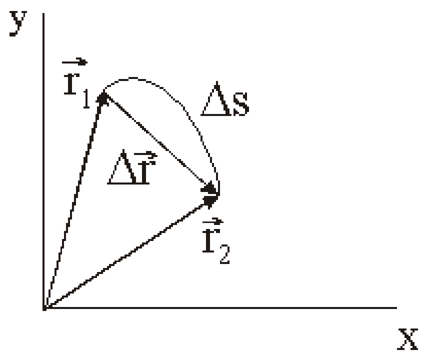
Занятие 1
Тема: Кинематика прямолинейного и криволинейного движения.
Цель: Характеристики движения тел и частей тел в пространстве. Поступательное, возвратно-поступательное, вращательное и криволинейное движения. Мгновенная и средняя скорости, ускорение. Связь угловых и линейных характеристик движения.

Краткая теория

• Положение движущейся материальной точки в пространстве можно задать с помощью **радиус-вектора**, зависящего от времени:



$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$,

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные вектора, или орты, осей декартовой (прямоугольной) системы координат. Как любое векторное равенство, предыдущее выражение можно представить в виде трех скалярных равенств, описывающих движение материальной точки по каждой из трех осей: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Часто вместо декартовой системы координат используют другие системы, например, вводят координату, отсчитанную вдоль траектории. При движении конец радиус-вектора, задающий положение материальной точки в пространстве, описывает воображаемую линию, называемую **траекторией,** по которой материальная точка движется в пространстве. Уравнение траектории $f(x, y, z) = 0$ получается при исключении времени из трех приведенных выше равенств.

Вектор **перемещения** $\Delta\vec{r}$ материальной точки за некоторый промежуток времени Δt представляет собой разность радиус-векторов ее конечного $\vec{r}_2$ и начального $\vec{r}_1$ положений: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Отсчитанное по прямой расстояние между начальным и конечным положениями с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) вычисляют согласно известной формуле:

$$\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_2)^2} .$$

Длина участка траектории, пройденного материальной точкой при ее движении за время Δt, носит название **пути** Δs.

• **Мгновенной скоростью** $\vec{v}$ материальной точки в данный момент времени называют предел отношения $\Delta\vec{r}$ к Δt (при Δt стремящемся к нулю), характеризующего скорость изменения радиус-вектора во времени. В математике эту величину называют производной и обозначают:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}' = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} =$$
$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \quad .$$

В этом выражении в правой части после знака предела указаны возможные формы записи этого предела, или производной $\frac{d\vec{r}}{dt}$ от радиус-вектора по времени.

Модуль вектора мгновенной скорости: $|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Обычно скорости определяют в системе координат, связанной с поверхностью земли. Если одно тело движется со скоростью $\vec{v}_1$, а другое – со скоростью $\vec{v}_2$, то скорость первого тела **относительно** второго находят как: $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

• **Средняя скорость**.

Средняя путевая скорость - отношение пути Δs ко времени движения Δt: $v_{ср}^{пут} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, при этом Δt имеет конечное значение и не стремится к нулю.

Средний вектор скорости – отношение перемещения $\Delta\vec{r}$ к времени движения Δt: $\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, здесь Δt также имеет конечное значение.

• **Мгновенное ускорение** $\vec{a}$ характеризует скорость изменения во времени вектора мгновенной скорости:

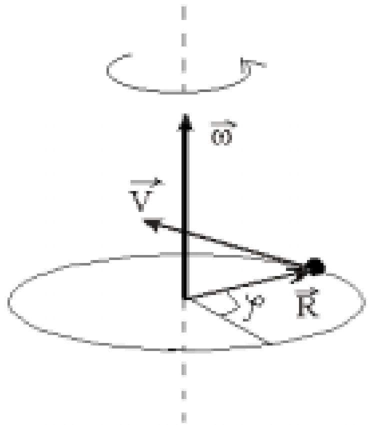
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad .$$

При криволинейном движении вектор ускорения материальной точки всегда можно разложить по двум взаимно перпендикулярным осям, а именно, по нормали, направленной к центру кривизны траектории, получив при этом **нормальное ускорение** $\vec{a}_n = a_n\vec{n}$, и вдоль касательной к траектории, получив **тангенциальное ускорение** $\vec{a}_{\tau} = a_{\tau}\vec{\tau}$**,** где $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ - единичные вектора, направленные по нормали и касательной к траектории соответственно.

