МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе № 1
по дисциплине «Методы оптимизации»
Тема: Методы безусловной оптимизации

Студент гр. 0304 ____________________ Асташёнок М.С.

Преподаватель ____________________ Мальцева Н.В.

Санкт-Петербург
2023

Цели работы.

1. Решение задачи безусловной минимизации функций с помощью стандартной программы.
2. Исследование и объяснение полученных результатов.

Постановка задачи (Вариант 15).

Минимизировать функцию

$$F(x_1, x_2, a) = (x_2 - x_1^2)^2 + a(x_1 - 1)^2$$

с точностью до 10^{-5}, т.е.:

$$|F(x_{1k}, x_{2k}, a) - F(x_1^*, x_2^*, a)| < 10^{-5}$$

градиентными методами – методом с дроблением шага и методом наискорейшего спуска.

Оценить скорость и порядок сходимости обоих методов.

Провести сравнительный анализ эффективности методов в зависимости от начальной точки и величины шага.

Параметр a положить равным $a = 20$.

Основные теоретические положения.

Формулы для оценки скорости и порядка сходимости градиентных методов в данной лабораторной работе:

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln\Delta_{k+1}}{\ln\Delta_k}$ - порядок сходимости метода, где $\Delta_k = \|x_k - x^*\|$

$\varphi(x_k) - \varphi(x^*) \le const \cdot q^k$ – геометрическая скорость сходимости, где $q<1$

$\varphi(x_k) - \varphi(x^*) \le const \cdot q^{2k}$ – квадратичная скорость сходимости, где $q<1$

Градиентные методы.

В данной лабораторной работе мы рассматриваем следующую задачу:

$$\phi(x) \to min, x \in X,$$

Где X – замкнутое ограниченное множество в R^n, $\phi(x)$ – непрерывная целевая функция над R^n .

Данная задача называется *задачей безусловной минимизации*. Применение градиентных методов в данной задаче заключается в построении релаксационной последовательности:

$$\{x_k\}: x_{k+1} = x_k - \alpha_k \phi'(x_k)$$

Градиентные методы, в частности, перечисленные ниже, различаются между собой способом выбора α_k.

Метод наискорейшего спуска.

Данный метод представляет собой одношаговый градиентный метод первого порядка.

На луче $\{x \in R^n: x = x_k - \alpha\phi'(x_k), \alpha \geq 0\}$, направленном по антиградиенту, вводится функция одной переменной:

$$\psi(\alpha) = \phi\big(x_k - \alpha\phi'(x_k)\big), \alpha \geq 0$$

И определяется α_k из условий:

$$\alpha_k = \arg\min \phi(x_k - \alpha\phi'(x_k))$$

Скорость сходимости данного метода линейная, а порядок сходимости равен единице. Стоит также отметить, что на каждом следующем шага метода направление спуска меняется на ортогональное (как показано на рисунке 1).

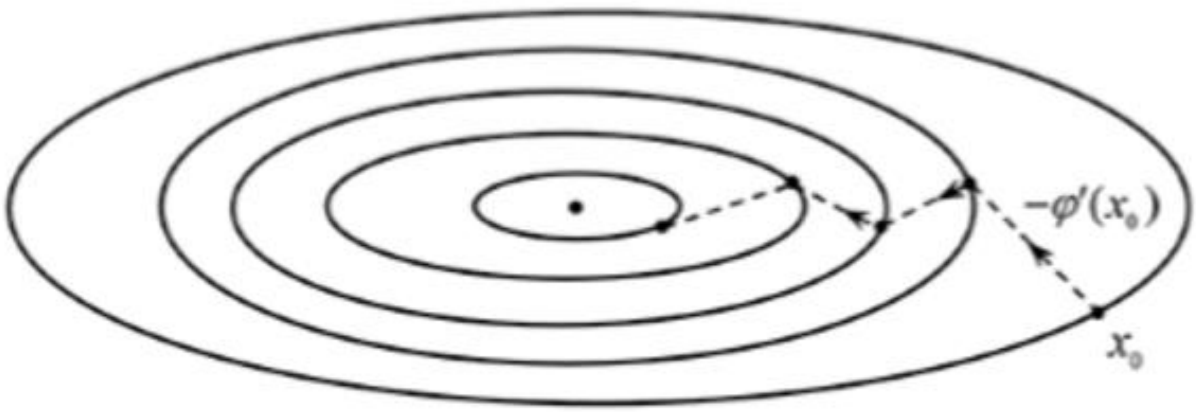

Рисунок 1. Спуск с помощью МНС с ортогональной сменой направления шага.

Метод с дроблением шага.

Метод с дроблением шага представляет собой одношаговый метод первого порядка.

