Chapitre 1 : Le second degré

Cours 2 : Racines d'une fonction polynôme de degré 2

R. KHODJAOUI

Lycée J.J. HENNER - Première D

Mardi 9 septembre 2019

Sommaire

Racines d'une fonction polynôme du second degré

Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré, on appelle racine de f, tout nombre dont l'image par f est égal à 0.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.
1 et 2 sont des racines de f car $f(1) = 0$ et $f(2) = 0$.
En effet, $f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ et
$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$

Remarque

Une racine de f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, est une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Exercice

Vérifier que $x = -2$ est une racine de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

Racines d'une fonction polynôme du second degré

Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré, on appelle racine de f, tout nombre dont l'image par f est égal à 0.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.
1 et 2 sont des racines de f car $f(1) = 0$ et $f(2) = 0$.
En effet, $f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ et
$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$

Remarque

Une racine de f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, est une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Exercice

Vérifier que $x = -2$ est une racine de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

Racines d'une fonction polynôme du second degré

Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré, on appelle racine de f, tout nombre dont l'image par f est égal à 0.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.
1 et 2 sont des racines de f car $f(1) = 0$ et $f(2) = 0$.
En effet, $f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ et
$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$

Remarque

Une racine de f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, est une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Exercice

Vérifier que $x = -2$ est une racine de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

Racines d'une fonction polynôme du second degré

Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré, on appelle racine de f, tout nombre dont l'image par f est égal à 0.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.
1 et 2 sont des racines de f car $f(1) = 0$ et $f(2) = 0$.
En effet, $f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ et
$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$

Remarque

Une racine de f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, est une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Exercice

Vérifier que $x = -2$ est une racine de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

Discriminant delta

Formule mathématique du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Le nombre Δ est appelé discriminant du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Exemple : $f(x) = 5x^2 - 12x + 7$

$f(x)$ est un polynôme du second degré avec $a = 5$,$b = -12$ et $c = 7$. D'où :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-12)^2 - 4 \times 5 \times 7 \\ &= 4\end{aligned}$$

Exercice

Calculer le discriminant de $f(x)$, expression de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

Discriminant delta

Formule mathématique du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Le nombre Δ est appelé discriminant du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Exemple : $f(x) = 5x^2 - 12x + 7$

$f(x)$ est un polynôme du second degré avec $a = 5, b = -12$ et $c = 7$. D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-12)^2 - 4 \times 5 \times 7 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Exercice

Calculer le discriminant de $f(x)$, expression de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

Discriminant delta

Formule mathématique du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Le nombre Δ est appelé discriminant du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Exemple : $f(x) = 5x^2 - 12x + 7$

$f(x)$ est un polynôme du second degré avec $a = 5, b = -12$ et $c = 7$. D'où :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-12)^2 - 4 \times 5 \times 7 \\ &= 4\end{aligned}$$

Exercice

Calculer le discriminant de $f(x)$, expression de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

Solutions de l'équation du second degré 2 : $ax^2 + bx + c = 0$

Le nombre de solutions dépend du signe de Δ

- ➔ Si $\Delta < 0$, aucune solution.
- ➔ Si $\Delta = 0$, une solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- ➔ Si $\Delta > 0$, deux solutions distincts $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Solutions de l'équation du second degré 2 : $ax^2 + bx + c = 0$

Le nombre de solutions dépend du signe de Δ

- Si $\Delta < 0$, aucune solution.
- Si $\Delta = 0$, une solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, deux solutions distincts $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple : résolution de l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$a = 2$, $b = -5$ et $c = 3$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distincts :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{1}}{2\times 2} = 1 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{1}}{2\times 2} = 1,5$$

D'où S={1;1,5}

Solutions de l'équation du second degré 2 : $ax^2 + bx + c = 0$

Le nombre de solutions dépend du signe de Δ

- ➔ Si $\Delta < 0$, aucune solution.
- ➔ Si $\Delta = 0$, une solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- ➔ Si $\Delta > 0$, deux solutions distincts $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exercice : résoudre les équations suivantes

1. $x^2 + 6x + 9 = 0$
2. $15x^2 - 22x + 7 = 0$
3. $x^2 + x + 1 = 0$

Fonction polynôme de degré 2

Forme factorisée

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors si $\Delta \geqslant 0$, $f(x)$ admet une forme factorisée :

- Si $\Delta > 0$, notons x_1 et x_2 les racines de $f(x)$, alors

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Si $\Delta = 0$, notons x_0 la racine double de $f(x)$, alors

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

Fonction polynôme de degré 2

Forme factorisée

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors si $\Delta \geqslant 0$, $f(x)$ admet une forme factorisée :

- Si $\Delta > 0$, notons x_1 et x_2 les racines de $f(x)$, alors

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Si $\Delta = 0$, notons x_0 la racine double de $f(x)$, alors

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

Exemple 1

- Les racines du polynôme $2x^2 - 5x + 3$ sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 1,5$ donc :

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 5x + 3 \\ = \quad & a(x - x_1)(x - x_2) \\ = \quad & 2(x - 1)(x - 1,5) \end{aligned}$$

Fonction polynôme de degré 2

Forme factorisée

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors si $\Delta \geqslant 0$, $f(x)$ admet une forme factorisée :

- Si $\Delta > 0$, notons x_1 et x_2 les racines de $f(x)$, alors

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Si $\Delta = 0$, notons x_0 la racine double de $f(x)$, alors

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

Exemple 2

- le polynôme $2x^2 + 16x + 32$ admet une racine double : $x_0 = -4$ donc :

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 16x + 32 \\ = \quad & a(x - x_0)^2 \\ = \quad & 2(x + 4)^2 \end{aligned}$$

Somme et produit des racines

On considère uniquement le cas où Δ est positif

Notons x_1 et x_2 les 2 racines d'une fonction polynôme du second degré f.

- La somme des racines est $s = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
- Le produit des racines est $p = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

Remarque : Si $x_1 = 0$ alors $x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et si $x_1 = 1$ alors $x_2 = \dfrac{c}{a}$

Exemple d'application : $f(x) = x^2 + x - 2$

Dans cet exemple, nous allons chercher les racines de $f(x)$ sans calculer le discriminant Δ.
1 est une racine évidente de $f(x)$, donc, d'après la propriété 3 on peut dire que :

$$x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$$

Les racines de $f(x)$ sont donc $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

Somme et produit des racines

On considère uniquement le cas où Δ est positif

Notons x_1 et x_2 les 2 racines d'une fonction polynôme du second degré f.

- La somme des racines est $s = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
- Le produit des racines est $p = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

Remarque : Si $x_1 = 0$ alors $x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et si $x_1 = 1$ alors $x_2 = \dfrac{c}{a}$

Exemple d'application : $f(x) = x^2 + x - 2$

Dans cet exemple, nous allons chercher les racines de $f(x)$ sans calculer le discriminant Δ.
1 est une racine évidente de $f(x)$, donc, d'après la propriété 3 on peut dire que :

$$x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$$

Les racines de $f(x)$ sont donc $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

FIN

Revenir au début