Лекция 7

Тема 5. Решение систем линейных алгебраических уравнений

§ 5.1. Постановка задачи

В вычислительной линейной алгебре особое значение имеет задача решения систем линейных алгебраических уравнений и связанные с ней задачи вычисления определителей и нахождения обратных матриц. Далее мы их рассмотрим. В основном же в данной теме мы рассмотрим прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с вещественными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2,\\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3m}x_m = b_3,\\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

В матричной форме записи эта система принимает вид

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{5.2}$$

где

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Уделим основное внимание задаче вычисления вектора $\boldsymbol{x}$, являющегося решением системы (5.2), по входному данному – вектору $\boldsymbol{b}$. Будем предполагать, что матрица $\boldsymbol{A}$ задана и является невырожденной. Известно, что в этом случае решение системы существует, единственно и устойчиво по входным данным. Это означает, что задача решения СЛАУ корректна.

Пусть $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots\ , x_m^*)^{\text{т}}$ – приближенное решение системы (5.1). Будем стремиться к получению решения, для которого погрешность $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*$ мала (количественные значения величины погрешности рассмотрим далее). Заметим, однако, что качество решения не всегда характеризуется тем, насколько мала погрешность $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*$. Иногда вполне удовлетворительным является критерий малости *невязки* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*$**.** Вектор $\boldsymbol{r}$ показывает, насколько отличается правая часть системы от левой, если в нее подставить приближенное решение. Заметим, что $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}\ (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)$ и поэтому погрешность и невязка связаны равенством

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{r}. \tag{5.3}$$

§ 5.2. Нормы вектора и матрицы

1. Норма вектора. Решением системы линейных алгебраических уравнений является вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots\ , x_m)^{\text{т}}$, который будем рассматривать как элемент векторного пространства $\boldsymbol{R^m}$**.** Приближенное решение $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots\ , x_m^*)^{\text{т}}$ и погрешность $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* = (x_1 - x_1^*, \ldots\ , x_m - x_m^*)$ также являются элементами пространства $\boldsymbol{R^m}$. Для того, чтобы анализировать методы решения систем, необходимо уметь количественно оценивать «величины» векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*$**,** а также векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^*$**,** где $\boldsymbol{b}^* = (b_1^*,\ b_2^*,\ \ldots\ , b_m^*)^{\text{т}}$ – вектор приближенно заданных правых частей. Удобной для этой цели количественной характеристикой является широко используемое понятие нормы вектора.

Говорят, что в пространстве $\boldsymbol{R^m}$ задана норма, если каждому вектору $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{R^m}$ сопоставлено вещественное число $\|\ \boldsymbol{x}\ \|$, называемое нормой вектора $\boldsymbol{x}$ и обладающее следующими свойствами:

1) $\|\ \boldsymbol{x}\ \| \geq 0$, причем $\|\ \boldsymbol{x}\ \| = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} = 0$;
2) $\|\alpha\ \boldsymbol{x}\ \| = |\alpha|\ \|\ \boldsymbol{x}\ \|$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$ и любого числа α;
3) $\|\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\ \| \leq \|\ \boldsymbol{x}\ \| + \|\ \boldsymbol{y}\ \|$ для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$**;**

последнее неравенство принято называть *неравенством треугольника*.

Заметим, что такими же свойствами обладает обычная геометрическая длина вектора в трехмерном пространстве. Свойство 3) в этом случае следует из правила сложения векторов и из того известного факта, что сумма длин двух сторон треугольника всегда больше длины третьей стороны.

Существуют различные способы введения норм. В вычислительной математике наиболее употребительными являются следующие три нормы:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|, \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le m} |x_i| \tag{5.4}$$

Первые две из них являются частными случаями более общей нормы:

$$\| \boldsymbol{x} \|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \ge 1 \tag{5.5}$$

(при $p=1$ и $p=2$), а последняя получается из нормы (5.5) предельным переходом при $p \to \infty$.

Замечание 1. Норма $\| \boldsymbol{x} \|_2$ является естественным обощением на случай m-мерного пространства понятия длины вектора в двух- и трехмерных геометрических пространствах. Поэтому ее называют *евклидовой* нормой.

