

Секованов Валерий Сергеевич

доктор педагогических наук, профессор

Фатеев Александр Сергеевич

Матыцина Татьяна Николаевна

кандидат физико-математических наук, доцент

Дорохова Жанна Викторовна

Костромской государственный университет

Sekovanovvs@yandex.ru, hlg2009@yandex.ru, taturja@ya.ru, zanna4444@mail.ru

ПОСТРОЕНИЕ ФРАКТАЛОВ С ПОМОЩЬЮ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ КРЕАТИВНОСТИ СТУДЕНТОВ*

В данной работе рассматривается подход, нацеленный на развитие креативности студентов при построении фракталов с помощью аффинных преобразований. Предлагается тетрадная форма обучения, включающая четыре вида творческой деятельности: математическая, алгоритмическая, художественная и информационная. Такой подход дает возможность студенту оказаться в роли математика, программиста, компьютерного художника и активного пользователя Интернет, который умеет находить и анализировать научные статьи и сайты.

Ключевые слова: креативность, развитие креативности, форма обучения, студенты, фракталы.

Как известно, креативность в самом широком смысле характеризует способность личности к творчеству. Гилфорд выделил следующие параметры креативности:

а) оригинальность — способность продуцировать отдаленные ассоциации, необычные ответы;

б) семантическая гибкость — способность выявить основные свойства объекта и предложить новый способ его использования;

в) образная адаптивная гибкость — способность изменить форму стимула таким образом, чтобы увидеть в нем новые признаки и возможности для использования;

г) семантическая спонтанная гибкость — способность продуцировать разнообразные идеи в нерегламентированной ситуации [4].

Мы будем понимать креативность как неотъемлемую часть человеческой духовности, определяющую устойчивую характеристику личности, способной творчески мыслить, осуществлять творческую деятельность, изменять стереотипы с целью создания нового, воспринимать и чувствовать проблемы, новизну, красоту и гармонию, прогнозировать результаты деятельности, нестандартно решать широкий круг задач, которые ставит информационное общество [4].

Фрактал для студента является новым понятием, изучение которого требует нестандартного мышления. Поскольку фракталы являются одними из самых красивых математических объектов, то изучение данной темы развивает у студента эстетические качества.

При изучении темы «Построение фракталов с помощью аффинных преобразований» студенту предлагаются четыре вида творческой деятельности: математическая (изучение метрических свойств фракталов и изучение аффинных преобразований), алгоритмическая (разработка алгоритмов для построения фракталов с помощью информации

онных и коммуникационных технологий (ИКТ)), эстетическая (создание художественных композиций с помощью фракталов), информационная (анализ литературы и сайтов, посвященных фракталам). Таким образом, реализуется тетрадная форма творческой деятельности студента, нацеленная на развитие его креативности. В работах [1–13] излагается методика изучения математики и фрактальных множеств, находящихся в настоящее время приложении от педагогики до нанотехнологий.

Опишем каждый вид деятельности студента при изучении темы «Построение фракталов с помощью аффинных преобразований».

I. Математическая деятельность. В качестве начальной фигуры возьмем квадрат единичной длины и к каждой его точке применим совокупность аффинных преобразований, записанных в матричной форме. Суть конструирования фрактала, сводится к выбору аффинных преобразований и использованию итерационных процессов (на рис. 1 указан метод определения аффинного преобразования T) (см. также [11]).

Пусть квадрат $OACB$ переходит в параллелограмм $O'A'C'B'$ (см. рис. 1) при аффинном преобразовании T , заданном системой соответствий (1)

$$\begin{aligned} O(0,0) &\rightarrow O'(b^1, b^2) \\ A(0,1) &\rightarrow A'(a_1^2, a_2^2) \\ B(1,0) &\rightarrow B'(a_1^1, a_2^1) \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда аффинное преобразование можно представить в матричной форме:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 - b^1 & a_2^1 - b^1 \\ a_1^2 - b^2 & a_2^2 - b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

Суть алгоритма построения фрактала достаточно проста. На первом шаге исходный квадрат преобразуется несколькими аффинными преобразованиями в параллелограммы. На втором шаге каждый параллелограмм с помощью тех же аффинных преобразований вновь преобразуется в параллелограмм и данный процесс продолжается.

