Занятие 2
Тема: Динамика прямолинейного движения.
Цель: Основной закон динамики, масса, классификация сил, импульс.

Краткая теория

• Основной закон динамики.

Основным в динамике, то есть при описании движения тел под действием приложенных к ним сил, является **II закон Ньютона**, записываемый в виде

$\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$, где $\vec{a}$ - ускорение, которое приобретает тело массой m под действием силы $\vec{F}$, являющейся равнодействующей всех приложенных к телу сил. Векторное равенство содержит в себе три уравнения-проекции на оси системы координат: $a_x = \dfrac{F_x}{m}$, $a_y = \dfrac{F_y}{m}$, $a_z = \dfrac{F_z}{m}$.

II закон Ньютона можно сформулировать иначе: $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$, т.к. ускорение есть результат дифференцирования по времени вектора скорости $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Если ввести **импульс** тела $\vec{p} = m\vec{v}$, то возможна еще одна форма записи: $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, откуда возникает связь изменения импульса тела и времени действия силы: $d\vec{p} = \vec{F}dt$. Выражение, стоящее справа носит название **импульса силы**.

• Наиболее распространены и чаще других встречаются следующие **силы**.

Сила **тяжести.** Эта сила направлена вертикально вниз, ее модуль: $F = mg$, где
g = 9,8 м/с^2 – ускорение свободного падения. Согласно закону всемирного тяготения на любое тело массы m вблизи поверхности Земли действует **гравитационная сила** $F_{гр} = G\dfrac{m \cdot M_з}{R^2}$, откуда $g = G\dfrac{M_з}{R^2}$, где G - гравитационная постоянная, $M_з$ - масса Земли, R - радиус Земли.

Сила **трения** скольжения: $F = \mu N$, где μ - коэффициент трения, N - сила нормального давления, прижимающая друг к другу трущиеся поверхности тел. Сила трения, всегда направлена противоположно вектору скорости тела, на которое она действует.

Сила **упругости**: $F = - k\Delta x$, где k – коэффициент упругости, Δx – величина упругой деформации тела. Минус в правой части выражения означает, что сила упругости направлена противоположно деформации.

Для полноты изложения следует упомянуть **силу кулоновского взаимодействия** электрических зарядов, речь о которой пойдет во второй части пособия.

Примеры решения задач

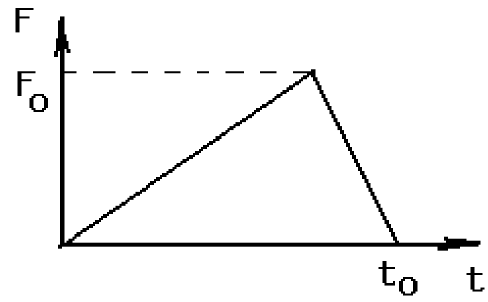
2-1. Сила трения лодки массой m о воду прямо пропорциональна квадрату ее скорости (коэффициент пропорциональности k). Лодка двигалась со скоростью v_0 . Найти время, в течение которого скорость лодки уменьшится в два раза.

• Для описания движения лодки используем II закон Ньютона, учтя, что $F_{тр} = -kv^2$. Получим $ma = -kv^2$ или $m\dfrac{dv}{dt} = -kv^2$. Перепишем это уравнение, поместив все величины, зависящие от скорости, в одну часть, от времени – в другую: $\dfrac{dv}{v^2} = -\dfrac{k}{m}dt$. После интегрирования левой и правой частей $\displaystyle\int\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\int dt$ получим $-\dfrac{1}{v} = -\dfrac{k}{m}t + C$, где C – постоянная интегрирования. Она может быть вычислена из условия, что в момент времени $t = 0$ скорость лодки составляла v_0 . После подстановки находим $C = -\dfrac{1}{v_0}$, откуда $-\dfrac{1}{v} = -\dfrac{k}{m}t - \dfrac{1}{v_0}$.

Для определения времени, за которое скорость лодки уменьшается в два раза, подставляем в полученное уравнение $v = \dfrac{v_0}{2}$, откуда $t = \dfrac{m}{kv_0}$.

