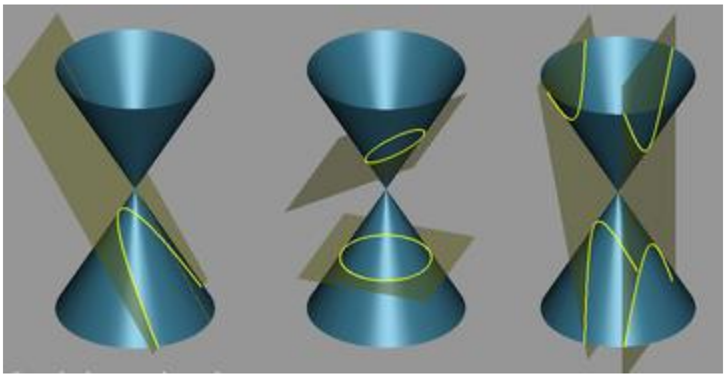
Сегодня мы займемся кривыми второго порядка, то есть линиями на плоскости, которые в декартовой системе координат описываются уравнением второй степени от двух переменных $F(x, y) = 0$.

На самом деле, почти со всеми этими линиями вы знакомы еще со школы: это *окружность*, *парабола* (график квадратичной функции) и *гипербола* (график обратной пропорциональности). За пределами этого списка остается только *эллипс*, но и про него практически каждый знает, как он выглядит.



Заметим, что иногда многочлен второй степени может быть представлен как произведение двух многочленов первой степени, например,

$$F(x, y) = (x - 2y + 1)(y + 5).$$

Тогда соответствующее уравнение может быть представлено как произведение двух уравнений первой степени, а множество точек, которое описывается этим уравнением, будет объединением решений двух линейных уравнений (в этом конкретном примере – парой пересекающихся прямых). Кроме того, может оказаться, что уравнение второй степени не имеет решений (например, $x^2 + y^2 + 3 = 0$) или имеет только одно решение (как уравнение $x^2 + 3y^2 = 0$).

Наша задача – познакомиться с основными свойствами «настоящих» кривых второго порядка, то есть таких, линий, которые не могут быть описаны уравнениями первой степени. Кроме того, мы должны исследовать произвольное уравнение второй степени от двух переменных и научиться различать, какую именно ситуацию оно описывает.

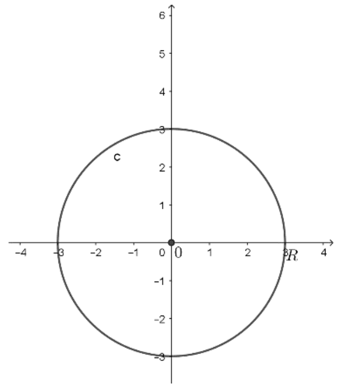
I. Канонические уравнения кривых второго порядка

Начнем мы с короткого описания таких, линий второго порядка, которые не могут быть описаны уравнениями первой степени. Все эти линии были детально изучены еще математиками Античности, которые рассматривали их как результат пересечения конической поверхности плоскостью (отсюда возникло их общее название – *конические сечения*). Наибольший вклад в этом направлении принадлежит Аполлонию Пергскому (III–II вв. до н.э.), который не только обобщил и систематизировал достижения предшественников, но и получил большое количество новых результатов. Кстати, именно он дал этим кривым названия, которые мы используем до сих пор.

Итак, сейчас мы рассмотрим «геометрические» определения окружности, эллипса, гиперболы и параболы и их канонические уравнения, то есть уравнения в декартовой системе координат, максимально согласованной с геометрией этих кривых.

1. **Окружность**

Определение. Окружностью называется плоская замкнутая линия, каждая точка которой одинаково удалена от некоторой точки плоскости, называемой *центром*. Расстояние от центра до точки окружности называется *радиусом*.



Если мы выберем в качестве начала координат центр окружности, и вспомним формулу для вычисления расстояния между точками в декартовой системе координат, то сразу получим каноническое уравнение окружности

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = R^2},$$

где R – радиус окружности.

