Algorithmique pour l'Optimisation et la Théorie des Jeux
Jeux Coopératifs

Anissa Kheireddine et Cassandre Leroy

Sorbonne Université

14 Novembre 2018

Sommaire

1. Introduction
2. Fonction caractéristique d'un jeu
3. Concepts de solution
4. Optimisation combinatoire

Introduction

La théorie des jeux est une branche de l'économie qui est en grande partie préoccupé par la théorie de la prise de décision, dans des environnements peuplés, s'intéressant à soi-même.
Elle utilise des modèles mathématiques, les jeux, pour capturer les attributs clés de scénarios dans lesquels des agents auto-intéressés interagissent.

Une des principales préoccupations de la théorie des jeux est d'essayer de comprendre ce qui compte comme un résultat rationnel d'un jeu.

Une distinction essentielle est faite dans la théorie des jeux entre les jeux non coopératifs et les jeux coopératifs.

Introduction

Pourquoi la coopération - au sens où les deux joueurs se taisent - n'existe-t-elle pas de manière rationnelle dans le dilemme du prisonnier ?

Prisonnier1 / Prisonnier2	Silence	Dénoncer
Silence	(2,2)	(10,0)
Dénoncer	(0,10)	(5,5)

TABLE – Dilemme du prisonnier

Un jeu est coopératif si les joueurs peuvent créer des accords contraignants sur la distribution des gains, ou le choix de stratégies, même si ces accords ne sont ni spécifiés ni implicites dans les règles du jeu.

Sommaire

1. Introduction
2. Fonction caractéristique d'un jeu
   - Formalisme des résultats
   - Sous classes de fonction caractéristique
3. Concepts de solution
   - Valeur de Shapley
   - Indice de Banzhaf
   - Concept de noyau et de noyau relâché
   - Ensemble de négociations, Coeur et Nucléon
   - Ensemble stable
4. Optimisation combinatoire
   - Sous graphes induits
   - Jeux de flux de réseau
   - Jeux de partage à cout minimum
   - Jeux localisation des services

Sommaire

1 Introduction

2 Fonction caractéristique d'un jeu
- Formalisme des résultats
- Sous classes de fonction caractéristique

3 Concepts de solution

4 Optimisation combinatoire

Fonction caractéristique d'un jeu

Definition

Une fonction caractéristique du jeu G est donnée par un couple (N,ν), où $N = \{1, ..., n\}$ est un ensemble fini d'agents non vides et $\nu : 2^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction caractéristique, qui associe à chaque coalition $\mathcal{C} \subseteq N$, un nombre réel $\nu(\mathcal{C})$.
Le nombre $\nu(\mathcal{C})$ est appelé valeur de la coalition $\mathcal{C}$.

- **Hypothèse implicite** : $\nu(\mathcal{C})$ peut être répartie entre les membres de $\mathcal{C}$. Ce qui implique un jeu à l'utilité transférable.
- **Hypothèses standards** :
  1. $\nu(\emptyset) = 0$
  2. $\nu(\mathcal{C}) \geq 0$ pour tout $\mathcal{C} \subseteq N$

$\Rightarrow$ Représentation en $\mathcal{O}(2^n)$.

Formalisme des résultats

Definition

Étant donné une fonction caractéristique d'un jeu $G = (N, \nu)$, une structure de coalition sur N est une collection de sous-ensembles non vides $\mathcal{C}S = \{C^1, ..., C^k\}$ tel que :

- $\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{C}^j = N$
- $\mathcal{C}^i \cap \mathcal{C}^j = \emptyset$ pour tout i, j $\in \{i, ..., k\}$ tel que $i \neq j$

Un vecteur $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de gain pour une structure de coalition $\mathcal{C}S = \{C^1, ..., C^k\}$ sur $N = \{1, ..., n\}$ si :

- $x_i \geq 0$ pour tout i $\in N$
- $\sum_{i \in \mathcal{C}^j} x_i \leqslant \nu(\mathcal{C}^j)$ pour tout j $\in \{1, ..., k\}$

Un résultat est noté $(\mathcal{C}S, x)$.

Exemple de fonction caractéristique d'un jeu

Exemple

Pour $G = (N, \nu)$ où $N = \{1, 2, 3\}$ et

$$\begin{aligned} \nu(\emptyset) = \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) &= 0 \\ \nu(\{1,2\}) = \nu(\{1,3\}) &= 500 \\ \nu(\{2,3\}) &= 750 \\ \nu(\{1,2,3\}) &= 1000 \end{aligned}$$

Et on a donc 7 coalitions non vide possible :

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$$

Et 5 structures de coalition :

$$\mathcal{CS}_{\{1,2,3\}} = \{\{\{1\},\{2\},\{3\}\}, \{\{1\},\{2,3\}\}, \{\{2\},\{1,3\}\}, \{\{3\},\{1,2\}\}, \{\{1,2,3\}\}\}$$