Ответ: $t = \dfrac{m}{kv_0}$.

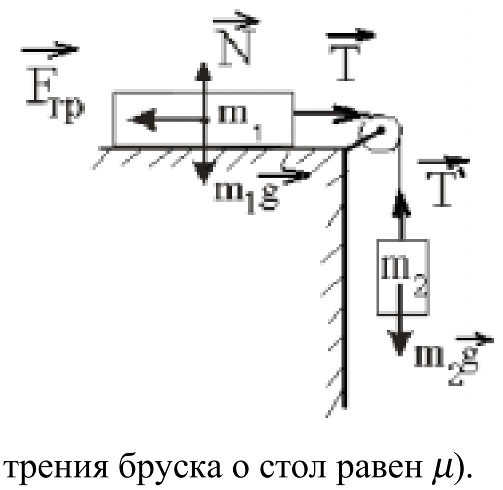
2-2. Сила, действующая на материальную точку массой m, вначале возрастает до максимального значения F_0, а затем убывает до нуля. Изменение силы с течением времени происходит по линейному закону. Полное время движения составляет t_0. Какую скорость приобретет тело к концу действия силы? Трением пренебречь.



• Применим II закон Ньютона $m\dfrac{dv}{dt} = F(t)$ и перепишем его в виде $dv = \dfrac{1}{m}F(t)dt$. Такая форма записи свидетельствует о том, что изменение скорости тела есть следствие приложенного импульса силы. Для определения скорости в момент времени t_0 необходимо проинтегрировать левую и правую части уравнения от момента времени 0 до t_0, учитывая при этом, что скорость меняется от 0 до v: $v\,\Big|_0^v = \dfrac{1}{m}\int\limits_0^{t_0} F(t)dt$. Левая часть даст v, а интеграл от силы по времени имеет геометрический смысл площади под графиком функции $F(t)$ на промежутке от 0 до t_0. График искомой зависимости имеет вид треугольника, площадь которого равна половине произведения основания (t_0) на высоту (F_0), то есть $\frac{1}{2}F_0t_0$.

Отсюда имеем ответ $v = \dfrac{F_0t_0}{2m}$.

2-3. На горизонтальном столе лежит брусок массой m_1, который может скользить по столу. К нему привязана перекинутая через блок, массой которого можно пренебречь, невесомая нерастяжимая нить, на другом конце которой закреплен груз массой m_2. С каким ускорением будут двигаться тела? Рассмотреть два случая: 1) трение о стол отсутствует, 2) трение о стол присутствует (коэффициент трения бруска о стол равен μ).



• Рассмотрим обе ситуации по отдельности.

1). Трения первого тела о стол нет (на рисунке $F_{тр} = 0$). Составим уравнение второго закона Ньютона для каждого тела. Ввиду нерастяжимости нити ускорения обоих грузов a будут одинаковы по модулю, но вектора ускорений направлены по-разному: горизонтально вправо для первого тела и вертикально вниз для второго.

Первое тело. По горизонтали действует только сила натяжения нити T : $m_1 a = T$.

По вертикали сила тяжести уравновешена реакцией опоры:

$m_1 g - N = 0$.

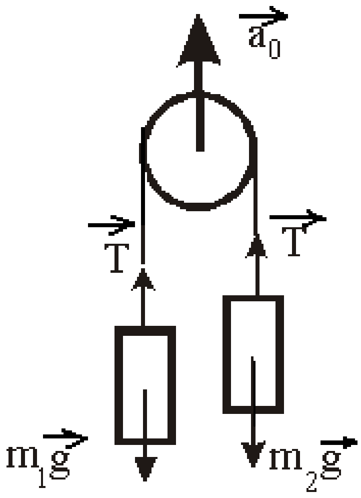
Второе тело. По вертикали действуют сила тяжести и сила натяжения: $m_2 g - T' = m_2 a$.

Необходимо учесть также, что по причине невесомости нити и блока $T = T'$. Полученные уравнения полностью описывают движение тел, осталось решить получившуюся систему уравнений относительно ускорения. Складывая первое и третье уравнения, получим $(m_1 + m_2)a = m_2 g$. В результате $a = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2}$.