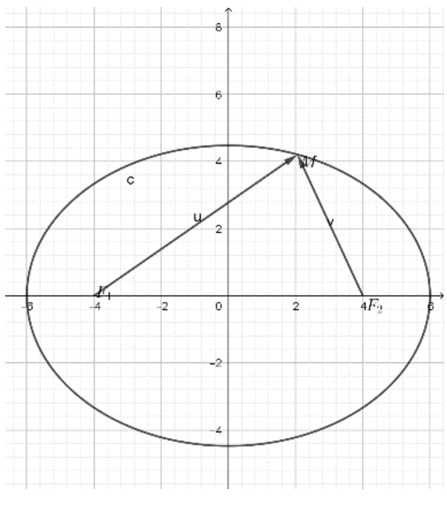
Обратите внимание: направление осей при составлении этого уравнения не играет никакой роли. Связано это с тем, что для окружности любая прямая, проходящая через центр, является осью симметрии. Как мы убедимся дальше, для всех остальных кривых второго порядка направление координатных осей очень сильно влияет на вид уравнения.

2. **Эллипс**

Определение. Эллипс – это совокупность точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянна.

Рассмотрим декартову систему координат, в которой ось абсцисс проходит через фокусы F_1 и F_2 эллипса, а ось ординат пересекает ее в середине отрезка, соединяющего фокусы.

Пусть $M(x, y)$ – точка эллипса, и сумма расстояний от нее до фокусов равна $2a$, а расстояние между фокусами обозначим через $2c$ (отрезки, соединяющие точку эллипса с фокусами, называются *фокальными радиусами*). Обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки M, до фокусов F_1 и F_2 соответственно (это длины фокальных радиусов), тогда, по определению эллипса, справедливо равенство $r_1 + r_2 = 2a$. Используя координаты, мы можем переписать его следующим образом: $\sqrt{y^2 + (x + c)^2} + \sqrt{y^2 + (x - c)^2} = 2a$. Затем, учитывая, что $0 \leq r_1 < 2a$ и $0 \leq r_2 < 2a$, выполним стандартные преобразования:



$$y^2 + (x + c)^2 = y^2 + (x - c)^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (x - c)^2},$$

$$4a^2 - 4cx = 4a\sqrt{y^2 + (x - c)^2}, \qquad a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(y^2 + (x - c)^2),$$

$$a^2(a^2 - c^2) = a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2.$$

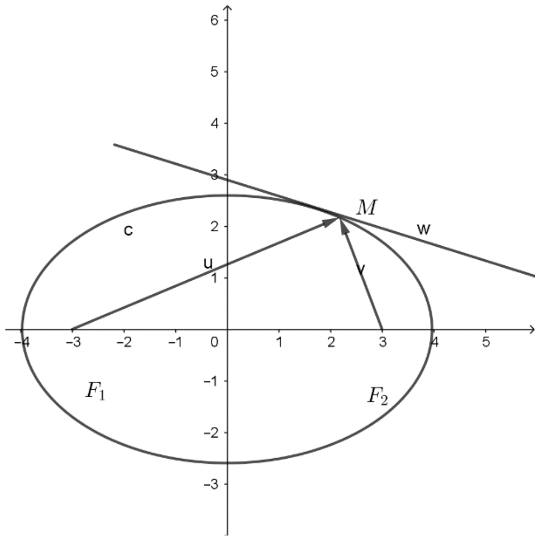
Теперь заметим, что в треугольнике MF_1F_2 величина $2c$ – длина одной из сторон, а $2a$ – сумма двух других, следовательно, $a > c$ (иначе треугольник MF_1F_2 невозможно построить, или он вырождается в отрезок F_1F_2). Следовательно, $a^2 - c^2 > 0$, и мы можем обозначить эту величину как $b^2 = a^2 - c^2$, тогда уравнение примет вид

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Это и есть каноническое уравнение эллипса.

Заметим, что всегда верно неравенство $a > b$, в связи с чем величину b называют *малой полуосью* эллипса, а величину a – *большой*.

У эллипса, как и других конических сечений, есть целый ряд красивых геометрических свойств. И остается только восхищаться достижениями античных математиков, которые, не обладая современными средствами, смогли очень детально изучить все эти кривые. Назовем здесь только одно из подобных свойств эллипса: так называемое *оптическое свойство*.



Оказывается, если мы проведем касательную к эллипсу и соединим точку касания с фокусами, то фокальные радиусы, проведенные в точку касания, образуют одинаковые углы с касательной. Это значит, что если мы сделаем кривую отражающей и поместим в один из фокусов точечный источник света, то все отраженные лучи пройдут через второй фокус. Это свойство эллипса широко используется в технике.