Un vecteur résultat serait de la forme :

$$x = (\mathcal{CS}_N, (x_1, x_2, x_3))$$

Par exemple :

$$x = (\{\{2\},\{1,3\}\}, (0, 250, 250))$$

Formalisme des résultats

- $x(\mathcal{C})$ est le gain total, $\sum_{i \in \mathcal{C}} x_i$, d'une coalition $\mathcal{C} \subseteq N$ sous x.
- $\mathcal{CS}_N$ est l'espace de toutes les structures de coalition sur N.
- $\nu(\mathcal{CS})$ est le bien-être social de la structure de coalition $\mathcal{CS}$:

$$\nu(\mathcal{CS}) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{CS}} \nu(\mathcal{C})$$

- Un vecteur de gain x est une imputation, pour une structure de coalition $\mathcal{CS} \in \mathcal{CS}_N$, s'il est efficace et satisfait la condition de rationalité individuelle, c'est-à-dire, $x_i \geq \nu(\{i\})$ pour tout $i \in N$.

Sous classes de fonction caractéristique

Definitions

Une fonction caractéristique du jeu $G = (N, \nu)$ est dite :

- *monotone* si elle satisfait $\nu(\mathcal{C}) \leqslant \nu(\mathcal{D})$ pour chaque paire de coalitions $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq N$ telles que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$.
- *superadditive* si elle satisfait $\nu(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \geq \nu(\mathcal{C}) + \nu(\mathcal{D})$ pour chaque paire de coalitions disjointes $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq N$.
- *supermodulaire* si elle satisfait $v(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) + v(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) \geq \nu(\mathcal{C} + \nu(\mathcal{D}))$ pour chaque paire de coalitions $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq N$.
- *convexe* si et seulement si pour chaque paire de coalitions T, S tel que $T \subset S$ et chaque joueur $i \in N/S$, alors on a $\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S) \geq \nu(T \cup \{i\}) - \nu(T)$.
- *simple* si elle est monotone et ne prend que des valeurs entre 0 et 1, $\nu(\mathcal{C}) \in \{0, 1\}$ pour tout $\mathcal{C} \subseteq N$.

Sous classes de fonction caractéristique

- La superadditivité implique la monotonie, mais pas l'inverse.
- Un jeu convexe est nécessairement superadditif mais pas inversement.
- Le résultat d'un jeu superadditif est de la forme $(\{N\}, x)$ où x correspond à $\sum_{i \in N} x_i = \nu(N)$.
- Pour un jeu non superadditif $G = (N, \nu)$, nous pouvons définir un nouveau jeu $G^* = (N, \nu^*)$ en définissant :

$$\nu^*(\mathcal{C}) = \max_{\mathcal{C}S \in \mathcal{C}S_{\mathcal{C}}} \nu(\mathcal{C}S)$$

pour $\mathcal{C} \subseteq N$ où $\mathcal{C}S_{\mathcal{C}}$ désigne l'espace de toute les coalitions de structure sur $\mathcal{C}$.
G^* est appelé couverture superadditive.

Exemple couverture superadditive

Exemple

Pour $G = (N, \nu)$ avec 3 joueurs, $N = \{1, 2, 3\}$ où

$$\begin{aligned}
\nu(\mathcal{C}) &= 0 \qquad\qquad si|\mathcal{C}| = 1\\
\nu(\{2,3\}) &= 10\\
\nu(\{1,3\}) &= 5\\
\nu(\{1,2\}) &= 4\\
\nu(N) &= 6
\end{aligned}$$

On a calcul la couverture superadditive :

$$\begin{aligned}
\nu^*(\mathcal{C}) &= \max_{\mathcal{CS} \in \mathcal{CS}_{\mathcal{C}}} (\mathcal{CS})\\
\nu^*(\{2,3\}) &= \max(\{\{2\},\{3\}\},\{\{2,3\}\}) = \max(0,10) = 10\\
\nu^*(\{1,3\}) &= \max(\{\{1\},\{3\}\},\{\{1,3\}\}) = \max(0,5) = 5\\
\nu^*(\{1,2\}) &= \max(\{\{1\},\{2\}\},\{\{1,2\}\}) = \max(0,4) = 4\\
\nu^*(\{1,2,3\}) &= \max(\{\{1\},\{2\},\{3\}\},\{\{1\},\{2,3\}\},\{\{2\},\{1,3\}\},\{\{3\},\{1,2\}\}\\
&\qquad ,\{\{1,2,3\}\})\\
&= \max(0,10,5,4,6) = 10
\end{aligned}$$

Sommaire

1 Introduction

2 Fonction caractéristique d'un jeu

3 Concepts de solution
- Valeur de Shapley
- Indice de Banzhaf
- Concept de noyau et de noyau relâché
- Ensemble de négociations, Coeur et Nucléon
- Ensemble stable

4 Optimisation combinatoire

Concepts de solution

On peut évaluer les résultats en fonction de deux critères :

- L'équité.
- La stabilité.

=> Donne lieu à deux familles de concepts de solution.

