

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ
по практической работе №1
по дисциплине «Вычислительная математика»
Тема: Особенность машинной арифметики, точность вычисления
на ЭВМ

Студент гр. 0304

Алексеев Р.В.

Преподаватель

Попова Е.В.

Санкт-Петербург

2021

Вариант 1.

Цель работы.

Изучить особенности вычислений с плавающей точкой.

Основные теоретические положения.

В фундаменте математического анализа прочно утвердилась система действительных чисел. Однако, как бы она не упрощала анализ, практические вычисления вынуждены обходиться без нее.

Обычным способом аппроксимации системы действительных чисел в ЭВМ посредством конкретных математических представлений являются числа с плавающей точкой. Множество F чисел с плавающей точкой характеризуется четырьмя параметрами: основанием b , точностью t и интервалом показателей $[L, M]$. Каждое число с плавающей точкой, принадлежащее F , имеет значение:

$$x = \pm \left(\frac{d_1}{b} + \frac{d_2}{b^2} + \dots + \frac{d_t}{b^t} \right) b^n,$$

где целые числа d_1, d_2, \dots, d_t удовлетворяют неравенствам $0 \leq d_i \leq b-1$, $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ и $L \leq n \leq M$. Если для каждого ненулевого x из F справедливо $d_1 \neq 0$, то система F называется нормализованной. Целое число n называется

показателем, а число $f = \left(\frac{d_1}{b} + \frac{d_2}{b^2} + \dots + \frac{d_t}{b^t} \right)$ – дробной частью. Обычно целое число b_n хранится по той или иной схеме представления, принятой для целых чисел, например, величины со знаком, дополнения до единицы или дополнения до двух. Если принять $-N \leq n < N$, где $N = 2^{m-1}$ то переходим к общепринятой терминологии, при которой t – разрядность мантииссы, m – разрядность порядка.

Действительная машинная реализация представлений чисел с плавающей точкой может отличаться в деталях от рассматриваемой

идеальной, однако различия несущественны, и на практике их почти всегда можно игнорировать, анализируя основные проблемы ошибок округления. Величина b^{-t} является оценкой относительной точности плавающей арифметики, которая характеризуется посредством машинного эпсилон, т.е. наименьшего числа с плавающей точкой ε , такого, что $1+\varepsilon>1$. Точное значение машинного эпсилон зависит не только от указанных выше параметров, но и от принятого способа округления.

В вычислительных машинах используются различные системы чисел с плавающей точкой, причем в некоторых ЭВМ несколько систем. Так, для современных ПЭВМ характерно применение двух систем, которые называются обычной точностью и удвоенной точностью.

Рассматриваемое множество F не является бесконечным множеством. Оно содержит ровно $2(b-1)b^t(M-L+1)+1$ чисел, которые расположены неравномерно (равномерность расположения имеет место лишь при фиксированном показателе). В силу того, что F – конечное множество, не представляется возможным сколько-нибудь детально отобразить континуум действительных чисел. Например, действительные числа модулей, большим максимального элемента из F , вообще не могут быть отображены, причем последнее справедливо также в отношении ненулевых действительных чисел, меньших по абсолютной величине по сравнению с наименьшим положительным числом из F , и, наконец, каждое число из F должно представлять целый интервал действительных чисел, для которой, как и для любой модели, присущи допущения и ограничения.

На множестве F определены арифметические операции в соответствии с тем, как они выполняются ЭВМ. Эти операции, в свою очередь моделируются в машине посредством приближений, называемых плавающими операциями. Для плавающих операций сложения, вычитания, умножения и деления существует возможность возникновения ошибок округления, переполнения и появления машинного нуля. Следует отметить,

что операции плавающего сложения и умножения коммутативны, но не ассоциативны, и дистрибутивный закон для них также не выполняется. Невыполнение указанных алгебраических законов, имеющих фундаментальное значение для математического анализа, приводит к сложности анализа плавающих вычислений и возникающих при этом ошибок.

Постановка задачи.

Используя готовые программы, выполнить исследования машинной арифметики и точности вычислений на ПЭВМ. Порядок выполнения работы следующий:

- 1) Исследование распределения нормализованных чисел с плавающей точкой на вещественной оси для параметров b , m , t .
- 2) Вычисление значения величины машинного эпсилон при различных значениях константы c .
- 3) Исследование абсолютных и относительных ошибок округления при вычислениях с плавающей точкой сумм чисел при различных значениях шага суммирования.
- 4) Исследование проявления ошибок округления, возникающих при вычислении показательной функции e^x для чисел с плавающей точкой для двух вариантов алгоритма вычислений, а также скорости сходимости обоих вариантов.

