Chapitre 7 : Suites arithmétiques et géométriques

Cours 2 : Suites géométriques

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - Première D

Vendredi 7 février 2020

Sommaire

Définition

Suite géométrique

On dit d'une suite (u_n) qu'elle est **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que quel que soit l'entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n \ .$$

☞ « q » est alors appelée la **raison** de la suite.

Définition

Suite géométrique

On dit d'une suite (u_n) qu'elle est **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que quel que soit l'entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n \ .$$

☞ « q » est alors appelée la **raison** de la suite.

Exemples :

➤ La suite définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 3u_n$$

est une suite géométrique de raison $r = 3$.

➤ La suite (u_n) dont les premiers termes sont :

$$1 \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 9 \quad ; \quad 27 \quad ; \quad 81 \quad ; \quad 243 \quad ; \quad 729$$

semble géométrique de raison 3 car parmi ces termes, le rapport entre deux termes consécutifs est toujours égale à 3.

Définition

Suite géométrique

On dit d'une suite (u_n) qu'elle est **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que quel que soit l'entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n \ .$$

☞ « q » est alors appelée la **raison** de la suite.

Exemples :

➤ La suite (u_n) dont les premiers termes sont :

$$2 \quad ; \quad 4 \quad ; \quad 8 \quad ; \quad 12 \quad ; \quad 24 \quad ; \quad 48 \quad ; \quad 96$$

n'est pas géométrique car : $\dfrac{8}{4} \neq \dfrac{12}{8}$.

Définition

Suite géométrique

On dit d'une suite (u_n) qu'elle est **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que quel que soit l'entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n \ .$$

☞ « q » est alors appelée la **raison** de la suite.

Exercice

Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Si oui, préciser le premier terme et la raison.

1. u définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2^n$.
2. v définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$.
3. w définie pour tout entier naturel n par $w_n = 2^n + 3^n$.

Terme général d'une suite géométrique

Propriété : formule explicite

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors pour tout entier naturel n :

✍ $u_n = u_0 \times q^n$

Terme général d'une suite géométrique

Propriété : formule explicite

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors pour tout entier naturel n :

✍ $u_n = u_0 \times q^n$

Preuve

$u_1 = u_0 \times q$
$u_2 = u_1 \times q$
$u_3 = u_2 \times q$
$\vdots$
$u_n = u_{n-1} \times q$
En multipliant membre à membre ces n égalités on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 \times \cdots \times u_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times u_3 \times \cdots \times u_{n-1} \times q^n$$

Puis, en supprimant les termes communs aux deux membres de l'égalité, on obtient :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Terme général d'une suite géométrique

Conséquence

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors pour tous entiers naturels p et k :

$$u_p = u_k \times q^{p-k}$$

Terme général d'une suite géométrique

Conséquence

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors pour tous entiers naturels p et k :

$$u_p = u_k \times q^{p-k}$$

Application directe

1. A l'aide de la propriété 1, justifier la conséquence.
2. On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_1, donner l'expression du terme général de (u_n).

Terme général d'une suite géométrique

Conséquence

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors pour tous entiers naturels p et k :

$$u_p = u_k \times q^{p-k}$$

Application directe

1. A l'aide de la propriété 1, justifier la conséquence.
2. On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_1, donner l'expression du terme général de (u_n).

Exemple

➤ (w_n) est la suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ telle que $w_8 = 10$. Alors, $w_{12} = w_8 \times q^{12-8} = 10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{5}{8}$.

Terme général d'une suite géométrique

Exercice

Soit u une suite géométrique. Déterminer son terme général dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 = 3$, $q = 2$.
2. $u_1 = -3$, $q = 4$.
3. $u_0 = 1$, $u_4 = 81$.
4. $u_5 = 80$, $u_{10} = 2,5$.

Variations d'une suite géométrique

Propriété : variations

Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

- ✍ u est croissante si $u_0 > 0$ et $q > 1$ ou alors $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$.
- ✍ u est constante si $q = 1$.
- ✍ u est décroissante si $u_0 < 0$ et $q > 1$ ou alors $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$.
- ✍ u n'est pas monotone si $q < 0$.

Variations d'une suite géométrique

Propriété : variations

Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

- ✍ u est croissante si $u_0 > 0$ et $q > 1$ ou alors $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$.
- ✍ u est constante si $q = 1$.
- ✍ u est décroissante si $u_0 < 0$ et $q > 1$ ou alors $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$.
- ✍ u n'est pas monotone si $q < 0$.

Exercice

1. Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 0,5$. Étudier les variations de u.
2. Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = -5$. Justifier que u n'est pas monotone.

FIN

Revenir au début