9 лекция

26 октября 2022 г. 13:38

Интегральное исчисление функций многих переменных

Кратные интегралы

def (Объём в $\mathbb{R}^n$ или мера Жордана) №107

$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ нормированная система координат

$\exists$ семейство гиперплоскостей

$x_i = \frac{m}{10^k}$; $k = 0, 1, \ldots$ и $m \in \mathbb{Z}$ и $i = 1, 2, \ldots n$

$Q^n = \{x : \frac{m_i}{10^k} \leq x_i \leq \frac{m_i + 1}{10^k}; i = 1, 2, \ldots n\}$

разбиение на n-мерный куб

1) $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{Q \in T_n} Q^n$ объединим все кубы

2) если $n=1$, тогда Q^1 – отрезки

$n=2$, тогда Q^2 – квадраты

3) общими точками могут быть только граничные.

объём $\mu_n Q = h^n$ ребро куба

Объём куба $\mu(Q^n) := 10^{-k \cdot n}$ (при фиксированном k)

$\exists\, S = \bigcup\limits_i Q_i^n$, $Q_i^n \in T_k \Rightarrow \mu S := \sum\limits_j \mu Q_j^n$ объём S

возможно $\mu S = +\infty$

$\mu(\varnothing) := 0$

def (Гиперплоскость) №105

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a_0 = 0$

$\sum\limits_{i=1}^n a_i^2 > 0$ называется гиперплоскостью

def №106

Назовём множество всех кубов при фиксированном k кубами ранга k и обозначим T_k

Следствие №110

$s_0 \subset s_1 \subset s_2 \ldots \quad \mu s_0 \leq \mu s_1 \leq \ldots$

$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \ldots \quad \mu S_0 \geq \mu S_1 \geq \ldots$

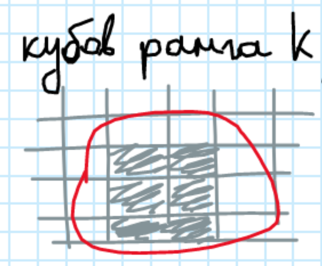
$\mu s_k \leq \mu S_k$

def №108

$\exists\, \Omega \subset \mathbb{R}^n$

$\exists\, s_k(\Omega)$ – множество точек $\forall$ n-мерных кубов ранга k, целиком лежащих в Ω

$s_k(\Omega) = \bigcup\limits_{\substack{Q^n \in T_k \\ Q^n \subset \Omega}} Q^n \qquad s_k(\Omega) \subset \Omega$

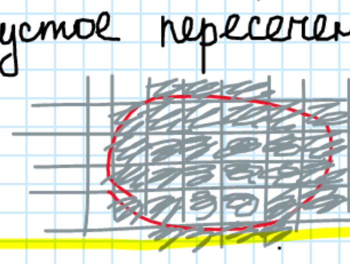


def №109

$\exists\, \Omega \subset \mathbb{R}^n$

$\exists\, S_k(\Omega)$ – множество точек $\forall$ n-мерных кубов ранга k, имеющих непустое пересечение с Ω

$S_k(\Omega) = \bigcup\limits_{\substack{Q^n \in T_k \\ Q^n \cap \Omega \neq \varnothing}} Q^n$



$\Omega \subset S_k(\Omega)$

def №111 μ^* и μ_* не аддитивны

$\mu_* \Omega := \lim\limits_{k \to \infty} \mu s_k(\Omega)$ – внутренняя (нижняя) мера Жордана

$\mu^* \Omega := \lim\limits_{k \to \infty} \mu S_k(\Omega)$ – внешняя (верхняя) мера Жордана

def №112

Если $\mu_* \Omega = \mu^* \Omega$, тогда $\mu \Omega = \mu^* \Omega = \mu_* \Omega$ называется мерой Жордана множества Ω, а само множество Ω называется измеримым по Жордану.

