МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1
по дисциплине «Методы оптимизации»
Тема: Методы безусловной минимизации функций

Студент гр. 0304	____________________	Люлин Д.В.
Преподаватель	____________________	Мальцева Н.В.
	____________________	

Санкт-Петербург
2023

<u>Методы безусловной минимизации функций</u>

<u>Цели работы:</u>

1. Решение задачи безусловной минимизации функций с помощью стандартной программы.
2. Исследование и объяснение полученных результатов.

<u>Постановка задачи.</u>

Минимизировать функцию $F(x_1,x_2,a) = (x_2 - x_1^2)^2 + a(x_1 - 1)^2$ с точностью до 10^{-5} (abs ($F(x_{1k},x_{2k},a) - F(x_1^*,x_2^*,a)$) < 10^{-5}) предложенными в задании методами. Оценить скорость и порядок сходимости методов. Провести сравнительный анализ эффективности методов в зависимости от предложенных параметров (начальной точки, величины шага, параметра a>0).

Вариант 21. Метод с дроблением шага и метод наискорейшего спуска.

<u>Краткие общие сведения</u>

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\ln\Delta_{k+1}}{\ln\Delta_k}$ - порядок сходимости метода, где $\Delta_k=\|x_k-x^*\|$

$\varphi(x_k)-\varphi(x^*)\le const\cdot q^k$ – геометрическая скорость сходимости, где $q<1$

$\varphi(x_k)-\varphi(x^*)\le const\cdot q^{2k}$ – квадратичная скорость сходимости, где $q<1$

Для проведения лабораторной работы составлена программа, обеспечивающая решение задачи безусловной минимизации при задании с терминала исходных значений.

Градиентные методы. При использовании градиентных методов в задаче минимизации функции $\varphi(x) \to min, x \in \mathbb{R}^n$ выбирается начальное приближение x^0 и строится релаксационная последовательность $\{x_k\}$ такая, что $\varphi(x_{k+1}) < \varphi(x_k)$. Точка минимума функции обозначается за x^*. Последовательность строится по следующему принципу:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k\varphi'(x_k)$$

Параметр α_k – величина шага. Если $\varphi'(x_k) = 0$, то x_k – стационарная точка, и процесс прекращается. Выбор величины шага зависит от используемого градиентного метода.

Метод наискорейшего спуска. В данном методе рассматривается луч, направленный в сторону антиградиента (то есть, в направлении -$\varphi'(x_k)$):

$$\{x \in \mathbb{R}^n | x = x_k - \alpha\varphi'(x_k), \alpha \geq 0\}$$

На луче вводится функция $\Psi(\alpha) = \varphi(x_k - \alpha\varphi'(x_k))$. За величину шага α_k принимается точка минимума этой функции, то есть:

$$\alpha_k = \ argmin\, \Psi(\alpha), \alpha > 0$$

Таким образом, на каждом шаге нужно составлять функцию $\Psi(\alpha)$ и находить её точку минимума с помощью производной $\Psi'(\alpha)$.

Метод наискорейшего спуска имеет линейную скорость сходимости и порядок сходимости, равный 1. На каждом шаге направление спуска меняется на ортогональное, а также обеспечивается минимальное значение $\varphi(x)$ в определённом для данного шага направлении.

Метод с дроблением шага. Данный метод не требует решения задачи одномерной оптимизации на каждом шаге, в отличие от метода наискорейшего спуска. В нём вводятся дополнительные параметры $\beta > 0$ и $0 < \lambda < 1$ (обычно $\lambda = \frac{1}{2}$). На каждом шаге для $\alpha = \beta$ проверяется условие $\varphi\left(x_k - \alpha\varphi'(x_k)\right) < \varphi(x_k)$. Если оно выполняется, то принимается $\alpha_k := \beta$ и производится шаг градиентного метода. Иначе происходит дробление шага, и условие проверяется для $\alpha = \lambda\beta$. Дробление шага происходит до тех пор, пока условие не начнёт выполняться.

Метод с дроблением шага также имеет линейную сходимость и порядок сходимости 1. Но в отличие от метода наискорейшего спуска, он не обеспечивает минимальное значение $\varphi(x)$ на каждом шаге, из-за чего может потребоваться больше шагов. Но на каждом шаге нужно меньше вычислений, потому что не нужно решать задачу одномерной оптимизации.