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-18-10304).

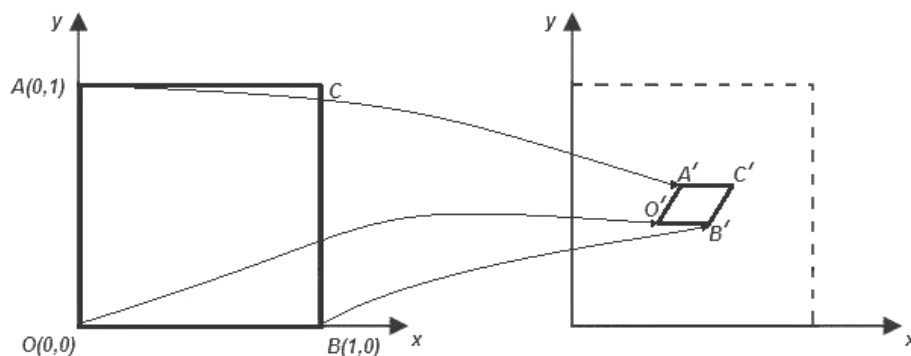


Рис. 1. Выбор аффинного преобразования

Фрактал 1. Кленовый лист. Математическая сторона построения фракталов, связанная с итерационными процессами, разработана Хатчинсоном, а алгоритм построения предложен Барнсли. В качестве начальной фигуры возьмем квадрат единичной длины и к каждой его точке применим совокупность аффинных преобразований, записанных в матричной форме:

$$A_1: \begin{pmatrix} 0,121 & -0,575 \\ 0,332 & 0,209 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,57 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,121 \cdot x - 0,575 \cdot y - 0,57 \\ 0,332 \cdot x + 0,209 \cdot y + 0,1 \end{pmatrix};$$

$$A_2: \begin{pmatrix} 0,121 & 0,575 \\ -0,332 & 0,209 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,57 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,121 \cdot x + 0,575 \cdot y + 0,57 \\ -0,332 \cdot x + 0,209 \cdot y + 0,1 \end{pmatrix};$$

$$A_3: \begin{pmatrix} 0,5 & 0,04 \\ 0,04 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot x + 0,04 \cdot y + 0,04 \\ 0,04 \cdot x + 0,6 \cdot y + 0,8 \end{pmatrix};$$

$$A_4: \begin{pmatrix} -0,113 & -0,196 \\ 0,196 & -0,113 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,2 \\ -0,46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,113 \cdot x - 0,196 \cdot y - 0,2 \\ 0,196 \cdot x - 0,113 \cdot y - 0,46 \end{pmatrix};$$

$$A_5: \begin{pmatrix} -0,113 & 0,196 \\ -0,196 & -0,113 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ -0,46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,113 \cdot x + 0,196 \cdot y + 0,2 \\ -0,196 \cdot x - 0,113 \cdot y - 0,46 \end{pmatrix};$$

$$A_6: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \\ 0 \cdot x + 0,4 \cdot y - 0,6 \end{pmatrix}.$$

Построение данного фрактала осуществляется с помощью аффинных преобразований $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ (рис. 2) (см. также [13]).

Условимся матричную форму T записывать в виде:

$(a_1^1 - b^1, a_2^1 - b^1, a_1^2 - b^2, a_2^2 - b^2, b^1, b^2)$ (см. рис. 1). Тогда наши 6 преобразований будут иметь вид:
 $(0,121, -0,575, 0,332, 0,209, -0,57, 0,1)$,
 $(0,121, 0,575, -0,332, 0,209, 0,57, 0,1)$,
 $(0,5, 0,04, 0,04, 0,6, 0,04, 0,8)$,
 $(-0,113, -0,196, 0,196, -0,113, -0,2, -0,46)$,
 $(-0,113, 0,196, -0,196, -0,113, 0,2, -0,46)$,
 $(0,0, 0,4, 0, -0,6)$.

