Занятие 3
Тема: Динамика криволинейного и вращательного движений.
Цель: Основной закон динамики вращательного движения, момент инерции, момент импульса, момент силы.

Краткая теория

- Динамической характеристикой, необходимой для описания вращательного движения тел любой формы и размеров, является **момент инерции** J. Для материальной точки массой m момент инерции $J = mr^2$, где r – ее расстояние от оси вращения.

Для твердого тела произвольной формы момент инерции вычисляют интегрированием по объему тела: $J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho\, dV$, где r – расстояние малого элемента тела массой dm и объемом dV до оси вращения, ρ - плотность тела.

У некоторых тел в ситуации, когда ось вращения проходит через центр масс, моменты инерции известны.

Для **однородного диска** (ось перпендикулярна поверхности диска и проходит через его геометрический центр): $J_0 = \frac{1}{2} mR^2$, где R – радиус диска, m - его масса.

Для **тонкого стержня** (ось проходит перпендикулярно стержню через его геометрический центр): $J_0 = \frac{1}{12} ml^2$, где l – длина стержня, m - его масса.

Для **однородного шара** (ось проходит через его геометрический центр): $J_0 = \frac{2}{5} mR^2$, где R – радиус шара, m - его масса.

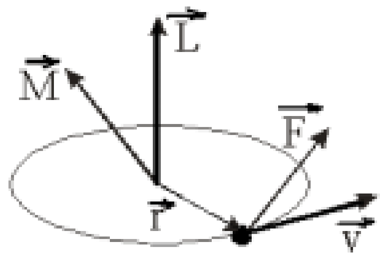
Момент инерции тела массой m относительно произвольной оси вычисляют на основании **теоремы Штейнера**: $J = J_0 + md^2$, где J_0 - известный момент инерции относительно оси проходящей через центр масс тела, d – расстояние от этой оси до параллельной оси с находимым моментом инерции J.

- **Момент импульса.**

Для материальной точки, положение которой задает радиус-вектор $\vec{r}$, момент импульса вычисляют как векторное произведение радиус-вектора на ее вектор импульса $\vec{p}$:

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$, где $\vec{v}$ - скорость точки, m – ее масса.

Для твердого тела, вращающегося вокруг фиксированной оси с угловой скоростью ω проекция момента импульса на ось вращения: $L_z = J\omega$, где J – момент инерции тела относительно оси.



• **Момент силы**. Если на материальную точку действует сила $\vec{F}$, то момент силы относительно оси находят как векторное произведение: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. В скалярном виде (относительно модуля вектора момента силы) предыдущее равенство можно записать как $M = F\,l$, где F – модуль вектора силы, l – плечо силы, то есть кратчайшее расстояние от прямой, по которой направлен вектор силы, до точки, из которой проведен радиус-вектор $\vec{r}$.

• **Основное уравнение динамики вращательного движения** (аналог II закона Ньютона для вращательного движения): $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$.

При вращении тела вокруг фиксированной оси это уравнение принимает вид: $J\varepsilon = M_z$, где ε - угловое ускорение, M_z - проекция момента внешних сил на ось вращения.

Примеры решения задач

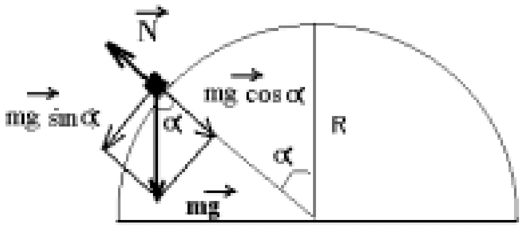
3-1. С верхней точки гладкой полусферы без начальной скорости соскальзывает небольшое тело. Пренебрегая трением, найти под каким углом к вертикали, отсчитанным от центра полусферы, тело слетит с поверхности полусферы.

• При движении тела на него действуют только сила тяжести и сила реакции поверхности полусферы. Разложим эти силы на нормальное и тангенциальное к поверхности направления, а затем применим II закон Ньютона для описания движения в каждом из направлений.

Нормальное направление:

$mg\cos\alpha - N = ma_n$.

Тангенциальное направление:



$mg\sin\alpha = ma_\tau$.

Использованы обозначения: m – масса тела, a_n – нормальное ускорение, a_τ - тангенциальное ускорение. Из кинематики известно, что $a_n = \frac{v^2}{R}$, $a_\tau = \frac{dv}{dt}$.

