Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет “ЛЭТИ”

Кафедра МОЭВМ

ОТЧЕТ
по дисциплине «Методы оптимизации»
Лабораторная работа №1
«МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ»

Выполнил: Сучков А.И.
Группа: 3381
Факультет: КТИ
Вариант: 28
Преподаватель: Мальцева Н.В.

Санкт-Петербург
2024

1. Задание

Минимизировать функцию $F(x_1, x_2, a) = (x_2 - x_1^2)^2 + a(x_1 - 1)^2$ с точностью до 10^{-5} ($\left|F(x_{1k}, x_{2k}, a) - F(x_1^*, x_2^*, a)\right| < 10^{-5}$) предложенными в задании методами. Оценить скорость и порядок сходимости методов. Провести сравнительный анализ эффективности методов в зависимости от начальной точки и параметра $a > 0$.
Методы задания – овражный метод и метод наискорейшего спуска.

2. Описание методов

Овражный метод

Овражный метод по начальным точкам v_0 и v_1 методом наискорейшего спуска получает точки u_0 и u_1. Затем v_{k+1} вычисляется по формуле:

$$v_{k+1} = u_k - \operatorname{sgn}(\varphi(u_k) - \varphi(u_{k+1})) \frac{h_k}{\|u_k - u_{k-1}\|} (u_k - u_{k-1}),$$

где $h_k = h_{k-1} c^{\cos(\alpha_k) - \cos(\alpha_{k-1})}$ – овражный шаг; α_k – угол между векторами ($v_k - v_{k-1}$) и ($u_k - u_{k-1}$). Метод обладает линейной (геометрической) скоростью сходимости с порядком сходимости равным 1.

Метод наискорейшего спуска

Метод наискорейшего спуска получает следующую точку по формуле:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \varphi'(x_k),$$

где α_k выбирается таким образом, чтобы $\varphi(x_k - \alpha_k \varphi'(x_k))$ было минимально.

Метод обладает линейной (геометрической) скоростью сходимости с порядком сходимости равным 1.

3. Перечень вариантов запуска программы и обоснование выбора

Построим график функции при $a = 1$.

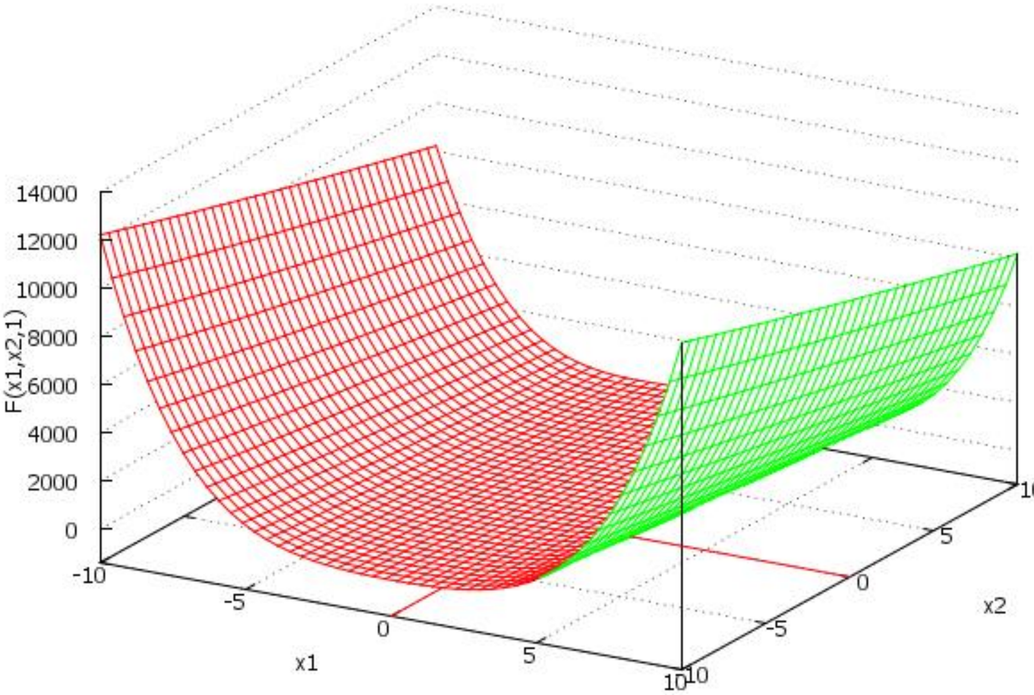

Рисунок 1 – График функции $F(x_1, x_2, 1) = (x_2 - x_1^2)^2 + (x_1 - 1)^2$

Так как функция неотрицательна на всей плоскости oX_1X_2, предполагаем, что минимум функции равен 0, что и подтверждается графиком функции (см. рис. 1). Функция достигает минимума при значениях (1, 1): $F(1, 1, a) \to 0$.

