Lycée Lucie Aubrac - 1^{re}
2021/2022

Chapitre 2
Polynômes du second degré

Table des matières

1 Factorisation des polynômes du second degré

Dans tout ce chapitre, a, b et c désignent des réels avec $a \neq 0$.

Définition 1

On appelle **discriminant** du polynôme $ax^2 + bx + c$ le nombre réel Δ défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Propriété 1 – (admise)

On considère le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ (avec a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$).

- Si $\Delta > 0$, en posant $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, on a :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Si $\Delta = 0$, en posant $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, on a :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable comme produit de deux polynômes de degré 1.

2 Racines d'un polynôme du second degré

Définition 2

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées les **racines** du polyôme $ax^2 + bx + c$.

Propriété 2

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$) où l'inconnue est $x \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet aucune solution réelle.

Démonstration.
Soient a, b, $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la démonstration de la propriété 2 :

- Si $\Delta > 0$,
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$
avec $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
En utilisant la règle du produit nul :
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \\ &\iff x - x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - x_2 = 0. \\ &\iff x = x_1 \quad \text{ou} \quad x = x_2. \\ &\iff x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$,
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$
avec $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
En utilisant la règle du produit nul :
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a(x - x_0)^2 = 0 \\ &\iff x - x_0 = 0 \\ &\iff x = \frac{-b}{2a} \end{aligned}$$

- On admettra que si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution.

□

Exemple.
Résoudre l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

Solution :
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$. Ainsi, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Propriété 3 – Relations coefficients/racines

Si le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 (avec éventuellement $x_1 = x_2$), alors

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 + x_2 & = & -\dfrac{b}{a} \\ \text{et} & & \\ x_1 x_2 & = & \dfrac{c}{a} \end{array}\right.$$

Démonstration.
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Comme x_1 et x_2 sont les racines de f, on sait que f se factorise de la façon suivante : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
En développant, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= a\big(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2\big) \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a x_1 x_2. \end{aligned}$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on obtient

$$\left\{\begin{array}{ccc} -a\big(x_1 + x_2\big) & = & b \\ \text{et} & & \\ a x_1 x_2 & = & c \end{array}\right.$$

Par conséquent,

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 + x_2 & = & -\dfrac{b}{a} \\ \text{et} & & \\ x_1 x_2 & = & \dfrac{c}{a} \end{array}\right.$$

□

Exemple.
Résoudre l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$ en commençant par remarquer que 1 est une racine « évidente ».

Solution :
1 est une racine évidente car $1^2 - 6 \times 1 + 5 = 0$.
Comme on sait que le produit des racines $x_1 \times x_2 = 5$, on en déduit que $x_2 = \dfrac{5}{x_1} = 5$ est la deuxième racine.

3 Signe d'un polynôme du second degré

Propriété 4

Le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a et de Δ :

<table>
<tr><th></th><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Démonstration.
La démonstration découle directement de la factorisation des polynômes (propriété 2).
Par exemple, dans le cas où $\Delta > 0$ et $a > 0$:
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
On peut donc établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$+$		$+$		$+$	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les autres cas se traitent de la même manière. □

Exemple.
Résoudre l'inéquation $2x^2 - 5x + 1 < 0$.

Solution :
On cherche les racines de $2x^2 - 5x + 1$:
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 17 > 0$.
Ainsi, les deux racines sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$$

Par ailleurs, comme $a = 2 > 0$, le tableau de signe du polynôme est le suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left] \dfrac{5-\sqrt{17}}{4} \,;\, \dfrac{5+\sqrt{17}}{4} \right[$.

4 Variations d'un polynôme du second degré

Propriété 5 – (admise)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$). On pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

- Si $a > 0$, le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

- Si $a < 0$, le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

Exemple.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Déterminer les variations de f.

Solution :
On a $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-3}{2 \times 1} = \dfrac{3}{2}$.
De plus, $f(\alpha) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \left(\dfrac{3}{2}\right) + 4 = \dfrac{7}{4}$.
Ainsi, comme $a = 1 > 0$, le tableau de variations de f est :

