Лекция 11

§ 6.3. Полиномиальная интерполяция. Многочлен Лагранжа

1. Интерполяционный многочлен. Начнем с рассмотрения задачи интерполяции в наиболее простом и полно исследованном случае интерполирования алгебраическими многочленами. Для заданной таблицы (6.1) многочлен $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ степени n называется *интерполяционным многочленом*, если он удовлетворяет условиям

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n). \tag{6.21}$$

Равенство (6.21) можно записать аналогично (6.8) в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ &a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{aligned} \tag{6.22}$$

относительно коэффициентов многочлена. Эта система однозначно разрешима, так как система функций 1, x, x^2, ... , x^n линейно независима в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ (см. утверждение 6.1 и теорему 6.1). Таким образом, верна следующая теорема.

Т е о р е м а 6.2. *Существует единственный интерполяционный многочлен степени n, удовлетворяющий условиям* (6.21).

З а м е ч а н и е. На практике система (6.22) никогда не используется для вычисления коэффициентов интерполяционного многочлена. Дело в том, что она является плохо обусловленной. Кроме того существуют различные явные формы записи интерполяционного многочлена, которые применяются при интерполяции. Наконец, в большинстве приложений интерполяционного многочлена явное вычисление коэффициентов a_k не нужно.

2. Многочлен Лагранжа. Приведем одну из форм записи интерполяционного многочлена – *многочлен Лагранжа*

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j\, l_{nj}\,(x). \qquad (6.23)$$

Здесь $l_{nj}(x) = \prod_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$.

Как нетрудно видеть, $l_{nj}(x)$ представляет собой многочлен степени n, удовлетворяющий условию

$$l_{nj}(x_i) = \begin{cases} 1, \text{при } i = j \\ 0, \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Таким образом, степень многочлена L_n равна n и при $x = x_i$ в сумме (6.22) обращаются в ноль все слагаемые, кроме слагаемого с номером $j = i$, равного y_i. Поэтому многочлен Лагранжа (6.23) действительно является интерполяционным.

Заметим, что на практике интерполяционный многочлен Лагранжа используется так, что нет необходимости его преобразования к каноническому виду $L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_k\, x^k$.

Приведем формулы для записи многочленов Лагранжа первой и второй степени, которые часто используются на практике:

$$L_1(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}, \qquad (6.24)$$

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \qquad (6.25)$$

§ 6.4. Погрешность интерполяции

Приведем без доказательства наиболее известную теорему о погрешности интерполяции.

Т е о р е м а 6.3. *Пусть функция f дифференцируема n + 1 разна отрезке $[a, b]$, содержащем узлы интерполяции x_i, i = 0, 1, ... , n. Тогда для погрешности интерполяции в точке $x \in [a, b]$ справедливо равенство*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \tag{6.26}$$

в котором $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$, а ξ – некоторая точка, принадлежащая интервалу (a, b).

Основное неудобство в использовании этой теоремы состоит в том, что входящая в формулу (6.26) для погрешности точка ξ неизвестна. Поэтому чаще используется не сама теорема, а ее следствие.

С л е д с т в и е. *В условиях теоремы (6.3) справедлива оценка погрешности интерполяции в точке $x \in [a, b]$, имеющая вид*

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|, \tag{6.27}$$

а также оценка максимума модуля погрешности интерполяции на отрезке $[a, b]$, имеющая вид

$$\max_{[a,b]}|f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{[a,b]}|\omega_{n+1}(x)|, \tag{6.28}$$

Здесь $M_{n+1} = \max_{[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|$.

Пусть теперь $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ и пусть $h_i = x_i - x_{i-1}$ – i-й шаг таблицы, а $h_{max} = \max_{1 \le i \le n} h_i$. Несколько огрубляя оценку (6.28), можно получить следующее неравенство:

$$\max_{[x_0, x_n]}|f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{4(n+1)} h_{max}^{n+1}. \tag{6.29}$$

Оно позволяет утверждать, что для достаточно гладкой функции f при фиксированной степени интерполяционного многочлена погрешность интерполяции на отрезке $[x_0, x_n]$ при $h_{max} \to 0$ стремится к нулю не медленнее, чем некоторая величина, пропорциональная h_{max}^{n+1}. Этот факт принято формулировать так: интерполяция многочленом степени n имеет $(n+1)$–й порядок точности относительно h_{max}. В частности, линейная и квадратичная интерполяции имеют второй и третий порядок точности соответственно.

