Sinais e Sistemas

Transformada de *Fourier* de Tempo Discreto
DTFT
(1ª parte)

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Introdução

- Nesta aula concluímos o estudo das ferramentas básicas de Análise de *Fourier*, introduzindo a Transformada de *Fourier* em Tempo Discreto - DTFT
- Como já foi visto anteriormente, há muitas semelhanças e analogias na análise de sinais de tempo contínuo e de tempo discreto
- Contudo, há também algumas diferenças importantes
  - Exemplo: A representação em série de um sinal periódico em tempo discreto é uma série finita, em oposição à representação em série infinita necessária para sinais periódicos em tempo contínuo

Introdução

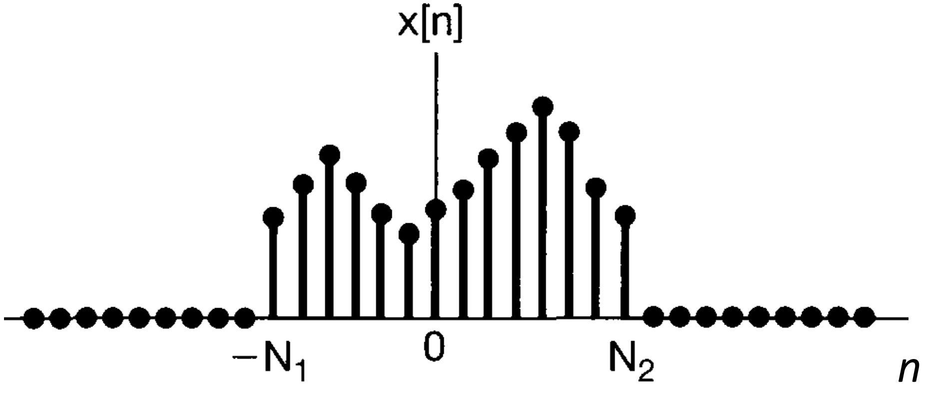
- Serão aproveitadas as semelhanças entre a análise de *Fourier* em tempo contínuo e em tempo discreto
- Em particular, começamos por estender a descrição de sinais periódicos em série de *Fourier* para desenvolver uma representação da Transformada de *Fourier* para sinais aperiódicos em tempo discreto
- Em seguida será feita uma análise das propriedades e características da Transformada de *Fourier* em tempo discreto

Introdução

- No estudo da Transformada de *Fourier* de tempo contínuo vimos que os coeficientes da série para uma onda quadrada periódica em tempo contínuo podem ser vistos como amostras de uma envolvente que, à medida que o período aumenta, as amostras tornam-se cada vez mais espaçadas
- Esta propriedade sugeriu representar um sinal aperiódico $x(t)$ construindo primeiro um sinal periódico $x'(t)$ igual a $x(t)$ durante um período
- Quando esse período se aproximava do infinito, $x'(t)$ era igual a $x(t)$ e a representação da série de *Fourier* para $x'(t)$ convergia para a representação da Transformada de *Fourier* para $x(t)$

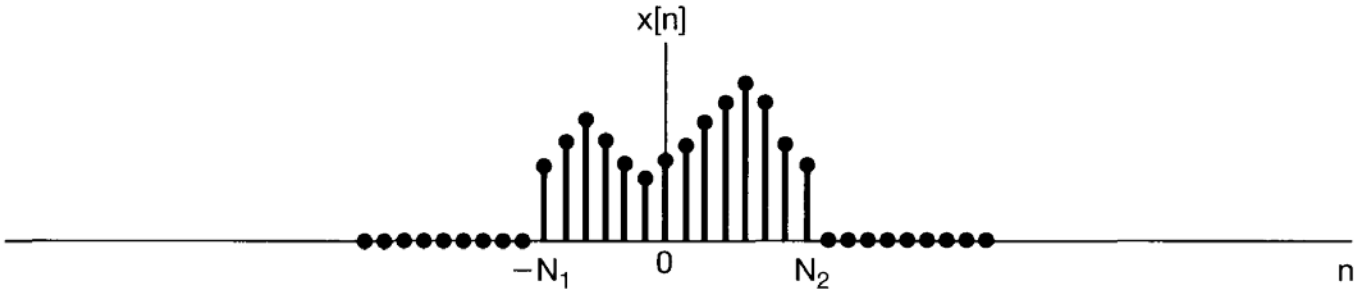
DTFT

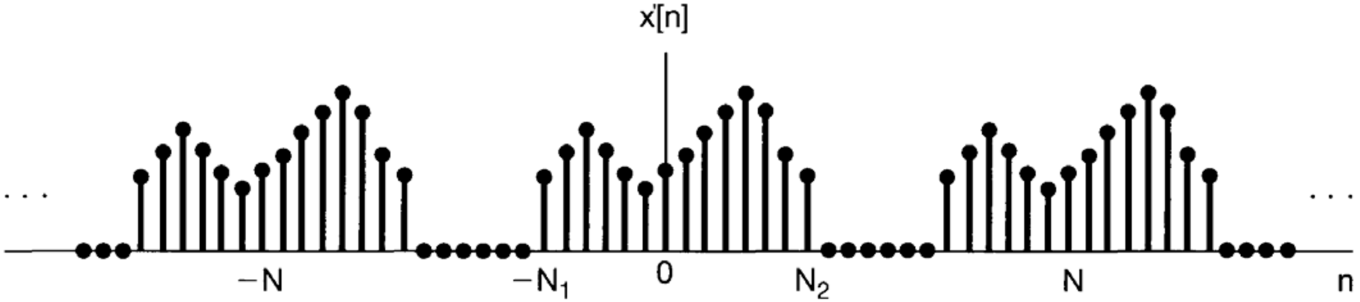
- Nesta aula, aplicamos um procedimento análogo a sinais de tempo discreto para desenvolver a representação da Transformada de *Fourier* para sequências aperiódicas de tempo discreto
- Seja $x[n]$ uma sequência genérica com duração finita, ou seja, para números inteiros N_1 e N_2, $x[n] = 0$ fora do intervalo $-N_1 \leq n \leq N_2$



