ИДЗ по „Компьютерной математике".
Выполнила, студентка группы 1304 Чернякова Валерия.

Вариант 46. (8123034)

Задание 1.

$f: (\alpha; +\infty) \to (\beta; +\infty)$ задана ф-ей $f(x) = 3x^2 + 3x + 5$.
Найти наименьшее α и β, когда f биективна?

Решение. $\exists\ f: A \to B$.
инъекция: $b = f(a_1)\ \&\ b = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$
сюръекция: $\forall b \in B\ (\exists a \in A\ (b = f(a)))$
биекция = инъекция и сюръекция.

$f(x) = 3x^2 + 3x + 5$ – парабола.

Найдем вершины: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$

$y = 3 \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2}\right) + 5 = \frac{3}{4} - \frac{2 \cdot 3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{3 - 6 + 20}{4} = \frac{17}{4}$

т.к. $f(x)$ парабола $\Rightarrow$ явл-ся сюръекцией на $(-\infty; \infty) \to \left(\frac{17}{4}; +\infty\right)$
Для биекции необходимо, чтобы соблюдалась инъекция. Для этого откинем левую часть параболы (ветку).
Таким образом, при $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \to \left(\frac{17}{4}; \infty\right)$ – f инъективна, сюръективность также не нарушается $\Rightarrow f$ биективна. при $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{17}{4}$

Ответ: $\alpha_{min} = -\frac{1}{2}$, $\beta_{min} = \frac{17}{4}$

Задание 2.

Является ли функция $f: \{1, \ldots, 7\} \to \{1, \ldots, 9\}$

задан. таблицей $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & 3 & 4 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

инъективной? сюрьективной? биективной?

Решение:

а) Проверим инъективность.

т.к $\forall\, x_1, x_2 \in X \quad \forall\, f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f$ инъективна

б) Проверим сюрьективность.

- $y = 1$ прообраз $x = \varnothing$
- $y = 2$ прообраз $x = \varnothing$
- $y = 3$ прообраз $x = 3$
- $y = 4$ прообраз $x = 4$
- $y = 5$ —"— $x = 2$
- $y = 6$ —"— $x = \varnothing$
- $y = 7$ —"— $x = 5$
- $y = 8$ —"— $x = 1$
- y 9 —"— $x = 6$

$\Rightarrow$ Так как не выполняется следующее условие:

$\forall\, y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$

Значит, f не серьюктивна.

в) Проверим биективность.

Так как f инъективна, но не серъюктивна $\Rightarrow f$ не биективна.

Ответ: f - инъективна

несеръюктивна

небиективна

Задание 3.

Множество группа ⇒ выполнены следующие аксиомы:

1) Ассоциативность : $(a*b)*c = a*(b*c)$

2) Нейтральн. элемент: $e*a = a*e = a$

3) Обратный элемент: $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

а) Группа ли множ-во корней 4 степени из 1 с операцией умножения.

$(i, -i, 1, -1)$

Решение

• Ассоциативность.

Выполняется. Произведение значений данного мн-ва ассоциативно: Ex: $(1 \cdot i)(-1) = i \cdot (-1) = -i$

$1 \cdot (i \cdot (-1)) = 1 \cdot (-i) = -i$ $\Rightarrow (1 \cdot i) \cdot (-1) = 1 \cdot (i \cdot (-1))$

• Нейтральный элемент.

По умножению 1 — нейтральный элемент:

Ex: $1 \cdot i = i$

$i \cdot 1 = i$ $\Rightarrow 1 \cdot i = i \cdot 1 = i$

• Обратный элемент.

Обратные элементы для данного мн-ва. Каждый элемент ξ_k обратим в G: $(\xi_k')^n = \left(\frac{1}{\xi_k}\right)^n = \frac{1}{\xi_k^n} = 1$, где

$\xi_k' = \xi_{n-k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Таким образом, $(i, -i, 1, -1)$ — группа.

Ответ: множество корней 4 степени из 1 является группой.

6) Группа ли множ-во всех матриц размера $n \times n$ над Q с операцией $+$.

Q — поле рациональных чисел.

