Студент(ка):	Беззубов Даниил
Группа:	1303
Вариант:	2
Дата:	28 апреля 2023 г.

Теория вероятностей и математическая статистика
Индивидуальное домашнее задание №3

Случайная величина $(\xi,\, \eta)$ имеет равномерное распределение в области D:

$$D = \begin{pmatrix} x - y \geq 1, \\ x \leq 0, y \geq -2 \end{pmatrix}$$

$\zeta = 3\xi^2 - 1$, $\nu = \lfloor 4\eta \rfloor$, $\mu = 2\xi - 2\eta$

Задание 1. *Найти $p_{\xi,\eta}(x, y)$, функции и плотности распределения компонент. Построить графики функций распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$. Будут ли компоненты независимыми?*

Решение. Распишем функцию $p_{\xi,\eta}(x, y)$:

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} C, (x, y) \in D \\ 0, else \end{cases}$$

Для нахождения константы необходимо решить кратный интеграл по области D:

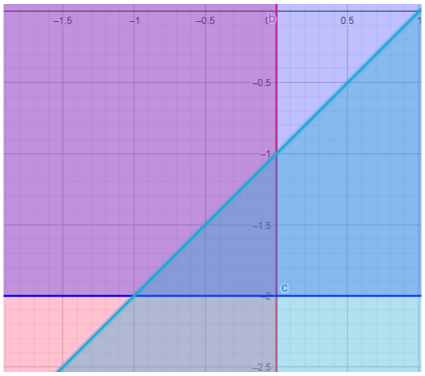

Рис. 1 – График области D

$$\iint_D C dxdy = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{0} dx \int_{-2}^{x-1} C dy = 1 \Rightarrow \frac{C}{2} = 1 \Rightarrow C = 2$$

Найдем плотность распределения для ξ и η:

$$p_\xi(x) = \int_R p_{\xi,\eta}(x, y) dy = \int_{-2}^{x-1} 2dy = 2x + 2, \text{ при } x \in [-1{,}0]$$

$$p_\eta(y) = \int_R p_{\xi,\eta}(x, y) dx = \int_{y+1}^{0} 2dx = -2(y + 1), \text{ при } y \in [-2, -1]$$

Тогда:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 2(x + 1), x \in [-1, 0] \\ 0, else \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} -2(y + 1), y \in [-2, -1] \\ 0, else \end{cases}$$

Проверим независимость компонентов:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y) \Rightarrow -2(y+1) \cdot 2(x+1)$$

Рассмотрим $x = -1$ и $y = -1$, тогда, $2 \neq 0$, Значит, компоненты зависимы.
Найдем функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt = \int_{-1}^{x} 2(t+1)dt = x^2 + 2x + 1, \text{ при } x \in (-1, 0]$$

$$F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{y} p_\eta(t)dt = \int_{-2}^{y} \frac{-(y+1)}{2}dt = -(y^2 + 2y), \text{ при } y \in (-2, -1]$$

Тогда функции распределения будут иметь следующий вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, -1] \\ x^2 + 2x + 1, x \in (-1, 0] \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \in (-\infty, -2] \\ -(y^2 + 2y), y \in (-2, -1] \\ 1, y > -1 \end{cases}$$

Графики данных функций:

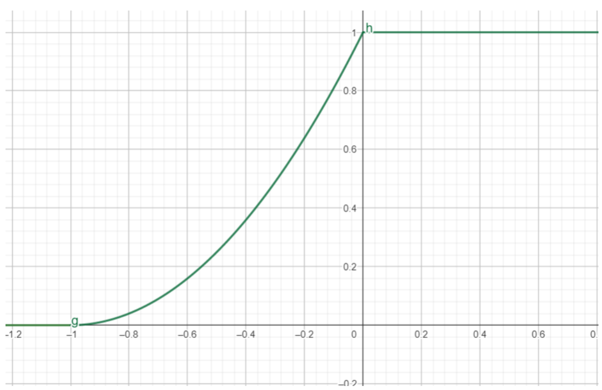

Рис. 2 – График функции $F_\xi(x)$

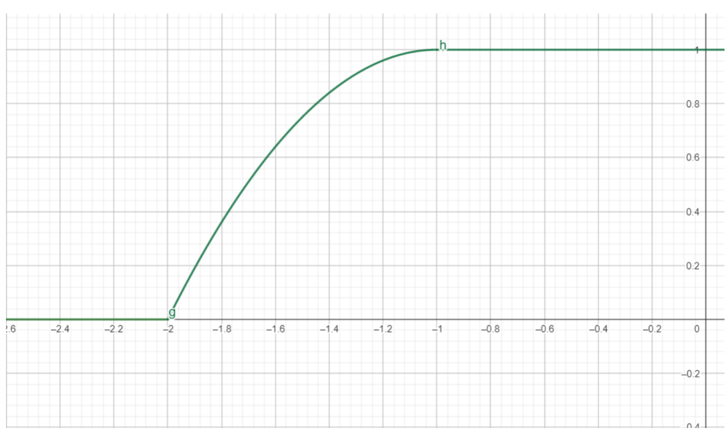

Рис. 3 – График функции $F_\eta(y)$

$\square$

Задание 2. *Найти распределение с.в. ζ и ν; $\mathbb{E}\zeta, \mathbb{E}\nu, \mathbb{D}\zeta, \mathbb{D}\nu$. Построить графики функций распределений $F_\zeta(z)$ и $F_\nu(n)$. Будут ли компоненты независимыми?*

Решение. Рассмотрим функцию ζ и найдем функцию, обратную к ней:

$$g(\xi) = \zeta = 3\xi^2 - 1 \Rightarrow g^{-1}(\zeta) = \xi = -\sqrt{\frac{\zeta+1}{3}}, \text{ где } \operatorname{supp}\zeta = [-1{,}2], \operatorname{supp}\xi = [-1{,}0]$$

Найдем плотность распределения ζ:

$$p_\zeta(z) = \left|\frac{d}{dz}g^{-1}(z)\right| \cdot p_\xi(g^{-1}(z)) = \left|\frac{d}{dz}\sqrt{\frac{z+1}{3}}\right| \cdot \left(-2\sqrt{\frac{z+1}{3}}+2\right) = -\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\,z+\frac{1}{3}}+1}{3\sqrt{\frac{1}{3}\,z+\frac{1}{3}}}, \; z \in [-1, 2]$$

Тогда:

$$p_\zeta = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\,z+\frac{1}{3}}+1}{3\sqrt{\frac{1}{3}\,z+\frac{1}{3}}}, z \in [-1,2] \\ 0, else \end{cases}$$

Рассмотрим функцию ν:

$$\nu = \lfloor 4\eta \rfloor = \max n \in \mathbb{Z} | n \leq 4\eta$$

, тогда $\operatorname{supp}\eta = [-2, -1], \operatorname{supp} 4\eta = [-8, -4]$, отсюда получаем $\operatorname{supp}\nu = -8, -7, -6, -5, -4$ Найдем вероятность, что ν примет значение n и выведем общую формулу её нахождения:

$$\mathbb{P}(\nu = n) = \mathbb{P}(4\eta \in [n, n+1)) = \mathbb{P}\left(\eta \in \left[\frac{n}{4}, \frac{n+1}{4}\right)\right) = F_\eta\left(\frac{n+1}{4}\right) - F_\eta\left(\frac{n}{4}\right) =$$

$$= -\left(\left(\frac{n+1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{n+1}{4}\right)\right) + \left(\left(\frac{n}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{4}\right)\right) = -\frac{1}{8}\,n - \frac{9}{16} = -\frac{2n+9}{16}$$

Составим таблицу для случайной величины ν:

ν	-8	-7	-6	-5	-4	$\sum$
$\mathbb{P}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	1