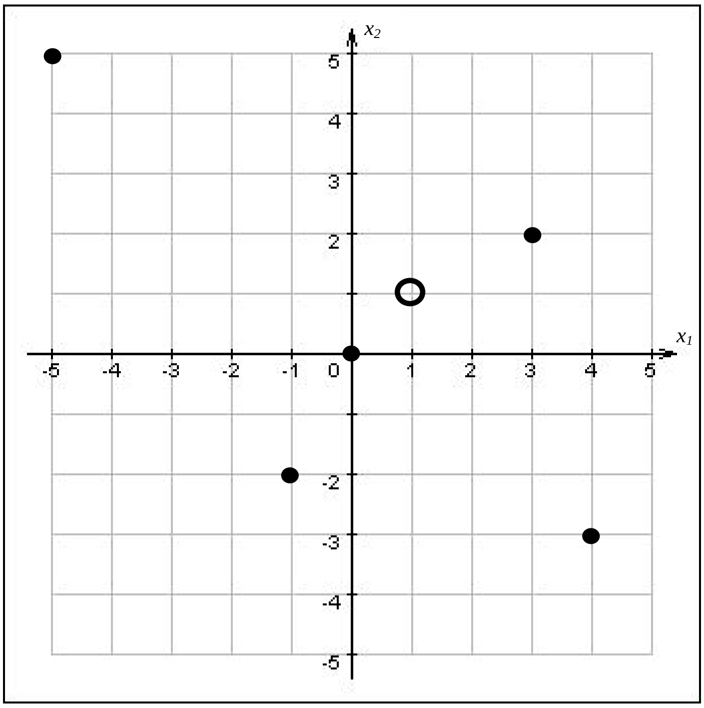

Рисунок 2 – Расположение пар чисел (x_1, x_2)

Для проведения сравнительного анализа эффективности методов возьмем 5 пар чисел расположенные в каждой из четвертей системы координат, а также неэквидистантны с парой (1, 1) (рис. 2). Получились следующие пары чисел *(x_1, x_2)*:
(0, 0), (3, 2), (-5, 5), (-1, -2), (4, -3).
Выберем 3 положительных параметра $a \in \{1, 5, 10\}$.

4. Протокол работы программы.

Запустим программу для данных методов с указанными выше параметрами и с постоянным шагом α = 0,05.

Овражный метод

Точка (0, 0); a = 1

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.589718	0.000000	0.2892734281	14
2	0.589831	0.348037	0.1682384632	18
3	0.812691	0.479538	0.0678198383	17
4	0.778371	0.537697	0.0537659069	14
5	0.846731	0.578035	0.0427896667	16
6	0.989221	0.990337	0.0002549459	21
7	0.995165	0.988283	0.0000276634	13
8	0.998849	0.998972	0.0000029460	21
9	1.000002	1.000007	0.0000000000	13
10	1.000003	1.000006	0.0000000000	14

всего вычислено 161 значений функции f

Точка (0, 0); *a* = 5

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.797468	0.000000	0.6095350845	14
2	0.795836	0.630698	0.2084210892	16
3	0.962823	0.763035	0.0338046064	14
4	0.940774	0.790869	0.0264097827	14
5	0.970659	0.814540	0.0205962088	14
6	0.998695	0.998818	0.0000105437	22
7	0.999691	0.998666	0.0000009900	11
8	0.999886	0.999904	0.0000000819	19
9	1.000001	1.000008	0.0000000000	12
10	1.000002	1.000008	0.0000000000	12

всего вычислено 148 значений функции f

Точка (0, 0); *a* = 10

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.868444	0.000000	0.7418798829	10
2	0.874199	0.773727	0.1583480736	18
3	0.988782	0.875140	0.0117748858	13
4	0.978333	0.886965	0.0096185327	11
5	0.990810	0.897995	0.0078517608	12
6	0.999848	0.999860	0.0000002592	21
7	0.999978	0.999848	0.0000000165	12
8	0.999989	0.999989	0.0000000012	19
9	1.000000	0.999999	0.0000000000	12
10	1.000000	0.999999	0.0000000000	12

всего вычислено 140 значений функции f

Точка (3, 2); *a* = 1

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	1.450016	2.246588	0.2232624849	11
2	1.281160	1.493300	0.1009755534	22
3	1.173469	1.461553	0.0372357521	12
4	1.182653	1.430382	0.0343678775	16
5	1.159636	1.423600	0.0317001368	12
6	1.006828	1.004349	0.0001340938	25
7	1.002451	1.005945	0.0000070819	14
8	1.000424	1.000306	0.0000004745	21
9	1.000018	1.000049	0.0000000005	12
10	1.000020	1.000046	0.0000000004	13
11	1.000016	1.000043	0.0000000004	15
12	1.000000	1.000000	0.0000000000	24

