Санкт-Петербургский Государственный Электротехнический
Университет
(ЛЭТИ)

кафедра МО ЭВМ

Отчет по лабораторной работе №1

Оценка эффективности методов

Выполнил студент группы 1341, ФКТИ Пухкал И.

Санкт-Петербург
2004

Содержание

1. Постановка задачи

Минимизировать функцию $F(x_1, x_2, a) = (x_2 - x_1^2)^2 + a(x_1 - 1)^2$ с точностью до 10^{-5} ($|F(x_{1k}, x_{2k}, a) - F(x_1^*, x_2^*, a)| < 10^{-5}$) методом Давидона-Флетчера-Пауэлла, методом Бройдена-Флетчера-Шанно, комбинированным методом наискорейшего спуска и Ньютона.

Оценить скорость и порядок сходимости методов. Провести сравнительный анализ эффективности методов в зависимости от начальной точки и параметра $a > 0$. Сравнить эффективность квазиньютоновых методов и комбинированного метода наискорейшего спуска и Ньютона.

2. Выполнение работы

2.1. Протокол работы

Листинг 1.

```
параметр a   1.000000  - 1
длину шага   0.100000  - 2
координаты начальной точки  10.000000  10.000000  - 3
количество шагов 10  - 4
интервал для печати 1  - 5
номер анализируемого алгоритма:  8  - 6
  8 - алгоритм Давидона-Флетчера-Пауэлла

ном.шага    x1           x2          f(x1,x2)    число выч f на 1 шаг
   1     3.125696    10.342005     4.8458029024       8
   2     3.082835     9.376559     4.3544124009      19
   3     3.008010     9.379881     4.1421665923      10
   4     2.145352     4.010256     1.6626270423      25
   5     1.951288     4.041433     0.9596619420      12
   6     1.440781     1.788170     0.2770480103      22
   7     1.307727     1.818315     0.1063955915      10
   8     1.071907     1.077044     0.0103460799      22
   9     1.036039     1.088454     0.0015261451      14
  10     1.001344     1.000206     0.0000079812      23
 всего вычислено 165 значений функции f
```

Листинг 2.

```
параметр a   1.000000  - 1
длину шага   0.100000  - 2
координаты начальной точки   5.000000   5.000000  - 3
количество шагов 10  - 4
интервал для печати 1  - 5
номер анализируемого алгоритма:  8  - 6
  8 - алгоритм Давидона-Флетчера-Пауэлла

ном.шага    x1           x2          f(x1,x2)    число выч f на 1 шаг
   1     2.234413     5.271136     1.6013569558      10
```

```
   2     2.152001     4.434223      1.3658682406      22
   3     2.047995     4.444465      1.1608842028      11
   4     1.452968     1.812566      0.2943110102      23
   5     1.316307     1.843463      0.1123264975      10
   6     1.076365     1.083340      0.0114897635      21
   7     1.038751     1.095213      0.0017643886      13
   8     1.001554     1.000280      0.0000104293      22
   9     1.000316     1.000765      0.0000001175      12
  10     1.000000     1.000000      0.0000000000      21
 всего вычислено 165 значений функции f
```

Листинг 3.

```
параметр a  10.000000  - 1
длину шага   0.100000  - 2
координаты начальной точки   5.000000   5.000000  - 3
количество шагов 10  - 4
интервал для печати 1  - 5
номер анализируемого алгоритма:  8  - 6
  8 - алгоритм Давидона-Флетчера-Пауэлла

ном.шага    x1           x2          f(x1,x2)    число выч f на 1 шаг
   1     1.768117     5.269324     10.4928542620      10
   2     1.420517     1.493642      2.0431553448      18
   3     1.080698     1.524925      0.1925825380      10
   4     0.998893     1.000288      0.0000185195      18
   5     1.000017     1.000113      0.0000000091      12
   6     1.000000     1.000000      0.0000000000      18
   7     1.000000     1.000000      0.0000000000      18
   8     1.000000     1.000000      0.0000000000      18
   9     1.000000     1.000000      0.0000000000      18
  10     1.000000     1.000000      0.0000000000      18
 всего вычислено 86 значений функции f
```

