Funções hiperbólicas directas e inversas

C. Funções hiperbólicas directas

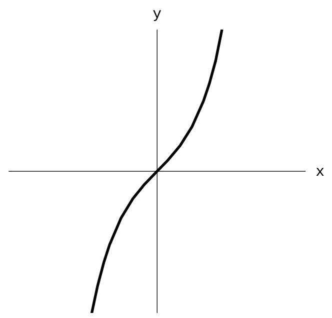
Vamos agora introduzir as funções *hiperbólicas*, apresentar algumas das suas propriedades e esboçar os seus gráficos.

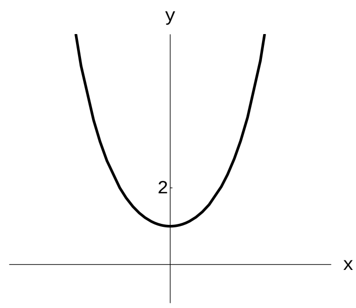
C1. Seno hiperbólico

O *seno hiperbólico* é a função

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}. \tag{19}$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e estritamente crescente, logo injectiva. Possui um único zero, a origem. Além disso, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}\, x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}\, x = -\infty$.





$y = \mathrm{sh}\, x$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{CD}_{\mathrm{sh}} = \mathbb{R}$

$y = \mathrm{ch}\, x$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{CD}_{\mathrm{ch}} = [1, +\infty[$

C2. Cosseno hiperbólico

O *cosseno hiperbólico* é a função

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ch}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}. \tag{20}$$

Trata-se de uma função contínua e par. Logo, não é injectiva. Não possui zeros e atinge um mínimo na origem, com valor $\mathrm{ch}\, 0 = 1$. Além disso, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}\, x = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty$.

C3. Tangente hiperbólica

A *tangente hiperbólica* é a função definida por

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} \end{array}, \tag{21}$$

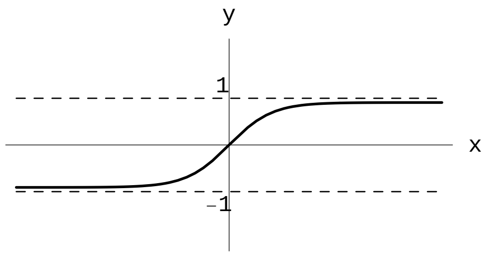
ou seja, por

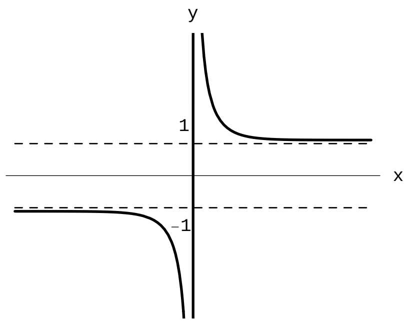
$$\mathrm{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e estritamente crescente, logo injectiva. Possui um único zero, em 0. Além disso,

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 1, \tag{23}$$

pelo que o gráfico da th possui uma assímptota horizontal de equação $y = 1$, para $x \to +\infty$. Da imparidade da th, existe outra assímptota horizontal de equação $y = -1$, para $x \to -\infty$. Tem-se ainda $\mathrm{CD_{th}} =]-1,1[$.





$y = \operatorname{th} x$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{CD_{th}} =]-1,1[$

$y = \coth x$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathrm{CD_{coth}} = \mathbb{R}\backslash[-1,1]$

C4. Cotangente hiperbólica

A *cotangente hiperbólica* é a função definida por

$$\begin{array}{rccc} \coth: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \end{array} \tag{24}$$

ou seja, por

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{25}$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e sem zeros. Apesar de não ser monótona, é estritamente decrescente para $x > 0$, onde toma valores positivos, e para $x < 0$, onde toma valores negativos. Logo é injectiva. Da definição (25), sai que

$$\lim_{x\to 0^+} \coth x = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \coth x = 1, \tag{26}$$

pelo que o gráfico da coth possui uma assímptota horizontal de equação $y = 1$, para $x \to +\infty$, e uma assímptota vertical de equação $x = 0$. Da imparidade da coth, existe outra assímptota horizontal de equação $y = -1$, para $x \to -\infty$. Tem-se ainda $\mathrm{CD_{coth}} = \mathbb{R}\backslash[-1,1]$.

C5. Algumas propriedades

A partir das definições (19), (20), (22) e (25) das funções hiperbólicas, com manipulações algébricas simples, é fácil verificar que estas funções verificam as seguintes propriedades:

(i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1\ , \quad \forall x \in \mathbb{R};$

(ii) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x\ , \quad \forall x \in \mathbb{R};$

(iii) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x\ , \quad \forall x \in \mathbb{R};$

(iv) $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x\ , \quad \forall x \in \mathbb{R};$

(v) $\operatorname{th}^2 x + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1\ , \quad \forall x \in \mathbb{R};$

(vi) $\coth^2 x - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\};$

(vii) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x\ \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x\ \operatorname{sh} y\ , \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$

(viii) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x\ \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x\ \operatorname{sh} y\ , \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$

(vii) $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x\ \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x\ \operatorname{sh} y\ , \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$

(viii) $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x\ \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x\ \operatorname{sh} y\ , \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

De facto

(i) Seja $x \in \mathbb{R}$, qualquer. Então

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) \;=\; 1.
\end{aligned}$$

(viii) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, quaisquer. Então

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x\ \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x\ \operatorname{sh} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} \;=\; \operatorname{ch}(x+y).
\end{aligned}$$

As restantes alíneas demonstram-se de maneira semelhante. ■

C6. Derivadas das funções hiperbólica

Quanto às derivadas das funções hiperbólicas, basta aplicar as regras usuais de derivação, podendo construir-se a seguinte tabela.