Выбор перечня вариантов запуска программы.

Проанализировав функцию $F(x_1,x_2,a) = (x_2 - x_1^2)^2 + a(x_1 - 1)^2$, можно увидеть, что она неотрицательна, потому что оба слагаемых неотрицательны (при условии, что a > 0). Минимальное значение функции равно 0 при любом a. Оно достигается в точке {1;1}. Параметр a влияет на скорость роста функции в зависимости от x_1. Таким образом, можно проверить градиентные методы с начальным приближением как близким, так и далёким от точки минимума. При этом можно изменять параметр a на порядок, чтобы проверить действие методов при больших векторах градиента.

Начальные приближения:

- {10, 10} – обе координаты далеки от точки минимума.
- {10, 3} – первая координата далека, а вторая – близка к точке минимума.
- {3, 10} – вторая координата далека, а первая – близка к точке минимума.

При приближении обеих координат к точке минимума разница в работе методов будет не так заметна. Измерения будут проводиться при a = 1, 10, 100.

Протокол запуска программы.

1. $x^0 = \{10; 10\}$, a = 1.

Метод наискорейшего спуска:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	3.125696	10.342005	4.8458029024	8
6	3.107913	9.977656	4.5447601844	10
11	2.974385	9.418635	4.2250021897	15
16	2.945483	8.985025	3.8804808067	11
21	2.780156	8.314694	3.5116786682	16
26	2.735740	7.779678	3.1000574088	11
31	2.529824	6.982162	2.6792617076	17
36	2.460270	6.326729	2.2073554424	10
41	2.138617	5.183543	1.6683771641	19
46	1.910219	3.863793	0.8746620640	11
50	1.000132	1.000319	0.0000000205	12

всего вычислено 681 значений функции f

Метод с дроблением шага:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	-4.132813	10.703125	67.0120737590	9
16	-3.084109	10.103446	17.0300767040	7
31	-2.441764	6.347013	11.9938129500	6
46	2.208506	5.166588	1.5440594509	6
61	2.064489	4.481384	1.1812159898	6
76	1.757996	3.344524	0.6390607528	5
91	1.649174	2.856332	0.4400748053	5
106	1.422119	2.281491	0.2453010030	3
121	1.115726	1.344132	0.0232504668	3
136	1.068404	1.155335	0.0048708634	4
151	1.025008	1.065013	0.0008319504	4
166	1.010758	1.024402	0.0001234081	4
181	1.003111	1.009146	0.0000181716	3
196	1.001504	1.003309	0.0000023513	4
200	1.001153	1.002533	0.0000013810	4

всего вычислено 864 значений функции f

2. $x^0 = \{10; 10\}$, a = 10.

Метод наискорейшего спуска:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	2.712038	10.347046	38.2621811950	8
3	1.218248	2.282993	1.1145068429	11
5	1.045172	1.281606	0.0562100502	11
7	1.011160	1.070559	0.0035604174	11
9	1.002868	1.018200	0.0002374085	10
11	1.000739	1.004689	0.0000157695	11
13	1.000194	1.001230	0.0000010849	11
14	0.999934	1.000367	0.0000002923	17

всего вычислено 194 значений функции f

Метод с дроблением шага:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	-4.765625	10.703125	476.6177406900	9
11	2.436346	8.101059	25.3193210240	6
21	1.653884	3.256140	4.5468808679	5
31	0.996786	0.930423	0.0040923666	5
41	0.998416	0.974936	0.0005046585	5
51	0.999297	0.990950	0.0000633820	5
61	0.999706	0.996729	0.0000080633	5

всего вычислено 309 значений функции f

3. $x^0 = \{10; 10\}$, a = 100.

Метод наискорейшего спуска:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	1.265661	10.291145	82.5605853760	8
26	1.004349	5.096853	16.7147498840	11
51	1.048998	2.957285	3.6881136226	9
76	1.002087	1.966787	0.9270508943	11
101	1.012486	1.505957	0.2467865399	9
126	1.000687	1.260978	0.0674409500	10
151	1.003422	1.139133	0.0186682182	9
176	1.000204	1.072504	0.0052021284	9
201	1.000957	1.038838	0.0014549208	9
226	1.000056	1.020388	0.0004114375	10
251	1.000269	1.010936	0.0001153456	9
276	1.000016	1.005719	0.0000323582	10
301	1.000076	1.003078	0.0000091356	9

