Основные определения и свойства, которые следует знать наизусть.

1. В каком случае события $A_1, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности.**
2. Формула полной вероятности**
3. Формулы Байеса**
4. Свойства вероятности*
5. Что такое испытания Бернулли и Формула Бернулли*
6. Интегральная теорема Муавра-Лапласа*
7. Теорема Пуассона и как ее применять*
8. Локальная теорема Муавра-Лапласа
9. Аксиомы вероятности*
10. Закон больших чисел в форме Бернулли*
11. Что называется случайной величиной*
12. Что называется функцией распределения случайной величины**
13. Как вычислить $P(\eta \in [0,1])$, зная F_η.
14. Какие случайные величины называются дискретными**
15. Какие случайные величины называются абс. непрерывными.**
16. Четыре свойства функции распределения.**
17. Что называется условной вероятностью события A при условии B (формула).*
18. Что называется функцией распределения случайного вектора.**
19. Какие случайные вектора называются дискретными.*
20. Что называются плотностью распределения случайного вектора.*
21. Какие случайные величины называются независимыми.**
22. Критерий независимости в терминах функций распределения.*
23. Критерий независимости в терминах плотностей.*
24. Что называется условной функцией распределения случайного вектора ξ при условии η.
25. Что называется условной плотностью распределения случайного вектора ξ при условии η.*
26. Что называется условным мат.ожиданием ξ при условии η, если (ξ, η) абс. непр. случайный вектор.
27. Мат. ожидание и его свойства**
28. Дисперсия и ее свойства**
29. Что называется условным мат.ожиданием ξ при условии η, если (ξ, η) – дискретный случайный вектор.
30. Свойства условных мат. ожиданий.
31. Как вычислить $P\Big(\xi \in [a,b), \eta \in [c,d)\Big)$, зная совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}$.
32. Неравенство Йенсена для мат. ожиданий.
33. Вычисление распределения суммы независимых случайных величин. Формула свертки.*
34. Неравенства Чебышева и где они применяются.**
35. Неравенство Гельдера для мат. ожиданий.
36. Неравенство Минковского для мат. ожиданий.
37. Последовательности независимых случайных величин (НСВ) и марковские последовательности. Примеры марковских последовательностей, построенных по последовательности НСВ.
38. Что означает $\xi_n \to \xi$ по вероятности; $\xi_n \to \xi$ с вероятностью 1; $\xi_n \to \xi$ в среднеквадратическом. **
39. Как вычислить мат. ожидание и дисперсию случ. величины, зная ее характеристическую функцию.
40. Формула полной вероятности для плотности распределения суммы 2-х случайных величин.
41. Определение слабой сходимости и ее связь с другими видами сходимости.*
42. Неравенство Ляпунова для мат. ожиданий.
43. Теорема Маркова о законе больших чисел.
44. Что называется законом больших чисел и его запись с использованием известных видов сходимости последовательностей случайных величин.
45. Сформулировать ЦПТ Леви в частном случае испытаний Бернулли.
46. Центральная предельная теорема Леви.**
47. В чем заключается классическое определение вероятности.
48. В чем заключается геометрическое определение вероятности.
49. Неравенство Коши-Буняковского для мат. ожиданий.*
50. Теорема Чебышева о законе больших чисел.*
51. Что такое ковариация и коэффициент корреляции.*
52. Что называется периодом неприводимой цепи Маркова.
53. Что называется плотностью распределения случайной величины.*
54. Как вычислить $P(\eta \in [0,1])$ зная плотность распределения p_η.
55. Формулы, связывающие плотность распределения и функцию распределения.
56. Теорема Радона Никодима и что такое производная Радона-Никодима меры μ по мере ν.*
57. В каком случае существует производная Радона-Никодима меры μ по мере ν и что означает запись $\mu << \nu$.
58. Какая функция называется измеримой.

59. Продолжить формулу $P(A \cup B \cup C) = \ldots$.
60. Какое событие называется противоположным событию A.
61. Привести пример попарно независимых событий, не являющихся независимыми в совокупности.
62. Марковское свойство, что называется цепью Маркова и уравнения Маркова.
63. Условие эргодичности неприводимой цепи Маркова и вычисление финальных вероятностей.
64. μ_n-число успехов в сх. Бернулли с вер-ю успеха p. При каком k достигается максимум $P(\mu_n = k)$.
65. Определение и основные свойства (не менее 5-ти) характеристических функций.
66. Критерий возвратности для цепей Маркова. Пример невозвратной неприводимой ЦМ.
67. Записать формулу преобразования плотностей при преобразованиии g ($\eta = g(\xi)$), если g-дифференцируемая функция и $g'(x) < 0$ для любого x.
68. Что такое равномерное распределение $\xi \in U(a, b)$, его тип, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.
69. Что такое нормальное распределение $\xi \in N(a, \sigma^2)$, его тип, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, характеристическая функция*.
70. Что такое распределение Пуассона $\xi \in Pois(\lambda)$, его тип, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, характеристическая функция.
71. Как вычислить дисперсию $\xi + \eta$, зная дисперсии величин ξ и η и коэффициент корреляции между ними.
72. Что такое распределение Бернулли. Его тип, мат. ожидание, дисперсия, характеристическая ф-я.

