CHAPITRE 8

Produit scalaire

Le kitesurf est un sport de glisse sur planche tractée par un cerf-volant. Plusieurs disciplines (comme le *freestyle* ou le *wakestyle*) consistent à réaliser des figures : le pratiquant doit avoir une bonne connaissance des actions s'exerçant sur la planche pour réaliser une figure en toute sécurité.
En physique, les actions sont modélisées par des forces, qui sont représentées par des vecteurs. On utilise dans certaines situations le produit scalaire qui permet de rendre compte de l'effet d'une force sur un déplacement souhaité.

Itinéraire

PRENDRE UN BON DÉPART

Quiz en ligne
Diagnostic
Kwyk Variations 1re via ENT

Test

À l'oral

Proposer des phrases à partir des mots suivants.

VECTEUR coordonnées direction angle norme *PARALLÉLOGRAMME*

somme de deux vecteurs *vecteurs égaux* relation de Chasles sens

Rappels

Notion de vecteur

- On caractérise un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ par :
  - sa **norme** ou longueur : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$;
  - sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
  - son **sens** : de A vers B.
- $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points du plan muni d'un repère orthonormé.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple

A(–1 ; 2) et B(0 ; 1) sont deux points du plan muni d'un repère orthonormé.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Opérations sur les vecteurs

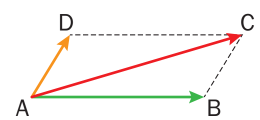
- **Addition de deux vecteurs**

Avec les coordonnées

si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

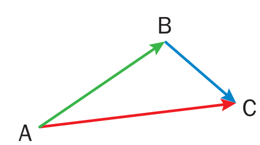
Règle du parallélogramme

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



Relation de Chasles

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



- **Produit d'un vecteur par un nombre réel**

• Le produit d'un vecteur non nul par un nombre réel k non nul est un vecteur de norme $|k|\|\vec{u}\|$ et de même direction que $\vec{u}$.

Si $k > 0$, ce vecteur est de même sens que $\vec{u}$.

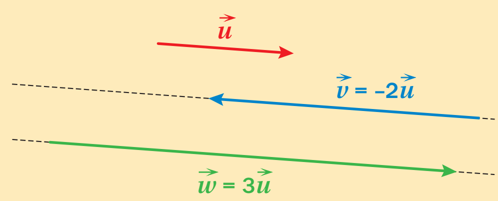
Si $k < 0$, ce vecteur est de sens contraire à $\vec{u}$.

• Si $\vec{v} = k\vec{u}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

• Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemple

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

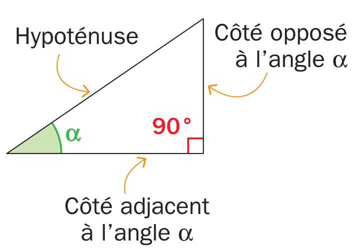


Trigonométrie

▸ Chapitre 7

Dans un triangle rectangle :

Angle α	0°	30°	45°	60°	90°
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

et

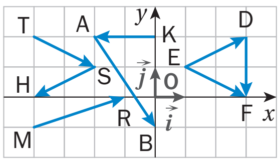
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

Réactivation

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Notion de vecteur

1 On considère la figure ci-dessous.



a. Citer les vecteurs de même direction.
b. Citer les vecteurs de même sens.
c. Citer les vecteurs égaux.
d. Donner les coordonnées de chaque vecteur.

2 **a.** Construire un représentant des vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\ \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\ \text{et}\ \vec{w}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}.$$

b. Construire un représentant de $-\vec{u}$ et de $-\vec{v}$.
c. Donner les coordonnées de $-\vec{u}$ et $-\vec{v}$.

3 A(2 ; –3), B(4 ; 5) et C(–1 ; –2) sont trois points.
a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b. Déterminer les coordonnées du point D afin que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
c. Calculer les longueurs de ses côtés.

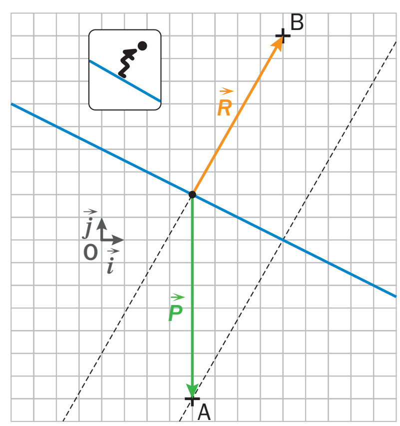
Opérations sur les vecteurs

4 ABCD est un parallélogramme de centre O.
Recopier et compléter les égalités suivantes.
a. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\ldots$ **b.** $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\ldots$ **c.** $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}=\ldots$
d. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}=\ldots$ **e.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\ldots$ **f.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\ldots$

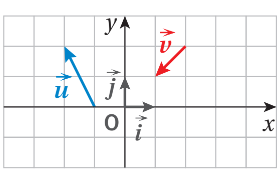
5 On étudie la résultante $\vec{F}$ des forces qui s'exercent sur un skieur, modélisé par un point sur le schéma ci-contre :

$$\vec{F}=\vec{R}+\vec{P}$$

avec $\vec{R}$ la réaction normale de la piste et $\vec{P}$ le poids du skieur.
a. Construire le vecteur $\vec{F}$ et lire sur le schéma ses coordonnées.
b. Lire graphiquement les coordonnées de $\vec{R}$ et de $\vec{P}$, puis retrouver les coordonnées de $\vec{F}$ par le calcul.
c. D'après le principe d'inertie, le skieur peut-il avoir un mouvement rectiligne uniforme ?



6 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan.



• Construire $\vec{w_1}=2\vec{u}$, $\vec{w_2}=-3\vec{v}$ et $\vec{w_3}=-\vec{u}+2\vec{v}$.

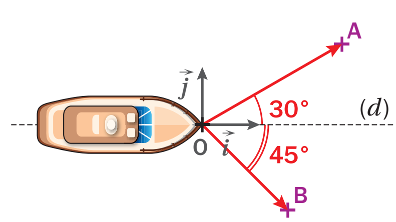
7 ABC est un triangle. Les points H et G sont définis par les relations :

$$\overrightarrow{AH}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\ \text{et}\ \overrightarrow{BG}=-\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}.$$

a. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, H et G dans le plan muni du repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
b. Les points A, G et H sont-ils alignés ? Justifier.

Trigonométrie

8 Deux remorqueurs sont reliés au nez d'un bateau initialement en un point O. L'un d'entre eux, s'il était seul, l'amènerait jusqu'au point A ; l'autre, jusqu'au point B. On a OA = 80 m et OB = 60 m.
Ensemble, les deux remorqueurs amènent le nez du bateau au point R tel que $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.
a. Déterminer les coordonnées des points A et B.
b. Calculer les coordonnées du point R.
c. Le point R appartient-il à la droite (d) ?



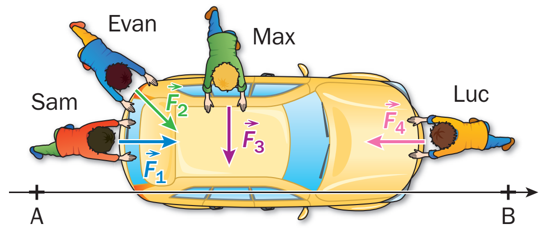
Corrigés p. 368

Fichier logiciel
Activité 2
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 1
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

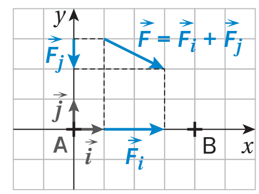
1 La voiture en panne

La voiture ci-contre est tombée en panne. On souhaite la déplacer d'un point A vers un point B. Quatre personnes poussent cette voiture en exerçant des forces de même norme F mais avec des directions différentes. Chaque personne n'a pas la même efficacité pour déplacer la voiture de A vers B. On dit que ces forces $\vec{F}$ « n'échangent pas le même travail ».



1. Classer ces personnes de la plus efficace à la moins efficace pour déplacer la voiture de A vers B ; expliquer ce classement.

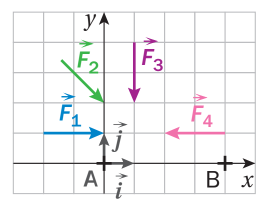
Pour traduire l'efficacité de chaque force, on s'intéresse au projeté orthogonal $\vec{F_i}$ du vecteur $\vec{F}$ sur la droite (AB), qui est la seule composante du vecteur $\vec{F}$ qui influe sur le déplacement voulu de la voiture.



Les physiciens ont introduit au XIX^{e} siècle la notion de **travail d'une force** :

> Le travail d'une force constante $\vec{F}$ sur le trajet de A vers B est appelé **produit scalaire de $\vec{F}$ et de $\overrightarrow{AB}$**.
> Il se note $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ et il vaut :
> - $\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\vec{F_i}\|$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F_i}$ ont le même sens ;
> - $-\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\vec{F_i}\|$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F_i}$ sont de sens opposés.

2. On a reproduit ci-contre les forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ et $\vec{F_4}$.
a. Reproduire le schéma et construire le projeté orthogonal de chaque vecteur sur la droite (AB).
b. Calculer le produit scalaire $\vec{F_k}\cdot\overrightarrow{AB}$ pour k allant de 1 à 4.
c. Vérifier la réponse donnée à la question **1**.

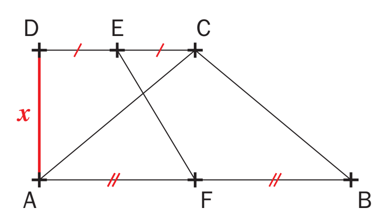


OBJECTIF 2
Exploiter la relation d'orthogonalité

2 La hauteur du trapèze TICE

On considère un trapèze rectangle ABCD de bases [AB] et [CD] tel que AB = 6 cm et CD = 3 cm. E et F sont les milieux respectifs des côtés [CD] et [AB].

On cherche à déterminer la hauteur AD du trapèze pour que les droites (EF) et (AC) soient perpendiculaires.



1. a. Reproduire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

> **Aide** On pourra utiliser un curseur pour faire varier la longueur AD ou placer un point mobile D sur une droite perpendiculaire à la droite (AB).

b. Conjecturer une réponse au problème.
c. Faire apparaître la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}$ lorsque les droites sont perpendiculaires. Justifier la valeur observée.

2. a. Recopier et compléter les égalités suivantes en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \ldots + \overrightarrow{AF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \ldots .$$

b. Démontrer que $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DC}$.
c. En déduire que $AD^2 = 4{,}5$ et conclure.

OBJECTIF 3
Calculer des longueurs et des mesures d'angle

3 Les câbles du poulailler

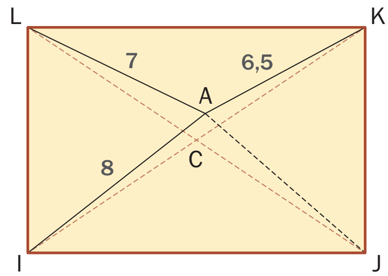
1. ABC est un triangle avec $AB = 8$, $AC = 10$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

a. Exprimer $\overrightarrow{BC}^2$ en fonction de AB, AC et $\cos(\widehat{BAC})$.

Aide $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

b. En déduire la longueur BC.

2. Le poulailler de Livia est constitué d'un triangle ILK rectangle en L, éclairé par trois lampadaires, placés en I, K et L, et dont le générateur est placé en A. Livia connaît les distances AI, AK et AL. Agrandissant son poulailler pour le transformer en un rectangle IJKL, elle souhaite déterminer la longueur de câble nécessaire pour alimenter un éclairage en J.



a. On note C le centre de IJKL. Démontrer que $AI^2 + AK^2 = 2AC^2 + \frac{IK^2}{2}$.

Aide $AI^2 = \overrightarrow{AI}^2 = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}\right)^2$

b. Démontrer de même que $AJ^2 + AL^2 = 2AC^2 + \frac{IK^2}{2}$.

c. En déduire la longueur de câble dont Livia a besoin pour son nouvel éclairage.

OBJECTIF 4
Étudier un ensemble de points

4 La droite cachée

1. Pour une droite $\left(N\ ;\ \vec{u}\right)$ du plan $\left(\vec{u} \neq \vec{0}\right)$, montrer que l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{NM}\cdot\vec{u} = 0$ est la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à $\left(N\ ;\ \vec{u}\right)$ et passant par N.

Aide On peut montrer que, pour tout point M, $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM}\cdot\vec{u} = 0$.

2. A et B sont deux points du plan tels que $AB = 3$. Le point P est défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, et la droite Δ est perpendiculaire à la droite (AB) en P.
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 2$.

a. Vérifier que le point P appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

b. En utilisant les relations $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 2$ et $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = 2$, démontrer que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.
Conclure quant à la nature de $\mathcal{E}$.

3. Étudier de même les ensembles des points M du plan vérifiant chacune des relations suivantes.

a. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 6$ **b.** $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = -2$

c. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = -10$ **d.** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB} = -12$

Aide Pour $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = k$, on cherchera d'abord à définir un point P tel que $P \in (AB)$ et $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = k$.

Maths à l'oral
Chaque groupe étudie un ensemble et présente à la classe sa démarche et l'ensemble obtenu, puis on compare les réponses.

OBJECTIF 4
Étudier un ensemble de points

5 Étude d'un ensemble de points OUVERTE

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

C et D sont deux points du plan tels que $CD = 4$. On note I le milieu du segment [CD].
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble de tous les points M du plan tels que $MC^2 + MD^2 = 16$.

1. Montrer que $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow MI = 2$. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$.

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MC^2 + MD^2 \leqslant 10$.