Выполнение работы.

1. Были проведены исследования распределения нормализованных чисел с плавающей точкой на вещественной оси для параметров $b = 2$, $m = 4$, $t = 6$. Результаты расчетов см. на рисунке 1.

x[0]=0.000000 x[1]=0.000015 x[2]=0.000016 x[3]=0.000016 x[4]=0.000017 x[5]=0.000017 x[6]=0.000018 x[7]=0.000018 x[8]=0.000019 x[9]=0.000019 x[10]=0.000020 x[11]=0.000020 x[12]=0.000021 x[13]=0.000021 x[14]=0.000021 x[15]=0.000022 x[16]=0.000022	x[16]=0.000022 x[17]=0.000023 x[18]=0.000023 x[19]=0.000024 x[20]=0.000024 x[21]=0.000025 x[22]=0.000025 x[23]=0.000026 x[24]=0.000026 x[25]=0.000027 x[26]=0.000027 x[27]=0.000028 x[28]=0.000028 x[29]=0.000029 x[30]=0.000029 x[31]=0.000030 x[32]=0.000030	x[32]=0.000030 x[33]=0.000031 x[34]=0.000031 x[35]=0.000032 x[36]=0.000033 x[37]=0.000034 x[38]=0.000035 x[39]=0.000036 x[40]=0.000037 x[41]=0.000038 x[42]=0.000039 x[43]=0.000040 x[44]=0.000041 x[45]=0.000042 x[46]=0.000043 x[47]=0.000044 x[48]=0.000045	x[48]=0.000045 x[49]=0.000046 x[50]=0.000047 x[51]=0.000048 x[52]=0.000049 x[53]=0.000050 x[54]=0.000051 x[55]=0.000051 x[56]=0.000052 x[57]=0.000053 x[58]=0.000054 x[59]=0.000055 x[60]=0.000056 x[61]=0.000057 x[62]=0.000058 x[63]=0.000059 x[64]=0.000060
x[64]=0.000060 x[65]=0.000061 x[66]=0.000063 x[67]=0.000065 x[68]=0.000067 x[69]=0.000069 x[70]=0.000071 x[71]=0.000072 x[72]=0.000074 x[73]=0.000076 x[74]=0.000078 x[75]=0.000080 x[76]=0.000082 x[77]=0.000084 x[78]=0.000086 x[79]=0.000088 x[80]=0.000090	x[80]=0.000090 x[81]=0.000092 x[82]=0.000093 x[83]=0.000095 x[84]=0.000097 x[85]=0.000099 x[86]=0.000101 x[87]=0.000103 x[88]=0.000105 x[89]=0.000107 x[90]=0.000109 x[91]=0.000111 x[92]=0.000113 x[93]=0.000114 x[94]=0.000116 x[95]=0.000118 x[96]=0.000120	x[112]=0.000179 x[113]=0.000183 x[114]=0.000187 x[115]=0.000191 x[116]=0.000195 x[117]=0.000198 x[118]=0.000202 x[119]=0.000206 x[120]=0.000210 x[121]=0.000214 x[122]=0.000217 x[123]=0.000221 x[124]=0.000225 x[125]=0.000229 x[126]=0.000233 x[127]=0.000237 x[128]=0.000240	x[112]=0.000179 x[113]=0.000183 x[114]=0.000187 x[115]=0.000191 x[116]=0.000195 x[117]=0.000198 x[118]=0.000202 x[119]=0.000206 x[120]=0.000210 x[121]=0.000214 x[122]=0.000217 x[123]=0.000221 x[124]=0.000225 x[125]=0.000229 x[126]=0.000233 x[127]=0.000237 x[128]=0.000240
x[128]=0.000240 x[129]=0.000244 x[130]=0.000252 x[131]=0.000259 x[132]=0.000267 x[133]=0.000275 x[134]=0.000282 x[135]=0.000290 x[136]=0.000298 x[137]=0.000305 x[138]=0.000313 x[139]=0.000320 x[140]=0.000328 x[141]=0.000336 x[142]=0.000343 x[143]=0.000351 x[144]=0.000359	x[144]=0.000359 x[145]=0.000366 x[146]=0.000374 x[147]=0.000381 x[148]=0.000389 x[149]=0.000397 x[150]=0.000404 x[151]=0.000412 x[152]=0.000420 x[153]=0.000427 x[154]=0.000435 x[155]=0.000443 x[156]=0.000450 x[157]=0.000458 x[158]=0.000465 x[159]=0.000473 x[160]=0.000481	x[160]=0.000481 x[161]=0.000488 x[162]=0.000504 x[163]=0.000519 x[164]=0.000534 x[165]=0.000549 x[166]=0.000565 x[167]=0.000580 x[168]=0.000595 x[169]=0.000610 x[170]=0.000626 x[171]=0.000641 x[172]=0.000656 x[173]=0.000671 x[174]=0.000687 x[175]=0.000702 x[176]=0.000717	x[176]=0.000717 x[177]=0.000732 x[178]=0.000748 x[179]=0.000763 x[180]=0.000778 x[181]=0.000793 x[182]=0.000809 x[183]=0.000824 x[184]=0.000839 x[185]=0.000854 x[186]=0.000870 x[187]=0.000885 x[188]=0.000900 x[189]=0.000916 x[190]=0.000931 x[191]=0.000946 x[192]=0.000961