§ 6.5. Интерполяция с кратными узлами

1. Интерполяционный многочлен с кратными узлами. Иногда в узлах x_i $(i = 0, 1, \dots, m)$ бывают заданы не только значения $y_i = f(x_i)$ функции f, но и значения ее производных $y_i' = f'(x_i)$, $y_i'' = f''(x_i)$, … , $y_i^{(k_i-1)} = f^{(k_i-1)}(x_i)$ до некоторого порядка $k_i - 1$. В этом случае узел x_i называют *кратным*, а число k_i, равное количеству заданных значений, – *кратностью узла*. Пусть $n = k_0 + k_1 + \dots + k_m - 1$. Можно доказать, что существует единственный многочлен $P_n(x)$ степени n, удовлетворяющий условиям

$$P_n(x_i) = y_i,\ P_n{}'(x_i) = y_i',\ \dots,\ P_n{}^{(k_i-1)}(x_i) = y_i^{(k_i-1)} \quad \text{для} \quad i=0, 1, \dots, m.$$

Этот многочлен называют *интерполяционным многочленом с кратными узлами*. Можно указать и явную формулу его записи, аналогичную форме Лагранжа. Мы этого делать не будем, а отметим лишь два важных частных случая.

1). Пусть на концах отрезка $[x_0, x_1]$ заданы значения y_0, y_1, y_0', y_1'. Тогда $m = 1$, $k_0 = 2$, $k_1 = 2$, $n = 3$ и интерполяционный многочлен $P_3(x)$, удовлетворяющий условиям $P_3(x_0) = y_0$, $P_3(x_1) = y_1$, $P_3{}'(x_0) = y_0'$, $P_3{}'(x_1) = y_1'$, может быть представлен в следующем виде:

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x_1-x)^2(2(x-x_0)+h)}{h^3} + y_0' \frac{(x_1-x)^2(x-x_0)}{h^2} +$$
$$+ y_1 \frac{(x-x_0)^2(2(x_1-x)+h)}{h^3} + y_1' \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)}{h^2}, \quad \text{где } h = x_1 - x_0. \quad (6.30)$$

Многочлен (6.30) принято называть *кубическим интерполяционным многочленом Эрмита.*

2). Пусть в точке x_0 заданы значения y_0, y_0', … , y_0^n. Тогда многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям

$$P_n(x_0) = y_0,\ P_n{}'(x_0) = y_0',\ \dots,\ P_n{}^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)},$$

представляется в виде:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_0^{(k)} \frac{(x-x_0)^k}{k!}. \qquad (6.31)$$

Как нетрудно видеть, многочлен $P_n(x)$ представляет собой отрезок ряда Тейлора. Таким образом, формула Тейлора дает решение задачи интерполяции с одним узлом кратности (n + 1). Заметим, что в действительности с ее помощью осуществляется экстраполяция.

2. Погрешность интерполяции с кратными узлами.

Т е о р е м а 6.4. *Пусть функция f дифференцируема n + 1 раз на отрезке* $[a,\ b]$, *содержащем узлы интерполяции* x_i (i = 0, 1, … , m). *Тогда для погрешности интерполяции с кратными узлами в точке* $x \in [a,\ b]$ *справедливы равенство* (6.26) *и неравенства* (6.27) *и* (6.28), *в которых* $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)^{k_0}\,(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_m)^{k_m}$, *а* ξ – *некоторая точка, принадлежащая интервалу* $(a,\ b)$.

Для формулы Тейлора (m = 0, $k_0 = n + 1$) теорема 6.4 дает известную формулу остаточного члена в форме Лагранжа. Для кубического многочлена Эрмита (m = 0, $k_0 = 2$, $k_1 = 2$) неравенство (6.29) приводит к следующей оценке погрешности:

$$\max_{[x_0, x_1]} |\, f(x) - P_3(x)\, | \le \frac{M_4}{384}\, h^4. \qquad (6.32)$$

Здесь учтено то, что максимум функции $\omega_4(x) = (x - x_0)^2\,(x - x_1)^2$ на отрезке $[x_0, x_1]$ достигается в точке $x = (x_0 + x_1)/2$ и равен $h^4/16$.

