CHAPITRE 6

Fonction exponentielle

Gustave Eiffel (1832-1923), ingénieur français constructeur de la tour Eiffel, a voulu supprimer les traverses de sa tour tout en conservant sa résistance au vent. Avec ces deux contraintes, il a construit une tour dont les contours ont la forme de courbes de fonctions exponentielles.

Itinéraire

OBJECTIF 1

Étudier et utiliser la fonction exponentielle

- Activités 1 et 2
- Cours 1
- Savoir-faire 1, 2 et 3
- Quiz 17 à 24
- Les incontournables 37 à 41
- Entraînement 47 à 69

OBJECTIF 2

Étudier une composée affine de la fonction exponentielle

- Activité 3
- Cours 2
- Savoir-faire 4
- Quiz 25 à 28
- Les incontournables 42 à 44
- Entraînement 70 à 86

OBJECTIF 3

Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

- Activité 4
- Cours 3
- Savoir-faire 5
- Quiz 29 et 30
- Les incontournables 45 et 46
- Entraînement 87 à 98

PRENDRE UN BON DÉPART

Quiz en ligne
Diagnostic
Kwyk Variations 1re via ENT

Test

À l'oral

Proposer des phrases à partir des mots suivants.

suite géométrique — relation de récurrence — somme — PUISSANCE — dérivée — terme général — formule — quotient

Rappels

Puissances

- Pour tout nombre réel a et pour tout nombre entier naturel non nul n, on appelle « **a puissance n** » (ou « a exposant n ») le nombre noté $\boldsymbol{a^n}$ qui est égal à $a \times a \times \ldots \times a$ (n facteurs égaux à a).
- Par convention, $\boldsymbol{a^0 = 1}$ pour $a \neq 0$ (0^0 n'existe pas).
- Pour tout nombre réel $a \neq 0$ et pour tout nombre entier naturel n, a^{-n} est l'inverse de a^n : $\boldsymbol{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$.
- Pour tous nombres entiers naturels m et n, on a :

• $a^n \times a^m = a^{n+m}$ • $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (avec $a \neq 0$) • $(a^n)^m = a^{n \times m}$ • $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (avec $b \neq 0$)

Exemples

- $(-3)^4 \times (-3)^5 = (-3)^{4+5} = (-3)^9$
- $\dfrac{5^3}{5^4} = 5^{3-4} = 5^{-1}$
- $(7^3)^4 = 7^{3 \times 4} = 7^{12}$
- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{27}$

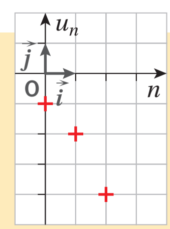
Suites géométriques ▸ Chapitre 2

- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre réel q tel que, pour tout nombre entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$ (relation de récurrence).
Le nombre réel q s'appelle **la raison** de la suite (u_n).
- Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$ (formule explicite).

Une suite est représentée graphiquement par le nuage de points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.

Exemple

On a représenté ci-contre les trois premiers termes de la suite géométrique u de premier terme (-1) et de raison 2.



Pour tout nombre entier naturel n, on a :
- $u_{n+1} = 2 \times u_n$;
- $u_n = (-1) \times 2^n$.

Dérivée d'une fonction ▸ Chapitre 4

- Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors :

• $\boldsymbol{(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)}$

• $\boldsymbol{(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)}$

• $\boldsymbol{\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}}$

avec v qui ne s'annule pas sur I.

- Une équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe d'une fonction f dérivable en a est :

$$y = f(a) + f'(a) \times (x - a).$$

Exemple

- Une expression de la dérivée de la fonction, définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, $f : x \mapsto \dfrac{5x-3}{2x-6}$ est :

$$f'(x) = \dfrac{5 \times (2x-6) - 2 \times (5x-3)}{(2x-6)^2} = \dfrac{-24}{(2x-6)^2}.$$

- Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe $\mathscr{C}_f$ est :

$y = f(1) + f'(1) \times (x-1) = -\dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{3}{2}\right) \times (x-1)$

soit $y = -1{,}5x - 1$.

Exercices en ligne
Réactivation
variations.kwyk.fr/1re

Réactivation

Puissances

1 Écrire chaque nombre sous la forme a^n (avec a nombre réel et n nombre entier).

a. $3^5 \times 3^7$ **b.** $\frac{5^9}{5^3}$ **c.** $\frac{4}{4^3}$ **d.** $\frac{2^3}{2^{-5}}$ **e.** $\frac{6^{-1} \times 6^3}{6^4}$ **f.** $\frac{3^{-7} \times (3^5)^2}{3^{-3}}$

2 Écrire chaque nombre sous la forme $a^n \times b^m$ où a et b sont des nombres réels, et m et n des nombres entiers.

a. $\frac{5^6 \times 3^{-2}}{3 \times 5^{-2}}$ **b.** $\frac{10^{-3} \times (7^3)^4 \times 10}{7^4 \times 10^5}$ **c.** $3 \times (10^5)^3 \times 9 \times 10^{-2} \times 3^5$ **d.** $\frac{4 \times 10^{-6} \times 2^4}{8 \times (10^3)^2}$

3 En 2017, un Airbus A380 coûtait environ $4{,}4 \times 10^8$ dollars.
Un *dime* de dollar est le nom donné à une pièce de monnaie d'une valeur d'un dixième de dollar. L'épaisseur d'un *dime* est $1{,}35 \times 10^{-6}$ km.

● Quelle hauteur (en km) atteindrait une pile de *dimes* représentant la valeur d'un Airbus A380 ?

Suites géométriques

4 Pour chacune des suites ci-dessous, définies sur ℕ, dire si elle est géométrique ou non et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son premier terme.

a. La suite de terme général $u_n = 2 \times 3^n$.
b. La suite de terme général $v_n = 4 + 3n$.
c. La suite de terme général $w_n = (-5) \times 0{,}2^n$.
d. La suite de terme général $t_n = 3 - 5^n$.

5 Représenter graphiquement les 4 premiers termes :
a. de la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme 3 ;
b. de la suite géométrique de raison (–2) et de premier terme 0,4.

6 Pour chacune des suites ci-dessous, définies sur ℕ, dire si elle est géométrique ou non et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son premier terme.

a. La suite de terme général $u_n = 8 \times 2^{n-3}$.
b. La suite de terme général $v_n = 3 \times 25 \times 5^{n-2}$.
c. La suite de terme général $w_n = \frac{2}{3^n}$.
d. La suite de terme général $t_n = \frac{4^{n+1}}{3^n}$.

Dérivée d'une fonction

7 Déterminer une expression de la dérivée de chaque fonction.
a. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0{,}5\}$.
b. La fonction $g : x \mapsto (5x-2)^3$ définie et dérivable sur ℝ.
c. La fonction $h : x \mapsto \sqrt{3x+5}$ définie et dérivable sur $\left]\frac{-5}{3};+\infty\right[$.

8 **a.** Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $k : x \mapsto (-2x+1)^2$ définie et dérivable sur ℝ.
b. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de k au point d'abscisse 1.

Corrigés p. 368

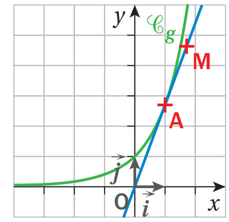
Animation et fichier logiciel
Activité 1 : méthode d'Euler
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 1
Étudier et utiliser la fonction exponentielle

1 En prenant la tangente TICE

L'approximation par la méthode d'Euler consiste à approcher la courbe d'une fonction g par ses tangentes. Pour de très petites valeurs de h, au point d'abscisse $a + h$, la courbe de la fonction g est très proche de sa tangente au point d'abscisse a : la courbe et sa tangente semblent presque se confondre. D'après Euler, on a alors :

$$g(a + h) \approx g'(a) \times h + g(a).$$



On cherche à représenter graphiquement une fonction f qui vérifie les conditions suivantes :

$f(0) = 1$ et, pour tout nombre réel x, $f'(x) = f(x)$.

1. Justifier que, dans le cas de la fonction f que l'on souhaite représenter, l'approximation d'Euler consiste à écrire $f(a + h) \approx f(a)(1 + h)$.

2. a. Déterminer $f(0,1)$ à l'aide de cette relation avec $h = 0,1$.
b. Déterminer $f(-0,1)$ à l'aide de cette relation avec $h = -0,1$.

3. Dans la feuille de calcul ci-contre, quelles formules a-t-on saisies dans les cellules B3 et E3 pour appliquer l'approximation d'Euler à la fonction f ?

4. À l'aide d'un logiciel, reproduire la feuille de calcul ci-contre après avoir déterminé la valeur prise pour h.

5. Représenter le nuage de points associé à ce tableau et prendre des valeurs de h de plus en plus petites afin d'affiner la représentation graphique.

	A	B	C	D	E
1	x	Approximation de $f(x)$		x	Approximation de $f(x)$
2	0	1		0	1
3	0,1	1,1		-0,1	0,9
4	0,2	1,21		-0,2	0,81
5	0,3	1,331		-0,3	0,729
6	0,4	1,4641		-0,4	0,6561
7	0,5	1,61051		-0,5	0,59049
8	0,6	1,771561		-0,6	0,531441
9	0,7	1,9487171		-0,7	0,4782969
10	0,8	2,14358881		-0,8	0,43046721
11	0,9	2,357947691		-0,9	0,387420489
12	1	2,59374246		-1	0,34867844
13	1,1	2,853116706		-1,1	0,313810596
14	1,2	3,138428377		-1,2	0,282429536
15	1,3	3,452271214		-1,3	0,254186583
16	1,4	3,797498336		-1,4	0,228767925
17	1,5	4,177248169		-1,5	0,205891132
18	1,6	4,594972986		-1,6	0,185302019
19	1,7	5,054470285		-1,7	0,166771817
20	1,8	5,559917313		-1,8	0,150094635
21	1,9	6,115909045		-1,9	0,135085172
22	2	6,727499949		-2	0,121576655

On construit ainsi « point par point » la représentation graphique de la fonction f.
Cette fonction est appelée « **fonction exponentielle** ».

OBJECTIF 1
Étudier et utiliser la fonction exponentielle

2 À la découverte d'une relation fonctionnelle

On considère une fonction f qui vérifie, pour tous nombres réels a et b, la relation fonctionnelle :

$$f(a + b) = f(a) \times f(b).$$

1. Montrer que si $f(0) = 0$ alors, pour tout nombre réel x, $f(x) = 0$.

On dit alors que la fonction f est **identiquement nulle**.

2. On suppose que $f(0) \neq 0$.
a. Montrer que $f(0) = 1$.
b. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) > 0$.

3. On rappelle que lorsqu'une fonction g est dérivable en a, le nombre dérivé de g en a est $g'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(a+h) - g(a)}{h}$.

a. Montrer que si la fonction f étudiée est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout nombre réel a :

$$f'(a) = f(a) \times f'(0).$$

b. En déduire que si f vérifie également $f'(0) = 1$ alors, pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = f(x).$$

Fichier logiciel
Activités 3 et 4
Manuel numérique enseignant

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 2
Étudier une composée affine de la fonction exponentielle

3 Découvrir les fonctions composées — En groupe

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère les fonctions :

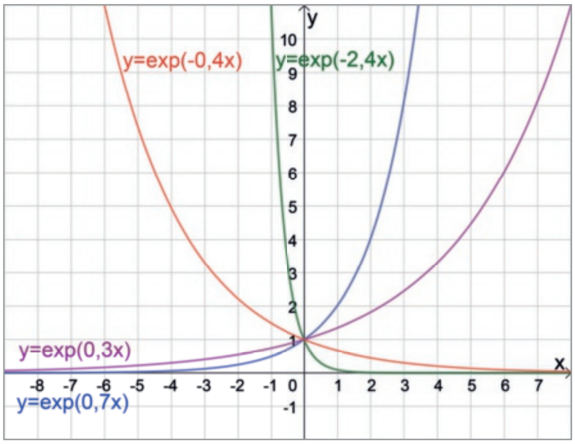
$$f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{kt} \quad \text{et} \quad g_k : t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}.$$

1. TICE Dans un logiciel de géométrie dynamique, tracer plusieurs courbes représentatives de fonctions f_k et g_k.
On pourra utiliser un curseur.

