10 лекция

2 ноября 2022 г. 13:42

Определение кратного интеграла

] E – измеримое множество, $E \subset \mathbb{R}^n$

def

Конечная система $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i_\tau}$ непустых множеств E_i, измеримых по Жордану : $i = 1, 2, \dots i_\tau$ называется разбиением E

1 $\mu(E_i \cap E_j) = 0 : i \neq j$

2 $\bigcup_{i=1}^{i_\tau} E_i = E$

При этом $|\tau| = \max_{i=1,2\dots i_\tau} \operatorname{diam}(E_i)$ называют мелкостью разбиения

диаметр — если представить множество в виде шара

$\mu E = \sum_{i=1}^{i_\tau} \mu E_i$

$\tau = \{E_i\}$

def

$\tau' = \{E_i'\}$ называют вписанным в $\tau = \{E_i\}$, если $\forall E_i' \in \tau'\ \exists E_i \in \tau : E_i' \subset E_i$ и обозначают $\tau \prec \tau'$

Свойства:

1) Если $\tau \prec \tau'$ и $\tau' \prec \tau''$, то $\tau \prec \tau''$

2) Потом проверит

3)

Lm

У всякого измеримого множества есть разбиение сколь угодно малой мелкости.

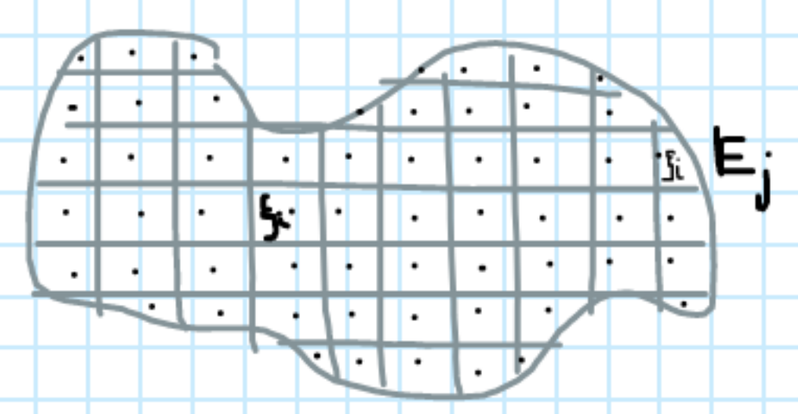
def

] $E \subset \mathbb{R}^n$, E - измеримо

$y = f(x) = f(x_1, x_2 \dots x_n)$ и $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i_\tau}$

$\sigma_\tau(f, \xi^{(1)}, \xi^{(2)} \dots \xi^{(i_\tau)}) = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)}) \mu E_i : \xi^{(i)} \in E_i$

называют интегральной суммой Римана



def

Число A называют интегралом Римана от функции f по измеримому множеству $E \subset \mathbb{R}^n$, если какова бы ни была последовательность $\tau_m = \{E_i^{(m)}\}_{i=1}^{i_\tau^{(m)}}$, $m \in \mathbb{N}$ и каковы бы не были $\xi^{(i,m)} \in E_i^{(m)} : i = 1, 2, \dots i_\tau^{(m)}$, последовательность интегральных сумм $\sigma_{\tau_m}(f, \xi^{(1,m)}, \xi^{(2,m)}, \dots \xi^{(i_\tau^{(m)}, m)}) \xrightarrow[m \to \infty]{} A$

$\int_E f(x)dx \qquad \int f(x)\,dE \qquad \underbrace{\int \dots \int}_{n} f(x_1, x_2 \dots x_n)\,dx_1 dx_2 \dots dx_n$

Если существует предел

$\int f(x)\,dE = \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau$

Lm

] $E \subset \mathbb{R}^n$, E - измеримое

$E_0 \subset E$, $\mu E_0 = 0$

Тогда $\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i = 0$,

где $\tau_0(E_0) = \{E_i \in \tau : E_i \cap E_0 \neq \varnothing\}$

$\tau(E_0) = \{E_i \in \tau : E_i \cap E_0 \neq \varnothing\}$

Th

] E измеримо, $E \subset \mathbb{R}^n$

$\tau = \{E_i\}$ - разбиение, $E_0 \subset E$, $\mu E_0 = 0$

Если f ограничена на E, то Риманов интеграл $\int f(x)\,dE$ существует

$\Updownarrow$

$\exists \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau(E_0)}$

При этом, если он существует и равен $\int f(x)\,dE$

Существование интеграла Римана

Любая функция меры нуль интегрируема, и интеграл равен нулю

Lm

] f определена на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$

$\tau = \{E_i\}$ - разбиение E

$E_\tau^* = \bigcup_{\mu E_i > 0} E_i$

Если f неограничена на E_τ^*, тогда $\forall M > 0$ можно выбрать $\xi^{(i)} \in E_i$, что будет верно

$\left| \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)}) \mu E_i \right| > M$

Следствие

] f - функция на измеримом $E \subset \mathbb{R}^n$, если у E ∃ сколь угодно мелкое разбиение, для которого f неограничена на объединении элементов разбиения положительной меры, то f - не интегрируема по Риману на E

Th

Если f - интегрируема на множестве E, то $\exists E_0 \subset E$, $\mu E_0 = 0$, что f - ограничена на $E \setminus E_0$

Th

Если f - интегрируема на открытом множестве, то она ограничена

Lm

Непустое пересечение n-мерного замкнутого куба с открытым множеством имеет положительную миксимую меру Жордана.

Следствие

Для любого открытого измеримого множества ∃ сколь угодно мелкое разбиение, все элементы которого имеют положительную меру ($\mu E_i > 0$)

Суммы Дарбу

def

f - ограничена, E - измерима, $\tau = \{E_i\}$

$m_i = \inf_{x \in E_i} f(x) \qquad M_i = \sup_{x \in E_i} f(x)$

$s_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \mu E_i \qquad S_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \mu E_i$

$s_\tau \le \sigma_\tau \le S_\tau$

Th

Для того, чтобы ограниченная на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ f была интегрируема по Риману,

$\Updownarrow$

$\lim_{|\tau| \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$

Th

f - непрерывна на компакте, то она интегрируема на нём

замкнутое закрытое множество

Th

Если f - ограничена на измеримом компакте и множество её точек разрыва имеет меру нуль, то она интегрируема на нём

Свойства кратного интеграла

Свойства:

1)] E - измеримо, то $\int dE = \mu E$

2)] E и E^*, f - ограничена и интегрируема на E, тогда она интегрируема и на на E^*

3) Аддитивность интеграла по множествам

] E' и E'' - измеримы $\qquad E = E' \cup E''$, $E' \cap E'' = \varnothing$

f - ограничена и интегрируема на E, тогда $\exists \int f(x)\,dE'$ и $\exists \int f(x)\,dE''$

причём $\int f(x)\,dE = \int f(x)\,dE' + \int f(x)\,dE''$

4) Линейность интеграла

] f_1, f_2 - интегрируемы на E

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\exists \int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,dE = \lambda_1 \int f_1\,dE + \lambda_2 \int f_2\,dE$

5) Если f и g - интегрируемы и ограничены на непрерывном множестве E, тогда и $f \cdot g$ и f/g (