§ 6.6. Минимизация оценки погрешности интерполяции. Многочлены Чебышева.

1.Постановка задачи минимизации оценки погрешности. Предположим, что значение заданной на отрезке $[a, b]$ функции f можно вычислить в произвольной точке x. Однако по некоторым причинам (например, вычисление значений $f(x)$ – трудоемкая операция) целесообразнее заменить прямое вычисление функции f вычислением значений ее интерполяционного многочлена P_n. Для такой замены необходимо один раз получить таблицу значений функции f в выбранных на отрезке $[a, b]$ точках x_i, $i = 0, 1, \dots, n$. При этом естественно стремиться к такому выбору узлов интерполяции, который позволит сделать минимальной величину $\Delta(P_n) = \max\limits_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)|$ – погрешность интерполяции на отрезке $[a, b]$.

Пусть о функции f известно лишь то, что она непрерывно дифференцируема $n + 1$ раз на отрезке $[a, b]$. Тогда неравенство (6.28) дает верхнюю границу погрешности интерполяции:

$$\bar{\Delta}(P_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|. \qquad (6.33)$$

Поставим теперь задачу определить набор узлов $x_0, x_1, \dots, x_n$, при котором величина $\bar{\Delta}(P_n)$ минимальна. Для решения этой задачи нам потребуются некоторые сведения о многочленах Чебышева.

2. Многочлены Чебышева. Введенные П.Л.Чебышевым многочлены $T_n(x)$ широко используются в вычислительной математике. При $n = 0$ и $n = 1$они определяются явными формулами

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \qquad (6.34)$$

а при $n \geq 2$ рекуррентной формулой

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \qquad (6.35)$$

Запишем явные формулы для многочленов Чебышева $T_n(x)$

для $n = 2, 3, 4, 5$:

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,$$
$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x,$$
$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 16x^5 - 20\,x^3 + 5x.$$

Аналогично можно записать явные формулы и при $n \geq 6$.

Приведем некоторые свойства многочленов Чебышева.

1). *При четном* n *многочлен* $T_n(x)$ *содержит только четные степени* x *и является четной функцией, а при нечетном* n *многочлен* $T_n(x)$ *содержит только нечетные степени* x *и является нечетной функцией*.

2). *При* $n \geq 1$ *старший коэффициент многочлена* $T_n(x)$ *равен* 2^{n-1}, *т.е.* $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots$.

Справедливость свойств 1) и 2) следует непосредственно из определения (6.34), (6.35).

3). *Для* $x \in [-1, 1]$ *справедлива формула*

$$T_n(x) = \cos\,(n \cdot \arccos x). \tag{6.36}$$

□ При $n = 0$ и $n = 1$ формула (6.36) верна, так как $\cos\,(0 \cdot \arccos x) = 1$, $\cos\,(1 \cdot \arccos x) = x$. Для того, чтобы доказать справедливость формулы для всех $n \geq 0$, достаточно показать, что функции $C_n(x) = \cos\,(n \cdot \arccos x)$ удовлетворяют такому же, как и многочлены Чебышева, рекуррентному соотношению

$$C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x). \tag{6.37}$$

Соотношение (6.37) получится, если в легко проверяемом тригонометрическом тождестве

$$\cos\,[(m + 1)\varphi] + \cos\,[(m - 1)\varphi] = 2\cos\varphi\,\cos m\varphi$$

положить $m = n - 1$ и $\varphi = \arccos x$. ■

4). *При* $n \geq 1$ *многочлен* $T_n(x)$ *имеет ровно* n *действительных корней, расположенных на отрезке* [–1, 1] *и вычисляемых по формуле*

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \qquad (6.38)$$

5). *При* $n \geq 0$ *справедливо равенство* $\max_{[-1,1]} | T_n(x)| = 1$. *Если* $n \geq 1$, *то этот максимум достигается ровно в* $n + 1$ *точках, которые находятся по формуле*

$$x_m = \cos\frac{\pi m}{n}, \quad m = 0, 1, \dots, n. \qquad (6.39)$$

При этом $T_n(x_m) = (-1)^m$, *т.е. максимумы и минимумы многочлена Чебышева чередуются.*

Доказательство свойств 4) и 5) основано на применении формулы (6.36). Например, в силу этой формулы корни многочлена $T_n(x)$, расположенные на отрезке [–1, 1], совпадают с корнями уравнения $\cos(n \cdot \arccos x) = 0$. Эквивалентное преобразование этого уравнения дает $n \cdot \arccos x = \pi/2 + \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$. Так как $0 \leq \arccos x \leq \pi$, то заключаем, что имеется ровно n корней x_k, отвечающих значениям $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и удовлетворяющих равенствам $\arccos x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, эквивалентным формуле (6.38).