x[320]=0.015381 x[321]=0.015625 x[322]=0.016113 x[323]=0.016602 x[324]=0.017090 x[325]=0.017578 x[326]=0.018066 x[327]=0.018555 x[328]=0.019043 x[329]=0.019531 x[330]=0.020020 x[331]=0.020508 x[332]=0.020996 x[333]=0.021484 x[334]=0.021973 x[335]=0.022461 x[336]=0.022949	x[336]=0.022949 x[337]=0.023437 x[338]=0.023926 x[339]=0.024414 x[340]=0.024902 x[341]=0.025391 x[342]=0.025879 x[343]=0.026367 x[344]=0.026855 x[345]=0.027344 x[346]=0.027832 x[347]=0.028320 x[348]=0.028809 x[349]=0.029297 x[350]=0.029785 x[351]=0.030273 x[352]=0.030762	x[352]=0.030762 x[353]=0.031250 x[354]=0.032227 x[355]=0.033203 x[356]=0.034180 x[357]=0.035156 x[358]=0.036133 x[359]=0.037109 x[360]=0.038086 x[361]=0.039062 x[362]=0.040039 x[363]=0.041016 x[364]=0.041992 x[365]=0.042969 x[366]=0.043945 x[367]=0.044922 x[368]=0.045898	x[368]=0.045898 x[369]=0.046875 x[370]=0.047852 x[371]=0.048828 x[372]=0.049805 x[373]=0.050781 x[374]=0.051758 x[375]=0.052734 x[376]=0.053711 x[377]=0.054687 x[378]=0.055664 x[379]=0.056641 x[380]=0.057617 x[381]=0.058594 x[382]=0.059570 x[383]=0.060547 x[384]=0.061523
x[384]=0.061523 x[385]=0.062500 x[386]=0.064453 x[387]=0.066406 x[388]=0.068359 x[389]=0.070312 x[390]=0.072266 x[391]=0.074219 x[392]=0.076172 x[393]=0.078125 x[394]=0.080078 x[395]=0.082031 x[396]=0.083984 x[397]=0.085937 x[398]=0.087891 x[399]=0.089844 x[400]=0.091797	x[400]=0.091797 x[401]=0.093750 x[402]=0.095703 x[403]=0.097656 x[404]=0.099609 x[405]=0.101562 x[406]=0.103516 x[407]=0.105469 x[408]=0.107422 x[409]=0.109375 x[410]=0.111328 x[411]=0.113281 x[412]=0.115234 x[413]=0.117187 x[414]=0.119141 x[415]=0.121094 x[416]=0.123047	x[416]=0.123047 x[417]=0.125000 x[418]=0.128906 x[419]=0.132812 x[420]=0.136719 x[421]=0.140625 x[422]=0.144531 x[423]=0.148437 x[424]=0.152344 x[425]=0.156250 x[426]=0.160156 x[427]=0.164062 x[428]=0.167969 x[429]=0.171875 x[430]=0.175781 x[431]=0.179687 x[432]=0.183594	x[432]=0.183594 x[433]=0.187500 x[434]=0.191406 x[435]=0.195312 x[436]=0.199219 x[437]=0.203125 x[438]=0.207031 x[439]=0.210937 x[440]=0.214844 x[441]=0.218750 x[442]=0.222656 x[443]=0.226562 x[444]=0.230469 x[445]=0.234375 x[446]=0.238281 x[447]=0.242187 x[448]=0.246094
x[512]=0.984375 x[513]=1.000000 x[514]=1.031250 x[515]=1.062500 x[516]=1.093750 x[517]=1.125000 x[518]=1.156250 x[519]=1.187500 x[520]=1.218750 x[521]=1.250000 x[522]=1.281250 x[523]=1.312500 x[524]=1.343750 x[525]=1.375000 x[526]=1.406250 x[527]=1.437500 x[528]=1.468750	x[528]=1.468750 x[529]=1.500000 x[530]=1.531250 x[531]=1.562500 x[532]=1.593750 x[533]=1.625000 x[534]=1.656250 x[535]=1.687500 x[536]=1.718750 x[537]=1.750000 x[538]=1.781250 x[539]=1.812500 x[540]=1.843750 x[541]=1.875000 x[542]=1.906250 x[543]=1.937500 x[544]=1.968750	x[544]=1.968750 x[545]=2.000000 x[546]=2.062500 x[547]=2.125000 x[548]=2.187500 x[549]=2.250000 x[550]=2.312500 x[551]=2.375000 x[552]=2.437500 x[553]=2.500000 x[554]=2.562500 x[555]=2.625000 x[556]=2.687500 x[557]=2.750000 x[558]=2.812500 x[559]=2.875000 x[560]=2.937500	x[560]=2.937500 x[561]=3.000000 x[562]=3.062500 x[563]=3.125000 x[564]=3.187500 x[565]=3.250000 x[566]=3.312500 x[567]=3.375000 x[568]=3.437500 x[569]=3.500000 x[570]=3.562500 x[571]=3.625000 x[572]=3.687500 x[573]=3.750000 x[574]=3.812500 x[575]=3.875000 x[576]=3.937500

