Chapitre 6 : Calcul vectoriel et produit scalaire

Cours 1 : Produit scalaire dans le plan

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - Première D

Samedi 11 javier 2020

Sommaire

1. Définition du produit scalaire

2. Orthogonalité et produit scalaire

Définition du produit scalaire

Définition 1 : norme d'un vecteur

On donne un vecteur $\vec{u}$ du plan et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

☞ La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

Définition du produit scalaire

Définition 1 : norme d'un vecteur

On donne un vecteur $\vec{u}$ du plan et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

☞ La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

Définition 2 : produit scalaire

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini de la manière suivante :

☞ Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à 0.

☞ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal au nombre réel défini par :

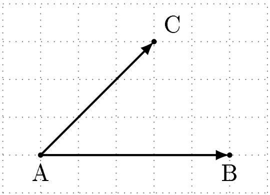
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\widehat{BAC})$$

Autrement dit :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$$

Définition du produit scalaire

Exemple : l'unité est le carreau



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos(\widehat{BAC}) \\
&= 5 \times 3\sqrt{2} \times \cos(45^\circ) \\
&= 15\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 15 \times \frac{\sqrt{2}^2}{2} \\
&= 15
\end{aligned}$$

Définition du produit scalaire

Remarque : cas des vecteurs colinéraires

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls, alors :

- ⇨ $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens.
- ⇨ $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires.

Définition du produit scalaire

Remarque : cas des vecteurs colinéraires

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls, alors :

- ⇨ $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens.
- ⇨ $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires.

Propriété : symétrie

Le produit scalaire est symétrique :

- ✍ Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Définition du produit scalaire

Remarque : cas des vecteurs colinéraires

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls, alors :

⇨ $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens.

⇨ $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires.

Propriété : symétrie

Le produit scalaire est symétrique :

✍ Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Exercice

Soit ABC un triangle équilatéral de coté a. Soit H le milieu de [AB] et K le point tel que $\overrightarrow{AK} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Calculer :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB}$

Orthogonalité et produit scalaire

Propriété : projection orthogonale

Pour tous points A, B et C distincts du plan, on a :

✍ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

H étant le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Orthogonalité et produit scalaire

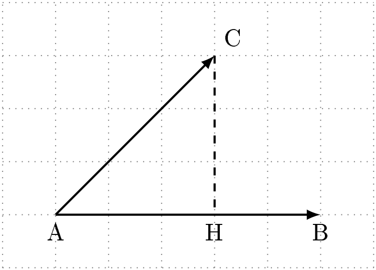
Propriété : projection orthogonale

Pour tous points A, B et C distints du plan, on a :

✍ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

H étant le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Exemple 1



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} \\ &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AH} \\ &= 5 \times 3 \\ &= 15.\end{aligned}$$

Orthogonalité et produit scalaire

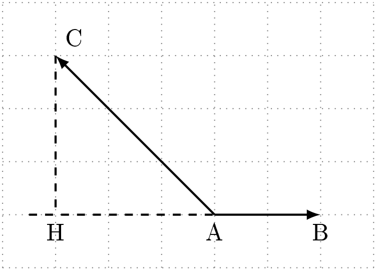
Propriété : projection orthogonale

Pour tous points A, B et C distints du plan, on a :

✍ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

H étant le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Exemple 2



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} \\ &= -\mathrm{AB} \times \mathrm{AH} \\ &= -2 \times 3 \\ &= -6.\end{aligned}$$

Orthogonalité et produit scalaire

Définition : vecteurs orthogonaux

☞ On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux** lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Orthogonalité et produit scalaire

Définition : vecteurs orthogonaux

☞ On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux** lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Propriété

☞ Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Orthogonalité et produit scalaire

Définition : vecteurs orthogonaux

☞ On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux** lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Propriété

☞ Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Démonstration

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, l'équivalence est immédiate.
- On suppose $\vec{u}$ et $\vec{v} = 0$ non nuls :
  Notons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors :
  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow AB \times AC \times cos(\widehat{BAC}) = 0$
  $\Leftrightarrow AB = 0 \quad \text{ou} \quad AC = 0 \quad \text{ou} \quad cos(\widehat{BAC}) = 0.$
  Comme les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors la seule possibilité est qu'ils soient orthogonaux. ($\widehat{BAC}$ est un angle droit)

FIN

Revenir au début