Найдем математическое ожидание величин ζ и ν: Для ζ:

$$\mathbb{E}\zeta = -\int_R z \cdot p_\zeta(z)dz = -\int_{-1}^{2} z \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\,z+\frac{1}{3}}+1}{3\sqrt{\frac{1}{3}\,z+\frac{1}{3}}}dz = -\frac{1}{2} = -0.5$$

Для ν:

$$\mathbb{E}\nu = \sum_{i:p_i>0} a_i \cdot_i = \left(-8 \cdot \frac{7}{16}\right) + \left(-7 \cdot \frac{5}{16}\right) + \left(-6 \cdot \frac{3}{16}\right) + \left(-5 \cdot \frac{1}{16}\right) = -\frac{57}{8} = -7.125$$

Найдем дисперсию ζ:

$$\mathbb{D}\zeta = \int_R (z - \mathbb{E}\zeta)^2 \cdot p_\zeta(z)dz = \int_{-1}^{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\,z+\frac{1}{3}}+1}{3\sqrt{\frac{1}{3}\,z+\frac{1}{3}}}dz = \frac{77}{20} = 3.85$$

Найдем дисперсию ν:

$$\mathbb{E}\nu^2 = \sum_{i:p_i>0} a_i^2 \cdot p_i = \left(-8^2 \cdot \frac{7}{16}\right) + \left(-7^2 \cdot \frac{5}{16}\right) + \left(-6^2 \cdot \frac{3}{16}\right) + \left(-5^2 \cdot \frac{1}{16}\right) = \frac{413}{8} = 51.625$$

$$\mathbb{D}\nu = \mathbb{E}\nu^2 - (\mathbb{E}\nu)^2 = 51.625 - 50.766 \approx 0.859$$

Найдем функцию распределения $F_\zeta(z)$:

$$F_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{z} p_\zeta(t)dt = \int_{-1}^{z} -\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\,t+\frac{1}{3}}+1}{3\sqrt{\frac{1}{3}\,t+\frac{1}{3}}}dt = \frac{2\sqrt{z+1}}{\sqrt{3}} - \frac{z}{3} - \frac{1}{3}, z \in (-1, 2]$$

Тогда функции распределения случайных величин и их графики будут выглядеть следующим образом:

$$F_\zeta(z) = \begin{cases} 0, z \in (-\infty, -1] \\ \dfrac{2\sqrt{z+1}}{\sqrt{3}} - \dfrac{z}{3} - \dfrac{1}{3}, z \in (-1, 2] \\ 1, z > 2 \end{cases}$$

$$F_\nu(n) = \begin{cases} 0, n \in (-\infty, -8] \\ \frac{7}{16}, n \in (-8, -7] \\ \frac{12}{16}, n \in (-7, -6] \\ \frac{15}{16}, n \in (-6, -5] \\ 1, n > -5 \end{cases}$$

Графики функций распределения:

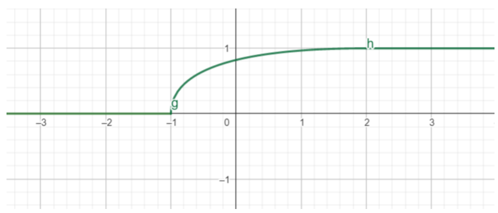

Рис. 4 – График функции $F_\zeta(z)$

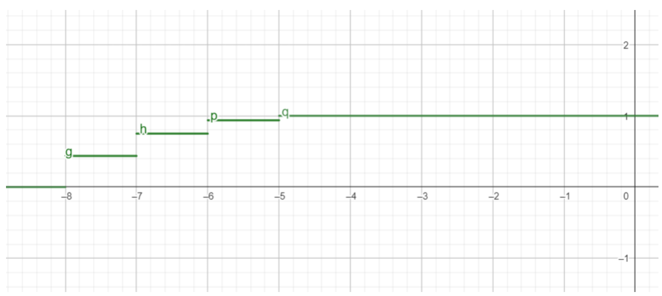

Рис. 5 – График функции $F_\nu(n)$

$\square$

Задание 3. *Вычислить вектор мат.ожиданий, ковариационные и корреляционные характеристики вектора* (ξ, η)*. Найти условное распределение* ξ *при условии* η*;* $\mathbb{E}(\xi|\eta), \mathbb{D}(\xi|\eta)$

