МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

По лабораторной работе № 2
по дисциплине «Методы оптимизации»
Тема: Симплексный метод

Студент гр. 0303	__________________	Болкунов В. О.
Преподаватель	__________________	Мальцева Н. В.

Санкт-Петербург
2023

Цели работы.

1. Решение задачи линейного программирования симплекс методом с помощью стандартной программы.
2. Решение задачи линейного программирования графически.
3. Сравнение результатов решения задачи обоими способами.

Постановка задачи.

Рассматривается следующая задача линейного программирования.

Найти минимум линейной функции $f(x_1, \dots, x_n)$:

$$f(X) = c_1 * x_1 + \dots + c_n * x_n$$

где c_i - постоянные коэффициенты; на множестве, заданном набором линейных ограничений:

$$\begin{cases} a_{1,1} * x_1 + \dots + a_{1,n} * x_n \geq b_1 \\ \dots \\ a_{m,1} * x_1 + \dots + a_{m,n} * x_n \geq b_m \\ x_1 \geq 0 \\ \dots \\ x_n \geq 0 \end{cases}$$

где $a_{i,j}$, b_i - постоянные коэффициенты.

В матричной форме ограничения записываются следующим образом:

$$AX \geq B \, , X \geq 0$$

Целевая функция может быть представлена в виде скалярного произведения: $f(X) = (C, X)$

Задание.

Вариант 15.

Целевая функция: $f(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2$

Ограничения: $\begin{cases} y_1 = 3x_1 - x_2 - 3 \geq 0 \\ y_2 = x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ y_3 = -2x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ y_4 = -3x_1 + 2x_2 + 9 \geq 0 \end{cases}$

Основные теоретические положения.

Симплексный метод позволяет решить основную задачу линейного программирования.

$\min_{x \in X} \varphi(x)$,

Где целевая функция $\varphi(x) = (c, x) = \sum_{i=1}^{n} c_i * x_i$,

А допустимое множество $X = \{x \in R^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$

A – матрица $(m \times n)$, и b – вектор $(m \times 1)$ задают ограничение допустимого множества m гиперплоскостями:

$$\begin{cases} y_1 = (A_1, x) - b_1 \geq 0 \\ \qquad\qquad \dots \\ y_m = (A_m, x) - b_m \geq 0 \end{cases}$$

Ещё n гиперплоскостей ограничивают снизу каждую компоненту вектора x: $\forall i = [1 \dots n]: x_i \geq 0$

Симплексный метод решения задачи линейного программирования состоит из двух этапов:

1) поиск крайней точки допустимого множества,

2) поиск оптимальной точки путем направленного перебора крайних точек.

- Крайняя точка не существует, если в таблице существует строка, все элементы которой не положительны, а последний элемент - отрицательный.
- Крайняя точка найдена, если все элементы вектора-столбца B больше нуля.

Порядок нахождения **крайней точки**:

1) выбрать строку i, в которой $b_i < 0$;

2) выбрать столбец s, в котором $a_{i,s} \geq 0$

3) в столбце s задать номер строки r разрешающего элемента так, чтобы отрицательное отношение $-\frac{b_r}{a_{r,s}}$.

4) поменять местами имена координат в таблице из строки r и столбца s;

5) рассматривая элемент $a_{r,s}$ как разрешающий, необходимо преобразовать таблицу по формулам:

$$\begin{aligned}
&ARS := a_{r,s}\ ;\\
&zl_{r,s} := \frac{1}{ARS}\ ;\\
&zl_{r,j} := \frac{-z_{r,j}}{ARS}\ ,\ j \neq s;\\
&zl_{i,s} := \frac{z_{i,s}}{ARS}\ , i \neq r;\\
&zl_{i,j} := \frac{z_{i,j} * ARS - z_{i,s} * z_{r,j}}{ARS}\ , i \neq r\ , j \neq s;\\
&z := \mathrm{z1};
\end{aligned} \qquad (1)$$

где под z и z1 понимается соответственно первоначальное и преобразованное значение таблицы (кроме левого столбца и верхней строки).

- Оптимальная точка найдена если текущая точка крайняя (все элементы вектор-столбца $B \geq 0$) и все элементы вектор-строки $\mathrm{C} \geq 0$
- Оптимальная точка не существует, если в таблице есть столбец j, в котором $c_j < 0$, и $\forall i: a_{i,j} > 0$.