Замечание 2. Справедливы неравенства

$$\| \boldsymbol{x} \|_\infty \le \| \boldsymbol{x} \|_2 \le \| \boldsymbol{x} \|_1 \le m \| \boldsymbol{x} \|_\infty, \tag{5.6}$$

Указывающие на то, что в определенном смысле все три введенные нормы эквивалентны: каждая из них оценивается любой из двух других с точностью до множителя, зависящего от m.

2. Скалярное произведение. Напомним, что скалярным произведением векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^{\text{т}}$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^{\text{т}}$ называется величина

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i. \tag{5.7}$$

Нетрудно установить, что $\| \boldsymbol{x} \|_2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{1/2}$.

В случае, когда векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ имеют комплексные компоненты, скалярное произведение понимают так:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} x_i \ \overline{y}_i.$$

3. Абсолютная и относительная погрешности вектора. Далее будем считать, что в пространстве m-мерных векторов R^m введена и фиксирована некоторая норма $\| \boldsymbol{x} \|$ (например, одна из норм $\| \boldsymbol{x} \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$). В этом случае в качестве меры близости векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}^*$ естественно использовать величину $\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \|$, являющуюся аналогом расстояния между точками $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}^*$. Введем абсолютную и относительную погрешности вектора $\boldsymbol{x}^*$ с помощью формул

$$\Delta(\boldsymbol{x}^*) = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \|, \quad \delta(\boldsymbol{x}^*) = \frac{\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \|}{\| \boldsymbol{x} \|}. \tag{5.8}$$

Выбор той или иной конкретной нормы в практических задачах диктуется тем, какие требования предъявляются к точности решения.

4. Сходимость по норме. Пусть $\{\boldsymbol{x}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ − последовательность векторов $\boldsymbol{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$. Говорят, что последовательность векторов $\boldsymbol{x}^{(n)}$ сходится к вектору $\boldsymbol{x}$ при $n \to \infty$ ($\boldsymbol{x}^{(n)} \to \boldsymbol{x}$ при $n \to \infty$), если $\Delta(\boldsymbol{x}^{(n)}) = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(n)} \| \to 0$ при $n \to \infty$.

З а м е ч а н и е. Сам факт наличия или отсутствия сходимости $\boldsymbol{x}^{(n)} \to \boldsymbol{x}$ при $n \to \infty$ в конечномерных пространствах не зависит от выбора нормы (см. неравенство (5.6)). Более того, $\boldsymbol{x}^{(n)} \to \boldsymbol{x}$ при $n \to \infty$) тогда и только тогда, когда для всех $i=1,2,\dots,m$ имеем $x_i^{(n)} \to x_i$ при $n \to \infty$, т.е. сходимость по норме в R^m эквивалентна покомпонентной (покоординатной) сходимости.

5. Норма матрицы. Величина

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{5.9}$$

называется *нормой матрицы* А, подчиненной норме векторов, введенной в R^m.

Заметим, что множество всех квадратных матриц размером $m\times m$ является векторным пространством. Можно показать, что введенная в этом пространстве формулой (5.9) норма обладает следующими свойствами, аналогичными свойствам нормы вектора:

1) $\| \boldsymbol{A} \| \geq 0$, причем $\| \boldsymbol{A} \| = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{A} = 0$;
2) $\|\alpha \boldsymbol{A} \| = |\alpha| \| \boldsymbol{A} \|$ для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ и любого числа α;
3) $\| \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \| \leq \| \boldsymbol{A} \| + \| B \|$ для любых матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Дополнительно к этому верны следующие свойства:

4) $\|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \| \leq \| \boldsymbol{A} \|\cdot\| B \|$ для любых матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$;
5) Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ и любого вектора $\boldsymbol{x}$ справедливо неравенство

$$\|\boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}\| \leq \| \boldsymbol{A} \|\cdot\|\boldsymbol{x}\|. \tag{5.10}$$