Листинг 4.

```
параметр a   1.000000  - 1
длину шага   0.100000  - 2
координаты начальной точки  10.000000  10.000000  - 3
количество шагов 10  - 4
интервал для печати 1  - 5
номер анализируемого алгоритма:  9  - 6
  9 - алгоритм Бройдена-Флетчера-Шанно

ном.шага    x1           x2          f(x1,x2)    число выч f на 1 шаг
   1     3.125696    10.342005      4.8458029024       8
   2     3.082835     9.376559      4.3544123985      19
   3     3.008010     9.379881      4.1421665444      10
   4     2.145333     4.010180      1.6625732278      25
   5     1.951272     4.041357      0.9596250343      12
   6     1.440747     1.788089      0.2770092427      23
```

```
   7     1.307704     1.818232     0.1063765550      10
   8     1.071877     1.076999     0.0103389274      20
   9     1.036021     1.088407     0.0015245441      14
  10     1.001339     1.000202     0.0000079357      22
 всего вычислено 163 значений функции f
```

Листинг 5.

```
параметр a   1.000000  - 1
длину шага   0.100000  - 2
координаты начальной точки   5.000000   5.000000  - 3
количество шагов 10  - 4
интервал для печати 1  - 5
номер анализируемого алгоритма:  9  - 6
  9 - алгоритм Бройдена-Флетчера-Шанно

ном.шага    x1           x2          f(x1,x2)    число выч f на 1 шаг
   1     2.234413     5.271136     1.6013569558      10
   2     2.152000     4.434222     1.3658682349      22
   3     2.047995     4.444463     1.1608834498      11
   4     1.452954     1.812532     0.2942948246      24
   5     1.316297     1.843428     0.1123183448      10
   6     1.076350     1.083321     0.0114858825      21
   7     1.038743     1.095192     0.0017636246      13
   8     1.001552     1.000279     0.0000104018      22
   9     1.000316     1.000764     0.0000001171      12
  10     1.000000     1.000000     0.0000000000      20
 всего вычислено 165 значений функции f
```

Листинг 6.

```
параметр a  10.000000  - 1
длину шага   0.100000  - 2
координаты начальной точки   5.000000   5.000000  - 3
количество шагов 10  - 4
интервал для печати 1  - 5
номер анализируемого алгоритма:  9  - 6
  9 - алгоритм Бройдена-Флетчера-Шанно

ном.шага    x1           x2          f(x1,x2)    число выч f на 1 шаг
   1     1.768117     5.269324    10.4928542620      10
   2     1.420515     1.493622     2.0431545284      19
   3     1.080695     1.524906     0.1925686393      10
   4     0.998895     1.000299     0.0000185036      20
   5     1.000019     1.000124     0.0000000110      12
   6     1.000000     1.000000     0.0000000000      18
   7     1.000000     1.000000     0.0000000000      18
   8     1.000000     1.000000     0.0000000000      18
   9     1.000000     1.000000     0.0000000000      18
  10     1.000000     1.000000     0.0000000000      18
 всего вычислено 89 значений функции f
```

Листинг 7.

```
параметр a   1.000000  - 1
длину шага   0.100000  - 2
координаты начальной точки  10.000000  10.000000  - 3
количество шагов 45  - 4
интервал для печати 3  - 5
номер анализируемого алгоритма:  4  - 6
  4 - наискорейшего спуска

ном.шага    x1           x2           f(x1,x2)    число выч f на 1 шаг
   1     3.125696   10.342005      4.8458029024       8
   4     3.135818   10.153221      4.6640332001      10
   7     3.039711    9.807916      4.4831284232      16
  10     3.047117    9.600104      4.2900274883      10
  13     2.939178    9.213177      4.0903591702      16
  16     2.945483    8.985025      3.8804808067      11
  19     2.824853    8.558641      3.6651511618      14
  22     2.827401    8.295943      3.4304451776      11
  25     2.684949    7.799846      3.1882110347      16
  28     2.687103    7.512168      2.9313737965      11
  31     2.529824    6.982162      2.6792617076      17
  34     2.526666    6.663555      2.4088368497      10
  37     2.324337    5.997432      2.1077618998      17
  40     2.310141    5.596951      1.7841731863      11
  43     2.003478    4.644088      1.4040767089      19
  45     1.800150    3.909573      1.0878445430      19
  всего вычислено  603 значений функции f

параметр a   1.000000  - 1
длину шага   0.100000  - 2
координаты начальной точки   1.800150   3.909573  - 3
количество шагов 30  - 4
интервал для печати 1  - 5
номер анализируемого алгоритма:  5  - 6
  5 - Ньютона-Рафсона
изменений не требуется - 0

   7     2.536115   18.654155      151.7437183300         1
   8     2.601636    7.479258      3.0704017360           1
   9     6.401498   334.863403     86397.1178670000       1
  10     6.410703    41.333571     29.3316198600          1
  11    -3.854614    72.772877     3377.6947317000        1
  12    -3.896890    15.850468     24.4213793210          1
  13   -18.761787   4183.210585    14678529.3780000000    1
  14   -18.764367   352.295081     390.6676781000         1
  15    13.491129   779.877151     357600.4781600000      1
  16    13.501584   182.857899     156.6089707800         1
  17   109.494019   306097.342930  86499764293.0000000000 1
  18   109.494204   11989.061437   11770.9987720000       1
```

```
  19   -19.906824   18382.043977    323488083.3000000000   1
  20   -19.907406   396.351083      437.1217522600         1
  21     3.132768   565.363727      308639.7847100000      1
  22     3.134689     9.850390      4.5574804600           1
  23     0.891842     6.486005      32.3948781980          1
  24     0.881424     0.736626      0.0156829090           1
  25     0.991159     1.025978      0.0019774397           1
  26     1.000844     0.998090      0.0000136678           1
  27     1.000006     0.999989      0.0000000006           1
```

