МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1

по дисциплине «Методы оптимизации»

Тема: Методы безусловной минимизации функций

Студентка гр. 1304	____________________	Чернякова В.А.
Преподаватель	____________________	Мальцева Н.В.

Санкт-Петербург

2024

Цель работы.

Решение задачи безусловной минимизации функций с помощью стандартной программы. Исследование и объяснение полученных результатов.

Задание.

Вариант 22.

Минимизировать функцию $F(x_1,x_2,a) = (x_2 - x_1^2)^2 + a(x_1 - 1)^2$ с точностью до 10^{-5} ($abs (F(x_{1k},x_{2k},a) - F(x_1^*,x_2^*,a)) < 10^{-5}$) методом Давидона-Флетчера-Пауэлла, методом Бройдена-Флетчера-Шанно, комбинированным методом наискорейшего спуска и Ньютона. Оценить скорость и порядок сходимости методов. Провести сравнительный анализ эффективности методов в зависимости от начальной точки и параметра $a>0$. Сравнить эффективность квазиньютоновых методов и комбинированного метода наискорейшего спуска и Ньютона.

Основные теоретические положения.

Квазиньютоновские методы.

Рассмотрим следующее условие:

$$H_{k+1}(\varphi'(x_{k+1})-\varphi'(x_k)) = x_{k+1} - x_k$$

Данное условие называется *квазиньютоновским*. Соответствующие методы минимизации, для которых на любом шаге выполняется квазиньютоновское условие, также называются квазиньютоновскими.

<u>Метод Дэвидона-Флетчера-Пауэлла</u>

Обозначим:

$$\left.\begin{aligned} q_k &= \varphi'(x_{k+1})-\varphi'(x_k) \\ r_k &= x_{k+1}-x_k \end{aligned}\right\}(*) \Rightarrow H_{k+1}\cdot q_k = r_k$$

Метод заключается в построении релаксационной последовательности по следующему правилу:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k H_k \varphi'(x_k)$$

$$H_{k+1} = H_k + \underbrace{\left[\frac{r_k \cdot r_k^T}{(r_k, q_k)} - \frac{(H_k q_k)(H_k q_k)^T}{(H_k q_k, q_k)} \right]}_{\Delta H_k}$$

Длина шага α_k в квазиньютоновых методах выбирается так же, как в методе наискорейшего спуска:

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha \geq 0} \varphi(x_k - \alpha H_k \varphi'(x_k))$$

<u>Метод Бройдена-Флетчера-Шанно</u>

Имеем $(H_{k+1})^{-1} r_k = q_k$

Если поставить задачу уточнять обратную матрицу, т.е. $G_k = (H_k)^{-1}, G_{k+1} = G_k + \Delta G_k$ тогда:

$$H_{k+1} = H_k + \left[1 + \frac{(q_k, H_k q_k)}{(r_k, q_k)} \right] \cdot \frac{r_k r_k^T}{(r_k, q_k)} - \frac{r_k q_k^T H_k + H_k q_k r_k^T}{(r_k q_k)}$$

(этот метод более устойчив к ошибкам округления)

Для обоих методов справедливы следующие замечания: это двухшаговые методы; для квадратичных функций сходятся за n-шагов; а также следующие свойства – небольшая вычислительная сложность, более глобальная сходимость, чем в методе Ньютона, сверхлинейная скорость сходимости.

Комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона

Для минимизации функции существует порядок применения методов:

1) На 1-м этапе – методы 1-ого порядка, т.к. они обеспечивают глобальную сходимость. Например, метод наискорейшего спуска.

2) На 2-м этапе (когда приращения невелики) – выгодно применять методы 2-ого порядка. Например, метод Ньютона.

<u>Метод наискорейшего спуска</u>

На луче $\{x \in R^n : x = x_k - \alpha \varphi'(x_k),\ \alpha \geq 0\}$, направленном по антиградиенту, введем функцию одной переменной

$$\psi(\alpha) = \varphi\left(x_k - \alpha \varphi'(x_k)\right),\ \alpha \geq 0$$

и определим α_k из условий

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha \geq 0} \varphi\left(x_k - \alpha \varphi'(x_k)\right).$$

Другими словами α_k выбирается так, чтобы $\varphi(x_{k+1})$ в заданном направлении была наименьшей для чего на любом шаге необходимо решать задачу одномерной минимизации функции $\psi(\alpha)$, например, с помощью $\psi'(\alpha)=0$.

Достоинства метода: Глобальная сходимость, т.е. слабые требования на начальные приближения точки x_0 и к $f(x)$; Относительная простота вычислений.

Недостатки: Медленная сходимость (геометрическая скорость сходимости, порядок сходимости d =1); Необходимость вычисления длины шага.

<u>Метод Ньютона</u>

Последовательность $\{x_k\}$ будем строить по формулам:

$$x_{k+1}=x_k-\gamma_k H_k \varphi'(x_k),$$

где γ_k – длина шага, H_k – матрица поворота ($n\times m$).

Пусть φ – дважды дифференцируема в R^n, разложим $\varphi(x)$ в ряд Тейлора в точке x_k:

$$\varphi(x)=\varphi(x_k)+(\varphi'(x_k),x-x_k)+\frac{1}{2}(\varphi''(x_k)(x-x_k),(x-x_k))+o(\|x-x_k\|^2)$$

Иначе формулу можно представить в виде:

$\varphi(x)=\bar{\varphi}(x)+o(\|x-x_k\|^2)$, где $\bar{\varphi}(x)$ – квадратичная функция.

Пренебрегаем $o\left(\|x-x_k\|^2\right)$ и ищем $\min\bar{\varphi}(x)$.

$$x_{k+1}=\arg\min_x \bar{\varphi}(x)\Rightarrow \bar{\varphi}'(x)=\varphi'(x_k)+\varphi''(x_k)(x-x_k)=0;$$

Пусть $\varphi''(x_k)$ – положительно определена для $\forall x_k \in R^n$ $\Rightarrow$ существует $[\varphi''(x_k)^{-1}]$.

