Чернякова Валерия, 1304 (1)

ИДЗ по графикам.

• Провести анализ функций и построить графики.

1. $y = \frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$

1) Проведем анализ функции

1.1) $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

$x^2 - 2x + 1 \neq 0$

$D = 4 - 4 = 0$

$(x-1)^2 \neq 0$

$x \neq 1$

1.2) $f(-x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2x + 1}$

т.о функция общего вида

1.3) Функция непериодическая

1.4) Точка разрыва: $x = 1$

2)

2.1) Вертикальная асимптота.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1} = \infty$

2.2) Наклонная асимптота.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{x(x^2-2x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{x^3-2x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{x^3-2x^2+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{0}{1}=0\Rightarrow k=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}-\overset{0}{k}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}$$

$$\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{1}=1$$

$\boxed{y(x)=kx+b=1}$ уравнение горизонтальной асимптоты.

3) Промежутки монотонности

$$f'(x)=\frac{(x^2+x-1)'(x^2-2x+1)-(x^2-2x+1)'(x^2+x-1)}{(x^2-2x+1)^2}=$$

$$=\frac{(2x+1)(x^2-2x+1)-(2x-2)(x^2+x-1)}{(x^2-2x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^3-4x^2+2x+x^2-2x+1-2x^3-2x^2+4x+2x^2-2}{(x^2-2x+1)^2}=$$

$$=\frac{-3x^2+4x-1}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{-3x^2+4x-1}{(x-1)^4}$$

$$(x^2-2x+1)^2=\left((x-1)^2\right)^2=(x-1)^4$$

$$\frac{-3x^2+4x-1}{(x^2-2x+1)^2}>0$$

$-3x^2+4x-1>0$, $-3x^2+4x-1=0$

$x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=1$, не удовл. ОДЗ)

ОДЗ: $(x-1)^4\neq0$

$x\neq1$

$-\ \frac{1}{3}\ +\ 1\ -$

$x\in\left(\frac{1}{3};1\right)$

Т.о. функция строго возрастает при $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$

$$\frac{-3x^2+4x-1}{(x^2-2x+1)^2} < 0$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; \infty)$$

Т.о функция строго убывает при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; \infty)$

$$\frac{-3x^2+4x-1}{(x-1)^4} = 0$$

$x \neq 1$

$-3x^2+4x-1=0$

$D = 16-12 = 4$

$\sqrt{D} = 2$

$$x_1 = \frac{-4+2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-4-2}{-6} = 1 \text{ (не подх.)}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$x_{min} = \frac{1}{3}$ — точка минимума

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-5}{4}$ значение минимума

x_{max} отсутствует ⇒ значение максимума тоже

Наибольшего значения функции нет, наименьшее значение она принимает при $x = \frac{1}{3}$

$E(f) = \left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)$

4) $f''(x) = \left(\frac{-3x^2+4x-1}{(x-1)^4}\right)' = \left(\frac{(x-1)(-3x+1)}{(x-1)^4}\right)' = \left(\frac{-3x+1}{(x-1)^3}\right)' =$

$= \frac{(-3x+1)'(x-1)^3 - 3(x-1)^2(-3x+1)}{(x-1)^6} =$

$= \frac{-3(x^3-3x^2+3x-1) - (-9x+3)(x^2-2x+1)}{(x-1)^6} =$

$= \frac{-3x^3+9x^2-9x+3-(-9x^3+18x^2-9x+3x^2-6x+3)}{(x-1)^6} =$

$= \frac{6x^3-12x^2+6x}{(x-1)^6} = \frac{6x(x^2-2x+1)}{(x-1)^6} = \frac{6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{6x}{(x-1)^4}$

$\frac{6x}{(x-1)^4} > 0 \quad \begin{cases} 6x = 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad - \;\; 0 \;\; + \;\; 1 \;\; +$

Функция выпукла вниз при $x \in (0;1) \cup (1;\infty)$

Функция выпукла вверх при $x \in (-\infty; 0)$

$\frac{6x}{(x-1)^4} = 0$

$x = 0$ — точка перегиба

5) Найдем пересечение с Ox

$\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1} = 0$

$x^2+x-1=0$

$D = 1+4 = 5$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

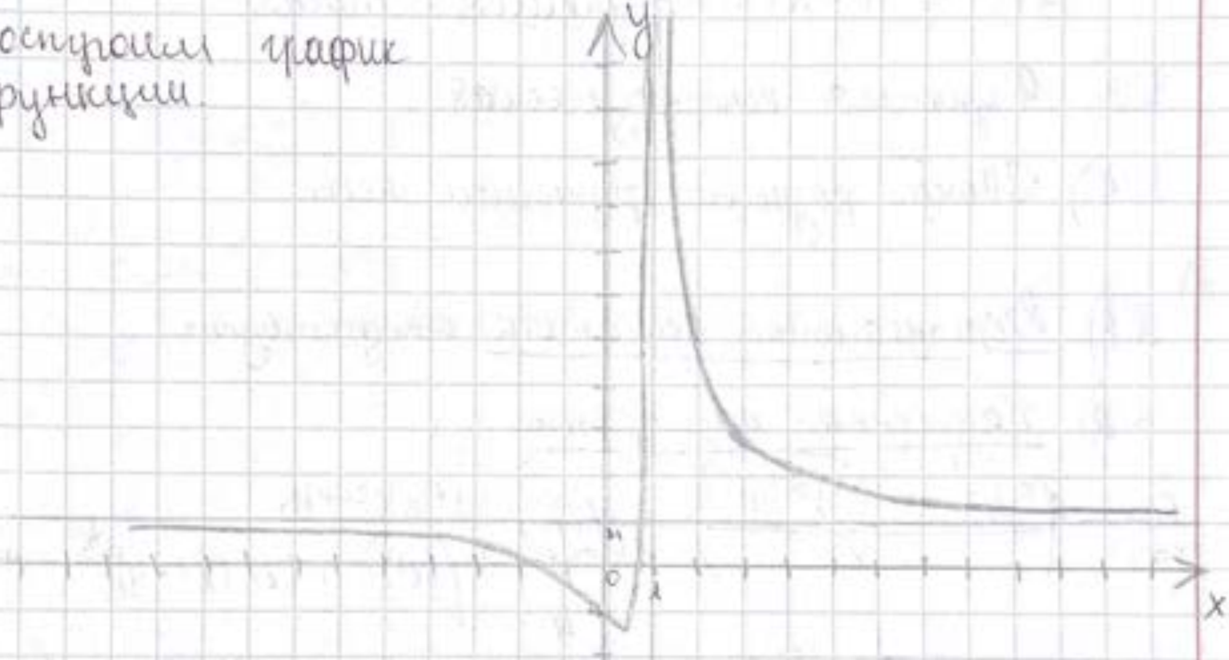
Точка пересечения $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$

Найдем пересечение с ОУ:

$x=0$

$$y(0)=\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}=\frac{-1}{1}=-1$$

Построим график функции.



2. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4}$

Проведем анализ функции

1)

1.1) $D(f) = \mathbb{R}$

1.2) $f(-x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4}$

$f(x) = f(-x) \Rightarrow$ функция четная

1.3) Функция непериодическая

1.4) Точек разрыва функции нет

2)

2.1) Вертикальная асимптота отсутствует

2.2) Наклонная асимптота

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + 4}{x\left((x^2)^{\frac{2}{3}} + (x^2(x^2-4))^{\frac{1}{3}} + (x^2-4)^{\frac{2}{3}}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x\left(x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}(x^2-4)^{\frac{1}{3}} + (x^2-4)^{\frac{2}{3}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4}{\left(x\left(x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}(x^2-4)^{\frac{1}{3}} + (x^2-4)^{\frac{2}{3}}\right)\right)} = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4} - \underbrace{kx}_{=0}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + 4}{(x^2)^{\frac{2}{3}} + (x^2(x^2-4))^{\frac{1}{3}} + (x^2-4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}(x^2-4)^{\frac{1}{3}} + (x^2-4)^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{0}{\left(x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}(x^2-4)^{\frac{1}{3}} + (x^2-4)^{\frac{2}{3}}\right)} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$\boxed{g(x) = kx + b = 0}$ — уравнение наклонной асимптоты

3) Промежутки монотонности.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4}\right)' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-4)^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-4)^2}} > 0$$

ОДЗ: $\sqrt[3]{x} \neq 0$ и $\sqrt[3]{(x^2-4)^2} \neq 0$

$x \neq 0$ $\quad (x^2-4)^2 \neq 0$

$x^2 - 4 \neq 0$

$x^2 \neq 4$

$x \neq \pm 2$

$$\frac{\sqrt[3]{(x^2-4)^2} - x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{(x^2-4)^2}} > 0$$

$$\left(\sqrt[3]{(x^2-4)^2} - x\sqrt[3]{x}\right) > 0$$

Нули: $\sqrt[3]{(x^2-4)^2} - x\sqrt[3]{x} = 0$

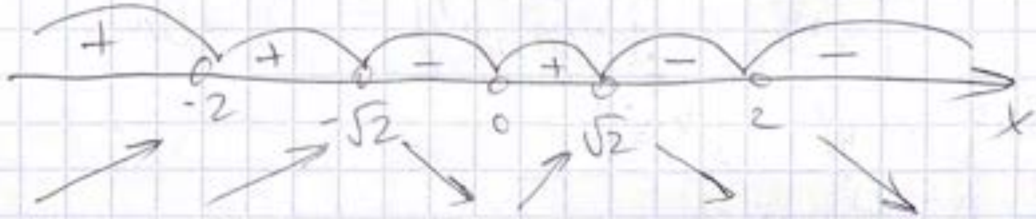
$\sqrt[3]{(x^2-4)^2} = x\sqrt[3]{x}$ (возведем обе части в степень $\frac{1}{3}$)

$(x^2-4)^2 = x^4$

$x^4 - 8x^2 + 16 = x^4$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$



Функция строго возрастает при:

$x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -\sqrt{2}) \cup (0; \sqrt{2})$

$$\frac{\sqrt[3]{(x^2-4)^2} - x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{(x^2-4)^2}} < 0$$

при $x \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (\sqrt{2}; 2) \cup (2; \infty)$ - функция строго убывает

$$\frac{\sqrt[3]{(x^2-4)^2} - x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{(x^2-4)^2}} = 0$$

ОДЗ

$\sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{(x^2-4)^2} \neq 0$

$\sqrt[3]{(x^2-4)^2} = x\sqrt[3]{x}$

$x \neq 0$

$x = \pm\sqrt{2}$

$x \neq \pm 2$

x min - отсутствует

x max $= \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{array} \right.$

Так как функция является четной $\Rightarrow f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) =$
$= \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2-4} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

Наибольшее значение функции: $f_{наиб.} = 2\sqrt[3]{2}$

Наименьшее значение функции: $f_{наим} = 0$

4) $f''(x) = \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-4)^2}} \right)' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x}} -$

$- \frac{2}{3} \frac{\left(\sqrt[3]{(x^2-4)^2} - x\left(\frac{2 \cdot 2x}{3\sqrt[3]{(x^2-4)}}\right)\right)}{(x^2-4)\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)} = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x}} -$

$$-\frac{2}{3}\frac{((x^2-4)-4x^2)}{(x^2-4)\sqrt[3]{(x^2-4)^2}} = \frac{-2}{3x\sqrt[3]{x}} + \frac{6x^2+8}{3(x^2-4)\sqrt[3]{(x^2-4)^2}} =$$ (3)

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3x^2+4}{(x^2-4)\sqrt[3]{(x^2-4)^2}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{(3x^2+4)\cdot 3x\sqrt[3]{x} - (x^2-4)\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}{(x^2-4)\sqrt[3]{(x^2-4)^2}\,(3x\sqrt[3]{x})}\right) = 0$$