Как следует из неравенства (5.9), каждой из векторных норм $\|\boldsymbol{x}\|$ соответствует своя подчиненная норма матрицы $\boldsymbol{A}$. Известно, в частности, что нормам $\| \boldsymbol{x} \|_1$, $\| \boldsymbol{x} \|_2$ и $\| \boldsymbol{x} \|_\infty$ подчинены нормы $\|\boldsymbol{A}\|_1$, $\|\boldsymbol{A}\|_2$ и $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$, вычисляемые по формулам

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|, \tag{5.11}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \max_{1\leq j\leq m} \sqrt{\lambda_j(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})}\,, \tag{5.12}$$

где $\lambda_j(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})$ – собственные числа матрицы $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$;

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|. \tag{5.13}$$

Нормы $\|\boldsymbol{A}\|_1$ и $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$ вычисляются просто, а для вычисления $\|\boldsymbol{A}\|_2$ Необходимо найти собственные числа λ_j, а это иногда бывает непросто сделать.

Поэтому используют оценку

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{E}}. \qquad (5.14)$$

Здесь $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{E}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2}$ - величина, называемая *евклидовой нормой матрицы* ***A*.**

Норма (5.9) имеет простую геометрическую интерпретацию. Для того, чтобы ее привести, заметим, что операцию умножения матрицы на вектор можно рассматривать как преобразование, которое переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в новый вектор $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Если значение $\|\boldsymbol{x}\|$ интерпретируется как длина вектора $\boldsymbol{x}$, то величина $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|/\|\boldsymbol{x}\|$ есть коэффициент растяжения вектора под действием матрицы $\boldsymbol{A}$. Таким образом, величина

$$k_{max} = \|\boldsymbol{A}\| = \max_{\mathrm{x} \neq 0} \frac{\|\mathrm{Ax}\|}{\|\mathrm{x}\|} \qquad (5.15)$$

представляет собой максимальный коэффициент растяжения вектора $\boldsymbol{x}$ под действием матрицы ***A*.** Полезно отметить, что для невырожденной матрицы $\boldsymbol{A}$ минимальный коэффициент растяжения k_{min} отвечает норме обратной матрицы и вычисляется по формуле

$$k_{min} = \| A^{-1}\|^{-1} = \min_{x \neq 0} \frac{\|\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}. \qquad (5.16)$$

Заметим, что в случае $\|\boldsymbol{A}\| < 1$ происходит сжатие вектора под действием матрицы.

§ 5.3. Обусловленность задачи решения системы линейных алгебраических уравнений

Оказывается, что решения различных систем линейных алгебраических уравнений обладают разной чувствительностью к погрешностям входных данных. Так же как и другие задачи, задача вычисления решения $\boldsymbol{x}$ системы уравнений

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{5.17}$$

может быть как хорошо, так и плохо обусловленной.

Рассмотрим случай, когда элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ считаются заданными точно, а вектор-столбец правой части – приближенно.

Л е м м а 5.1. *Для погрешности приближенного решения системы (5.17) справедлива оценка*

$$\Delta(\boldsymbol{x}^*) \le \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{r}\|, \tag{5.18}$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}^*$ *– невязка, отвечающая* $\boldsymbol{x}^*$.

Для доказательства достаточно взять норму левой и правой частей равенства (5.3) ($\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{r}$) и воспользоваться свойством (5.10) ($\|\boldsymbol{Ax}\| \le \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$).

Т е о р е м а 5.1. *Пусть* $\boldsymbol{x}^*$ *– точное решение системы* $\boldsymbol{Ax}^* = \boldsymbol{b}^*$, *в которой правая часть* $\boldsymbol{b}^*$ *является приближением к* $\boldsymbol{b}$. *Тогда верны следующие оценки абсолютной и относительной погрешностей:*

$$\Delta(\boldsymbol{x}^*) \le \boldsymbol{\nu}_\Delta\, \Delta(\boldsymbol{b}^*), \tag{5.19}$$

$$\delta(\boldsymbol{x}^*) \le \boldsymbol{\nu}_\delta\, \delta(\boldsymbol{b}^*), \tag{5.20}$$

где $\boldsymbol{\nu}_\Delta = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|$, $\boldsymbol{\nu}_\delta = \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$.