Модуль **нормального ускорения**: $a_n = \dfrac{|v|^2}{R}$, модуль **тангенциального ускорения**: $a_{\tau} = \dfrac{d|v|}{dt}$, где R - **радиус кривизны** траектории в рассматриваемой точке (под радиусом кривизны понимают радиус окружности, совпадающей с траекторией на ее бесконечно малом участке, то есть в точке).

Вектор полного ускорения $\vec{a} = a_n\vec{n} + a_{\tau}\vec{\tau}$, а его модуль: $a = \sqrt{a_n{}^2 + a_{\tau}{}^2}$.

• Частный случай движения материальной точки - плоское **движение по окружности**. В этом случае положение точки задают радиусом окружности R и углом φ, отсчитываемым от некоторого положения, принятого за начальное (нулевое).



Угловая скорость: $\vec{\omega} = \dfrac{d\varphi}{dt}\vec{i}_{\varphi} = \dot{\varphi}\cdot\vec{i}_{\varphi}$,

угловое ускорение: $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\omega}{dt}\vec{i}_{\varphi} = \ddot{\varphi}\cdot\vec{i}_{\varphi}$.

В приведенных выше выражениях использован единичный вектор $\vec{i}_{\varphi}$, направленный вдоль оси вращения, при этом его направление определяют по «правилу правого винта»: вращение головки винта в направлении вращения материальной точки определяет направление «ввинчивания» винта – именно в этом направлении ориентирован вектор $\vec{i}_{\varphi}$. Необходимо помнить, что угловая скорость и угловое ускорение являются «псевдовекторами», то есть величинами похожими на вектора, так как, в отличие от «настоящих» векторов, они могут быть направлены только либо вверх, либо вниз вдоль оси вращения.

• **Связь угловых и линейных характеристик**.

Путь s, пройденный материальной точкой, которая движется по окружности, связан с углом поворота φ: $s = \varphi \cdot R$, ее линейная скорость v – с угловой ω: $v = \omega \cdot R$, тангенциальное ускорение a_τ – с угловым ускорением ε: $a_\tau = \varepsilon \cdot R$, нормальное ускорение a_n – с угловой скоростью ω: $a_n = \omega^2 \cdot R$. Те же соотношения в векторной форме принимают следующий вид:
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$, $\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}$, $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}$. Частота вращения точки n, т.е. количество совершаемых ею оборотов в единицу времени, связана с угловой скоростью ω и периодом обращения T: $\omega = 2\pi\, n = \dfrac{2\pi}{T}$.

Примеры решения задач

1-1. Автомобиль вначале покоился, а затем начал равноускоренное движение и достиг скорости v, после чего стал двигаться равнозамедленно до полной остановки. Какова средняя скорость автомобиля?

• Найдем $s_1 = a_1 t_1^2/2$ - путь, пройденный автомобилем за время t_1 при движении с ускорением a_1 от нулевой начальной скорости до скорости $v = a_1 t_1$. Найдем $s_2 = a_2 t_2^2/2$ - путь, пройденный автомобилем за время t_2 при движении с отрицательным ускорением a_2 от скорости v до полной остановки. Скорость v можно выразить через ускорение a_2: $v = a_2 t_2$.

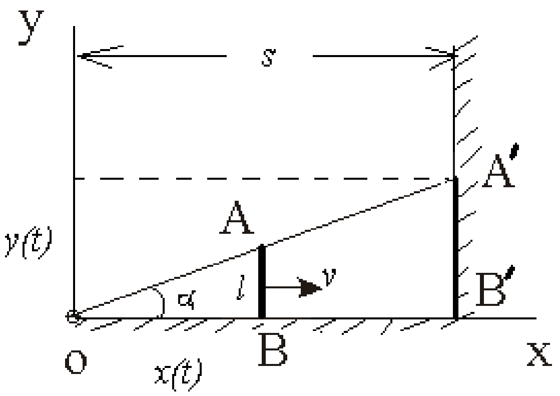
По определению средней путевой скорости она вычисляется как отношение пройденного пути к затраченному времени:

$$v_{cp} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{a_1 t_1^2 + a_2 t_2^2}{2(t_1 + t_2)} = \frac{v t_1 + v t_2}{2(t_1 + t_2)} = \frac{v}{2} .$$

Ответ: $v_{cp} = v/2$.

1-2. На горизонтальной поверхности стола на расстоянии s от вертикальной стены расположен источник света. По столу от источника к стене с постоянной скоростью v начала движение непрозрачная вертикальная перегородка высотой l, отбрасывающая тень на стену. Определить с какой зависящей от времени скоростью движется по стене край тени.

