Chapitre 4 : Probabilités conditionnelles

Cours 2 : Formule des probabilité Totales

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - Première D

Samedi 16 novembre 2019

Sommaire

Partition d'un univers

Définition

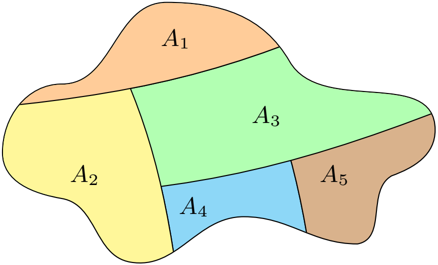
On appelle partition de Ω, un ensemble A_1, A_2, ..., A_n d'événements de probabilités non nulles, deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à Ω.

Partition d'un univers

Définition

On appelle partition de Ω, un ensemble A_1, A_2, ..., A_n d'événements de probabilités non nulles, deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à Ω.

Exemple : Illustration avec n=5

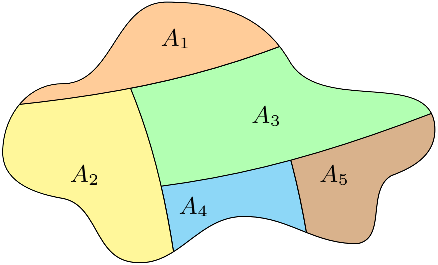


Partition d'un univers

Définition

On appelle partition de Ω, un ensemble A_1, A_2, ..., A_n d'événements de probabilités non nulles, deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à Ω.

Exemple : Illustration avec n=5



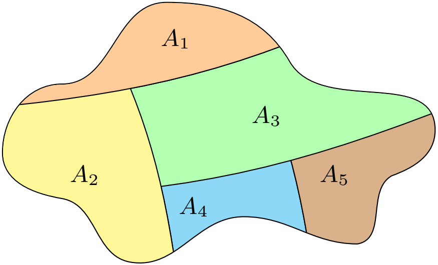
- Deux ensembles sont dits disjoints s'ils n'ont pas d'éléments communs.
- A_1 et A_2 sont disjoints et on écrit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
- Les événements A_1 et A_2 sont alors dits **incompatibles**.

Partition d'un univers

Définition

On appelle partition de Ω, un ensemble A_1, A_2, ..., A_n d'événements de probabilités non nulles, deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à Ω.

Exemple : Illustration avec n=5



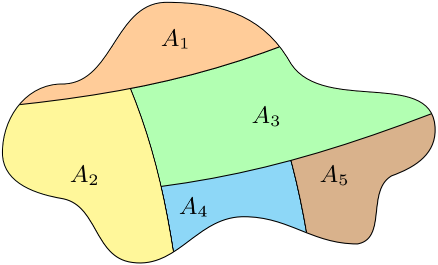
- Deux ensembles sont dits disjoints s'ils n'ont pas d'éléments communs.
- A_1 et A_2 sont disjoints et on écrit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
- Les événements A_1 et A_2 sont alors dits **incompatibles**.

Partition d'un univers

Définition

On appelle partition de Ω, un ensemble A_1, A_2, ..., A_n d'événements de probabilités non nulles, deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à Ω.

Exemple : Illustration avec n=5



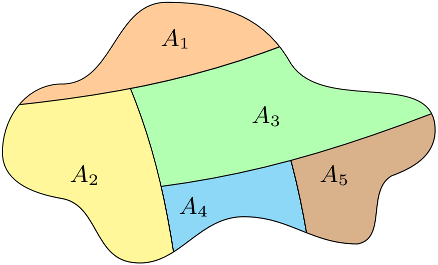
- Deux ensembles sont dits disjoints s'ils n'ont pas d'éléments communs.
- A_1 et A_2 sont disjoints et on écrit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
- Les événements A_1 et A_2 sont alors dits **incompatibles**.

Partition d'un univers

Définition

On appelle partition de Ω, un ensemble A_1, A_2, ..., A_n d'événements de probabilités non nulles, deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à Ω.

Exemple : Illustration avec n=5



- Deux ensembles sont dits disjoints s'ils n'ont pas d'éléments communs.
- A_1 et A_2 sont disjoints et on écrit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
- Les événements A_1 et A_2 sont alors dits **incompatibles**.

Partition d'un univers

Définition

On appelle partition de Ω, un ensemble A_1, A_2, ..., A_n d'événements de probabilités non nulles, deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à Ω.

Propriété

Soit A un événement d'un univers Ω tel que $0 < \mathrm{P}(\mathrm{A}) < 1$ et $\overline{\mathrm{A}}$ son événement complémentaire (appelé aussi événement contraire).
Les événements A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers Ω.

Partition d'un univers

Définition

On appelle partition de Ω, un ensemble A_1, A_2, ..., A_n d'événements de probabilités non nulles, deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à Ω.

Propriété

Soit A un événement d'un univers Ω tel que $0 < \mathrm{P}(\mathrm{A}) < 1$ et $\overline{\mathrm{A}}$ son événement complémentaire (appelé aussi événement contraire).
Les événements A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers Ω.

