Preuve du cours 2

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$

On sait que $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ pour tous x et y réels

On choisit $x = a$ et $y = -a$:

alors $\exp(a+(-a)) = \exp(a) \times \exp(-a)$

$\exp(0) = \exp(a) \times \exp(-a)$

$1 = \exp(a) \times \exp(-a)$ donc $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$

- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Dans la relation fonctionnelle on choisit $x = a$ et $y = -b$

On obtient $\exp(a+(-b)) = \exp(a) \times \exp(-b)$

$\exp(a-b) = \exp(a) \times \dfrac{1}{\exp(b)}$

donc $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, $(\exp(a))^n = \exp(na)$

Posons $u_n = \exp(na)$ et calculons u_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} = \exp((n+1)a) = \exp(na+a) = \exp(na) \times \exp(a) = u_n \times \exp(a)$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \exp(a)$ alors on en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \exp(a)$ et de premier terme $u_0 = \exp(0) = 1$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$ (formule du terme général d'une suite géométrique)

d'où $u_n = 1 \times (\exp(a))^n = (\exp(a))^n$

<u>Bilan</u> : on a posé $u_n = \exp(na)$, $n \in \mathbb{N}$ et on a montré que $u_n = (\exp(a))^n$

Conclusion : $\cancel{u_n}$ $(\exp(a))^n = \exp(na)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $n \in \mathbb{N}$.