10 лекция

2 ноября 2022 г. 13:42

Определение кратного интеграла

] E - измеримое множество, $E \subset \mathbb{R}^n$

def №126

Конечная система $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i_\tau}$ непустых множеств E_i, измеримых по Жордану: $i = 1, 2, \dots i_\tau$ называется разбиением E

1 $\mu(E_i \cap E_j) = 0 : i \neq j$

2 $\bigcup_{i=1}^{i_\tau} E_i = E$

При этом $|\tau| = \max\limits_{i=1,2\dots i_\tau} \operatorname{diam}(E_i)$ называют мелкостью разбиения

диаметр

если представить множество в виде шара

$$\mu E = \sum_{i=1}^{i_\tau} \mu E_i$$

$$\tau = \{E_i\}$$

Существование интеграла Римана

Любая функция меры нуль интегрируема, и интеграл равен нулю

Lm №134

] f определена на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$

$\tau = \{E_i\}$ - разбиение E

$$E_\tau^* = \bigcup_{\mu E_i > 0} E_i$$

Если f неограничена на E_τ^*, тогда $\forall M > 0$ можно выбрать $\xi^{(i)} \in E_i$, что будет верно

$$\left| \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)}) \mu E_i \right| > M$$

Th №136

Если f - интегрируема на множестве E, то $\exists E_0 \subset E$, $\mu E_0 = 0$, что f - ограничена на $E \setminus E_0$

Th №139

Если f - интегрируема на открытом множестве, то она ограничена

def №127

$\tau' = \{E_i'\}$ называют вписанным в $\tau = \{E_i\}$, если $\forall E_i' \in \tau'$ $\exists E_i \in \tau$: $E_i' \subset E_i$ и обозначают $\tau \succ \tau'$

Свойства: №128

1) Если $\tau \prec \tau'$ и $\tau' \prec \tau''$, то $\tau \prec \tau''$

2) Потом проверит

3)

Следствие №135

] f - функция на измеримом $E \subset \mathbb{R}^n$, если у E $\exists$ сколь угодно мелкое разбиение, для которого f неограничена на объединении элементов разбиения положительной меры, то f - не интегрируема по Риману на E

Lm №137

Непустое пересечение n-мерного замкнутого куба с открытым множеством имеет положительную жорданову меру Жордана.

Следствие №138

Для любого открытого измеримого множества $\exists$ сколь угодно мелкое разбиение, все элементы которого имеют положительную меру $(\mu E_i > 0)$

Lm №129

У всякого измеримого множества есть разбиение сколь угодно малой мелкости.

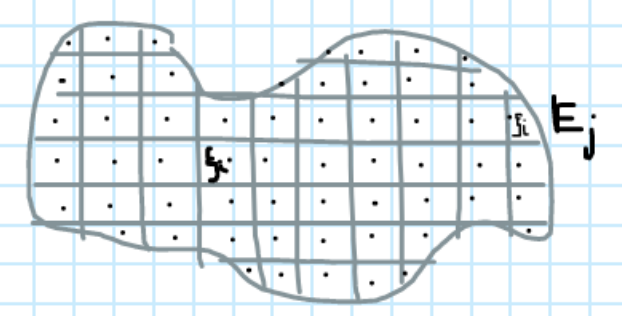
def №130

] $E \subset \mathbb{R}^n$, E - измеримо

$y = f(x) = f(x_1, x_2 \dots x_n)$ и $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i_\tau}$

$$\sigma_\tau(f, \xi^{(1)}, \xi^{(2)} \dots \xi^{(i_\tau)}) = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)}) \mu E_i : \xi^{(i)} \in E_i$$

называют интегральной суммой Римана



def №131

Число A называют интегралом Римана от функции f по измеримому множеству $E \subset \mathbb{R}^n$, если какова бы ни была последовательность $\tau_n = \{E_i^{(m)}\}_{i=1}^{i_\tau^{(m)}}$, $M \in \mathbb{N}$ и каковы бы не были $\xi^{(i,m)} \in E_i^{(m)}$: $i = 1, 2, \dots i_\tau^{(m)}$, последовательность интегральных сумм $\sigma_{\tau_m}(f; \xi^{(1,m)}, \xi^{(2,m)}, \dots \xi^{(i_\tau^{(m)}, m)}) \xrightarrow[m\to\infty]{} A$

Если существует предел

$$\int_E f(x)dx \qquad \int f(x)\,dE \qquad \underbrace{\int \dots \int}_{n} f(x_1, x_2 \dots x_n)\,dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$\int f(x)dE = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau$$

