Основные вопросы на защиту заданий 1 и 2

Оглавление

Уравнения Максвелла (дифф. или интегральная форма)

Интегральная форма

① **Закон Фарадея**

$$\oint_\Gamma \underbrace{\overset{\text{напр. эл. поля}}{\bar{E}'}\, d\bar{l}}_{\text{циркуляц. по замкн. контуру}} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \underbrace{\overset{\text{инд. маг. поля}}{\bar{B}}\, d\bar{S}}_{\text{изменен. магнит. потока}}$$

② **Закон полного тока.**
Закон о циркуляции маг. поля.

$$\oint_\Gamma \underset{\text{напр. маг. поля}}{\bar{H}}\, d\bar{l} = \int_S \Big(\underbrace{\bar{j}_{пр} + \bar{j}_{мол}}_{\text{вектор плот. тока}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}}_{\text{индук. элек. поля}}\Big)\, d\bar{S}$$

③ **Теорема Гаусса.**

$$\oint_S \bar{D}\, d\bar{S} = \int_V \rho\, dV$$

④ **Теорема Гаусса. Магнит. поле.**

$$\oint_S \bar{B}\, d\bar{S} = 0$$

⑤ **Связь индукции с напряж-ю.**

$$\bar{B} = \underbrace{\mu}_{\text{магнит. проницаем.}}\mu_0 \bar{H} \qquad \bar{D} = \underbrace{\varepsilon}_{\text{электр. проницц.}}\varepsilon_0 \bar{E}$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м $\qquad \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

Дифференциальная форма

$$\begin{cases} \underset{\text{диф. оператор}}{\nabla} \times \bar{E}' = \underset{\text{ротор}}{\mathrm{rot}}\, \bar{E}' = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{H} = \mathrm{rot}\, \bar{H} = \bar{j}_{пр} + \bar{j}_{мол} + \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \nabla \bar{D} = \mathrm{div}\, \bar{D} = \rho \\ \nabla \bar{B} = \mathrm{div}\, \bar{B} = 0 \\ \bar{B} = \mu\mu_0 \bar{H} \\ \bar{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \bar{E} \end{cases}$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах

$$\begin{cases} \oint_\Gamma \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \\ \oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_{пр} + \vec{j}_{мол} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S}, \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV, \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \\ \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}, \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \times \vec{E}' = \mathrm{rot}\, \vec{E}' = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H} = \mathrm{rot}\, \vec{H} = \vec{j}_{пр} + \vec{j}_{мол} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \nabla \vec{D} = \mathrm{div}\, \vec{D} = \rho, \\ \nabla \vec{B} = \mathrm{div}\, \vec{B} = 0, \\ \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}, \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, \end{cases}$$

Дифференциальные операторы (ротор, дивергенция, градиент) . математическое определения, физический смысл.

• **Градиент** (∇, grad)

def. (мат.) направление наискор. роста функции

Взятие производной по каждому аргументу.

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

def. (физ.) Определ. направления и v изменения величин

~~[illegible]~~ $\bar{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$

• **Дивергенция** (∇, div)

def. (мат.) показывает различие (расс-я) между функциями.

$$\mathrm{div}F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

def. (физика). Если поле – поток вещ-ва, то div в данной (·) показывает, сколько вещ-ва "вход" / "исход" в эту (·).

$\mathrm{div}\,\bar{D} = \rho$, $\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$

• **Ротор** ($\nabla \otimes$, rot)

def. (мат.) измеряет, насколько "вектор" поле "заворачивается" или "крут-ся" в каждой (·)

$$\nabla \times F = i\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + j \cdot \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + k \cdot \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$ матрица

def. (физика) наличие вихревого поля.

$\mathrm{rot}\,\bar{E} \neq 0$ вихр.

$= 0$ не вихр.

Уравнение Лапласа, уравнение Пуассона

• ур-е Лапласа.

опер. Лапласа / втор. произв.-х

$$\nabla(\nabla \varphi) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, \varphi) = \Delta \varphi$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\Delta \varphi = 0}$$

• ур-е Пуассона.

$$\nabla \bar{D} = \mathrm{div}\, \bar{D} = \rho$$

$$\bar{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \bar{E}' = \varepsilon\varepsilon_0(-\mathrm{grad}\, \varphi)$$

$$\downarrow$$

$$E = -\mathrm{grad}\, \varphi$$

$$\mathrm{div}\, \bar{D} = \mathrm{div}(\varepsilon\varepsilon_0(-\mathrm{grad}\, \varphi)) \Rightarrow \mathrm{div}\, \bar{D} = -\varepsilon\varepsilon_0 \Delta \varphi$$

$$\boxed{-\varepsilon\varepsilon_0 \Delta \varphi = \rho}$$

Волноводы. Предназначение, преимущества и недостатки по сравнению с беспроводным способом передачей информации.

Волновод — канал искусственного или естественного происхождения, вдоль которого распространяются электромагнитные или звуковые волны. Основное назначение волновода — направлять и поддерживать распространяющиеся волны.