x[576]=3.937500 x[577]=4.000000 x[578]=4.125000 x[579]=4.250000 x[580]=4.375000 x[581]=4.500000 x[582]=4.625000 x[583]=4.750000 x[584]=4.875000 x[585]=5.000000 x[586]=5.125000 x[587]=5.250000 x[588]=5.375000 x[589]=5.500000 x[590]=5.625000 x[591]=5.750000 x[592]=5.875000	x[592]=5.875000 x[593]=6.000000 x[594]=6.125000 x[595]=6.250000 x[596]=6.375000 x[597]=6.500000 x[598]=6.625000 x[599]=6.750000 x[600]=6.875000 x[601]=7.000000 x[602]=7.125000 x[603]=7.250000 x[604]=7.375000 x[605]=7.500000 x[606]=7.625000 x[607]=7.750000 x[608]=7.875000	x[608]=7.875000 x[609]=8.000000 x[610]=8.250000 x[611]=8.500000 x[612]=8.750000 x[613]=9.000000 x[614]=9.250000 x[615]=9.500000 x[616]=9.750000 x[617]=10.000000 x[618]=10.250000 x[619]=10.500000 x[620]=10.750000 x[621]=11.000000 x[622]=11.250000 x[623]=11.500000 x[624]=11.750000	x[624]=11.750000 x[625]=12.000000 x[626]=12.250000 x[627]=12.500000 x[628]=12.750000 x[629]=13.000000 x[630]=13.250000 x[631]=13.500000 x[632]=13.750000 x[633]=14.000000 x[634]=14.250000 x[635]=14.500000 x[636]=14.750000 x[637]=15.000000 x[638]=15.250000 x[639]=15.500000 x[640]=15.750000
x[640]=15.750000 x[641]=16.000000 x[642]=16.500000 x[643]=17.000000 x[644]=17.500000 x[645]=18.000000 x[646]=18.500000 x[647]=19.000000 x[648]=19.500000 x[649]=20.000000 x[650]=20.500000 x[651]=21.000000 x[652]=21.500000 x[653]=22.000000 x[654]=22.500000 x[655]=23.000000 x[656]=23.500000	x[656]=23.500000 x[657]=24.000000 x[658]=24.500000 x[659]=25.000000 x[660]=25.500000 x[661]=26.000000 x[662]=26.500000 x[663]=27.000000 x[664]=27.500000 x[665]=28.000000 x[666]=28.500000 x[667]=29.000000 x[668]=29.500000 x[669]=30.000000 x[670]=30.500000 x[671]=31.000000 x[672]=31.500000	x[672]=31.500000 x[673]=32.000000 x[674]=33.000000 x[675]=34.000000 x[676]=35.000000 x[677]=36.000000 x[678]=37.000000 x[679]=38.000000 x[680]=39.000000 x[681]=40.000000 x[682]=41.000000 x[683]=42.000000 x[684]=43.000000 x[685]=44.000000 x[686]=45.000000 x[687]=46.000000 x[688]=47.000000	x[688]=47.000000 x[689]=48.000000 x[690]=49.000000 x[691]=50.000000 x[692]=51.000000 x[693]=52.000000 x[694]=53.000000 x[695]=54.000000 x[696]=55.000000 x[697]=56.000000 x[698]=57.000000 x[699]=58.000000 x[700]=59.000000 x[701]=60.000000 x[702]=61.000000 x[703]=62.000000 x[704]=63.000000
x[704]=63.000000 x[705]=64.000000 x[706]=66.000000 x[707]=68.000000 x[708]=70.000000 x[709]=72.000000 x[710]=74.000000 x[711]=76.000000 x[712]=78.000000 x[713]=80.000000 x[714]=82.000000 x[715]=84.000000 x[716]=86.000000 x[717]=88.000000 x[718]=90.000000 x[719]=92.000000 x[720]=94.000000	x[720]=94.000000 x[721]=96.000000 x[722]=98.000000 x[723]=100.000000 x[724]=102.000000 x[725]=104.000000 x[726]=106.000000 x[727]=108.000000 x[728]=110.000000 x[729]=112.000000 x[730]=114.000000 x[731]=116.000000 x[732]=118.000000 x[733]=120.000000 x[734]=122.000000 x[735]=124.000000 x[736]=126.000000	x[736]=126.000000 x[737]=128.000000 x[738]=132.000000 x[739]=136.000000 x[740]=140.000000 x[741]=144.000000 x[742]=148.000000 x[743]=152.000000 x[744]=156.000000 x[745]=160.000000 x[746]=164.000000 x[747]=168.000000 x[748]=172.000000 x[749]=176.000000 x[750]=180.000000 x[751]=184.000000 x[752]=188.000000	x[752]=188.000000 x[753]=192.000000 x[754]=196.000000 x[755]=200.000000 x[756]=204.000000 x[757]=208.000000 x[758]=212.000000 x[759]=216.000000 x[760]=220.000000 x[761]=224.000000 x[762]=228.000000 x[763]=232.000000 x[764]=236.000000 x[765]=240.000000 x[766]=244.000000 x[767]=248.000000 x[768]=252.000000

