Занятие 4
Тема: Законы сохранения.
Цель: Работа и энергия. Законы сохранения импульса, момента импульса, энергии. Упругий и неупругий удары.

Краткая теория

• **Работу силы** $\vec{F}$, действующей на тело при его перемещении $d\vec{s}$ (или $d\vec{r}$), вычисляют как скалярное произведение векторов: $dA = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cdot ds\cdot\cos\alpha$, где α - угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{s}$.

В случае вращательного движения тела под действием момента сил $\vec{M}$ работу внешних сил вычисляют через вектор углового перемещения тела $d\vec{\varphi}$: $dA = \vec{M}\cdot d\vec{\varphi} = M_z\cdot d\varphi$, где M_z – проекция момента силы на ось вращения, $d\varphi$ - угол поворота тела вокруг оси вращения.

• Энергия, обусловленная движением тела массы m со скоростью $\vec{v}$ (или импульсом $\vec{p} = m\vec{v}$), составляет величину $T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ и называется **кинетической энергией**. При вращательном движении тела с угловой скоростью ω (момент инерции тела J) кинетическая энергия имеет величину $T = \frac{J\omega^2}{2}$.

• Кинетическая энергия тела в случае плоского движения (ось вращения проходит через центр масс тела, движущийся со скоростью $\vec{v}$), связанная как с поступательным, так и с вращательным, движениями составляет $T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$. Поясним, что движение считается плоским, если векторы мгновенных скоростей всех точек тела лежат в плоскости перпендикулярной оси вращения.

• Изменение кинетической энергии тела происходит за счет работы внешних сил, действующих на тело $T_2 - T_1 = A_{1-2} = \int_1^2 dA = \int_1^2 F\cdot d\vec{s}$.

• Энергия тела, обусловленная его нахождением в поле консервативных сил, называется **потенциальной энергией.** Потенциальная энергия имеет смысл работы, совершаемой силами поля при перемещении тела на бесконечность, и определена с точностью до постоянной величины. Убыль потенциальной энергии тела при его перемещении в поле консервативных сил связана с работой, совершаемой силами поля $U_1 - U_2 = A_{1-2}^{\,к\,он}$. В механике часто встречается один конкретный вид потенциальной энергии, возникающей вследствие того, что тела находятся в поле консервативных сил гравитационного притяжения Земли. В этом случае потенциальная энергия вблизи поверхности Земли зависит от высоты подъема *h* тела (или его центра масс) над поверхностью Земли и силы тяжести *mg*: $U = mgh$, где *m* – масса тела. Между потенциальной энергией *U* тела и действующей на него консервативной силой $\vec{F}$ существует связь. В декартовой системе координат эта связь имеет вид:

$\vec{F} = -gradU = -\nabla U = -(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k})$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - орты осей x, y, z, а производные – частные производные по каждой из координат.

• При отсутствии диссипативных потерь энергии (на трение, нагрев, неупругие деформации) сумма потенциальной и кинетической энергий замкнутой системы тел (не взаимодействующей с внешними телами) не меняется во времени. Это свойство связано лишь со свойствами пространства-времени и носит название **закон сохранения полной механической энергии** *E*: $E = T + U = const$. Иногда полную потенциальную энергию системы представляют как сумму потенциальной энергии в полях внутренних и внешних консервативных сил, в этом случае (при отсутствии других внешних сил) также выполнен закон сохранения полной механической энергии. Если на такую систему воздействуют диссипативные силы (внутренние или внешние), то изменение ее механической энергии во времени описывает выражение: E_2 - E_2 = A_{12}, где A_{12} – работа диссипативных сил.

• Для замкнутой системы тел сохраняется суммарный импульс

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \vec{C}$$

всех тел, входящих в систему, что выражает **закон сохранения импульса**.

Если на систему тел действуют внешние силы, то изменение суммарного импульса во времени описывает выражение: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}$.

