Приложение 1

Значения физических постоянных

Гравитационная постоянная............................$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Ускорение свободного падения............................$g = 9{,}81$ м/с^2
Число Авогадро..$N_A = 6{,}02\cdot10^{26}$ 1/кгмоль
Газовая постоянная..$R = 8{,}31$ кДж/(кгмоль·К)
Постоянная Больцмана......................................$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К
Скорость света в вакууме...................................$c = 3{,}00\cdot10^{8}$ м/с
Элементарный заряд..$e = 1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл
Масса электрона...$m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг
Удельный заряд электрона..................................$e/m = 1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг
Атомная единица массы......................................1 а.е.м. = $1{,}66\cdot10^{-27}$ кг

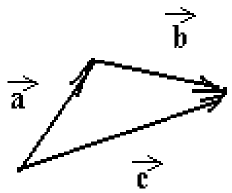
Приложение 2

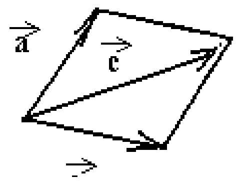
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

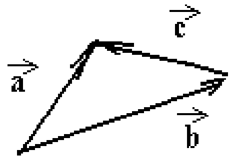
1. Векторная алгебра.

- Вектор – величина, характеризуемая значением, или модулем вектора, и направлением. Графически вектор изображают как отрезок прямой, длина которого в выбранном масштабе равна его модулю. Чтобы обозначить направление, на отрезке с одной стороны ставят стрелку, это – конец вектора. Начало вектора – с другой стороны. С векторами можно выполнять операции сложения, вычитания и умножения, причем результатом умножения может быть скаляр (в скалярном произведении) или вектор (при умножении вектора на число или в векторном произведении).

• Сложение векторов: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. Вектор суммы соединяет начало первого вектора с концом второго, если начало второго вектора приставить к концу первого. Для сложения векторов можно использовать «правило параллелограмма».







• Вычитание векторов: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$. Вектор разности соединяет конец вычитаемого вектора с концом уменьшаемого, если начала векторов приставить друг к другу.

• Умножение вектора на число (скаляр) не приводит к изменению направления вектора, если число положительное, и приводит к изменению направления на обратное, если число отрицательное. Модуль получившегося вектора равен произведению модуля первоначального вектора на абсолютную величину числа.

• Для скалярного произведения векторов используют обозначения $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$. Результат скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$, где $|\vec{a}|=a$ - модуль вектора $\vec{a}$, $|\vec{b}|=b$ - модуль вектора $\vec{b}$, α - угол между векторами, если их начала приставить друг к другу. Произведение $|\vec{a}|\cos\alpha$ можно рассматривать как проекцию вектора $\vec{a}$ на направление, задаваемое вектором $\vec{b}$. Применив для обозначения проекции a_b, перепишем скалярное произведение в виде $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_b\cdot b$. Если проектировать вектор $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$, можно получить $\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b_a$.

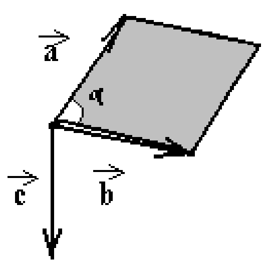
При вычислении скалярного произведения справедливы следующие правила:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a},$$

$$\{A\vec{a}\}\cdot\vec{b}=A\{\vec{a}\cdot\vec{b}\},$$

где A – постоянная,

$$\{\vec{a}+\vec{b}\}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$



• Для векторного произведения используют обозначения $\vec{a}\times\vec{b}$ или $[\vec{a},\vec{b}]$. Модуль вектора-произведения $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\alpha$, где α - угол между векторами, если их начала приставить друг к другу. Вектор-произведение перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы-сомножители $\vec{a}$ и $\vec{b}$, его направление находят по «правилу правого винта»: если первый вектор-сомножитель поворачивать ко второму и использовать это направление для вращения головки винта с правой резьбой, то направления движения (ввинчивания) всего винта определит направление вектора-произведения (на рисунке это вектор $\vec{c}$).