Волноводы играют важную роль в передаче и обработке сигналов, обеспечивая эффективное и управляемое распространение электромагнитных или звуковых волн в различных средах и условиях.

4.1 Приемущества (по сравнению с беспроводной передачей информации)

1. Защита от помех
2. Передача на большие расстояния

4.2 Недостатки (по сравнению с беспроводной передачей информации)

1. Частотная зависимость $\Longrightarrow$ ярко выраженная дисперсия (Дисперсия – Зависимость скорости волны от частоты).
2. Нужно физическое соединение
3. Отсутсвие гибкости

Как получается уравнения Д' Аламбера, Гельмгольца?

(5) Д'Аламбер. Гельмгольц. $\ast$ ρ и $j = 0$

$$\begin{cases} (1)\ \operatorname{rot}\bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ (2)\ \operatorname{rot}\bar{H} = \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ (3)\ \operatorname{div}\bar{D} = 0 \\ (4)\ \operatorname{div}\bar{B} = 0 \\ (5)\ \bar{B} = \mu\mu_0\bar{H} \\ (6)\ \bar{D} = \varepsilon\varepsilon_0\bar{E} \end{cases}$$

(1) + (4) + (5)

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} \operatorname{div}\bar{H} = 0 \\ \operatorname{rot} E + \mu\mu_0 \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

(2) + (3) + (6)

$$\mathrm{II}\ \begin{cases} \operatorname{div}\bar{E} = 0 \\ \operatorname{rot}\bar{H} - \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

• Д'Аламбер.

I. берем производ. 2 уравнения по времени

$$\operatorname{rot}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu_0\mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0$$

$\ast$ 2 уравн. Максвелла $\operatorname{rot}\bar{H} = \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ (II система 2 уравн.)

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{rot}\bar{H}$$

$$\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{H}) + \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0$$

математика

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar{A}) - \underset{\Delta}{\underset{\shortparallel}{\nabla^2}}\bar{A}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{H}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar{H}) - \Delta\bar{H} \Rightarrow \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{H}) = -\Delta\bar{H}$$

в 1 ур 1 сис-мы $\operatorname{div}\bar{H} = 0$

$$-\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\Delta\bar{H} + \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0 \quad \Big|\cdot -\varepsilon\varepsilon_0$$

$$\boxed{\Delta\bar{H} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0}$$ 1 ур-е Д'Аламбера

Аналогично II система

$$\boxed{\Delta\bar{E} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0}$$ 2 ур-е Д'Аламбера

Волновое уравнение.

$\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = c^2$ квадрат скор. света $\quad \sqrt{\varepsilon\mu} = n$ показ. преломлен.

$$v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$

$$\Delta\bar{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta H - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0$$

• Гельмгольц.

$\ast$ плоскую волну $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, z продольн напр.
x, y поперечн. коорд.

$\ast$ E_x, E_y, E_z H_x, H_y, H_z

$$\Delta \bar{E} = \begin{bmatrix} \cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

для $\Delta \bar{H}$ аналогично

⇒ уравн. Д'Аламбера

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

для $\bar{H}$ аналогично

$\ast$ ур-я Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \bar{B} = \mu\mu_0 \bar{H} \qquad \mathrm{rot}\,\bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \qquad \bar{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \bar{E}$$

$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\,H = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$\begin{cases} \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial t} \\ \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow H_z = 0$$

Аналогично
$E_z = 0$

$$\left.\begin{matrix} E_x \leftrightarrow H_y \\ E_y \leftrightarrow H_x \end{matrix}\right| \Rightarrow \bar{E} \perp \bar{H}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} E_y \\ H_y \end{cases} \text{аналогично}$$

Это и есть ур-е Гельмгольца

Однородное уравнение Д'Аламбера(волновое уравнение)

Рассмотрим некоторую область пространства, в которой отсутствуют источники поля: $\Rightarrow$ $\vec{j}=0 \quad \rho = 0$

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{D} = 0 \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \end{cases} \Rightarrow$$

(1)
$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{H} = 0 & (1.1) \\ \operatorname{rot}\vec{E} + \mu\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 & (1.2) \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 0 & (2.1) \\ \operatorname{rot}\vec{H} - \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 & (2.2) \end{cases}$$

$\dfrac{\partial}{\partial t}$

Уравнение Д'Аламбера(волновое уравнение)

Возьмем производную по времени от обеих частей второго уравнения системы (2) $\quad \dfrac{\partial}{\partial t}$

ур. 1.2.

