ИДЗ по Алгебраическим структурам. (Базис)

Выполнила студентка 1 курса ФКТИ Чернякова Валерия, гр. 1304

вариант №26.

№1. a) базис линейной оболочки строк матрицы A.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 70 & 30 & 20 \end{pmatrix}$$ +

b) базис пространства решений системы $Ax=0$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{27}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}x_4 + \frac{3}{7}x_5 \\ \frac{2}{7}x_4 + \frac{27}{7}x_5 \\ -\frac{3}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$ +

№2. a) матрицы перехода $C_{e\to f}$ и $C_{f\to e}$

$$C_{e\to f}: \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$ +

$$C_{f\to e}: \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

b) координаты $x$ в базисе $e$

$x_1 = -1$

$x_2 = 13$ +

$x_3 = 2$

c) матрица оператора $L$ в базисе $f$

$$\begin{pmatrix} -1 & -21 & -9 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$ +

2 ИДЗ по алгебраическим структурам. (Матрица оператора)
Выполнила студентка 1 курса ФКТИ Чернякова Валерия Алексеевна,
гр. 1304

Вариант 26.

1. Запишите матрицу линейного оператора $L$ в базисе $U$, если известно:
$L(u_1) = 3u_1 - u_3$; $L(u_2) = -u_1 + u_2 + u_3$; $L(3) = u_1 + 3u_3$.

Ответ:
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = L$$
+

2. В стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ найдите матрицу оператора $L$, если $L(\sigma) = \sigma - 2\dfrac{(a,\sigma)}{(a,a)}a$, где $a = (-4, 5, -1)^T$, а $( \, , \, )$ обозначает стандартное скалярное произведение.

Ответ:
$$\begin{array}{ccc} i & j & k \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{5}{21} & \frac{20}{21} & -\frac{4}{21} \\ \frac{20}{21} & -\frac{4}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{-4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{20}{21} \end{pmatrix} = L$$
+

3. Пусть $V = \mathbb{C}^2$ – линейное пространство над $\mathbb{R}$. Выбрать базис в простр-ве $V$ и найти матрицу оператора $L$ в этом базисе, если $L(x) = \begin{pmatrix} -4-4i & 2-6i \\ 2+4i & -4+4i \end{pmatrix} x$.

Ответ:
$$L = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & 2 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$
+

3 ИДЗ по алгебраическим структурам. Собственные векторы и числа.
Выполнила студентка 1 курса ФКТИ Чернякова Валерия Алексеевна, гр. 1304
вариант 26.

Собственные числа и вектора для:

1) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 2 \\ 5 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

+

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = -5 \end{array}\right.$ – собственные числа

для $\lambda_1 = -4$: для $\lambda_2 = -5$

$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ – собственные вектора

2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -2 \end{array}\right.$ – собственные числа

+

для $\lambda_1 = 1$ для $\lambda_2 = -1$ для $\lambda_3 = -2$

$t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственные вектора

н ИДЗ по алгебраическим структурам. Кривые и поверхности 2го порядка
Выполнила студентка 1го курса ФКТИ Чернякова Валерия.

вариант 26.

## Задание 1.

• уравнение кривой второго порядка в каноническом виде:

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2} - \frac{y''^2}{1^2} = 1$$

• координаты

+

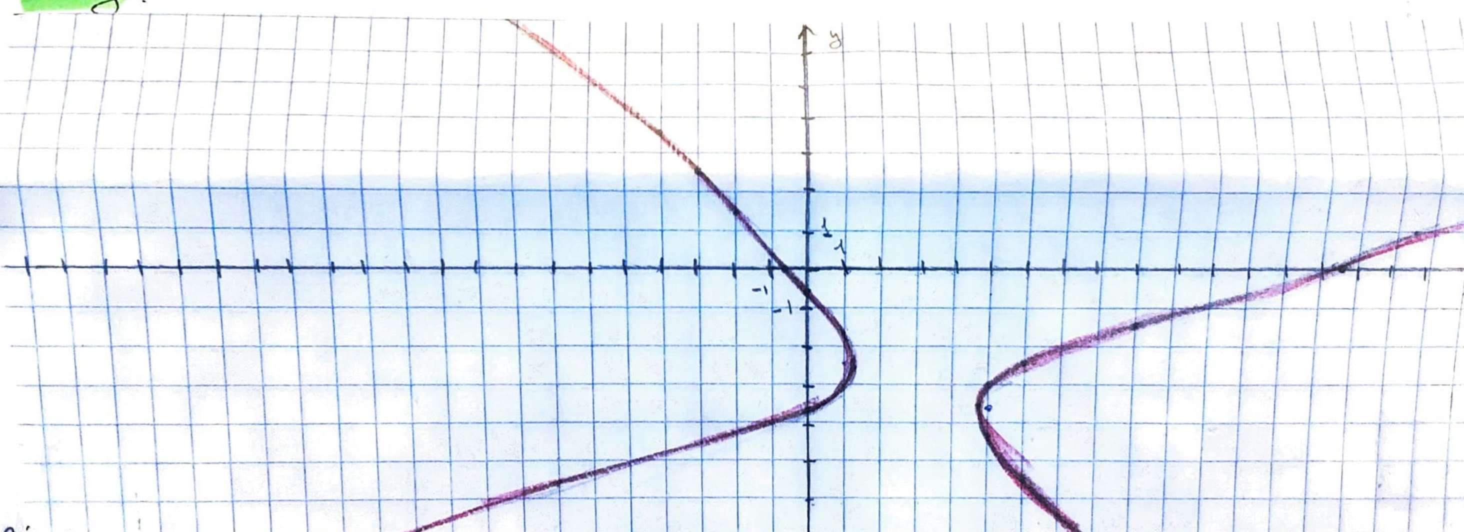
центра:

$(3; -3)$

фокусов:

$F_1\left(5; -\frac{7}{2}\right)$ $F_2\left(1; -\frac{5}{2}\right)$

• эскиз:




## Задание 2.

тип поверхности второго порядка: эллиптический параболоид.

