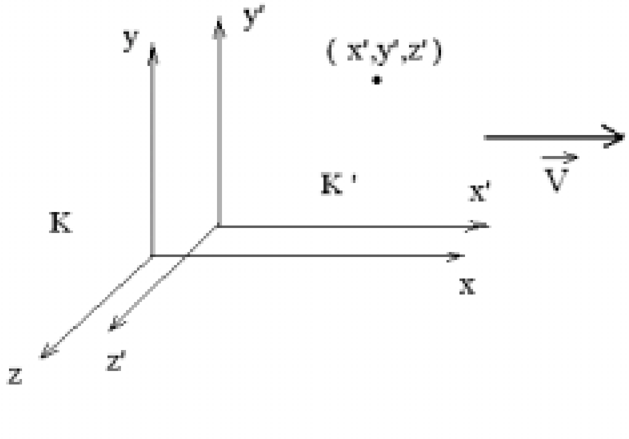
Занятие 5
Тема: Релятивистская механика.
Цель: Преобразования Лоренца. Сложение скоростей, сокращение длины, замедление времени. Релятивистские энергия и импульс, связь между ними.

Краткая теория

• Классическая механика Ньютона описывает круг явлений только при скоростях, которые много меньше скорости света в вакууме *c*, составляющей $3\cdot10^8$ м/с. При скоростях сравнимых со скоростью света адекватное физическое описание дает теория относительности, или **релятивистская механика**, основанная на двух постулатах Эйнштейна. Они формулируются следующим образом.

Все физические явления материального мира одинаковым образом протекают в любых инерциальных системах отсчета, другими словами, никакими физическими экспериментами невозможно установить движется инерциальная система отсчета или покоится.
(Это означает, что в релятивистской механике, как и в классической механике, являющейся пределом малых скоростей, выполнены законы сохранения импульса и механической энергии. Более того, в природе существует предельная скорость движения тел и передачи информации с помощью материальных носителей сигналов – это скорость света в вакууме.)
Многообразные и порой сложные для понимания выводы теории относительности есть простое следствие указанных постулатов.



• **Преобразования Лоренца** описывают изменения координат и времени при рассмотрении одних и тех же событий в различных инерциальных системах отсчета K и K′. В качестве систем K и K′ выбраны такие системы, одна из которых K условно неподвижна, а другая K′ движется вправо вдоль оси x с постоянной скоростью V, сравнимой со скоростью света. Часы систем отсчета идут синхронно, оси координат параллельны между собой, а в нулевой момент времени начала координат совпадали. Если в пространстве имеется материальная точка, координаты которой измерены в системе K′ в момент времени t' и составляют x′, y′, z′, то для наблюдателя в системе K как момент измерения t, так и координаты точки x, y, z другие:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x'+Vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t'+\frac{V}{c^2}x') \end{aligned}$$

, где $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$ - релятивистский множитель, при малых скоростях стремящийся к единице. Если наблюдателя поместить в систему K′, то система K по отношению к нему движется со скоростью $-V$, направленной в сторону отрицательных значений оси x′. Для преобразования координат и времени, измеренных в системе K, наблюдатель в системе K′ получит сходные выражения:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - \frac{V}{c^2}x) \end{aligned}.$$

• **Преобразование скоростей.** Если материальная точка движется в системе K′ с известной скоростью $\vec{u}'(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}) = u'_x \vec{i}' + u'_y \vec{j}' + u'_z \vec{k}'$, то скорость ее движения в системе K $\vec{u}(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ может быть найдена с помощью преобразований Лоренца:

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \dfrac{Vu'_x}{c^2}} \quad , u_y = \frac{u'_y}{1 + \dfrac{Vu'_x}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \quad , u_z = \frac{u'_z}{1 + \dfrac{Vu'_x}{c^2}}\sqrt{1+\frac{V^2}{c^2}} \ .$$

• Следствия из преобразований Лоренца.

