МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №8
по дисциплине «Вычислительная математика»
Тема: Численное дифференцированние

Студент гр. 0304	____________________	Алексеев Р.В.
Преподаватель	____________________	Попова Е.В.

Санкт-Петербург
2021

Вариант 1

Численное дифференцирование применяется тогда, когда функцию трудно или невозможно продифференцировать аналитически. Например, необходимость в численном дифференцировании возникает в том случае, когда функция задана таблицей.

Цель работы: освоить методы численного дифференцирования, изучить погрешность численного дифференцирования.

Основные теоретические положения.

Предположим, что в окрестности точки x функция f дифференцируема достаточное число раз. Исходя из определения производной используем простейшие приближенные формулы.

$$f'(x) \cong \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \tag{1}$$

Исходя из определения производной, можно предположить, что можно вычислить производную сколь угодно точно, уменьшая Δx.

Положив $\Delta x = h$ $и \Delta x = -h$, получим правую и левую разностные производные.

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \tag{2}$$

Для оценки их погрешностей (3)

$$r_+(x,h) = f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad r_-(x,h) = f'(x) - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \tag{3}$$

используя формулу Тейлора, получают выражения (4).

$$|r_+(x,h)| \le \frac{1}{2} M_2 h, \quad M_2 = \max_{[x,x+h]} |f''(\xi)|,$$

$$|r_-(x,h)| \le \frac{1}{2} M_2 h, \quad M_2 = \max_{[x-h,x]} |f''(\xi)|. \tag{4}$$

Формулы (2) имеют первый порядок точности. Центральная разностная производная (5)

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}. \tag{5}$$

имеет второй порядок точности (6).

$$|\, r_0(x,h)\,| \le \frac{1}{6} M_3 h^2, \quad M_3 = \max_{[x-h,\ x+h]} |f^{(3)}(\xi)|. \tag{6}$$

При вычислении второй производной используют формулу второй разностной производной (7).

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}. \tag{7}$$

Погрешность этой формулы имеет второй порядок точности (8).

$$|\, r(x,h)| \le \frac{M_4}{12} h^2, \quad M_4 = \max_{[x-h,\ x+h]} |f^{(4)}(\xi)|. \tag{8}$$

Если функция задана на сетке, она может аппроксимироваться кубическим сплайном.

На каждом из отрезков $[x_i,\ x_{i+1}]$ сплайн определяется формулой

$$s(x)=f_i(1-t)^2(1+2t)+f_{i+1}t^2(3-2t)+m_i h_i t(1-t)^2-$$
$$-m_{i+1}t^2(1-t)h_i,$$

где $f_i=f(x_i)$, $t=\dfrac{x-x_i}{h_i}$, $h_i=x_{i+1}-x_i$, а m_i — коэффициенты сплайна. Тогда для всех $x\in[x_i,\ x_{i+1}]$ за численное значение производных $f'(x)$ и $f''(x)$ принимают значения точных производных сплайна:

$$f'(x)\cong s'(x)=[-6f_i t(1-t)+6f_{i+1}t(1-t)+m_i h_i(1-t)(1-3t)+$$
$$+m_{i+1}h_i t(3t-2)]/h_i;$$
$$f''(x)\cong s''(x)=6[f_i-f_{i-1}](2t-1)/h_i^2+2[m_i(3t-2)+m_{i+1}(3t-1)].$$

Коэффициенты сплайна равны производной функции $m_i = f(x_i)'$ в соответствующих точках. За производные функции принимаются соответствующие производные сплайна.

Погрешность сплайна не превосходит

$$\max_{[a,b]} |f(x) - S_3(x)| \le \frac{M_4}{384} h_{max}^4,$$

,

где

$$h_{max} = \max_{1 \le i \le n} h_i \text{ – максимальная из длин частичных отрезков.}$$

Справедливы также неравенства

$$\max_{[a,b]} |f^{(k)}(x) - S_3^{(k)}(x)| \le C_k M_4 h_{max}^{4-k}.$$

Обусловленность формул численного дифференцирования

Полная погрешность вычисления производной равна сумме погрешности аппроксимации и неустранимой погрешности. Пусть $\bar{\Delta}$ – верхняя граница абсолютной погрешности $\Delta(f^{¿}(x)) = |f(x) - f^{¿}(x)|$,тогда

$$¿ r_н \vee \le \frac{2\bar{\Delta}}{h}. \tag{9}$$

Чувствительность формулы (1) к погрешностям входных данных характеризуется абсолютным числом обусловленности $v_\Delta = \frac{2}{h}$. Верхняя граница полной погрешности равна (10)

$$\bar{r}(h) = 1/2\, M_2 h + \frac{2\bar{\Delta}}{h}. \tag{10}$$

Вычисляя экстремальное значение, получаем $h_{onm} = 2\sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{M_2}}$ и $\bar{r}_{min} = \bar{r}(h¿¿onm) = 2\sqrt{\bar{\Delta} M_2}.¿$

Порядок выполнения работы.

