Teoria de apoio à resolução

- Para se verificar se as soluções são ou não linearmente independentes, teremos que determinar o Wronskiano[1]:

$$W(f_1; f_2;...; f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1^{'} & f_2^{'} & & f_n^{'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

- A solução geral será dada na forma: $y = c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + ... + c_n \cdot f_n$

  Onde: $\{f_1; f_2;...; f_n\}$ é o conjunto fundamental de soluções.

- O método da redução de ordem consiste basicamente na obtenção de uma segunda solução a partir de uma solução dada, recorrendo para tal à seguinte mudança de variável: $y_2(x) = y_1(x) \cdot v(x)$.

  O objectivo será determinar uma nova equação diferencial onde se tenham as derivadas de v em ordem a x. Após isto, segue-se uma nova mudança de variável do tipo: $w = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(w) = \frac{dw}{dx}$, que pela substituição na equação diferencial obtida anteriormente deverá resultar numa nova equação diferencial de ordem 1 e variáveis separáveis.

  E é esta mudança de variável que permite reduzir uma equação diferencial de segunda ordem $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$ para uma de primeira ordem $\left(\frac{dw}{dx}\right)$.

[1] O Wronskiano é uma matriz composta pelas funções, que se dizem ser as soluções, e respectivas derivadas até à ordem $n-1$, onde **o objectivo é calcular o valor do determinante, sendo que este é obrigado a ser diferente de zero para que as soluções sejam linearmente independentes**.

- As equações diferenciais homogéneas com coeficientes constantes podem ser de vários tipos e por conseguinte apresentarem soluções gerais de acordo com cada um dos casos:

→ **Raízes reais simples** → $(m \pm a)\cdot(m \pm b) = 0$ **:**

Solução geral do tipo: $y = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + ... + c_n \cdot e^{m_n \cdot x}$

→ **Raízes reais de multiplicidade** k → $(m \pm a)^k = 0$ **:**

Solução geral do tipo: $y = c_1 \cdot x^{1-1} \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot x^{2-1} \cdot e^{m_2 \cdot x} + ... + c_n \cdot x^{k-1} \cdot e^{m_n \cdot x}, k = 1,2,3,...$

→ **Raízes complexas ou imaginárias** → $[m \pm (a \pm i \cdot b)] = 0$ **:**

Solução geral do tipo: $y = c_1 \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(bx) + c_2 \cdot e^{a \cdot x} \cdot sen(bx)$

Para multiplicidade k: $y = c_n \cdot x^{k-1} \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(bx) + c_n \cdot x^{k-1} \cdot e^{a \cdot x} \cdot sen(bx), k = 1,2,3,...$

1. Considere a equação diferencial $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0$

a) Mostre que e^x, e^{2x} e e^{-2x} **são soluções linearmente independentes desta equação.**

R:

Para: $y=e^x$	$y=e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=\frac{d}{dx}(x)\cdot e^x=e^x$ $\frac{dy}{dx}=e^x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=\frac{d}{dx}(x)\cdot e^x=e^x$ $\frac{d^2y}{dx^2}=e^x \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=\frac{d}{dx}(x)\cdot e^x=e^x$
Substituindo na equação diferencial teremos que: $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0 \Leftrightarrow e^x-e^x-4e^x+4e^x=0 \Leftrightarrow 0=0 \Rightarrow y=e^x$ é solução.	

Para: $y=e^{2x}$	$y=e^{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right)=\frac{d}{dx}(2x)\cdot e^{2x}=2e^{2x}$ $\frac{dy}{dx}=2e^{2x} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(2e^{2x}\right)=2\frac{d}{dx}(2x)\cdot e^{2x}=4e^{2x}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=4e^{2x} \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(4e^{2x}\right)=4\frac{d}{dx}(2x)\cdot e^{2x}=8e^{2x}$
Substituindo na equação diferencial teremos que: $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0 \Leftrightarrow 8e^{2x}-4e^{2x}-4\cdot 2e^{2x}+4e^{2x}=0 \Leftrightarrow 0=0 \Rightarrow y=e^{2x}$ é solução.	