Частным проявлением закона сохранения импульса является ситуация, когда система тел не является замкнутой, но проектирование результирующей внешних сил $\vec{F}$ на какую-то ось (к примеру, ось x) дает нуль: $F_x = 0$. Тогда проекция суммарного импульса системы не зависит от времени:

$$P_x = \sum (p_i)_x = \sum m_i (v_i)_x = const \ .$$

• **Закон сохранения момента импульса** также имеет отношение к замкнутой системе тел, в которой суммарный момент импульса всех тел (относительно заданного центра) не зависит от времени: $\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$, где $\vec{r}_i$ - радиус-вектор, определяющий положение материальной точки m_i системы тел относительно заданного центра.

Если на систему тел действуют внешние силы, то изменение суммарного момента импульса во времени описывает выражение:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i = \vec{M} \ .$$

Частным проявлением закона сохранения момента импульса является ситуация, когда система тел не является замкнутой, но проектирование результирующего момента $\vec{M}$ внешних сил на какую-то ось (к примеру, ось x) дает нуль: $M_x = 0$. Тогда проекция суммарного момента импульса системы на эту ось не зависит от времени:

$$L_x = \sum (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)_x = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)_x = const \, .$$

• Примером реализации законов сохранения энергии и импульса являются **упругий и неупругий удары** (столкновения) тел. При абсолютно упругом ударе (пример – столкновение бильярдных шаров) суммарная кинетическая энергия тел и вектор их суммарного импульса не меняются в результате столкновения. При абсолютно неупругом ударе (пример – пластилиновые шары, которые после столкновения слипаются) не меняется только вектор суммарного импульса, а суммарная кинетическая энергия убывает, так как часть ее переходит в тепло и идет на нагрев сталкивающихся тел.

Примеры решения задач

4-1. Летевшая горизонтально со скоростью v пуля массой m, попала в мишень в виде деревянного бруска массой M, неподвижно висевшего на нити длиной l и застряла в нем. Определить на какой угол α

отклонится брусок от вертикали. Какая часть кинетической энергии пули перейдет во внутреннюю энергию, то есть будет потрачена на нагрев бруска и пули?

• Пуля, попадающая в брусок, разрушает его, тратя на это часть кинетической энергии, так как совершается работа против диссипативных сил трения. А значит, закон сохранения энергии при взаимодействии бруска и пули не выполнен. Все скорости направлены по горизонтальной прямой, вдоль которой в момент взаимодействия силы не действуют (силы натяжения нити и тяжести направлены по вертикали). Можно воспользоваться сохранением суммарной проекции импульса на это направление: $mv = (M+m)V$, где V - скорости бруска. Вместо векторов скоростей в записи закона сохранения использованы скалярные величины – проекции скоростей на указанное направление. Скорость бруска сразу после застревания в нем пули: $V = \dfrac{mv}{M+m}$. С этой скоростью брусок начнет двигаться вокруг точки подвеса нити, создавая натяжение нити. За нулевую отметку высоты и нуль потенциальной энергии примем первоначальное, самое низкое, расположение висящего бруска. После подъема бруска с пулей на максимальную высоту h первоначальная энергия этой системы E равная кинетической E = $T = \dfrac{(M+m)V^2}{2}$ не изменится. Однако в верхней точке скорость равна нулю, кинетическая энергия также нуль, поэтому полная энергия системы состоит только из потенциальной E = U = $(M + m)gh$. Отсюда $E = T = U$: $\dfrac{(M+m)V^2}{2} = (M+m)gh$ или $\dfrac{(M+m)m^2v^2}{2(M+m)^2} = (M+m)gh$. Для h получаем $h = \dfrac{m^2v^2}{2g(M+m)^2}$. Из геометрии задачи следует, что подъему бруска на высоту h соответствует угол α, для которого:

$\cos\alpha = 1$ - h/l. Зная h, находим $\cos\alpha = 1 - \dfrac{m^2v^2}{2gl(M+m)^2}$.

Доля η кинетической энергии, перешедшей во внутреннюю энергию, - это разница кинетической энергии пули T_0 до попадания в брусок (T_0 = $mv^2/2$) и энергии бруска с пулей T после застревания пули в бруске, отнесенная к энергии T_0:

$\eta = \frac{T_0 - T}{T_0} = 1 - \frac{2m^2v^2}{2(M+m)mv^2} = 1 - \frac{m}{M+m} = \frac{M}{M+m}$. Обычно масса пули невелика, то есть $M >> m$, тогда во внутреннюю энергию перейдет основная часть энергии пули. Эта доля тем большая, чем с более массивным бруском сталкивается пуля.

