

Chapitre 5 : Fonctions dérivées

Cours 3 : Sens de variation

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - Première D

Lundi 9 décembre 2019

1 Signe de la dérivée

2 Extremum

Signe de la dérivée

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.

- ▮ Si $f' > 0$ sur I , sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I .
- ▮ Si $f' < 0$ sur I , sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement décroissante sur I .
- ▮ Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I .

Signe de la dérivée

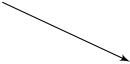
Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.

- Si $f' > 0$ sur I , sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f' < 0$ sur I , sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement décroissante sur I .
- Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I .

Exemple 1

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = -3x + 1$, f est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée f' a pour expression $f'(x) = -3$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$		

Signe de la dérivée

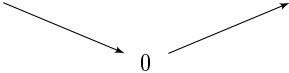
Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.

- Si $f' > 0$ sur I , sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f' < 0$ sur I , sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement décroissante sur I .
- Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I .

Exemple 2

Soit f la fonction carré, f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.
 $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Signe de la dérivée

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.

- ▮ Si $f' > 0$ sur I , sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I .
- ▮ Si $f' < 0$ sur I , sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement décroissante sur I .
- ▮ Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I .

Exercice

- 1 Démontrer que la fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- 2 Etudier les variations de la fonction f définie sur $[-2; 1, 5]$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I .

- ☞ Dire que x_0 est un maximum local (resp. minimum local) de f , signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- ☞ Dire que x_0 est un extremum local signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I .

- ☞ Dire que x_0 est un maximum local (resp. minimum local) de f , signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- ☞ Dire que x_0 est un extremum local signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local.

Propriété 1

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 est un réel de I .

- ✎ Si $f(x_0)$ est un extremum local de f , alors $f'(x_0) = 0$.
- ✎ Attention : la réciproque est fausse.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I .

- ☞ Dire que x_0 est un maximum local (resp. minimum local) de f , signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- ☞ Dire que x_0 est un extremum local signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local.

Propriété 1

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 est un réel de I .

- ☞ Si $f(x_0)$ est un extremum local de f , alors $f'(x_0) = 0$.
- ☞ Attention : la réciproque est fausse.

Exercice 1

Justifier que la fonction cube est un exemple illustrant le fait que la réciproque de la propriété 1 est fausse.



Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I .

- ☞ Dire que x_0 est un maximum local (resp. minimum local) de f , signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- ☞ Dire que x_0 est un extremum local signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local.

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 est un réel de I .

- ☞ Si $f'(x_0)$ s'annule en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f .

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I .

- ☞ Dire que x_0 est un maximum local (resp. minimum local) de f , signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- ☞ Dire que x_0 est un extremum local signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local.

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 est un réel de I .

- ☞ Si $f'(x_0)$ s'annule en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f .

Exercice 2

Justifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ admet deux extremums locaux sur \mathbb{R} .



FIN

[Revenir au début](#)