Вопросы для подготовки к экзамену по математическому анализу для всех специальностей ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ (в квадратных скобках указаны номера лекций по календарному плану, см. Иванков П.Л. Конспект лекций по математическому анализу // электронный ресурс http://mathmod.bmstu.ru/Docs/Eduwork/ma/MAall.pdf)

1. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательности. [*Л. 4*]

2. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности. [*Л. 4*]

3. Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел. [*Л. 5*]

4. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении функцией знака своего предела. [*Л. 5*]

5. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенстве. [*Л. 5*]

6. Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной функции. [*Л. 5*]

7. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения функций. [*Л. 6*]

8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе сложной функции. [*Л. 6*]

9. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. [*Л. 6*]

10. Сформулируйте и докажите теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой. [*Л. 7*]

11. Сформулируйте и докажите теорему о произведении бесконечно малой функции на ограниченную. [*Л. 7*]

12. Сформулируйте и докажите теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой. [*Л. 7*]

13. Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела. [*Л. 8*]

14. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых. [*Л. 8*]

15. Сформулируйте и докажите теорему о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков. [*Л. 8*]

16. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций. [*Л. 9*]

17. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции. [*Л. 9*]

18. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки. [*Л. 9*]

19. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций. Докажите непрерывность функции $y=\sin x$. [*Л. 9*]

20. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке. [*Л. 10*]

21. Сформулируйте определение точки разрыва функции и дайте классификацию точек разрыва. [*Л. 9*]

22. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты. [*Л. 10*]

23. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке. [*Л. 11*]

24. Сформулируйте и докажите теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции. [*Л. 11*]

25. Сформулируйте и докажите теорему о производной произведения двух дифференцируемых функций. [*Л. 11*]

26. Сформулируйте и докажите теорему о производной частного двух дифференцируемых функций. [*Л. 11*]

27. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции. [*Л. 11*]

28. Сформулируйте и докажите теорему о производной обратной функции. [*Л. 11*]

29. Сформулируйте и докажите свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка. [*Л. 12*]

30. Сформулируйте и докажите теорему Ферма. [*Л. 13*]

31. Сформулируйте и докажите теорему Ролля. [*Л. 13*]

32. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа. [*Л. 13*]

33. Сформулируйте и докажите теорему Коши. [*Л. 13*]

34. Сформулируйте и докажите теорему Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций. [*Л. 13*]

35. Сравните рост показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности. [*Л. 13*]

36. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. [*Л. 14*]

37. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. [*Л. 14*]

38. Выведите формулу Маклорена для функции $y = e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [*Л. 14*]

39. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \sin x$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [*Л. 14*]

40. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \cos x$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [*Л. 14*]

41. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \ln(1 + x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [*Л. 14*]

42. Выведите формулу Маклорена для функции $y = (1 + x)^\alpha$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [*Л. 14*]

43. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции. [*Л. 15*]

44. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции. [*Л. 15*]

45. Сформулируйте и докажите достаточное условие возрастания дифференцируемой функции. [*Л. 15*]

46. Сформулируйте и докажите достаточное условие убывания дифференцируемой функции. [*Л. 15*]

47. Сформулируйте и докажите первое достаточное условие экстремума (по первой производной). [*Л. 15*]

48. Сформулируйте и докажите второе достаточное условие экстремума (по второй производной). [*Л. 15*]

49. Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости функции. [*Л. 16*]

50. Сформулируйте и докажите необходимое условие точки перегиба. [*Л. 16*]

51. Сформулируйте и докажите достаточное условие точки перегиба. [*Л. 16*]

При ответе на теоретические вопросы билета формулировки теорем должны сопровождаться определениями используемых в них понятий. В частности, требуется знание следующих определений: предела последовательности [*Л. 4*]; предела функции (определения по Коши и по Гейне) [*Л. 5*]; окрестности и ε-окрестности точки $x \in \mathbb{R}$ [*Л. 2*]; окрестностей $+\infty$, $-\infty$ и ∞ [*Л. 2*]; сходящейся, ограниченной, возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей, монотонной, фундаментальной последовательностей [*Л. 3, 4*]; бесконечно малой и бесконечно большой функций [*Л. 7*]; бесконечно малых функций: одного порядка, несравнимых, эквивалентных [*Л. 8*]; порядка малости [*Л. 8*]; порядка роста [*Л. 8*]; приращения функции [*Л. 9*]; непрерывной функции в точке (эквивалентные определения) [*Л. 9*]; непрерывной функции на интервале, на отрезке [*Л. 9*]; точек разрыва: устранимого, I-го рода, II-го рода [*Л. 9*]; наклонной асимптоты [*Л. 10*]; производной функции в точке [*Л. 11*]; односторонней (левой или правой) производной функции [*Л. 11*]; дифференцируемой функции [*Л. 11*]; дифференциала первого порядка [*Л. 12*]; производной n-го порядка [*Л. 12*]; дифференциала n-го порядка [*Л. 12*]; возрастающей, невозрастающей, убывающей, неубывающей, монотонной, строго монотонной функций [*Л. 15*]; строгого и нестрогого локальных минимума, максимума, экстремума [*Л. 15*]; стационарной и критической точек [*Л. 15*]; выпуклости (вверх или вниз) графика функции на промежутке [*Л. 16*]; точки перегиба графика функции [*Л. 16*].