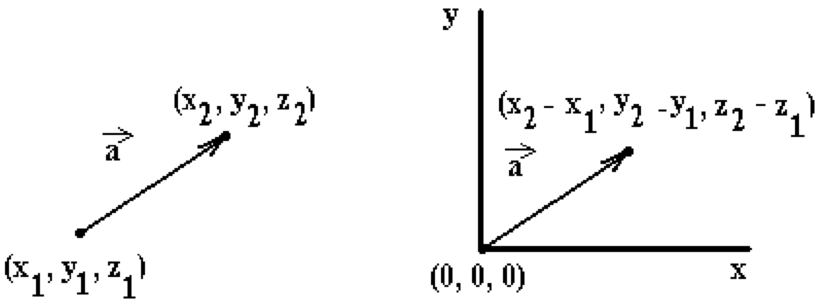
При вычислении векторного произведения справедливы следующие правила:

$$\{A\vec{a}\}\times\vec{b} = A\{\vec{a}\times\vec{b}\}, \quad \text{где } A \text{ – постоянная,}$$

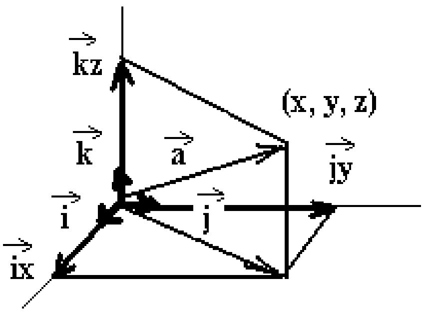
$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a},$$

$$\{\vec{a}+\vec{b}\}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$$

- В пространстве вектор можно задать двумя точками, началом и концом вектора, каждая из которых имеет три координаты. Поэтому вектор записывают как $\vec{a}(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$, где первые три координаты относятся к началу вектора, три последние – к концу. Для удобства принято помещать начало вектора в начало координат, в таком случае его записывают как $\vec{a}(x, y, z)$, где $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$ - координаты конца вектора. Такое представление вектора называют «координатным». В координатном представлении модуль вектора, то есть его длину, легко определить по теореме Пифагора: $a = |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



- Координатное представление вектора позволяет записать его в виде $\vec{a} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы, или орты, каждый



из них направлен в положительную сторону осей *x, y, z* соответственно. По модулю все орты равны единице. Справедливость координатного представления вектора иллюстрирует рисунок, из которого видно, что сложение по правилу параллелограмма трех векторов $\vec{i}x, \vec{j}y, \vec{k}z$ дает искомый вектор $\vec{a}$.

• Если векторы записать в координатном представлении как $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$, то операции с ними отвечают следующим правилам.

Сложение $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$:

$$x_3 = x_1 + x_2, \quad y_3 = y_1 + y_2, \quad z_3 = z_1 + z_2.$$

Вычитание $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$:

$$x = x_1 - x_2, \quad y = y_1 - y_2, \quad z = z_1 - z_2.$$

Умножение на число $A \cdot \vec{a} = \vec{c}$:

$$x_3 = Ax_1, \quad y_3 = Ay_1, \quad z_3 = Az_1.$$

Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Правая часть равенства есть результат учета скалярных произведений ортов, входящих в векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0.$$

Векторное произведение $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$:

$$x_3 = y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad y_3 = z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad z_3 = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Выражения координат вектора-произведения есть результат учета векторных произведений ортов, входящих в векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \quad .$$

• Пользуясь координатным представлением векторов, можно получить полезные при решении задач векторные тождества (их справедливость следует из равенства левых и правых частей выражений, вычисленных через координаты векторов):

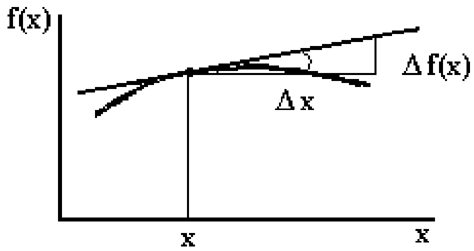
$$\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=a^2-b^2=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}),$$
$$\vec{a}\cdot\{\vec{b}\times\vec{c}\}=\vec{c}\{\vec{a}\times\vec{b}\}=\vec{b}\{\vec{c}\times\vec{a}\},$$
$$\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\{\vec{a}\cdot\vec{c}\}-\vec{c}\{\vec{a}\cdot\vec{b}\}.$$

2. Дифференцирование.