Решая это уравнение, получим:

$x_{k+1}=x_k-[\varphi''(x_k)]^{-1}grad\varphi(x_k)$ – это и есть метод Ньютона.

Достоинства метода Ньютона: для квадратичной функции сходится за один шаг; Высокая скорость сходимости.

Недостатки метода Ньютона: Локальная сходимость (матрица Гессе должна быть невырожденной). Начальное приближение надо выбирать в окрестности точки локального минимума; Большие вычислительные затраты.

Исследование минимизируемой функции.

Построим график функции при значении $a = 1$. На рисунке 1 представлен результат построения графика.

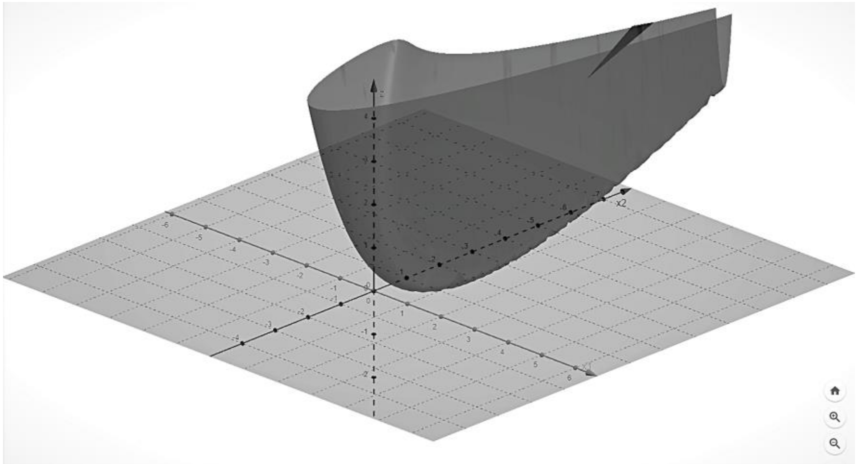

Рисунок 1 – график исследуемой функции при $a = 1$.

По графику представленному на рисунке 1 можно заметить, что исследуемая функция неотрицательна на всей плоскости $x_1 0 x_2$. Это также можно заметить аналитически, так как предложенная в работе функция $F(x_1,x_2,a) = (x_2 - x_1^2)^2 + a(x_1 - 1)^2$ является суммой квадратов, а значение a по условию > 0. При $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$ функция принимает значение 0, что и является минимумом. Это можно проверить, если подставить значения в функцию, а также по графику на рисунке 1.

То есть $(x^*) = (x_1^*, x_2^*) = (1, 1)$ и $F(x^*) = F(1, 1) = 0$

Для анализа эффективности методов выберем точки следующим образом:

Точка $(15, 15)$ – относительно близка к точке x^*;

Точка $(95, 2)$ – x_2 близок к x_2^*, x_1 далек от x_1^*;

Точка (3, -76) – x_1 близок к x_1^*, x_2 далек от x_2^*.

Отличные от нуля значения для параметра a можно выбрать произвольным образом – $[1, 5, 10, 15]$.

Длина шага для каждого метода будет одинаковая – 0.1, так как её изменения не требуется для сравнительного анализа эффективности.

Протокол работы программы.

Для каждого запуска программы длина шага 0.1, на рисунках представлены последние 10-15 шагов, обеспечивающих минимизацию.

Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	3.697572	15.375912	10.1800775250	8
2	3.637265	13.141134	6.9630108128	18
3	3.575510	13.142801	6.7617950039	11
4	2.597249	5.990951	3.1208506717	26
5	2.394901	6.018629	2.0258822489	11
6	1.759344	2.663815	0.7627747853	23
7	1.588015	2.696272	0.3762050973	11
8	1.211108	1.301602	0.0718509695	23
9	1.128377	1.323960	0.0190537433	12
10	1.014659	1.009592	0.0006125325	22
11	1.005339	1.012964	0.0000336010	14
12	1.000046	0.999990	0.0000000123	20
13	1.000003	1.000007	0.0000000000	12
14	1.000000	1.000000	0.0000000000	21

Рисунок 2. $x_1 = 15, x_2 = 15, a = 1$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	3.597329	15.375912	39.6604798490	8
2	3.478265	11.598160	30.9591561450	17
3	3.147692	11.608578	25.9549881930	10
4	1.840885	2.194975	4.9607947023	22
5	1.307575	2.269011	0.7857824061	10
6	1.049217	1.011936	0.0200179816	18
7	1.004938	1.021036	0.0002459164	11
8	1.000044	0.999992	0.0000000185	20
9	1.000001	1.000002	0.0000000000	11
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	11

Рисунок 3. $x_1 = 15, x_2 = 15, a = 5$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	3.472025	15.375912	72.1378149320	7
2	3.285321	9.810097	53.1936880740	18
3	2.601915	9.833020	35.0436443070	11
4	1.387791	1.055354	2.2617807393	21
5	1.016086	1.106767	0.0081134437	12
6	1.000052	0.999990	0.0000000397	18
7	1.000000	0.999998	0.0000000000	12
8	1.000000	1.000000	0.0000000000	12
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	12
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	12

Рисунок 4. $x_1 = 15, x_2 = 15, a = 10$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	3.346721	15.375912	100.0402084900	7
2	3.101414	8.241334	68.1364771520	16
3	2.094082	8.275966	33.0934509880	10
4	1.123804	0.915028	0.3509500900	20
5	0.992456	0.932344	0.0036230852	11
6	1.000056	0.999989	0.0000000624	17
7	1.000000	0.999996	0.0000000000	11
8	1.000000	1.000000	0.0000000000	11
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	11
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	11

