Análise de Fourier de Sinais Discretos

- **Sistemas LTI e a exponencial complexa**

z^n é uma função própria do sistema
H(z) é um valor próprio associado com a função própria z^n.

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{n-k}h[k]=z^n\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-k}h[k]=H(z)z^n$$

- **Séries de Fourier de sequências periódicas**

$$x[n]=x[n+N]$$

O conjunto de todas as exponenciais complexas harmonicamente relacionadas é

$$\Phi_k[n]=e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad \Phi_k[n]=\Phi_{k+rN}[n] \qquad k=0,\pm1,\pm2,...$$

Conclusão: Existem apenas N sequências $\Phi_k[n]$ distintas

Análise de Fourier de Sinais Discretos

Um sinal discreto no tempo x[n] periódico pode ser escrito como

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

– Como se obtêm os a_k ?
  – Escrevendo a equação anterior para *N* valores diferentes de *n* obtemos um sistema de *N* equações lineares nos *N* a_k.

Verifique que $\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\begin{cases}N; k=0,\pm N,\pm 2N,... \\ 0; otherwise\end{cases} \Rightarrow a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

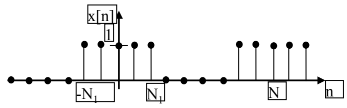
$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a_k=a_{k+N}$$

– Comparação com os sinais cont. no tempo
  – Bastam N coef. espectrais sucessivos para representar x[n].
  – No caso de x(t) periódico são necessários infinitos coef. espectrais

Análise de Fourier de Sinais Discretos

– Exemplo: Decomposição da onda quadrada

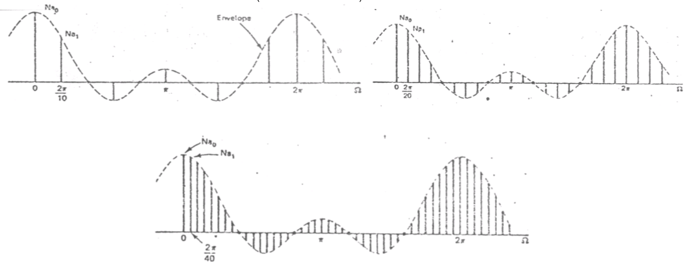


$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-N_1)}$$

$$a_k = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\left(\frac{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}\right) = \frac{1}{N}\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}\right)}{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}\left(e^{jk\frac{2\pi}{2N}} - e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}\right)} = \frac{1}{N}\frac{\sin\frac{2\pi k\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}{N}}{\sin\frac{2\pi k}{2N}} \qquad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

$$a_k = \frac{2N_1+1}{N} \qquad k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

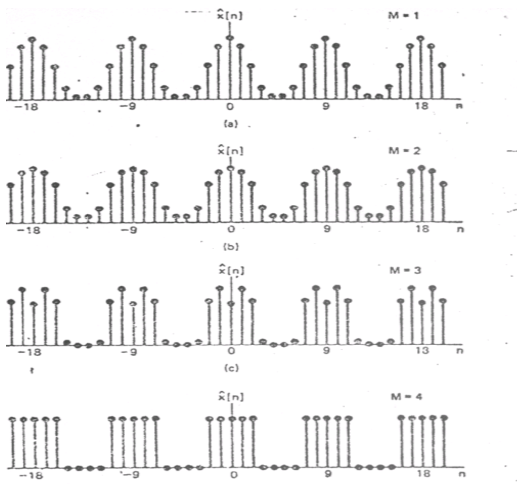
$$Na_k = \left.\frac{\sin\left[(2N_1+1)\frac{\Omega}{2}\right]}{\sin\frac{\Omega}{2}}\right|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}}$$



Análise de Fourier de Sinais Discretos

– Constituição da onda quadrada

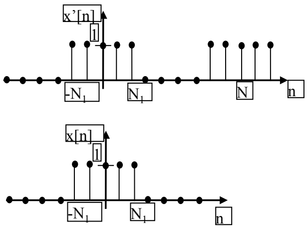
$$\hat{x}[n] = \sum_{n=-M}^{M} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$



re 5.7 Partial sums of eq. (5.30) for the periodic square wave of Figure 5.5 $N = 9$ and $2N_1 + 1 = 5$: (a) $M = 1$; (b) $M = 2$; (c) $M = 3$; (d) $M = 4$.