всего вычислено 197 значений функции f

Точка (3, 2); *a* = 5

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	1.297394	2.229197	0.7402945763	10
2	1.165676	1.206364	0.1604785770	19
3	1.028813	1.147150	0.0120174421	13
4	1.038939	1.123779	0.0095513607	14
5	1.022795	1.116787	0.0075933106	13
6	0.999618	0.999862	0.0000011245	21
7	0.999952	0.999796	0.0000000232	12
8	0.999992	0.999997	0.0000000005	18
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	10
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	15

всего вычислено 145 значений функции f

Точка (3, 2); *a* = 10

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	1.195410	2.203744	0.9820711388	10
2	1.038340	1.008805	0.0195084809	20
3	0.998716	0.988783	0.0000913153	10
4	0.997884	0.990405	0.0000735879	13
5	0.998966	0.990961	0.0000593004	10
6	1.000001	1.000001	0.0000000000	21
7	1.000000	1.000001	0.0000000000	12
8	1.000000	1.000000	0.0000000000	18

всего вычислено 114 значений функции f

Точка (-5, 5); *a* = 1

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	-2.128221	5.278814	10.3475002610	10
2	-2.162199	4.867667	10.0365820480	16
3	-2.026349	4.861332	9.7291778555	11
4	-2.050867	4.323217	9.3215148316	15
5	-1.881609	4.315501	8.9043711388	11
6	-0.674566	-0.236375	3.2822267724	25
7	0.661647	0.117957	0.2167672362	16
8	0.613573	0.299133	0.1553071605	15
9	0.759908	0.359968	0.1049469173	13
10	0.722496	0.449922	0.0822038161	16
11	0.804772	0.484132	0.0648547819	14
12	0.988039	0.991334	0.0003714452	23
13	0.995331	0.988700	0.0000257369	13
14	0.999260	0.999506	0.0000015170	22
15	1.000021	1.000060	0.0000000008	12
16	1.000024	1.000056	0.0000000006	15
17	1.000018	1.000052	0.0000000006	16
18	1.000000	1.000000	0.0000000000	24
19	1.000000	1.000000	0.0000000000	12
20	1.000000	1.000000	0.0000000000	20

всего вычислено 319 значений функции f

Точка (-5, 5); *a* = 5

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	2.068456	5.614648	7.4932562259	10
2	2.141945	5.084481	6.7667557069	15
3	2.142207	5.084484	6.7686361383	4
4	1.948331	5.057717	6.0886030352	11
5	2.020610	4.536156	5.4136968651	16
6	1.226177	0.953743	0.5580242732	24
7	1.000914	1.003697	0.0000076695	12
8	0.999921	1.001469	0.0000026798	17
9	0.999913	1.001471	0.0000027467	4
10	1.000319	1.001292	0.0000009358	10
11	0.999971	1.000505	0.0000003211	18
12	1.000001	1.000002	0.0000000000	17

всего вычислено 158 значений функции f

Точка (-5, 5); *a* = 10

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	1.798298	5.522946	11.6126398030	10
2	1.921026	4.398673	8.9846196813	16
3	1.921279	4.398651	8.9878824614	4
4	1.572867	4.360706	6.8417624892	10
5	1.681191	3.371862	4.9377400232	15
6	1.078290	0.793422	0.1976660767	23
7	0.972329	0.818199	0.0238430680	11
8	1.009290	0.978694	0.0024607763	18
9	1.000533	1.002206	0.0000041422	14
10	1.000258	1.002103	0.0000031846	11
11	1.000410	1.001695	0.0000024474	15
12	1.000001	0.999998	0.0000000000	21

всего вычислено 168 значений функции f

Точка (-1, -2); *a* = 1

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.378570	-1.483036	3.0311944299	13
2	-0.029798	-0.394169	1.2165549566	17
3	1.152356	1.562475	0.0782262385	19
4	1.208209	1.528730	0.0481065972	11
5	1.074678	1.307210	0.0287651775	20
6	0.969983	0.963161	0.0013981219	20
7	0.983146	0.959156	0.0003391156	13
8	0.992986	0.991437	0.0000785442	22
9	1.000028	1.000095	0.0000000022	17
10	1.000037	1.000088	0.0000000016	13
11	1.000020	1.000066	0.0000000011	18
12	1.000000	1.000000	0.0000000000	21

всего вычислено 204 значений функции f

Точка (-1, -2); *a* = 5

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.591512	-1.701592	5.0428739943	13
2	0.350413	-0.415245	2.3992978487	16
3	0.920667	0.253968	0.3839003051	16
4	0.825964	0.334692	0.2722158670	13
5	0.941086	0.469811	0.1902708174	15
6	0.989899	0.985784	0.0005447406	20
7	0.996620	0.985148	0.0001227889	12
8	0.997688	0.996692	0.0000284511	19
9	0.999992	0.999920	0.0000000045	16
10	0.999981	0.999928	0.0000000029	12
11	0.999995	0.999947	0.0000000019	15
12	1.000000	1.000000	0.0000000000	20