Рисунок 5. $x_1 = 15, x_2 = 15, a = 15$

35	7.969602	63.948501	48.7636600100	8
36	6.600979	41.727088	34.7780881890	28
37	6.426854	41.737812	29.6385451990	8
38	5.288101	26.456018	20.6618488080	26
39	5.106542	26.469548	17.0179603990	10
40	3.992469	14.756463	10.3551762230	23
41	3.795844	14.775164	7.9512365022	10
42	2.901058	7.570935	4.3283836127	26
43	2.699760	7.595937	2.9835761069	11
44	1.990554	3.436490	1.2576799043	23
45	1.804329	3.468243	0.6921606889	12
46	1.342812	1.564842	0.1743073434	22
47	1.228029	1.592674	0.0591575037	12
48	1.042607	1.039567	0.0040681055	22
49	1.019406	1.047345	0.0004431253	14
50	1.000408	0.999987	0.0000008539	22
51	1.000053	1.000129	0.0000000033	12
52	1.000000	1.000000	0.0000000000	20
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Рисунок 6. $x_1 = 95, x_2 = 2, a = 1$

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	-8.001874	56.878328	456.3149216500	26
21	7.440238	57.570883	212.2839812100	12
22	7.478092	57.051451	211.1043686900	12
23	7.407309	57.046292	210.0120099400	9
24	5.015327	21.126892	96.8278545130	22
25	-4.316977	21.748356	151.0361761000	12
26	-4.406976	21.001796	148.6744823500	12
27	-4.224274	20.979764	146.2951342000	10
28	-1.869574	0.581372	49.6632904680	21
29	0.980881	0.910409	0.0045025198	12
30	0.977073	0.944040	0.0027413296	16
31	0.988296	0.945312	0.0016719743	12
32	0.999959	0.999995	0.0000000143	18
33	0.999997	0.999987	0.0000000001	12
34	1.000000	1.000000	0.0000000000	18

Рисунок 7. $x_1 = 95, x_2 = 2, a = 5$

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	-10.664182	114.236241	1360.7929383000	18
17	10.469172	114.134011	917.1771501000	15
18	10.522934	112.862303	911.4003279400	12
19	10.405982	112.857360	905.6363746500	8
20	6.997302	40.627388	429.1459400300	23
21	-5.949505	41.238373	517.0823960700	11
22	-6.070677	39.697470	508.0350375800	13
23	-5.810274	39.676994	498.8176131800	10
24	-2.633102	1.540695	161.0736686600	21
25	1.124340	1.853724	0.5022127482	10
26	1.160422	1.470552	0.2727227417	17
27	1.066250	1.461684	0.1493824365	11
28	0.997425	1.000333	0.0000962986	18
29	0.999991	0.999950	0.0000000018	12
30	1.000000	1.000000	0.0000000000	18

Рисунок 8. $x_1 = 95, x_2 = 2, a = 10$

26	5.568149	32.359889	314.8573999200	16
27	-4.801536	32.096771	586.6254825800	13
28	-5.023755	30.551094	572.5121161900	13
29	4.824048	29.136018	253.7434308100	13
30	4.894180	24.762626	228.1250309400	16
31	-3.901755	24.621573	448.7281959200	13
32	-4.184078	22.951962	432.7729317900	12
33	4.007838	21.566288	165.9950978500	13
34	4.008552	16.074098	135.7707890600	17
35	3.293528	16.074009	106.2222652300	10
36	1.539612	0.915581	6.4842347010	19
37	0.997421	0.978314	0.0003731702	11
38	1.000005	0.999998	0.0000000005	17
39	1.000000	0.999998	0.0000000000	11
40	1.000000	1.000000	0.0000000000	11

Рисунок 9. $x_1 = 95, x_2 = 2, a = 15$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	-0.096220	-75.485979	5700.7325695000	9
2	1.303347	1.693272	0.0920490630	18
3	1.261371	1.693991	0.0789103107	13
4	1.032930	1.028153	0.0025890762	22
5	1.014194	1.034580	0.0002373609	13
6	1.000244	0.999979	0.0000003190	22
7	1.000028	1.000067	0.0000000009	12
8	1.000000	1.000000	0.0000000000	21
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	21
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	21

Рисунок 10. $x_1 = 3, x_2 = -76, a = 1$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	-0.050353	-75.501385	5706.3581474000	8
2	1.327477	1.728950	0.5373107714	17
3	1.170677	1.731971	0.2763253574	12
4	1.002481	0.999679	0.0000587371	17
5	1.000055	1.000236	0.0000000311	11
6	1.000000	1.000000	0.0000000000	19
7	1.000000	1.000000	0.0000000000	19
8	1.000000	1.000000	0.0000000000	19
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	19
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	19

Рисунок 11. $x_1 = 3, x_2 = -76, a = 10$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	-0.001618	-75.518608	5713.0930022000	8
2	1.349246	1.754350	1.2240996679	17
3	1.115636	1.758557	0.3978240872	11
4	0.995657	1.001368	0.0002892973	20
5	1.000099	1.000665	0.0000003162	11
6	1.000000	1.000000	0.0000000000	19
7	1.000000	1.000000	0.0000000000	19
8	1.000000	1.000000	0.0000000000	19
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	19
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	19

Рисунок 12. $x_1 = 3, x_2 = -76, a = 10$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число в
1	0.039618	-75.534014	5719.4593855000	9
2	1.364032	1.764145	1.9970869174	17
3	1.085753	1.768834	0.4583737174	11
4	0.993888	1.002240	0.0007685575	18
5	1.000166	1.001488	0.0000017494	12
6	1.000001	1.000000	0.0000000000	18
7	1.000000	1.000000	0.0000000000	11
8	1.000000	1.000000	0.0000000000	11
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	11
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	11