DTFT

- A partir deste sinal aperiódico, podemos construir uma sequência periódica $x'[n]$ para a qual $x[n]$ é um período:





DTFT

- À medida que o período *N* aumenta, *x'*[*n*] é idêntico a *x*[*n*] durante um intervalo maior e, quando *N* --> ∞, *x'*[*n*] = *x*[*n*] para qualquer valor finito de *n*
- Considerando as expressões obtidas para a obtenção dos coeficientes da Série de *Fourier*:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

DTFT

- Como $x[n] = x'[n]$ durante um período, que inclui o intervalo $-N_1 \leq n \leq N_2$, é conveniente escolher os limites do somatório na equação de forma a incluir esse intervalo, para que $x'[n]$ possa ser substituído por $x[n]$
- Assim sendo:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

- onde no lado direito da equação consideramos que $x[n]$ é zero fora do intervalo $-N_1 \leq n \leq N_2$

DTFT

- Definindo agora a função:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- é possível ver que os coeficientes a_k são proporcionais às amostras de $X(e^{j\omega})$, isto é:

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$$

- onde $\omega_0 = 2\pi/N$ é o espaçamento das amostras no domínio da frequência

DTFT

- Combinando as equações:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \qquad a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$$

- fica:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

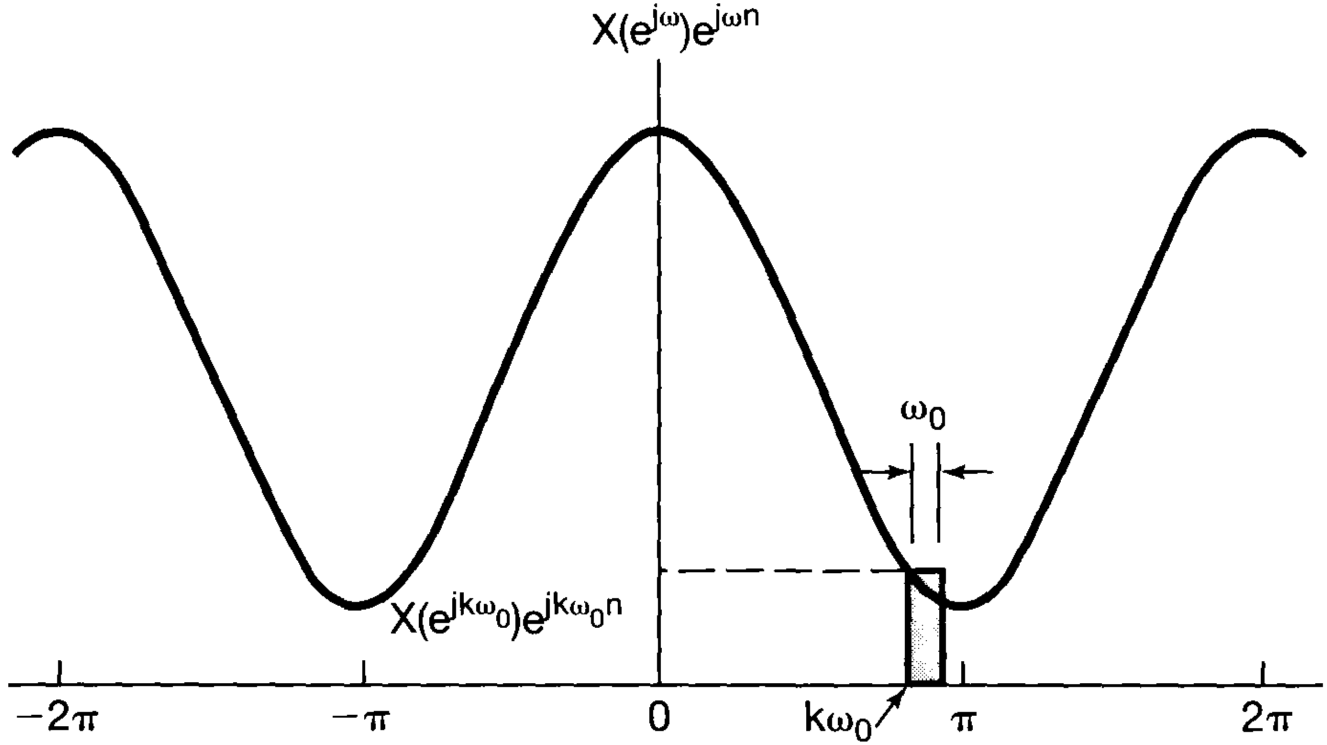
- Como $\omega_0 = 2\pi/N$ ou $1/N = \omega_0/2\pi$ a equação anterior fica:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N\rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$$

- à medida que N aumenta, ω_0 diminui e como N --> ∞ a equação anterior passa para um integral

DTFT

- Para melhor compreender estas manipulações considere-se $X(e^{j\omega}).e^{j\omega n}$ desenhado em baixo:



DTFT

- $X(e^{j\omega})$ é periódico em ω com o período 2π, e o mesmo ocorre com $X(e^{j\omega n})$
- O produto $X(e^{j\omega}).X(e^{j\omega n})$ será também periódico
- Cada termo no somatório representa a área de um retângulo de altura $X(e^{j\omega}).X(e^{j\omega n})$ e largura ω_0
- À medida que ω_0 --> ∞, a soma torna-se num integral
- Além disso, como a soma é realizada em N intervalos consecutivos de largura $\omega_0 = 2\pi/N$, o intervalo total de integração terá sempre uma largura de 2π

DTFT

- Deste modo, com N --> ∞, $x'[n] = x[n]$, a equação anterior fica:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega$$

- onde, como $X(e^{j\omega}).X(e^{j\omega n})$ é periódico com o período 2π, o intervalo de integração pode ser considerado como qualquer intervalo de comprimento 2π
- Assim, temos o seguinte par de equações:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

DTFT

- As 2 equações anteriores são as equações discretas homólogas às obtidas para as Transformadas de *Fourier* de Tempo Contínuo
- A função $X(e^{j\omega})$ é referida como a Transformada de *Fourier* em Tempo Discreto e o par de equações como o par de Transformadas de *Fourier* em Tempo Discreto