Упомянем еще одну важную характеристику эллипса – его *эксцентриситет*, это отношение межфокусного расстояния к большой оси эллипса :

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{c}{a}}.$$

Очевидно, эксцентриситет эллипса всегда меньше 1. Пр этом нетрудно заметить, что чем ближе эксцентриситет к 0, тем больше эллипс похож на окружность, а чем ближе он к 1, тем более вытянутым становится эллипс, в конце концов превращаясь просто в отрезок.

3. Гипербола

<u>*Определение.*</u> Гипербола – это совокупность точек плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянна.

Аналогично предыдущему пункту, рассмотрим декартову систему координат, в которой ось абсцисс проходит через фокусы гиперболы F_1 и F_2, а ось ординат пересекает ее в середине отрезка, соединяющего фокусы.

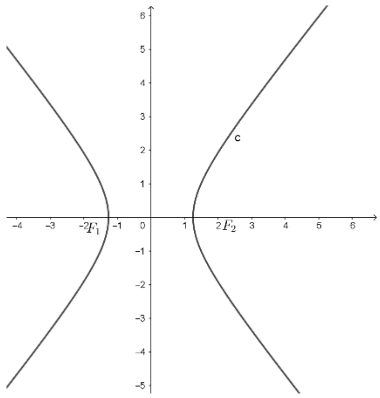
Пусть $M(x, y)$ – точка гиперболы, модуль разности расстояний от нее до фокусов равен $2a$, а расстояние между фокусами обозначим через $2c$. Обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки M, до фокусов F_1 и F_2 соответственно (это фокальные радиусы), тогда, по определению гиперболы, справедливо равенство $|r_1 - r_2| = 2a$. Используя координаты, мы можем переписать его следующим образом: $\left|\sqrt{y^2 + (x + c)^2} - \sqrt{y^2 + (x - c)^2}\right| = 2a$. Нетрудно видеть, что преобразуя это уравнение, мы придем к равенству, которое выглядит точно так же, как и предыдущем пункте:

$$a^2(a^2 - c^2) = a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2.$$

Но теперь в треугольнике MF_1F_2 величина $2c$ – длина одной из сторон, а величина $2a$ – разность двух других, следовательно, либо $a < c$ (по неравенству треугольника), либо $a = c$, и в этом случае наша линия превращается в прямую, из которой вырезан интервал между фокусами. Таким образом, если речь идет о гиперболе, а не о вырожденном случае, то $c^2 - a^2 > 0$ и, если мы обозначим эту величину как $b^2 = c^2 - a^2$, то уравнение примет вид

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Мы получили каноническое уравнение гиперболы.

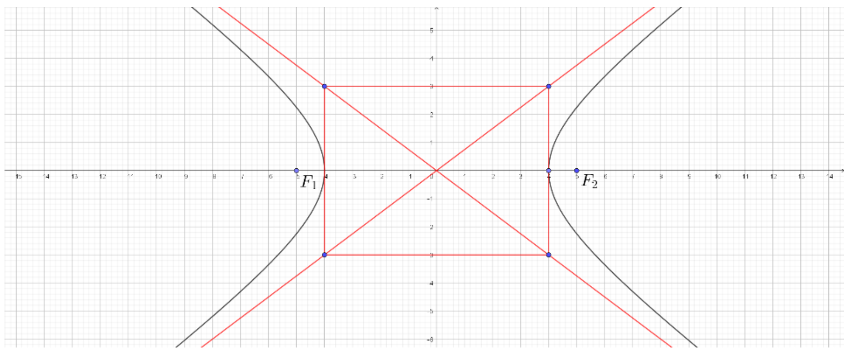


Чтобы понять, как эта линия выглядит, заметим, что полученное уравнение не меняется при смене знаков у обеих переменных, следовательно, кривая симметрична относительно координатных осей. Таким образом, нам достаточно рассмотреть часть гиперболы, лежащую в первой четверти (то есть при положительных значениях обеих переменных), а затем отразить полученную линию относительно координатных осей.