□ В рассматриваемом случае $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}^* = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^*$ и неравенство (5.18) принимает вид (5.19). Разделив обе части неравенства (5.19) на $\|\boldsymbol{x}\|$ и записав его в виде

$$\frac{\Delta(\boldsymbol{x}^*)}{\|\boldsymbol{x}\|} \le \frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\,\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \cdot \frac{\Delta(\boldsymbol{b}^*)}{\|\boldsymbol{b}\|},$$

приходим к оценке (5.20). ■

З а м е ч а н и е 1. Величина $\boldsymbol{\nu}_\Delta = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|$ для задачи (5.17) играет роль абсолютного числа обусловленности.

З а м е ч а н и е 2. Величина $\boldsymbol{\nu}_\delta = \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ называется *естественным числом обусловленности.* Она зависит от конкретного решения $\boldsymbol{x}$ и характеризует коэффициент возможного возрастания относительной погрешности этого решения, вызванной погрешностью задания правой части. Это означает, что $\boldsymbol{\nu}_\delta(\boldsymbol{x})$ для задачи вычисления решения $\boldsymbol{x}$ системы (5.17) играет роль относительного числа обусловленности.

Вычислим максимальное значение естественного числа обусловленности, используя определение (5.9) нормы матрицы:

$$\max_{x\neq 0} \boldsymbol{\nu}_\delta(\boldsymbol{x}) = \max_{x\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}\|}{\|\,\boldsymbol{x}\|} = \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\|. \qquad (5.21)$$

Полученную величину принято называть *стандартным числом обусловленности* (или просто *числом обусловленности*) матрицы $\boldsymbol{A}$ и обозначать через $\nu(\boldsymbol{A})$ или cond $(\boldsymbol{A})$. Таким образом,

$$\nu(\boldsymbol{A}) = \text{cond}\,(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\|. \qquad (5.22)$$

Сформулируем важное следствие из теоремы 5.1.

С л е д с т в и е. *В условиях теоремы 5.1 справедлива оценка*

$$\delta(x^*) \leq \text{cond}\,(\boldsymbol{A})\, \delta(b^*). \qquad (5.23)$$

Для ее доказательства достаточно воспользоваться оценкой (5.20) и заметить, что в силу определения (5.21) верно неравенство $\boldsymbol{\nu}_\delta \leq \text{cond}\,(\boldsymbol{A})$.

Величина $\text{cond}(\boldsymbol{A})$ является широко используемой количественной мерой обусловленности системы $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. В частности, систему и матрицу $\boldsymbol{A}$ принято называть *плохо обусловленными*, если $\text{cond}(\boldsymbol{A}) >> 1$. В силу оценки (5.23) для такой системы существуют решения, обладающие чрезвычайно высокой чувствительностью к малым погрешностям входных данных – вектора $\boldsymbol{b}$. Тем не менее, заметим, что не для всякого решения $\boldsymbol{x}$ коэффициент $\boldsymbol{\nu}_\delta(\boldsymbol{x})$ роста относительной ошибки достигает значений, близких к максимально возможному значению $\text{cond}(\boldsymbol{A})$.

Отметим следующие свойства числа обусловленности.

1). Для единичной матрицы $\text{cond}(\boldsymbol{E}) = 1$.

□ Пользуясь тем, что $\boldsymbol{E}^{-1} = \boldsymbol{E}$ и $\|\boldsymbol{E}\| = 1$, получим $\text{cond}(\boldsymbol{E}) = \|\boldsymbol{E}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{E}\| = 1$. ■

2). Справедливо неравенство $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) \geq 1$.

□ Из равенства $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{A}^{-1}$, свойства 4) норм матриц и равенства $\|\boldsymbol{E}\| = 1$ следует, что $1 = \|\boldsymbol{E}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\| = \mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$. ■

3). Число обусловленности матрицы $\boldsymbol{A}$ не меняется при умножении матрицы $\boldsymbol{A}$ на произвольное число $\alpha \neq 0$.