2. Quelles conjectures peut-on faire ?

Maths à l'oral

Chaque groupe présentera une conjecture en l'illustrant avec les courbes représentatives de plusieurs fonctions.



OBJECTIF 3
Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

4 Un problème de santé publique TICE

Voici un extrait d'un article du journal Ouest-France du 18 septembre 2006 à propos du radon 222 :

> « Ce gaz radioactif, inodore et incolore, issu des entrailles de la Terre, est la deuxième cause d'apparition du cancer du poumon, après le tabac. […] Qu'est-ce que le radon ? C'est un gaz radioactif, sans odeur ni couleur, présent à l'état naturel. Il est issu de la désintégration de l'uranium 238. On peut le trouver partout à la surface de la Terre, principalement dans les régions granitiques. »

Pour mesurer la concentration en radon dans une pièce, on prélève de l'air dans une fiole que l'on place dans un détecteur permettant de compter le nombre total N_d de désintégrations du radon 222. On répète cette mesure pendant plusieurs jours. Les résultats sont les suivants :

Jour	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N_d	73	59	51	41	36	30	23	20	16	14

La pièce est considérée en dessous du « seuil d'alerte » lorsque N_d est inférieur à 60 et en dessous du « seuil de précaution » lorsque N_d est inférieur à 24.

1. Représenter à l'aide d'un tableur le nuage de points correspondant à ces relevés.

2. a. Faire afficher par le logiciel une courbe exponentielle passant au plus près de ce nuage de points afin de modéliser par une fonction exponentielle le nombre de désintégrations N_d mesuré en fonction du temps écoulé en jours.

Aide

- Avec le tableur *GeoGebra*, sélectionner le tableau, cliquer sur Statistiques à deux variables pour obtenir le nuage de points, puis choisir le modèle d'ajustement exponentiel dans la zone sous la courbe : Modèle d'ajustement exponentiel y.
- Dans *Excel*, après avoir tracé le nuage de points avec , le sélectionner et choisir Ajouter une courbe de tendance… , puis Exponentielle (dans les options).

b. La fonction proposée par le logiciel est de la forme $N_0 \times \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Quelle est la valeur pour N_0 proposée par cet ajustement ? Quelle est celle de λ ?

3. On appelle « demi-vie » le temps au bout duquel une grandeur atteint la moitié de sa valeur initiale. Déterminer par lecture graphique la demi-vie du radon 222.

4. Déterminer le nombre de jours au bout duquel la pièce est :

a. en dessous du seuil d'alerte ; **b.** en dessous du seuil de précaution.

D'après Bac S (Physique-Chimie), Polynésie, septembre 2007.

Cours

OBJECTIF 1 Étudier et utiliser la fonction exponentielle

Savoir-faire 1 à 3 p. 167-168

Définition, propriété et notation

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' égale à f telle que $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** ; elle est notée $x \mapsto \exp(x)$.

Démonstration rédigée p. 180

Pour tout nombre réel x : $\exp'(x) = \exp(x)$.

$\exp(0) = 1$

Propriété

La fonction exponentielle est **strictement positive sur** $\mathbb{R}$.

Démonstration à compléter : exercice 99 p. 181

Pour tout nombre réel x : $\exp(x) > 0$.

Notation

On note $\exp(1) = \mathrm{e}$.
Le nombre e est appelé **nombre d'Euler** ou **constante de Néper**.

e ≈ 2,718 28
e est un nombre irrationnel.

Propriété (relations fonctionnelles)

Pour tous nombres réels x et y :
- $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$;
- $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$; autrement dit : $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Démonstration : exercice 100 p. 181

On dit que « l'exponentielle transforme les sommes en produits ».

Théorème (admis)

Pour tout nombre réel x, on a :

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

Conséquences Avec cette nouvelle notation, les propriétés précédentes s'écrivent, pour tous nombres réels x et y :
- $\mathrm{e}^0 = 1$
- $\mathrm{e}^x > 0$
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 1$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

On retrouve les propriétés des puissances.

Exemples
- $\exp(3 + 5) = \exp(8)$ s'écrit $\mathrm{e}^{3+5} = \mathrm{e}^8$.
- $\exp(-2) = \dfrac{1}{\exp(2)}$ s'écrit $\mathrm{e}^{-2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.
- $(\exp(x))^3 = \exp(x) \times \exp(x) \times \exp(x) = \exp(x + x + x) = \exp(3x)$ s'écrit $(\mathrm{e}^x)^3 = \mathrm{e}^{3x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

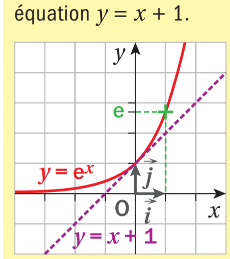
Propriété

La fonction exponentielle est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.
Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations de exp	↗	1	e	↗

Démonstration à compléter : exercice 99 p. 181

La tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 admet pour équation $y = x + 1$.



Conséquence de la stricte croissance de la fonction exponentielle

Pour tous nombres réels a et b :

$$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a = b \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^a > \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a > b.$$

Exemple

$\mathrm{e}^x > 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in \,]0\,;+\infty[$.

OBJECTIF 2 Étudier une composée affine de la fonction exponentielle

Savoir-faire 4 p. 168

k est un nombre réel strictement positif.

Propriété (admise) ▸ Chapitre 4

Pour toute fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tous nombres réels a et b, la fonction $x \mapsto g(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto a \times g'(ax + b)$.

La fonction $x \mapsto g(ax + b)$ est une composée affine de la fonction g.

Propriété

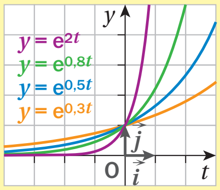
La fonction $f_k : t \mapsto e^{kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t, on a $f_k'(t) = k \times e^{kt}$.

Démonstration : exercice 101 p. 181

Exemple
La fonction $t \mapsto e^{0,5t}$ a pour dérivée $t \mapsto 0,5e^{0,5t}$.

Propriété La fonction f_k est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.
Son tableau de variations est le suivant :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f_k	↗	1	↗



Démonstration : exercice 101 p. 181

Exemple Étude de la fonction $f : x \mapsto e^{3x-2}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = 3 \times e^{3x-2} = 3e^{-2} \times e^{3x} > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de f est :

$$y = f(0) + f'(0) \times (x - 0) = e^{-2} + 3e^{-2}x.$$

e^{-2} est un nombre réel strictement positif.

Définition

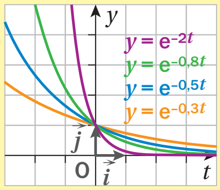
La fonction $g_k : t \mapsto e^{-kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t, on a $g_k'(t) = -k \times e^{-kt}$.

Démonstration : exercice 102 p. 181

Exemple
La fonction $t \mapsto e^{-3t}$ a pour dérivée $t \mapsto -3e^{-3t}$.

Propriété La fonction g_k est **strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$.
Son tableau de variations est le suivant :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de g_k	↘	1	↘



Démonstration : exercice 102 p. 181

Exemple Étude de la fonction $g : x \mapsto e^{-2x+3}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x :

$$g'(x) = (-2) \times e^{-2x+3} = (-2) \times e^{3} \times e^{-2x} < 0.$$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de g est :

$$y = g(0) + g'(0) \times (x - 0) = e^{3} - 2e^{3}x.$$

e^{3} est un nombre réel strictement positif.

OBJECTIF 3 Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

Savoir-faire 5 p. 169

a est un nombre réel, k un nombre réel strictement positif et n un nombre entier naturel.

Définition Un phénomène (physique, économique, etc.) **se modélise de façon discrète** par une **croissance** (resp. une **décroissance**) **exponentielle** s'il peut être modélisé par une **suite** dont la représentation graphique est un nuage de points qui appartiennent à la courbe représentative d'une fonction de la forme $f(t) = ae^{kt}$ (resp. $f(t) = ae^{-kt}$).

Propriétés

- Pour tout nombre réel b fixé, la suite **(e^{nb}) est une suite géométrique** de premier terme 1 et de raison e^b.
- Si $b > 0$, alors la suite (e^{nb}) est strictement croissante.
  Si $b < 0$, alors la suite (e^{nb}) est strictement décroissante.
  Si $b = 0$, alors la suite (e^{nb}) est constante : tous ses termes valent 1.

Démonstration : exercice 103 p. 181

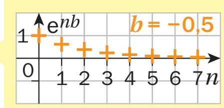
On a donc $e^{nb} = \left(e^b\right)^n$.

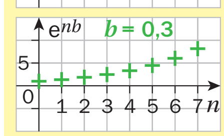
En notant $e^b = q$, on a en effet :
- $b > 0 \Leftrightarrow q > 1$;
- $b < 0 \Leftrightarrow 0 < q < 1$;
- $b = 0 \Leftrightarrow q = 1$.

Chapitre 2

Exemples

- La suite $(e^{-0,5n})$ est géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{-0,5}$.
Elle est strictement décroissante car $b = -0,5 < 0$.
- La suite $(e^{0,3n})$ est géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{0,3}$.
Elle est strictement croissante car $b = 0,3 > 0$.





Propriété (admise) Pour tout nombre réel q strictement positif, **il existe un unique nombre réel b tel que $q^n = e^{nb}$**.
Ce nombre est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^b = q$.

On peut lire graphiquement une valeur approchée de la solution de l'équation $e^b = q$ à partir de la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Conséquence

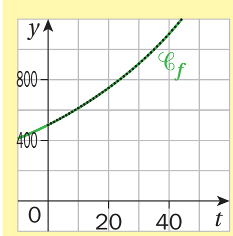
La représentation graphique de la suite géométrique (u_0q^n) (avec $q > 0$) est un nuage de points qui appartiennent à la courbe représentative de la fonction $t \mapsto u_0e^{bt}$, où b est l'unique nombre réel qui vérifie $e^b = q$.

Exemple

On place 500 € au taux d'intérêt composé de 2 % annuel (l'intérêt acquis chaque année est ajouté au capital). On note C_n le capital (en euros) après n années.

On modélise cette situation par la suite géométrique de premier terme 500 et de raison 1,02. Le terme général de cette suite est $C_n = 500 \times (1,02)^n$ et sa représentation graphique est un nuage de points qui appartiennent à la courbe représentative de la fonction $f : t \mapsto 500e^{bt}$ où b est l'unique nombre réel qui vérifie $e^b = 1,02$, soit $b \approx 0,0198$.

La suite (C_n) est un modèle discret de croissance exponentielle.



Définition Un phénomène (physique, économique, etc.) **se modélise de façon continue** par une **croissance** (resp. une **décroissance**) **exponentielle** s'il peut être modélisé par une **fonction** admettant comme expression $f(t) = ae^{kt}$ (resp. $f(t) = ae^{-kt}$).

Exemple

Dans un corps radioactif, une population de noyaux radioactifs décroît en suivant la loi de décroissance exponentielle $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$ où λ est une constante strictement positive, caractéristique du noyau étudié, et N_0 est le nombre de noyaux présents dans le corps radioactif à l'instant $t = 0$.

Pour le radon 222, la valeur de λ est environ égale à 0,19 ; ainsi, si $N_0 = 73$, alors le nombre de noyaux présents à l'instant t peut être modélisé par la fonction $N : t \mapsto 73e^{-0,19t}$.

1 Dériver un produit, un quotient

OBJECTIF 1
Étudier et utiliser la fonction exponentielle

a. Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (-2x+1)e^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que le tableau de signes de cette dérivée.
En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
b. Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{x+2}$, définie et dérivable sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$, puis donner une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse -1.