<table>
<tr>
<td>Para: $y = e^{-2x}$</td>
<td>

$$y = e^{-2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right) = \frac{d}{dx}(-2x)\cdot e^{-2x} = -2e^{-2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2e^{-2x} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-2e^{-2x}\right) = -2\frac{d}{dx}(-2x)\cdot e^{-2x} = 4e^{-2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^{2x} \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(4e^{-2x}\right) = 4\frac{d}{dx}(-2x)\cdot e^{-2x} = -8e^{-2x}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Substituindo na equação diferencial teremos que:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \Leftrightarrow -8e^{-2x} - 4e^{-2x} - 4\cdot\left(-2e^{-2x}\right) + 4e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow y = e^{2x} \text{ é solução.}$$

</td>
</tr>
</table>

Posto isto, vamos agora verificar se estas soluções são linearmente independentes, recorrendo para tal ao Wronskiano, *tendo em atenção que uma vez que a equação diferencial é de terceira ordem, as derivadas que compõem a matriz serão até à ordem* $n-1$, *ou seja até à ordem 2*:

$$W\left(e^x; e^{2x}; e^{-2x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{-2x} \\ \left(e^x\right)' & \left(e^{2x}\right)' & \left(e^{-2x}\right)' \\ \left(e^x\right)'' & \left(e^{2x}\right)'' & \left(e^{-2x}\right)'' \end{vmatrix} \Leftrightarrow W\left(e^x; e^{2x}; e^{-2x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{-2x} \\ e^x & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ e^x & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W\left(e^x; e^{2x}; e^{-2x}\right) = \left(e^x\cdot e^{2x}\cdot e^{-2x}\right)\cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} \end{array} \Leftrightarrow W\left(e^x; e^{2x}; e^{-2x}\right) = \left(e^{x+2x-2x}\right)\cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W\left(e^x; e^{2x}; e^{-2x}\right) = \left(e^x\right)\cdot \left[1\cdot\det \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \end{array} - 1\cdot\det \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{array} + 1\cdot\det \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W\left(e^x; e^{2x}; e^{-2x}\right) = \left(e^x\right)\cdot\left[1\cdot\left(2\times4 - 4\times(-2)\right) - 1\cdot\left(1\times4 - 1\times(-2)\right) + 1\cdot\left(1\times4 - 1\times2\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W\left(e^x; e^{2x}; e^{-2x}\right) = \left(e^x\right)\cdot\left[(8+8) - (4+2) + (4-2)\right] \Leftrightarrow W\left(e^x; e^{2x}; e^{-2x}\right) = 12\cdot e^x$$

Como: $W\left(e^x; e^{2x}; e^{-2x}\right) = 12\cdot e^x \neq 0$, então as soluções são linearmente independentes.

b) Escreva a solução geral da equação dada.

R:

Sabendo que a solução geral é dada na forma: $y = c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + ... + c_n \cdot f_n$

E sabendo da alínea anterior que o conjunto fundamental de soluções é o seguinte: $\{e^x; e^{2x}; e^{-2x}\}$.

Então, a solução geral da equação diferencial dada será: $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{-2x}$

c) Determine a solução que satisfaz as seguintes condições: $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$ e $y''(0) = 1$

R:

Na alínea anterior conclui-se que: $y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{-2x}$

Logo: $y'(x) = c_1 \cdot (e^x)'_x + c_2 \cdot (e^{2x})'_x + c_3 \cdot (e^{-2x})'_x \Leftrightarrow y'(x) = c_1 \cdot e^x + 2 \cdot c_2 \cdot e^{2x} - 2 \cdot c_3 \cdot e^{-2x}$

$$y''(x) = c_1 \cdot (e^x)'_x + 2 \cdot c_2 \cdot (e^{2x})'_x - 2 \cdot c_3 \cdot (e^{-2x})'_x \Leftrightarrow y''(x) = c_1 \cdot e^x + 4 \cdot c_2 \cdot e^{2x} + 4 \cdot c_3 \cdot e^{-2x}$$

Então, por substituição dos respectivos valores teremos que:

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{2 \cdot 0} + c_3 \cdot e^{-2 \cdot 0} = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

$$y'(0) = -3 \Rightarrow c_1 \cdot e^0 + 2 \cdot c_2 \cdot e^{2 \cdot 0} - 2 \cdot c_3 \cdot e^{-2 \cdot 0} = -3 \Leftrightarrow c_1 + 2 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3 = -3$$

$$y''(0) = 1 \Rightarrow c_1 \cdot e^0 + 4 \cdot c_2 \cdot e^{2 \cdot 0} + 4 \cdot c_3 \cdot e^{-2 \cdot 0} = 1 \Leftrightarrow c_1 + 4 \cdot c_2 + 4 \cdot c_3 = 1$$

A partir daqui podemos construir o seguinte sistema de três equações para três incógnitas e, resolvendo-o, encontrar o valor de cada uma das constantes:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + 2 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3 = -3 \\ c_1 + 4 \cdot c_2 + 4 \cdot c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 - c_3 \\ (1 - c_2 - c_3) + 2 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3 = -3 \\ (1 - c_2 - c_3) + 4 \cdot c_2 + 4 \cdot c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 - c_3 \\ 1 + c_2 - 3 \cdot c_3 = -3 \\ 1 + 3 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 - c_3 \\ c_2 = -4 + 3 \cdot c_3 \\ 3 \cdot (-4 + 3 \cdot c_3) + 3 \cdot c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 - c_3 \\ c_2 = 3 \cdot c_3 - 4 \\ 9 \cdot c_3 - 12 + 3 \cdot c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 - c_3 \\ c_2 = 3 \cdot c_3 - 4 \\ 12 \cdot c_3 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

Concluindo: $y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{-2x} \Leftrightarrow y(x) = e^x - e^{2x} + e^{-2x}$

2. Relativamente a cada uma das proposições seguintes indique se é verdadeira ou falsa, justificando adequadamente

a) Sabe-se que determinada equação diferencial linear homogénea de 2ª ordem admite como soluções as funções x e x^2 (entre outras) em $\Re \setminus \{0\}$. Assim sendo, a solução geral dessa equação é $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{x^2}$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias?

R:

Antes de mais, vamos verificar se as funções x e x^2 são linearmente independentes, recorrendo para tal ao Wronskiano:

$$W\left(x;x^2\right)=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ (x)'_x & \left(x^2\right)'_x \end{vmatrix} \Leftrightarrow W\left(x;x^2\right)=\begin{vmatrix} \overset{+}{x} & \overset{-}{x^2} \\ 1 & 2x \end{vmatrix} \Leftrightarrow W\left(x;x^2\right)=\left(x \times 2x - 1 \times x^2\right) \Leftrightarrow W\left(x;x^2\right)= x^2 \neq 0$$

Como: $W\left(x;x^2\right)= x^2 \neq 0$, então as soluções são linearmente independentes e formam o conjunto fundamental de soluções seguinte: $\{f_1; f_2\} = \{x; x^2\}$

Como se sabe a solução geral de uma equação é dada por: $y = c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2$, o que pela aplicação do conjunto fundamental de soluções se traduz em: $y = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$

Conforme se pode verificar esta solução geral é diferente da que é apresentada no enunciado, logo a afirmação apresentada é falsa.

b) A respeito de determinada equação diferencial linear homogénea de 3ª ordem sabe-se que a sua solução geral é dada por $y = c_1 \cdot sen(2x) + c_2 \cdot \cos(2x) + c_3 \cdot e^{2x}$. Nestas condições pode-se afirmar que $\cos(4x)$ não é uma solução da referida equação diferencial?

R:

Uma equação diferencial de ordem n apenas pode ter n soluções linearmente independentes, neste caso a equação diferencial é de 3ª ordem $(n = 3)$, então, ela apenas pode ter três soluções linearmente independentes que já se encontram representadas na expressão que traduz a solução geral. Assim se pode concluir que uma quarta solução será sempre dependente das outras três, isto significa que o $\cos(4x)$ não é uma solução da referida equação, logo a afirmação apresentada é verdadeira.