Ответ: $\cos\alpha = 1 - \frac{m^2v^2}{2gl(M+m)^2}$, $\eta = \frac{M}{M+m}$.

4-2. На гладком горизонтальном полу находится неподвижная тележка массой M, выполненная в виде доски длиной l с колесиками снизу. С краев тележки расположились два человека массами m_1 и m_2. На какое расстояние s относительно пола сдвинется тележка, если люди поменяются местами?

- Применим сохранения проекции импульса на горизонтальное направление для системы, представляющей собой тележку с людьми на ней. Ось x направим горизонтально вправо. В любой момент времени суммарная проекция импульса механической системы из двух людей и тележки на ось x составляет нуль, так как вначале движения системы не было, а значит, ее суммарная проекция импульса составляла нуль. Предполагая, что тележка и первый человек двигались вправо в положительном направлении оси x (второй человек двигался в отрицательном направлении оси x), получим:

$Mu + m_1v_1 - m_2v_2 = 0$, где v_1, v_2 – проекции скоростей первого и второго людей в произвольный момент движения, u – проекция скорости тележки. За время dt первый человек сместится относительно пола на расстояние $ds_1 = v_1 \cdot dt$, второй – на расстояние $ds_2 = v_2 \cdot dt$, а тележка сдвинется на расстояние $ds = u \cdot dt$. Подставив ds_1 , ds_2 , ds в предыдущее равенство, получим

$$Mds + m_1ds_1 - m_2ds_2 = 0.$$

Выполним интегрирование этого равенства по всему времени движения, чтобы перейти к конечным перемещениям тележки s и людей s_1, s_2 при смене мест: $Ms + m_1s_1 - m_2s_2 = 0$ (постоянная интегрирования из начальных условий составляет нуль). Помня, что тележка двигалась в сторону движения первого человека, запишем, какие расстояния относительно пола прошел каждый из людей при смене места. Первый шел по тележке до ее правого края расстояние l, при этом сам край сдвинулся на расстояние s, значит, относительно пола расстояние s_1 составит $l + s$. Второй человек шел к левому краю тележки, который пододвинулся в его сторону на расстояние s, следовательно, он прошел расстояние $l - s$. Из этих рассуждений видно, что $s_1 = l + s$, $s_2 = l - s$. Подставив полученные выражения в уравнение закона сохранения импульса приходим к уравнению относительно s:

$$Ms + m_1(l + s) - m_2(l - s) = 0,$$

его решение $s = \dfrac{m_2 - m_1}{M + m_1 + m_2} l$.

Ответ: $S = \dfrac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} l$.

4-3. Лыжник без начальной скорости начинает спускаться с трамплина высоты H, имеющего по краю высоту h над поверхностью земли (высоту горизонтального стола). При какой высоте h лыжник пролетит максимальное расстояние s и чему оно равно?

• Воспользуемся законом сохранения энергии для определения скорости лыжника v в момент отрыва от стола. Приняв за нуль потенциальную энергию на уровне поверхности земли, получим: $mgH = \dfrac{mv^2}{2} + mgh$, откуда $v = \sqrt{2g(H-h)}$. После отрыва от стола лыжник участвует в двух движениях: равномерном движении в горизонтальном направлении со скоростью v и свободном падении с высоты h. Из кинематики известно, что время свободного падения до поверхности земли составляет $t = (2h/g)^{1/2}$. Расстояние, пройденное за это время при равномерном движении:

$$s = vt = \sqrt{2g(H-h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{(H-h)h} .$$

Для определения максимума (экстремума) s как функции h, вычислим производную ds/dh и приравняем ее нулю:

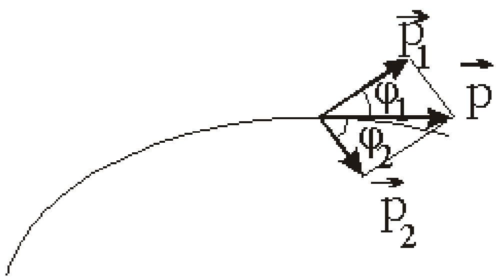
$$\frac{ds}{dh} = 2\frac{d}{dh}[(H-h)h]^{1/2} = \frac{2(H-2h)}{2\sqrt{(H-h)h}} = 0,$$

откуда легко получить $h = H/2$, $s_{\max} = H$.