Cours

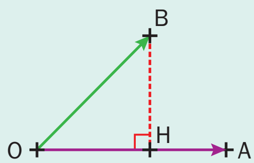
OBJECTIF 1 Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

Savoir-faire 1 p. 226

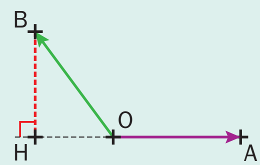
Définition Si O, A et B sont trois points du plan, avec O et A distincts, et H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA), alors le **produit scalaire** de $\overrightarrow{OA}$ par $\overrightarrow{OB}$ est défini par **projection orthogonale** :

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}.$$

- si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens, alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH} = OA \times OH$.



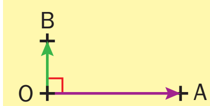
- si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens opposés, alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH} = -OA \times OH$.



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ se lit « $\overrightarrow{OA}$ scalaire $\overrightarrow{OB}$ ».

Le produit scalaire a pour résultat un **nombre réel**.

Si le point H est confondu avec le point O, alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$.



Définition Si l'un des deux vecteurs est nul, on a $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$.

⚠ La **réciproque** de cette assertion est fausse.

▶ Rabat V, Logique

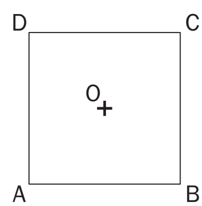
Exemple

ABCD est un carré de centre O avec AB = 4.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = 4 \times 4 = 16$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = 4 \times 2 = 8$.



Propriétés

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors on a la **formule de calcul avec cosinus** :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et on note $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$.

Démonstration rédigée p. 242

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

$\vec{u}^2$ se lit « **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$ ».

Propriétés

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs, et a et b deux nombres réels.

① $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$: le produit scalaire est symétrique.

② $\vec{u}\cdot(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$: le produit scalaire est compatible avec l'addition.

③ $(a\vec{u})\cdot(b\vec{v}) = (ab) \times (\vec{u}\cdot\vec{v})$: le produit scalaire est compatible avec le produit.

④ $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Démonstration : exercice 140 p. 243

Le produit scalaire est donc une forme dite **bilinéaire symétrique**.

Propriété Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est donné par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x \times x' + y \times y'.$$

Démonstration rédigée p. 242

Exemples

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 6 \times 2 + (-3) \times (-1) = 15$.
- Si $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 1 + (-5) \times 1 = -3$.

$\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

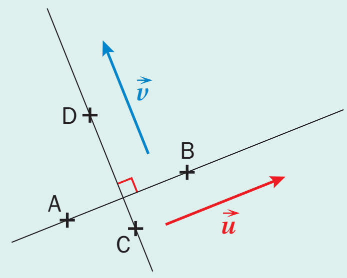
OBJECTIF 2 Exploiter la relation d'orthogonalité

Savoir-faire 2 p. 227

Définition

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux** si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires**.
On notera alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

- Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout autre vecteur.



Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$

Il s'agit d'un **critère d'orthogonalité** de deux vecteurs.

Démonstration rédigée p. 242

Conséquence

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (théorème de Pythagore).

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\boldsymbol{x \times x' + y \times y' = 0}$.

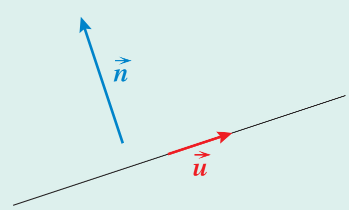
Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

En effet, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-2) \times 3 = 0$.

Définition

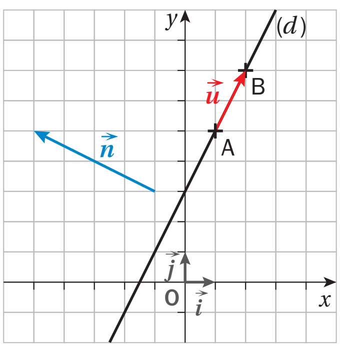
Pour une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal au vecteur $\vec{u}$ est appelé **vecteur normal à cette droite**.



Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (d) passant par A(1 ; 5) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times (-4) + 2 \times 2 = 0$.



Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d).

OBJECTIF 3 Calculer des longueurs et des mesures d'angle

Savoir-faire 3 p. 228

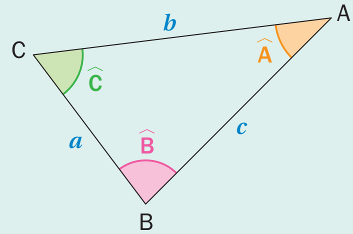
Propriété — Formules d'Al-Kashi

ABC est un triangle avec a = BC, b = CA et c = AB.
On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\widehat{A})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos(\widehat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(\widehat{C})$$

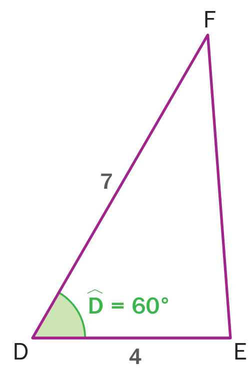


Démonstration : exercice 139 p. 243

On remarque que le sommet A est associé au côté opposé, de longueur a, et à l'angle noté $\widehat{A}$.

Exemple

Dans le triangle DEF ci-contre, DE = 4, DF = 7 et $\widehat{D}$ = 60°.



▸ Calcul de la longueur EF

$$\begin{aligned} EF^2 &= DE^2 + DF^2 - 2 \times DE \times DF \times \cos(\widehat{D}) \\ &= 4^2 + 7^2 - 2 \times 4 \times 7 \times \frac{1}{2} \\ &= 37. \end{aligned}$$

Ainsi, EF = $\sqrt{37}$.

▸ Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{E}$

$DF^2 = DE^2 + EF^2 - 2 \times DE \times EF \times \cos(\widehat{E})$,

donc $7^2 = 4^2 + 37 - 2 \times 4 \times \sqrt{37} \times \cos(\widehat{E})$,

d'où $\cos(\widehat{E}) = \dfrac{7^2 - 4^2 - 37}{-2 \times 4 \times \sqrt{37}} = \dfrac{1}{2\sqrt{37}}$.

Avec la calculatrice, on en déduit $\widehat{E} \approx 85°$.

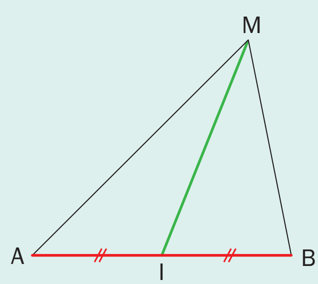
On utilise un outil numérique pour déterminer une valeur approchée d'une mesure de l'angle $\widehat{E}$: 1,49 rad, soit 85,3°.

Propriété — Formules de la médiane

A et B sont deux points du plan, et on note I le milieu du segment [AB].
Pour tout point M du plan, on a :

▸ $\mathbf{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}}$

▸ $\mathbf{MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}}$



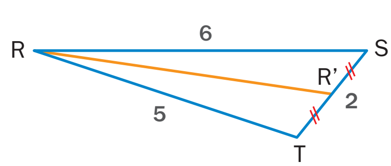
Démonstration à compléter : exercice 137 p. 243

La droite (MI) est la **médiane** issue de I dans le triangle MAB.

Exemple

Calcul de la longueur d'une médiane

Dans le triangle RST, RS = 6, RT = 5 et ST = 2.
On calcule la longueur du segment [RR'], où R' est le milieu de [ST].



$RT^2 + RS^2 = 2RR'^2 + \dfrac{ST^2}{2}$,

donc $RR'^2 = \dfrac{1}{2} \times \left(5^2 + 6^2 - \dfrac{2^2}{2}\right) = \dfrac{59}{2}$,

d'où $RR' = \sqrt{\dfrac{59}{2}} \approx 5{,}4$.

La droite (RR') est la médiane issue de R dans le triangle RST.

La formule ci-contre met en lien le carré de la longueur d'une médiane avec les carrés des longueurs du triangle.

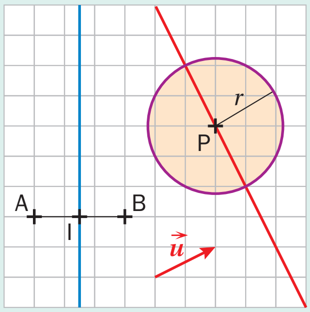
OBJECTIF 4 Étudier un ensemble de points

Savoir-faire 4 p. 229

A, B et P sont trois points, $\vec{u}$ un vecteur non nul, et I le milieu du segment [AB].

Propriétés

- L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u} = 0$ est la **droite** passant par P et de vecteur normal $\vec{u}$.
- L'ensemble des points M tels que MA = MB est la **médiatrice** du segment [AB].
- L'ensemble des points M tels que $PM^2 = r^2$ avec $r > 0$ est le **cercle** de centre P et de rayon r.
- L'ensemble des points M tels que $PM^2 \leqslant r^2$ avec $r > 0$ est le **disque** de centre P et de rayon r.



Démonstration : exercice 138 p. 243

Propriété

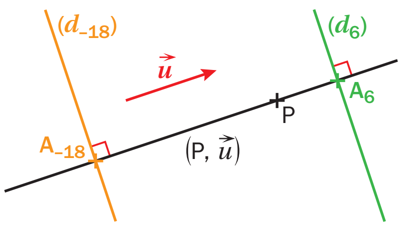
Si k est un nombre réel, alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u} = k$ est une droite (d_k) de vecteur normal $\vec{u}$.

Les droites (d_k) sont toutes perpendiculaires à une même droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et sont donc parallèles entre elles.

Exemples

Pour un vecteur $\vec{u}$ de norme 3, on a représenté ci-contre :

- l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u} = 6$: c'est la droite que l'on nomme (d_6), (d_6) passant par le point A_6 tel que $\overrightarrow{PA_6} = \frac{2}{3}\vec{u}$;
- l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u} = -18$: c'est la droite que l'on nomme (d_{-18}), (d_{-18}) passant par le point A_{-18} tel que $\overrightarrow{PA_{-18}} = -2\vec{u}$.



Comme $\overrightarrow{PA_6}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et de même sens et $\overrightarrow{PA_6}\cdot\vec{u} = 6$, le point A_6 est défini par :
$$\overrightarrow{PA_6} = \frac{6}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$
De même, le point A_{-18} est défini par :
$$\overrightarrow{PA_{-18}} = \frac{-18}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

Propriétés

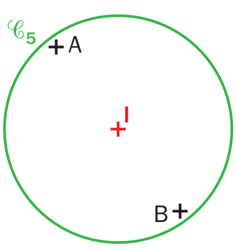
- Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ où I est le milieu de [AB].
- Pour un nombre réel k, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$ est l'**ensemble vide** ou le **point I** ou un **cercle de centre I**.

Démonstration : exercice 138 p. 243

Exemples

Avec AB = 10 :

- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 5 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 5 \Leftrightarrow MI^2 = 5 + 25 = 30$, donc M appartient au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{30}$;
- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -25 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -25 \Leftrightarrow MI^2 = -25 + 25 = 0$, donc l'ensemble des points est réduit au point I ;
- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -60 \Leftrightarrow MI^2 = -60 + 25 = -35$, donc l'ensemble de points est l'ensemble vide.



$MI^2 = -35$ est absurde, c'est pourquoi on aboutit à l'ensemble vide.

Savoir-faire

Vidéo
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs
hatier-clic.fr/ma1226

OBJECTIF 1
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

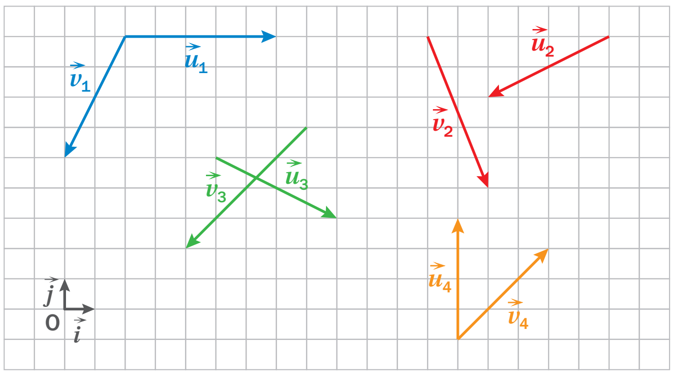
1 Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

Sur la figure ci-dessous, les carreaux du quadrillage ont des côtés de longueur 1.
Calculer :

a. le produit scalaire $\vec{u_1}\cdot\vec{v_1}$ en utilisant le projeté orthogonal ;

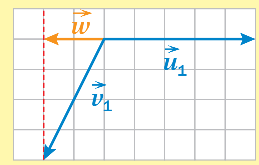
b. les produits scalaires $\vec{u_2}\cdot\vec{v_2}$ et $\vec{u_3}\cdot\vec{v_3}$ en utilisant les coordonnées des vecteurs ;

c. le produit scalaire $\vec{u_4}\cdot\vec{v_4}$ en utilisant la formule avec le cosinus.



Solution

a. Par projection orthogonale du vecteur $\vec{v_1}$ sur la droite dirigée par le vecteur $\vec{u_1}$, on a $\vec{u_1}\cdot\vec{v_1} = (-2)\times 5 = -10$.



$\vec{w}$ est donné par le projeté orthogonal de $\vec{v_1}$ sur la droite dirigée par $\vec{u_1}$. Les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{w}$ étant colinéaires et de sens opposés, leur produit scalaire est égal à l'opposé du produit de leurs normes.

b. Par lecture graphique, on a $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ donc :

$$\vec{u_2}\cdot\vec{v_2} = (-4)\times 2 + (-2)\times(-5) = -8 + 10 = 2.$$

On applique la formule : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

Par lecture graphique, on a $\vec{u_3}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v_3}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$ donc :

$$\vec{u_3}\cdot\vec{v_3} = 4\times(-4) + (-2)\times(-4) = -16 + 8 = -8.$$

c. On peut lire graphiquement les coordonnées $\vec{u_4}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v_4}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors : $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$.