Данный метод предлагает адаптивный способ выбора коэффициентов α_k. Выбираются некоторые $const\ \beta > 0$ и $0 < \lambda < 1$ (обычно $\lambda = \frac{1}{2}$). Для коэффициента $\alpha = \beta$ проверяется выполнение условия $\phi\left(x_k - \alpha\phi'(x_k)\right) \le \phi(x_k)$. Если оно выполняется, то полагают $\alpha_k = \alpha$. Если нет, то производится дробление шага, т.е. принимается $\alpha = \lambda\beta$, и т.д. до тех пор, пока не выполнится требуемое неравенство.

Процесс дробления не может продолжаться бесконечно, поскольку $-\phi'(x)$ – направление убывания функции. Первое α, при котором условие выполнено и принимается за α_k.

Выполнение работы.

1. Выбор перечня вариантов запуска программы.

Функция $F(x_1, x_2, a) = (x_2 - x_1^2)^2 + 20 * (x_1 - 1)^2$ очевидно неотрицательная, т. к. она состоит из суммы неотрицательных выражений (квадратов разностей). Также очевидно, что функция принимает значение 0 при $x_1 = 1, x_2 = 1$ и любом значении параметра a. Таким образом, минимум функции достигается в точке $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (1,1)$.

Для сравнения эффективности методов в зависимости от параметров x_1, x_2 можно выбрать начальные точки следующим образом:

Начальная точка	Комментарий
(5, 5)	Точка, близкая к точке минимума x^*
(50, 50)	Точка, далекая от точки минимума x^*
(5, 50)	Параметр x_1 близок к x_1^*, параметр x_2 далек от x_2^*
(50, 5)	Параметр x_1 далек от x_1^*, параметр x_2 близок к x_2^*

Для сравнения эффективности метода с дроблением шага в зависимости от выбора β, можно рассмотреть следующие значения этого коэффициента:

$$\beta \in \{0.1, 1, 10, 100\}, \text{т. к.}\ \beta - const \text{ и } \beta > 0$$

2. Решение задачи минимизации.

Для решения задачи использовалась предоставленная программа. Количество шагов задается равным 100, интервал для печати — 1. Начальная точка, длина шага и метод задаются в зависимости от варианта запуска программы. В протокол работы включаются около 20 последних шагов.

Метод наискорейшего спуска:

1	1.469814	5.252156	13.9737493580	9
2	1.044794	0.979133	0.0527776347	18
3	0.998572	0.983730	0.0002207817	10
4	1.000598	0.999042	0.0000118049	17
5	0.999924	0.999132	0.0000006286	11

Рисунок 2. МНС при x = (5, 5)

1	6.435001	49.788970	661.0046355700	9
2	1.449773	0.803326	5.7320508494	20
3	0.987433	0.850374	0.0186961723	11
4	0.993331	0.992722	0.0009256783	17
5	0.999361	0.992473	0.0000472272	11
6	0.999683	0.999676	0.0000021098	17

Рисунок 3. МНС при x = (5, 50)

1	-5.090879	5.548753	1156.8439221000	5
2	1.531791	5.958509	18.7034800730	11
3	1.735263	4.250167	12.3474226360	14
4	1.310915	4.199636	8.0894085961	11
5	1.458723	2.921052	4.8376659919	16
6	1.168789	2.887531	2.8846450885	11
7	1.264473	2.082122	1.6324274856	15
8	1.090051	2.061400	0.9246420008	10
9	1.146134	1.584220	0.5003259245	16
10	1.047062	1.572576	0.2710985151	11
11	1.078092	1.308921	0.1434702097	14
12	1.024492	1.302611	0.0760198186	11
13	1.040835	1.158107	0.0389401573	15
14	1.012427	1.154893	0.0199587248	11
15	1.020793	1.079730	0.0100694139	16
16	1.006231	1.078109	0.0050810052	11
17	1.010495	1.040429	0.0025764686	17
18	1.003154	1.039599	0.0013065607	11
19	1.005303	1.020276	0.0006553693	15
20	1.001578	1.019861	0.0003287852	11
21	1.002666	1.010259	0.0001663425	17
22	1.000799	1.010048	0.0000841569	11
23	1.001345	1.005139	0.0000421621	15
24	1.000400	1.005034	0.0000211229	11
25	1.000675	1.002599	0.0000106812	17
26	1.000202	1.002545	0.0000054014	11

Рисунок 4. МНС при x = (50, 5)

44	1.005746	1.076879	0.0049314749	10
45	1.010696	1.057309	0.0035698280	13
46	1.004158	1.055655	0.0025851497	10
47	1.007744	1.041375	0.0018664223	15
48	1.003000	1.040184	0.0013479007	10
49	1.005591	1.029828	0.0009717535	14
50	1.002159	1.028969	0.0007006805	10
51	1.004028	1.021556	0.0005062957	14
52	1.001560	1.020933	0.0003659010	10
53	1.002911	1.015547	0.0002639135	13
54	1.001124	1.015099	0.0001903788	10
55	1.002099	1.011239	0.0001376195	14
56	1.000813	1.010914	0.0000994806	10
57	1.001517	1.008110	0.0000717810	15
58	1.000586	1.007876	0.0000518003	10
59	1.001094	1.005863	0.0000374475	15
60	1.000424	1.005694	0.0000270741	10
61	1.000792	1.004231	0.0000195387	16
62	1.000306	1.004109	0.0000141005	10
63	1.000571	1.003059	0.0000101956	15
64	1.000221	1.002971	0.0000073724	10

