Chapitre 6 : Calcul vectoriel et produit scalaire

Cours 2 : Propriétés du produit scalaire

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - Première D

Vedredi 17 janvier 2020

Sommaire

1 Produit scalaire dans un repère orthonormé

2 Bilinéarité du produit scalaire

3 Conséquences

Produit scalaire dans un repère orthonormé

Propriété admise

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan dans un **repère orthonormé**, on a alors :

✍ $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Produit scalaire dans un repère orthonormé

Propriété admise

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan dans un **repère orthonormé**, on a alors :

✍ $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Exemple

On pose $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ deux vecteurs d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 5\times 1 + (-2)\times 7\\ &= 5 - 14\\ &= -9.\end{aligned}$$

Produit scalaire dans un repère orthonormé

Propriété admise

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan dans un **repère orthonormé**, on a alors :

✍ $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Exemple

On pose $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ deux vecteurs d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 5\times 1 + (-2)\times 7\\ &= 5-14\\ &= -9.\end{aligned}$$

Exercice

Dans un repère orthonormé on considère les points $A(1,2)$, $B(-3,-8)$ et $C(12,-2)$.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

Bilinéarité du produit scalaire

Propriété

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et le réel k :

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
3. $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Bilinéarité du produit scalaire

Propriété

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et le réel k :

1. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
2. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
3. $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Démonstration du 1.

Dans un repère orthonormé (O ;I ;J), notons $\vec{u}(x;y)$, $\vec{v}(x';y')$ et $\vec{w}(x'';y'')$. On a alors $\vec{v}+\vec{w}(x+x'';y+y'')$ et donc

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})&=x(x'+x'')+y(y'+y'')\\&=(xx'+yy')+(xx''+yy'')\\&=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\end{aligned}$$

Bilinéarité du produit scalaire

Propriété

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et le réel k :

1. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
2. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
3. $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Exercice

1. Calculer $(\vec{u}-3\vec{v})\cdot(-2\vec{v}+\vec{w})$
2. Démontrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Bilinéarité du produit scalaire

Définition : carré scalaire

On appelle **carré scalaire** de $\vec{u}$ le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même. On le note $\vec{u}^2$. Ainsi :

- ☞ $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- ☞ En particulier, si A et B sont deux points du plan, $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

Bilinéarité du produit scalaire

Définition : carré scalaire

On appelle **carré scalaire** de $\vec{u}$ le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même. On le note $\vec{u}^2$. Ainsi :

- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- En particulier, si A et B sont deux points du plan, $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

Exercice

On se place dans un repère orthonormé (O ;I ;J)

1. Soit $\vec{u}(5; -2)$ un vecteur du plan, calculer $\|\vec{u}\|^2$.
2. Soient $A(2; 3)$ et $B(3; -1)$ deux points du plan, calculer AB à l'aide d'un produit scalaire.
3. Développer $(\vec{u} + \vec{v})^2$, $(\vec{u} - \vec{v})^2$ et $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$.

Conséquences

Propriété

- ✍ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- ✍ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- ✍ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Conséquences

Propriété

✍ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

✍ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

✍ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Exercice

ABCD est un parallélogramme tel que AB=4, AD=3 et $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calculer la longueur AC.

FIN

Revenir au début