• Горизонтальную ось x системы координат направим вдоль стола, а вертикальную ось y – вверх параллельно экрану. Начало системы координат поместим в точку расположения источника. Движение по горизонтали равномерное и описывается выражением *x(t)* = *vt*. Это означает, что к моменту времени *t* перегородка пройдет от начала координат расстояние *x* = *x(t)* и займет на горизонтальной оси положение с указанной координатой. Найдем зависимость от времени *y(t)* координаты *y*. Для этого введем угол $\alpha(t)$ между горизонталью и направлением на край тени. Из треугольника OA'B': *tg*α*(t)* = *y(t)/s*. Из треугольника OAB тот же тангенс: *tg*α*(t)*= *l/x*. Приравнивая, получаем $y(t)=\dfrac{sl}{x(t)}$. Скорость перемещения края тени по экрану - ее мгновенная скорость v_y направленная вдоль оси y, т.е. производная $\dfrac{dy}{dt}$:



$$v_y=\frac{dy}{dt}=sl\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\right)=sl\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{dx}{dt}=-\frac{sl}{(vt)^2}\cdot v=-\frac{sl}{vt^2}\ .$$

Вид функциональной зависимости $v_y(t)$ - квадратичная гипербола - показывает, что движение вдоль оси y не только не равномерное, но и не равноускоренное, т.к. производная $\dfrac{dv_y}{dt}$, дающая ускорение a_y , также зависит от времени.

Ответ: $|v_y| = sl/vt^2$.

1-3. Две прямые дороги пересекаются под углом $\alpha = 60^{\circ}$. От перекрестка по этим дорогам удаляются машины: одна со скоростью v_1 = 60 км/час, другая со скоростью v_2 = 80 км/час. Машины начали движение одновременно. Определить относительную скорость u, с которой одна машина движется по отношению к другой. Рассмотреть два случая направления движения машин.

• Скорость - вектор, а это означает, что необходимо определить его модуль (величину) и направление. Величины и направления v_1 и v_2

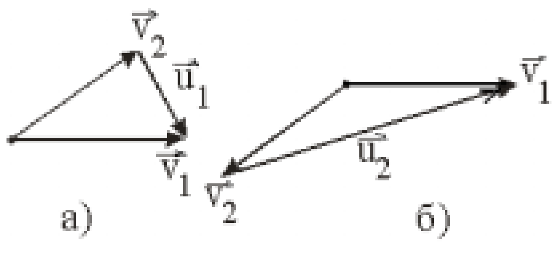
заданы относительно земли, следовательно, возможны два случая взаимного расположения этих векторов.

Относительную скорость $u_{1,2}$ находят как разность: $\vec{u}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

Направление вектора-разности определяют по правилу векторного вычитания, а его величину, модуль, – по теореме косинусов.

Для случая а):

$u_1 = (v_1^{\,2} + v_2^{\,2} - 2v_1v_2\cos 60^0)^{1/2}$ = 72 км/час.



Для случая б):

$u_2 = (v_1^{\,2} + v_2^{\,2} - 2v_1v_2\cos(120^0))^{1/2} = (v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + 2v_1v_2\cos(60^0))^{1/2}$ =

=122 км/час.

1-4. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = at - bt^3$, где a = 6 м/с, b = 0,125 м/с^2. Определить среднюю скорость точки в промежутке времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с.

• Считаем, что точка начинает двигаться в момент времени $t = 0$ из положения с координатой $x = 0$. Скорость движение вдоль оси x определяют дифференцированием по времени : $v_x = \frac{dx}{dt} = a - 3bt^2$.

Скорость v_x уменьшается со временем и обращается в нуль в момент времени t_0 , определяемым уравнением $a - 3bt_0^{\,2} = 0$, т.е. для $t_0 = (\frac{a}{3b})^{1/2} = 4\,c$.

До момента t_0 точка движется в положительном направлении оси x, потом останавливается и начинает двигаться в обратную сторону. Следовательно, характер движения точки - возвратно-поступательный. Для вычисления пройденного точкой пути определим ее координаты *x(t)* в различные моменты времени.