всего вычислено 2900 значений функции f

Метод с дроблением шага:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	-0.546875	10.351563	340.3347864700	10
31	1.023482	5.460790	19.5321297400	7
61	1.025816	3.326788	5.2399466611	8
91	1.013180	2.230765	1.4675434421	8
121	0.997966	1.650727	0.4291640019	7
151	1.004539	1.354442	0.1213225144	8
181	1.001896	1.190153	0.0350887075	8
211	1.000417	1.102010	0.0102539486	7
241	1.000674	1.055554	0.0029836599	8
271	1.000186	1.029800	0.0008694651	8
301	1.000207	1.016229	0.0002543908	8
331	1.000061	1.008705	0.0000740453	8
361	1.000062	1.004741	0.0000217003	8
390	1.000099	1.002580	0.0000066541	7

всего вычислено 2974 значений функции f

4. $x^0 = \{10; 3\}$, a = 1.

Метод наискорейшего спуска:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	1.736357	3.411274	0.6993065274	8
4	1.729856	3.171311	0.5646982835	11
7	1.541964	2.746831	0.4300177468	18
10	1.519994	2.452627	0.2906272882	10
13	1.272756	1.915181	0.1615820375	18
16	1.230806	1.589877	0.0588954440	11
19	1.046597	1.195250	0.0121482986	22
22	1.035044	1.084386	0.0013989017	14
25	1.003904	1.018339	0.0001258223	19
28	1.002982	1.007113	0.0000101916	13
30	1.001296	1.003089	0.0000019255	13

всего вычислено 454 значений функции f

Метод с дроблением шага:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	-5.226563	3.757813	593.8033025900	9
16	1.798199	3.505401	0.7110407773	5
31	1.702794	3.020686	0.5086037253	5
46	1.509560	2.508068	0.3122280363	4
61	1.351862	1.878235	0.1263778885	4
76	1.100028	1.291141	0.0165794351	3
91	1.058156	1.123454	0.0033962326	3
106	1.019593	1.051919	0.0005363873	4
121	1.008612	1.017206	0.0000741729	3
135	1.003126	1.006484	0.0000098218	3

всего вычислено 545 значений функции f

5. $x^0 = \{10; 3\}$, a = 10.

Метод наискорейшего спуска:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	1.392921	3.411274	3.7078432488	8
4	1.314035	2.005599	1.0639712956	15
7	1.083547	1.581456	0.2357613753	10
10	1.063281	1.190101	0.0435895834	16
13	1.014244	1.103247	0.0075874845	10
16	1.010721	1.031679	0.0012518295	16
19	1.002304	1.016827	0.0002022620	11
22	1.001735	1.005131	0.0000328639	16
25	1.000372	1.002722	0.0000052969	11
28	1.000279	1.000824	0.0000008514	16
30	1.000152	1.000448	0.0000002514	15

всего вычислено 397 значений функции f

Метод с дроблением шага:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	-5.859375	3.757813	1405.3080350000	9
11	1.327195	2.453374	1.5493312182	5
21	1.122494	1.568340	0.2451260212	5
31	1.042310	1.212396	0.0337738111	5
41	1.020159	1.069414	0.0048869307	4
51	1.006704	1.025330	0.0005904639	5
61	1.002251	1.009215	0.0000728491	5
71	1.000763	1.003348	0.0000091402	5
76	1.000040	1.001976	0.0000036111	4

всего вычислено 379 значений функции f

6. $x^0 = \{10; 3\}$, a = 100.

Метод наискорейшего спуска:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.971828	3.308357	5.6674201950	8
16	1.024739	2.073577	1.1087274278	9
31	0.996487	1.512710	0.2713470015	12
46	1.006229	1.272508	0.0714860068	9
61	0.999249	1.137655	0.0194207615	10
76	1.001708	1.074615	0.0053605857	9
91	0.999780	1.038173	0.0014958096	11
106	1.000478	1.020970	0.0004234107	9
121	0.999944	1.010763	0.0001186024	11
136	1.000137	1.005966	0.0000342772	9
151	0.999985	1.003128	0.0000099917	10

всего вычислено 1532 значений функции f

Метод с дроблением шага:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	-1.093750	3.378906	443.1427240400	10
26	1.048945	2.495661	2.1866352274	8
51	0.998317	1.879973	0.7805658517	7
76	1.018345	1.524810	0.2715876903	7
101	1.001633	1.313347	0.0964147304	8
126	1.006550	1.186849	0.0344637161	7
151	1.000095	1.111550	0.0124018928	7
176	1.001746	1.067546	0.0044074574	8
201	1.000445	1.040308	0.0015735274	8
226	1.000735	1.024037	0.0005632590	8
251	1.000063	1.014347	0.0002026182	7
276	1.000340	1.008553	0.0000735480	7
301	1.000061	1.005184	0.0000259932	8
325	1.000010	1.003140	0.0000097484	7

всего вычислено 2488 значений функции f

7. $x^0 = \{3; 10\}$, a = 1.

