

UNIVERSITE DE PICARDIE JULES VERNE  
UFR DES SCIENCES



Mémoire du Stage de Fin d'Études  
En vue de l'obtention du diplôme

## MASTER DE RECHERCHE

Analyse Appliquée et Modélisation

---

# Analyse spectrale d'écoulements fluides et modèles d'amortissement

---

*Présenté par :*  
M. LESAGE Adrien

*Encadré par :*  
-M. CHEHAB Jean-Paul  
-Mme. MARTIN Véronique

*Soutenu le 8 juillet 2024*



Année universitaire 2023-2024

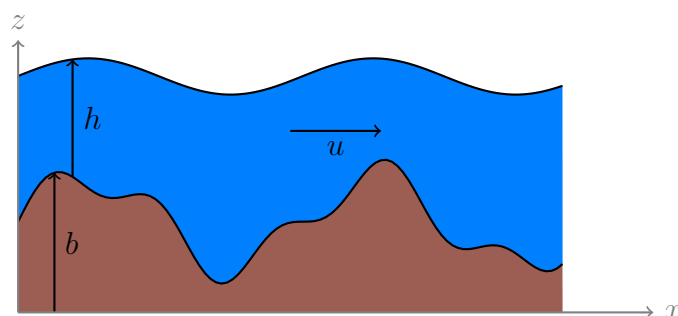
# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introduction aux équations d'Euler à surface libre</b>	<b>4</b>
2.1	Hypothèses . . . . .	4
2.2	Formulation des équations d'Euler . . . . .	4
2.2.1	Formulation de l'évolution du champ de vitesse . . . . .	4
2.2.2	Formulation de la condition d'incompressibilité . . . . .	5
2.2.3	Formulation des conditions aux bords et de l'évolution de la surface . . . . .	5
2.3	Formulation de Bernoulli . . . . .	7
2.4	Adimensionnement des paramètres du système . . . . .	8
2.4.1	Adimensionnement des équations de Bernoulli pour $\mathbf{X} = \mathbb{R}$ . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Quelques régimes asymptotiques des équations d'Euler</b>	<b>11</b>
3.1	Cas du fond plat 1D . . . . .	11
3.1.1	Développement limité de $\phi$ et premières conséquences . . . . .	11
3.1.2	Vers les équations de Korteweg-de Vries. . . . .	12
3.2	Cas d'un fond fixe non plat. . . . .	15
3.2.1	Mise en place des hypothèses . . . . .	15
3.2.2	Petit retour aux équations dimensionnées . . . . .	15
3.2.3	Vers les équations de Saint Venant . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Étude numérique de ces quelques équations</b>	<b>18</b>
4.1	L'équation de Airy . . . . .	18
4.1.1	Analyse qualitative de l'équation . . . . .	18
4.1.2	Discretisation en temps . . . . .	19
4.1.3	Discretisation temps et en espace : . . . . .	20
4.1.4	Implémentation numérique . . . . .	21
4.2	L'équation de KdV . . . . .	21
4.2.1	Quelques lois de conservation des équations de KdV . . . . .	21
4.2.2	Discretisation en temps : Les invariants du schéma de Sanz Serna . . . . .	23
4.2.3	Schéma numérique : les invariants discrets du schéma de Sanz Serna . . . . .	26
4.2.4	Un autre schéma rendant la norme $L^2$ discrètement invariant . . . . .	30
4.2.5	Un autre schéma rendant l'énergie discrètement invariant . . . . .	32
4.2.6	Les solitons de KdV . . . . .	33
4.3	Implémentation via FFT . . . . .	35
4.4	Une généralisation 2D de KdV : l'équation de Kadomstev-Petviashvili . . . . .	36
4.4.1	L'équation de Saint Venant . . . . .	36
4.5	Quelques lois de conservation de l'équation . . . . .	37
4.5.1	Première approche : les schémas conservatifs . . . . .	38
4.5.2	Construction d'une condition initiale unidirectionnelle . . . . .	39
4.5.3	Reconstruction de la topographie du fond marin . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Vers les équations de Saint-Venant avec viscosité</b>	<b>42</b>
5.1	Introduction aux équations de Naviers Stokes à Surface libre pour un fond fixe non plat	42
5.2	Cas de la dimension 2, adimensionnement des équations . . . . .	43
5.3	Vers les équation de Saint Venant non-linéaire avec viscosité . . . . .	46
5.4	Implémentation numérique . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Méthodes d'approximation de symbole (SAM) d'un opérateur d'ammortissement</b>	<b>50</b>
6.1	Introduction à la notion d'amortissement . . . . .	50
6.2	Les équations de KdV amortie . . . . .	50
6.3	Généralités sur le symbole d'un opérateur . . . . .	51
6.3.1	Définition et exemple . . . . .	51

6.3.2	Symbole de quelques opérateurs définis précédemment . . . . .	51
6.3.3	Une première méthode numérique pour calculer numériquement du symbole d'un opérateur d'amortissement . . . . .	52
6.4	Méthodes stochastiques pour l'approximation de la trace d'une matrice (TAM) . . . .	53
6.4.1	Cas général . . . . .	53
6.4.2	Si $\mathbf{Cov}(\mathbf{V})$ est une matrice scalaire et $\mathbb{E}(\mathbf{V}) = 0$ . . . . .	54
6.4.3	Approximation de la trace pour un échantillons qui perd en fréquences . . . . .	56
6.4.4	Approximation de la trace pour un échantillons soumis à un faible filtre passe-bas	57
6.4.5	Approximation de la trace pour un échantillons soumis à un faible filtre passe-bas dépendant du temps. . . . .	59
6.5	Approximation du symbole d'un opérateur . . . . .	60
6.5.1	Proposition clé . . . . .	60
6.5.2	Une première méthode d'approximation de symbole . . . . .	61
6.5.3	Une méthode multigrille d'approximation de symbole . . . . .	62
<b>7</b>	<b>Analyse spectrale de quelques solutions</b>	<b>63</b>
7.1	L'équation de la chaleur . . . . .	63
7.2	L'équation de Airy . . . . .	65
7.2.1	Sans terme d'amortissement . . . . .	65
7.2.2	Avec un terme d'amortissement . . . . .	66
7.2.3	Comment retrouver numériquement le symbole de l'opérateur d'amortissement à partir du spectrogramme . . . . .	67
7.3	L'équation de KdV . . . . .	68
7.3.1	Solution initiale gaussienne . . . . .	68
7.3.2	Le Soliton . . . . .	68
7.3.3	Chevauchement de deux solitons . . . . .	69
7.3.4	Le Soliton amorti . . . . .	69
7.4	L'équation de Saint-Venant sans viscosité . . . . .	69
7.4.1	Fond plat . . . . .	70
7.4.2	Fond gaussien (une bosse) . . . . .	71
7.4.3	Fond à deux bosses gaussiennes . . . . .	73
7.4.4	Fond sinusoïdal . . . . .	74
7.4.5	Fond à bosse rectangulaire . . . . .	77
<b>8</b>	<b>ANNEXE : Sur les puissances fractionnaires de l'opérateur <math>(-\Delta)</math></b>	<b>78</b>

# 1 Introduction

Un fluide à surface libre est un fluide, régi par les lois de la dynamique des fluides et soumis à une force de gravité de sorte que l'espace occupé par le fluide peut évoluer. Cette évolution est représentée par une variation au cours du temps de la surface supérieure du fluide et donc de la hauteur du fluide.



L'étude des fluides à surface libre, et en particulier la recherche dans l'amortissement des phénomènes de houle, constitue aujourd'hui encore un enjeu majeur dans la protection des zones littorales. Plus précisément, la connaissance et l'optimisation de l'amortissement des vagues peuvent s'appliquer à la conception de dispositifs de réduction d'érosion, de diminution des phénomènes de submersion, ou encore de génération d'électricité à partir de l'énergie de la houle.

Plusieurs équations ont pour vocation de modéliser les fluides à surface libre. On compte notamment les équations de Navier-Stokes à surface libre ou encore les équations d'Euler à surface libre. Ces deux équations sont très générales mais ont le désavantage d'être très coûteuses en calcul lors des simulations numériques.

D'autres modèles sont plus simples, mais ne sont valables que lorsque certaines hypothèses de négligeabilité de grandeurs caractéristiques relativement à d'autres sont vérifiées. Par exemple, lorsqu'on suppose un fluide peu profond, l'utilisation des équations de Saint-Venant est possible. Et lorsqu'on suppose un fluide peu profond avec des vagues très larges et peu hautes (on parle de faibles amplitudes et de grandes longueurs d'onde), on peut par exemple se ramener à l'étude des équations de Korteweg-de Vries. Ce choix d'hypothèses de négligeabilité est appelé sélection de régime.

Dans la première partie de ce mémoire, nous nous intéresserons à la compréhension de l'origine physique des équations d'Euler et de Navier-Stokes. Par l'intermédiaire de changements de variables, nous réécrirons ces équations pour ne faire intervenir que des rapports adimensionnés entre les différentes grandeurs caractéristiques du système. Nous ferons tendre certains de ces rapports vers 0 relativement au régime que nous souhaitons sélectionner pour aboutir aux équations asymptotiques.

Dans un second temps, nous chercherons des schémas numériques permettant de simuler ces modèles asymptotiques en veillant à conserver toutes les propriétés de conservation d'énergie que satisfont les équations continues, afin de correctement appréhender l'effet des termes d'amortissement qu'il sera possible d'ajouter au schéma.