Ответ: $h = H/2$, $s_{\max} = H$.

4-4. Снаряд в верхней точке траектории имел импульс p. Он взорвался, развалившись на две части. Меньшая часть получила импульс p_1, направленный под углом φ_1 к горизонту. Найти импульс и его направление к горизонту для большей части.

• В верхней точки траектории снаряд двигался горизонтально, так как вертикальная составляющая скорости в этот момент равна нулю. Из



рисунка видно, что горизонтальный вектор импульса $\vec{p}$ снаряда в верхней точке траектории, согласно закону сохранения импульса, представляет собой сумму векторов импульсов обоих осколков: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Для $\vec{p}_2$ получаем $\vec{p}_2 = \vec{p} - \vec{p}_1$. Модуль p_2 легко определить из теоремы косинусов:

$p_2 = (p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\varphi_1)^{1/2}$. Для определения φ_2 перепишем уже использованное уравнение в виде $\vec{p}_1 = \vec{p} - \vec{p}_2$ и снова воспользуемся теоремой косинусов:

$p_1^2 = p^2 + p_2^2 - 2pp_2\cos\varphi_2$, откуда

$$\cos\varphi_2 = \frac{p^2 + p_2^2 - p_1^2}{2pp_2} = \frac{p^2 - (p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\varphi_1)}{2p(p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\varphi_1)^{1/2}} =$$

$$= \frac{p_1\cos\varphi_1 - p_1^2/2p}{(p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\varphi_1)^{1/2}}.$$

Ответ: $p_2 = (p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\varphi_1)^{1/2}$, $\cos\varphi_2 = \dfrac{p_1\cos\varphi_1 - p_1^2/2p}{(p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\varphi_1)^{1/2}}$.

4-5. Маховик массой m_1, имеющий форму однородного диска радиусом R, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. По касательной к боковой поверхности маховика сверху падает небольшой пластилиновый шарик массой m_2 . Упав с высоты h, шарик прилип к крайней точке маховика и привел маховик во вращение. Какую угловую скорость ω приобрел маховик?

• Применим закон сохранения момента импульса. Момент импульса падающего шарика относительно оси вращения находим как произведение импульса шарика в момент прилипания на плечо относительно оси вращения: $L_0 = pR = mvR = mR\sqrt{2gh}$, где $v = \sqrt{2gh}$ - скорость шарика ($p = mv$ - его импульс) в момент прилипания к маховику. Согласно закону сохранения импульса вычисленный момент должен равняться суммарному моменту импульса маховика и шарика в момент начала вращения:

$L = J_1\omega + J_2\omega$, где $J_1 = mR^2/2$ - момент инерции маховика, а $J_2 = mR^2$ - момент инерции шарика, вычисляемый как для материальной точки. Приравнивая

$L_0 = L$, получаем

$(mR^2/2 + mR^2)\omega = mR\sqrt{2gh}$, откуда $\omega = \dfrac{2m\sqrt{2gh}}{R(M+2m)}$.

Ответ: $\omega = \dfrac{2m\sqrt{2gh}}{R(M+2m)}$.

4-6. Перед столкновением два абсолютно неупругих тела массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 в горизонтальном направлении. Определить скорость u и кинетическую энергию T_2 тел после удара, а также долю механической энергии η перешедшую во внутреннюю энергию.

- Закон сохранения импульса при неупругом столкновении:

m_1v_1 - m_2v_2 = $(m_1 + m_2)u$, где u – скорость тела, образовавшегося в результате столкновения. Отсюда $u = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$.