При соскальзывании тела вниз на угол $d\alpha$ по поверхности полусферы оно проходит расстояние $Rd\alpha$, на что требуется время $dt = \frac{R \cdot d\alpha}{v}$. Подставим найденное значение dt в выражение $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ и используем результат в уравнении тангенциального движения: $mg\sin\alpha = \frac{mv}{R}\frac{dv}{d\alpha}$, а затем перепишем его относительно скорости: $v \cdot dv = Rg\sin\alpha \cdot d\alpha$. После интегрирования правой и левой частей $\int v \cdot dv = Rg\int \sin\alpha \cdot d\alpha$ получим $\frac{v^2}{2} = -Rg\cos\alpha + v_0$. Справа появилась постоянная v_0, которую следует находить из начальных условий, а именно, при угле α = 0 тело покоилось, то есть его скорость составляла нуль. Отсюда $v_0 = Rg$, а зависимость скорости от угла α принимает вид $\frac{v^2}{2} = Rg(1-\cos\alpha)$.

Рассмотрим теперь уравнение движения в нормальном направлении $mg\cos\alpha - N = m\frac{v^2}{R}$. При соскальзывании тела угол α растет, в левой части равенства его косинус убывает, зато в правой части происходит рост квадрата скорости – это является следствием рассмотрения движения в нормальном направлении. Чтобы обеспечить выполнение равенства сила реакции N убывает и в какой-то момент обращается в нуль. Это соответствует моменту отрыва, так как взаимодействие тела и поверхности полусферы в этот момент пропадает. Значит, подставив N = 0, получим связь угла и скорости в момент отрыва: $mg\cos\alpha = m\dfrac{v^2}{R}$.

Объединив уравнения, полученные для обоих направлений, исключим из них квадрат скорости и придем к уравнению относительно угла отрыва $\cos\alpha = 2(1-\cos\alpha)$, откуда $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\alpha = \arccos\dfrac{2}{3} \cong 48^{\circ}$.

Найденный угол не зависит ни от массы тела, ни от радиуса полусферы, ни от ускорения свободного падения. Следовательно, и на Земле, и на Марсе, и на Луне угол отрыва окажется одним и тем же.

Ответ: $\alpha \cong 48^{\circ}$.

3-2. Найти момент инерции симметричного однородного тела плотностью ρ, боковая поверхность которого образована вращением кривой *f(x)* вокруг оси *x*. Основания тела перпендикулярны оси и вырезают на ней отрезок от 0 до x_0.

• Разрежем рассматриваемое тело на очень тонкие диски толщиной *dx* плоскостями перпендикулярными оси *x*. Для одного диска момент инерции $dI = \frac{1}{2}dm\cdot r^2$. Если диск пересекает ось в точке *x*, его радиус $r = f(x)$. Масса однородного диска может быть найдена как произведение плотности тела на объем диска $dm = \rho(S\cdot dx)$, где $S = \pi f^{\,2}$. В таком случае

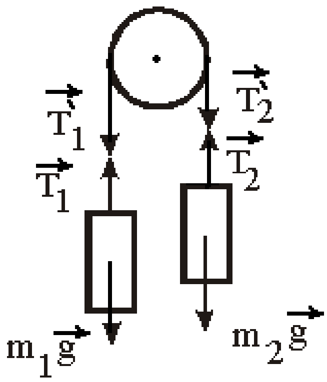
$dI = \frac{1}{2}dm\cdot f^2(x) = \frac{1}{2}\pi\rho\, f^4(x)dx$. Момент инерции всего тела равен сумме моментов инерции его частей, то есть дисков, из которых состоит тело: $I = \int\limits_0^{x_0} dI = \dfrac{\pi\rho}{2}\int\limits_0^{x_0} f^4(x)\ \ dx$.

Ответ: $I = \dfrac{\pi\rho}{2}\int\limits_0^{x_0} f^4(x)\ dx$.

3-3. Через однородный блок радиусом *R* и массой *m* перекинута легкая нерастяжимая нить, на концах которой висят грузы массами m_1 и m_2. Найти ускорения грузов и силы натяжения нити, если нить не проскальзывает по блоку.

• Силы натяжения нити с двух сторон блока различны, так как разность их моментов определяет момент сил, приводящий блок в ускоренное вращательное движение. Будем считать, что левый груз движется вверх, а правый – вниз.

В проекции на вертикальное направление запишем для поступательно движущихся грузов II закон Ньютона: $T_1 - m_1 g = m_1 a$ и $-T_2 + m_2 g = m_2 a$.



Для описания движения блока воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения: $M = J\varepsilon = \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{a}{r} = \frac{mra}{2}$, где $J = \frac{1}{2}mr^2$ - момент инерции блока, $\varepsilon = \frac{a}{r}$ - его угловое ускорение. С учетом невесомости нити для сил натяжения, проставленных на рисунке, можно получить $T_1 = T_1'$ и $T_2 = T_2'$. (Это следствие применения II закона Ньютона к ускоренному движению нити). Тогда момент действующих на блок сил: $M = (T_2' - T_1')r = (T_2 - T_1)r$, где r – плечо каждой из сил натяжения нити.

