Chapitre 7 : Suites arithmétiques et géométriques

Cours 1 : Suites arithmétiques

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - Première D

Samedi 1 février 2020

Sommaire

Définition

Suite arithmétique

On dit d'une suite (u_n) qu'elle est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que quel que soit l'entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r \ .$$

☞ « r » est alors appelée la **raison** de la suite.

Définition

Suite arithmétique

On dit d'une suite (u_n) qu'elle est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que quel que soit l'entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r\ .$$

☞ « r » est alors appelée la **raison** de la suite.

Exemples :

- La suite définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

  $$u_{n+1} = u_n + 3$$

  est une suite arithmétique de raison $r = 3$.
- La suite (u_n) dont les premiers termes sont :

  $$1 \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 7 \quad ; \quad 9 \quad ; \quad 11 \quad ; \quad 13$$

  semble arithmétique de raison 2 car parmi ces termes, la différence entre deux termes consécutifs est toujours égale à 2.

Définition

Suite arithmétique

On dit d'une suite (u_n) qu'elle est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que quel que soit l'entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r \ .$$

☞ « r » est alors appelée la **raison** de la suite.

Exemples :

➤ La suite (u_n) dont les premiers termes sont :

$$1 \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 7 \quad ; \quad 10 \quad ; \quad 13 \quad ; \quad 16$$

n'est pas arithmétique car : $7 - 5 \neq 10 - 7$.

Définition

Suite arithmétique

On dit d'une suite (u_n) qu'elle est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que quel que soit l'entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r\ .$$

☞ « r » est alors appelée la **raison** de la suite.

Exemples :

➤ La suite (u_n) dont les premiers termes sont :

$$1 \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 7 \quad ; \quad 10 \quad ; \quad 13 \quad ; \quad 16$$

n'est pas arithmétique car : $7 - 5 \neq 10 - 7$.

Exercice

Prouver que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n - 5$ est une suite arithmétique, préciser son premier terme et sa raison.

Terme général d'une suite arithmétique

Propriété : formule explicite

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Alors pour tout entier naturel n :

✍ $u_n = u_0 + nr$

Terme général d'une suite arithmétique

Propriété : formule explicite

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Alors pour tout entier naturel n :

✍ $u_n = u_0 + nr$

Preuve

$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r$
$u_3 = u_2 + r$
$\vdots$
$u_n = u_{n-1} + r$
En additionnant membre à membre ces n égalités on obtient :

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + n \times r$$

Puis, en supprimant les termes communs aux deux membres de l'égalité, on obtient :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Terme général d'une suite arithmétique

Conséquence

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors pour tous entiers naturels p et k :

$$u_p = u_k + (p - k)r$$

Terme général d'une suite arithmétique

Conséquence

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors pour tous entiers naturels p et k :

$$u_p = u_k + (p-k)r$$

Remarque

Un moyen pour écrire la formule sans se tromper :

$$u_p = u_k + \quad (p-k) \quad \times r$$

$$= \qquad\qquad +$$

$$p = k + (p-k)$$

Terme général d'une suite arithmétique

Conséquence

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors pour tous entiers naturels p et k :

$$u_p = u_k + (p-k)r$$

Remarque

Un moyen pour écrire la formule sans se tromper :

$$u_p = u_k + \ (p-k)\ \times r$$

$$= \qquad +$$

$$p = k + (p-k)$$

Exemple

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = 6$ et telle que $u_9 = 13$. Alors, $u_{100} = u_9 + (100-9) \times 6 = 13 + 91 \times 6 = 559$.

Terme général d'une suite arithmétique

Exercice

Soit u une suite arithmétique. Déterminer son terme général dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 = 15$, $r = -5$.
2. $u_1 = -7$, $r = 3$.
3. $u_0 = 15$, $u_{10} = -15$.
4. $u_5 = 9$, $u_{10} = 55$.

Variations d'une suite arithmétique

Propriété : variations

Soit u une suite arithmétique.

- ✍ u est croissante si sa raison est strictement positive.
- ✍ u est décroissante si sa raison est strictement négative.
- ✍ u est constante si sa raison est nulle.

Variations d'une suite arithmétique

Propriété : variations

Soit u une suite arithmétique.

- ✍ u est croissante si sa raison est strictement positive.
- ✍ u est décroissante si sa raison est strictement négative.
- ✍ u est constante si sa raison est nulle.

Exemples

- ➤ La suite arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ est croissante car $r > 0$.
- ➤ La suite arithmétique de raison $r = -3$ est décroissante car $r < 0$.

Variations d'une suite arithmétique

Propriété : variations

Soit u une suite arithmétique.

- ✍ u est croissante si sa raison est strictement positive.
- ✍ u est décroissante si sa raison est strictement négative.
- ✍ u est constante si sa raison est nulle.

Exemples

- ➤ La suite arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ est croissante car $r > 0$.
- ➤ La suite arithmétique de raison $r = -3$ est décroissante car $r < 0$.

Exercice

Soit u la suite arithmétique telle que $u_0 = -3$ et $u_1 = -1$.
Etudier les variations de u.

FIN

Revenir au début