Chapitre 6 : Calcul vectoriel et produit scalaire

Cours 3 : Applications du produit scalaire

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - Première D

Samedi 18 janvier 2020

Sommaire

Formule d'Al-Kashi

Théorème

On considère un triangle ABC et posons BC=a, AC=b et AB=c, alors :

☞ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos(\hat{A})$.

Formule d'Al-Kashi

Théorème

On considère un triangle ABC et posons BC=a, AC=b et AB=c, alors :

☞ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos(\hat{A})$.

Démonstration

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$

D'où $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Formule d'Al-Kashi

Théorème

On considère un triangle ABC et posons BC=a, AC=b et AB=c, alors :

☞ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos(\hat{A})$.

Démonstration

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$

D'où $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Execice

1. On donne $\hat{A} = 60^\circ$, $b = 3$ et $c = 2$, calculer a.
2. On donne $a = 5$, $b = 10$ et $c = 5\sqrt{3}$, calculer $\hat{A}$.

Formule de la médiane

Propriété : Formule de la médiane

Soient A et B deux point du plan, I étant le milieu du segment [AB].
Pour tout point M du plan, on a :

✍ $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

Formule de la médiane

Propriété : Formule de la médiane

Soient A et B deux point du plan, I étant le milieu du segment [AB].
Pour tout point M du plan, on a :

✍ $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

Démonstration

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 \\
&= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + IB^2 \\
&= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) \\
&= 2MI^2 + \frac{AB}{2}^2 + \frac{AB}{2}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{0} \\
&= 2MI^2 + \frac{AB^2}{4} + \frac{AB^2}{4} = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}
\end{aligned}$$

Formule de la médiane

Propriété : Formule de la médiane

Soient A et B deux point du plan, I étant le milieu du segment [AB].
Pour tout point M du plan, on a :

✍ $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

Exercice

1. Quel est le point M qui minimise la quantité $MA^2 + MB^2$?
2. Soit ABC un triangle tel que AB=5, AC=4, BC= 7 et soit I le milieu de AB.
   Calculer la longueur CI.

Ensemble de points

Définition : vecteur normal

Pour une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à $\vec{u}$ est appelé **vecteur normal à cette droite**.

Ensemble de points

Définition : vecteur normal

Pour une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à $\vec{u}$ est appelé **vecteur normal à cette droite**.

Propriété 1

A, B et P sont trois points, $\vec{u}$ est un vecteur non nul, et I est le milieu du segment [AB].

- ✍ L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{u} = 0$ est la **droite** passant par P et de vecteur normal $\vec{u}$.
- ✍ L'ensemble des points M tels que MA=MB est la **médiatrice** du segment [AB].
- ✍ L'ensemble des points M tels que PM=r (r>0) est le cercle de centre P et de rayon r.

Ensemble de points

Définition : vecteur normal

Pour une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à $\vec{u}$ est appelé **vecteur normal à cette droite**.

Propriété 1

A, B et P sont trois points, $\vec{u}$ est un vecteur non nul, et I est le milieu du segment [AB].

- ✍ L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{u} = 0$ est la **droite** passant par P et de vecteur normal $\vec{u}$.
- ✍ L'ensemble des points M tels que MA=MB est la **médiatrice** du segment [AB].
- ✍ L'ensemble des points M tels que PM=r (r>0) est le cercle de centre P et de rayon r.

Exercice

Comment pourrait-on caractériser l'ensemble des points M qui sont situés à l'intérieur du disque de centre P et de rayon r ?

Ensemble de points

Propriété 2

✍ Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$ où I est le milieu de [AB].

Ensemble de points

Propriété 2

✍ Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$ où I est le milieu de [AB].

Exercice

Soit A,B et M trois points du plan et I le milieu du segment [AB].

✍ Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MA}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{IA}$.

✍ Faire de même avec le vecteur $\overrightarrow{MB}$.

✍ Calculer $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$

✍ Calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en remplaçant $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ par les expressions obtenues dans les deux premières questions.

FIN

Revenir au début