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$ --- Equação de Síntese

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$ --- Equação de Análise

DTFT

- Uma sequência aperiódica pode ser vista como uma combinação linear de exponenciais complexas
- Em particular, a equação de síntese é uma representação de $x[n]$ através de uma combinação linear de exponenciais complexas infinitesimalmente próximas em frequência, com amplitudes $X(e^{j\omega}).(d\omega/2\pi)$
- Por este motivo, à semelhança do que acontece em tempo contínuo, a Transformada de *Fourier* $X(e^{j\omega})$ é chamada frequentemente de espectro de $x[n]$, porque fornece informações sobre como $x[n]$ é composto de exponenciais complexas em diferentes frequências

Exemplos de DTFTs

- Exemplo - 1: Considere o sinal:

$$x[n] = a^n u[n], \qquad |a| < 1$$

- Determine $X(e^{j\omega})$

- Solução:

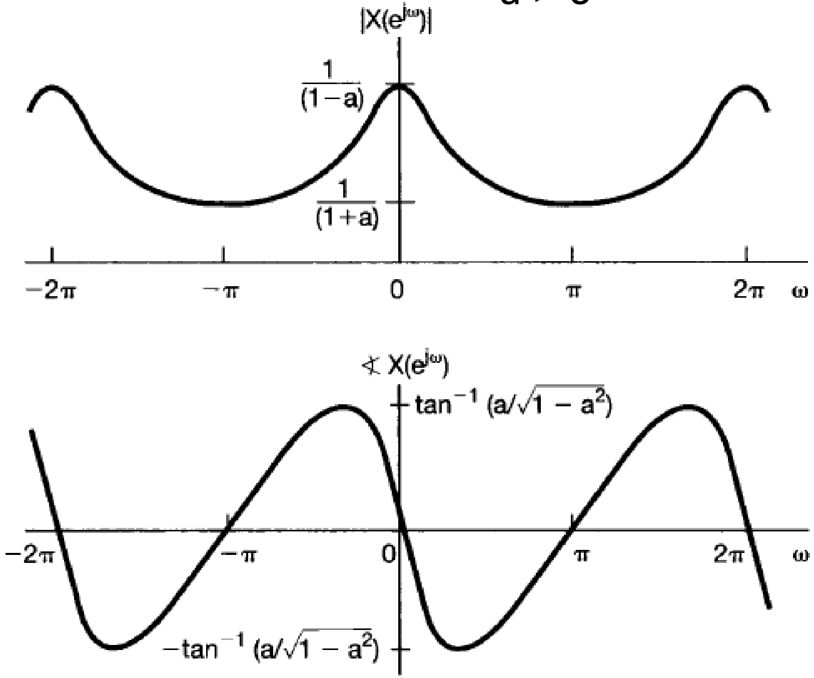
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

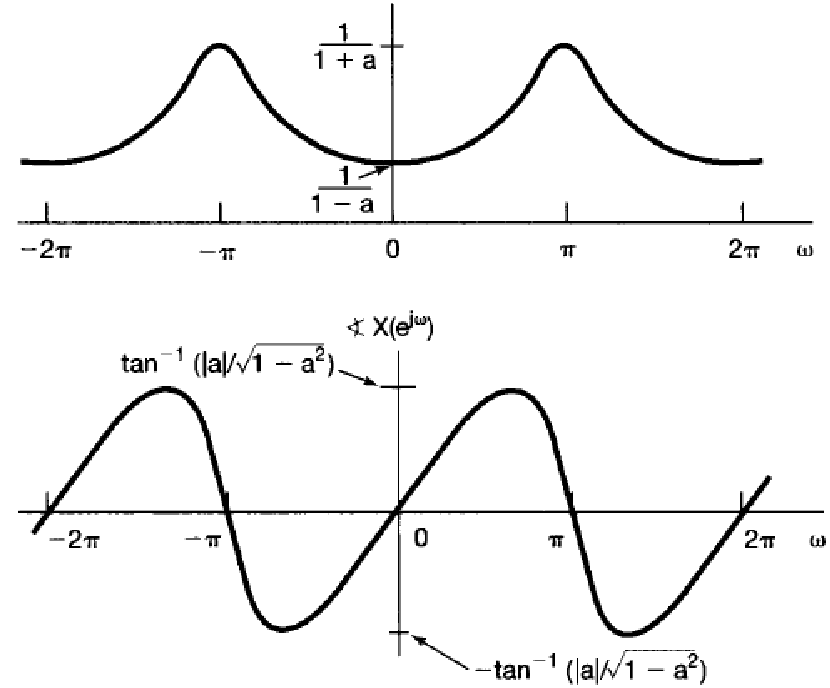
Exemplos de DTFTs

- Exemplo - 1
- Solução:

a > 0



a < 0



Exemplos de DTFTs

- Exemplo - 2: Considere o sinal:

$$x[n] = a^{|n|}, \qquad |a| < 1$$

- Determine $X(e^{j\omega})$

- Solução:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n}$$

Exemplos de DTFTs

- Exemplo - 2
- Solução:
- Fazendo a mudança de variável *m* = -*n* no 2º somatório, fica:

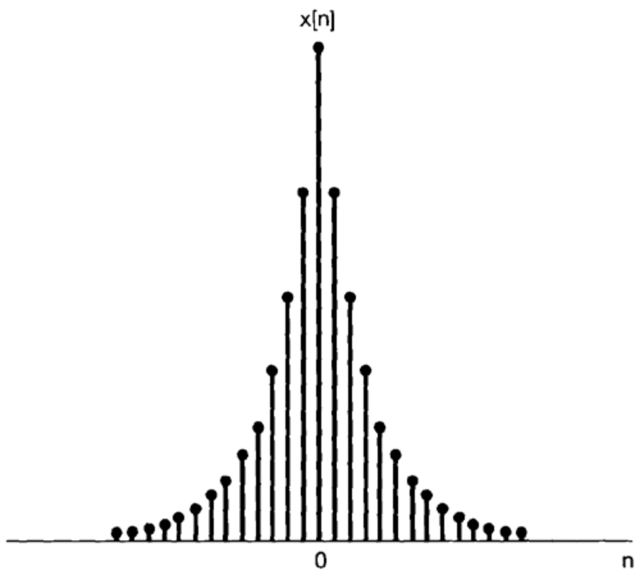
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\omega})^n + \sum_{m=1}^{\infty}(ae^{j\omega})^m$$

