Неопределенный интеграл

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл.

Определение 1.1.1. Функцию F называют первообразной функции f на некотором конечном (или бесконечном) промежутке (интервале) (a, b), если функции F дифференцируема на этом интервале и $\forall x \in (a, b)\ F'(x) = f(x)$.

Стоит уточнить, что если рассматривается какой-либо из концов промежутка, то следует использовать соответствующие односторонние определения.

Ясно, что функция - являющаяся первообразной будет непрерывной функцией. Однако, функция у которой есть первообразная не обязательно должна быть непрерывной.

Пример 1.1.1. Вспомним, упомянутый ранее в курсе лекций, пример:

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0. \end{cases}$$

Лемма 1.1.2. *Пусть F и G - первообразные функции f на интервале (a, b), тогда*

(1) $\exists\ C\ \in \mathrm{R} : \forall x \in (a, b)\ F(x) - G(x) = C$;

(2) $\forall\ C \in \mathrm{R}$ *функция* $F + C$ *- первообразная функции* f *на интервале* (a, b).

Доказательство. (1) Из определения первообразной следует, что:

$\forall x \in (a, b)\ \ (F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0,$

что доказывает искомое утверждение в силу критерия постоянства функции на интервале.

(2) Легко заметить, что $\forall x \in (a, b)\ (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$. □

Определение 1.1.3. Пусть функция f определена на некотором промежутке. Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется неопределенным интегралом от функции f и обозначается $\int f(x)dx$.

Символ $\int$ называют знаком интеграла, а функцию $f(x)$ - подынтегральной функцией.

Если $F(x)$ - какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке, то пишут:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Отметим, что в силу того, что $dF(x) = f(x)dx$, поэтому имеет смысл запись

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Теорема 1.1.4. ***Основные свойства неопределенного интеграла***

Пусть существуют первообразные функций f и g на рассматриваемом промежутке, тогда:

(1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

(2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$;

(3)$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}\ \int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$;

(4) $d \int f(x)dx = f(x)dx$.

Доказательство. (1) Очевидно из определения;

(2) выполняется, так как справедливо $(f(x) + C)' = f'(x)$;

(3) Воспользуемся линейностью производной:

$\left(\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx\right)' = \alpha \left(\int f(x)dx\right)' + \beta \left(\int g(x)dx\right)' = \alpha f(x) + \beta g(x)$;

(4) достаточно воспользоваться свойствами дифференциала. $\square$

1.2 Табличные интегралы

Таблица основных интегралов может быть легко получена из таблицы производных.

(1) $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$;

Замечание 1.2.5. *Отметим, что имело бы смысл требовать $x > 0$, и отдельно рассматривать ситуацию, когда x^{α} имеет смысл при всех неположительных аргументах.*

Замечание 1.2.6. *Также стоит обратить внимание, что в силу определения, например, для функции $\frac{1}{x^2}$ не может существовать первообразной на всей оси, поэтому правильнее было бы писать*

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1, x > 0 \\ -\frac{1}{x} + C_2, x < 0 \end{cases}$$

(2) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$,

на любом промежутке, не содержащем ноль.

(3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$;

(4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

(5) $\int \cos x dx = -\sin x + C$;

(6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x + C$;

(7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\ x + C$;

(8) $\int \mathrm{sh}\ x dx = \mathrm{ch}\ x + C$;

(9) $\int \mathrm{ch}\ x dx = \mathrm{sh}\ x + C$;

(10) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{ch^2 x}} = \mathrm{th}\ x + C$;

(11) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{sh}^2\mathrm{x}} = -\mathrm{cth}\ x + C$;

(12) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{a}^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\ \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\ \frac{x}{a} + \tilde{C}$;

(13) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

(14) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + \tilde{C}, |x| < |a|$;

(15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, причем если выбран знак минус, то предполагается, что $|x| > |a|$.

Замечание 1.2.7. *Как и в замечании выше, следует сказать, что в каждой из формул, если функция в знаменателе обращается в нуль, то следует рассматривать первообразную только на тех отрезках, которые подобных точек не содержат.*

Замечание 1.2.8. *Обратим внимание на равенства (12) и (14). Можно было бы и не писать знак тильда над константой, но при этом следовало бы понимать их не буквально, а как равенство множеств. На подобных нюансах могут быть построены всевозможные шуточные "доказательства" равенств вида "1=0".*

Очевидно, что в таком виде таблица избыточна. Многие из пунктов сами по себе являются самостоятельными задачами на простейшие способы интегрирования, однако все это может быть получено, как сказано в начале, из таблицы производных.

Определение 1.2.9. Если первообразная некоторой функции f является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)dx$ выражается в терминах элементарных функций.

В математике существует достаточно много примеров функций, интегралы от которых не являются элементарными функциями, некоторые из них имеют специальные названия и широко применяются. Простейший пример "неберущегося" интеграла $\int e^{-x^2}dx$. Для тех кто знаком с научной литературой, вероятно, не будут новыми названия "гамма-функция" и "интеграл Френеля", однако подробно описывать здесь эти конструкции не будем.

1.3 Методы вычисления неопределенных интегралов

К сожалению, в отличии от дифференцирования, интегрирование (поиск первообразной) не столь простое занятие. По современным представлениям все еще не найдено алгоритма поиска первообразной с гарантированным результатом (или доказательства того, что ее не существует в терминах элементарных функций). Однако, существуют следующие два полезных правила.