3. Mostre que se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são duas soluções de $a_0(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$, então $c_1\cdot f_1(x)+c_2\cdot f_2(x)$ também é uma solução desta equação onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

R:

No enunciado é dito que $f_1(x)=f_1$ e $f_2(x)=f_2$ são soluções da equação diferencial dada, ou seja:

$$a_0(x)\frac{d^2f_1}{dx^2}+a_1(x)\frac{df_1}{dx}+a_2(x)\cdot f_1=0 \text{ e } a_0(x)\frac{d^2f_2}{dx^2}+a_1(x)\frac{df_2}{dx}+a_2(x)\cdot f_2=0\,,$$

Assim sendo, pedem-nos para verificar se $c_1\cdot f_1(x)+c_2\cdot f_2(x)$, também poderá ser solução da referida equação, isto é:

$$a_0(x)\frac{d^2(c_1\cdot f_1+c_2\cdot f_2)}{dx^2}+a_1(x)\frac{d(c_1\cdot f_1+c_2\cdot f_2)}{dx}+a_2(x)\cdot(c_1\cdot f_1+c_2\cdot f_2)=0\Leftrightarrow☼$$

Começando por determinar as respectivas derivadas teremos que:

- $$\frac{d(c_1\cdot f_1+c_2\cdot f_2)}{dx}=\frac{d(c_1\cdot f_1)}{dx}+\frac{d(c_2\cdot f_2)}{dx}=c_1\cdot\frac{d(f_1)}{dx}+c_2\cdot\frac{d(f_2)}{dx}$$

- $$\frac{d^2(c_1\cdot f_1+c_2\cdot f_2)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d(c_1\cdot f_1+c_2\cdot f_2)}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(c_1\cdot\frac{d(f_1)}{dx}+c_2\cdot\frac{d(f_2)}{dx}\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(c_1\cdot\frac{d(f_1)}{dx}\right)+\frac{d}{dx}\left(c_2\cdot\frac{d(f_2)}{dx}\right)=c_1\cdot\frac{d^2(f_1)}{dx^2}+c_2\cdot\frac{d^2(f_2)}{dx^2}$$

Substituindo estes resultados em ☼ teremos que:

$$☼ \Leftrightarrow a_0(x)\cdot\left(c_1\cdot\frac{d^2(f_1)}{dx^2}+c_2\cdot\frac{d^2(f_2)}{dx^2}\right)+a_1(x)\cdot\left(c_1\cdot\frac{d(f_1)}{dx}+c_2\cdot\frac{d(f_2)}{dx}\right)+a_2(x)\cdot(c_1\cdot f_1+c_2\cdot f_2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_1\cdot\left(a_0(x)\cdot\frac{d^2(f_1)}{dx^2}\right)+c_2\cdot\left(a_0(x)\cdot\frac{d^2(f_2)}{dx^2}\right)+c_1\cdot\left(a_1(x)\cdot\frac{d(f_1)}{dx}\right)+c_2\cdot\left(a_1(x)\cdot\frac{d(f_2)}{dx}\right)+ \Leftrightarrow$$
$$+c_1\cdot(a_2(x)\cdot f_1)+c_2\cdot(a_2(x)\cdot f_2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} c_1\cdot\left(\underbrace{a_0(x)\cdot\frac{d^2(f_1)}{dx^2}+a_1(x)\cdot\frac{d(f_1)}{dx}+a_2(x)\cdot f_1}_{=0\text{, pelo que é exposto no enunciado}}\right)+ \\ +c_2\cdot\left(\underbrace{a_0(x)\cdot\frac{d^2(f_2)}{dx^2}+a_1(x)\cdot\frac{d(f_2)}{dx}+a_2(x)\cdot f_2}_{=0\text{, pelo que é exposto no enunciado}}\right)=0 \end{array} \Leftrightarrow c_1\cdot(0)+c_2\cdot(0)=0 \Leftrightarrow 0=0$$

Está então mostrado que $c_1\cdot f_1(x)+c_2\cdot f_2(x)$ também uma solução da equação diferencial dada.