

Álgebra Linear EE

Teste 1 2015/2016 - 19 de Novembro de 2015

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Nome: _____ N.º: _____

Curso: _____

8

Grupo I – Este grupo é constituído por oito afirmações que deve indicar se são verdadeiras ou falsas.

1. O conjunto $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - z\}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 . V F

2. A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ é invertível se e só se $b = 0$. V F

3. Os vetores $(a, 4)$, $(4, 1)$, $(1, a)$ são linearmente independentes em \mathbb{R}^2 para qualquer que seja o valor de a . V F

4. Os vetores $(1, 2)$, $(3, 4)$ e $(0, 1)$ são geradores de \mathbb{R}^2 . V F

5. A função $f(x, y) = y^2$ não é linear. V F

6. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 1 & i \end{bmatrix}$. Então $A^T B^H = \begin{bmatrix} -i+1 & 1-4i \\ -2i+4 & 2-2i \end{bmatrix}$.

V **F**

7. A expressão $(AB^T + AC)^T$ pode ser escrita como $(B + C^T)A^T$.

V F

$$(AB^T)^T + (AC)^T = (B^T)^T A^T + C^T A^T = \\ = BA^T + C^T A^T = (B + C^T)A^T$$

8. A matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é ortogonal quando $b = -1$.

V F

12

Grupo II – Em cada uma das perguntas seguintes, responda sem apresentar cálculos.

3 1. Considere o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y + z\}$.

2 1.1 Determine uma base de S e calcule a sua dimensão.

base: $\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$; $\dim(S) = 2$

1 1.2 Determine um sistema gerador de S constituído por um conjunto de vetores linearmente dependentes.

$\langle (2, 1, 0), (1, 0, 1), v \rangle$ em que v é um qualquer vetor de S exceto $(2, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$, por ex.

$\langle (2, 1, 0), (1, 0, 1), (0, -1/2, 1) \rangle$

⑤ 2. Considere a matriz $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2 2.1 Reduza a matriz B a uma matriz triangular superior.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1-4c \end{pmatrix}$$

↑ 2.2 Determine os valores de c para os quais a matriz tem inversa.

$$c \neq 1/4$$

2 2.3 Para $c=0$, determine a inversa de B .

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

④ 3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

2 3.1 Reduza a matriz A a uma matriz triangular superior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 9/2a + 1 \end{bmatrix}$$

1 3.2 Diga para que valores de a a característica da matriz A é 2.

$$a = -2/9$$

1 3.3 Diga para que valores de a a matriz A tem inversa.

$$a \neq -2/9$$

Álgebra Linear EE

Teste1 2015/2016 - 19 de Novembro de 2015

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Nome: _____ **Nº:** _____

Curso: _____

8 Grupo I – Este grupo é constituído por oito afirmações que deve indicar se são verdadeiras ou falsas.

1. O conjunto $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + 1\}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .

V **(F)**

2. A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ é invertível se e só se $b \neq 0$

CV **F**

3. Os vetores $(a, 4)$, $(4, 1)$, $(1, a)$ não são linearmente independentes em \mathbb{R}^2 para qualquer que seja o valor de a .

V **F**

4. A função $f(x, y) = y^2 + 1$ não é linear.

V F

5. Os vetores $(1,2)$; $(3,4)$ e $(0,1)$ são geradores de \mathbb{R}^2 .

V F

$$-1 \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c(A)=3 \text{ se } b \neq 0$$

6. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 1 & i \end{bmatrix}$. Então $A^T B^H = \begin{bmatrix} -i+8 & 1-4i \\ -2i+4 & 2-2i \end{bmatrix}$.

☒ V ☐ F

7. A expressão $(AB^T + AC)^T$ pode ser escrita como $A^T(B + C^T)$

☐ V ☒ F

8. A matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é ortogonal quando $a = -1$.

☒ V ☐ F

12

Grupo II – Em cada uma das perguntas seguintes, responda sem apresentar cálculos.

3 1. Considere o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - z\}$.

2 1.1 Determine uma base de S e calcule a sua dimensão.

base: $\{(1, 1, 0); (-1, 0, 1)\}$; $\dim(S) = 2$

1 1.2 Determine um sistema gerador de S constituído por um conjunto de vetores linearmente dependentes.

$\langle (1, 1, 0); (-1, 0, 1); (0, 1, 1) \rangle$ em que V é um qualquer vetor de S exceto $(1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$; por ex:

$\langle (1, 1, 0); (-1, 0, 1); (0, 1, 1) \rangle$

5) 2. Considere a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2 2.1 Reduza a matriz B a uma matriz triangular superior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1-2c \end{pmatrix}$$

1 2.2 Determine os valores de c para os quais a matriz tem inversa.

$$c \neq -1/2$$

2 2.3 Para $c=0$, determine a inversa de B .