координаты центра отсутствуют.

+

НАЗ №5. Разложение по базису, скалярное произведение. Чернякова Валерия. Вариант 26.

**Задание 1.** столбец координат $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = 8e_1 - 6e_2 - 1e_3 + 1e_4$

Ответ: $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ +

**Задание 2.** $e_1 = (-2, 1, -1)^T$, $e_2 = (1, 1, -2)^T$, $e_3 = (-6, -3, 7)^T$ – базис ли в $\mathbb{R}^3$?

* векторы образуют базис => линейно независимы

$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$ при этом $\alpha, \beta, \gamma = 0$ => ЛНЗ

$$\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \quad \gamma \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{+1,\ +2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{+3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \quad \gamma \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$\begin{cases} -\beta + 4\gamma = 0 \Rightarrow \beta = 4\gamma \\ \alpha + \beta - 3\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 3\gamma - \beta = 3\gamma - 4\gamma = -\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = 4\gamma \\ \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$ Т.о. $\alpha, \beta, \gamma$ ЛЗ

$\Downarrow$

вектора базис не образуют

Ответ: набор данных векторов не является базисом в $\mathbb{R}^3$. +

**Задание 3.** найти координаты столбца $x = (1, 5, 3)^T$ в базисе $f_1 = (1, 3, 3)^T$, $f_2 = (-1, -2, -2)^T$, $f_3 = (0, -3, -2)$

$x = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 \Rightarrow (1, 5, 3) = \alpha(1, 3, 3) + \beta(-1, -2, -2) + \gamma(0, -3, -2)$

$$\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad\quad x \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-1} \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \quad \gamma \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \end{array} \begin{cases} \gamma = -2 \\ \beta - 3\gamma = 2 \Rightarrow \beta = 2 + 3\gamma = 2 - 6 = -4 \\ \alpha - \beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1 + \beta = 1 - 4 = -3 \end{cases}$$

$x = -3f_1 - 4f_2 - 2f_3$ +

Ответ: $x = (-3, -4, -2)^T$

**Задание 4.** $\exists$ V – лин. пространство всех многочленов над $\mathbb{R}$ $\deg \leq 5$, а $\sigma$ – билин. форма на V, задан. формулой $\sigma(p, q) = \sum_{k=1}^{n} p(k) q(k)$. n – ? ($\sigma$ – скаляр. произвед. на V)

Рассмотрим скалярное произведение $\sigma(p, p)$ => должна быть неотрицат. и невырожд

$n = 1$ $p(1) \cdot p(1) = (p(1))^2$

$n = 2$ $p(1) \cdot p(1) + p(2) p(2) = (p(1))^2 + (p(2))^2$

$n = 6$ $(p(1))^2 + (p(2))^2 + (p(3))^2 + (p(4))^2 + (p(5))^2 + (p(6))^2 = 0 \Rightarrow p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) =$

$\Downarrow$

$p(x) = 0$

Т.е $\sigma(p, p) = 0 \Rightarrow p = 0$. Т.е. из рав-ва $p(1) = p(2) = \ldots = p(n) = 0$ следует, что p тожд. нулевой. Если взять $n \geq 6$ это так, потому что многочл. имеет не больше корней, чем его степень. $n = 5$ недостат., т.к. можно взять $p(x) = (x-1)\ldots$

Ответ: $n \geq 6$. +

**Задание 5.** $a = (1, 1, 1, 1)^T$, $b = (2, 4, -3, 5)^T$. b – в $\Sigma$ 2х ортог. столбцов + один из них $\parallel a$.

$\exists\, b = c + \alpha a$ и $c \perp a \Rightarrow (c, a) = (b - \alpha a, a) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{(a, b)}{(a, a)} = \frac{(2 + 4 - 3 + 5)}{(1 + 1 + 1 + 1)} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \alpha a = 2a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$c = b - \frac{(a, b)}{(a, a)} a = b - \alpha a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ответ: $(0, 2, -5, 3)^T$ и $(2, 2, 2, 2)^T$ +

**Задание 6.** многочл: $2x^2 + 2x - 1$, $x^2 + 1$ – ортогональны ли, если $(f, g)$ – $\Sigma$ произвед. коэф. в f и g при соответ. степенях x.

$\exists\, f = 2x^2 + 2x - 1$, $g = x^2 + 1$, коэф-ты

| | $x^2$ | x | св.чл |
|---|---|---|---|
| f | 2 | 2 | -1 |
| g | 1 | 0 | 1 |

; $(f, g) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 2 - 1 = 1$

$\Downarrow$

не ортогон. (0 для ортогональности)

Ответ: данные многочлены не ортогональны. +