Выразим в полученном равенстве переменную y через x:

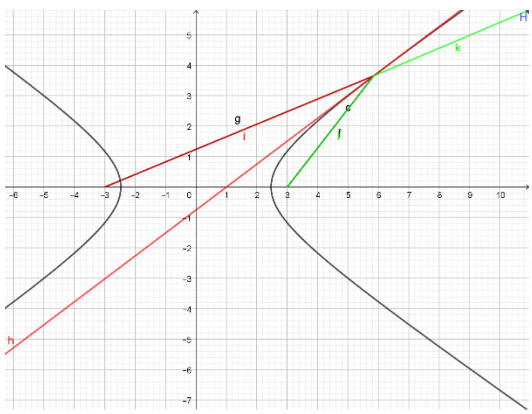
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Из этого соотношения видно, что x не может быть меньше a, и при больших значениях переменной x наша кривая неограниченно приближается к прямой $y = \frac{b}{a}x$ (оставаясь ниже ее). Таким образом, в силу симметрии гиперболы, мы видим, что прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются ее асимптотами. Из этого же равенства видно, что кривая пересекает ось абсцисс в точках с абсциссами $x = \pm a$ (эти точки называются *вершинами гиперболы*), а ось ординат она не пересекает.



Тем не менее числа a и b называют полуосями гиперболы (a называют *вещественной полуосью*, а b – *мнимой*). Связано это со следующим обстоятельством: если мы построим прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ с центром в начале координат и проведем в нем диагонали, то асимптоты гиперболы окажутся продолжениями этих диагоналей (см.рисунок). Такой прямоугольник часто называют *основным прямоугольником* гиперболы.

Так же, как и эллипс, гипербола имеет интересное оптическое свойство: касательная к гиперболе образует одинаковые углы с обоими фокальными радиусами, но в этом случае фокальные радиусы располагаются по разные стороны от касательной. С точки зрения геометрической оптики это означает, что если мы разместим источник света в одном из фокусов, а ветви гиперболы сделаем отражающими, то внешнему наблюдателю будет казаться, что отраженные лучи выходят из второго фокуса.



Так же, как и для эллипса, для гиперболы вводится понятие *эксцентриситета*, как отношение межфокусного расстояния к вещественной оси гиперболы :

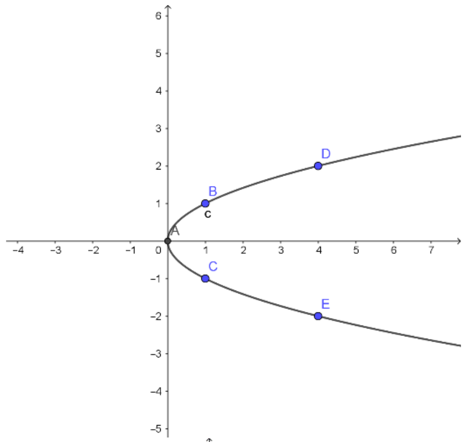
$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{c}{a}}.$$

Очевидно, эксцентриситет гиперболы всегда больше 1. Пр этом нетрудно заметить, что чем ближе эксцентриситет к 1, тем больше «сплющивается» гипербола (приближаясь к прямой, из которой вырезан интервал между фокусами), а чем больше эксцентриситет, тем более вытянутым «в высоту» становится основной прямоугольник, а гипербола при этом стремится превратиться в пару параллельных прямых.

4. Парабола

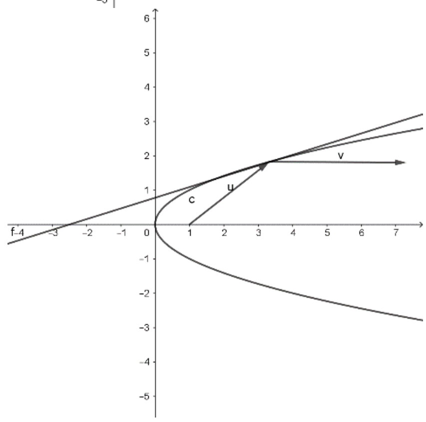
Определение. Параболой называется множество точек плоскости, одинаково удаленных от фиксированной точки и фиксированной прямой. Эта точка называется *фокусом*, а прямая – *директрисой*.

Рассмотрим декартову систему координат, в которой ось абсцисс проходит через фокус перпендикулярно директрисе, а ось ординат пересекает ее в середине отрезка, соединяющего фокус и директрису.