D'où $\|\vec{u_4}\| = \sqrt{0^2+4^2} = 4$ et $\|\vec{v_4}\| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

On applique la formule : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Comme $(\vec{u},\vec{v}) = 45°$, $\vec{u_4}\cdot\vec{v_4} = 4\times 3\sqrt{2}\times\cos(45°) = 12\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 12$.

$\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Application

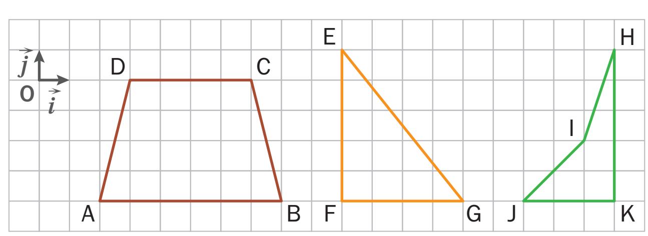
9 Le quadrillage ci-contre est formé de carrés de côté 1. Calculer :

a. $\vec{DC}\cdot\vec{AB}$

b. $\vec{AB}\cdot\vec{CB}$

c. $\vec{EG}\cdot\vec{EF}$

d. $\vec{IH}\cdot\vec{JK}$



10 Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

a. $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{j}$.

b. $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u},\vec{v}) = 60°$.

c. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$.

Les incontournables 34 et 35 p. 233

2 Démontrer l'orthogonalité

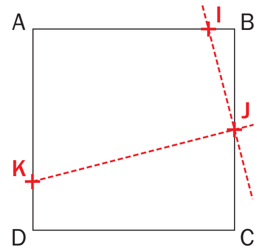
OBJECTIF 2
Exploiter la relation d'orthogonalité

ABCD est un carré de côté 8.

I, J et K sont tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{8}\ \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\ \overrightarrow{DA}$

et J est le milieu de [CB].

- Démontrer que les droites (IJ) et (KJ) sont perpendiculaires.



Pour démontrer que deux droites (IJ) et (KJ) sont perpendiculaires, on peut calculer le produit scalaire des vecteurs directeurs associés et montrer qu'il est nul.

Solution

Méthode 1 : on munit le plan du repère orthonormé $(D\ ;\ \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ et on détermine les coordonnées de tous les points de la figure.

- De façon immédiate, A(0 ; 1), B(1 ; 1), C(1 ; 0) et D(0 ; 0).

J étant le milieu de [BC], $J\left(\frac{1+1}{2}\,;\frac{1+0}{2}\right)$ soit $J\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}0-1\\1-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$. D'où $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}x_I-1\\y_I-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{8}\\0\end{pmatrix}$.

On en déduit $\begin{cases} x_I = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8} \\ y_I = 1 \end{cases}$, ainsi $I\left(\frac{7}{8}\,;1\right)$.

$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}0-0\\1-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. D'où $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}x_K-0\\y_K-0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

On en déduit $\begin{cases} x_K = 0 \\ y_K = \frac{1}{4} \end{cases}$, ainsi $K\left(0\,;\frac{1}{4}\right)$.

- Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont alors :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1-\frac{7}{8}\\\frac{1}{2}-1\end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{8}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix}1-0\\\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

- Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KJ}$ est :

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{KJ} = \left(\frac{1}{8}\right) \times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0.$$

Donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont orthogonaux, d'où les droites (IJ) et (KJ) sont perpendiculaires.

Méthode 2 : on décompose les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KJ}$ pour utiliser les angles droits de la figure et les produits scalaires nuls.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{KJ} &= \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}\right)\cdot\left(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}\right) \\
&= \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{CJ} \\
&= IB \times DC + BJ \times KD - BJ \times CJ \\
&= 1 \times 8 + 4 \times 2 - 4 \times 4 = 0
\end{aligned}$$

On conclut comme ci-dessus que les droites (IJ) et (KJ) sont perpendiculaires.

Si J est le milieu de [BC], alors $J\left(\frac{x_C + x_B}{2}\,;\frac{y_C + y_B}{2}\right)$.

Si $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$.

Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées.

On utilise la relation de Chasles :
$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}$
et $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Application

11 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$, les points A, B, C, D ont pour coordonnées respectives (–3 ; 8), (–1 ; 3), (0 ; 7) et (–5 ; 5).

- Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

12 ABCD est un carré, I est le milieu de [AD] et J est le milieu de [CD].

- Démontrer que les droites (IB) et (AJ) sont perpendiculaires en utilisant deux méthodes différentes.

Aide
On s'aidera d'un schéma.

Les incontournables 36 à 38 p. 233

3 Calculer des longueurs et des mesures d'angle

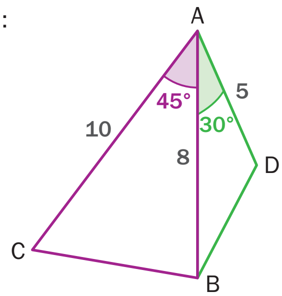
OBJECTIF 3
Calculer des longueurs et des mesures d'angle

À l'aide des indications fournies sur la figure, calculer :

a. la longueur BC ;

b. la longueur de la médiane issue de A dans ABC ;

c. une mesure de l'angle $\widehat{ABD}$ à 0,1° près.



Solution

a. La formule d'Al-Kashi donne dans le triangle ABC :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{A})$

$\quad = 8^2 + 10^2 - 2 \times 8 \times 10 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 164 - 80\sqrt{2}$.

On conclut $\underline{BC = \sqrt{164 - 80\sqrt{2}}}$.

> On peut noter $\widehat{A}$ au lieu de $\widehat{CAB}$ car on a précisé dans quel triangle on applique la formule.

> $\cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b. On note A′ le milieu de [BC].
Une formule de la médiane donne dans le triangle ABC :

$2AA'^2 = AB^2 + AC^2 - \dfrac{BC^2}{2} = 8^2 + 10^2 - \dfrac{164 - 80\sqrt{2}}{2} = 82 + 40\sqrt{2}$,

donc $AA'^2 = 41 + 20\sqrt{2}$, d'où $\underline{AA' = \sqrt{41 + 20\sqrt{2}}}$.

c. Dans le triangle ABD, on peut calculer $\cos(\widehat{B})$ grâce à la formule d'Al-Kashi :

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \times AB \times BD \times \cos(\widehat{B})$.

Or, $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos(\widehat{A})$

$\quad = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 89 - 40\sqrt{3}$.

D'où $BD = \sqrt{89 - 40\sqrt{3}}$.

Comme $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \times AB \times BD \times \cos(\widehat{B})$,

on a $5^2 = 8^2 + 89 - 40\sqrt{3} - 2 \times 8 \times \sqrt{89 - 40\sqrt{3}} \times \cos(\widehat{B})$,

d'où $-16\sqrt{89 - 40\sqrt{3}} \times \cos(\widehat{B}) = 25 - 64 - 89 + 40\sqrt{3}$.

Ainsi, $\cos(\widehat{B}) = \dfrac{-128 + 40\sqrt{3}}{-16\sqrt{89 - 40\sqrt{3}}}$ et donc $\underline{\widehat{B} \approx 34{,}2°}$.

> Afin de calculer $\cos(\widehat{B})$ avec la formule d'Al-Kashi, il est nécessaire de connaître la longueur BD, qui est calculée à partir de la formule d'Al-Kashi appliquée à l'angle $(\widehat{BAD})$.

> Sur un outil numérique, on utilise la fonction arccos.

Application

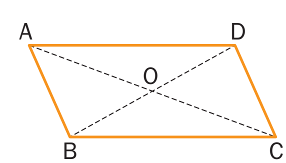
13 Dans le triangle DEF, DE = 4, DF = 7 et EF = 8.

a. Déterminer $\widehat{D}$.

b. On note E′ le milieu de [DF]. Calculer la longueur EE′.

14 Sachant que SR = 4, RT = 10 et que $\widehat{SRT} = 60°$, calculer ST.

15 ABCD est un parallélogramme de centre O tel que AB = 5, BC = 6 et AC = 8.



a. Déterminer BD.

b. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{CBA}$.

Les incontournables 39 à 41 p. 233

4 Étudier un ensemble de points

OBJECTIF 4
Étudier un ensemble de points

A et B sont deux points du plan tels que AB = 4.

1. Déterminer et représenter les ensembles des points M du plan vérifiant chacune des relations ci-dessous.

a. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 1$ **b.** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2$ **c.** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} \leqslant -1$

2. Déterminer l'ensemble des nombres réels k tels que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$ soit réduit à l'ensemble vide.

Solution

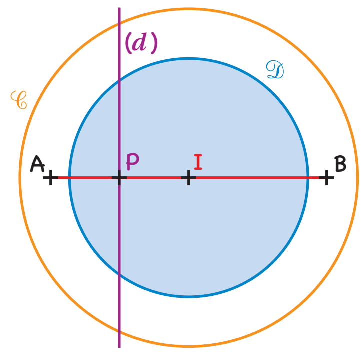
1. a. • On va montrer qu'il existe un point P ∈ (AB) tel que $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = 1$.

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, on a :

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = AP \times AB$$

et donc $AP = \frac{1}{AB} = \frac{1}{4}$.

Ainsi, P est tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.



On va s'appuyer sur le point P pour se ramener à déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

• $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{PA}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

On réécrit l'égalité de l'énoncé avec deux produits scalaires contenant $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{PA}$
$= \overrightarrow{PM}$
d'après la relation de Chasles.

L'ensemble des points M du plan vérifiant la relation est donc la droite (d) passant par P et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

On applique la propriété du cours.

b. On note I le milieu du segment [AB].

On sait que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ (formule de la médiane).

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 2 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{4^2}{4} + 2 \Leftrightarrow MI^2 = 6.$

L'ensemble des points M du plan vérifiant la relation est donc le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.

c. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} \leqslant -1 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} \leqslant -1 \Leftrightarrow MI^2 \leqslant \frac{4^2}{4} - 1 \Leftrightarrow MI^2 \leqslant 3.$

L'ensemble des points M du plan vérifiant la relation est donc le disque $\mathscr{D}$ de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

2. Pour tout point M du plan :

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{4^2}{4} + k \Leftrightarrow MI^2 = k + 4.$

On aboutit à l'ensemble vide si et seulement si $k + 4 < 0$, c'est-à-dire $k < -4$.

On aboutit à l'ensemble vide quand le membre de droite d'une équation de la forme $MI^2 = k$ est strictement négatif.

Application

16 Pour un segment [CD] de longueur 6 et de milieu I, déterminer les ensembles de points M vérifiant chacune des relations suivantes.

a. $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CD} = 2$ **b.** $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{CD} = 4$ **c.** $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = 5$ **d.** $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{DM} = 1$

Les incontournables 42 et 43 p. 233

RETENIR L'ESSENTIEL…

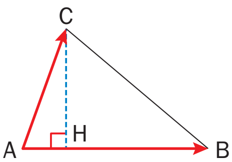
Fiche de cours

Produit scalaire de deux vecteurs…

… avec la projection orthogonale

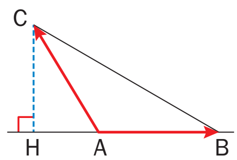
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont …

… de même sens :



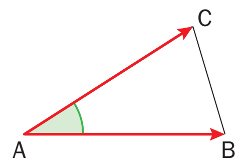
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$

… de sens contraire :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

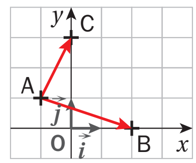
… avec la trigonométrie



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
$= AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

… avec les coordonnées

Dans un repère orthonormé, si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = xx' + yy'$

Cours 1 p. 222

Montrer ou utiliser la perpendicularité ou l'orthogonalité

A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts.

Les droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires**. $\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux**. $\Leftrightarrow$ Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. $\Leftrightarrow$ Dans un repère orthonormé : si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $xx' + yy' = 0$.

Cours 2 p. 223

Calculer…

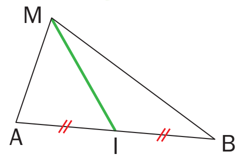
… une distance

Dans un **repère orthonormé** : si $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ alors

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

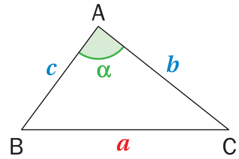
Avec la **médiane** :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$



Avec les **formules d'Al-Kashi** :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\alpha)$$



… un angle

Dans un **triangle rectangle**, on utilise les formules de **trigonométrie** : cosinus, sinus et tangente.

Avec le **produit scalaire** :

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

Avec les **formules d'Al-Kashi** :

$$\cos\left(\widehat{A}\right) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

Cours 3 p. 224

Étudier un ensemble $\mathscr{E}$ de points M

k est un nombre réel, $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{u} = k$	$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$
$\mathscr{E}$ est une **droite** de vecteur normal $\vec{u}$.	$\mathscr{E}$ est l'**ensemble vide**, ou le **point** I, milieu de [AB], ou un **cercle** de centre I.

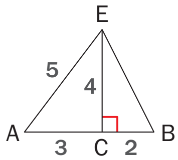
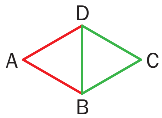
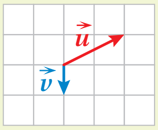
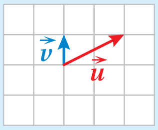
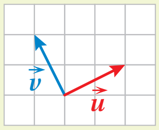
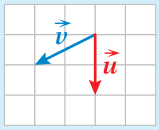
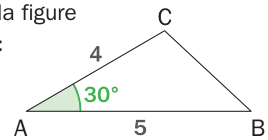
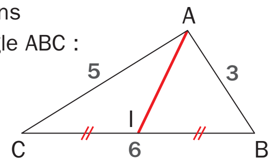
Cours 4 p. 225

QUIZ

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

Vérifiez que vous avez compris le cours.