Для $t = 2\,c$ координата точки $x = 11$ м, для $t = 4\,c$ координата точки $x = 16$ м, для $t = 6\,c$ координата точки $x = 9$ м. Пройденный точкой

путь за время от $t_1 = 2$ *с* до $t_2 = 6$ *с* (за $\Delta t = t_2 - t_1 = 4$ с) состоит из двух частей:
x(4 с) - x(2 с) = 16 – 11 = 5 м в положительном направлении оси x и
x(4 с) - x(6 с) = 16 - 9 = 7 м в отрицательном направлении.
Всего $s = 12$ м.
Согласно определению средняя скорость – это отношение пройденного пути к затраченному времени: $v_{ср} = s/\Delta t = 3$ м/с.
Ответ: $v_{ср} = 3$ м/с

1-5. Движение материальной точки задано радиус-вектором $\vec{r} = a(\vec{i}\sin\omega t + \vec{j}\cos\omega t)$, где a - постоянная. Найти модули векторов скорости и нормального ускорения.

• Сравнивая выражение радиус-вектора, данное в условии задачи, с его координатным представлением, находим, что $x = a \cdot \sin\omega t$, $y = a \cdot \cos\omega t$. Отметим, что подобная зависимость каждой из координат от времени описывает гармоническое колебание по каждой из осей. Компоненты скорости можно найти как:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a\omega\cos\omega t, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = -a\omega\sin\omega t.$$

Компоненты ускорения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -a\omega^2\sin\omega t, \qquad a_y = \frac{dy}{dt} = -a\omega^2\cos\omega t.$$

Модуль вектора мгновенной скорости:
$|v| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = a\omega(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) = a\omega$. Результат вычисления означает постоянство модуля во времени. Отсюда следует, что тангенциальное ускорение $a_\tau = \frac{d|v|}{dt} = 0$, т.е. нормальное ускорение совпадает с полным ускорением. Модуль полного ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a\omega^2 = a_n$ также постоянен. Постоянство скорости и нормального ускорения есть свидетельство постоянства радиуса кривизны R траектории движения. Движение по кривой с постоянным радиусом кривизны - это движение по окружности. Таким образом, участие точки в двух взаимно-перпендикулярных гармонических колебаниях приводит к движению по окружности.
Ответ: $v = a\omega$, $a_n = a\omega^2$.

1-6. Диск радиусом R вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Угол поворота φ зависит от времени как $\varphi = a - bt + ct^3$. Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки на окружности диска для момента времени $t = t_0$.

• Угловая скорость определяется производной от угла поворота диска по времени: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -b + 3ct^2$, вторая производная дает угловое ускорение: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 6ct$. Согласно приведенной в краткой теории связи линейных и угловых характеристик движения, нормальное ускорение: $a_n = \omega^2 R = (3ct^2 - b)^2 R$, тангенциальное ускорение: $a_\tau = \varepsilon r = 6ctR$, полное ускорение:

$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2} = \left[(3ct^2 - b)^4 + 36c^2t^2\right]^{1/2} R$. Подстановка $t = t_0$ дает ответ.

1-7. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота по закону $\omega = a\varphi$. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = \varphi_0$. Найти зависимость от времени угла поворота φ и угловой скорости ω.

• Для угла φ можно получить простейшее дифференциальное уравнение: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = a\varphi$. Решение уравнения начинают с переноса φ и дифференциала $d\varphi$ в одну сторону уравнения, а дифференциала времени dt – в другую: $\frac{d\varphi}{\varphi} = adt$. Это уравнение необходимо проинтегрировать, чтобы найти такие функции φ и t, которые, будучи подставлены в правую и левую части уравнения, не нарушали бы имеющегося равенства: $\int \frac{d\varphi}{\varphi} = a\int dt$. Результат интегрирования: $\ln\varphi = at + C$, где C – постоянная интегрирования (ее производная равна нулю). После потенцирования получим $\varphi = C \cdot \exp(at)$. Подстановка начального условия

$\varphi(0) = \varphi_0$ дает $\varphi_0 = C \cdot exp(0) = C$. Окончательно

$\varphi = \varphi_0\, exp(at)$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0\, a\, exp(at)$.

Ответ: $\varphi = \varphi_0\, exp(at)$, $\omega = \varphi_0\, a\, exp(at)$.

