

Методические указания к выполнению лабораторной работы №3

Решение прямой и двойственной задач

Цели работы:

- Постановка задачи линейного программирования и её решение с помощью стандартной программы.
- Исследование прямой и двойственной задачи.

Краткие общие сведения

Если исходная задача линейного программирования представлена в виде:

найти минимум функции $f = (c, x)$ на множестве

$$X = \{x \in R^n : Ax \geq B, x \geq 0\}, \quad (3.1)$$

то двойственная задача линейного программирования может быть сформулирована следующим образом:

найти максимум функции (B, λ) на множестве $\lambda = \{\lambda \in R^m : A^T \lambda \leq c, \lambda \geq 0\}$, где

A^T - матрица, транспонированная к A . Двойственная к двойственной задаче есть исходная задача.

Известно, что если существует решение исходной задачи, то существует решение и двойственной задачи, причем значения экстремумов совпадают. При этом координаты экстремальной точки для двойственной задачи являются коэффициентами чувствительности результата в исходной задаче по коэффициентам вектора B .

Рассмотрим видоизмененную исходную задачу:

Найти $\min(c, x)$ на множестве $\{x : x \geq 0, Ax \geq B + \varepsilon e_i\}$, где $\varepsilon > 0$,

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} i$$

Если исходная задача имеет единственное решение, то при малых $\varepsilon > 0$ и видоизмененная задача имеет решение; причем если α_ε^i - значение минимума, то существует

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\alpha_\varepsilon^i - \alpha_0^i) / \varepsilon \stackrel{Df}{=} \beta_i$. Оказывается, что β есть i -я координата оптимальной точки для двойственной задачи.

Для проведения лабораторной работы составлена программа, обеспечивающая решение задачи линейного программирования при задании с терминала исходных значений параметров.

Порядок проведения лабораторной работы

1. По заданной содержательной постановке задачи поставить задачу формально (т.е. привести к виду (3.1)).
2. Решить поставленную задачу с помощью готовой программы.
3. Поставить двойственную задачу с помощью готовой программы.
4. Решить двойственную задачу с помощью той же программы.
5. Определить коэффициенты чувствительности исходной задачи по координатам правой части ограничений (вектора \mathbf{B}). Для этого :
 - а) увеличить i -ю координату вектора ограничений правой части на $\varepsilon = 10^{-3}$;
 - б) решить задачу с новым вектором $\mathbf{B} = \mathbf{B} + \varepsilon \mathbf{e}_i$, ответ - $\varphi_i(\varepsilon)$;
 - в) вычислить $\tilde{x}_i = (\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0))/\varepsilon$
 - г) сравнить полученное число с i -й координатой оптимальной точки двойственной задачи.
6. Повторить процедуру, описанную в п.5, но варьировать на этот раз коэффициенты целевой функции – компоненты вектора \mathbf{C} и сопоставить результаты с координатами вектора-решения исходной задачи.

Требования к отчету

1. Содержательная постановка задачи.
2. Формальная постановка задачи.
3. Результаты решения исходной задачи линейного программирования.
4. Постановка двойственной задачи линейного программирования.
5. Результаты решения двойственной задачи.
6. Протокол работы за машиной.
7. Объяснение полученных результатов.

Тексты исходных задач

Вариант 1

Пусть для выращивания некоторой культуры применяется m видов удобрений соответственно в количестве $B_i (i = 1, 2, \dots, m)$ единиц.

Вся посевная площадь разбита на n почвенно-климатических зон, каждая по $d_j (j = 1, 2, \dots, n)$ единиц. Пусть a_{ij} - количество i -го удобрения, вносимого на единицу площади j -ой зоны, а c_j – повышение средней урожайности, получаемой с единицы площади j -ой зоны. Составить такой план распределения удобрений между посевными зонами, который обеспечивал бы максимальный суммарный пророст урожайности.

Исходные данные для этой задачи сведены в табл. 3.1. Имеется 400 ц фосфорных, 300 ц азотных и 100 ц калийных удобрений. Требуется построить математическую модель этой задачи для симплекс-метода. Замечание: рекомендуется через x_j обозначить площадь, которую необходимо удобрить в j -ой зоне.