Блок-схема, указывающая построение фрактала, приведена на рисунке 7.

Заметим, что при построении фракталов с помощью аффинных преобразований возникают

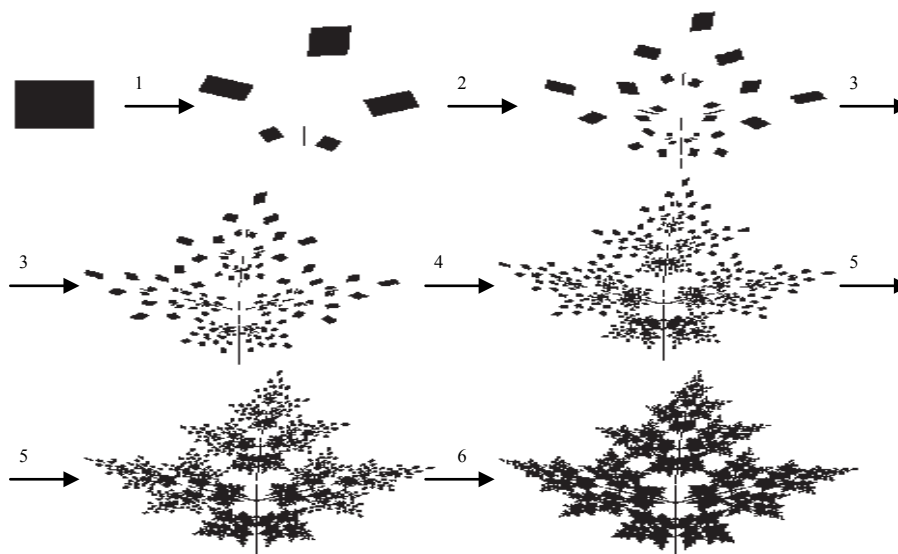


Рис. 2. Кленовый лист

трудности: подбор коэффициентов в матрицах, обеспечивающий построение соответствующей компоненты фрактала; выбор количества аффинных преобразований, наиболее адекватно обеспечивающих построение фрактала; выбор среды программирования, обладающей достаточным арсеналом средств, необходимых для построения фрактала. Следует отметить, что перед разработкой алгоритма обучаемым полезно повторить темы: «задание матрицы аффинного преобразования», «умножение и сложение матриц». Базируясь на математических алгоритмических знаниях, студент строит блок-схему. При разработке алгоритма построения фрактала с помощью аффинных преобразований обучаемым важно достаточно хорошо знать графические средства, которыми обладает данная среда программирования и уметь навыки программирования.

Фрактал 2. Пыль Серпинского. Для построения пыли Серпинского можно использовать четыре сжимающих геометрических преобразования, каждое из которых переводит исходный квадрат в соответствующие квадраты (рис. 3–4).

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix};$$

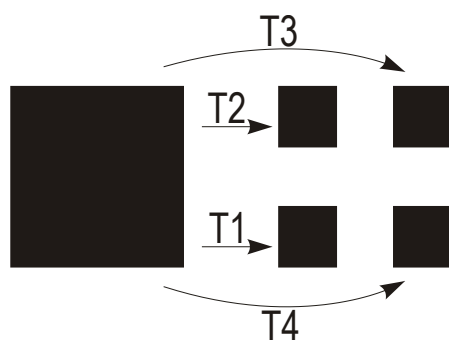


Рис. 3. Аффинные преобразования

$$T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix};$$

$$T_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Опыт преподавания фрактальной геометрии в рамках дисциплин по выбору показывает, что обучение фрактальной геометрии обуславливает актуализацию знаний учащихся и обеспечивает включение их в самостоятельный поиск решений нестандартных задач, способствует интеграции модальностей восприятия обучаемых и развитию креативности учащихся посредством формирования системы креативных качеств, адекватных специальным видам творческой математической деятельности. Ниже мы приводим изображения фракталов с помощью аффинных преобразований и ИКТ (рис. 3–4 и [11]).

Фрактал 3. Узоры. Подберем соответствующие коэффициенты матриц для построения фрактала Узоры и строим четыре итерации фрактала (рис. 5).