1 Сосчитать логарифмическую производную первого и второго порядка для данной функции. Сформировать 6 узлов из области определения функции.

2 Используя формулу (1), и положив $\Delta x = h$,определить значение h, при котором численное значение производной становится неприемлемым.

3 Вычислить разностные производные (2)-(8), их погрешности, точные значения производных и их абсолютные погрешности, сравнить.

4 Построить кубический сплайн по точкам $[x_i ; x_{i+1}]$. Сосчитать производную первого и второго порядка в точке, не являющейся узловым значением. Сравнить с точными вычислениями. Получить значения производных сплайна для разных h.

5 Ответить на вопросы:

5.a При каких значениях h все 3 способа (точный, с разностными формулами, с помощью сплайна) дают практически одинаковые значения?

5.b При каком h разностные формулы не дают ни одного верного знака?

6 Подсчитать абсолютный коэффициент обусловленности при подстановке оптимального $h_{опт}$ при использовании формулы (1).

7 Сделать выводы по полученным значениям.

Выполнение работы.

f(x) = $\frac{(2x-3)^3 \sqrt[3]{x^3+6}}{\sqrt[4]{3x^2-5}\sqrt{5x^3+9}}$

1. Найдем логарифмические производные функции первого и второго порядков.

$$f'(x) = (\ln(\frac{(2x-3)^3 \sqrt[3]{x^3+6}}{\sqrt[4]{3x^2-5}\sqrt{5x^3+9}}))' \frac{(2x-3)^3 \sqrt[3]{x^3+6}}{\sqrt[4]{3x^2-5}\sqrt{5x^3+9}} =$$

$$= \frac{(2x-3)^3 \sqrt[3]{x^3+6}}{\sqrt[4]{3x^2-5}\sqrt{5x^3+9}} * (3\ln(2x-3) + \frac{1}{3}\ln(x^3+6) - \frac{1}{4}\ln(3x^2-5) - \frac{1}{2}\ln(5x^3+9)) =$$

$$=\left(\frac{6}{2x-3}+\frac{x^2}{x^3+6}-\frac{3x}{6x^3-10}-\frac{15x^2}{10x^3+18}\right)\frac{(2x-3)^3\sqrt[3]{x^3+6}}{\sqrt[4]{3x^2-5}\sqrt{5x^3+9}}$$

$$f''(x)=\left(\frac{6}{2x-3}+\frac{x^2}{x^3+6}-\frac{3x}{6x^3-10}-\frac{15x^2}{10x^3+18}\right)\frac{(2x-3)^3\sqrt[3]{x^3+6}}{\sqrt[4]{3x^2-5}\sqrt{5x^3+9}}*$$

$$*\left(\ln\left(\left(\frac{6}{2x-3}+\frac{x^2}{x^3+6}-\frac{3x}{6x^3-10}-\frac{15x^2}{10x^3+18}\right)\frac{(2x-3)^3\sqrt[3]{x^3+6}}{\sqrt[4]{3x^2-5}\sqrt{5x^3+9}}\right)\right)'=$$

$$=\left(\left(\frac{6}{2x-3}+\frac{x^2}{x^3+6}-\frac{3x}{6x^3-10}-\frac{15x^2}{10x^3+18}\right)\frac{(2x-3)^3\sqrt[3]{x^3+6}}{\sqrt[4]{3x^2-5}\sqrt{5x^3+9}}\right)*$$

$$*\left(\ln\left(\frac{6}{2x-3}+\frac{x^2}{x^3+6}-\frac{3x}{6x^3-10}-\frac{15x^2}{10x^3+18}\right)+3\ln(2x-3)+\frac{1}{3}\ln(x^3+6)-\frac{1}{4}\ln(3x^2-5)-\frac{1}{2}\ln(5x^3+9)\right)'=$$

$$=\left(\left(\frac{6}{2x-3}+\frac{x^2}{x^3+6}-\frac{3x}{6x^3-10}-\frac{15x^2}{10x^3+18}\right)\frac{(2x-3)^3\sqrt[3]{x^3+6}}{\sqrt[4]{3x^2-5}\sqrt{5x^3+9}}\right)*$$

$$*\left(\frac{\frac{-12}{(2x-3)^2}+\frac{2x}{x^3+6}-\frac{3x^4}{(x^3+6)^2}+\frac{6x^3-30}{(x^3-10)^2}-\frac{540x-150x^4}{(10x^3+18)^2}}{\left(\frac{6}{2x-3}+\frac{x^2}{x^3+6}-\frac{3x}{6x^3-10}-\frac{15x^2}{10x^3+18}\right)}+\frac{6}{2x-3}+\frac{x^2}{x^3+6}-\frac{3x}{6x^3-10}-\frac{15x^2}{10x^3+18}\right)$$