Рисунок 5. МНС при x = (50, 50)

Градиентный метод с дроблением шага:

Длина шага β равна 0.1:

51	1.002819	1.028593	0.0006855023	3
52	1.000749	1.024004	0.0005176847	1
53	1.002252	1.022878	0.0004388626	3
54	1.000608	1.019205	0.0003309830	1
55	1.001800	1.018305	0.0002809445	3
56	1.000491	1.015365	0.0002116612	1
57	1.001439	1.014646	0.0001798417	3
58	1.000396	1.012292	0.0001353786	1
59	1.001904	1.011143	0.0001262598	2
60	1.000734	1.010776	0.0000974010	3
61	1.001522	1.008915	0.0000807709	1
62	1.000588	1.008621	0.0000623439	3
63	1.001217	1.007132	0.0000516753	1
64	1.000470	1.006897	0.0000399038	3
65	1.000973	1.005706	0.0000330630	1
66	1.000376	1.005518	0.0000255403	3
67	1.000778	1.004565	0.0000211556	1
68	1.000301	1.004415	0.0000163468	3
69	1.000622	1.003652	0.0000135371	1
70	1.000241	1.003532	0.0000104624	3
71	1.000498	1.002922	0.0000086625	1

Рисунок 6. Метод с дроблением шага при x = (5, 5) и $\beta = 0.1$

222	1.002231	1.030849	0.0007955312	3
223	1.003882	1.025572	0.0006179910	1
224	1.001786	1.024683	0.0005093207	3
225	1.003099	1.020461	0.0003952504	1
226	1.001430	1.019749	0.0003260578	3
227	1.002475	1.016371	0.0002528260	1
228	1.001144	1.015800	0.0002087245	3
229	1.001978	1.013098	0.0001617403	1
230	1.000916	1.012641	0.0001336080	3
231	1.001580	1.010480	0.0001034790	1
232	1.000733	1.010114	0.0000855215	3
233	1.001263	1.008384	0.0000662088	1
234	1.000586	1.008091	0.0000547402	3
235	1.001010	1.006708	0.0000423645	1
236	1.000469	1.006473	0.0000350370	3
237	1.000807	1.005366	0.0000271087	1
238	1.000375	1.005179	0.0000224253	3
239	1.000646	1.004293	0.0000173472	1
240	1.000300	1.004143	0.0000143531	3
241	1.000516	1.003435	0.0000111010	1
242	1.000240	1.003315	0.0000091864	3

Рисунок 7. Метод с дроблением шага при x = (5, 50) и $\beta = 0.1$

47	1.003185	1.031965	0.0008574612	3
48	1.000712	1.026848	0.0006564566	1
49	1.002544	1.025577	0.0005489646	3
50	1.000582	1.021480	0.0004195425	1
51	1.002033	1.020464	0.0003514348	3
52	1.000473	1.017186	0.0002682123	1
53	1.001625	1.016374	0.0002249684	3
54	1.000383	1.013749	0.0001715078	1
55	1.001299	1.013100	0.0001440055	3
56	1.000309	1.011000	0.0001096903	1
57	1.001038	1.010481	0.0000921767	3
58	1.000249	1.008800	0.0000701640	1
59	1.000830	1.008385	0.0000589999	3
60	1.000201	1.007040	0.0000448858	1
61	1.000664	1.006709	0.0000377634	3
62	1.000161	1.005633	0.0000287172	1
63	1.000531	1.005367	0.0000241703	3
64	1.000129	1.004506	0.0000183740	1
65	1.000425	1.004294	0.0000154699	3
66	1.000104	1.003605	0.0000117569	1
67	1.000340	1.003435	0.0000099012	3

Рисунок 8. Метод с дроблением шага при x = (50, 5) и $\beta = 0.1$

181	1.002356	1.031908	0.0008503166	3
182	1.003833	1.026470	0.0006468416	1
183	1.001886	1.025530	0.0005444073	3
184	1.003060	1.021179	0.0004137533	1
185	1.001510	1.020427	0.0003485255	3
186	1.002444	1.016946	0.0002646878	1
187	1.001208	1.016343	0.0002231101	3
188	1.001952	1.013558	0.0001693421	1
189	1.000967	1.013076	0.0001428180	3
190	1.001560	1.010847	0.0001083493	1
191	1.000774	1.010461	0.0000914176	3
192	1.001247	1.008679	0.0000693285	1
193	1.000619	1.008369	0.0000585145	3
194	1.000997	1.006943	0.0000443626	1
195	1.000495	1.006696	0.0000374530	3
196	1.000797	1.005555	0.0000283881	1
197	1.000396	1.005357	0.0000239718	3
198	1.000637	1.004444	0.0000181664	1
199	1.000317	1.004286	0.0000153429	3
200	1.000510	1.003555	0.0000116255	1
201	1.000254	1.003429	0.0000098200	3

