Представление группы в виде объединения классов смежности по данной подгруппе

Пусть G – группа, а H – ее подгруппа. Множество gH называется *левым классом смежности* группы G по подгруппе H (g – элемент группы G). Бинарное отношение «*принадлежать к одному классу смежности*» является отношением эквивалентности (то есть обладает свойствами *рефлексивности, симметричности и транзитивности*).

Из этого следует, что каждая группа является объединением непересекающихся классов смежности по любой ее подгруппе (аналогично левым классам смежности определяются и *правые классы*). А поскольку все классы смежности по данной подгруппе содержат ровно столько же элементов, как и эта подгруппа (или, что то же самое, имеют ту же мощность), это означает, что количество элементов в подгруппе (то есть ее порядок) делит порядок группы (частное от деления называют индексом подгруппы в группе). Рассмотрим примеры.

- Пусть G – циклическая группа порядка 18. Это значит, что в группе G существует такой элемент a, что $a^{18} = e$, причем каждый элемент группы G является степенью a. Если мы рассмотрим множество $H = \{e,\ a^3,\ a^6,\ a^9,\ a^{12},\ a^{15}\}$, легко заметить, что это подгруппа порядка 6. Классы смежности по этой подгруппе могут быть записаны как $\{e,\ a^3,\ a^6,\ a^9,\ a^{12},\ a^{15}\}, \{a,\ a^4,\ a^7,\ a^9,\ a^{13},\ a^{16}\}, \{a^2,\ a^5,\ a^8,\ a^{11},\ a^{14},\ a^{17}\}$. заметим, что группа коммутативная, значит, различия между левыми правыми классами смежности нет. Индекс этой подгруппы равен 18 : 6 = 3 (это количество классов смежности). В итоге группу мы можем представить как объединение непересекающихся классов смежности по подгруппе : $G = \{e,\ a^3,\ a^6,\ a^9,\ a^{12},\ a^{15}\} \cup \{a,\ a^4,\ a^7,\ a^9,\ a^{13},\ a^{16}\} \cup \{a^2,\ a^5,\ a^8,\ a^{11},\ a^{14},\ a^{17}\} = H \cup aH \cup a^2H$
- Если G – группа перестановок из 3-х элементов, то множество $H = \{e,\ (1,3)\}$является подгруппой порядка 2, а всего перестановок в группе 6, следовательно, получается три левых класса смежности: $H = \{e,\ (1,3)\}, (1,2)H = \{(1,2),\ (1,3,\ 2)\}, (2,3)\,H = \{(2,3),\ (1,2,3)\}$. Обратите внимание: группа некоммутативная, и правые классы отличаются от левых: $H = \{e,\ (1,3)\}, H(1,2) = \{(1,2),\ (1,2,3)\}, H(2,3) = \{(2,3),\ (1,3,2)\}$. В итоге мы можем представить группу G как объединение левых классов смежности по подгруппе H:
$$G = \{e,\ (1,3)\} \cup \{(1,2), (1,3,2)\} \cup \{(2,3), (1,2,3)\} = H \cup (1,2)H \cup (2,3)\,H,$$
 а можем представить ее как объединение правых классов смежности:
$G = \{e,\ (1,3)\} \cup \{(1,2),\ (1,2,3)\} \cup \{(2,3),\ (1,3,2)\} = H \cup H(1,2) \cup\ H(2,3)$ (и это разные разбиения группы).
- Если G – группа обратимых матриц по умножению, H – подгруппа верхних треугольных матриц, то каждую обратимую матрицу, как мы знаем, можно представить в виде произведения QR, где Q – ортогональная матрица, а R – треугольная. В то же время, нетрудно проверить, что это представление единственно, то есть если $QR = Q_1R_1$, то $Q = Q_1,\ R = R_1$. Таким образом, все левые классы смежности G по H имеют вид QH, где Q – некоторая ортогональная матрица, и группа G является объединением бесконечного множества таких классов смежности (это значит, что индекс подгруппы H бесконечен).

Важно: два элемента g_1 и g_2 лежат в одном левом классе смежности H по тогда и только тогда, когда ${g_1}^{-1}g_2 \in H$ (соответственно, в правом, если $g_2{g_1}^{-1} \in H$).

Определение и примеры факторгрупп

Естественно попытаться задать на классах смежности структуру группы, определив операцию на классах смежности как операцию над какими-то их представителями: берем два класса смежности, берем из каждого класса по представителю, применяем к ним операцию, попадаем в какой-то класс, и называем этот класс результатом операции. Проблема в том, что так определенная операция может оказаться некорректной: если из тех же классов смежности выбрать другие представители, можно попасть не в тот класс, который мы ранее назвали результатом операции.

Например, если в нашем втором примере из классов смежности $(1,2)H$ и $(2,3)\ H$ взять первые представители$(1,2)$ и $(2,3)$, мы попадем в класс с представителем $(1,2)(2,3) = (1, 2, 3)$, то есть в класс, который мы обозначили как $(2,3)H$. А если взять представители $(1,3,2)$ и $(1,2,3)$, то попадем в класс с представителем $(1,3,2)(1,2,3) = e$, то есть H.