Порядок нахождения **оптимальной точки**:

1) выбрать столбец s, в котором $c_s < 0$;

2) в столбце s задать номер строки r разрешающего элемента так, чтобы отрицательное отношение $\frac{b_r}{a_{r,s}}$ было максимальным;

3) поменять местами имена координат в таблице из строки r и столбца s;

4) рассматривая элемент $a_{r,s}$ как разрешающий, необходимо преобразовать таблицу по формулам (1).

Координаты оптимальной точки определяются следующим образом:

1) если x_j находится на i-м месте левого столбца, то его значение равно b_i;

2) если x_i находится на j-м месте верхней строки, то его значение равно 0.

Выполнение работы.

Начальные условия задачи (вариант 15) представлены на рисунке 1.

	x1	x2	b[i]
y1	3.00	-1.00	-3.00
y2	1.00	-1.00	1.00
y3	-2.00	-1.00	1.00
y4	-3.00	2.00	9.00
c[j]	-2.00	-1.00	0.00

Рисунок 1: начальные условия задачи

Что соответствует следующему формальному определению:

$$f(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 - x_2 - 3 \geq 0 \\ y_2 = x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ y_3 = -2x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ y_4 = -3x_1 + 2x_2 + 9 \geq 0 \end{cases}$$

Приведём задачу к матричному виду:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, -b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Построим графики каждой из ограничивающих прямой (рисунки 2-5 соответственно)