Фрактал 4. Летучая мышь. Фрактал Летучая мышь (рис. 6) строится с помощью аффинных преобразований (блок-схема построения фрактала изображена на рисунке 8).

II. Алгоритмическая деятельность. Приведем алгоритм построения фрактала «Кленовый лист» (рис. 7).

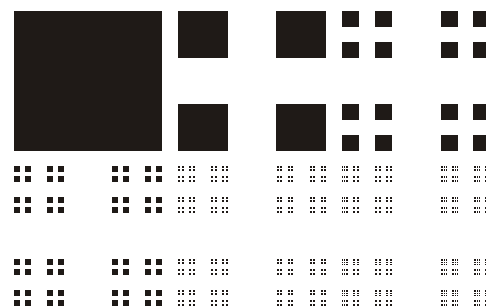


Рис. 4. Итерации пыли Серпинского

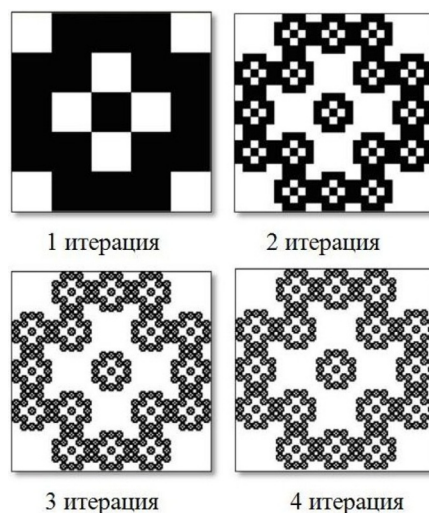


Рис. 5. Узоры

(1/5,0,0,1/5,0,1/5),
 (1/5,0,0,1/5,0,2/5),
 (1/5,0,0,1/5,0,3/5),
 (1/5,0,0,1/5,1/5,0),
 (1/5,0,0,1/5,1/5,1/5),
 (1/5,0,0,1/5,1/5,3/5),
 (1/5,0,0,1/5,1/5,4/5),
 (1/5,0,0,1/5,2/5,0),
 (1/5,0,0,1/5,2/5,2/5),
 (1/5,0,0,1/5,2/5,4/5),
 (1/5,0,0,1/5,3/5,0),
 (1/5,0,0,1/5,3/5,1/5),
 (1/5,0,0,1/5,3/5,3/5),
 (1/5,0,0,1/5,3/5,4/5),
 (1/5,0,0,1/5,4/5,1/5),
 (1/5,0,0,1/5,4/5,2/5),
 (1/5,0,0,1/5,4/5,3/5).



Рис. 6. Фрактал Летучая мышь

Укажем программу построения фрактала «Пыль Серпинского» ([см. 12]).

```
(1) uses graph;
(2) const
(3)   iter = 3;
(4)   x_max = 160;
(5)   y_max = 160;
(6)   tr_num = 4;
(7)   tr: array [1..tr_num, 1..6] of real = ((1/3, 0, 0, 1/3, 0, 0),
(8)                                           (1/3, 0, 0, 1/3, 0, 2/3),
(9)                                           (1/3, 0, 0, 1/3, 2/3, 2/3),
(10)                                          (1/3, 0, 0, 1/3, 2/3, 0));
(11) type
(12)   Mass = array [0..y_max, 0..x_max] of byte;
(13) procedure SetZero(var m: Mass);
(14) var x, y: integer;
(15) begin
(16)   for y:=0 to y_max do
(17)     for x:=0 to x_max do
(18)       m[y, x]:=0;
(19)   end;
(20) var
(21)   i, j, k, l, x, y, dr, dm: integer;
(22)   S, T: Mass;
(23) begin
(24)   For i:=y_max div 4 to 3*y_max div 4 do
(25)     For j:=x_max div 4 to 3*x_max div 4 do
(26)       T[i, j]:=1;
(27)   For k:=1 to iter do begin
(28)     For i:=0 to y_max do
(29)       For j:=0 to x_max do begin
(30)         If T[i, j]=1 then
(31)           For l:=1 to tr_num do begin
(32)             x:=Round(tr[l, 1]*j+tr[l, 2]*i+tr[l, 5]*x_max);
(33)             y:=Round(tr[l, 3]*j+tr[l, 4]*i+tr[l, 6]*y_max);
(34)             If (y>=0) and (y<=y_max) and (x>=0) and
(x<=x_max) then
(35)               S[y, x]:=1;
(36)           end;
(37)         end;
(38)       T:=S;
(39)     SetZero(S);
(40)   end;
(41)   dr:=detect;
(42)   InitGraph(dr, dm, '');
(43)   ClearDevice;
(44)   For i:=0 to y_max do
(45)     For j:=0 to x_max do
(46)       If T[i, j]=1 then PutPixel(j, i, 15);
(47)   readln;
```

```
(48) CloseGraph;
```

```
(49) end.
```

