МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №1
по дисциплине «Методы оптимизации»
Тема: Методы безусловной минимизации функций

Студент гр. 0303	____________________	
Преподаватель	____________________	Мальцева Н. В.

Санкт-Петербург
2023

Цели работы.

1. Решение задачи безусловной минимизации функций с помощью стандартной программы.
2. Исследование и объяснение полученных результатов.

Постановка задачи.

1. Минимизировать функцию $F(x_1, x_2, a) = (x_2 - {x_1}^2)^2 + a(x_1 - 1)^2$ с точностью до 10^{-5} $(abs\ (\ F(x_{1,k}, x_{2,k}, a) - F({x_1}^*, {x_2}^*, a)\ ) < 10^{-5})$ методом Давидона-Флетчера-Пауэлла, методом Бройдена-Флетчера-Шанно и комбинированным методом наискорейшего спуска и Ньютона.
2. Оценить скорость и порядок сходимости методов.
3. Провести сравнительный анализ эффективности методов в зависимости от начальной точки и параметра a>0.
4. Сравнить эффективность квазиньютоновых методов и комбинированного метода наискорейшего спуска и Ньютона.

*) Часть решения, которая отвечает на одну из задач из постановки выглядит следующим образом ***[*]***. Например, ***[1]*** в решении будет стоять там, где описана сама минимизация функции различными методами.

Основные теоретические положения.

В лабораторной рассматривается задача безусловной минимизации функции $F(x_1, x_2, a) = (x_2 - {x_1}^2)^2 + a(x_1 - 1)^2$, т.е.: $F(x) \to min, x \in X$, где φ – целевая функция; X – допустимое множество ($X = R^2$).

В качестве решения данной задачи предлагаются следующие методы, эффективность которых необходимо проанализировать:

1) Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла, который является одним из квазиньютоновых методов (методы аппроксимации метода Ньютона, для которых должно быть выполнено условие:

$$H_{k+1}\left(\varphi'(x_{k+1}) - \varphi'(x_k)\right) = x_{k+1} - x_k, \qquad (*)$$

где H_{k+1} – матрица $\approx (\varphi''(x_{k+1}))^{-1}$) и заключается в итеративном вычислении H_{k+1} по следующей формуле:

$$H_{k+1} = H_k + \underbrace{\left[\frac{r_k \cdot {r_k}^T}{(r_k, q_k)} - \frac{(H_k q_k)(H_k q_k)^T}{(H_k q_k, q_k)}\right]}_{\Delta H_k},$$

где $\left.\begin{matrix} q_k = \varphi'(x_{k+1}) - \varphi'(x_k) \\ r_k = x_{k+1} - x_k \end{matrix}\right\} (*) \Rightarrow H_{k+1} \cdot q_k = r_k$

Следующая точка приближения к минимуму вычисляется при этом стандартно для квазиньютоновых методов:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k H_k \varphi'(x_k), \tag{1}$$

причем длина шага α_k в квазиньютоновых методах выбирается так же, как в методе наискорейшего спуска:

$$\alpha_k = \underset{\alpha \geq 0}{argmin} \varphi(x_k - \alpha H_k \varphi'(x_k)) \tag{2}$$

2) Метод Бройдена-Флетчера-Шанно также является одним из квазиньютоновых методов, что означает, что для него должно выполняться условие (*), следующий шаг высчитывается по формуле (1), где α_k считается, как (2). Рассмотрим, как в данном методе итеративно вычисляется H_{k+1}:

$$H_{k+1} = H_k + \left[1 + \frac{(q_k, H_k q_k)}{(r_k, q_k)}\right] \cdot \frac{r_k {r_k}^T}{(r_k, q_k)} - \frac{r_k {q_k}^T H_k + H_k q_k {r_k}^T}{(r_k q_k)}$$

*) Оба квазиньютоновых метода обладают следующими свойствами:

- Более глобальная сходимость, чем в методе Ньютона;
- Сверхлинейная скорость сходимости.
- Для квадратичных функций сходятся за n-шагов

3) Комбинация методов наискорейшего спуска и Ньютона – это применение данных методов таким образом, чтобы сочетать в себе достоинства обоих методов. Т.е. на расстояниях далеких от точки минимума необходимо использовать метод наискорейшего спуска для обеспечения глобальной сходимости, а рядом с точкой минимума – метод Ньютона для быстрой сходимости.