Назовем величину $\max_{[-1,1]} | P_n(x)|$ *уклонением многочлена* $P_n(x)$ *от нуля.* Эта величина характеризует максимальное отклонение (уклонение) графика многочлена P_n от графика функции $y = 0$ на отрезке [–1, 1]. Можно доказать следующее утверждение.

6). *Среди всех многочленов фиксированной степени* n *со старшим коэффициентом* a_n, *равным 1, наименьшее уклонение от нуля (равное* 2^{1-n}*) имеет многочлен* $\overline{T_n}(x) = 2^{1-n}\, T_n(x)$.

Благодаря этому свойству, имеющему особую ценность для приложений, многочлены Чебышева иногда называют *наименее уклоняющимися от нуля.* Свойство 6) можно сформулировать так: для любого многочлена вида $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, отличного от $\overline{T_n}(x)$, справедливо неравенство

$$2^{1-n} = \max_{[-1,1]} |\overline{T_n}(x)| < \max_{[-1,1]} |P_n(x)|.$$

З а м е ч а н и е. Из свойства 6) следует, что среди всех многочленов $P_n(x)$ фиксированной степени $n \geq 1$ со старшим коэффициентом $a_n \neq 0$ наименьшее уклонение от нуля (равное $|a_n|\ 2^{1-n}$) имеет многочлен $a_n \overline{T_n}(x)$.

3. Решение задачи минимизации оценки погрешности. Найдем сначала решение задачи в предположении, что отрезок интерполяции $[a,\ b]$ совпадает с отрезком [–1, 1]. В этом случае величина (6.33) будет минимальной при таком выборе узлов $x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n$, при котором минимальна величина $\max\limits_{[-1,1]} |\omega_{n+1}(\,x)|$, т.е. минимально уклонение многочлена $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)\ (x - x_1)\ \dots\ (x - x_n)$ от нуля. В силу свойств 4) и 6) многочленов Чебышева решение задачи дает набор узлов

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\,\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

являющихся нулями многочлена T_{n+1}, так как в этом случае $\omega_{n+1} = \overline{T_{n+1}}$.

Заметим, что при таком выборе

$$\bar{\Delta}(P_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!2^n}, \tag{6.40}$$

Причем в силу свойства 6) любой другой выбор узлов дает большее значение верхней границы погрешности. Для сравнения укажем, что при использовании для приближения функции f отрезка ряда Тейлора $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k$ верхняя граница оценки погрешности такова:

$$\bar{\Delta}(P_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Следовательно, она в 2^n раз хуже, чем при интерполяции с оптимальным выбором узлов.

Пусть теперь отрезок интерполяции $[a,\ b]$ произволен. Приведем его к стандартному отрезку [–1, 1] заменой

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t, \qquad \text{где } t \in [-1, 1]. \qquad (6.41)$$

Как нетрудно видеть, в этом случае

$$\omega_{n+1}(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \widetilde{\omega}_{n+1}(t), \text{ где } \widetilde{\omega}_{n+1}(t) =$$
$$(t-t_0)(t-t_1) \ldots (t-t_n), \text{ и } x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k, \; k = 0, 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\bar{\Delta}(P_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \max_{[-1,1]} \widetilde{\omega}_{n+1}(t)$$

и минимум этой величины достигается при значениях $t_0, t_1, \ldots, t_n$, совпадающих с нулями многочлена T_{n+1}. Значит, решение поставленной задачи дает выбор узлов

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2} \pi\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n, \qquad (6.42)$$

которому отвечает минимальное значение верхней границы погрешности интерполяции, равное

$$\bar{\Delta}(P_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)! 2^n} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} .$$