2 лекция

7 сентября 2022 г. 13:34

Th(Интегральный признак сходимости) №15

Если $f(x)$ на $[1, +\infty)$

$f(x)\downarrow$ $f(x) \geq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ - сходится $\Leftrightarrow$ сходится $\int_1^{\infty} f(x)dx$

Знакопеременные ряды

№16 Th(Лейбница)

Если $\exists \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ $u_n \geq u_{n+1} > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$

тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ - сходится

$|r_n| = |S - S_n| \leq u_{n+1}$

Док-во:

$\forall S_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} u_n$

$S_{2k} = \underbrace{(u_1 - u_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(u_3 - u_4)}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(u_{2k-1} - u_{2k})}_{\geq 0}$

$\Rightarrow S_{2k} \leq S_{2k+2} \leq \ldots$

$S_{2k} = u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(u_4 - u_5)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{u_{2k}}_{\geq 0}$

$S_{2k} \leq u_1$

$\begin{cases} S_{2k} \nearrow \\ S_{2k} \leq u_1 \end{cases}$; $S_{2k} \to S$ $\quad S_{2k+1} = S_{2k} + u_{2k+1}$

$S_{2k+1} \to S$

$S_{2k} \leq S \leq S_{2k+1}$

$S_{2k+1} = S_{2k-1} - \underbrace{(u_{2k} - u_{2k+1})}_{\geq 0} \leq S_{2k-1}$

$S - S_{2k} \leq S_{2k+1} - S_{2k} = u_{2k+1}$

$S_{2k-1} - S \leq S_{2k-1} - S_{2k} = u_{2k}$ $\Rightarrow |r_n| = |S - S_n| \leq u_{n+1}$

Ex

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$S_1 = 1$, $S_2 = \frac{1}{2}$

$|S - 1| \leq \frac{1}{2}$

$|S - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{3}$

$S \in [\frac{1}{2}; 1)$

$\frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \ldots$

$\frac{1}{2}S + S = \frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots \neq S$

Противоречие

нельзя переставлять слагаемые

def(абсолютно сходящийся ряд) №17

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - сходится и

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ - сходится

№18 def(условно сходящийся ряд)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - сходится

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ - расходится

Th №19

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится

Док-во:

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ - сходится, то по Th№8 критерий Коши

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \forall p \geq 0$

$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$ т.к. $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$

Значит $\sum_{n=1}^{\infty} u_k$ - сходится по Коши

Th(о перестановке членов ряда, сходящегося абсолютно) №20

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - сходится абсолютно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$, составленный из тех же членов, взятых в произвольном порядке, сходится абсолютно и имеет ту же сумму

Th №21

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - сходятся абсолютно

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ - сходится абсолютно

Док-во:

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_k|$ - сходится

$\sum_{n=1}^{\infty} |v_k|$ - сходится

т.к. $\left|\sum_{n=0}^{n+p} u_k\right| \leq \sum_{n=0}^{n+p} |u_k|$

$\left|\sum_{n=0}^{n+p} v_k\right| \leq \sum_{n=0}^{n+p} |v_k|$

По Th№8 Критерий Коши

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \ \forall p \geq 0$ $\quad \sum_{k=n}^{n+p} |u_k + v_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| +$

$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad + \sum_{k=n}^{n+p} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \ \forall p \geq 0$

$\sum_{n=0}^{n+p} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}$

Признаки Коши и Даламбера №22

(для знакопеременных)

$\exists u_n \neq 0$, $u_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2 \ldots$

$\exists \ \exists q : 0 < q < 1 \ \forall n$ $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq q$

или же $\sqrt[n]{|u_n|} \leq q$ абсолютно сходится

$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geq 1$ или $\sqrt[n]{|u_n|} \geq 1$

расходится

Свойства условно сходящихся рядов

№23 Th(Риман / 1ое свойство)