Рисунок 13. $x_1 = 3, x_2 = -76, a = 10$

Метод Бройдена-Флетчера-Шанно

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	3.697572	15.375912	10.1800775250	8
2	3.637265	13.141134	6.9630108081	18
3	3.575510	13.142801	6.7617949291	11
4	2.597262	5.991014	3.1209001084	27
5	2.394912	6.018693	2.0259189545	11
6	1.759375	2.663912	0.7628313573	24
7	1.588039	2.696370	0.3762409287	11
8	1.211160	1.301712	0.0718785590	21
9	1.128414	1.324073	0.0190661933	12
10	1.014687	1.009624	0.0006143091	22
11	1.005354	1.013000	0.0000337866	14
12	1.000046	0.999990	0.0000000127	20
13	1.000003	1.000008	0.0000000000	12
14	1.000000	1.000000	0.0000000000	12

Рисунок 14. $x_1 = 15, x_2 = 15, a = 1$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	3.597329	15.375912	39.6604798490	8
2	3.478265	11.598159	30.9591561170	17
3	3.147692	11.608577	25.9549865660	10
4	1.840874	2.194995	4.9605529521	21
5	1.307582	2.269027	0.7858006528	10
6	1.049210	1.011905	0.0200177934	20
7	1.004931	1.021007	0.0002452319	11
8	1.000044	0.999993	0.0000000185	18
9	1.000001	1.000003	0.0000000000	11
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	11

Рисунок 15. $x_1 = 15, x_2 = 15, a = 5$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	3.472025	15.375912	72.1378149320	7
2	3.285321	9.810096	53.1936881110	18
3	2.601914	9.833019	35.0436350930	11
4	1.387786	1.055382	2.2616730430	21
5	1.016091	1.106793	0.0081173902	12
6	1.000052	0.999991	0.0000000405	19
7	1.000000	0.999999	0.0000000000	12
8	1.000000	1.000000	0.0000000000	12
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	12
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	12

Рисунок 16. $x_1 = 15, x_2 = 15, a = 10$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	3.346721	15.375912	100.0402084900	7
2	3.101414	8.241331	68.1364775310	16
3	2.094082	8.275963	33.0934259160	10
4	1.123790	0.914955	0.3509287654	19
5	0.992449	0.932273	0.0036306247	11
6	1.000056	0.999992	0.0000000626	17
7	1.000000	0.999998	0.0000000000	11
8	1.000000	1.000000	0.0000000000	11
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	11
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	11

Рисунок 17. $x_1 = 15, x_2 = 15, a = 15$

36	6.732861	43.512157	36.1754298230	28
37	6.564392	43.522296	31.1482652110	10
38	5.385956	27.469637	21.6047674830	25
39	5.204033	27.482992	17.8347207280	10
40	4.110810	15.687424	11.1444710650	25
41	3.916655	15.705419	8.6402710291	9
42	2.981249	8.012021	4.6924172909	27
43	2.778826	8.036633	3.2632951427	10
44	2.058851	3.688020	1.4245958741	25
45	1.869852	3.719312	0.8063560584	11
46	1.386111	1.660931	0.2168749819	22
47	1.262808	1.689908	0.0781356348	11
48	1.054681	1.054426	0.0063453664	21
49	1.026084	1.063792	0.0008001425	12
50	1.000717	1.000034	0.0000024764	22
51	1.000114	1.000274	0.0000000151	11
52	1.000000	1.000000	0.0000000000	20

Рисунок 18. $x_1 = 95, x_2 = 2, a = 1$

20	-7.972144	56.421737	453.3814028200	25
21	7.409365	57.113564	210.3054676900	11
22	7.447432	56.598068	209.1324416200	14
23	7.377321	56.592889	208.0514445000	8
23	7.377321	56.592889	208.0514445000	8
24	4.977896	20.778032	95.1296562170	24
25	-4.277387	21.398094	148.8768067800	12
26	-4.367485	20.633182	146.4776295100	13
27	-4.179226	20.611002	144.0133873100	10
28	-1.834737	0.482953	48.4921211570	23
29	0.959047	0.808370	0.0207959728	12
30	0.950954	0.882028	0.0125242737	17
31	0.975430	0.884717	0.0074735044	12
32	0.999803	0.999965	0.0000003222	18
33	0.999983	0.999927	0.0000000030	12
34	1.000000	1.000000	0.0000000000	18

Рисунок 19. $x_1 = 95, x_2 = 2, a = 5$

14	11.313560	115.549781	1218.6193786000	25
15	-10.522409	116.256145	1358.2959082000	11
16	-10.588504	114.994813	1351.2194180000	13
17	-10.466015	114.988394	1344.4075773000	7
18	-6.626417	34.137396	677.1145059200	24
19	5.525110	34.714468	222.3024314400	11
20	5.619235	33.441653	216.8547369000	13
21	5.414593	33.426514	211.7677046800	9
22	2.932279	5.111675	49.4933205000	22
23	1.763057	5.214179	10.2569917970	10
24	1.168084	1.009215	0.4086948598	18
25	1.004822	1.032313	0.0007453437	11
26	0.999977	1.000003	0.0000000076	20
27	1.000000	0.999999	0.0000000000	12
28	1.000000	1.000000	0.0000000000	12

Рисунок 20. $x_1 = 95, x_2 = 2, a = 10$

28	-5.638193	37.188191	690.1329746100	12
29	5.440536	35.642297	332.2916195400	13
30	5.510307	31.283877	305.9901777300	16
31	-4.696315	31.120533	568.8971698800	14
32	-4.925152	29.478811	553.8774661600	13
33	4.724303	28.133096	241.8597534000	14
34	4.783684	23.536426	215.1701188700	16
35	4.217019	23.529102	188.2529924500	10
36	2.006734	1.491711	21.6302963170	20
37	1.067816	1.585887	0.2675946345	11
38	0.998109	1.000636	0.0000731158	19
39	1.000045	1.000406	0.0000001303	11
40	1.000000	1.000000	0.0000000000	17

Рисунок 21. $x_1 = 95, x_2 = 2, a = 15$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	-0.096220	-75.485979	5700.7325695000	9
2	1.303155	1.693559	0.0919248380	17
3	1.261401	1.694175	0.0789483320	13
4	1.032860	1.028086	0.0025785517	21
5	1.014163	1.034501	0.0002362842	13
6	1.000240	0.999979	0.0000003084	22
7	1.000027	1.000065	0.0000000008	12
8	1.000000	1.000000	0.0000000000	21
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	21
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	21