Рисунок 9. Метод с дроблением шага при x = (50, 50) и $\beta = 0.1$

Длина шага β равна 1:

67	1.000353	1.015057	0.0002084164	5
68	1.001706	1.014160	0.0001736638	6
69	1.000132	1.012817	0.0001579300	5
70	1.001536	1.012032	0.0001274392	6
71	1.000737	1.011472	0.0001108176	6
72	1.001395	1.010223	0.0000941450	5
73	1.000581	1.009758	0.0000806397	6
74	1.001278	1.008684	0.0000702041	5
75	1.000447	1.008301	0.0000588559	6
76	1.001182	1.007375	0.0000530351	5
77	1.000332	1.007062	0.0000431437	6
78	1.000717	1.006662	0.0000376116	6
79	1.000232	1.006009	0.0000318215	5
80	1.000635	1.005662	0.0000273546	6
81	1.000146	1.005113	0.0000236771	5
82	1.000566	1.004812	0.0000199502	6
83	1.000070	1.004352	0.0000178330	5
84	1.000509	1.004089	0.0000146088	6
85	1.000005	1.003705	0.0000136547	5
86	1.000461	1.003474	0.0000107596	6
87	1.000204	1.003315	0.0000092798	6

Рисунок 10. Метод с дроблением шага при x = (5, 5) и $\beta = 1$

117	1.000847	1.015331	0.0002003021	6
118	1.002142	1.013626	0.0001789710	5
119	1.000634	1.013043	0.0001466717	6
120	1.001994	1.011571	0.0001369784	5
121	1.000451	1.011097	0.0001080168	6
122	1.001162	1.010460	0.0000931835	6
123	1.000292	1.009443	0.0000801861	5
124	1.001035	1.008890	0.0000679117	6
125	1.000155	1.008037	0.0000601985	5
126	1.000927	1.007554	0.0000496759	6
127	1.000035	1.006842	0.0000458907	5
128	1.000838	1.006419	0.0000365295	6
129	1.000384	1.006122	0.0000316168	6
130	1.000763	1.005453	0.0000270666	5
131	1.000300	1.005208	0.0000230279	6
132	1.000702	1.004632	0.0000202688	5
133	1.000228	1.004430	0.0000168301	6
134	1.000651	1.003933	0.0000154007	5
135	1.000166	1.003769	0.0000123616	6
136	1.000388	1.003554	0.0000107283	6
137	1.000113	1.003207	0.0000091438	5

Рисунок 11. Метод с дроблением шага при x = (5, 50) и $\beta = 1$

73	1.001029	1.016199	0.0002211188	6
74	1.001995	1.014432	0.0001885580	5
75	1.000808	1.013779	0.0001609801	6
76	1.001830	1.012259	0.0001408788	5
77	1.000619	1.011722	0.0001175706	6
78	1.001695	1.010411	0.0001067008	5
79	1.000455	1.009973	0.0000862628	6
80	1.001019	1.009406	0.0000750479	6
81	1.000314	1.008485	0.0000637039	5
82	1.000904	1.007994	0.0000546038	6
83	1.000192	1.007221	0.0000474804	5
84	1.000807	1.006794	0.0000398461	6
85	1.000086	1.006146	0.0000358433	5
86	1.000725	1.005773	0.0000292010	6
87	0.999993	1.005233	0.0000275281	5
88	1.000658	1.004905	0.0000215308	6
89	1.000285	1.004681	0.0000185225	6
90	1.000601	1.004167	0.0000160141	5
91	1.000220	1.003981	0.0000135071	6
92	1.000555	1.003539	0.0000120554	5
93	1.000165	1.003387	0.0000098891	6

Рисунок 12. Метод с дроблением шага при x = (50, 5) и $\beta = 1$

96	1.000755	1.015338	0.0002026025	6
97	1.002328	1.013609	0.0001884428	5
98	1.000539	1.013050	0.0001491267	6
99	1.001362	1.012302	0.0001288059	6
100	1.000353	1.011105	0.0001106156	5
101	1.001212	1.010455	0.0000938501	6
102	1.000192	1.009451	0.0000829493	5
103	1.001086	1.008885	0.0000686239	6
104	1.000052	1.008046	0.0000631363	5
105	1.000980	1.007549	0.0000504356	6
106	1.000454	1.007200	0.0000437061	6
107	1.000892	1.006413	0.0000373414	5
108	1.000356	1.006124	0.0000318254	6
109	1.000819	1.005448	0.0000279327	5
110	1.000272	1.005210	0.0000232515	6
111	1.000760	1.004626	0.0000211923	5
112	1.000199	1.004432	0.0000170693	6
113	1.000455	1.004180	0.0000148313	6
114	1.000136	1.003771	0.0000126167	5
115	1.000404	1.003553	0.0000107937	6
116	1.000081	1.003209	0.0000094159	5