ОДЗ: $(x^2-4)\sqrt[3]{(x^2-4)^2}\,(3x\sqrt[3]{x}) \neq 0$

$x^2-4 \neq 0$ и $x \neq 0$

$x^2 \neq 4$

$x \neq \pm 2$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{(3x^2+4)\cdot 3x\sqrt[3]{x} - (x^2-4)\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}{(x^2-4)\sqrt[3]{(x^2-4)^2}\,(3x\sqrt[3]{x})}\right) = 0$$

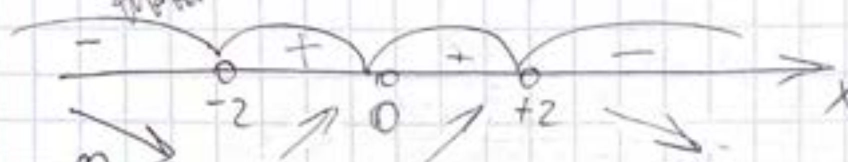
$$2\left((3x^2+4)\cdot 3x\sqrt[3]{x} - (x^2-4)\sqrt[3]{(x^2-4)^2}\right) = 0$$

$$(3x^2+4)3x\sqrt[3]{x} - (x^2-4)\sqrt[3]{(x^2-4)^2} = 0$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{(3x^2+4)3x\sqrt[3]{x} - (x^2-4)\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}{(x^2-4)\sqrt[3]{(x^2-4)^2}\,(3x\sqrt[3]{x})}\right)$$

>0 функция строго выпукла вниз

<0 функция строго выпукла вверх



Функция строго выпукла вверх при:

$x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

Функция строго выпукла вниз при:

$x\ (-2; 0) \cup (0; 2)$

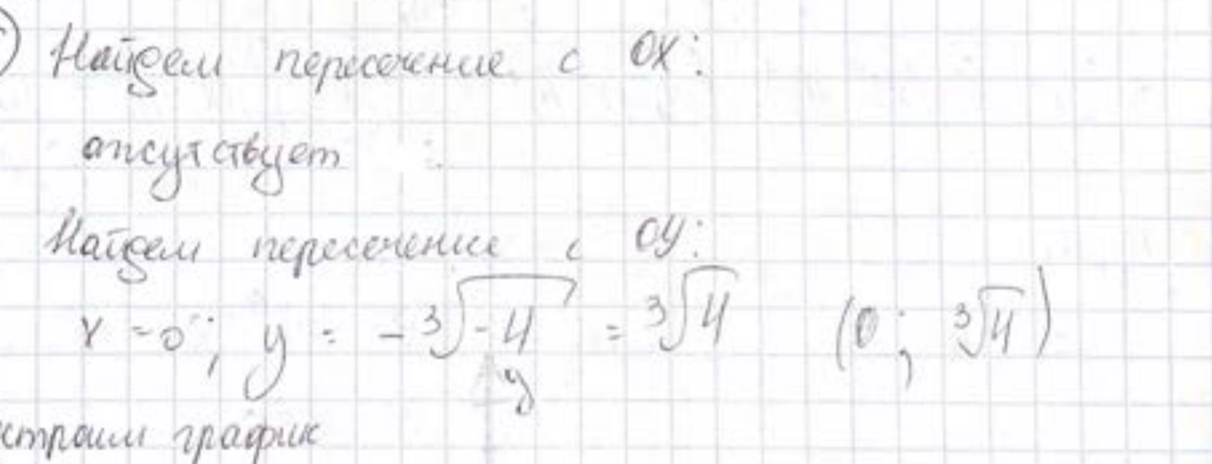
5) Найдем пересечение с OX:

отсутствует

Найдем пересечение с OY:

$x = 0;\ y = -\sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{4} \quad (0; \sqrt[3]{4})$

Построим график функции.



3. $y = \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2}$

$x+2 \neq 0$
$x \neq -2$

Проведем анализ функции.

1)
1.1) $D(f)$: $x \neq -2$

1.2) Функция общего вида

1.3) Функция непериодическая

1.4) $x = -2$ — точка разрыва функции

2)
2.1) Вертикальная асимптота

$x = -2$

2.2) Наклонная асимптота.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2+2x+1}{x^3(x^2+4x+4)}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^5\left(\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}} =$$

$$= \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{1} = 1 \Rightarrow b = 1$$

$\boxed{g(x) = kx + b = 1}$ уравнение наклонной асимптоты

3) Промежутки монотонности

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2}\right)' = \left(\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\cdot\frac{(x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)' = \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[3]{x+1}}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2\,(x+2)^{\frac{1}{3}}}{3\,(x+1)^{\frac{1}{3}}(x+2)^2} = \frac{2}{3\,(x+1)^{\frac{1}{3}}(x+2)^{\frac{5}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)^5}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)^5}} < 0$$

ОДЗ: $\sqrt[3]{(x+1)(x+2)^5} \neq 0$

$(x+1)(x+2)^5 \neq 0$

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

• определяем промежутки убывания функции

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)^5}} > 0$$

• определяем промежутки возрастания функции

Функция строго возрастает при:

$x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$

Функция строго убывает при:

$x \in (-2; -1)$

x_{min} отсутствует

x_{max} отсутствует

к

~~[illegible] строго выпукла вниз~~

4

4. $f''(x) = \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)^5}}\right)' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x+2)^{\frac{5}{3}}}\right)' =$

$= \frac{2}{3}\left((x+1)^{-\frac{1}{3}}\cdot(x+2)^{-\frac{5}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{4}{3}}\cdot(x+2)^{-\frac{5}{3}} - (x+1)^{-\frac{1}{3}}(x+2)^{-\frac{8}{3}}\cdot\frac{5}{3}\right)$

$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^4(x+2)^5}} + \frac{5}{\sqrt[3]{(x+1)(x+2)^8}}\right) =$

$= -\frac{2}{9}\left(\frac{(x+2)+5(x+1)}{\sqrt[3]{(x+1)^4}\,\sqrt[3]{(x+2)^8}}\right) = -\frac{2}{9}\left(\frac{6x+7}{\sqrt[3]{(x+1)^4}\,\sqrt[3]{(x+2)^8}}\right)$

