
Folha 4B – Primitivas de funções racionais e por substituição

1. Determine as primitivas das seguintes funções racionais:

(a) $f(x) = \frac{x+2}{2x(x-1)^2(x^2+1)}$;

(b) $f(x) = \frac{27}{x^4 - 3x^3}$

(c) $f(x) = \frac{u^4 - 8}{u^3 - 2u^2}$;

(d) $f(x) = \frac{y^4}{y^4 - 1}$;

(e) $f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - x - 1}{x^2(x^2 - 1)}$;

(f) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2(x - 1)}$;

(g) $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$;

(h) $f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{(x - 1)(x + 1)^2}$.

2. Determine as seguintes primitivas, fazendo uma substituição de variável:

(a) $P\left(\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\right)$;

(b) $P\left(\frac{3e^u}{1+e^{2u}}\right)$;

(c) $P\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x}\right)$;

(d) $P(t\sqrt{1+t})$;

(e) $P(\sin\sqrt{x+1})$;

(f) $P(2y\sqrt{4-y})$;

(g) $P\left(\frac{\sqrt{t}}{t - \sqrt[3]{t}}\right)$;

(h) $P\left(\frac{7^x}{7^{3x} - 7^{-x}}\right)$.

Consulte a Tabela de Substituições para verificar que são recomendadas as seguintes mudanças de variável:

(a) $x = 2 \cos t$; (b) $e^u = t$; (c) $\cos x = t$; (d) $1 + t = u^2$;
(e) $x + 1 = t^2$; (f) $4 - y = t^2$; (g) $t = u^6$; (h) $7^x = t$.