2). Есть трение первого бруска о стол. На первое тело дополнительно действует горизонтальная сила $F_{тр} = \mu m_1 g$. Второй закон Ньютона дает для каждого из тел: $m_1 a = T - \mu m_1 g$, $m_2 g - T' = m_2 a$.

Решение получившейся системы: $a = \dfrac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g$.

Ответ: 1) $a = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2}$, 2) $a = \dfrac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g$.



2-4. Через блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, на концах которой подвешены грузы массами m_1 и m_2. Блок начинают поднимать вертикально вверх с ускорением a_0 относительно земли. Полагая, что нить скользит по блоку без трения, найти ускорения грузов относительно земли.

• Учтем, что при движении нити по блоку без трения блок не вращается, следовательно, сила натяжения нити T слева и справа от блока одинакова. (В реальной ситуации можно считать массу блока очень малой.) Запишем второй закон Ньютона для обоих грузов в проекции на вертикальную ось:

$m_1 a_1 = T - m_1 g, \quad m_2 a_2 = T - m_2 g$.

Третье недостающее уравнение можно получить, если использовать кинематическую связь между ускорениями грузов и блока. Действительно, нить нерастяжима и не провисает. Если первый груз поднимется относительно блока на расстояние y_1, то на такое же расстояние $y_2 = -y_1$ относительно блока опустится второй груз, а вместе с блоком они поднимутся на расстояние y_0. Относительно поверхности земли первый груз сместится на расстояние $y_1 + y_0$, второй – на расстояние $y_2 + y_0 = -y_1 + y_0$. Ускорение первого груза относительно земли $a_1 = \dfrac{d^2(y_1 + y_0)}{dt^2} = a_1' + a_0$, второго - $a_2 = \dfrac{d^2(y_2 + y_0)}{dt^2} = a_2' + a_0 = -a_1' + a_0$, где a_1' и a_2' - ускорения грузов относительно блока. Исключив их из уравнений, получаем искомую связь: $a_1 + a_2 = 2a_0$. Исключаем из динамических уравнений силу натяжения нити *T*: $m_2 a_2 - m_1 a_1 = (m_1 - m_2)g$ и используем полученную кинематическую связь:

$2m_2 a_0 - (m_1 + m_2)a_1 = (m_2 - m_1)g$.

Ответ: $a_1 = \dfrac{2m_2 a_0 + (m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)}, \quad a_2 = \dfrac{2m_1 a_0 + (m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)}$.

2-5. На горизонтальном столе расположен куб, который необходимо сдвинуть с места. Под каким углом к горизонту надо приложить силу *F*, чтобы она была минимальной? Коэффициент трения куба о стол μ .

• Используем II закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси системы координат. Горизонтальная составляющая силы $F\cos\alpha$ за вычетом силы трения $F_{тр} = \mu N$ (*N* - сила нормального давления) дает ускорение, которое при минимальной силе составляет нуль, свидетельствующий о том, что тело все таки сдвинулось. Вертикальная составляющая силы $F\sin\alpha$ уменьшает силу тяжести *mg*, действующую на кубик, до силы нормального давления *N*. Запишем обе проекции:

$F\cos\alpha - F_{тр} = ma = 0$ и $mg - F\sin\alpha = N$. Совместное решение уравнений дает: $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$. Сила минимальна тогда, когда

знаменатель, как функция угла α, максимален. Экстремум функции (в нашем случае максимум) расположен там, где ее производная равна нулю: $\frac{d}{d\alpha}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = 0$. После дифференцирования $-\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0$. Следовательно, $\mu = tg\alpha$, откуда $\alpha = arctg\mu$.
Ответ: $\alpha = arctg\mu$.

2-6. На горизонтальном столе лежит брусок массой m. В момент времени $t = 0$ к нему под углом α к горизонту прикладывают силу F, зависящую от времени по закону $F = kt$, где k - постоянная. Определить скорость бруска в момент отрыва, а также путь, который он пройдет к этому моменту.