Рисунок 13. Метод с дроблением шага при x = (50, 50) и $\beta = 1$

Длина шага β равна 10:

39	1.000364	1.013073	0.0001550673	9
40	1.001725	1.012109	0.0001344438	9
41	1.000384	1.011433	0.0001166720	9
42	1.001451	1.010600	0.0001013193	9
43	1.000388	1.009998	0.0000880536	9
44	1.001223	1.009278	0.0000765696	9
45	1.000381	1.008744	0.0000666244	9
46	1.001034	1.008121	0.0000579995	9
47	1.000365	1.007648	0.0000505165	9
48	1.000876	1.007107	0.0000440170	9
49	1.000345	1.006689	0.0000383695	9
50	1.000744	1.006220	0.0000334579	9
51	1.000322	1.005851	0.0000291847	9
52	1.000633	1.005444	0.0000254645	9
53	0.999961	1.004791	0.0000237369	8
54	1.000783	1.004411	0.0000203434	9
55	1.000005	1.004188	0.0000174663	9
56	1.000650	1.003862	0.0000150179	9
57	1.000035	1.003662	0.0000129325	9
58	1.000542	1.003381	0.0000111509	9
59	1.000054	1.003202	0.0000096274	9

Рисунок 14. Метод с дроблением шага при x = (5, 5) и $\beta = 10$

197	1.001764	1.013366	0.0001589602	9
198	1.000547	1.012598	0.0001383090	9
199	1.001490	1.011699	0.0001203994	9
200	1.000526	1.011018	0.0001048636	9
201	1.001262	1.010240	0.0000913697	9
202	1.000497	1.009637	0.0000796458	9
203	1.001072	1.008962	0.0000694498	9
204	1.000463	1.008429	0.0000605796	9
205	1.000912	1.007843	0.0000528572	9
206	0.999944	1.006903	0.0000492743	8
207	1.001128	1.006355	0.0000422261	9
208	1.000007	1.006035	0.0000362535	9
209	1.000937	1.005564	0.0000311698	9
210	1.000050	1.005276	0.0000268413	9
211	1.000781	1.004872	0.0000231431	9
212	1.000078	1.004613	0.0000199810	9
213	1.000652	1.004265	0.0000172700	9
214	1.000096	1.004034	0.0000149435	9
215	1.000546	1.003733	0.0000129427	9
216	1.000105	1.003527	0.0000112203	9
217	1.000459	1.003268	0.0000097350	9

Рисунок 15. Метод с дроблением шага при x = (5, 50) и $\beta = 10$

89	1.001996	1.012355	0.0001495301	9
90	1.000186	1.011702	0.0001290418	9
91	1.001666	1.010817	0.0001114781	9
92	1.000234	1.010232	0.0000964271	9
93	1.001394	1.009469	0.0000834852	9
94	1.000261	1.008947	0.0000723556	9
95	1.001170	1.008289	0.0000627596	9
96	1.000272	1.007825	0.0000544829	9
97	1.000985	1.007256	0.0000473297	9
98	1.000273	1.006843	0.0000411446	9
99	1.000831	1.006351	0.0000357882	9
100	1.000266	1.005985	0.0000311470	9
101	1.000703	1.005559	0.0000271207	9
102	1.000254	1.005234	0.0000236259	9
103	1.000596	1.004865	0.0000205897	9
104	1.000239	1.004578	0.0000179506	9
105	1.000506	1.004258	0.0000156549	9
106	1.000223	1.004004	0.0000136571	9
107	1.000639	1.003448	0.0000128816	8
108	0.999979	1.003279	0.0000110300	9
109	1.000530	1.003019	0.0000094598	9

Рисунок 16. Метод с дроблением шага при x = (50, 5) и $\beta = 10$

176	0.997685	0.987450	0.0001700082	8
177	1.000067	0.988069	0.0001456457	9
178	0.998077	0.989012	0.0001250176	9
179	0.999967	0.989570	0.0001074408	9
180	0.998399	0.990380	0.0000924878	9
181	0.999899	0.990881	0.0000797055	9
182	0.998664	0.991578	0.0000687857	9
183	0.999854	0.992027	0.0000594224	9
184	0.998882	0.992627	0.0000513941	9
185	0.999827	0.993029	0.0000444906	9
186	0.999062	0.993546	0.0000385525	9
187	0.999813	0.993904	0.0000334332	9
188	0.999212	0.994351	0.0000290177	9
189	0.999807	0.994669	0.0000252024	9
190	0.999336	0.995056	0.0000219038	9
191	0.999809	0.995338	0.0000190479	9
192	0.999439	0.995672	0.0000165739	9
193	0.999815	0.995923	0.0000144282	9
194	0.999525	0.996213	0.0000125663	9
195	0.999824	0.996434	0.0000109491	9
196	0.999597	0.996685	0.0000095438	9