Lm №132

] $E \subset \mathbb{R}^n$, E - измеримое

$E_0 \subset E$, $\mu E_0 = 0$

Тогда $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sum\limits_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i = 0$,

где $\tau_0(E_0) = \{E_i \in \tau : E_i \cap E_0 \neq \varnothing\}$

$\tau(E_0) = \{E_i \in \tau : E_i \cap E_0 = \varnothing\}$

Th №133

] E измеримо, $E \subset \mathbb{R}^n$

$\tau = \{E_i\}$ - разбиение, $E_0 \subset E$, $\mu E_0 = 0$

Если f ограничена на E, то

Риманов интеграл $\int f(x)dE$ существует

$$\Updownarrow$$

$$\exists \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_{\tau(E_0)}$$

При этом, если он существует и равен $\int f(x)dE$

Суммы Дарбу

def №140

f - ограничена, E - измеримо, $\tau = \{E_i\}$

$m_i = \inf\limits_{x\in E_i} f(x)$ $\qquad M_i = \sup\limits_{x \in E_i} f(x)$

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \mu E_i \qquad S_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \mu E_i$$

$$s_\tau \leq \sigma_\tau \leq S_\tau$$

Th №141

Для того, чтобы ограниченная на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ f была интегрируема по Риману,

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{|\tau|\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0$$

Th №142

замкнутое
закрытое
множество

f - непрерывна на компакте, то она интегрируема на нём

Th №143

Если f - ограничена на измеримом компакте и множество её точек разрыва имеет меру нуль, то она интегрируема на нём

Свойства кратного интеграла

Свойства: №144

1)] E - измеримо, то $\int dE = \mu E$

2)] E и E^*, $E^* \subset E$, f - ограничена и интегрируема на E, тогда она интегрируема и на E^*

3) Аддитивность интеграла по множествам

] E' и E'' - измеримы $\qquad E = E' \cup E''$, $E' \cap E'' = \varnothing$

f - ограничена и интегрируема на E,

тогда $\exists \int f(x)\,dE'$ и $\exists \int f(x)\,dE''$

причём $\int f(x)dE = \int f(x)dE' + \int f(x)dE''$

4) Линейность интеграла

] f_1, f_2 - интегрируемы на E

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\exists \int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,dE = \lambda_1 \int f_1 dE + \lambda_2 \int f_2 dE$$

5) Если f и g - интегрируемы и ограничены на непрерывном множестве E, тогда и $f \cdot g$ и f/g $(\inf\limits_E |g| > 0)$ интегрируем на E

6) E - измеримое; f и g - интегрируемое на E

$\forall x \in E$ $f(x) \leq g(x)$ $\qquad \int f(x)dE \leq \int g(x)dE$

7) $f(x)$ - интегрируемая и ограниченая на E, тогда $|f(x)|$ тоже интегрируем и ограниченая

при этом $\left|\int f(x)dE\right| \leq \int |f(x)|\,dE$

№145 8) Монотонность интеграла от неотрицательной функции по множествам

Если E и E^* - измеримые

причём $E^* \subset E$ $\quad f(x) \geq 0$ $\forall x \in E$

$f(x)$ - ограниченая и интегрируемая на E

Тогда $\int f(x)\,dE^* \leq \int f(x)dE$

№146 9)] $f \geq 0$ интегрируема на E, E - открытое множество

$x_0 \in E$, $f(x)$ непрерывна в $(\cdot)\, x_0$

$f(x_0) > 0 \Rightarrow \int f(x)dE > 0$

Следствие

Если $f \in C(G)$, G - открытое $(f \geq 0)$ тогда, если $f \not\equiv 0$, то $\int f(x)dG > 0$

№147 10) Полная аддитивность интеграла по открытому множеству

Если G - множество, G_m - набор открытых измеримых множеств

$G_m \subset G_{m+1}$ $\quad m \in \mathbb{N}$ $\quad \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = G$

Если функция f - интегрируема на G,

тогда $\lim\limits_{m\to\infty} \int_{G_m} f(x)dx = \int_G f(x)dx$

№148 11) **Th (о среднем)**

Если f и g - интегрируемы на $E \subset \mathbb{R}^n$

$m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in E$

g не меняет знак E, тогда

$\exists \mu$ (число, не мера): $m \leq \mu \leq M$

$$\int_E f(x)g(x)dx = \mu \int_E g(x)dx$$

Следствие

f - непрерывна на E, тогда $\exists \xi \in E$

$$\int_E f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_E g(x)dx$$