Рисунок 22. $x_1 = 3, x_2 = -76, a = 1$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	-0.050353	-75.501385	5706.3581474000	8
2	1.327472	1.730397	0.5371989152	17
3	1.171027	1.733285	0.2772814367	12
4	1.002467	0.999676	0.0000581476	19
5	1.000054	1.000231	0.0000000298	11
6	1.000000	1.000000	0.0000000000	19
7	1.000000	1.000000	0.0000000000	19
8	1.000000	1.000000	0.0000000000	19
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	19
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	19

Рисунок 23. $x_1 = 3, x_2 = -76, a = 10$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	-0.001618	-75.518608	5713.0930022000	8
2	1.349463	1.760768	1.2248756886	18
3	1.116510	1.764608	0.4040836605	11
4	0.995567	1.001423	0.0003019709	17
5	1.000105	1.000703	0.0000003535	11
6	1.000000	1.000000	0.0000000000	18
7	1.000000	1.000000	0.0000000000	18
8	1.000000	1.000000	0.0000000000	18
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	18
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	18

Рисунок 24. $x_1 = 3, x_2 = -76, a = 10$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	0.039618	-75.534014	5719.4593855000	9
2	1.364184	1.762360	1.9991845541	18
3	1.086021	1.767146	0.4563911141	10
4	0.994089	1.002214	0.0007200993	19
5	1.000166	1.001483	0.0000017393	12
6	1.000001	1.000000	0.0000000000	18
7	1.000000	1.000000	0.0000000000	18
8	1.000000	1.000000	0.0000000000	18
9	1.000000	1.000000	0.0000000000	18
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	18

Рисунок 25. $x_1 = 3, x_2 = -76, a = 10$

Комбинированный метод наискорейшего спуска и Ньютона

Данный метод будет работать следующим образом. В начале для точек, описанных в разделе запускается метод наискорейшего спуска на некоторое количества шагов. Увидя по логам, которые выводит программа, на каких значениях *x1, x2* приращения становятся небольшими и значения переменных близки к *x**,запустим с этих точек метод Ньютона.

1.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	3.697572	15.375912	10.1800775250	8
2	3.870734	15.346118	8.3732724023	10
3	2.091883	3.891841	1.4265946375	26
4	1.920322	3.918485	0.9002835188	11
5	1.772883	2.908987	0.6521632200	21

Рисунок 26. Наискорейший спуск, $x_1 = 15, x_2 = 15, a = 1$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч
1	1.246487	0.905423	0.4810577928	1
2	1.139161	1.026598	0.0928550667	1
3	1.048924	0.972417	0.0187327997	1
4	1.009961	0.989182	0.0010502463	1
5	1.000579	0.999059	0.0000047389	1
6	1.000002	0.999996	0.0000000001	1
7	1.000000	1.000000	0.0000000000	1

Рисунок 27. Ньютон, $x_1 = 1.772883, x_2 = 2.908987, a = 1$

37	2.277389	7.581676	13.8954761410	16
38	2.475875	7.476556	12.7043634320	9
39	2.087876	6.742059	11.5952620190	15
40	2.312791	6.623247	10.2407992440	11
41	1.827305	5.699682	8.9947779506	16
42	2.096603	5.558119	7.3638065746	11
43	1.416449	4.259791	5.9452432228	16
44	1.768643	4.075288	3.8512289592	12
45	1.067629	2.727725	2.5442713445	17
46	1.398413	2.555648	1.1537713920	12
47	1.020196	1.832185	0.6283282080	17
48	1.189965	1.743431	0.2876332747	11
49	1.007194	1.392657	0.1433072474	18
50	1.088843	1.350116	0.0665376448	12

Рисунок 28. Наискорейший спуск, $x_1 = 15, x_2 = 15, a = 5$

1.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	0.993741	1.023835	0.0015146055	1
2	1.000092	0.999851	0.0000001538	1
3	1.000000	1.000000	0.0000000000	1

Рисунок 29. Ньютон, $x_1 = 1.088843, x_2 = 1.350116, a = 5$

8	2.560790	11.540358	49.1880767920	15
9	2.892027	11.373838	44.8578671670	10
10	2.267775	10.129581	40.9404927860	16
11	2.660805	9.932403	35.7196040780	9
12	1.787992	8.188984	31.1300568690	15
13	2.315263	7.925019	23.8762159780	10
14	0.976648	5.237306	18.3535274100	16
15	1.734709	4.859750	8.8224514188	11
16	1.001490	3.395761	5.7254172110	17
17	1.404276	3.194041	3.1277964754	12
18	0.999747	2.384381	1.9179136135	16
19	1.226518	2.271071	1.1009703491	12
20	1.000508	1.820244	0.6711360280	17

Рисунок 30. Наискорейший спуск, $x_1 = 15, x_2 = 15, a = 10$

1.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч
1	0.999900	1.000278	0.0000003264	1
2	1.000000	1.000000	0.0000000000	1

Рисунок 31. Ньютон, $x_1 = 1.0005081, x_2 = 1.820244, a = 10$

40	1.435910	4.910299	10.9639968550	12
41	1.633366	4.567683	9.6265211478	10
42	1.366168	4.413594	8.4993076427	12
43	1.548116	4.097724	7.4000751881	12
44	1.305918	3.958295	6.4792243958	10
45	1.470767	3.671594	5.5997069127	12
46	1.254412	3.547237	4.8663254169	12
47	1.401692	3.291230	4.1799221731	11
48	1.211186	3.181679	3.6092136152	11
49	1.341134	2.955662	3.0842842688	13
50	1.175135	2.860277	2.6485147948	12
51	1.288531	2.662879	2.2538936119	11
52	1.145145	2.580465	1.9266408421	11