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

	A	B	C	D
17 Dans le triangle AEB : 	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = 30$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = 15$	$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC} = 16$	$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC} = 8$
18 ABD et BCD sont des triangles équilatéraux et BD = 6 cm. 	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 18$	$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD} = 6$	$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -18$	$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD} = 18$
19 $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ sur les figures :				
20 Sur la figure ci-contre : 	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 20$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10\sqrt{3}$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$
21 Si $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ alors :	$\lVert\vec{u}\rVert^2 = 1$	$\lVert\vec{v}\rVert^2 = 10$	$\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 = 13$	$\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 = 15$
22 $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ est orthogonal à :	$\vec{v}\begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix}$	$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$	$\vec{v}\begin{pmatrix}-15\\30\end{pmatrix}$	$\vec{v}\begin{pmatrix}a\\2a\end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
23 La droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ admet pour vecteur normal :	$\vec{n}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$	$\vec{n}\begin{pmatrix}15\\9\end{pmatrix}$	$\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$	$\vec{n}\begin{pmatrix}-6\\10\end{pmatrix}$
24 On considère la figure de la question **20**.	BC ≈ 8,7	BC ≈ 2,5	BC ≈ 4,9	BC ≈ 7,6
25 Dans le triangle ABC : 	$\cos(\widehat{CAB}) = \frac{3}{5}$	$\cos(\widehat{B}) = \frac{3}{4}$	$AI = \sqrt{8}$	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{7}{4}$

Pour les questions 26 et 27, A et B sont deux points du plan et AB = 4.

	A	B	C	D
26 L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ est :	l'ensemble vide.	la droite (AB).	une droite perpendiculaire à (AB).	un cercle.
27 L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = -5$ est :	l'ensemble vide.	la droite (AB).	une droite perpendiculaire à (AB).	un cercle.

Corrigés p. 368

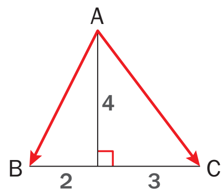
DÉVELOPPER SES STRATÉGIES ET MÉTHODES

Les bons réflexes — Adoptez la bonne stratégie !

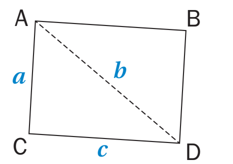
28 **Parlons stratégies !** À l'oral

Dans chaque cas, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et expliquer la **stratégie** choisie.

a.

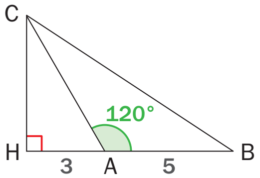


b.

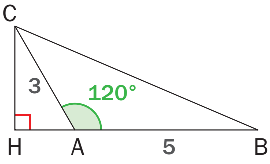


ABDC est un parallélogramme.

c.



d.



Différentes stratégies pour déterminer un produit scalaire

Stratégie 1 J'utilise la projection orthogonale de l'un des vecteurs sur la droite portant l'autre vecteur.

Stratégie 2 J'utilise le cosinus d'un angle.

Stratégie 3 J'utilise les coordonnées des vecteurs.

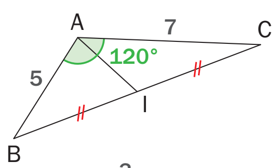
J'utilise une **autre stratégie** !

29 **Parlons stratégies !** À l'oral

1.

a. Calculer BC.

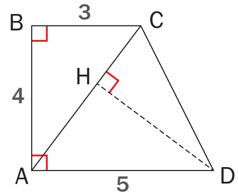
b. Calculer AI.



2.

a. Calculer CD.

b. Calculer DH.



Différentes stratégies pour calculer une distance

Stratégie 1 J'utilise les coordonnées des points dans un repère orthonormé.

Stratégie 2 J'utilise le théorème de la médiane.

Stratégie 3 J'utilise le théorème d'Al-Kashi.

J'utilise une **autre stratégie** !

30 **En moins d'une minute !** À l'oral

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites (AB) et (CD). Dans chaque cas, ces droites sont-elles perpendiculaires ?

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\9\end{pmatrix}$. **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

2. Déterminer un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{w}$.

a. $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

31 **En moins de deux minutes !**

A(2 ; –1) et B(–3 ; –2) sont deux points du plan.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur du plan.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a. $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 3$ **b.** $MA^2 + MB^2 = 5$ **c.** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -2$

32 **En moins de deux minutes !**

On donne A(2 ; –1), B(0 ; 1) et C(1 ; –2).

a. Calculer AB et AC.

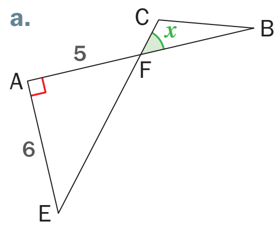
b. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

c. Calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

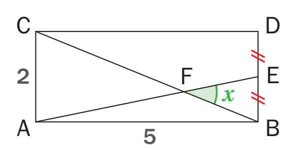
33 **Chacun sa méthode** En groupe

Déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle x demandé, en utilisant dans chaque cas une méthode différente.

a.



b.



Les incontournables

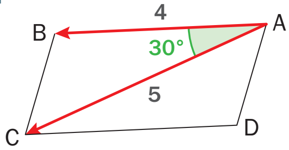
Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

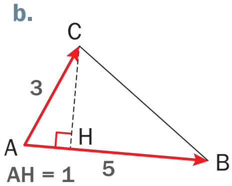
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

34 Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

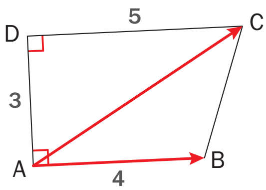
a.



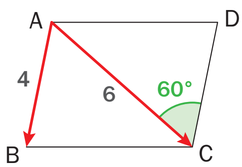
b.



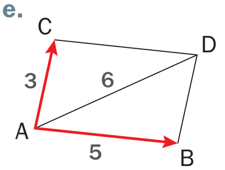
c.



d.



e.



35 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 8$. Calculer :

a. $-2\vec{u}\cdot(3\vec{u} + \vec{v})$

b. $(2\vec{u} - 3\vec{v})\cdot(-4\vec{u} + \vec{v})$

c. $\|\vec{u} + \vec{v}\|$

d. $\|\vec{u} - \vec{v}\|$

Démontrer l'orthogonalité

36 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan.
Sont-ils orthogonaux ?

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$.

37 A(−2 ; 5), B(4 ; 3) et C(1 ; −6) sont trois points du plan.

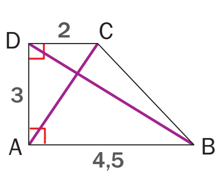
a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

c. En déduire la nature du triangle ABC.

38 Sur la figure ci-contre, ABCD est un trapèze rectangle.

- Démontrer que les diagonales du trapèze sont perpendiculaires.



Calculer des longueurs et des mesures d'angle

39 A(4 ; 1), B(0 ; 5) et C(−2 ; −1) sont trois points du plan.

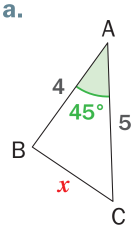
a. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire que $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

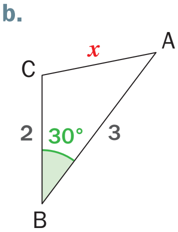
c. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

40 ABC est un triangle.
Déterminer la longueur x du côté manquant, dans chacun des cas suivants.

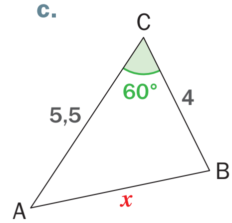
a.



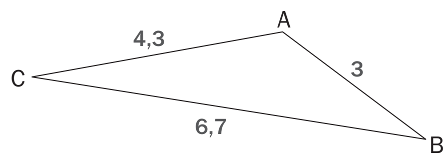
b.



c.



41 ABC est un triangle tel que AB = 3 cm, AC = 4,3 cm et BC = 6,7 cm.



a. Déterminer une valeur approchée des mesures des angles du triangle ABC.

b. I est le milieu du segment [BC] ; calculer la longueur AI.

Étudier un ensemble de points

42 [AB] est un segment de longueur 6 cm.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 20$;

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -10$.

2. Représenter graphiquement ces ensembles.

43 ABC est un triangle tel que AB = 8, AC = 5 et $\widehat{BAC} = 60°$.

a. Calculer BC et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

c. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Corrigés p. 368

Entraînement

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 1 Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

Savoir-faire 1 p. 226

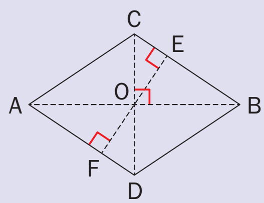
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

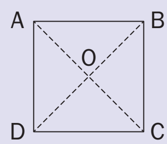
44 ACBD est un losange de centre O.
Déterminer les projections orthogonales des vecteurs sur la droite indiquée.

a. $\overrightarrow{AC}$ sur (AB).
b. $\overrightarrow{BD}$ sur (DC).
c. $\overrightarrow{OC}$ sur (BC).
d. $\overrightarrow{AD}$ sur (CD).
e. $\overrightarrow{OB}$ sur (EF).
f. $\overrightarrow{AB}$ sur (EF).



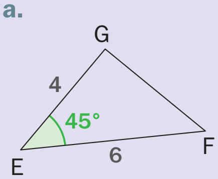
45 ABCD est un carré de centre O et de côté 1.
Calculer les produits scalaires suivants.

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$ **b.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$
c. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$ **d.** $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$
e. $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DC}$ **f.** $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CB}$

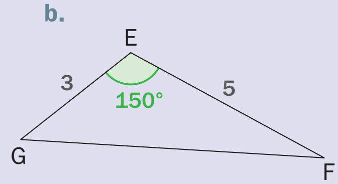


46 Calculer $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}$ dans chaque cas.

a.



b.



47 Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ sachant que :

a. $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 12$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 8$;
b. $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 12$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\| = 7$.

48 Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chaque cas.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

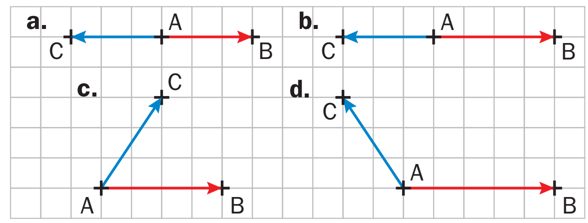
c. $\vec{u} = 3\vec{i}+2\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i}+\vec{j}$.

49 Vrai ou faux ?

a. « Si deux vecteurs sont colinéaires, alors leur produit scalaire est égal au produit de leurs normes. »
b. « Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$ alors $\vec{u} = \vec{w}$. »
c. « Il existe des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} < 0. »$$
d. « Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$. »

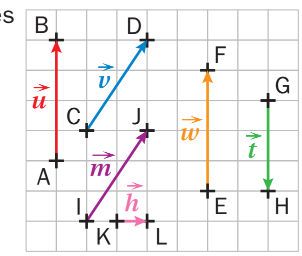
Pour les exercices **50** à **52**
Les carrés du quadrillage sont de côté 1.

50 Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans chaque cas.

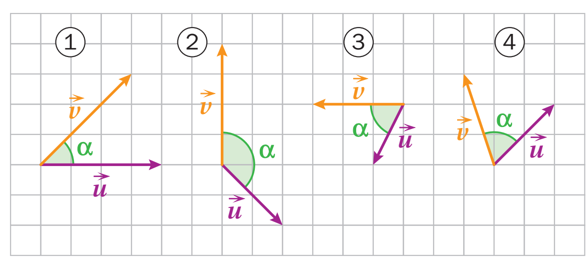


51 Calculer les valeurs des produits scalaires suivants.

a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$
b. $\vec{t}\cdot\vec{w}$
c. $\vec{m}\cdot\vec{h}$
d. $\vec{w}\cdot\vec{u}$
e. $\vec{v}\cdot\vec{w}$
f. $\vec{m}\cdot\vec{u}$



52 **1.** Pour chaque figure ci-dessous, calculer :
a. $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$; **b.** $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
2. En déduire la valeur de l'angle géométrique α.



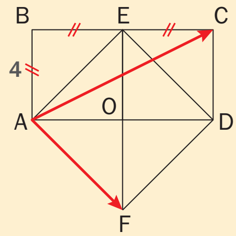
53 ABC est un triangle.
1. Déterminer, si possible, la longueur AC.
a. AB = 3 ; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -6$; $\widehat{BAC} = 60°$.
b. AB = 5 ; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -10$; $\widehat{BAC} = 135°$.
2. Déterminer, si possible, une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
a. AB = 2 ; AC = $\sqrt{2}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -2$.
b. AB = 5 ; AC = 2 ; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 15$.
c. AB = 3 ; AC = 4 ; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 12$.

54 Règle de calculs
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan tels que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5$.
a. Calculer $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(5\vec{u}-\vec{v})$.
b. Calculer $(\vec{u}+\vec{v})^2$.

Fichier Python
Ex. 62
Manuel numérique enseignant

55 Copie à la loupe

Victor doit calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$ à l'aide des indications données sur la figure ci-contre, sachant que ABCD et EAFD sont des rectangles.



Voici sa réponse.

Le projeté du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur (AD) est $\overrightarrow{AD}$.
Le projeté du vecteur $\overrightarrow{AF}$ sur (AD) est $\overrightarrow{AO}$.
Donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO} = AD \times AO$ car les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires de même sens.
Donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF} = 8 \times 4 = 32$.

a. Identifier les erreurs commises par Victor.
b. Résoudre le problème en décomposant $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.

Maths à l'oral
Expliquez et corrigez chacune des erreurs identifiées.