x[768]=252.0000 x[769]=256.0000 x[770]=264.0000 x[771]=272.0000 x[772]=280.0000 x[773]=288.0000 x[774]=296.0000 x[775]=304.0000 x[776]=312.0000 x[777]=320.0000 x[778]=328.0000 x[779]=336.0000 x[780]=344.0000 x[781]=352.0000 x[782]=360.0000 x[783]=368.0000 x[784]=376.0000	x[784]=376.0000 x[785]=384.0000 x[786]=392.0000 x[787]=400.0000 x[788]=408.0000 x[789]=416.0000 x[790]=424.0000 x[791]=432.0000 x[792]=440.0000 x[793]=448.0000 x[794]=456.0000 x[795]=464.0000 x[796]=472.0000 x[797]=480.0000 x[798]=488.0000 x[799]=496.0000 x[800]=504.0000	x[800]=504.0000 x[801]=512.0000 x[802]=528.0000 x[803]=544.0000 x[804]=560.0000 x[805]=576.0000 x[806]=592.0000 x[807]=608.0000 x[808]=624.0000 x[809]=640.0000 x[810]=656.0000 x[811]=672.0000 x[812]=688.0000 x[813]=704.0000 x[814]=720.0000 x[815]=736.0000 x[816]=752.0000	x[816]=752.0000 x[817]=768.0000 x[818]=784.0000 x[819]=800.0000 x[820]=816.0000 x[821]=832.0000 x[822]=848.0000 x[823]=864.0000 x[824]=880.0000 x[825]=896.0000 x[826]=912.0000 x[827]=928.0000 x[828]=944.0000 x[829]=960.0000 x[830]=976.0000 x[831]=992.0000 x[832]=1008.0000
x[896]=4032.000 x[897]=4096.000 x[898]=4224.000 x[899]=4352.000 x[900]=4480.000 x[901]=4608.000 x[902]=4736.000 x[903]=4864.000 x[904]=4992.000 x[905]=5120.000 x[906]=5248.000 x[907]=5376.000 x[908]=5504.000 x[909]=5632.000 x[910]=5760.000 x[911]=5888.000 x[912]=6016.000	x[912]=6016.000 x[913]=6144.000 x[914]=6272.000 x[915]=6400.000 x[916]=6528.000 x[917]=6656.000 x[918]=6784.000 x[919]=6912.000 x[920]=7040.000 x[921]=7168.000 x[922]=7296.000 x[923]=7424.000 x[924]=7552.000 x[925]=7680.000 x[926]=7808.000 x[927]=7936.000 x[928]=8064.000	x[928]=8064.000 x[929]=8192.000 x[930]=8448.000 x[931]=8704.000 x[932]=8960.000 x[933]=9216.000 x[934]=9472.000 x[935]=9728.000 x[936]=9984.000 x[937]=10240.00 x[938]=10496.00 x[939]=10752.00 x[940]=11008.00 x[941]=11264.00 x[942]=11520.00 x[943]=11776.00 x[944]=12032.00	x[944]=12032.00 x[945]=12288.00 x[946]=12544.00 x[947]=12800.00 x[948]=13056.00 x[949]=13312.00 x[950]=13568.00 x[951]=13824.00 x[952]=14080.00 x[953]=14336.00 x[954]=14592.00 x[955]=14848.00 x[956]=15104.00 x[957]=15360.00 x[958]=15616.00 x[959]=15872.00 x[960]=16128.00
x[960]=16128.00 x[961]=16384.00 x[962]=16896.00 x[963]=17408.00 x[964]=17920.00 x[965]=18432.00 x[966]=18944.00 x[967]=19456.00 x[968]=19968.00 x[969]=20480.00 x[970]=20992.00 x[971]=21504.00 x[972]=22016.00 x[973]=22528.00 x[974]=23040.00 x[975]=23552.00 x[976]=24064.00	x[977]=24576.00 x[978]=25088.00 x[979]=25600.00 x[980]=26112.00 x[981]=26624.00 x[982]=27136.00 x[983]=27648.00 x[984]=28160.00 x[985]=28672.00 x[986]=29184.00 x[987]=29696.00 x[988]=30208.00 x[989]=30720.00 x[990]=31232.00 x[991]=31744.00 x[992]=32256.00 Нажмите любую клавишу...		