Сокращение длины. Пусть горизонтальный размер неподвижного в системе K′ тела измерен по оси x′ и составляет $l_{пок}$. Наблюдатель из системы K в некоторый момент времени измеряет x-овые координаты концов тела, чтобы получить его горизонтальный размер $l_{движ}$ в системе

К. Оказывается, что $l_{движ} = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\, l_{пок}$. Происходит лоренцево сокращение продольного размера тела, или сокращение длины.

Замедление времени. Пусть в системе К′ закреплены часы, которые отсчитали промежуток времени $t_{соб}$. Наблюдатель, находящийся в системе К, по своим часам измерит соответствующий промежуток времени $t_{движ}$, связанный с промежутком в системе К′: $t_{движ} = \frac{t_{соб}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$.

Промежуток времени между двумя событиями в системе К оказывается больше. Это эффект замедления времени, так как увеличение времени свидетельствует о меньшей скорости процессов идущих в течение указанного промежутка, следовательно, время отсчитывается как бы «медленнее».

Относительность одновременности. Пусть в системе К′ в двух точках оси х′ одновременно происходят два независимых события, причем их одновременность установлена по часам системы К. Если наблюдатель находится в системе К′, то для него события окажутся неодновременными: их разделяет промежуток времени $\Delta t' = \frac{V \cdot \Delta x'}{c^2}$, где $\Delta x'$ – расстояние между точками, в которых произошли события.

• Релятивистская динамика.

В теории относительности так же, как в классической механике, вводятся и рассматриваются различные физические характеристики тел: сила, ускорение, энергия и другие. Однако выводы теории относительности носят более общий характер: как предельный случай малых скоростей из них следуют результаты механики Ньютона.

Релятивистский импульс тела в системе К: $\vec{p} = \gamma\, m_0 \vec{u}$, где m_0 – масса покоя тела (соответствует ситуации, когда тело покоится), $\vec{u}$ - вектор скорости тела, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ - релятивистский множитель.

Релятивистская энергия тела в системе К: $E = \gamma\, m_0 c^2$.

Исключив из двух предыдущих соотношений скорость u , входящую как в импульс, так и в множитель γ, можно найти связь энергии тела и его импульса:

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2 .$$

Из этого соотношения следует, что даже в состоянии покоя ($p = 0$) неподвижное тело обладает энергией $E = m_0c^2$, которая носит название **энергия покоя**. Эта энергия зависит только от массы тела, а полученное выражение указывает на ее тождественную связь с массой. **Кинетическая энергия** T тела может быть представлена как превышение полной энергии тела над его энергией покоя, отсюда

$$T = E - m_0c^2 .$$

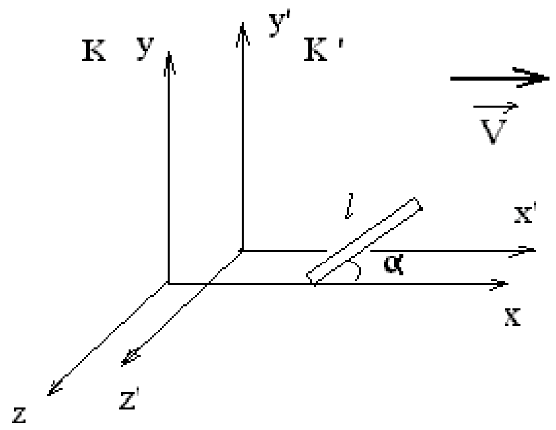
Воспользовавшись этим определением, легко установить связь кинетической энергии и импульса тела:

$$p^2 = T\left(\frac{T}{c^2} + 2m_0\right) .$$

Примеры решения задач

5-1. Стержень длиной l_0 направлен под углом α к оси x системы К. Какую длину будет иметь стержень в системе К′, двигающейся со скоростью V в положительном направлении оси x системы К?