Из уравнений, описывающих движение грузов, можно получить: $T_1 = m_1(g + a)$ и $T_2 = m_2(g - a)$. Подставив эти силы в уравнение движения блока и упростив его, находим: $\frac{1}{2}ma = m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a$,

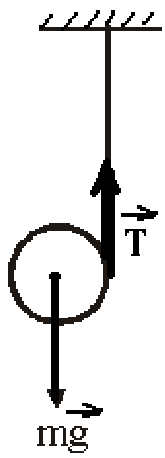
откуда $a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m/2}$.

Найдя ускорения, не составляет труда рассчитать силы натяжения нити: $T_1 = \frac{m_1(2m_2 + m/2)g}{m_1 + m_2 + m/2}$ и $T_2 = \frac{m_2(2m_1 + m/2)g}{m_1 + m_2 + m/2}$.

Ответ: $a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m/2}$, $T_1 = \frac{m_1(2m_2 + m/2)g}{m_1 + m_2 + m/2}$, $T_2 = \frac{m_2(2m_1 + m/2)g}{m_1 + m_2 + m/2}$.

3-4. На сплошной однородный цилиндр намотана тонкая гибкая нерастяжимая лента, массой которой можно пренебречь по сравнению с массой цилиндра. Свободный конец ленты прикрепили к потолку, а затем предоставили цилиндру возможность опускаться под действием силы тяжести, разматывая ленту. Определить линейное ускорение a оси цилиндра.

• Пусть m – масса цилиндра, R - его радиус. Опускаясь, цилиндр вращается вокруг мгновенной оси, проходящей через точку соприкосновения ленты и края цилиндра и отстоящей на расстояние R от оси цилиндра. Момент инерции цилиндра вокруг этой точки можно рассчитать, используя теорему Штейнера, прибавив к моменту инерции цилиндра относительно его оси J_0 величину mR^2 (R - расстояние между осью цилиндра и мгновенной осью вращения):



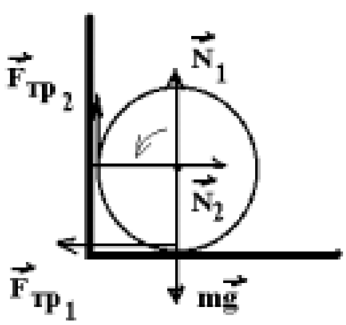
$$J = J_0 + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

На цилиндр действуют две силы: сила тяжести mg и сила натяжения нити T. Сила тяжести приложена к центру цилиндра и составляет момент mgR. Момент силы натяжения относительно мгновенной оси вращения равен нулю, так как эта ось проходит через точку приложения силы натяжения.

Используем основное уравнение динамики вращательного движения $J\varepsilon = M$, принимая во внимание, что $M = mgR$. Линейное ускорение цилиндра a связано с угловым ε: $\varepsilon = \frac{a}{R}$. После подстановки получим:

$\frac{3}{2}mR^2 \cdot \frac{a}{R} = mg \cdot R$, откуда $a = \frac{2}{3}g$.

Ответ: $a = \frac{2}{3}g$.



3-5. Однородный цилиндр радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω и моментально приложили к углу. Коэффициент трения цилиндра о стенки угла составляет μ. Какое время цилиндр будет вращаться до полной остановки?

• Силы, действующие на цилиндр, изображены на рисунке. Это две силы реакции стенок угла $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, две силы трения $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ о стенки и сила тяжести $m\vec{g}$. Поскольку цилиндр не участвует в поступательном движении ни в вертикальном, ни

горизонтальном направлениях, проекции действующих сил на эти направления, согласно II закону Ньютона, дадут в сумме нуль:
$N_1 + F_{mp1} - mg = 0$ и $N_2 - F_{mp1} = 0$. С учетом связи сил трения и сил нормального давления цилиндра на стенки угла $F_{mp1} = \mu N_1$ и $F_{mp2} = \mu N_2$ после решения системы уравнений получим $F_{mp1} = \dfrac{\mu mg}{1+\mu^2}$ и $F_{mp2} = \dfrac{\mu^2 mg}{1+\mu^2}$. Именно силы трения создают относительно центра цилиндра постоянный тормозящий момент, из-за которого цилиндр вращается равнозамедленно (при этом момент сил реакции и силы тяжести относительно центра цилиндра равен нулю). Момент сил трения составляет $M = F_{mp1}R + F_{mp2}R = \dfrac{\mu(\mu+1)mgR}{1+\mu^2}$. С учетом уравнения моментов $J\varepsilon = M$, в котором $J = \dfrac{1}{2}mR^2$ - момент инерции цилиндра, находим угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{2\mu(\mu+1)g}{(1+\mu^2)R}$. Чтобы угловая скорость цилиндра оказалась равной нулю, с этим ускорением до полной остановки ему предстоит вращаться промежуток времени $t = \dfrac{\omega}{\varepsilon} = \dfrac{(1+\mu^2)\omega R}{2\mu(\mu+1)g}$.