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}\right) - \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.2)$$

Воспользуемся вторым уравнением системы (1): $\quad -\dfrac{\operatorname{rot}\vec{E}}{\mu\mu_0} = \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$$-\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu\mu_0}\operatorname{rot}\vec{E}\right) - \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.2)$$

$$\nabla^2 A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

Уравнение Д'Аламбера(волновое уравнение)

Из математики известно, что:

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)=\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

$$\nabla\varphi = grad\,\varphi$$

где ∇^2 - оператор Лапласа

$\nabla \cdot \vec{A} = \mathrm{div}\vec{A}$

$\nabla \times \vec{A} = \mathrm{rot}\vec{A}$

$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$

т.к. $\mathrm{div}\vec{E}=0$, то в нашем случае $\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}\right)=-\nabla^2\vec{E}$

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

тогда получаем

$$\frac{1}{\mu\mu_0}\nabla^2\vec{E}-\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \qquad \nabla^2\vec{E}-\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

$\mu\ \mu_a$

Уравнение Д'Аламбера(волновое уравнение)

$$\square=\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$ -оператор Д'Аламбера

$\boxed{\square\vec{E}=0}$ $\boxed{\square\vec{H}=0}$ -волновые уравнения

3 3

Волновые уравнения в развернутом виде

$$\boxed{\cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0} \qquad \boxed{\cancel{\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}=0}$$

$$\boxed{\cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=0} \qquad \boxed{\cancel{\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2}}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}=0}$$

$$\boxed{\cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}=0} \qquad \boxed{\cancel{\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}=0}$$

Как получить уравнение для плоской волны?

Определение 6.1.

Плоская волна – это такая волна, у которой вектор колебаний в любой точке плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, имеет одинаковое значение в фиксированный момент времени.

На практике рассматривалась плоская волна вдоль оси z. Следовательно, частные производные по x, y всегда равны 0.

6.1 Уравнение для плоской волны:

$$E_y(x,t) = E_{0y}\cos(kx - \omega t + \varphi),$$
$$H_z(x,t) = H_{0z}\cos(kx - \omega t + \psi),$$

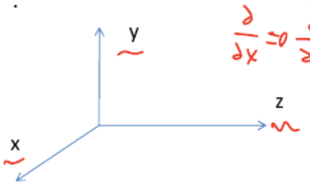
где:

- E_{0y} и H_{0z} - амплитуды электрического и магнитного полей соответственно,
- k - волновой вектор ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$, где λ - длина волны),
- ω - круговая частота ($\omega = 2\pi f$, где f - частота),
- φ и ψ - начальные фазы для электрического и магнитного полей.

Плоская электромагнитная волна

Допустим, что существует зависимость компонент поля только вдоль одного направления "z" :

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0$$



Так как в данном случае производные по поперечным координатам равны 0, то волновые уравнения можно переписать в виде

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0}$$

$\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{t}$ $\qquad$ $\mathrm{rot}\, \vec{H} = \frac{\partial D}{\partial t}$

Плоская электромагнитная волна

Уравнения Максвелла, записанные в развернутом виде, можно упростить:

$$\begin{cases} \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \; ! \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial x}} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \; ! \end{cases}$$

Продольные компоненты электромагнитного Ez и Hz поля равны 0:

$E_z, H_z = 0$

Плоская электромагнитная волна

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial H_x}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases} \qquad H_y \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial H_y}{\partial t} \end{cases}$$

Электромагнитное поле складывается из двух независимых пар $\underbrace{H_x, E_y}$ $\underbrace{H_y, E_x}$

Если возникает переменная во времени компонента H_x , то она порождает только E_y

Вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ортогональны $\qquad \vec{E} \perp \vec{H}$

Плоская электромагнитная волна. Линейно поляризованная волна

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathrm{E_x}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathrm{E_x}}{\partial t^2} = 0} \quad H_y \text{ подразумевано} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 \mathrm{H_y}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathrm{H_y}}{\partial t^2} = 0} \leftarrow E_x \text{ подразумевано}$$

$$\mathrm{E_x} = E_0 \sin(\omega t - k_z z) + \cancel{E_{01} \sin(\omega t + k_z z)} \qquad \mathrm{H}_y = H_0 \sin(\omega t - k_z z) + \cancel{H_{01} \sin(\omega t + k_z z)}$$

$$\mathrm{E_x} = E_0 \sin(\omega t - k_z z) \qquad \underbrace{\omega t - k_z z}_{\varphi} \qquad \mathrm{H}_y = H_0 \sin(\omega t - k_z z)$$

Фазовая скорость. Дисперсионные кривые

Фазовая скорость — скорость перемещения точки, обладающей постоянной фазой колебательного движения в пространстве, вдоль заданного направления.

Фазовая скорость может быть от бесконечности до ограниченной скорости света с показателем преломления среды.

7.1 Алгоритм Построения Дисперсионных кривых

1. **Задаем диапозон частот**:

$$\omega_i = \omega_0 + \Delta\omega \cdot i$$

Алгоритм построения дисперсионной кривой

$$\omega$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Disp}(k_z, \nu) = \det\left(\begin{bmatrix} m_{11}(k_z,\nu) & m_{12}(k_z,\nu) \\ m_{21}(k_z,\nu) & m_{22}(k_z,\nu) \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