2. Область определения функции включает в себя все вещественные числа за исключением $\sqrt{\frac{5}{3}}$ и $\sqrt[3]{\frac{-9}{5}}$, возьмем узловые точки 5, 5.25, 5.5, 5.75, 6, 6.25. В точке x_0=5 значение функции ≈23.9444, значение первой производной ≈15.4297. При уменьшении h в какой-то момент количество верных знаков в численном значении первой производной стало равно нулю, рассчеты представленны на рис. 1.

x	h	f'(x)*	exactf'(x)	Inaccuracy
5	0.25	16.0869	15.4297	0.657182
5	0.125	15.758	15.4297	0.328329
5	0.0625	15.5938	15.4297	0.164097
5	0.03125	15.5118	15.4297	0.0820312
5	0.015625	15.4707	15.4297	0.0410113
5	0.0078125	15.4502	15.4297	0.0205045
5	0.00390625	15.44	15.4297	0.010252
5	0.00195312	15.4348	15.4297	0.00512593
5	0.000976562	15.4323	15.4297	0.00256295
5	0.000488281	15.431	15.4297	0.00128147
5	0.000244141	15.4304	15.4297	0.000640734
5	0.00012207	15.43	15.4297	0.000320367
5	6.10352e-05	15.4299	15.4297	0.000160183
5	3.05176e-05	15.4298	15.4297	8.00916e-05
5	1.52588e-05	15.4298	15.4297	4.00457e-05
5	7.62939e-06	15.4297	15.4297	2.00225e-05
5	3.8147e-06	15.4297	15.4297	1.00108e-05
5	1.90735e-06	15.4297	15.4297	5.00399e-06
5	9.53674e-07	15.4297	15.4297	2.50246e-06
5	4.76837e-07	15.4297	15.4297	1.26193e-06
5	2.38419e-07	15.4297	15.4297	6.28635e-07
5	1.19209e-07	15.4297	15.4297	3.45513e-07
5	5.96046e-08	15.4297	15.4297	1.96501e-07
5	2.98023e-08	15.4297	15.4297	4.19174e-08
5	1.49012e-08	15.4297	15.4297	4.19174e-08
5	7.45058e-09	15.4297	15.4297	1.96501e-07
5	3.72529e-09	15.4297	15.4297	6.73338e-07
5	1.86265e-09	15.4297	15.4297	6.73338e-07
5	9.31323e-10	15.4297	15.4297	2.58069e-06
5	4.65661e-10	15.4297	15.4297	6.39538e-06
5	2.32831e-10	15.4297	15.4297	1.23401e-06
5	1.16415e-10	15.4297	15.4297	1.23401e-06
5	5.82077e-11	15.4298	15.4297	9.03187e-05
5	2.91038e-11	15.4298	15.4297	9.03187e-05
5	1.45519e-11	15.4297	15.4297	3.17516e-05
5	7.27596e-12	15.4302	15.4297	0.00045653
5	3.63798e-12	15.4297	15.4297	3.17516e-05
5	1.81899e-12	15.4316	15.4297	0.00192137
5	9.09495e-13	15.4297	15.4297	3.17516e-05
5	4.54747e-13	15.4219	15.4297	0.00784425
5	2.27374e-13	15.4375	15.4297	0.00778075
5	1.13687e-13	15.4688	15.4297	0.0390307
5	5.68434e-14	15.375	15.4297	0.0547193
5	2.84217e-14	15.375	15.4297	0.0547193
5	1.42109e-14	15	15.4297	0.429719
5	7.10543e-15	16	15.4297	0.570281
5	3.55271e-15	15	15.4297	0.429719
5	1.77636e-15	14	15.4297	1.42972
5	8.88178e-16	16	15.4297	0.570281

Рисунок 1 — Исследование поведения функции при уменьшении h.

По рисунку видно, что вначале при уменьшении h полученный ответ становистя все ближе к 15.4297, но при h = 8.88178e-16 значение функции стало равно 16, это произашло из-за того, что значение h приблизилось к машинному эпсилон.

3. Для каждого узла рассчитали значения в обоих производных, разностные производные. Рассчеты представленны на рис. 2 и рис. 3.

Derivative	x	h	Value	Inaccuracy
exact f'(x)	5	0.25	15.4297	-
right f'(x)	5	0.25	16.0869	0.657182
left f'(x)	5	0.25	14.7748	0.654935
central f'(x)	5	0.25	15.4308	0.00112311
exact f''(x)	5	0.25	5.24888	-
f''(x)*	5	0.25	5.24847	0.000413986

Derivative	x	h	Value	Inaccuracy
exact f'(x)	5.25	0.25	16.7451	-
right f'(x)	5.25	0.25	17.4052	0.66008
left f'(x)	5.25	0.25	16.0869	0.658206
central f'(x)	5.25	0.25	16.746	0.000937077
exact f''(x)	5.25	0.25	5.27347	-
f''(x)*	5.25	0.25	5.27314	0.000332862

Derivative	x	h	Value	Inaccuracy
exact f'(x)	5.5	0.25	18.0661	-
right f'(x)	5.5	0.25	18.7286	0.662511
left f'(x)	5.5	0.25	17.4052	0.660937
central f'(x)	5.5	0.25	18.0669	0.000786997
exact f''(x)	5.5	0.25	5.29406	-
f''(x)*	5.5	0.25	5.29379	0.000269516

Рисунок 2 — Значение 1 и 2 производных в первых 3 узловых точках.