Рисунок 1 — Числа, сгенерированные программой с разными значениями параметров.

Вывод: распределение нормализованных чисел с плавающей точкой на вещественной оси неравномерно. Плотность распределения велика при малых значениях параметров $b = 2$, $m = 4$, $t = 6$, и мала при значениях, близких к верхней границе диапазона множества чисел ($x[i]$, когда i близок к $2(b-1)b^t(M-L+1)+1$). График распределения этих чисел представлен на рис. 2.

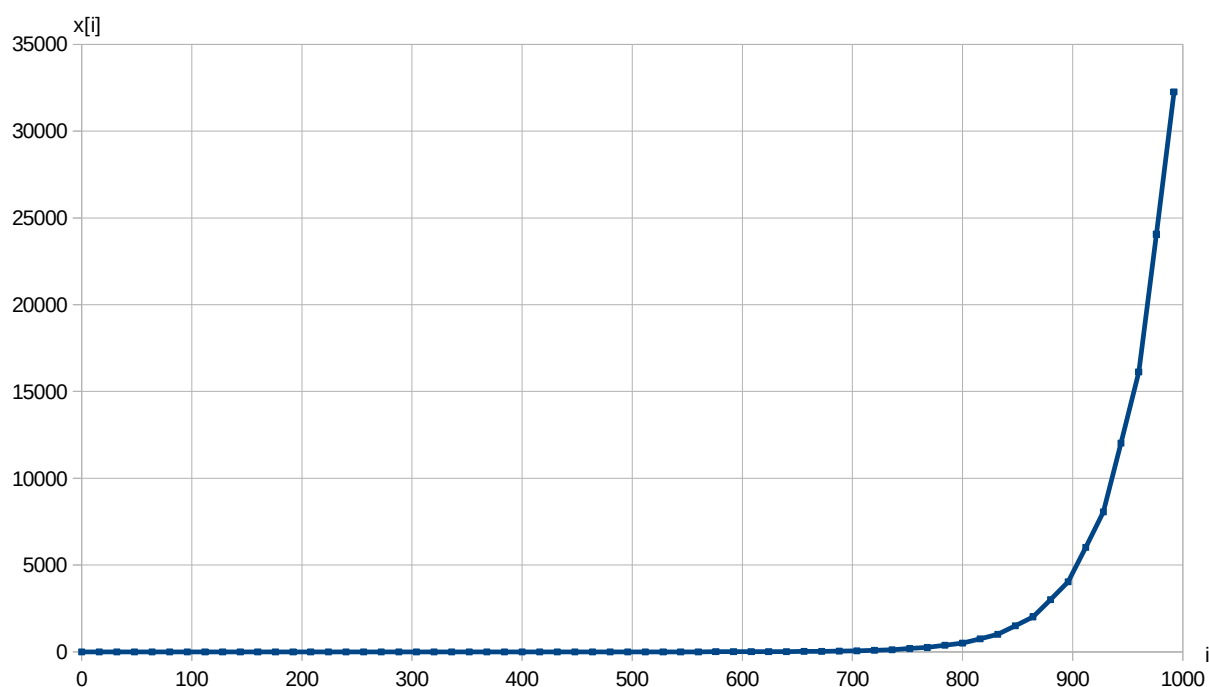


Рисунок 2 - график распределения нормализованных чисел с плавающей точкой.

2. Были вычислены значения ϵ , при разных значениях аргумента c (наименьшее значение ϵ , такое что $c+\epsilon(c)>c$). Результаты вычислений см. в табл. 1.

Таблица 1 — Результаты вычисления ϵ при разных значениях c .

Значение c	Значение ϵ	Шаг итерации
3	$2.1 \cdot 10^{-19}$	62
9	$8.3 \cdot 10^{-19}$	60

27	$17.3 \cdot 10^{-19}$	59
81	$69.3 \cdot 10^{-19}$	57
243	$138.7 \cdot 10^{-19}$	56

Вывод: с увеличением значения s , значение ϵ также увеличивается. С увеличением s линейно увеличивается и ϵ . График зависимости ϵ от s показан на рис. 3.