• Обозначим координаты левого и правого концов стержня в системах К и К′ как (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_1', y_1'), (x_2', y_2') соответственно. В системе К проекции стержня на оси x и y составляют $x_2 - x_1 = l\cos\alpha$ и $y_2 - y_1 = l\sin\alpha$, при этом длина стержня может быть найдена через его проекции как $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



Аналогично в системе К′ длина стержня $l' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$. Для ее определения необходимо знать координаты концов стержня, то есть измерить их в один момент времени t' по часам системы К′. Преобразования Лоренца дают:

$x_1 = \gamma(x_1'+Vt')$
$x_2 = \gamma(x_2'+Vt')$
$y_1 = y_1'$
$y_2' = y_1'$

Из них можно получить связи: $x_2'-x_1' = \frac{1}{\gamma}(x_2 - x_1) = l\cos\alpha\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ и $y_2'-y_1' = y_2 - y_1 = l\sin\alpha$, откуда $l' = l\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}\cos^2\alpha}$. Стержень стал короче, что и следовало ожидать из-за лоренцева сокращения его продольного размера.

Ответ: $l' = l\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}\cos^2\alpha}$.

5-2. Два фотона движутся навстречу друг другу. Какова относительная скорость одного фотона в системе отсчета, связанной со вторым фотоном?

• Систему К будем считать лабораторной, а систему К′ свяжем с первым фотоном так, чтобы его скорость была направлены в положительном направлении оси x. Воспользуемся преобразованиями скоростей $u_x = \frac{u'_x + V}{1+\frac{Vu'_x}{c^2}}$, где u_x = -c – скорость второго фотона в системе К, u_x' – скорость второго фотона в системе К′, $V = c$ – скорость первого фотона (и системы К′) в системе К. Будем рассматривать предыдущее выражение как уравнение относительно u_x' и найдем $u_x' = \frac{u_x - V}{1-\frac{Vu_x}{c^2}}$. (Отсюда видно, что переход из системы К в систему К′ осуществляется заменой V на $-V$, что совершенно понятно, так как при переходе знак относительной скорости систем меняется на обратный.) Подстановка значений дает $u_x' = -c$, то есть полученное значение относительной скорости фотонов, как и следовало ожидать, не превышает скорости света.

Ответ: -c.

5-3. Частица вылетает со скоростью u под углом α к оси x системы К. Под каким углом α' к оси x′ системы К′ движется частица? Какова ее скорость u' в этой системе?

• В системе К проекции вектора скорости на оси x и y составляют $u_x = u\cos\alpha$, $u_y = u\sin\alpha$. Они задают модуль скорости $u = \sqrt{u_x^{\ 2} + u_y^{\ 2}}$ и угол наклона вектора к оси x : $\alpha = arctg\dfrac{u_y}{u_x}$. Аналогичная связь между искомыми величинами и проекциями вектора скорости существует в системе К′. Поэтому воспользуемся преобразованием скоростей с учетом результатов решения предыдущей задачи:

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}} = \frac{u\cos\alpha - V}{1 - \frac{Vu\cos\alpha}{c^2}} \quad , \quad u'_y = \frac{u_y}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{u\sin\alpha}{1 - \frac{Vu\cos\alpha}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad .$$

В системе К′ угол наклона вектора скорости к оси x составит $\alpha' = arctg\dfrac{u_{y'}}{u_x{}'} = arctg(\dfrac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha - V}\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}})$, а модуль вектора скорости $u' = \dfrac{\sqrt{(u\cos\alpha - V)^2 + (1 - V^2/c^2)u^2\sin^2\alpha}}{1 - \frac{Vu\cos\alpha}{c^2}}$. В пределе малых скоростей ($V/c \to 0$) оба результата совпадают с теми, которые можно получить в классической механике.

Ответ: $\alpha' = arctg(\dfrac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha - V}\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}})$, $u' = \dfrac{\sqrt{(u\cos\alpha - V)^2 + (1 - V^2/c^2)u^2\sin^2\alpha}}{1 - \frac{Vu\cos\alpha}{c^2}}$.

5-4. Собственное время жизни нестабильной частицы составляет τ_0 . Вычислить путь частицы до распада в лабораторной системе отсчета, если время жизни частицы в ней увеличивается до τ .