Derivative	x	h	Value	Inaccuracy
exact f'(x)	5.75	0.25	19.3919	-
right f'(x)	5.75	0.25	20.0564	0.664564
left f'(x)	5.75	0.25	18.7286	0.663233
central f'(x)	5.75	0.25	19.3925	0.000665083
exact f''(x)	5.75	0.25	5.31141	-
f''(x)*	5.75	0.25	5.31119	0.000219712

Derivative	x	h	Value	Inaccuracy
exact f'(x)	6	0.25	20.7216	-
right f'(x)	6	0.25	21.3879	0.666307
left f'(x)	6	0.25	20.0564	0.665176
central f'(x)	6	0.25	20.7222	0.000565385
exact f''(x)	6	0.25	5.32611	-
f''(x)*	6	0.25	5.32593	0.000180288

Derivative	x	h	Value	Inaccuracy
exact f'(x)	6.25	0.25	22.0547	-
right f'(x)	6.25	0.25	22.7225	0.667795
left f'(x)	6.25	0.25	21.3879	0.666829
central f'(x)	6.25	0.25	22.0552	0.000483328
exact f''(x)	6.25	0.25	5.33864	-
f''(x)*	6.25	0.25	5.3385	0.000148873

Рисунок 3 — Значение 1 и 2 производных в последних 3 узловых точках.

По рисунку видно, что погрешности левой и правой разностных производных в одной точке примерно равны и имеют порядок 0.1, центральная разностная производная имеет порядок 0.0001. Погрешность второй производной имеет порядок 0.0001. Также аналогичные рассчеты были произведены ля точки 5.21, рассчеты представлены на рис. 4.

Derivative	x	h	Value	Inaccuracy
exact f'(x)	5.21	0.25	16.5342	-
right f'(x)	5.21	0.25	17.1939	0.65965
left f'(x)	5.21	0.25	15.8765	0.657722
central f'(x)	5.21	0.25	16.5352	0.000964193
exact f''(x)	5.21	0.25	5.26983	-
f''(x)*	5.21	0.25	5.26949	0.000344519

Рисунок 4 — Значения 1 и 2 производной в точке 5.21.

По рисунку видно, что как и при рассчетах в равноотстоящих узлах погрешности левой и правой разностных производных примерно равны, а их порядок 0.1, также порядки второй производной и центральной разностной производной 0.0001.

4. По узловым точкам был посторен кубический сплайн. Для него были найдены первая и вторая производные. В качестве неузловой точки была снова выбрана 5.21, для который были найдены сплайновые производные, результаты представленны на рис.5.

Derivative	x	Value	Inaccuracy
exact f'(x)	5.21	16.5342	-
s'(x)	5.21	16.5342	8.378e-06
exact f''(x)	5.21	5.26983	-
s''(x)	5.21	5.26991	7.35718e-05
s''(x)*	5.21	5.26949	0.000341882

Рисунок 5 — Производные *f(x)* в точке 5.21 при помощи сплайна.

По рисунку видно, что значения первой производной совпадают, а точность результата первой производной, найденное при помощи формул производных сплайна, 0.000001. Для второй производной значения также примерно совпадают, точность результата — 0.00001. Погрешность второй разностной производной, найденной при помощи сплайна, 0.0001.

5. Для точки 5.21 были исследованы значения погрешности правой разностной производной при различных h при использовании сплайна. Результаты представлены на рис. 6.

