Chapitre 5 : Fonctions dérivées

Cours 2 : Opérations sur les fonctions dérivées

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - Première D

Samedi 16 novembre 2019

Sommaire

1 Dérivée d'une somme

2 Dérivée d'une produit par une constante

3 Dérivée d'une produit

4 Dérivée d'un quotient

5 Dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$

Dérivée d'une somme

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si $f = u + v$ Alors :

- ✍ La fonction f est dérivable sur I.
- ✍ $f' = u' + v'$, autrement dit, pour tout x de I, $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Dérivée d'une somme

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si $f = u + v$ Alors :

- ✍ La fonction f est dérivable sur I.
- ✍ $f' = u' + v'$, autrement dit, pour tout x de I, $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemple

- ➤ Les fonction $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto x^3$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $f : x \mapsto x^3 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

Dérivée d'une somme

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si $f = u + v$ Alors :

- ✍ La fonction f est dérivable sur I.
- ✍ $f' = u' + v'$, autrement dit, pour tout x de I, $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemple

- ➤ Les fonction $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto x^3$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $f : x \mapsto x^3 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

Exercice

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} + 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer en justifiant l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer la dérivée de f.

Dérivée d'une produit par une constante

Propriété

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et λ une constante réelle. Si $f = \lambda u$ Alors :

- ✍ La fonction f est dérivable sur I.
- ✍ $f' = \lambda u'$, autrement dit, pour tout x de I, $f'(x) = \lambda u'(x)$.

Dérivée d'une produit par une constante

Propriété

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et λ une constante réelle. Si $f = \lambda u$ Alors :

- ✍ La fonction f est dérivable sur I.
- ✍ $f' = \lambda u'$, autrement dit, pour tout x de I, $f'(x) = \lambda u'(x)$.

Exemple

Soit $f : x \mapsto 5x^2$.

- ➤ La fonction $u : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $f : x \mapsto 5x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ➤ Pour tout réel x : $f'(x) = 5 \times 2x = 10x$

Dérivée d'une produit par une constante

Propriété

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et λ une constante réelle. Si $f = \lambda u$ Alors :

- ✍ La fonction f est dérivable sur I.
- ✍ $f' = \lambda u'$, autrement dit, pour tout x de I, $f'(x) = \lambda u'(x)$.

Exemple

Soit $f : x \mapsto 5x^2$.

- ➤ La fonction $u : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $f : x \mapsto 5x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ➤ Pour tout réel x : $f'(x) = 5 \times 2x = 10x$

Exercice

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5}{x} + 1$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Déterminer en justifiant l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer la dérivée de f.

Dérivée d'une produit

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si $f = uv$ Alors :

- ✍ La fonction f est dérivable sur I.
- ✍ $f' = u'v + uv'$, autrement dit, pour tout x de I,
  $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Dérivée d'une produit

Exemple

Soit $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$
Alors $f = uv$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Calculons sa dérivée f' :
$u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
&= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \\
&= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{x}\,.
\end{aligned}$$

Dérivée d'une produit

Exercice

On considère la fonction $f : x \mapsto (1 + x^2)(x^3 - x + 2)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer en justifiant l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer la dérivée de f.

Dérivée d'un quotient

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que $v(x) \neq 0$ pour tout x de I. Alors,

- ✍ La fonction f est dérivable sur I.
- ✍ $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, autrement dit, pour tout x de I,
  $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$.
- ✍ Dans le cas particulier où $u = 1$, la formule devient $f' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Dérivée d'un quotient

Exemple

Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-5x+1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
Alors $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x^2 - 5x + 1$ et $v(x) = x - 1$.
Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et v ne s'annule pas sur cet ensemble donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
Calculons sa dérivée f' :
$u'(x) = 4x - 5$ et $v'(x) = 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{(4x-5)(x-1) - (2x^2-5x+1)\times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{4x^2-4x-5x+5-2x^2+5x-1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2-4x+4}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Dérivée d'un quotient

Exercice

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+5}{x^2+4x-5}$.

1. Déterminer en justifiant l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer la dérivée de f.

Dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$

Propriété

Soit g est une fonction dérivable sur un intervalle J.
Soient a et b deux nombres réels tels que quel que soit $x \in I, ax+b \in J$, alors :

- ✍ la fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I, f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

Dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$

Propriété

Soit g est une fonction dérivable sur un intervalle J.
Soient a et b deux nombres réels tels que quel que soit $x \in I, ax+b \in J$, alors :

- ✍ la fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I, f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $[2\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x-4}$.
On voit que $f(x) = g(2x-4)$ où g est la fonction racine carrée dérivable sur $J =]0\,;+\infty[$.
$2x-4 \in J \Leftrightarrow 2x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$, c'est-à-dire $x \in]2\,;+\infty[$.
Ainsi, f est dérivable sur $I =]2\,;+\infty[$ et , pour tout
$x \in I, f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{2x-4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$

Dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$

Propriété

Soit g est une fonction dérivable sur un intervalle J.
Soient a et b deux nombres réels tels que quel que soit $x \in I, ax+b \in J$, alors :

- ✍ la fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I, f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $[2\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x-4}$.
On voit que $f(x) = g(2x-4)$ où g est la fonction racine carrée dérivable sur $J =]0\,;+\infty[$.
$2x-4 \in J \Leftrightarrow 2x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$, c'est-à-dire $x \in]2\,;+\infty[$.
Ainsi, f est dérivable sur $I =]2\,;+\infty[$ et , pour tout
$x \in I, f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{2x-4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$

Exercice

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$. Prouver que f est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ et calculer la dérivée de f.

FIN

Revenir au début