• Производной функции *f(x)* по аргументу *x* называют предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента $\Delta\ x$, вычисленный при $\Delta\ x$ стремящемся к нулю. Для обозначения производной используют запись $\frac{df(x)}{dx}$. Согласно определению $\frac{df(x)}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

• В качестве примера найдем производную от x^2:

$$\frac{d\{x^2\}}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\{2x\}+\lim_{\Delta x\to 0}\{\Delta x\}=2x.$$



• Производная имеет смысл углового коэффициента γ касательной к кривой *f(x)* в точке *x*. Действительно, из рисунка видно, что при вычислении углового коэффициента прямой $\gamma=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ предельный переход $\Delta x\to 0$ даст производную функции $\frac{df(x)}{dx}$. Зная это геометрическое свойство производной, удается отыскать точки максимума и минимума (экстремума) функции. В них касательная к кривой параллельна оси *x*, а значит, угловой коэффициент касательной и соответствующая ему производная равны нулю: $\gamma=\frac{df(x)}{dx}=0$. Решая получившееся уравнение, можно определить координаты x экстремумов функции.

• При дифференцировании выполнены следующие правила:

$$\frac{d\{A\cdot f(x)\}}{dx}=A\cdot\frac{df(x)}{dx},$$ где A – постоянная,

$$\frac{d\{f(x)+\varphi(x)\}}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{d\varphi(x)}{dx},$$

$$\frac{d\{f(x)\cdot\varphi(x)\}}{dx}=\varphi(x)\cdot\frac{df(x)}{dx}+f(x)\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

• В механике производной по времени является вектор мгновенной скорости, получаемый при дифференцировании радиус-вектора, задающего положение тела в пространстве. При дальнейшем дифференцировании по времени вектора мгновенной скорости получают вектор ускорения. На примере вычисления вектора мгновенной скорости рассмотрим, как проводить дифференцирование вектора.

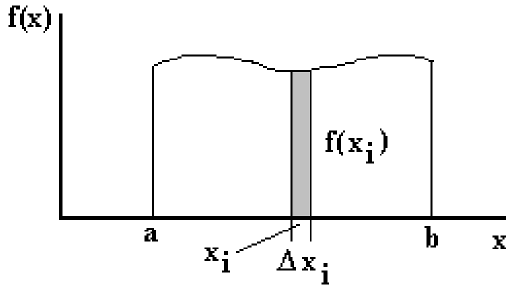
$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\vec{i}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-xr(t)}{\Delta t}+$$

$$+\vec{j}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}+\vec{k}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t+\Delta t)-zr(t)}{\Delta t}=\vec{i}\frac{dx(t)}{dt}+\vec{j}\frac{dy(t)}{dt}+\vec{k}\frac{dz(t)}{dt}.$$

Из приведенного расчета следует, что вычисление производной от векторной величины сводится к вычислению трех производных по каждой из ее координат.

3. Интегрирование.

• Определенным интегралом от функции *f(x)* в пределах от *a* до *b* называют предел интегральной суммы $\sum_a^b f(x_i)\cdot\Delta x_i$, полученный при разбиении промежутка от *a* до *b* на большое количество малых промежутков Δx_i (каждому промежутку соответствует среднее значение аргумента x_i), если количество малых промежутков бесконечно растет, чему соответствует стремление Δx_i к нулю. Для обозначения определенного интеграла используют запись $\int_a^b f(x)dx$. Согласно определению



$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_a^b f(x_i) \cdot \Delta x_i$. Определенный интеграл имеет смысл площади под графиком функции *f(x)* на промежутке [*a*, *b*].

• При вычислении определенного интеграла выполнены следующие правила:

$$\int_a^b A \cdot f(x)dx = A \cdot \int_a^b f(x)dx,$$

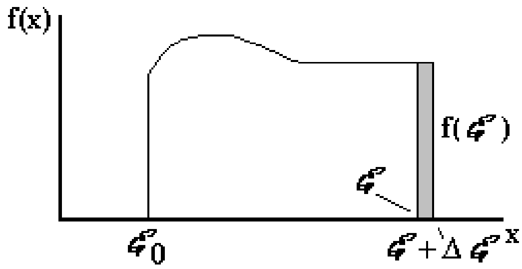
где *A* – постоянная,

$$\int_a^b \{f(x) + \varphi(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx.$$