Solution

a. Pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = -2 \times e^x + (-2x+1) \times e^x = \boxed{(-2x-1) \times e^x}$.
$f'(x)$ est du signe de $(-2x-1)$ car $e^x > 0$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f		↗	$2e^{-\frac{1}{2}}$	↘	

b. Pour tout nombre réel x, on a $g'(x) = \dfrac{e^x \times (x+2) - e^x \times 1}{(x+2)^2} = \boxed{\dfrac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}}$.

Une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse -1 est :

$$y = g(-1) + g'(-1) \times (x-(-1)) \Leftrightarrow y = e^{-1} + 0 \times (x+1) \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{e}}.$$

$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ avec $u(x) = -2x+1$ et $v(x) = e^x$, et donc $u'(x) = -2$ et $v'(x) = e^x$.
▶ Chapitre 4

Le coefficient directeur de la droite représentant la fonction affine $x \mapsto -2x-1$ est strictement négatif.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x+2$, et donc $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$.
▶ Chapitre 4

Application

9 **a.** Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (5x-15)e^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
En déduire le tableau de variations de f.
b. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.

10 Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{2x-3}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1{,}5\}$, et le tableau de signes de cette dérivée.
En déduire le tableau de variations de g.

Les incontournables 37 p. 173

2 Utiliser les relations fonctionnelles

OBJECTIF 1
Étudier et utiliser la fonction exponentielle

Montrer que, pour tout nombre réel x, on a $\dfrac{\left(e^{-3x}\right)^2 e^{5x}}{e^{-x}} = 1$.

Solution

Pour tout nombre réel x :

$$\frac{\left(e^{-3x}\right)^2 e^{5x}}{e^{-x}} = \frac{e^{-6x} \times e^{5x}}{e^{-x}} = \frac{e^{-6x+5x}}{e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = e^{-x-(-x)} = e^0 = 1.$$

Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
- $(e^x)^n = e^{nx}$;
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$;
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

Application

11 Montrer que, pour tout nombre réel x, on a $e^{-5x}\left(\dfrac{e^x}{e^{-2x}} - e^{3x}\right) = 0$.

12 Montrer que $\dfrac{e^{1{,}5}}{e \times e^{-0{,}5}} = e$.

Les incontournables 38 et 39 p. 173

Savoir-faire

3 Résoudre des équations ou des inéquations

OBJECTIF 1
Étudier et utiliser la fonction exponentielle

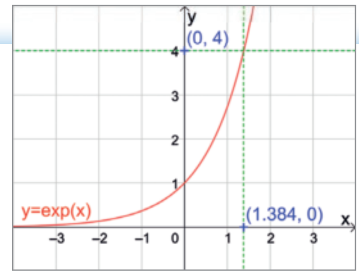
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: **a.** l'inéquation $e^x - 1 \geqslant 0$; **b.** l'équation $e^x = e^{x^2-x+1}$.
2. Donner une valeur approchée au millième de la solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^x = 4$.

Solution

1. a. $e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{x \in [0\ ;+\infty[.}$

b. $e^x = e^{x^2-x+1} \Leftrightarrow x = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1.}$

2. On trace la courbe représentative de la fonction exponentielle à l'aide d'un outil numérique.
En affichant les valeurs au millième près, on obtient la valeur $\boxed{x \approx 1{,}384.}$



Application

13 **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x > e$. **b.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-x} = e^{x+3}$.

Les incontournables 40 et 41 p. 173

4 Étudier les variations d'une fonction

OBJECTIF 2
Étudier une composée affine de la fonction exponentielle

Donner le domaine de définition, une expression de la dérivée et le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x-1}}{x-3}$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

Solution

- f est définie pour tout nombre réel x tel que $x - 3 \neq 0$.
Donc f est définie (et dérivable) sur $\boxed{]-\infty\ ;3[\ \cup\ ]3\ ;+\infty[.}$

Le dénominateur ne doit pas s'annuler.

- Pour tout nombre réel $x \in\ ]-\infty\ ;3[\ \cup\ ]3\ ;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x-1}(x-3) - e^{2x-1} \times 1}{(x-3)^2} = \frac{e^{2x-1}(2x-6) - e^{2x-1} \times 1}{(x-3)^2} = \frac{e^{2x-1}(2x-6-1)}{(x-3)^2}$$

d'où $\boxed{f'(x) = \dfrac{e^{2x-1}(2x-7)}{(x-3)^2}}$.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec
$u(x) = e^{2x-1}$ et
$v(x) = x - 3$, et donc
$u'(x) = 2e^{2x-1}$ et $v'(x) = 1$.
▶ Chapitre 4

- Pour tout nombre réel $x \in\ ]-\infty\ ;3[\ \cup\ ]3\ ;+\infty[$, $e^{2x-1} > 0$ et $(x-3)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(2x-7)$; on en déduit le tableau de variations de f :

On étudie le signe de $f'(x)$ pour en déduire les variations de f.
▶ Chapitre 5

x	$-\infty$		3		3,5		$+\infty$
Signe de $(2x-7)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	‖	↘	$2e^6$	↗	

Penser à indiquer les valeurs interdites dans le tableau.

Application

14 Donner le domaine de définition, une expression de la dérivée et le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto (x^2 + 3x + 3)e^{-2x+5}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

15 Donner le domaine de définition, une expression de la dérivée et le tableau de variations de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^{-x+1}}{5x-2}$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0{,}4\}$.

Les incontournables 42 à 44 p. 173

Vidéo
Modéliser par une croissance exponentielle
hatier-clic.fr/ma1169

OBJECTIF 3
Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

5 Modéliser par une croissance exponentielle

Selon le mathématicien et économiste gallois Richard Price (1723-1791), emprunter un penny (monnaie britannique) au taux d'intérêt annuel de 5 % conduit à s'endetter de façon exponentielle.
Supposons qu'au 1er janvier 2019, un État emprunte 1 000 € à ce taux.

1. On note u_n, avec $n \in \mathbb{N}$, la dette en janvier de l'année 2019 + n.
a. Préciser u_0, montrer que $u_1 = 1\,050$, puis calculer u_2.
b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner son terme général en fonction de n.
c. Représenter par un nuage de points les premiers termes de cette suite.

2. On admet que le nuage de points obtenu se situe sur la représentation graphique d'une fonction de la forme $f(t) = a \times \mathrm{e}^{kt}$. On cherche à déterminer une expression de f.
a. Que vaut $f(0)$? En déduire la valeur de a.
b. À l'aide de la représentation graphique de la fonction exponentielle, donner une valeur approchée à 10^{-5} de k.
c. Quelle sera la dette de l'État en juin 2023 ?

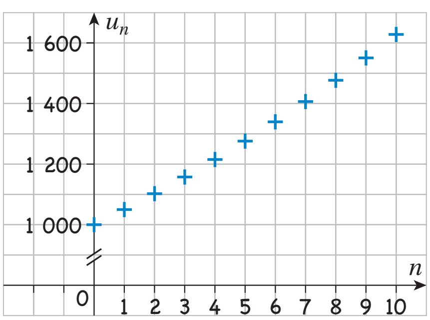
Solution

1. a. $u_0 = \underline{1\,000}$; $u_1 = u_0 \times \left(1 + \dfrac{5}{100}\right) = \underline{1\,050}$; $u_2 = u_1 \times 1{,}05 = \underline{1\,102{,}5}$.

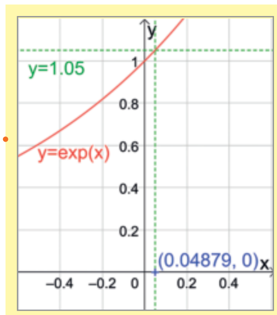
Augmenter une valeur de 5 % revient à la multiplier par le coefficient multiplicateur $\left(1+\dfrac{5}{100}\right) = 1{,}05$.

b. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1{,}05$.
Son terme général est $\boxed{u_n = u_0 \times q^n = 1\,000 \times 1{,}05^n}$.

c.



2. a. D'une part, $u_0 = 1\,000$ et d'autre part, $f(0) = a \times \mathrm{e}^0 = a$ donc $\underline{a = 1\,000}$.
b. On cherche une valeur approchée de la solution réelle de l'équation $\mathrm{e}^k = 1{,}05$.
À l'aide d'un outil logiciel (affichage des valeurs au cent millième près),
on trouve $\underline{k \approx 0{,}04879}$.



c. En juin 2023, 4,5 années se seront écoulées depuis l'emprunt.
On calcule alors une valeur approchée de l'image de 4,5 par la fonction f.
$f(4{,}5) = a \times \mathrm{e}^{k \times 4{,}5} \approx 1\,000 \times \mathrm{e}^{0{,}04879 \times 4{,}5} \approx 1\,245$.
<u>En juin 2023, la dette sera d'environ 1 245 €.</u>

Application

16 Une ville comptait 30 000 habitants en 2 015. Chaque année le nombre d'habitants baisse de 8 %.
a. Modéliser la situation par une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, où u_n représente le nombre d'habitants, en milliers, en (2 015 + n), puis représenter par un nuage de points les premiers termes de cette suite.
b. On admet que le nuage de points obtenu se situe sur la représentation graphique d'une fonction de la forme $f(t) = a \times \mathrm{e}^{kt}$.
Déterminer une expression de la fonction f.
c. Déterminer le mois et l'année où le nombre d'habitants sera divisé par deux si cette évolution à décroissance exponentielle se poursuit.

Les incontournables 45 et 46 p. 173

RETENIR L'ESSENTIEL…

Fiche de cours

Fonction exponentielle

$$f : x \mapsto \exp(x)$$

C'est l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' égale à f telle que $f(0) = 1$. Ainsi : $\mathbf{exp(0) = 1}$ et $\mathbf{exp'(x) = exp(x)}$.

$\exp(1) = \mathrm{e} \approx 2{,}718\ 28$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{exp(x) = e^x}$.

Relations fonctionnelles

Pour tous nombres réels x et y :

$\boxed{\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y}$ $\boxed{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 1}$ $\boxed{\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}$

Variations et signe de la fonction exponentielle

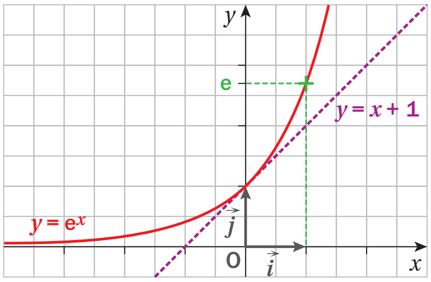
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations de exp	↗	1	e	↗

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e^x > 0}$.

Résolution d'équations et d'inéquations

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

$\mathbf{e^a = e^b \Leftrightarrow a = b}$ $\mathbf{e^a > e^b \Leftrightarrow a > b}$.



▶ **Cours 1** p. 164

Modélisation par une croissance ou une décroissance exponentielle

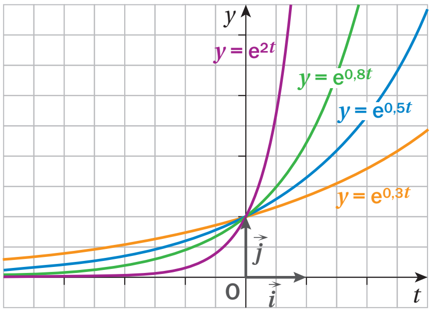
k est un nombre réel strictement positif.

Modélisation par une croissance exponentielle

Phénomène pouvant être modélisé par :

$$f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$$

f_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t : $f_k'(t) = k \times \mathrm{e}^{kt}$.

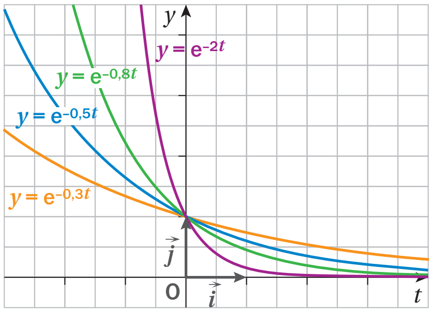


Modélisation par une décroissance exponentielle

Phénomène pouvant être modélisé par :

$$g_k : t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$$

g_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t : $g_k'(t) = -k \times \mathrm{e}^{-kt}$.