• Уравнение движения по горизонтали: $F\cos\alpha = ma$. Отрыв от стола свидетельствует о том, что между бруском и столом нет взаимодействия, и сила нормального давления бруска на стол составляет нуль. Тогда условие отрыва отвечает равенству двух сил – вертикальной проекции действующей силы и силы тяжести: $F\sin\alpha = mg$.

Решая оба уравнения, находим ускорение: $a = \frac{kt\cos\alpha}{m}$.

Момент t_0 отрыва от стола: $t_0 = \frac{mg}{k\sin\alpha}$. С учетом формул кинематики можно записать выражения для скорости и пройденного расстояния как функции времени (подстановка в эти функции момента отрыва t_0 даст скорость в момент отрыва и пройденное до отрыва расстояние):

$$v = \int_0^{t_0} a\,dt = \frac{k\cos\alpha}{m}\int_0^{t_0} t\,dt = \frac{kt^2\cos\alpha}{2m}\bigg|_0^{t_0} = \frac{mg^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha} ,$$

$$s = \int_0^{t_0} v\,dt = \int_0^{t_0}\frac{kt^2\cos\alpha}{2m}dt = \frac{k\cos\alpha}{2m}\int_0^{t_0} t^2dt = \frac{k\cos\alpha}{m}\frac{t^3}{6}\bigg|_0^{t_0} = \frac{m^2g^3\cos\alpha}{6k^2\sin^3\alpha} .$$

Ответ: $v = \frac{mg^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}$, $s = \frac{m^2g^3\cos\alpha}{6k^2\sin^3\alpha}$.

2-7. Тело массой m начинает двигаться из начала координат вдоль оси x в момент времени $t = 0$. На тело действует направленная вдоль оси сила $F_x = F_0 \sin\omega t$, где F_0 и ω - постоянные. Найти скорость и положение тела в зависимости от времени.

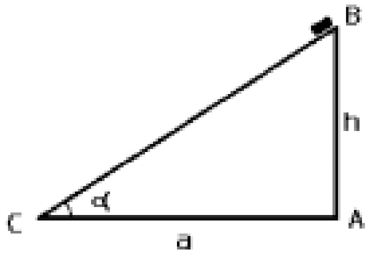
• Согласно II закону Ньютона проекция ускорение тела на ось x: $\frac{dv_x}{dt} = a_x = \frac{F_0 \sin\omega t}{m}$. Проекция скорости тела может быть найдена путем интегрирования: $v_x = \int a dt = \frac{F_0}{m}\int \sin\omega t dt = -\frac{F_0 \cos\omega t}{\omega m} + v_0$, где v_0 - постоянная интегрирования, определяемая из начального условия $v_x(t=0)=0$, которое приводит к уравнению $-\frac{F_0 \cdot 1}{\omega m} + v_0 = 0$. Следовательно, $v_0 = \frac{F_0}{\omega m}$, а скорость $v_x = \frac{F_0}{\omega m}(1-\cos\omega t)$. Анализируя полученное выражение, можно сделать вывод о том, что скорость тела является периодически осциллирующей функцией времени. С периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (это период $\cos\omega t$) скорость изменяется от 0 до $\frac{2F_0}{\omega m}$. Учтем этот факт при анализе окончательного результата.

Поскольку $v_x = \frac{dx}{dt}$, координату также можно найти интегрированием: $x = \int v dt = \frac{F_0}{\omega m}\int (1-\cos\omega t)dt = \frac{F_0}{\omega m} t - \frac{F_0}{\omega^2 m}\sin\omega t + x_0$, где x_0 - новая постоянная интегрирования. Подстановка начального условия, а именно задание положения тела в нулевой момент времени в начале координат, дает $x_0 = 0$. Координата $x = \frac{F_0}{\omega^2 m}(\omega t - \sin\omega t)$ представляет собой растущую положительную осциллирующую функцию. В этом случае тело не имеет точек поворота назад, а значит, все время движется в одном направлении, поэтому положительная координата тела в некоторый момент времени дает также и путь, пройденный телом к этому моменту времени. Этот вывод станет понятен, если вспомнить, что проекция скорости тела в любой момент времени неотрицательна.