Схема работы выше приведенной программы: в первой строке подключается графический модуль, необходимый для вывода изображения на экран. Важным элементом в программе является *tr* – двумерный константный массив, *i*-ая строка которого определяет коэффициенты *i*-ого аффинного преобразования, применяемого к множеству. В одиннадцатой строке определяется тип *Mass* – двумерный массив, состоящий из *y_max+1* строки и *x_max+1* столбца. В строках 13–19 определяется процедура, заполняющая переданный ей двумерный массив нулями. Массивы *S* и *T* определяют множество точек плоскости. В строках 24–26 задается начальное множество, представляющее собой прямоугольник. Далее в цикле по переменной *k* применяются аффинные преобразования. В строке 34 выполняется проверка, попадает ли точка, полученная в результате применения аффинного преобразования, в диапазон от 0 до *x_max* по оси абсцисс и от 0 до *y_max* по оси ординат. Если условие выполнено, то точка с координатами (*x*, *y*) попадает в массив *S*. В строках 41–43 выполняется инициализация графического режима и очистка экрана. Далее в цикле на экране отображаются точки полученного множества. Укажем на рисунке 8, записанный в виде блок-схемы алгоритм построения фрактала «Летучая мышь», базирующийся на применении аффинных преобразований.

Фрактал «Узоры» строится с помощью программы, строящей фрактал «Пыль Серпинского» при замене четырех аффинных преобразований на семнадцать аффинных преобразования, указанных на рисунке 5.

III. Информационная деятельность. Здесь студентам предлагается провести нацеленный на развитие креативности анализ книг и сайтов, связанных с темой «Построение фракталов с помощью аффинных преобразований» и последующим изложением результатов исследования в виде реферата и доклада.

Предложено провести анализ следующих книг:

Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах / пер. с англ.; под ред. Т.Э. Крэнке-ля. – М.: Постмаркет, 2000; *Морозов А.Д.* Введение в теорию фракталов. – М., Ижевск, 2002; *Пайтген Х.О.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем / Х.О. Пайтген, П.Х. Рихтер; пер. с англ.; под ред. А.Н. Шарковского. – М.: Мир, 1993; *Секованов В.С.* Элементы теории фрактальных множеств: Изд. 5-е, перераб. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013; *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы (миниатюры из бесконечного рая). – М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2001; *Falconer K.* Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. – New York: John Wiley, 1990.