Метод наискорейшего спуска заключается в минимизации функции в направлении антиградиента, т. е. жадной минимизации на каждом шаге:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \varphi'(x_k),$$

где α_k вычисляется как:

$$\alpha_k = \underset{\alpha \geq 0}{argmin} \varphi(x_k - \alpha\varphi'(x_k))$$

Наискорейший спуск обладает глобальной сходимостью, порядком сходимости = 1 и линейной скоростью сходимости.

Метод Ньютона заключается в повороте направления по антиградиенту ближе к минимуму с использованием второй производной:

$$x_{k+1} = x_k - [\varphi''(x_k)]^{-1} grad\varphi(x_k)$$

Обладает порядком сходимости 2 и квадратичной скоростью сходимости.

Данные методы будут сравниваться с помощью оценки их практической скорости сходимости и порядка сходимости по следующим формулам:

1. Порядок сходимости:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{ln\,\Delta_{k+1}}{ln\,\Delta_k}$$

, где $\Delta_k = ||x_k - x^*||$

2. Скорость сходимости:

- Последовательность $\varphi(x_k)$ сходится к $\varphi(x^*)$ *линейно* (с линейной скоростью, со скоростью геометрической прогрессии), если существуют такие константы $q \in (0,1)$ и k_0, что

$$\|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*)\| \leq q\|\varphi(x_k) - \varphi(x^*)\|, \text{ при } k \geq k_0.$$

Или:

$$\|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*)\| \leq const * q^{k+1}, \text{ при } k \geq k_0$$

- Последовательность $\varphi(x_k)$ сходится к $\varphi(x^*)$ *сверхлинейно*, если

$$\|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*)\| \leq q_{k+1}\|\varphi(x_k) - \varphi(x^*)\|, q_k \to 0^+, \text{ при } k \to \infty.$$

Или:

$$\|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*)\| \leq const * q_1 * q_2 * \ldots * q_{k+1}, \text{ при } k \to \infty$$

- Последовательность $\varphi(x_k)$ сходится к $\varphi(x^*)$ с *квадратичной скоростью*, если существуют такие константы $c \geq 0$ и k_0, что

$$\|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*)\| \leq c\|\varphi(x_k) - \varphi(x^*)\|^2, \text{ при } k \geq k_0.$$

Или:

$$\|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*)\| \leq const * q^{2^{k+1}}, \text{ при } k \geq k_0$$

Решение.

Исходя из структуры заданной для минимизации функции:

$$F(x_1, x_2, a) = (x_2 - x_1{}^2)^2 + a(x_1 - 1)^2,$$

Можно сказать, что это приблизительно параболоид с единственным минимумом в точке (1, 1), причем вне зависимости от параметра а: $F(1,1,a) = 0$

В качестве тестовых параметров запуска методов минимизации будем использовать следующие параметры:

- $a = 0.001;\ 0.1;\ 2;\ 300$
- $x_0 = (2,3);\ (13,9); (101,40)$
- Начальный шаг не нужен ни для одного метода, поэтому здесь можно задать произвольное значение.

Выбраны такие значения параметров из тех соображений, чтобы проверить работу метода на узких и широких параболоидах (проверка устойчивости к овражности) с начальной точкой на сравнительно близком, среднем и очень далеком расстоянии от минимума (проверка области сходимости метода).

[1] Результаты поиска минимума с заданными параметрами в программе (см. таблицу 1):

Таблица 1 – Количество шагов для нахождения минимума

Параметр a	Начальное приближение x_0	Количество шагов для нахождения минимума
Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла		
0.001	(2, 3)	160
0.1	(2, 3)	10
2	(2, 3)	5
300	(2, 3)	4

0.001	(13, 9)	362
0.1	(13, 9)	17
2	(13, 9)	9
300	(13, 9)	5
0.001	(101, 40)	59428
0.1	(101, 40)	938
2	(101, 40)	62
300	(101, 40)	16
Метод Бройдена-Флетчера-Шанно		
0.001	(2, 3)	128
0.1	(2, 3)	10
2	(2, 3)	5
300	(2, 3)	4
0.001	(13, 9)	306
0.1	(13, 9)	17
2	(13, 9)	9
300	(13, 9)	5
0.001	(101, 40)	69026
0.1	(101, 40)	1145
2	(101, 40)	62
300	(101, 40)	16
Комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона (**)		
0.001	(2, 3)	117
0.1	(2, 3)	21
2	(2, 3)	6
300	(2, 3)	2
0.001	(13, 9)	4512
0.1	(13, 9)	122
2	(13, 9)	29
300	(13, 9)	10
0.001	(101, 40)	480085
0.1	(101, 40)	10577

Продолжение таблицы 1

2	(101, 40)	1919
300	(101, 40)	91

(**) Применялся метод наискорейшего спуска пока $x_1 \geq 8$ и $x_2 \geq 8$.