Valeur de Shapley

Deux notations additionnelles pour définir la valeur de Shapley dans un jeu $G = (N, \nu)$:

- $\prod_N$ désigne l'ensemble de toutes les permutations de π de N.
- Pour une permutation $\pi \in \prod_N$, on note $S_\pi(i)$ l'ensemble de tous les prédécesseurs de i dans π, soit $S_\pi(i) = \{j \in N | \pi(j) < \pi(i)\}$.
- La contribution marginale d'un agent i, par rapport à une permutation π, dans le jeu G est notée $\Delta_\pi^G(i)$ et est donnée par :

$$\Delta_\pi^G(i) = \nu(S_\pi(i) \cup \{i\}) - \nu(S_\pi(i))$$

Definition

Soit $G = (N, \nu)$ avec $|N| = n$, la valeur de Shapley d'un joueur $i \in N$ est notée $\varphi_i(G)$ et est donnée par $\varphi_i(G) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \prod_N} \Delta_\pi^G(i)$

Exemple de calcul de valeur de Shapley

Exemple

Pour $G = (N, \nu)$ où $N = \{1, 2, 3\}$ et

$$
\begin{aligned}
\nu(\emptyset) = \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) &= 0 \\
\nu(\{1,2\}) = \nu(\{1,3\}) &= 500 \\
\nu(\{2,3\}) &= 750 \\
\nu(\{1,2,3\}) &= 1000
\end{aligned}
$$

On calcul la valeur de Shapley du Joueur 1. Il y a 6 permutations des joueurs : $\pi_1 = 123$, $\pi_2 = 132$, $\pi_3 = 213$, $\pi_4 = 312$, $\pi_5 = 231$, $\pi_6 = 321$.

$$
\begin{cases}
\Delta^G_{\pi_1}(1) = \nu(\{1\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 & = 0 \\
\Delta^G_{\pi_2}(1) = \nu(\{1\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 & = 0 \\
\Delta^G_{\pi_3}(1) = \nu(\{1,2\}) - \nu(\{2\}) = 500 - 0 & = 500 \\
\Delta^G_{\pi_4}(1) = \nu(\{1,3\}) - \nu(\{3\}) = 500 - 0 & = 500 \\
\Delta^G_{\pi_5}(1) = \nu(N) - \nu(\{2,3\}) = 1000 - 750 & = 250 \\
\Delta^G_{\pi_6}(1) = \nu(N) - \nu(\{2,3\}) = 1000 - 750 & = 250
\end{cases}
\tag{1}
$$

$\varphi_1(G) = \frac{500+500+250+250}{6} = 250$

Valeur de Shapley

Motivé par l'équité.

Propositions

Considérons la fonction caractéristique d'un jeu $G = (N, \nu)$:

- *Efficacité* : On a $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(G) = \nu(N)$.
- *Joueur factice* : Si un joueur $i \in N$ est un joueur factice dans G, alors $\varphi_i(G) = 0$.
- *Symétrique* : Si i et j sont symétriques dans G, alors :
$$\varphi_i(G) = \varphi_j(G)$$
- *Additivité* : Ici, on a deux fonctions caractéristiques $G^1 = (N, \nu^1)$ et $G^2 = (N, \nu^2)$ sur le même ensemble de joueurs N. Pour tout joueur $i \in N$, nous avons :
$$\varphi_i(G^1 + G^2) = \varphi_i(G^1) + \varphi_i(G^2)$$

Preuve sur l'efficacité

Preuve

Prenons $a_i = \pi^{-1}$, $\forall i = 1, ..., n$, a_i est le joueur en position i dans π.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \Delta_{\pi}^{G}(i) &= \nu(\{a_1\}) - \nu(\emptyset) + \nu(\{a_1, a_2\}) - \nu(\{a_1\}) + ...+ \\ &\quad \nu(\{a_1, ..., a_{n-1}\}) - \nu(\{a_1, ..., a_{n-2}\}) + \nu(\{a_1, ..., a_n\}) \\ &\quad \text{-}\ \nu(\{a_1, ..., a_{n-1}\}) \\ &= \text{-}\nu(\emptyset) + \nu(\{a_1, ..., a_n\}) \\ &= \text{-}0 + \nu(N) \\ &= \nu(N)\end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(G) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\pi_N} \Delta_{\pi}^{G}(i)\right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\pi\in\pi_N} \Delta_{\pi}^{G}(i)\right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\pi_N}\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta_{\pi}^{G}(i)\right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\pi_N} \nu(N) \\ &= \frac{n! \times \nu(N)}{n!} \\ &= \nu(N)\end{aligned}$$

Valeur de Shapley

La valeur de Shapley est le seul vecteur de paiement qui possède ces quatre propriétés simultanément.

=> Ils peuvent simplifier le calcul de la valeur de Shapley.

Indice de Banzhaf

Motivé par l'équité.