56 Identités de polarisation

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan. Après avoir développé $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$, prouver que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).$$

57 Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

a. AB = 4, AC = 7 et BC = 5.
b. ABC est isocèle en B, AB = 3 et AC = 4.
c. ABC est rectangle en B, AB = 6 et AC = 10.
d. ABDC est un parallélogramme, AB = 5, AC = 4 et AD = 7.

58 $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan.

Calculer les produits scalaires suivants.

a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$
b. $\vec{u}\cdot(-4\vec{v})$
c. $-\vec{u}\cdot(2\vec{v})$
d. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

59 IN ENGLISH p. 381

1. A(3 ; –3), B(7 ; –5) et C(4 ; –2) are three points in a x-y plane.
Calculate the scalar product of vectors $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$.
2. a. Calculate |AB| and |AC|.
b. Deduce an approximate value of angle $\widehat{BAC}$.

60 LOGIQUE

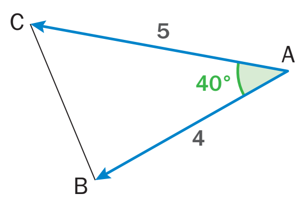
Dans chaque cas, indiquer si les propositions ① et ② sont équivalentes ou si l'une implique l'autre.

a. ① $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$. ② A, B et C sont alignés.
b. ① $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. ② $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
c. ① $\vec{u} = 3\vec{v}$. ② $\vec{u}^2 = 9\vec{v}^2$.
d. ① $\|\vec{u}\| = 0$. ② $\vec{u} = \vec{0}$.

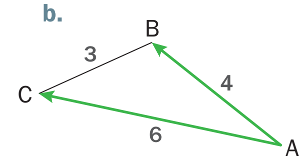
★★

61 Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ en choisissant une méthode adaptée.

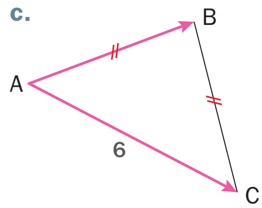
a.



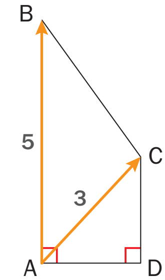
b.



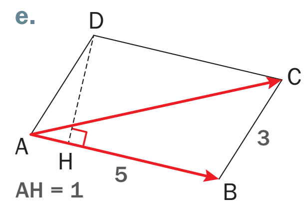
c.



d.



e.



f. AB = 7, AC = 1, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{2\pi}{3}$.

62 PROGRAMMATION python

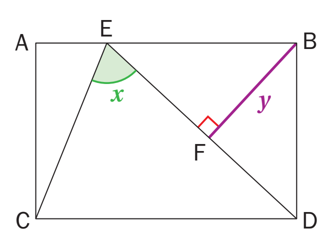
a. Écrire un programme en Python qui calcule le carré de la norme d'un vecteur connaissant ses coordonnées.

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan.

Recopier et compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle renvoie le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

```
def produitscalaire(a,b,c,d):
    u=a**2+b**2
    v=c**2+d**2
    z=...
    w=0.5(...-...-...)
    return w
```

63 ABDC est un rectangle de longueur AB = 6 et de largeur AC = 4.
E est un point du segment [AB] défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.
F est le projeté orthogonal du point B sur la droite (ED).



a. En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$ de deux façons différentes, calculer l'angle $\widehat{DEC}$.
b. En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE}$ de deux façons différentes, calculer la longueur BF.

Aide Dans les deux cas, on pourra utiliser les coordonnées des points dans un repère bien choisi.

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 2 Exploiter la relation d'orthogonalité

Savoir-faire 2 p. 227

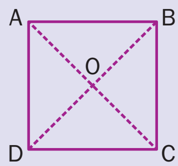
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

Questions FLASH

64 ABCD est un carré de centre O.

- Déterminer quatre couples de vecteurs orthogonaux.



65 **Vrai ou faux ?**

a. « $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ sont orthogonaux. »

b. « $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux. »

c. « $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2+a\\1\end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$, sont orthogonaux. »

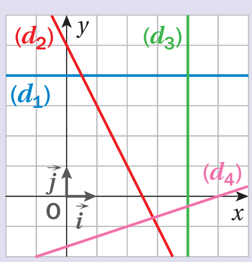
d. « $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$ sont orthogonaux. »

66 Dans chaque cas, déterminer un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

d. $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$ **e.** $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

67 Déterminer un vecteur normal à chacune des droites représentées ci-contre.



68 **Vrai ou faux ?**

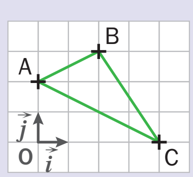
a. « Si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ alors les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux. »

b. « Si les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. »

c. « Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$. »

d. « Si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. »

69 Le triangle ABC ci-contre est-il rectangle ?



70 Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et déterminer la (ou les) valeur(s) éventuelle(s) de m telle(s) que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}5-m\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}m-2\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3-m\\m\end{pmatrix}$.

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}-m\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m\\4\end{pmatrix}$. **d.** $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\m\end{pmatrix}$.

71 A, B et C sont des points du plan.

1. Dans chaque cas, indiquer si le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est orthonormé.

a. A(5 ; –6), B(4,4 ; –5,2) et C(4,4 ; –6,8).

b. A(1 ; 2), B(2 ; 2,5) et C(0,5 ; 1).

2. a. Montrer que le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ tel que A(1 ; –5), B(2 ; –7) et C(3 ; –4) n'est pas orthonormé.

b. À partir de ces trois points, donner un repère orthonormé du plan.

72 A(2 ; 1), B(–1 ; 2), C(–3, –4) et D(1 ; –2) sont des points du plan.

a. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

73 **Vrai ou faux ?**

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

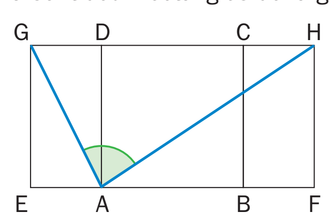
a. « A(1 ; 2), B(2 ; 3), C(2 ; –4) et D(–3 ; 0). »

b. « A(2 ; 4), B(4 ; –3), C(6 ; 3) et D(–1 ; 1). »

c. « $A(\sqrt{3} ; 8)$, $B(\sqrt{2} ; 3)$, $C(-2 ; -\sqrt{2})$ et $D(3 ; -\sqrt{3})$. »

74 ABCD est un carré de côté 4.

AEGD et BFHC sont deux rectangles de largeur 2.



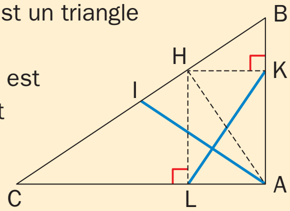
- Étudier la perpendicularité des droites (AG) et (AH) en calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$.

75 Justifier que si E(1 ; 5), F(–4 ; 4), G(–4 ; 20) et H(4 ; 19), alors EFGH est un rectangle.

Fichiers Python et logiciel
Ex. 78, 80 et 82
Manuel numérique enseignant

76 Copie à la loupe

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A, H est le pied de la hauteur issue de A et I est le milieu de [BC]. K et L sont les projetés orthogonaux de H sur [AB] et [AC] respectivement.



Julie a rédigé la réponse suivante à l'énoncé donné avec cette figure.

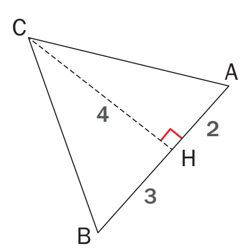
Dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on a :
$A(0\ ;\ 0)$; $B(1\ ;\ 0)$; $C(0\ ;\ 1)$; $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
Donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_H\\y_H\end{pmatrix}$.
Comme $(AH) \perp (BC)$: $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
$-x_H + y_H = 0 \Rightarrow x_H = y_H$.
L'équation de la droite (BC) est $y = -x + 1$.
Et $H \in (BC)$ donc $y_H = -x_H + 1 = -y_H + 1$.
Donc $2y_H = 1 \Rightarrow y_H = \frac{1}{2}$.
$H\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et $L\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et $K\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.
On obtient alors $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$.
Donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{KL} = 0$: c'est vrai.

a. Proposer un énoncé possible pour l'exercice traité par Julie.
b. Identifier les erreurs commises par Julie et les corriger.

Maths à l'oral
Expliquez chaque erreur identifiée.

77 IN ENGLISH p. 381

ABC is a triangle and H is the orthogonal projection of C onto AB.



● Calculate the scalar product of vectors $\overrightarrow{CA}$ and $\overrightarrow{CB}$ in two differents ways.

78 PROGRAMMATION python

Voici une fonction en Python qui teste si deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$, avec a, b, c, d entiers, sont orthogonaux.

```python
def orthogonaux(a,b,c,d):
    p=a*b-c*d
    if p==0:
        return True
    else:
        return False
```

1. Corriger les deux erreurs commises.
2. Tester la fonction lorsque :
a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$; **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.

★★

79 Coordonnées de l'orthocentre

$A(0\ ;\ 3)$, $B(2\ ;\ -1)$ et $C(-2\ ;\ 3)$ sont trois points du plan. On cherche à déterminer les coordonnées du point $H\ (x\ ;\ y)$, orthocentre du triangle ABC.

1. a. Calculer de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}$.
b. En déduire une relation entre x et y.
2. Calculer de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire les coordonnées du point H.

80

$A(6\ ;\ 1)$ et $B(-3\ ;\ 3)$ sont deux points du plan. Une équation de la droite (d) est $y = 2x$.
On cherche à déterminer s'il existe des points M appartenant à la droite (d) tels que les droites (AM) et (BM) soient perpendiculaires.

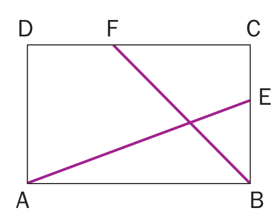
1. TICE Construire une figure sur un logiciel de géométrie dynamique et conjecturer une solution au problème.
2. On note $M(x\ ;\ y)$.
a. Si M appartient à (d), établir une relation entre x et y.
b. Exprimer en fonction de x les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.
c. Calculer $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ en fonction de x.
d. Conclure.

81

a est un nombre réel et ABCD est un carré de côté a. E est un point du segment [AB] et F le point du segment [AD] tel que $AE = DF$. On pose $AE = x$.
a. Exprimer en fonction de a et de x les produits scalaires $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AD}$.
b. Démontrer que les droites (CF) et (ED) sont perpendiculaires.

82

ABCD est un rectangle de longueur $AB = 8$ et de largeur $AD = 5$.
E est un point du segment [CB] tel que $CE = 2$.



On cherche à déterminer la position du point F sur le segment [CD] pour que les droites (FB) et (EA) soient perpendiculaires.
a. TICE Représenter la situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et conjecturer une réponse à la question posée.
b. Valider ou corriger cette conjecture.

Aide
On pourra exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FB}$ en fonction de DF dans un repère bien choisi.

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

83

$R(-2\ ;\ 3)$, $S(4\ ;\ 5)$ et $T(3\ ;\ -2)$ sont trois points du plan.
● Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point T sur la droite (RS), c'est-à-dire le point $U \in (RS)$ tel que $(TU) \perp (RS)$.

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 3 Calculer des longueurs et des mesures d'angle

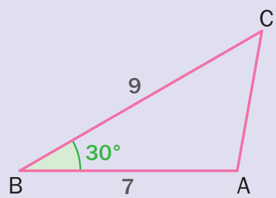
Savoir-faire 3 p. 228

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

84 Un triangle RST isocèle en R est tel que RS = 4 et $\widehat{R} = 120°$.
On note H le pied de la hauteur issue de R.
a. Calculer la longueur HR.
b. En déduire ST.

85 Calculer la longueur AC dans le triangle ABC ci-contre.



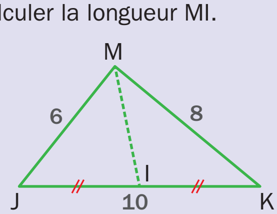
86 Dans un triangle DEF, DE = 5, DF = 3 et $\widehat{D} = 45°$.
● Calculer la longueur EF.

87 On donne IJ = 8, JK = 7 et JK = $\sqrt{113}$.
a. Déterminer la nature du triangle IJK.
b. En déduire une mesure des angles de ce triangle.

88 Dans un triangle ABC, on a AB = 15, AC = 9 et BC = 12.
a. Calculer la longueur de la médiane issue de A.
b. On note B' le milieu de [AC].
Calculer la longueur BB'.

89 Dans un triangle GHL, on a GH = 6, GL = 11 et HL = 8.
a. Calculer $\cos(\widehat{G})$ et $\cos(\widehat{H})$.
b. En déduire une valeur approchée d'une mesure de $\widehat{L}$.

90 À l'aide des informations données sur la figure ci-dessous, calculer la longueur MI.



91 Sachant que NP = 2, on construit les points :
• Q tel que Q ∈ [NP) et NQ = 3NP ;
• R tel que $(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NR}) = 60°$ et NR = 5NP.
● Calculer la distance QR.

92 Un triangle RSN est tel que RS = 3, RN = 7 et SN = 9.
● Déterminer une mesure de chaque angle de ce triangle.

93 **a.** Dans un triangle ABC, AB = 6, AC = 15 et BC = 10. Calculer une valeur approchée de la mesure de chaque angle.
b. Dans un triangle DEF, DE = 10, DF = 7 et $\widehat{D} = 60°$. Calculer la longueur EF.
c. Sachant que IJ = 32, IK = 20 et que $\widehat{JIK} = 30°$, calculer la longueur JK.
d. Estimer l'angle $\widehat{GHL}$, sachant que GH = 22, HL = 21 et GL = 25.

94 **a.** Un segment [AB] est de longueur 9 et de milieu I. Sachant qu'un point M est tel que MA = 4 et MB = 7,5, calculer la distance MI.
b. Dans un triangle DEF, on note E' le milieu de [DF]. Sachant que EE' = 10, DE = 15 et DF = 21, calculer la distance EF.
c. Un triangle GHL est tel que GH = 7, GL = 12 et HL = $\sqrt{60}$. Calculer la longueur des médianes issues de H et de L.