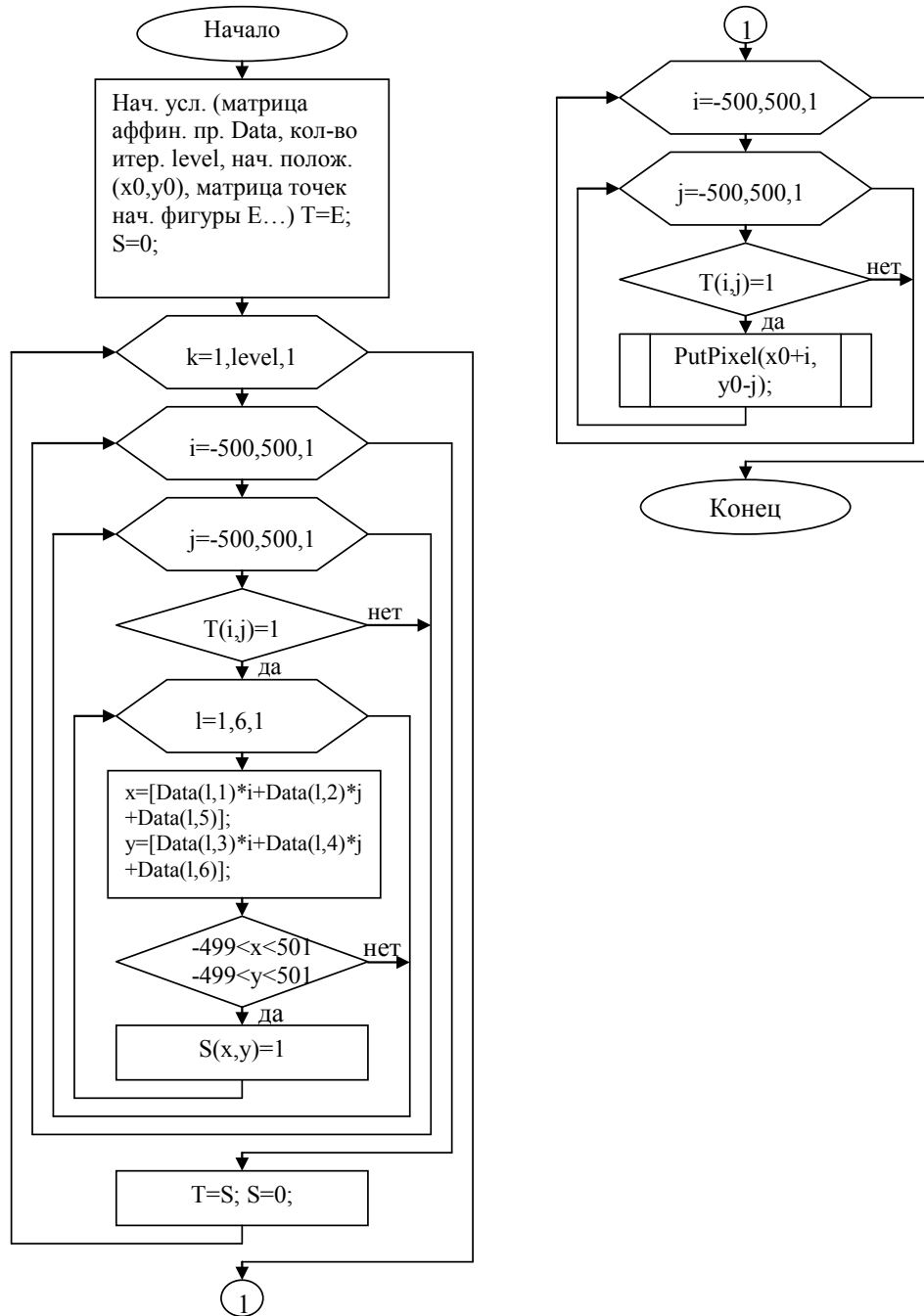


Рис. 7. Алгоритм построения фрактала «Кленовый лист»

Предложено провести анализ информации из Интернета:

1. Выставка «Strange Attractors: Signs of Chaos» http://archive.newmuseum.org/index.php/Detail/Occurrence/Show/occurrence_id/185.
2. <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1169258>
3. <http://fractals.chat.ru/>
4. <http://fraktals.ucoz.ru/>
5. <http://shakin.ru/creative/fractals.html> и другие.

IV. Художественная деятельность. Приведем примеры художественных композиций (рис. 9–10), полученных с помощью фракталов и аффинных преобразований (см. [11]). Указан-

ные фракталы построены с использованием графического редактора и фракталов. Здесь авторы построения художественных композиций, оказавшись в роли компьютерного художника, развивают эстетические качества.