Definition

Soit une fonction caractéristique $G = (N, \nu)$ avec $|N| = n$, l'indice de Banzhaf d'un joueur $i \in N$ est noté $\beta_i(G)$ et est donné par :

$$\beta_i(G) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\mathcal{C} \subseteq N/i} [\nu(\mathcal{C} \cup \{i\} - \nu(\mathcal{C}))]$$

Une version possédant l'axiome d'efficacité a été proposé de l'indice de Banzhaf, l'indice normalisé de Banzhaf $\eta_i(G)$ est défini comme :

$$\eta_i(G) = \frac{\beta_i(G)}{\sum_{i \in N} \beta_i(G)}$$

Exemple d'indice de Banzhaf

Exemple

Pour $G = (N, \nu)$ où $N = \{1, 2, 3\}$ et

$$\nu(\emptyset) = \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = 0 \qquad \nu(\{1,2\}) = \nu(\{1,3\}) = 500$$
$$\nu(\{2,3\}) = 750 \qquad \nu(\{1,2,3\}) = 1000$$

Avec l'indice non normalisé :

$$\beta_1(G) = \frac{1}{2^2}((1000 - 750) + (500 - 0) + (500 - 0) + 0) = 312,5$$
$$\beta_2(G) = \frac{1}{2^2}((500 - 0) + (750 - 0) + (1000 - 500) + 0) = 437,5$$
$$\beta_3(G) = 312,5$$

Principal problème : $\sum_{i \in N} \beta_i(\nu) \neq 1$
Avec l'indice normalisé :

$$\eta_1(G) = \eta_3(G) = \frac{312,5}{(312,5 + 437,5 + 312,5)} = \frac{5}{17}$$
$$\eta_2(G) = \frac{7}{17}$$

Valeur de Shapley et indice de Banzhaf dans des jeux simples

Dans les jeux simples, la valeur de Shapley et l'indice de Banzhaf ont une interprétation attrayante : ils mesurent la pouvoir d'un joueur.

La valeur de Shapley d'un joueur i dans un jeu simple $G = (N, \nu)$ avec $|N| = n$ peut être réécrit comme suit :

$$\varphi_i(G) = \frac{1}{n!} |\{\pi \in \prod_N \nu(S_\pi(i)) = 0, \nu(S_\pi(i) \cup \{i\}) = 1\}|$$

Definition

Dans un jeu simple, $G = (N, \nu))$, un joueur i est dit *pivot* pour une coalition $\mathcal{C} \subseteq N$ si $\nu(\mathcal{C}) = 1, \nu(\mathcal{C}/\{i\}) = 0$.

Exemple pour un jeu simple

Exemple

Une proposition nécessite 4 voix pour être voté. Quatre personnes : A,B,C et D vont voter :

A dispose de 3 voix
B dispose de 2 voix
C dispose de 1 voix
D dispose de 1 voix

A**B**CD A**B**DC A**C**BD A**C**DB A**D**BC A**D**CB
B**A**CD B**A**DC BC**A**D BC**D**A BD**A**C BD**C**A
C**A**BD C**A**DB CB**A**D CB**D**A CD**A**B CD**B**A
D**A**BC D**A**CB DB**A**C DB**C**A DC**A**B DC**B**A

Le votant pivot, celui qui fait atteindre 4 à la coalition (ou plus) est en gras.

A a un indice de puissance de $\frac{1}{2}$, en effet :

$$\varphi_A(G) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Pour B,C et D, leur indice est de $\frac{1}{6}$.

Noyau

Motivé par la stabilité.

Definition

Le noyau $\mathcal{C}(G)$ d'une fonction caractéristique $G = (N, \nu)$ est l'ensemble de tous les résultats $(\mathcal{C}S, x)$ tels que $x(\mathcal{C}) \geq \nu(\mathcal{C})$ pour chaque $\mathcal{C} \subseteq N$.

Proposition

Si un résultat $(\mathcal{C}S, x)$ est dans le noyau $\mathcal{C}(G)$, d'une fonctions caractéristique $\mathcal{C}(G)$, alors $\nu(\mathcal{C}S) \geq \nu(\mathcal{C}S')$ pour chaque structure de coalition $\mathcal{C}S \in \mathcal{C}S_N$.

Malheureusement, certains jeux ont un noyau vide.

Exemple d'un noyau vide

Exemple

Pour $G = (N, \nu)$ où $N = \{1, 2, 3\}$ et

$$\begin{aligned} \nu(\emptyset) = \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) &= 0 \\ \nu(\{1,2\}) &= 7 \\ \nu(\{1,3\}) &= 6 \\ \nu(\{2,3\}) &= 5 \\ \nu(N) &= 8 \end{aligned}$$

Pour qu'une imputation $x = (x_1, x_2, x_3)$, soit dans le noyau, on doit avoir :

Pour la **stabilité** :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 7 \\ x_1 + x_3 &\geq 6 \\ x_2 + x_3 &\geq 5 \end{aligned}$$

Pour l'**efficacité** :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

=> C'est clairement impossible.

