Complementos de Análise Matemática

MIETI, MIEMAT, MIETEX

2016/2017

Folha de Exercícios 1

Introdução às equações diferenciais

Classificação de equações diferenciais

1. Classifique cada uma das seguintes equações diferenciais ordinárias quanto à ordem e (eventual) linearidade, e indique qual é a variável independente.

a) $y\dfrac{d^2x}{dy^2} = y^2 + 1$	*b)* $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 3\dfrac{dy}{dx} + 5y = \cos x$
c) $\dfrac{ds}{dt} + t^2 s = te^t$	*d)* $\dfrac{du}{dv} + v^2 = u$
e) $\dfrac{dv}{dt} + v^2 = t$	*f)* $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y = xe^x$
g) $y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 + 1$	*h)* $\dfrac{dy}{dt} + t\sin y = 0$

Soluções explícitas de equações diferenciais

2. Diga quais das seguintes funções são soluções, em $\mathbb{R}$, de $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$:

a) $y = e^x$	*b)* $y = \sin x$	*c)* $y = 4e^{-x}$
d) $y = 0$	*e)* $y = 1 + \frac{x^2}{2}$	*f)* $y = 5\cos x$

3. Verifique se as seguintes funções são solução, no intervalo considerado, das equações diferenciais dadas.

   (a) $f(x) = xlnx$, em $]0, +\infty]$, de $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y = 1$.

   (b) $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, em $]-1, 1[$, de $y\dfrac{dy}{dx} + x = 0$.

   (c) $h(x) = x^3e^{-3x}$, em $\mathbb{R}$, de $\dfrac{dy}{dx} + 3y = xe^{-3x}$.

   (d) $m(x) = k_1e^x - k_2e^{-x}$, em $\mathbb{R}$, de $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$, onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias.

4. Em que intervalo da recta real a função $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ é uma solução da equação diferencial $\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} = 1$?

5. Mostre que a função $g(x) = xlnx$ é uma solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 1$ em $]0, +\infty]$ mas não o é no intervalo $]-1, 1[$.

6. Mostre que a função $h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ é uma solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$ em $I =]-1, 1[$ mas não o é em nenhum outro intervalo de maior amplitude contendo I.

7. Determine o valor da constante β de modo que a função $\varphi(x) = x^\beta$ seja solução da equação $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ no intervalo $I =]0, +\infty[$.

Soluções implícitas de equações diferenciais

8. Mostre que a relação $x^2 + 2xy = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial $x\,\frac{dy}{dx} + x + y = 0$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

9. Mostre que a relação $s^2t^2 + s^2 - 9 = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial $ts\frac{dt}{ds} + t^2 + 1 = 0$ no intervalo $]-3, 3[\, \setminus \{0\}$.

10. Mostre que $y^2 + x = 1$ não é uma solução implícita da equação diferencial $y\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$,no intervalo $]0, 2[$, apesar de a verificar formalmente. Indique em que intervalo real é solução implítica.

Problemas de valores iniciais

11. Determine se cada uma das seguintes funções é solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$a)\quad y = \sin 2x \qquad b)\quad y = x \qquad c)\quad y = \frac{1}{2}\sin 2x$

12. Sabendo que toda a solução da equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ pode ser escrita na forma $f(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, determine qual deverá ser o valor de c_1 e c_2 por forma a que $f(x)$ seja uma solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Problemas de valores de fronteira

13. Mostre que $y = 2xe^{x-1}$ é uma solução do problema de valores de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

14. Encontre uma solução do problema de valores de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1, \end{cases}$$

se a solução geral da equação diferencial é $y(x) = k_1 \sin 2x + k_2 \cos 2x$.

15. Sabendo que toda a solução da equação diferencial $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 0$ pode ser escrita na forma $y = c_1 + c_2x^2$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, mostre que o problema de valores de fronteira

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(-1) = 1,$$

não tem solução única.

16. Sabendo que toda a solução da equação diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ pode ser escrita na forma $y = c_1 cosx + c_2 senx$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, mostre que o problema de valores de fronteira

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 5,$$

não tem solução.

Soluções da folha de exercícios 1

1. (a) equação diferencial de 2ª ordem, linear, e y é a variável independente
   (b) equação diferencial de 4ª ordem, linear, e x é a variável independente
   (c) equação diferencial de 1ª ordem, linear, e t é a variável independente
   (d) equação diferencial de 1ª ordem, linear, e v é a variável independente
   (e) equação diferencial de 1ª ordem, não-linear, e t é a variável independente
   (f) equação diferencial de 2ª ordem, não-linear, e x é a variável independente
   (g) equação diferencial de 1ª ordem, não-linear, e x é a variável independente
   (h) equação diferencial de 1ª ordem, não-linear, e t é a variável independente

2. a),c) e d)

3. (a) é solução; (b) é solução; (c) não é solução; (d) é solução

4. $I = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

7. $\beta = 1$ ou $\beta = 4$

10. $I =]-\infty, 1[$

11. (a) não é solução; (b) não é solução; (c) é solução

14. $y(x) = \frac{2}{\sqrt{3}-1}\,(\sin 2x - \cos 2x)$