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - сходится условно : $u_n \in \mathbb{R}$

Тогда $\forall A \in [-\infty; +\infty]$ существует биекция

$p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (перестановка)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_{p_n} \to A$

Th(произведение рядов) №24

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_1$

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_2$ $\to$ сходятся абсолютно $\Rightarrow$ ряд из $c_{ij} = v_i \cdot u_j : i, j \in \mathbb{N}$

Тогда ряд из всех c_{ij} - абсолютно сходится

$S^* = S_1 \cdot S_2$

Th №25

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - сходится абсолютно, то $\forall c \in \mathbb{C}$ $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ - сходится абсолютно

Док-во:

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ - абсолютно сходится

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \forall p \geq 0$

По критерию Коши $\sum_{n=1}^{n+p} |u_n| < \frac{\varepsilon}{|c|}$

Тогда $\sum_{n=1}^{n+p} |c| \cdot |u_n| < \varepsilon$

Значит $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ - сходится абсолютно

Lm №26

$\exists b_n$ положительные члены ряда

c_n - модули отрицательных членов

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - сходится абсолютно

$\Updownarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ - сходятся

и при этом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$

Док-во:

ограничены, монотонны $\Rightarrow$ сходятся

$(\Rightarrow)$ $\sum_{n=1}^{N} b_n + \sum_{n=1}^{N} c_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

$(\Leftarrow)$ $\underbrace{\sum_{n=1}^{N} |u_n|}_{\text{монотонна}}^{\text{огран.}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ число

$\forall N \in \mathbb{N} \ \exists N_1 \in \mathbb{N}$ и $N_2 \in \mathbb{N}_2$

$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N_1} b_n - \sum_{n=1}^{N_2} c_n$

Док-во:

делим ряд на 2: положительный и отрицательный

Т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ - расходится, то

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ - расходятся

$\exists \sum b_n$ сходится, то $\sum c_n = -\sum u_n + \sum b_n$ тоже сходится, а значит $\sum |u_n| = \sum b_n + \sum c_n$, тоже сходится. Противоречие

Т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - сходится, то $b_n \to 0$

$c_n \to 0$

$\exists A \in (-\infty, +\infty)$

выберем α_1 : $A \leq \sum_{n=1}^{\alpha_1} b_n$

выберем β_1 : $\sum_{n=1}^{\alpha_1} b_n - \sum_{n=1}^{\beta_1} c_n < A \leq \sum_{n=1}^{\alpha_1} b_n - \sum_{n=1}^{\beta_1 - 1} c_n$

выберем α_2 : $\sum_{n=1}^{\alpha_1} b_n - \sum_{n=1}^{\beta_1} c_n + \sum_{n=\alpha_1+1}^{\alpha_2 - 1} b_n < A \leq \sum_{n=1}^{\alpha_1} b_n - \sum_{n=1}^{\beta_1 - 1} c_n + \sum_{n=\alpha_1+1}^{\alpha_2} b_n$

В итоге такая сумма сойдется к A

Функциональные ряды

def №27

$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, заданная на $X \subset \mathbb{R}$ называют функциональной последовательностью

def №28

Говорят, что $\{u_n(x)\}$ поточечно сходится на X, если $x \in X$ $\exists \lim_{n\to\infty} u_n(x)$

def №29

Говорят, что $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к функции $u(x)$ на множестве X, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \forall x \in X$

$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$

и пишут $u_n(x) \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} u(x)$

Ex

$h_n(x) = \frac{x}{n}$ $\quad x \in (0, +\infty)$

$h_n(x) \to h(x) = 0$

$h_n(x) \not\rightrightarrows 0$

Свойства равномерной сходимости №30

1) $\left(u_n(x) \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} u(x)\right) \Rightarrow x \in X$ $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$

2) $\left(u_n(x) \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} u(x)\right) \Leftrightarrow \left(\sup_{x\in X} |u_n(x) - u(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0\right)$