x	h	s'(x)*	exact f'(x)	Inaccuracy
5.21	0.25	17.1939	16.5342	0.65965
5.21	0.125	16.8638	16.5342	0.329602
5.21	0.0625	16.699	16.5342	0.164739
5.21	0.03125	16.6166	16.5342	0.0823499
5.21	0.015625	16.5754	16.5342	0.0411668
5.21	0.0078125	16.5548	16.5342	0.0205782
5.21	0.00390625	16.5445	16.5342	0.0102847
5.21	0.00195312	16.5394	16.5342	0.00513808
5.21	0.000976562	16.5368	16.5342	0.00256483
5.21	0.000488281	16.5355	16.5342	0.00127822
5.21	0.000244141	16.5349	16.5342	0.000634922
5.21	0.00012207	16.5346	16.5342	0.000313272
5.21	6.10352e-05	16.5344	16.5342	0.000152447
5.21	3.05176e-05	16.5343	16.5342	7.20343e-05
5.21	1.52588e-05	16.5343	16.5342	3.18282e-05
5.21	7.62939e-06	16.5343	16.5342	1.17247e-05
5.21	3.8147e-06	16.5342	16.5342	1.67338e-06
5.21	1.90735e-06	16.5342	16.5342	3.3511e-06
5.21	9.53674e-07	16.5342	16.5342	5.86567e-06
5.21	4.76837e-07	16.5342	16.5342	7.1211e-06
5.21	2.38419e-07	16.5342	16.5342	7.74695e-06
5.21	1.19209e-07	16.5342	16.5342	8.04497e-06
5.21	5.96046e-08	16.5342	16.5342	8.28339e-06
5.21	2.98023e-08	16.5342	16.5342	8.4622e-06
5.21	1.49012e-08	16.5342	16.5342	8.4622e-06
5.21	7.45058e-09	16.5342	16.5342	8.93904e-06
5.21	3.72529e-09	16.5342	16.5342	7.98536e-06
5.21	1.86265e-09	16.5342	16.5342	8.93904e-06
5.21	9.31323e-10	16.5342	16.5342	1.08464e-05
5.21	4.65661e-10	16.5342	16.5342	1.46611e-05
5.21	2.32831e-10	16.5342	16.5342	5.97705e-07
5.21	1.16415e-10	16.5342	16.5342	5.97705e-07
5.21	5.82077e-11	16.5342	16.5342	5.97705e-07
5.21	2.91038e-11	16.5342	16.5342	6.04375e-05
5.21	1.45519e-11	16.5339	16.5342	0.000304578
5.21	7.27596e-12	16.5342	16.5342	6.04375e-05
5.21	3.63798e-12	16.5342	16.5342	6.04375e-05
5.21	1.81899e-12	16.5312	16.5342	0.00299012
5.21	9.09495e-13	16.5352	16.5342	0.000916125
5.21	4.54747e-13	16.5156	16.5342	0.0186151
5.21	2.27374e-13	16.5312	16.5342	0.00299012
5.21	1.13687e-13	16.5	16.5342	0.0342401
5.21	5.68434e-14	16.4375	16.5342	0.0967401
5.21	2.84217e-14	16.5	16.5342	0.0342401
5.21	1.42109e-14	16.25	16.5342	0.28424
5.21	7.10543e-15	17	16.5342	0.46576
5.21	3.55271e-15	16	16.5342	0.53424

Рисунок 6 — Правые разностные производные в т. 5.21 при разных h при использовании сплайна.

По рисунку видно, что до h=5.82077e-11 значение погрешности уменьшалось, а после начала возрастать. При h=7.10543e-15 значение первой производной не имеет ни одного верного знака. По формуле $\bar{r}(h)=1/2 M_2 h+\frac{2\bar{\Delta}}{h}$ (10) видно, что при больших h при его уменьшении погрешность метода превосходит неустранимую погрешность, но при достижении определенного значения h неустранимая погрешность начинает превосходить погрешность метода. h, при котором погрешность минимальна, называется оптимальным h, его можно найти по формуле $h_{опт}=2\sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{M_2}}$.

6. Был найден абсолютный коэффициент обусловленности при подстановке оптимального h, результаты представленны на рис. 7.

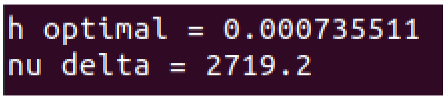

Рисунок 7 — Абсолютный коэффициент обусловленности.

По рисунку видно, что значение абсолютного коэффициента обусловленности равно 2719.2, а оптимальное h = 0.000735511.

Выводы.

Были изученны методы численного дифференцирования.

Было установленно, что при уменьшении шага h в методе численного дифференцирования до определенного значения h, называемого оптимальным h, погрешность уменьшается, а при прохождении этого значения погрешность наоборот увеличивается, следовательно задача численного дифференцирования является некорректной.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

Название файла: main.cpp

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <vector>
#include <cmath>

double f(double x);
double f_deriv(double x);
double f_deriv2(double x);
double spline(double x);
double s(double x);
double s_deriv(double x);
double s_deriv2(double x);
double f_sub_deriv(double (*func)(double), double x, double h);
double f_c_sub_deriv(double (*func)(double), double x, double h);
double f_sub_deriv2(double (*func)(double), double x, double h);
bool isHValid(double correct, double approx);
double M2_calculation(double (*deriv2)(double), double x0, double
xn);
double    delta_f_calculation(double    (*f)(double),    double
(*f_approx) (double), double x0, double xn);

int main(){
    double x0 = 5.0000;
    double h = 0.2500;
    double correct = f_deriv(x0);
    double inaccuracy;
    double approx;
    int power = -2;
    std::printf("|%8s|%12s|%12s|%12s|%12s|\n",     "x",     "h",
"f'(x)*", "exactf'(x)", "Inaccuracy");

