14 лекция

7 декабря 2022 г. 13:45

Преобразование Фурье

$[-l,l] \longrightarrow (-\infty,\infty)$

$] f\in L_1(\mathbb{R})$, т.е. $\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|dx<\infty$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right)\quad x\in(-l,l)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left(\frac{\pi n t}{l}\right)dt$$

наводящие соображения

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right)dt$$

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left(\frac{n\pi(t-x)}{l}\right)dt$$

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt\right|\leqslant\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt=\frac{Q}{2l}\xrightarrow[l\to\infty]{}0$$

$\forall\alpha\in(0;+\infty)\quad \alpha_1=\frac{\pi}{l},\ \alpha_2=\frac{2\pi}{l}\ \dots\ \alpha_n=\frac{n\pi}{l};\ \Delta\alpha=\frac{\pi}{l}$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\alpha_i}\Delta\alpha\int_{-l}^{l}f(t)\cos[\alpha_i(t-x)]dt$$

$$\int_{-l}^{l}f(t)\cos(\alpha(t-x))dt\sim\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\alpha(t-x))dt\quad №169$$

таким образом $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\alpha(t-x))dt$

def (Интеграл Фурье) №171

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(y(t-x))dt \longleftrightarrow \int_{0}^{+\infty}\left(a(\lambda)\cos(\lambda x)+b(\lambda)\sin(\lambda x)\right)d\lambda$$

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}f(y)\cos(\lambda y)dy$$

$$b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}f(y)\sin(\lambda y)dy$$

$\Updownarrow$ в силу чётности y

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(y(t-x))dt$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}dy\ \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{iy(x-t)}dt$$

def (Преобразование Фурье) №169

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(t)e^{-ity}dt$$

прямое преобразование

$$f(x)=\text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\Phi(y)e^{ixy}dy$$

обратное преобразование

$f\to\hat{f}$

$f(t)\xrightarrow{F}F(\lambda)$

$$F(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(a(\lambda)-i\cdot b(\lambda)\right)$$

Ex

1) $\forall f(x)=e^{-a|x|}$

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-a|x|}e^{-ixy}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{ax}e^{-ixy}dx+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}e^{-ixy}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\Big(e^{-(a-iy)x}+$$

$$+e^{-(a+iy)x}\Big)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-iy}+\frac{1}{a+iy}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+y^2}$$

$$e^{-ax}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+y^2}e^{ixy}dy\quad(x\geqslant0)$$

$e^{ixy}=\cos(xy)+i\cdot\sin(xy)$, таким образом

$$e^{-ax}=\frac{a}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos(xy)dy}{a^2+y^2}=\frac{2a}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{a^2+y^2}dy\quad(x\geqslant0)$$

интеграл Лапласа

2) $f(x)=\begin{cases}e^{-ax}, & x>0\\ -e^{ax}, & x<0\end{cases}$;

$$\hat{f}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}(-e^{ax})e^{-ixy}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}e^{-ixy}dx=$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{yi}{a^2+y^2}$$

$$e^{-ax}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{yi}{a^2+y^2}\right)e^{ixy}\right)dy=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{y\sin(xy)}{a^2+y^2}dy,\ x>0$$

Итого, **интегралы Лапласа (def)** №172

1) $$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{a^2+y^2}dy=\frac{\pi}{2a}e^{-ax},\ x\geqslant0$$

2) $$\int_{0}^{+\infty}\frac{y\sin(xy)}{a^2+y^2}dy=\frac{\pi}{2}e^{-ax},\ x\geqslant0$$

Свойства: №170

1) Линейность

$F[af+bg]=a\hat{f}+b\hat{g}$

$a,b\in\mathbb{R},\ f,g\in L(\mathbb{R})$

2) полностью интегрируема

$]f\in L(\mathbb{R})$, тогда $\hat{f}\in C(\mathbb{R})$,

$\exists A\subset\mathbb{R}:\ \hat{f}\subset A$, причём

$$|\hat{f}(y)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx,\ \forall y\in\mathbb{R}$$

$\lim\limits_{y\to\infty}\hat{f}(y)=0$

Следствие, $\{f_n\}$, $f_n\in L(\mathbb{R})$ и верно $f\in L(\mathbb{R})$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|dx=0$, тогда $\hat{f}_n\underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}\hat{f}$

3) Образ производной оригинала

$f,f'\in L(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$

тогда $F[f'](y)=iyF[f](y)$

Следствие: если $f\in C^n(\mathbb{R}),\ n\geqslant1$, тогда

$$|F[f](y)|\leqslant\frac{M}{|y|^n},\ \text{где}\ M=\sup|F[f^{(n)}](y)|,\ M<\infty$$

$$\widehat{f^{(n)}(t)}=(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$$

$\omega=y$ вроде бы

4) Th (о свёртке)

$\widehat{f*g}=\sqrt{2\pi}\,\hat{f}\cdot\hat{g}$

$\widehat{fg}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}*\hat{g}$

$\varphi*\gamma=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\gamma(x-t)dt$

5) Производная образа

$i^kF^{(k)}[f]=F[x^kf]$

6) $\widehat{f(t-a)}=e^{-i\omega a}\hat{f}$

7) $\widehat{e^{iat}f}=\hat{f}(\omega-a)$

8) $\widehat{f(at)}=\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

9) $$\widehat{\delta(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-ixy}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$\widehat{e^{iat}}=\sqrt{2\pi}\,\delta(\omega-a)$

$\widehat{\cos(at)}=\sqrt{2\pi}\,\frac{\delta(\omega-a)+\delta(\omega+a)}{2}$

$\widehat{\sin(at)}=\sqrt{2\pi}\,\frac{\delta(\omega-a)-\delta(\omega+a)}{2}$

$\widehat{e^{-at^2}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$ функция Гаусса

10) $\int\limits_{\mathbb{R}}|\hat{f}|^2d\omega=\int\limits_{\mathbb{R}}|f|^2dt$