Ficha 8: Séries numéricas

8.1 Generalidades

Definição 8.1 (soma parcial) *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $(u_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ uma sucessão de números reais. Designamos por*

$$s_n = \sum_{i\leq n} u_i = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

a soma parcial da sucessão $(u_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$.

NOTA 8.1 A soma parcial define uma nova sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

EXERCÍCIO 8.1 Mostre que temos, para qualquer $a \neq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Definição 8.2 (convergência de uma série numérica) *Seja $(u_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ uma sucessão de números reais.*

- *Se a soma parcial s_n converge para $S \in \mathbb{R}$ quando $n \to +\infty$, i. e. $\lim_{n\to+\infty} s_n = S$, dizemos que a série de termo geral u_i converge e escrevemos $\sum_{i=0}^{\infty} u_i = S$.*
- *Se a soma parcial s_n diverge para $\pm\infty$ quando $n \to +\infty$, i. e. $\lim_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty$, dizemos que a série de termo geral u_i diverge e escrevemos $\sum_{i=0}^{\infty} u_i = \pm\infty$.*

Proposição 8.1
Se a série de termo geral u_i é convergente, então $\lim_{i\to\infty} u_i = 0$.

Esta última proposição é muito útil para mostrar que uma série não converge. Por exemplo podemos afirmar que a série de termo geral $u_i = 2i-1$ não converge porque $\lim_{\infty} u_i = +\infty \neq 0$.

Definição 8.3 (convergência absoluta) *Seja $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais.*

- *A série de termo geral u_i é absolutamente convergente se a série de termo geral $|u_i|$ é convergente*

- *A série de termo geral u_i é absolutamente divergente se a série de termo geral $|u_i|$ diverge para $+\infty$.*

EXEMPLO 8.1 Apresentamos exemplos correspondentes às várias situações que podemos encontrar.

1. A série de termo geral $u_i = \dfrac{1}{i^2}$ converge e temos $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. A série de termo geral $u_i = \dfrac{1}{i}$ diverge $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$.
3. A série de termo geral $u_i = (-1)^i$ não converge. Neste caso, não escrevemos a soma infinita.
4. A série de termo geral $u_i = \dfrac{(-1)^i}{i}$ é convergente mas não é absolutamente convergente.

Proposição 8.2
Uma série absolutamente convergente é convergente e temos $\left|\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |u_i|$.

Proposição 8.3 (comparação)
Sejam duas séries de termos gerais u_i, v_i respetivamente e supomos que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq u_i \leq v_i \quad \forall i \geq i_0.$$

- *Se a série de termo geral v_i é convergente então a série de termo geral u_i é convergente.*
- *Se a série de termo geral u_i é divergente, então a série de termo geral v_i é divergente.*

Proposição 8.4 (linearidade das séries)
Sejam duas séries de termo geral u_i, v_i e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se as séries são convergentes então a série de termo geral $\lambda u_i + \mu v_i$ é convergente e temos

$$\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} u_i + \mu \sum_{i=0}^{\infty} v_i.$$

NOTA 8.2 Cuidado, a recíproca falsa. Por exemplo, sejam as séries de termos $u_i = i$, $v_i = 2i$. Então a série de termo $w_i = 1u_i - \frac{1}{2}v_i = 0$ é convergente (aqui $\lambda = 1$ e $\mu = -1/2$). Contudo u_i e v_i são termos de duas séries divergentes.

8.1.1 Séries numéricas particulares

Definição 8.4 (série geométrica) *Dado $r \in \mathbb{R}$, a série numérica de termo geral $u_i = r^i$ chama-se série geométrica de razão r.*

Proposição 8.5
Temos as propriedades seguintes

- *Se* $|r| < 1$, *a série de termo geral* r^i *é convergente e temos* $\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$.
- *Se* $r \geq 1$ *a série diverge para* $+\infty$.
- *Se* $r \leq -1$ *a série não converge.*

Definição 8.5 (série de Riemann) *Seja* $r > 0$, *a série de termo geral* $u_i = \frac{1}{i^r}$ *chama-se série de Riemann.*

Proposição 8.6
Temos as propriedades seguintes:

- *Se* $r > 1$ *a série é convergente.*
- *Se* $r \leq 1$ *a série é divergente.*

Definição 8.6 (Série alternada) *Uma série numérica de termo geral* u_i *chama-se série alternada se* $u_{i+1}u_i \leq 0$. *Os sinais de dois termos sucessivos são opostos.*

Por exemplo, a série de termo geral $u_i = (-1)^i$ é alternada. Em geral para estudar a convergência duma série alternada, agrupamos dois termos consecutivos.