std::printf("-------------------------------------------------------
-----\n");
    h = std::pow(2, power);
    for (;; --power){
        approx = f_sub_deriv(f, x0, h);
        inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
        std::printf("|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",
x0, h, approx, correct, inaccuracy);
        if (!isHValid(correct, approx)){
            break;
        }
    h /= 2.0;
    }

std::printf("-------------------------------------------------------
-----\n\n");

    h = 0.2500;
```

```
        std::printf("|%14s|%8s|%12s|%12s|%12s|\n",    "Derivative",
"x", "h", "Value", "Inaccuracy");

std::printf("---------------------------------------------------------
-------\n");
        correct = f_deriv(5.0);
        std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",     "exact
f'(x)", 5.0, h, correct, "-");
        approx = f_sub_deriv(f, 5.0, h);
        inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
        std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",   "right
f'(x)", 5.0, h, approx, inaccuracy);
        approx = f_sub_deriv(f, 5.0, -h);
        inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
        std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",    "left
f'(x)", 5.0, h, approx, inaccuracy);
        approx = f_c_sub_deriv(f, 5.0, h);
        inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
        std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n", "central
f'(x)", 5.0, h, approx, inaccuracy);
        correct = f_deriv2(5.0);
        std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",     "exact
f''(x)", 5.0, h, correct, "-");
        approx = f_sub_deriv2(f, 5.0, h);
        inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
        std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",
"f''(x)*", 5.0, h, approx, inaccuracy);

std::printf("---------------------------------------------------------
-------\n\n");

            h = 0.2500;
        std::printf("|%14s|%8s|%12s|%12s|%12s|\n",    "Derivative",
"x", "h", "Value", "Inaccuracy");

std::printf("---------------------------------------------------------
-------\n");
        correct = f_deriv(5.25);
        std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",     "exact
f'(x)", 5.25, h, correct, "-");
        approx = f_sub_deriv(f, 5.25, h);
        inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
        std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",   "right
f'(x)", 5.25, h, approx, inaccuracy);
        approx = f_sub_deriv(f, 5.25, -h);
        inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
        std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",    "left
f'(x)", 5.25, h, approx, inaccuracy);
        approx = f_c_sub_deriv(f, 5.25, h);
        inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
        std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n", "central
f'(x)", 5.25, h, approx, inaccuracy);
        correct = f_deriv2(5.25);
        std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",     "exact
f''(x)", 5.25, h, correct, "-");
        approx = f_sub_deriv2(f, 5.25, h);
```

```
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",
"f''(x)*", 5.25, h, approx, inaccuracy);

std::printf("----------------------------------------------------------
-------\n\n");

                  h = 0.2500;
            std::printf("|%14s|%8s|%12s|%12s|%12s|\n",     "Derivative",
"x", "h", "Value", "Inaccuracy");

std::printf("----------------------------------------------------------
-------\n");
            correct = f_deriv(5.5);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",      "exact
f'(x)", 5.5, h, correct, "-");
            approx = f_sub_deriv(f, 5.5, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",    "right
f'(x)", 5.5, h, approx, inaccuracy);
            approx = f_sub_deriv(f, 5.5, -h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",     "left
f'(x)", 5.5, h, approx, inaccuracy);
            approx = f_c_sub_deriv(f, 5.5, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",  "central
f'(x)", 5.5, h, approx, inaccuracy);
            correct = f_deriv2(5.5);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",      "exact
f''(x)", 5.5, h, correct, "-");
            approx = f_sub_deriv2(f, 5.5, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",
"f''(x)*", 5.5, h, approx, inaccuracy);

std::printf("----------------------------------------------------------
-------\n\n");

                  h = 0.2500;
            std::printf("|%14s|%8s|%12s|%12s|%12s|\n",     "Derivative",
"x", "h", "Value", "Inaccuracy");

std::printf("----------------------------------------------------------
-------\n");
            correct = f_deriv(5.75);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",      "exact
f'(x)", 5.75, h, correct, "-");
            approx = f_sub_deriv(f, 5.75, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",    "right
f'(x)", 5.75, h, approx, inaccuracy);
            approx = f_sub_deriv(f, 5.75, -h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",     "left
f'(x)", 5.75, h, approx, inaccuracy);
```

