

Лекция 13

§ 6.8. Обсуждение глобальной полиномиальной интерполяции. Понятие о кусочно-полиномиальной интерполяции

Пусть функция интерполируется на отрезке $[a, b]$. Метод решения этой задачи единым для всего отрезка многочленом $P_n(x)$ называют *глобальной полиномиальной интерполяцией*.

Существуют весьма веские причины, по которым глобальная интерполяция многочленами высокой степени в вычислительной практике, как правило, не используется. Обсудим некоторые из этих причин.

1. Сходимость при увеличении числа узлов. Всегда ли можно добиться повышения точности интерполяции благодаря увеличению числа узлов (и соответственно степени интерполяционного многочлена)? Хотя положительный ответ на этот вопрос напрашивается сам собой, не будем торопиться с выводами.

Уточним постановку задачи. Для того чтобы реализовать процесс интерполяции многочленами возрастающей степени n , необходимо указать стратегию выбора узлов интерполяции $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$. Такая стратегия задается указанием *интерполяционного массива* – треугольной таблицы

$$\begin{array}{c} x_0^{(0)} \\ x_0^{(1)}, x_1^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, \end{array}$$

в каждой строке которой все $x_i^{(n)}$ различны и $x_i^{(n)} \in [a, b]$. Будем говорить, что при заданной стратегии выбора узлов *метод интерполяции сходится*, если $\max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим сначала простейшую стратегию, состоящую в равномерном распределении на отрезке $[a, b]$ узлов интерполяции, т.е. в выборе $x_i^{(n)} = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), где $h = (b - a) / n$.

Можно привести пример, когда такая стратегия не может обеспечить сходимость даже для очень гладких функций:

Пример Рунге. Используем глобальную полиномиальную интерполяцию с равномерным распределением узлов для приближения на отрезке $[-1, 1]$ следующей функции: $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$. Вычисления показывают, что при больших n интерполяция дает превосходные результаты в центральной части отрезка. В то же время вопреки ожиданиям последовательность $P_n(x)$ расходится для $0.73 < |x| \leq 1$. Соответствующая иллюстрация приведена на рис.1.

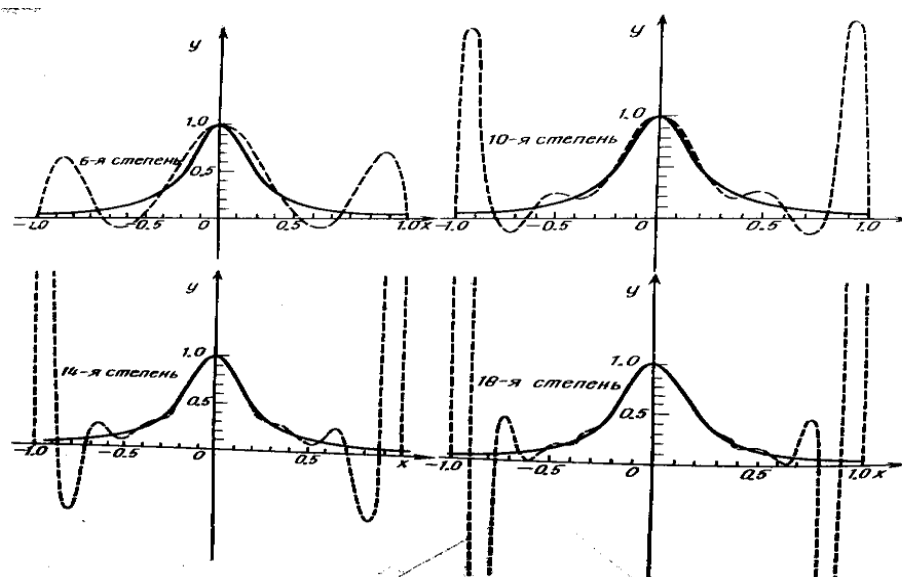


Рис.1

Таким образом, равномерное распределение узлов интерполяции для функции Рунге оказалось неудачным.

