МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №3
по дисциплине «Методы оптимизации»
Тема: Решение прямой и двойственной задачи

Студентка гр. 1304	____________________	Чернякова В.А.
Преподаватель	____________________	Мальцева Н.В.

Санкт-Петербург
2024

Цель работы.

а. Постановка задачи линейного программирования и её решение с помощью стандартной программы.

б. Исследование прямой и двойственной задачи.

Задание.

1. По заданной содержательной постановке задачи поставить задачу формально (т.е. привести к виду (3.1)).

$$\mathrm{X} = \left\{x \in R^n : \mathrm{A}x \geq \mathrm{B}, x \geq 0\right\},$$

2. Решить поставленную задачу с помощью готовой программы.

3. Поставить двойственную задачу с помощью готовой программы.

4. Решить двойственную задачу с помощью той же программы.

5. Определить коэффициенты чувствительности исходной задачи по координатам правой части ограничений (вектора). Для этого:

а) увеличить i-ю координату вектора ограничений правой части на $\varepsilon = 10^{-3}$;

б) решить задачу с новым вектором $\mathrm{B} = \mathrm{B} + \varepsilon e_i$, ответ - $\varphi_i(\varepsilon)$;

в) вычислить $\tilde{x}_i = (\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0))/\varepsilon$;

г) сравнить полученное число с i-й координатой оптимальной точки двойственной задачи.

6. Повторить процедуру, описанную в п.5, но варьировать на этот раз коэффициенты целевой функции – компоненты вектора C и сопоставить результаты с координатами вектора-решения исходной задачи.

Основные теоретические положения.

Если исходная задача линейного программирования представлена в виде:

найти минимум функции $f = (c, x)$ на множестве

$$\mathrm{X} = \left\{x \in R^n : \mathrm{A}x \geq \mathrm{B}, x \geq 0\right\}, \tag{3.1}$$

то двойственная задача линейного программирования может быть сформулирована следующим образом:

найти максимум функции (B, λ) на множестве $\lambda = \{\lambda \in R^m : A^T \lambda \le c, \lambda \ge 0\}$, где A^T - матрица, транспонированная к А. Двойственная к двойственной задаче есть исходная задача.

Известно, что если существует решение исходной задачи, то существует решение и двойственной задачи, причем значения экстремумов совпадают. При этом координаты экстремальной точки для двойственной задачи являются коэффициентами чувствительности результата в исходной задаче по коэффициентам вектора B.

Рассмотрим видоизмененную исходную задачу:

Найти $min(c, x)$ на множестве $\{x : x \ge 0, Ax \ge B + \varepsilon e_i\}$, где $\varepsilon > 0$,

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} i$$

Если исходная задача имеет единственное решение, то при малых $\varepsilon > 0$ и видоизмененная задача имеет решение; причем если α_ε^i -значение минимума, то существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\alpha_\varepsilon^i - \alpha_0^i\right) / \varepsilon \overset{Df}{=} \beta_i$$

Оказывается, что β есть i-я координата оптимальной точки для двойственной задачи.

Для проведения лабораторной работы составлена программа, обеспечивающая решение задачи линейного программирования при задании с терминала исходных значений параметров.

Содержательная постановка задачи.

Вариант 2.

Рассмотрим задачу оптимального использования материалов при условии, что заданный план изготовления может быть выполнен или перевыполнен: при изготовлении обуви используют, в частности, жесткую кожу – черпак, ворот и др. Каждый из видов в свою очередь делится на несколько категорий по средней толщине. ГОСТом предусмотрено изготовление деталей из определенного вида кожи. Одна и та же деталь может быть изготовлена из разных видов кожи, причем из этих же кож изготовляют и другие детали. Исходные данные приведены в таблице.

В наличии имеется 0,9 тыс. кв. м. чепрака толщиной 4,01 – 4,5 мм по цене 14,4 р. за 1 кв. м.; 0,8 тыс. кв. м. черпака толщиной 4,51 - 5,0 мм по цене 16 р. за 1 кв. м.; 5,0 тыс. кв. м. ворота толщиной 3,5 – 4,0 мм по цене 12,8 р. за 1 кв. м.; 7,0 тыс. кв. м. ворота толщиной 4,51 – 5,0 мм по цене 10,5 р. за 1 кв. м.