Листинг 8.

```
параметр a   1.000000  - 1
длину шага   0.100000  - 2
координаты начальной точки   5.000000   5.000000  - 3
количество шагов 30  - 4
интервал для печати 1  - 5
номер анализируемого алгоритма:  4  - 6
  4 - наискорейшего спуска

   8     2.102845     4.456899      1.2174887774      16
   9     2.048598     4.454916      1.1662053714      11
  10     2.055574     4.258028      1.1153012577      16
  11     2.000945     4.256093      1.0655522080      11
  12     2.007709     4.061640      1.0164230611      18
  13     1.952824     4.059732      0.9684929745      10
  14     1.959590     3.870024      0.9217147871      18
  15     1.904797     3.868069      0.8761701739      10
  16     1.911583     3.683525      0.8318458612      18
  17     1.857009     3.681519      0.7887704636      11
  18     1.863602     3.500737      0.7465777660      17
  19     1.809107     3.498750      0.7056765699      10
  20     1.815503     3.322156      0.6657271101      18
  21     1.761222     3.320190      0.6271080411      11
  22     1.767301     3.147365      0.5893275656      17
  23     1.713222     3.145462      0.5529253535      12

параметр a   1.000000  - 1
длину шага   0.100000  - 2
координаты начальной точки   1.713222   3.145462  - 3
количество шагов 10  - 4
интервал для печати 1  - 5
номер анализируемого алгоритма:  5  - 6
  5 - Ньютона-Рафсона

ном.шага    x1          x2          f(x1,x2)    число выч f на 1 шаг
   1     0.482118     4.572478      19.1041510520           1
   2     0.414686     0.044956      0.3587235293            1
   3     0.881437     1.284006      0.2711807946            1
   4    -7.499095   13112.283112    170460427.2700000000    1
   5    -7.499421    56.251073      72.2402453700           1
```

```
   6     1.169292    77.203015      5751.0929165000          1
   7     1.170415     1.375168      0.0290694779             1
   8     0.998176     1.033700      0.0013979691             1
```

Листинг 9.

```
параметр a  10.000000  - 1
длину шага   0.100000  - 2
координаты начальной точки  10.000000  10.000000  - 3
количество шагов 20  - 4
интервал для печати 1  - 5
номер анализируемого алгоритма:  4  - 6
  4 - наискорейшего спуска

ном.шага    x1            x2          f(x1,x2)    число выч f на 1 шаг
   1     2.712038    10.347046     38.2621811950       8
   2     0.381881     2.532373      9.5162895211      21
   3     1.218248     2.282993      1.1145068429      11
   4     0.932212     1.314983      0.2448348359      18
   5     1.045172     1.281606      0.0562100502      11
   6     0.984832     1.078376      0.0140687232      16
   7     1.011160     1.070559      0.0035604174      11
   8     0.996187     1.020186      0.0009181991      17
   9     1.002868     1.018200      0.0002374085      10
  10     0.999014     1.005201      0.0000611581      16
  11     1.000739     1.004689      0.0000157695      11
  12     0.999747     1.001363      0.0000041360      16
```