Phénomènes discrets

La représentation graphique de la suite géométrique $(u_0 q^n)$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}_+^*$) est un **nuage de points qui appartiennent à la courbe représentative de la fonction** $\mathbf{t \mapsto u_0 e^{bt}}$, où b est l'unique nombre réel qui vérifie $\mathrm{e}^b = q$.

- $\forall\, b \in \mathbb{R}$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{nb} = (\mathrm{e}^n)^b$
- Si $b > 0$, alors la suite (e^{nb}) est strictement croissante.
  Si $b = 0$, alors la suite (e^{nb}) est constante : tous ses termes valent 1.
  Si $b < 0$, alors la suite (e^{nb}) est strictement décroissante.

▶ **Cours 2 et 3** p. 165-166

… ET FAIRE LE POINT

QUIZ

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

Vérifiez que vous avez compris le cours.

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

	A	B	C	D
17 Une expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto xe^x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, est :	$e^x + xe^x$	$e^x(x+1)$	$1 \times e^x$	e^{x^2}
18 Pour tout nombre réel x, $\dfrac{e^{3x} \times e^2}{e^{-2x}}$ est égal à :	e^{x+2}	e^{2x}	e^{5x+2}	e^{3x}
19 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^x = 1{,}68$ admet :	aucune solution.	exactement une solution.	pour solution $x = 1$.	pour solution $x = 0$.
20 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{-x} = (-1)$ admet :	aucune solution.	au moins une solution.	pour solution $x = 1$.	pour solution $x = \dfrac{1}{e}$.
21 Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $e^{-x} > 1$ a pour solution l'intervalle :	$]-\infty ; 0[$	$]0 ; +\infty[$	$[0 ; +\infty[$	$]-\infty ; 0]$
22 Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $e^{2x} > e^3$ a pour solution l'intervalle :	$\left]-\infty ; \dfrac{3}{2}\right[$	$\left]\dfrac{3}{2} ; +\infty\right[$	$]-\infty ; 1{,}5[$	$]1{,}5 ; +\infty[$
23 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^x = 0$ admet :	aucune solution.	exactement une solution.	pour solution $x = -1\,000\,000\,000$.	pour solution $x \approx -1\,000\,000\,000$.
24 L'équation $e^{3x+5} = e^{5x-9}$ est équivalente à :	$\dfrac{3x+5}{5x-9} = 0$	$3x + 5 = 5x - 9$	$-2x + 14 = 0$	$x = 7$
25 La fonction $f : x \mapsto e^{-2x+3}$ est :	strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	positive sur $\mathbb{R}$.	négative sur $\mathbb{R}$.
26 La fonction $f : x \mapsto e^{3x-100}$ est :	strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	positive sur $\mathbb{R}$.	négative sur $\mathbb{R}$.
27 Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de $f : x \mapsto e^{-5x}$ est :	$y = -5x + 1$	$y = -5x - 1$	$y = -x + 5$	$y = -x - 5$
28 La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto e^{2x+1}$ passe par le point :	$(0 ; e)$	$(0 ; 1)$	$\left(-1 ; \dfrac{1}{e}\right)$	$(-1 ; e)$
29 La suite, définie sur $\mathbb{N}$, de terme général $e^{0,3n}$ est :	croissante.	décroissante.	de premier terme positif.	de premier terme négatif.
30 La suite, définie sur $\mathbb{N}$, de terme général e^{-5n} est :	croissante.	décroissante.	de premier terme positif.	de premier terme négatif.

Corrigés p. 368

DÉVELOPPER SES STRATÉGIES ET MÉTHODES

Les bons réflexes — Adoptez la bonne stratégie !

31 Parlons stratégies ! À l'oral

Dans chaque cas, résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$ et expliquer la **stratégie** choisie.

a. $\left(e^x\right)^2 - e^x = 0$ **b.** $e^{4x^2-4x+1} = 1$ **c.** $\left(e^{3x}\right)^2 = e$ **d.** $e^{3x-2} - e^{x-5} = 0$

Différentes stratégies pour résoudre une équation

Stratégie 1
Je pense aux relations fonctionnelles.

Stratégie 2
Je pense à factoriser pour me ramener à une équation produit nul.

Stratégie 3
Je pense aux identités remarquables.

J'ai une **autre stratégie** !

32 Parlons stratégies ! À l'oral

Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions ci-dessous. Expliquer la **stratégie** choisie dans chaque cas.

a. $f_1(x) = x^2e^x - e^x$ **b.** $f_2(x) = 1 - e^x$ **c.** $f_3(x) = \dfrac{3xe^{3x} + 2e^{3x}}{(x+1)^2}$ **d.** $f_4(x) = (9x^2 - 6x + 1)e^{-x}$ **e.** $f_5(x) = e^x - e$

Différentes stratégies pour dresser un tableau de signes

Stratégie 1
Je pense au tableau de variations de la fonction exponentielle.

Stratégie 2
Je pense à factoriser et aux propriétés des fonctions affines.

Stratégie 3
Je pense aux identités remarquables.

J'ai une **autre stratégie** !

33 À chacun sa formule !

Pour chacune des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, déterminer une expression de sa fonction dérivée en utilisant l'une des formules ci-dessous.
Contrainte : chaque formule ne peut être utilisée qu'une seule fois.

a. $f_1(x) = (3x^2 - x)e^x$ **b.** $f_2(x) = e^{-5x+1}$ **c.** $f_3(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ **d.** $f_4(x) = \dfrac{e^x}{4}$ **e.** $f_5(x) = e^x - x + 1$

Différentes formules de dérivation

$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$ $(ku)'(x) = ku'(x)$ $(uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

$g(ax + b)'(x) = a \times g'(ax + b)$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$

34 En moins d'une minute !

Dresser le tableau de variations de chaque fonction, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. $f_1 : x \mapsto e^x + 1$ **b.** $f_2 : x \mapsto e^{-3x+2}$
c. $f_3 : x \mapsto e^x - 1$ **d.** $f_4 : x \mapsto -5e^{-2x}$

35 En moins d'une minute !

Dresser le tableau de signes de chaque fonction.

a. $f_1 : x \mapsto x^2e^x$ sur $\mathbb{R}$. **b.** $f_2 : x \mapsto x^3e^x$ sur $\mathbb{R}$.
c. $f_3 : x \mapsto \sqrt{x}\,e^x$ sur $\mathbb{R}_+$. **d.** $f_4 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

36 Chacun sa méthode En groupe

Pour chacune des suites définies sur $\mathbb{N}$:

1. représenter ses quatre premiers termes dans le plan muni d'un repère ;

2. les points du nuage obtenu se situent sur la courbe représentative d'une fonction de la forme $f : t \mapsto a \times e^{kt}$ ou $g : t \mapsto a \times e^{-kt}$; préciser la forme de la fonction correspondante, puis déterminer la valeur du réel a et une valeur approchée du réel positif k à 10^{-1} près.

a. $u_n = 2 \times 0{,}5^n$ **b.** $v_n = (-3) \times 0{,}5^n$
c. $w_n = 3 \times 2{,}5^n$ **d.** $t_n = (-2) \times 0{,}9^n$

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Dériver un produit, un quotient

37 Donner une expression de la dérivée de chaque fonction.

a. $f : x \mapsto 3xe^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{2x+1}$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-0{,}5\}$.

c. $h : x \mapsto e^x \times \sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. $k : x \mapsto (3x^2 - 5x + 8) \times e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Utiliser les relations fonctionnelles

38 Associer chaque expression à sa forme simplifiée.

Expressions	Formes simplifiées
1. $e^{-3x} \times e^x$	**a.** e^{-5x}
2. $\dfrac{e^{-3x}}{e^x}$	**b.** e^{-4x}
3. $\dfrac{e^{2x} \times e^{-5x}}{e^{-2x}}$	**c.** e^{-2x}
4. $\dfrac{e^x}{(e^{3x})^2}$	**d.** e^{-x}

39 Montrer que :

a. $e^{6x} \times e^{3x} = \dfrac{(e^x)^3}{e^{-6x}}$

b. $e^x(e^2 + e^{-x}) = e^{-x}(e^{2x+2} + e^x)$

c. $e^{3x} - e^{2x} = e^{2x}(e^x - 1)$

d. $\dfrac{e^{3x}\left(e^{-x} - (e^5)^2\right)}{e^{2x}} = 1 - e^{x+10}$

Résoudre des équations ou des inéquations

40 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations.

a. $e^{2x+1} = e^{5x-1}$

b. $e^{x^2} = e^{-5}$

c. $e^{2x^2} = e^{18}$

d. $e^{2x} \times e^{-3x+2} = e^{3x-5}$

e. $e^{x^2-2x-3} = 1$

f. $\dfrac{e^{4x+1}}{e^{2x+3}} = e$

41 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations.

a. $e^{2x} > 1$

b. $e^{-x+3} \geqslant 1$

c. $e^{3+x} < e$

d. $e^{-2x+5} \leqslant e$

e. $e^{x^2+x-6} < 1$

f. $e^{4x-2} \geqslant \dfrac{1}{e}$

Étudier les variations d'une fonction

42 Pour chaque fonction, donner une expression de sa dérivée et en déduire ses variations.

a. $f : x \mapsto e^{-5x+3}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. $g : x \mapsto \dfrac{e^{2x+1}}{3x-5}$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

c. $h : x \mapsto (-2x + 5)e^{3x}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

d. $k : x \mapsto \dfrac{e^{-x+2}}{x^2 - x - 2}$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 2\}$.

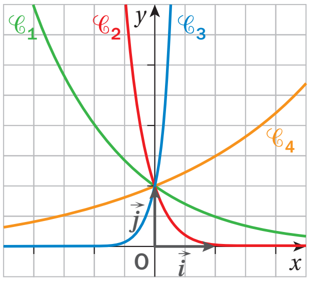
43 Associer chacune des fonctions ci-dessous à sa courbe représentative.

$f : x \mapsto e^{0{,}4x}$

$g : x \mapsto e^{-3x}$

$h : x \mapsto e^{-0{,}7x}$

$k : x \mapsto e^{5x}$



44 Recopier et compléter notamment avec les mots « croissante » et « décroissante ».

a. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{-5x}$ est strictement …… et sa courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; …) et (1 ; …).

b. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto 3 \times e^{5x-4}$ est strictement …… et sa courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; …) et (1 ; …).

c. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (-3) \times e^{2x-1}$ est strictement …… et sa courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; …) et (1 ; …).

Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

45 Pour chaque suite, définie sur $\mathbb{N}$, dire si elle peut modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle.

a. $u_n = e^{5n}$

b. $v_n = 0{,}1 \times 7^n$

c. $w_n = 3 \times (0{,}2)^n$

d. $t_n = e^{-5n}$

46 Les représentations graphiques des suites géométriques ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$, appartiennent aux courbes représentatives de fonctions de la forme ae^{kt} ou ae^{-kt} ($a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}_+^*$).

Déterminer dans chaque cas la valeur exacte de a et une valeur approchée de k.

a. $u_n = 3 \times 2^n$

b. $v_n = 0{,}2 \times 3^n$

c. $w_n = (-4) \times (1{,}3)^n$

d. $t_n = 5 \times 0{,}8^n$

Corrigés p. 368

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 1 Étudier et utiliser la fonction exponentielle

Savoir-faire 1, 2 et 3 p. 167-168

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

47 Associer à chaque expression sa forme simplifiée.

Expressions	Formes simplifiées
1. $(e^3)^2 \times e^9$	**a.** e^{-5}
2. $\dfrac{e^{-5}}{e^5}$	**b.** e^5
3. $\dfrac{e^{-3}}{e^{-7}} \times e$	**c.** e^{-10}
4. $\dfrac{\left(e^{-3}\right)^2 \times e^{-1}}{e^{-3} \times e}$	**d.** e^{15}

48 QCM

Dans chaque cas, choisir la valeur qui convient pour remplacer les pointillés.

