Análise Matemática EE - Ficha nº 5
1ºano, 2ºsemestre

Diferenciais, Plano tangente

1. Considere a função real $f(x,y) = x^2 + y^3$

   (a) Determine a aproximação linear $L(x,y)$ da função f na vizinhança do ponto $(2,1)$.

   (b) Utilize a aproximação linear $L(x,y)$ da alínea anterior para determinar um valor aproximado de $f(2.01, 0.99)$.

   (c) Determine a equação do plano tangente à superfície $z = x^2 + y^3$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ e o vector perpendicular a esse plano.

   (d) Determine o diferencial de f no ponto dado.

   (e) Utilize a alínea anterior para determinar uma aproximação da variação da função real f, quando (x,y) varia de $(2,1)$ para $(2.001, 1.003)$.

2. Considere a função real $f(x,y) = 3x^2 - 2xy$

   (a) Determine a aproximação linear $L(x,y)$ da função f na vizinhança do ponto $(2, \frac{10}{4})$.

   (b) Utilize a aproximação linear $L(x,y)$ da alínea anterior para determinar um valor aproximado de $f(2.01, 2.4)$.

   (c) Determine a equação do plano tangente à superfície $z = 3x^2 - 2xy$ no ponto $(2, \frac{10}{4}, f(2, \frac{10}{4}))$ e o vector perpendicular a esse plano.

   (d) Determine o diferencial de f no ponto dado.

   (e) Utilize a alínea anterior para determinar uma aproximação da variação da função real f, quando (x,y) varia de $(2, \frac{10}{4})$ para $(1.99, 2.51)$.

3. Considere a função real $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

   (a) Determine a aproximação linear $L(x,y)$ da função f na vizinhança do ponto $(1,-1)$.

   (b) Utilize a aproximação linear $L(x,y)$ da alínea anterior para determinar um valor aproximado de $f(1.01, -0.99)$.

   (c) Determine a equação do plano tangente à superfície $z = \ln(x^2 + y^2)$ no ponto $(1,-1,f(1,-1))$ e o vector perpendicular a esse plano.

   (d) Determine o diferencial de f no ponto dado.

   (e) Utilize a alínea anterior para determinar uma aproximação da variação da função real f, quando (x,y) varia de $(1,-1)$ para $(1.02, -1.03)$.

4. Considere a função real $f(x,y) = x^3 \exp(2y)$

   (a) Determine a aproximação linear $L(x,y)$ da função f na vizinhança do ponto $(1,0)$.

   (b) Utilize a aproximação linear $L(x,y)$ da alínea anterior para determinar um valor aproximado de $f(0.99, 0.001)$.

(c) Determine a equação do plano tangente à superfície $z = x^3 \exp(2y)$ no ponto $(1, 0, f(1, 0))$ e o vector perpendicular a esse plano.

(d) Determine o diferencial de f no ponto dado.

(e) Utilize a alínea anterior para determinar uma aproximação da variação da função real f, quando (x, y) varia de $(1, 0)$ para $(1.001, -0.003)$.

5. Calcule o diferencial de f (df) para as funções definidas do seguinte modo:

   a) $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ b) $f(x,y,z) = xyz - x^z$

   c) $f(x,y,z,t) = 3x - 2y^2 - z^3 + t$

6. Usando diferenciais, obtenha uma aproximação da variação da função real definida em 1.b), quando (x, y, z) varia de $(1, 2, -1)$ para $(1.001, 1.999, -1.01)$.

7. Usando diferenciais calcule um valor aproximado de $\ln\left(1.01^2 + 0.02^3\right)$.

8. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície $x^3 + 2xy^2 - 7z^3 + 3y + 1 = 0$ no ponto $(1, 1, 1)$.

9. Considere a superfície $48z = 2x^2 + 3y^2$ (parabolóide).

   (a) Determine a equação do plano tangente à superfície no ponto $P = (3, 2, \frac{5}{8})$.

   (b) Determine os cossenos diretores da reta normal à superfície no ponto P.

10. Determine a equação do plano tangente à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ de modo que seja paralelo ao plano $x - y + 2z = 0$.

Vetor gradiente, derivadas direccionais

1. Construa o campo vectorial gradiente (grad $f = \overrightarrow{\nabla} f$) das seguintes funções:

   a) $z = xy$ b) $z = x^2 + y^2$ c) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

2. Determine o gradiente de f (grad $f = \overrightarrow{\nabla} f$) nos casos seguintes

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2\,(1 + \sin x)\,,\ (a,b) = (\pi, 2)\,.$

   (b) $f(x,y,z) = \left(x^2 + \cos z\right) e^{-x+y},\ (a,b,c) = (1, 1, \pi).$

3. Escreva a expressão $\overrightarrow{\nabla} U$ quando U é uma função real de n variáveis reais.

4. Seja $f\,(x,y) = \ln \|\overrightarrow{r}\|\,$, onde $\overrightarrow{r} = (x,y)\,$. Mostre que $\overrightarrow{\nabla} f = \dfrac{\overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|^2}$.

5. Seja $\overrightarrow{r} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i$. Mostre que grad $\|\overrightarrow{r}\|^k = k.\,\|\overrightarrow{r}\|^{k-2}.\ \overrightarrow{r}$, definindo $\|\overrightarrow{r}\| = \sqrt{\left(x_1^2 + ... + x_n^2\right)}$.

