Chapitre 5 : Fonctions dérivées

Cours 3 : Sens de variation

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - Première D

Lundi 9 décembre 2019

Sommaire

Signe de la dérivée

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.

- ✍ Si $f' > 0$ sur I, sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I.
- ✍ Si $f' < 0$ sur I, sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement décroissante sur I.
- ✍ Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.

Signe de la dérivée

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.

- ✍ Si $f' > 0$ sur I, sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I.
- ✍ Si $f' < 0$ sur I, sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement décroissante sur I.
- ✍ Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.

Exemple 1

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = -3x + 1$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f' a pour expression $f'(x) = -3$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$

Signe de la dérivée

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.

- ✍ Si $f' > 0$ sur I, sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I.
- ✍ Si $f' < 0$ sur I, sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement décroissante sur I.
- ✍ Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.

Exemple 2

Soit f la fonction carré, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.
$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Signe de la dérivée

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.

- ✍ Si $f' > 0$ sur I, sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I.
- ✍ Si $f' < 0$ sur I, sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement décroissante sur I.
- ✍ Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.

Exercice

1. Démontrer que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les variations de la fonction f définie sur $[-2\,;1,5]$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- ☞ Dire que x_0 est un maximum local (resp. minimum local) de f, signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant x_0$).
- ☞ Dire que x_0 est un extremum local signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- ☞ Dire que x_0 est un maximum local (resp. minimum local) de f, signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant x_0$).
- ☞ Dire que x_0 est un extremum local signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local.

Propriété 1

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 est un réel de I.

- ✍ Si $f(x_0)$ est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$.
- ✍ Attention : la réciproque est fausse.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- ☞ Dire que x_0 est un maximum local (resp. minimum local) de f, signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant x_0$).
- ☞ Dire que x_0 est un extremum local signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local.

Propriété 1

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 est un réel de I.

- ✍ Si $f(x_0)$ est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$.
- ✍ Attention : la réciproque est fausse.

Exercice 1

Justifier que le fonction cube est un exemple illustrant le fait que la réciproque de la propriété 1 est fausse.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- ☞ Dire que x_0 est un maximum local (resp. minimum local) de f, signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant x_0$).
- ☞ Dire que x_0 est un extremum local signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local.

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 est un réel de I.

- ✍ Si $f'(x_0)$ s'annule en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- ☞ Dire que x_0 est un maximum local (resp. minimum local) de f, signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant x_0$).
- ☞ Dire que x_0 est un extremum local signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local.

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 est un réel de I.

- ✍ Si $f'(x_0)$ s'annule en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.

Exercice 2

Justifier que le fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 - x + 1$ admet deux extremums locaux sur $\mathbb{R}$.

FIN

Revenir au début