1. $e^{\cdots} \times (e^{-6})^2 = e$

a. 12 **b.** 13 **c.** 37 **d.** –1

2. $\dfrac{e^{-5} \times e^{\cdots}}{e^{-0,5}} = 1$

a. 5 **b.** 5,5 **c.** $\dfrac{-0,5}{5}$ **d.** 4,5

49 QCM

1. Dans $\mathbb{R}$, la solution de l'équation $e^{-4x+3} = e$ est :

a. $\dfrac{3}{4}$ **b.** 1 **c.** 0,5 **d.** –1

2. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{5x^2} = e^{45}$ admet pour solution(s) :

a. 3 **b.** –9 **c.** 9 **d.** –3

50 Vrai ou faux ?

a. « $\dfrac{e^{1,01} \times \left(e^{0,3}\right)^2}{e^2} = \dfrac{e^{-0,8} \times e^{1,8}}{e}$ »

b. « Pour tout nombre réel x, $\dfrac{x + e^x}{e^{-x}} = xe^x + 1$. »

51 Associer à chaque inéquation son ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$.

Inéquations	Intervalles solutions
1. $e^{2x-3} \leqslant 1$	**a.** $]1\ ;+\infty[$
2. $e^{\frac{x}{2}+7} > e$	**b.** $]0,8\ ;+\infty[$
3. $e^{-5x+4} < 1$	**c.** $]-12\ ;+\infty[$
4. $e^{-4x+3} < \dfrac{1}{e}$	**d.** $]-\infty\ ;1,5]$

52 Vrai ou faux ?

« Une expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (x+1)e^x$ est $(x+2)e^x$. »

53 Recopier et compléter avec le nombre qui convient.

a. $\dfrac{\left(e^{\cdots}\right)^2 \times e^2}{e} = e^{-5}$ **b.** $\dfrac{e^{1,4} \times e^{-1}}{e^{\cdots} \times e^{1,2}} = 1$

c. $\dfrac{\left(e^{\cdots}\right)^2 \times e^{-7}}{e^2} = e$ **d.** $5 \times e^{1,5} \times \left(e^{-0,5}\right)^{\cdots} = 5$

54 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations.

a. $e^{-7x} \times e^{2x+8} = e^{-x+3}$ **b.** $\dfrac{e^{3x-1}}{e^{-5x+4}} = 1$

c. $\left(e^{3x}\right)^2 \times e^{x^2+5} = 1$ **d.** $e^{1-x} - e^{2x^2} = 0$

55 Simplifier chaque expression.

a. $\dfrac{e^{x^2} \times \left(e^x\right)^2}{e^{(x+1)^2}}$ **b.** $\dfrac{e^{3+x}}{e^{3-x}}$ **c.** $\dfrac{e^{2x+4} \times e^{-x+1}}{e^{x+5}}$

56 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations.

a. $e^{x^2+6x+5} \geqslant 1$ **b.** $e^{-x^2-3x+5} > e$

c. $e^{2x^2-3x-1} \leqslant \left(e^4\right)^2$ **d.** $\dfrac{e^{x^2} \times \left(e^{-5}\right)^3}{\left(e^x\right)^2} \leqslant 1$

57 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations.

a. $e^x(e^x - 1) = 0$ **b.** $(e^x + 8)(e^x - e) = 0$

c. $xe^{2x+1} = x$ **d.** $(e^{-3x+6} - e)\left(e^{x^2} - 1\right) = 0$

58 **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 + 2X - 3 = 0$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.

Aide On pourra poser $X = e^x$ dans l'équation, pour déterminer les valeurs de X et en déduire celles de x.

59 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + (1 - e)x - e = 0$.

60 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} + e^{x-2} = 0$.

61 **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$3e^{-x} - e^x - 2 = (e^x + 3)(e^{-x} - 1).$$

b. En déduire le tableau de signes de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 3e^{-x} - e^x - 2$.

62 On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

a. Déterminer une expression de la dérivée de f.

b. Donner le tableau de signes de cette dérivée.

c. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

63 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1}$ définie et dérivable sur $]-1\ ;+\infty[$.

a. Donner le tableau de signes de f.

b. Dresser le tableau de variations de f après avoir calculé sa dérivée.

Fichier Python
Ex. 67
Manuel numérique enseignant

64 Copies à la loupe

Iliès, Margaux et Gabriel ont rédigé les réponses suivantes sur leurs copies pour déterminer une expression de la dérivée de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{-5x+3},$$

définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

Iliès

Pour tout nombre réel x différent de $\frac{3}{5}$:

$$f'(x) = \frac{e^x}{-5} = -\frac{e^x}{5}$$

Margaux

Pour tout nombre réel x différent de $\frac{3}{5}$:

$$f'(x) = \frac{e^x(-5x+3) - 5e^x}{-5x+3}$$

$$= \frac{e^x(-5x-2)}{-5x+3}$$

Je simplifie par « $-5x$ ».

$$= -\frac{2}{3}e^x$$

Gabriel

Pour tout nombre réel x différent de $\frac{3}{5}$:

$$f'(x) = \frac{-5e^x - e^x(-5x+3)}{(-5x+3)^2} = \frac{(5x-2)e^x}{(-5x+3)^2}$$

- Leurs réponses sont-elles correctes ? Identifier toutes les erreurs.

Maths à l'oral
Expliquez chacune des erreurs identifiées.

65

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - x + 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer une expression de la dérivée de f.
b. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
c. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
d. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

66

On considère la fonction $g : x \mapsto x^2e^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer une expression de la dérivée de g.
b. Donner le tableau de signes de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
c. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
d. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse $x = -2$.

67 PROGRAMMATION python

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1. a. Déterminer une expression de la dérivée de f.
b. Donner le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.
c. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. Jeanne a programmé la fonction en Python suivante.

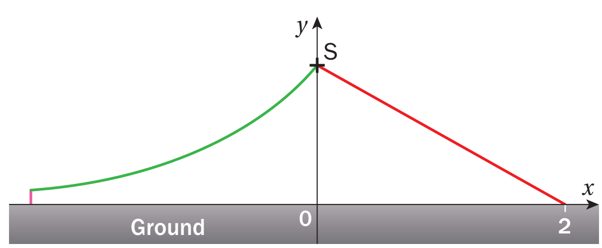
```python
import math
def depasser(a):
    m=1
    while math.exp(m)/m<a:
        m=m+1
    return m
```

a. Tester cette fonction pour A = 10, puis A = 100, puis A = 1 000.
b. Que permet de faire cette fonction ?
c. Quelle conjecture peut-on faire sur $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

68 IN ENGLISH

p. 381

A slide (in green) and its ladder (in red) to reach highest point S of the slide are modelled in the x-y plane by two functions:
– the green part $f : x \mapsto e^x$;
– the red part $g : x \mapsto ax + b$.
The ground is represented by the x-axis and the height S coincides with the y-axis. The pink section represents the end of the slide which is located 10 cm from the ground.



a. What height is highest point S?
b. Determine the real numbers a and b for the foot of the ladder to be located at 2 meters from the origin.
c. At what distance from the origin is the end of the slide located?

69

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{-2e^x}{3x-5}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{3}\right\}$. Avec un logiciel de calcul formel, Damien a obtenu les résultats ci-dessous.

$g(x) = \text{Dérivée}\left(-\frac{2\,e^x}{3\,x-5}\right)$
$\rightarrow \frac{-6\,x\,e^x + 16\,e^x}{9\,x^2 - 30\,x + 25}$

$f : \text{Tangente}\left(0, -\frac{2\,e^x}{3\,x-5}\right)$
$\rightarrow y = 0.64x + 0.4$

- Vérifier ces résultats.

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 2 Étudier une composée affine de la fonction exponentielle

Savoir-faire 4 p. 168

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

70 Vrai ou faux ?

a. « La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-7x+3}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ ».

b. « La dérivée de la fonction $g : x \mapsto -5\mathrm{e}^{2x-1}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. »

c. « La fonction $h : x \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-6x+8}}{2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. »

d. « La fonction $k : x \mapsto 0{,}1\mathrm{e}^{3x-10}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. »

71 Associer à chaque courbe le point qui lui appartient.

La courbe d'équation…	… passe par le point de coordonnées
1. $y = \mathrm{e}^{-0{,}1x+10}$	**a.** $\left(10\,;-\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)$
2. $y = -3\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}+5}$	**b.** $\left(2\,;\dfrac{1}{3}\right)$
3. $y = \dfrac{\mathrm{e}^{4x-8}}{3}$	**c.** $(100\,;1)$
4. $y = -2\mathrm{e}^{0{,}3x-4}$	**d.** $(20\,;-3)$

72 QCM

Une expression de la dérivée de $f : x \mapsto -5\mathrm{e}^{-2x+3}$ est :

a. $(10x-3)\mathrm{e}^{-2x+3}$

b. $-5+(-2)\times\mathrm{e}^{-2x+3}$

c. $10\mathrm{e}^{-2x+3}$

d. $-7\mathrm{e}^{-2x+3}$

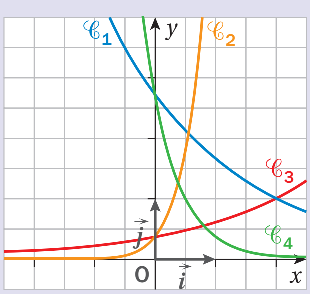
73 Associer chacune des fonctions ci-dessous à sa courbe représentative.

$f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+1}$

$g : x \mapsto \mathrm{e}^{0{,}5x-1}$

$h : x \mapsto \mathrm{e}^{-0{,}5x+1}$

$k : x \mapsto \mathrm{e}^{3x-1}$



74 Vrai ou faux ?

a. « Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-4x+1}$ au point d'abscisse 0 est $y = \mathrm{e}x$. »

b. « Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{3x-2}}{2x-1}$ au point d'abscisse 0 est $y = \mathrm{e}x$. »

75 On considère les fonctions :

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x-5} \text{ et } g : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+3},$$

définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. a. Déterminer une expression de la dérivée de f et de la dérivée de g.

b. Donner le tableau de signes de chacune de ces dérivées sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de f et celui de g sur $\mathbb{R}$.

2. a. Tracer les courbes représentatives de f et de g sur un outil numérique.

b. Conjecturer la valeur de l'éventuelle solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = g(x)$.

c. Valider ou corriger la conjecture émise à la question **b** en résolvant une équation.

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) > f(x)$.

76 On considère la fonction $f : x \mapsto (-x^2+3x-1)\mathrm{e}^{-x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer une expression de la dérivée de f.

b. Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

d. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -2.

77 On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{12x+5}}{x^3}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

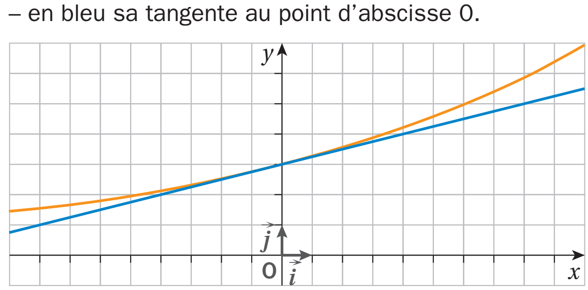
a. Montrer qu'une expression de la dérivée de g est $g'(x) = \dfrac{(12x-3)\mathrm{e}^{12x+5}}{x^4}$.

b. Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}^*$.

c. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^*$.

d. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse -1.

78 Sur le graphique ci-dessous sont représentées :
– en orange une fonction $f : x \mapsto a\mathrm{e}^{bx+c}$;
– en bleu sa tangente au point d'abscisse 0.



- Retrouver les valeurs des nombres réels a, b et c.

Maths à l'oral
Expliquez votre démarche.

Fichier Python
Ex. 80
Manuel numérique enseignant

★★

79 Parties masquées

Claire a retrouvé un exercice de mathématiques avec sa solution, mais des parties sont illisibles car tachées d'encre.