всего вычислено 187 значений функции f

Точка (-1, -2); *a* = 10

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.702156	-1.803597	6.1615759088	11
2	0.527477	-0.177618	2.4405829378	17
3	0.957955	0.335972	0.3560595528	15
4	0.893128	0.390306	0.2801677908	11
5	0.966342	0.477757	0.2193195710	13
6	0.996998	0.996017	0.0000941965	22
7	0.999398	0.995875	0.0000121573	12
8	0.999620	0.999505	0.0000015141	20
9	1.000001	1.000011	0.0000000001	13
10	1.000002	1.000010	0.0000000001	12

всего вычислено 146 значений функции f

Точка (4, -3); *a* = 1

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.111624	-2.523360	7.2195963933	10
2	0.470115	0.297587	0.2866419150	17
3	0.469986	0.297708	0.2868162630	4
4	0.689659	0.269686	0.1387242815	14
5	0.728380	0.573115	0.0755903834	19
6	0.934979	0.793317	0.0107674988	21
7	0.916755	0.810414	0.0078312846	13
8	0.951472	0.847387	0.0057087962	19
9	0.996856	0.996168	0.0000158710	20
10	0.998250	0.995743	0.0000036400	12
11	0.999277	0.999117	0.0000008380	19
12	0.999999	0.999995	0.0000000000	16

всего вычислено 184 значений функции f

Точка (4, -3); *a* = 5

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.448089	-2.595890	9.3444148539	10
2	0.745540	0.689041	0.3414950602	18
3	0.745421	0.689176	0.3418822122	4
4	0.927257	0.672681	0.0614732827	12
5	0.950171	0.929580	0.0131303390	17
6	0.998275	0.986060	0.0001249862	15
7	0.996654	0.987440	0.0000905482	12
8	0.998747	0.989896	0.0000656068	14
9	0.999991	0.999989	0.0000000005	20
10	0.999997	0.999988	0.0000000001	12

всего вычислено 134 значений функции f

Точка (4, -3); *a* = 10

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.607919	-2.645882	10.6301967500	10
2	0.908609	0.916724	0.0918326159	17
3	0.908496	0.916868	0.0921037120	4
4	0.986930	0.910231	0.0057787091	11
5	0.993051	0.992238	0.0005199815	19
6	0.999846	0.998295	0.0000021895	12
7	0.999703	0.998454	0.0000017881	12
8	0.999875	0.998608	0.0000014602	13
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	22

всего вычислено 120 значений функции f

Метод наискорейшего спуска

Точка (0, 0); *a* = 1

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.589718	0.000000	0.2892734281	14
6	0.807577	0.652226	0.0370264967	17
11	0.917033	0.795694	0.0089315793	13
16	0.949565	0.901630	0.0025436718	16
21	0.975234	0.938375	0.0007747938	13
26	0.984354	0.968932	0.0002447852	17
31	0.992070	0.980206	0.0000788625	12
36	0.994945	0.989913	0.0000255551	17
41	0.997418	0.993546	0.0000083472	12
46	0.998346	0.996693	0.0000027358	16
51	0.999154	0.997884	0.0000008960	12
56	0.999459	0.998918	0.0000002931	18
61	0.999723	0.999308	0.0000000958	11
66	0.999823	0.999646	0.0000000314	16
71	0.999909	0.999773	0.0000000103	11
76	0.999942	0.999884	0.0000000034	17
81	0.999970	0.999926	0.0000000011	11
86	0.999981	0.999962	0.0000000004	17
91	0.999990	0.999976	0.0000000001	11
95	0.999994	0.999984	0.0000000000	11

всего вычислено 1367 значений функции f

Точка (0, 0); *a* = 5

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.797468	0.000000	0.6095350845	14
3	0.920454	0.631024	0.0783854084	11
5	0.966227	0.846200	0.0133409370	11
7	0.985303	0.933524	0.0024711195	12
9	0.993519	0.970761	0.0004763177	11
11	0.997112	0.986991	0.0000941384	11
13	0.998717	0.994224	0.0000185432	11
15	0.999430	0.997433	0.0000036630	11
17	0.999745	0.998850	0.0000007343	11
19	0.999886	0.999485	0.0000001474	11
21	0.999949	0.999769	0.0000000298	11
23	0.999977	0.999896	0.0000000060	11
25	0.999990	0.999953	0.0000000012	11
27	0.999995	0.999979	0.0000000002	11
29	0.999998	0.999991	0.0000000000	11