$-\frac{2}{9}\left(\frac{6x+7}{\sqrt[3]{(x+1)^4}\,\sqrt[3]{(x+2)^8}}\right) = 0 \to \frac{6x+7}{\sqrt[3]{(x+1)^4}\,\sqrt[3]{(x+2)^8}} = 0$

$6x+7=0$

ОДЗ: $\sqrt[3]{(x+1)^4}\,\sqrt[3]{(x+2)^8} \neq 0$

$6x=-7$

$\begin{cases} x+1\neq 0 \\ x+2\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq -2 \end{cases}$

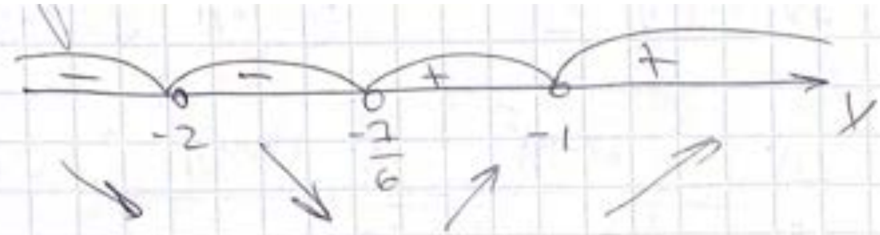
$x = \frac{-7}{6}$

$-\frac{2}{9}\left(\frac{6x+7}{\sqrt[3]{(x+1)^4}\,\sqrt[3]{(x+2)^8}}\right) > 0$

определяем, где функция строго выпукла вниз

$-\frac{2}{9}\left(\frac{6x+7}{\sqrt[3]{(x+1)^4}\,\sqrt[3]{(x+2)^8}}\right) < 0$

определяем, где функция строго выпукла вверх



Функция выпукла вверх при:

$x \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{7}{6}\right)$

Функция выпукла вниз:

$x \in \left(-\frac{7}{6}; -1\right) \cup (-1; \infty)$

5) Найдем пересечение с Ox:

$\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2} = 0$, $y = 0$

$x = -1$

$(-1; 0)$

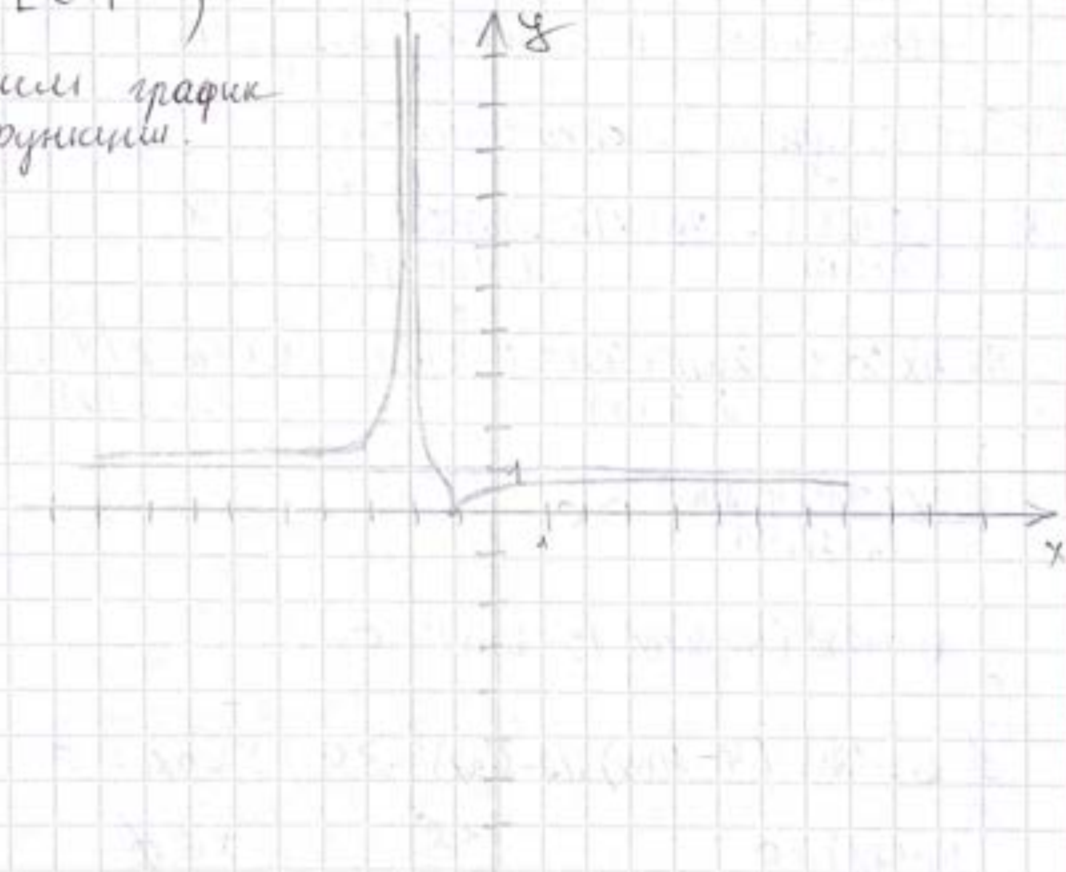
Найдем пересечение с Oy:

$x=0$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}$$

$E(f) = [0;\infty)$

Построим график функции.