6. Calcule as seguintes derivadas dirigidas: :

   (a) da função $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$ no ponto $(1, 1, 1)$ na direcção do vector $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2 - 2\overrightarrow{e}_3$;

(b) da função $u = xy + yz + zx$ no ponto $M = (2, 1, 3)$ na direcção que vai deste ao ponto $N = (5, 5, 15)$;

(c) da função $z = x^2 - xy - 2y^2$ no ponto $P = (1, 2)$ na direcção que faz com o eixo $\overrightarrow{OX}$ um ângulo de 60^o.

7. Seja $f(x, y, z) = \sin\left(\dfrac{xz}{x^2 + y^2}\right)$.

   (a) Determine a função vectorial $\overrightarrow{\nabla} f$.

   (b) Calcule $\overrightarrow{\nabla} f\,(2, 1, 0)$.

   (c) Qual a taxa de variação de f no ponto $(2, 1, 0)$ segundo o vector $(1, 1, 1)$?

8. Sabendo que $D_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} f\,(a, b) = 3\sqrt{2}$ e $D_{\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)} f\,(a, b) = 5$, determine $\overrightarrow{\nabla} f\,(a, b)$.

9. Em que direcção a partir do ponto $(2, 0)$ a função $f(x, y) = xy$ tem taxa de variação -1?

10. Sabendo que $D_{\overrightarrow{u}} f\,(a, b) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{\nabla} f\,(a, b) = \left\|\overrightarrow{\nabla} f\,(a, b)\right\|.\cos\phi$, onde ϕ é o ângulo entre os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{\nabla} f\,(a, b)$ $\left(\phi = \sphericalangle\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\nabla} f\,(a, b)\right)\right)$, diga

    (a) Qual a direcção segundo a qual f tem maior taxa de variação? Nessa direcção, qual a taxa de variação?

    (b) Qual a direcção segundo a qual f tem menor taxa de variação? Nessa direcção, qual a taxa de variação?

    (c) Qual a direcção segundo a qual f tem taxa de variação nula?

11. A temperatura no local (x, y) numa região do plano XOY é T^oC onde $T\,(x, y) = x^2 e^{-y}$.

    (a) Em que direcção a partir do ponto $(2, 1)$ a temperatura aumenta mais depressa?

    (b) Qual a taxa de crescimento nessa direcção?

12. Em que direcção a partir do ponto (a, b, c) a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - z^2$ aumenta metade da sua taxa de variação máxima nesse ponto?

13. Seja $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$.

    (a) Determine a derivada de f no ponto $P_0 = (3, 4)$ segundo o vector $\cos\alpha.\overrightarrow{e}_1 + \sin\alpha.\overrightarrow{e}_2$.

    (b) Em que direcção se deve sair de P_0 para que os valores da função aumentem o mais rapidamente possível?

    (c) Interprete geometricamente o resultado, atendendo ao gráfico de f.

Derivadas de funções compostas

1. Considere a função $T(x,y) = x^2e^y - xy^3$, onde $x = \cos t$ e $y = \sin t$. Determine $\frac{dT}{dt}$ usando a regra da cadeia.

2. Para $z = \cos\left(x^2y\right)$, onde $x = s^3t^2$ e $y = s^2 + \frac{1}{t}$, calcule $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$.

3. Seja $v = x + y^2$, $x = \int_0^t \cos w \; dw$, $y = \arccos u + \sin t$, calcule $\frac{\partial v}{\partial t}$ e $\frac{\partial v}{\partial u}$.

4. Calcule $\frac{d^2u}{dt^2}$ para $u = e^{x-2y}$, onde $x = \sin t$ e $y = t^3$.

5. Seja $z = xy$ com $x = f(t)$ e $y = g(t)$, onde g e f são funções deriváveis. Determine $\frac{dz}{dt}$.

6. Sendo $z = txy^2$ em que $x = t + \ln\left(y + t^2\right)$ e $y = e^t$, calcule $\frac{\partial z}{\partial t}$ e $\frac{dz}{dt}$.

7. Mostre que, sendo $u = \phi\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ com $z = \rho\cos\varphi\cos\theta$, $y = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $z = \rho\sin\varphi$, se tem $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$.

8. Seja $F = u\varphi\left(u^x, v^2 + u\right)$ com $u = \sin(x+y)$ e $v = \cos(x+y)$. Determine $\frac{\partial F}{\partial x}$.

9. Seja $z = f(x,y)$, onde $x = 2v + \ln t$ e $y = \frac{1}{t}$. Calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial t}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

10. Seja $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$ e $w = xy$.

    (a) Determine a matriz jacobiana (matriz das derivadas) $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y)}$.

    (b) Considere que $x = t^2$ e $y = 4t^2$. Determine o vector $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$.

    (c) Usando a regra da cadeia, determine simultaneamente $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$.

11. Considere que a temperatura T num certo líquido depende da profundidade z e do tempo t, através da fórmula $T = e^{-t}z$.

    (a) Determine a taxa de variação da temperatura relativamente ao tempo, num ponto que se move no líquido, de modo que no instante t se encontre ao nível de profundidade $z = f(t)$.

    (b) Calcule a taxa de variação de temperatura considerada na alínea anterior quando $f(t) = e^t$.

12. Considere que a força E de um campo eléctrico no espaço varia com a posição (x,y,z) e com o tempo t através da fórmula $E = f(x,y,z)$. Determine a taxa de variação da força E, relativamente ao tempo, quando essa força é medida ao longo da hélice $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = t$.