Знание остальных теорем, определений и понятий из программы курса может потребоваться при ответе на дополнительные вопросы экзаменатора.

Задачи для подготовки к экзамену по математическому анализу для всех специальностей ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ

На экзамене студенту выдаётся две задачи, каждая на одну из следующих тем: «пределы», «сравнение бесконечно больших и бесконечно малых», «непрерывность и точки разрыва», «геометрические приложения производной и формула Тейлора», «исследование функций». При подготовке к экзамену рекомендуется прорешать следующие задачи.

1. Вычислить предел:

1.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n}\cos n+\dfrac{5n}{3n+7}\right)$; **1.2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$; **1.3.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$;

1.4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$; **1.5.** $\lim\limits_{x\to\alpha}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2\alpha}\sin\dfrac{x-\alpha}{2}$; **1.6.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-\operatorname{tg}2x}{x^3}$;

1.7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$; **1.8.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; **1.9.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big((2x-7)\cdot\big(\ln(3x+5)-\ln(3x-1)\big)\Big)$;

1.10. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\pi}\cdot\arccos x\right)^{\frac{1}{e^{3x}-1}}$; **1.11.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}$; **1.13.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{2011}x}{x^{2011}}$;

1.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^7+4x^4+1}{(x-2)^3(4x+5)^2(3x-1)^2}$; **1.14.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}(4x^4+x^2)+e^{x^2}-\cos 2x}{\ln(1+2x^2)}$;

1.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+7x^2+\cos 5x+\operatorname{arctg}x^5+e^{-x^2}}{\sqrt{x^4+8x^3}}$.

2. Доказать, что предел не существует:

2.1. $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; **2.2.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$; **2.3.** $\lim\limits_{x\to\infty}3^x$.

3. Выделить главную часть б.м. функции или б.б. функции:

3.1. $f(x)=\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})$ при $x\to0$; **3.2.** $f(x)=\operatorname{tg}x-\sin x$ при $x\to0$;

3.3. $f(x)=\sqrt{\lg x}$ при $x\to1$; **3.4.** $f(x)=(2x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ при $x\to\infty$.

4. Определить порядок малости $\alpha(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ относительно $\beta(x)=x$ при $x\to0$.

5. Найти точки разрыва функции, исследовать их характер:

5.1. $f(x)=2^{\frac{x}{9-x^2}}$; **5.2.** $f(x)=\dfrac{1}{x\ln|x-1|}$; **5.3.** $f(x)=\dfrac{5^{1/x}-1}{5^{1/x}+1}$;

5.4. $f(x)=(2+x)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x}{(2-x)(1-x^2)}$; **5.5.** $f(x)=\dfrac{|2+x|}{\arcsin(2+x)}$;

5.6. $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{\pi-x}, & x\geqslant0;\end{cases}$ **5.7.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}, & x<1,\\ 2^{1/x}, & 1\leqslant x<2,\\ \sqrt{2}, & x\geqslant2.\end{cases}$

6. Найти y'', если функция $y=f(x)$ задана

6.1. неявно: $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; **6.2.** параметрически: $\begin{cases}x=\sec t,\\ y=\operatorname{tg}t,\end{cases}$ $t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. Составить уравнение касательной к линии $y=x^2+4x$, которая параллельна прямой $y-2x=0$.

8. В каких точках нормаль к кривой $x^2-2x+y^2=0$ параллельна оси OY?

9. Вычислить пределы по правилу Лопиталя – Бернулли:

9.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$; **9.2.** $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{1/x}$; **9.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

10. Используя разложения функций по формуле Маклорена, вычислить предел:

10.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cdot\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$; **10.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)-4e^{-x^2/2}+4}{x^3(e^x-1)}$; **10.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{(3^x-1)^3}$.

11. Функцию $f(x)$ разложить по целым степеням x, ограничиваясь членами до пятого порядка малости относительно x.

11.1. $f(x)=e^{x^2-1}$; **11.2.** $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; **11.3.** $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{2x}{1-x}$;
11.4. $f(x)=\ln\dfrac{3+x}{1-x^2}$; **11.5.** $f(x)=x\sqrt[3]{8-x^2}$; **11.6.** $f(x)=x\sqrt{1-x^2}-\cos x\cdot\ln(1+x)$.

12. Разложить многочлен $P(x)=x^4-3x^3+x^2+2x+4$ по степеням $x-2$.

13. Найти асимптоты графика функции $y=\sqrt[3]{12x-4x^3}$ и интервалы монотонности.

14. Найти интервалы выпуклости графика функции $y=x-\operatorname{arctg} 5x$ и точки перегиба.

15. Построить график функции $y=\dfrac{x}{x^2-4}$, определить асимптоты, точки экстремума, интервалы возрастания и убывания, направление выпуклости графика функции и точки перегиба.

16. Найти интервалы возрастания, убывания, точки экстремума функции $f(x)=\sqrt[3]{|x^2-1|}$.

Образец билета

Московский Государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ **0**.

по курсу Математического анализа, 1-й курс, 1-й сем., ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ.

1. Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела. (*6 баллов*)

2. Сформулируйте и докажите достаточное условие возрастания дифференцируемой функции. (*6 баллов*)

3. Задача из комплекта № 1. (*6 баллов*)

4. Задача из комплекта № 4. (*6 баллов*)

5. Дополнительные вопросы экзаменатора. (*6 баллов*)

Билеты утверждены на заседании кафедры ФН-12 18.11.2013.