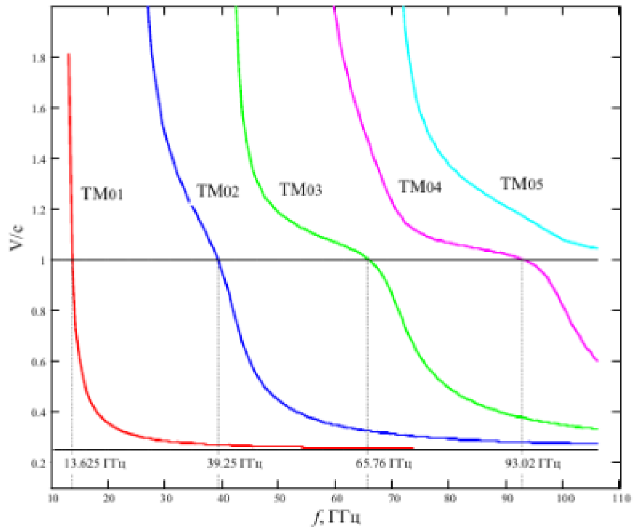
$$V$$

$$\kappa = \sqrt{k^2 - k_z^2}$$

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$$

$$k_z = \omega/V$$

Дисперсионные кривые



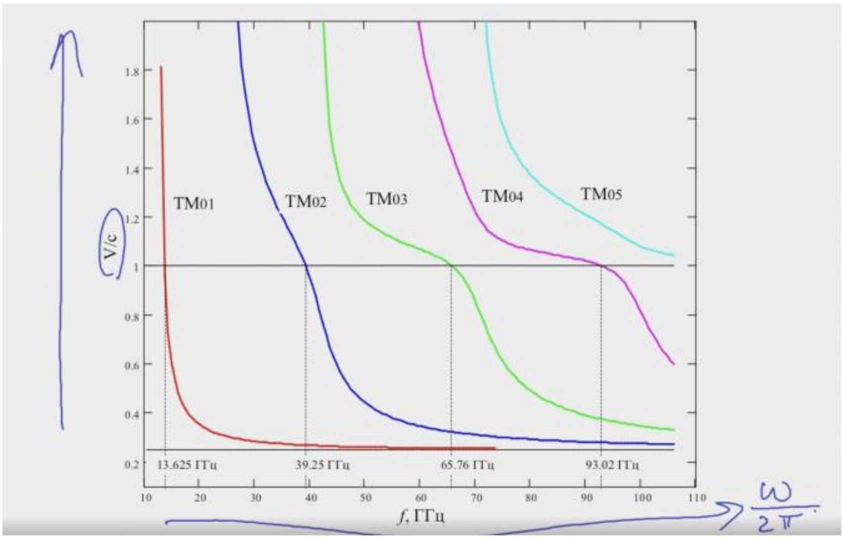
2. **Все найденные частоты подставляем в матрицу Дисперсионного Уравнения:**

$$\mathrm{Disp}(k_z, v) = \begin{vmatrix} m_{11}(k_z, v) & m_{12}(k_z, v) \\ m_{21}(k_z, v) & m_{22}(k_z, v) \end{vmatrix} = 0$$

3. **По формуле, находим фозовую скорость (V):**

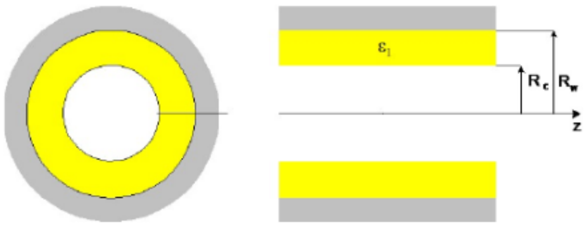
$$k_z = \frac{\omega_i}{V}$$

То есть, каждой ω_i находим *Фазовую Скорость* V_i



Как получают дисперсионное уравнение? Какие бывают граничные условия на границах раздела сред в волноводе?

Дисперсионное уравнение



$$\mathrm{Disp}(k_z,\nu)=\det\left(\begin{bmatrix} m_{11}(k_z,\nu) & m_{12}(k_z,\nu) \\ m_{21}(k_z,\nu) & m_{22}(k_z,\nu) \end{bmatrix}\right)=0$$

Граничные условия

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial E_z}{\partial r}\right)+\left(\kappa^2-\dfrac{\nu^2}{r^2}\right)E_z=0, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial H_z}{\partial r}\right)+\left(\kappa^2-\dfrac{\nu^2}{r^2}\right)H_z=0, \end{cases} \qquad \kappa=\sqrt{k^2-k_z^2} \qquad k=\omega\sqrt{\varepsilon}/c \qquad k_z=\omega/V$$

$$\begin{cases} E_z=0 \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial r}=0 \end{cases}$$

на границе диэлектрик-металл

$$\begin{cases} E_z=const \\ H_z=const \\ E_r\,\varepsilon=const \\ H_r\,\mu=const \end{cases}$$

