Chapitre 3 : Nombre dérivé - Applications

Cours 1 : Taux de variation et nombre dérivé

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - 1D

Samedi 5 octobre 2019

Sommaire

Taux de variation d'une fonction entre deux réels

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a et b deux nombre réels distincts de I.
Le rapport

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

est appelé **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de f entre a et b.

Taux de variation d'une fonction entre deux réels

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a et b deux nombre réels distincts de I.
Le rapport

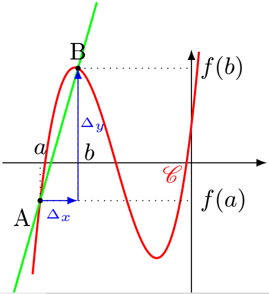
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

est appelé **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de f entre a et b.

Interprétation géométrique

On considère, dans un repère du plan, les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ de la courbe représentative de f.
Le taux de variation de f entre a et b est le **coefficient directeur** de la droite (AB). En effet, on a :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$



Taux de variation d'une fonction entre deux réels

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a et b deux nombre réels distincts de I.
Le rapport

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

est appelé **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de f entre a et b.

Interprétation cinématique

On considère un mobile M se déplaçant sur un axe $(O; \vec{i})$, on repère la position de ce mobile à l'instant t par la distance $d(t)$ entre ce point et l'origine O de l'axe.
Le taux de variation de la fonction d entre deux instants distincts t_0 et t_1 est égal à la **vitesse moyenne** du mobile entre les instants t_0 et t_1 :

$$V_m = \frac{d(t_1) - d(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\text{distance parcourue entre les instants } t_0 \text{ et } t_1}{\text{durée écoulée entre ces deux instants}}$$

Taux de variation d'une fonction entre deux réels

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a et b deux nombre réels distincts de I.
Le rapport

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

est appelé **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de f entre a et b.

Exemple 1 : taux d'accroissement de la fonction carré entre $a=1$ et $b=3$

Pour tout réel x, $f(x)=x^2$

$$\begin{aligned}\frac{f(3)-f(1)}{3-1} &= \frac{3^2-1^2}{3-1}\\ &= \frac{9-1}{2}\\ &= \frac{8}{2}\\ &= 4.\end{aligned}$$

Taux de variation d'une fonction entre deux réels

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a et b deux nombre réels distincts de I.
Le rapport

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

est appelé **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de f entre a et b.

Exercice : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$.

Calculer le taux d'accroissement de f entre 2 et $2,01$

Taux de variation d'une fonction entre deux réels

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a et b deux nombre réels distincts de I.
Le rapport

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

est appelé **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de f entre a et b.

Exemple 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+1$.

Soit h un réel non nul, calculons $\tau(h)$, le taux d'accroissement de f entre 3 et $3+h$:
$f(3+h)=(3+h)^2+1=9+6h+h^2+1=$
$h^2+6h+10$
$f(3)=3^2+1=10$

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(3+h)-f(3)}{h}\\ &= \frac{h^2+6h+10-10}{h}\\ &= \frac{h^2+6h}{h}\\ &= \frac{h(h+6)}{h}\\ &= h+6.\end{aligned}$$

Taux de variation d'une fonction entre deux réels

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a et b deux nombre réels distincts de I.
Le rapport

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

est appelé **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de f entre a et b.

Exercice : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-2$.

Calculer le taux d'accroissement de f entre 2 et $2+h$, h étant un réel non nul.

Notion de nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a un réel de I et soit h un réel non nul tel que $a + h \in \mathrm{I}$.

- → La fonction f est dite **dérivable en** a si, et seulement si, le taux de variation de f entre les réels a et $a + h$ tend vers un réel l quand h tend vers 0.
- → Le nombre l est alors appelé **nombre dérivé** de f en a et est noté $f'(a)$:

Notion de nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a un réel de I et soit h un réel non nul tel que $a + h \in \mathrm{I}$.

- → La fonction f est dite **dérivable en** a si, et seulement si, le taux de variation de f entre les réels a et $a + h$ tend vers un réel l quand h tend vers 0.
- → Le nombre l est alors appelé **nombre dérivé** de f en a et est noté $f'(a)$:

Notation

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Cette expression se lit : la limite lorsque h tend vers 0 de $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est égale à $f'(a)$.

Notion de nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a un réel de I et soit h un réel non nul tel que $a + h \in$ I.

→ La fonction f est dite **dérivable en** a si, et seulement si, le taux de variation de f entre les réels a et $a + h$ tend vers un réel l quand h tend vers 0.

→ Le nombre l est alors appelé **nombre dérivé** de f en a et est noté $f'(a)$:

Interprétation cinématique

On reprend le contexte précédent : Le taux de variation de la fonction d entre les instants t_0 et $t_1 = t_0 + h$ est égal à la **vitesse moyenne** du mobile entre les instants t_0 et $t_0 + h$:

$$V_m = \frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$$

Si ce taux de variation admet, lorsque h tend vers 0, une limite réelle, alors la fonction d est dérivable en t_0 et le nombre dérivé $d'(t_0)$ est la **vitesse instantanée** du mobile à l'instant h_0.

Notion de nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a un réel de I et soit h un réel non nul tel que $a + h \in$ I.

→ La fonction f est dite **dérivable en** a si, et seulement si, le taux de variation de f entre les réels a et $a + h$ tend vers un réel l quand h tend vers 0.

→ Le nombre l est alors appelé **nombre dérivé** de f en a et est noté $f'(a)$:

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

Montrons que f est dérivable en 3 et donnons la valeur du nombre dérivé correspondant.
Nous savons que pour tout réel $h \neq 0$, $\tau(h) = h + 6$.
Donc si h se rapproche de 0, $\tau(h)$ se rapproche de $0 + 6 = 6$.
Ainsi

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = 6$$

Finalement f est dérivable en 3 et

$$f'(3) = 6$$

Notion de nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a un réel de I et soit h un réel non nul tel que $a+h \in \mathrm{I}$.

→ La fonction f est dite **dérivable en** a si, et seulement si, le taux de variation de f entre les réels a et $a+h$ tend vers un réel l quand h tend vers 0.

→ Le nombre l est alors appelé **nombre dérivé** de f en a et est noté $f'(a)$:

Exercice : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x+1$.

Soit a un réel fixé, montrer que f est dérivable en a.

FIN

Revenir au début