Investigação Operacional

Métodos de Programação Linear: Gráfica, Simplex

Engenharia Biomédica (MIEBiomed)

Universidade do Minho - Escola de Engenharia
Departamento de Produção e Sistemas

Autoria

- Este conjunto de slides contém slides da autoria do Doutor Filipe Alvelos (falvelos@dps.uminho.pt) do Departamento de Produção e Sistemas da Universidade do Minho,

Representação Gráfica

Considere o seguinte problema de PL:

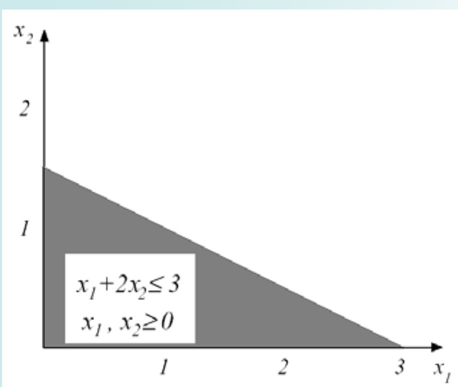
$$\begin{aligned}
&Max\ z=2x_1+3x_2\\
&s.a:\\
&x_1+2x_2\leq 3\\
&x_1+x_2\leq 2\\
&x_1 \leq 3\\
&x_1\, ,\, x_2\geq 0
\end{aligned}$$

duas variáveis, permite a representação gráfica do problema

Representação Gráfica

Não negatividade

Uma restrição



$$\begin{aligned}
&Max\ z=2x_1+3x_2\\
&s.a:\\
&x_1+2x_2\leq 3\\
&x_1+x_2\leq 2\\
&x_1 \leq 3\\
&x_1\, ,\, x_2\geq 0
\end{aligned}$$