Noyau des jeux convexe et superadditif

Theoreme

Si $G = (N, \nu)$ est un jeu convexe, alors G a un noyau non vide.

Pour les jeux superadditif :

Proposition

Une fonction caractéristique d'un jeu $G = (N, \nu)$ a un noyau non vide si et seulement si sa couverture superadditive $G^* = (N, \nu^*)$ a un noyau non vide.

Attention ne peut être étendu à d'autres concepts de solution, comme la valeur de Shapley.

Noyau des jeux simple

On peut caractériser les résultats du noyau et fournir un critère simple pour vérifier est non vide. Avant cela, nous avons besoin d'une défintion additive :

Definition

Un joueur i dans un jeu simple $G = (N, \nu)$ est un joueur veto si $\nu(\mathcal{C}) = 0$ pour tout $\mathcal{C} \subseteq N/\{i\}$; comme les jeux simples sont monotones, cela revient à exiger que $\nu(N/\{i\}) = 0$.

Theoreme

Un jeu simple $G = (N, \nu)$ a un noyau non vide si et seulement si il a un joueur avec veto.

Preuve du théorème

Preuve

$\Leftarrow$ On suppose que G a k joueurs véto, $k \geq 1$. On choisit un vecteur gain x tel que $x_i = \frac{1}{k}$, si i est un joueur véto, et $x_i = 0$ sinon. Alors si x est dans le noyau :

- $\forall$ coalition $\mathcal{C}$ gagnante : $\sum_{i \in \mathcal{C}} x_i = k \times \frac{1}{k} = 1 = \nu(\mathcal{C})$.
- $\forall$ coalition $\mathcal{C}$ perdante : $\sum_{i \in \mathcal{C}} x_i \geq 0 = \nu(\mathcal{C})$.

$\Rightarrow$ Supposons que G n'ait pas de joueur ayant le droit de véto. Supposons que G ait un noyau non vide et que x soit un résultat du noyau G.

Puisque $x(N) = 1$, on a $x_i > 0$ pour un certain $i \in N$ et donc $x(N/\{i\}) = 1 - x_i < 1$.

Cependant, comme i n'est pas un joueur véto, alors $\nu(N/\{i\}) = 1 > x(N/\{i\})$.

$\nu(\mathcal{C}) > x(\mathcal{C}) =>$ contradiction avec x dans le noyau.

Least core

Definition

On dit qu'un résultat x est dans le ε-noyau d'un jeu superadditif G pour certain $\varepsilon \in \mathbb{R}$ si $x(\mathcal{C}) \geq \nu(\mathcal{C}) - \varepsilon$ pour chaque $\mathcal{C} \subseteq N$.

Ce qui nous intéresse est de trouver la plus petite valeur de ε possible, où le noyau est non vide, appelé least core de G.

Definition

Soit G un jeu superadditif, on a :

$$\varepsilon^*(G) = inf\{\varepsilon | \varepsilon - noyau\ G \text{ n'est pas vide}\}$$

Le least core de G est $\varepsilon^*(G)$-noyau. La quantité $\varepsilon^*(G)$ est appelée la valeur du least core de G.

Coût de la stabilité

Une approche alternative est d'assouplir la contrainte de faisabilité.

Definition

Soit un jeu superadditif $G = (N, \nu)$ et un $\Delta \geq 0$, soit $G^{\Delta} = (N, \nu^{\Delta})$ une fonction caractéristique sur l'ensemble des joueurs N donné par $\nu^{\Delta}(N) = \nu(N) + \Delta$, $\nu^{\Delta}(\mathcal{C}) = \nu(\mathcal{C})$ pour tout $\mathcal{C} \subset N$.
Le coût de la stabilité ($\mathcal{C}oS$) de G est la plus petite valeur (non négative) Δ tel que G a un noyau non vide ; nous le noterons par $\mathcal{C}oS(G)$.

Ce coût peut être borné par :

$$0 \leqslant \mathcal{C}oS(G) \leqslant n \max_{\mathcal{C} \subseteq N} \nu(\mathcal{C})$$

Exemple coût de la stabilité

Exemple

Pour $G = (N, \nu)$ où $N = \{1, 2, 3\}$ et

$$\begin{aligned} \nu(\emptyset) = \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) &= 0 \\ \nu(\{1,2\}) = \nu(\{1,3\}) = \nu(\{2,3\}) &= 1000 \\ \nu(N) &= 1250 \end{aligned}$$

Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ une imputation :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1000 \\ x_1 + x_3 &\geq 1000 \\ x_2 + x_3 &\geq 1000 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1250 \end{aligned}$$

$=>$ C'est impossible donc le noyau est vide.

Mais si un agent extérieur offre 250 à la grande coalition pour qu'ils coopèrent, alors $x_1 = x_2 = x_3 = 500$ et le coût de la stabilité est de 250.