Énoncé

On considère la fonction $f : x \mapsto -3e$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer une équation de la tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.

Solution

Pour tout nombre réel x :

$f'(x) = -6e$

$f'(0) = -6e$ et $f(0) =$

Donc une équation de la tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0 est

$y =$

- Aider Claire à retrouver les parties masquées par les taches d'encre.

Maths à l'oral

Expliquez votre démarche pas à pas pour retrouver les parties masquées.

80 ALGORITHMIQUE

On considère la suite (u_n) définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = e^{0,8n}$.

1. a. Écrire en langage naturel un algorithme qui, pour une valeur d'un nombre réel A donnée, indique le plus petit nombre entier M tel que $u_M > A$.

b. Justifier pourquoi cet algorithme fonctionne pour tout nombre réel A.

2. python Programmer votre algorithme en Python et le tester pour A = 100, puis pour A = 1 000.

81 IN ENGLISH p. 381

The function h is such that $h : x \mapsto \dfrac{e^{-4x-3}}{-3x+1}$ differentiable where $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

a. Determine an expression of its derivative.

b. State the subintervals in which the derivative is negative, positive or zero.

c. State the subintervals in which h is increasing, decreasing or static.

d. Determine the equation of the tangent line of h at the point $x = 1$.

82

On considère les fonctions :

$$f : x \mapsto e^x \quad \text{et} \quad g : x \mapsto 2e^{\frac{x}{2}} - 1,$$

définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

- Étudier la position relative des courbes représentatives de f et g.

83

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x+1} - e^{-x}}{x^2 + 3}$, définie et dérivable sur $[-3 ; 2]$.

1. a. Tracer la courbe représentative de f sur un outil numérique.

b. Donner les valeurs approchées des éventuelles solutions sur $[-3 ; 2]$ de l'équation $f(x) = 0$.

c. Donner les valeurs approchées des éventuelles solutions sur $[-3 ; 2]$ de l'équation $f(x) = -2$.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto 3x + 2$, définie et dérivable sur $[-3 ; 2]$.

a. Tracer la courbe représentative de g sur le même écran que celle de f.

b. Donner les valeurs approchées des éventuelles solutions sur $[-3 ; 2]$ de l'équation $f(x) = g(x)$.

c. Donner le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ sur $[-3 ; 2]$.

84

1. On considère la fonction :

$$g : x \mapsto (x - 2)e^{-2x+6} + 3,$$

définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer une expression de la dérivée de g.

b. Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

2. Le bénéfice (en millions d'euros) d'une grande entreprise en fonction de la quantité x (en tonnes) de métal vendue est donné par la fonction g.

a. Quelle quantité minimale doit vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice ?

b. Quel est le bénéfice maximal ? Pour quelle quantité de métal vendu ?

85

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 9}$, définie et dérivable sur $]-3 ; 3[$.

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient :

$f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 9}$

$g(x) = \text{Dérivée}(f, x)$

$\to \dfrac{-2\,x\,e^{2x} + 2\,x^2\,e^{2x} - 18\,e^{2x}}{x^4 - 18\,x^2 + 81}$

$h(x) = \text{Développer}\left(\left(x^2 - 9\right)^2\right)$

$\to x^4 - 18\,x^2 + 81$

a. Justifier que, pour tout nombre réel x :

$$e^{2x}(2x^2 - 2x - 18) = -2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} - 18e^{2x}.$$

b. En déduire le tableau de signes de la dérivée de la fonction f sur $]-3 ; 3[$, puis le tableau de variations de la fonction f sur $]-3 ; 3[$.

86

On considère les fonctions $f : x \mapsto -e^{-12x}$ et $g : x \mapsto 4e^{3x} - 5$, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

a. Tracer les courbes représentatives de f et g sur un outil numérique, puis conjecturer les coordonnées du point en lequel elles ont une tangente commune.

b. Valider ou corriger cette conjecture par le calcul.

Entraînement

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 3 Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

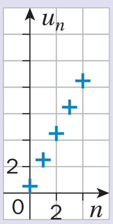
Savoir-faire 5 p. 169

Questions FLASH

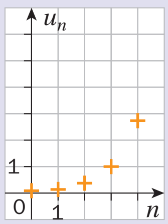
Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

87 QCM
Les nuages de points ci-dessous représentent chacun les premiers termes d'une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, modélisant une situation. Quelles sont les situations pour lesquelles on peut affirmer qu'elles ne sont pas à croissance exponentielle ?

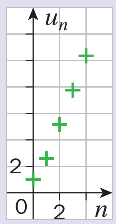
a.



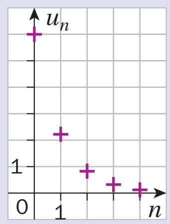
b.



c.



d.



88 Pour chaque suite, définie sur $\mathbb{N}$, préciser si elle est à croissance ou à décroissance exponentielle.

a. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 80$ et de raison 0,98.

b. (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -0{,}8$ et de raison 5.

c. (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = -2$ et de raison $(-0{,}4)$.

d. (a_n) est la suite de terme général $a_n = \mathrm{e}^{-0{,}1n+5}$.

Aide Chapitre 2 p. 49, pour la détermination du sens de variation d'une suite géométrique.

89 Vrai ou faux ?

a. « La suite u définie par $u_0 = 10\,000$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 100$ est à croissance exponentielle. »

b. « La suite v définie par $v_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}2v_n$ est à croissance exponentielle. »

c. « La suite w définie par $w_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = -3w_n$ est à décroissance exponentielle. »

d. « La suite a définie par $a_0 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3a_n$ est à décroissance exponentielle. »

90 QCM
En 2018, un village comptait 800 habitants et le maire a constaté chaque année une baisse de 2 % du nombre d'habitants depuis 10 ans. On considère que cette baisse reste constante chaque année.
On note u_n, avec $n \in \mathbb{N}$, le nombre de centaines d'habitants de ce village l'année $(2018 + n)$. La représentation graphique de la suite (u_n) est un nuage de points qui appartient à la représentation graphique d'une fonction $t \mapsto a \times \mathrm{e}^{kt}$.
Quelle valeur peut-on donner au nombre réel a ?

a. 0,98 **b.** 800 **c.** 1,02 **d.** 8

Pour les exercices 91 et 92

a. Représenter les quatre premiers termes de la suite.

b. Le nuage de points obtenu se situe sur la représentation graphique d'une fonction de la forme $f : t \mapsto a \times \mathrm{e}^{kt}$. Déterminer la valeur du nombre réel a et une valeur approchée du nombre réel k à 10^{-2} près.

91 On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = 3 \times 0{,}8^n.$$

92 On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_n = 0{,}4 \times 5{,}1^n.$$

93 Les parents de Gaëtane placent, depuis sa naissance, 50 € sur son compte courant chaque année ; ils affirment que leur placement est à croissance exponentielle.

À l'oral Expliquer l'erreur commise par les parents de Gaëtane dans leur raisonnement, puis proposer un placement à croissance exponentielle.

94 Afin d'acheter des ouvrages numériques, la bibliothèque municipale a décidé, à partir de janvier 2019, de procéder à un « effeuillage » en vendant le 10 janvier de chaque année 5 % des ouvrages papier de son stock.
Le 10 janvier 2018, la bibliothèque disposait d'un stock de 35 000 ouvrages papier.
Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n le nombre (en milliers) d'ouvrages papier disponibles après effeuillage le 10 janvier de l'année $(2018 + n)$.

1. Justifier que $u_0 = 35$, puis montrer que $u_1 = 33{,}25$ et $u_2 \approx 31{,}59$.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. TICE On utilise un tableur pour obtenir un modèle d'ajustement exponentiel de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	35
3	1	33,25
4	2	31,59
5	3	30,01
6	4	28,51
7	5	27,08
8	6	25,73

a. Quelle formule faut-il saisir dans la cellule B3 ?

b. Le logiciel propose la fonction $f : t \mapsto 35\mathrm{e}^{-0{,}05t}$ comme modèle d'ajustement. Vérifier qu'en octobre 2031, il restera environ la moitié du stock d'ouvrages papier de 2018.

95 **De la réponse à la question**

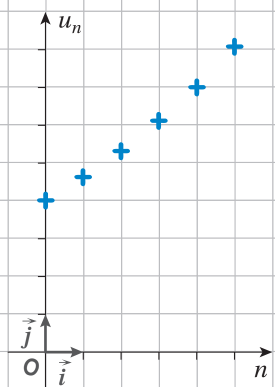
Lila a rédigé la réponse suivante sur sa copie.

a. $u_0 = 4$; $u_1 = 4 \times \left(1+\frac{15}{100}\right) = 4{,}6$;
$u_2 = 4{,}6 \times 1{,}15 = 5{,}29$.

b. La suite est géométrique de raison 1,15.

c. $u_n = 4 \times 1{,}15^n$.

d.



e. $f(0) = a$ donc $a = 4$.

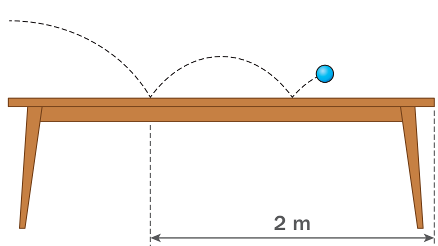
f. On cherche une valeur approchée de k telle que $e^k = 1{,}15$. On trouve $k \approx 0{,}14$.
Ainsi $f(t) = 4 \times e^{0{,}14t}$.

g. Au bout de 6 heures et 15 minutes le nombre de bactéries sera de 960.

- Proposer un énoncé possible pour l'exercice traité par Lila.

Maths à l'oral
Discutez de la réponse que vous apporteriez à cet exercice.

96 LOGIQUE Une balle rebondit sur une table à 2 m de son bord droit. Le premier rebond a pour longueur 1 m, puis chaque rebond est deux fois moins long que le précédent.



a. Modéliser la situation par une suite (ℓ_n) où ℓ_n représente la longueur (en m) du n-ième rebond.

b. Représenter par un nuage de points les premiers termes de cette suite.

c. Le nuage de points obtenu se situe sur la représentation graphique d'une fonction de la forme $f : t \mapsto a \times e^{kt}$. Déterminer une expression de la fonction f.

d. Expliquer pourquoi $f(t) > 0$ pour tout nombre réel t.

e. Expliquer pourquoi la balle ne peut pas tomber de la table.

97 IN ENGLISH p. 381

In physics, the rate of decay of a radioactive substance, that is to say the number of particles that decay in one second, is proportional to the number of particles $N(t)$ present at the moment t. The rate of decay corresponds to the derivative of the function N.

The function N satisfies two conditions:

- $N'(t) = -\lambda \times N(t)$ where $\lambda > 0$;
- $N(0) = N_0$, where N_0 is the number of particles present in the radioactive substance for $t = 0$.

a. Show that the function $f : t \mapsto N_0 e^{-\lambda t}$ satisfies these two conditions and that consequently the number of particles present at time t can be modelled by this function.

b. State whether the rate of decay of a radioactive substance is increasing or decreasing exponentially.

98 Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 °C ; sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

On note t le temps (en h) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint. La température du four (en °C) à l'instant t est donnée par la fonction f définie pour tout nombre réel t positif par :

$$f : t \mapsto a e^{-\frac{t}{5}} + b,$$

où a et b sont deux nombres réels.

On admet que f vérifie la relation suivante :

$$f'(t) + \frac{1}{5} f(t) = 4.$$

a. Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement la température du four est de 1 000 °C.

b. Au bout de combien d'heures peut-on ouvrir la porte du four en toute sécurité ?

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

D'après Bac S Pondichéry, mai 2018.

DÉMONTRER LES PROPRIÉTÉS

Vidéo
Démonstration : unicité de la fonction exponentielle
hatier-clic.fr/ma1180

La démonstration rédigée Approfondissement

Propriété

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' égale à f telle que $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle ; elle est notée $x \mapsto \exp(x)$.