всего вычислено 411 значений функции f

Точка (0, 0); *a* = 10

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.868444	0.000000	0.7418798829	10
2	0.874199	0.773727	0.1583480736	18
3	0.968125	0.773026	0.0371347861	11
4	0.968886	0.940170	0.0096831503	17
5	0.991461	0.940067	0.0025719471	11
6	0.991732	0.984049	0.0006838284	17
7	0.997712	0.984012	0.0001826922	10
8	0.997813	0.995823	0.0000478455	16
9	0.999400	0.995809	0.0000125455	11
10	0.999428	0.998911	0.0000032721	17
11	0.999844	0.998907	0.0000008539	11
12	0.999848	0.999704	0.0000002318	18
13	0.999958	0.999703	0.0000000629	10
14	0.999958	0.999917	0.0000000175	17
15	0.999988	0.999917	0.0000000049	10
16	0.999988	0.999978	0.0000000013	16
17	0.999997	0.999977	0.0000000004	10
18	0.999997	0.999994	0.0000000001	17
19	0.999999	0.999994	0.0000000000	10

всего вычислено 257 значений функции f

Точка (3, 2); *a* = 1

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	1.450016	2.246588	0.2232624849	11
2	1.281160	1.493300	0.1009755534	22
3	1.198387	1.511854	0.0450912620	13
4	1.134773	1.226777	0.0218765043	21
5	1.094026	1.235870	0.0103600776	12
6	1.064959	1.106253	0.0049972915	18
7	1.044735	1.110788	0.0023743459	13
8	1.030873	1.049582	0.0011252022	21
9	1.021043	1.051808	0.0005289175	14
10	1.014631	1.023388	0.0002511367	21
11	1.009955	1.024443	0.0001187612	13
12	1.006932	1.011044	0.0000562685	20
13	1.004708	1.011546	0.0000266076	13
14	1.003289	1.005238	0.0000126369	20
15	1.002234	1.005476	0.0000059962	13
16	1.001563	1.002489	0.0000028512	19
17	1.001062	1.002602	0.0000013551	13
18	1.000744	1.001186	0.0000006456	20
19	1.000506	1.001239	0.0000003075	13
20	1.000354	1.000563	0.0000001461	20
21	1.000240	1.000589	0.0000000694	13
22	1.000169	1.000270	0.0000000332	21
23	1.000115	1.000282	0.0000000159	13
24	1.000081	1.000129	0.0000000076	20
25	1.000055	1.000135	0.0000000036	13
26	1.000039	1.000061	0.0000000017	21
27	1.000026	1.000064	0.0000000008	13
28	1.000018	1.000029	0.0000000004	21
29	1.000012	1.000031	0.0000000002	13
30	1.000009	1.000014	0.0000000001	21

всего вычислено 499 значений функции f

Точка (3, 2); *a* = 5

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	1.297394	2.229197	0.7402945763	10
2	1.165676	1.206364	0.1604785770	19
3	1.051497	1.221067	0.0265817872	13
4	1.027289	1.031671	0.0042829542	18
5	1.007866	1.034153	0.0006464366	11
6	1.004163	1.004822	0.0000990252	20
7	1.001195	1.005197	0.0000150102	11
8	1.000615	1.000696	0.0000021761	18
9	1.000173	1.000753	0.0000003149	12
10	1.000088	1.000098	0.0000000445	18
11	1.000024	1.000106	0.0000000063	12
12	1.000012	1.000013	0.0000000009	17
13	1.000003	1.000015	0.0000000001	12

всего вычислено 191 значений функции f

Точка (3, 2); *a* = 10

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	1.195410	2.203744	0.9820711388	10
2	1.038340	1.008805	0.0195084809	20
3	1.002049	1.013576	0.0001317447	10
4	0.999903	1.000031	0.0000001439	20
5	1.000002	1.000015	0.0000000002	12
6	1.000001	1.000000	0.0000000000	19

всего вычислено 91 значений функции f

Точка (-5, 5); *a* = 1

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	-2.128221	5.278814	10.3475002610	10
5	-1.907167	4.416400	9.0586394115	11
9	-1.621852	3.460462	7.5631048876	11
13	-1.173743	2.338660	5.6486547257	12
17	1.137447	1.351932	0.0222727093	13
21	1.077468	1.195445	0.0071920946	13
25	1.042193	1.105571	0.0021567912	12
29	1.022562	1.056208	0.0006208671	14
33	1.011965	1.029736	0.0001752262	13
37	1.006295	1.015624	0.0000485933	13
41	1.003304	1.008196	0.0000134046	13
45	1.001730	1.004289	0.0000036745	13
49	1.000905	1.002245	0.0000010072	13
53	1.000472	1.001170	0.0000002738	13
57	1.000245	1.000608	0.0000000740	13
61	1.000127	1.000316	0.0000000199	13
65	1.000066	1.000164	0.0000000054	13
69	1.000034	1.000085	0.0000000014	13
73	1.000018	1.000044	0.0000000004	13
77	1.000009	1.000023	0.0000000001	14
80	1.000006	1.000012	0.0000000000	17