Однако проблема сходимости для этой функции исчезает, если в качестве узлов интерполяции брать корни многочлена Чебышева $T_{n+1}(x)$.

Существует ли единая для всех непрерывных на $[a, b]$ функций f стратегия выбора узлов интерполяции, гарантирующая ее сходимость? Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 6.6 (теорема Фабера). *Какова бы ни была стратегия выбора узлов интерполяции, найдется непрерывная на $[a, b]$ функция f , для которой $\max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.*

Теорема Фабера отрицает существование единой для всех непрерывных функций стратегии выбора узлов интерполяции.

Однако для гладких функций (а именно такие функции чаще всего и интерполируются) такая стратегия существует, о чем говорит следующая теорема.

Т е о р е м а 6.7. Пусть в качестве узлов интерполяции на отрезке $[a, b]$ выбираются чебышевские узлы

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2} \pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Тогда для любой непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции f метод интерполяции сходится.

З а м е ч а н и е. Практическая реализация выбора чебышевских узлов интерполяции возможна и оправдана в довольно редких случаях и просто невозможна тогда, когда приходится иметь дело с заданной таблицей значений функции.

2. Чувствительность интерполяционного многочлена к погрешностям входных данных. Помимо погрешности, которая возникает от приближенной замены функции f интерполяционным многочленом, возникает еще дополнительная погрешность, связанная с тем, что значения интерполируемой функции также задаются с погрешностью.

Пусть заданные в узлах x_i значения y_i^* содержат погрешности ε_i . Тогда вычисляемый по этим значениям многочлен $P_n^*(x) = \sum_{j=0}^n y_j^* l_{nj}(x)$ содержит погрешность

$$P_n(x) - P_n^*(x) = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j l_{nj}(x). \quad (6.61)$$

Пусть известно, что верхняя граница погрешности значений y_i^* равна $\bar{\Delta}(y^*)$, т.е. $|\varepsilon_i| \leq \bar{\Delta}(y^*)$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда для верхней границы соответствующей погрешности многочлена $\bar{\Delta}(P_n^*) = \max_{[a,b]} |P_n(x) - P_n^*(x)|$ в силу равенства (6.61) справедлива оценка

$$\bar{\Delta}(P_n^*) \leq \Lambda_n \bar{\Delta}(y^*), \quad (6.62)$$

здесь $\Lambda_n = \max_{[a,b]} \sum_{j=0}^n |l_{nj}(x)|$ — величина, которую называют константой Лебега. В задаче интерполирования константа Лебега играет роль абсолютного числа обусловленности.

Величина L_n не зависит от длины отрезка $[a, b]$, а определяется лишь относительным расположением узлов на нем. В общем случае оптимальный выбор узлов неизвестен. Установлено, однако, что почти оптимальным является выбор в качестве узлов интерполяции корней многочлена Чебышева. При таком выборе $L_n \approx \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + 1$.

Известно, что крайне неудачным при больших n является выбор равноотстоящих узлов интерполяции. При таком выборе $L_n > \frac{2^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{n}}$ для $n \geq 4$ и обусловленность задачи резко ухудшается с ростом n .

Сказанное позволяет сделать важный вывод: в вычислениях не следует использовать интерполяционные многочлены высокой степени с равноотстоящими узлами.

Альтернативный подход состоит в *локальной интерполяции*, когда функция f аппроксимируется многочленом $P_m(x)$ невысокой степени m на содержащемся в $[a, b]$ отрезке $[\alpha, \beta]$ малой длины. Естественно, что при этом используется лишь часть табличных значений. Рассмотрим два подхода к приближению функции, основанные на локальной интерполяции.

3. Интерполирование с помощью «движущегося» полинома.