Решение

• Ассоциативность

Сложение матриц $n \times n$ ассоциативно. Порядок расположения и выполнения операций между матрицами не влияет.

Ex: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$

т.е. $(a+b)+c = a+(b+c)$

• Нейтральный элемент.

Нейтральн. элемент по сложению для квадратных матриц — нулевая матрица.

Ex: $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $a + e = a$

нейтр. элемент

• Обратный элемент.

Обратный элемент по сложению для квадратных матриц — матрица с такими же элементами, но противополож. знаками. Такие матрицы в множестве присутствуют

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$

нейтр. элемент

Т.о., мн-во матриц $n \times n$ с $+$ $\Rightarrow$ группа

Ответ: множество всех матриц размера $n \times n$ над Q с операцией $+$ является группой.

c) Группа ли множ-во непостоянных линейных функций (многочленов степени 1) с операцией композиции. ($f = ax+b$)

Решение:

• Ассоциативность.

Одно из основных свойств композиции — ассоциативность.

$\exists\ f = 3x+2 \qquad g = 15x-3 \qquad h = -2x+1$

Ex: $(f\circ g)\circ h = (f(g))\circ h = \underbrace{(3(15x-3)+2)}_{m}\circ h = m(h) = 3(15(-2x+1)-3)+2 = 3(-30x+15-3)+2 = -90x+38$

$f\circ(g\circ h) = f\circ(g(h)) = f\circ(\underbrace{15(-2x+1)-3}_{m}) = f(m) = 3(-30x+12)+2 = -90x+38$

Т.о. $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$

• Нейтральный элемент.

Нейтральный элемент для композиции многочленов 1 степени x.

Ex: $f = 3x+2$

$$\left.\begin{array}{l} f\circ x = f(x) = 3x+2 \\ x\circ f = x(f) = 3x+2 \end{array}\right| \Rightarrow f\circ x = x\circ f = f$$

• Обратный элемент.

Обратный элемент будет следующий: $\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ → такие элементы в множестве присутствуют

$$\begin{array}{l} a\cdot f^{-1} + b = x \\ a\cdot f^{-1} = x-b \\ f^{-1} = \frac{x-b}{a} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \end{array}$$

Ex: $f = 2x+2 \qquad f^{-1} = \frac{1}{2}x - 1$

$$\left.\begin{array}{l} f\circ f^{-1} = f(f^{-1}) = 2\left(\frac{1}{2}x-1\right)+2 = x-2+2 = x \\ f^{-1}\circ f = f^{-1}(f) = \frac{1}{2}(2x+2)-1 = x+1-1 = x \end{array}\right| \Rightarrow f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = x$$

нейтр. элем.

Т.о., множ-во многочленов степени 1 с операцией $\circ$ — группа.

Ответ: множество непостоянных линейных функций / многочленов степени 1) с операцией композиции является группой.

Задание 4. Записать перестановку.

Решение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 4 & 10 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} = (1264)(35)(7\,10)(8)(9)$$

Порядок: НОК$(4, 2, 2, 1, 1) = 4$

Ответ: $(1264)(35)(7\,10)(8)(9)$, порядок 4.

Задание 5. Произведение перестановок

Решение.

$(2587)(346)\circ(173)(2456) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 8 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 1 & 8 & 3 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} =$$

$= (12653)(487)$

Ответ: $(12653)(487)$

Задание 6.

Пусть B – подгруппа в $GL_3(\mathbb{R})$, состоящая из верхнетреуг. матриц, а отображение $\varphi: B \to GL_2(\mathbb{R})$ каждой матрице из B сопоставляет её подматрицу, котор-я получается вычеркиванием 1 строки и 1 столбца. Докажите, что φ – гомоморфизм.

Решение.