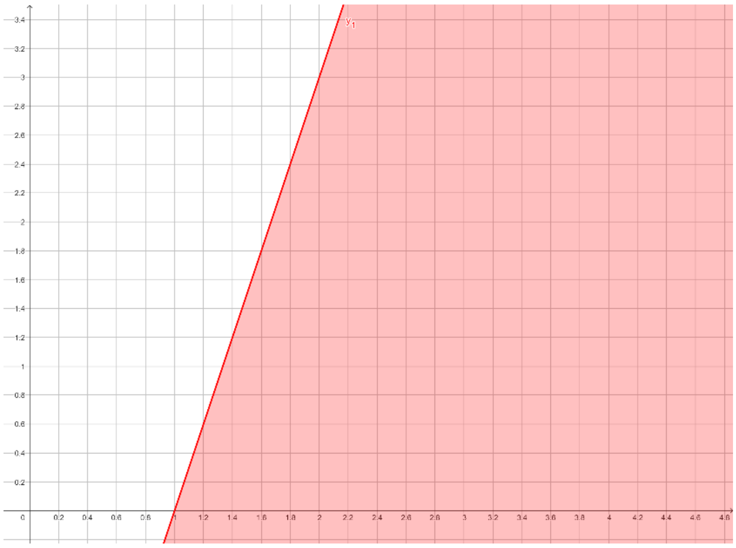

Рисунок 2: y_1

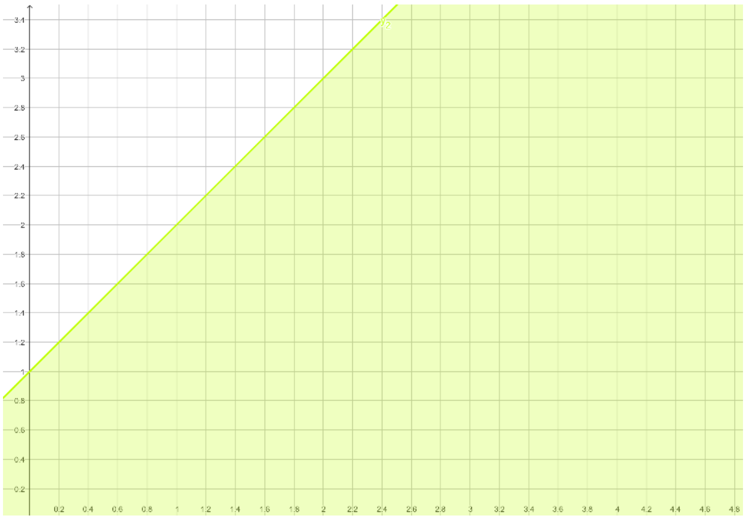

Рисунок 3: y_2

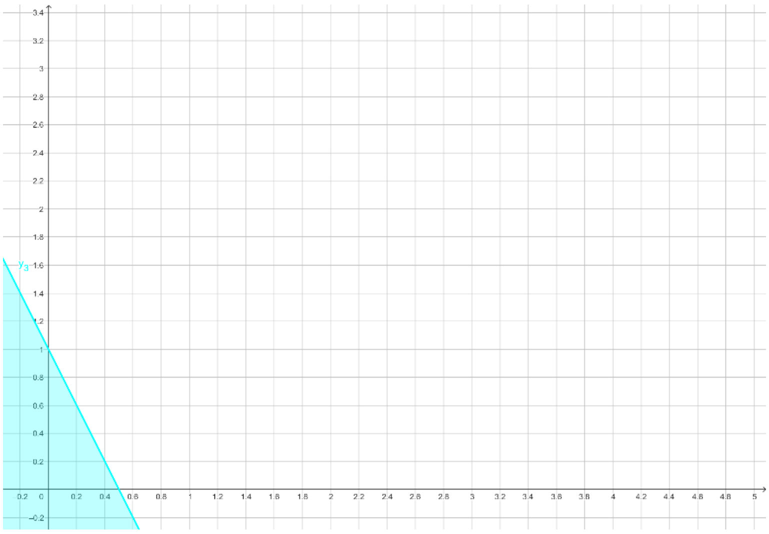

Рисунок 4: y_3

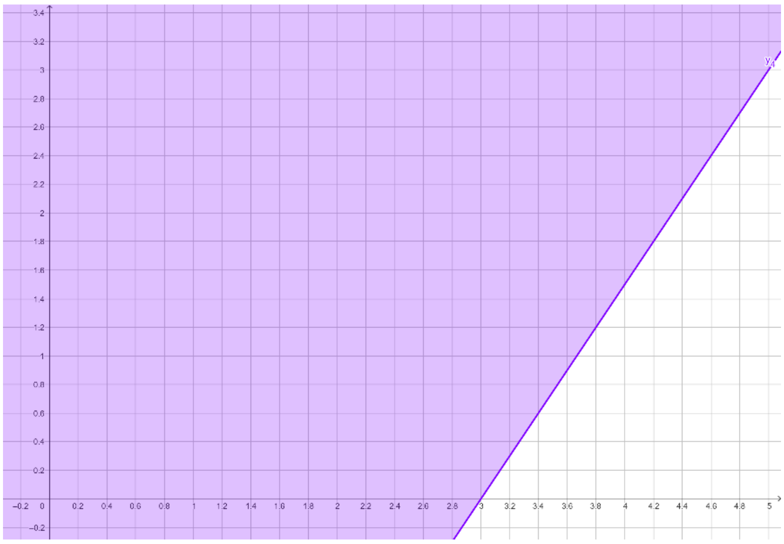

Рисунок 5: y_4

Изобразим все прямые на одном графике (рис. 6)