Толщиа детали, мм	**Количество деталей по плану, тыс. шт.**	**Количество деталей, которые можно изготовить из 1000 кв. м кожи, тыс. шт., при толщине**			
		чепрака, мм		**ворота, мм**	
		4,01 – 4,5	4,51 – 5,0	3,5 – 4,0	4,51 – 5,0
3,9	21	26,5	7,8	-	-
3,0	30	51,0	26	45,7	-
2,5	500	-	-	5,0	72,5

Формальная постановка задачи.

Минимизация расходов на материалы так, чтоб план был выполнен или перевыполнен – суть представленной задачи.

Для каждой непустой ячейки таблицы зададим x_j, которая будет отражать расход определённого типа кожи на определенный тип детали. Такие обозначения вводятся потому, что из 1000 кв. м кожи можно изготовить фиксированное количество деталей определенной толщины.

Таким образом, наша задача будет иметь 7 переменных. Распишем их подробно:

x_1 – расход чепрака 4,01 – 4,5 мм на детали толщиной 3,9 мм;

x_2 – расход чепрака 4,51 – 5,0 мм на детали толщиной 3,9 мм;

x_3 – расход чепрака 4,01 – 4,5 мм на детали толщиной 3,0 мм;

x_4 – расход чепрака 4,51 – 5,0 мм на детали толщиной 3,0 мм;

x_5 – расход ворота 3,5 – 4,0 мм на детали толщиной 3,0 мм;

x_6 – расход ворота 3,5 – 4,0 мм на детали толщиной 2,5 мм;

x_7 – расход ворота 4,51 – 5,0 мм на детали толщиной 2,5 мм.

Целевая функция есть функция стоимости выполнения плана. Итого формальная постановка задачи выглядит так:

$$\varphi(x) = 14.4(x_1 + x_3) + 16.0(x_2 + x_4) + 12.8(x_5 + x_6) + 10.5x_7 \longrightarrow \min$$

Система ограничений для данной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} 26.5x_1 + 7.8x_2 - 21 \geq 0 \\ 51.0x_3 + 26.0x_4 + 45.7x_5 - 30 \geq 0 \\ 5.0x_6 + 72.5x_7 - 500 \geq 0 \\ -x_1 - x_3 + 0.9 \geq 0 \\ -x_2 - x_4 + 0.8 \geq 0 \\ -x_5 - x_6 + 5.0 \geq 0 \\ -x_7 + 7.0 \geq 0 \\ x_j \geqslant 0 \quad \forall \quad j = 1..7 \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 26.5 & 7.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 51.0 & 26.0 & 45.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0 & 72.5 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 30 \\ 500 \\ -0.9 \\ -0.8 \\ -5.0 \\ -7.0 \end{pmatrix}$$

Решение исходной задачи линейного программирования.

С помощью программы была поставлена задача. Постановка на рисунке 1.

```
 Целевая функция:
                              C
14.4   16.0   14.4   16.0   12.8   12.8   10.5   --> min
 Ограничения:
                              A                         B
26.5   7.8    0      0      0      0      0        >=21
0      0      51.0   26.0   45.7   0      0        >=30
0      0      0      0      0      5.0    72.5     >=500
-1     0      -1     0      0      0      0        >=-0.9
0      -1     0      -1     0      0      0        >=-0.8
0      0      0      0      -1     -1     0        >=-5.0
0      0      0      0      0      0      -1       >=-7.0
```

Рисунок 1. Постановка исходной задачи в программе

```
x1= 0.792
x2= 0.000
x3= 0.000
x4= 0.000
x5= 0.656
x6= 0.000
x7= 6.897
Значение целевой функции f = 92.228
```

Рисунок 2. Программное решение исходной задачи

Оптимальная точка $x^* = (0.792, 0.000, 0.000, 0.000, 0.656, 0.000, 6.897)^T$, значение в оптимальной точке $\varphi(x^*) = 92.228$.

То есть, для достижения минимальных затрат и выполнения плана необходимо выделить 0.792 тыс. кв. м. чепрака толщиной 4.01 – 4.5 мм на изготовление деталей толщиной 3.9 мм, 0.656 тыс. кв. м. ворота толщиной 3.5 – 4.0 мм на детали толщиной 3.0 мм, 6.897 тыс. кв. м. ворота толщиной 4.51 – 5.0 мм на детали толщиной 2.5 мм.

Чепрак толщиной 4.01 – 4.5 мм для изготовления деталей толщиной 3.0 мм, чепрак толщиной 4.51 – 5.0 мм на изготовление деталей толщиной 3.9 мм, чепрак толщиной 4.51 – 5.0 мм на изготовление деталей толщиной 3.0 мм и ворот толщиной 3.5 – 4.0 мм на изготовление деталей толщиной 2.5 мм не используются в рамках данной задачи минимизации расходов.

