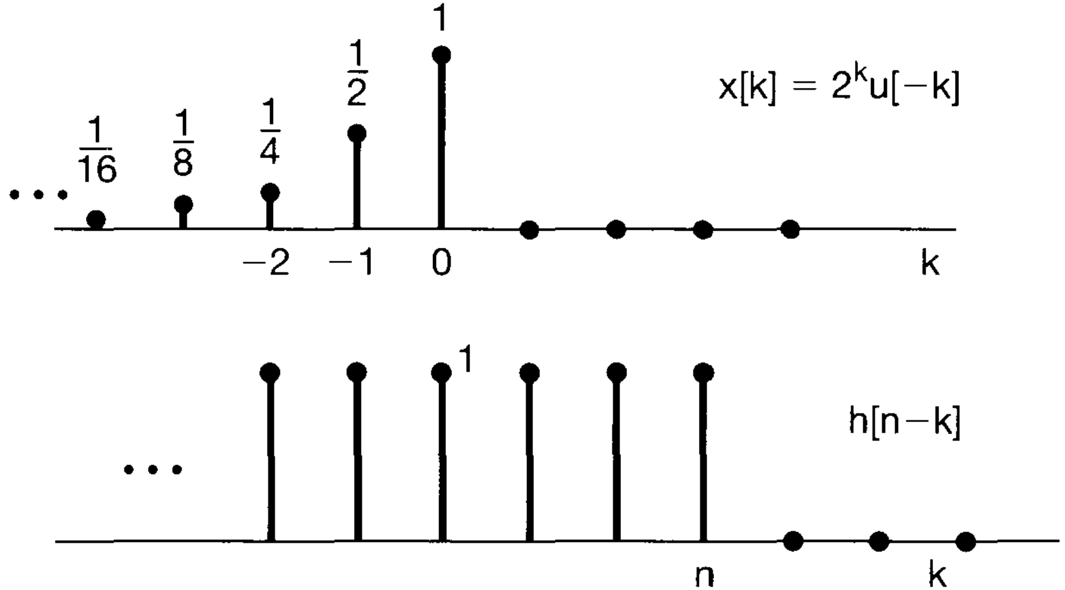


Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - Calcular a convolução das sequências seguintes:

$$x[n] = 2^n u[-n],$$

$$h[n] = u[n].$$



Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - $x[k] = 0$ para $k > 0$ e $h[n - k] = 0$ para $k > n$
  - Também se observa que, independentemente do valor de n, a sequência $x[k].h[n-k]$ apresenta sempre amostras diferentes de zero ao longo do eixo k
  - Assim, para $n \geq 0$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k$$

Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  – Para avaliar o valor da expressão anterior usa-se:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad 0 < |\alpha| < 1$$

  – Fazendo a mudança de variável: *r* = -*k*, fica:

$$\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^r = \frac{1}{1-(1/2)} = 2$$

  – $y[n]$ é sempre constante para $n \geq 0$

Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - Para $n < 0$, $x[k].h[n\text{-}k]$ tem valores diferentes de 0 para $k \leq n$

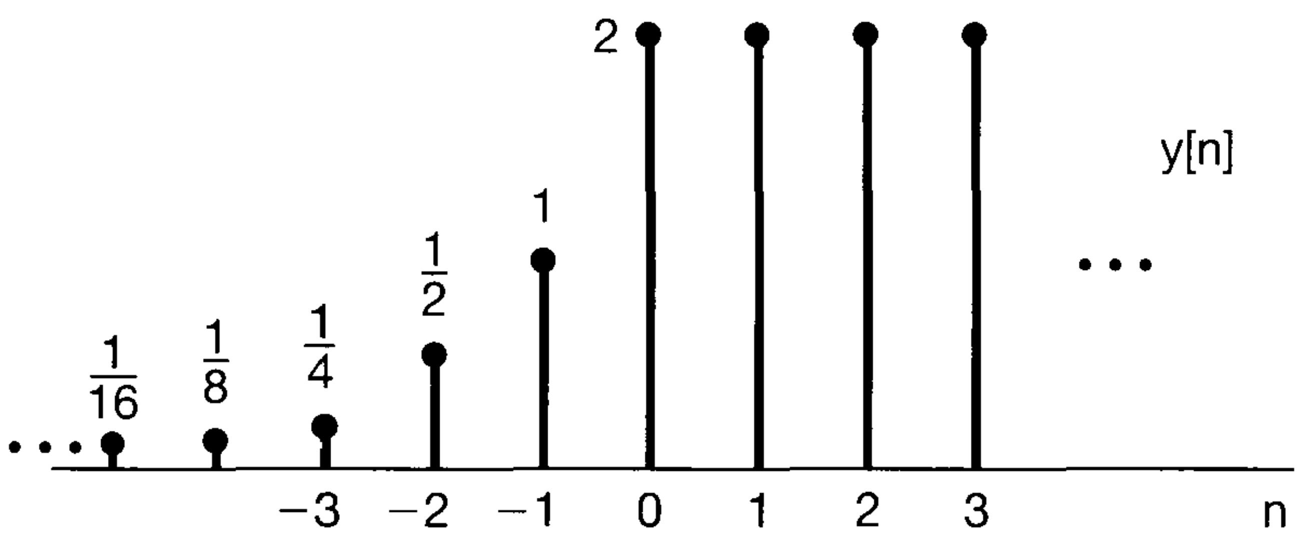
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k$$