на границе диэлектрик-диэлектрик

Дисперсионное уравнение

$$\mathrm{Disp}(k_z,\nu)=\det\left(\begin{bmatrix} m_{11}(k_z,\nu) & m_{12}(k_z,\nu) \\ m_{21}(k_z,\nu) & m_{22}(k_z,\nu) \end{bmatrix}\right)=0$$

$$m_{11}(k,\nu)=j\left(\frac{I'_\nu(\chi_0 kR_c)}{\chi_0 I_\nu(\chi_0 kR_c)}+\frac{\varepsilon\Delta_{21}(R_c,k,\nu)}{\chi_1\Delta_{22}(R_c,k,\nu)}\right) \qquad m_{12}(k,\nu)=\frac{\nu k}{R_c}\frac{\beta(\varepsilon-1)}{\beta\varepsilon-1}$$

$$m_{21}(k,\nu)=\frac{\nu k}{R_c}\frac{\beta(\varepsilon-1)}{\beta\varepsilon-1} \qquad m_{22}(k,\nu)=-j\left(\frac{I'_\nu(\chi_0 kR_c)}{\chi_0 I_\nu(\chi_0 kR_c)}+\frac{\Delta_{11}(R_c,k,\nu)}{\chi_1\Delta_{12}(R_c,k,\nu)}\right)$$

$$\Delta_{11}(r,k,\nu)=J'_\nu(\chi_1 kr)N'_\nu(\chi_1 kR_w)-J'_\nu(\chi_1 kR_w)N'_\nu(\chi_1 kr)$$

$$\Delta_{12}(r,k,\nu)=J_\nu(\chi_1 kr)N'_\nu(\chi_1 kR_w)-J'_\nu(\chi_1 kR_w)N_\nu(\chi_1 kr)$$

$$\Delta_{21}(r,k,\nu)=J'_\nu(\chi_1 kr)N_\nu(\chi_1 kR_w)-J_\nu(\chi_1 kR_w)N'_\nu(\chi_1 kr)$$

$$\Delta_{22}(r,k,\nu)=J_\nu(\chi_1 kr)N_\nu(\chi_1 kR_w)-J_\nu(\chi_1 kR_w)N_\nu(\chi_1 kr)$$

$$\chi_1=\sqrt{\beta^2\varepsilon-1}\Big/\beta \qquad \chi_0=\sqrt{1-\beta^2}\Big/\beta$$

$J_\nu(z)$ $N_\nu(z)$ функции Бесселя первого и второго рода

$I_\nu(z)$ $K_\nu(z)$ модифицированные функции Бесселя первого и второго рода

Дисперсионные кривые в полом прямоугольном волноводе. Выбор рабочей частоты для передачи сигнала

1. Записываем уравнения для каждой из областей:

$$\text{В области вакуума:} \qquad \frac{d^2E}{dz^2} + k_0^2 E = 0,$$

$$\text{В области диэлектрика:} \qquad \frac{d^2E}{dz^2} + k_1^2 E = 0,$$

$$\text{В области металла:} \qquad \frac{d^2E}{dz^2} + k_2^2 E = 0,$$

   где E - электрическое поле, k_0, k_1, k_2 - соответствующие волновые числа.

2. Сшиваем уравнения с помощью граничных условий:

   - На границе вакуум-диэлектрик: непрерывны все касательные составляющие.
   - На границе металл-диэлектрик: касательная напряженности электрического поля равна нулю, производная касательной напряженности магнитного поля не равна нулю.

Типы мод в волноводах.

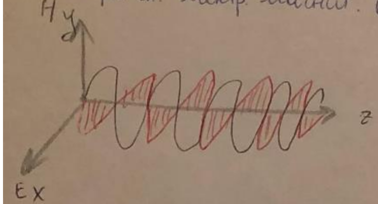
1. TEM

transverse electric magnetic

поперечн. электр. магнит. волны

$E_z = 0$

$H_z = 0$



x, y поперечн. коорд.

z продольн. коорд.

2. TM

поперечн. магнит. волна

$H_z^{a} \equiv 0$

3. TE

поперечная электр. волна

$E_z \equiv 0$

4. HEM

hibrid electric magnetic

(гибридные волн.)

$H_z \neq 0$ $E_z \neq 0$

def. Мода – элм. волна, соответ. коэфф-ты m и n.

Классификация мод в волноводе

Цилиндр. диэлектр. волноводы

E моды TM моды (transv. magn.) $H_z = 0$

H моды TE моды (transv. electr.) $E_z = 0$

HEM моды (hybrid electric magn.) $E_z \neq 0$ $H_z \neq 0$

Коаксиальный кабель

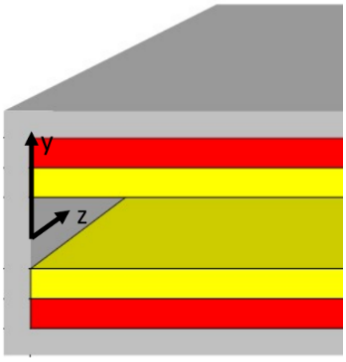
TEM (transv. elect. magn.) $E_z = 0$ $H_z = 0$

Прямоугольные диэлектрические волноводы

LSM моды (longitudinal section magn.) $H_y = 0$

LSE моды (longitudinal section electr.) $E_y = 0$

Классификация мод в волноводе



Цилиндрические диэлектрические волноводы

E-моды, TM - моды (Transverse Magnetic) $H_z = 0$

H-моды, TE - моды (Transverse Electric) $E_z = 0$

HEM - моды (Hybrid Electric Magnetic) $E_z \neq 0,\ H_z \neq 0$

Коаксиальный кабель

TEM - моды (Transverse Electric Magnetic) $E_z = 0,\ H_z = 0$

Прямоугольные диэлектрические волноводы

LSM – моды (Longitudinal Section Magnetic) $H_y = 0$

LSE – моды (Longitudinal Section Electric) $E_y = 0$

Уравнение бегущей волны. Связь частоты скорости, длины волны и волнового числа.