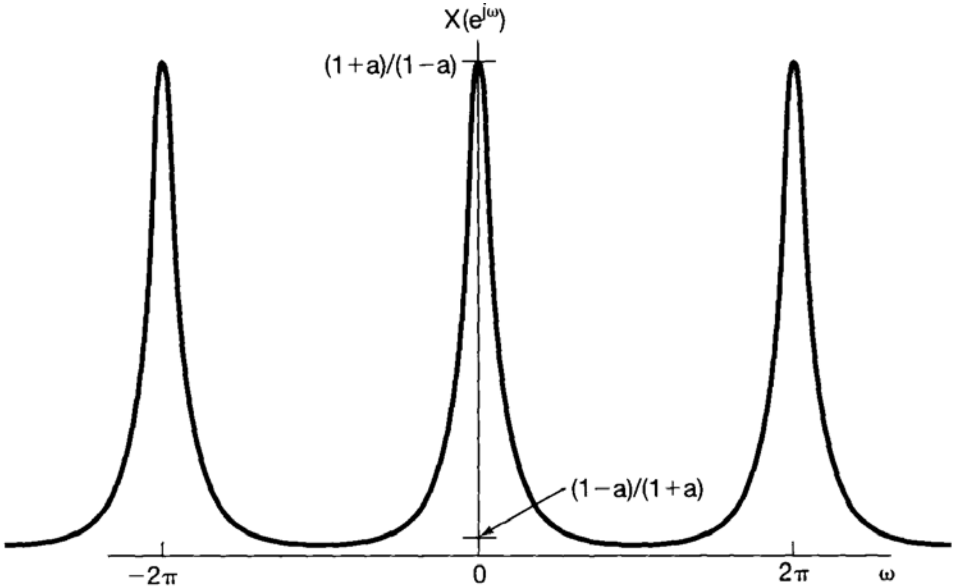
- Ambos os somatórios são séries geométricas infinitas, produzindo o resultado:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}$$
$$= \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

Exemplos de DTFTs

- Exemplo - 2
- Solução:
- Neste caso $X(e^{j\omega})$ é real e está representado na figura abaixo para valores de $0 < a < 1$





Exemplos de DTFTs

- Exemplo - 3: Considere o sinal:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

- Determine $X(e^{j\omega})$

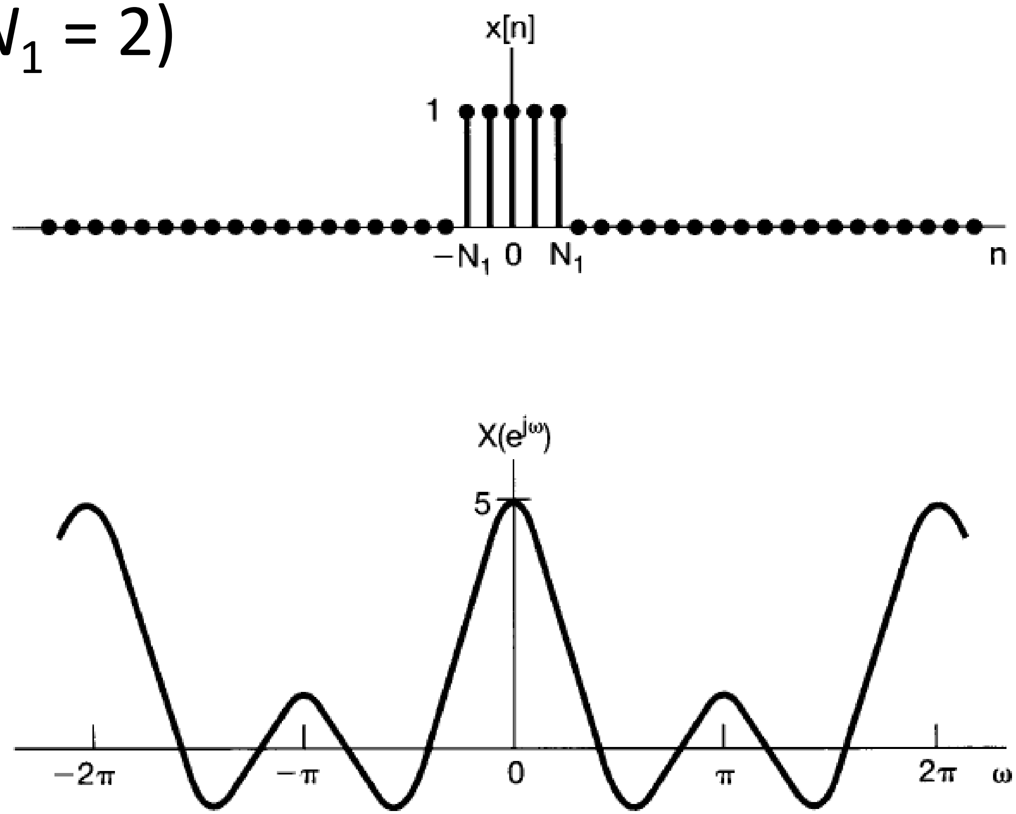
- Solução:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin \omega \left(N_1 + \frac{1}{2}\right)}{\sin(\omega/2)}$$

Exemplos de DTFTs

- Exemplo - 3:
- Solução (N_1 = 2)



Exemplos de DTFTs

- Exemplo – 3
- A expressão obtida é a versão em tempo discreto da função *sinc*, que aparece na transformada de *Fourier* do impulso retangular em tempo contínuo
- Uma diferença importante entre estas duas funções é que a função agora obtida é periódica, com período 2π, enquanto a função *sinc* é aperiódica