OBJECTIF : on souhaite démontrer l'unicité de la fonction exponentielle (on admet qu'elle existe).

Démonstration

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

L'objectif est de démontrer que f est unique.

- Supposons qu'il existe une autre fonction, notée g, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} g' = g \\ g(0) = 1 \end{cases}$.

- On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) \neq 0$.

Pour tout nombre réel x, on a :

$$h'(x) = \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Or, par définition, pour tout nombre réel x, $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = g(x)$.

D'où :

$$h'(x) = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{(f(x))^2}.$$

Ainsi, pour tout nombre réel x, $h'(x) = 0$ donc h est constante sur $\mathbb{R}$.

Comme $h(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)}$ avec $f(0) = g(0) = 1$, alors $h(0) = 1$.

Ainsi, pour tout nombre réel x, $h(x) = 1$.

- Or, pour tout nombre réel x :

$$h(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow g(x) = f(x).$$

On a donc démontré que, pour tout nombre réel x, $g(x) = f(x)$ et, par conséquent, l'unicité de la fonction exponentielle. ■

Le principe

1. **On suppose qu'il existe une autre fonction** que f vérifiant ces deux propriétés.

2. Pour montrer que les fonctions f et g sont identiques, **on considère la fonction h, quotient des deux fonctions** f et g, puis :
a. on dérive h à l'aide de la formule du cours (▶ Chapitre 4) ;
b. on en déduit que h ne peut être qu'une fonction constante ;
c. on montre que cette constante vaut 1.

3. **On conclut.**

La démonstration à compléter

99 Approfondissement En s'aidant des étapes décrites, recopier et compléter cette démonstration permettant de montrer que **la fonction exponentielle est une fonction strictement positive et strictement croissante sur ℝ.**

Démonstration

- On considère la fonction g définie pour tout nombre réel x par :

$$g(x) = \exp(x) \times \exp(-x).$$

On admet que g est dérivable sur ℝ ; pour tout nombre réel x :

$$g'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

On en déduit que g est une fonction ....
Donc, pour tout nombre réel x, $g(x) = g(\ldots) = \ldots$.
Ainsi, pour tout nombre réel x, $\exp(x) \times \exp(-x) = \ldots$.
Or un produit est nul si et seulement si ....
Donc, pour tout nombre réel x, on a $\exp(x) \neq 0$.

- Pour tout nombre réel x, $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \ldots\ldots$.

Or un carré est toujours ......, donc ....

- Pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

La dérivée de exp est donc de signe .... sur ... .
Et la fonction exponentielle est donc .... sur ... . ■

1 On commence par montrer que exp ne s'annule pas sur ℝ. Pour cela :
a. on dérive un produit de deux fonctions (▶ Chapitre 4) ;
b. on en déduit le sens de variation de la fonction produit ;
c. on conclut.

2 Pour montrer que exp est strictement positive sur ℝ, on utilise la relation fonctionnelle $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ pour écrire $\exp(x)$ différemment.

3 Pour montrer que exp est strictement croissante sur ℝ, on dérive exp, puis on utilise le **lien entre signe de la dérivée et sens de variation** d'une fonction (▶ Chapitre 5).

Démonstrations Vers le BAC

100 Approfondissement **a.** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ définie sur ℝ est une fonction constante et déterminer cette constante.
b. En déduire que, pour tous nombres réels x et y :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

c. Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Pour les exercices 101 et 102
k est un nombre réel strictement positif.

101 **a.** Justifier que la fonction $f_k : t \mapsto e^{kt}$ est définie et dérivable sur ℝ.
b. Démontrer que, pour tout nombre réel t :

$$f_k'(t) = k \times e^{kt}.$$

c. En déduire que la fonction f_k est strictement croissante sur ℝ.

102 **a.** Justifier que la fonction $g_k : t \mapsto e^{-kt}$ est définie et dérivable sur ℝ.
b. Démontrer que, pour tout nombre réel t :

$$g_k'(t) = -k \times e^{-kt}.$$

c. En déduire que la fonction g_k est strictement décroissante sur ℝ.

103 On considère la suite (e^{nb}) où n est un nombre entier naturel et b un nombre réel fixé.
1. L'objectif de cette question est de **démontrer par récurrence** que, pour tout nombre entier naturel n, $e^{nb} = \left(e^b\right)^n$.
a. Montrer que l'égalité est vérifiée pour $n = 0$.

On dit que la propriété est **initialisée**.

b. Supposons que pour un nombre entier N l'égalité est vérifiée, c'est-à-dire $e^{Nb} = \left(e^b\right)^N$.
Montrer que l'on a alors :

$$e^{(N+1)b} = \left(e^b\right)^{N+1}.$$

On dit que la propriété est **héréditaire**.

Conclusion : L'égalité est initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire ; d'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire que la suite (e^{nb}) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3. a. Si $b > 0$, que peut-on dire du nombre e^b ?
En déduire les variations de la suite (e^{nb}).
b. Si $b < 0$, que peut-on dire du nombre e^b ?
En déduire les variations de la suite (e^{nb}).

104 **Position relative**

a. On considère la fonction définie sur ℝ par :

$$f : x \mapsto 5e^{\frac{x}{5}} - 4.$$

Donner une expression de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

b. On considère la fonction définie sur ℝ par :

$$g : x \mapsto 5e^{\frac{x}{5}} - x - 5.$$

Après avoir donné une expression de la dérivée de g, dresser le tableau de variations de g sur ℝ.

c. En déduire la position relative de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

105 IN ENGLISH p. 381

A laboratory has tested a medicine for migraine headaches. The quantity of the medicine absorbed by the body ends up in the blood stream and is then excreted by the kidneys.

The laboratory claims that the quantity of the medicine found in the blood stream, following ingestion of a dose of the medication, at the end of a period of time t (in hours), is approximately given by the function $f : t \mapsto 2t^2e^{-t+0.5}$ (in g/L of blood) where $t \in [0 ; +\infty[$.

If the quantity of the medicine contained in the blood stream exceeds 2g/L, the medicine is then deemed dangerous. The medicine is considered effective when the quantity exceeds 0.5g/L of blood.

a. State the subintervals in which f is increasing, decreasing or static where $t \in [0 ; +\infty[$.

b. Is this medicine dangerous?

c. Represent this function using a scientific calculator with graphic function. For how long is this medicine effective?

Oral activity

Present the results of the laboratory study with a slideshow.

106 Chercher - Raisonner | **De la dérivée à la fonction**

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2+x}{e^x}$, définie sur ℝ, est la dérivée d'une fonction dérivable sur ℝ de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{e^x}$.

- Déterminer les valeurs des nombres réels a et b.

107 **Fonctions hyperboliques**

On appelle :

– fonction **cosinus hyperbolique** la fonction notée ch définie sur ℝ par $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

– fonction **sinus hyperbolique** la fonction notée sh définie sur ℝ par $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que la fonction cosinus hyperbolique est paire et que la fonction sinus hyperbolique est impaire.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1.$$

3. a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$.

b. Montrer que la fonction sh est strictement croissante sur ℝ et calculer sh(0).

c. En déduire le tableau de signes de $\text{sh}(x)$.

4. a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction ch.

c. Quel est le minimum atteint par la fonction ch sur ℝ ?

5. a. Représenter | Tracer dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) les représentations graphiques de ces deux fonctions.

b. La représentation graphique de sh semble avoir un centre de symétrie, lequel ?

Raisonner | Valider ou corriger cette conjecture.

Aide Pour tout nombre réel a, si l'on considère le point A d'abscisse a appartenant à la courbe représentative de sh et le point B d'abscisse $-a$ sur la même courbe, on pourra montrer que O est le milieu de [AB].

c. La représentation graphique de ch semble avoir un axe de symétrie, lequel ?

Valider ou corriger cette conjecture.

108 **Dérivée de la dérivée**

On définit sur ℝ la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

a. Déterminer une expression de $f'(x)$.

b. Déterminer une expression de la dérivée seconde de f, notée f''.

c. Donner le tableau de signes de $f''(x)$ sur ℝ.

d. En déduire le tableau de variations de f' sur ℝ, puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \geqslant 1$.

e. En déduire le tableau de variations de f sur ℝ.

109 Faire l'étude complète (variations, convexité) de la fonction $f : x \mapsto 2(x+1)e^{1-x}$, définie et dérivable sur ℝ.

Info

Une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I est **convexe** (respectivement **concave**) sur I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessus (respectivement en dessous) de chacune de ses tangentes.

f est convexe (respectivement concave) sur I si et seulement si sa **dérivée** f' **est croissante** (respectivement **décroissante**) sur I.

Fichier logiciel
Ex. 110 et 113
Manuel numérique enseignant

110 IN ENGLISH ▶ p. 381

On the first day ($n = 1$), the size of a water lily is estimated as being 3 mm^2. The surface of the water lily doubles every day (every 24 hours).

1. Modéliser | Model the situation with a sequence $U(n)$ which represents the surface area in mm^2 at the n^{th} day.

2. TICE **a.** In a graph, represent the first four terms of the sequence $U(n)$.

b. Using an exponential model, determine the expression of the function $f : t \mapsto a \times e^{kt+b}$ which allows one to determine how long it will take (expressed in hours) the water lily to exceed 1m^2 (to the nearest hour).

111 Étude d'une fonction auxiliaire Vers le BAC

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto x^2e^x - 1$.

a. Déterminer une expression de la dérivée de g.

b. Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

d. Représenter g sur un outil numérique, puis donner par lecture graphique une valeur approchée à 0,1 près de la solution de l'équation $g(x) = 0$.

e. En déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + \dfrac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

a. Expliquer pourquoi la fonction f n'est pas définie en 0.

b. Déterminer une expression de la dérivée de f.

c. Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}^*$.

d. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

112 Une autre relation fonctionnelle

On cherche toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous nombres réels x et y, la relation fonctionnelle :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (*)$$

1. Montrer que toute fonction linéaire vérifie la relation fonctionnelle (*).

2. a. Montrer que si f est une fonction qui vérifie la relation fonctionnelle (*), alors $f(0) = 0$.

b. Montrer que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la relation fonctionnelle (*), alors pour tout nombre réel a et pour tout nombre réel h non nul :

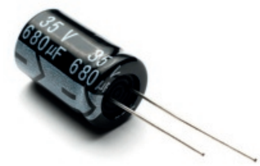
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h}.$$

c. En déduire que, pour tout nombre réel a, $f'(a) = f'(0)$, puis que f est une fonction linéaire.

113 Décharge d'un condensateur

Info

Un condensateur est un composant électrique qui permet d'accumuler des charges électriques opposées. Il est notamment utilisé pour stabiliser une alimentation électrique : il se charge lors des pics de tension et se décharge lors de chutes de tension.



Lors d'un TP de physique, Alan a relevé la tension U (en volts) aux bornes d'un condensateur se déchargeant dans une résistance en fonction du temps (en secondes) :

U (en V)	3,27	2,68	2,19	1,80	1,47	1,20	0,98
t (en s)	2	4	6	8	10	12	14

1. Exploitation des résultats TICE

a. Représenter à l'aide d'un tableur le nuage de points correspondant à ce relevé.

b. Faire afficher par le logiciel une courbe exponentielle passant au plus près de ce nuage de points afin de modéliser par une fonction la tension (en V) en fonction du temps (en s).

c. Quelle était la tension initiale aux bornes du condensateur ?

d. La fonction proposée par le logiciel est de la forme $U : t \mapsto a \times e^{-\lambda t}$.
Quelle est la valeur de a proposée par cet ajustement ? Quelle est celle de λ ?

2. Étude théorique

Si C est la capacité du condensateur (en farads : F), R la résistance (en ohms : Ω) et E la charge initiale (en V) du condensateur ($U(0) = E$), alors la fonction de décharge du condensateur est définie par :

$$U : t \mapsto E \times e^{-\frac{t}{RC}}.$$

a. À l'aide de la question **1**, déterminer la valeur de E et celle de $\tau = RC$.

b. La professeure de physique d'Alan annonce la propriété suivante :

« La tangente à l'exponentielle au point d'abscisse $t = 0$ coupe l'axe des abscisses en $\tau = RC$. »

Démontrer par le calcul que la fonction trouvée par un ajustement exponentiel dans la question **1** vérifie cette propriété.

c. Sachant que la capacité C du condensateur est 0,2 F, calculer la résistance R et en déduire l'intensité du courant à l'instant τ.