Representação Gráfica

Duas restrições

$Max\ z=2x_1+3x_2$

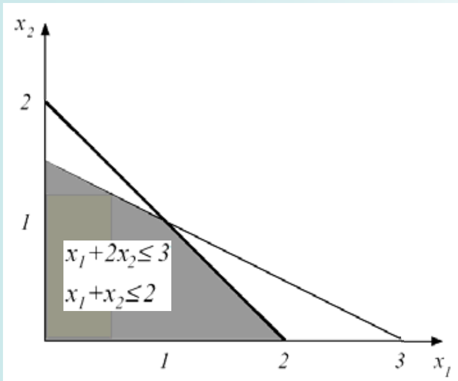
$s.a:$

$x_1+2x_2 \leq 3$

$x_1+x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 3$

$x_1,\ x_2 \geq 0$



Representação Gráfica

Conjunto de restrições

$Max\ z=2x_1+3x_2$

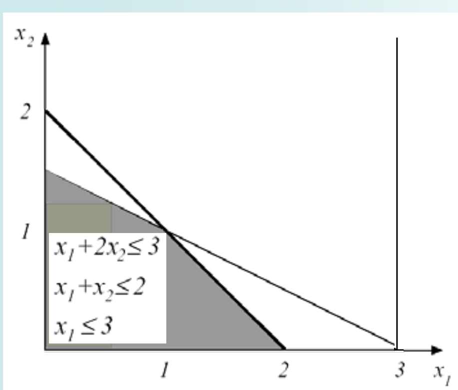
$s.a:$

$x_1+2x_2 \leq 3$

$x_1+x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 3$

$x_1,\ x_2 \geq 0$



Representação Gráfica

Espaço de soluções

$Max\ z=2x_1+3x_2$

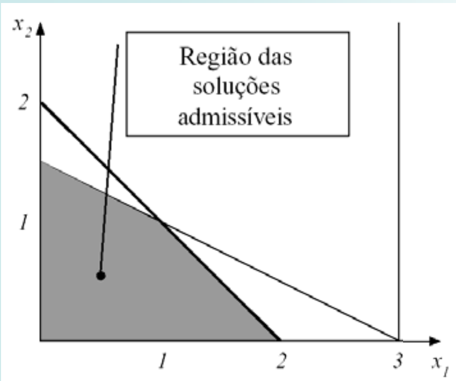
$s.a:$

$x_1+2x_2 \leq 3$

$x_1+x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 3$

$x_1,\ x_2 \geq 0$



Representação Gráfica

Função objectivo: família de rectas

$Max\ z=2x_1+3x_2$

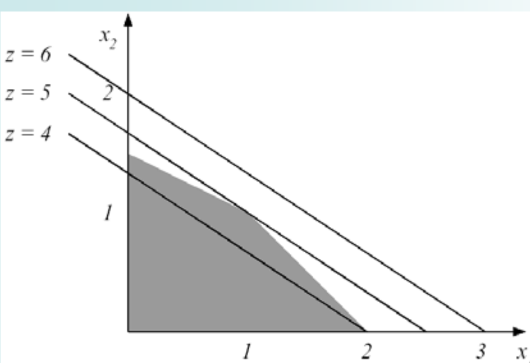
$s.a:$

$x_1+2x_2 \leq 3$

$x_1+x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 3$

$x_1,\ x_2 \geq 0$



Representação Gráfica

$Max\ z = 2x_1 + 3x_2$

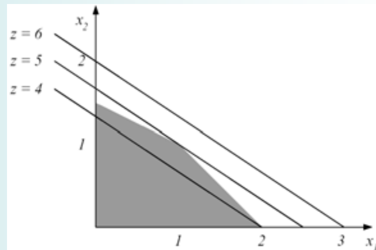
$s.a:$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



A restrição $x_1 \leq 3$ é redundante porque não contribui para a definição da região das soluções admissíveis.

Solução óptima: $x_1^* = 1$ e $x_2^* = 1$ com valor $z^* = 5$.

E se a função objectivo fosse diferente? Quais seriam as possíveis soluções óptimas?

Existe alguma função objectivo (*min* ou *max*) para a qual o ponto (0,0) corresponda a uma solução óptima? E existe alguma função objectivo para a qual o ponto (0.5,0.5) corresponda a uma solução óptima?

Para experimentar:
http://www.cs.stedwards.edu/~wright/linprog/AnimaLP.html

Soluções de modelos de PL

Conjunto das soluções admissíveis pode ser

- Vazio
- Não vazio (Limitado ou Ilimitado)

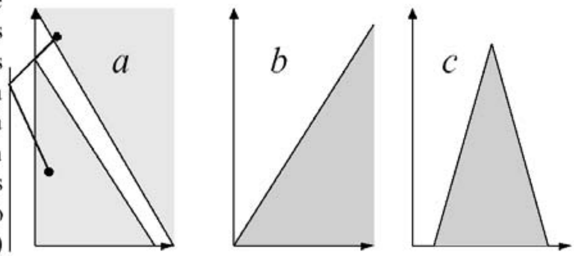
Um modelo de PL pode

- Ser impossível
- Ser ilimitado
- Ter soluções óptimas alternativas*
- Ter uma única solução óptima

Os dois primeiros casos, normalmente, indicam que o modelo de PL está mal formulado ou houve erros na sua introdução, já que não é frequente existirem problemas de decisão "reais" sem alternativas ou com alternativas tão boas quanto desejarmos.

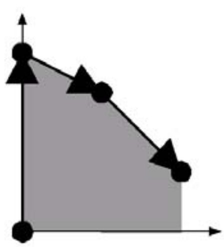
* Tipicamente, o software para PL só identifica uma solução óptima.

Regiões de soluções admissíveis parciais (cada uma corresponde à intersecção **de uma restrição** com as restrições de não negatividade)

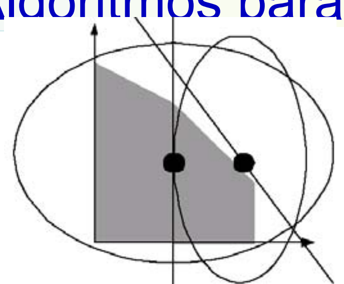


Conjunto das soluções admissíveis	Não vazio	Não vazio	Vazio	Ilimitado
Solução(ões) óptima(s)	Única	Alternativas (em número infinito)	Nenhuma	Nenhuma com valor finito
Exemplo	*b* com função objectivo *Min* $z=x_1+x_2$ *c* com qualquer função objectivo não paralela a nenhuma restrição	*c* com função objectivo paralela a uma das restrições	*a* com qualquer função objectivo	*b* com função objectivo *Max* $z=x_1+x_2$

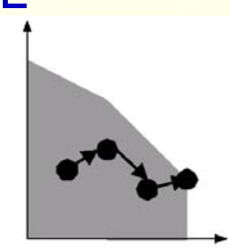
Algoritmos para PL



Métodos simplex,
Dantzig, 1947.
Teoricamente maus.
Na prática, muito bons!
Todos os softwares para PL incluem métodos simplex.