Рисунок 17. Метод с дроблением шага при x = (50, 50) и $\beta = 10$

Длина шага β равна 100:

26	0.995839	0.958087	0.0014758110	13
27	1.002197	0.971215	0.0011977732	10
28	0.996804	0.972836	0.0006362195	13
29	0.999000	0.974865	0.0005552939	12
30	0.996438	0.977125	0.0005022396	12
31	0.998382	0.977894	0.0004085285	13
32	0.996299	0.985267	0.0003279561	10
33	0.999199	0.985625	0.0001759859	13
34	0.998271	0.986873	0.0001533427	12
35	0.999762	0.987817	0.0001381848	12
36	0.998851	0.988389	0.0001131604	13
37	1.000555	0.992028	0.0000886715	10
38	0.999125	0.992471	0.0000487107	13
39	0.999705	0.993036	0.0000423805	12
40	0.999036	0.993658	0.0000380777	12
41	0.999547	0.993874	0.0000313560	13
42	0.999012	0.995913	0.0000239902	10
43	0.999771	0.996016	0.0000134815	13
44	0.999530	0.996360	0.0000117081	12
45	0.999921	0.996624	0.0000104802	12
46	0.999684	0.996781	0.0000086903	13

Рисунок 18. Метод с дроблением шага при x = (5, 5) и $\beta = 100$

139	1.000896	1.039630	0.0014476809	12
140	1.003719	1.037783	0.0011965931	13
141	0.998446	1.025935	0.0008916641	10
142	1.002795	1.024517	0.0005141817	13
143	1.001041	1.022669	0.0004454611	12
144	1.003032	1.020659	0.0003966349	12
145	1.001500	1.019947	0.0003321248	13
146	1.003042	1.013328	0.0002373677	10
147	1.000780	1.012974	0.0001424426	13
148	1.001488	1.011860	0.0001231540	12
149	1.000320	1.010992	0.0001092274	12
150	1.001019	1.010487	0.0000921314	13
151	0.999666	1.007187	0.0000639313	10
152	1.000759	1.006803	0.0000394494	13
153	0.999860	1.005771	0.0000370049	11
154	1.000588	1.005476	0.0000253959	13
155	0.999973	1.004636	0.0000220045	11
156	1.000457	1.004407	0.0000163763	13
157	1.000036	1.003725	0.0000133734	11
158	1.000358	1.003546	0.0000105724	13
159	0.999776	1.002441	0.0000093448	10

Рисунок 19. Метод с дроблением шага при x = (5, 50) и $\beta = 100$

40	1.001970	1.036276	0.0011229452	13
41	1.004449	1.033118	0.0009815408	12
42	1.000507	1.030755	0.0008896262	12
43	1.002918	1.029303	0.0007205857	13
44	0.998504	1.020139	0.0005796814	10
45	1.002220	1.019010	0.0003107137	13
46	1.000735	1.017588	0.0002705709	12
47	1.002450	1.016014	0.0002434233	12
48	1.001145	1.015471	0.0001999327	13
49	1.002510	1.010323	0.0001540335	10
50	1.000577	1.010064	0.0000860370	13
51	1.001191	1.009194	0.0000747483	12
52	1.000197	1.008529	0.0000669516	12
53	1.000799	1.008132	0.0000554499	13
54	0.999663	1.005580	0.0000413714	10
55	1.000603	1.005275	0.0000238188	13
56	1.000221	1.004877	0.0000206481	12
57	1.000656	1.004444	0.0000184128	12
58	1.000321	1.004291	0.0000153753	13
59	1.000661	1.002866	0.0000111311	10
60	1.000166	1.002791	0.0000065954	13

Рисунок 20. Метод с дроблением шага при x = (50, 5) и $\beta = 100$

66	1.006646	1.038786	0.0015311640	12
67	1.002658	1.037543	0.0011794632	13
68	1.004896	1.031250	0.0009388895	11
69	1.002218	1.030204	0.0007621084	13
70	1.005061	1.020140	0.0006120775	10
71	1.001099	1.019652	0.0003287529	13
72	1.002364	1.017948	0.0002864079	12
73	1.000333	1.016658	0.0002579329	12
74	1.001570	1.015877	0.0002114594	13
75	0.999269	1.010902	0.0001635475	10
76	1.001189	1.010299	0.0000909953	13
77	1.000415	1.009525	0.0000790551	12
78	1.001304	1.008676	0.0000708031	12
79	1.000624	1.008380	0.0000586475	13
80	1.001326	1.005594	0.0000437929	10
81	1.000319	1.005450	0.0000251959	13
82	1.000637	1.004980	0.0000218457	12
83	1.000118	1.004618	0.0000194881	12
84	1.000431	1.004404	0.0000162621	13
85	0.999834	1.003021	0.0000117968	10
86	1.000324	1.002857	0.0000069762	13

Рисунок 21. Метод с дроблением шага при x = (50, 50) и $\beta = 100$

3. Оценка скорости и порядка сходимости методов.