Далее предлагаются примеры задач, которые следует уметь решать.

1. Известно, что $P(A) = P(B) = 1/2$ а $P(AB) = 1/4$. Вычислить $P(A \backslash B)$.

2. Какое среднее число успехов в 500 испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $1/4$.

3. Известно, что команда A заведомо слабее команды B и вероятность победы A в каждой игре независимо от других равна $1/3$. Что выгоднее, играть серию из 3-х или из 5-ти игр, если для победы в серии надо выиграть более половины игр.

4. Как вычислить $P(\eta \in [a, b])$ зная F_η.

5. Привести пример распределения абс. непрерывного типа.

6. Привести пример распределения дискретного типа.

7. Привести пример распределения с отрицательным мат. ожиданием.

8. Привести пример распределения с нулевой дисперсией.

9. Являются ли координаты точки, наугад брошенной в единичный круг независимыми случайными величинами.

10. Случайная величина ξ имеет ф.р. F (F непрерывная). Какое распределение будет иметь с.в. $F(\xi)$

11. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют одинаковые функции распределения F. Выписать функцию их совместного распределения.

12. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют одинаковые функции распределения F. Вычислить функции распределения случайных величин $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

13. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют одинаковые равномерные на [0,1] распределения. Вычислить мат. ожидание величин $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

14. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ одинаково распределены и имеют мат. ожидание a, дисперсию σ и матрицу корреляции R. Вычислить $\mathbf{E}(X_1 + \ldots + X_n)$ и $\mathbf{D}(X_1 + \ldots + X_n)$.

15. Случайные величины X_1, X_2 имеют совместную функцию распределения F, т.ч. $F(x, y) = F(y, x)$ при любых x, y. Чему равно $E(X|X + Y)$.

16. Случайные величины X и Y независимы и имеют одинаковые плотности распределения p. Вычислить распределение линейной комбинации $\alpha X + \beta Y$.

17. Может ли быть $\mathbf{E}\xi^4 = 16$, а $\mathbf{E}\xi^2 = 9$, обосновать.

18. X и Y независимые и одинаково распределенные случайные величины. Правда ли, что случайная величина $X - Y$ симметрична, т.е. $F_{X-Y}(-x) = 1 - F_{X-Y}(x)$? Обосновать.

19. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин: $P(\xi_1{=}1){=}1{-}P(\xi_1{=}{-}1){=} = 1/3$; $\mu_k = \sum_{j=1}^k \xi_j$. Показать, что $k^{-\alpha}\mu_k \to -\infty$ по вероятности при любом $0 < \alpha \leq 1$.

20. Всхожесть семян (ожидаемое число взошедших семян на 1000) составляет 0.75. Получена партия из 1000 семян; ξ – число взошедших семян.
(i). Оценить сверху $P(\xi > 800)$;
(ii). Известно, что дисперсия числа взошедших семян из 1000 равна 180. Оценить снизу $P(\xi \in [700, 800])$; сверху $P(\xi > 800)$;
(iii). Исходя из того, что всход семян – независимые случайные величины, вычислить приближенно вероятности из п. (i)-(ii).

21. Число вызовов, поступающих на телефонную станцию за час, в среднем составляет 300.
(i). Оценить вероятность того, что в ближайший час на ТС поступит >400 вызовов.
(ii). Исходя из того, что вызовы поступают независимо и общее число вызовов имеет распределение Пуассона, оценить сверху вероятность из (i).
(iii). В условиях (ii) вычислить приближенно вероятность из (i).
(iv). В условиях (ii) вычислить приближенно вероятность, что наибольшее число вызовов в час не превысит 400 в течение ближайших 10 часов.

Могут быть предложены также другие (стандартные) задачи на тему
а). Классическое определение вероятности.
б). Формула полной вероятности, формулы Байеса.
в). Независимые эксперименты
г). Вычисление вероятностей в схеме Бернулли.
д). Случайные величины и их числовые характеристики.
е). Вычисление распределений преобразованных с.в.
ж). Вычисление распределений компонент случайного вектора по совместному распределению.
з). Вычисление условных распределений и мат. ожиданий.
и). Классификация состояний однородной цепи Маркова и вычисление финальных вероятностей.