Ensuite, nous étudierons des méthodes permettant d'évaluer le comportement d'un opérateur linéaire sur la distribution en fréquence des fonctions sur lesquelles il opère. Pour cela, nous nous intéresserons tout d'abord à des méthodes d'approximation de la trace d'un opérateur que nous utiliserons pour comprendre la mise en œuvre de méthodes d'approximation du symbole d'un opérateur.

Finalement, nous observerons d'un point de vue spectral des simulations de plusieurs modèles, dans plusieurs situations, pour essayer d'apporter une première intuition des phénomènes d'amortissement.

## 2 Introduction aux équations d'Euler à surface libre

### 2.1 Hypothèses

Tout le long de ce mémoire, nous nous intéresserons à l'étude d'un fluide dont nous supposons les hypothèses suivantes vérifiées

(H<sub>1</sub>) : Le fluide est *homogène* et *incompressible*.

(H<sub>2</sub>) : Le fluide est *non visqueux*.

(H<sub>3</sub>) : Le fluide est *irrotationnel*.

Soit  $\mathbf{X} = \mathbb{R}^d$  avec  $d \in \{1, 2\}$ . On souhaite étudier un tel fluide évoluant dans le domaine

$$\Omega_t = \{(x, z) \in \mathbf{X} \times \mathbb{R} \mid b(x) - H_0 \leq z \leq \zeta(t, x)\}$$

- $b : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  désigne les variations du fond du fluide, de profondeur caractéristique  $H_0 > 0$
- le graphe  $\zeta : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{X}$  désigne la surface du fluide, de sorte que les hypothèses suivante soient vérifiées

(H<sub>4</sub>) : Les particules de fluide ne traversent pas le fond.

(H<sub>5</sub>) : Les particules de fluide ne traversent pas la surface.

(H<sub>6</sub>) : En tout point  $x \in \mathbf{X}$  et en tout instant  $t \geq 0$ , l'épaisseur du fluide  $\zeta(t, x) - (b(x) - H_0)$  est supérieure à une constante  $H_{\min} > 0$  indépendante de  $x$  et de  $t$ .

(H<sub>7</sub>) : La pression du fluide à la surface est égale à la pression atmosphérique  $P_{\text{atm}}$  (on néglige les tensions de surface).

(H<sub>8</sub>) : Le fluide est soumis à une force de gravité d'intensité  $g$  et de direction opposée au vecteur  $\mathbf{z} = (0_{\mathbf{X}}, 1)$ .

(H<sub>9</sub>) : Le fluide est au repos à l'infini et  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \zeta(x, t) = 0$

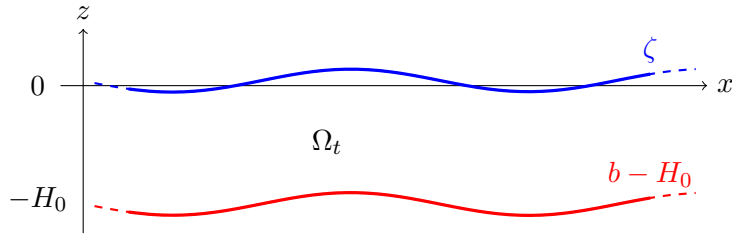


FIGURE 1 – Représentation des équations d'Euler à surface libre

### 2.2 Formulation des équations d'Euler

Voir [11]

#### 2.2.1 Formulation de l'évolution du champ de vitesse

- Posons  $\begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbb{R}$  la fonction qui suit le déplacement d'une particule de fluide de position initiale  $\begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{Z}_0 \end{pmatrix} \in \Omega_0$ .
- Posons  $\mathbf{U}(t, x, z)$  la vitesse de la particule de fluide située en  $(x, z) \in \Omega_t$  à l'instant  $t$ .

Afin d'établir nos équations, nous allons, à la façon de GUYON et al.[11], commencer par étudier l'application  $t \mapsto \mathbf{U}(t, \mathcal{X}(t), \mathcal{Z}(t))$  pour  $\mathcal{X}_0$  et  $\mathcal{Z}_0$  quelconques fixés. Ce point de vue s'appelle le point de vue *lagrangien*. Par opposition, le point de vue dit *eulérien* est l'étude de  $t \mapsto \mathbf{U}(t, x, z)$  pour  $x$  et  $z$  fixé.

Les hypothèses  $(\mathbf{H}_4)$  et  $(\mathbf{H}_5)$  nous donnent que  $\begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} \in \Omega_t$  pour tout instant  $t \geq 0$ . On a alors la relation

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} = \mathbf{U}(t, \mathcal{X}(t), \mathcal{Z}(t)). \quad (2.1)$$

En dérivant une fois de plus, on obtient

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{U}(t, \mathcal{X}(t), \mathcal{Z}(t))}{\partial t} + \text{Jac}(\mathbf{U}) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) (t, \mathcal{X}(t), \mathcal{Z}(t)).$$

L'hypothèse  $(\mathbf{H}_2)$  nous dit que les particules ne s'influencent pas mutuellement en dehors de la pression. Chaque particule n'est alors soumise qu'à deux forces : la force de gravité  $F_g = -\rho g \mathbf{z}$  due à l'hypothèse  $(\mathbf{H}_8)$  et la force de pression  $F_P = -\nabla P$  ou la fonction  $P$  désigne la pression du fluide. La deuxième loi de Newton donne alors

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} (t) = -\rho g \mathbf{z} - \nabla P(t, \mathcal{X}(t), \mathcal{Z}(t)), \quad (2.2)$$

ce qui nous donne les équations d'Euler :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) + \rho g \mathbf{z} + \nabla P = 0. \quad (\mathbf{E}_1)$$

### 2.2.2 Formulation de la condition d'incompressibilité

L'hypothèse  $(\mathbf{H}_1)$  se traduit par

$$\rho(t, x, z) = \rho_0.$$

En conséquence, la loi de conservation de la masse d'un fluide

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (2.3)$$

devient

$$\text{div}(\mathbf{U}) = 0. \quad (\mathbf{E}_2)$$

### 2.2.3 Formulation des conditions aux bords et de l'évolution de la surface

L'hypothèse  $(\mathbf{H}_4)$  s'exprime ainsi

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \{z = b(x) - H_0\}, \quad (\mathbf{E}_3)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal extérieur au domaine  $\Omega_t$ . Cette formule est une réécriture immédiate de  $(\mathbf{H}_4)$  car  $b - H_0$  ne dépend pas du temps. En revanche, comme  $\zeta$  dépend du temps, la caractérisation de l'hypothèse  $(\mathbf{H}_5)$  est moins immédiate et est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 2.2.1.** *L'hypothèse  $(\mathbf{H}_5)$  nous donne que*

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(t, x) - \sqrt{1 + \|\nabla_x \zeta\|^2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{dans } \{z = \zeta(t, x)\} \quad (\mathbf{E}_4)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal extérieur au domaine  $\Omega_t$ .

*Démonstration. Etape 1 :* Commençons par déterminer  $\mathbf{n}$  en fonction de  $t$ ,  $x$ , et  $\zeta$ . A  $t$  fixé, la surface est paramétrée par l'application

$$S_t : x \in \mathbf{X} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \zeta(t, x) \end{pmatrix}.$$

Sa différentielle en  $x$  est

$$DS_t(x) : v \in \mathbf{X} \mapsto DS_t(x).v = \begin{pmatrix} v \\ \nabla_X \zeta(t, x) \cdot v \end{pmatrix}.$$

Le vecteur normal  $\mathbf{n}$  vérifie alors

$$\mathbf{n} \cdot (DS_t(x).v) = 0$$

pour tout  $v \in \mathbf{X}$ . En posant  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ , on trouve alors

$$(n_1 + n_2 \nabla_X \zeta(t, x)) \cdot v = 0$$

pour tout  $v \in \mathbf{X}$ . On a alors

$$n_1 = -n_2 \nabla_X \zeta(t, x)$$

Donc  $\mathbf{n} = n_2 \begin{pmatrix} -\nabla_X \zeta(t, x) \\ 1 \end{pmatrix}$  Pour que la normale soit dirigée vers l'extérieur du domaine  $\Omega_t$ , il faut  $n_2 > 0$ . Comme  $\|\mathbf{n}\| = 1$ , on trouve finalement

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla_X \zeta(t, x)\|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla_X \zeta(t, x) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

*Etape 2 :* Considérons à nouveau  $\begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix}$  la trajectoire d'une particule et supposons qu'elle est initialement située à la surface. L'hypothèse nous donne qu'alors la particule ne peut traverser la surface ni dans un sens, ni dans l'autre. Il y a alors, pour tout temps  $t \geq 0$ , l'égalité suivante :

$$\mathcal{Z} - \zeta(., \mathcal{X}) = 0.$$

En dérivant cette égalité, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\mathcal{Z}}{dt} - \frac{\partial \zeta}{\partial t}(., \mathcal{X}) - \nabla_{\mathbf{X}} \zeta(., \mathcal{X}) \cdot \frac{d\mathcal{X}}{dt} \\ &= \mathbf{U} \cdot \begin{pmatrix} -\nabla_X \zeta(t, x) \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\partial \zeta}{\partial t}(., \mathcal{X}) \\ &= \sqrt{1 + \|\zeta\|^2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \zeta}{\partial t}(., \mathcal{X}) \end{aligned}$$