Таким образом, изучение темы «Построение фракталов с помощью аффинных преобразований» дает возможность студенту быть в роли математика, программиста, компьютерного художника, активного пользователя Интернет, который умеет находить и анализировать научные сайты. Анализ научных книг и сайтов развивает у студента кругозор и творческую инициативу. Все это нацелено на

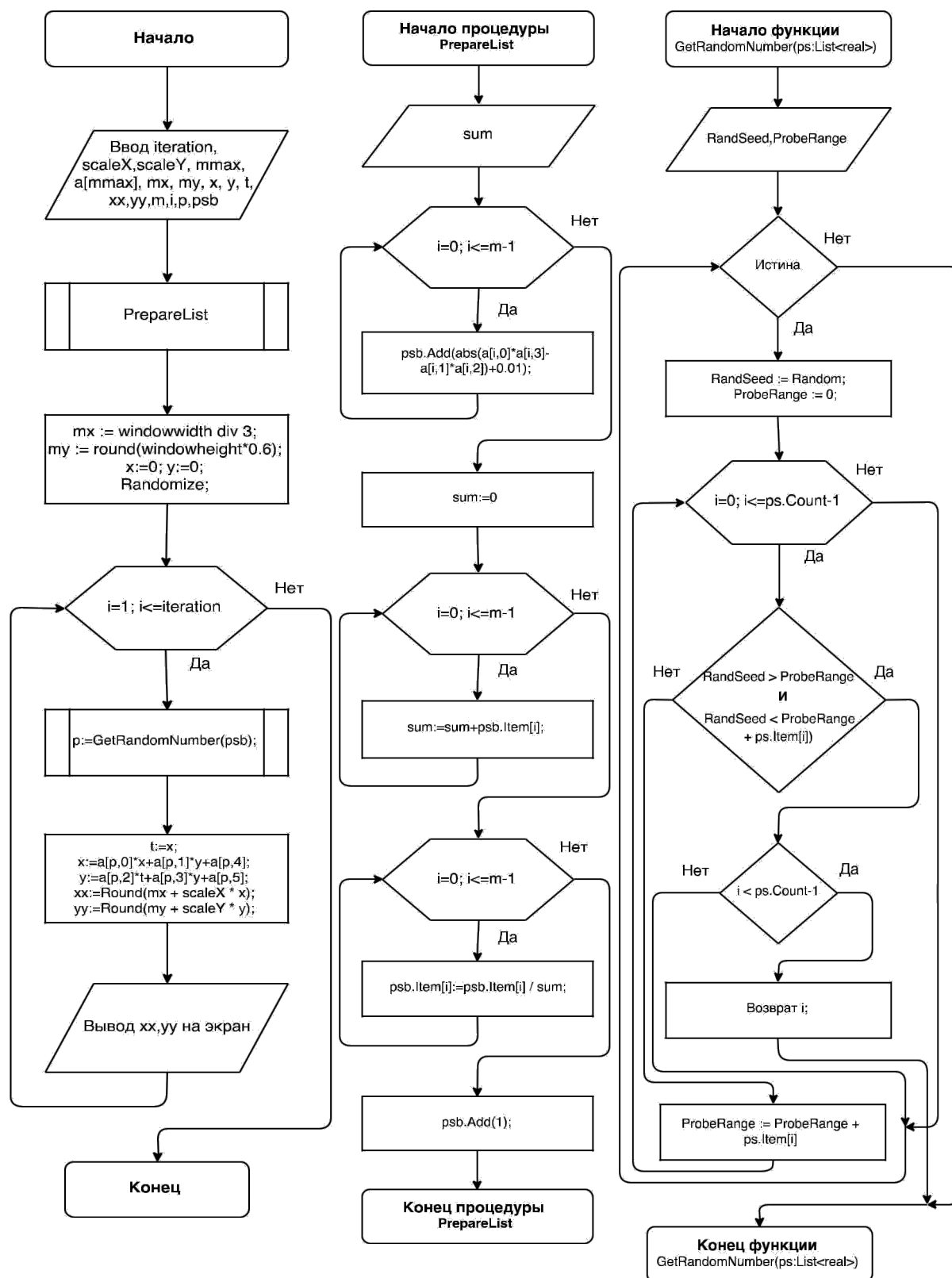


Рис. 8. Блок-схема алгоритма построения фрактала «Летучая мышь»