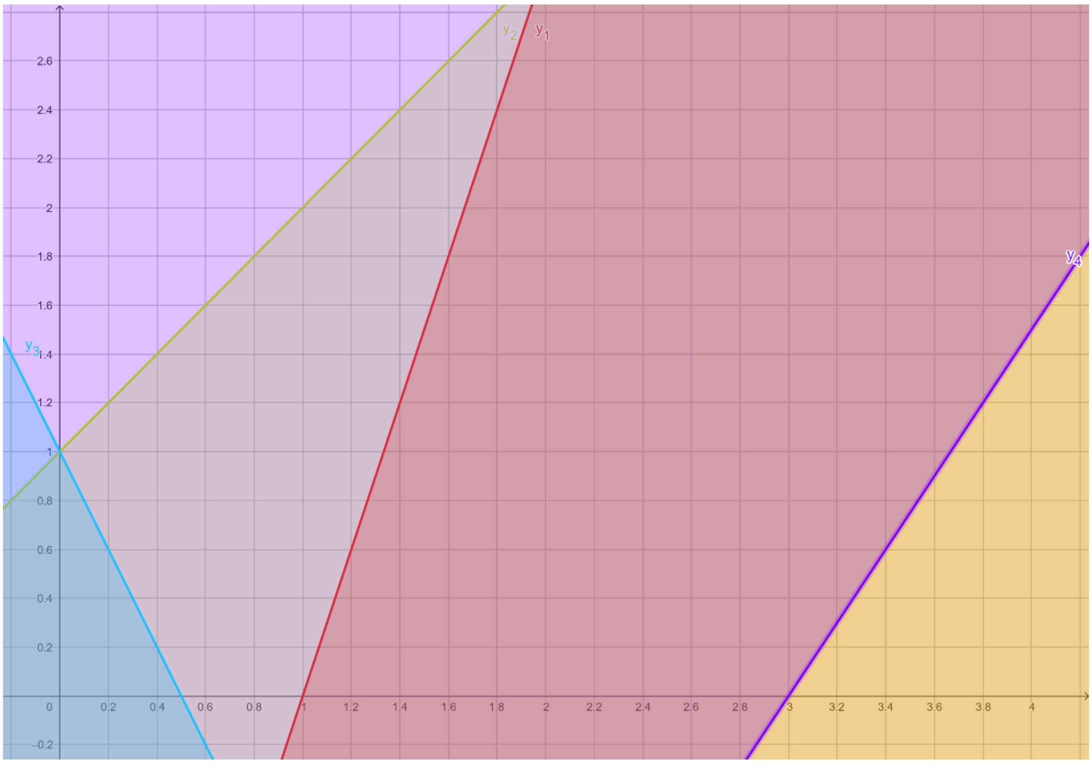

Рисунок 6: ограничивающие прямые

Можно заметить, что в первой четверти (где $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) области образованные данными прямыми не пересекаются, это особенно заметно, если отдельно изобразить области, соответствующие ограничениям y_1 и y_2 (рис. 7)

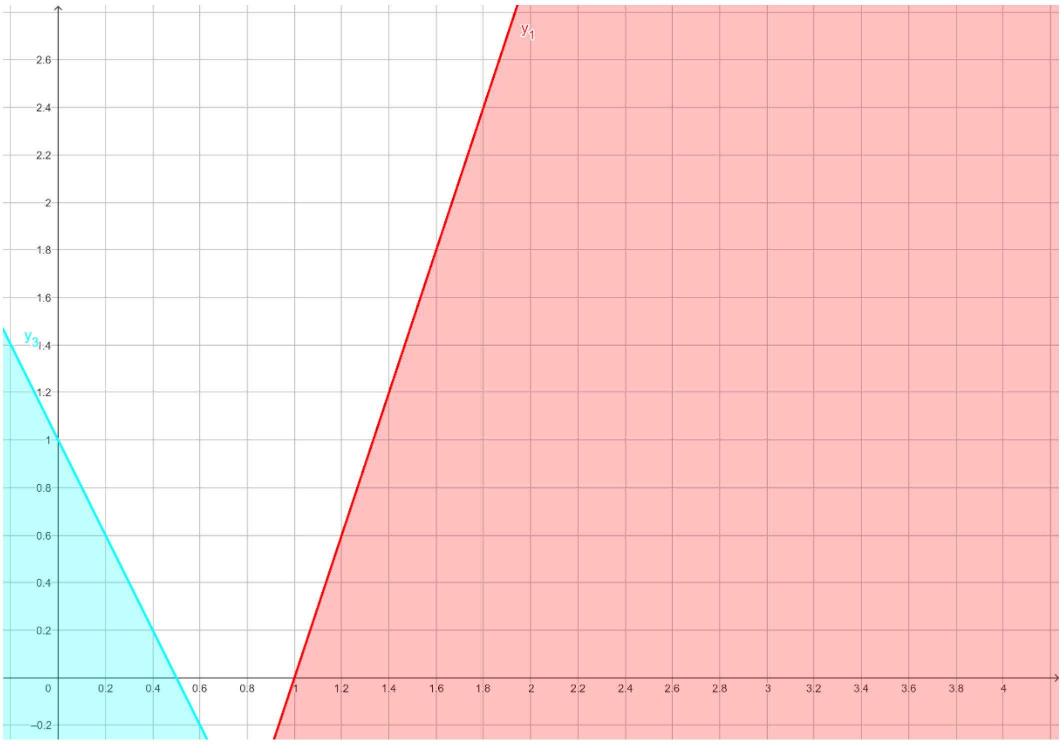

Рисунок 7: y_1 и y_2

На данном графике чётко видно, что области ограничения y_1 и y_2 не имеют общих точек в первой четверти координатной плоскости, следовательно в независимости от наложения дополнительных ограничений, допустимое множество задачи минимизации будет пусто.

Рассмотрим работу программы. На первом шаге (рис.8) алгоритм находится в точке $(0,0)$, $-b_1 < 0$ – точка не крайняя и $a_{1,1} \geq 0$ – следовательно можно сделать шаг алгоритма.