Теорема 1.3.10. ***Метод подстановки (замена переменной).***

Пусть $\varphi \in C^1(a,b)$ и существует первообразная функции f на области значений функции φ, тогда

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}$$

Доказательство. В силу того, что $\varphi \in C^1(a,b)$, то область значений функции φ есть интервал, поэтому можно предположить, что у f есть некоторая первообразная F на этом интервале (по условию теоремы). Далее воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции.

$$\left(\int f(x)dx\Bigg|_{x=\varphi(t)}\right)' = (F(\varphi(t)))' = F'(x)\Bigg|_{x=\varphi(t)}\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

□

Теорема 1.3.11. ***Интегрирование по частям.***

Пусть функции f и g лежат в классе C^1 для некоторого промежутка. Тогда верна следующая формула:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Доказательство. Продифференцируем равенство и воспользуемся формулой производной произведения, после чего получим верное тождество. □

Замечание 1.3.12. *Обычно последнюю теорему кратко записывают в виде*
$\int udv = uv - \int vdu$.

Подробнее про приемы интегрирования и некоторые известные типы интегралов вы узнаете из практических занятий. Приведем лишь несколько самых простых примеров.

Пример 1.3.1. (1) $\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$.
Воспользуемся заменой $u = x^2 + a^2$,
$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$.
Иногда удобно заменять переменные в "обратном" порядке, полагая $x = \varphi(t)$, как в следующем примере:
(2) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$,
используем замену $x = a\sin t,\ dx = a\cos tdt$
$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int \cos^2 tdt = a^2\int \frac{1+cos2t}{2}dt = \frac{a^2t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C$,
Возвращаясь к исходной переменной посредством подстановки $t = \arcsin\frac{x}{a}$ и вспоминая формулу синуса двойного угла, приходим к ответу: $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$.
Приведем еще один пример для демонстрации того, что при интегрировании может существовать множество различных путей получения правильного ответа:
(3) $\int \frac{dx}{\sin x}$.
Для первого способа заметим, что если домножить числитель и знаменатель на синус, а потом применить основное тригонометрическое тождество, то можно свести интеграл к новой переменной - косинусу:
$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin xdx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-1}$,
что в соответствии с пунктом (13) таблицы приводит нас к немедленному ответу:

$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C,$
с другой стороны можно пойти по иному пути и сразу воспользоваться формулой синуса двойного угла:
$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}},$
после чего поделив и домножив знаменатель на $\cos \frac{x}{2}$ и замечая, что $d\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$ приходим к равенству:
$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

Можно рассматривать и более интересные примеры, однако это уже материал для практических занятий и самостоятельного изучения. Узнать больше стандартных конструкций можно, например, в книге Фихтенгольца или учебнике Кудрявцева (или любой иной учебной литературе, в зависимости от того, какой сложности вы хотите примеров).

В заключении хочется добавить, что умение интегрировать является приобретаемым, однако, чтобы уверенно находить знакомые конструкции и видеть пути решения задачи нахождения первообразной нужно решить сотни задач на эту тему. Рекомендую воспользоваться, например, известным задачником Демидовича.

Вопросы к экзамену

1. Множества. Операции над множествами;
2. Отображение множеств;
3. Вещественные числа. Аксиома полноты;
4. Верхняя и нижняя границы множеств. Inf и Sup;
5. Точки сгущения. Теорема Больцано-Вейерштрасса;
6. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Монотонные последовательности, теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности;
7. Фундаментальные последовательности. Критерий существования предела;
8. Теорема о двух милиционерах (теорема о сжатой переменной);
9. Предельный переход в неравенствах;
10. Арифметические операции над пределами;
11. Подпоследовательности. Частичные пределы. Наибольший и наименьший пределы;
12. Лемма Бернулли. Число e;
13. Предел функции по Коши и Гейне, их эквивалентность;
14. Арифметические операции с пределами функций;
15. Определение элементарных функций и их свойства (без доказательств);
16. Непрерывность. Классификация разрывов;
15. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции (Больцано-Коши);
16. Теорема об ограниченности непрерывной функции (Вейерштрасса);

17. Монотонные функции (критерий непрерывности, допустимые типы разрывов, обратимость);

18. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора;

19. Производная. Геометрический и механический смыслы. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью;

20. Производная суммы, произведения и частного;

21. Таблица производных, замечательные пределы;

22. Дифференциал функции;

23. Теоремы о дифференцируемых функциях (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, Дарбу);

24. Правило Лопиталя;

25. Высшие производные. Формула Тейлора (остаточный член в общем виде, форма Коши, форма Лагранжа);

26. Формула Тейлора-Маклорена для некоторых функций ($\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$);

27. Геометрическое исследование функций (необходимое условие экстремума, достаточные условия в терминах первой и второй производных);

28. Неравенства Гельдера, Юнга и Минковского;

29. Выпуклость функций (теоремы о связи выпуклости с первой и второй производными функции);

30. Неопределенный интеграл. Свойства и основные приемы интегрирования.

Предварительный регламент проведения экзамена

1. Экзамен проводится в письменной форме. Время работы - 90 минут.

2. Экзаменационный билет состоит из теоретической и практической частей. Теоретическая часть состоит из двух определений (или формулировок), а также одного или двух вопросов для подробного изложения (теорема с условием и доказательством). Практическая часть состоит из четырех типовых задач.

Оценка отлично за экзаменационный билет ставится за полностью раскрытый теоретический материал и полностью решенные задачи.

Оценка хорошо за экзаменационный билет ставится за полностью изложенный (возможно, без доказательства) теоретический материал и не менее чем три решенные задачи.

Оценка удовлетворительно за экзаменационный билет ставится за правильные определения и не менее, чем две верно решенные задачи.

Оценка неудовлетворительно выставляется во всех остальных случаях.

Окончательная оценка выставляется с учетом работы на практических занятиях (оценка за билет может быть как повышена, так и понижена). В спорных ситуациях происходит беседа с преподавателем для устранения сомнений. Оценка "неудовлетворительно" за экзаменационный билет повышена быть не может.