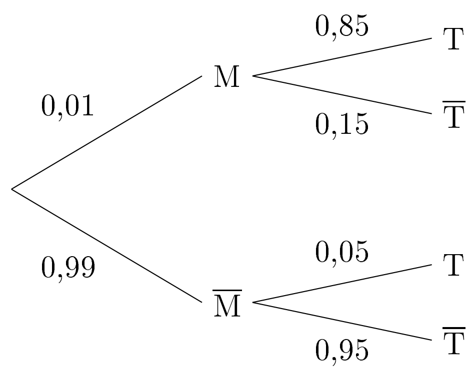
Exercice 1 :

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas ;

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilité pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note M l'événement « l'animal est porteur de la maladie » et T l'événement « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation.



2. Un animal est choisi au hasard.

a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que sont test soit positif ?
$\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{T}) = \mathrm{P}(\mathrm{M}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 0,01 \times 0,85 = 0,0085$
Ainsi, la probabilité que l'animal soit porteur de la maladie est égale à 0,0085.

b) Calculer la probabilité que son test soit positif.
$\mathrm{P}(\mathrm{T}) = \mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{T}) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T}\right) = 0,0085 + 0,99 \times 0,05 = 0,058$
Ainsi, la probabilité que le test de l'animal soit positif est égale à 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie ?
$\mathrm{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{T})}{\mathrm{P}(\mathrm{T})} = \dfrac{0,085}{0,058} = \dfrac{17}{116}$
Ainsi, la probabilité que l'animal soit porteur de la maladie sachant que son test est positif est égale à $\dfrac{17}{116}$, soit environ 0,147.

Exercice 2 :

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires dont les cotes sont exprimées en millimètres.

Un contrôle de qualité consiste à vérifier que la longueur et la largeur des pièces sont conformes à la norme en vigueur.

On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans le stock de l'entreprise soit conforme est 0,9.

Deux machines automatiques de l'entreprise notées « machine 1 » et « machine 2 » fabriquent ces pièces en grande quantité.
On suppose que la probabilité qu'une pièce :

- prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme est $0,914$;
- prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 2 soit conforme est $0,879$;

La machine 1 fournit 60% de la production totale de ces pièces et la machine 2 le reste de cette production.
On prélève au hasard une pièce parmi la production totale de l'entreprise de la journée.
On définit les événements suivants :

- A :« La pièce provient de la machine 1 » ;
- B :« La pièce provient de la machine 2 » ;
- C :« La pièce est conforme » ;

a. Déterminer les probabilités $\mathrm{P}(\mathrm{A})$, $\mathrm{P}(\mathrm{B})$, $\mathrm{P_A}(\mathrm{C})$ et $\mathrm{P_B}(\mathrm{C})$. La machine 1 fournit 60% de la production donc la machine 2 en fournit 40% d'où :

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0{,}6$
- $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0{,}4$

D'autre part d'après l'énoncé on a également :

- $\mathrm{P_A}(\mathrm{C}) = 0{,}914$
- $\mathrm{P_B}(\mathrm{C}) = 0{,}879$

b. En déduire $\mathrm{P}(\mathrm{C} \cap \mathrm{A})$ et $\mathrm{P}(\mathrm{C} \cap \mathrm{B})$.

- $\mathrm{P}(\mathrm{C} \cap \mathrm{A}) = \mathrm{P_A}(\mathrm{C}) \times \mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0,914 \times 0,6 = 0,5484$
- $\mathrm{P}(\mathrm{C} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P_B}(\mathrm{C}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0,879 \times 0,4 = 0,3516$

c. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{C})$. D'après la formule des probabilités totales :
$\mathrm{P}(\mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{C} \cap \mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{C} \cap \mathrm{B}) = 0{,}5484 + 0{,}3416 = 0{,}9$