Chapitre 6 : Calcul vectoriel et produit scalaire

Cours 3 : Applications du produit scalaire

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - Première D

Samedi 18 janvier 2020





Sommaire

■ Formule d'Al-Kashi

Formule de la médiane

3 Ensemble de points





Formule d'Al-Kashi

Théorème

On considère un triangle ABC et posons BC=a, AC=b et AB=c, alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos(\hat{A}).$$



Formule d'Al-Kashi

Théorème

On considère un triangle ABC et posons BC=a, AC=b et AB=c, alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos(\hat{A}).$$

Démonstration

$$BC^{2} = \overrightarrow{BC}^{2} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^{2} = BA^{2} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^{2}$$

D'où $BC^{2} = BA^{2} + AC^{2} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$



Formule d'Al-Kashi

Théorème

On considère un triangle ABC et posons BC=a, AC=b et AB=c, alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos(\hat{A}).$$

Démonstration

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$$

D'où $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Execice

- On donne $\hat{A} = 60^{\circ}$, b = 3 et c = 2, calculer a.
- 2 On donne a=5, b=10 et $c=5\sqrt{3}$, calculer \hat{A} .





Formule de la médiane

Propriété : Formule de la médiane

Soient A et B deux point du plan, I étant le milieu du segment [AB].

Pour tout point M du plan, on a:

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$





Formule de la médiane

Propriété: Formule de la médiane

Soient A et B deux point du plan, I étant le milieu du segment AB. Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Démonstration

$$MA^{2} + MB^{2} = \overrightarrow{MA}^{2} + \overrightarrow{MB}^{2}$$

$$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^{2} + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^{2}$$

$$= MI^{2} + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^{2} + MI^{2} + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^{2}$$

$$= 2MI^{2} + IA^{2} + IB^{2} + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)$$

$$= 2MI^{2} + \frac{AB^{2}}{2} + \frac{AB^{2}}{2} + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{0}$$

$$= 2MI^{2} + \frac{AB^{2}}{4} + \frac{AB^{2}}{4} = 2MI^{2} + \frac{AB^{2}}{2}$$



Formule de la médiane

Propriété : Formule de la médiane

Soient A et B deux point du plan, I étant le milieu du segment [AB]. Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Exercice

- **Q**uel est le point M qui minimise la quantité $MA^2 + MB^2$?
- Soit ABC un triangle tel que AB=5, AC=4, BC= 7 et soit I le milieu de AB.

Calculer la longueur CI.





Définition : vecteur normal

Pour une droite de vecteur directeur \vec{u} , tout vecteur \vec{n} non nul orthogonal à \vec{u} est appelé vecteur normal à cette droite.





Définition: vecteur normal

Pour une droite de vecteur directeur \vec{u} , tout vecteur \vec{n} non nul orthogonal à \vec{u} est appelé vecteur normal à cette droite.

Propriété 1

A, B et P sont trois points, \overrightarrow{u} est un vecteur non nul, et I est le milieu du segment [AB].

- ∠ L'ensemble des points M tels que MA=MB est la médiatrice du segment [AB].
- \angle a L'ensemble des points M tels que PM=r (r>0) est le cercle de centre P et de rayon r.





Définition: vecteur normal

Pour une droite de vecteur directeur \vec{u} , tout vecteur \vec{n} non nul orthogonal à \vec{u} est appelé vecteur normal à cette droite.

Propriété 1

A, B et P sont trois points, \vec{u} est un vecteur non nul, et I est le milieu du segment [AB].

- \angle L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ est la **droite** passant par P et de vecteur normal \overrightarrow{u} .
- ∠ L'ensemble des points M tels que MA=MB est la médiatrice du segment [AB].
- \triangle L'ensemble des points M tels que PM=r (r>0) est le cercle de centre P et de rayon r.

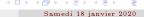
Exercice

Comment pourrait-on caractériser l'ensemble des points M qui sont situés à l'intérieur du disque de centre P et de rayon r?



Propriété 2





Propriété 2

 Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$ où I est le milieu de [AB].

Exercice

Soit A,B et M trois points du plan et I le milieu du segment [AB].

- \triangle Calculer $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$





FIN

Revenir au début