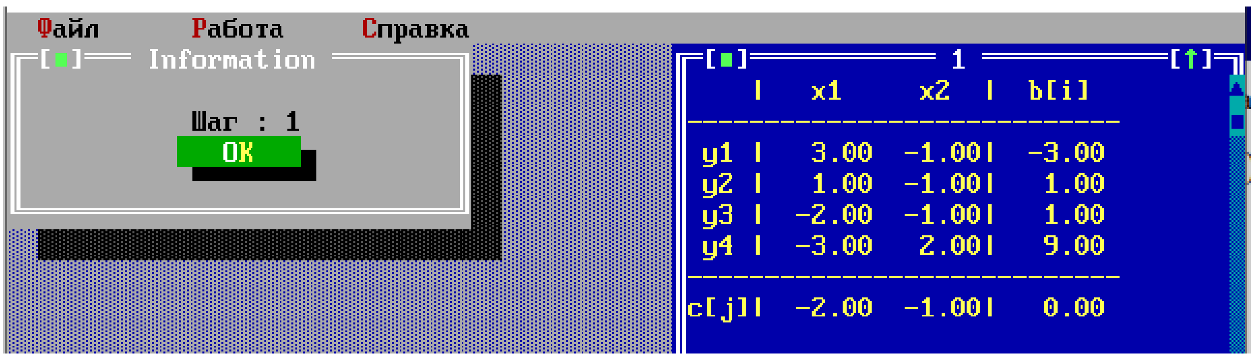

Рисунок 8: 1-ый шаг алгоритма

Найдём $-\frac{b_r}{a_{r,1}} = \max\limits_{i=[1\ldots4]}\left\{-\frac{b_r}{a_{r,1}} : -\frac{b_i}{a_{i,1}} < 0\right\}$, им будет являться $-\frac{b_3}{a_{3,1}} = -\frac{1}{2}$, следовательно разрешающий элемент находится в 3 строке и 1 столбце.

На следующем шаге программы (рис. 9) в первой строке все элементы отрицательные, следовательно допустимое множество пусто и решения не существует.

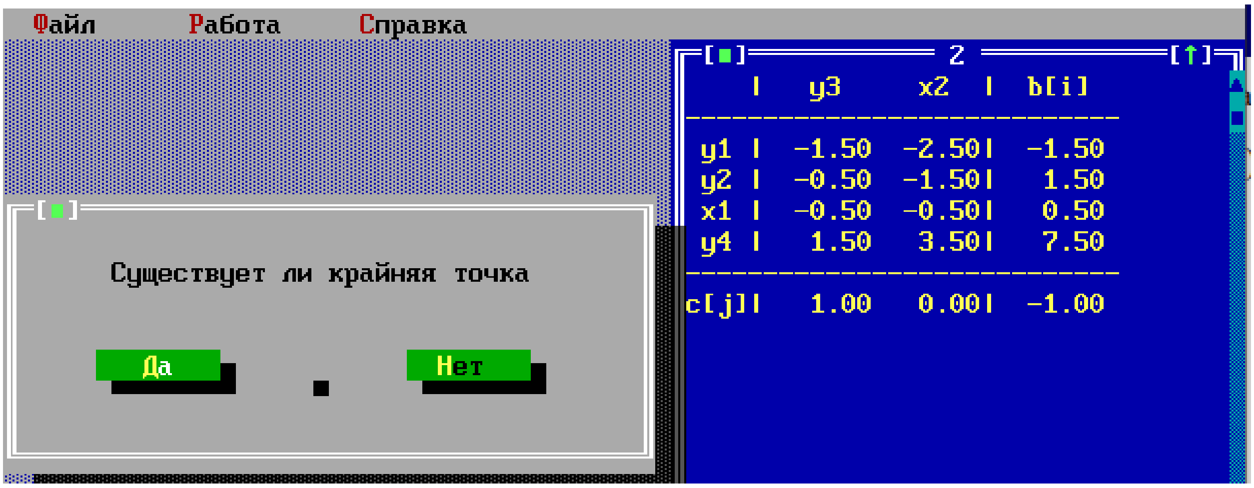

Рисунок 9: 2-ой шаг алгоритма

Решение, полученное с помощью программы совпадает с графическим.

Вывод.

В ходе выполнения лабораторной работы был изучен метод решения основной задачи линейного программирования: симплексный метод. С помощью подготовленной программы, решающей задачу минимизации данным методом, была решена задача минимизации в соответствии с вариантом. Задача минимизации была также решена графически, графическое решение и решение программы алгоритмом симплексного метода полностью совпадают.