Método do elipsóide ,
L. Khaciyan, 1979.
Prova, pela primeira vez, que o problema de PL é fácil de resolver (no sentido da teoria da complexidade...)!
Em cada iteração, a solução óptima está sempre dentro de uma elipse que vai diminuindo de volume.
Teoricamente muito bom.
Na prática, não são conhecidas implementações eficientes para PL.



Métodos de ponto interior,
N. Karmarkar, 1984.
Teoricamente muito bons.
Na prática, por vezes (problemas muito grandes e esparsos, nomeadamente), competitivos com os métodos Simplex.
Mais complexo. Muitas variantes sofisticadas matematicamente.
Muita investigação actual.
Packages de *software* mais competitivos incluem métodos deste tipo.

Simplex

Simplex

Considere um problema de maximização de lucro relacionado com duas actividades e três recursos.

Na tabela seguinte são dados os consumos unitários de cada recurso (A, B e C) por actividade (1 e 2), a disponibilidade de cada recurso e o lucro unitário de cada actividade.

Formule o problema através de um modelo de PL.

	Recurso A	Recurso B	Recurso C	Lucro unitário
Actividade 1	2	4	1	6
Actividade 2	4	4		3
Disponibilidade	720	880	160	

Simplex

Forma normal

$Max\ z=6x_1+3x_2$

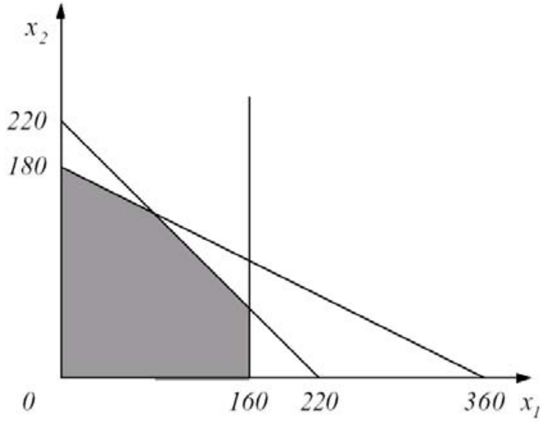
$s.a:$

$2x_1+4x_2+x_3=720$

$4x_1+4x_2+x_4=880$

$x_1+x_5=160$

$x_j \geq 0,\ j=1,\dots,5$



- Temos 3 equações e 5 incógnitas (sistema de equações indeterminado).
- Se fixarmos 2 variáveis a zero, temos 3 equações a 3 incógnitas e podemos determinar a solução desse sistema.

Simplex

Variáveis fixadas a 0	Variáveis a determinar	Solução do sistema de equações
x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$x_3=720,\ x_4=880,\ x_5=160$

$Max\ z=6x_1+3x_2$

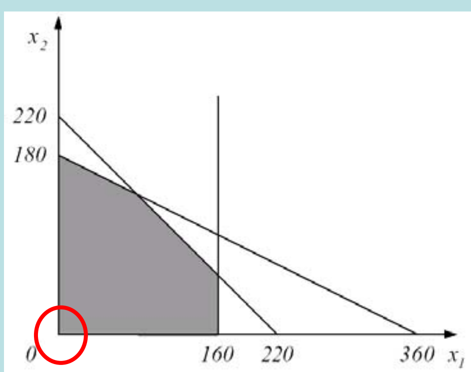
$s.a:$

$2x_1+4x_2+x_3=720$

$4x_1+4x_2+x_4=880$

$x_1+x_5=160$

$x_j \geq 0,\ j=1,\dots,5$



Simplex

Variáveis fixadas a 0	Variáveis a determinar	Solução do sistema de equações
x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$x_3=720,\ x_4=880,\ x_5=160$
x_1, x_3	x_2, x_4, x_5	$x_2=180,\ x_4=160,\ x_5=160$