[3] Исходя из полученных данных можно заметить, что все 3 метода ведут себя приблизительно одинаково при изменении параметров a и x_0:

- Чем больше a, тем быстрее сходится каждый метод, причем самые худшие результаты были достигнуты при чрезвычайно маленьком значении $a = 0.001$ (при котором наблюдалось явление, что при $x_1 = x_2$ функция практически неограниченно вытягивается в одну сторону, - очень высокая овражность). При a = 300 график тоже вытягивается и овражность растет, но не так сильно, как при a = 0.001. Из полученных результатов можно сделать вывод, что все 3 метода хорошо справляются со средней овражностью (количество шагов не так велико везде, кроме a = 0.001), но не высокой.
- Чем дальше начальное приближение x_0 от точки минимума, тем дольше сходятся методы. Что логично, так как все 3 метода имеют более глобальную сходимость, чем стандартный метод Ньютона, но чем дальше от минимума изначально начинает метод, тем большее расстояние до минимума необходимо пройти. Это доказывает экспоненциальный рост числа итераций в зависимости от расстояния и при этом отсутствие расходящихся методов.

[2] Теперь оценим порядок и скорость сходимости каждого метода на выбранных 2-х комбинациях параметров. Для этого понадобятся дополнительные 3 вычисленных столбца $\frac{\ln \Delta_{k+1}}{\ln \Delta_k}$ (где $\Delta_k = ||x_k - x^*||$), $\frac{|F_{k+1}-F_k|}{|F_k-F_{k-1}|}$, $\frac{\ln |F_{k+1}-F_k|}{\ln |F_k-F_{k-1}|}$. Первый столбец необходим для определения порядка сходимости (к чему он стремится в практических расчетах), второй и третий для определения линейной и квадратичной скорости сходимости, так как:

Рассмотрим линейную скорость сходимости (для её определения нужен второй доп. столбец):

$$\|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*)\| \leq const * q^{k+1}$$

$$\|\varphi(x_k) - \varphi(x^*)\| \leq const * q^k$$

Тогда:

$$\frac{\|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*)\|}{\|\varphi(x_k) - \varphi(x^*)\|} \leq q$$

Т.е. при линейной сходимости частное от разности значений функций на трех смежных шагах должно стремится к конкретному числу. (Соответственно при сверхлинейной должен появиться ряд с уменьшающимися значениями).

Рассмотрим теперь квадратичную скорость сходимости, по тому же принципу получаем (третий доп. столбец):

$$\|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*)\| \leq const * q^{2^{k+1}}$$

$$\|\varphi(x_k) - \varphi(x^*)\| \leq const * q^{2^k}$$

То:

$$\frac{\|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*)\|}{\|\varphi(x_k) - \varphi(x^*)\|} \leq \frac{q^{2^{k+1}}}{q^{2^k}}$$

$$\frac{ln\|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*)\|}{ln\|\varphi(x_k) - \varphi(x^*)\|} \leq \frac{2^{k+1} * \ln(q)}{2^k * \ln(q)}$$

$$\frac{ln\|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*)\|}{ln\|\varphi(x_k) - \varphi(x^*)\|} \leq 2$$

Получаем, что при квадратичной скорости сходимости значения третьего столбца должны стремится к 2.