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4) 3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2 3.1 Reduza a matriz A a uma matriz triangular superior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}a + 1 \end{bmatrix}$$

| 3.2 Diga para que valores de a a característica da matriz A é 2.

$$a = -3/2$$

| 3.3 Diga para que valores de a a matriz A tem inversa.

$$a \neq -3/2$$

Álgebra Linear EE

Teste 2 2015/2016 - 13 de Janeiro de 2016

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Nome: _____ N.º: _____

8

Grupo I – Este grupo é constituído por oito afirmações que deve indicar se são verdadeiras ou falsas.

1. O sistema $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-2z=0 \\ 2x-3z=0 \end{cases}$ tem apenas a solução trivial. V **F**

2. Os vetores próprios da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ associados ao valor próprio $\lambda = 0$ são da forma $(-2\alpha, \alpha)$ com $\alpha \neq 0$. **V** F

3. Toda matriz da forma $\begin{bmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ c & f & c \end{bmatrix}$, $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tem determinante nulo. **V** F

4. Os valores próprios da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ são $\lambda(B) = 1 \pm \sqrt{6}$. **V** F

5. Seja A uma matriz de ordem 3 tal que $|A| = 3$. Se $B = 2A$ então $|B| = 24$. **V** F

6. Se A e B são duas matrizes quadradas então $|(A^T B)^T| = \frac{|A|}{|B|}$.

V **(F)**

7. O sistema
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + cx_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - cx_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$
 tem solução apenas quando $c \neq 1$.

(V) F

8. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, então $|A| \neq 0$ para qualquer valor de a .

V **(F)**

12 Grupo II – Em cada uma das perguntas seguintes, responda sem apresentar cálculos.

4 1. Considere o sistema
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ 2x - y + az = b \end{cases}$$

2 1.1 Para que valores de a e b o sistema é possível e indeterminado?

$$a = 2 \wedge b = 1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & b-1 \end{array} \right)$$

2 1.2 Calcule a solução do sistema quando $a = 3$ e $b = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

5 2. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$:

1 2.1 Escreva a equação característica associada a A .

$$(1-\lambda) [-1 + (3-\lambda)(1-\lambda)] = 0$$

2 2.2 Determine os valores próprios de A .

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 + \sqrt{2}, \lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$$

2 2.3 Determine os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda = 1$.

$$(0, \alpha, 0) ; \alpha \neq 0$$

3 3. Considere a matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$

15 3.1 Calcule o valor do determinante da matriz C , em função de a e b .

$$|C| = -2b - a + 3$$

1,5 3.2 Determine qual a relação entre a e b de forma que C seja invertível.

$$-2b - a + 3 \neq 0$$

Álgebra Linear EE

Teste 2 2015/2016 - 13 de Janeiro de 2016

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Nome: _____ N.º: _____

8

Grupo I – Este grupo é constituído por oito afirmações que deve indicar se são verdadeiras ou falsas.

1. Os vetores próprios da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ associados ao valor próprio $\lambda = 5$ são da forma $(\alpha, 2\alpha)$ com $\alpha \neq 0$. V (F)

2. O sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases}$ tem mais do que uma solução. (V) F

3. Toda matriz da forma $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$, $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tem determinante não nulo. V (F)

4. Os valores próprios da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ são $\lambda(B) = 2 \pm \sqrt{5}$. (V) F

5. Seja A uma matriz de ordem 3 tal que $|A| = 2$. Se $B = 3A$ então $|B| = 6$. V (F)

6. O sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + cx_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - cx_3 + x_4 = 2 \end{cases}$ tem solução apenas quando $c = 1$ V ☒ F

7. Se A e B são duas matrizes quadradas então $|(B^T A)^T| = |A||B|$. ☒ V ☐ F

8. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, então $|A| \neq 0$ para $a \neq 1$. ☒ V ☐ F

12 Grupo II – Em cada uma das perguntas seguintes, responda sem apresentar cálculos.

☒ 4 1. Considere o sistema $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ 2x - y + az = b \end{cases}$

2 1.1 Para que valores de a e b o sistema é impossível?

$$a = 2 \wedge b \neq 1$$

2 1.2 Calcule a solução do sistema quando $a = 3$ e $b = 0$.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

5 2. Dada a matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$:

1 2.1 Escreva a equação característica associada a D .

$$(1-\lambda) \left[-1 + (3-\lambda)(1-\lambda) \right] = 0$$

2 2.2 Determine os valores próprios de D .

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2 + \sqrt{2}; \lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$$

2 2.2 Determine os vetores próprios de D associados ao valor próprio $\lambda = 1$.

$$(0, \alpha, 0) \text{ com } \alpha \neq 0$$

3 3. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & b \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1,5 3.1 Calcule o valor do determinante da matriz A , em função de a e b .

$$3 - 2a - b$$

1,5 3.2 Determine qual a relação entre a e b de forma que A seja invertível.

$$3 - 2a - b \neq 0$$