Exercice

Démontrer la propriété précédente.

Propriété

Soit A_1, A_2, ..., A_n une partition de Ω et B un événement quelconque.
On a :

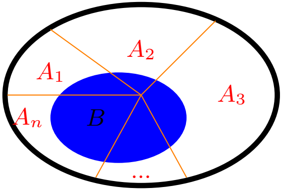
$$p(B) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A_1} \cap \mathrm{B}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A_2} \cap \mathrm{B}\right) + \ldots + \mathrm{P}\left(\mathrm{A_n} \cap \mathrm{B}\right)$$

Propriété

Soit A_1, A_2, ..., A_n une partition de Ω et B un événement quelconque.
On a :

$$p(B) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A_1} \cap \mathrm{B}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A_2} \cap \mathrm{B}\right) + ... + \mathrm{P}\left(\mathrm{A_n} \cap \mathrm{B}\right)$$

Illustration

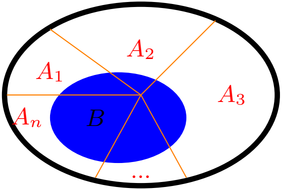


Propriété

Soit A_1, A_2, ..., A_n une partition de Ω et B un événement quelconque.
On a :

$$p(B) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}\right) + ... + \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_\mathrm{n} \cap \mathrm{B}\right)$$

Illustration



Conséquence 1

Nous savons que pour tous événements A et B avec $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right) \neq 0$,
$\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right) \times \mathrm{P}_\mathrm{A}\left(\mathrm{B}\right)$ donc :

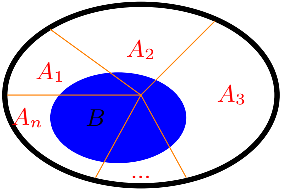
$$p(B) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1\right) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}_1}\left(\mathrm{B}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2\right) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}_2}\left(\mathrm{B}\right) + ... + \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_\mathrm{n}\right) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}_\mathrm{n}}\left(\mathrm{B}\right)$$

Propriété

Soit A_1, A_2, ..., A_n une partition de Ω et B un événement quelconque.
On a :

$$p(B) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A_1} \cap \mathrm{B}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A_2} \cap \mathrm{B}\right) + ... + \mathrm{P}\left(\mathrm{A_n} \cap \mathrm{B}\right)$$

Illustration



Conséquence 2

Nous savons que A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de Ω donc :

$$p(B) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}\right)$$

Propriété

Soit A_1, A_2, ..., A_n une partition de Ω et B un événement quelconque.
On a :

$$p(B) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A_1} \cap \mathrm{B}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A_2} \cap \mathrm{B}\right) + ... + \mathrm{P}\left(\mathrm{A_n} \cap \mathrm{B}\right)$$

Exemple

Dans un lycée 60% des élèves sont inscrits dans un club de sport (noté C). Parmi eux, on compte 55% de filles. Parmi ceux qui ne sont pas inscrits dans un club de sport, 40% sont des garçons.
On choisit un élève du lycée au hasard.
On va chercher à déterminer la probabilité que cet élève soit une fille.

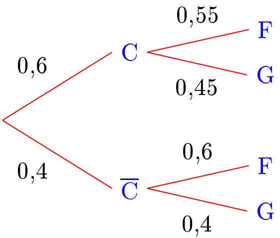
Propriété

Soit A_1, A_2, ..., A_n une partition de Ω et B un événement quelconque.
On a :

$$p(B) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A_1} \cap \mathrm{B}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A_2} \cap \mathrm{B}\right) + ... + \mathrm{P}\left(\mathrm{A_n} \cap \mathrm{B}\right)$$

Exemple

Arbre pondéré correspondant à la situation :



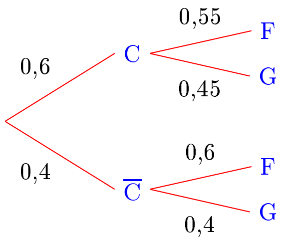
Propriété

Soit A_1, A_2, ..., A_n une partition de Ω et B un événement quelconque.
On a :

$$p(B) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A_1} \cap \mathrm{B}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A_2} \cap \mathrm{B}\right) + ... + \mathrm{P}\left(\mathrm{A_n} \cap \mathrm{B}\right)$$

Exemple

Arbre pondéré correspondant à la situation :



Les événements C et $\overline{\mathrm{C}}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales, la probabilité que l'élève choisi au hasard soit une fille est :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\mathrm{F}\right) =& \mathrm{P}\left(\mathrm{C} \cap \mathrm{F}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{C}} \cap \mathrm{F}\right) \\
=& \mathrm{P}\left(\mathrm{C}\right) \times \mathrm{P_C}\left(\mathrm{F}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{C}}\right) \times \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{F}}}\left(\mathrm{F}\right) \\
=& 0,6 \times 0,55 + 0,4 \times 0,6 \\
=& 0,57
\end{aligned}$$

FIN

Revenir au début