$Max\ z=6x_1+3x_2$

$s.a:$

$2x_1+4x_2+x_3=720$

$4x_1+4x_2+x_4=880$

$x_1+x_5=160$

$x_j \geq 0,\ j=1,\dots,5$

Simplex

Variáveis fixadas a 0	Variáveis a determinar	Solução do sistema de equações
x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$x_3=720,\ x_4=880,\ x_5=160$
x_1, x_3	x_2, x_4, x_5	$x_2=180,\ x_4=160,\ x_5=160$
x_1, x_4	x_2, x_3, x_5	$x_2=220,\ x_3=-160,\ x_5=160$

$Max\ z=6x_1+3x_2$

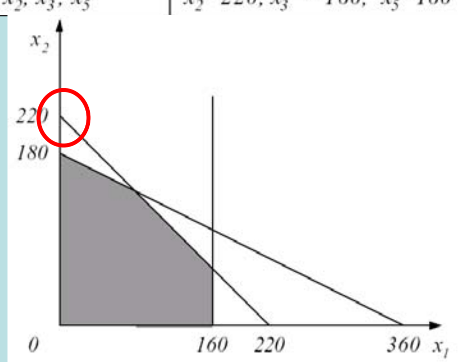
$s.a:$

$2x_1+4x_2+x_3=720$

$4x_1+4x_2+x_4=880$

$x_1+x_5=160$

$x_j \geq 0,\ j=1,\dots,5$



Simplex

Variáveis fixadas a 0	Variáveis a determinar	Solução do sistema de equações
x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$x_3=720,\ x_4=880,\ x_5=160$
x_1, x_3	x_2, x_4, x_5	$x_2=180,\ x_4=160,\ x_5=160$
x_1, x_4	x_2, x_3, x_5	$x_2=220,\ x_3=-160,\ x_5=160$
x_1, x_5	x_2, x_3, x_4	*sistema impossível*

$Max\ z=6x_1+3x_2$

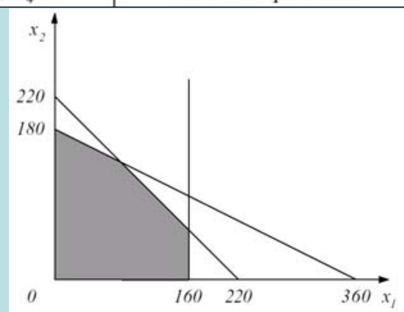
$s.a:$

$2x_1+4x_2+x_3=720$

$4x_1+4x_2+x_4=880$

$x_1+x_5=160$

$x_j\geq 0,\ j=1,\ldots,5$



Simplex

$Max\ z=6x_1+3x_2$

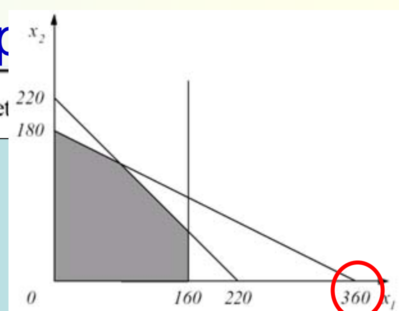
$s.a:$

$2x_1+4x_2+x_3=720$

$4x_1+4x_2+x_4=880$

$x_1+x_5=160$

$x_j\geq 0,\ j=1,\ldots,5$



	Variáveis a det	
x_2, x_3	x_1, x_4, x_5	$x_1=360,\ x_4=-560,\ x_5=-200$

Simplex

Variáveis fixadas a 0	Variáveis a det	Solução do sistema de
x_2, x_4	x_1, x_3, x_5	$x_1=220, x_3=280, x_5=-60$

$Max\ z=6x_1+3x_2$

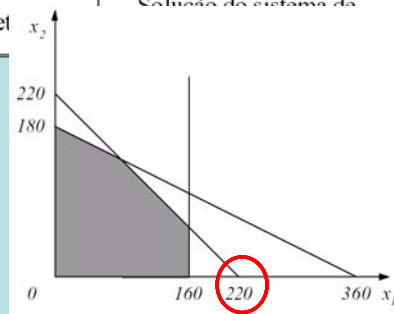
s.a:

$2x_1+4x_2+x_3=720$

$4x_1+4x_2+x_4=880$

$x_1+x_5=160$

$x_j\geq 0, j=1,\ldots,5$



Simplex

Variáveis fixadas a 0	Variáveis a determinar	Solução do sistema de equações
x_2, x_5	x_1, x_3, x_4	$x_1=160, x_3=400, x_4=240$

$Max\ z=6x_1+3x_2$

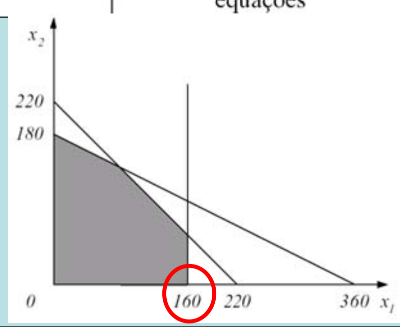
s.a:

$2x_1+4x_2+x_3=720$

$4x_1+4x_2+x_4=880$

$x_1+x_5=160$

$x_j\geq 0, j=1,\ldots,5$



Simplex

Variáveis fixadas a 0	Variáveis a determinar	Solução do sistema de equações

$Max\ z = 6x_1 + 3x_2$

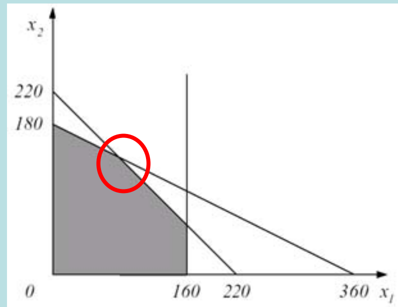
$s.a.:$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 720$

$4x_1 + 4x_2 + x_4 = 880$

$x_1 + x_5 = 160$

$x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,5$



x_3, x_4	x_1, x_2, x_5	$x_1=80,\ x_2=140,\ x_5=80$

Simplex

Variáveis fixadas a 0	Variáveis a determinar	Solução do sistema de equações

$Max\ z = 6x_1 + 3x_2$

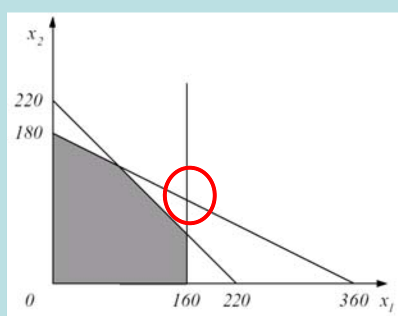
$s.a.:$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 720$

$4x_1 + 4x_2 + x_4 = 880$

$x_1 + x_5 = 160$

$x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,5$



x_3, x_5	x_1, x_2, x_4	$x_1=160,\ x_2=100,\ x_4=-160$

Simplex

$Max\ z = 6x_1 + 3x_2$

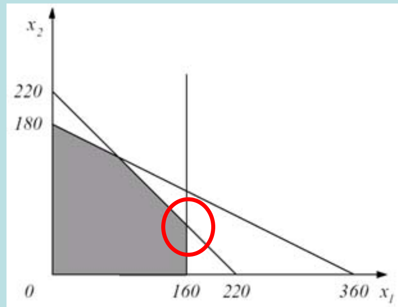
$s.a:$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 720$

$4x_1 + 4x_2 + x_4 = 880$

$x_1 + x_5 = 160$

$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5$



Variáveis fixadas a 0	Variáveis a determinar	Solução do sistema de equações
x_4, x_5	x_1, x_2, x_3	$x_1=160, x_2=60, x_3=160$

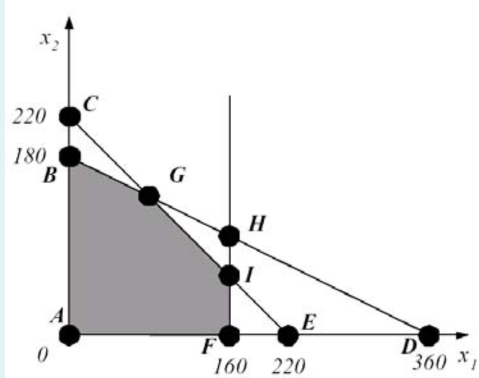
Simplex

Problema geral: *n* variáveis, *m* equações.