Condições de Convergência

- Embora o argumento usado para deduzir a DTFT tenha sido assumir que $x[n]$ era um sinal arbitrário mas com uma duração finita, as equações de análise e de síntese mantém-se válidas para uma grande parte de sinais de duração infinita (ex: exemplo 1 e 2)
- As condições em $x[n]$ que garantem a convergência do somatório são idênticas às condições de convergência para a Transformada de *Fourier* em tempo contínuo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

Sequência com soma finita

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Sequência com energia finita

Exemplos de DTFTs

- Exemplo - 4: Considere o impulso unitário $\delta[n]$ (*Dirac*):

$$x[n] = \delta[n]$$

- Determine $X(e^{j\omega})$

- Solução:

$$X(e^{j\omega}) = 1$$

- Tal como em tempo contínuo, o impulso unitário tem uma representação de Transformada de *Fourier* com contribuições iguais em todas as frequências

DTFT para sinais periódicos

- Tal como em tempo contínuo, os sinais periódicos em tempo discreto podem ser incorporados na DTFT, interpretando a transformada de um sinal periódico como um trem de impulsos no domínio da frequência
- Para determinar a sua representação, considera-se o sinal:

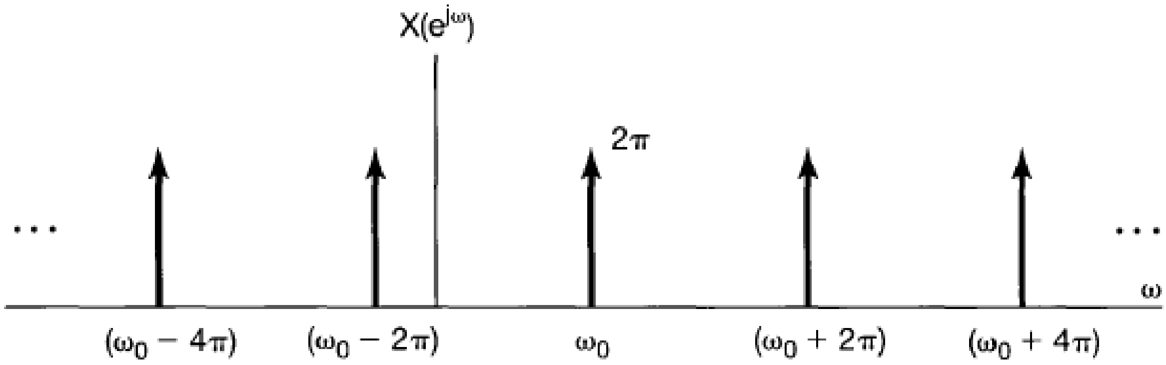
$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

- Em tempo contínuo, vimos que a TF pode ser interpretada como um impulso em $\omega = \omega_0$

DTFT para sinais periódicos

- No entanto, a DTFT deve ser periódica em ω com o período 2π
- Isto sugere que a DTFT de $x[n]$ deve ter impulsos em ω_0, $\omega_0 \pm 2\pi$, $\omega_0 \pm 4\pi$, ...

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$



DTFT para sinais periódicos

- Para verificar a validade desta expressão, podemos calcular a sua Transformada Inversa
- Substituindo a expressão anterior na Eq. de Síntese, fica:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)e^{j\omega n}\,d\omega$$

- Observe-se que qualquer intervalo de comprimento 2π inclui exatamente um impulso no somatório
- Portanto, se o intervalo de integração escolhido incluir o impulso localizado em $\omega_0 + 2\pi r$, então:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega = e^{j(\omega_0+2\pi r)n} = e^{j\omega_0 n}$$

DTFT para sinais periódicos

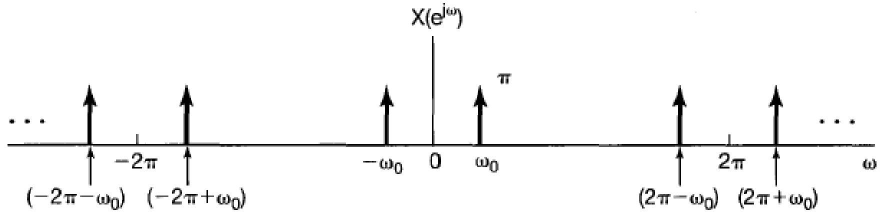
- Exemplo - 5: Considere o sinal periódico:

$$x[n] = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{5}$$

- Determine $X(e^{j\omega})$
- Solução:
- \- Usando a DTFT de $X(e^{j\omega_0 n})$:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi\,\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right)$$

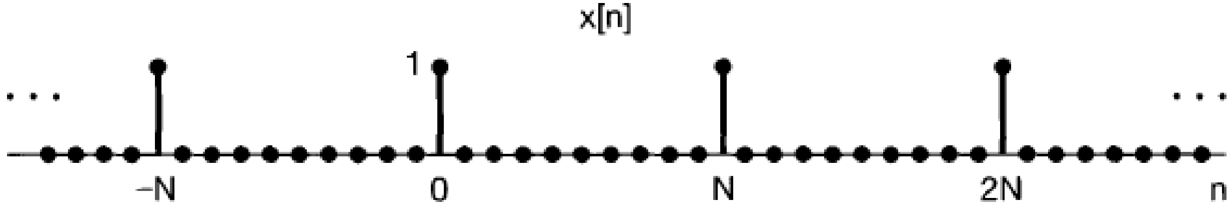
$$X(e^{j\omega}) = \pi\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi\,\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right), \qquad -\pi \le \omega < \pi,$$



DTFT para sinais periódicos

- Exemplo - 6: Considere o trem de impulsos:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$$



- Determine $X(e^{j\omega})$
- Solução:
- \- Os coeficientes da Série de *Fourier* são dados por:

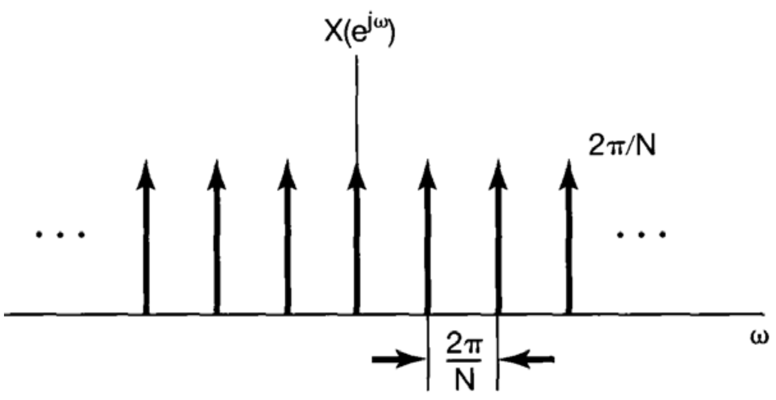
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

DTFT para sinais periódicos

- Exemplo - 6
- Solução:
- - Fazendo o intervalo do somatório: $0 \leq n \leq N - 1$, fica:

$$a_k = \frac{1}{N}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$



Propriedades da DTFT

- Tal como na TF em tempo contínuo, as propriedades da DTFT fornecem informações adicionais sobre a Transformada e, além disso, são úteis na redução da complexidade de avaliação de Transformadas e Transformadas Inversas
- Iremos observar algumas das semelhanças e diferenças entre as propriedades da TF em tempo contínuo e em tempo discreto
- Para simplificar, quando uma propriedade da DTFT for essencialmente idêntica à sua análoga em tempo contínuo, será apenas enunciada e não demonstrada

Propriedades da DTFT

- Será usada uma notação idêntica à usada aquando do estudo da Transformada de *Fourier* de tempo contínuo
- Será indicado o "par" do sinal com a sua Transformada:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$x[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

Propriedades da DTFT

- **Periodicidade da DTFT**

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

- **Linearidade da DTFT**

$$x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega}) \qquad x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\omega})$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

Propriedades da DTFT

- **Deslocamento no Tempo e na Frequência**

$$x[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

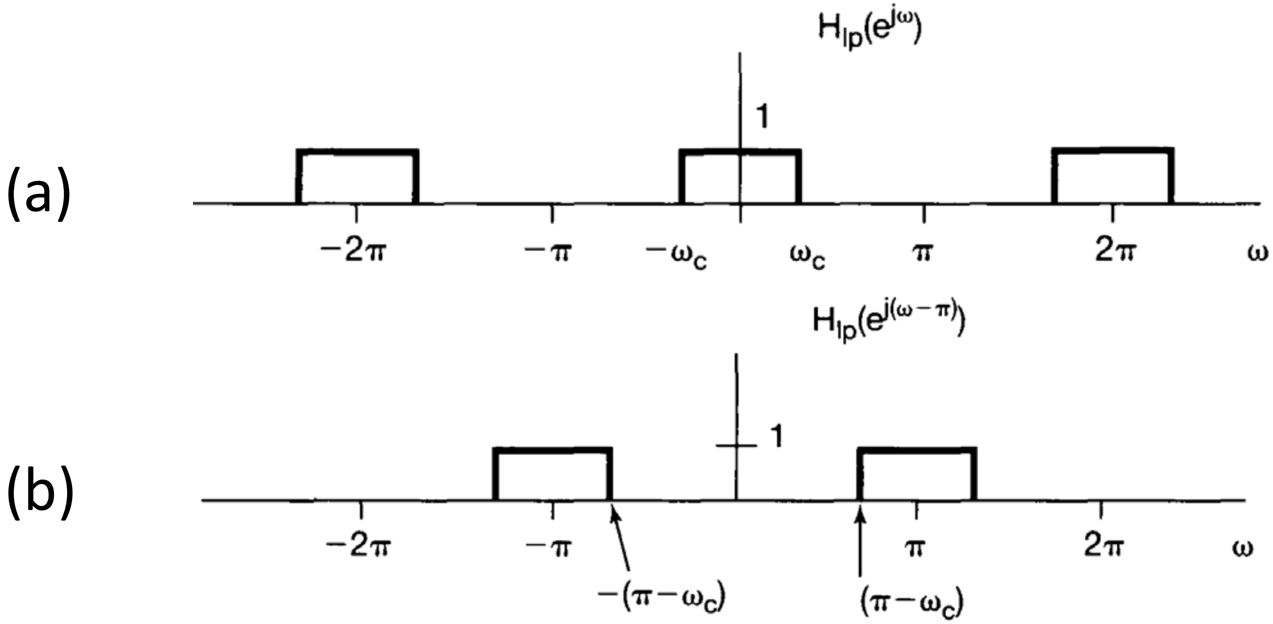
$$x[n-n_0] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

- Como resultado das propriedades da periodicidade e do deslocamento na frequência da DTFT, existe uma relação especial entre os filtros passa-baixo e passa-alto ideais

Propriedades da DTFT

- Exemplo - 7: As 2 figuras representam, respectivamente, a resposta em frequência de um LPF com uma frequência de corte ω_c, e a mesma resposta deslocada de meio período



Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Propriedades da DTFT

- Exemplo - 7: Como as altas frequências em tempo discreto estão concentradas perto de π (e outros múltiplos ímpares de π), o filtro na figura (b) é um filtro passa-alto ideal com frequência de corte $\pi - \omega_c$, ou seja:

$$H_{\mathrm{hp}}(e^{j\omega}) = H_{\mathrm{lp}}(e^{j(\omega-\pi)})$$

- Como já foi visto, a resposta em frequência de um sistema LTI é a TF da resposta ao impulso do sistema

$$h_{\mathrm{hp}}[n] = e^{j\pi n} h_{\mathrm{lp}}[n] = (-1)^n h_{\mathrm{lp}}[n]$$

Propriedades da DTFT

- **Conjugado e simetria conjugada**

$$x[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$x^*[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X^*(e^{-j\omega})$$

- Como consequência:

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$ => $x[n]$ real

Propriedades da DTFT

- **Diferença e Acumulação**
  - Esta propriedades correspondem, em tempo discreto, às suas análogas da Derivação e Integração em tempo contínuo
- Seja $x[n]$ um sinal com TF igual a $X(e^{j\omega})$
- A partir das propriedades de linearidade e deslocamento no tempo, o par de TF para o sinal $x[n] - x[n - 1]$ é dado por:

$$x[n] - x[n-1] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

Propriedades da DTFT

- **Diferença e Acumulação**
- Seja agora $y[n]$ o sinal:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$$

- Como $y[n] - y[n-1] = x[n]$, podemos concluir que a DTFT de $y[n]$ deve estar relacionada com a DTFT de $x[n]$ pela divisão por $(1 - e^{-j\omega})$

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

- O trem de impulsos no lado direito da equação reflete o valor médio ou DC que pode resultar do somatório

Propriedades da DTFT

- Exemplo - 8: Usando a propriedade da acumulação determinar a DTFT do degrau unitário *x*[*n*] = *u*[*n*] e sabendo que:

$$g[n] = \delta[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G(e^{j\omega}) = 1$$

- É sabido que:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} g[m]$$

- Aplicando a DTFT a ambos os lados da equação, fica:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-e^{-j\omega})}G(e^{j\omega}) + \pi G(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k).$$

Propriedades da DTFT

- **Inversão no tempo**
- Seja agora $x[n]$ um sinal com espectro $X(e^{j\omega})$ e a transformada $Y(e^{j\omega})$ de $y[n] = x[-n]$
- Através da equação de análise temos:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]e^{-j\omega n}$$

- Substituindo $m = -n$ na equação anterior, obtemos:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-j(-\omega)m} = X(e^{-j\omega})$$

$$\boxed{x[-n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega})}$$

Propriedades da DTFT

- **Expansão no tempo**
- Devido à natureza discreta da variável tempo para sinais de tempo discreto, a relação entre a escala de tempo e frequência em tempo discreto assume uma forma um pouco diferente da sua análoga em tempo contínuo
- Especificamente, foi deduzida a propriedade de tempo contínuo

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

- No entanto, se tentarmos definir o sinal $x[an]$, teremos dificuldades se a não for um número inteiro

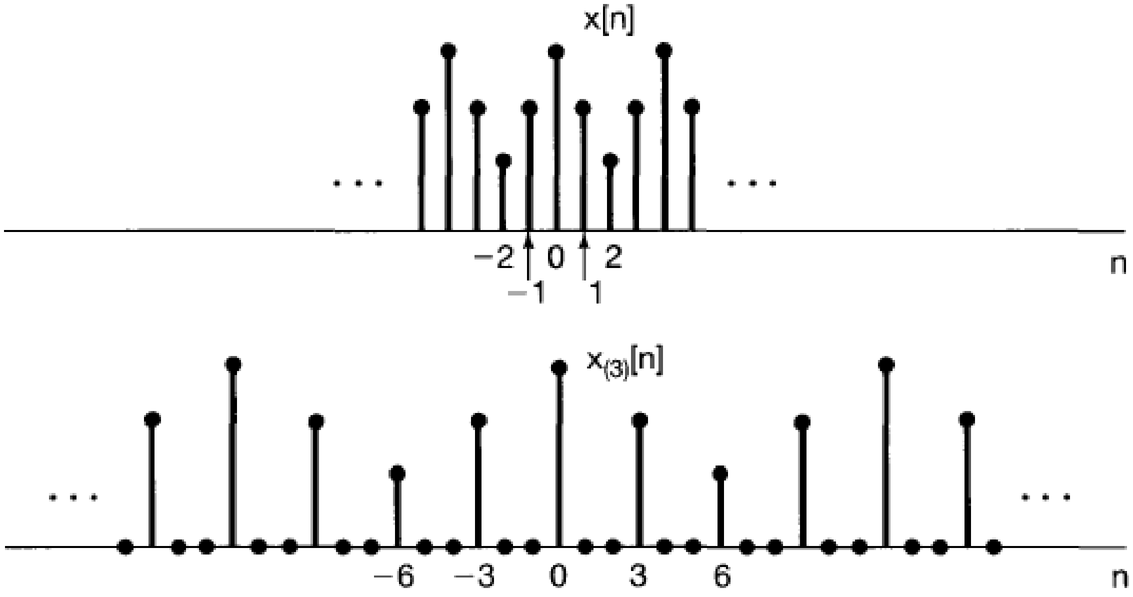
Propriedades da DTFT

- **Expansão no tempo**
- Não é possível expandir o sinal escolhendo um $a < 1$
- Por outro lado, se a for um inteiro, diferente de ± 1 (por exemplo) se considerarmos $x[2n]$ comprimimos o sinal original
- Ou seja, como n pode assumir apenas valores inteiros, o sinal $x[2n]$ consiste apenas nas amostras pares de $x[n]$
- Existe um resultado que se aproxima da equação em tempo contínuo

Propriedades da DTFT

- **Expansão no tempo**
- Seja *k* um número inteiro positivo e o sinal:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n \text{ is a multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } k \end{cases}$$



Propriedades da DTFT

- **Expansão no tempo**
- Para k = 3, $x_{(k)}[n]$ é obtido de $x[n]$ colocando k - 1 zeros entre valores sucessivos do sinal original
- Intuitivamente, podemos pensar em $x_{(k)}[n]$ como uma versão mais lenta de $x[n]$
- Como $x_{(k)}[n]$ é igual a 0, a menos que n seja um múltiplo de k, ou seja, a menos que $n = rk$, vemos que a DTFT de $x_{(k)}[n]$ é dada por:

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk]e^{-j\omega rk}$$

Propriedades da DTFT

- **Expansão no tempo**
- Além dissso, como $x_{(k)}[rn] = x[r]$ a expressão anterior fica:

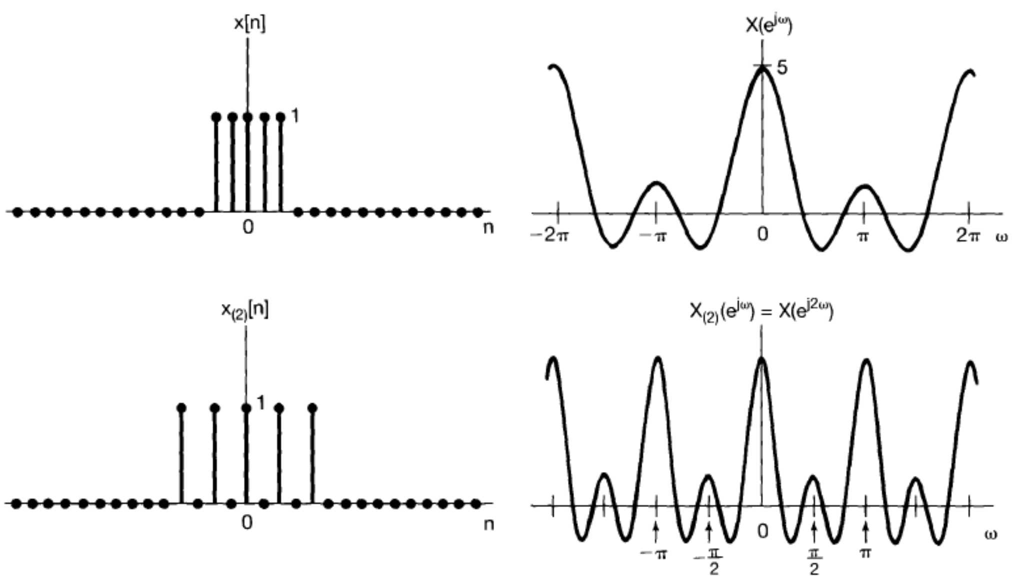
$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r]e^{-j(k\omega)r} = X(e^{jk\omega})$$

$$\boxed{x_{(k)}[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{jk\omega})}$$

- Observar que, à medida que o sinal se espalha ou comprime, a velocidade ao assumir $k > 1$, a sua DTFT é compactada ou alargada

Propriedades da DTFT

- **Expansão no tempo**
- Por exemplo, como $X(e^{j\omega})$ é periódico no período 2π, $X(e^{jk\omega})$ é periódico no período $2\pi/k$
- Para um impulso retangular:



Propriedades da DTFT

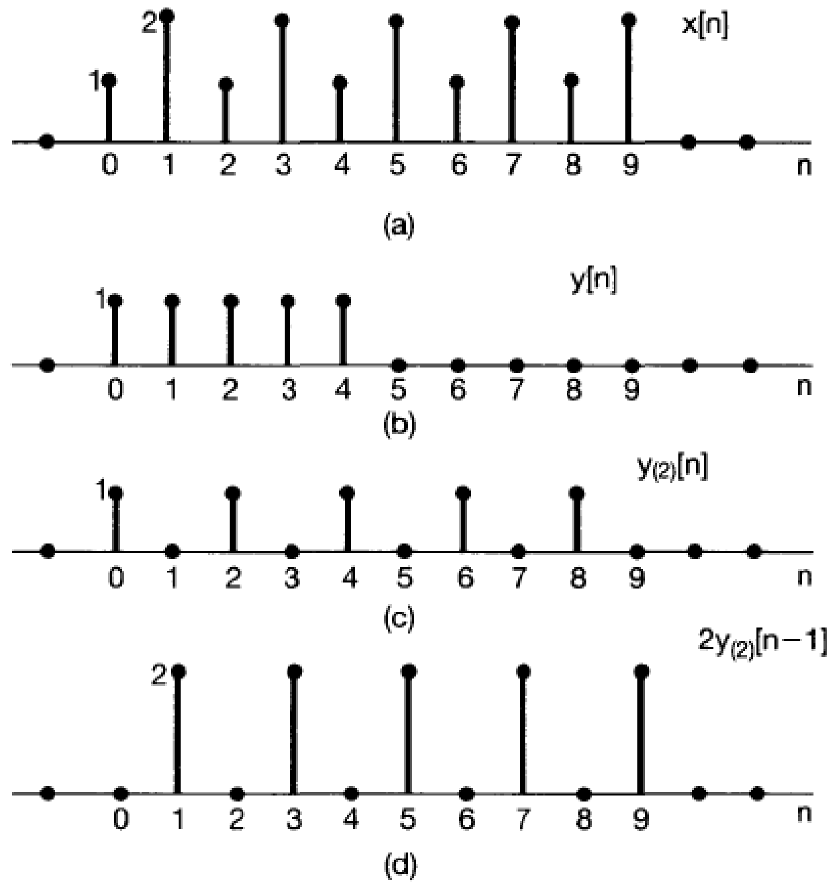
- Exemplo - 9: Como ilustração da utilidade da propriedade de expansão de tempo na determinação de DTFTs, consideremos a sequência $x[n]$ exibida no slide seguinte
- Esta sequência pode estar relacionada com a sequência mais simples $y[n]$ mostrada também a seguir
- Em particular:

$$x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n-1]$$

$$y_{(2)}[n] = \begin{cases} y[n/2], & \text{if } n \text{ is even} \\ 0, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

Propriedades da DTFT

- Exemplo - 9:



Propriedades da DTFT

- Exemplo – 9
- Observar que $y[n] = g[n - 2]$, onde $g[n]$ é um impulso retangular, considerado no Ex. - 3 (com $N_1 = 2$)
- Do Ex. - 3 e da propriedade de translação no tempo, vemos que:

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

- Em seguida:

$$y_{(2)}[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j4\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)} \qquad 2y_{(2)}[n-1] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} 2e^{-j5\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega}(1 + 2e^{-j\omega})\left(\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}\right)$$

Propriedades da DTFT

- **Diferenciação na frequência**
- Considerando novamente:

$$x[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

- Se usarmos a definição de $X(e^{j\omega})$ na equação de análise e diferenciarmos ambos os lados, obteremos:

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jnx[n]e^{-j\omega n}$$

- O lado direito da equação anterior é a DTFT de j.*n*.*x*[*n*]
- Multiplicando ambos os lados por j, vemos que:

$$\boxed{nx[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}}$$

Bibliografia

- Oppenheim, A.V. , Willsky, A.S. and Young, I.T., Signals and Systems, Prentice- Hall Signal Processing Series, 1983