При больших временах t полученное выражение превращается в $x = \frac{F_0}{\omega m} t$.

Ответ: $x = \frac{F_0}{\omega^2 m}(\omega t - \sin\omega t)$.

Задачи для самостоятельного решения



2-8. По наклонной плоскости из точки B в точку C, отстоящую от точки A на расстояние a, без начальной скорости соскальзывает тело. При какой высоте h (или угле α при вершине C) время соскальзывания минимально? Трением пренебречь.

Ответ: $h = a$, $\alpha = 45^o$.

2-9. Тело массой m начинает двигаться из начала координат в момент времени $t = 0$ под действием силы $F = F_0\cos\omega t,$ где F_0 и ω - постоянные. Найти путь, пройденный телом до первой остановки.

Ответ: $s = 2\pi F_0/m\omega^2$.

2-10. Из спортивного арбалета вертикально вверх выпущена стрела массой m со скоростью v_0. Сила трения стрелы о воздух прямо пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности k). Найти время подъема стрелы до верхней точки траектории.

Ответ: $t = \dfrac{m}{k}\ln(\dfrac{kv_0}{mg} + 1)$.

2-11. Тело массой m начинает двигаться из начала координат в момент времени $t = 0$ со скоростью v_0 под действием силы $F = kv$, где k – постоянная, v - скорость тела. Найти скорость тела и пройденный им путь в зависимости от времени.

Ответ: $v = v_0 \exp(\dfrac{kt}{m})$, $s = \dfrac{mv_0}{k}\left(\exp(\dfrac{kt}{m}) - 1\right)$.

2-12. Шарик массой m, летящий со скоростью v, ударился о стену. Определить импульс p, полученный стеной, если вектор скорости шарика направлен под углом α к поверхности стены. Рассмотреть два случая: 1) шарик абсолютно упругий (бильярдный), 2) шарик абсолютно неупругий (пластилиновый).

Ответ: 1) $2mv\sin\alpha$; 2) $mv\sin\alpha$.

2-13. Брусок массой m_2 может без трения скользить по горизонтальной поверхности. На нем лежит брусок массой m_1. Коэффициент трения между брусками μ . Определить максимальное значение силы, приложенной в нижнему бруску, при котором начнется соскальзывание верхнего бруска.

Ответ: $F = \mu g(m_1 + m_2)$.

2-14. Молот для вбивания свай массой m падает с высоты h. Определить среднюю силу удара, если длительность удара равна τ.

Ответ: $\langle F \rangle = \frac{m}{\tau}\sqrt{2gh}$.

Контрольные задачи

2-15. Однородный канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола. Он начинает соскальзывать со стола тогда, когда длина свешивающейся части составляет 1/4 его длины. Чему равен коэффициент трения каната о стол?

2-16. Из корзины воздушного шара без начальной скорости опустили вниз стальной шарик массой m. Сила трения шарика о воздух прямо пропорциональна его скорости (коэффициент пропорциональности k). Найти через какое время ускорение шарика окажется в три раза меньше ускорения свободного падения.

2-17. Пуля, пробив доску, изменила свою скорость от v_0 до v_1 . Считая силу сопротивления движению прямо пропорциональной квадрату скорости, найти среднюю скорость пули в доске.

2-18. По наклонной плоскости длиной l, образующей угол α с горизонтом, за время τ соскальзывает тело. Определить коэффициент трения тела о плоскость.

2-19. На гладком столе лежит брусок массой M. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные невесомые блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. На концах шнуров закреплены гири массами m_1 и m_2 . Найти ускорение, с которым движется брусок, и силы натяжения шнуров.

2-20. Брусок лежит на наклонной плоскости (ее угол с горизонтом α), на вершине которой установлен невесомый блок. К бруску прикреплена нить, перекинутая через блок, на противоположном конце нити висит груз. Отношение масс груза и бруска $m_1/m_2 = \eta$. Определить величину и направление вектора ускорения бруска, если $\eta > \sin\alpha$.