всего вычислено 1238 значений функции f

Точка (-5, 5); *a* = 5

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	2.068456	5.614648	7.4932562259	10
6	1.895620	4.000602	4.1765068771	14
11	1.467556	2.989508	1.7915844130	11
16	1.311963	1.880013	0.5118101379	16
21	1.094139	1.426927	0.0971129464	11
26	1.050860	1.131705	0.0136843880	15
31	1.011814	1.055130	0.0016814726	12
36	1.006067	1.015495	0.0001950857	16
41	1.001354	1.006346	0.0000223896	11
46	1.000695	1.001771	0.0000025579	17
51	1.000154	1.000722	0.0000002903	11
56	1.000079	1.000201	0.0000000329	15
61	1.000017	1.000082	0.0000000037	11
66	1.000009	1.000023	0.0000000004	16
70	1.000004	1.000010	0.0000000001	15

всего вычислено 937 значений функции f

Точка (-5, 5); *a* = 10

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	1.798298	5.522946	11.6126398030	10
5	1.379706	3.335825	3.4930681367	12
9	1.134917	1.911997	0.5713530572	12
13	1.040377	1.286605	0.0580089306	10
17	1.011160	1.080575	0.0046245781	12
21	1.002996	1.021737	0.0003373941	12
25	1.000801	1.005816	0.0000241696	12
29	1.000212	1.001541	0.0000016965	12
33	1.000056	1.000407	0.0000001185	12
37	1.000015	1.000107	0.0000000083	12
41	1.000004	1.000028	0.0000000006	12
44	1.000003	1.000008	0.0000000001	18

всего вычислено 616 значений функции f

Точка (-1, -2); *a* = 1

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.378570	-1.483036	3.0311944299	13
10	0.778285	0.553235	0.0519129985	14
19	0.914344	0.777104	0.0108086135	14
28	0.946581	0.884297	0.0029909064	15
37	0.974394	0.933171	0.0009204524	16
46	0.983118	0.962876	0.0002982958	15
55	0.991538	0.977885	0.0000993012	16
64	0.994336	0.987488	0.0000335595	15
73	0.997123	0.992476	0.0000114376	14
82	0.998065	0.995718	0.0000039175	14
91	0.999012	0.997417	0.0000013456	16
100	0.999335	0.998527	0.0000004630	15
109	0.999660	0.999111	0.0000001594	15
118	0.999771	0.999493	0.0000000549	14
127	0.999883	0.999694	0.0000000189	15
136	0.999921	0.999825	0.0000000065	15
145	0.999960	0.999894	0.0000000023	15
154	0.999973	0.999940	0.0000000008	15
163	0.999986	0.999964	0.0000000003	16
172	0.999991	0.999979	0.0000000001	15
180	0.999994	0.999987	0.0000000000	15

всего вычислено 2685 значений функции f

Точка (-1, -2); *a* = 5

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.591512	-1.701592	5.0428739943	13
5	0.848238	0.216689	0.3679851196	13
9	0.934981	0.680938	0.0584835009	12
13	0.970545	0.857991	0.0113883560	12
17	0.986368	0.934761	0.0023853807	11
21	0.993639	0.969662	0.0005140771	13
25	0.997018	0.985802	0.0001124133	12
29	0.998602	0.993347	0.0000246649	12
33	0.999344	0.996881	0.0000054188	12
37	0.999693	0.998540	0.0000011868	12
41	0.999856	0.999316	0.0000002604	12
45	0.999933	0.999680	0.0000000572	12
49	0.999968	0.999850	0.0000000126	12
53	0.999985	0.999930	0.0000000028	12
57	0.999993	0.999967	0.0000000006	12
61	0.999997	0.999985	0.0000000001	12
64	0.999997	0.999993	0.0000000000	16

всего вычислено 888 значений функции f

Точка (-1, -2); *a* = 10

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.702156	-1.803597	6.1615759088	11
3	0.858543	-0.142061	0.9730174853	11
5	0.929107	0.458070	0.2144208461	11
7	0.963540	0.727666	0.0535911255	11
9	0.980853	0.858568	0.0143792812	11
11	0.989848	0.925410	0.0039887740	11
13	0.994571	0.960252	0.0011310890	11
15	0.997101	0.978831	0.0003205662	10
17	0.998464	0.988795	0.0000897777	10
19	0.999187	0.994068	0.0000251582	10
21	0.999567	0.996843	0.0000071264	10
23	0.999770	0.998324	0.0000020089	10
25	0.999877	0.999106	0.0000005710	10
27	0.999935	0.999525	0.0000001612	10
29	0.999965	0.999747	0.0000000459	10
31	0.999982	0.999865	0.0000000130	10
33	0.999990	0.999928	0.0000000037	10
35	0.999995	0.999962	0.0000000010	10
37	0.999997	0.999980	0.0000000003	10
39	0.999999	0.999989	0.0000000001	10
40	0.999998	0.999994	0.0000000000	18