1) Метод наискорейшего спуска.

При a = 20, x = (50, 50).

k	$l_k = \frac{ln(\|x_{k+1} - x*\|)}{ln(\|x_k - x*\|)}$	$\frac{\phi(x_{k+1}) - \phi(x^*)}{\phi(x_k) - \phi(x^*)}$
50	1.0125083754342323	0.721078337191519
51	1.0794574436787117	0.7226077683202289
52	1.0114449386352498	0.722659658724128
53	1.0732464877522676	0.7212291749205365

54	1.0105397897105346	0.7214511994080437
55	1.0670250504581107	0.7229085383150334
56	1.0097778959463144	0.7227659599228649
57	1.0625744466566645	0.7214766192413926
58	1.0091116378583809	0.7218647376935962
59	1.0580038122237962	0.7225587067349827
60	1.0085115602417558	0.7233482763229012
61	1.0546927007758642	0.7219489704380166
62	1.0080236178275808	0.7213353757706429
63	1.0511183225219172	0.7229562074051841
64	1.0075452455755596	0.7231785342922039

Исходя из данных выше, метод наискорейшего спуска имеет линейную скорость с коэффициентом q → 0.73 и первый порядок сходимости (l_k → 1).

Также необходимо отметить, что с уменьшением значений координат начальной точки, также уменьшалось количество итераций для достижения минимума функции. Это правило соблюдалось как при одновременном уменьшении обоих координат, так и при уменьшении только одной из координат. Однако можно заметить, что, уменьшив координату x_1 и оставив прежней координату x_2, нам потребовалось куда меньше итераций, чем если бы мы уменьшили координату x_2 и оставили бы прежней координату x_1.

Полученные результаты сходятся с теоретическими.

2) <u>Метод с дроблением шага.</u>

При a = 20, x = (50, 50), $\beta = 0.1$.

k	$\boldsymbol{l_k = \frac{ln(\|x_{k+1} - x*\|)}{ln(\|x_k - x*\|)}}$	$\boldsymbol{\frac{\phi(x_{k+1}) - \phi(x^*)}{\phi(x_k) - \phi(x^*)}}$
187	1.0107687807535128	0.8428186816817107
188	1.0436095379278958	0.7589767549611282
189	1.0101921384997332	0.843460798518329
190	1.0413867649845787	0.7585565876850209
191	1.009690901440844	0.843747728099855
192	1.0393342034380184	0.7584875158874195

193	1.0092599474679398	0.8438562255409091
194	1.0375113970416938	0.7582253430288355
195	1.0088116059031436	0.8443114243445393
196	1.0358445582700362	0.757917644558312
197	1.0084427095209476	0.8444958465618385
198	1.0343252135395316	0.7575549246005089
199	1.0080728774497199	0.8449728618898172
200	1.0329452086962814	0.7576432089824856
201	1.0077339954068143	0.8447805286305201

Исходя из данных выше, метод с дроблением шага с начальным размером шага $\beta = 0.1$ имеет линейную сходимость и первый порядок сходимости ($l_k \to 1$). Однако точно установить значение параметра q не представляется возможным, т.к. его значение на каждом шаге варьируется между 0.75 и 0.85.

Из полученных данных можно сделать вывод, что только увеличение значения x_1 почти никак не уменьшает скорость минимизации (скорее наоборот – ускоряет процесс минимизации), однако увеличение параметра x_2 или увеличение обоих параметров одновременно заметно увеличивают необходимое число итераций для достижения минимума функции.

При a = 20, x = (50, 50), $\beta = 1$.

k	$\boldsymbol{l_k = \frac{ln(\lVert x_{k+1} - x* \rVert)}{ln(\lVert x_k - x* \rVert)}}$	$\boldsymbol{\frac{\phi(x_{k+1}) - \phi(x^*)}{\phi(x_k) - \phi(x^*)}}$
102	1.0235898231690188	0.8838051449135272
103	1.01170194041905	0.8274726349518113
104	1.0226004438605092	0.9197648726935439
105	1.0114927867664183	0.7989017119215734
106	1.0110099224958276	0.866654014872676
107	1.0219310070711056	0.8541390486873259
108	1.0107157740187391	0.8523991863430976
109	1.0210999213083742	0.8775454331440808

110	1.0104745440822047	0.832570771697944
111	1.020345418923482	0.9116193941905146
112	1.010284112089275	0.8051113263117619
113	1.0099036954782932	0.8691573878017791
114	1.0197769463195845	0.8503743502980564
115	1.0096374369222505	0.856150592425414
116	1.0191598300542302	0.8719204992096768

Исходя из данных выше, метод с дроблением шага с начальным размером шага $\beta = 1$ имеет линейную сходимость и первый порядок сходимости ($l_k \to 1$). Однако точно установить значение параметра q не представляется возможным, т.к. его значение на каждом шаге варьируется от 0.80 до 0.92.

