Teste D – Correcção

Parte I

1. Qualquer circuito linear em regime sinusoidal a uma dada frequência pode ser representado por um equivalente constituído por uma fonte de tensão (sinusoidal), com determinada amplitude e fase inicial, em série com uma impedância equivalente. A fonte equivalente deve corresponder ao sinal de tensão observado nos terminais A-B com estes em aberto. A impedância (Z_{TH}) complexa corresponde á impedância observada da saída com todas as fontes independentes anuladas (fontes de tensão ➔ curto circuitadas; fontes de corrente ➔ circuito aberto).

2.
   a)

i) A média do sinal é de -5 v

ii) No instante 0 a tensão está no máximo

iii) No instante $\frac{T}{12}$ a tensão vale 0

iv) O período é T

$v_{(t)} = v_u + A\cos(\omega t + \theta)$

i) $v_u = -5$
ii) $\theta_0 = 0$
iii) $\omega = 2\pi / T$
iv) $v_{(T/12)}=0$

$$\begin{cases} v_{(t)} = -5 + A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ v_{(T/12)}=0 \end{cases}$$

$$0 = -5 + A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{12}\right) \Leftrightarrow A = \frac{5}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{5}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore v(t) = -5 + \frac{10\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

b)

Apenas os coeficientes C_0 (média), C_1 e C_{-1} serão não nulos. O C_0 é não nulo porque a média é $\neq 0$; C_1 e C_{-1} serão os responsáveis por criar uma sinusóide real. Todos os outros C_2, C_{-2}, C_3, C_{-3} …. Serão zero.

c)

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T v^2{}_{(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[-5 + A.\cos(\omega t)\right]^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T 25 - 10A.\cos(\omega t) + A^2.\cos^2(\omega t)dt$$

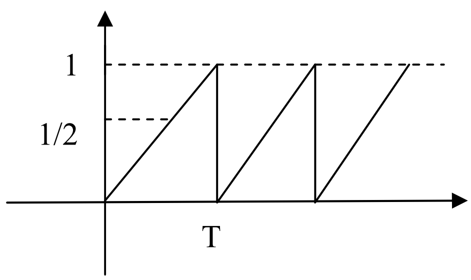
$$= \frac{25\cancel{T}}{\cancel{T}} + 0 + \frac{A^2}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt = 25 + \frac{A^2}{T}(\frac{T}{2} - 0) = 25 + \frac{A^2}{2}$$

$$\therefore \overline{P} = 25 + \frac{100}{2\times 3} = 25 + 16,(6) = 41,(6)W$$

$$v_{ef} = \sqrt{\overline{P}} = 6,45497$$

3.

Trata-se de um sinal periódico de tipo “ dente de serra”



a)

$T_0 = 0,5m.s \Rightarrow f_0 = 2KHz$

$2f_0 = 4KHz > f_c \Rightarrow$ Todos os harmónicos a partir do termo n=2, inclusivé, serão cortados pelo filtro.

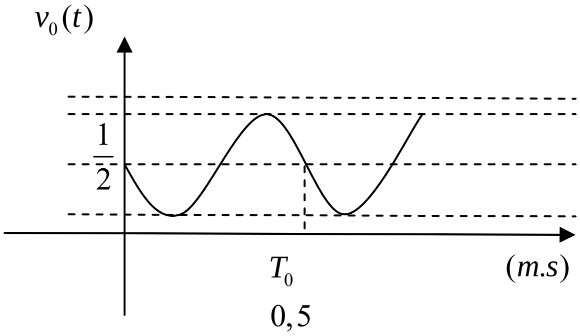
$$\therefore v_0(t) = c_0 + c_{-1}.e^{j2\pi f_0(n1)t} + c_1.e^{j2\pi f_0(t1)t}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{j}{2\pi} e^{-j2\pi \frac{t}{t_0}} + \frac{j}{2\pi} e^{j2\pi \frac{t}{t_0}} = \frac{1}{2} + \frac{j}{2\pi} \underbrace{(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})}_{2j\sin\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{j}{2\pi} 2j\sin(2\pi \frac{t}{t_0})$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin(2\pi \frac{t}{t_0})$$

b) Pela expressão analítica acima, temos:



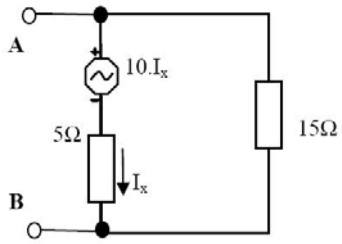
4.

A análise fasorial será aplicável se ambas as fontes tiverem a mesma frequência angular ω, posto que assim se poderão definir os respectivos fasores: vectores girantes uma dada frequência $\rightarrow$ ω. Não é necessário que estejam em fase, que sejam do mesmo tipo (tensão ou corrente) ou tenham a mesma amplitude.

Parte II

5.

Circuito I



$V_{TH} = 0$, porque não há qualquer fonte independente interna

Pode-se determinar R_{TH} por duas vias:

R_{TH}

$$\begin{cases} V_0 = 15.(I_o - I_x) \\ V_0 = 10I_X + 5I_x \end{cases}$$

$$= 15I_x$$

A fonte 10 I_x é como uma resistência de valor 10

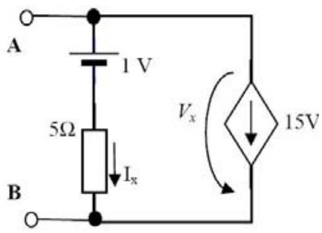
$$\therefore V_0 = 15(I_0 - \frac{V_0}{15}) \Leftrightarrow \frac{V_0}{15} + \frac{V_0}{15} = I_0$$

$$R_{TH} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}}$$

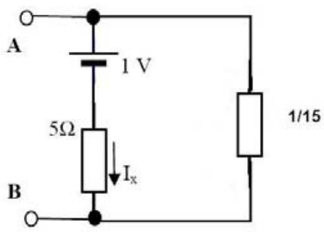
$$\therefore R_{TH} = 15//(10+5) = 15//15$$

$$= 7,5ohm$$

Circuito 2



<=>



$$\frac{v_x}{15v_x} = \frac{1}{15}\Omega$$

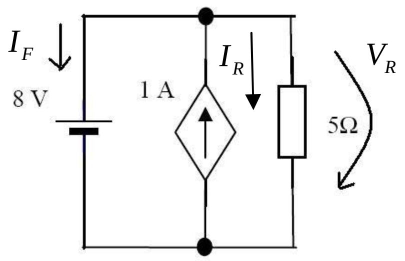
$$V_{TH} = 1 \times \frac{\frac{1}{15}}{5 + \frac{1}{15}}$$

$$R_{TH} = 5//\frac{1}{15} \cong \frac{1}{15}\Omega$$

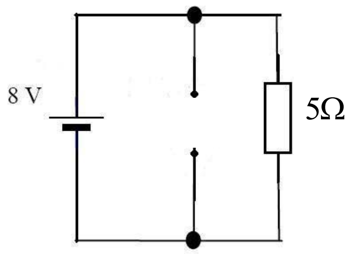
$$= \frac{1}{76}v$$

6.

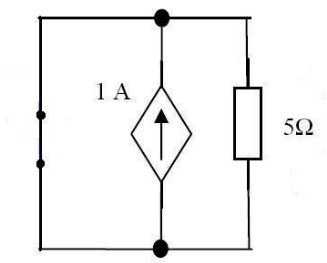
Circuito1



$<=>$



$+$

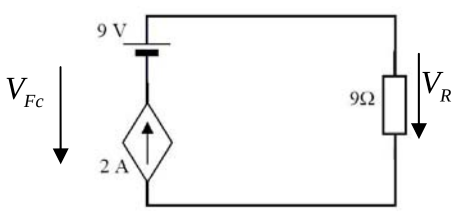


$$I_F = \sum I_F = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$$
$$I_R = \frac{8}{5}$$
$$U_R = 8$$