• Систему К′ свяжем с частицей, в которой она окажется покоящейся, значит, скорость частицы совпадает со скоростью этой системы относительно неподвижной лабораторной системы К. За время τ частица вместе с системой К′ пройдет в системе К путь $s = V\tau$. Следовательно, необходимо найти скорость V частицы в лабораторной системе. Эффект замедления времени дает связь: $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$, откуда

$V = c\sqrt{1-\dfrac{\tau_0{}^2}{\tau^2}}$. Пройденный путь $s = c\sqrt{\tau^2 - \tau_0{}^2}$.

Ответ: $s = c\sqrt{\tau^2 - \tau_0{}^2}$.

5-5. Движущаяся частица обладает импульсом p, направленным вдоль оси x, и полной энергией E. Найти импульс и энергию частицы в системе отсчета, движущейся со скоростью V вдоль той же оси x. Каков будет результат, если вместо частицы движется фотон, то есть квант излучения?

• В системе К импульс частицы $p_x = \gamma\, m_0 u$ и ее энергия $E = \gamma\, m_0 c^2$, где $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$. В системе К′ эти величины выражаются аналогично: $p'_x = \gamma'\, m_0 u'$ и $E' = \gamma' m_0 c^2$, где $\gamma' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}}$. Поскольку u и u' являются проекциями скорости частицы на оси x и x′ соответственно, они меняются при переходе из одной системы отсчета в другую, что приводит к изменению как импульса, так и энергии частицы в разных системах отсчета. Вид скоростей преобразования известен из решения предыдущих задач : $u' = \dfrac{u-V}{1-\dfrac{Vu}{c^2}}$. Используем это для того, чтобы переписать $\dfrac{1}{\gamma'^2} = 1 - \dfrac{u'^2}{c^2}$:

$$1-\frac{u'^2}{c^2}=\left(1-\frac{u'}{c}\right)\left(1+\frac{u'}{c}\right)=\left(1-\frac{u-V}{c(1-\frac{Vu}{c^2})}\right)\left(1+\frac{u-V}{c(1-\frac{Vu}{c^2})}\right)=\left(\frac{(1-\frac{u}{c})(1+\frac{V}{c})}{1-\frac{Vu}{c^2}}\right)\left(\frac{(1+\frac{u}{c})(1-\frac{V}{c})}{1-\frac{Vu}{c^2}}\right)=$$

$$=\frac{(1-\frac{u^2}{c^2})(1+\frac{V^2}{c^2})}{(1-\frac{Vu}{c^2})^2}\quad .$$

Затем подставим γ' в выражения для p'_x и E':

$$p'_x=\frac{\frac{m_0(u-V)}{1-\frac{uV}{c^2}}}{\sqrt{\frac{(1-\frac{u^2}{c^2})(1-\frac{V^2}{c^2})}{(1-\frac{uV}{c^2})^2}}}=\frac{\frac{m_0u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-\frac{m_0V}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{p_x-\frac{EV}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\ ,$$

$$E'=\frac{m_0c^2}{\sqrt{\frac{(1-\frac{u^2}{c^2})(1-\frac{V^2}{c^2})}{(1-\frac{uV}{c^2})^2}}}=\frac{\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-\frac{m_0uV}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{E-p_xV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\quad .$$

Полученные выражения дают одновременное преобразование импульса и энергии частицы при описании ее свойств из другой инерциальной системы отсчета, если значения этих величин известны в заданной системе. Оба преобразования имеют общий смысл и могут использоваться при решении различных задач.

Используя полученные преобразования, можно рассмотреть ситуацию с фотоном, частицей, масса покоя которой равна нулю, так как скорость его движения равна скорости света. В этом случае энергия фотона E и его импульс p связаны между собой соотношением $E = pc$, откуда

$$E'=\frac{E-pV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{E-\frac{EV}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=E\sqrt{\frac{1-\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}}}\quad .$$

Ответ: $p'_x = \dfrac{p_x - \dfrac{EV}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$, $E' = \dfrac{E - p_x V}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$, для фотона $E' = E\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{V}{c}}{1+\dfrac{V}{c}}}$.

