7 лекция

12 декабря 2022 г. 14:28

Суммирование рядов Фурье методом средних

def №84

$S_n(x,f)$ $S_n(x)$ – сумма ряда

$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x)+\ldots+S_n(x)}{n+1}$ сумма Фейера n-ого порядка

$\Phi_n(x) = \frac{D_0(x)+\ldots+D_n(x)}{n+1}$ ядро Фейера — среднее арифметическое ядер Дирихле

$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(u)f(x+u)du$

$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(u)f(x+u)du$

Lm (о ядрах Фейера) №85

1) $\Phi_n(x)$ – непрерывная, чётная, 2π-периодическая функция
2) $\Phi_n(0) = \frac{n+1}{2}$
3) $t \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}_+$

Тогда $\Phi_n(t) = \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{2(n+1)\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$

ну почти $\frac{D^2(t)}{\frac{n+1}{2}}$ но не равно

Следствие №86

1. $\forall t \geq 0$ $\Phi_n(t) \geq 0$
2. $\forall \delta \in (0;\pi]$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\max_{\delta\leq t\leq\pi}\Phi_n(t) = 0$

Th (Фейера) №87

Если $f(x) \in C[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то последовательность $\sigma_n(x) \underset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$

Следствие №88

1) Если ряд Фурье непрерывной функции сходится в точке, то он сходится к значению функции в точке.
2) Если все коэффициенты непрерывной функции ($f(-\pi)=f(\pi)$) равны нулю, тогда $f(x)\equiv 0$ на $[-\pi,\pi]$

Приближение непрерывных функций многочленами

def №89

$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos(kx)+B_k\sin(kx))$ – тригонометрический полином

$A_n^2+B_n^2 \neq 0$

Th (Вейерштрасса) №90

Если $f(x)\in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, тогда $\forall\varepsilon>0$ $\exists T(x)$: $|f(x)-T(x)|<\varepsilon$

Док-во:

Достаточно взять сумму Фейера

Th (Вейерштрасса) №91

Если $f\in C[a,b]$, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists P_n(x)$: $|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$, $a\leq x\leq b$

алгебраический многочлен

Док-во:

$x=a+\frac{b-a}{\pi}t$, $0\leq t\leq\pi$, $a\leq x\leq b$

$f^*(t)=f\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)$, $t\in[0,\pi]$

$f^*(t)=f^*(-t)$, $t\in[-\pi,0]$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists T(t)$ $|f^*(t)-T(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\sin(kx)$ и $\cos(kx)$

$T(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$

$P_n(t)$ - частичные суммы

В силу равномерной сходимости ряда Тейлора

$\exists n_\varepsilon$ $|T(t)-P_n(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall t\in[-\pi,\pi]$ $\forall n>n_\varepsilon$

$P_n(t)=P_{n_\varepsilon+1}(t)$

$|P_n(t)-f^*(t)|\leq|P_n(t)-T(t)|+|T(t)-f^*(t)|<\varepsilon$

Полнота системы тригонометрических функций (и системы целых неотрицательных степеней x) в пространстве непрерывной функций

def №92

Пусть X – множество функций, определённых на $[a,b]$

Система $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\ldots\varphi_n\in X$ называется полной в смысле равномерного приближения, если $\forall f\in X$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{N_\varepsilon}$ и $\lambda_{n_1},\lambda_{n_2},\ldots\lambda_{n_{N_\varepsilon}}$

$|f(x)-\sum_{n=1}^{N_\varepsilon}\varphi_{n_k}\lambda_{n_k}|<\varepsilon$ $\forall x\in[a,b]$

def №93

$\sqrt{\int_a^b(f(x)-g(x))^2dx}$ – среднее квадратичное отношение f от g на $[a;b]$

def №94

Система функций называется полной в смысле среднеквадратичного отношения, если $\forall f\in X$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ конечный набор $\|f-\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}\varphi_{n_k}\lambda_{n_k}\|_{L_2[a,b]}<\varepsilon$

$L_2[a;b]=\sqrt{\int_a^b\left(f-\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}\varphi_{n_k}\lambda_{n_k}\right)^2dx}$

Th №95

Система тригонометрических функций полна в смысле среднеквадратичного отношения для $C[-\pi;\pi]$: $f(-\pi;\pi)$

Минимальное свойство сумм Фурье неравенство Бесселя, равенство Парсеваля

Th №96

Пусть S_n - сумма Фурье порядка n, тогда

$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2dx=\min_{T_n(x)}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx$

def №97

Если $a_0,a_1,b_1,a_2,b_2\ldots$ – коэффициенты Фурье, тогда

$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$ – неравенство Бесселя

def №98

$f\in C_{\pi}[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

равенство Парсеваля

Характер сходимости рядов Фурье Почленное дифференцирование

Th №99

Пусть $f\in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$

Тогда если f – кусочно-непрерывно дифференцируемая на $[-\pi,\pi]$, то $f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin(nx)+nb_n\cos(nx))$

Lm (о скорости убывания a_n и b_n) №100

Пусть f имеет на $[-\pi,\pi]$ непрерывные производные порядка $k-1$, включительно и кусочно-непрерывную производную порядка k, причём $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$, $j\in[0,k-1]$

Тогда $|a_n|\leq\frac{\varepsilon_n}{n^k}$ $\varepsilon_n>0$ $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^2<\infty$

$|b_n|\leq\frac{\varepsilon_n}{n^k}$