Таким образом, множество классов смежности по произвольной подгруппе не является группой относительно той операции, которую мы попытались ввести. Для того, чтобы такая операция оказалась корректной, надо наложить на подгруппу H дополнительное условие, а именно: надо, чтобы каждый левый класс по этой подгруппе совпадал с правым классом с тем же представителем, то есть $gH = \ Hg$, для каждого элемента g группы G. Подгруппы, отвечающие такому требованию, называются *нормальными делителями* группы G, или просто *нормальными подгруппами*.

Действительно, пусть H – нормальный делитель. Выберем два класса смежности g_1H и g_2H, из первого класса возьмем некоторый элемент g_1h_1, а из второго – элемент g_2h_2, где h_1, h_2 – некоторые элементы подгруппы H. Тогда произведение этих элементов равно $g_1h_1g_2h_2$, но поскольку левые классы по подгруппе H совпадают с правыми, то найдется такой элемент $h_3\epsilon H$, что $h_1g_2 = g_2h_3$, а тогда $g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2h_3h_2\epsilon g_1g_2H$. Это и означает, что так определенная операция на классах смежности не зависит от выбора представителей из этих классов.

Полученная структура называется *факторгруппой группы G по подгруппе H*.

Важно: в коммутативной группе каждая подгруппа является нормальным делителем, а в некоммутативных группах это не так. Например, рассмотренная нами подгруппа группы перестановок нормальной не является (левые классы не совпадают с правыми, и умножение классов смежности определяется некорректно). Соответственно, факторгруппу по этой подгруппе построить нельзя.

Рассмотрим некоторые примеры факторгрупп.

1. В группе перестановок трех элементов рассмотрим подгруппу $U = \{e,\ \ (1,2,3),\ \ (1,3,2)\}$. Это подгруппа индекса 2 (то есть классов смежности по этой подгруппе всего 2), и эта подгруппа, очевидно, является нормальной (дополнение ее до всей группы одновременно является и левым, и правым смежным классом). В этом случае факторгруппа состоит из двух элементов (мы их можем записать, например, как U и $(1,2)U$), при этом, как нетрудно проверить, произведение любых двух элементов из $(1,2)U$ принадлежит U, произведение элементов из $(1,2)U$ и U принадлежит $(1,2)U$, а произведение любых двух элементов из U принадлежит U. Это и означает, что множество из этих двух классов смежности является циклической группой порядка 2.

<u>**Упражнение**</u> Докажите, что любая подгруппа индекса 2 является нормальным делителем.

2. Пусть G – группа всех комплексных чисел, не равных 0 относительно операции умножения, H – подгруппа чисел, модуль которых равен 1. Поскольку – группа коммутативная, то является нормальным делителем. Посмотрим, что собой представляют классы смежности: это множества вида $zH = \{zh | h \in H\}$, где z – некоторое комплексное число. Что означает, что два комплексных числа z_1 и z_2 попадают в один класс смежности по H? Это значит, что существует число z, такое, что $z_1 \in zH$ и $z_2 \in zH$, то есть найдутся числа h_1, h_2 из H, для

которых верны равенства $z_1 = zh_1$, $z_2 = zh_2$, то есть $z = {h_1}^{-1}z_1 = {h_2}^{-1}z_2$, следовательно, модули чисел z, z_1, z_2 равны между собой. С другой стороны, ясно, что если у двух чисел z_1 и z_2 равны модули, то отношение этих чисел $h = z_1 : z_2$ имеет модуль 1 и лежит в группе H, следовательно, $z_1 = z_2 h$, и эти числа лежат в одном классе смежности по H.
Если вспомнить, что комплексные числа с одинаковым модулем изображаются точками окружности с центром 0 и радиусом, равным модулю, то мы получим следующую картинку: элементы факторгруппы – это концентрические окружности с центром 0, а премножаются эти окружности следующим образом: окружность-произведение имеет радиус, равный произведению радиусов окружностей-сомножителей.

3. Пусть $G = GL_n(R)$ – это группа обратимых матриц порядка n с вещественными элементами, а $H = SL_n(R)$ – это подгруппа матриц, определитель которых равен 1. Для начала проверим, что H является нормальным делителем группы G. Для этого надо убедиться, что для любой матрицы $g \in G$ верно равенство множеств $gH = Hg$, но это значит, что $gHg^{-1} = H$, а это очевидным образом верно: все матрицы в левой части равенства имеют определитель 1, и любая матрица с определителем 1 может быть представлена в нужном виде. Нетрудно проверить, что все матрицы с фиксированным определителем лежат в одном классе смежности, а матрицы с разными определителями – в разных. Таким образом, элементы факторгруппы в этом случае – это множества матриц с одним определителем, а умножение классов равносильно умножению определителей.