

Список теоретических вопросов к экзамену по математическому анализу (1 семестр).

Коптелов Я. Ю.

Определения.

1. Введение.

- Объединение множеств;
- Пересечение множеств;
- Разность множеств;
- Декартово произведение множеств;
- Инъекция;
- Сюръекция;
- Биекция;
- Образ множества при отображении;
- Прообраз множества при отображении;
- Композиция отображений;
- Идемпотентное отображение;
- Разбиение множеств*;
- Класс эквивалентности*.

2. Вещественные числа.

- Аксиома полноты;
- δ -окрестность;
- Проколота окрестность;
- Ограниченное множество;
- Минимальный (максимальный) элемент;
- Верхняя (нижняя) граница;
- Точная верхняя (нижняя граница);
- Точка сгущения.

3. Числовые последовательности.

- Числовая последовательность;

- Подпоследовательность;
- Предел последовательности;
- Ограниченная последовательность;
- Невозрастающая (неубывающая) последовательность;
- Строго возрастающая (строго убывающая) последовательность;
- Монотонная последовательность;
- Фундаментальная последовательность;
- Бесконечно большие последовательности и их пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty;$$
- Частичный предел последовательности;
- Верхний (нижний) предел последовательности.

4. Предел функции.

- Функция, область определения, область значения;
- Предел функции по Коши;
- Предел функции по Гейне;
- Правый (левый) предел функции;
- Бесконечные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = C, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm\infty;$$
- О-большое;
- о-малое.

5. Некоторые сведения об элементарных функциях.

- Экспонента (вещественный случай);
- Натуральный логарифм (вещественный случай);
- Показательная функция (вещественный случай);
- Степенная функция (вещественный случай);
- Функции \sin и \cos ;
- Аргумент комплексного числа*;
- Главная ветвь аргумента комплексного числа*;

- Логарифм комплексного числа*;
- Показательная функция (комплексный случай)*;
- Степенная функция (комплексный случай)*.

6. Непрерывные функции и их элементарные свойства.

- Непрерывная в точке функция;
- Непрерывная справа (слева) в точке функция;
- Непрерывная на множестве функция;
- $C(a,b)$;
- $C[a,b]$;
- Классификация разрывов функции;
- Невозрастающая (неубывающая) функция;
- Строго убывающая (строго возрастающая) функция;
- Монотонная (строго монотонная) функция;
- Равномерно непрерывная функция.

7. Дифференцирование.

- Производная функции в точке;
- Дифференцируемая функция в точке;
- Дифференцируемая справа (слева) функция в точке;
- Дифференцируемая на множестве функция;
- График функции;
- Касательная к графику функции в точке;
- Производная n -порядка;
- $C^1(a,b)$;
- $C^1[a,b]$;
- $C^n(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$;
- Дифференциал функции;
- Локальный минимум (максимум) функции;
- Строгий локальный минимум (максимум) функции.

8. Геометрическое исследование функций.

- Выпуклая вверх (вниз) функция;

- Строго выпуклая вверх (вниз) функция;
- Точка перегиба функции.

9. Неопределенный интеграл.

- Первообразная функции;
- Неопределенный интеграл.

Список утверждений и теорем (с доказательствами)

1. Введение.

- Обратимость биекции.

2. Вещественные числа.

- Единственность минимального (максимального) элемента;
- Существование и единственность точной верхней (нижней) грани;
- Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора принцип);
- Теорема Больцано-Вейерштрасса о точке сгущения множества.

3. Числовые последовательности.

- Единственность предела последовательности;
- Ограниченность сходящейся последовательности;
- Предел суммы (разности) последовательностей;
- Предел произведения последовательностей;
- Предел частного последовательностей;
- Предельный переход в неравенствах;
- Теорема о сжатой переменной (теорема о двух милиционерах);
- Теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности;
- Теорема Больцано-Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности;
- Ограниченность фундаментальной последовательности;
- Критерий Коши (сходимость фундаментальной последовательности);
- Наибольший частичный предел (связь с определением).

4. Предел функции.

- Эквивалентность определений по Коши и по Гейне;
- Единственность предела функции;
- Предельный переход и арифметические операции;

- Пределный переход в неравенствах.

5. Непрерывные функции и их элементарные свойства.

- Эквивалентность различных определений непрерывности в точке;
- Непрерывность и арифметические операции;
- Непрерывность композиции функций;
- Теорема Больцано-Коши о достаточном условии существования корня непрерывной функции;
- Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции;
- Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции;
- Теорема Вейерштрасса о минимуме и максимуме непрерывной функции;
- Теорема о характере разрыва монотонной функции;
- Критерий непрерывности монотонной функции;
- Непрерывная обратимость монотонной функции;
- Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

7. Дифференцирование.

- Связь между дифференцируемостью и первой производной;
- Связь между дифференцируемостью и непрерывностью;
- Дифференцирование суммы, произведения и частного функций;
- Дифференцирование композиции функций;
- Дифференцирование обратной функции;
- Дифференцирование функции, заданной параметрически;
- Формула Лейбница;
- Инвариантность формы первого дифференциала;
- Дифференциал композиции*;
- Дифференциал обратной функции*;
- Теорема Ферма;
- Теорема Ролля;
- Теорема Лагранжа;
- Критерий постоянства функции;
- Связь между монотонностью функции и знаком производной;
- Теорема Коши;

- Теорема Дарбу;
- Правило Лопиталья для неопределенностей вида $\frac{0}{0}$.

8. Формула Тейлора.

- Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме;
- Формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши;
- Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа;
- Формула Маклорена для e^x ;
- Формула Маклорена для $\ln(1+x)$;
- Формула Маклорена для $(1+x)^\alpha$

9. Геометрическое исследование функций.

- Необходимое условие локального экстремума;
- Достаточное условие строго локального экстремума в терминах первой производной;
- Достаточное условие локального экстремума в терминах второй производной;
- Неравенство Юнга;
- Неравенство Гёльдера;
- Неравенство Минковского;
- Связь между выпуклостью функции и ее первой производной;
- Связь между выпуклостью функции и ее второй производной;
- Связь между выпуклостью функции и касательной к графику этой функции.

10. Неопределенный интеграл.

- Основные свойства неопределенного интеграла;
- Замена переменных в неопределенном интеграле;
- Интегрирование по частям в неопределенном интеграле;

Замечание. Вопросы помеченные звездочкой допустимо не знать, если студент не претендует на "Отлично".