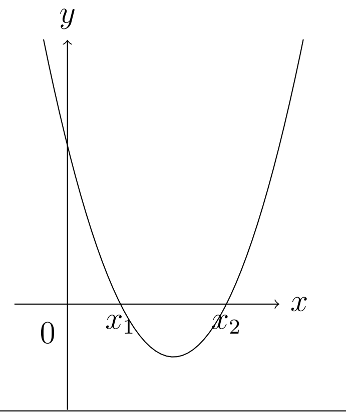
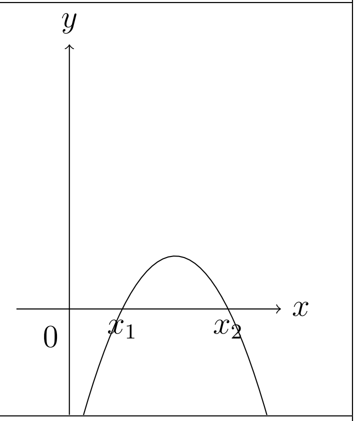
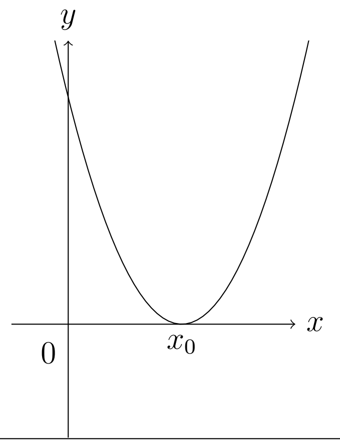
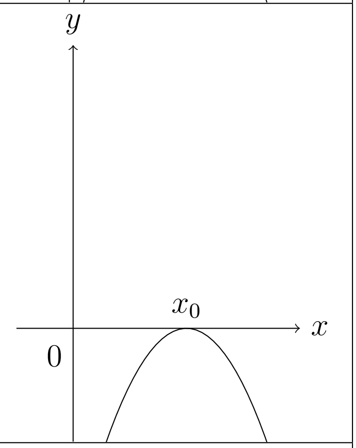
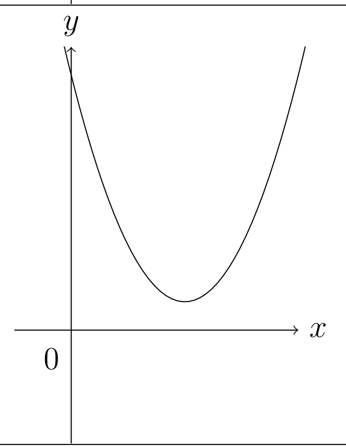
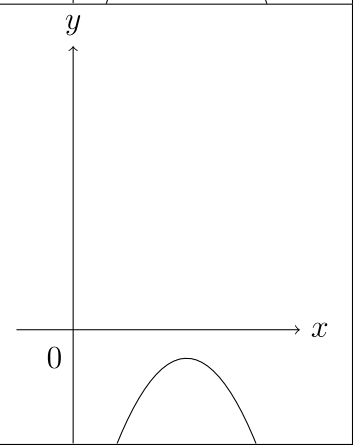
x	$-\infty$		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\dfrac{7}{4}$	$\nearrow$	

Définition 3

Le point de coordonnées $\left(\alpha\,;f(\alpha)\right)$ est appelé le **sommet** de la parabole représentative de la fonction f.

Exemple.
Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$, le point $M\left(\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{7}{4}\right)$ est le sommet de la parabole.

Remarque.
On peut résumer la situation des racines et du signe d'un polynôme du second degré par le tableau suivant :

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ (deux racines)		
$\Delta = 0$ (une racine)		
$\Delta < 0$ (pas de racine)		

5 Complément sur les équations de degré supérieur

5.1 Équations de degré 3

La résolution générale des équations de degré 3 n'est pas au programme de première. En revanche, il est possible de résoudre une équation de degré 3 lorsqu'on connaît déjà une des solutions.

Méthode – Résoudre une équation de degré 3 de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$

- Déterminer une racine « évidente » x_1.
- Chercher des réels u, v, w tels que

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(ux^2 + vx + w)$$

- Pour trouver u, v, w, développer le produit et on identifie les coefficients termes à termes des deux polynômes.
- Finir la résolution en résolvant $ux^2 + vx + w = 0$.

Exemple.
Résoudre l'équation (E) : $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$.

Solution :
1 est une racine évidente.
On va donc factoriser l'équation par $(x - 1)$, c'est-à-dire qu'on cherche u, v, $w \in \mathbb{R}$ tels que

$$x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(ux^2 + vx + w).$$

Or,

$$\begin{aligned}(x-1)(ux^2+vx+w) &= ux^3 + vx^2 + wx - ux^2 - vx - w \\ &= ux^3 + (v-u)x^2 + (w-v)x - w\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} u &= 1 \\ v - u &= 4 \\ w - v &= 0 \\ -w &= -5 \end{cases}$$

En résolvant le système, on trouve : $u = 1$, $v = 5$ et $w = 5$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x^2 + 5x + 5)$. On a donc

$$\begin{aligned}x^3 + x^2 - 2 = 0 &\Longleftrightarrow (x-1)(x^2+5x+5) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 5x + 5 = 0\end{aligned}$$

On calcule le discriminant de $x^2 + 5x + 5$: $\Delta = 5$.
Les deux solutions de $x^2 + 5x + 5 = 0$ sont donc $x_1 = \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$.
Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathcal{S} = \left\{1\,;\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\,;\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

5.2 Équations de degré 4

La résolution générale des équations de degré 4 n'est pas au programme de première. En revanche, il est possible de résoudre une équation dans un cas particulier : celui d'une équation bicarrée.

Méthode – Résoudre une équation de degré 4 de la forme $x^4 + bx^2 + c$

- Poser $y = x^2$
- Résoudre l'équation $ay^2 + by + c = 0$
- En déduire les racines de l'équation bicarrée.

Exemple.
Résoudre l'équation (E) : $x^4 - x^2 - 2 = 0$.

Solution :
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = x^2$.
On a l'équivalence :

$$x^4 - x^2 - 1 = 0 \iff y^2 - y - 1 = 0$$

On résout l'équation $y^2 - y - 1 = 0$:
$\Delta = 5$. L'équation admet deux solutions : $y_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Ainsi,

$$x^4 - x^2 - 1 = 0 \iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x^2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{(impossible)} \end{cases}$$

$$\iff \quad x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\iff \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \,; -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \right\}$.

Savoir-faire du chapitre

- Résoudre une équation du second degré en diversifiant les stratégies : discriminant, identités remarquables, racines évidentes, formule de la somme et du produit des racines.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré.
- Déterminer le signe d'une fonction polynôme du second degré.
- Déterminer les variations d'une fonction polynôme du second degré.
- Résoudre une équation de degré 3 lorsque l'on connaît une racine évidente.
- Résoudre une équation bicarrée (de degré 4).
- Déterminer une fonction polynôme du second degré passant par trois points donnés du plan.

QCM d'entrainement