Строят набор полиномов $P_{(0,1,\dots,m)}$, $P_{(1,2,\dots,m+1)}$, ..., $P_{(n-m,n-m+1,\dots,n)}$ фиксированной степени m , каждый из которых совпадает с табличными значениями в $m+1$ последовательных точках. Каждый такой полином используют для приближения функции в тех точках x из отрезка $[a, b]$, для которых выбранные узлы таблицы являются ближайшими.

Пример 1. Пусть функция задана следующей таблицей:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
y_i	1.0	1.8	2.2	1.4	1.0

Для интерполяции этой функции воспользуемся «движущимся» полиномом второй степени. Заметим, что для $x \in [0.0, 1.5]$ для приближения используется многочлен $P_{(0,1,2)}(x)$, при $x \in [1.5, 2.5]$ — многочлен $P_{(1,2,3)}(x)$, при $x \in [2.5, 4.0]$ — многочлен $P_{(2,3,4)}(x)$. Соответствующая геометрическая иллюстрация приведена на рис. 2.

Заметим, что полученная таким образом аппроксимирующая функция имеет разрывы в точках $x = 1.5$ и $x = 2.5$.

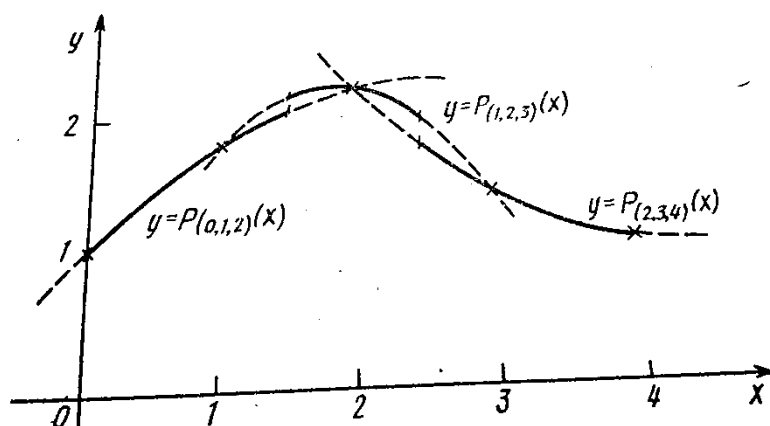


Рис. 2

Пример 2. Для интерполяции функции из примера 1 используем кусочно-полиномиальную интерполяцию. На отрезке $[0, 2]$ аппроксимируем функцию многочленом $P_{(0,1,2)}(x)$, а на отрезке $[2, 4]$ – многочленом $P_{(2,3,4)}(x)$. Соответствующая геометрическая иллюстрация приведена на рис. 3. Заметим, что результирующая аппроксимирующая функция непрерывна, но в точке $x = 2$ график ее имеет излом, соответствующий разрыву первой производной.

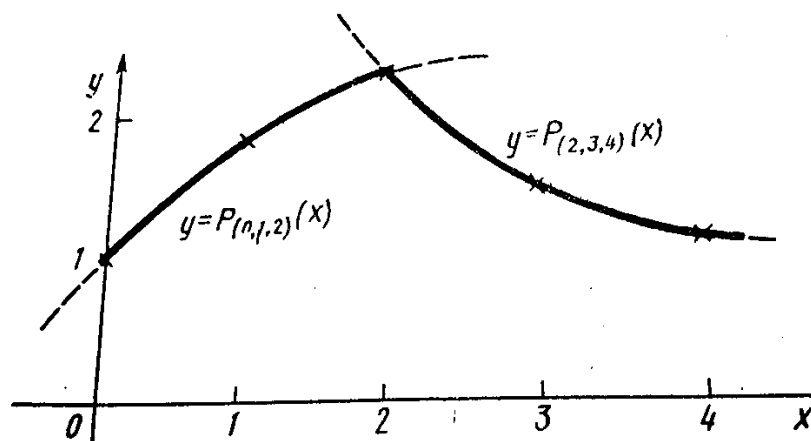


Рис. 3

Метод кусочно-полиномиальной интерполяции при использовании многочленов фиксированной степени m имеет $(m + 1)$ -й порядок точности. Заметим, что интерполяцию «движущимся» полиномом можно рассматривать как частный случай кусочно-полиномиальной интерполяции, при этом интерполяционный многочлен является непрерывным, но в точках стыка не обеспечивается его гладкость.

