

## Лекция 12

### § 6.6. Интерполяционная формула Ньютона для неравных промежутков

Продолжим рассмотрение вопроса интерполирования при помощи алгебраических многочленов. В этом параграфе мы получим формулу Ньютона, являющуюся видоизменением формулы Лагранжа. Она интересна сама по себе и послужит нам источником получения ряда новых формул.

**1. Разделенные разности и их свойства.** Предварительно введем новое понятие – *разделенные разности*. Рассмотрим некоторую функцию  $f$  и систему узлов интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $x_i \neq x_j$ , при  $i \neq j$ ,  $x_i \in [a, b]$ . Для этой функции и узлов образуем всевозможные отношения

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} &= f(x_0; x_1); \\ \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} &= f(x_1; x_2), \dots, \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} = f(x_{n-1}; x_n).\end{aligned}\quad (6.42)$$

Такие отношения называют *разделенными разностями первого порядка*.

Получив разделенные разности первого порядка, мы можем образовать отношения

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1; x_2)-f(x_0; x_1)}{x_2-x_0} &= f(x_0; x_1; x_2); \\ \frac{f(x_2; x_3)-f(x_1; x_2)}{x_3-x_1} &= f(x_1; x_2; x_3), \dots, \frac{f(x_{n-1}; x_n)-f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n-x_{n-2}} = \\ &= f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n).\end{aligned}\quad (6.43)$$

Эти отношения называют *разделенными разностями второго порядка*. Вообще, если мы уже определили разделенные разности  $k$ -го порядка  $f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k})$ , то разделенные разности  $(k+1)$ -го порядка находятся при помощи формулы

$$\frac{f(x_i; x_{i+1}; \dots, x_{i+k})-f(x_{i-1}; x_i; \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_{i-1}} = f(x_{i-1}; x_i; \dots, x_{i+k}). \quad (6.44)$$

Условимся располагать таблицу разделенных разностей следующим образом:

$x$	$f(x)$	$f(x_i; x_{i+1})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3})$
$x_0$	$f(x_0)$			
		$f(x_0; x_1)$		
$x_1$	$f(x_1)$		$f(x_0; x_1; x_2)$	
		$f(x_1; x_2)$		$f(x_0; x_1; x_2; x_3)$
$x_2$	$f(x_2)$		$f(x_1; x_2; x_3)$	
		$f(x_2; x_3)$		$f(x_1; x_2; x_3; x_4)$
$x_3$	$f(x_3)$		$f(x_2; x_3; x_4)$	
		$f(x_3; x_4)$		
$x_4$	$f(x_4)$			

Для вывода формулы Ньютона нам потребуется использовать некоторые свойства разделенных разностей.

Прежде всего докажем, что *разделенная разность  $k$ -го порядка  $f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k})$  равна*

$$\begin{aligned}
 f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) &= \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) \dots (x_i - x_{i+k})} + \\
 &+ \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2}) \dots (x_{i+1} - x_{i+k})} + \dots \\
 &\dots + \frac{f(x_{i+k})}{(x_{i+k} - x_i)(x_{i+k} - x_{i+1}) \dots (x_{i+k} - x_{i+k-1})} = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\omega'(x_j)}, \quad (6.45)
 \end{aligned}$$

где  $\omega(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{i+k})$ .

□ Доказательство будем вести по индукции. Для  $k = 1$  это утверждение справедливо, так как

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})} + \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)}.$$

Предположим, что оно справедливо для  $k = l-1$ , и докажем его справедливость для  $k = l$ . В самом деле,

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+l}) = \frac{f(x_{i+1}; \dots, x_{i+l}) - f(x_i; x_{i+1}; \dots, x_{i+l-1})}{x_{i+l} - x_i} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x_{i+l} - x_i)} \left\{ \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_{i+2})(x_{i+1} - x_{i+3}) \dots (x_{i+1} - x_{i+l})} + \right. \\
&+ \frac{f(x_{i+2})}{(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_{i+3}) \dots (x_{i+2} - x_{i+l})} + \dots \\
&\dots + \frac{f(x_{i+l})}{(x_{i+l} - x_{i+1})(x_{i+l} - x_{i+2}) \dots (x_{i+l} - x_{i+l-1})} - \left[ \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) \dots (x_i - x_{i+l-1})} \right. \\
&+ \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2}) \dots (x_{i+1} - x_{i+l-1})} + \dots \\
&\dots \left. + \frac{f(x_{i+l-1})}{(x_{i+l-1} - x_i)(x_{i+l-1} - x_{i+1}) \dots (x_{i+l-1} - x_{i+l-2})} \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

