1. Группа корней n-й степени из 1 (относительно операции умножения). Это циклическая группа порядка n. Нейтральный элемент в ней равен 1. В качестве образующей можно брать любое число вида $e^{2\pi ik}$, где k взаимно просто с n. Если число k является делителем n, то $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$, является образующей подгруппы порядка $\frac{n}{k}$ (и это единственная подгруппа данного порядка).
   Например, пусть $n = 18$, для каждого делителя 1, 2, 3, 6, 9, 18 числа существует ровно одна подгруппа порядка, равного этому делителю. Так числа $1, e^{2\pi i\frac{1}{6}}$, $e^{2\pi i\frac{1}{3}}$, $e^{2\pi i\frac{1}{2}}$, $e^{2\pi i\frac{2}{3}}$, $e^{2\pi i\frac{5}{6}}$ образуют подгруппу порядка 6.
2. Какими могут быть факторгруппы циклической группы?
   Для начала, что такое факторгруппа? Пусть в группе G выделена подгруппа H.Множество gH, полученное в результате умножения каждого элемента H на фиксированный элемент g, называется левым классом смежности группы по подгруппе (аналогично определяются правые классы смежности).
   Известно, что два левых класса смежности либо не имеют общих элементов, либо совпадают. Таким образом, группа G может быть представлена как объединение непересекающихся классов смежности.
   Можно попробовать определить на классах смежности операцию по следующему правилу: берем из каждого класса смежности по представителю и применяем к ним групповую операцию. Результат обязательно попадает в какой-то класс смежности, его и назовем результатом операции над классами.
   Но проблема в том, что этот результат может зависеть от выбора представителей, и тогда определение операции на классах смежности окажется некорректным. Чтобы избежать этого, на группу приходится накладывать ограничение: потребуем, чтобы каждый левый класс с представителем g совпадал с правым классом с тем же представителем, то есть для каждого элемента группы выполнено равенство $gH = Hg$ (обратите внимание, это равенство множеств: произведения gh и hg не обязаны быть равными, но они обязаны входить в один класс смежности) .
   Такие подгруппы называются *нормальными* подгруппами или *нормальными делителями*
   Если группа является нормальным делителем, то множество классов смежности с описанной выше операцией является группой. Она и называется факторгруппой группы по подгруппе.
   Ясно, что если группа коммутативна, то в ней каждая подгруппа является нормальным делителем.
   Пусть H – подгруппа порядка d в группе G корней степени n из 1, значит она состоит из элементов вида $e^{2\pi i\frac{k}{d}}$. Каждое число от 1 до n может быть представлено в виде $t\frac{n}{d} + r$, где $0 \leq r < \frac{n}{d}$, тогда произвольный элемент группы G можно записать в виде $e^{2\pi i\left(t\frac{n}{d}+r\right):n} = e^{2\pi it\frac{t}{d}} \cdot e^{2\pi i\frac{r}{n}}$. Это означает, что каждый элемент группы G можно представить как произведение элемента подгруппы H и элемента вида $e^{2\pi i\frac{r}{n}}$, где $0 \leq r < \frac{n}{d}$. Причем при разных значениях r получаются элементы разных классов смежности по подгруппе H.
   Действительно, если два таких элемента, например $a = e^{2\pi i\frac{r}{n}}$ и $b = e^{2\pi i\frac{s}{n}}$принадлежат одному классу смежности, то произведение $ab^{-1} = e^{2\pi i\frac{r-s}{n}}$ должно принадлежать подгруппе H, а тогда $(ab^{-1})^d = 1$. Но это невозможно, так как произведение $\frac{r-s}{n} \cdot d$ строго меньше n.
   Таким образом, факторгруппа группы G по подгруппе H – это множество смежных классов вида $e^{2\pi i\frac{r}{n}}H$, где $0 \leq r < \frac{n}{d}$. Операция на этой группе определяется умножением

представителей смежных классов (напомним, что в каждом классе ровно один представитель вида $e^{2\pi i\frac{r}{n}}$ с условием $0 \le r < \frac{n}{d}$).

3. Группа перестановок S_n.
   Слова «перестановка» и «подстановка»:
   - перестановкой называем расположение чисел 1, 2, ..., n в некотором порядке
   - подстановкой называют взаимно однозначное отображение множества в себя. Записывают подстановку обычно как таблицу из двух строк: в верхней строке пишут числа 1,2, ..., n в естественном порядке, а в нижней – образы этих чисел под действием отображения (нижняя строка при этом и есть перестановка, соответствующая данной подстановке).
   - На практике эти термины не всегда четко разделяют (подстановки часто называют перестановками).

Умножение подстановок определяется как композиция отображений, при этом сначала выполняется отображение, отвечающее правому множителю, а потом – левому. Например, , $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, а $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ (это аналог записи $fg(x)=f\big(g(x)\big)$, при этом подразумевается, что справа стоит аргумент отображения). Впрочем, в некоторых книгах принято записывать множители в обратно порядке, поэтому при чтении разных источников надо обращать на это внимание.

Для многих целей удобно представлять подстановку как произведение независимых циклов. Для этого выбираем какое-то число, находим его образ и приписываем его к выбранному числу справа, затем находим образ образа и снова приписываем его справа... Так как множество конечно, на каком-то шаге получим то число, с которого начинали, значит, цикл закрывается. Если в него вошли не все числа от 1 до n, выбираем одно из неохваченных чисел и повторяем процесс. Циклы длины 1 (то есть те числа, которые переходят сами в себя, как правило, в такой записи опускаются. Например, $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&5&4&1&2\end{pmatrix}=(1,3,5)(2,6)(4)=(1,3,5)(2,6)$. Обратите внимание: так как каждое из чисел входит только в один из циклов, то в полученном произведении сомножители можно переставлять в любом порядке.

Перестановка, обратная к данной, получается в верхней строке нашей двухстрочной таблицы, если мы расположим ее нижнюю строку в естественном порядке. Очевидно, она является обратной и в смысле умножения перестановок. Например, $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&5&4&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&1&4&3&2\end{pmatrix}$. Если перестановка записана как произведение циклов, то обратная перестановка получается, если мы запишем числа, входящие в каждый цикл, в обратном порядке: $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&5&4&1&2\end{pmatrix}^{-1}=(5,3,1)(6,2)=(1,5,3)(2,6)$ (если в записи цикла переставить числа по кругу, перестановка от этого не меняется).

Еще одно важное соотношение – это переход к сопряженной подстановке. Два элемента группы a, b называются сопряженными, если существует элемент группы c , для которого верно равенство $a=cbc^{-1}$. В группе подстановок переход к сопряженному элементу проще всего выполнить, сочетая запись в виде произведения циклов (для сопрягаемой перестановки b) с записью в виде отображения (для сопрягающей перестановки c). При сопряжении количество циклов данной длины не меняется, а сами циклы меняются по такому правилу: каждый элемент цикла заменяется на его образ под действием перестановки c. Например, пусть $b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&5&4&1&2\end{pmatrix}$ и $c=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&4&2&3&6&5\end{pmatrix}$. Запишем b в виде произведения циклов: $b=$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,5)(2,6)$. Теперь заменим в этой записи каждое число на его образ под действием c: $(1,2,6)(4,5)$. У нас получилась сопряженная перестановка.

Можно доказать, что две перестановки сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую структуру циклов, то есть в их разложении на циклы совпадают количества циклов и их длины. Понятно, что указанное выше правило позволяет по двум перестановкам с одинаковыми цикловыми структурами восстановить сопрягающую их перестановку.