

# Cálculo (A e B)

MIEEIC, MIECOM

2007/2008

Ana Jacinta Soares

Notas sobre a disciplina

## Programa Resumido

1. Funções trigonométricas inversas.
2. Funções hiperbólicas directas e inversas
3. Primitivas.
4. Integral de Riemann. Aplicações.
5. Séries numéricas.

## Principais Referências Bibliográficas

- [1] T. Apostol, *Cálculo*, Vol. 1, Editora Réverté, 1991.
- [2] Robert A. Adams,, *A Complete Course: Calculus*, Addison-Wesley, 1999.
- [3] Jaime. C. Silva, *Princípios de Análise Matemática Aplicada*, McGraw Hill, 1994.
- [4] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Gulbenkian, 1999.
- [5] H. L. Guidorizzi, *Um Curso de Cálculo*, Vol 1, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1986.

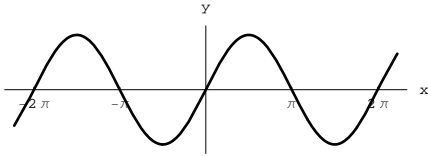
Funções trigonométricas  
directas e  
inversas

## A. Funções trigonométricas directas

As funções *seno*, *coseno*, *tangente* e *cotangente* são contínuas e periódicas nos respectivos domínios. Todas elas são funções não injectivas e, portanto, não possuem inversa.

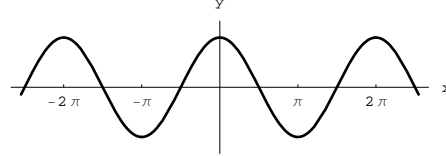
### Seno

$$y = \sin x, x \in \mathbb{R}, \text{CD}_{\text{sen}} = [-1, 1]$$



### Cosseno

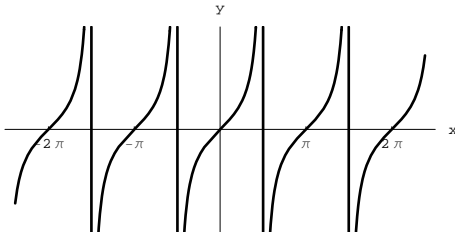
$$y = \cos x, x \in \mathbb{R}, \text{CD}_{\text{cos}} = [-1, 1]$$



### Tangente

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

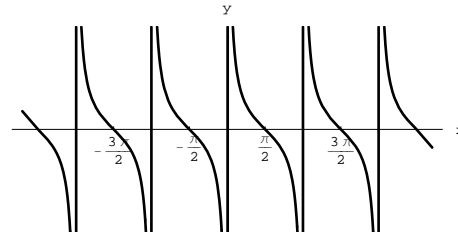
$$\text{CD}_{\text{tg}} = \mathbb{R}$$



### Cotangente

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{CD}_{\text{cotg}} = \mathbb{R}$$



## B. Funções trigonométricas inversas

Considerando restrições adequadas das funções trigonométricas, obtemos funções contínuas e bijectivas definidas em intervalos. A injectividade será conseguida excluindo do domínio todos os pontos onde a função se repete. A sobrejectividade será obtida eliminando do conjunto de chegada todos os pontos que a função não assume. As inversas das restrições assim definidas serão também contínuas.

### B.1 Arco-seno

Relativamente à função seno, convencionamos considerar a restrição bijectiva

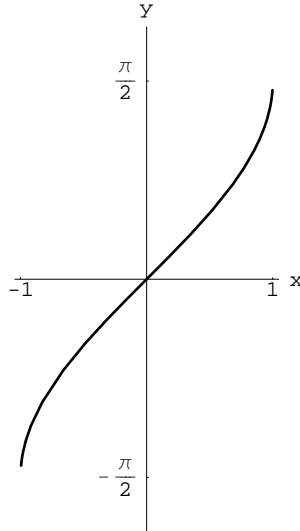
$$\begin{array}{ccc} \text{sen} : & \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] & \longrightarrow [-1, 1] \\ & x & \longmapsto \sin x. \end{array} \quad (1)$$

A sua inversa, que se designa por *arco-seno* – lê-se *arco (cujo) seno* – é a a função

$$\begin{array}{ccc} \arcsen : & [-1, 1] & \longrightarrow \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ & y & \longmapsto \arcsen y, \end{array} \quad (2)$$

onde  $\arcsen y$  indica o único arco do intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  cujo seno é igual a  $y$ . Assim,

$$x = \arcsen y, y \in [-1, 1] \iff y = \sen x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (3)$$



$$y = \arcsen x, x \in [-1, 1], \text{CD}_{\arcsen} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Pelo facto de as funções (1) e (2) serem inversas uma da outra, tem-se

$$\begin{aligned} \arcsen(\sen x) &= x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \sen(\arcsen y) &= y, \quad \forall y \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (4)$$