· Построить график функции без исследования выпуклости

$$y = \frac{\sin^2 x}{2-\sin x}$$

Проанализируем функцию для построения

1)

1.1) $D(f)=R$

1.2) $f(-x) = \frac{\sin^2 x}{2+\sin x}$ => функция общего вида

1.3) $T=2\pi$ – функция явл-ся периодической

1.4) Точек разрыва нет

2)

2.1) Вертикальная асимптота отсут-т

2.2) Наклонная асимптота отсут-т

3) Промежутки монотонности

$$f'(x) = \left(\frac{\sin^2 x}{2-\sin x}\right)' = \frac{2\sin x(2-\sin x)\cos x + \cos x\sin^2 x}{(2-\sin x)^2} =$$

$$= \frac{4\sin x\cos x - 2\sin^2 x\cos x + \cos x\sin^2 x}{(2-\sin x)^2} = \frac{\sin x\cos x(4-\sin x)}{(2-\sin x)^2}$$

$$\frac{\sin x\cos x(4-\sin x)}{(2-\sin x)^2} > 0$$

ОДЗ: $2-\sin x \neq 0$

$\sin x \neq 2$

$\varnothing$

$$\frac{1}{2}\sin(2x)(4-\sin x)$$

$$\frac{1}{2}\sin(2x) \quad \text{или} \quad \sin x = 4$$

$$x \in \varnothing$$

$$\sin(2x) > 0$$

$$0+2\pi n < 2x < \pi + 2\pi n,\ n\in Z$$

$$\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in Z$$

Функция строго возрастает при:

$$x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z$$

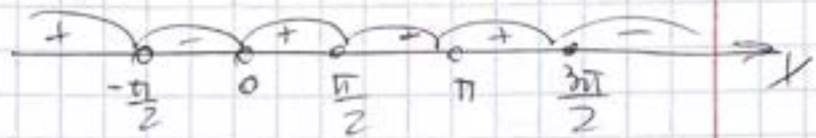
Функция строго убывает при:

$$x \in \left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi+\pi n\right),\ n\in Z$$

$$\frac{\sin x\cos x\,(4-\sin x)}{(2-\sin x)^2}=0$$

$$\frac{1}{2}\sin(2x)=0$$

$$2x=\pi+\pi n,\ n\in Z$$



$$x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$$

$f(0)=\frac{0}{2}=0$ – экстремум функции

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2-1}=1$ – экстремум функции

$$\boxed{\begin{aligned} &x_{min}=\pi n,\ n\in Z\\ &x_{max}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\end{aligned}}$$

$$f(\pi)=\frac{0}{2-0}=0$$

$f\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$ – экстремум функции

$$f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)=f(2\pi)=0$$

$$E(f)=[0;1]$$

5) Найдем пересечение с OX:

$$\frac{\sin^2x}{2-\sin x}=0$$

$$\sin^2x=0$$

$$\sin x=0$$

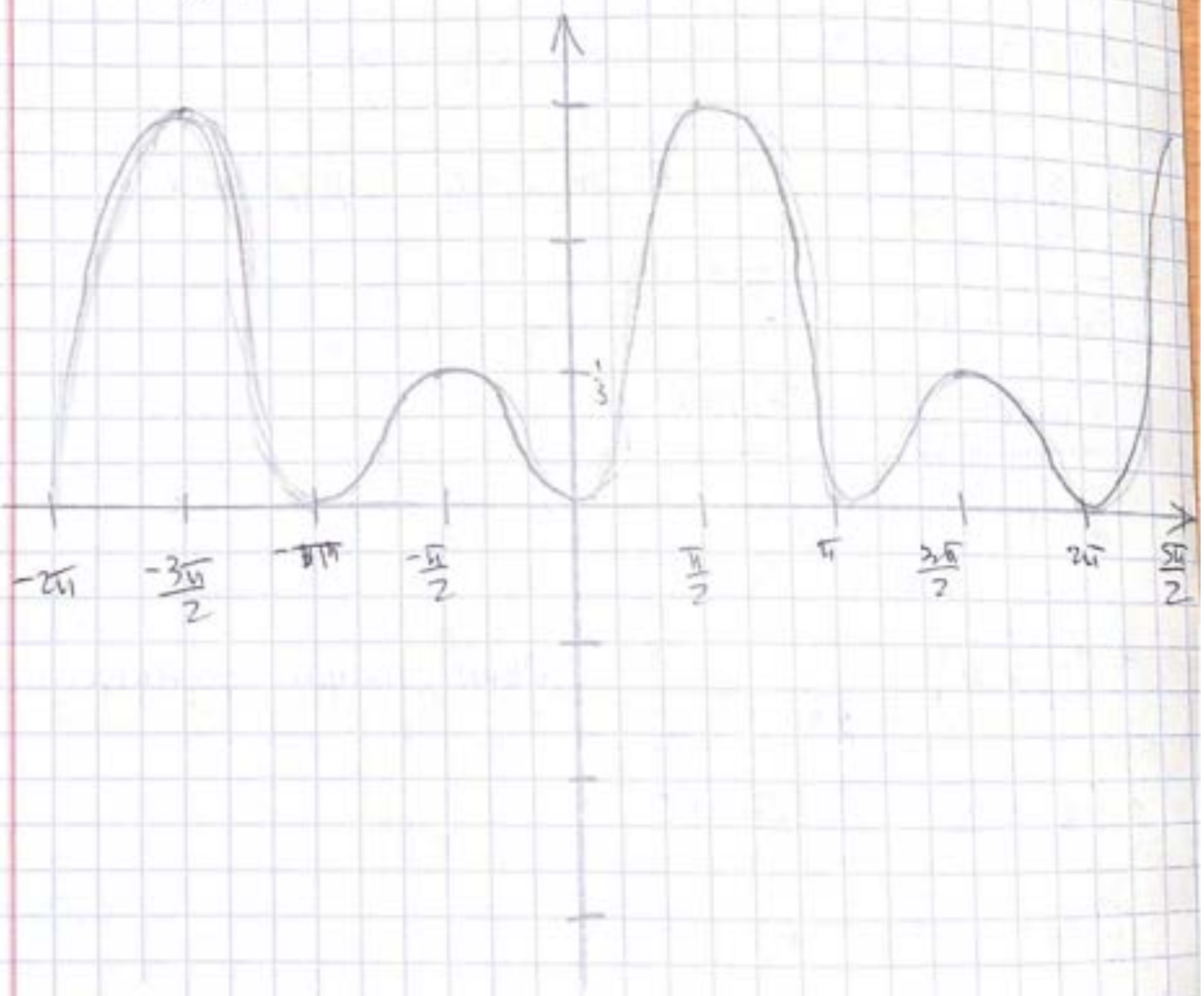
$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$(\pi n; 0),\ n \in \mathbb{Z}$

Найдем пересечение с Oy:

$$\frac{\sin^2 0}{2 - \sin 0} = 0$$

$(0; 0)$



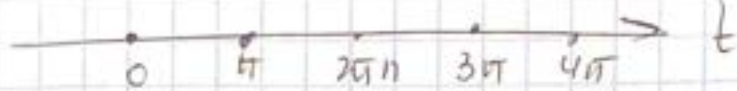
• Построим график функции, заданной параметрически.