5-6. Две одинаковые частицы, массы которых составляют m_0, движутся с одинаковыми импульсами p, направленными навстречу друг другу. Найти массу частицы, получающейся в результате неупругого соударения первоначальных частиц. Что изменится, если частицы будут двигаться во взаимно перпендикулярных направлениях?

• Воспользуемся законами сохранения импульса и энергии.

В первом случае импульс образовавшейся частицы $\vec{p}' = \vec{p} - \vec{p} = 0$ и ее энергия складывается из энергии первоначальных частиц $E' = E + E = 2E$. Релятивистская энергия каждой первоначальной частицы $E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$, образовавшейся частицы - $E'^2 = M^2c^4 + p'^2c^2 = M^2c^4$, где ее импульс $\vec{p}' = 0$,

M – масса. Значит, $M = E'/c^2$. После подстановки находим $M = 2m_0\sqrt{1+\dfrac{p^2}{m_0^2c^2}}$.

Во втором случае импульс $\vec{p}' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq 0$ (вектора $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ взаимно перпендикулярны), поэтому энергия образовавшейся частицы также другая:

$$E'^2 = M^2c^4 + \left|\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right|^2 c^2 = M^2c^4 + (\left|\vec{p}_1\right|^2 + 2(\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2) + \left|\vec{p}_2\right|^2)c^2 = M^2c^4 + 2p^2c^2$$

. Отсюда $M = \sqrt{\dfrac{E'^2}{c^4} - 2\dfrac{p^2}{c^2}}$. Энергия первоначальных частиц вычисляется как в предыдущем случае. С учетом $E' = 2E$ получим $M = 2m_0\sqrt{1+\dfrac{p^2}{2m_0^2c^2}}$.

Теперь масса образовавшейся частицы меньше, так как частица обладает импульсом $\vec{p}'$, а значит, кинетической энергией, которая не позволяет всей первоначальной энергии перейти в массу.

Ответ: $M = 2m_0\sqrt{1+\dfrac{p^2}{m_0^2c^2}}$, $M = 2m_0\sqrt{1+\dfrac{p^2}{2m_0^2c^2}}$.

Задачи для самостоятельного решения

5-7. Прямоугольный равнобедренный треугольник движется относительно лабораторной системы отсчета со скоростью V, направленной вдоль гипотенузы треугольника. Треугольник принимает вид равностороннего, определить скорость его движения.

Ответ: $V = \sqrt{\frac{2}{3}}\ c$.

5-8. Круглый диск радиусом R движется относительно наблюдателя со скоростью V , лежащей в плоскости диска. Какую форму обнаружит у диска наблюдатель?

Ответ: диск приобретет форму эллипса с полуосями R и $R\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$.

5-9. Две неподвижные в системе К частицы расположены на оси x, расстояние между ними составляет l_o. По часам системы К обе частицы одновременно распадаются. Найти скорость V системы К′, если расстояние между точками распада частиц в ней оказалось равным $2l_o$.

Ответ: $V = c\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5-10. В лабораторной системе отсчета два стержня одинаковой длины движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. В системе отсчета, связанной с одним из стержней, их длины относятся как n ($n <$ 1). Найти скорость u движения стержней в лабораторной системе.

Ответ: $u = c\sqrt{\frac{1-n}{1+n}}$.

5-11. В системе отсчета К′, движущейся относительно системы К со скоростью V, имеется частица, которая движется вдоль оси y′. Ее собственное время жизни T_o , а скорость в системе К′ составляет V'. Найти время жизни частицы по часам системы К и путь s, который она пройдет в той же системе за это время.

Ответ: $T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, $s = \sqrt{V^2 + V'^2 + \frac{V'^2 V^2}{v^2}} \cdot \frac{T_0}{\sqrt{1+\frac{V^2}{c^2}}}$.