Решение. Найдем вектор мат.ожиданий, используя $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$ из первого задания

$$\mathbb{E}\xi = \int_R dF_\xi(x) = \int_R x \cdot p_\xi(x)dx = \int_{-1}^{0} x \cdot (2x+2)dx = -\frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}\eta = \int_R dF_\eta(y) = \int_R y \cdot p_\eta(y)dy = \int_{-2}^{-1} y \cdot -2(y+1)dy = -\frac{5}{3}$$

Тогда вектор мат.ожиданий будет следующим:

$$\mathbb{E}(\xi,\eta) = (\mathbb{E}\xi, \mathbb{E}\eta)^T = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)^T$$

Найдем ковариационную характеристику вектора:

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \iint_R x \cdot y \cdot p_{(\xi,\eta)}(x,y)dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-2}^{x-1} 2ydy = -\frac{5}{3}$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)\cdot(\eta - \mathbb{E}\eta)) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\eta = -\frac{5}{3} - \left(\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = -\frac{20}{9}$$

Найдем корреляционную характеристику вектора:

$$\mathbb{D}\xi = \int_R (x - \mathbb{E}\xi)^2 \cdot p_\xi(x)dx = \int_{-1}^{0} (x + \frac{1}{3})^2 \cdot (2x+2)dx = \frac{1}{18}$$

$$\mathbb{D}\eta = \int_R (y - \mathbb{E}\eta)^2 \cdot p_\eta(y)dy = \int_{-2}^{-1} (y + \frac{5}{3})^2 \cdot -2(y+1)dy = \frac{1}{18}$$

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi\cdot\mathbb{D}\eta}} = \frac{-\frac{20}{9}}{\sqrt{\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{18}}} = -40$$

Напишем ковариационную матрицу Σ:

$$\operatorname{cov}(\xi,\xi) = \mathbb{D}\xi = \operatorname{cov}(\eta,\eta) = \mathbb{D}\eta = \frac{1}{18}$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \operatorname{cov}(\eta,\xi) = -\frac{20}{9}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{20}{9} \\ -\frac{20}{9} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

Напишем корреляционную матрицу R:

$$\rho(\xi,\xi) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\xi)}{\mathbb{D}\xi} = 1$$

$$\rho(\eta,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\eta,\eta)}{\mathbb{D}\eta} = 1$$

$$\rho(\xi,\eta) = \rho(\eta,\xi) = -40$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -40 \\ -40 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем мат.ожидание $\mathbb{E}(\xi|\eta)$: Для начала вычислим $p_{\xi|\eta}(x) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y_0)}{p_\eta(y_0)}$

$$p_{\xi|\eta}(x) = \begin{cases} \frac{2}{-2(y_0+1)}, (x,y_0) \in D \\ 0, else \end{cases}$$

$$p_{\xi|\eta}(x) = \begin{cases} \frac{2}{-2(\eta+1)}, x \in [1+\eta,0] \\ 0, else \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(\xi|\eta = y_0) = \int_R x \cdot [p_{\xi|\eta=y_0}dx \Rightarrow \mathbb{E}(\xi|\eta) = \int_{1+\eta}^{0} x \cdot \frac{2}{-2(\eta+1)}dx = \frac{\eta+1}{2}$$

Найдем дисперсию $\mathbb{D}(\xi|\eta)$:

$$\mathbb{E}(\xi^2|\eta) = \int_{1+\eta}^{0} x^2 \cdot \frac{2}{-2(\eta+1)}dx = \frac{\eta^2+2\eta+1}{3}$$

$$\mathbb{D}(\xi|\eta) = \mathbb{E}(\xi^2|\eta) - (\mathbb{E}(\xi|\eta))^2 = \frac{1}{12}\eta^2 + \frac{1}{6}\eta + \frac{1}{12} = \frac{\eta^2+2\eta+1}{12}$$

