1 лекция

3 сентября 2022 г. 11:42

def (числовой ряд) №1

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n : c_n \in \mathbb{C}$ - числовой ряд

$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots$

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} : S_n = c_1+\ldots+c_n$

$\exists \lim_{n\to\infty} S_n$

№2 **def (частичная сумма)**

S_n будем называть частичной суммой, если

$S_n = c_1+c_2+\ldots+c_n$

№6 **def (остаток ряда)**

$S_n = z_1 + \ldots + z_n$

$r_n = z_{n+1} + \ldots$

№7 **Утв**

Если ряд сходится, то и любой r_n - сход.

Если остаток r_n - сход, то и ряд сходится,

причем $S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $S_m = \sum_{k=1}^{m} u_k$

$S = S_m + r_m, \forall m \in \mathbb{N}$

Док-во:

$S_n = u_1 + \ldots + u_n$

$S_k^{(m)} = u_{m+1} + \ldots + u_{m+k}$

$n > m$ фиксируем m

$n = m+k$

$S_n = S_m + S_k^{(m)}$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) =$

$= \lim_{n\to\infty}(S_m + S_k^{(m)} - S_m - S_{k-1}^{(m)}) = r_n$

$= \lim_{n\to\infty}(S_k^{(m)} - S_{k-1}^{(m)}) = \lim_{k+m\to\infty} u_{m+k} = \lim_{n\to\infty} r_n = 0$

№3 **Th (необходимое условие сходимости ряда)**

Если ряд сход-тся, то $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

Док-во:

$\forall c_n = S_n - S_{n-1}$

Частичные суммы все ближе к друг другу: $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$

Th (1ое свойство рядов) №4

$\exists c \in \mathbb{C}$, если $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ - сходится, $z_n \in \mathbb{C}$

То сходится $\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot z_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z_n$

№5 **Th (2ое свойство рядов)**

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - сход.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ - сход-тся

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n+1}^{\infty} v_n$

Ex

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{6^n} =$

формула убыв. геом. прог.

$= 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{6}} + 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = \ldots$

Док-во:

$S_n' = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k$; $\lim_{n\to\infty}(c_n) = \lim_{n\to\infty}(S_n' - S_{n-1}') =$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k - \sum_{k=1}^{n-1} v_k\right) =$

$= \lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = 0$

По Th №3 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ сходится

Ex

1) $q \in \mathbb{C}: |q| < 1$

$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$

$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \approx \frac{1}{1-q}$

2) $|q| > 1$ расходится

3) $(1-1)+(1-1)\ldots$

$1-(1-1)-(1-1)\ldots$

$S_n = (-1)^{n+1}$

$S_{2n} = 0 \quad S_{2n+1} = 1$

Док-во:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$; $S_n' = \sum_{k=1}^{n} c z_k$

$\lim_{n\to\infty} z_n' = \lim_{n\to\infty}(S_n' - S_{n-1}') = \lim_{n\to\infty}(c(S_n - S_{n-1})) =$

$= c \cdot \lim_{n\to\infty} z_n = 0$

По Th №3 $\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot z_n)$ сходится

Th (критерий Коши) №8

Для сходимости ряда необходимо и достаточно

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0: \forall n > N \; \forall p \in \mathbb{N}_+$

$|u_n + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$

Док-во:

$\forall \{S_N\}$ и применим критерий Коши для последовательностей

Ex

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}: \alpha < 1 \quad \alpha < 1 \Rightarrow n^\alpha < n$

$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha}$

$> \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} >$

$> \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

расходится

Знакопостоянные ряды

Если ряд знакопостоянный, то последовательность частичных сумм монотонна.

№9 **Th (признак сравнения)**

$\exists u_n \geq 0, v_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$

$u_n = O(v_n)$, тогда

если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - сходится

если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - расходится, то и $\sum_{k=1}^{\infty} v_n$ - расходится

Док-во: ($\Rightarrow$)

$\exists u_n = O(v_n) \Rightarrow \exists C > 0: u_n \leq v_n \cdot C$

Если ряд сходится, то последовательность частичных сумм ограничена $\forall S_m = \sum_{k=1}^{m} v_k \quad \exists M: S_m < M \; \forall m \Rightarrow$

$\Rightarrow C \cdot S_m < C \cdot M \Rightarrow S_m' = \sum_{k=1}^{m} u_k \leq C \cdot M: \forall m$

($\Leftarrow$) $\exists u_k$ - расходится

Значит $S_m' = \sum_{k=1}^{m} u_k > C \cdot M : \forall M$

$\Rightarrow C \cdot S_m > C \cdot M \Rightarrow S_m > M : \forall M$

Значит v_k расходится

Док-во:

$\exists v_n \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$

$u_n = O(v_n) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: u_n \leq k \cdot v_n$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n \cdot k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$

Следствие №10

$\exists v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

и $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$

Тогда

1) Если $\sum v_n$ сходится и $0 \leq k < +\infty \Rightarrow$ сходится и $\sum u_n$

2) если $\sum u_n$ - расход. и $0 < k \leq +\infty \Rightarrow$ расходится $\sum v_n$

В частности, если $u_n \sim v_n \Rightarrow$ сход. или расход. одновременно

Ex

1) $u_n = \frac{\sin^2(n\alpha)}{2^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

Th №11

$\exists u_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$

если $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \alpha > 1$

Тогда ряд сходится,

если же $\frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$,

$\alpha \leq 1$, то ряд расходится

Док-во: D ← эскиз

$\forall \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$

$\alpha > 1$

$S_n = 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1$

$\forall f(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}, x \in [n-1, n]$

$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} = -\frac{\alpha-1}{(n-1+\Theta)^\alpha}, 0 < \Theta < 1$

Формула Лагранжа $f(n+\Theta(n-(n-1)))$

$\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{(n-1+\Theta)^\alpha} > \frac{\alpha-1}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha-1}$

$\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right]$

Признак Даламбера №12

$u_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

1) если $\exists q \in \mathbb{R} \quad 0 < q < 1$

и $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q, \forall n \in \mathbb{N}$

То ряд сходится

2) если $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Rightarrow$ ряд расх.

Док-во:

$u_n \leq q^{n-1} \cdot u_1$

геом. прог. сходится при $q < 1$

Признак Коши №13

$\exists u_n \geq 0, n \in \mathbb{N} \quad \sum u_n$

если $\exists q: 0 < q < 1, \sqrt[n]{u_n} \leq q \Rightarrow$ сходит.

если же $\sqrt[n]{u_n} \geq 1 \Rightarrow$ расход

Док-во:

$\sqrt[n]{u_n} \leq q \Rightarrow u_n \leq q^n$

№14 **Следствие**

Если $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$

> 1 расходится

$= 1$ неизвестно

< 1 сходится