Постановка двойственной задачи.

Двойственная задача линейного программирования – задача максимизации. Целевая функция $\psi(\lambda) = (b, \lambda) \to \max$.

То есть найти максимум функции (B, λ) на множестве $\lambda = \{\lambda \in R^m : A^T \lambda \le c, \lambda \ge 0\}$, где A^T - матрица, транспонированная к A.

Транспонируем матрицу из исходной задачи:

$$A^T = \begin{pmatrix} 26.5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 7.8 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 51.0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26.0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 45.7 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 72.5 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Целевая функция двойственной задачи:

$$\psi(\lambda) = 21\lambda_1 + 30\lambda_2 + 500\lambda_3 - 0.9\lambda_4 - 0.8\lambda_5 - 5.0\lambda_6 - 7.0\lambda_7 \longrightarrow \max$$

Система ограничений (меняем знаки неравенств на противоположные в отличие от исходной задачи):

$$
\begin{cases}
26.5\lambda_1 - \lambda_4 - 14.4 \le 0 \\
7.8\lambda_1 - \lambda_5 - 16.0 \le 0 \\
51.0\lambda_2 - \lambda_4 - 14.4 \le 0 \\
26.0\lambda_2 - \lambda_5 - 16.0 \le 0 \\
45.7\lambda_2 - \lambda_6 - 12.8 \le 0 \\
5.0\lambda_3 - \lambda_6 - 12.8 \le 0 \\
72.5\lambda_3 - \lambda_7 - 10.5 \le 0 \\
\lambda_j \geqslant 0 \quad \forall \quad j = 1..7
\end{cases}
$$

Решение двойственной задачи линейного программирования.

С помощью программы была поставлена двойственная задача. Постановка на рисунке 3.

Целевая функция:

			C				
21.0	30.0	500.0	-0.9	-0.8	-5.0	-7.0	--> max

Ограничения:

			A				B
26.5	0	0	-1	0	0	0	<=14.4
7.8	0	0	0	-1	0	0	<=16.0
0	51.0	0	-1	0	0	0	<=14.4
0	26.0	0	0	-1	0	0	<=16.0
0	45.7	0	0	0	-1	0	<=12.8
0	0	5.0	0	0	-1	0	<=12.8
0	0	72.5	0	0	0	-1	<=10.5

Рисунок 3. Постановка двойственной задачи в программе

```
x1= 0.543
x2= 0.280
x3= 0.145
x4= 0.000
x5= 0.000
x6= 0.000
x7= 0.000
Значение целевой функции f = 92.228
```

Рисунок 4. Программное решение двойственной задачи

Оптимальная точка $\lambda^* = (0.543,\ 0.280,\ 0.145,\ 0.000,\ 0.000,\ 0.000,\ 0.000)^T$, значение в оптимальной точке $\psi(\lambda^*) = 92.228$.

Из полученных результатов можно увидеть, что при увеличении плана по изготовлению деталей толщиной 3.9 мм на Δb общая стоимость возрастёт на $0.543\Delta b$, на $0.280\Delta b$ при увеличении плана по изготовлению деталей толщиной 3.0 мм на Δb и на $0.145\Delta b$ возрастёт стоимость при увеличении плана по изготовлению деталей толщиной 2.5 мм на Δb. Повышение доступного количества материалов каждого типа к увеличению затрат не приведет, это видно из рисунка 4 - $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$.

Определить коэффициенты чувствительности исходной задачи.

Определим чувствительность коэффициентов исходной задачи по координатам правой части ограничений (вектора B). Будем последовательно увеличивать координаты вектора B на $\varepsilon = 10^{-2}$. Также запишем оптимальное значение целевой функции $\varphi_i(0) = 92.228$.

Далее составим таблицу вычисленных значений коэффициентов чувствительности и добавим столбец с координатами оптимальной точки двойственной задачи. Результаты решения приведены в таблице 1.