Рисунок 32. Наискорейший спуск, $x_1 = 15, x_2 = 15, a = 15$

.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	0.970437	1.116618	0.0436892197	1
2	1.000706	0.999458	0.0000112907	1
3	1.000000	1.000000	0.0000000000	1

Рисунок 33. Ньютон, $x_1 = 1.145145, x_2 = 2.580465, a = 15$

.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч
1	-30.693774	2.661510	883563.7659600000	4
2	0.915971	3.176148	5.4693056950	6
3	1.622605	2.797844	0.4148609024	13

Рисунок 34. Наискорейший спуск, $x_1 = 95, x_2 = 2, a = 1$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	0.693352	3.038880	6.6381267506	1
2	0.618856	0.152424	0.1984279214	1
3	0.879714	1.110158	0.1275399838	1
4	1.247023	-1.795564	11.2877515290	1
5	1.214948	1.340591	0.0645645809	1
6	1.045832	0.965417	0.0185739075	1
7	1.009362	0.989792	0.0009297433	1
8	1.000514	0.999159	0.0000037549	1
9	1.000002	0.999996	0.0000000001	1
10	1.000000	1.000000	0.0000000000	1

Рисунок 35. Ньютон, $x_1 = 1.622605, x_2 = 2.797844, a = 1$

1.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число в
1	-30.721340	2.661510	890774.2569700000	
2	1.043286	3.177076	4.3717426389	6
3	1.496270	2.948636	1.7352529343	11
4	1.004025	1.970485	0.9263304585	18
5	1.219870	1.861864	0.3814262916	12

Рисунок 36. Наискорейший спуск, $x_1 = 95, x_2 = 2, a = 5$

1.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	0.961348	1.177535	0.0716538479	1
2	1.004359	0.991310	0.0003986766	1
3	1.000030	0.999959	0.0000000148	1
4	1.000000	1.000000	0.0000000000	1

Рисунок 37. Ньютон, $x_1 = 1.219870, x_2 = 1.861864, a = 5$

1.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч
1	-30.755798	2.661510	899819.1510200000	4
2	1.202815	3.178236	3.4093342978	6
3	1.391381	3.025463	2.7188482824	11
4	1.149493	2.726638	2.1983625740	14
5	1.306044	2.599898	1.7361279808	12
6	1.111234	2.359588	1.3887860004	14
7	1.238033	2.256792	1.0908692609	11
8	1.083403	2.066216	0.8660338413	14

Рисунок 38. Наискорейший спуск, $x_1 = 95, x_2 = 2, a = 10$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число выч
1	0.981879	1.063267	0.0131206262	1
2	1.000367	0.999585	0.0000026638	1
3	1.000000	1.000000	0.0000000000	1

Рисунок 39. Ньютон, $x_1 = 1.083403, x_2 = 2.066216, a = 10$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	-30.790255	2.661510	908899.4179300000	
2	1.362773	3.179398	3.7224027080	6
3	1.181114	3.048696	3.2266428146	13
4	1.309117	2.870761	2.7718899193	12
5	1.151124	2.757050	2.3930978441	12
6	1.262881	2.601661	2.0502274890	13
7	1.126204	2.503392	1.7642770452	12
8	1.223122	2.368715	1.5083366174	10
9	1.105574	2.284078	1.2945737161	11
10	1.189264	2.167792	1.1049886172	10
11	1.088478	2.095255	0.9463824866	12

Рисунок 40. Наискорейший спуск, $x_1 = 95, x_2 = 2, a = 15$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	0.987775	1.042218	0.0066663954	1
2	1.000109	0.999931	0.0000002625	1
3	1.000000	1.000000	0.0000000000	1

Рисунок 41. Ньютон, $x_1 = 1.088478, x_2 = 2.095255, a = 15$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	-0.096220	-75.485979	5700.7325695000	9
2	2.406046	-63.395472	4788.4760032000	13
3	-0.098805	-62.877128	3955.9683893000	9
4	2.313551	-51.661171	3252.2859817000	13
5	-0.103911	-51.141302	2617.7559291000	8
6	2.167312	-41.240736	2111.6604304000	13
7	-0.097892	-40.721198	1660.2018673000	10
8	2.227275	-30.282176	1243.5702216000	14
9	-0.099873	-29.763808	887.6878186600	9
10	2.090597	-20.509072	620.1873796300	17
11	-0.089371	-19.993107	401.2305000100	10
12	2.106990	-10.575045	226.6591715400	15
13	-0.065587	-10.068346	102.5936997900	11
14	2.015011	-1.288141	29.6357173260	17
15	0.267804	-0.874091	1.4306677708	12
16	0.592334	0.486395	0.1845616209	19

Рисунок 42. Наискорейший спуск, $x_1 = 3$, $x_2 = -76$, $a = 1$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	1.151601	0.797250	0.3027546342	1
2	1.077932	1.001288	0.0318815380	1
3	1.018951	0.982436	0.0034754508	1
4	1.001903	0.997210	0.0000471850	1
5	1.000025	0.999955	0.0000000095	1
6	1.000000	1.000000	0.0000000000	1

Рисунок 43. Ньютон, $x_1 = 0.5923340$, $x_2 = 0.486395$, $a = 1$

ом.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	-0.050353	-75.501385	5706.3581474000	8
2	2.866702	-58.368717	4451.2108904000	13
3	-0.041603	-57.873566	3354.9747056000	9
4	2.795856	-41.490289	2447.3156099000	13
5	-0.028465	-41.001129	1686.4477183000	9
6	2.620717	-26.472909	1124.7603996000	16
7	0.001350	-25.995313	680.7428893000	10
8	2.450233	-13.064490	374.1095669800	16
9	0.087937	-12.617149	163.5469271700	11
10	2.201828	-1.211833	43.9440938710	17
11	0.624767	-0.919529	2.4197395887	11
12	0.972919	0.984959	0.0051403626	19

