Чернякова Валерия, 1304 кр 1, вариант I

Задание 1. $a_n = \dfrac{(n^{2n})(2n)!}{5^{2n}(n!)^4}$

Воспользуемся признаком сход-ти Даламбера: найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{\left((n+1)^{2(n+1)}\right)\left(2(n+1)\right)!}{5^{2(n+1)}\left((n+1)!\right)^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+1)^{2n+2}\right)\left(2(n+1)\right)!\,\cancel{(5^2)^n}\,(n!)^4}{5^{\cancel{2n}+2}\left((n+1)!\right)^4\cdot(n^{2n})(2n)!} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2n}(n+1)^2\,\overbrace{\cancel{(2n+2)}!}^{(2n+1)(2n+2)}\,\cancel{n!\,n!\,n!\,n!}}{25\,\underbrace{\cancel{(n+1)!\,(n+1)!\,(n+1)!\,(n+1)!}}_{(n+1)^4}\,n^{2n}\,\cancel{(2n)!}} =$$

$$= \frac{1}{25}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2n}\,\cancel{(n+1)^2}\,(2n+1)\cdot 2\cancel{(n+1)}}{\underbrace{\cancel{(n+1)^4}}_{(n+1)}\,n^{2n}} =$$

$$= \frac{2}{25}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \frac{2}{25}\lim_{n\to\infty}\left(\boxed{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}^{\to e}}\right)^2\left(\frac{\frac{2n+1}{n}}{\frac{n+1}{n}}\right) =$$

2 зам. предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$$= \frac{2e^2}{25}\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to 2}{\frac{2n}{n}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{\overset{\to 1}{\frac{n}{n}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{n}}} = \frac{2e^2}{25}\cdot\lim_{n\to\infty} 2 = \frac{4e^2}{25}$$

$\dfrac{4e^2}{25} \approx 1,18225 > 1 \Rightarrow$ ряд расходится

Ответ: ряд расходится

Чернякова Валерия, 1304, кр 1, вариант I

Задание 2. $a_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$

Воспользуемся радикальным признаком Коши: найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}} = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \left[1^\infty\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1}}\right)^{n\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)} =$$

$= \Big[\ \left(1+\underbrace{\left(\overset{\to 1}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)}_{\to 0}\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1}}$ при $n\to\infty$, обозначим

$\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 = t$, тогда $(1+t)^{\frac{1}{t}}$, где $t\to 0$, значит,

мы можем воспольз-ся следствием из 2 замеч. предела:

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\Big] = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)^*} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$^*\lim_{n\to\infty} n\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-n\right) = [\infty-\infty] =$$

$= \Big[$ воспольз. понижением степени $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$: $\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 =$

$= -\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\left(\frac{2\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2}\right) = -2\left(\frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{2}\right) = -2\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}\Big] =$

$$= -2\lim_{n\to\infty} n\sin^2\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = -2\lim_{n\to\infty} n\,\frac{\overset{\to 1}{\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)}\ \overset{\to 1}{\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot 2\sqrt{n}\cdot 2\sqrt{n}} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2\sqrt{n}} \Rightarrow \\ t \to 0 \end{array}\right.$$

воспользуемся 1 замеч. пределом: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\Big]$ $\stackrel{\cdot}{=}$

/2

$\ominus -2\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n}}{4\cancel{n}} = -2\lim \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,606\ldots < 1 \Rightarrow$ ряд сходится

Ответ: ряд сходится.

Задание 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$

Воспользуемся: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n(x)|} < 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\right| |x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|1-\dfrac{1}{n}\right|^n |x| = [1^\infty] =$

$= |x| \lim\limits_{n\to\infty} \left|1-\dfrac{1}{n}\right)^n = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1+\left(\dfrac{1}{-n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} =$

$\Big[$ по 2 замеч. пределу $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e\Big] = |x| \lim\limits_{n\to\infty} e^{-1} = \dfrac{|x|}{e}$

$\dfrac{|x|}{e} < 1$ $\left[\begin{array}{lll} \dfrac{x}{e} < 1 & x < e & \\ \dfrac{-x}{e} < 1 & -x < e & x > -e \end{array}\right.$ $\Rightarrow (-e, e)$ - интервал.