Exemplo 8.2 Seja a série de termo geral $u_i = \frac{(-1)^i}{i}$. Podemos escrever

$$v_i = u_{2i} + u_{2i+1} = \frac{1}{2i} - \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{2i(2i+1)} \leq \frac{1}{(2i+1)^2}$$

A série de termo geral $w_i = \frac{1}{(2i+1)^2}$ é de Riemann com $r = 2$ então converge. Com o critério de comparação, deduzimos que a série de termo geral v_i converge, e então, a série alternada converge.

Proposição 8.7
Seja a série alternada numérica de termo geral u_i. *Supomos que:*

- *a sucessão* $|u_i|$ *é decrescente;*
- $\lim_{i\to\infty} u_i = 0$.

Então a série é convergente.

8.2 Critérios de convergência ou divergência

Existem vários critérios para saber se uma série de termo geral converge ou não. Vamos apresentar aqui os dois princípios: o critério de Cauchy e o critério de d'Alembert.

Proposição 8.8 (Critério de d'Alembert)
Seja uma série de termo geral u_i positivo (i.e. $u_i > 0$) tal que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{u_{i+1}}{u_i} = l.$$

- *Se $l < 1$, então a série é convergente.*
- *Se $l > 1$, então a série é divergente.*
- *Se $l = 1$, nada podemos concluir.*

Exemplo 8.3 Seja a sucessão definida por indução $u_{i+1} = u_i \times \sqrt{i+1}$, $u_0 = 2$. Temos uma sucessão crescente então $u_i > 0$. Por outro lado $\lim_{i\to\infty} \frac{u_{i+1}}{u_i} = +\infty > 1$ então o critério de d'Alembert permite afirmar que a série é divergente.

Proposição 8.9 (Critério de Cauchy)
Seja uma série de termo geral u_i positivo tal que

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{u_i} = l.$$

- *Se $l < 1$, então a série é convergente.*
- *Se $l > 1$, então a série é divergente.*
- *Se $l = 1$, nada podemos concluir.*

Exemplo 8.4 Seja a sucessão $u_i = e^{-i} > 0$, temos

$$\sqrt[i]{u_i} = \left(e^{-i}\right)^{\frac{1}{i}} = e^{-1} < 1$$

O critério de Cauchy garante que a série de termo geral e^{-i} é convergente.

8.3 Exercícios

Exercício 1 Usando as séries geométricas ou de Riemann, identificar a natureza das séries seguintes.

- $u_i = \frac{1}{2^i}, \quad u_i = \frac{(1/3)^i}{(1/2)^i}, \quad u_i = \frac{\sqrt{3^i}}{2^i}, \quad u_i = \frac{3^i}{(2^i)^2}$
- $u_i = \frac{\sqrt{i}}{i}, \quad u_i = \frac{\sqrt{3i}}{i^2}, \quad u_i = \frac{i}{(2i)^4}, \quad u_i = \frac{i-1}{i^2-1}.$

Exercício 2 Usando o critério de comparação, identificar a natureza das séries seguintes.

- $u_i = \dfrac{1}{1+i}, \quad u_i = \dfrac{1}{\sqrt{1+i}}, \quad u_i = \dfrac{1}{1+\sqrt{i}}, \quad u_i = \dfrac{1}{i+\sqrt{i}}, \quad u_i = \dfrac{\sqrt{i}}{i^2-2i+2},$
- $u_i = \dfrac{1}{i^2-2i+2}, \quad u_i = \dfrac{i+\sin(i)}{i^3-i^2+16}, \quad u_i = \dfrac{i^2+\ln(i+1)}{(i^2-1)^3+1}, \quad u_i = \dfrac{2^i}{3^i+i},$
- $u_i = \dfrac{3^i}{2^i+i^3}, \quad u_i = \dfrac{3^i}{2^i-5^i}, \quad u_i = \dfrac{3^i+i^3}{(2^i)^2-i^2}, \quad u_i = \dfrac{1}{i!}, \quad u_i = \dfrac{i^2}{i!}, \quad u_i = \dfrac{2^i}{i!},.$