$\vec{E} \perp \vec{H}$

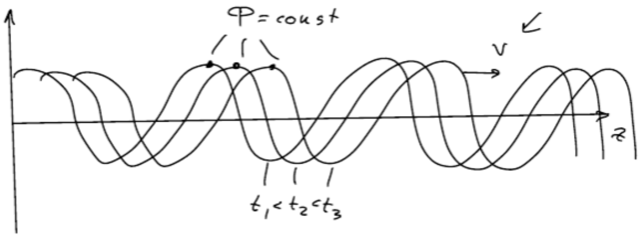
E_x и H_y

$$E_x = E_{01} \cos(\omega t - k_z z) + E_{02} \cos(\omega t + k_z z)$$

$$\omega = 2\pi f, \quad f = \frac{1}{T}$$

$$K_z = \frac{2\pi}{\lambda}$$

волн число



Аналоговый и цифровой способы передачи информации с помощью электромагнитных волн

Способы передачи инф-ии

1) Амплитудная модуляция

Звук моделирует (изменяет амп)

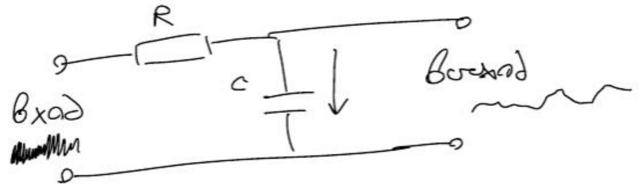
$$E = E_0(t)\cos(\omega t - k_z z)$$

звук.

AM

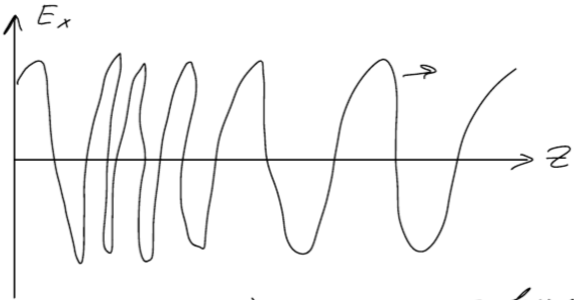
Прием звука:

Усилитель → ф-ль тр низких частот → динамик



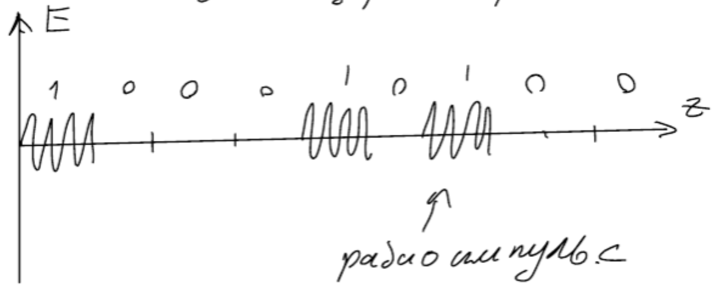
2) FM (frequency modulation)

$$E_x = E_0 \cos(\omega(t)\, t - k_z z)$$



1) и 2) — аналоговые методы передачи инфы

3) Цифровая передача сигнала
сот связь, wi fi, blue tooth.



радио импульс

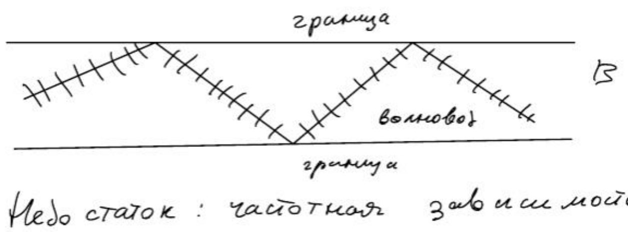
$$E_x = (\Phi(t) - \Phi(t-\tau))\,\cos(\omega t - k_z z)$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{bmatrix}$$

