Студент: Беззубов Даниил
Группа: 1303
Вариант: 2
Дата: 13 мая 2023 г.

Теория вероятностей и математическая статистика
Индивидуальное домашнее задание №4

Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид:

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Задание 1. *Определить матрицу вероятностей перехода за два шага*

Решение. Для того, чтобы определить матрицу вероятностей перехода за n шагов, необходимо исходную матрицу возвести в n-ную степень, то есть для перехода за два шага, возведем данную матрицу в квадрат:

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 48 & 0 & 0 & 0 & 6 & 22 & 18 & 6 \\ 9 & 14 & 11 & 18 & 8 & 16 & 8 & 16 \\ 6 & 17 & 23 & 27 & 0 & 17 & 4 & 6 \\ 0 & 22 & 20 & 34 & 0 & 16 & 0 & 8 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 31 & 10 & 11 & 37 \\ 33 & 0 & 0 & 0 & 14 & 21 & 16 & 16 \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 13 & 15 & 15 & 27 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 11 & 43 \end{pmatrix}$$

□

Задание 2. *Выделить классы сообщающихся состояний*

Решение. Построим по заданной матрице граф. Сообщающиеся состояния в данной цепи Маркова будут образовывать компоненты сильной связности. Найдем их с помощью системы компьютерной алгебры.

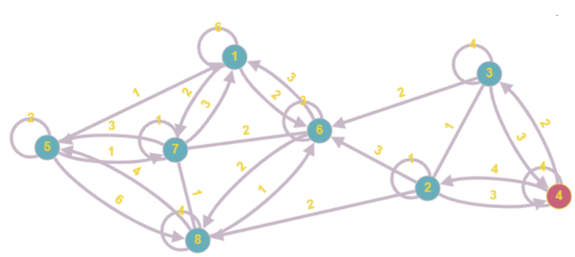
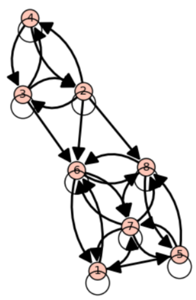


Рис. 1 – Граф, построенный по матрице вероятностей перехода

Найдем сообщающиеся состояния с помощью системы компьютерной алгебры. Таким образом, сообщающимися состояниями (компонентами сильной связанности) являются: {1,5,6,7,8}, {2,3,4} □

Задание 3. *Есть ли невозвратные состояния*

```
In [1]: a = DiGraph({1:[1,6,7],2:[2,3,4,6,8],3:[2,3,4,6],4:[2,3,4],5:[1,5,7,8],6:[1,6,7,8],7:[1,5,6,7,8],8:[5,6,7,8]})
        show(a)
```




```
In [3]: a.strongly_connected_components()
Out[3]: [[1, 5, 6, 7, 8], [2, 3, 4]]
```

Рис. 2 – Результат вычислений в СКА

Решение. Невозвратных состояний нет □

Задание 4. *Найти период в каждом из классов*

Решение. Рассмотрим найденный ранее классы $E_1 = \{1{,}5{,}6{,}7{,}8\}$ и $E_2 = \{2{,}3{,}4\}$ Так как все вершины построенного графа имеют петли, то для обоих классов период будет равен 1 □

Задание 5. *Вычислить финальные вероятности в каждом классе*

Решение. Для найденных классов напишем матрицы перехода P'_1 для E_1 и P'_2 для E_2

$$P'_1 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P'_2 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Составим систему и посчитаем финальную вероятность для класса:

$$x \cdot P' = x$$

$$(P')^T \cdot x^T = x^T$$

$$\begin{cases} ((P')^T - E)x^T = 0 \\ \sum_{i=0}^{k} p_i = 1, x = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \end{cases}$$

Тогда для P'_1:

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{7}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = 0$$

Получили ОСЛУ вида:

$$\begin{cases} -\frac{2}{5}p_1 + \frac{1}{10}p_2 + \frac{3}{10}p_3 + \frac{3}{10}p_4 = 0 \\ -\frac{4}{5}p_2 + \frac{3}{10}p_4 + \frac{2}{5}p_5 = 0 \\ \frac{1}{5}p_1 - \frac{7}{10}p_3 + \frac{1}{5}p_4 + \frac{1}{10}p_5 = 0 \\ \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{10}p_2 + \frac{1}{5}p_3 - \frac{9}{10}p_4 + \frac{1}{10}p_5 = 0 \\ \frac{3}{5}p_2 + \frac{1}{5}p_3 + \frac{1}{10}p_4 - \frac{3}{5}p_5 = 0 \end{cases}$$

Вектор x имеет следующий вид $\begin{pmatrix} \frac{421}{404} \cdot x_5 & \frac{143}{202} \cdot x_5 & \frac{121}{202} \cdot x_5 & \frac{56}{101} \cdot x_5 & x_5 \end{pmatrix} \Rightarrow p_5 = \frac{404}{1577}$

Вектор финальных вероятностей для $P_1' = \begin{pmatrix} \frac{421}{1577} & \frac{286}{1577} & \frac{242}{1577} & \frac{224}{1577} & \frac{404}{1577} \end{pmatrix}^T$

Тогда для P_2':

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0$$

Получили ОСЛУ вида:

$$\begin{cases} -\frac{2}{5}p_1 + \frac{1}{10}p_2 + \frac{2}{5}p_3 = 0 \\ \frac{1}{10}p_1 - \frac{2}{5}p_2 + \frac{1}{5}p_3 = 0 \\ \frac{3}{10}p_1 + \frac{3}{10}p_2 - \frac{3}{5}p_3 = 0 \end{cases}$$

Вектор x имеет следующий вид $x = (\frac{6}{5}p_3, \frac{4}{5}p_3, p_3) \Rightarrow p_3 = \frac{1}{3}$

Вектор финальных вероятностей для $P_2' = \begin{pmatrix} \frac{6}{15} & \frac{4}{15} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T$ $\square$