5. $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$

1) $D(y) = \mathbb{R}$

2) $x'(t) = 1 - \cos t$

$y'(t) = \sin t$



t	$x(t)$	$y(t)$
$(0+2\pi n, \pi+2\pi n)$	возрастает	возрастает
$(\pi+2\pi n; 2\pi+2\pi n)$	возрастает	убывает

• Если $t \to 0+2\pi k+0$, то

$$\lim_{t\to 0+0+2\pi n} x(t) = \lim_{t\to 0+0} (2\pi n - \sin 2\pi n) = 2\pi n, n\in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{t\to 0+0+2\pi n} y(t) = \lim_{t\to 0+0} (1-\cos 2\pi n) = 0$$

• Если $t \to \pi - 0 + 2\pi n$, то

$$\lim_{t\to \pi-0} x(t) = \lim_{t\to \pi-0} (\pi+2\pi n - \sin(\pi+2\pi n)) = \pi+2\pi n, n\in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{t\to \pi-0} y(t) = \lim_{t\to \pi-0} (1-\cos(\pi+2\pi n)) = 2$$

• Если $t \to \pi+2\pi n+0$, то

$$\lim_{t\to \pi+0} x(t) = \pi+2\pi n$$

$$\lim_{t\to \pi+0} y(t) = 2$$

• Если $t \to 2\pi + 2\pi n - 0$, то

$$\lim_{t \to 2\pi - 0} x(t) = \lim_{t \to 2\pi - 0} (2\pi n - 0) = 2\pi n, \; n \in Z$$

$$\lim_{t \to 2\pi - 0} y(t) = \lim_{t \to 2\pi - 0} (1 - 1) = 0$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$y''_x = \frac{\left(\frac{\sin t}{1 - \cos t}\right)'}{x'(t)} = \frac{\frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t(1 - \cos t)'}{(1 - \cos t)^2}}{1 - \cos t} =$$

$$= \frac{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^3} = -\frac{\cos t - 1}{(\cos t - 1)^3} = -\frac{1}{(\cos t - 1)^2}$$

$$-\frac{1}{(\cos t - t)^2} > 0$$

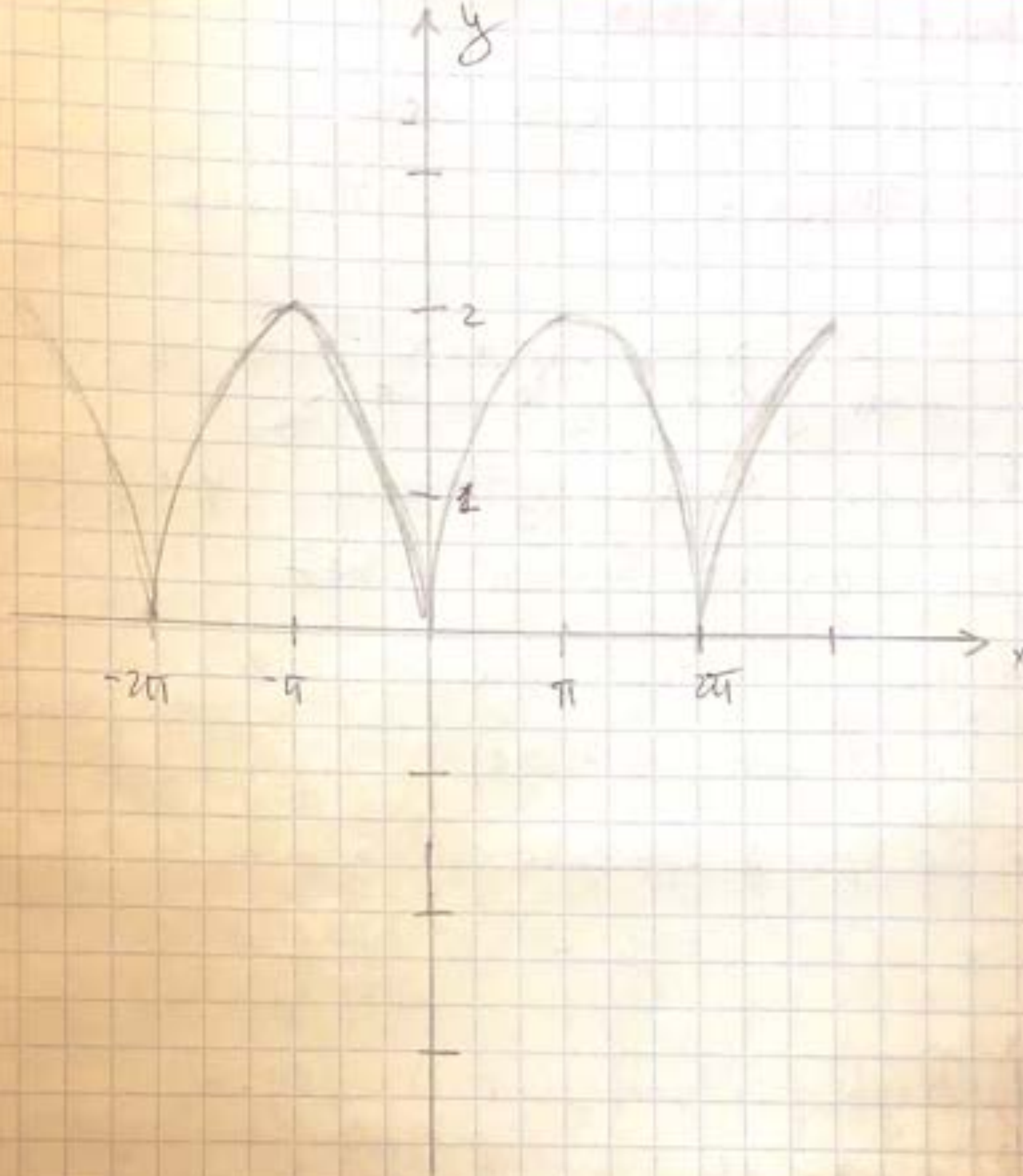
$$\frac{1}{(\cos t - 1)^2} < 0 \Rightarrow t \in \varnothing$$