Хевисайда

$\Phi(t) - \Phi(t-\tau)$ — импульс

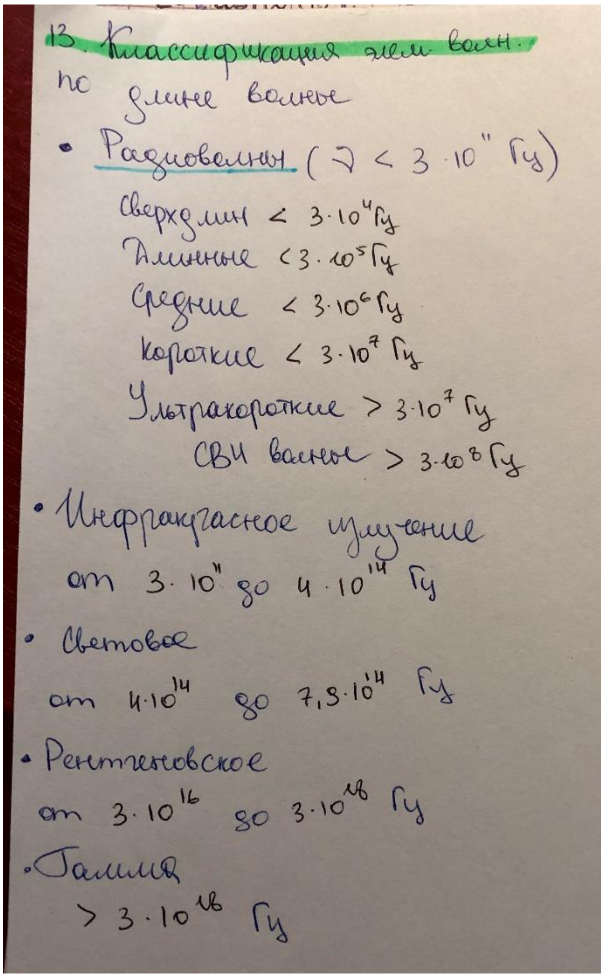
4) Волноводы



Недостаток: частотная зависимость
↓
дисперсия.

Дисперсия — зависимость скорости волны от частоты.

Классификация электромагнитных волн



13. Классификация эл.м. волн.

по длине волны

- Радиоволны ($\nu < 3 \cdot 10^{11}$ Гц)
  - Сверхдлин $< 3 \cdot 10^{4}$ Гц
  - Длинные $< 3 \cdot 10^{5}$ Гц
  - Средние $< 3 \cdot 10^{6}$ Гц
  - Короткие $< 3 \cdot 10^{7}$ Гц
  - Ультракороткие $> 3 \cdot 10^{7}$ Гц
    - СВЧ волны $> 3 \cdot 10^{8}$ Гц
- Инфракрасное излучение от $3 \cdot 10^{11}$ до $4 \cdot 10^{14}$ Гц
- Световое от $4 \cdot 10^{14}$ до $7{,}5 \cdot 10^{14}$ Гц
- Рентгеновское от $3 \cdot 10^{16}$ до $3 \cdot 10^{18}$ Гц
- Гамма $> 3 \cdot 10^{18}$ Гц

Показатель преломления. Распространение светового луча в неоднородной среде

Определение 13.1.

Среда называется **оптически неоднородной**, если показатель преломления в ней изменяется.

Определение 13.2.

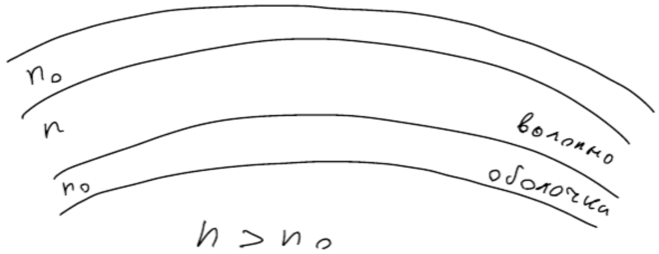
Абсолютный показатель преломления – величина, которая показывает, во сколько раз скорость света в среде меньше скорости света в вакууме:

$$n = \frac{c}{v}$$

Возьмём две точки, в которых показатели преломления разные. Тогда

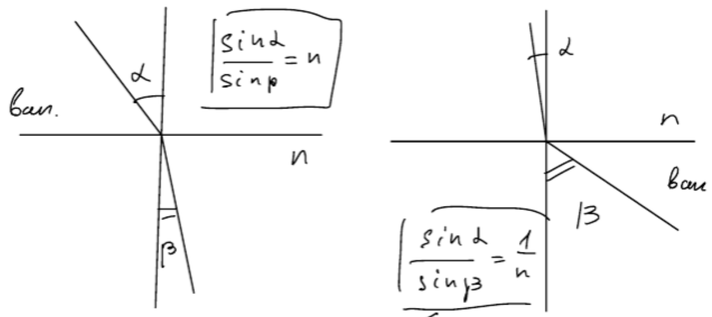
$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin(a)}{\sin(b)}$$

оптическое волокно



$n > n_0$

$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ $\qquad$ $n = \dfrac{c}{v}$



$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n}$$

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}}$$

$$\sin\beta = \underbrace{n\sin\alpha}_{<1} \qquad n > 1$$

$$\alpha\uparrow \Rightarrow n\sin\alpha = 1$$

β – не существ.

Полное внутр. отражение

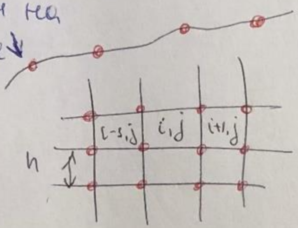
Численное решение уравнения Лапласа

Метод сеток.

Сетка:
- прямоуг. (просто) □
- триангл. (прав-но, оптим-но) △

① Разбиваем прост-во на прямоуг.