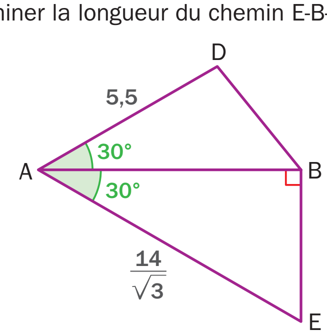
95 Le triangle MNP est défini par MN = 9, MP = 5 et NP = 7,5. On note M', N' et P' les milieux respectifs des segments [NP], [MP] et [MN].
● Calculer la longueur de chaque médiane.

96 On donne AB = 5, BC = 3 et $\widehat{B} = 60°$.
a. Calculer la longueur AC.
b. En déduire $\widehat{A}$, puis $\widehat{C}$.

97 IJKL est un rectangle avec JI = 5 et LI = 4.
Le point M situé à l'intérieur du rectangle est tel que MI = 2 et $\widehat{JIM} = 30°$.
a. Calculer la longueur MJ, puis la longueur ML.
b. En déduire la longueur MK.

98 Le triangle EFG est tel que EF = 10,5, FG = 16 et $\widehat{EFG} = 45°$.
● Calculer le périmètre du triangle EFG.

99 Déterminer la longueur du chemin E-B-D.



Aide Calculer les longueurs EB et BD à l'aide de différentes expressions de produits scalaires.

Fichier Python
Ex. 115
Manuel numérique enseignant

100 De la conjecture à sa démonstration

Le triangle ABC est tel que AB = 8, AC = $\sqrt{\dfrac{64}{3}}$ et $\widehat{BAC} = 30°$.

a. Tracer le triangle ABC.
Que peut-on conjecturer quant à sa nature ?

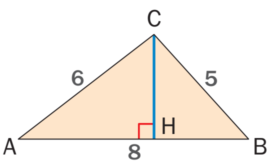
b. On note I le milieu de [AB].
Démontrer que le triangle IAC est rectangle en I.

c. Conclure quant à la nature du triangle ABC.

Maths à l'oral
Présentez à la classe votre solution à cet exercice.

Pour les exercices 101 à 103
Calculer la longueur de la hauteur issue de C et en déduire l'aire du triangle ABC.

101



102 AC = 6, $\widehat{A} = 45°$, AB = 10.

103 AC = 7, BC = 8 et $\widehat{C} = 45°$.

104 ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD], rectangle en A et en D.
On a AB = 7, BC = 12 et $\widehat{DCB} = 60°$.

a. Calculer l'aire de ce trapèze.

b. Calculer la longueur BD.

Pour les exercices 105 à 107
Calculer les longueurs exactes demandées et des valeurs approchées de celles-ci à 10^{-2} près.

105 Dans le triangle ABC, AB = 9, AC = 17 et $\widehat{A} = 40°$.
- Calculer la longueur BC.

Info
Un résultat de la forme BC = 370 – 306 cos(40°) est une valeur exacte.

106 Dans le triangle DEF, DF = 3, EF = 5 et $\widehat{F} = 50°$.
- Calculer la longueur DE.

107 Dans le triangle IJK, IJ = 5, $\widehat{J} = 30°$ et JK = 12.
- Calculer la longueur IK.

108 Dans le triangle RST, on a RS = 5, RT = 4 et $\widehat{R} = 45°$.
- Calculer la longueur de la médiane issue de R.

109 Le rectangle ABCD a pour dimension AB = 10 et AD = 4. Le point P à l'intérieur de ABCD est tel que AP = 3 et $\widehat{CAP} = 15°$ dans le sens anti-horaire.

a. Calculer les longueurs BP et DP.

b. En déduire la longueur CP.

★★

Pour les exercices 110 à 113
Résoudre les triangles proposés, c'est-à-dire déterminer toutes les longueurs et des valeurs approchées à 0,1° près des mesures d'angle.

110 Le triangle ABC est isocèle en A, AB = 7, $\widehat{B} = 46°$.

111 Le triangle DEF est tel que DF = 11, EF = 19 et $\widehat{F} = 25°$.

112 Le triangle IJK est tel que $\widehat{I} = 120°$, IK = 3 et IJ = 14.

113 Le triangle MNP est tel que $\widehat{N} = 101°$, MN = 16,5 et NP = 13.

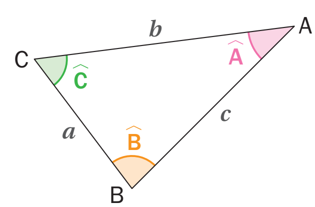
114 Le triangle PQR est tel que PR = 5, PQ = 12 et QR = $\sqrt{97}$. On note R' le milieu de [PQ].

a. Prouver que le triangle PRR' est isocèle.

b. On note P' le milieu de [QR].
Le point P' appartient-il au cercle de centre Q et de rayon la longueur QP ?

115 ABC est un triangle dont on connaît les longueurs a et b, et une mesure de l'angle $\widehat{C}$.

1. Exprimer la longueur c et $\cos(\widehat{B})$ en fonction des données.



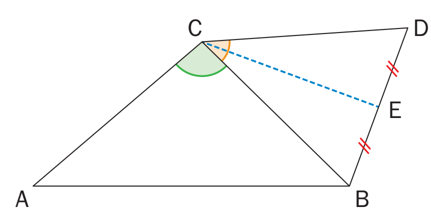
2. PROGRAMMATION python Écrire :

a. une fonction en Python `A_K_long` prenant en paramètres a, b et $\widehat{C}$ et renvoyant c ;

b. une fonction en Python `A_K_angle` prenant en paramètres a, b et $\widehat{C}$ et renvoyant une mesure des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$.

Aide
Le module `math` contient les fonctions `cos` et `acos` (qui à un cosinus d'angle renvoie une mesure de cet angle en radians).

116 Le triangle ABC est tel que AC = 7, AB = 10 et BC = 6,5.



a. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

b. Sachant que $\widehat{BCD} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$, déterminer une valeur approchée de CE, où E est le milieu du segment [BD].

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 4 Étudier un ensemble de points

Savoir-faire 4 p. 229

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

117 A, B et P sont trois points alignés.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = 1$ **b.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = -4$

c. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BA} = 2{,}5$ **d.** $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = \sqrt{2}$

e. $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AB} = -10$

118 A et B sont deux points du plan tels que AB = 5.
Déterminer les ensembles de points M tels que :

a. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 1$; **b.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -4$;

c. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA} = 2{,}5$; **d.** $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \sqrt{2}$;

e. $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AB} = -10$.

119 A, B et M sont trois points du plan, et I est le milieu du segment [AB]. Déterminer la valeur de MI^2.

a. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 3$, avec AB = 3.

b. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -3$, avec AB = 3.

c. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB} = -10$, avec AB = 8.

d. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 1$, avec AB = 1.

120 [AB] est un segment de longueur 4 cm.
I est le milieu de [AB].
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$ lorsque :

a. $k = -4$; **b.** $k = -1$; **c.** $k = 2$.

121 D et E sont deux points du plan tels que DE = 5.

1. On note $\mathscr{D}_1$ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DE} = 3$.

a. Le point A de la droite (DE) est défini par $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE} = 3$.
Montrer que $\overrightarrow{DA} = 0{,}6\overrightarrow{DE}$.

b. Montrer que pour tout point M appartenant à $\mathscr{D}_1$, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DE} = 0$.

c. Reconnaître l'ensemble $\mathscr{D}_1$.

2. Reprendre la question **1** afin de déterminer $\mathscr{D}_2$, ensemble des points P tels que $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DE} = 10$.

122 S et U sont deux points du plan tels que SU = 8.

1. On note $\mathscr{C}_1$ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{UM} = 3$.

a. T est le milieu de [SU]. Prouver que :

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{UM} = 3 \Leftrightarrow MT^2 = 19.$$

b. Reconnaître l'ensemble $\mathscr{C}_1$.

2. Reprendre la question **1** afin de déterminer $\mathscr{C}_2$, ensemble des points P tels que $\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{UP} = -3$.

★

123 Le segment [GH] est de longueur 10.

a. Justifier que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MH} = 5$ est une droite perpendiculaire à (GH).

b. En déduire la nature de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MH} \leqslant 5$.

124 Le segment [EF] est de longueur 3 cm.
Le point P appartient à la demi-droite [FE) et est tel que EP = 7.
● Déterminer la valeur de k telle l'égalité $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EF} = k$ soit vérifiée.

125 Pour deux points C et D tels que CD = 6, on note :
- $\mathscr{D}_1$ l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CD} = 12$;
- $\mathscr{D}_2$ l'ensemble des points Q tels que $\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{CD} = 3$;
- $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M tels que $3 \leqslant \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CD} \leqslant 12$.

a. Déterminer les ensembles $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

b. En déduire la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$.

c. Représenter l'ensemble $\mathscr{E}$.

126 K et L sont deux points tels que KL = 6.
J est le milieu du segment [KL].

1. On s'intéressse à l'ensemble $\mathscr{D}$ des points P tels que :

$$\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{LP} \leqslant 20.$$

a. Montrer que $\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{LP} \leqslant 20 \Leftrightarrow PJ^2 \leqslant 29$.

b. Reconnaître l'ensemble $\mathscr{D}$.

2. Étudier l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{LP} = 5$.

127 Pour deux points R et T tels que RT = 5, on note :
- $\mathscr{C}_1$ l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{TP} = 15$;
- $\mathscr{C}_2$ l'ensemble des points Q tels que $\overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{TQ} = 25$;
- $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M tels que $15 \leqslant \overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{TM} \leqslant 25$.

a. Déterminer les ensembles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

b. En déduire la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$.

c. Représenter l'ensemble $\mathscr{E}$.

128 [GH] est un segment de longueur 10.

1. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M tels que :

$$GM^2 + HM^2 = 56.$$

a. On note I le milieu du segment [GH].
Démontrer que $M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow MI = 3$.

Aide Utiliser une formule de la médiane.

b. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$.

2. On note $\mathscr{C}_k$ l'ensemble des points M tels que :

$$GM^2 + HM^2 = k.$$

Déterminer l'ensemble des valeurs k telles que $\mathscr{C}_k$ soit l'ensemble vide.

★★

129 Copies à la loupe

Gilles et Ginette ont rédigé les réponses suivantes sur leurs copies pour déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 15$ avec AB = 6.

Gilles

Comme $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 + \frac{6^2}{2}$,
on a $MI^2 = 15 - \frac{6^2}{2} = -3$.
Ainsi, l'ensemble cherché est l'ensemble vide.

Ginette

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 15$

$2MI^2 - \frac{AB^2}{2} = 15$ donc $MI^2 = \frac{15 + \frac{36}{2}}{2} = \frac{33}{2}$.

L'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 15$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{33}{2}$.

● Leurs réponses sont-elles correctes ? Identifier toutes les erreurs.

Maths à l'oral

Expliquez chaque étape en discutant des éventuelles erreurs.

130 A et B sont deux points du plan tels que AB = 1.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = 3$.

a. Montrer que $M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow MA^2 - 9MB^2 = 0$.

b. On définit les points P et Q tels que :

$$\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AQ} - 3\overrightarrow{BQ} = \vec{0}.$$

Construire les points P et Q.

c. Justifier que $P \in \mathcal{F}$ et $Q \in \mathcal{F}$.

d. Exprimer $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MP}$, et $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MQ}$.

e. En déduire que $M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = 0$.

f. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathcal{F}$, puis construire cet ensemble.

131 Le segment [IJ] est de longueur 5.

1. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points M tels que :

$$MI^2 - MJ^2 = -10.$$

On note A le milieu du segment [IJ].

a. Démontrer que $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AM} = -5$.

b. En déduire l'ensemble $\mathcal{D}$.

Aide Utiliser une formule de la médiane.

2. Étudier l'ensemble des points N tels que :

$$NI^2 - NJ^2 = 25.$$

132 Le segment [KL] est de longueur 2.

● Justifier que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{ML} = k^2 - 1$ n'est jamais vide.

133 E et F sont deux points du plan tels que EF = 4.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M tels que :

$$ME^2 + 5MF^2 = 400.$$

a. G est le point tel que $\overrightarrow{GE} + 5\overrightarrow{GF} = \vec{0}$.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{EF}$.

b. Calculer les distances GE et GF.

c. Démontrer que $ME^2 + 5MF^2 = 6MG^2 + \frac{40}{3}$.

d. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$.

134 A(2 ; 3) et B(6 ; 6) sont deux points du plan, et I est le milieu du segment [AB].

k est un nombre réel.

1. Calculer la longueur AB.

2. Prouver que pour tout point M :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{4k+25}{4}.$$

3. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$. Déterminer k tel que :

a. $\mathcal{E}$ est l'ensemble vide ;

b. le point O(0 ; 0) appartient à $\mathcal{E}$;

c. l'ensemble $\mathcal{E}$ est un point.

135 A et B sont deux points du plan tels que AB = 5.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points P tels que :

$$\left\|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right\| = PA.$$

a. On note I le milieu du segment [AB].

Exprimer $\left\|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right\|$ en fonction de PI.

b. En déduire que $P \in \mathcal{F} \Leftrightarrow PA^2 - 4PI^2 = 0$.

c. On définit les points C et D tels que :

$$\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$

Justifier que $C \in \mathcal{F}$ et $D \in \mathcal{F}$.

d. Exprimer $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PI}$ en fonction de $\overrightarrow{PC}$, et $\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PI}$ en fonction de $\overrightarrow{PD}$.

e. En déduire que $P \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD} = 0$.

f. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathcal{F}$, puis construire cet ensemble.