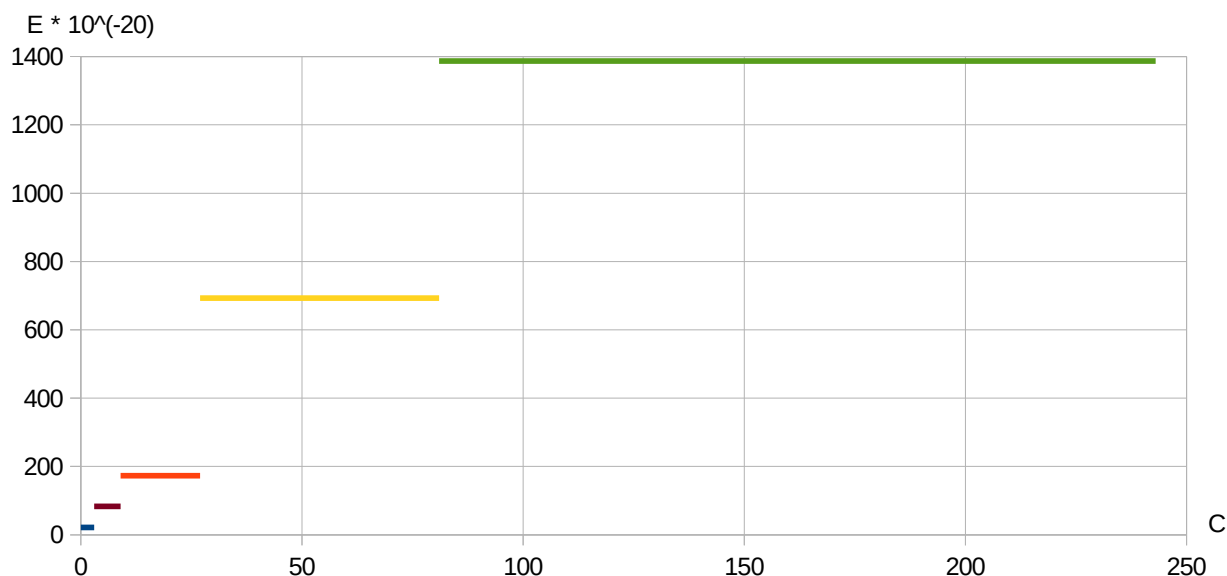


Рисунок 3 — График зависимости машинного ϵ от s .

3. Было проведено исследование абсолютных и относительных ошибок округления при вычислениях с плавающей точкой сумм чисел

$$\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{N}, x[i] = x[i-1] + \frac{1}{N}\right) \text{ при различных значениях шага суммирования.}$$

Результаты вычислений см. в табл. 2.

Таблица 2 — Результаты исследования абсолютных и относительных ошибок округления (N – шаг суммирования $x - dx$ – абсолютная погрешность, $(x-dx)/x$ – относительная погрешность)

N	x-dx	(x-dx)/x
5	0.0000000596	0.000006%
25	0.0000000224	0.000002%
125	0.0000000689	0.000007%
625	0.0000000253	0.000003%
3125	0.0000000253	0.000003%
15625	0.0000000025	0.000000%

Вывод: абсолютная погрешность незначительно увеличивалась с шагами в ходе суммирования (происходило накопление ошибки), а относительная погрешность оставалась постоянной для каждого шага суммирования (это свидетельствует о том, что абсолютная ошибка накапливается равномерно).

4. Было проведено исследование проявления ошибок округления, возникающих при вычислении показательной функции e^x для чисел с плавающей точкой для двух вариантов алгоритма вычислений:

$$1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!};$$

$$2) x = m + f, e^x = e^m * e^f, \text{ где } m - \text{целая часть числа, } f - \text{дробная.}$$

Также найдены скорости сходимости обоих вариантов. Результаты обработки программой введенных данных см. в табл. 3.

Таблица 3 — Исследование проявления ошибок округления, возникающих при вычислении функции e^x для двух алгоритмов.

x	ε	Разложение Тейлора	Улучшенный алгоритм	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
