11 лекция

18 декабря 2022 г. 20:35

$E=\{(x,y): a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le \psi(x)\}$

$\varphi, \psi \in C[a,b]$

Если $\forall x\in[a,b]$ $\rho(y)=f(x,y)$ интегрируема на $[\varphi(x),\psi(x)]$ $\forall x\in[a;b]$

$\exists \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ и $F(x)=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ - интегрируемой на $[a;b]$

Тогда $\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ - повторный интеграл

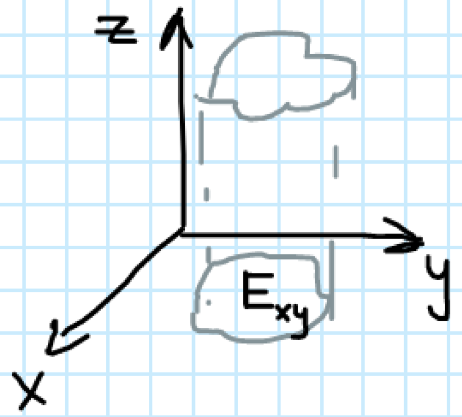
def №149

Th (о сведении кратного интеграла к повторному) №150

$\exists f(x,y)$ - непрерывна на $E=\{(x,y): a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le \psi(x)\}: \varphi,\psi\in C[a,b]$

Тогда $\int\limits_E f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$

$n=3$ $\exists E\subset\mathbb{R}^3$



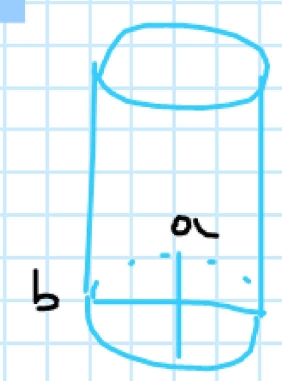
$E_{xy}=\{(x,y,0): \exists z: (x,y,z)\in E\}$

Если выполнено

$E=\{(x,y,z): (x,y,0)\in E_{xy}\}$

$\varphi_1(x,y)\le z\le \psi_1(x,y)$

Ex



$\mu E=\int\limits_0^h \mu E_z dz=\int\limits_0^h \pi ab\,dz=\pi abh$

Причём φ_1 и ψ_1 непрерывны на E_{xy}

и E_{xy} представим, как $\{(x,y): a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le \psi(x)\}: \varphi,\psi\in C[a;b]$

тогда если $f(x,y,z)\in C(E)$, то выполнено

$$\int f(x,y,z)\,dxdydz=\underbrace{\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy}_{\int dxdy}\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} f(x,y,z)\,dz$$

$\measuredangle E(x_0)=E\cap\{(x,y,z): x=x_0\}$

$$\int\limits_E f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{E_x} f(x,y,z)dydz$$

$f(x,y,z)=1$

$\int\limits_E dxdydz=\mu E$ $\quad\int\limits_{E_x} dydz=\mu E_x$

Тройной интеграл №151

Объём n-мерного шара №152

$\exists V_r^n=\{x: \sum\limits_{i=1}^n x_i^2\le r^2\}$

$\mu_2 V_r^2=\int\limits_{x^2+y^2\le r^2} dxdy=2\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\pi r^2$

$\mu_3 V_r^3=2\int\limits_0^r \mu_2 V^2_{\sqrt{r^2-z^2}}dz=2\int\limits_0^r \pi(r^2-z^2)dz=\frac{4}{3}\pi r^3$

$\exists \mu_n V_r^n=\gamma_n r^n$

$$\mu V_r^n=\int\limits_{\sum x_i^2\le r^2}\cdots\int dx_1\ldots dx_n=2\int\limits_0^r dx_1\int\limits_{\sum\limits_{i=2}^n x_i^2\le r^2-x_1^2} dx_2\ldots dx_n=2\int\limits_0^r \mu_{n-1}V^{n-1}_{\sqrt{r^2-x_1^2}}dx_1=2\gamma_{n-1}\int\limits_0^r (r^2-x_1^2)dx_1=$$

$$=\left[\begin{array}{l} x_1=r\cos t\\ dx_1=-r\sin t\,dt\end{array}\right]=2\gamma_{n-1}r^n\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt=\gamma_n$$

$$\gamma_n=\begin{cases} 2\gamma_{n-1}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}\\ 2\gamma_{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\end{cases}$$

$n=1$ $\mu_1 V_r^1=2r\Rightarrow \gamma_1=2$

$\gamma_{2m}=\dfrac{\pi^m}{m!}$

$\gamma_{2m+1}=\dfrac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}$