$R = e$

$x_1 = -e$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot (-e)^n$

т.к. один из множителей $(-e)^n \Rightarrow$ ряд знакочередующийся

$n=1: (1-1)^1 \cdot -e = 0$

$n=2: \left(1-\dfrac{1}{2}\right)^4 \cdot (-e)^2 > 0 = \left|\dfrac{1}{2^4} \cdot (e)^2\right|$

$\wedge$

$n=3 \quad \left(1-\dfrac{1}{3}\right)^9 \cdot (-e)^3 < 0 = \left|\dfrac{2^9}{3^9} \cdot (e^3)\right|$

$\vee$

$n=4 \quad \left(1-\dfrac{1}{4}\right)^{16} \cdot (-e)^4 > 0 = \left|\dfrac{3^{16}}{4^{16}} \cdot (e^4)\right|$

$\dfrac{1}{2^4} \cancel{ee} \overset{?}{>} \dfrac{2^9 \cdot e^3}{3^9}$

$\dfrac{1}{2^4} \overset{?}{>} \dfrac{2^9 \cdot e}{3^9}$ - нет

$\dfrac{2^9 \cancel{eee}}{3^9} \overset{?}{>} \dfrac{3^{16} \cancel{eeee}}{4^{16} (2^{32})}$

$1 > \dfrac{3^{25}}{2^{41}}$ $\cdot e$

Т.к. ряд чьи членов не монотон. убывают по модулю $\Rightarrow$ ряд не сходится. Проверим, найдя $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot(-e)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{-n}\cdot e^n = \left[2 \text{ зам. предел } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\right] = \lim_{n\to\infty} e^{-n}\cdot e^n = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{e^n} = 1 \ (1\neq 0)$$

Т.о, в точке $x_1=-e$ ряд расходится

$x_2=e$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}e^n$

Воспользуемся необходимым признаком сходимости: найдем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (если предел 0 $\Rightarrow$ ряд сходится)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}e^n = [\text{по аналогии с верхним пределом}] =$$

$= 1 \ (1\neq 0) \Rightarrow$ ряд расходится

Т.о. в точке $x_2=e$ ряд расходится

Ответ: Интервал сходимости $(-e, e)$

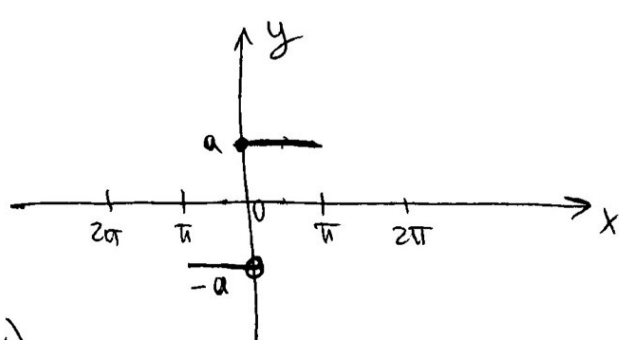
$R=e$

Область сходимости $(-e, e)$

Степен. ряд расходится на обоих концах интервала

Задание 4.

$$f(x)=\begin{cases} a, & 0\le x\le\pi \\ -a, & -\pi\le x<0\end{cases}$$



Разложение в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -a\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} a\,dx =$$

$$= \frac{-a}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx + \frac{a}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = \frac{-a}{\pi}\left(x\,\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{a}{\pi}\left(x\,\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{-a}{\pi}\left(0-(-\pi)\right) + \frac{a}{\pi}\left(\pi - 0\right) = \frac{-a\cdot\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} + \frac{a\cdot\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = -a + a = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -a\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} a\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{-a}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)\,dx + \frac{a}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\,dx\,,$$