В полученном выражении  $f(x_i)$  и  $f(x_{i+l})$  встречаются по одному разу и притом в виде (с учетом множителя  $\frac{1}{(x_{i+l} - x_i)}$ , стоящего перед фигурными скобками):

$$\frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) \dots (x_i - x_{i+l})}, \quad \frac{f(x_{i+l})}{(x_{i+l} - x_i)(x_{i+l} - x_{i+1})(x_{i+l} - x_{i+2}) \dots (x_{i+l} - x_{i+l-1})},$$

т.е. так, как они должны входить в доказываемое равенство (6.45). Все остальные  $f(x_j)$  входят дважды. Объединяя эти члены попарно, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(x_{i+l} - x_i)} \left[ \frac{f(x_j)}{(x_j - x_{i+1}) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{i+l})} - \right. \\
&- \left. \frac{f(x_j)}{(x_j - x_i) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{i+l-1})} \right] = \\
&= \frac{f(x_j)}{(x_j - x_{i+1}) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{i+l-1})} \cdot \frac{1}{(x_{i+l} - x_i)} \cdot \left[ \frac{1}{(x_j - x_{i+l})} - \frac{1}{(x_j - x_i)} \right] = \\
&= \frac{f(x_j)}{(x_j - x_i)(x_j - x_{i+1}) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{i+l})},
\end{aligned}$$

что нам и требуется.

■

Из доказанного вытекает ряд следствий. Приведем некоторые из них.

**С л е д с т в и е 1.** *Разделенная разность суммы или разности функций равна сумме или разности разделенных разностей слагаемых, соответственно уменьшаемого и вычитаемого.*

**С л е д с т в и е 2.** *Постоянный множитель можно выносить за знак разделенной разности.*

**С л е д с т в и е 3.** *Разделенная разность есть симметричная функция своих аргументов, т.е.*

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) = f(x_{i+1}; x_i; \dots; x_{i+k}) = f(x_{i+2}, x_{i+1}; x_i; x_{i+3}; \dots; x_{i+k}) = \dots$$

## 2. Вывод формулы Ньютона для неравных промежутков.

Перейдем к выводу формулы Ньютона. Пусть  $f(x)$  - заданная функция,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  - узлы интерполирования,  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ ,  $x_i \in [a, b]$  и  $L_k(x)$  - интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный для этой функции по узлам  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Тогда

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + [L_2(x) - L_1(x)] + \dots \\ \dots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)]. \quad (6.46)$$

Рассмотрим отдельную разность, стоящую в правой части,  $L_k(x) - L_{k-1}(x)$ . Это многочлен степени  $k$ . Он обращается в нуль в точках  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ , т.к. в этих точках  $L_k(x_i) = f(x_i)$  и  $L_{k-1}(x_i) = f(x_i)$ . Поэтому  $L_k(x) - L_{k-1}(x) = A_k (x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$  ( $A_k$  - постоянная). Для определения величины  $A_k$  положим  $x = x_k$ . При этом получим:

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A_k (x_k - x_0) (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}).$$

Откуда следует:

$$A_k = \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sum_{j=0}^{k-1} f(x_j) \frac{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{j-1})(x_k - x_{j+1}) \dots (x_k - x_{k-1})}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{k-1})}}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})} = \\
& = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_k)} = f(x_0; x_1; \dots; x_k).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
L_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \\
& + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0; x_1; \dots; x_n). \quad (6.47)
\end{aligned}$$

Эта форма записи интерполяционного многочлена Лагранжа и носит название *интерполяционного многочлена Ньютона для неравных промежутков*. Она более удобна для вычислений, чем формула Лагранжа. Добавление одного или нескольких узлов не приводит к повторению всей проделанной работы заново, как это было при вычислениях по формуле Лагранжа.

**3. Остаточный член формулы Ньютона.** Остаточный член формулы Ньютона точно такой же, как и у формулы Лагранжа. Но его можно записать и в другой форме. Для этого рассмотрим

$$\begin{aligned}
f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) = & \frac{f(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)} + \\
& + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x)(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} + \dots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}. \quad (6.48)
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
f(x) = & f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} + \dots \\
& \dots + f(x_n) \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} + \\
& + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f(x; x_0; x_1; \dots; x_n). \quad (6.49)
\end{aligned}$$

Итак,

$$f(x) = L_n(x) + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f(x; x_0; x_1; \dots; x_n). \quad (6.50)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - L_n(x) = \\ &= (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f(x; x_0; x_1; \dots; x_n). \end{aligned} \quad (6.51)$$

В частности, если  $f(x)$  имеет производную порядка  $n+1$ , то получим:

$$f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Заметим, что так как величина  $f(x)$  нам неизвестна, формула (6.51) имеет только теоретическое значение, а именно, она может быть использована для оценки погрешности, даваемой интерполяционной формулой Ньютона для заданной функции  $f(x)$ .