Потенциальная энергия тел в поле сил тяжести не меняется, поэтому изменение механической энергии складывается только из изменения их кинетической энергии. Суммарная кинетическая энергия до удара: $T_1 = \dfrac{m_1v_1{}^2}{2} + \dfrac{m_2v_2{}^2}{2}$. После удара: $T_2 = \dfrac{(m_1+m_2)u^2}{2} = \dfrac{(m_1v_1 - m_2v_2)^2}{2(m_1+m_2)}$.

Относительное уменьшение механической энергии (доля энергии, ушедшая на нагрев):

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{(m_1v_1 - m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)\cdot(m_1v_1{}^2 + m_2v_2{}^2)} = \frac{m_1m_2(v_1 - v_2)^2}{(m_1+m_2)\cdot(m_1v_1{}^2 + m_2v_2{}^2)} .$$

Ответ: $\eta = \dfrac{m_1m_2(v_1 - v_2)^2}{(m_1+m_2)\cdot(m_1v_1{}^2 + m_2v_2{}^2)}$.

4-7. Два абсолютно упругих шара массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 и испытывают центральный удар. Определить скорости u_1 и u_2 шаров после столкновения. Шары скользят по плоскости без качения.

- При упругом ударе выполняются законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{m_1 v_1{}^2}{2}+\frac{m_2 v_2{}^2}{2}=\frac{m_1 u_1{}^2}{2}+\frac{m_2 u_2{}^2}{2}, \qquad m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2 \ .$$

Учтем известное из векторной алгебры соотношение: $\vec{a}^2-\vec{b}^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$, чтобы переписать приведенные выше равенства в виде:

$$m_1(\vec{v}_1-\vec{u}_1)\cdot(\vec{v}_1+\vec{u}_1)=m_2(\vec{u}_2-\vec{v}_2)\cdot(\vec{v}_2+\vec{u}_2), \quad (1)$$

$$m_1(\vec{v}_1-\vec{u}_1)=m_2(\vec{u}_2-\vec{v}_2) \ . \quad (2)$$

При выполнении равенства (2) равенство (1) может быть справедливым только при условии, что

$$\vec{v}_1+\vec{u}_1=\vec{v}_2+\vec{u}_2 \ . \quad (3)$$

Преобразуем равенства (2) и (3). После операции (3)·m_2 - (2) получим $\vec{u}_1=\dfrac{2m_2\vec{v}_2+(m_1-m_2)\vec{v}_1}{m_1+m_2}$. После операции (3)·$m_1$+(2) получим

$$\vec{u}_2=\frac{2m_1\vec{v}_1+(m_2-m_1)\vec{v}_2}{m_1+m_2}.$$

Ответ: $\vec{u}_1=\dfrac{2m_2\vec{v}_2+(m_1-m_2)\vec{v}_1}{m_1+m_2}$, $\vec{u}_2=\dfrac{2m_1\vec{v}_1+(m_2-m_1)\vec{v}_2}{m_1+m_2}$.

Задачи для самостоятельного решения

4-8. На рельсах стоит платформа с закрепленным на ней артиллерийским орудием. Масса платформы с орудием составляет m_2 . Орудие совершает выстрел в горизонтальном направлении снарядом массой m_1, скорость снаряда v_1. Определить на какое расстояние после выстрела откатится платформа, если коэффициент трения колес платформы о рельсы μ.

Ответ: $l = m_1{}^2 v_1{}^2/2m_2{}^2\mu g$.

4-9. На горизонтальной плоскости покоится шар массы m_2. На него налетает шар массой m_1, двигающийся со скоростью v_1. Найти какую долю кинетической энергии при абсолютно упругом центральном ударе первый шар передает второму. Учесть, что в случае центрального удара все скорости лежат вдоль одной прямой.

Ответ: $\eta = 4m_1m_2/(m_1 + m_2)^2$.

4-10. Тело массой m пустили вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью v_0, составляющей угол α с горизонтом.