□

**Pour résumer,** en combinant  $(\mathbf{E}_1)$ ,  $(\mathbf{E}_2)$ ,  $(\mathbf{E}_3)$  et  $(\mathbf{E}_4)$ , on obtient les équations d'Euler à surface libre

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + g \mathbf{z} \right) + \nabla \mathbf{P} = 0 \\ \operatorname{div}(\mathbf{U}) = 0 \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t}(t, x) - \sqrt{1 + \|\nabla_{\mathbf{X}} \zeta\|^2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \{z = b(x) - H_0\} \\ \text{dans } \{z = \zeta(t, x)\} \end{array} \quad (\mathbf{E})$$

**Remarque :** L'égalité vectorielle suivante

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \operatorname{rot}(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{U} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{U}|^2,$$

nous permet de réécrire  $(\mathbf{E}_1)$  sous la forme

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{U} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{U}|^2 + g \mathbf{z} \right) + \nabla \mathbf{P} = 0. \quad (2.5)$$

Ainsi, l'hypothèse  $(\mathbf{H}_3)$ , qui se traduit par  $\operatorname{rot}(\mathbf{U}) = 0$ , permet alors d'avoir

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{U}|^2 + g \mathbf{z} \right) + \nabla \mathbf{P} = 0 \quad (\mathbf{E}_{1,\text{bis}})$$

### 2.3 Formulation de Bernoulli

Grâce notamment à  $(\mathbf{H}_6)$ , on sait que  $\Omega_t$  est simplement connexe à tout instant  $t$ , et comme  $\text{rot}(\mathbf{U}) = 0$  par l'hypothèse  $(\mathbf{H}_3)$ , on en déduit l'existence d'une fonction  $\Phi(t, \cdot, \cdot) : \mathbf{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\mathbf{U} = \nabla \phi .$$

Ceci permet de réécrire le système  $(\mathbf{E}_{1,\text{bis}})$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \rho \left( \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\nabla \phi|^2 + g \mathbf{z} \right) + \nabla P \\ &= \nabla \left( \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g z \right) + P \right) \end{aligned}$$

Une condition suffisante pour vérifier  $(\mathbf{E}_{1,\text{bis}})$  est alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g z = \frac{1}{\rho} (-P)$$

De plus, comme  $\phi$  n'est définie qu'à une constante indépendante de l'espace près et comme seules les dérivées de  $\phi$  par rapport aux variables d'espace interviennent dans les équations, on peut aussi poser

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g z = \frac{1}{\rho} (P_{\text{atm}} - P) \quad (\mathbf{B}_1)$$

Où la constante  $P_{\text{atm}}$  désigne la pression de l'air ambiant, supposée constante. De cette façon, par l'hypothèse  $(\mathbf{H}_7)$ , la pression disparaît de cette équation sur la surface  $\{z = \zeta(t, x)\}$ . Et comme  $\text{div}(\nabla \phi) = \Delta \phi$ , l'équation  $(\mathbf{E}_2)$  devient alors

$$\Delta \phi = 0. \quad (\mathbf{B}_2)$$

L'équation  $(\mathbf{E}_3)$ , devient

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{dans } \{z = b(x) - H_0\}. \quad (\mathbf{B}_3)$$

L'équation  $(\mathbf{E}_4)$ , devient

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \sqrt{1 + \|\nabla_{\mathbf{X}} \zeta\|^2} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{dans } \{z = \zeta(t, x)\}. \quad (\mathbf{B}_4)$$

Sachant (2.4), on connaît et on utilisera souvent l'équivalence entre  $(\mathbf{B}_4)$  et l'équation suivante

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{X}} \zeta \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } \{z = \zeta(t, x)\}. \quad (2.6)$$

De manière analogue, on a aussi équivalence entre  $(\mathbf{B}_3)$  et

$$\nabla_{\mathbf{X}} b \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } \{z = b(x)\}. \quad (2.7)$$



## 2.4 Adimensionnement des paramètres du système

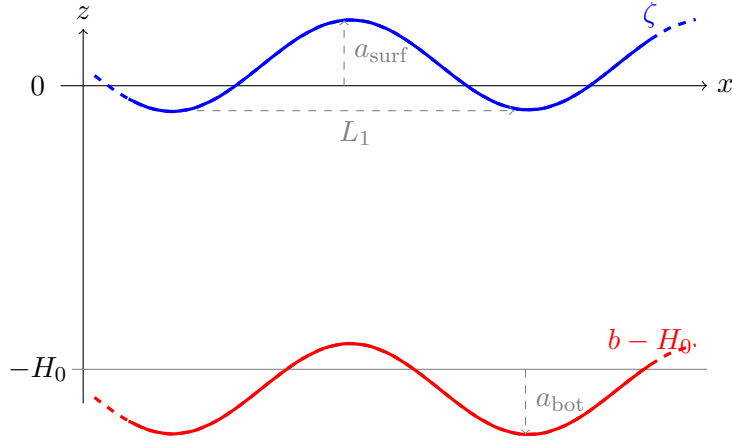


FIGURE 2 – Représentation des grandeurs caractéristiques pour  $\mathbf{X} = \mathbb{R}$

Tout comme dans [18] et [14], on va commencer par réécrire ces équations en faisant apparaître les rapports entre les différentes grandeurs caractéristiques qui entrent en jeu. Ainsi la négligeabilité d'un paramètre relativement à un autre s'impactera sur nos équations sous la forme d'une possible simplification de un ou plusieurs termes. Une équation ne faisant intervenir que des rapports adimensionnés est dite adimensionnée (ou adimensionnelle).

Dans notre cas, les grandeurs caractéristiques de notre système sont

- $H_0$  est la profondeur du système.
- $a_{\text{surf}} = \max(|\zeta|)$  est l'amplitude de la surface du fluide.
- $a_{\text{bot}} = \max(|b|)$  est l'amplitude du fond du fluide.
- $L_1$  est la longueur d'onde de  $\zeta$  dans la direction  $\mathbf{e}_1$ .
- $L_2$  est la longueur d'onde de  $\zeta$  dans la direction transversale  $\mathbf{e}_2$  (si  $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$ ).

On étudiera les rapports suivants :

- $\varepsilon = \frac{a_{\text{surf}}}{H_0}$  le coefficient de *non-linéarité* du système.
- $\mu = \frac{H_0^2}{L_1^2}$  le coefficient de *profondeur*.
- $\beta = \frac{a_{\text{bot}}}{H_0}$  est le coefficient de *dénivellation* du fond.
- $\gamma = \frac{L_1}{L_2}$  est le coefficient de *transversalité*.
- $\epsilon = \frac{a_{\text{surf}}}{L_1}$  le coefficient d'*amplitude*.
- $t_0 = \frac{L_1}{\sqrt{gH_0}}$  est l'échelle de temps caractéristique.

Pour adimensionner nos équations, on pose l'isomorphisme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}: \mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbf{X} \times \mathbb{R} \\
 (t, (x_1, x_2), z) &\longmapsto \left( \frac{t}{t_0}, \left( \frac{x_1}{L_1}, \frac{x_2}{L_2} \right), \frac{z}{H_0} \right) & \text{si } \mathbf{X} = \mathbb{R}^2 \\
 (t, x, z) &\longmapsto \left( \frac{t}{t_0}, \frac{x}{L_1}, \frac{z}{H_0} \right) & \text{si } \mathbf{X} = \mathbb{R}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

On effectue le changement de variable suivant :

- $(t', x', z') = \mathcal{I}(t, x, z)$
- $\zeta' = \frac{1}{a_{\text{surf}}}(\zeta \circ \mathcal{I}^{-1})$
- $b' = \frac{1}{a_{\text{bot}}}(b \circ \mathcal{I}^{-1})$
- $\phi' = \frac{1}{gt_0 a_{\text{surf}}}(\phi \circ \mathcal{I}^{-1})$
- $P' = \frac{t_0^2}{H_0^2 \rho_0}(P \circ \mathcal{I}^{-1}) \quad (\text{et } P'_{\text{atm}} = \frac{t_0^2}{H_0^2 \rho_0} P_{\text{atm}})$

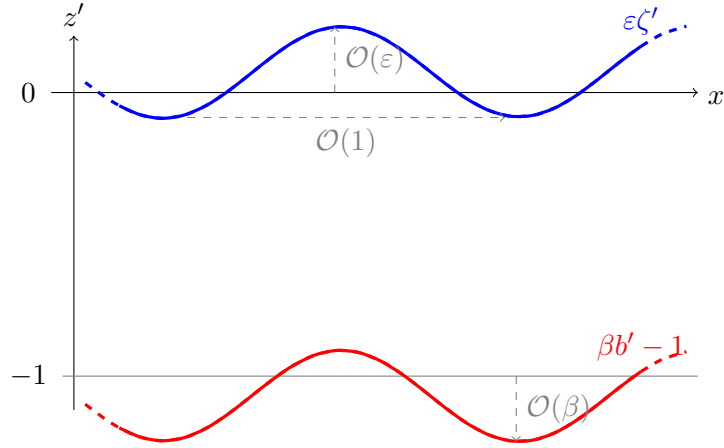


FIGURE 3 – Représentation des courbes adimensionnées

#### 2.4.1 Adimensionnement des équations de Bernoulli pour $\mathbf{X} = \mathbb{R}$

Pour  $\mathbf{X} = \mathbb{R}$ , l'adimensionnement de  $(\mathbf{B}_1)$  s'effectue ainsi :