§ 6.9. Интерполяция сплайнами

1. Определение сплайна. Итак, мы установили, что использование многочленов высокой степени может привести к неудаче или оказаться неэффективным. Альтернативный подход состоит в кусочно-полиномиальной интерполяции с использованием многочленов невысокой степени. Однако недостатком этого метода является разрыв производной в точках стыка двух соседних многочленов. Вместе с тем нередко требуется, чтобы аппроксимирующая функция была гладкой.

Потребность в наличии аппроксимирующих функций, которые бы сочетали в себе локальную простоту многочленов невысокой степени и глобальную на всем промежутке $[a, b]$ гладкость, привела к появлению в 1946 году так называемых *сплайн-функций* или *сплайнов* – специальным образом построенных гладких кусочно-многочленных функций.

К настоящему времени сплайны стали составной частью самых различных вычислительных методов и нашли широкое применение в решении разнообразных научно-технических и инженерных задач.

Дадим строгое определение сплайна. Пусть отрезок $[a, b]$ разбит точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на n частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. *Сплайном степени m* называется функция $S_m(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) функция $S_m(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со всеми своими производными $S_m^{(1)}(x), S_m^{(2)}(x), \dots, S_m^{(p)}(x)$, до некоторого порядка p ;

2) на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S_m(x)$ совпадает с некоторым алгебраическим многочленом $P_{m,i}(x)$ степени m .

Разность $m - p$ между степенью сплайна и наивысшим порядком непрерывной на отрезке $[a, b]$ производной называется *дефектом сплайна*.

Простейшим примером сплайна дает непрерывная кусочно-линейная функция (рис. 4), являющаяся сплайном первой степени (*линейным сплайном*) с дефектом, равным единице. Действительно, на отрезке $[a, b]$ сама функция $S_1(x)$ (нулевая производная) непрерывна. В то же время на каждом частичном отрезке $S_1(x)$ совпадает с некоторым многочленом первой степени.

Наиболее широкое распространение на практике получили сплайны $S_3(x)$ третьей степени (кубические сплайны) с дефектом, равным 1 или 2. Такие сплайны на каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ совпадают с кубическим многочленом:

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + + d_i(x - x_i)^3 \quad (6.63)$$

и имеют на отрезке $[a, b]$ по крайней мере, одну непрерывную производную $S'_3(x)$.

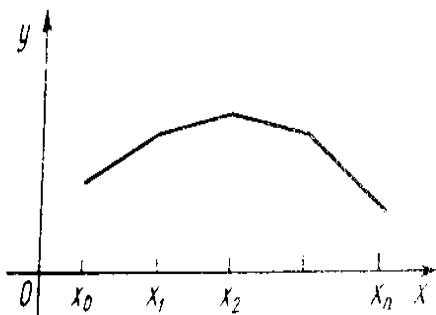


Рис. 4

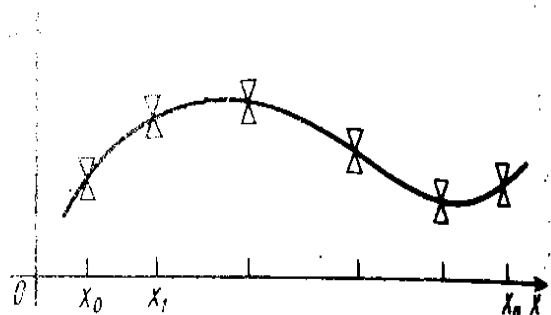


Рис. 5

Термин «сплайн» происходит от английского слова «spline» (гибкая линейка, стержень) — названия приспособления, использовавшегося чертежниками для проведения гладких кривых через заданные точки. Если гибкую стальную линейку поставить на ребро и, изогнув, зафиксировать ее положение в узловых точках (рис.5), то получится механический аналог кубического сплайна. В самом деле, из курса сопротивления материалов известно, что уравнение свободного равновесия профиля $S(x)$ линейки таково: $S^{(4)}(x) = 0$. Следовательно, в промежутке между двумя соседними узлами $S(x)$ представляет

собой многочлен третьей степени. В то же время отсутствие у линейки изломов свидетельствует о непрерывности касательной к графику функции $S(x)$ и кривизны, т.е. производных $S'(x)$ и $S''(x)$.