• Если зафиксировать левый конец ξ_0 промежутка интегрирования, считая правый переменной величиной ξ, то интеграл станет функцией $F(\xi)$ переменной ξ : $\int_{\xi_0}^{\xi} f(x)dx = F(\xi)$. Вычислим производную от $F(\xi)$ по переменной ξ :

$$\frac{dF(\xi)}{d\xi} = \lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{\Delta F(\xi)}{\Delta \xi} = \lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi)}{\Delta\xi} = \lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{f(\xi) \cdot \Delta\xi}{\Delta\xi} = f(\xi),$$

поскольку приращение *ΔF* (см. рисунок) представляет собой площадь прямоугольника со сторонами $f(\xi)$ и $\Delta\xi$. При замене ξ на *x*, получается связь функции *F(x)*, называемой первообразной подынтегральной функции *f(x)*, и самой подынтегральной функции: $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$.



• Если положить, что ξ_0 находится левее *a* и *b*, то определенный интеграл от *a* до *b* можно найти как разность двух площадей под графиком *f(x)*: от ξ_0 до *b* и от ξ_0 до *a*, то есть $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$. В правой части равенства использовано принятое обозначение для разности первообразной функции на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

• Задача по вычислению определенного интеграла сведена к отысканию первообразной функции, производная от которой равна подынтегральному выражению. Интеграл $\int f(x)dx = F(x)$ носит название неопределенного интеграла и дает значение первообразной. Следует отметить, что в силу произвольности выбора ξ_0 первообразная определена с точностью до произвольной постоянной.

• Воспользуемся связью $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ и вместо первообразной подставим ее выражение через неопределенный интеграл: $\frac{d\{\int f(x)dx\}}{dx} = f(x)$. Отсюда видно, что операция дифференцирования является обратной по отношению к операции интегрирования.

• В механике определенным интегралом является вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ тела за промежуток времени от t_1 до t_2, находимый как интеграл от вектора мгновенной скорости $\vec{V}(t)$ от момента t_1 до t_2: $\Delta\vec{r} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\vec{V}(t)dt = \vec{i}\int\limits_{t_1}^{t_2}V_x(t)dt + \vec{j}\int\limits_{t_1}^{t_2}V_y(t)dt + \vec{k}\int\limits_{t_1}^{t_2}V_z(t)dt$, где $V_x(t)$, $V_y(t)$, $V_z(t)$ - координаты вектора мгновенной скорости, которые можно рассматривать как проекции вектора $\vec{V}(t)$ на координатные оси. Из приведенного расчета следует, что вычисление интеграла от векторной величины сводится к вычислению трех интегралов по каждой из ее координат.

4. Связь функции и ее производной.

• Величины $df(x)$ и dx, входящие в выражение для производной $\frac{df(x)}{dx}$, носят название дифференциала функции и дифференциала аргумента соответственно. Саму производную можно рассматривать как отношение дифференциалов, при этом, поскольку дифференциалы появляются в результате предельного перехода, они должны быть бесконечно малыми величинами.

• В случае, если производная функции заранее известна (обозначим ее как $f'(x)$), из выражения $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ можно найти $df(x) = f'(x)\cdot dx$, в котором дифференциал функции определен через дифференциал аргумента. Последнее равенство можно проинтегрировать слева и справа, чтобы найти саму функцию: $\int df(x) = \int f'(x) \cdot dx$, откуда функция $f(x) = \int f'(x) \cdot dx + C$, где C - постоянная интегрирования. В справедливости полученного выражения легко убедиться после вычисления производных от его левой и правой частей.

• Применительно к механике полученное выше соотношение можно, например, использовать при вычислении скорости тела на основе II закона Ньютона, который дает связь производной от скорости и действующей на тело силы: $\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F}(t)$. С помощью указанного соотношения находим $\vec{V}(t) = \frac{1}{m}\int \vec{F}(t)dt + \vec{C}$.

Таблица. Производные и интегралы некоторых функций.

1.1 Производные		1.2 Интегралы	
Функция *f(x)*	*Производная* $\frac{df(x)}{dx}$	*Функция* *f(x)*	*Интеграл* $\int f(x)dx$
x^n	nx^{n-1}	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\ln(ax+b)$	$\frac{a}{ax+b}$	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln(ax+b)$
e^x	e^x	e^x	e^x
e^{ax}	ae^{ax}	e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$
a^x	$a^x \ln a$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$\sin ax$	$a\cos ax$	$\sin ax$	$-\frac{1}{a}\cos ax$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\cos ax$	$-a\sin ax$	$\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$
$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|$