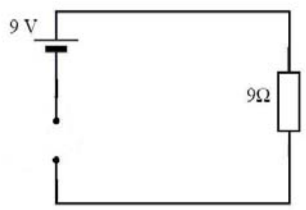
$$I_F = -I_{R1} = -\frac{8}{5} \qquad I_{R1} = \frac{8}{5}A \qquad U_{R1} = 8$$

$$I_R = 1 \qquad I_{R2} = 0 \qquad U_{R2} = 0$$

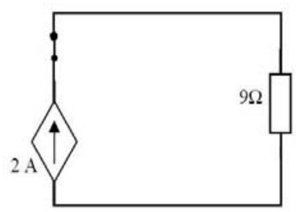
Circuito2



$<=>$



$+$



$$V_{Fc1} = -9$$
$$I_{R1} = 0$$
$$V_{R1} = 0$$

$$V_{Fc1} = 9 \times 2 = 18v$$
$$I_{R2} = 2$$
$$V_{R2} = 18v$$

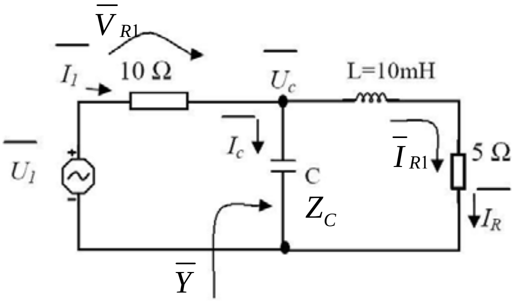
$$V_{Fc} = \sum V_{Fc} = V_{Fc1} + V_{Fc2} = -9 + 18 = 9v$$
$$I_R = \sum I_R = I_{R1} + I_{R2} = 2$$
$$V_R = \sum V_R = V_{R1} + V_{R2} = 18v$$

7.

a)

$$\overline{Z}_{RL} = 5 + 5j = 5\sqrt{2}\angle 45^{o}$$

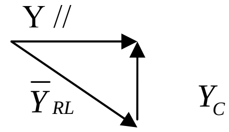
$$\overline{Y}_{RL} = \frac{1}{\overline{Z}_{RL}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\angle -45^{o}$$



A admitância do condensador deve ser tal que somada a Y_{RL} (por estar em paralelo com esta) dê uma impedância real. Assim teremos Y_C = - Im(Y_{RL})

$$Y_C = \frac{1}{5\sqrt{2}}.\sin(45^{o})$$

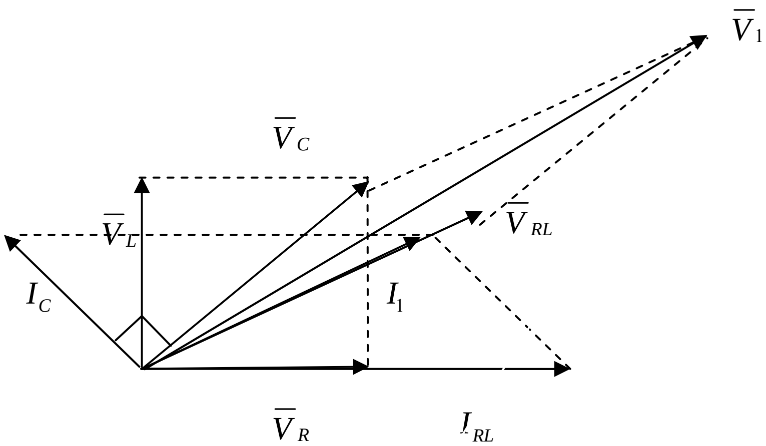
$$= \frac{1}{5\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{10}\Omega^{-1}$$



$$\left|\overline{Z}_C\right| = 10 \Rightarrow Z_C = \frac{10}{j} \Rightarrow \frac{1}{\omega c} = 10$$

$$\therefore C = \frac{1}{10 \times 10^{3}} = 100\mu F$$

b)



c)

Vamos começar por arbitrar um valor para $I_{RL} = 1\ \angle 0$. Depois obteremos valores virtuais para todos os outros fasores de acordo com as equações apresentadas em 7.a. No fim, vamos tomar o valor dado para V_1 e corrigir as fases e módulos de todos os fasores.