□

Задание 4. *Найти распределение μ, $\mathbb{E}\mu, \mathbb{D}\mu$. Построить график распределения $F_\mu(m)$*

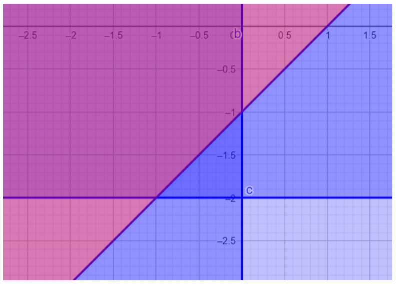

Рис. 6 – График функции $2\xi - 2\eta \leq m$ (Красная область При $m \leq 2$)

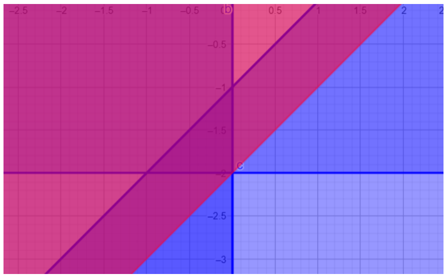

Рис. 7 – График функции $2\xi - 2\eta \leq m$ (Красная область При $m \leq 4$)

Решение. Найдем функцию распределения $F_\mu(m)$: $\mu = 2\xi - 2\eta$, где $\operatorname{supp}\xi = [-1, 0], \operatorname{supp}\eta = [-2, -1]$, тогда $\operatorname{supp}\mu = [0{,}4]$

$$F_\mu(m) = \mathbb{P}(\mu < m) = \mathbb{P}(2\xi - 2\eta < m)$$

Рассмотрим график функции $2\xi - 2\eta \leq m$ для разных значений:

Таким образом можем сделать вывод, что при $m \leq 2$ $F_\mu(m) = 0$, а при $m > 4$ $F_\mu(m) = 1$ Тогда

$$F_\mu(m) = \int_{\frac{m-2}{2}}^{0} dx \int_{-2}^{\frac{2x-m}{2}} 2dy = \frac{m^2 - 8m + 12}{4},\ m \in (2, 4]$$

Отсюда получаем, что

$$F_\mu(m) = \begin{cases} 0, m \in (-\infty, 2] \\ -\frac{m^2-8m+12}{4}, m \in (2, 4] \\ 1, m > 4 \end{cases}$$

Продифференцируем получаенную функцию, чтобы найти плотность распределения:

$$p_\mu(m) = \begin{cases} \dfrac{m}{2} - 2, m \in [2{,}4] \\ 0, else \end{cases}$$

Найдем $\mathbb{E}\mu, \mathbb{D}\mu$:

$$\mathbb{E}\mu = \int_2^4 m \cdot p_\mu(m) dm = -\frac{8}{3}$$

$$\mathbb{E}\mu^2 = \int_2^4 m^2 \cdot p_\mu(m) dm = -\frac{22}{3}$$

$$\mathbb{D}\mu = \int_2^4 (m - \mathbb{E}\mu)^2 \cdot p_\mu(m) = \int_2^4 (m + \frac{8}{3})^2 \cdot \frac{m}{2} - 2dm = -\frac{86}{3}$$

Построим график функции распределения: $\square$

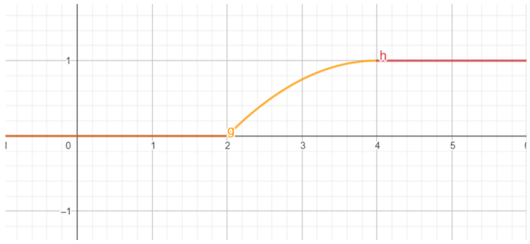

Рис. 8 – График функции распределения)