Aide La loi d'Ohm stipule que $U = R \times I$. Cette loi s'applique ici.

Fichier Python
Ex. 116
Manuel numérique enseignant

114 **Recherche tangente particulière** Vers le BAC

On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1. a. Justifier que la fonction f n'est pas définie en 0.

b. Déterminer une expression de la dérivée de f.

c. Donner le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

d. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. Calculer | On cherche une valeur approchée du ou des abscisses des points de la courbe représentative de f dont la tangente est parallèle à la droite $y = -x + 5$.

a. Montrer que cela revient à résoudre l'équation :

$$e^{2x} - 3e^x + 1 = 0.$$

b. En effectuant le changement de variable $X = e^x$, résoudre l'équation $e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$.

c. Conclure.

115 L'approximation par la **méthode d'Euler** consiste à approcher la courbe d'une fonction f par ses tangentes.

a. Montrer que l'ordonnée du point d'abscisse $a + h$ de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f en a est $y = f'(a) \times h + f(a)$.

b. Quand h devient très petit, la courbe de la fonction f est très proche de sa tangente : elles semblent presque se confondre ; Euler dit alors que $\boldsymbol{f(a + h) \approx f'(a) \times h + f(a)}$.

En appliquant cette approximation à la fonction exponentielle, expliquer pourquoi on obtient $f(a + h) \approx f(a) \times (1 + h)$.

c. Par raisonnement par récurrence, Euler a démontré que $f(a + nh) \approx f(a) \times (1 + h)^n$ pour de très petites valeurs de h et pour n entier naturel non nul.

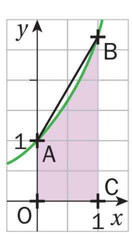
Pour $a = 0$ et $h = \dfrac{1}{n}$, en déduire que $e \approx \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

d. ALGORITHMIQUE Écrire une fonction en langage naturel de paramètre n (entier naturel non nul) qui renvoie une valeur approchée de la valeur de e.

116 **Un(e) air(e) d'exponentielle**

Mona et Erwan veulent déterminer l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle délimitée par les droites d'équation $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ et la courbe d'équation $y = e^x$.

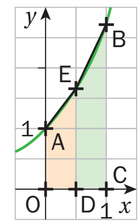
1. Mona estime que l'aire $\mathscr{A}$ cherchée est proche de celle du trapèze ABCO avec O(0 ; 0), C(1 ; 0) ; A(0 ; 1) et B(1 ; e).



a. Quelle est la hauteur du trapèze ?
Quelle est la longueur de sa grande base ? de sa petite base ?

b. En déduire l'aire du trapèze ABCO.

2. Erwan pense que l'idée de Mona est bonne mais qu'ils peuvent être plus précis dans leurs calculs. Pour cela, il considère le point E d'abscisse 0,5 appartenant à la courbe de la fonction exponentielle et il calcule l'aire des deux trapèzes obtenus.



Il trouve $\mathscr{A} = \left(\dfrac{1+\sqrt{e}}{2}\right)^2$.

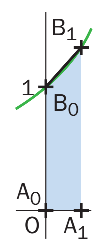
a. Déterminer l'aire du trapèze AEDO et l'aire du trapèze EBCD.

b. Retrouver le résultat d'Erwan.

3. Calculer | Mona surenchérit en expliquant qu'ils peuvent découper l'intervalle [0 ; 1] en n parties égales (n étant un nombre entier naturel non nul) et obtenir ainsi n trapèzes de hauteur $\dfrac{1}{n}$.

a. On considère les points

$$A_0(0\ ;\ 0),\ A_1\left(\frac{1}{n}\ ;0\right),\ B_0(0\ ;\ e^0)\ \text{et}\ B_1\left(\frac{1}{n}\ ;e^{\frac{1}{n}}\right).$$



Déterminer l'aire du trapèze $A_0A_1B_1B_0$.

b. Pour tout nombre entier naturel k compris entre 0 et $n - 1$, on considère les points $A_k\left(\dfrac{k}{n}\ ;0\right)$, $A_{k+1}\left(\dfrac{k+1}{n}\ ;0\right)$, $B_k\left(\dfrac{k}{n}\ ;e^{\frac{k}{n}}\right)$ et $B_{k+1}\left(\dfrac{k+1}{n}\ ;e^{\frac{k+1}{n}}\right)$.

Déterminer l'aire du trapèze $A_kA_{k+1}B_{k+1}B_k$.

c. ALGORITHMIQUE Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous écrit par Mona pour calculer la somme des aires des n trapèzes.

$A \leftarrow$ ......
Pour k allant de ... à ...
  $A \leftarrow A + \dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n} \times \dfrac{1+e^{\frac{1}{n}}}{2}$
Fin Pour
Afficher A

d. PROGRAMMATION python Coder cet algorithme en Python, puis le tester pour $n = 10$.

Aide Penser à écrire p=float(k) pour calculer exp(p/n).

SES

117 Coûts de production minimum

Une entreprise fabrique chaque jour x tonnes d'un produit. Le coût total mensuel, en milliers d'euros, pour produire x tonnes du produit est modélisé par la fonction C définie sur [0 ; 10] par $C(x) = (2x - 9)e^{1 - 0,5x}$.

1. Le coût marginal, qui correspond au supplément de coût total pour la production d'une tonne supplémentaire, est égal à la dérivée du coût total.

a. Montrer que le coût marginal peut s'écrire $C_m(x) = (6,5 - x)e^{1 - 0,5x}$.

b. Donner le tableau de signes de $C_m(x)$ sur [0 ; 10] et en déduire le tableau de variations de C sur [0 ; 10].

c. Pour combien de tonnes produites quotidiennement le coût total mensuel est-il maximum ?
Quel est ce coût maximum, arrondi au millier d'euros ?

2. Le coût moyen de production est donné par la formule $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

Avec un logiciel de calcul formel, on a obtenu la dérivée de ce coût moyen.

$$f(x) = (2x - 9) \cdot \frac{e^{1-0.5x}}{x}$$

$$g(x) = \text{Dérivée}(f)$$

$$\to \frac{1}{2} \cdot \frac{9x\,e^{-\frac{1}{2}x+1} - 2x^2\,e^{-\frac{1}{2}x+1} + 18\,e^{-\frac{1}{2}x+1}}{x^2}$$

a. Après avoir cherché les racines de $-2x^2 + 9x + 18 = 0$, donner le tableau de signes de la fonction g, puis le tableau de variations de f sur [0 ; 10].

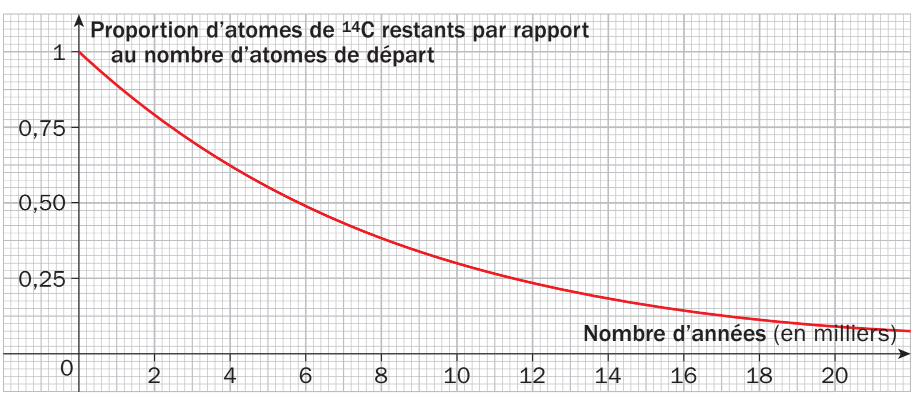
b. En déduire le coût moyen maximum de production.

Fiche métier
Responsable de production
hatier-clic.fr/ma1185a

Enseignement scientifique

118 Décroissance radioactive du ^{14}C

La datation au carbone 14 (noté ^{14}C) est basée sur la mesure de l'activité radiologique du ^{14}C contenu dans toute matière organique. Elle permet de déterminer l'intervalle de temps écoulé depuis la mort de l'organisme à dater. Dater un échantillon de matière organique consiste à mesurer (par spectrométrie de masse) la proportion du nombre d'atomes de ^{14}C restants par rapport au nombre d'atomes de ^{14}C de départ.
La courbe ci-dessous, dite à décroissance exponentielle, permet de déterminer le nombre de milliers d'années écoulées en fonction du ratio obtenu.



a. En 1950 a été effectuée une des premières datations sur des objets trouvés sur le sol de la grotte de Lascaux, en Dordogne. L'âge de la grotte de Lascaux a été estimé à 18 000 ans. Par lecture graphique, déterminer quelle était la proportion d'atomes de carbone 14 dans les prélèvements effectués dans la grotte.

b. On appelle « demi-vie » le temps au bout duquel une grandeur atteint la moitié de sa valeur initiale. Déterminer par lecture graphique la « demi-vie » du ^{14}C.

c. TICE La fonction modélisant la décroissance du ^{14}C en fonction de l'âge d'un échantillon admet une expression de la forme $f(t) = e^{-kt}$.
Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de k en utilisant un logiciel.

d. Expliquer pourquoi dans cette modélisation l'image de 0 doit être égale à 1.

Fiche métier
Archéologue
hatier-clic.fr/ma1185b

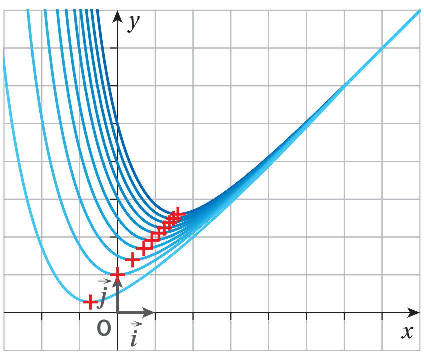
Recherches mathématiques

Questions ouvertes

119 Soit k un nombre réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé. On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout nombre réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$.

- Les points A_k sont-ils tous alignés ?

D'après Bac S Liban, juin 2017.

Défis

120 En cas d'épisode de pollution, deux seuils sont déterminés selon la concentration de masse de polluants dans l'atmosphère :

– quand le **seuil d'information** est atteint, le préfet communique des recommandations sanitaires pour les personnes les plus sensibles ;

– quand le **seuil d'alerte** est atteint, le préfet complète les recommandations par des mesures d'urgence réglementaires (limitation de la vitesse, etc.).

Pour les particules (PM10), le seuil de déclenchement du niveau d'information est de 50 µg·m^{-3} d'air et le seuil de déclenchement du niveau d'alerte est de 80 µg·m^{-3} d'air.

À la demande de la préfète qui souhaite vérifier si l'on peut implanter une usine chimique dans sa région, un scientifique a mesuré la concentration en particules dans l'air en fonction du temps (en h) et de la concentration c de produit chimique dégagée par l'usine à un instant $t = 0$.

Le résultat de ces mesures peut être modélisé par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : t \mapsto (-10t + c)\mathrm{e}^t$.

- Déterminer la valeur exacte de la concentration maximale c_1 avant de dépasser le seuil d'information, puis de la concentration maximale c_2 avant de dépasser le seuil d'alerte.

En groupe

121 **e, r, k, a… eurêka !**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto a\mathrm{e}^{kx + r}$$

avec a, r et k trois nombres réels.

- **Chercher - Raisonner** | Sachant que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 est la droite d'équation $y = \mathrm{e} \times (-8x - 4)$, déterminer les valeurs des nombres réels a, r et k.

Essayons de retrouver ensemble les formules utiles !