Метод наискорейшего спуска:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	3.106125	9.973469	4.5416842744	10
3	0.807640	0.549667	0.0475323223	13
5	0.925655	0.821621	0.0067673586	12
7	0.971679	0.931312	0.0009671519	13
9	0.989436	0.974269	0.0001338283	13
11	0.996115	0.990522	0.0000180613	14
12	0.997745	0.996736	0.0000066253	21

всего вычислено 200 значений функции f

Метод с дроблением шага:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	3.125000	9.968750	4.5568847656	7
26	2.988906	9.286592	4.0803794597	7
51	2.690928	7.623467	3.0054467442	6
76	2.628283	7.069491	2.6774264603	5
101	2.484885	6.507550	2.3157034862	6
126	2.375409	5.866766	1.9420145844	6
151	2.175077	5.066058	1.4930968038	5
176	1.828575	3.418130	0.6920782183	4
201	1.544818	2.635222	0.3587079987	4
226	1.180523	1.406101	0.0327440939	4
251	1.043599	1.115156	0.0025798585	4
276	1.010307	1.023759	0.0001154705	4
295	1.002403	1.006373	0.0000082135	4

всего вычислено 1435 значений функции f

8. $x^0 = \{3; 10\}$, a = 10.

Метод наискорейшего спуска:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	2.615278	9.972520	35.9059219080	10
4	2.454426	6.854796	21.8434187410	14
7	1.768646	5.349342	10.8420455550	11
10	1.590013	2.890270	3.6122860214	15
13	1.159077	2.051978	0.7550527573	11
16	1.098630	1.268166	0.1010215531	17
19	1.017529	1.124583	0.0110325026	11
22	1.010234	1.027006	0.0010886554	16
25	1.001712	1.012312	0.0001082474	11
28	1.001028	1.002729	0.0000110260	16
30	1.000478	1.001269	0.0000023865	15

всего вычислено 402 значений функции f

Метод с дроблением шага:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	2.562500	9.968750	35.9900054930	7
7	1.267650	1.478342	0.7329019936	1
13	1.023017	1.103339	0.0085212713	5
19	1.013873	1.053909	0.0025990395	5
25	1.006112	1.031484	0.0007430892	5
31	1.003533	1.016413	0.0002119682	5
37	1.002113	1.008538	0.0000632056	5
43	1.001313	1.004430	0.0000204794	4
49	1.000544	1.002591	0.0000052184	5
50	1.000240	1.002403	0.0000042755	5

всего вычислено 243 значений функции f

9. $x^0 = \{3; 10\}$, a = 100.

Метод наискорейшего спуска:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	1.213467	9.990791	77.1180621170	8
3	1.045997	3.248719	4.8539126928	9
5	1.002455	1.119768	0.0137937423	9
7	1.001392	1.068227	0.0044763605	9
9	1.000748	1.036426	0.0012759971	9
11	1.000444	1.021740	0.0004545239	9
13	1.000244	1.011898	0.0001361442	9
15	1.000147	1.007191	0.0000497322	9
17	1.000081	1.003966	0.0000151284	9
19	1.000049	1.002406	0.0000055686	9
20	0.999912	1.001345	0.0000030789	13

всего вычислено 238 значений функции f

Метод с дроблением шага:

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	-0.031250	9.984375	206.0159006100	8
26	1.180838	5.903738	23.6045531850	7
51	1.035088	3.846712	7.8254344459	8
76	1.065245	2.648575	2.7173642249	7
101	1.011789	1.984899	0.9377685638	8
126	1.022444	1.578583	0.3346655666	7
151	1.000839	1.345507	0.1182881403	7
176	1.007761	1.206007	0.0422846410	7
201	0.999761	1.123002	0.0152528323	7
226	1.001993	1.074476	0.0053654412	8
251	1.000441	1.044445	0.0019171379	8
276	1.000849	1.026503	0.0006873126	8
301	1.000039	1.015820	0.0002479388	7
326	1.000400	1.009430	0.0000904558	7
351	1.000062	1.005716	0.0000316544	8
376	1.000106	1.003409	0.0000113412	8
381	1.000010	1.003066	0.0000092876	7

всего вычислено 2904 значений функции f

Оценка скорости и порядка сходимости методов.