  - Fazendo mudança de variável $l = -k$ e $m = l + n$

$$y[n] = \sum_{l=-n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

Sistemas Discretos LTI

- Exemplo:
  - Finalmente:
    - $y[n] = 2$, $n \geq 0$
    - $y[n] = 2^{n+1}$, $n < 0$



Sistemas Contínuos LTI

- Como já foi visto, para os sistemas LTI contínuos temos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

- Em que $h(t)$ representa a resposta do sistema ao impulso de *dirac* $\delta(t)$
- Tal como em tempo discreto, um sistema LTI em tempo contínuo é completamente caracterizado pela sua resposta a um único sinal elementar, o impulso unitário $\delta(t)$

Sistemas Contínuos LTI

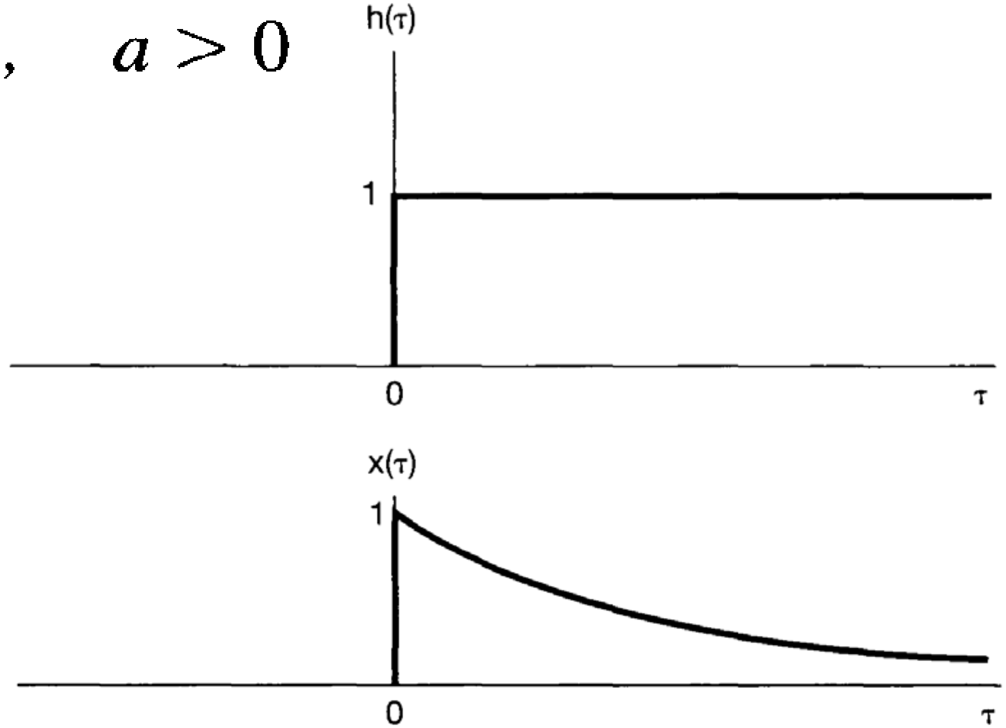
- Para calcular este integral para um valor específico de t:
  - obtemos primeiro o sinal $h(t-\tau)$ (considerando uma função de τ com t fixo) de $h(\tau)$ por uma reflexão sobre a origem
  - um deslocamento para a direita de t, se $t > 0$ ou um deslocamento para a esquerda de t, se $t < 0$
  - em seguida, multiplicamos os sinais $x(\tau)$ e $h(t - \tau)$
  - $y(t)$ é obtido através da integração do produto resultante desde $\tau = -\infty$ a $\tau = +\infty$

Sistemas Contínuos LTI

- Exemplo:
  - Calcular a convolução dos sinais seguintes:

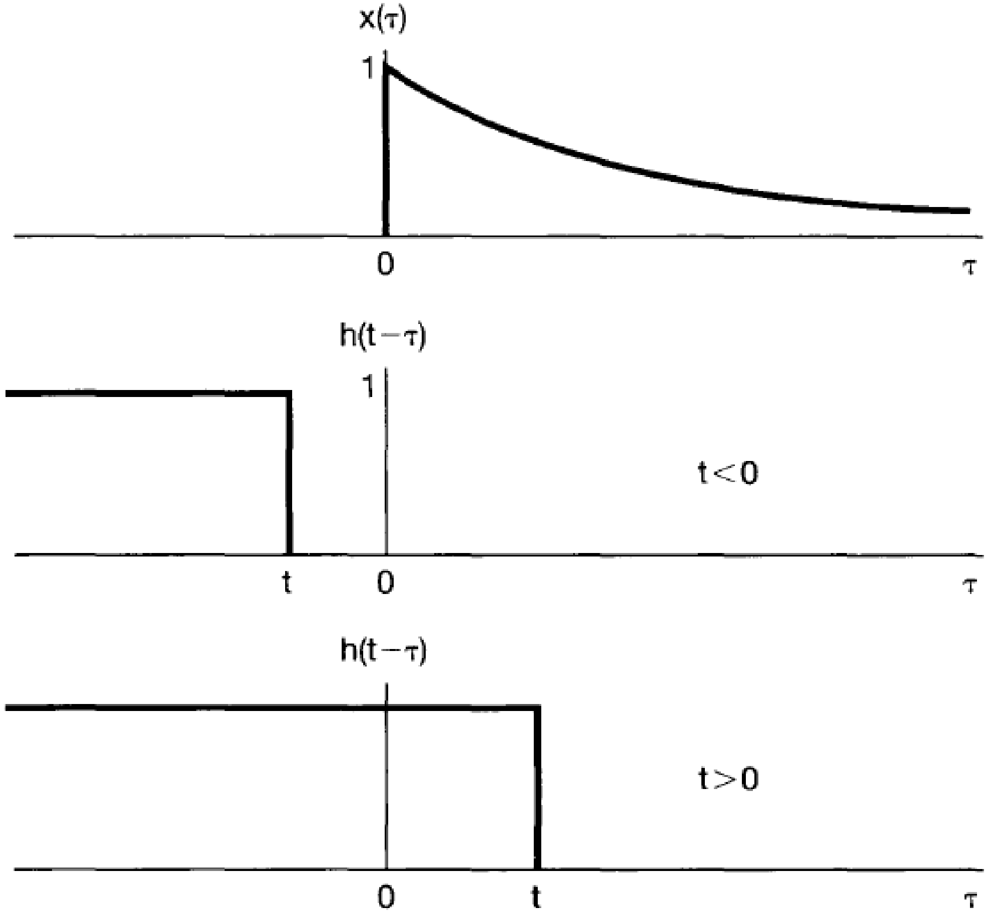
$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad a > 0$$

$$h(t) = u(t)$$



Sistemas Contínuos LTI

- Exemplo:



Sistemas Contínuos LTI

- Exemplo:
  - A partir da figura, vemos que para $t < 0$, o produto de $x(\tau)$ e $h(t - \tau)$ é zero e, consequentemente, $y(t)$ é zero
  - Para $t > 0$:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Sistemas Contínuos LTI

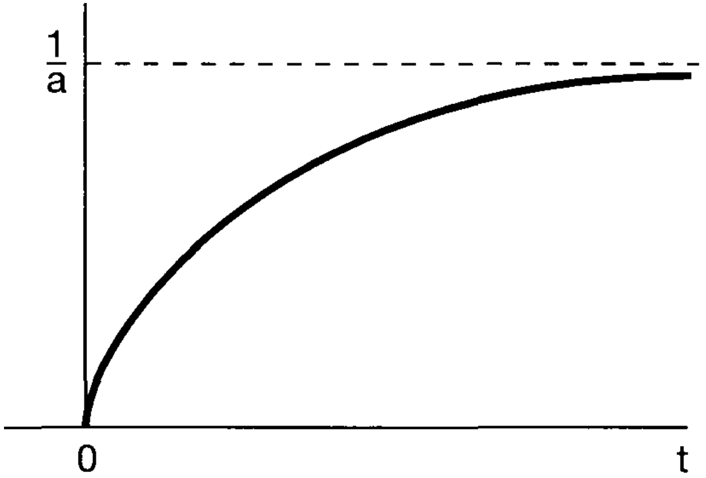
- Exemplo:
  - Assim, para $t > 0$:

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau}\Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$

  - E, finalmente:

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$$

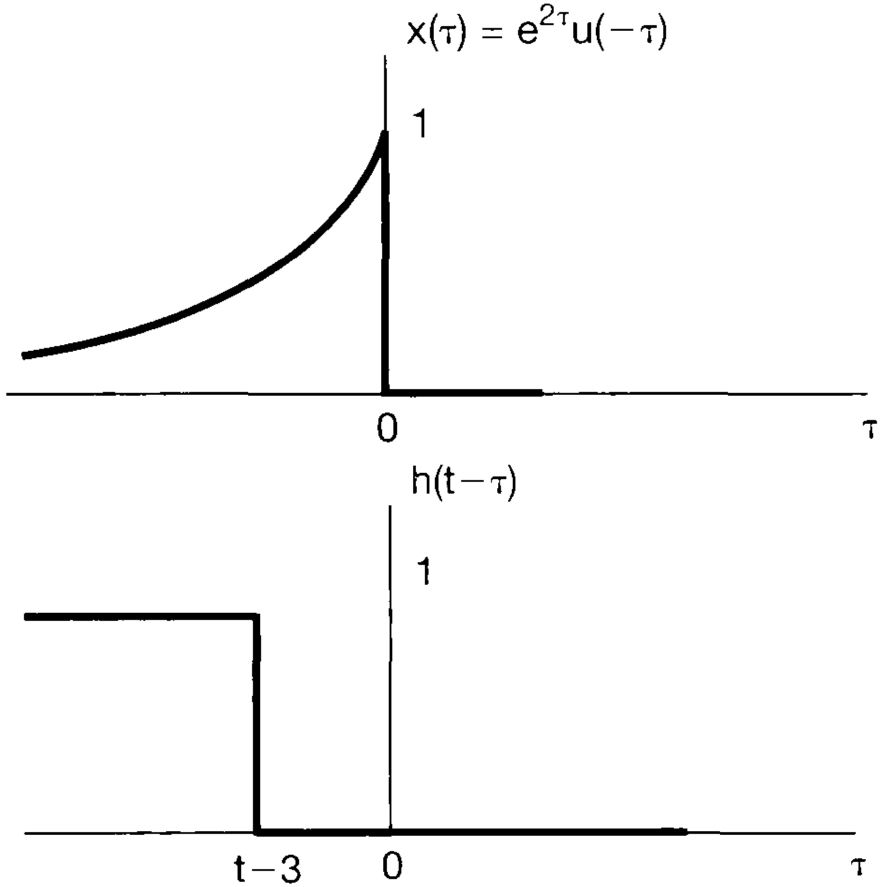


Sistemas Contínuos LTI

- Exemplo:
  - Calcular a convolução dos sinais seguintes:
  - $x(t) = e^{2t}.u(-t)$
  - $h(t) = u(t - 3)$

Sistemas Contínuos LTI

- Exemplo:



Sistemas Contínuos LTI

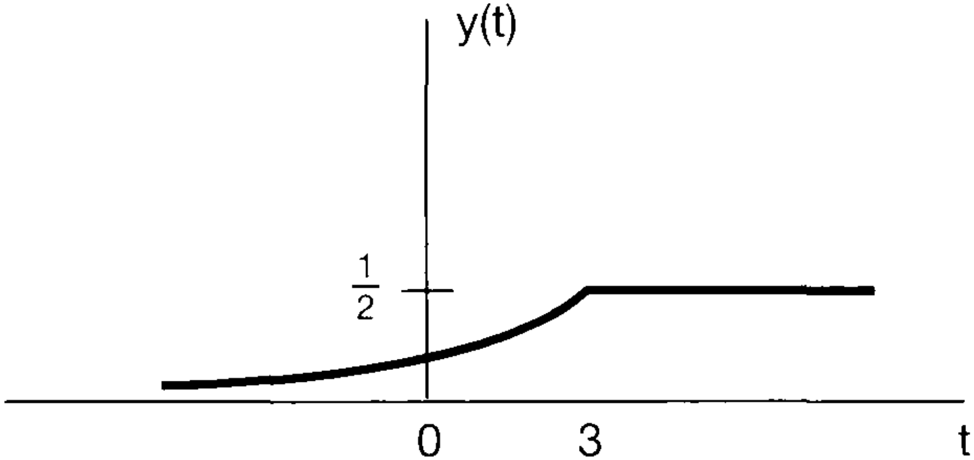
- Exemplo:
  - Independentemente do valor de *t*, observa-se que os dois sinais têm regiões de sobreposição diferentes de zero
  - Quando $t - 3 \leq 0$, o produto de $x(\tau)$ e $h(t - \tau)$ é diferente de zero para $-\infty < \tau < t - 3$, e o integral de convolução é dado por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)}$$

Sistemas Contínuos LTI

- Exemplo:
  - Para $t - 3 \geq 0$, o produto $x(\tau).h(t-\tau)$ é diferente de zero para $-\infty < \tau < 0$, e o integral de convolução é:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}$$



Bibliografia

- Oppenheim, A.V. , Willsky, A.S. and Young, I.T., Signals and Systems, Prentice- Hall Signal Processing Series, 1983