Noyau non vide par Programmation linéaire

x_i : gain du joueur i $\forall i \in N$

Programme linéaire - Noyau

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} x_i &= \nu(N) && \textbf{(efficacité)} \\ \sum_{i \in C} x_i &\geq \nu(C) && \textbf{(stabilité)} \\ x_i &\geq 0 \quad \forall i \in N \end{aligned}$$

$\rightarrow 2^n + n + 1$ contraintes.

Idée : utiliser un bon algorithme de séparation en poly(n)

$\rightarrow$ Solution en **poly(n)**

Modélisation du Least core et Coût de la stabilité

Least core - PL

$$
\begin{array}{llll}
\text{Minimize } \epsilon & & & \\
s.t & \sum_{i \in N} x_i & = & \nu(N) & \\
 & \sum_{i \in C} x_i & \geq & \nu(C) - \epsilon & \forall\, C \in N \\
 & x_i & \geq & 0 & \forall i \in N
\end{array}
$$

Coût de la stabilité - PL

$$
\begin{array}{llll}
\text{Minimize } \Delta & & & \\
s.t & \sum_{i \in N} x_i & = & \nu(N) + \Delta & \\
 & \sum_{i \in C} x_i & \geq & \nu(C) & \forall\, C \in N \\
 & x_i & \geq & 0 & \forall i \in N
\end{array}
$$

Caractérisation des jeux à noyau non-vide

Ensemble balancé

Soit un jeu $G = (N, \nu)$, une fonction de poids $\mathrm{w}(C) \in [0, 1]$ pour $\forall C \subseteq N$. w est un ensemble balancé de poids si $\forall i \in N$:

$$\sum_{C \subseteq N} \mathrm{w}(C) = 1$$

Jeu balancé

Un jeu est dit balancé ssi pour tout ensemble balancé de poids w :

$$\sum_{C \subseteq N, C \neq \emptyset} \mathrm{w}(C)\nu(C) \leq \nu(N).$$

Théorème de Bondareva-Shapley

Un jeu coopérative $G = (N, \nu)$ a un noyau non-vide $\iff$ le jeu est balancé

Bondareva-Shapley - Exemple

Vote majoritaire

$N = \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ $\nu(C) = \begin{cases} 1 \text{ si } |C| \geq 2 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$

$mat_{i,j}$	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
1	1	0	0	1	1	0	1
2	0	1	0	1	0	1	1
3	0	0	1	0	1	1	1
w	$w_{\{1\}}$	$w_{\{2\}}$	$w_{\{3\}}$	$w_{\{1,2\}}$	$w_{\{1,3\}}$	$w_{\{2,3\}}$	$w_{\{1,2,3\}}$

- w doit vérifier : $\sum_{C \subseteq N, j \in C} mat_{i,j} \; w(C) = 1 \quad \forall i \in N.$

Solution : $w = (0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0).$

mais : $w_{1,2} + w_{1,3} + w_{2,3} = \frac{3}{2} > \nu(N).$

$\rightarrow$ Le jeu n'est pas balancé.

Ensemble de négociations, Coeur et Nucléon

Motivé par la stabilité.

Approche : On dira qu'une imputation $\mathbf{x}$ est stable si pour n'importe quelle entité (coalition ou agent) fournissant une objection contre $\mathbf{x}$, il existe forcément une autre entité qui la contre-dit.

Trois concepts qui diffèrent sur la nature de l'objection et la contre-objection.

Quelques définitions

- $(\mathbf{x}, C)$: coalition $C \subseteq N$ et l'imputation $\mathbf{x}$ de ce jeu.
- Objection justifiée : n'admet pas de contre-objection.

Ensemble de négociations - Bargaining set

Entité est un agent.

Exemple - La stabilité dans une société

Agent i : " Je gagne moins que j dans cette coalition ($\mathbf{x}$,C) ! Je propose de former une coalition ($\mathbf{y}$,D) qui exclu j où tout le monde est plus satisfait".
Agent j : "Je peux former une coalition ($\mathbf{z}$,E) qui t'exclue où tout le monde gagnent au moins mieux que ce que tu proposes".

Définition

L'ensemble de négociation $B(G)$ d'un jeu super-additif G est l'ensemble des imputations qui n'admettent pas d'objections *justifiées*.

- $B(G)$ contient le least-core $\rightarrow$ $B(G)$ n'est jamais vide (*Einy*).

Coeur - Kernel

Entité est un agent.

$S_{i,j}$: quantité maximale que le joueur i peut gagner sans la coopération de j :

$$S_{i,j}(\mathbf{x}) = max\{\nu(C) - \mathbf{x}(C) \mid C \subseteq N,\ i \in C,\ j \notin C\}.$$

- Mesure le pouvoir de négociation que i a sur j.
  $\rightarrow$ i cherche a prendre une fraction du gain de j quand $x_j > \nu(\{j\})$.
- Le joueur j peut éviter les menaces de i en restant tout seul $x_j = \nu(\{j\})$ et obtenir le même gain.