Таблица 3.1

зоны	посевная площадь, га	Затраты удобрений на 1 га, ц			прирост урожайности на 1 га, ц
		фосфорные	азотные	калийные	
1	100	2	1	1	12
2	150	1	2	5/ 4	14
3	200	1	1/ 2	0	10

Вариант 2

Рассмотрим задачу оптимального использования материалов при условии, что заданный план изготовления может быть выполнен или перевыполнен: при изготовлении обуви используют, в частности, жесткую кожу – черпак, ворот и др. Каждый из видов в свою очередь делится на несколько категорий по средней толщине. ГОСТом предусмотрено изготовление деталей из определенного вида кожи. Одна и та же деталь может быть изготовлена из разных видов кожи, причем из этих же кож изготавливают и другие детали. Исходные данные приведены в табл.3.2.

В наличии имеется 0,9 тыс. кв. м. черпака толщиной 4,01 – 4,5 мм по цене 14,4 р. за 1 кв. м.; 0,8 тыс. кв. м. черпака толщиной 4,51 - 5,0 мм по цене 16 р. за 1 кв. м.; 5,0 тыс. кв. м. ворота толщиной 3,5 – 4,0 мм по цене 12,8 р. за 1 кв. м.; 7,0 тыс. кв. м. ворота толщиной 4,51 – 5,0 мм по цене 10,5 р. за 1 кв. м.

Таблица 3.2

Толщина детали, мм	Количество деталей по плану, тыс. шт.	Количество деталей, которые можно изготовить из 1000 кв. м кожи, тыс. шт., при толщине			
		черпака, мм		ворота, мм	
		4,01 – 4,5	4,51 – 5,0	3,5 – 4,0	4,51 – 5,0
3,9	21	26,5	7,8	-	-
3,0	30	51,0	26	45,7	-
2,5	500	-	-	5,0	72,5

Вариант 3

На рынок доставляется картофель из трех колхозов по цене соответственно 12, 10 и 8 тыс. рублей за 1 тонну. На погрузку картофеля в колхозах соответственно затрачивается 1, 6 и 5 минут. Потребности рынка составляют не менее 12 т, на погрузку которого можно затратить не более 60 минут. Из каких колхозов и в каком количестве надо доставлять картофель, чтобы его стоимость была минимальной при условии того, что колхозы могут выделить для продажи соответственно 10, 8 и 6 тонн картофеля.

Вариант 4

Имеются две почвенно-климатические зоны, площадь которых соответственно равна 0,8 и 0,6 млн. га. Определить размеры площадей озимых и яровых культур, необходимые для достижения максимального выхода продукции в стоимостном выражении. Урожайность культур по зонам и стоимость 1 ц зерна приведены в табл.3.3. Необходимо произвести озимых не менее 20 млн. ц и яровых не менее 6 млн. ц.

Таблица 3.3

Наименование	Урожайность, ц/ га		Стоимость 1 ц, р.
	1 зона	2 зона	
озимые	20	25	8
яровые	25	20	7

Вариант 5

Для изготовления двух видов продукции P1, P2 используют три вида сырья: S1, S2, S3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в табл.3.4. Прибыль от единицы продукции первого вида составляет 50 р., второго вида – 40 р.

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Таблица 3.4

Виды сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		P1	P2
S1	20	2	5
S2	40	8	5
S3	30	5	6

Вариант 6

При откорме каждое животное ежедневно должно получить не менее 9 единиц питательного вещества S_1 , не менее 8 единиц вещества S_2 и не менее 12 единиц вещества S_3 . Для составления рациона используют два вида корма. Содержимое количества единиц питательных веществ в 1 кг. каждого корма и стоимость 1 кг. корма приведены в табл.3.5.

Стоимость 1 кг. корма первого вида составляет 4 р., второго вида – 6 р.

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем затраты на него должны быть минимальными.

Таблица 3.5

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма	
	Корм 1	Корм 2
S1	3	1
S2	1	2
S3	1	6