Chapitre 4 : Probabilités conditionnelles

Cours 1 : Probabilité conditionnelle

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - Première D

Samedi 9 novembre 2019

Sommaire

1. Définition
2. Propriété
3. Exemple

Réalisation d'un événement sous condition

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$
On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé** le nombre noté $P_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Réalisation d'un événement sous condition

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \neq 0$
On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé** le nombre noté $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ défini par :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}.$$

Remarques

→ $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ se lit « probabilité conditionnelle de B sachant A ».

→ $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 1$

→ Si A et B sont incompatibles alors $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0$

→ Si la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ est connue, la probabilité de l'événement $A \cap B$ peut être calculée :

$$p(A \cap B) = p(A) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$$

Réalisation d'un événement sous condition

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \neq 0$
On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé** le nombre noté $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ défini par :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}.$$

Remarques

- → $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ se lit « probabilité conditionnelle de B sachant A ».
- → $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 1$
- → Si A et B sont incompatibles alors $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0$
- → Si la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ est connue, la probabilité de l'événement $A \cap B$ peut être calculée :

$$p(A \cap B) = p(A) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$$

Réalisation d'un événement sous condition

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \neq 0$
On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé** le nombre noté $\mathrm{P_A}(\mathrm{B})$ défini par :

$$\mathrm{P_A}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}.$$

Remarques

- $\mathrm{P_A}(\mathrm{B})$ se lit « probabilité conditionnelle de B sachant A ».
- $\mathrm{P_A}(\mathrm{A}) = 1$
- Si A et B sont incompatibles alors $\mathrm{P_A}(\mathrm{B}) = 0$
- Si la probabilité conditionnelle $\mathrm{P_A}(\mathrm{B})$ est connue, la probabilité de l'événement $A \cap B$ peut être calculée :

$$p(A \cap B) = p(A) \times \mathrm{P_A}(\mathrm{B})$$

Réalisation d'un événement sous condition

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \neq 0$
On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé** le nombre noté $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ défini par :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}.$$

Remarques

- → $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ se lit « probabilité conditionnelle de B sachant A ».
- → $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 1$
- → Si A et B sont incompatibles alors $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0$
- → Si la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ est connue, la probabilité de l'événement $A \cap B$ peut être calculée :

$$p(A \cap B) = p(A) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$$

Réalisation d'un événement sous condition

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \neq 0$
On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé** le nombre noté $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ défini par :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}.$$

Exemple et exercice

	Reçu	Non Reçu	Total
Filles	18	1	19
Garçons	13	3	16
Total	31	4	35

On choisit un élève au hasard.

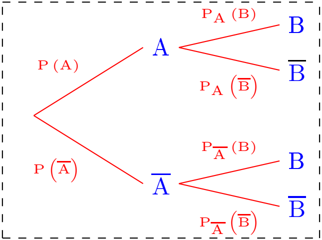
- La probabilité que l'élève soit reçu (R), sachant que c'est une fille (F) est :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(\mathrm{R}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{R} \cap \mathrm{F})}{\mathrm{P}(\mathrm{F})} = \frac{18}{19}$$

- Calculer la probabilité $\mathrm{P}_{\mathrm{R}}(\mathrm{F})$

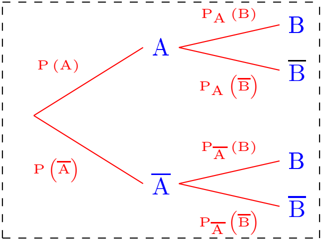
Arbre pondéré et probabilité conditionnelle

De nombreuses situations peuvent être modélisées par un arbre à 2 niveaux : A et B sont deux événements de Ω avec $p(A) \neq 0$



Arbre pondéré et probabilité conditionnelle

De nombreuses situations peuvent être modélisées par un arbre à 2 niveaux : A et B sont deux événements de Ω avec $p(A) \neq 0$



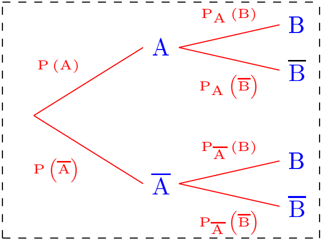
→ La somme des probabilités inscrites au départ d'un même noeud vaut 1.