## § 6.7. Интерполяционные формулы Ньютона для равных промежутков

Естественно ожидать, что если промежутки между последовательными узлами интерполирования равны, т.е.  $x_i - x_{i-1}$  — постоянная величина, то предыдущая формула упростится. Так оно и есть на самом деле. Прежде чем приступить к выводу формул для этого случая введем понятие о конечных разностях.

**1. Конечные разности и их свойства.** Пусть для значений  $x$ :  $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$  ( $h$  — шаг таблицы), нам известны значения функции  $f(x)$ :  $y_0, y_1, \dots, y_n$ .

Назовем разности

$$y_1 - y_0, y_2 - y_1, \dots, y_n - y_{n-1}$$

*конечными разностями первого порядка.*

Будем обозначать их следующим образом

$$y_{i+1} - y_i = f_{i+1/2}^1. \quad (6.52)$$

Из разностей первого порядка можно образовать конечные разности второго порядка:

$$f_{3/2}^1 - f_{1/2}^1 = f_1^2; f_{5/2}^1 - f_{3/2}^1 = f_2^2; \dots; f_{(2i+1)/2}^1 - f_{(2i-1)/2}^1 = f_i^2; \dots \quad (6.53)$$

Аналогично можно образовать разности третьего порядка, четвертого и т.д. Таблицу разностей обычно располагают следующим образом:

$x$	$f$	$f^1$	$f^2$	$f^3$
$x_0$	$f_0$			
		$f_{1/2}^1$		
$x_1$	$f_1$		$f_1^2$	
		$f_{3/2}^1$		$f_{3/2}^3$
$x_2$	$f_2$		$f_2^2$	
		$f_{5/2}^1$		$f_{5/2}^3$
$x_3$	$f_3$		$f_3^2$	
		$f_{7/2}^1$		
$x_4$	$f_4$			

Установим связь между конечными и разделенными разностями для случая, когда  $x_i - x_{i-1}$  постоянны. Будем иметь:

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1/2}^1}{h},$$

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} = \frac{f_{i+3/2}^1 - f_{i+1/2}^1}{2h \cdot h} = \frac{f_{i+1}^2}{2h^2}.$$

Вообще,

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) = \frac{f_{i+k/2}^k}{k! h^k}. \quad (6.54)$$

Доказательство будем вести методом индукции. Предполагая формулу справедливой для  $k \leq l$ , докажем ее справедливость для  $k = l+1$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+l+1}) &= \frac{f(x_{i+1}; \dots; x_{i+l+1}) - f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+l})}{x_{i+l+1} - x_i} = \\ &= \frac{f_{i+1+l/2}^l - f_{i+l/2}^l}{(l+1)h \cdot l! h^l} = \frac{f_{i+(l+1)/2}^l}{(l+1)! h^{l+1}}. \end{aligned}$$

**2. Вывод интерполяционных формул Ньютона.** Перейдем теперь к выводу интерполяционных формул Ньютона. Для этого рассмотрим интерполяционную формулу для неравных промежутков, взяв в ней в качестве узлов интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$  точки  $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$ . При этом, заменяя разделенные разности их выражениями через конечные разности, получим:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= f_0 + \frac{(x-x_0)}{h} f_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} f_1^2 + \\ &+ \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{n! h^n} f_{n/2}^n. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Обозначим  $\frac{(x-x_0)}{h} = t$ , тогда наша формула (6.55) примет вид

$$\begin{aligned} L_n(x_0 + ht) &= f_0 + t f_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_1^2 + \\ &+ \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-(n-1))}{n!} f_{n/2}^n. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Полученную формулу называют *интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед*.

