Folha 9B – Integrais impróprios.

1. Diga se cada um dos seguintes integrais impróprios é convergente ou divergente. Em caso de convergência determine o valor do integral impróprio:

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\, dx;$

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx;$

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx;$

   (d) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\, dx.$

2. Averigue se é possível atribuir uma área a cada uma das seguintes regiões e, em caso afirmativo, determine-a:

   (a) $\mathcal{A} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0 \ \wedge \ 0 \geq y \geq \ln x\big\};$

   (b) $\mathcal{B} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0 \ \wedge \ e^{-2x} \leq y \leq e^{-x}\big\}.$

3. A velocidade média de um gás perfeito é dada por

$$\overline{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\, dv,$$

   onde M representa a massa molecular, R é a constante dos gases perfeitos, T a temperatura média do gás e v a velocidade molecular. Mostre que $\overline{v} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$.