2. Интерполяционный сплайн. Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Сплайн $S_m(x)$ называется интерполяционным, если $S_m(x_i) = y_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$. Значение $s_i = S_m^{(1)}(x_i)$ называется наклоном сплайна в точке x_i .

Заметим, что на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ интерполяционный кубический сплайн однозначно определяется заданием значений $y_{i-1}, y_i, s_{i-1}, s_i$. В самом деле, из равенства (6.30) для интерполяционного многочлена Эрмита с кратными узлами

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x_1-x)^2(2(x-x_0)+h)}{h^3} + y'_0 \frac{(x_1-x)^2(x-x_0)}{h^2} + y_1 \frac{(x-x_0)^2(2(x_1-x)+h)}{h^3} + y'_1 \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)}{h^2}, \quad \text{где } h = x_1 - x_0,$$

вытекает следующая формула:

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = \frac{(x-x_i)^2(2(x-x_{i-1})+h_i)}{h_i^3} y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})^2(2(x_i-x)+h_i)}{h_i^3} y_i + \frac{(x-x_i)^2(x-x_{i-1})}{h_i^2} s_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{h_i^2} s_i. \quad (6.64)$$

Здесь $h_i = x_i - x_{i-1}$. Справедливость этой формулы проверяется непосредственно заменой соответствующих обозначений применительно к конкретному отрезку $[x_{i-1}, x_i]$.

Различные методы интерполяции кубическими сплайнами отличаются один от другого способом выбора наклонов s_i . Рассмотрим некоторые из них.

3. Локальный сплайн. Если в точках x_i известны значения производной $y'_i = f'(x_i)$, то естественно в формуле положить $s_i = y'_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ в соответствии с формулой (6.64) сплайн однозначно определяется значениями $y_{i-1}, y_i, y'_{i-1}, y'_i$ (поэтому его и называют *локальным сплайном*). Заметим, что он совпадает с кубическим интерполяционным многочленом Эрмита (6.30) для отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Из неравенства (6.32) для погрешности интерполяции с кратными узлами, которое имеет вид

$$\max_{[x_0, x_1]} |f(x) - P_3(x)| \leq \frac{M_4}{384} h^4,$$

получается следующая оценка погрешности интерполяции локальным кубическим сплайном:

$$\max_{[a, b]} |f(x) - S_3(x)| \leq \frac{M_4}{384} h_{max}^4, \quad (6.65)$$

где $h_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$ – максимальная из длин частичных отрезков.

Заметим, что для построенного указанным образом сплайна можно гарантировать непрерывность на отрезке $[a, b]$ только функции $S_3(x)$ и ее первой производной $S_3'(x)$, т.е. его дефект равен 2.

Существуют и другие способы выбора коэффициентов s_i , приводящие к локальным сплайнам, например, кубический многочлен Бесселя и др.