Рис. 9. Папоротник

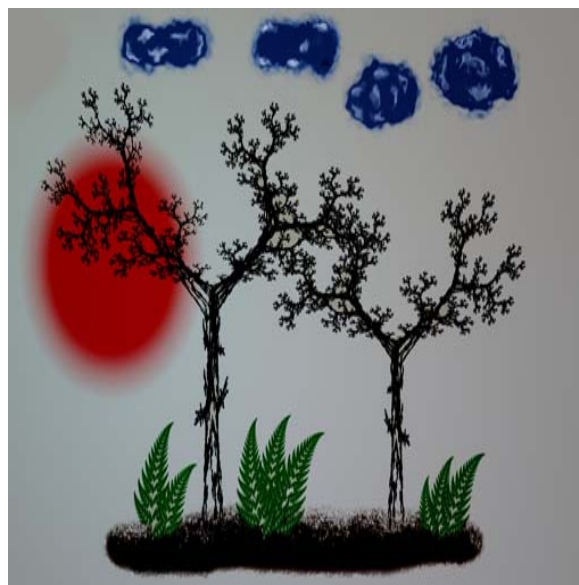


Рис. 10. Лесной пейзаж

развитие его креативности и мотивации изучения как математики, так и информатики.

Библиографический список

1. Марголина Н.Л., Матыцина Т.Н., Ширяев К.Е. Информационная безопасность в свете некоторых фактов из области математического образования // Философские проблемы информационных технологий и киберпространства. – 2016. – № 1 (11). – С. 35–44.

2. Матыцина Т.Н. Изучение фрактальной геометрии с помощью информационных технологий // Информатизация образования – 2010: материалы Междунар. науч.-метод. конф. – Кострома: КГУ им. Н.А. Некрасова, 2010. – С. 306–311.

3. Матыцина Т.Н. Об одной форме проведения контрольных мероприятий // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин: Материалы IX Всерос. науч.-метод. конф. – Кострома: КГУ им. Н.А. Некрасова, 2015. – С. 83–86.

4. Секованов В.С. Методическая система формирования креативности студента университета в процессе обучения фрактальной геометрии. – Кострома: КГУ им. Н.А. Некрасова, 2006. – 279 с.

5. Секованов В.С., Миронкин Д.П. Изучение преобразования пекаря как средство формирования креативности студентов и школьников с использованием дистанционного обучения // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. – 2013. – Т. 19. – № 1. – С. 190–195.

6. Секованов В.С. Концепция обучения фрактальной геометрии в КГУ им. Н.А. Некрасова // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. – 2013. – Т. 19. – № 5. – С. 153–154.

7. Секованов В.С., Ивков В.А. Многоэтапное математико-информационное задание «Странные

аттракторы» // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. – 2013. – Т. 19. – № 5. – С. 155–157.

8. Секованов В.С. Многоэтапное математико-информационное задание «О множествах Жюлиа некоторых рациональных функций» // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. – 2012. – Т. 18. – № 2. – С. 23–28.

9. Секованов В.С., Фатеев А.С., Белоусова Н.В. Развитие гибкости мышления студентов при разработке алгоритмов построения дерева Фейгенбаума в различных средах // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. – 2016. – Т. 22. – № 1. – С. 143–147.

10. Секованов В.С., Бабенко А.С., Селезнева Е.М., Смирнова А.О. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Дискретные динамические системы как средство формирования креативности студентов» // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. – 2016. – Т. 22. – № 2. – С. 213–217.

11. Секованов В.С. Элементы теории фрактальных множеств. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. – 248 с.

12. Секованов В.С. Что такое фрактальная геометрия? – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 272 с.

13. Секованов В.С., Скрябин В.С. Использование информационных и коммуникационных технологий в процессе обучения фрактальной геометрии // Информатизация образования – 2008: Материалы Междунар. науч.-метод. конф. 27–30 мая 2008 г., г. Славянск-на-Кубани. – Славянск-на-Кубани: Издательский центр СГПИ, 2008. – С. 391–395.