Таблица 1.

i	b_i	$b_i + \varepsilon_{e_i}$	x_i^*	$\varphi_i(\varepsilon)$	$\tilde{x}_i = \frac{\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0)}{\varepsilon}$	λ_i
1	21	21.01	$(0.793, 0, 0, 0, 0.656, 0, 6.897)^T$	92.233	0.5	0.543
2	30	30.01	$(0.792, 0, 0, 0, 0.657, 0, 6.897)^T$	92.231	0.3	0.280
3	500	500.01	$(0.792, 0, 0, 0, 0.656, 0, 6.897)^T$	92.229	0.1	0.145
4	-0.9	-0.89	$(0.792, 0, 0, 0, 0.657, 0, 6.897)^T$	92.228	0	0
5	-0.8	-0.79	$(0.792, 0, 0, 0, 0.657, 0, 6.897)^T$	92.228	0	0
6	-5.0	-4.99	$(0.792, 0, 0, 0, 0.657, 0, 6.897)^T$	92.228	0	0
7	-7.0	-6.99	$(0.792, 0, 0, 0, 0.656, 0, 6.897)^T$	92.228	0	0

Вектор коэффициентов чувствительности можно записать следующим образом $\tilde{x} = (0.5, 0.3, 0.1, 0, 0, 0, 0)^T$. Заметим, что полученный вектор почти в точности совпадает с вектором координат оптимальной точки решения двойственной задачи. Значения координат отличаются на небольшую погрешность.

Изучение поведения функции при варьировании компонент вектора *C*.

Определим чувствительность коэффициентов исходной задачи по координатам вектора C. Будем последовательно увеличивать координаты вектора C на $\varepsilon = 10^{-2}$. Также запишем оптимальное значение целевой функции $\varphi_i(0) = 92.228$.

Далее составим таблицу вычисленных значений коэффициентов чувствительности и добавим столбец с координатами оптимальной точки исходной задачи. Результаты решения приведены в таблице 2.

Таблица 2.

i	c_i	$c_i + \varepsilon_{e_i}$	x_i^*	$\varphi_i(\varepsilon)$	$\widetilde{x_i} = \dfrac{\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0)}{\varepsilon}$	x_i
1	14.4	14.41	$(0.792, 0, 0, 0, 0.656, 0, 6.897)^T$	92.236	0.8	0.792
2	16.0	16.01	$(0.792, 0, 0, 0, 0.656, 0, 6.897)^T$	92.228	0	0
3	14.4	14.41	$(0.792, 0, 0, 0, 0.656, 0, 6.897)^T$	92.228	0	0
4	16.0	16.01	$(0.792, 0, 0, 0, 0.656, 0, 6.897)^T$	92.228	0	0
5	12.8	12.81	$(0.792, 0, 0, 0, 0.656, 0, 6.897)^T$	92.234	0.6	0.656
6	12.8	12.81	$(0.792, 0, 0, 0, 0.656, 0, 6.897)^T$	92.228	0	0
7	10.5	10.51	$(0.793, 0, 0, 0, 0.656, 0, 6.897)^T$	92.297	6.9	6.897

Вектор коэффициентов чувствительности можно записать следующим образом $\tilde{x} = (0.8, 0, 0, 0, 0.6, 0, 6.9)^T$. Заметим, что полученный вектор почти в точности совпадает с вектором координат оптимальной точки решения исходной задачи. Значения координат отличаются на небольшую погрешность.

Выводы.

В ходе выполнения лабораторной работы по содержательной постановке задачи была составлена задача оптимизации. С помощью предоставленной программы была решена поставленная задача. Решены исходная и двойственная задача линейного программирования. Практически было подтверждено, что если существует решение исходной задачи, то существует решение и двойственной задачи, причем значения экстремумов совпадают, это значение равно 92.228 (теорема двойственности). Найдены коэффициенты чувствительности исходной задачи по координатам правой части ограничений. По результатам представленным в таблице 1 также подтверждается следующее из теоретических положений: координаты экстремальной точки для двойственной задачи являются коэффициентами чувствительности в исходной задаче по коэффициентам вектора B, то есть равенство$\lambda^* = (0.543,\ 0.280,\ 0.145,\ 0.000,\ 0.000,\ 0.000,\ 0.000)^T$ и $\tilde{x} = (0.5, 0.3, 0.1, 0, 0, 0, 0)^T$. Также были найдены коэффициенты чувствительности исходной задачи относительно вектора C. По результатам, представленным в таблице 2, координаты вектора чувствительности $\tilde{x} = (0.8, 0, 0, 0, 0.6, 0, 6.9)^T$ совпали с вектором координат оптимальной точки исходной задачи $x^* = (0.792, 0.000, 0.000, 0.000, 0.656, 0.000, 6.897)^T$.