Análise de Fourier de Sinais Discretos

- **T. F. da sequência não periódica (DTFT)**

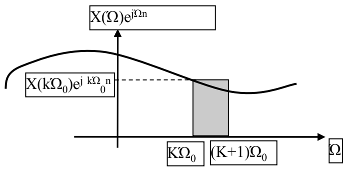


$$\begin{cases} x'[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \\ a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x'[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \frac{1}{N}X(k\Omega_0) \end{cases} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$\Downarrow$$

$$x'[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=<N>} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}\Omega_0$$

$$\Downarrow$$



$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

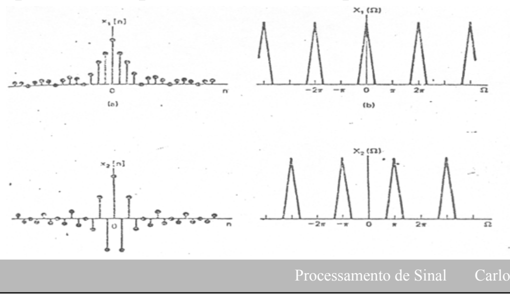
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Análise de Fourier de Sinais Discretos

– Observações:
  – Em oposição aos sinais contínuos no tempo o intervalo de integração na equação de síntese é finito (2π) pois a DTFT é periódica de período 2π.
  – X(Ω) existe ou converge para qualquer Ω se (sinal de energia finita)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty$$

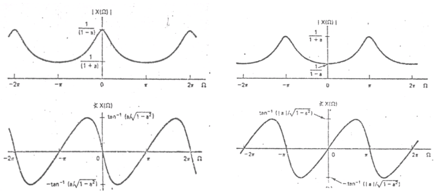
  – Na vizinhança de Ω= ... - 2π, 0, 2π, 4π, ... Os valores de X(Ω) correspondem a componentes espectrais de baixa frequência.
  – Na vizinhança de Ω= ... - π, π, 3π, ... Os valores de X(Ω) correspondem a componentes espectrais de alta frequência.



Análise de Fourier de Sinais Discretos

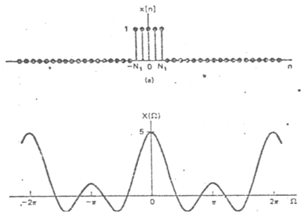
Exemplo 1: Determine a DTFT do sinal x[n]=$a^n u[n]$ |a|<1.

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(ae^{-j\Omega}\right)^n=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$



Exemplo 2: Determine a DTFT do pulso rectangular $x[n]=\begin{cases}1, |n|\le 2\\ 0, |n|>2\end{cases}$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-2}^{2} e^{-j\Omega n}=\ldots=\frac{\sin\frac{5\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$



Análise de Fourier de Sinais Discretos

- **DTFT de uma sequência periódica**

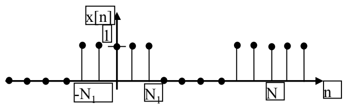
Exemplo 1: Qual o sinal que tem por DTFT $X'(\Omega)=\sum_k 2\pi a_k\delta(\Omega-k\Omega_0)$

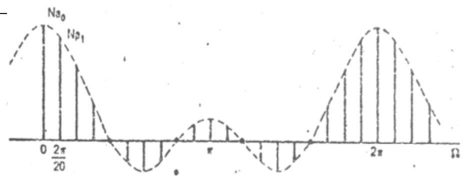
$$x'[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_k 2\pi a_k\delta(\Omega-k\Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega=\sum_k a_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}X(k\Omega_0)$$

Então $X'(\Omega)=\sum_k \Omega_0 X(k\Omega_0)$

- A DTFT de uma sequência periódica x' [n] pode ser interpretada como um trem de impulsos espaçados de Ω_0, de amplitude $2\pi a_k$ e de periodicidade 2π.





Análise de Fourier de Sinais Discretos

- **A transformada discreta de Fourier (DFT)**
  - Uma sequência periódica tem uma representação em série de Fourier ou, admitindo impulsos em termos de DTFT.
  - Uma sequência não periódica tem uma representação em termos de DTFT. A sua representação espectral consiste numa função contínua, X(Ω), que será necessário conhecer entre 0 e 2π para poder representar o sinal.
  - Questão- Se para conhecer completamente uma sequência de duração N bastam conhecer N amostras, deveriam ser suficientes N valores para definir espectralmente x[n]. Quais são esses valores ?
    - 1) Construir a seq. periódica (de período N) a partir de x[n].

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x'[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\ x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \end{aligned}}$$

Discrete Fourier Transform

Análise de Fourier de Sinais Discretos

- Problema: Relacione Graficamente a DTFT de uma seq. de duração finita com a sua DFT.