	Virtual	Real
I_{RL}	$1\angle 0$	$2\angle 15^o$
V_R	$5\angle 0$	$10\angle 15^o$
V_L	$5\angle 90^o$	$10\angle 105^o$
V_C	$5\sqrt{2}\angle 45^o$	$10\sqrt{2}\angle 60^o$
I_C	$\frac{5\sqrt{2}}{10}\angle 135^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle 135^o$	$\sqrt{2}\angle 150^o$
$I_1=I_C+I_{RL}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}j = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}j = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^o$	$\sqrt{2}\angle 60^o$
$V_{R1}=10I_1$	$5\sqrt{2}\angle 45^o$	$10\sqrt{2}\angle 60^o$
$V_1=V_{R1}+V_C$	$10\angle 45^o$	$20\angle 60^o$

$K = 2$

$\Delta\theta = +15^o$

Comparando o V_1 virtual com o V_1 dado no enunciado, reparamos que para o valor virtual ser igual ao real temos de multiplicar por um k=2 e somar um $\Delta\theta = +15^o$ à fase. Aplicamos esta transformação a todos os fasores.

8. O circuito é constituído por uma malha fechada simples cuja equação de malha será:

$$v(t) = v_R(t) + v_C(t)$$

Tratando-se de uma equação diferencial linear de primeira ordem, a resposta natural, obtida numa situação de hipotética eliminação da fonte, vai ser:

$$v_n(t) = A.e^{-t/\tau}$$

com:

$$\tau = R.C$$

Para o estudo da resposta forçada vamos precisar de v_{cf} , v'_{cf} :

$$v_{cf}(t) = k_1.\cos(\omega t) + k_2.\sin(\omega t) + k_3$$
$$v'_{cf}(t) = -k_1\omega.\sin(\omega t) + k_2\omega.\cos(\omega t)$$

e precisamos também da expressão de $v(t)$.

$$v(t) = 1 - \cos(\omega t)$$

Retomando a nossa equação da malha, podemos agora rescrevê-la nesta forma

$$v(t) = RCv'_{cf}1 + v_{cf}$$

Substituindo as expressões já obtidas acima teremos,

$$1 - \cos(\omega t) = RC\left[-k_1\omega.\sin(\omega t) + k_2\omega.\cos(\omega t)\right] + k_1\cos(\omega t) + k_2.\sin(\omega t) + k_3$$

Para os dois membros das equações obedecerem à igualdade, os coeficientes do seno, do coseno e o termo não sinusoidal devem ser igualados membro a membro.

$$\boxed{\omega rc = 1} \qquad \begin{matrix} (..) \\ \cos \\ \sin \end{matrix} \quad \begin{cases} k_3 = 1 \\ -1 = k_2.\omega rc + k_1 \\ 0 = -k_1.\omega rc + k_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_3 = 1 \\ k_1 = -1/2 \\ k_2 = -1/2 \end{cases}$$

Finalmente, recorremos às condições iniciais para determinar o valor do coeficiente da resposta natural A:

$$\boxed{v_C(0^-) = v_C(0^+) = -1}$$

$$-1 = A.e^0 + k_1 + k_3$$

$$A = -\frac{3}{2}$$

Obtemos finalmente a resposta completa:

$$v_c(t) = u(t).\left[-\frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}.\cos(\omega t) - \frac{1}{2}.\sin(\omega t) + 1\right]$$