- Для начала рассмотрим метод Давидона-Флетчера-Пауэлла при параметрах $a = 2$, $x_0 = (2, 3)$ и $a = 0.001$, $x_0 = (101, 40)$ (см. таблицы 2 и 3):

Таблица 2 – Все шаги метода Давидона-Флетчера-Пауэлла при параметрах $a = 2$, $x_0 = (2, 3)$

№ шага	x_1	x_2	$F(x_1, x_2, a)$	Кол-во вычислений F	$\frac{ln\,\Delta_{k+1}}{ln\,\Delta_k}$	$\frac{F_{k+1} - F_k}{F_k - F_{k-1}}$	$\frac{ln\,F_{k+1} - F_k}{ln\,F_k - F_{k-1}}$
1	1.639648	3.060059	0.9563954257	12	-1.39	-	-
2	1.224315	1.260772	0.1573615800	22	1.11	0.16	9.06
3	1.099074	1.289681	0.0263090094	12	4.00	0.20	1.80
4	1.008431	1.002314	0.0003558781	22	1.13	0.01	2.18

Продолжение таблицы 2

5	1.001566	1.004479	0.0000067130	11	-	-	-

Здесь значения первого дополнительного столбца ощутимо колеблются, что говорит о сверхлинейном порядке сходимости. Скорость сходимости относительно частных разниц значений функций (второй дополнительный столбец) является сверхлинейной, так как составляет убывающий ряд. А исходя из третьего дополнительного столбца можно увидеть, что скорость сходимости даже близка к квадратичной.

Таблица 3 – 15 шагов методом Давидона-Флетчера-Пауэлла при параметрах $a = 0.001, x_0 = (101, 40)$

№ шага	x_1	x_2	$F(x_1, x_2, a)$	Кол-во вычислений F	$\frac{ln\,\Delta_{k+1}}{ln\,\Delta_k}$	$\frac{F_{k+1} - F_k}{F_k - F_{k-1}}$	$\frac{ln\,F_{k+1} - F_k}{ln\,F_k - F_{k-1}}$
59414	0.858935	0.737681	0.0000199071	43	1.00	-	-
59415	0.858928	0.737743	0.0000199016	15	1.04	364.62	0.69
59416	0.866239	0.750305	0.0000178962	43	1.00	0.01	1.34
59417	0.866344	0.750642	0.0000178720	21	1.04	73.98	0.75
59418	0.873192	0.762502	0.0000160818	43	1.00	0.01	1.39
59419	0.873245	0.762492	0.0000160711	15	1.04	147.41	0.73
59420	0.879652	0.773687	0.0000144938	43	1.00	0.00	1.44
59421	0.879633	0.773720	0.0000144893	15	1.04	313.13	0.70
59422	0.885652	0.784311	0.0000130802	43	1.00	0.00	1.45
59423	0.885647	0.784361	0.0000130767	16	1.03	360.26	0.70
59424	0.891307	0.794387	0.0000118158	43	1.00	0.01	1.32
59425	0.891499	0.794604	0.0000118001	22	1.03	71.34	0.76
59426	0.896820	0.804102	0.0000106801	43	1.00	0.02	1.29
59427	0.896765	0.804147	0.0000106591	13	1.03	47.99	0.78
59428	0.901777	0.813141	0.0000096514	43	-	-	-

Для данного запуска метода Давидона-Флетчера-Пауэлла виден линейный порядок сходимости с (в среднем) линейной скоростью сходимости (первый дополнительный столбец содержит приблизительно 1, а во втором дополнительном столбце значения колеблются относительно одного конкретного).

Интересен факт, что в данном методе каждый второй шаг имеет выделяющуюся скорость сходимости относительно других.

Итого метод имеет порядок сходимости от квадратичного до линейного (в среднем сверхлинейный), так же и со скоростью сходимости, что совпадает с теорией.

- Теперь рассмотрим метод Бройдена-Флетчера-Шанно при параметрах $a = 300$, $x_0 = (2, 3)$ и $a = 0.1$, $x_0 = (13, 9)$ (см. таблицы 4 и 5):

Таблица 4 – Все шаги методом Бройдена-Флетчера-Шанно при параметрах $a = 300$, $x_0 = (2, 3)$

№ шага	x_1	x_2	$F(x_1, x_2, a)$	Кол-во вычислений F	$\frac{ln\,\Delta_{k+1}}{ln\,\Delta_k}$	$\frac{F_{k+1} - F_k}{F_k - F_{k-1}}$	$\frac{ln\,F_{k+1} - F_k}{ln\,F_k - F_{k-1}}$
1	1.016578	3.003235	3.9625774436	8	-7.08	-	-
2	0.995426	1.005716	0.0064959397	17	1.05	0.0016	-3.67
3	1.000088	1.005666	0.0000324530	9	1.95	0.0050	2.05
4	1.000024	0.999966	0.0000001859	18	-	-	-

Исходя из полученных данных на рассматриваемом запуске, метод имеет квадратичную скорость и порядок сходимости (по третьему и первому дополнительным столбцам соответственно, так как и там, и там значения близки к 2).