Функция строго выпукла вверх при:

$t \neq 2\pi n, \; n \in Z$

$E(y) = [0; 2]$

⑥



$y'_x = \frac{\sin t}{1-\cos t} = 0; \quad \sin t = 0$

$t = \pi n, \, n \in Z$

$t_{max} = \pi + 2\pi n, \, n \in Z$ — (·) максимума

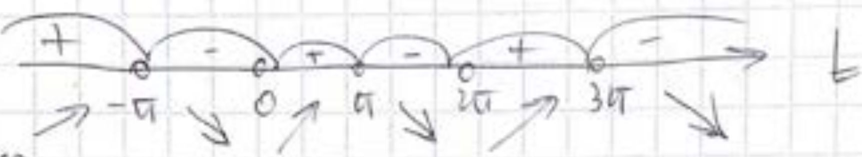
$y(\pi + 2\pi n) = 1 - \cos(\pi + 2\pi n) = 2$ - максимум функции

$\frac{\sin t}{1-\cos t} > 0$

$\sin t\,(1-\cos t)>0$

$\sin t=0$ или $\cos t=1$

$t=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ $\qquad t=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$



Функция строго возрастает при:

$t\in(0+2\pi n,\ \pi+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$

Функция строго убывает при:

$t\in(\pi+2\pi n,\ 2\pi+2\pi n)$

• Построить кривую

$x=2t^2,\quad y=\frac{t^2}{2}-3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$

1) $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$

2) $x'(t)=4t$

$y'(t)=t-3\left(\ln\sqrt{\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2}\right)'=t-3\sqrt{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2}\ \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2}\ \cdot$

$\cdot\, 2\,\frac{t-1}{t+1}\ \frac{2}{(t+1)^2}=t-6\ \frac{(t+1)^2}{(t-1)^2}\ \frac{t-1}{(t+1)^3}=t-\frac{6}{t^2-1}$

$t\ (\in)$	$x(t)$	$y(t)$
$(-\infty,-1)$	убывает	убывает
$(-1,0)$	убывает	возрастает
$(0;1)$	возрастает	возрастает

$(1;2)$ возрастает убывает

$(2;\infty)$ возрастает убывает

1) $\lim\limits_{t\to-\infty} (2t^2) = +\infty$

$\lim\limits_{t\to-\infty} \left(\frac{t^2}{2} - 3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) = \lim\limits_{t\to-\infty} \left(\frac{t^2}{2} - 3\ln\left|\frac{t(1-\frac{1}{t})}{t(1+\frac{1}{t})}\right|\right) =$

$= \lim\limits_{t\to-\infty} \left(\frac{t^2}{2}\right) = +\infty$

Найдем возможную асимптоту

$k = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{\frac{t^2}{2} - 3\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)}{2t^2} = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{t - \frac{6}{t^2-1}}{4t} =$

$= \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{t^3-t-6}{4t(t^2-1)} = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{t^3\left(1-\frac{1}{t^2}-\frac{6}{t^3}\right)}{4t^3\left(1-\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

$b = \lim\limits_{t\to-\infty} \left(\frac{t^2}{2} - 3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{4}\cdot 2t^2\right) = \lim\limits_{t\to-\infty} \left(-3\ln\left|\frac{t(1-\frac{1}{t})}{t(1+\frac{1}{t})}\right|\right) =$

$= 0 \Rightarrow b = 0$

$\boxed{y(x) = kx + b = \frac{1}{4}x}$ наклонная асимптота

2) $\lim\limits_{t\to-1-0} (2t^2) = \lim\limits_{t\to-1+0} (2t^2) = 2$

мы имеем право ставить =, т.к. выражение в ln под | |

$\lim\limits_{t\to-1-0} |y(t)| = \lim\limits_{t\to-1+0} y(t) = \lim\limits_{t\to-1-0} \left(\frac{t^2}{2} - 3\ln\left|\frac{t(1-\frac{1}{t})}{t(1+\frac{1}{t})}\right|\right) =$

$= -\infty$

$x=2$ – вертикальная асимптота

3) $\lim\limits_{t \to 0-0} x(t) = \lim\limits_{t \to 0+0} (x(t)) = 0$

$\lim\limits_{t \to 0-0} y(t) = \lim\limits_{t \to 0+0} \left(0 - 3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) = \lim\limits_{t \to 0-0} (0 - 3\ln 1) =$

$= 0$

4) $\lim\limits_{t \to 1-0} x(t) = \lim\limits_{t \to 1+0} (x(t)) = \lim\limits_{t \to 1-0} 2t^2 - 2$

$\lim\limits_{t \to 1-0} y(t) = \lim\limits_{t \to 1+0} y(t) = \lim\limits_{t \to 1-0} \left(\frac{1}{2} - 3\ln 0\right) = +\infty$

$x=2$ – вертикальная асимптота

5) $\lim\limits_{t \to 2-0} (x(t)) = \lim\limits_{t \to 2+0} x(t) = \lim\limits_{t \to 2-0} (2t^2) = 8$

$\lim\limits_{t \to 2-0} y(t) = \lim\limits_{t \to 2+0} y(t) = \lim\limits_{t \to 2-0} \left(\frac{t^2}{2} - 3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) =$

$= 2 - 3\ln\frac{1}{3}$

6) $\lim\limits_{t \to \infty+} (x(t)) = \infty+$

$\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \frac{t^2}{2} - 3\ln\left|\frac{t(1-\frac{1}{t})}{t(1+\frac{1}{t})}\right| = +\infty$

$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{t^3-t-6}{t^2-1}}{4t} = \frac{t^3-t-6}{4t^3-4t}$