Пусть $M(x,y)$ – точка параболы, а расстояние от фокуса до директрисы равно p. Тогда, по определению параболы, справедливо равенство $x+\frac{p}{2}=\sqrt{y^2+(x-\frac{p}{2})^2}$. Возведем это равенство в квадрат: $x^2+\left(\frac{p}{2}\right)^2+px=y^2+(x-\frac{p}{2})^2$. После тривиальных преобразований получим каноническое уравнение гиперболы

$$\boldsymbol{y^2=2px}.$$



Оптическое свойство параболы состоит в том, что касательная к ней образует одинаковые углы с осью симметрии параболы и с фокальным радиусом. Это означает, что если мы разместим источник света в фокусе, а ветви параболы сделаем отражающими, то все отраженные лучи будут идти праллельно оси параболы. Это свойство параболы вы наверняка не раз наблюдали: луч мощного прожектора, который виден издалека, практически всегда получается отражением лучей от параболического зеркала, если источник света помещен в фокус параболы.

Так же, как и для эллипса и гиперболы, для параболы вводится понятие *эксцентриситета*, но он считается всегда равным 1, и поэтому никак не отражается на форме параболы. Его введение для параболы связано с тем, что он позволяет в целом ряде вопросов рассматривать все эти кривые с единой точки зрения. При этом оказывается, что парабола занимает промежуточное положение между эллипсом и гиперболой.

Чтобы понять это, посмотрите внимательно, на рисунок, показывающий все эти кривые как сечения конуса. Представьте себе, что мы пересекли круговой конус плоскостью, перпендикулярной его оси. Ясно, что у нас получится окружность. Если мы начнем наклонять секущую плоскость, то окружность превратится в эллипс, причем, чем сильнее мы будем наклонять плоскость, тем сильнее будет вытягиваться этот эллипс. Но в тот момент, когда плоскость станет параллельна образующей конуса, эллипс «разорвется», одна из его вершин уйдет в бесконечность, и эллипс превратится в параболу.

Надо заметить, что до этого момента плоскость пересекает только одну полость конуса. Но если мы продолжим поворот плоскости после того, как получили параболу, то эта плоскость пересечет и вторую полость конуса: у нас получится гипербола.

Таким образом, вращая секущую плоскость так, чтобы она всегда проходила через одну и ту же прямую, перпендикулярную оси конуса, мы получим бесконечно много эллипсов и гипербол и только две параболы (они образуются в те моменты, когда плоскость становится параллельна образующей конуса).

II. Анализ общего уравнения второй степени от двух переменных

В самом общем случае уравнение второй степени от двух переменных выглядит следующим образом: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Прежде всего рассмотрим квадратичную форму $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. Как мы знаем, с ней можно связать симметричную матрицу $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, а та, в свою очередь, может быть представлена в виде произведения $M = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}Q^t$, где $Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ – матрица плоского поворота, а λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы M (мы используем теорему о канонической форме самосопряженного оператора, точнее, ее матричный вариант).

Таким образом, если мы выполним замену переменных $Q^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, то квадратичная форма $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ будет преобразована так:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}Q^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (Q^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})^t\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}Q^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2.$$

Это значит, что выполнив поворот координатных осей на угол α, мы получим уравнение, которое описывает ту же кривую, но не содержит произведение переменных.

Обратите внимание: в теореме о самосопряженном операторе про матрицу Q утверждается только то, что она является ортогональной, а ортогональная матрица 2 порядка – это не обязательно матрица поворота, она может быть и матрицей вида $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, но такая матрица легко превращается в матрицы поворота, например, сменой знаков уэлементов второго столбца. Почему это можно сделать? Мы знаем, что столбцы матрицы Q – это координатные столбцы нормированных собственных векторов матрицы M, и если мы поменяем знаки у одного или нескольких столбцов этой матрицы, это условие не будет нарушено. Поэтому мы, не умаляя общности, можем считать, что Q – всегда матрица поворота.

Итак, в дальнейших рассмотрениях мы можем считать, в исследуемом уравнении произведения переменных нет.