Задачи для самостоятельного решения

1-8. Движение материальной точки вдоль оси x задано уравнением $x = at - bt^2$. Определить какой путь прошла точка до остановки, если она начала двигаться в момент времени $t = 0$.
Ответ: $s = a^2/4b$.
1-9. Точка движется по плоскости согласно закону $x = a\sin(\omega t)$,
$y = a(1 - \cos(\omega t))$, где a и ω - положительные постоянные. Определить скорость точки в момент времени $t = \tau$ и найти путь, пройденный ею к этому моменту.
Ответ: $v = a\omega\tau$.
1-10. Радиус-вектор материальной точки меняется по закону $\vec{r} = \vec{a}t(1 - \alpha t)$, где $\vec{a}$ и $\alpha > 0$ – постоянные. Определить промежуток времени Δt, по истечении которого точка вернется в исходную позицию и путь s, который она при этом пройдет.
Ответ: $\Delta t = 1/\alpha$; $s = a/(2\alpha)$.
1-11. Движение материальной точки задано радиус-вектором:
$\vec{r} = \vec{i}(\alpha - bt^2) + \vec{j}ct$. Определить вектор мгновенной скорости $\vec{v}(t)$, его модуль, модули тангенциального, нормального и полного ускорений.
Ответ: $\vec{v} = -2bt\vec{i} + c\vec{j}$, $|v| = \sqrt{4b^2t^2 + c^2}$, $a_\tau = 4b^2t/\sqrt{4b^2t^2 + c^2}$, $a = 2b$,
$a_n = 2bc/\sqrt{4b^2t^2 + c^2}$.
1-12. Камень брошен горизонтально со скоростью v_0. Найти нормальное и тангенциальное ускорения камня через промежуток времени t после начала движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.
Ответ: $a_\tau = \dfrac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$, $a_n = \dfrac{gV_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$.
1-13. Камень брошен горизонтально со скоростью v_0. Найти радиус кривизны траектории камня через промежуток времени t после начала движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.
Ответ: $R = \dfrac{(v_0 + g^2t^2)^{3/2}}{gv_0}$.
1-14. Движение точки по окружности радиуса R задано уравнением: $\xi = \alpha + bt + ct^2$, где ξ - координата, отсчитанная вдоль окружности. Найти скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки для момента времени $t = t_0$.

Ответ: $v = b + 2ct_0$, $a_\tau = 2c$, $a_n = (b + 2ct_0)^2/R$.

1-15. Маховик начал вращаться равноускоренно и за промежуток времени Δt достиг частоты вращения n. Определить угловое ускорение маховика и полное количество оборотов, которое он сделал за это время.

Ответ: $\varepsilon=2\pi n/\Delta t$, $N=n\Delta t/2$.

Контрольные задачи

1-16. Стержень длиной l упирается верхним концом в стену, а нижним - в пол. Конец, упирающийся в стену, равномерно опускается вниз. Будет ли движение другого конца равномерным?

1-17. Прожектор установлен на расстоянии l от стены и высвечивает на стене светлое пятно. Прожектор вращается вокруг вертикальной оси, делая один оборот за время T таким образом, что светлое пятно движется по стене. Приняв за начало отсчета момент времени, когда пятно находится напротив прожектора, в течение первой четверти оборота определить скорость пятна на стене как функцию времени.

1-18. Три четверти пути автомобиль прошел со скоростью v_1, последнюю четверть - со скоростью v_2. Определить среднюю скорость автомобиля.

1-19. Из одной точки на оси x в момент $t = t_0$ начали двигаться два небольших тела, движение которых описывают уравнения:
$x_1 = a + b_1t + ct^2$, $x_2 = a + b_2(t - t_0) + c(t - t_0)^2$. Определить момент времени, когда тела встретятся, и их скорости в этот момент.

1-20. Точка движется по плоскости согласно закону $x = at$, $y = at(1 - \alpha t)$, где a и α - положительные постоянные. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени.

1-21. Точка движется по окружности радиусом $R = 4$ м. Начальная скорость точки равна $v_0 = 3$ м/с, тангенциальное ускорение $a_\tau = 1$ м/с^2. Для момента времени $t = 2$ с найти: 1) длину пути, пройденного точкой к этому моменту, 2) модуль вектора перемещения, 3) среднюю путевую скорость, 4) модуль вектора средней скорости.

1-22. Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что угол поворота меняется в зависимости от времени по закону $\varphi = 2\pi(at - bt^2/2)$, где a и b - положительные постоянные. Найти момент времени τ, в который тело прекратит вращение, а также количество оборотов N тела до остановки.

1-23. На цилиндр радиусом r, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, намотана нить. К концу нити прикрепили груз и предоставили ему возможность опускаться вниз. Двигаясь равноускоренно, груз за время t спустился на расстояние h. Определить угловое ускорение ε цилиндра.

1-24. Колесо вращается равноускоренно. Сделав N полных оборотов, оно изменило частоту вращения от n_1 до n_2. Определить угловое ускорение ε колеса.

1-25. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = at - bt^2$. Найти средние значения угловых скорости и ускорения тела за промежуток времени от $t = 0$ до полной остановки.