всего вычислено 534 значений функции f

Точка (4, -3); *a* = 1

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.111624	-2.523360	7.2195963933	10
5	0.816147	0.561613	0.0447185941	14
9	0.925301	0.818402	0.0070072726	13
13	0.967477	0.920244	0.0013063779	13
17	0.985539	0.964395	0.0002566229	13
21	0.993506	0.983982	0.0000516099	14
25	0.997067	0.992760	0.0000105146	13
29	0.998672	0.996721	0.0000021534	14
33	0.999395	0.998506	0.0000004469	13
37	0.999723	0.999316	0.0000000935	13
41	0.999873	0.999686	0.0000000197	13
45	0.999942	0.999856	0.0000000042	13
49	0.999973	0.999934	0.0000000009	13
53	0.999988	0.999969	0.0000000002	13
56	0.999992	0.999986	0.0000000001	17

всего вычислено 878 значений функции f

Точка (4, -3); a = 5

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.448089	-2.595890	9.3444148539	10
2	0.745540	0.689041	0.3414950602	18
3	0.927249	0.672585	0.0615096948	12
4	0.949971	0.929092	0.0132245626	18
5	0.983285	0.926140	0.0030541909	12
6	0.988166	0.982637	0.0007382269	17
7	0.995902	0.981968	0.0001810421	12
8	0.997109	0.995758	0.0000441403	18
9	0.998998	0.995593	0.0000107994	12
10	0.999283	0.998935	0.0000027064	17
11	0.999749	0.998895	0.0000006788	11
12	0.999820	0.999731	0.0000001713	19
13	0.999937	0.999721	0.0000000432	11
14	0.999954	0.999931	0.0000000111	19
15	0.999984	0.999929	0.0000000028	11
16	0.999988	0.999982	0.0000000007	18
17	0.999996	0.999982	0.0000000002	11
18	0.999997	0.999996	0.0000000000	19

всего вычислено 265 значений функции f

Точка (4, -3); a = 10

ном.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч f на 1 шаг
1	0.607919	-2.645882	10.6301967500	10
2	0.908609	0.916724	0.0918326159	17
3	0.986917	0.910112	0.0057939330	11
4	0.992967	0.992066	0.0005316214	17
5	0.998772	0.991637	0.0000499885	11
6	0.999407	0.999395	0.0000038563	18
7	0.999905	0.999354	0.0000002983	12
8	0.999947	0.999939	0.0000000295	19
9	0.999991	0.999936	0.0000000029	11
10	0.999995	0.999993	0.0000000003	20
11	0.999999	0.999993	0.0000000000	11

всего вычислено 157 значений функции f

5. Оценка эффективности методов

Скорость сходимости

Дадим определение скорости сходимости для данной задачи.

Пусть существует такая константа C, что при которой выполняется неравенство:

$$\varphi(x_k) - \varphi(x^*) \le Cq^k, \qquad (1)$$

где $0 < q < 1$, k – номер шага. Тогда метод обладает линейной (геометрической) скоростью сходимости. Если для метода выполняется неравенство

$$\varphi(x_k) - \varphi(x^*) \le Cq^{2k}, \qquad (2)$$

то говорят, что метод обладает квадратичной скоростью сходимости.

Для оценки скорости сходимости возьмем точку (-5, 5) при a = 1. Результаты сведены в таблицы.

Таблица 1.1 – Скорость сходимости овражного метода

Номер шага, k	$\varphi(x_k) - \varphi(x^*)$
3	9,7291778555
4	9,3215148316
5	8,9043711388
6	3,2822267724
7	0,2167672362
8	0,1553071605

Окончание Таблицы 1.1

9	0,1049469173
10	0,0822038161
11	0,0648547819
12	0,0003714452
13	0,0000257369
14	0,0000015170
15	0,0000000008
16	0,0000000006
17	0,0000000006

Если положить q = 0,8, а C = 16, то неравенство (1) выполняется. Следовательно, овражный метод обладает линейной (геометрической) скоростью сходимости.