Коэффициент трения тела о плоскость μ. Какой путь пройдет тело до полной остановки и какую работу совершит сила трения?
Ответ: $l = v_0^2/2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, $A = \mu m v_0^2/2(\mathrm{tg}\alpha + \mu)$.
4-11. Снаряд, летящий со скоростью v, разрывается на три одинаковых осколка так, что кинетическая энергия осколков увеличивается в k раз. Какую максимальную скорость может приобрести один из осколков?
Ответ: $v_0 = v + [2(k - 1)]^{1/2}v$.
4-12. Частица массой m_1 обладает импульсом p_1 и испытывает абсолютно упругий удар с покоящейся частицей массой m_2. Определить какой максимальный импульс она может передать первоначально покоящейся частице.
Ответ: $p_2 = 2p_1m_2/(m_1+ m_2)$.
4-13. Обруч и сплошной цилиндр, имеющие равную массу m, катятся без скольжения по горизонтальной поверхности с одинаковой линейной скоростью v. Найти их кинетические энергии T_1 и T_2 .
Ответ: $T_1 = mv^2$, $T_2 = 3mv^2/4$.
4-14. Легкая мишень укреплена на боковой поверхности вертикально расположенного неподвижного однородного цилиндра массой M, который может свободно вращаться вокруг оси, проходящей через его центр. После попадания в мишень пули массой m, летящей по касательной к поверхности цилиндра, линейная скорость точек на боковой поверхности цилиндра составляет V. Вычислить скорость v пули, если она застряла в мишени.
Ответ: $v = (1 + M/2m)V$.

Контрольные задачи

4-15. В лодке массой m_1 находится человек массой m_2. Лодка плывет по неподвижной воде со скоростью v_1. Чтобы нырнуть в воду, человек прыгает вперед по ходу лодки в горизонтальном направлении со скоростью v_2 относительно лодки. Найти скорость u лодки после прыжка человека.
4-16. Конькобежец массой m_2, стоя на льду, бросил вперед гирю массой m_1, вследствие чего покатился назад со скоростью v_2. Определить работу, которую совершил конькобежец при броске.
4-17. Тонкий прямой стержень длиной l прикреплен к горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень отклонили на угол φ от положения равновесия и отпустили. Определить линейную скорость нижнего конца стержня в момент прохождения через положение равновесия.

4-18. На нити подвешен груз. В него попадает пуля, летящая горизонтально. Возможны три случая: *а)* пуля, пробив груз и сохранив часть скорости, летит дальше, *б)* пуля застревает в грузе, *в)* пуля после удара отскакивает от груза. В каком случае груз отклонится на наибольший, а в каком случае - на наименьший угол от вертикали? Ответ обосновать прямым расчетом.

4-19. Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно оси составляют I_1 и I_2, а угловые скорости - ω_1 и ω_2. После падения верхнего диска на нижний, оба диска стали вращаться как единое целое. Найти угловую скорость дисков и работу, которую совершили силы трения.

4-20. Платформа в виде однородного диска массой M вращается с частотой n_1. На краю платформы стоит человек массой m (его момент инерции можно рассчитывать, как для материальной точки). С какой частотой n_2 будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Силы трения в оси платформы пренебрежимо малы.

4-21. Тяжелый шарик массой m подвешен на нити, которая может выдержать нагрузку $2mg$. На какой угол α от положения равновесия нужно отклонить шарик, чтобы он оборвал нить?

4-22. Два шара одинаковой массы сталкиваются, причем удар абсолютно упругий, но не центральный. Один шар до удара покоился. Проскальзывания шаров по поверхности нет. Показать, что после удара векторы скоростей составят прямой угол.

4-23. Однородный тонкий стержень длиной l , поставленный вертикально, падает на пол. Какую угловую и линейную скорости будет иметь в конце падения середина стержня? Трение о пол таково, что нижний конец стержня не проскальзывает.

4-24. Два абсолютно неупругих шарика массами m_1 и m_2 одновременно начинают соскальзывать навстречу друг другу без трения и вращения с двух горок, имеющих одинаковую форму и высоту h. Найти на какую высоту h_1 поднимется слипшийся шар по одной из горок.

4-25. Снаряд массой m в верхней точке траектории обладал скоростью v. Он разорвался на две части. Меньшая часть m_1 получила скорость u_1 в прежнем направлении. Найти скорость u_2 большей части.

4-26. Неподвижный атом распадается на два осколка массами m_1 и m_2. Определить кинетическую энергию T_2 второго осколка, если известна кинетическая энергия T_1 первого.