□ Заметим, что $(\alpha\, \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\ \boldsymbol{A}^{-1}$. Поэтому $\mathrm{cond}(\alpha\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\alpha\boldsymbol{A}\| = |\boldsymbol{\alpha}^{-1}|\ \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot |\alpha|\ \|\boldsymbol{A}\| = \mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$. ■

З а м е ч а н и е. Пользуясь приведенной в § 5.2 геометрической интерпретацией норм матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}^{-1}$ (формулы (5.15) и (5.16)), число обусловленности можно интерпретировать как отношение максимального коэффициента растяжения векторов под действием матрицы $\boldsymbol{A}$ к минимальному коэффициенту: $\mathrm{cond}(A) = k_{max} / k_{min}$.

Выше рассмотрен случай, когда элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ считаются заданными точно, а вектор-столбец правой части – приближенно. Однако на практике это часто не так. Установлено, что введенная выше величина $\mathrm{cond}(A)$ характеризует также и чувствительность решений системы к малым погрешностям задания элементов матрицы $\boldsymbol{A}$. В частности, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 5.2. *Пусть $\boldsymbol{x}^*$ – точное решение системы $\boldsymbol{A}_*\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$ с приближенно заданной матрицей $\boldsymbol{A}_*$. Тогда верна следующая оценка относительной погрешности:*

$$\delta^*(\boldsymbol{x}^*) \leq \mathrm{cond}(A) \cdot \delta(\boldsymbol{A}_*),$$

где $\delta^*(\boldsymbol{x}^*) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| \,/\, \|\boldsymbol{x}^*\|$, $\delta(\boldsymbol{A}_*) = \|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_*\| \,/\, \|\boldsymbol{A}\|$.

В случае, когда с погрешностью заданы как правая часть системы, так и матрица, доказано, что справедливо неравенство

$$\delta(\boldsymbol{x}^*) \leq \mathrm{cond}(A) \cdot (\delta(\boldsymbol{A}_*) + \delta(b^*))$$

З а м е ч а н и е. Вычисление чисел обусловленности непосредственно по представленным выше формулам предполагает предварительное вычисление обратной матрицы, что является достаточно трудоемкой операцией (порядка $2m^3$ арифметических операций). На практике избегают этой операции. При этом исходят из того, что в большинстве случаев достаточно лишь грубой оценки числа обусловленности с точностью до порядка. Для этого существуют достаточно эффективные методы, которые мы оставим за рамками нашего курса.

§ 5.4. Типы используемых матриц

Эффективность вычислений в линейной алгебре существенно зависит от умения использовать специальную структуру и свойства используемых в расчетах матриц. Рассмотрим некоторые типы матриц.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если ее элементы удовлетворяют условию a_{ij} = 0 для $i \neq j$ (т.е. все отличные от нуля элементы расположены на главной диагонали).

Диагональная матрица, у которой все элементы a_{ii} = 1, называется *единичной* и обозначается буквой $\boldsymbol{E}$.

Важную роль в численном анализе играют *треугольные матрицы.* Квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ называется *нижней треугольной*, если все ее элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю (a_{ij} = 0 для $i > j$). Если же равны нулю все элементы, расположенные ниже главной диагонали (a_{ij} = 0 для $i < j$), то такая матрица называется *верхней треугольной*.

Для треугольных матриц определитель вычисляется по формуле

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{mm}. \qquad (5.24)$$

Будем называть симметричную матрицу $\boldsymbol{A}$ положительно определенной и писать $\boldsymbol{A} > 0$, если для всех векторов $\boldsymbol{x} \neq 0$ квадратичная форма $(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, x_i x_j$ принимает положительные значения.

На практике часто встречаются матрицы, в которых число ненулевых элементов много меньше общего числа элементов матрицы. Такие матрицы принято называть *разреженными*. Матрицы общего вида называют *плотными* (или *заполненными*).

Простой пример разреженной матрицы дает *трехдиагональная* матрица, все ненулевые элементы котрой расположены на главной и двух соседних диагоналях. Число ненулевых элементов такой матрицы равно $(3m - 2) \ll m^2$ при большом m.