Таблица 1.2 – Скорость сходимости метода наискорейшего спуска

Номер шага, k	$\varphi(x_k) - \varphi(x^*)$
65	0,0000000054
66	0,0000000039
67	0,0000000028
68	0,0000000020
69	0,0000000014
70	0,0000000010
71	0,0000000007
72	0,0000000005
73	0,0000000004
74	0,0000000003
75	0,0000000002
76	0,0000000001
77	0,0000000001
78	0,0000000001
79	0,0000000001

Если положить q = 0,8, а $C = 10^{-3}$, то неравенство (1) выполняется. Следовательно, метод наискорейшего спуска обладает линейной (геометрической) скоростью сходимости.

Порядок сходимости

Порядок сходимости определяется как

$$d = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln \Delta_{k+1}}{\ln \Delta_k}, \qquad (3)$$

где $\Delta_k = ||x_k - x^*||$

Если метод обладает линейной (геометрической) скоростью сходимости, то параметр d = 1, для сверхлинейных d > 1 (например, для квадратичной – d = 2, для кубической – d = 3).

Для оценки порядка сходимости возьмем точку (-5, 5) при a = 1. Результаты сведены в таблицы.

Таблица 2.1 – Порядок сходимости овражного метода

Номер шага, k	$\Delta_k = ||x_k - x^*||$	$d \approx ln(\Delta_{k+1})/ln(\Delta_k)$
3	4,9059833962	0,947262430
4	4,5112704065	0,982328001

Окончание Таблицы 2.1

5	4,3927459874	0,995357343
6	2,0815365548	0,977579641
7	0,9447129757	0,916043563
8	0,8003376650	0,907997320
9	0,6835825696	0,973176082
10	0,6161122269	0,928468583
11	0,5515738984	0,984495516
12	0,0147704122	0,944841501
13	0,0122265924	0,994994457
14	0,0008897393	0,975652918
15	0,0000635689	1,004393976
16	0,0000609262	1,010492050
17	0,0000550273	0,998455486

Таблица 2.2 – Порядок сходимости метода наискорейшего спуска

Номер шага, k	$\Delta_k = \|\|x_k - x^*\|\|$	$d \approx ln(\Delta_{k+1})/ln(\Delta_k)$
64	0,0001834121	1,004279079
65	0,0001767824	1,033446702
66	0,0001324122	1,004330919
67	0,0001273892	1,032916229
68	0,0000948262	1,003798150
69	0,0000915478	1,031978145
70	0,0000680000	1,003230733
71	0,0000659242	1,031317948
72	0,0000487647	1,002563074
73	0,0000475395	1,029748051
74	0,0000353553	1,002276689
75	0,0000345398	1,031230480
76	0,0000250599	1,001372501
77	0,0000246982	1,027966268
78	0,0000183576	1,004574363

При анализе данных таблиц, было подтверждено, что оба метода обладают линейной (геометрической) скоростью сходимости и порядок сходимости примерно равен 1.

Зависимость от начальной точки и параметра a.

Проведем сравнительный анализ в зависимости методов от начальной точки при параметре a = 5. Результаты сведены в таблицу.

Таблица 3.1 – Зависимость методов от начальной точки

Начальная точка, (x_1, x_2)	Количество шагов	
	Овражный метод	Метод наискорейшего спуска
(0, 0)	9	29
(3, 2)	9	13
(-5, 5)	12	70
(-1, -2)	12	64
(4, -3)	10	18

Анализируя данные Таблицы 3.1, можно заметить, что выбор начальной точки для овражного метода незначительно влияет на количество шагов, а у метода наискорейшего спуска наблюдается интересная особенность: если взять пару чисел из II и III четвертей, то число шагов заметно увеличивается, в сравнении пар чисел из I, IV или центра системы координат.

Проведем сравнительный анализ зависимости методов от параметра a в точке (3, 2). Результаты сведены в таблицу.

Таблица 3.2 – Зависимость методов от параметра a

Параметр $a > 0$	Количество шагов	
	Овражный метод	Метод наискорейшего спуска
1	12	30
5	9	13
10	6	6

Анализируя данные Таблицы 3.2, можно заметить, что с ростом параметра a и в овражном методе, и в методе наискорейшего спуска количество шагов уменьшается (в 1,5 и 2 раза соответственно).

6. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была решена задача безусловной минимизации функции с помощью стандартной программы овражным методом и методом наискорейшего спуска. Был проведен сравнительный анализ методов в зависимости от начальной точки и положительного параметра a, а также были исследованы скорость и порядок сходимости методов. В результате анализа было выявлено, что оба метода обладают линейной (геометрической) скоростью сходимости с порядком сходимости равным 1, что и подтверждается теорией. В ходе сравнительного анализа методов в зависимости от начальной точки было установлено, что для овражного метода выбор начальной точки незначительно влияет на количество шагов, а метод наискорейшего спуска сходится быстрее при $x_1 \geq 0$; при анализе зависимости методов от положительного параметра a, было установлено, что с ростом параметра a в обоих методах уменьшается количество шагов.