Tabela - Derivadas das funções hiperbólicas directas

As derivadas das funções hiperbólicas directas são

$$\mathrm{sh}'\, x = \mathrm{ch}\, x\,, \quad x\in\mathbb{R} \qquad\qquad \mathrm{ch}'\, x = \mathrm{sh}\, x\,, \quad x\in\mathbb{R}$$

$$\mathrm{th}'\, x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\, x}\,, \quad x\in\mathbb{R} \qquad\qquad \mathrm{coth}'\, x = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2\, x}\,, \quad x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Sendo u uma função derivável, tem-se (nos pontos onde a derivada existe)

$$(\mathrm{sh}\, u)' = u'\,\mathrm{ch}\, u \qquad\qquad (\mathrm{ch}\, u)' = u'\,\mathrm{sh}\, u$$

$$(\mathrm{th}\, u)' = \frac{u'}{\mathrm{ch}^2\, u} \qquad\qquad (\mathrm{coth}\, u)' = \frac{-u'}{\mathrm{sh}^2\, u}$$

D. Funções hiperbólicas inversas

Vamos agora definir as funções hiperbólicas inversas. Como vimos na subsecção C, as funções sh, th e coth são injectivas, enquanto que a função ch não é injectiva e, portanto, não será invertível. Para esta última, iremos considerar uma restrição apropriada.

D1. Argumento do seno hiperbólico

A função sh definida em (19) é contínua, bijectiva e possui inversa contínua. Trata-se da função *argumento do seno hiperbólico*, que se define por

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{argsh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \mathrm{argsh}\, y, \end{array} \tag{27}$$

onde

$$x = \mathrm{argsh}\, y\,,\ y \in \mathbb{R} \iff y = \mathrm{sh}\, x\,, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Mas, para $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} y = \mathrm{sh}\, x \quad &\iff \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &\iff \quad y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

A última condição em (29) traduz uma equação do segundo grau na incógnita e^x. Tratando-a com a fórmula resolvente, sai

$$e^x \ = y \pm \sqrt{y^2 + 1}\,,$$

sendo a solução com o sinal + a única admissível, uma vez que

$$e^x > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad y - \sqrt{y^2+1} < 0\,,\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

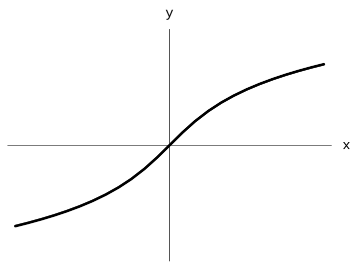
Mas

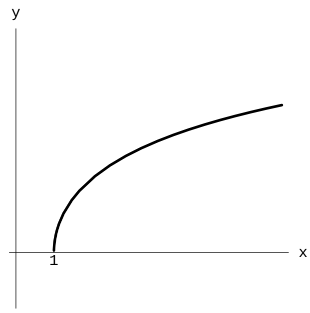
$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),$$

donde

$$\operatorname{argsh} y \ = \ \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\ \right), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

As expressões (27) e (30) definem completamente a função argsh.





$y = \operatorname{argsh} x$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{CD}_{\mathrm{argsh}} = \mathbb{R}$ $\qquad$ $y = \operatorname{argch} x$, $x \in [1, +\infty[\,$, $\mathrm{CD}_{\mathrm{argch}} = [0, +\infty[$

D2. Argumento do cosseno hiperbólico

A função ch definida por (20) não é injectiva, logo, não é invertível. Como tal, definiremos a inversa da seguinte restrição bijectiva e contínua

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ch}: & [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \mathrm{ch}\, x, \end{array} \tag{31}$$

que se designa por *argumento do cosseno hiperbólico* e que é também uma função contínua. Representa-se por

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{argch}: & [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & y & \longmapsto & \mathrm{argch}\, y, \end{array} \tag{32}$$

onde

$$x = \operatorname{argch} y\,,\ y \in\ [1,+\infty[\iff y = \operatorname{ch} x\,,\ \ x \in\ [0,+\infty[\,. \tag{33}$$

Mas, para $x \geq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} y = \operatorname{ch} x \iff & \ y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \iff & \ y = \frac{e^{2x}+1}{2e^x} \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

A última igualdade de (34) traduz uma equação do segundo grau em e^x, donde

$$e^x \;=\; y \pm \sqrt{y^2-1}\,.$$

Como $x \geq 0 \Longrightarrow e^x \geq 1$, a solução com o sinal $+$ é a única admissível (a solução com o sinal $-$ corresponderia à inversa da restrição do ch para $x \leq 0$). Mas

$$e^x = y+\sqrt{y^2-1}\;,\; x\geq 0\,,\; y\geq 1 \iff x=\log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\;,\; x\geq 0\,,\; y\geq 1,$$

donde

$$\operatorname{argch} y \;=\; \log\left(y+\sqrt{y^2-1}\;\right)\;,\; y\in\,[1,+\infty[\,. \tag{35}$$

A função argumento do cosseno hiperbólico fica completamente definida por (32) e (35).

