Chapitre 7 : Suites arithmétiques et géométriques

Cours 3 : Somme des termes

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - Première D

Samedi 8 février 2020

Sommaire

Somme des termes d'une suite arithmétique

propriété

Pour tout entier naturel non nul n :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

Somme des termes d'une suite arithmétique

propriété

Pour tout entier naturel non nul n :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

Exercice

Vérifier la formule avec $n = 5$.

Somme des termes d'une suite arithmétique

propriété

Pour tout entier naturel non nul n :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ .$$

Démonstration

On pose, $S_n = 1+2+...+n$, ainsi

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-2) & + & (n-1) \\
S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 \\
\hline
2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

Ainsi,

$$2S_n = n \times (n+1)$$

Et donc :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

Somme des termes d'une suite arithmétique

propriété

Pour tout entier naturel non nul n :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \; .$$

Exercice

Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.
Calculer la somme des 15 permiers termes.

Somme des termes d'une suite géométrique

propriété

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} .$$

Somme des termes d'une suite géométrique

propriété

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\ .$$

Exercice

Vérifier la formule avec $n = 4$ et $q = 2$.

Somme des termes d'une suite géométrique

propriété

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\ .$$

Démonstration

On pose, $S_n = 1 + q + ... + q^n$, ainsi

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
S_n & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & \cdots & + & q^{n-2} & + & q^{n-1} & + & q^n \\
qS_n & = & q & + & q^2 & + & q^3 & + & \cdots & + & q^{n-1} & + & q^n & + & q^{n+1} \\
\hline
S_n - qS_n & = & 1 & & & & & & & & & & & - & q^{n+1}
\end{array}$$

Ainsi,

$$S_n(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

Et donc comme $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\ .$$

Somme des termes d'une suite géométrique

propriété

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} .$$

Exercice

1. Calculer S, la somme des 10 premières puissances de 2.
2. Soit u la suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $q = 3$. Calculer S, la somme des 11 permiers termes.

FIN

Revenir au début