т.к. наша функция $f(x) \neq f(-x)$, а $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная $\Rightarrow$ a_0 и $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -a\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} a\sin(nx)\,dx =$$

$$= \frac{-a}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)\,dx + \frac{a}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)\,dx = \left[\text{замена } \begin{matrix} nx = t \\ dnx = dt \\ x = \frac{t}{n}\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} n\,dx = dt \\ \Downarrow \\ dx = \frac{dt}{n}\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{-a}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(t)}{n}\,dt + \frac{a}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(t)}{n}\,dt = \frac{-a}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}\sin(t)\,dt +$$

$$+ \frac{a}{\pi\cdot n}\int_{0}^{\pi}\sin(t)\,dt = \frac{-a}{\pi n}\left(-\cos(t)\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{a}{\pi n}\left(-\cos(t)\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{-a}{\pi n}\left(-\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{a}{\pi n}\left(-\cos(nx)\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{a}{\pi n}\left(-\cos(0) - (-\cos(\pi n))\right) + \frac{a}{\pi n}\left(-\cos(\pi n) - (-\cos(0))\right) =$$

$$= -\frac{a}{\pi n}\left(-1 + (-1)^n\right) + \frac{a}{\pi n}\left(-(-1)^n + 1\right) = \frac{a}{\pi n} - \frac{a(-1)^n}{\pi n} - \frac{a(-1)^n}{\pi n} + \frac{a}{\pi n} =$$

$$= \frac{2a}{\pi n} - \frac{2a(-1)^n}{\pi n} = \frac{2a}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\cdot \sin(nx)$$

$x_0 = 0$ – точка разрыва функции [видно по графику, + по аналит. задан. параметрам функции]

$$\Rightarrow S(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$$

$$f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -a$$

$$f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = a$$

$$S(x_0) = \frac{-a+a}{2} = 0$$

Ответ: $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\cdot \sin(nx)$

$S(x_0) = 0$

Задание 5. $\int_0^x \ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,dt = \int_0^x \ln\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|^{\frac{1}{2}} dt =$

$$= \int_0^x \frac{\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}{2}\,dt = \begin{bmatrix} \text{замена } z = \frac{t}{2} \\ dz = d\frac{t}{2} \\ 2dz = dt \end{bmatrix} = \int_0^x \frac{\ln|\operatorname{ctg} z|}{2}\,2dz =$$

$$= \int_0^x \ln|\operatorname{ctg} z|\,dz = \begin{bmatrix} \text{интегр. по частям} \\ \int u\,dv = uv - \int v\,du \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} u = \ln|\operatorname{ctg} z| & du = d\ln|\operatorname{ctg} z| \\ dv = dz & \Rightarrow v = \int dv = \int dz = z \Rightarrow \end{bmatrix}$$

$$du = (\ln|\mathrm{ctg}\, z|)' dz = \frac{1}{|\mathrm{ctg}\, z|} \cdot |\mathrm{ctg}\, z|' dz = -\frac{1}{|\mathrm{ctg}\, z| \sin^2(z)} dz \Bigg] =$$

$$= z \ln|\mathrm{ctg}\, z| \Big|_0^x \cancel{-} \int_0^x z \cdot \frac{-1}{|\mathrm{ctg}\, z| \cdot \sin^2(z)} dz = \frac{t}{2} \ln\left|\mathrm{ctg}\frac{t}{2}\right| \Big|_0^x + \int_0^x \frac{z}{|\mathrm{ctg}\, z| \sin^2(z)} dz =$$

$$= \frac{x}{2} \ln\left(\mathrm{ctg}\frac{x}{2}\right) - \frac{0}{2} \ln\left|\mathrm{ctg}\frac{0}{2}\right| + \int_0^x \frac{z\, dz}{|\mathrm{ctg}\, z| \sin^2|z|} =$$

меняем пределы интегр. $a = 0, b = x$

1) $z = \frac{t}{2} = \frac{0}{2} = 0$

2) $z = \frac{t}{2} = \frac{x}{2}$

$$= \frac{x}{2} \ln\left(\mathrm{ctg}\frac{x}{2}\right) + \underbrace{\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{z\, dz}{|\mathrm{ctg}\, z| \sin^2(z)}}_{1}$$

$$1 \quad \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{z\, dz}{\mathrm{ctg}\, z \sin^2 z} = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{z\, dz}{\frac{\cos z}{\sin z} \sin^2 z} = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{z\, dz}{\cos z \sin z},$$