Objection et contre-objection

- Une coalition C est une objection de i contre j sous $\mathbf{x}$, si C inclus i mais pas j et que $x_j > \nu(\{j\})$.
- Une coalition D est une contre-objection de j à l'objection C, si D inclus j mais pas i et que $S_{i,j}(\mathbf{x}) > S_{j,i}(\mathbf{x})$.

Coeur - Définition

Définition

Le *Coeur* $K(G)$ d'un jeu super-additif G contient l'ensemble des imputations $\mathbf{x}$ où aucun joueur n'a un pouvoir de négociation sur un autre.
Formellement, pour toute paires de joueurs (i, j), soit :

- $S_{i,j}(\mathbf{x}) = S_{j,i}(\mathbf{x})$ ou
- $S_{i,j}(\mathbf{x}) > S_{j,i}(\mathbf{x})$ et $x_j = \nu(\{j\})$ ou
- $S_{i,j}(\mathbf{x}) < S_{j,i}(\mathbf{x})$ et $x_i = \nu(\{i\})$.

Coeur - Exemple

Vote majoritaire à 3

N $= \{1, 2, 3\}$ $\qquad \nu(C) = \begin{cases} 1 \text{ si } C = N \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Supposons que $x_1 \geq x_2 \geq x_3$, avec au moins une inégalité qui est stricte, alors :

$S_{3,1}(x) = 1 - x_2 - x_3 > 1 - x_2 - x_1 = S_{1,3}(x)$

On sait que $x_1 > 0$ mais que $x_1 \neq \nu(\{1\})$

$\rightarrow$ x n'est pas dans le Coeur.

Nucléon - Nucleolus

Entité est une coalition.

Notion de déficit

Le déficit (excès) mesure le taux d'insatisfaction d'une coalition $C \subseteq N$ engendré par l'imputation $\mathbf{x}$.

$$d(\mathbf{x}, C) = \nu(C) - \mathbf{x}_C$$

$d(\mathbf{x}) = (d(\mathbf{x}, C_1), \ldots, d(\mathbf{x}, C_{2^n}))$ ordonnés du plus grand déficit au plus faible.

Concept d'objection et contre objection

- **Coalition** C : "Notre déficit est trop grand sous $\mathbf{x}$. On propose une alternative $\mathbf{y}$ qui est plus faible."
- **Coalition** D : "Notre déficit sous $\mathbf{y}$ a augmenté et est supérieur au vôtre."

Comment sélectionner de bonnes imputations stable $\mathbf{x}$ suivant leurs déficit d($\mathbf{x}$) associé ?

Nucléon - Relation lex et Définition

Relation d'ordre lexicographique $\leq_{lex}$

$$d(\mathbf{x}) \leq_{lex} d(\mathbf{y}) = \begin{cases} d(\mathbf{x}) = d(\mathbf{y}) & \text{ou} \\ d(\mathbf{x}) <_{lex} d(\mathbf{y}) \text{ si } i \in min\{1..2^n\} d(x_i) < d(y_i) \end{cases}$$

Définition

Le nucléon $N(G)$ d'un jeu super-additif G est l'ensemble des solutions $\mathbf{x}$ tel que le vecteur déficit $d(\mathbf{x})$ est minimal au sens lexicographique.

- Le nucléon contient une unique imputation.

Nucléon - Exemple

Exemple

N $= \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{x} = (3, 3, 2)$ et $\mathbf{y} = (2, 3, 3)$

	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
ν	0	0	0	5	6	6	8
d(**x**)	-3	-3	-2	-1	1	1	0
d(**y**)	-2	-3	-3	0	1	0	0

$d(\mathbf{x}) = (1, 1, 0, -1, -2, -3, -3)$
$d(\mathbf{y}) = (1, 0, 0, \ \ 0, -2, -3, -3)$

Ensemble stable - von Neumann and Mergenstern solution

Basé sur la notion de *dominance*.

$\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ deux imputations, $\mathbf{y}$ *domine* $\mathbf{z}$ s'il existe une coalition $C \neq \{\emptyset\}$ si :

$$\mathbf{y}_C \leq \nu(C) \text{ et } \mathbf{y}_i > \mathbf{z}_i \text{ pour tout joueur } i \in C.$$

J : ensemble d'imputation $\subseteq I(N)$.
$Dom(J)$: ensemble des imputations dominés par au moins un élément de J.

Définition

Un ensemble d'imputation J est *stable* pour un jeu G super-additif si $\{J, Dom(J)\}$ est une partition dans $I(N)$ respectant les contraintes de :

- **Stabilité interne** : aucune imputation dans J n'est dominée par une autre dans J.
- **Stabilité externe** : Tout les éléments en dehors de J sont dominés par au moins un élément dans J.

Sommaire

1 Introduction

2 Fonction caractéristique d'un jeu

3 Concepts de solution

4 Optimisation combinatoire
- Sous graphes induits
- Jeux de flux de réseau
- Jeux de partage à cout minimum
- Jeux localisation des services

Optimisation combinatoire

Les représentations naïves qui listent toutes les coalitions sont peu efficaces.

Nécessité d'un formalisme de représentation plus précis.