Сделаем еще одно важное наблюдение:

если в уравнении коэффициент при квадрате какой-то переменной не равен 0, то параллельным переносом координатных осей можно преобразовать уравнение так, что в нем исчезнет первая степень этой переменной. Действительно, пусть, например, $A \neq 0$, тогда : $Ax^2 + Dx = A(x^2 + 2\frac{D}{2A} + (\frac{D}{2A})^2 - (\frac{D}{2A})^2) = A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D}{4A}^2$. Это значит, что перенеся начало координат вдоль оси абсцисс на величину $-\frac{D}{2A}$, то есть выполнив замену переменных $\begin{cases} u = x + \frac{D}{2A} \\ v = y \end{cases}$, мы получим уравнение, в котором первой степени переменной u не будет (а коэффициент при квадрате этой переменной равен коэффициенту при квадрате x).

Итак, при анализе уравнения второй степени слагаемые первой степени следует принимать во внимание только в тех случаях, когда коэффициент при квадрате соответствующей переменной равен 0.

Теперь мы готовы рассмотреть различные варианты уравнения второй степени от двух переменных $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

1. Начнем со случая $AC \neq 0$, то есть будем считать, что оба коэффициента при квадратах отличны от 0. Тогда, с учетом наших замечаний, можно считать, что уравнение имеет вид $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$.
   Возможны следующие случаи.

1.1. *Все коэффициенты отличны от 0 и имеют один и тот же знак.* В этом случае уравнение решений не имеет.

1.2. $F = 0$*, а коэффициенты* A *и* C *имеют один и тот же знак.* В этом случае уравнение имеет единственное решение $x = y = 0$, соответственно, оно описывает одну точку.

1.3. $F = 0$*, а коэффициенты* A *и* C *имеют разные знаки.* Тогда уравнение можно переписать в виде $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$, где a и b – какие-то положительные числа. Ясно, что в этом случае уравнение задает пару пересекающихся прямых $\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$.

1.4. $F \neq 0$*, а оба коэффициента* A *и* C *имеют другой знак.* Для определенности будем считать, что A и C положительны, а F – отрицательно. Разделим обе части равенства $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ на $-F$ и перенесем –1 в правую часть равенства. Если мы теперь обозначим положительные числа $-\frac{A}{F}$ и $-\frac{C}{F}$ соответственно через $\frac{1}{a^2}$ и $\frac{1}{b^2}$, мы получим уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ с полуосями a и b. В частном случае, когда $a = b$, у нас получится уравнение окружности.

1.5. *Коэффициенты* A *и* C *имеют разные знаки, и* $F \neq 0$. Для определенности будем считать, что A положительно, а F и C – отрицательны. Разделим обе части равенства $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ на $-F$ и перенесем –1 в правую часть равенства. Если мы теперь обозначим положительные числа $-\frac{A}{F}$ и $\frac{C}{F}$ соответственно через $\frac{1}{a^2}$ и $\frac{1}{b^2}$, мы получим уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ с вещественной полуосью a и мнимой полуосью b.

2. Будем теперь считать, что ровно один из коэффициентов при квадратах переменных, например, при x, равен 0. Тогда уравнение имеет вид $Cy^2 + Dx + F = 0$. Тогда возможны следующие ситуации.

2.1. $D \neq 0$. Очевидно, что в этом случае при любых значениях C и F мы получаем параболу. Чтобы получить ее каноническое уравнение, нам придется разделить уравнение на C и выполнить параллельный перенос вдоль оси абсцисс на величину $-\frac{F}{CD}$. Если знаки C и D совпадают, придется дополнительно изменить направление оси абсцисс.

2.2. $D = F = 0$. В этом случае уравнение имеет вид $Cy^2 = 0$, и его решения – это координаты точек оси ординат. То есть в этом случае мы получаем одну прямую.

2.3. $D = 0,\ F \neq 0$. В этом случае если знаки C и F совпадают, то уравнение решений не имеет, если же знаки разные, то обозначив положительное число $-\frac{F}{C}$ через a^2, получим уравнение $y^2 = a^2$, задающее пару параллельных прямых $y = \pm a$.

Итак, мы выполнили полное исследование общего уравнения второй степени от двух переменных. Теперь мы знаем, что если такое уравнение рассматривать как уравнение геометрического объекта в декартовой системе координат, то этим объектом может быть только:

- одно из конических сечений (то есть окружность, эллипс, гипербола или парабола),
- пустое множество,
- точка,
- прямая,
- пара параллельных прямых,
- пара пересекающихся прямых.

Рассмотрим примеры.