узлы на границе



- узлы сетки
- h – шаг сетки
- узлы на границе не мен-ся в течен. всего алгоритма
- φ в этих узлах известен
- потенц. для узлов в прост-ве случайно (но лучше φ_1 и φ_2)

2d

$$\Delta\varphi = 0$$

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h} \qquad x = ih$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{h} \qquad y = jh$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h} - \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{h}}{h} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{h} - \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{h}}{h} \qquad (2)$$

$$\Delta\varphi = (1) + (2) = 0$$

$$\varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1}}{4}$$

Алгоритм:

- генерация нач. значений
- в прост-ве между элек-ми для кажд. узла вычисляем потенциал по формуле, за исключ. граничных условий
- повтор пункта ↑ многократно, пока

$$\left|\varphi_{i,j}^{s-1} - \varphi_{i,j}^{\overset{\text{номер итерации}}{s}}\right| \le \underset{\uparrow\ \text{задан. точн}}{\varepsilon}$$

Численное решение диф. уравнения с начальными условиями

$y'' + \omega_0^2 \sin y = 0$

Нач. условия

$y_0 = y(t=0)$

$y_0' = y'(t=0)$

Δt интервал поиска ответа

N кол-во (•), разбив-х интервал

Цель – числен. решение диф-я уравн:

$y_i \quad i = 0 \ldots N, \; t_0 = 0, \; t_N = \Delta t$

Решение.

1) $y_1 = y_0 + y_0' dt$

$y_0' = \dfrac{y_1 - y_0}{dt}$

2) $y_0'' = \dfrac{y_1' - y_0'}{dt} \qquad y_0'' = -\omega_0^2 \sin y_0$

$y_1' = y_0' + y_0'' dt$

Общий случай $\quad y_n'' = -\omega_0^2 \sin(y_n)$

$y_2 = y_1 + y_1' dt = y_0 + y_0' dt + (y_0' + y_0'' dt) dt$

$y_2' = y_1' + y_1'' dt = y_0' + y_0'' dt + y_1'' dt$

3) $y_3 = y_2 + y_2' dt = y_0 + y_0' dt + (y_0' + y_0'' dt) dt + (y_0' + y_0'' dt + y_1'' dt) dt$

$y_3' = y_2' + y_2'' dt = y_0' + y_0'' dt + y_1'' dt + y_2'' dt$

4) $y_4 = y_3 + y_3' dt$

$y_4' = y_3' + y_3'' dt$

Аналитика

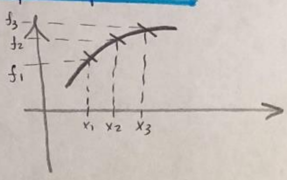
$\sin(y) \approx y \qquad y = A \cos(\omega_0 t + \alpha_0)$

Численное интегрирование, дифференцирование

Численное интегрирование и дифференцирование.

• Дифференцирование.

первая.



$$\frac{df}{dx} = \frac{f_2 - f_1}{dx}$$

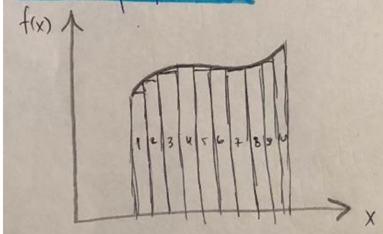
$$f_2 = f(x+dx)$$

$$f_1 = f(x)$$

вторая.

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{\frac{f_3 - f_2}{dx} - \frac{f_2 - f_1}{dx}}{dx}$$

• Интегрирование



a, b, N заданы

$i = 0, \dots, N$

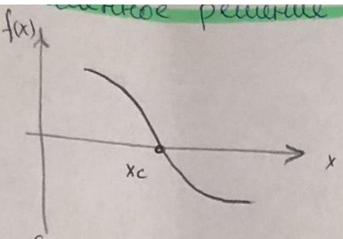
$$x_i = a + \frac{i}{N}(b-a)$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\,\Delta x$$

Численное решение уравнений

…енное решение уравнений.

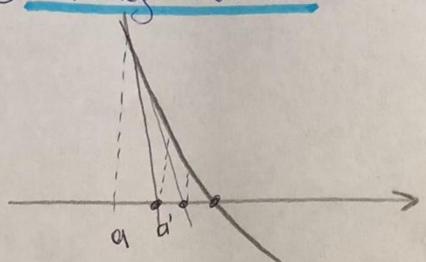


① Быстрая сход-ть. Высокая неточность

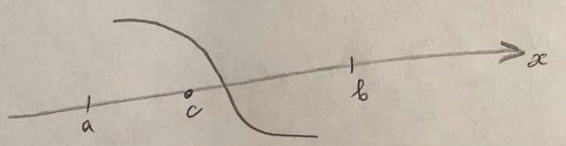
② Медлен. сходимость. Маленьк. неточность.

$f(x) = c$

① Метод Ньютона.



② Метод Половинного деления.



$$N = \frac{b-a}{\varepsilon}$$

① $c = \frac{a+b}{2}$

$a := c \Leftarrow f(a)f(c) > 0$

$b := c \Leftarrow f(b)f(c) > 0$

делим до тех пор, пока x_c не станет равно c.