On va se concentrer sur des sous-classes de jeux qui sont définies par des "petites" structures combinatoires (des graphe).

Ces structures peuvent ne pas s'appliquer à tout les jeux.

Sous graphes induits - Deng & Papadimitriou

$\mathbf{G} = (N, E)$ un graphe non-orienté valué.
La valeur d'une coalition $C \subseteq N$ est la valeur du sous-graphe qu'elle induit

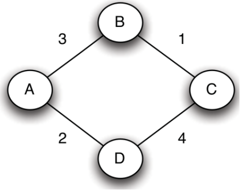


FIGURE – Sous graphe induit N={A,B,C,D}

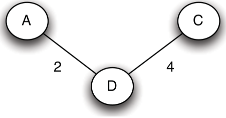


FIGURE – Coalition S={A,D,C}

Remarque

La valeur d'une coalition est complètement déterminée par les valeurs de ses sous-coalitions de tailles **1** et **2**.
$\rightarrow$ généralement pas le cas.

Sous graphes induits - Exemple

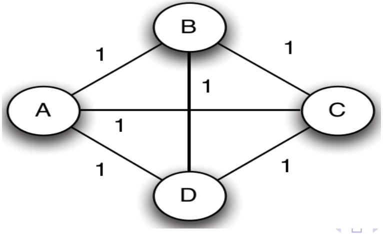
Modélisation d'un réseau social

$\mathbf{G} = (N, \nu)$, $N = \{1, 2, 3\}$

$$\nu(C) = \begin{cases} 0 \text{ si } |C| \leq 1 \\ 1 \text{ si } |C| = 2 \\ 6 \text{ si } |C| = 3 \end{cases}$$

$\rightarrow$ pas de sous-graphe induit.

$\nu(S) = 3 \neq 6.$



Jeux de flux de réseau

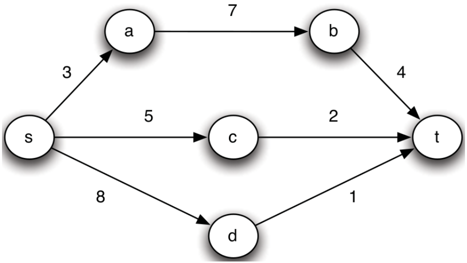
Notation

- Un sommet *source* s et un *puit* t.
- Agent : représenté par un arc.
- c_e : capacité du flux de l'arc e, positive.
- valeur d'une coalition C : quantité maximale qui peut circuler de s à t en passant par les arcs $\in C$:

$$min\{c_e \mid e \in C\}.$$

$\rightarrow$ Modélisation d'un réseau informatique, réseau routier...

Jeu de flux de réseau - Exemple



Réseau routier

$N = \{sa, ab, bt, sc, ct, sd, dt\}$

$C = \{sa, ab, bt\}$, $D = \{sc, ct\}$ et $E = \{sd, dt\}$.

$\nu(C) = 3, \quad \nu(D) = 2, \quad \nu(E) = 1.$

$\rightarrow \nu(N) = 3 + 2 + 1 = 6.$

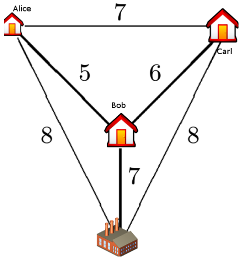
Arbre couvrant de coût minimum

Modélise les classes de jeux de partage de coût → valuation des coalitions est négatives.

Les agents doivent être reliés à un certain fournisseur de services et former des coalitions pour partager le coût de ce service.

Exemple - Covoiturage

Alice, Carl et Bob travaillent ensemble et viennent tous par voiture. Ils souhaiteraient minimiser leurs dépenses en carburant.



Jeux de localisation des services (Facility location games)

Problème : minimiser la distance entre les clients et services et la création des services.
Le coût d'un nouveau service soit réparti entre les clients qui l'utilisent $\rightarrow$ jeu de partage de coût.

Exemple

- consommateurs de services (maison à alimenter).
- Services qu'on peut construire f_L (stations d'énergies).
- Coût du service entre un consommateur (i) et un fournisseur (L) $c_{i,L}$ (dépend de la distance i et L).
- Le coût du service d'une coalition C via un ensemble de fournisseurs F comporte les coûts d'ouverture des services et les coûts de connexion : $c(C, F) = \sum_{j \in F} f_j + \sum_{i \in C} distmin(i, F)$

  $\rightarrow \nu(C)$: coût minimum du service de C, sur tous les ensembles de fournisseurs possibles.

Conclusion

- Présentation d'une fonction caractéristique
- Sous-classes de jeux (simple, super-additive, convexe...).
- Les concept de solutions :
  - Equité : Valeur de Shapley, Banzhaf.
  - Stabilité : Noyau, ensemble de négociations, nucléon, coeur...
- Structure combinatoires de jeux :
  - Sous graphes induit - Jeux de réseaux et d'affectation - Jeux de localisation de services...