**Adimensionnement de  $(\mathbf{B}_1)$  :** Après changement de variable,  $(\mathbf{B}_1)$  devient

$$\frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{t_0} \partial_{t'} \phi' + \frac{1}{2} \left( \frac{(gt_0 a_{\text{surf}})^2}{L_1^2} (\partial_{x'} \phi')^2 + \frac{(gt_0 a_{\text{surf}})^2}{H_0^2} (\partial_{z'} \phi')^2 \right) + gH_0 z' = \frac{1}{\rho_0} \frac{H_0^2 \rho_0}{t_0^2} (P' - P'_{\text{atm}}).$$

Après factorisation par  $ga_{\text{surf}}$ , on trouve

$$\partial_{t'} \phi' + \frac{1}{2} \left( \frac{gt_0^2 a_{\text{surf}}}{L_1^2} (\partial_{x'} \phi')^2 + \frac{gt_0^2 a_{\text{surf}}}{H_0^2} (\partial_{z'} \phi')^2 \right) + \frac{z'}{\varepsilon} = \frac{H_0^2}{t_0^2 ga_{\text{surf}}} (P' - P'_{\text{atm}}).$$

Remarquons alors que

$$\begin{aligned} gt_0^2 a_{\text{surf}} &= g \left( \frac{L_1}{\sqrt{gH_0}} \right)^2 a_{\text{surf}} \\ &= \frac{L_1^2}{H_0} a_{\text{surf}} \\ &= \frac{H_0}{\mu} a_{\text{surf}} \\ &= H_0^2 \frac{\varepsilon}{\mu}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\partial_{t'} \phi' + \frac{1}{2} \left( \frac{H_0^2 \varepsilon}{L_1^2 \mu} (\partial_{x'} \phi')^2 + \frac{\varepsilon}{\mu} (\partial_{z'} \phi')^2 \right) + \frac{z'}{\varepsilon} = \frac{\mu}{\varepsilon} (P' - P'_{\text{atm}}).$$

Et comme  $\frac{H_0^2}{L_1^2} = \mu$ , on obtient finalement

$$\partial_{t'} \phi' + \frac{\varepsilon}{2} \left( (\partial_{x'} \phi')^2 + \frac{1}{\mu} (\partial_{z'} \phi')^2 \right) + \frac{z'}{\varepsilon} = \frac{\mu}{\varepsilon} (P' - P'_{\text{atm}}). \tag{2.10}$$

**Adimensionnement de (B<sub>2</sub>) :** Après changement de variable, (B<sub>2</sub>) devient

$$\frac{(gt_0 a_{\text{surf}})}{L_1^2} \partial_{x'x'} \phi' + \frac{(gt_0 a_{\text{surf}})}{H_0^2} \partial_{z'z'} \phi' = 0$$

Après factorisation par  $\frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0^2}$ , on voit apparaître  $\mu$  :

$$\partial_{z'z'} \phi' + \mu \partial_{x'_1 x'_1} \phi' = 0 \quad (2.11)$$

**Adimensionnement de (B<sub>3</sub>) :** Après changement de variable, dans  $\{z' = \beta b'(x') - 1\}$ , l'équation (B<sub>3</sub>) qui équivaut à (2.7), devient

$$\left( \frac{a_{\text{bot}}}{L_1} \partial_{x'} b' \right) \left( \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \partial_{x'} \phi' \right) - \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} \partial_{z'} \phi' = 0$$

Après factorisation par  $\frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0}$ , il vient

$$\frac{a_{\text{bot}} H_0}{L_1^2} \partial_{x'} b' \partial_{x'} \phi' - \partial_{z'} \phi' = 0.$$

Autrement dit, dans  $\{z' = \beta b'(x') - 1\}$ ,

$$\beta \mu \partial_{x'} b' \partial_{x'} \phi' - \partial_{z'} \phi' = 0 \quad (2.12)$$

**Adimensionnement de (B<sub>4</sub>) :** Après changement de variable, dans  $\{z = \zeta(x, t)\}$ , l'équation (B<sub>4</sub>), qui équivaut à (2.6), devient

$$\frac{a_{\text{surf}}}{t_0} \partial_{t'} \zeta' + \left( \frac{a_{\text{surf}}}{L_1} \partial_{x'} \zeta' \right) \left( \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \partial_{x'} \phi' \right) - \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} \partial_{z'} \phi' = 0.$$

Après factorisation par  $\frac{a_{\text{surf}}}{t_0}$ , on trouve

$$\partial_{t'} \zeta' + \frac{gt_0^2 a_{\text{surf}}}{L_1^2} \partial_{x'} \zeta' \partial_{x'} \phi' - \frac{gt_0^2}{H_0} \partial_{z'} \phi' = 0$$

Ce qui donne donc

$$\partial_{t'} \zeta' + \varepsilon \partial_{x'} \zeta' \partial_{x'} \phi' - \frac{1}{\mu} \partial_{z'} \phi' = 0 \quad (2.13)$$

Par la suite, lorsqu'on travaillera sur les équations adimensionnées, on se permettra d'omettre les apostrophes sur ces variables.

### 3 Quelques régimes asymptotiques des équations d'Euler

#### 3.1 Cas du fond plat 1D

Dans cette partie on s'intéressera au cas où  $\mathbf{X} = \mathbb{R}$  et  $b = 0$ . D'après, (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13), on se retrouve alors à étudier le système suivant.

$$\partial_t \phi + \frac{\varepsilon}{2} (\partial_x \phi)^2 + \frac{\varepsilon}{2\mu} (\partial_z \phi)^2 + \frac{z}{\varepsilon} = \frac{\mu}{\varepsilon} (P - P_{\text{atm}}) \quad \text{si } -1 < z < \varepsilon \zeta(t, x) \quad (3.1)$$

$$\partial_{zz} \phi + \mu \partial_{xx} \phi = 0 \quad \text{si } -1 < z < \varepsilon \zeta(t, x) \quad (3.2)$$

$$\partial_z \phi = 0 \quad \text{si } z = -1 \quad (3.3)$$

$$\partial_t \zeta + \varepsilon \partial_x \zeta \partial_x \phi - \frac{1}{\mu} \partial_z \phi = 0 \quad \text{si } z = \varepsilon \zeta(t, x) \quad (3.4)$$

Plus précisément, on s'intéressera au cas d'une vague unidirectionnelle en supposant  $\mu \ll 1$  et  $\varepsilon \ll 1$ .

##### 3.1.1 Développement limité de $\phi$ et premières conséquences

Dans cette approche, proposée par [18], on parvient à une simplification des équations d'Euler en remarquant pour commencer la proposition suivante

**Proposition 3.1.1.** *Si  $\phi$  est de classe  $2n + 2$  et vérifie (3.2) et (3.3), alors il existe une fonction  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $2n + 2$ , telle que*

$$\phi(t, x, z) = \sum_{j=0}^n \mu^j \frac{(-1)^j}{(2j)!} (z+1)^{2j} \frac{\partial^{2j} f}{\partial x^{2j}}(x, t) + (-\mu)^{n+1} \int_{-1}^z \frac{(z-s)^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{\partial^{2n+2} \phi}{\partial x^{2n+2}}(t, x, s) ds \quad (3.5)$$

*Démonstration.* Le développement de Taylor de  $\phi$  en  $z = -1$ , à l'ordre  $2n + 2$ , (avec reste intégrale) est

$$\begin{aligned} \phi(t, x, z) &= \phi(t, x, -1) + (z+1) \frac{\partial \phi}{\partial z}(t, x, -1) \\ &\quad + \frac{(z+1)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(t, x, -1) + \frac{(z+1)^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3}(t, x, -1) \\ &\quad \dots \\ &\quad + \frac{(z+1)^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} \phi}{\partial z^{2n}}(t, x, -1) + \frac{(z+1)^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1} \phi}{\partial z^{2n+1}}(t, x, -1) \\ &\quad + \int_{-1}^z \frac{(z-s)^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{\partial^{2n+2} \phi}{\partial z^{2n+2}}(t, x, s) ds. \end{aligned}$$

Par récurrence, l'équation (3.2) nous donne, pour  $z > -1$

$$\frac{\partial^{2j} \phi}{\partial z^{2j}}(t, x, z) = (-\mu)^n \frac{\partial^{2j} \phi}{\partial x^{2j}}(t, x, z)$$

$$\frac{\partial^{2j+1} \phi}{\partial z^{2j+1}}(t, x, z) = (-\mu)^n \frac{\partial^{2j} \phi}{\partial x^{2j}} \frac{\partial \phi}{\partial z}(t, x, z)$$

En faisant tendre  $z$  vers  $-1$ , il vient que les dérivées partielles  $\frac{\partial^k \phi}{\partial z^k}(t, x, z)$  sont bien définies en  $z = -1$  et

$$\frac{\partial^{2j} \phi}{\partial z^{2j}}(t, x, -1) = (-\mu)^n \frac{\partial^{2j} \phi}{\partial x^{2j}}(t, x, -1)$$

$$\frac{\partial^{2j+1} \phi}{\partial z^{2j+1}}(t, x, -1) = (-\mu)^n \frac{\partial^{2j} \phi}{\partial x^{2j}} \frac{\partial \phi}{\partial z}(t, x, -1)$$