136 G, H et K sont trois points tels que GH = 7, GK = 2 et HK = 6.

1. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M tels que :

$$MG^2 - 2MH^2 + 3MK^2 = 50.$$

a. Le point B est le point tel que :

$$\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{BH} + 3\overrightarrow{BK} = \vec{0}.$$

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GK}$.

Info

On admet que :

$BG = \sqrt{32{,}5}$, $BH = \sqrt{154}$ et $BK = \sqrt{41{,}5}$.

b. Démontrer que :

$$MG^2 - 2MH^2 + 3MK^2 = 2MB^2 + BG^2 - 2BH^2 + 3BK^2$$

c. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$.

2. À quelle condition sur k l'ensemble des points M tels que $MG^2 - 2MH^2 + 3MK^2 = k$ n'est pas égal à l'ensemble vide ?

DÉMONTRER LES PROPRIÉTÉS

Vidéo
Démonstration : différentes formules du produit scalaire
hatier-clic.fr/ma1242

Les démonstrations rédigées

Propriété

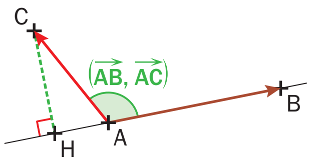
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

OBJECTIF : on souhaite prouver la formule du produit scalaire avec le cosinus.

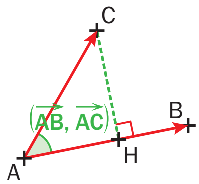
Démonstration

- A, B et C sont trois points distincts du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
- Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

– **Si H $\notin$ [AB]**, alors :
$AH = AC \times \cos\left(\pi - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right)$
$= -AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.



– **Si H $\in$ [AB]**, alors :
$AH = AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.



- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$. ■

Le principe

1. On définit trois points A, B et C pour introduire le **projeté orthogonal** du point C sur la droite (AB).
2. On utilise la **définition par projection orthogonale du produit scalaire** pour exprimer AH en fonction de AC et de $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
3. On conclut.

Propriété

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

OBJECTIF : on souhaite déterminer la formule du produit scalaire avec les coordonnées.

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$. D'où $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.
- Or $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2$,
$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$.
- Donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2))$.

D'où $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') = xx' + yy'$. ■

1. On utilise la propriété reliant **norme et produit scalaire** et le **carré scalaire**.
2. On exprime les carrés des **normes** à l'aide des **coordonnées**.
3. On simplifie l'expression.

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

OBJECTIF : on souhaite prouver un critère d'orthogonalité de deux vecteurs.

- Supposons les deux vecteurs orthogonaux.

– Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

– Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent deux droites perpendiculaires, donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, d'où $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. ■

- Supposons que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Alors :
$\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, soit $(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$.
Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. ■

1. On montre d'abord que l'**implication** (sens direct) est vraie en utilisant la formule avec le cosinus démontrée ci-dessus.
2. On montre ensuite que la **réciproque** est vraie.

▶ Rabat VI, Raisonnements

La démonstration à compléter

137 En s'aidant des **étapes** décrites, recopier et compléter cette démonstration permettant d'**étudier l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$** où A et B sont deux points distincts.

Démonstration

- On note I le milieu du segment [AB].
  On a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\ldots + \ldots)\cdot(\ldots + \ldots)$
- D'où $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}\cdot(\ldots + \ldots) = MI^2 - AI^2$.
- Soit $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \left(\frac{\ldots}{\ldots}\right)^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.
  D'où $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI = \ldots$.
- L'ensemble des points M est donc le cercle de centre I, milieu de [AB], et de rayon $\frac{AB}{2}$. En outre, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux : ce cercle est l'ensemble des points M tels que le triangle MAB est rectangle en M. ■

1 **On décompose les vecteurs** $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en utilisant le milieu I de [AB].

2 Comme I est le milieu de [AB], $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

3 On utilise le fait que I est le milieu de [AB] et on obtient une des **formules de la médiane**.

4 **On reconnaît un cercle** dont on précise le centre et le rayon, puis on fait le lien avec la nature du triangle MAB.

Démonstrations Vers le BAC

138 **1.** Pour un point P et un vecteur $\vec{u}$, prouver que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u} = 0$ est la droite passant par P et de vecteur normal $\vec{u}$.

2. A et B sont deux points du plan et M est un point de la médiatrice du segment [AB], notée $\mathcal{M}$.
On note I le milieu du segment [AB] ; on a $I \in \mathcal{M}$.

a. Prouver que :
$$MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{IM}.$$

b. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux, puis que l'ensemble $\mathcal{M}$ est la droite passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

139 ABC est un triangle.

a. Prouver que :
$$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

b. En déduire une des formules d'Al-Kashi.

140 **a.** Prouver que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}.$$

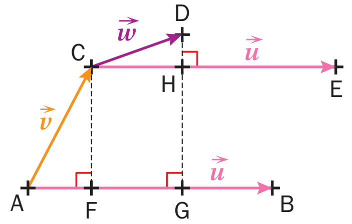
b. À l'aide de la formule avec les coordonnées, prouver que pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:
$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}.$$

c. À l'aide de la formule avec les coordonnées, prouver que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et pour tous nombres réels a et b, on a :
$$\left(a\vec{u}\right)\cdot\left(b\vec{v}\right) = (a \times b)\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right).$$

141 $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs tels que $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ et $\left(\vec{u}, \vec{w}\right)$ sont des angles aigus et k est un nombre réel.

1. À l'aide de l'expression avec les cosinus, prouver la symétrie du produit scalaire :
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}.$$

2. Les points A, B, C, D et E sont tels que :
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} = \vec{u},\ \overrightarrow{AC} = \vec{v} \text{ et } \overrightarrow{CD} = \vec{w}.$$
Les points F et G sont les projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB), et le point H est le projeté orthogonal de D sur la droite (CE).



a. Justifier que :
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = AB \times AF \text{ et } \vec{u}\cdot\vec{w} = AB \times CH.$$

b. Montrer que $\vec{u}\cdot\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = AB \times AG$.

c. En déduire la distributivité du produit scalaire :
$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}.$$

3. a. En notant encore $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et F le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), justifier que $\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right) = k \times AB \times AF$.

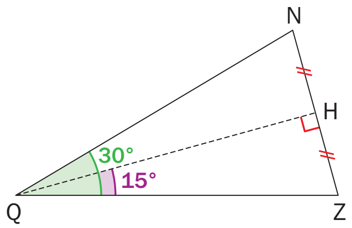
b. En déduire que $\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right) = k \times \vec{u}\cdot\vec{v}$.

4. Développer $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2$ et $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2$.

Problèmes

142 Calcul de cos(15°) et sin(15°)

Le triangle QNZ est isocèle en Q avec QN = 1 et $\widehat{Q} = 30$.



1. Calculer la longueur NZ.

2. On note H le pied de la hauteur issue de Q.

a. Justifier que H est le milieu du segment [NZ] et que $\widehat{ZQH} = 15°$.

b. En déduire sin(15°).

c. Calculer la longueur HQ. En déduire cos(15°).

143 Loi des sinus Approfondissement

Dans un triangle ABC, on note H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs respectivement issues de A, B et C.

On note $a = \text{BC}$, $b = \text{AC}$ et $c = \text{AB}$.

a. Exprimer l'aire $\mathcal{S}$ du triangle ABC de trois manières différentes à l'aide des trois hauteurs.

b. Calculer | Déterminer $\sin(\widehat{A})$, $\sin(\widehat{B})$ et $\sin(\widehat{C})$ en fonction de l'aire $\mathcal{S}$ et des longueurs a, b et c.

c. En déduire la loi des sinus :

$$\frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c} = \frac{abc}{\mathcal{S}}.$$

Pour les exercices 144 à 148

On pourra utiliser la loi des sinus démontrée à l'exercice 143.

144 Triangle avec deux angles et une longueur

a. Le triangle DEF est tel que DE = 4, $\widehat{D} = 35°$ et $\widehat{E} = 48°$.
Calculer les longueurs DF et EF.

b. Le triangle GHK est tel que HK = 10, $\widehat{H} = 30°$ et $\widehat{K} = 45°$.
Calculer les longueurs GH et GK.

145 Aire d'un champ

Une agricultrice souhaite clôturer une partie de son champ triangulaire RST. Deux repères, situés en T et S, sont séparés de 10 dam.

Le segment [RT] longe une route qui forme un angle de 75° avec le segment [ST]. Le long du segment [RS], coule un ruisseau qui forme un angle de 32° avec le segment [ST].

a. Déterminer la longueur RT.

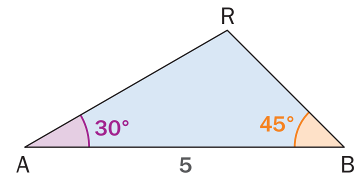
b. On note h la longueur de la hauteur issue de R.
Justifier que $h = \text{RT} \sin(75°)$.

c. Communiquer | L'agricultrice souhaite que le terrain clôturé ait une superficie d'au moins 0,5 ha.
Est-ce le cas ?

Aide 1 ha = 10 000 m^2.

146 Mesure à distance

Afin de repérer un rocher placé en R, un marin mesure depuis les points A et B, espacés de 5 milles marins (1 mille marin = 1 852 mètres), deux angles : $\widehat{RAB}$ et $\widehat{ABR}$.

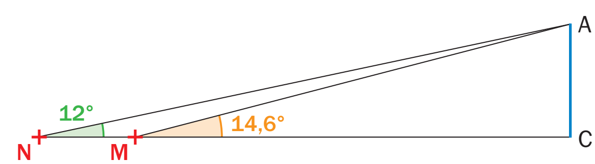


- Déterminer les longueurs AR et BR.

147 Cité administrative

Afin d'estimer la hauteur (antenne comprise) d'une des tours de la Cité administrative de Bordeaux (représentée par le segment [AC]), Linh fait deux relevés d'angle depuis la rue Georges Mandel.

Elle a parcouru 100 mètres entre les deux relevés, marqués par les points M et N.



MN = 100 m

a. Estimer la hauteur de la Cité administrative.

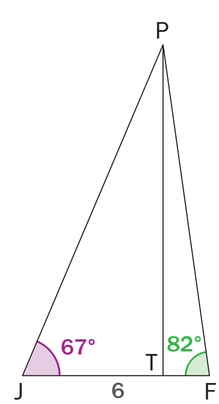
b. À quelle distance se trouvait Linh de la Cité au moment du premier relevé ?

148 Longueur à distance

Jake et Finn doivent délivrer la princesse Flamme.

Pour ce faire, ils doivent rejoindre le château dont la porte est placée en P.

Malheureusement, le pont est surveillé par un gardien qui leur demande d'annoncer la longueur du pont [TP] avant de le traverser. Jake et Finn s'éloignent de 6 mètres l'un de l'autre et font deux mesures d'angle.



- Quelle réponse doivent-ils donner au gardien ?

Pour les exercices **149** à **152**

On s'intéresse à l'étude et à l'alignement de trois points remarquables sur un triangle.

149 Centre de gravité — Approfondissement

ABC est un triangle, A' (respectivement B' et C') est le milieu du segment [BC] (respectivement [AC] et [AB]).
Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

> **Info**
> G est le **centre de gravité du triangle** ABC.

1. a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

2. Prouver que $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.

3. En déduire que le point G est le point de concours des trois médianes du triangle.

150 Centre du cercle circonscrit

Pour un triangle ABC, on note Ω l'intersection des médiatrices des segments [AB] et [AC].

a. Justifier que le point Ω appartient aussi à la médiatrice du segment [BC].

> **Info**
> Ω est donc le **point de concours** des trois médiatrices.

b. En déduire que A, B et C sont sur un même cercle de centre Ω.

> **Info**
> Ce cercle est appelé **cercle circonscrit** au triangle ABC.

c. Justifier que si un point U est le centre d'un cercle passant par les points A, B et C, alors le point U appartient aux médiatrices des segments [AB] et [AC].
En déduire que le point U est confondu avec le point Ω.

151 Orthocentre

Pour un triangle ABC de centre du cercle circonscrit Ω, H est le point défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}.$$

On note A', B' et C' les milieux des côtés [BC], [AC] et [AB].

a. Prouver que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{\Omega A'}$.

b. En déduire que le point H appartient à la hauteur issue de A.

c. En reprenant la démarche des questions **a** et **b**, prouver que le point H est le point de concours des trois hauteurs.

> **Info**
> H est l'**orthocentre** du triangle ABC.

152 Droite d'Euler — Approfondissement

ABC est un triangle de centre de gravité G, de centre du cercle circonscrit Ω et d'orthocentre H défini par :

$$\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}.$$

1. a. Prouver que $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$.

b. En déduire l'alignement des points Ω, G et H.

> **Info**
> La droite obtenue est appelée « **droite d'Euler** ».

2. Rechercher des informations au sujet du centre du cercle des neuf points.

Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien et physicien suisse.

> **Maths à l'oral**
> Présentez les résultats de ces recherches à l'aide d'un diaporama.

153 Rayon du cercle circonscrit

On note D le point tel que [AD] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.
On a alors, d'après le théorème de l'angle inscrit :

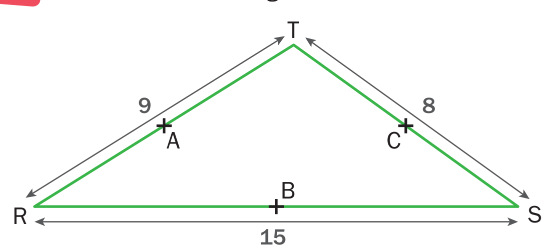
$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}.$$

a. Justifier que $AD = \dfrac{AB}{\sin\left(\widehat{ACB}\right)}$.

b. En utilisant la loi des sinus (▶ ex. 143 p. 244), prouver que le rayon du cercle circonscrit est égal à $\dfrac{abc}{2\mathscr{S}}$, où $\mathscr{S}$ est l'aire du triangle ABC.

