6 лекция

8 декабря 2022 г. 15:41

Th(принцип локализации) №76

Если f – 2π-периодичная функция, $f \in L(\mathbb{R})$, то существование и значение предела последовательности $S_n(x,f)$ в $(\cdot)\, x_0 \in \mathbb{R}$ зависит только от существования и значения предела $n \to \infty$

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta D_n(t)[f(x_0+t) + f(x_0-t)]\,dt,$$ δ – сколь угодно мало

Сходимость рядов Фурье в точке

Lm №77

f – 2π-периодичная функция, $f \in L$ на отрезке длины 2π, тогда

$$\int_0^\delta \frac{|f(t)|}{t}\,dt,\quad 0 < \delta \le 2\pi \quad \text{и} \quad \int_0^\pi \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

сходятся и расходятся одновременно

Док-во:

$\delta > 0 \qquad \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \in R[\delta, \pi]$

def №78

$\exists \lim\limits_{h \to +0} f(x_0+h) := f(x_0+0)$ при разрыве

$\exists \lim\limits_{h \to +0} f(x_0-h) := f(x_0-0)$ I рода

def №

x_0 – регулярная точка по Лебегу, если

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

$\rceil$ x_0 – точка разрыва I рода

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0+0)}{h}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0-0) - f(x_0-h)}{h}$$

$\measuredangle$ $f_x^*(t) := f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0)$

В регулярных точках: $f_x^*(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$

Th(Признак Дини) №80

$\rceil$ f – 2π-периодичная функция, $f \in L$ на отрезке длины 2π тогда если x является точкой непрерывности или разрыва I рода функции f и для некоторой $\delta \in (0, \pi)$

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt$$ – сходится, то ряд Фурье функции f сходится в $(\cdot)\, x$ к значению $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

Док-во:

$$S_n(x,f) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]\,dt - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] dt$$

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t} \qquad \int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}$$ абсолютно сходится

Следствие 1 №81

В любой регулярной точке ряд Фурье сходится к значению функции

Следствие 2 №82

Если в $(\cdot)\, x$ $\exists$ односторонние производные, то ряд Фурье сходится к $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

Следствие 3 №83

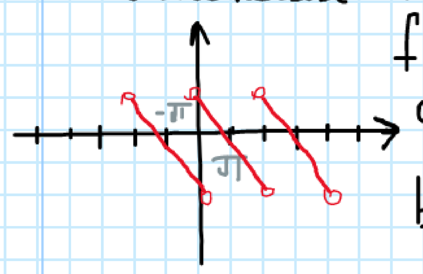
Ряд Фурье кусочно-диффиренцируемой функции на $[-\pi, \pi]$ в точках $\in (-\pi, \pi)$ сходится к $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, а на краях к $\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$

Ex

1. $\measuredangle$ $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$; $0 \le x \le 2\pi$

Положим $f(x+2\pi) = f(x)$

$f(2\pi k) = 0 : k \in \mathbb{Z}$



$a_n = 0$ (т.к. f – нечётная)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{2\pi}(\pi - x)\frac{\cos(nx)}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n}$$

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$ функции соответствуют рядам Фурье

$0 < x < 2\pi$

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

$\rceil$ $t = \frac{x}{2}$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi t)}{2n},\quad 0 < t < \pi$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi x)}{2n},\quad 0 < t < \pi$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},\quad 0 < x < n$$

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$$

$x = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

2. $f(x) = \frac{r + \cos x}{1 + 2r\cos x + r^2}$, $|r| < 1$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{t^2 + 1}{2t},\quad t = e^{ix}$$

$$\frac{r + \cos x}{1 + 2r\cos x + r^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{1+r} + \frac{1}{t+r}\right] \qquad |t| = 1,\ |r| < 1$$

$$\frac{t}{1+rt} = \frac{1}{r}\left(\frac{rt}{1+rt}\right) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(rt)^n$$

$$\frac{1}{t+r} = \frac{1}{r}\left(\frac{r/t}{1 + r/t}\right) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{r}{t}\right)^n$$

+

$$\frac{r + \cos x}{1 + 2r\cos x + r^2} = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} r^n \cos(nx)$$