De plus, l'équation (3.3), nous donne  $\frac{\partial \phi}{\partial z}(t, x, -1) = 0$  pour tout  $x \in \mathbf{X}$  et donc

$$\frac{\partial^{2j} \phi}{\partial x^{2j}} \frac{\partial \phi}{\partial z}(t, x, -1) = 0$$

Finalement, on obtient

$$\phi(t, x, z) = \sum_{j=0}^n \mu^j \frac{(-1)^j}{(2j)!} (z+1)^{2j} \frac{\partial^{2j} \phi}{\partial x^{2j}}(t, x, -1) + (-\mu)^{n+1} \int_{-1}^z \frac{(z-s)^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{\partial^{2n+2} \phi}{\partial x^{2n+2}}(t, x, s) ds$$

Ce qui, si on pose  $f(t, x) = \phi(t, x, -1)$ , nous donne le résultat.  $\square$

Ainsi, on se retrouve grâce à l'hypothèse  $(\mathbf{H}_9)$  avec les approximation suivantes.

$$\begin{aligned}\phi &= f - \mu \frac{(z+1)^2}{2} \partial_{xx} f + \mu^2 \frac{(z+1)^4}{24} \partial_{xxxx} f + \mathcal{O}(\mu^3) \\ \partial_z \phi &= -\mu(z+1) \partial_{xx} f + \mu^2 \frac{(z+1)^3}{6} \partial_{xxxx} f + \mathcal{O}(\mu^3) \\ \partial_x \phi &= \partial_x f - \mu \frac{(z+1)^2}{2} \partial_{xxx} f + \mathcal{O}(\mu^2)\end{aligned}\tag{3.6}$$

**En injectant ces équations dans (3.4) :** Lorsque  $z = \varepsilon \zeta(t, x)$ , on se retrouve avec l'expression suivante

$$\partial_t \zeta + \varepsilon \partial_x \zeta \left[ \partial_x f - \mu \frac{(z+1)^2}{2} \partial_{xxx} f + \mathcal{O}(\mu^2) \right] + (z+1) \partial_{xx} f - \mu \frac{(z+1)^3}{6} \partial_{xxxx} f + \mathcal{O}(\mu^2) = 0$$

que l'on peut réécrire ainsi.

$$\partial_t \zeta + \partial_x (\varepsilon \zeta + 1) \partial_x f + (\varepsilon \zeta + 1) \partial_{xx} f - \mu \frac{(\varepsilon \zeta + 1)^3}{6} \partial_{xxxx} f - \mu \varepsilon \partial_x \zeta \frac{(\varepsilon \zeta + 1)^2}{2} \partial_{xxx} f = \mathcal{O}(\mu^2) + \mathcal{O}(\varepsilon \mu^2)$$

Où encore

$$\partial_t \zeta + \partial_x ((\varepsilon \zeta + 1) \partial_x f) - \mu \frac{(\varepsilon \zeta + 1)^3}{6} \partial_{xxxx} f - \mu \varepsilon \partial_x \zeta \frac{(\varepsilon \zeta + 1)^2}{2} \partial_{xxx} f = \mathcal{O}(\mu^2) + \mathcal{O}(\varepsilon \mu^2)\tag{3.7}$$

**En injectant ces équations dans (3.1) :** Lorsque  $z = \varepsilon \zeta(t, x)$ , on se retrouve avec  $P - P_{atm} = 0$  et il vient alors l'expression suivante.

$$\begin{aligned}\partial_t \left[ f - \mu \frac{(z+1)^2}{2} \partial_{xx} f + \mathcal{O}(\mu^2) \right] &+ \frac{\varepsilon}{2} \left( \partial_x f - \mu \frac{(z+1)^2}{2} \partial_{xxx} f + \mathcal{O}(\mu^2) \right)^2 \\ &+ \frac{\varepsilon}{2\mu} \left( \mu(z+1) \partial_{xx} f + \mu^2 \frac{(z+1)^3}{6} \partial_{xxxx} f + \mathcal{O}(\mu^3) \right)^2 \\ &+ \frac{z}{\varepsilon} = 0\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire

$$\begin{aligned}\left[ \partial_t f - \mu \frac{(\varepsilon \zeta + 1)^2}{2} \partial_{xxt} f + \mathcal{O}(\mu^2) \right] &+ \frac{\varepsilon}{2} ((\partial_x f)^2 - \mu(\varepsilon \zeta + 1)^2 \partial_x f \partial_{xxx} f) + \mathcal{O}(\varepsilon \mu^2) \\ &+ \frac{\varepsilon \mu}{2} (\varepsilon \zeta + 1)^2 (\partial_{xx} f)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon \mu^2) \\ &+ \zeta = 0\end{aligned}\tag{3.8}$$

### 3.1.2 Vers les équations de Korteweg-de Vries.

A partir de (3.8), MIRANVILLE et TEMAM[18] détaillent l'obtention d'une nouvelle équation basée sur les 3 étapes suivante :

---

*Premièrement, on néglige tous les termes d'ordre 1 ou plus en  $\mu$  et en  $\varepsilon$   
"on remplace  $\mathcal{O}(\mu, \varepsilon)$  par 0"*

---

Si  $\mu = \varepsilon = 0$  dans (3.7) et (3.8) on obtient le système suivant

$$\partial_t \zeta + \partial_{xx} f = 0 \quad (\mathbf{h}_1^{\mathcal{O}^0})$$

$$\partial_t f + \zeta = 0 \quad (\mathbf{h}_2^{\mathcal{O}^0})$$

En combinant (3.8) et la dérivée de  $(\mathbf{h}_1^{\mathcal{O}^0})$  par rapport à  $t$ , on trouve

$$\partial_{tt} \zeta - \partial_{xx} \zeta = 0 \quad (3.9)$$

$$\partial_{xx} \zeta + \partial_{xx} f = 0 \quad (3.10)$$

L'équation (3.9) s'appelle équation des ondes. Une solution unidirectionnelle de cette équation est de la forme  $\zeta(x, t) = g(x - t)$ . Ce qui nous donne

$$\partial_x \zeta = -\partial_t \zeta$$

De cette équation et à partir de  $(\mathbf{h}_1^{\mathcal{O}^0})$  et  $(\mathbf{h}_2^{\mathcal{O}^0})$ , on obtient que

$$\partial_x(\partial_x f - \zeta) = \partial_{xx} f + \partial_t \zeta = 0$$

$$\partial_t(\partial_x f - \zeta) = \partial_{xt} f + \partial_x \zeta = \partial_x(\partial_t f + \zeta) = 0$$

Autrement dit,  $\partial_x f - \zeta = 0$

---

*Deuxièmement, on corrige le résultat obtenu en ajoutant des termes d'un ordre supérieur.  
"on remplace 0 par  $\mathcal{O}(\mu, \varepsilon)$ "*

---

Supposons désormais vraies les assertions suivantes

$$\partial_x f - \zeta = \mu A + \varepsilon B + \mathcal{O}(\mu^2 + \varepsilon^2) \quad (\mathbf{h}_1^{\mathcal{O}^1})$$

$$\partial_x \zeta + \partial_t \zeta = \mathcal{O}(\mu, \varepsilon) \quad (\mathbf{h}_2^{\mathcal{O}^1})$$

Si on dérive (3.8) par rapport à  $x$  et si on néglige les termes de l'ordre de  $\mu^2$ , de  $\mu\varepsilon$  et de  $\varepsilon^2$  dans (3.7) et (3.8), on obtient le système suivant

$$\partial_t \zeta + \partial_x((\varepsilon \zeta + 1)\partial_x f) - \mu \frac{1}{6} \partial_{xxxx} f = \mathcal{O}(\mu^2, \mu\varepsilon, \varepsilon^2)$$

$$\partial_{xt} f - \mu \frac{1}{2} \partial_{xxxt} f + \varepsilon \partial_x f \partial_{xx} f + \zeta_x = \mathcal{O}(\mu^2, \mu\varepsilon, \varepsilon^2)$$

En remplaçant les dérivées de  $f$  de ce système respectivement à l'hypothèse  $(\mathbf{h}_1^{\mathcal{O}^1})$  et en continuant de négliger les termes d'ordre strictement supérieur à 1 en  $\mu$  et  $\varepsilon$ , il vient le système suivant

$$\partial_t \zeta + \partial_x((\varepsilon \zeta + 1)\zeta) + \partial_x(\mu A + \varepsilon B) - \mu \frac{1}{6} \partial_{xxx} \zeta = \mathcal{O}(\mu^2, \mu\varepsilon, \varepsilon^2)$$

$$\partial_t \zeta + \mu \partial_t A + \varepsilon \partial_t B - \mu \frac{1}{2} \partial_{xxt} \zeta + \varepsilon \zeta \partial_x \zeta + \partial_x \zeta = \mathcal{O}(\mu^2, \mu\varepsilon, \varepsilon^2)$$

Toujours dans l'optique de négliger les termes d'ordre élevés, lorsque  $\mu$  ou  $\varepsilon$  est en facteur d'une dérivée temporelle de  $\zeta$  on peut la remplacer par la dérivée spatiale correspondante grâce à l'hypothèse  $(\mathbf{h}_2^{\mathcal{O}^1})$ . Ce qui nous amène au système suivant

$$\partial_t \zeta + \partial_x((\varepsilon \zeta + 1)\zeta) + \partial_x(\mu A + \varepsilon B) - \mu \frac{1}{6} \partial_{xxx} \zeta = \mathcal{O}(\mu^2, \mu\varepsilon, \varepsilon^2)$$

$$\partial_t \zeta + \mu \partial_t A + \varepsilon \partial_t B + \mu \frac{1}{2} \partial_{xxx} \zeta + \varepsilon \zeta \partial_x \zeta + \partial_x \zeta = \mathcal{O}(\mu^2, \mu\varepsilon, \varepsilon^2)$$