D3. Argumento da tangente hiperbólica

A função tangente-hiperbólica definida em (21) é injectiva mas não é sobrejectiva. Para poder inverter, basta considerar

$$\begin{array}{rccl} \text{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ & x & \longmapsto & \text{th}, \end{array} \tag{36}$$

que é bijectiva e, portanto, é invertível. Sendo contínua num intervalo, a sua inversa é contínua. Trata-se da função *argumento da tangente hiperbólica*, que se define por

$$\begin{array}{rccl} \text{argth}: &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{argth} y, \end{array} \tag{37}$$

onde

$$x=\operatorname{argth} y\,,\; y\in\,]-1,1[\;\iff\; y=\operatorname{th} x\,,\; x\in\mathbb{R}. \tag{38}$$

Para $x\in\mathbb{R}\,,\; y\in\,]-1,1[\,$, tem-se

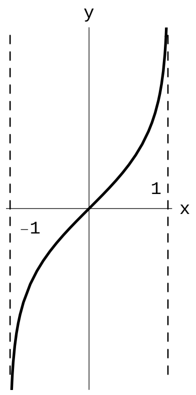
$$y=\operatorname{th} x \iff y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \iff y=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

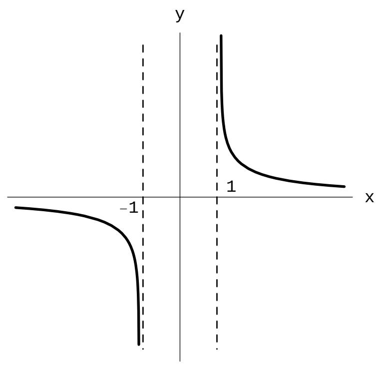
$$\iff e^{2x}\,(1-y)=1+y \iff x=\log\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right),$$

donde

$$\operatorname{argth} y \;=\; \log\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)\;,\; y\in\,]-1,1[\;, \tag{39}$$

completando-se a definição do argumento da tangente hiperbólica com (37) e (39).





$y = \operatorname{argth} x,\ x \in]-1,1[,$
$\mathrm{CD}_{\mathrm{argth}} = \mathbb{R}$

$y = \operatorname{argcoth} x,\ x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]\,,$
$\mathrm{CD}_{\mathrm{argcoth}} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

D4. Argumento da cotangente hiperbólica

A função cotangente-hiperbólica definida em (24) é injectiva mas não é sobrejectiva. Consideremos então

$$\begin{array}{rccc} \coth : & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\,[-1,1] \\ & x & \longmapsto & \coth \end{array} \tag{40}$$

que é bijectiva e, portanto, é invertível. A sua inversa é contínua. Trata-se da função *argumento da cotangente hiperbólica*, que se define por

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argcoth} : & \mathbb{R}\backslash\,[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{argcoth} y \end{array} \tag{41}$$

onde

$$x = \operatorname{argcoth} y\,,\ y \in \mathbb{R}\backslash\,[-1,1] \iff y = \coth x\,,\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{42}$$

Para $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,,\ y \in \mathbb{R}\backslash\,[-1,1]\,$, tem-se

$$y = \coth x \iff x = \log\left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}\right),$$

pelo que

$$\operatorname{argcoth} y \ = \ \log\left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}\right)\,,\ y \in \mathbb{R} \setminus [-1,1], \tag{43}$$

ficando assim completa a definição da função argumento da cotangente hiperbólica, através das expressões (41) e (43).

D5. Derivadas das funções hiperbólicas inversas

Para obter as derivadas das funções hiperbólicas inversas, basta aplicar as regras usuais de derivação às expressões (30), (35), (39) e (43) obtidas para estas funções. Podemos construir a seguinte tabela.

Tabela - Derivadas das funções hiperbólicas inversas

As derivadas das funções hiperbólicas inversas são

$$\operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,, \quad x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,, \; x \in]1, +\infty[$$

$$\operatorname{argth}' x = \frac{1}{1-x^2}\,, \quad x \in]-1, 1[\qquad\qquad \operatorname{argcoth}' x = \frac{1}{1-x^2}\,, \; x \in \mathbb{R} \backslash [-1, 1]$$

Sendo u uma função derivável, tem-se (nos pontos onde a derivada existe)

$$(\operatorname{argsh} u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}} \qquad\qquad (\operatorname{argch} u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$(\operatorname{argth} u)' = \frac{u'}{1-u^2} \qquad\qquad (\operatorname{argcoth} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$$