Рисунок 44. Наискорейший спуск, $x_1 = 3$, $x_2 = -76$, $a = 5$

1.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	1.000422	0.999897	0.0000017906	1
2	1.000000	1.000000	0.0000000000	1

Рисунок 45. Ньютон, $x_1 = 0.972919$, $x_2 = 0.984959$, $a = 5$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	-0.001618	-75.518608	5713.0930022000	8
2	3.480163	-49.892309	3905.9883967000	16
3	0.019607	-49.422146	2452.1982220000	10
4	2.901983	-31.311608	1614.8957176000	14
5	0.064804	-30.860019	961.3458729700	9
6	2.547755	-16.540333	554.4003764000	14
7	0.174000	-16.128761	267.9372315700	9
8	2.293918	-3.136572	87.2792654490	14
9	0.576672	-2.856364	11.9612413190	10
10	1.217701	0.824476	0.9073258637	17

Рисунок 46. Наискорейший спуск, $x_1 = 3$, $x_2 = -76$, $a = 10$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	1.025329	0.992206	0.0099072827	1
2	1.000296	1.000041	0.0000011784	1
3	1.000000	1.000000	0.0000000000	1

Рисунок 47. Ньютон, $x_1 = 1.217701$, $x_2 = 0.824476$, $a = 10$

1.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вь
1	0.039618	-75.534014	5719.4593855000	9
2	4.073079	-39.352248	3271.1887707000	15
3	0.103419	-38.909707	1526.8555929000	9
4	3.038022	-17.752583	790.3400315500	16
5	0.251680	-17.366075	312.1843643800	10
6	2.321729	-2.648829	90.8341803780	16
7	0.702015	-2.421008	9.8223519679	11
8	1.135510	0.914663	0.4158612420	17

Рисунок 48. Наискорейший спуск, $x_1 = 3$, $x_2 = -76$, $a = 15$

м.шага	x1	x2	f(x1,x2)	число вы
1	1.006448	1.004078	0.0007021984	1
2	1.000008	1.000026	0.0000000010	1
3	1.000000	1.000000	0.0000000000	1

Рисунок 49. Ньютон, $x_1 = 1.135510$, $x_2 = 0.914663$, $a = 15$

Оценка скорости и порядка сходимости.

<u>Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла</u>

Рассмотрим данный метод при следующих параметрах:

$x_1 = 15$, $x_2 = 15$, $a = 1$

				Оценка скорости сходимости	Оценка порядка сходимости
Шаг	x_1	x_2	$F(x_1, x_2)$	$\frac{F(x_{k+1}) - F(x^*)}{F(x_k) - F(x^*)}$	$\frac{\ln\lVert x_{k+1} - x^*\rVert}{\ln\lVert x_k - x^*\rVert}$
1	3.697572	15.375912	10.1800775250	0.6839840655	0.9391673326
2	3.637265	13.141134	6.9630108128	0.9711021835	0.9996378734
3	3.575510	13.142801	6.7617950039	0.4615417459	0.6576226581
4	2.597249	5.990951	3.1208506717	0.6491442437	0.9963681839
5	2.394901	6.018629	2.0258822489	0.3765148669	0.3658077523
6	1.759344	2.663815	0.7627747853	0.4932059955	0.9692834193
7	1.588015	2.696272	0.3762050973	0.190988825	1.707668944
8	1.211108	1.301602	0.0718509695	0.26518422	1.054965388
9	1.128377	1.323960	0.0190537433	0.03214762004	3.836543851
10	1.014659	1.009592	0.0006125325	0.05485586479	1.055072066
11	1.005339	1.012964	0.0000336010	0.0003660605339	2.334944452

Можно заметить, что из значений, посчитанных в столбце “Оценка скорости сходимости”, по мере приближения к точке x^* выстраивается убывающий ряд => в данном случае наблюдаем сверхлинейную скорость сходимости.

Основывая на данных, посчитанных в столбце “Оценка порядка сходимости”, можно заметить, что по большей части эти значения стремятся к 1 и даже к большем числам => порядок в среднем больше 1, что характерно для сверхлинейной сходимости.

Теперь рассмотрим метод при других параметрах:

$x_1 = 95, x_2 = 2, a = 10$

				Оценка скорости сходимости	Оценка порядка сходимости
Шаг	x_1	x_2	$F(x_1, x_2)$	$\dfrac{F(x_{k+1}) - F(x^*)}{F(x_k) - F(x^*)}$	$\dfrac{\ln\lVert x_{k+1} - x^*\rVert}{\ln\lVert x_k - x^*\rVert}$
1	-10.664182	114.236241	1360.7929383000	0.6740019913	0.9994318587
2	10.469172	114.134011	917.1771501000	0.9937015198	0.9976364776
3	10.522934	112.862303	911.4003279400	0.9936757173	0.999972101
4	10.405982	112.857360	905.6363746500	0.4738612009	0.7818345585
5	6.997302	40.627388	429.1459400300	1.204910376	1.005059418
6	-5.949505	41.238373	517.0823960700	0.9825030623	0.9899386508
7	-6.070677	39.697470	508.0350375800	0.9818567152	0.9995417906
8	-5.810274	39.676994	498.8176131800	0.3229109486	0.354457486
9	-2.633102	1.540695	161.0736686600	0.003117907181	0.113487734
10	1.124340	1.853724	0.5022127482	0.5430422519	4.733227039
11	1.160422	1.470552	0.2727227417	0.5477447006	1.091308048
12	1.066250	1.461684	0.1493824365	0.000644644727	7.806137859
13	0.997425	1.000333	0.0000962986	0.00001869186053	1.660763713

Для данного запуска значения из столбца, в котором посчитана скорость сходимости, также напоминают убывающий, на основе этого наблюдения можно сделать вывод, что скорость сходимости сверхлинейная.