$GL_3(\mathbb{R})$ – матрицы 3×3

$B \to GL_2(\mathbb{R})$ – матрица 2×2 (вычеркиваем из B 1 строку, 1 столбец)

Операция: $\cdot$ умножение

$\det \neq 0$

Гомоморфизм: $\varphi(g\cdot h) = \varphi(g)\cdot\varphi(h)$

Пусть $g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ $h = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$

$$g\cdot h = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} & a_{11}\cdot b_{13} + a_{12}\cdot b_{23} + a_{13}\cdot b_{33} \\ 0 & a_{22}\cdot b_{22} & a_{22}\cdot b_{23} + a_{23}\cdot b_{33} \\ 0 & 0 & a_{33}\cdot b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(g\cdot h) = \begin{pmatrix} a_{22}\cdot b_{22} & a_{22}\cdot b_{23} + a_{23}\cdot b_{33} \\ 0 & a_{33}\cdot b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \varphi(h) = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(g)\cdot\varphi(h) = \begin{pmatrix} a_{22}\cdot b_{22} & a_{22}\cdot b_{23} + a_{23}\cdot b_{33} \\ 0 & a_{33}\cdot b_{33} \end{pmatrix}$$

Т.о. $\varphi(g\cdot h) = \varphi(g)\cdot\varphi(h)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{22}\cdot b_{22} & a_{22}\cdot b_{23} + a_{23}\cdot b_{33} \\ 0 & a_{33}\cdot b_{33} \end{pmatrix}}_{\varphi(g\cdot h)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{22}\cdot b_{22} & a_{22}\cdot b_{23} + a_{23}\cdot b_{33} \\ 0 & a_{33}\cdot b_{33} \end{pmatrix}}_{\varphi(g)\cdot\varphi(h)}$$

Доказано, что $\varphi: B \to GL_2(\mathbb{R})$, где B подгруппа в $GL_3(\mathbb{R})$ гомоморфизм.

Задание 7.

μ подгруппа в $\mathbb{C}^*$, состоящая из всех корней степени 6 из 1. Докажите, что $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$

Решение.

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$

Теорема: $C^*/\mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Im} f$

$\mu = \{1; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -1; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

~~Докажем эпиморфизм f: $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ с ядром μ~~

Рассмотрим $\varphi: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, где $\varphi(z) = z^6$

$C^*/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi$

$\ker\varphi = \{z \in \mathbb{C}^* : \varphi(z) = e\}$

$e = 1 \Rightarrow \varphi(z) = z^6 = e = 1$

Р-м множество μ и $\varphi(\mu)$:

$z(1) = 1$ $\quad z(-1) = 1$

$z\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1$ $\quad z\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1$

$z\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1$ $\quad z\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1$

Т.о. $\ker\varphi = \{1; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -1; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\} = \mu$

Что и требовалось доказать.

$\operatorname{Im}\varphi = \{y \in \mathbb{C}^* \mid \exists x \in \mathbb{C}^* : \varphi(x) = y\}$

$\varphi(x) = x^6 = y$

Так как $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ значит, при выполнении функции φ элемент останется в $\mathbb{C}^*$.

Т.е. $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{C}^*$

Итого $\ker\varphi = \mu$ $\quad \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{C}^*$

$\mathbb{C}^*/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$.

Задание 8.

а) Определение группы.

Множество G с бинарной операцией $*$ называется группой, если

1. операция $*$ ассоциативна, т.е. $(a*b)*c = a*(b*c)$ для $\forall a, b, c \in G$
2. в G сущ-т нейтральный элемент, т.е. такой элемент $e \in G$, что $a*e = e*a = a$ для $\forall a \in G$.
3. для $\forall a \in G$ существует обратный элемент, т.е. такой элемент $a' \in G$, что $a' * a = a * a' = e$.

Критерий подгруппы.

Для того, чтобы непустое подмножество H группы A являлось подгруппой группы A необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись 2 условия:

1. H замкнуто относительно операции $*$ в A:
   $(\forall a, b \in H)\ a*b \in H$
2. H должно быть замкнуто относительно операции взятия обратного элемента: $(\forall a \in H)\ \exists a^{-1} \in H$.

Единственность нейтрального и обратного элементов

- Если алгебраич.система $(G, *)$ обладает нейтральным элементом и, то он единственный.
- Для каждого элемента x обратный элемент x^{-1} определен однозначно.

в) Пример группы 5 порядка.

Порядок группы — кол-во элементов в группе G, если G — конечное множество.

Пример

Z_5 - циклическая группа порядка 5. Группа вычетов по модулю 5.
Элементы $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.