1. Рассмотрим кривую с уравнением $8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$.

Составим матрицу $M = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$квадратичной формы $8x^2 + 6xy$ и найдем ее характеристический многочлен $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 9$. Этот многочлен имеет корни 9 и –1.

Найдем собственные вектора матрицы M:

А) $M + E = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, следовательно, в качестве нормированного собственного вектора можно взять $e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$,

Б) $M - 9E = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, следовательно, в качестве второго нормированного собственного вектора можно взять $e_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, матрица замены переменных получается такая: $Q = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, а сама замена переменных выглядит следующим образом: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(u + 3v) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3u + v). \end{cases}$

Заметим, что выполнять подстановку надо только в линейных членах: про квадратичную часть мы заранее знаем, как она должна выглядеть. Но полезно напомнить, что коэффициенты при квадратах (собственные числа) должны располагаться в том порядке, в котором располагаются отвечающие им собственные вектора в матрице замены переменных.

В итоге получаем уравнение в новых переменных $-u^2 + 9v^2 + \frac{6}{\sqrt{10}}(u + 3v) + 3\frac{1}{\sqrt{10}}(-3u + v) + 1 = 0$ или $-u^2 + 9v^2 - \frac{3}{\sqrt{10}}u + \frac{21}{\sqrt{10}}v + 1 = 0$. Выделим полные квадраты:

$$(3v + \frac{7}{2\sqrt{10}})^2 - \frac{49}{40} - \left(u + \frac{3}{2\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{9}{40} + 1 = 0.$$

В итоге мы получили равенство $(3v + \frac{7}{2\sqrt{10}})^2 = \left(u + \frac{3}{2\sqrt{10}}\right)^2$, которое задает пару пересекающихся прямых $3v - u + \frac{2}{\sqrt{10}} = 0$ и $3v + u + \frac{5}{\sqrt{10}} = 0$.

Обратите внимание: эти прямые симметрично наклонены к новым координатным осям (за счет этого уравнение в новых координатах выглядит проще). А если мы еще и перенесем начало координат в точку с координатами $u = -\frac{3}{2\sqrt{10}}$ и $v = -\frac{7}{6\sqrt{10}}$, то прямые будут располагать полностью симметрично относительно этих новых осей. Если же мы хотим построить эти прямые в исходной системе координат, то можем выполнить обратную подстановку $\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{10}}(x - 3y) \\ v = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x + y) \end{cases}$, у нас получатся прямые $4x + 3y + 1 = 0$ и $x + \frac{1}{2} = 0$.

2. Еще пример: $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$.

Матрица квадратичной формы в этот раз выглядит так: $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, ее характеристический многочлен равен $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$, его корни равны 1 и 6.

Найдем собственные вектора матрицы M:

А) $M - E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, следовательно, в качестве нормированного собственного вектора можно взять $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Б) $M - 6E = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, следовательно, в качестве второго нормированного собственного вектора можно взять $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Выпишем матрицу замены переменных: $Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, а сама замена переменных выглядит следующим образом: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2u - v) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(u + 2v). \end{cases}$

Теперь можно выписать уравнение в новых переменных

$u^2 + 6v^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}(2u - v) - \frac{2}{\sqrt{5}}(u + 2v) + 9 = 0$ или $u^2 + 6v^2 + \frac{14}{\sqrt{5}}u - \frac{12}{\sqrt{5}}v + 9 = 0$. Выделим полные квадраты:

$$(u + \frac{7}{\sqrt{5}})^2 - \frac{49}{5} + 6\left(v - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{6}{5} + 9 = 0.$$

В итоге мы получили равенство$(u + \frac{7}{\sqrt{5}})^2 + 6\left(v - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2$, разделив все члены этого уравнения на 2 получаем «почти каноническое» уравнение эллипса $\frac{(u+\frac{7}{\sqrt{5}})^2}{2} + \frac{\left(v-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{1}{3}} = 1$ с полуосями $\sqrt{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Чтобы получить каноническое уравнение, надо перенести начало координат параллельным переносом в точку с координатами $u = -\frac{7}{\sqrt{5}}$ и $v = \frac{1}{\sqrt{5}}$ или (что то же самое) $x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{14}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -3$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{7}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -1$

На чертеже красным цветом отмечены оси канонической системы координат, а черным – оси исходной системы.