Метод еще 3-х мужиков

Рассмотрим данный метод при следующих параметрах:

$x_1 = 15, x_2 = 15, a = 1$

				Оценка скорости сходимости	Оценка порядка сходимости
Шаг	x_1	x_2	$F(x_1, x_2)$	$\dfrac{F(x_{k+1}) - F(x^*)}{F(x_k) - F(x^*)}$	$\dfrac{\ln\lVert x_{k+1} - x^*\rVert}{\ln\lVert x_k - x^*\rVert}$
1	3.697572	15.375912	10.1800775250	0,6839840651	0,9391673326
2	3.637265	13.141134	6.9630108081	0,9711021734	0,9996378734
3	3.575510	13.142801	6.7617949291	0,4615490622	0,6576275043
4	2.597262	5.991014	3.1209001084	0,6491457221	0,9963683297
5	2.394912	6.018693	2.0259189545	0,3765359693	0,365838502
6	1.759375	2.663912	0.7628313573	0,4932163906	0,9692873369

7	1.588039	2.696370	0.3762409287	0,1910439655	-1,706949082
8	1.211160	1.301712	0.0718785590	0,2652556418	1,054968503
9	1.128414	1.324073	0.0190661933	0,03221980866	3,835567777
10	1.014687	1.009624	0.0006143091	0,05499934805	1,054994362
11	1.005354	1.013000	0.0000337866	0,0003758886659	2,336465387

Теперь рассмотрим метод при других параметрах:

$x_1 = 95, x_2 = 2, a = 10$

				Оценка скорости сходимости	Оценка порядка сходимости
Шаг	x_1	x_2	$F(x_1, x_2)$	$\frac{F(x_{k+1}) - F(x^*)}{F(x_k) - F(x^*)}$	$\frac{ln\lVert x_{k+1} - x^*\rVert}{ln\lVert x_k - x^*\rVert}$
1	11.313560	115.549781	1218.6193786000	1.114618668	1.001492725
2	-10.522409	116.256145	1358.2959082000	0.9947901704	0.9977198033
3	-10.588504	114.994813	1351.2194180000	0.9949587457	0.9999655573
4	-10.466015	114.988394	1344.4075773000	0.5036526998	0.7438032881
5	-6.626417	34.137396	677.1145059200	0.3283084759	1.000109428
6	5.525110	34.714468	222.3024314400	0.9754942197	0.9894025839
7	5.619235	33.441653	216.8547369000	0.9765417519	0.9996217667
8	5.414593	33.426514	211.7677046800	0.2337151483	0.4339266669
9	2.932279	5.111675	49.4933205000	0.2072399203	0.9610067668
10	1.763057	5.214179	10.2569917970	0.03984548958	-1.224948096
11	1.168084	1.009215	0.4086948598	0.001823716844	1.920131833
12	1.004822	1.032313	0.0007453437	0.00001019663814	3.119184062
13	0.999977	1.000003	0.0000000076	0	1.294607631

Спуск и Ньютон

Рассмотрим данный метод при следующих параметрах:

$x_1 = 15, x_2 = 15, a = 1$

				Оценка скорости сходимости	Оценка порядка сходимости
Шаг	x_1	x_2	$F(x_1, x_2)$	$\frac{F(x_{k+1}) - F(x^*)}{F(x_k) - F(x^*)}$	$\frac{ln\lVert x_{k+1} - x^*\rVert}{ln\lVert x_k - x^*\rVert}$
1	3.697572	15.375912	10.1800775250	0,8225155832	1,00009447
2	3.870734	15.346118	8.3732724023	0,1703748032	0,4206051282
3	2.091883	3.891841	1.4265946375	0,631071711	0,9910819146
4	1.920322	3.918485	0.9002835188	0,7243975996	0,6459455958
5	1.772883	2.908987	0.6521632200	0	0,4797079687
Снизу уже ньютон					
7	1.246487	0.905423	0.4810577928	0,1930226848	1,467355305
8	1.139161	1.026598	0.0928550667	0,2017423536	1,473495764
9	1.048924	0.972417	0.0187327997	0,05606456679	1,465380453
10	1.009961	0.989182	0.0010502463	0,004512179667	1,613455529
11	1.000579	0.999059	0.0000047389	0,00002110194349	1,809280676

	1.000002	0.999996	0.0000000001	0	#NUM!

Теперь рассмотрим метод при других параметрах:

$x_1 = 3,\ x_2 = -76,\ a = 11$

				Оценка скорости сходимости	Оценка порядка сходимости
Шаг	x_1	x_2	$F(x_1, x_2)$	$\frac{F(x_{k+1}) - F(x^*)}{F(x_k) - F(x^*)}$	$\frac{ln\lVert x_{k+1} - x^*\rVert}{ln\lVert x_k - x^*\rVert}$
1	2.227275	-30.282176	1243.5702216000	0,7138220289	0,9951101234
2	-0.099873	-29.763808	887.6878186600	0,6986548273	0,8957626595
3	2.090597	-20.509072	620.1873796300	0,646950443	0,9921101671
4	-0.089371	-19.993107	401.2305000100	0,5649101241	0,8055730175
5	2.106990	-10.575045	226.6591715400	0,4526342309	0,9817797806
6	-0.065587	-10.068346	102.5936997900	0,2888648853	0,3809337793
7	2.015011	-1.288141	29.6357173260	0,04827511867	0,76197196
8	0.267804	-0.874091	1.4306677708	0,1290038293	-0,6035974521
9	0.592334	0.486395	0.1845616209	0	-0,8212520606
дальше ньютон					
11	1.151601	0.797250	0.3027546342	0,105304872	1,857557017
12	1.077932	1.001288	0.0318815380	0,1090113909	1,432679102
13	1.018951	0.982436	0.0034754508	0,01357665601	1,556588152
11	1.001903	0.997210	0.0000471850	0,0002013351701	1,735171576
12	1.000025	0.999955	0.0000000095	0	#NUM!
13	1.000000	1.000000	0.0000000000	#DIV/0!	#NUM!

Выводы.