No entanto, apesar de fazer sentido calcular  $\arcsen(\sen z)$ , para  $z \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , tem-se

$$\arcsen(\sen z) \neq z, \quad \forall z \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (5)$$

uma vez que  $\text{CD}_{\arcsen} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

### Exemplo 1

$$(a) \arcsen 1 = \frac{\pi}{2}, \arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \arcsen \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

De facto,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  e  $-\frac{\pi}{3}$  são os únicos arcos do intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  onde o seno é, respectivamente, igual a 1,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(b) Tem-se, por exemplo,  $\sen(3\pi) = 0$  e  $\sen(8\pi) = 0$ , mas  $\arcsen 0 = 0$ .

Porque 0 é o único arco do intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  onde o seno é igual a 0. ■

## B.2 Arco-cosseno

Relativamente à função cosseno, convencionou-se considerar a restrição bijectiva

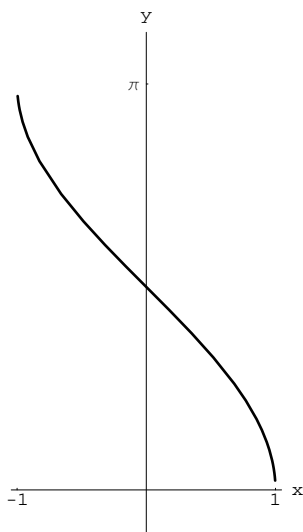
$$\begin{aligned} \cos : [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto \cos x . \end{aligned} \quad (6)$$

A sua inversa, que se designa por *arco-cosseno* – lê-se *arco* (*cujo*) *cosseno* – é a função

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ y &\longmapsto \arccos y , \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $\arccos y$  indica o único arco do intervalo  $[0, \pi]$  cujo cosseno é igual a  $y$ . Assim

$$x = \arccos y, \ y \in [-1, 1] \iff y = \cos x, \ x \in [0, \pi]. \quad (8)$$



$$y = \arccos x, \ x \in [-1, 1], \ \text{CD}_{\arccos} = [0, \pi]$$

Atendendo a que as funções (6) e (7) são inversas uma da outra, tem-se

$$\begin{aligned} \arccos(\cos x) &= x, \ \forall x \in [0, \pi], \\ \cos(\arccos y) &= y, \ \forall y \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (9)$$

Por outro lado, uma vez que  $\text{CD}_{\arccos} = [0, \pi]$ , tem-se

$$\arccos(\cos z) \neq z, \ \forall z \notin [0, \pi]. \quad (10)$$

### Exemplo 2

$$(a) \ \arccos 1 = 0, \ \arccos(-1) = \pi, \ \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

$$(b) \ \arccos(\cos 5\pi) = \arccos(-1) = \pi, \ \arccos\left(\cos \frac{25\pi}{4}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

### B.3 Arco-tangente

Relativamente à função *tangente*, consideramos a restrição bijectiva

$$\begin{array}{ccc} \text{tg} : & \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \text{tg } x. \end{array} \quad (11)$$

A sua inversa, designada por *arco-tangente* – lê-se *arco (cuja) tangente* – é a função

$$\begin{array}{ccc} \text{arctg} : & \mathbb{R} & \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \\ & y & \longmapsto \text{arctg } y, \end{array} \quad (12)$$

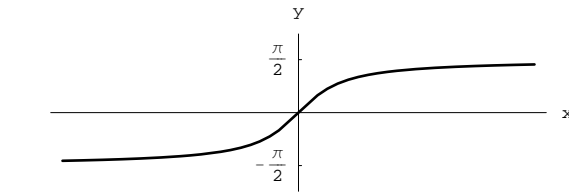
onde  $\text{arctg } y$  indica o único arco do intervalo  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  cuja tangente é igual a  $y$ .