On peut réécrire ce système ainsi

$$\begin{aligned}\partial_t \zeta + \partial_x \zeta + \mu \left( \partial_x A - \frac{1}{6} \partial_{xxx} \zeta \right) + \varepsilon (2\zeta \partial_x \zeta + \partial_x B) &= \mathcal{O}(\mu^2, \mu\varepsilon, \varepsilon^2) \\ \partial_t \zeta + \partial_x \zeta + \mu \left( \partial_t A + \frac{1}{2} \partial_{xxx} \zeta \right) + \varepsilon (\zeta \partial_x \zeta + \partial_t B) &= \mathcal{O}(\mu^2, \mu\varepsilon, \varepsilon^2)\end{aligned}\quad (3.11)$$

Par unicité du développement asymptotique, on a alors

$$\begin{aligned}\partial_x A - \frac{1}{6} \partial_{xxx} \zeta &= \partial_t A + \frac{1}{2} \partial_{xxx} \zeta + \mathcal{O}(\mu, \varepsilon) \\ 2\zeta \partial_x \zeta + \partial_x B &= \zeta \partial_x \zeta + \partial_t B + \mathcal{O}(\mu, \varepsilon)\end{aligned}$$

On cherche deux fonction  $A$  et  $B$  qui conviennent, c'est à dire deux fonctions vérifiant

$$\partial_x A - \partial_t A = \frac{2}{3} \partial_{xxx} \zeta + \mathcal{O}(\mu, \varepsilon) \quad (3.12)$$

$$\partial_t B - \partial_x B = \zeta \partial_x \zeta + \mathcal{O}(\mu, \varepsilon) \quad (3.13)$$

Supposant connu  $\zeta$ , résolvons (3.12) et (3.13) à l'aide du changement de variable  $s = x + t$ , et  $r = x - t$  :

Ce qui donne pour toute fonction  $d \in \{\zeta, A, B\}$

$$\tilde{d}(s, r) = d\left(\frac{s+r}{2}, \frac{s-r}{2}\right) \quad (3.14)$$

$$\partial_s \tilde{d}(s, r) = \frac{1}{2} (\partial_x d + \partial_t d) \left( \frac{s+r}{2}, \frac{s-r}{2} \right) \quad (3.15)$$

$$\partial_r \tilde{d}(s, r) = \frac{1}{2} (\partial_x d - \partial_t d) \left( \frac{s+r}{2}, \frac{s-r}{2} \right) \quad (3.16)$$

D'après  $(\mathbf{h}_2^{\mathcal{O}^1})$ , on trouve alors  $\partial_s \tilde{\zeta} = \mathcal{O}(\mu, \varepsilon)$ , et comme  $\partial_x \zeta = (\partial_s \tilde{\zeta} + \partial_r \tilde{\zeta})(x+t, x-t)$  il vient alors que

$$\partial_x \zeta = \partial_r \tilde{\zeta}(x+t, x-t) + \mathcal{O}(\mu, \varepsilon) \quad (3.17)$$

En injectant (3.16), (3.17) dans (3.12) et dans (3.13) il vient

$$\begin{aligned}2\partial_r \tilde{A} &= \frac{2}{3} \partial_{rrr} \tilde{\zeta} + \mathcal{O}(\mu, \varepsilon) \\ -2\partial_r \tilde{B} &= \tilde{\zeta} \partial_r \tilde{\zeta} + \mathcal{O}(\mu, \varepsilon)\end{aligned}$$

On peut donc prendre

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \frac{1}{3} \partial_{rr} \tilde{\zeta} \\ \tilde{B} &= \frac{-\tilde{\zeta}^2}{4}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{3} \partial_{xx} \zeta \\ B &= \frac{-\zeta^2}{4}\end{aligned}$$

Finalement l'équation (3.11) devient

$$\partial_t \zeta + \partial_x \zeta + \mu \frac{1}{6} \partial_{xxx} \zeta + \varepsilon \frac{2}{3} \zeta \partial_x \zeta = \mathcal{O}(\mu^2, \mu\varepsilon, \varepsilon^2)$$

---

*Finalement, on néglige tous les termes d'ordre 2 ou plus en  $\mu$  et en  $\varepsilon$   
"on remplace  $\mathcal{O}(\mu^2, \mu\varepsilon, \varepsilon^2)$  par 0"*

---

En considérant l'équation

$$\partial_t \zeta + \partial_x \zeta + \mu \frac{1}{6} \partial_{xxx} \zeta + \varepsilon \frac{2}{3} \zeta \partial_x \zeta = 0 \quad (3.18)$$

Par un changement de variable on peut se ramener à l'étude d'une équation ne dépendant plus des paramètres  $\mu$  et  $\varepsilon$ . En effet, en posant  $u(x, t) = \zeta(kx - lt, lt)$ , il vient

$$\frac{1}{l} \partial_t u + \mu \frac{1}{6k^3} \partial_{xxx} u + \varepsilon \frac{2}{3k} u \partial_x u = 0$$

Et en posant  $k = \frac{\sqrt{\mu}}{2\varepsilon}$  et  $l = \frac{3\sqrt{\mu}}{4\varepsilon^2}$ , on obtient finalement les équations de KdV

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u + u \partial_x u = 0 \quad (\mathbf{KdV})$$

**Remarque :** Dans le cas d'une vague de très faible amplitude ( $1 \gg \mu \gg \varepsilon$ ), le troisième terme de (3.18) disparaît. Avec un changement de variable analogue à l'obtention de **(KdV)**, on obtient alors les équations de Airy.

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u = 0 \quad (\mathbf{Airy})$$

## 3.2 Cas d'un fond fixe non plat.

### 3.2.1 Mise en place des hypothèses

Dans cette partie on s'intéressera au cas où  $\mathbf{X} = \mathbb{R}$  mais où  $b$  n'est plus nécessairement nul. De plus, nous ajoutons l'hypothèse suivante appelée hypothèse hydrostatique :

$$P = P_{\text{atm}} + g\rho(\zeta - z) \quad (3.19)$$

### 3.2.2 Petit retour aux équations dimensionnées

On rappelle que  $\mathbf{U} = \nabla \phi = \begin{pmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_z \phi \end{pmatrix}$  où  $\mathbf{U}$  est le champ de vitesse du fluide. On pose

$$\bar{\mathbf{U}}(t, x) = \frac{1}{h(x)} \int_{b(x)-H_0}^{\zeta(t,x)} \mathbf{U}(t, x, z) dz$$

où  $h(t, x) = \zeta(t, x) - b(x) + H_0$ . Alors,  $\bar{\mathbf{U}}$  désigne la vitesse moyenne du fluide le long de l'axe  $z$ . En particulier, nous nous intéresserons à la première composante  $\bar{\mathbf{U}}_1$  de cette moyenne.

Après adimensionnement, on se retrouve avec

$$\bar{\mathbf{U}}'_1(t', x') := \frac{1}{h'(t', x')} \int_{\beta b'(x')-1}^{\varepsilon \zeta'(t', x')} \partial_{x'} \phi' dz' = \frac{1}{gt_0 \varepsilon \sqrt{\mu}} \bar{\mathbf{U}}_1(t_0 t', L_1 x')$$

où  $h' = \varepsilon \zeta' - \beta b' + 1$

Les propositions qui vont suivre permettent de faire le lien entre cette vitesse moyenne et les différents paramètres de nos équations. Dans la première tirée d'une démonstration présente dans LANNES[14], l'utilisation de la formule de Green permet de facilement généraliser ce résultat au cas de la dimensions 3 ( $x \in \mathbb{R}^2$ ).