```
            approx = f_c_sub_deriv(f, 5.75, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",  "central
f'(x)", 5.75, h, approx, inaccuracy);
            correct = f_deriv2(5.75);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",      "exact
f''(x)", 5.75, h, correct, "-");
            approx = f_sub_deriv2(f, 5.75, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",
"f''(x)*", 5.75, h, approx, inaccuracy);

std::printf("-----------------------------------------------------
-------\n\n");

                  h = 0.2500;
            std::printf("|%14s|%8s|%12s|%12s|%12s|\n",     "Derivative",
"x", "h", "Value", "Inaccuracy");

std::printf("-----------------------------------------------------
-------\n");
            correct = f_deriv(6.0);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",      "exact
f'(x)", 6.0, h, correct, "-");
            approx = f_sub_deriv(f, 6.0, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",    "right
f'(x)", 6.0, h, approx, inaccuracy);
            approx = f_sub_deriv(f, 6.0, -h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",     "left
f'(x)", 6.0, h, approx, inaccuracy);
            approx = f_c_sub_deriv(f, 6.0, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",  "central
f'(x)", 6.0, h, approx, inaccuracy);
            correct = f_deriv2(6.0);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",      "exact
f''(x)", 6.0, h, correct, "-");
            approx = f_sub_deriv2(f, 6.0, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",
"f''(x)*", 6.0, h, approx, inaccuracy);

std::printf("-----------------------------------------------------
-------\n\n");

                  h = 0.2500;
            std::printf("|%14s|%8s|%12s|%12s|%12s|\n",     "Derivative",
"x", "h", "Value", "Inaccuracy");

std::printf("-----------------------------------------------------
-------\n");
            correct = f_deriv(6.25);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",      "exact
f'(x)", 6.25, h, correct, "-");
```

```
            approx = f_sub_deriv(f, 6.25, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",    "right
f'(x)", 6.25, h, approx, inaccuracy);
            approx = f_sub_deriv(f, 6.25, -h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",     "left
f'(x)", 6.25, h, approx, inaccuracy);
            approx = f_c_sub_deriv(f, 6.25, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",  "central
f'(x)", 6.25, h, approx, inaccuracy);
            correct = f_deriv2(6.25);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",      "exact
f''(x)", 6.25, h, correct, "-");
            approx = f_sub_deriv2(f, 6.25, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",
"f''(x)*", 6.25, h, approx, inaccuracy);

std::printf("------------------------------------------------------------
-------\n\n");

                 h = 0.2500;
            std::printf("|%14s|%8s|%12s|%12s|%12s|\n",     "Derivative",
"x", "h", "Value", "Inaccuracy");

std::printf("------------------------------------------------------------
-------\n");
            correct = f_deriv(5.21);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",      "exact
f'(x)", 5.21, h, correct, "-");
            approx = f_sub_deriv(f, 5.21, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",    "right
f'(x)", 5.21, h, approx, inaccuracy);
            approx = f_sub_deriv(f, 5.21, -h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",     "left
f'(x)", 5.21, h, approx, inaccuracy);
            approx = f_c_sub_deriv(f, 5.21, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",  "central
f'(x)", 5.21, h, approx, inaccuracy);
            correct = f_deriv2(5.21);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12s|\n",      "exact
f''(x)", 5.21, h, correct, "-");
            approx = f_sub_deriv2(f, 5.21, h);
            inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
            std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",
"f''(x)*", 5.21, h, approx, inaccuracy);

std::printf("------------------------------------------------------------
-------\n\n");
```

```
           std::printf("|%14s|%8s|%12s|%12s|\n",   "Derivative",   "x",
"Value", "Inaccuracy");

std::printf("---------------------------------------------------\n");
           correct = f_deriv(5.21);
           std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12s|\n",   "exact   f'(x)",
5.21, correct, "-");
           approx = s_deriv(5.21);
           inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
           std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|\n",  "s'(x)",  5.21,
approx, inaccuracy);
           correct = f_deriv2(5.21);
           std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12s|\n",   "exact   f''(x)",
5.21, correct, "-");
           approx = s_deriv2(5.21);
           inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
           std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|\n",  "s''(x)",  5.21,
approx, inaccuracy);
           approx = f_sub_deriv2(s, 5.21, h);
           inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
           std::printf("|%14s|%8.6g|%12.6g|%12.6g|\n", "s''(x)*", 5.21,
approx, inaccuracy);

std::printf("---------------------------------------------------\n\
n");

           power = -2;
           std::printf("|%8s|%12s|%12s|%12s|%12s|\n",     "x",     "h",
"s'(x)*", "exact f'(x)", "Inaccuracy");

std::printf("---------------------------------------------------------
-----\n");
           h = std::pow(2, power);
           correct = f_deriv(5.21);
           for (;; --power){
                approx = f_sub_deriv(s, 5.21, h);
                inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
                std::printf("|%8.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|%12.6g|\n",
5.21, h, approx, correct, inaccuracy);
                if (!isHValid(correct, approx)){
                     break;
                }
                h /= 2.0;
           }

std::printf("---------------------------------------------------------
-----\n\n");
           double  h_opt  =  2*std::sqrt(delta_f_calculation(f,  s,  5.0,
6.25) / M2_calculation(s_deriv2, 5.0, 6.25));
           std::printf("h optimal = %g\n", h_opt);
           double nu_delta = 2 / h_opt;
           std::printf("nu delta = %g\n\n", nu_delta);
           return 0;
      }