Таблица 5 – 15 шагов методом Бройдена-Флетчера-Шанно при параметрах $a = 0.1$, $x_0 = (13, 9)$

№ шага	x_1	x_2	$F(x_1, x_2, a)$	Кол-во вычислений F	$\frac{ln\,\Delta_{k+1}}{ln\,\Delta_k}$	$\frac{F_{k+1} - F_k}{F_k - F_{k-1}}$	$\frac{ln\,F_{k+1} - F_k}{ln\,F_k - F_{k-1}}$
3	2.938342	8.666687	0.3767950222	10	0.81	-	-
4	2.500963	6.087228	0.2533755225	28	1.00	0.3127	1.56
5	2.462697	6.093716	0.2147799876	10	0.75	1.9397	0.80
6	2.102884	4.286918	0.1399149565	27	1.00	0.3421	1.41
7	2.066302	4.294203	0.1143051254	11	0.59	1.8627	0.83
8	1.747386	2.949705	0.0666022175	27	1.00	0.3193	1.38
9	1.714100	2.957600	0.0513726195	11	0.15	1.7055	0.87
10	1.447971	2.023612	0.0253979148	28	0.97	0.2899	1.34

11	1.420546	2.031426	0.0178674794	11	-6.67	1.4864	0.92
12	1.216795	1.436160	0.0066740651	29	1.01	0.2411	1.32

Продолжение таблицы 5

13	1.198058	1.442573	0.0039749728	12	2.80	1.1751	0.97
14	1.065074	1.114894	0.0008032965	28	1.00	0.1511	1.33
15	1.056475	1.118384	0.0003239800	13	2.33	0.6477	1.06
16	1.005223	1.007191	0.0000135052	28	1.00	0.0387	1.40
17	1.003831	1.007833	0.0000014922	14	-	-	-

Этот запуск метода Бройдена-Флетчера-Шанно имеет порядок сходимости, который сначала линейный, а ближе к концу приближается к квадратичному (первый дополнительный столбец), при этом скорость сходимости сверхлинейная (второй столбец – убывающий ряд).

Получаем, что метод Бройдена-Флетчера-Шанно так же, как и Давидона-Флетчера-Пауэлла, имеет в среднем сверхлинейную скорость сходимости, что совпадает с теоретическими значениями.

- Наконец рассмотрим комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона (работающий на заданной эвристике (**)) при параметрах $a = 0.1$, $x_0 = (2, 3)$ и $a = 300$, $x_0 = (13, 9)$ (см. таблицы 6 и 7):

Таблица 6 – 15 шагов комбинированным методом наискорейшего спуска и Ньютона при параметрах $a = 0.1$, $x_0 = (2, 3)$

№ шага	x_1	x_2	$F(x_1, x_2, a)$	Кол-во вычислений F	$\frac{ln\,\Delta_{k+1}}{ln\,\Delta_k}$	$\frac{F_{k+1} - F_k}{F_k - F_{k-1}}$	$\frac{ln\,F_{k+1} - F_k}{ln\,F_k - F_{k-1}}$
7	1.491088	1.929926	0.1102113552	1	-4.69	2.2113	0.78
8	1.419588	1.669086	0.1374223850	1	1.42	0.0264	2.29
9	1.366630	1.615070	0.0772519460	1	1.86	18.7866	0.54
10	1.306051	1.442193	0.0788395215	1	1.27	0.2279	1.42
11	1.257251	1.374776	0.0490143020	1	1.39	2.2134	0.84
12	1.206988	1.262059	0.0422161293	1	1.23	0.4792	1.18
13	1.164704	1.200151	0.0271690511	1	1.27	1.0679	0.99
14	1.124802	1.129531	0.0199581670	1	1.22	0.6286	1.10

15	1.091190	1.083802	0.0122576510	1	1.23	0.7518	1.05
16	1.062129	1.044267	0.0074168164	1	1.22	0.6020	1.09
17	1.038920	1.019138	0.0037775962	1	1.22	0.5177	1.11
18	1.021264	1.003715	0.0015869465	1	1.21	0.3450	1.16

Продолжение таблицы 6

19	1.009353	0.997721	0.0004528250	1	1.21	0.1530	1.24
20	1.002773	0.997759	0.0000615344	1	1.30	2.2113	0.78
21	1.000374	0.999458	0.0000016778	1	-	-	-

Из полученных данных получается сверхлинейный порядок сходимости (первый столбец значения больше 1 и меньше 2) и сверхлинейная скорость сходимости (второй дополнительный столбец содержит приближенно убывающий ряд).