$\frac{t^3-t-6}{4t(t^2-1)} = 0$

к

$t^3 - t - 6 = 0$

$(t-2)(t^2+2t+3) = 0$

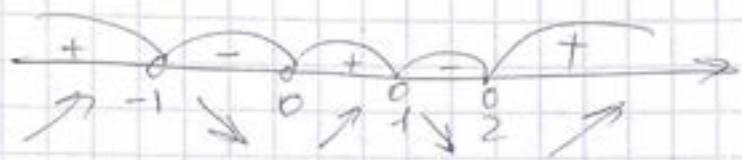
$t = 2$ (точка минимума)

или

$t^2 + 2t + 3 = 0$

$t \in \varnothing$

$f(2) = 2 - 3\ln\frac{1}{3}$ — минимум функции



Функция строго возрастает при:

$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (2; \infty)$

Функция строго убывает при:

$x \in (-1; 0) \cup (1; 2)$

$$y''_x = \frac{\left(\frac{t^3 - t - 6}{4t^3 - 4t}\right)'}{4t} = \frac{(3t^2-1)(4t^3-4t) - (12t^2-4)(t^3-t-6)}{4t(4t^3-4t)^2} =$$

$$= \frac{12t^5 - 12t^3 - 4t^3 + 4t - 12t^5 + 16t^3 + 72t^2 - 4t - 24}{4t(4t^3-4t)^2} =$$

$$= \frac{24(3t^2-1)}{4t(4t^3-4t)^2} = \frac{6(3t^2-1)}{t(4t^3-4t)^2}$$

$$\frac{6(3t^2-1)}{t(4t^3-4t)^2} = 0$$

$3t^2 = 1$

$t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ – точки перегиба

$\frac{6(3t^2-1)}{t(4t^3-4t)^2} > 0$

$6(3t^2-1) > 0$

$6(3t^2-1) = 0$ ОДЗ: $t(4t^3-4t)^2 \neq 0$

$3t^2-1=0$ $t \neq 0$ $4t^3-4t \neq 0$

$t^2 = \frac{1}{3}$ $t(t^2-1) \neq 0$

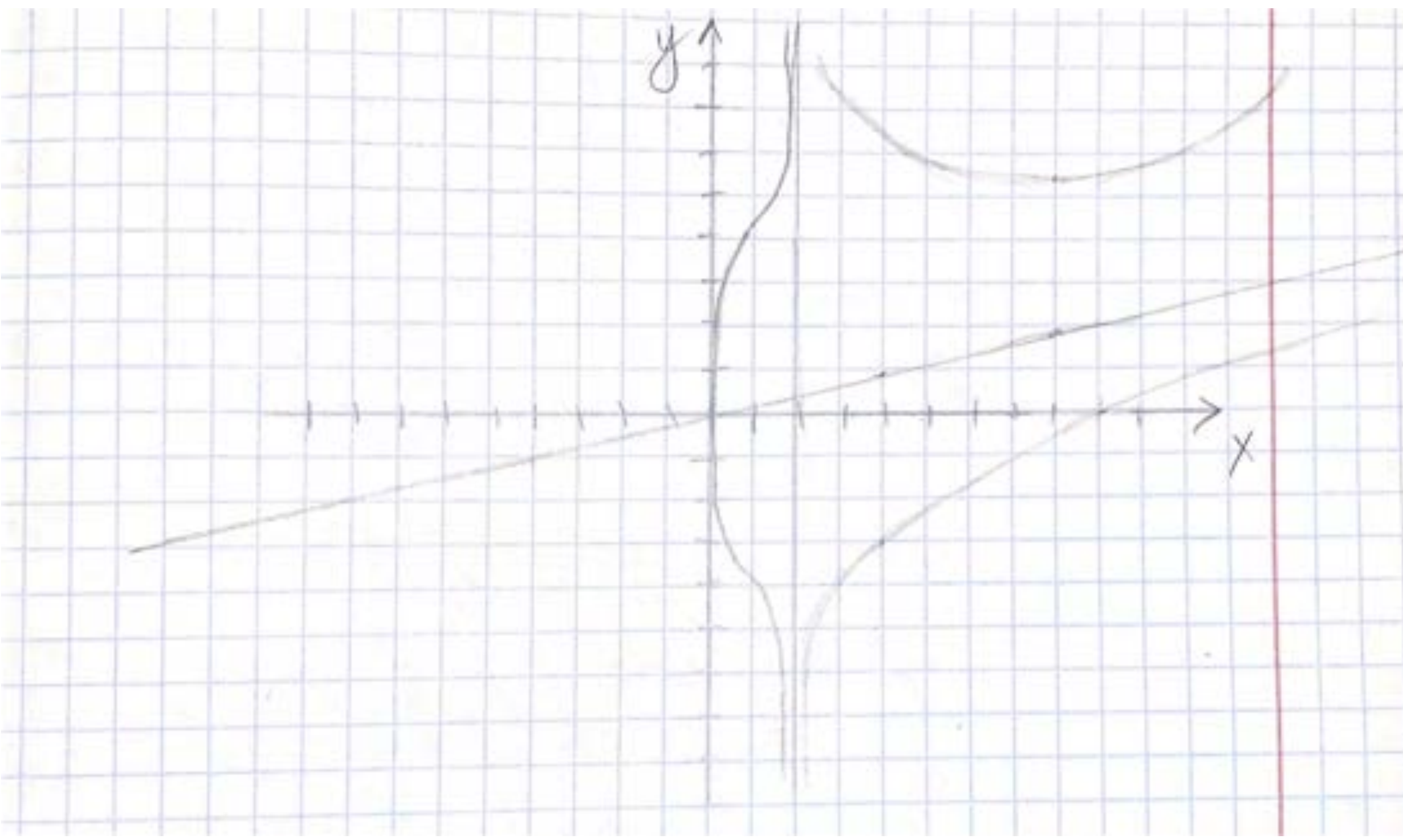
$t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ $t \neq 0$ $t \neq \pm 1$;

Функция строго выпукла вниз при:

$t \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right) \cup (1; \infty)$

Функция строго выпукла вверх при:

$t \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$



y
x