Assim,

$$x = \text{arctg } y, \text{ com } y \in \mathbb{R}$$

se e só se

$$y = \text{tg } x, \text{ } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$



$$y = \text{arctg } x, \text{ } x \in \mathbb{R}, \text{ CD}_{\text{arccos}} = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

### B.4 Arco-cotangente

Relativamente à função *co-tangente*, consideramos a restrição bijectiva

$$\begin{array}{ccc} \text{tg} : & ]0, \pi[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \text{cotg } x, \end{array} \quad (13)$$

cujas inversa é a função *arco-cotangente* – lê-se *arco (cuja) cotangente* – definida por

$$\begin{array}{ccc} \text{arccotg} : & \mathbb{R} & \longrightarrow ]0, \pi[ \\ & y & \longmapsto \text{arccotg } y, \end{array} \quad (14)$$

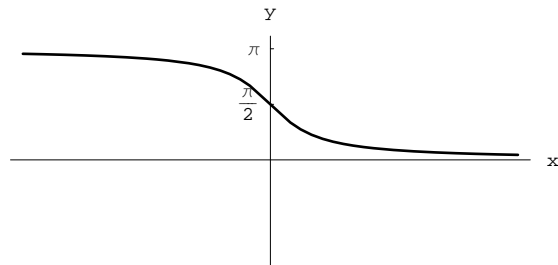
onde  $\text{arccotg } y$  indica o único arco do intervalo  $]0, \pi[$  cuja cotangente é igual a  $y$ .

Então,

$$x = \text{arccotg } y, \text{ com } y \in \mathbb{R}$$

se e só se

$$y = \text{cotg } x, \text{ } x \in ]0, \pi[.$$



$$y = \text{arccotg } x, \text{ } x \in \mathbb{R}, \text{ CD}_{\text{arccos}} = ]0, \pi[$$

## B.5 Derivadas das funções trigonométricas inversas

Acabámos de definir as funções trigonométricas inversas mas não obtivemos as suas expressões designatórias envolvendo uma variável independente, digamos  $x$ . Definimos estas funções precisamente como as inversas de certas restrições das funções trigonométricas directas. Para o cálculo das derivadas correspondentes, vamos recorrer à regra de derivação da função inversa, que passamos a recordar.

[Regra da derivada da função inversa]

Seja  $f: I \rightarrow J$ , com  $I$  e  $J$  intervalos de  $\mathbb{R}$ , uma função bijectiva e  $f^{-1}: J \rightarrow I$  a sua inversa. Se  $f$  é derivável no ponto  $a \in I$ , sendo  $f'(a) \neq 0$ , e  $f^{-1}$  é contínua em  $b = f(a)$ , então  $f^{-1}$  é derivável em  $b$ , tendo-se

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \quad (15)$$

A fórmula (15) significa que a derivada da função inversa é o inverso da derivada da função directa, com cada uma delas calculada num ponto adequado. ■

Usando a regra da derivada da função inversa, vamos verificar que

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in ]-1, 1[. \quad (16)$$

A função directa é  $f(x) = \cos x$ , com  $x \in [0, \pi]$ , e a função inversa é  $f^{-1}(y) = \arccos y$ , com  $y \in [-1, 1]$ . Tem-se  $f'(x) = -\sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$ , sendo  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in ]0, \pi[$ . Como  $f(0) = 1$  e  $f(\pi) = -1$ , a regra anterior é aplicável em  $]-1, 1[$ , dando

$$\arccos' y = \frac{1}{-\sin(\arccos y)} = \frac{-1}{\sin(\arccos y)}, \quad y \in ]-1, 1[. \quad (17)$$

Resta agora simplificar o denominador da última expressão. Para tal, repare-se que

$$y \in ]-1, 1[ \implies \arccos y \in ]0, \pi[ \text{ e } \sin(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}$$

porque  $\sin^2(\arccos y) + \cos^2(\arccos y) = 1$ , ou seja,  $\sin^2(\arccos y) + y^2 = 1$ , sendo o seno positivo em  $]0, \pi[$ . Fica então justificada a fórmula (16).

Sendo  $u$  uma função derivável de  $x$ , a regra da derivada da função composta dá

$$(\arccos u)'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} \quad (18)$$

nos pontos onde a derivada existe. ■

Procedendo de maneira semelhante com as outras funções trigonométricas inversas, iríamos obter as restantes expressões das derivadas. Poderíamos, assim, construir a seguinte tabela.



## Tabela - Derivadas das funções trigonométricas inversas

As derivadas das principais funções trigonométricas inversas são

$$\begin{aligned}\arcsen' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in ]-1, 1[ & \arccos' x &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in ]-1, 1[ \\ \arctg' x &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} & \operatorname{arccotg}' x &= \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Sendo  $u$  uma função derivável, tem-se (nos pontos onde a derivada existe)

$$\begin{aligned}(\arcsen u)' &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} & (\arccos u)' &= \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \\ (\arctg u)'(x) &= \frac{u'}{1+u^2} & (\operatorname{arccotg} u)' &= \frac{-u'}{1+u^2}\end{aligned}$$