Таблица 7 – Все шаги комбинированным методом наискорейшего спуска и Ньютона при параметрах $a = 300$, $x_0 = (13, 9)$

№ шага	x_1	x_2	$F(x_1, x_2, a)$	Кол-во вычислений F	$\frac{ln\,\Delta_{k+1}}{ln\,\Delta_k}$	$\frac{F_{k+1} - F_k}{F_k - F_{k-1}}$	$\frac{ln\,F_{k+1} - F_k}{ln\,F_k - F_{k-1}}$
1	0.950194	9.248450	70.3928918830	7	1.00	-	-
2	1.064451	9.217492	66.6042879950	8	0.97	0.9948	1.00
3	0.949992	8.781886	62.8352157360	11	1.00	0.9413	0.95
4	1.061175	8.752658	59.2872227900	8	0.98	0.8268	0.85
5	0.960079	8.396759	56.3538344350	11	1.00	0.9504	0.95
6	1.057747	8.369031	53.5658394110	8	0.97	1.0075	1.01
7	0.959069	8.008835	50.7568108060	10	1.00	0.9465	0.95
8	1.055058	7.982538	48.0979497930	8	-2.39	18.0888	3.96
9	0.997358	1.009259	0.0023060919	1	2.59	0.0000	-1.57
10	1.000000	1.000006	0.0000000001	1	-	-	-

На данном запуске видно, как работает эвристика, заданная на комбинированном методе наискорейшего спуска и Ньютона, так как до 9 шага порядок и скорость сходимости были линейные (первый доп. столбец – значения приблизительно = 1, второй – приблизительно одинаковые значения). Но 9 и 10 шаг сделаны с квадратичным порядком сходимости (на что указывает первый доп. столбец) и квадратичной скоростью сходимости (так как в третьем дополнительном столбце последние значения в среднем равны 2). Получаем в среднем сверхлинейные порядок и скорость сходимости.

Комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона (с заданной эвристикой) обладает сверхлинейными порядком и скоростью сходимости, хотя из-за не слишком хорошей эвристики он большую часть итераций деградирует до линейных порядка и скорости сходимости, что хорошо видно в таблице 7. Эти данные подтверждают теорию, так как эвристика предполагает использование метода наискорейшего спуска на большей части вычисления минимума, если запуск метода произведен из дальней точки, а сверхлинейная (в общем) сходимость следует из сходимостей метода Ньютона и наискорейшего спуска по отдельности.

[4] Сравнение эффективности квазиньютоновых методов и комбинированного метода наискорейшего спуска и Ньютона:

Исходя из количества шагов, необходимых для нахождения минимума методов при разных значениях параметров можно заметить, что на одинаковых данных оба квазиньютоновых метода сходятся практически за одинаковое число шагов, что указывает на их одинаковую эффективность.

В то же время комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона (с заданной эвристикой) показал себя хуже квазиньютоновых методов практически на всех тестовых данных. Это указывает на плохой подбор эвристики, которая при этом справляется с главным недостатком метода Ньютона – локальной сходимостью.

Таблица 8 - Сводная таблица результатов

	Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла	Метод Бройдена-Флетчера-Шанно	Комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона
Порядок сходимости	Сверхлинейный ($\approx$ 1.22)	Сверхлинейный ($\approx$ $\mathbf{1.83}$)	Сверхлинейный ($\approx$1,46)

Скорость сходимости	**Сверхлинейная**	**Сверхлинейная**	Сверхлинейная (при большом отдалении от точки минимума деградирует до линейной)

Продолжение таблицы 8

Максимальное достигнутое число шагов	**59428**	69026	480085
Минимальное число шагов	4	4	**2**

Вывод.

В ходе лабораторной работы были изучены 2 квазиньютоновых метода и комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона. В результате оценки эффективности удалось установить, что квазиньютоновые методы в среднем лучше комбинированного метода наискорейшего спуска и Ньютона, исходя из числа шагов для нахождения минимума и относительной сложности вычислений. Так же были подтверждены теоретические порядок и скорость сходимости для каждого метода.