5 лекция

28 сентября 2022 г. 13:47

Утв. №61

Пусть $\{u_n(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} u(x)$

$g(x)$: $\exists M>0$ $|g(x)|<M$ $\forall x\in X$

Тогда $\{g(x)u_n(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} g(x)u(x)$

Док-во:

Если $\{u_n(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} u(x)$

$\forall \varepsilon>0$ $\exists N$: $\forall n>N$ $\forall x\in X$

$|u_n(x)-u(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$

$|g(x)u(x)-g(x)u_n(x)|=|g(x)(u(x)-u_n(x))|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

Ex При домножении равномерная сходимость сохраняется

$$f(x)-\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\,|\cdot\cos(mx)\cdot x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(mx)dx=\pi a_m$$

def №63

$S_n(x,f)$ — частичная сумма ряда Фурье для функции f

def (T-периодичная функция) №64

T-периодична f $x+T$ и $x-T\in D(f)$

$\exists T>0$ $\forall x\in D(f)$ $f(x+T)=f(x)$ $\forall x\in D(f)$

def №62

Пусть f - абсолютно интегрируемая функция на $[-\pi,\pi]$, тогда тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$, коэффициенты которого задаются

$\left[a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx\right]$ и т.д. называют рядом Фурье функции f.

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos(nx)+b_n\cdot\sin(nx))$$

Стремление коэффициентов Фурье к нулю

Th (Римана) №65

Пусть $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция

Тогда $-\infty\le a<b\le+\infty$ $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx=$

$=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx$

Следствие №65

$a_n, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

def №66

Назовём замыкание множества точек, где $f(x)\neq0$ носителем функции f

$\mathrm{Supp}f:=\overline{\{x: f(x)\neq0\}}$ само множество + предельные точки (граница)

$D(f(x))=\mathbb{R}$

def №67

$f(x)$ называется финитной, если $\exists a,b\in\mathbb{R}$: $\mathrm{Supp}f\subset[a,b]$

def №68

$\forall E\subset\mathbb{R}$ характеристической функцией множества E называют

$$\chi(x)=\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\0, & x\notin E\end{cases}$$

def №69

Функция f называется финитной ступенчатой функцией, если она является линейной комбинацией конечного числа характеристических функций попарно не пересекающихся интервалов

$[a_i,b_i)$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\chi_i(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_{-\infty}^{\infty}\chi_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(b_i-a_i)$$

Lm №70

$\forall f$ - абсолютно интегрируемой на $[a,b]$

$\exists\{\varphi_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ φ_n — финитная ступенчатая

1. $\mathrm{supp}\,\varphi_n\subset(a,b)$
2. $\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f(x)-\varphi_n(x)|dx=0$

Док-во (Th Римана) №65

Пусть χ - характеристическая функция $[\xi,\eta)$

$\forall(a,b)\supset[\xi,\eta)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b(\chi(x)\sin(nx))dx=\lim_{n\to\infty}\int_\xi^\eta\sin(nx)dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-\cos(\eta n)+\cos(\xi n)}{n}\right)\le\frac{2}{n}\to0$$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\varphi$ из №70 $\left|\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)dx\right|=$

$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}$

для $\varphi(x)$ $\exists N$: $\forall n>N$ $\left|\int_a^b\varphi(x)\sin(nx)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ ступенчатая

$f(x)=(f(x)-\varphi(x))+\varphi(x)$

$$=\left|\int_a^b(f(x)-\varphi(x)+\varphi(x))\sin(nx)dx\right|\le$$

$$\le\int_a^b|(f(x)-\varphi(x))\sin(nx)|dx+\int_a^b|\varphi(x)\sin(nx)dx|$$

$<\frac{\varepsilon}{2}$ $<\frac{\varepsilon}{2}$

Интеграл Дирихле. Принцип локализации

def (ядро Дирихле) №71

Пусть f - абсолютно интегрируемая функция на $[-\pi,\pi]$ $\exists f\in L^1[-\pi,\pi]$

$$S_n(x,f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(\cos(kx)\cos(kt)+\sin(kx)\sin(kt))dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right]dt$$

Пусть $D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$

Тогда $S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t-x)f(t)dt$

Lm (ядро Дирихле) №72

1. $D_n(0)=n+\frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt=1$
3. $t\neq2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}_+$ $D_n(t)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$

Док-во:

1) Чётная, непрерывная 2π - период

2) $\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dt+\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)dt=\pi$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,dkt=\sum\frac{2}{k}\sin k\pi$ $dkt=kdt$ $=0$

3) $D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=$

$$=\frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})}\left(\sin\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{t}{2}\cos(kt)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})}\left(\sin\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right)\right)=\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$\sin\frac{2n+1}{2}t$

Свойства №73

$$\int_{-\pi}^{0}D_n(t)dt=\int_0^{\pi}D_n(t)dt$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt=2\int_0^{\pi}D_n(t)dt$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)dt=1$$

Lm №74

Пусть f - 2π-периодичная функция абсолютно интегрируема

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)f(x+t)dt$$

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dt$$

Док-во:

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t-x)f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}D_n(u)f(x+u)du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(u)f(x+u)du$$

$u=t-x$, сместили отрезок

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(u)\cdot f(x+u)du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}D_n(u)f(x+u)du+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(u)f(x+u)du=$$

$u\to-t$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)f(x-t)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(u)f(x+u)du=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(u)[f(x-u)+f(x+u)]du$$

Следствие №75

$\forall\delta\in(0,\pi)$ $\forall x\in[-\pi,\pi]$

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dt+o(1),\ n\to\infty$$

Док-во:

Пусть $0<\delta<\pi$ $\quad S_n(x,t)=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)[\ldots]$

$\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ - непрерывна и ограничена на $[\delta,\pi]$

$0<\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\le\frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}$ $\quad\forall t\in[\delta,\pi]$

$$\int_{\delta}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{u}{2}}[f(x-u)+f(x+u)]du=\underset{n\to\infty}{o(1)}$$

абсолютно интегрируема

По Th Римана