Qualquer conjunto de *m* variáveis cujo sistema de equações tenha solução designa-se por **base** (exemplo, x_3, x_4, x_5).

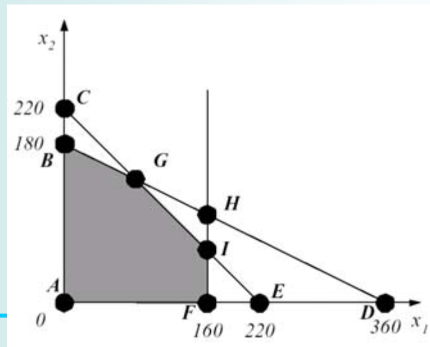
Dada uma base é fácil determinar a solução lhe está associada, basta fixar a 0 as variáveis que não fazem parte da base (variáveis **não básicas,** no exemplo dado x_1 e x_2) e resolver o sistema de equações para as restantes **(variáveis básicas)** - obtendo-se uma **solução básica**

ex. $x_1=0, x_2=0, x_3=720, x_4=880, x_5=160$



Simplex

•Uma solução básica pode ser **admissível ou não admissível** (no exemplo, A,B,G,F,I correspondem a bases admissíveis e C,H,E,D a bases não admissíveis). Para saber se a base é admissível ou não basta ver se as restrições de não negatividade são satisfeitas.



Simplex

•Uma solução básica pode ser **admissível ou não admissível** (no exemplo, A,B,G,F,I correspondem a bases admissíveis e C,H,E,D a bases não admissíveis). Para saber se a base é admissível ou não basta ver se as restrições de não negatividade são satisfeitas.

•Já tínhamos chegado à conclusão de que se existe uma solução óptima finita, então há, pelo menos, um ponto extremo que é solução óptima. A cada ponto extremo está associada uma base admissível...

•...então basta determinar todas as soluções básicas e o seu valor (na função objectivo) e ver qual é a solução que tem maior valor (problema de maximização).

Simplex

•Determinar a solução associada a uma base é fácil: resolver um sistema de *m* equações a *m* incógnitas (método de Gauss-Jordan).

•Só há um "pequeno" problema, o número de bases pode atingir

$$^{n}C_{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

•Por exemplo, para um problema com 100 variáveis e 10 restrições esse número é 1.73e+13. Com a folha de cálculo Excel (Microsoft Office 2003) já não se consegue determinar esse valor para um problema com 2000 variáveis e 250 restrições. O número de combinações é gigantesco para um problema pequeno!

Simplex

•Algoritmo Simplex:

- começa-se numa base e vê-se se ela corresponde à solução óptima (temos maneira de fazer isso?).
- Se for, temos a solução óptima.
- Se não for, passamos para outra base (como?) que pareça promissora (e como se vê isso?) e repetimos o procedimento.

•Não parece grande ideia, dado o número de bases ser tão grande... De facto, a análise (com base na teoria da complexidade) do comportamento do algoritmo simplex no pior caso não é muito simpática para este algoritmo (já foram construídos propositadamente problemas em que o simplex tinha de testar todas as bases!).

Simplex

A boa notícia é que, em problemas reais, o comportamento do algoritmo é muitíssimo melhor do que a análise para o pior caso da teoria da complexidade.

•O algoritmo Simplex (na verdade, **os algoritmos** da classe de métodos Simplex, porque, na prática, há diferenças consideráveis entre os diferentes algoritmos que se baseiam nestas ideias) continua a ser largamente o mais utilizado na resolução de problemas de PL reais.

•O Simplex é um exemplo clássico de como, por vezes, a análise teórica do pior caso, não é adequada à classificação prática dos algoritmos.

Simplex

•No seguinte problema qual é a base que tem uma solução mais fácil de calcular?

$$Max\ z = 10x_1 + 9x_2$$

$$s.a:$$

$$5x_1 + 4x_2 + x_3 = 200$$

$$4x_1 + 6x_2 + x_4 = 230$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 70$$

$$x_i,\ \geq 0,\ i = 1,\ldots,5$$