Ответ: $t = \dfrac{(1+\mu^2)\omega R}{2\mu(\mu+1)g}$.

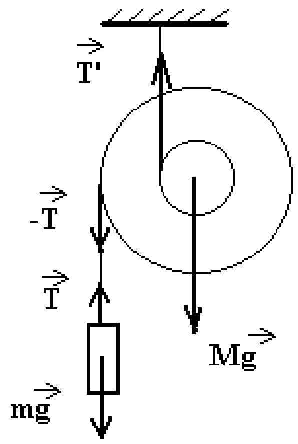
Задачи для самостоятельного решения

3-6. Маховик в форме диска массой *m* (радиусом *R*) раскручен до *n* оборотов в секунду. Под влиянием сил трения он остановился через Δt секунд. Найти момент сил трения.

Ответ: $M = \pi nmR/\Delta t$.

3-7. На полый тонкостенный цилиндр намотана тонкая гибкая нерастяжимая лента, массой которой можно пренебречь по сравнению с массой цилиндра. Свободный конец ленты прикрепили к потолку и предоставили цилиндру возможность опускаться под действием силы

тяжести, разматывая ленту. Определить линейное ускорение a оси цилиндра.
Ответ: $a = g/2$.
3-8. На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом R. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой m. Опускаясь равноускоренно, груз за время Δt прошел расстояние Δs. Определить момент инерции маховика.
Ответ: $J = mR^2(gt^2/2s - 1)$.
3-9 Однородный диск радиусом R раскрутили до угловой скорости ω_0 и осторожно положили плоскостью на горизонтальную поверхность. Какое время диск будет вращаться по поверхности, если коэффициент трения μ ?
Ответ: $t = 3\omega_0 R/4\mu g$.
3-10. Платформа в виде однородного диска массой m_2 может свободно вращаться вокруг вертикальной оси. На краю платформы находится человек массой m_1. На какой угол повернется платформа, если, двигаясь по краю платформы, человек обойдет ее и окажется в том месте, с которого начал движение? При решении учесть момент силы взаимодействия человека и платформы. Момент инерции человека находить как для материальной точки.
Ответ: $\varphi = 2\pi \dfrac{m_1}{m_1 + m_2/2}$.



3-11. В системе, показанной на рисунке, известны масса m груза, масса M и момент инерции (относительно центра) I ступенчатого блока, а также радиусы R и $2R$ его ступеней. Определить ускорения a_1 груза и a_2 ступенчатого блока.
Ответ: $a_1 = a_2 = (m - M)g/(m + M + I/R^2)$.

Контрольные задачи

3-12. Тело массой m бросили с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти зависимость от времени момента импульса тела относительно точки бросания.
3-13. Однородный шар радиусом R без проскальзывания катится по плоскости с поступательной скоростью V. На шар со стороны плоскости действует постоянная сила трения $F_{тр}$. Найти путь, который шар пройдет до полной остановки.

3-14. Груз, привязанный к невесомой нити длиной l, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Нить отклонена от вертикали на угол φ. Определить период вращения груза.
3-15. Шар массой m радиусом R вращается по закону $\varphi = a + bt^2 + ct^3$ вокруг фиксированной оси, проходящей через его центр. Определить момент действующих на шар сил в момент времени t_0.
3-16. Автомобиль движется по закруглению шоссе радиусом R = 200м. Коэффициент трения колес о дорожное покрытие μ = 0,1 (гололед). Определить при какой скорости V автомобиль начнет заносить по шоссе.
3-17. На однородный сплошной цилиндр массой m намотана нить. Верхний конец нити прикреплен к потолку. Цилиндр начинает опускаться вниз. Определить угловое ускорение цилиндра и силу натяжения нити.
3-18. Определить момент инерции тела в виде параболоида вращения, образованного вращением отрезка параболы, заданной на отрезке от 0 до x_0. Плотность материала тела ρ.
3-19. Два тела массами m_1 и m_2 связаны тонкой нитью, переброшенной через однородный блок массой m, который закреплен на краю горизонтального стола. Тело m_1 скользит по поверхности стола (коэффициент трения о стол μ), тело m_2 висит на нити. Нить не проскальзывает по блоку. Найти ускорения тел и силы натяжения нити по обе стороны от блока.
3-20.Однородный диск радиусом R может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его край. Диск отклонили на угол α и отпустили. Определить угловое ускорение диска в начальный момент времени.
3-21. Однородный сплошной цилиндр массой m_0 и радиусом R может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. На цилиндр в один ряд плотно намотан тяжелый нерастяжимый шнур массой m, свешивающийся с края цилиндра. Длина шнура составляет l. Найти угловое ускорение цилиндра в зависимости от длины x свешивающейся части шнура.