Corrigé des exercices chap 8 corr 1

Exercice 1 (utilisation de $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$)

1) $\exp(4) = \exp(2+2) = \exp(2) \times \exp(2) = \exp(2)^2$

2) $\exp(3a) = \exp(a+a+a) = \exp(a) \times \exp(a) \times \exp(a) = \exp(a)^3$

3) $\exp(50) = \exp(25+25) = \exp(25)^2$ donc $\frac{\exp(50)}{\exp(25)} = \frac{\exp(25)^2}{\exp(25)} = \exp(25)$

Exercice 2 utilisation de $\exp(x) > 0$ et $\exp(0) = 1$

1) $\exp(x) = 0$ impossible car $\exp(x) > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$
donc $S = \emptyset$

2) $\exp(2x+3) > 0$ toujours vrai donc $S = \mathbb{R}$

3) $\exp(3x^2+8x+5) = 1$ équivaut à $3x^2+8x+5 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -\frac{5}{3}$
d'où $S = \left\{-1; -\frac{5}{3}\right\}$

Exercice 3 : utilisation de $\exp' = \exp$

1) $f(x) = 3\exp(x)$
$f = 3u$ donc $f' = 3u'$ d'où $f'(x) = 3\exp(x)$

2) $g(x) = \exp(3x+2)$
$g(x) = f(ax+b)$ donc $g'(x) = af'(ax+b)$ (formule vue sur les dérivées)
donc $g'(x) = 3\exp(3x+2)$

3) $h(x) = x\exp(x)$ $h = uv$ donc $h' = u'v + uv'$
$u(x) = x$ et $v(x) = \exp(x)$
donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \exp(x)$

Ainsi $h'(x) = 1\exp(x) + x\exp(x) = (1+x)\exp(x)$

4) $i(x) = \frac{\exp(3x+2)}{x}$ $i = \frac{u}{v}$ donc $i' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$u(x) = \exp(3x+2)$ et $v(x) = x$
donc $u'(x) = 3\exp(3x+2)$ et $v'(x) = 1$

Ainsi $i'(x) = \frac{3\exp(3x+2) \times x - \exp(3x+2) \times 1}{x^2} = \frac{(3x+1)\exp(3x+2)}{x^2}$

Exercice 100 page 181

a) $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ $\quad f = \dfrac{u}{v}$ $\quad u(x) = \exp(x+y) = f(ax+b)$ avec $a=1$ et $b=y$

donc $u'(x) = \exp(x+y)$

$v(x) = \exp(x)$ donc $v'(x) = \exp(x)$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{\exp(x)^2} = \dfrac{0}{\exp(x)^2} = 0$

Comme la dérivée de f est nulle alors f est constante.

choisissons $x=0$, on sait que $\exp(0)=1$ donc $f(0) = \exp(y)$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(y)$

b) D'après 1, on a $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ et $f(x) = \exp(y)$

donc pour tous réels x et y $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$

et par conséquent $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$ relation fonctionnelle

c) Dans la relation fonctionnelle, comme y est un réel quelconque alors on a le droit de remplacer y par $-x$ et la relation reste valable

on obtient donc $\exp(x+(-x)) = \exp(x) \times \exp(-x)$

or $x+(-x) = 0$ donc $\exp(0) = \exp(x) \times \exp(-x)$

Nous savons que $\exp(0) = 1$ donc $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$

Enfin on obtient : $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ pour tout réel x