Рассчитаем оценку скорости и порядка сходимости для обоих методов при начальном приближении {10; 3} и параметре a = 10.

Для метода наискорейшего спуска:

k	$\frac{\ln \Delta_{k+1}}{\ln \Delta_k}$	$\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}$
16	1.0203226004407169	0.9332764342902399
17	1.1555466033322985	0.583173588178649
18	1.0172919844409585	0.9330697814884805
19	1.1315688303990237	0.5849630569310058
20	1.0150087581496272	0.9331253462349217
21	1.1148107329482642	0.5842547257259969
22	1.0132844618995969	0.9330256135870694
23	1.102080118058116	0.5828860386243996
24	1.0119651446849833	0.9326495121085602
25	1.0913925667866502	0.5833578973255702

Для метода с дроблением шага:

k	$\frac{\ln \Delta_{k+1}}{\ln \Delta_k}$	$\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}$
61	1.0198293095300845	0.9117733803547228
62	1.0194084508654409	0.911926295334282
63	1.0190027628217666	0.912086044294203
64	1.0186292082331398	0.9121723883146333
65	1.0182243524546084	0.9124665873992636
66	1.0359632673556756	0.8318842538123953
67	1.0176736111508766	0.9105490166176893
68	1.017261379291117	0.9110665192433907
69	1.0168833115686071	0.9114925296440817
70	1.0165614689523577	0.911703838004697

Результаты совпали с теоретическими: оба метода имеют линейную сходимость, порядок сходимости примерно равен 1.

<u>Сравнение методов.</u>

Составим итоговые таблицы. При a =1:

x^0	Метод наискорейшего спуска		Метод с дроблением шага	
	шагов	вычислений F	шагов	вычислений F
{10, 10}	50	681	200	864
{10, 3}	30	454	135	545
{3, 10}	12	200	295	1435

При a=10:

x^0	Метод наискорейшего спуска		Метод с дроблением шага	
	шагов	вычислений F	шагов	вычислений F
{10, 10}	14	194	61	309
{10, 3}	30	397	76	379
{3, 10}	30	402	50	243

При a=100:

x^0	Метод наискорейшего спуска		Метод с дроблением шага	
	шагов	вычислений F	шагов	вычислений F
{10, 10}	301	2900	390	2974
{10, 3}	151	1532	325	2488
{3, 10}	20	238	381	2904

В среднем один шаг для метода наискорейшего спуска требует 15-16 вычислений F, а метод с дроблением шага – 5-7.

Видно, что при a = 100 и x_1 = 10 оба метода работают дольше, потому что функция круто возрастает при увеличении x_1, и точка находится достаточно далеко от точки минимума.

Метод наискорейшего спуска при каждом запуске сходится за меньшее число шагов, чем метод с дроблением шага. Так происходит, потому что в методе наискорейшего спуска на каждом шаге обеспечивается минимальное значение $\varphi(x)$ в определённом направлении, в то время как в методе с дроблением шага при выборе α_k шаг делится на фиксированное число λ, что не всегда оптимально.

Однако метод с дроблением шага требует меньше вычислений на одном шаге, потому что не требует минимизации функции $\Psi(\alpha)$, как метод наискорейшего спуска.

Вывод.

В ходе работы была проведена минимизация функции $F(x_1,x_2,a) = (x_2 - x_1^2)^2 + a(x_1 - 1)^2$ с точностью до 10^{-5} с помощью программы методами наискорейшего спуска и с дроблением шага.

Были выбраны параметры запуска программы для исследования методов. Программа запускалась для начальных приближений $\{10;10\}$, $\{10; 3\}$ и $\{3; 10\}$ с параметрами a=1,10,100.

Было установлено, что метод наискорейшего спуска сходится за меньшее количество шагов, но требует большее количество вычислений на одном шаге, чем метод с дроблением шага.