5-12. В некоторой реакции во взаимно перпендикулярных направлениях вылетели два фотона. Найти скорость системы отсчета, в которой угол разлета фотонов составляет α .

Ответ: $V=\frac{c}{2}(\sqrt{1+4\cos\alpha}\ -1)$.

5-13. В системе отсчета, движущейся относительно лабораторной системы со скоростью $\sqrt{\frac{2}{3}}\,c$, имеется неподвижный стержень, который расположен под углом 45° к оси x′. Вдоль стержня движется частица со скоростью равной половине скорости света. Найти угол между направлением движения частицы
α_v и стержнем α_l в лабораторной системе отсчета.

Ответ: α_l - α_v = arcctg($\frac{1}{\sqrt{3}}$) – arcctg ($\sqrt{3}+4$) = 60° - 9,9° = 50,1° .

5-14. Покоящаяся частица массой M распадается на два одинаковых осколка с массами M_o. Найти импульс одного из осколков в системе отсчета, где другой осколок покоится.

Ответ: $p'_2=\frac{1}{2}Mc\sqrt{\frac{M^2}{M_0^{\ 2}}-4}$.

5-15. Из покоящегося ядра массой M вылетело два гамма-кванта (фотона) с частотами ν_1 и ν_2 под прямым углом друг к другу. Найти импульс p и массу m оставшегося ядра. (Энергия фотона E может быть найдена через его частоту ν согласно формуле Планка: $E=h\cdot\nu$, где h – постоянная Планка.)

Ответ: $p=\frac{h}{c}\sqrt{\nu_1^{\ 2}+\nu_2^{\ 2}}$, $m=M\sqrt{1-\frac{2h(\nu_1+\nu_2)}{Mc^2}}$.

5-16. Два протона, разогнанные в ускорителе до одинаковых кинетических энергий T, движутся навстречу друг другу и сталкиваются. Рассмотреть столкновение в системе отсчета, где одна из частиц покоится, чтобы определить кинетическую энергию T' второй частицы.

Ответ: $T'=E'-m_0c^2=2T(2+\frac{T}{m_0c^2})$.

5-17. На покоящуюся частицу массой M_1 налетает частица массой M_2, кинетическая энергия которой равна T_2. После столкновения частицы слипаются и двигаются как целое. Найти массу образовавшейся частицы M и ее скорость V .

Ответ: $M=(M_1+M_2)\sqrt{1+\frac{2M_1T_2}{(M_1+M_2)^2C^2}}$, $V=\frac{c\sqrt{T_2(2M_2c^2+T_2)}}{(M_1+M_2)c^2+T_2}$.

Контрольные задачи

5-18. Кубик с ребром a движется относительно наблюдателя со скоростью V, совпадающей по направлению с одним из ребер куба. Какой объем обнаружит у кубика наблюдатель?

5-19. Шар радиусом R движется относительно наблюдателя со скоростью V. Какой объем будет иметь шар?

5-20. Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями c/2. Какова относительная скорость одной частицы в системе отсчета, связанной со второй частицей?

5-21. Как изменится ход часов, движущихся относительно наблюдателя со скоростью $2c/3$?

5-22. Два стержня равной длины l_0 движутся навстречу друг другу вдоль оси x лабораторной системы отсчета. В системе отсчета, связанной с одним из стержней, промежуток времени между моментами совпадения правых, а затем левых, концов стержней составил Δt. Какова относительная скорость стержней?

5-23. Стержень параллелен оси x′ системы K′ и движется со скоростью u_y' вдоль оси y′. Сама система K′ движется со скоростью V вдоль оси x системы K. Какой угол составляет стержень с осью x в системе K?

5-24. Первоначально покоившаяся частица массой M распалась на два идентичных фрагмента с массами M_o. Найти импульс фрагментов.

5-25. Неподвижная частица распалась на три меньших частицы. Две частицы одинаковой массой M_1 разлетелись под углом θ друг к другу с одинаковыми по модулю импульсами p_1 . Масса третьей частицы равна M_2 . Определить массу M распавшейся частицы.