Свойства: №113

1) $\forall$ измеримого Ω $\mu \Omega \geq 0$ (более того, если $\mu^* \Omega = 0$, то $\mu \Omega = 0$)

2) Монотонность меры

$\Omega_1 \subset \Omega_2$

Если Ω_1 и Ω_2 – измеримые, тогда $\mu \Omega_1 \leq \mu \Omega_2$

Утв №114

Если $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \mu_* \Omega_1 \leq \mu_* \Omega_2$

$\mu^* \Omega_1 \leq \mu^* \Omega_2$

Док-во:

$s_k(\Omega_1) < s_k(\Omega_2)$

$S_k(\Omega_1) < S_k(\Omega_2)$

Lm (аддитивность внешней меры) №115

$\mu^*\left(\bigcup\limits_{j=1}^N \Omega_j\right) \leq \sum\limits_{j=1}^N \mu^* \Omega_j$

Следствие

Конечное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль

3) Объединение и пересечение конечного числа измеримых по Жордану множеств (а также разность таких двух множеств) измеримы по Жордану

4) Аддитивность меры $\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^N \Omega_n\right) = \sum\limits_{j=1}^N \mu(\Omega_n)$, если $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$, если $i \neq j$

Мера объединения конечного число попарно не пересекающихся измеримых по Жордану множеств, равна сумме мер этих множеств

5) Мера множества не меняется при параллельном переносе

Lm №118

$\forall\, \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \partial\Omega \subset \sigma_k(\Omega) \subset S_k(\partial\Omega)$

граница множества

Lm №119

$\exists\, A, B \subset \mathbb{R}^n$, тогда

1) $\partial(A \cup B) \subset (\partial A) \cup (\partial B)$

2) $\partial(A \cap B) \subset (\partial A) \cup (\partial B)$

3) $\partial(A \setminus B) \subset (\partial A) \cup (\partial B)$

Th (Жордана) №120

Множество Ω измеримо по Жордану

$\Updownarrow$

1) множество Ω ограничено

2) $\mu(\partial\Omega) = 0$

Утв №117

1) $\forall$ конечное или бесконечное объединение кубов данного ранга есть замкнутое множество.

2) $\forall$ многогранника S, состоящего из конечного или бесконечного множества кубов одного и того же ранга k, его точка x имеет окрестность, содержащуюся в S

$\Updownarrow$

все кубы ранга k, содержащие x, содержатся в S

Более того, $(S_k)_{int} \cup \sigma_k$, где $(S_k)_{int} \cap \sigma_k = \varnothing$

внутренние

$\sigma_k := \bigcup\limits_{\substack{Q \in T_k \\ Q \not\subset s_k \\ Q \in S_k}}$

Lm №121

$A_m \subset \Omega \subset B_m : m \in \mathbb{N}$ и A_m и B_m – измеримы

при этом $\lim\limits_{m \to \infty} \mu(B_m \setminus A_m) = 0$, тогда

Ω – измеримо и $\mu \Omega = \lim\limits_{m \to \infty} (\mu A_m) = \lim\limits_{m \to \infty} (\mu B_m)$

$A = \mathbb{Q}[0,1] \quad B = \mathbb{I}[0,1]$

$\mu_* A = \mu_* B = 0 \quad \mu^* A = \mu^* B = 1$

$\mu_*(A \cup B) = \mu_*[0,1] = 1 \neq 0 = \mu_* A + \mu_* B$

$\mu^*(A \cup B) = \mu^*[0,1] = 1 \neq 2 = \mu^* A + \mu^* B$

Замечание к аддитивности μ_* и μ^*

Соответственно, μ_* и μ^* – не мера

При смене системы координат мера Жордана не меняется

Замечание

def №122

$\exists\, \Omega_0$ – множество, лежащее на гиперплоскости $\{x : x_n = 0\}$ пространства $\mathbb{R}^n$

$a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$\Omega = \{x : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \Omega_0, a \leq x_n \leq b\}$

называют цилиндром с основанием Ω_0 и образующей длины $h = b - a$ (вдоль Ox_n)

$\Omega = \Omega_0 \times [a, b]$

Th №123

Если Ω_0 измеримо в $\mathbb{R}^{n-1}$, тогда

$\forall\, \Omega = \Omega_0 \times [a,b]$

Ω – измеримо в $\mathbb{R}^n$

причём $\mu_n \Omega = h\, \mu_{n-1} \Omega_0$

Th №124

График $\forall$ непрерывной функции на компакте $(y = f(x_1 \ldots x_n))$ есть множество меры нуль в $\mathbb{R}^{n+1}$

компакт – замкнутое ограниченное множество

Th №125

$\forall$ плоская спрямляемая кривая имеет меру нуль

имеет длину

Следствие

Такая кривая измерима по Жордану