1.3	0.001	3.669262967535957	3.669238572703398	0.000024394822558	0.000665%

		8 итераций	4 итерации		
1.7	0.001	5.473881461862254	5.473898371763732	0.000016909901478	0.000309%
		9 итераций	6 итераций		
4.2	0.001	66.686174579861074	66.686167731798292	0.000006848062769	0.000010%
		16 итераций	4 итерации		
9.7	0.001	16317.6038835688396	16317.4591265288145	0.144757040025004	0.000887%
		31 итерация	6 итераций		
16.9	0.001	21856296.7444100045	21855348.1673088297	948.5771011713259	0.004340%
		50 итераций	6 итераций	21	
19.61	0.001	328484004.776183248	328470029.534917593	13975.24126565261	0.004255%
		58 итераций	5 итераций	39	
20.02	0.001	494965464.996178389	494964815.003642976	649.9925354098959	0.000131%
		59 итераций	2 итерации	36	

Вывод: с увеличением x абсолютная погрешность возрастает, в то время как относительная погрешность мала. Данные таблицы показывают, что улучшенный алгоритм производит меньше итераций, чем обычное разложение Тейлора, и разрыв в количестве итераций лишь увеличивается с ростом x . Так, для вычисления $e^{4.2}$ требуется 16 итераций разложения Тейлора и лишь 4 итерации улучшенного алгоритма. Размер погрешности (как абсолютной, так и относительной) сильно зависит не только от целой, но и от дробной части аргумента.

Выводы.

В ходе выполнения заданий лабораторной работы, были исследованы машинная арифметика, точность вычислений с плавающей точкой, распределение нормализованных чисел на вещественной оси. Были оценены абсолютные и относительные ошибки округления при вычислениях с плавающей точкой, зависимость машинного эпсилон от значения константы, с помощью которой он вычислялся. Таким образом, были изучены основные особенности вычислений с плавающей точкой.