Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

MIEInf
11 de novembro de 2016
[duração 2h]

Cálculo
Teste 1

Nome completo	Número

JUSTIFIQUE CUIDADOSAMENTE TODAS AS SUAS RESPOSTAS.

Grupo I
(15 valores)

1. (2 valores)

Mostre que $\forall x \in [-1, 1]$

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

2. (2 valores)

Estude a continuidade da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq -1 \\ \frac{4x-1}{7-x}, & -1 \leq x < 7 \\ 5x+2, & x \geq 7 \end{cases}$$

3. (2 valores)

Defina, se existir, (ou mostre que não existe) uma reta tangente ao gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, no ponto de abcissa $x = 0$, sabendo que

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$$

4. (2 valores)

Determine

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(2x)}$$

5. (2 valores)

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$. Nestas condições defina o polinómio de Taylor de ordem 2 em torno do ponto $a = 1$ da função f.

6. (2 valores)

Defina a função f, real de domínio $\mathbb{R}$, sabendo que $f'(x) = x^2 + 1$ e $f(1) = 2$.

7. (3 valores)

Calcule as seguintes primitivas

(a) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x \, \operatorname{sh}^2 x \, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$ (c) $\displaystyle\int x \, \operatorname{sen}(2x) \, dx$.

Grupo II
(5 valores)

Apresente um exemplo ou justifique porque não existe a entidade descrita.

1. Um conjunto A cujo conjunto de pontos de acumulação seja o conjunto vazio.

2. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (basta uma representação gráfica) tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad f(1) = 1, \quad \textbf{e} \quad f(2) = -1$$

3. Uma função real de domínio $\mathbb{R}$ e que é descontínua em todos os pontos.

4. Uma função f real de domínio $\mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \neq -1, \;\; f'(x) \text{ existe}, \qquad \text{e} \qquad f'(-1) \text{ não existe}.$$

5. Uma função real de domínio $\mathbb{R}$ que não é primitivável.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen x	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a\, \cos b + \cos a\, \text{sen}\, b$, $\quad \cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$