      double f(double x){
```

```
		return  (std::pow((2*x-3),  3)*std::pow((std::pow(x,  3)+6), 1.0/3)) / (std::pow((3*x*x-5), 1.0/4) * std::sqrt(5*x*x*x+9));
	}

	double f_deriv(double x){
		return                (240*std::pow(x,10)-540*std::pow(x,9)-500*std::pow(x,8)+3231*std::pow(x,7)-3105*std::pow(x,6)-9558*std::pow(x,3)-6966*std::pow(x,2)+21627*x-14580)/(std::pow((3*x*x-5),5.0/4)*std::pow((x*x*x+6),   2.0/3)*std::pow((5*x*x*x+9),   3.0/2))+(30591*x*x*x*x-12501*x*x*x*x*x)/(2*std::pow((3*x*x-5), 5.0/4)*std::pow((x*x*x+6),2.0/3)*std::pow((5*x*x*x+9),3.0/2));
	}

	double f_deriv2(double x){
		return                                 (3600*std::pow(x,17)-13500*std::pow(x,15)+37260*std::pow(x,14)-4335*std::pow(x,13)-303993*std::pow(x,9)+5644674*std::pow(x,7)-9065115*x*x*x*x*x*x+16008597*x*x*x*x-3627504*x*x*x-8667081*x*x+9666540*x-5839290)/(std::pow((3*x*x-5),9.0/4)*std::pow((x*x*x+6),5.0/3)*std::pow((5*x*x*x+9),5.0/2))+((-84015*std::pow(x,12))-283365*std::pow(x,11)-4577715*x*x*x*x*x*x*x)/(2*std::pow((3*x*x-5),9.0/4)*std::pow((x*x*x+6),5.0/3)*std::pow((5*x*x*x+9),5.0/2))+(2433615*std::pow(x,10)-11370861*std::pow(x,8))/(4*std::pow((3*x*x-5),9.0/4)*std::pow((x*x*x+6),5.0/3)*std::pow((5*x*x*x+9),5.0/2));
	}

	double f_sub_deriv(double (*func)(double), double x, double h){
		return (func(x + h) - func(x)) / h;
	}

	double f_c_sub_deriv(double (*func)(double), double x, double h){
		return (func(x + h) - func(x - h)) / (2*h);
	}

	double f_sub_deriv2(double (*func)(double), double x, double h){
		return (func(x + h) - 2*func(x) + func(x - h)) / (h * h);
	}

	bool isHValid(double correct, double approx){
		double inaccuracy = std::fabs(correct - approx);
		if (inaccuracy > 10)
			return false;
		return true;
	}

	double s(double x){
		double x0 = 5;
		while (x0 + 0.25 < x)
			x0 += 0.2500;
		double x1 = x0 + 0.2500;
		double h = x1 - x0;
		double t = (x - x0) / h;
		double f0 = f(x0), f1 = f(x1);
		double m0 = f_deriv(x0), m1 = f_deriv(x1);
```

```
        return  f0*std::pow((1-t),  2)*(1+2*t)  +  f1*t*t*(3-2*t)  +
m0*h*t*std::pow((1-t), 2) - m1*t*t*h*(1-t);
    }

    double s_deriv(double x){
        double x0 = 5;
        while (x0 + 0.25 < x)
            x0 += 0.2500;
        double x1 = x0 + 0.2500;
        double h = x1 - x0;
        double t = (x - x0) / h;
        double f0 = f(x0), f1 = f(x1);
        double m0 = f_deriv(x0), m1 = f_deriv(x1);
        return (-6*f0*t*(1-t) + 6*f1*t*(1-t) + m0*h*(1-t)*(1-3*t) +
m1*h*t*(3*t-2)) / h;
    }

    double s_deriv2(double x){
        double x0 = 5;
        while (x0 + 0.25 < x)
            x0 += 0.2500;
        double x1 = x0 + 0.2500;
        double h = x1 - x0;
        double t = (x - x0) / h;
        double f0 = f(x0), f1 = f(x1);
        double m0 = f_deriv(x0), m1 = f_deriv(x1);
        return 6*(f0-f1)*(2*t-1)/(h*h) + 2*(m0*(3*t-2) + m1*(3*t-1))
/ h;
    }

    double    delta_f_calculation(double    (*f)(double),    double
(*f_approx) (double), double x0, double xn){
        double delta = 0;
        double current;
        for (double x = x0; x < xn; x += 0.01){
            current = std::fabs(f(x) - f_approx(x));
            if (current > delta)
                delta = current;
        }
        return delta;
    }

    double M2_calculation(double (*deriv2)(double), double x0, double
xn){
        double M2 = 0;
        double current;
        for (double x = x0; x < xn; x += 0.01){
            current = std::fabs(deriv2(x));
            if (current > M2)
                M2 = current;
        }
        return M2;
    }
```