3. Анализ

Скорость сходимости:

1. С линейной скоростью

$$||x^{k+1} - x^*|| \leq q||x^k - x^*||, 0 < q < 1$$

2. Со скоростью геометрической прогрессии

$$||x^k - x^*|| \leq q^k||x^0 - x^*||, 0 < q < 1$$

3. Сверхлинейная сходимость

$$||x^{k+1} - x^*|| \leq q_k||x^k - x^*||, q_k \to 0$$

4. С квадратичной скоростью

$$||x^{k+1} - x^*|| \leq C||x^k - x^*||^2, C > 0$$

Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла:

Исходя из листингов 1 — 3 можно утверждать, что:

1. Скорость сходимости

Номера	$C_k = \frac{\sqrt{(x_{1,k+1}-x^*)^2+(x_{2,k+1}-x^*)^2}}{\sqrt{(x_{1,k}-x^*)^2+(x_{2,k}-x^*)^2}}$	$l_k = \frac{\ln\|\|x_{k+1}-x^*\|\|}{\ln\|\|x_k-x^*\|\|}$
1-2	0.900	0.953
2-3	0.998	0.998
3-4	0.378	0.543
4-5	0.989	0.993
5-6	0.284	-0.09
6-7	0.964	1.327
7-8	0.121	15.79
8-9	0.926	1.064
9-10	0.041	1.731

   Исходя из того, что $c_k \to 0$, можно оценить скорость сходимости метода как сверхлинейную.

2. Порядок сходимости — второй ($l_k \to 2$).

3. Чем ближе исходная точка к точке минимума, тем быстрее идет сходимость. [листинги 1, 2]

4. Чем больше значение $a > 0$, тем быстрее идет сходимость (и меньше значений функции вычисляется). [листинги 2, 3]

Метод Бройдена-Флетчера-Шанно:

Исходя из листингов 4 — 6 можно утверждать, что:

1. Скорость сходимости

   Поскольку метод Бройдона-Флетчера-Шанно создает ту же последовательность, что и метод Давидона-Флетчера-Пауэлла, отсюда можно оценить скорость сходимости метода как сверхлинейную.

2. Порядок сходимости — второй (аналогично пункту выше).

3. Чем ближе исходная точка к точке минимума, тем быстрее идет сходимость. [листинги 4, 5]

4. Чем больше значение $a > 0$, тем быстрее идет сходимость (и меньше значений функции вычисляется). [листинги 5, 6]

Комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона:

Исходя из листингов 7 — 9 можно утверждать, что:

1. Скорость сходимости

Номера	$C_k \geq \frac{\sqrt{(x_{1,k+1}-x^*)^2+(x_{2,k+1}-x^*)^2}}{\sqrt{(x_{1,k}-x^*)^2+(x_{2,k}-x^*)^2}}$	$l_k = \frac{\ln \|\|x_{k+1}-x^*\|\|}{\ln \|\|x_k-x^*\|\|}$
1-2	0.998	0.999
2-3	0.982	0.991
3-4	0.999	0.991
16-17	1679.27	2.428
17-18	0.039	0.743
18-19	1.533	1.045
19-20	0.021	0.609
20-21	1.426	1.059
21-22	0.016	0.348
22-23	0.602	0.77
23-24	0.054	-0.717
24-25	0.075	3.117
25-26	0.075	1.68
26-27	0.05	1.509

Исходя из того, что $c_k \to 0$, можно оценить скорость сходимости метода как сверхлинейную.

2. Порядок сходимости — второй ($l_k \to 2$).

3. Чем ближе исходная точка к точке минимума, тем быстрее идет сходимость. [листинги 7, 8]

4. Чем больше значение $a > 0$, тем быстрее идет сходимость (и меньше значений функции вычисляется). [листинги 8, 9]

4. Вывод

В результате выполнения работы был проведен анализ различных методов минимизации функций, а именно их эффективность в зависимости от меняющихся параметров. Также было проведено общее сравнение между собой заданных методов: оценивая скорость и порядок сходимости квазиньютоновых методов сходимости получено, что они совпадают. Однако методы Давидсона-Флетчера-Пауэлла и Бройдона-Флетчера-Шанно превосходят комбинированный метод по количеству шагов необходимых для достижения заданной точности и по количеству вычисляемых значений функций.