4. Глобальные способы построения кубических сплайнов. Для того чтобы сплайн $S_3(x)$ имел непрерывную на $[a, b]$ вторую производную $S_3''(x)$, необходимо выбирать наклоны s_i так, чтобы в точках x_i стыка многочленов $P_{3,i}$ и $P_{3,i+1}$ совпадали значения их вторых производных:

$$P_{3,i}''(x_i) = P_{3,i+1}''(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.66)$$

Пользуясь формулой (6.64), найдем значение

$$P_{3,i}''(x_i) = \frac{2s_{i-1}}{h_i} + \frac{4s_i}{h_i} - 6 \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2}. \quad (6.67)$$

Из подобной формулы, записанной для многочлена $P_{3,i+1}$, имеем

$$P_{3,i+1}''(x_i) = -\frac{4s_i}{h_{i+1}} - \frac{2s_{i+1}}{h_{i+1}} + 6 \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}^2}. \quad (6.68)$$

Таким образом, равенства (6.66) приводят к следующей системе уравнений относительно коэффициентов s_i :

$$h_i^{-1} s_{i-1} + 2(h_i^{-1} + h_{i+1}^{-1}) s_i + h_{i+1}^{-1} s_{i+1} =$$

$$=3[h_i^{-2}(y_i - y_{i-1}) + h_{i+1}^{-2}(y_{i+1} - y_i)], i=1,2,\dots,n-1. \quad (6.69)$$

Заметим, что эта система уравнений недоопределена, так как число уравнений системы (равное $n - 1$) меньше числа неизвестных (равного $n + 1$). Выбор двух оставшихся уравнений обычно связывают с некоторыми дополнительными условиями, накладываемыми на сплайн в граничных точках a и b (*граничными условиями*). Укажем на некоторые из наиболее известных граничных условий.

1). Если в граничных точках известны значения первой производной $f'(a)$ и $f'(b)$, то естественно положить

$$s_0 = f'(a), \quad s_n = f'(b). \quad (6.70)$$

Дополняя систему (6.69) уравнениями (6.70), приходим к системе уравнений с трехдиагональной матрицей, которая легко решается методом прогонки. Полученный таким образом сплайн называют *фундаментальным кубическим сплайном*.

2). Если в граничных точках известны значения второй производной $f''(a)$ и $f''(b)$, то можно наложить на сплайн граничные условия $S_3''(a) = P_{3,1}''(x_0) = f''(a)$, $S_3''(b) = P_{3,n}''(x_n) = f''(b)$, что приводит к следующим уравнениям:

$$-\frac{4s_0}{h_1} - \frac{2s_1}{h_1} + 6\frac{y_1 - y_0}{h_1^2} = f''(a), \quad (6.71)$$

$$\frac{2s_{n-1}}{h_n} + \frac{4s_n}{h_n} - 6\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n^2} = f''(b) \quad (6.72)$$

(достаточно в равенстве (6.68) взять $i = 0$, а в равенстве (6.69) $i = n$).

3). Полагая в уравнениях (6.71), (6.72) $f''(a) = 0$, $f''(b) = 0$ (независимо от того, выполнены ли эти условия для интерполируемой функции), приходим к системе уравнений, определяющих так называемый *естественный кубический сплайн*.

4). Если f – периодическая функция с периодом, равным $b - a$, то систему (6.69) следует дополнить условиями

$$s_0 = s_n,$$

$$h_n^{-1}(s_{n-1} + 2s_n) + h_1^{-1}(2s_0 + s_1) = 3[h_n^{-2}(y_n - y_{n-1}) + h_1^{-2}(y_1 - y_0)].$$

Существуют и другие подходы к заданию граничных условий.

5. Погрешность приближения кубическими сплайнами.

Доказано, что если функция f имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную четвертого порядка и $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$, то для интерполяционного кубического сплайна $S_3(x)$ справедлива следующая оценка погрешности:

$$\max_{[a,b]} |f(x) - S_3(x)| \leq CM_4 h_{max}^4. \quad (6.73)$$

Заметим, что сплайн $S_3(x)$ не только сам аппроксимирует функцию $f(x)$, но и его производные $S_3'(x)$, $S_3''(x)$ и $S_3^{(3)}(x)$ приближают соответствующие производные функции f . В частности, справедливы неравенства:

$$\max_{[a,b]} |f^{(k)}(x) - S_3^{(k)}(x)| \leq C_k M_4 h_{max}^{4-k}. \quad (6.74)$$