- Ainsi $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Et $P_{\overline{A}}(B) = 1 - P_{\overline{A}}(\overline{B})$

→ Le chemin complet A suivi de B représente l'événement $A \cap B$.

Arbre pondéré et probabilité conditionnelle

De nombreuses situations peuvent être modélisées par un arbre à 2 niveaux : A et B sont deux événements de Ω avec $p(A) \neq 0$



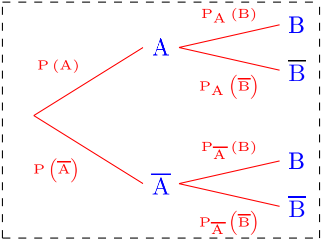
→ La somme des probabilités inscrites au départ d'un même noeud vaut 1.

- Ainsi $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
- Et $P_{\overline{A}}(B) = 1 - P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$

→ Le chemin complet A suivi de B représente l'événement $A \cap B$.

Arbre pondéré et probabilité conditionnelle

De nombreuses situations peuvent être modélisées par un arbre à 2 niveaux : A et B sont deux événements de Ω avec $p(A) \neq 0$



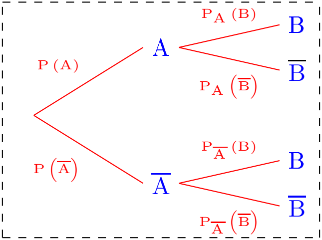
→ La somme des probabilités inscrites au départ d'un même noeud vaut 1.

- Ainsi $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)$
- Et $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}}}\left(\mathrm{B}\right) = 1 - \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right)$

→ Le chemin complet A suivi de B représente l'événement $A \cap B$.

Arbre pondéré et probabilité conditionnelle

De nombreuses situations peuvent être modélisées par un arbre à 2 niveaux : A et B sont deux événements de Ω avec $p(A) \neq 0$



Propriété

La probabilité d'un chemin complet est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin : c'est le principe multiplicatif.
En effet, nous savons que pour tous événements A et B,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$$

Un exemple complet

Exemple de situation avec un arbre pondéré à deux niveaux

Dans une maison de retraite, 95% des pensionnaires sont vaccinés contre la grippe. On observe que 25% des personnes vaccinées ont été atteintes par la maladie.

- La probabilité qu'une personne soit vaccinée est $\mathrm{P}(\mathrm{V}) = 0,95$.
- Parmi les personnes vaccinées (V), 25% ont été malades (M).

Ainsi, $\mathrm{P}_{\mathrm{V}}(\mathrm{M}) = 0,25$.

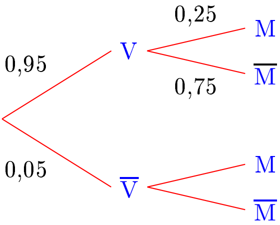
Un exemple complet

Exemple de situation avec un arbre pondéré à deux niveaux

Dans une maison de retraite, 95% des pensionnaires sont vaccinés contre la grippe. On observe que 25% des personnes vaccinées ont été atteintes par la maladie.

- La probabilité qu'une personne soit vaccinée est $P(V) = 0,95$.
- Parmi les personnes vaccinées (V), 25% ont été malades (M).

Ainsi, $P_V(M) = 0,25$.
La situation peut être représentée par l'arbre ci-dessous :



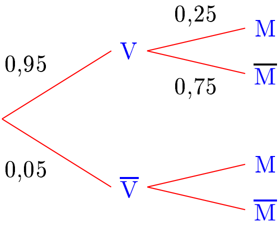
Un exemple complet

Exemple de situation avec un arbre pondéré à deux niveaux

Dans une maison de retraite, 95% des pensionnaires sont vaccinés contre la grippe. On observe que 25% des personnes vaccinées ont été atteintes par la maladie.

- La probabilité qu'une personne soit vaccinée est $P(V) = 0,95$.
- Parmi les personnes vaccinées (V), 25% ont été malades (M).

Ainsi, $P_V(M) = 0,25$.
La situation peut être représentée par l'arbre ci-dessous :



La probabilité qu'un pensionnaire soit vacciné (V) et malade (M) est :

$$\begin{aligned} P(V \cap M) &= P(V) \times P_V(M) \\ &= 0,95 \times 0,25 \\ &= 0,2375 \end{aligned}$$

FIN

Revenir au début