Из полученных данных можно сделать такой же вывод: только увеличение значения x_1 почти никак не уменьшает скорость минимизации (скорее наоборот – ускоряет процесс минимизации), однако увеличение параметра x_2 или увеличение обоих параметров одновременно заметно увеличивают необходимое число итераций для достижения минимума функции.

При a = 20, x = (50, 50), $\beta = 10$.

k	$\boldsymbol{l_k = \frac{ln(\|x_{k+1} - x*\|)}{ln(\|x_k - x*\|)}}$	$\boldsymbol{\frac{\phi(x_{k+1}) - \phi(x^*)}{\phi(x_k) - \phi(x^*)}}$
182	1.0144879763981416	0.8628130892883598
183	1.0142948695365837	0.8639660966822212
184	1.0140718859588558	0.8649659898391834
185	1.013875009047534	0.8655548966041692
186	1.0137028827881933	0.86678727777897
187	1.0134754978713738	0.8671795840623207
188	1.013322786459369	0.867594028516126
189	1.0131359473293098	0.8685120802455251
190	1.0129524365784681	0.8689673897553015

191	1.0128173888725782	0.8699233186787402
192	1.0126079192033162	0.8701483073478308
193	1.0124540056434175	0.8703898845262557
194	1.012337642369324	0.8707766803401474
195	1.0121807463623287	0.8716136527700591
196	1.0119816160488821	0.8716437115956533

Исходя из данных выше, метод с дроблением шага с начальным размером шага $\beta = 10$ имеет линейную сходимость со значением q → 0.88 и первый порядок сходимости ($l_k \to 1$).

Из полученных данных видно, что как отдельное увеличение одного из параметров x_1 и x_2, так и их совместное увеличение, увеличивают и количество необходимых для минимизации функции итераций.

При a = 20, x = (50, 50), $\beta = 100$.

k	$l_k = \frac{ln(\|x_{k+1} - x*\|)}{ln(\|x_k - x*\|)}$	$\frac{\phi(x_{k+1}) - \phi(x^*)}{\phi(x_k) - \phi(x^*)}$
72	1.0138302326866633	0.8711342536827091
73	1.0212987471971002	0.9007219688334447
74	1.02068666759503	0.8197696542228828
75	1.0105877864972799	0.7733735232447544
76	1.0914804328452818	0.5563952206927967
77	1.011628809122806	0.8686759373986387
78	1.0183403634063584	0.8958027912845151
79	1.017868104372985	0.8282557451225137
80	1.009104105645873	0.7470160449861939
81	1.079425338017649	0.5749662948709781
82	1.0100222233472893	0.867295308657968
83	1.0160795382316126	0.8916763231934527
84	1.0157259170767263	0.8346731391470456
85	1.007997965016185	0.725325027244729
86	1.070138482072953	0.5917421516937795

Исходя из данных выше, метод с дроблением шага с начальным размером шага $\beta = 100$ имеет линейную сходимость и первый порядок сходимости ($l_k \rightarrow 1$). Однако точно установить значение параметра q не представляется возможным, т.к. его значение на каждом шаге варьируется от 0.55 до 0.91.

Из полученных данных можно сделать вывод, что увеличение хотя бы одного из параметров x_1 или x_2 или их одновременное увеличение также замедляет работу алгоритма минимизации.

4. Сравнение методов

Сравнение методов происходило по количеству шагов, необходимых для вычисления минимума функции с точность 10^{-5}.

Начальные координаты точек	Количество шагов				
	Метод наискорейшего спуска	Метод с дроблением шага			
		$\beta = 0.1$	$\beta = 1$	$\beta = 10$	$\beta = 100$
(5, 5)	5	71	87	59	46
(5, 50)	6	242	137	217	159
(50, 5)	26	67	93	109	60
(50, 50)	64	201	201	60	86

Для заданной функции метод наискорейшего спуска совершает меньшее число шагов, чем метод с дроблением шага почти для всех параметров β.

Выводы.

В ходе данной работы были рассмотрены два метода решения задачи безусловной минимизации функций: метод с дроблением шага и метод наискорейшего спуска.

Метод наискорейшего спуска и дробления шага имеют линейную сходимость порядка 1. Однако значение q для метода с дроблением шага точно установить не удалось, т.к. его значение из шага в шаг сильно разнилось.