Departamento de Matemática e Aplicações 07 /5/ 2014

Duração: 90 minutos

Teste de Análise Matemática EE - versão A

Nome: ______________________ Nr.: __________ Curso: MIEEIC

GRUPO I

Em cada uma das perguntas seguintes, assinale a resposta correta no quadrado correspondente. Cada resposta correta vale 1 valor.

1. Qual das seguintes funções não é contínua no seu domínio?

   $f(x,y) = \ln(x+y)$ ☐

   $g(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ ☐

   $h(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ☐

   $j(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ☐

   Nenhuma das anteriores. ☐

2. Qual das seguintes equações diferenciais é satisfeita pela função $f(x,y) = x^2 \exp(y^3)$?

   $3y^2 x f'_x + f''_{xy} = 0$ ☐; $3y^2 x f''_{xy} - f'_x = 0$ ☐;

   $3y^2 x f''_{x^2} - f''_{xy} = 0$ ☐; $3y^2 x f'_y - f''_{xy} = 0$ ☐;

   Nenhuma das anteriores. ☐

3. A taxa de variação de uma função f num ponto (x_0, y_0) do seu domínio $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ é máxima na direção do vetor $\vec{u}$:

   $\vec{u} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0))$ ☐

   $\vec{u} = -(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0))$ ☐

   $\vec{u} = (x_0, y_0)$ ☐

   $\vec{u}$ perpendicular ao vetor $(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0))$ ☐

   Nenhuma das anteriores. ☐

4. A aproximação linear à função $z = x.\ln(y^2 x)$ no ponto $(2,1)$ é:

   $L(x,y) = (x-2) + 4(y-1)$ ☐

   $L(x,y) = (\ln 2 + 1)(x-2) + 4(y-1)$ ☐

   $L(x,y) = (x-2) + \ln 2(y-1) + 2\ln 2$ ☐

   $L(x,y) = (\ln 2 + 1)(x-2) + 4(y-1) + 2\ln 2$ ☐

   Nenhuma das anteriores. ☐

5. Qual dos vetores seguintes é perpendicular ao plano tangente à superfície $z = x^3 y + xy^2$ no ponto $(1,2)$?

   $(10,5,-1)$ ☐; $(5,10,1)$ ☐;

   $(-1,5,10)$ ☐; $(5,1,10)$ ☐;

   Nenhuma das anteriores. ☐

6. A taxa de variação da função $f(x,y) = x^2 \sin(3y)$ no ponto $(1,0)$ na direção do vetor $\vec{u} = (1,2)$ pode calcular-se da forma:

$D_{\vec{u}}f(1,0) = (0,3) \cdot (1,2)$ ☐; $D_{\vec{u}}f(1,0) = (0,3) \cdot (1,0)$ ☐;

$D_{\vec{u}}f(1,0) = (0,1) \cdot (1,0)$ ☐; $D_{\vec{u}}f(1,0) = (0,3) \cdot (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$; ☐;

Nenhuma das anteriores. ☐

7. Considere a função real $f(x,y)$ de duas variáveis reais definida no seu domínio D_f. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

Se f é contínua em D_f então f é diferenciável em D_f. ☐

Se as derivadas parciais f'_x, f'_y existem em D_f então f é contínua em D_f. ☐

Se as derivadas parciais f'_x, f'_y existem e são contínuas em D_f então f é contínua em D_f. ☐

Nenhuma das anteriores. ☐

GRUPO II

Apresente todos os cálculos efectuados.

1. Considere a função real definida em $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{x^3}{y^2}$.

(a) Determine o vetor gradiente da função f no ponto $(-1,1)$.

(b) Determine as funções $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

(c) Considerando que $x = \cos(tu)$ e $y = h(4t^3)$, onde u e t são variáveis reais e h uma função derivável em $\mathbb{R}$, determine $\frac{\partial f}{\partial t}$.

2. Considere um barco que parte de um local e navega na direção nordeste (considere que o ponto de partida do barco é a origem do referencial XOY.) A temperatura nessa região varia de acordo com a expressão $T(x, y) = x^2 - 2y^2 + 3x$.

   (a) Determine $\dfrac{\partial T}{\partial x}(0, 0)$ e diga qual o seu significado no contexto do problema.

   (b) Qual a taxa de variação da temperatura que o barco observa à medida que navega na direção indicada?

   (c) Qual a direção (a partir do local de partida) segundo a qual o barco experimentaria um aumento mais rápido da temperatura? Justifique e calcule a taxa de variação nessa direção.

3. A potência consumida numa resistência elétrica é dada por $P = \dfrac{E^2}{R}$ watts. Considere $E = 20\,\text{volts}$ e $R = 8\,\text{ohms}$. Determine o valor aproximado da variação da potência se E é diminuído de $0,5\,\text{volts}$ e R é diminuído de $0,8\,\text{ohm}$, usando diferenciais.

4. Considere a função real definida em $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4y^3}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Determine a função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.