#### Proposition 3.2.1.

$$\partial_{z'} \phi' - \mu \varepsilon \partial_{x'} \zeta' \partial_{x'} \phi' = -\mu \partial_{x'} \left( h' \bar{\mathbf{U}}'_1 \right)$$



*Démonstration.* D'après la formule de Green,

$$\int_{\partial\Omega_t} \partial_n \phi \times v = \int_{\Omega_t} \nabla \phi \cdot \nabla v + \int_{\Omega_t} v \Delta \phi \quad (3.20)$$

Autrement dit

$$\int_{\{z=\zeta(x)\}} \partial_n \phi \times v d\sigma + \int_{\{z=b(x)-H_0\}} \partial_n \phi \times v d\sigma = \int_{\Omega_t} \nabla \phi \cdot \nabla v + \int_{\Omega_t} v \Delta \phi \quad (3.21)$$

Que l'on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_n \phi|_{\{z=\zeta(x)\}} \times v \sqrt{1+|\partial_x \zeta|^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_n \phi|_{\{z=b(x)-H_0\}} \times v \sqrt{1+|\partial_x b|^2} dx \\ = \int_{\Omega_t} \nabla \phi \cdot \nabla v + \int_{\Omega_t} v \Delta \phi \end{aligned} \quad (3.22)$$

D'après (B<sub>2</sub>) (resp. (B<sub>3</sub>)), le quatrième terme (resp. le second terme) est nul. On se retrouve alors avec

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_n \phi|_{\{z=\zeta(x)\}} \times v \sqrt{1+|\partial_x \zeta|^2} dx = \int_{\Omega_t} \nabla \phi \cdot \nabla v \quad (3.23)$$

On rappelle que

$$\sqrt{1+|\partial_x \zeta|^2} \partial_n \phi|_{\{z=\zeta(x)\}}(t_0 t, L_1 x) = (\partial_z \phi - \partial_x \zeta \partial_x \phi)(t_0 t, L_1 x) \quad (3.24)$$

$$= \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} \partial_{z'} \phi' - \left( \frac{a_{\text{surf}}}{L_1} \partial_{x'} \zeta' \right) \left( \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \partial_{x'} \phi' \right) \quad (3.25)$$

$$= gt_0 \left( \varepsilon \partial_{z'} \phi' - \frac{a_{\text{surf}}^2}{L_1^2} (\partial_{x'} \zeta' \partial_{x'} \phi') \right) \quad (3.26)$$

$$= gt_0 \varepsilon (\partial_{z'} \phi' - \mu \varepsilon \partial_{x'} \zeta' \partial_{x'} \phi') \quad (3.27)$$

Supposons maintenant que  $v$  ne dépend pas de la variable  $z$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \nabla \phi \cdot \nabla v &= \int_{\Omega_t} \partial_x \phi \partial_x v \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x v \left( \int_{b(x)-H_0}^{\zeta(x)} \partial_x \phi dz \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x v \times h \bar{\mathbf{U}}_1 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x v \times \left( H_0 h' \times gt_0 \varepsilon \sqrt{\mu} \bar{\mathbf{U}}_1' \right) \left( \frac{t}{t_0}, \frac{x}{L_1} \right) dx \\ (i.p.p.) \quad &= -\frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^{+\infty} v \times \partial_{x'} \left( H_0 h' \times gt_0 \varepsilon \sqrt{\mu} \bar{\mathbf{U}}_1' \right) \left( \frac{t}{t_0}, \frac{x}{L_1} \right) dx \\ &= -\mu gt_0 \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} v \times \partial_{x'} \left( h' \times \bar{\mathbf{U}}_1' \right) \left( \frac{t}{t_0}, \frac{x}{L_1} \right) dx \end{aligned} \quad (3.28)$$

On se retrouve alors avec l'égalité

$$gt_0 \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} v \times (\partial_{z'} \phi' - \mu \varepsilon \partial_{x'} \zeta' \partial_{x'} \phi') = -gt_0 \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} v \times \mu \partial_{x'} (h' \times \bar{\mathbf{U}}_1') \left( \frac{t}{t_0}, \frac{x}{L_1} \right) dx$$

et ce pour tout  $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{X})$  ceci nous donne le résultat.  $\square$

**Proposition 3.2.2.** *L'hypothèse hydrostatique (3.19), après adimensionnement, devient*

$$P' = P'_{\text{atm}} + \frac{1}{\mu} (\varepsilon \zeta' - z') \quad (3.29)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} 0 &= P - P_{\text{atm}} - g\rho_0(\zeta - z) \\ &= \frac{H_0^2 \rho_0}{t_0^2} (P' - P'_{\text{atm}}) - g\rho_0 (a_{\text{surf}} \zeta' - H_0 z') \\ &= (P' - P'_{\text{atm}}) - \frac{t_0^2 g}{H_0^2} (a_{\text{surf}} \zeta' - H_0 z') \\ &= (P' - P'_{\text{atm}}) - \frac{t_0^2 g}{H_0} (\varepsilon \zeta' - z') \\ &= (P' - P'_{\text{atm}}) - \frac{1}{\mu} (\varepsilon \zeta' - z') \end{aligned}$$

□

### 3.2.3 Vers les équations de Saint Venant

D'après, (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13), on se retrouve alors à étudier le système suivant.

$$\begin{aligned}
 \partial_t \phi + \frac{\varepsilon}{2} (\partial_x \phi)^2 + \frac{\varepsilon}{2\mu} (\partial_z \phi)^2 + \frac{z}{\varepsilon} &= \frac{\mu}{\varepsilon} (P - P_{\text{atm}}) & \text{si } \beta b(x) - 1 < z < \varepsilon \zeta(t, x) & \quad (\mathbf{B}_1^{\text{adim}}) \\
 \partial_{zz} \phi + \mu \partial_{xx} \phi &= 0 & \text{si } \beta b(x) - 1 < z < \varepsilon \zeta(t, x) & \quad (\mathbf{B}_2^{\text{adim}}) \\
 \beta \mu \partial_x b \partial_x \phi - \partial_z \phi &= 0 & \text{dans } \{z = \beta b(x) - 1\} & \quad (\mathbf{B}_3^{\text{adim}}) \\
 \partial_t \zeta + \varepsilon \partial_x \zeta \partial_x \phi - \frac{1}{\mu} \partial_z \phi &= 0 & \text{si } z = \varepsilon \zeta(t, x) & \quad (\mathbf{B}_4^{\text{adim}})
 \end{aligned}$$

En ajoutant une hypothèse de négligeabilité sur le coefficient  $\mu$ , on voit apparaître le équation de Saint Venant 1D non visqueuses. Ceci fait l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 3.2.3.** *Si  $\phi$ ,  $\zeta$  et  $b$  vérifient  $(\mathbf{B}_1^{\text{adim}})$ ,  $(\mathbf{B}_2^{\text{adim}})$ ,  $(\mathbf{B}_3^{\text{adim}})$  et  $(\mathbf{B}_4^{\text{adim}})$ , si l'hypothèse hydrostatique adimensionnée est vérifiée et si  $\mu \ll 1$ , alors*

$$\partial_t h + \varepsilon \partial_x (h \bar{U}_1) = 0 \quad (3.30)$$

$$\partial_t \bar{U}_1 + \frac{\varepsilon}{2} \partial_x \bar{U}_1^2 + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x h = -\frac{\beta}{\varepsilon} \partial_x b + \mathcal{O}(\mu) \quad (3.31)$$

où  $h = \varepsilon \zeta - \beta b + 1$  et où  $\bar{U}_1 = \frac{1}{h} \int_{\beta b-1}^{\varepsilon \zeta} \partial_x \phi dz$ .

*Démonstration.* D'après l'hypothèse hydrostatique (i.e. la proposition 3.2.2), dans  $\{z \in ]\beta b(x) - 1, \varepsilon \zeta(t, x)[\}$ , l'équation  $(\mathbf{B}_1^{\text{adim}})$  peut aussi s'écrire

$$\partial_t \phi + \frac{\varepsilon}{2} (\partial_x \phi)^2 + \frac{\varepsilon}{2\mu} (\partial_z \phi)^2 = -\zeta \quad (3.32)$$

D'après la proposition 3.2.1, et comme  $\partial_t \zeta = \frac{1}{\varepsilon} \partial_t h$ , l'équation  $(\mathbf{B}_4^{\text{adim}})$  peut aussi s'écrire

$$\partial_t h + \varepsilon \partial_x (h \bar{U}_1) = 0 \quad (3.33)$$

De plus, les équations  $(\mathbf{B}_2^{\text{adim}})$ ,  $(\mathbf{B}_3^{\text{adim}})$  et  $(\mathbf{B}_4^{\text{adim}})$  nous donnent

$$\partial_z \phi = \mathcal{O}(\mu) \text{ dans } \partial \Omega_t \quad (3.34)$$

$$\partial_{zz} \phi = \mathcal{O}(\mu) \text{ dans } \Omega_t \quad (3.35)$$

En dérivant  $\partial_{zz} \phi$  par rapport à  $x$  puis en intégrant par rapport à  $z$ , il vient

$$\partial_z \mathbf{U}_1 = \mathcal{O}(\mu) \quad (3.36)$$

Un développement de Taylor à l'ordre 1 en  $z_0 \in [\beta b(x) - 1, \varepsilon \zeta(x)]$  donne alors

$$\mathbf{U}_1(t, x, z) = \mathbf{U}_1(t, x, z_0) + \mathcal{O}(\mu) \quad (3.37)$$

En intégrant par rapport à  $z_0$ , il vient alors

$$\mathbf{U}_1(t, x, z) = \bar{\mathbf{U}}_1(t, x) + \mathcal{O}(\mu) \quad (3.38)$$

De plus en injectant (3.34) dans  $(\mathbf{B}_1^{\text{adim}})$  on se retrouve avec

$$\partial_t \phi + \frac{\varepsilon}{2} (\partial_x \phi)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon \mu) = -\zeta \quad (3.39)$$

En dérivant ce résultat par rapport à  $x$ , on a alors

$$\partial_{tx} \phi + \varepsilon \partial_{xx} \phi \partial_x \phi + \mathcal{O}(\varepsilon \mu) = -\partial_x \zeta \quad (3.40)$$

Ainsi, en intégrant (3.40) par rapport à  $z$  et en divisant par  $h$ , on trouve

$$\partial_t \bar{U}_1 + \frac{\varepsilon}{2} \partial_x U_1^2 + \partial_x \zeta = \mathcal{O}(\mu) \quad (3.41)$$

□

**Remarque :** Il est possible d'effectuer un raisonnement similaire en partant des équations de Navier-Stokes au lieu des équations d'Euler, ceci fait alors apparaître cette même équation avec un terme de viscosité en plus. Nous exploiterons cette dualité dans la partie 4 qui traite de l'ajout de termes d'amortissement.