154

On considère le triangle RST ci-dessous.



On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M tels que :

$$MR^2 + MS^2 + MT^2 = 360.$$

a. On note K le centre de gravité du triangle RST.
Montrer que :

$$M \in \mathscr{F} \Leftrightarrow 3MK^2 + RK^2 + SK^2 + TK^2 = 360.$$

b. A, B et C sont les milieux respectifs de [RT], [RS] et [ST]. Justifier que :

$$RK^2 + SK^2 + TK^2 = \frac{4}{9}(SA^2 + TB^2 + RC^2),$$

puis que :

$$RK^2 + SK^2 + TK^2 = \frac{1}{3}(RT^2 + RS^2 + ST^2).$$

c. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathscr{F}$.

Fichier Python
Ex. 157
Manuel numérique enseignant

155 Distances des sommets d'un rectangle

ABCD est un rectangle de centre K et P un point du plan.

1. a. Démontrer que $AP^2 + CP^2 = 2PK^2 + \dfrac{BD^2}{2}$.

b. Démontrer que $BP^2 + DP^2 = 2PK^2 + \dfrac{AC^2}{2}$.

c. Raisonner | En déduire que :

$$AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2.$$

2. Dans un rectangle RSNL, un point M est tel que RM = 3, SM = 7 et NM = 15.
En déduire la longueur LM.

156 Cocyclicité de quatre points

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point K.

1. On suppose que les points A, B, C et D sont **cocycliques**, c'est-à-dire qu'il existe un point I tel qu'un cercle $\mathscr{C}$ de centre I passe par ces quatre points. On note A' le point tel que [AA'] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

a. Justifier que (KB) ⊥ (BA').

b. Prouver que $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB} = KI^2 - AI^2$.

c. Prouver que $\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KD} = KI^2 - CI^2$.

d. En déduire que $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KD}$.

2. Réciproquement, on suppose que $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KD}$.
On note $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. La droite (KC) coupe alors le point $\mathscr{C}$ en un point E, non confondu avec le point C.

a. En utilisant le résultat de la question **1d**, prouver que $\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KE}$.

b. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont orthogonaux, puis que $\overrightarrow{DE} = \vec{0}$.

c. Conclure quant à la cocyclicité des points A, B, C et D.

157 Formule de Héron

ABC est un triangle. On note $\mathscr{S}$ l'aire de ce triangle et $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ son demi-périmètre.

1. a. Montrer que $1 + \cos(\widehat{A}) = \dfrac{2p(p-a)}{bc}$

et que $1 - \cos(\widehat{A}) = \dfrac{2(p-b)(p-c)}{bc}$.

b. En déduire une expression de $\sin(\widehat{A})$ en fonction de a, b, c et p.

c. Calculer | Montrer alors la formule de Héron :

$$\mathscr{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2. PROGRAMMATION python

Écrire une fonction en Python prenant en paramètres les longueurs a, b et c, et renvoyant l'aire déterminée par la formule de Héron.

3. Pour chaque couple de triangles, déterminer celui qui a la plus grande aire.

a. Triangle 1 de côtés 34 ; 65 et 85.
Triangle 2 de côtés 34 ; 65 et 95.

b. Triangle 1 de côtés 31 ; 32 et 33.
Triangle 2 de côtés 34 ; 55 et 88.

158 Barycentre de deux points

A et B sont deux points distincts du plan, α et β sont deux nombres réels non nuls, et le point G est défini par la relation vectorielle $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

a. On suppose $\alpha + \beta = 0$. Que peut-on alors conclure pour les points A et B ? En déduire que $\alpha + \beta \neq 0$.

Info

On dit alors que le point G est le **barycentre** du système (A, α) et (B, β).

b. Justifier que pour tous nombres réels α et β tels que $\alpha + \beta \neq 0$, le barycentre de (A, α) et (B, β) appartient à la droite (AB).

c. Identifier le barycentre du système (A, 1) et (B, 1).

d. Construire le barycentre du système (A, α) et (B, 3α).

e. On suppose α = 1. Prouver que G ∈ [AB] ⇔ β > 0.

159 Ensembles de points

A et B sont deux points distincts du plan, I est le milieu du segment [AB] et k est un nombre réel.

1. $MA^2 + MB^2 = k$

a. Calculer | Pour un point M du plan, montrer que :

$$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right).$$

b. En raisonnant par disjonction des cas sur le signe de $k - \dfrac{AB^2}{2}$, justifier que l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est soit vide, soit un cercle, soit le point I.

2. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$

a. Pour un point M du plan, montrer que :

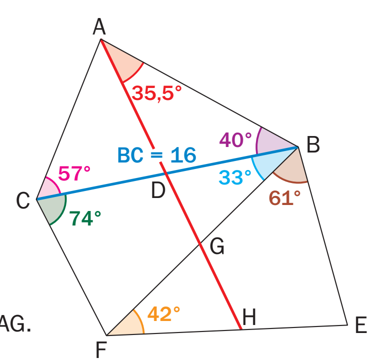
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}.$$

b. En raisonnant par disjonction des cas sur le signe de $k + \dfrac{AB^2}{4}$, justifier que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$ est soit vide, soit un cercle de centre I, soit le point I.

160 Triangulation

Afin d'estimer la longueur AG, on part d'une mesure connue (BC = 16 km) et on construit une chaîne de triangles dont les angles sont de mesures connues.

- Estimer la longueur AG.



Aide

Calculer AB, puis AD et BD.
Procéder de même dans BCF et BEF.

▶ ex. 143 p. 244.

Info

C'est avec un tel procédé qu'a été mesuré le méridien lors de la détermination du mètre (le méridien devant mesurer 20 000 km).

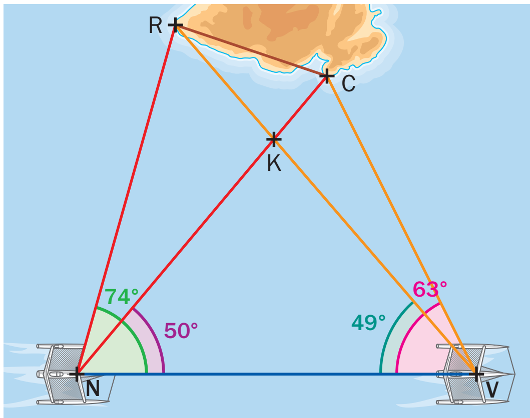
SVT et Sciences de l'ingénieur

161 Afin d'estimer la longueur d'un récif représenté par le segment [RC], un navire réalise quatre relevés d'angle : deux depuis la position N, deux depuis la position V.
On utilisera la **loi des sinus** (▶ ex. 143 p. 244).

1. a. On note K le point d'intersection des droites (RV) et (CN), et ℓ la longueur NV. Déterminer les longueurs NK et KV.
b. En déduire les longueurs CK et RK.
c. Déterminer $\widehat{CKR}$.
En déduire la longueur du récif en fonction de ℓ = NV.

2. Entre les deux relevés, il s'est écoulé 8 minutes.
Sachant que le bateau avance à une vitesse de 30 nœuds, déterminer la longueur RC (en m).

Aide 1 nœud = 1 mille marin par heure = 1 852 mètres par heure.



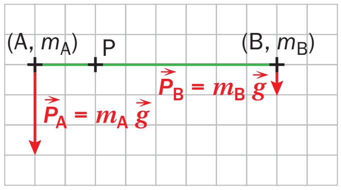
Fiche métier
Océanologue
hatier-clic.fr/ma1247a

Physique-Chimie

162 **Centres de gravité**
Le centre de gravité de deux objets ponctuels A et B, de masses respectives m_A et m_B, est le point G défini par la relation vectorielle :

$$m_A\overrightarrow{GA} + m_B\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

1. Deux personnes sont sur une bascule, représentée par le segment [AB], dont le point d'appui est le point P. La bascule est « à l'horizontale » si le point P est confondu avec le centre de gravité des objets A et B (modélisant les personnes), de masses respectives m_A et m_B.
a. Pour une planche mesurant 1 m, déterminer où devrait se situer le point d'appui si deux personnes de masse 50 kg et 75 kg sont placées aux extrémités.
b. Où placer le point d'appui si on place aux extrémités deux objets, dont l'un a une masse quatre fois supérieure à l'autre ?



2. Les objets du système solaire avec une masse suffisante (le Soleil, les planètes, les planètes naines, certains satellites) sont assimilables à des boules de constitution homogène. On les modélisera ici par des points.
a. Le Soleil, modélisé par le point S, a une masse $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg ; la Terre, modélisée par le point T, a une masse $M_\oplus = 6 \times 10^{24}$ kg. Ils sont situés à une distance moyenne de 150 millions de kilomètres l'un de l'autre. On note G le centre de gravité du système Soleil-Terre.
Déterminer la distance SG et la comparer au rayon moyen du Soleil (7 millions de kilomètres).
b. Jupiter, modélisée par le point J, a une masse $M_{♃} = 2 \times 10^{27}$ kg et est située à une distance moyenne de 800 millions de kilomètres du Soleil. On note H le centre de gravité du système Soleil-Jupiter.
Déterminer la distance SH et la comparer au rayon moyen du Soleil.
c. Pluton, modélisée par le point P, a une masse $M_{♇} = 1{,}3 \times 10^{22}$ kg. L'un de ses satellites, Charon, de masse $1{,}5 \times 10^{21}$ kg, est situé à une distance moyenne de 19 000 km de Pluton. On note E le centre de gravité du système Pluton-Charon.
Déterminer la distance PE et la comparer au diamètre moyen de Pluton (1 200 km).

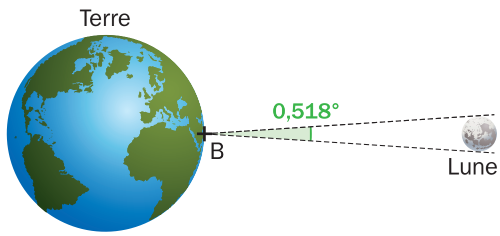
Fiche métier
Astrophysicien·ne
hatier-clic.fr/ma1247b

Recherches mathématiques

Questions ouvertes

163 La distance Terre-Lune

Le rayon moyen de la Terre est 6 400 km.



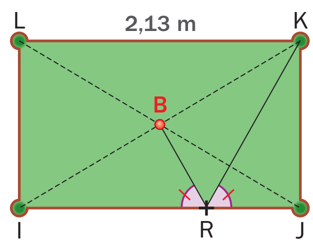
Le diamètre terrestre est estimé à 3,5 diamètres lunaires.

- Sachant qu'un observateur voit la Lune avec un angle de 0,518° lors d'une éclipse lunaire, quelle est la distance Terre-Lune ?

164 Dimensions d'un billard

Une boule B se situe au centre d'un billard IJKL.

En tapant la boule, elle rebondit sur le côté [IJ] en R, puis entre dans le trou K de sorte que (RK) et (JL) soient perpendiculaires.



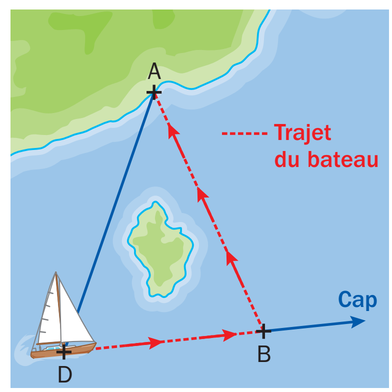
- La longueur du billard est 2,13 m. Quelle est la largeur du billard ?

Défis

165 Horaires du bateau

Un bateau avance à 21 km/h. Il veut accoster au point d'arrivée A.

Du fait de la présence de récifs, il devra passer par le point B pour se rendre à destination. À 10 heures, le bateau est au point D et constate que le point A se trouve à 60° à l'ouest par rapport à son cap. À 10 h 20, le bateau arrive en B. Juste avant de virer vers son but, le capitaine constate que le point A se trouve cette fois à 105° à l'ouest par rapport à son cap.



- À quelle heure le bateau arrivera-t-il en A ?

Aide On pourra utiliser la loi des sinus démontrée dans l'exercice 143 p. 244.

En groupe

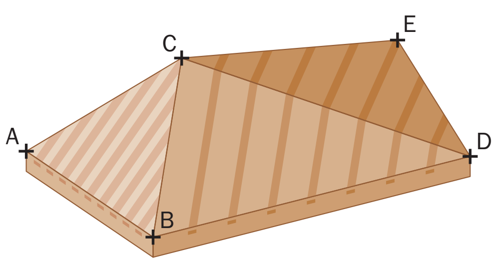
166 Rénovation d'un toit

On souhaite rénover les quatre pans triangulaires d'un toit.

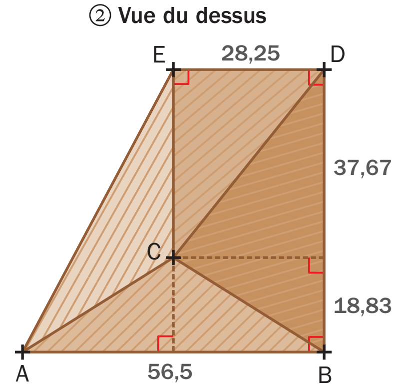
La hauteur des points A, B et D par rapport au sol est 1 000 cm, celle du point E est 1 135 cm et celle du point C est 1 180 cm.

- Calculer l'aire totale du toit.

① Vue en perspective



② Vue du dessus



Aide

- On pourra utiliser la formule de Héron : $\mathcal{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où $\mathcal{S}$ est l'aire d'un triangle de côté a, b et c, et p est son demi-périmètre (ex. 157 p. 246).
- La vue de dessus ne donne pas les bonnes longueurs car elle ne tient pas compte de la différence d'altitude.

Répartissons-nous les tâches pour être plus efficaces !