Выведем еще одну интерполяционную формулу Ньютона. Опять будем использовать интерполяционную формулу Ньютона для неравных промежутков, взяв в ней в качестве узлов интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$  точки  $x_0, x_0 - h, x_0 - 2h, \dots, x_0 - nh$ . При этом получим:



$$\begin{aligned}
L_n(x) = & f(x_0) + (x-x_0)f(x_0; x_0 - h) + \\
& + (x - x_0)(x - x_0 + h)f(x_0; x_0 - h; x_0 - 2h) + \dots + \\
& + (x - x_0)(x - x_0 + h) \dots (x - x_0 + (n-1)h)f(x_0; x_0 - h; \dots; x_0 - nh).
\end{aligned}$$

Но в силу симметрии разделенных разностей относительно своих аргументов будем иметь:

$$f(x_0; x_0 - h; \dots; x_0 - ih) = f(x_0 - ih; x_0 - ih + h; \dots; x_0 - h; x_0).$$

Снова заменим разделенные разности конечными

$$f(x_0 - ih; x_0 - ih + h; \dots; x_0 - h; x_0) = \frac{f_{-i/2}^i}{i! h^i}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
L_n(x) = & f_0 + \frac{(x-x_0)}{h} f_{-1/2}^1 + \frac{(x-x_0)(x-x_0+h)}{2! h^2} f_{-1}^2 + \\
& + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_0+h) \dots (x-x_0+(n-1)h)}{n! h^n} f_{-n/2}^n.
\end{aligned} \tag{6.57}$$

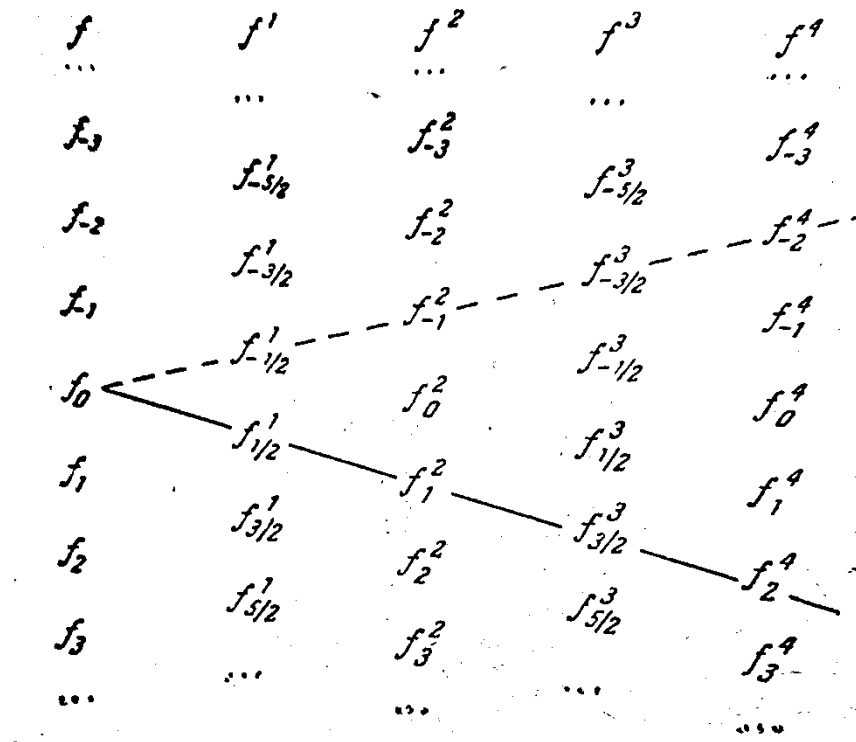
Заменяя, как и прежде,  $\frac{(x-x_0)}{h}$  на  $t$ , получим:

$$\begin{aligned}
L_n(x_0 + ht) = & f_0 + t f_{-1/2}^1 + \frac{t(t+1)}{2!} f_{-1}^2 + \\
& + \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+(n-1))}{n!} f_{-n/2}^n.
\end{aligned} \tag{6.58}$$

Это есть *интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад*.

Как видно из приведенной ниже таблицы разностей, в формулу Ньютона для интерполирования вперед входят разности, расположенные на диагонали, начинающейся в  $f_0$  и идущей вниз, а в

формуле Ньютона для интерполирования назад используются разности, расположенные на диагонали, начинающейся тоже в  $f_0$ , но идущей вверх:



### 3. Остаточные члены интерполяционных формул Ньютона.

Сейчас мы приведем выражения для остаточных членов интерполяционных формул Ньютона для интерполирования вперед и назад, следующие из формулы (6.51) для остаточного члена интерполяционной формулы для неравноотстоящих узлов.

Для первой формулы получим:

$$\begin{aligned}
 R_n(x) &= f(x) - L_n(x) = \\
 &= (x - x_0)(x - x_0 - h) \dots (x - x_0 - nh) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \\
 &= \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1) \dots (t-n).
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

Для второй

$$\begin{aligned}
 R_n(x) &= f(x) - L_n(x) = \\
 &= (x - x_0)(x - x_0 + h) \dots (x - x_0 + nh) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \\
 &= \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t+1) \dots (t+n).
 \end{aligned} \tag{6.60}$$