## 4 Étude numérique de ces quelques équations

### 4.1 L'équation de Airy

L'équation (**Airy**) est une équation linéaire simple à résoudre. Il est toutefois très intéressant d'étudier les différents schémas numériques qui permettent de modéliser cette équation d'évolution. Pour cause, connaître l'action de ces schémas sur cette équation nous permettra de connaître, avec précision, l'effet de nos futurs schémas sur le terme de dispersion  $\partial_{xxx}u$  de l'équation de (**KdV**).

#### 4.1.1 Analyse qualitative de l'équation

En connaissant la condition initiale  $u(\cdot, 0) = u_0$ , on connaît, analytiquement, la solution  $u$  en tout temps. En effet, si  $\hat{u}$  désigne la transformée de Fourier en espace de  $u$ , l'équation (**Airy**) devient

$$\partial_t \hat{u}(\xi, t) - i\xi^3 \hat{u}(\xi, t) = 0.$$

Ceci nous donne alors

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{it\xi^3} \hat{u}_0(\xi). \quad (4.1)$$

Par transformée de Fourier inverse, on obtient alors une expression pour  $u$  en tout temps. De plus, deux conséquences se déduisent de cette expression.

**Première conséquence :** Il y a la conservation de la norme  $L^2$  de  $u$ ,

$$\|u\|_{L^2}(t) = \|\hat{u}\|_{L^2}(t) = \|e^{it\xi^3} \hat{u}_0\|_{L^2} = \|\hat{u}_0\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}. \quad (4.2)$$

Nous nous intéresserons alors à l'utilisation de schémas qui conservent cette norme de sorte qu'il n'y ait ni dissipation d'énergie, ni création d'instabilité.

**Deuxième conséquence :** L'amplitude des composantes spectrales de  $u$  est conservées. Par conséquent, la fréquence et l'amplitude de ses harmonique reste inchangée et son évolution en cours du temps résulte en une translation de ses différentes harmoniques vers la droite ou la gauche. Par exemple, si

$$u(x, 0) = \sin(\omega x + \Phi_0),$$

alors il existe une fonction  $\Phi_\omega$ , définie modulo  $2\pi$ , telle que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sin(\omega x + \Phi_\omega(t)) \\ &= u(x + \tau(t), 0) \end{aligned}$$

Par identification, on trouve la translation  $\tau(t) = \frac{\Phi_\omega(t) - \Phi_0}{\omega}$  et, en remarquant que  $\Phi_\omega(t) = \text{Arg}(\hat{u}(\omega, t))$ , on peut caractériser la vitesse de translation  $v_\omega := \partial_t \tau$  par la formule générale suivante

$$v_\omega(t) = \partial_t \left( \frac{\text{Arg}(\hat{u}(\omega, t))}{\omega} \right).$$

Lorsque  $u(\cdot, 0)$  admet plusieurs composantes spectrales, nous définirons de la même façon la vitesse de translation pour l'harmonique de fréquence  $\xi$  par

$$v_\xi(t) = \partial_t \left( \frac{\text{Arg}(\hat{u}(\xi, t))}{\xi} \right).$$

Dans le cas de l'équation de (**Airy**), d'après la relation (4.1), on sait que pour tout  $t \leq 0$ ,

$$\begin{aligned} v_\xi(t) &= \frac{1}{\xi} \partial_t (\text{Arg}(\hat{u}(\xi, \cdot))) \\ &= \frac{1}{\xi} \partial_t (t\xi^3) \\ &= \xi^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nous nous assurerons donc que notre schémas satisfasse au mieux cette propriété.

### 4.1.2 Discrétisation en temps

Commençons par discrétiser la variable temporelle uniformément. Posons  $t^n = n\Delta_t$ , et intéressons nous à l'approximation  $\mathcal{U}^n \approx u(\cdot, t^n)$  générée par le  $\theta$ -schéma si dessous.

$$\frac{\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta_t} + \partial_{xxx}(\theta \mathcal{U}^{n+1} + (1 - \theta)\mathcal{U}^n) = 0 \quad (4.4)$$

Les transformées de Fourier  $\widehat{\mathcal{U}}^n$  vérifient alors

$$\frac{\widehat{\mathcal{U}}^{n+1} - \widehat{\mathcal{U}}^n}{\Delta_t} - i\xi^3(\theta \widehat{\mathcal{U}}^{n+1} + (1 - \theta)\widehat{\mathcal{U}}^n) = 0$$

Ce qui donne

$$\widehat{\mathcal{U}}^{n+1} = \frac{1 + i(1 - \theta)\Delta_t \xi^3}{1 - i\theta\Delta_t \xi^3} \widehat{\mathcal{U}}^n$$

### Étude de la conservation de la norme $L^2$ de notre schéma

Si  $\theta < \frac{1}{2}$ , on a l'inégalité  $\left| \frac{1 + i(1 - \theta)\Delta_t \xi^3}{1 - i\theta\Delta_t \xi^3} \right| > 1$  et donc le  $\theta$ -schéma est instable au sens de la norme  $L^2$ .

Si  $\theta > \frac{1}{2}$ , on a l'inégalité  $\left| \frac{1 + i(1 - \theta)\Delta_t \xi^3}{1 - i\theta\Delta_t \xi^3} \right| < 1$  et donc la norme  $L^2$  décroît.

Si  $\theta = \frac{1}{2}$ , on a l'inégalité  $\left| \frac{1 + i(1 - \theta)\Delta_t \xi^3}{1 - i\theta\Delta_t \xi^3} \right| = 1$  et donc la norme  $L^2$  est conservée, c'est le schéma de Crank-Nicholson.

**Étude de l'évolution des harmoniques de  $\mathcal{U}^n$  :** On souhaite avoir une estimation de la vitesse de chaque harmonique de  $\mathcal{U}^n$ , pour cela nous allons approcher  $v_\xi$  par  $v_\xi^{\Delta_t}$  définie par

$$\begin{aligned} v_\xi^{\Delta_t} &= \frac{1}{\xi} \left( \frac{\text{Arg}(\widehat{\mathcal{U}}^{n+1}) - \text{Arg}(\widehat{\mathcal{U}}^n)}{\Delta_t} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta_t \xi} \left( \text{Arg} \left( \frac{\widehat{\mathcal{U}}^{n+1}}{\widehat{\mathcal{U}}^n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta_t \xi} \left( \text{Arg} \left( \frac{1 + i(1 - \theta)\Delta_t \xi^3}{1 - i\theta\Delta_t \xi^3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta_t \xi} (\text{Arg}(1 + i(1 - \theta)\Delta_t \xi^3) - \text{Arg}(1 - i\theta\Delta_t \xi^3)) \\ &= \frac{1}{\Delta_t \xi} (\text{Arctan}((1 - \theta)\Delta_t \xi^3) + \text{Arctan}(\theta\Delta_t \xi^3)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Le développement limité de Arctan en 0 nous donne alors

$$v_\xi^{\Delta_t} = \xi^2 - \frac{1}{3} ((1 - \theta)^3 + \theta^3) \Delta_t^2 \xi^8 + \mathcal{O}((\Delta_t)^4) \quad (4.6)$$

Pour la suite, on supposera que l'ensemble  $\text{Supp}(\hat{u}) := \{\xi > 0 \mid \|\hat{u}\| > 0\}$  est borné (majoré par une constante  $\xi_{\max}$ ). On s'assurera alors de vérifier  $\Delta_t^2 \xi^8 \ll 1$  dans cet ensemble. Autrement dit, on imposera

$$\Delta_t \ll \left( \frac{1}{\xi_{\max}} \right)^4$$

**Remarque :** Le  $\theta$  qui minimise le second terme de ce développement limité est  $\theta = \frac{1}{2}$ . Le schéma de Crank Nicholson est donc le meilleur ici aussi.

### 4.1.3 Discrétisation temps et en espace :

Discrétisons désormais aussi la variable d'espace. Posons  $x_j = j\Delta_x$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  et intéressons nous à l'approximation  $\mathcal{U}_j^n \approx u(x_j, t^n)$ , définie par le schéma suivant

$$\frac{\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta_t} + B(\theta \mathcal{U}^{n+1} + (1 - \theta) \mathcal{U}^n) = 0 \quad (4.7)$$

où  $\mathcal{U}^{n+1}$  désigne cette fois la suite  $(\mathcal{U}_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$  et où  $B$  est un opérateur linéaire que nous déterminerons plus tard mais que nous supposons antisymétrique.

### Étude de la conservation de la norme $L^2$ de notre schéma

Désignons par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire associé à l'espace de Hilbert  $l^2(\mathbb{Z})$  défini par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i v_i \Delta_x$$

et observons l'évolution de  $\mathcal{U}^n$  pour la norme associée. Pour cela on effectue le produit scalaire des termes de l'équation (4.7) par  $\mathbf{v}_\theta^n = (\theta \mathcal{U}^{n+1} + (1 - \theta) \mathcal{U}^n)$ . Ceci donne

$$\langle \mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n, \mathbf{v}_\theta^n \rangle + \Delta_t \langle B \mathbf{v}_\theta^n, \mathbf{v}_\theta^n \rangle = 0 \quad (4.8)$$

Comme  $B$  est antisymétrique, il vient

$$\langle B \mathbf{v}_\theta^n, \mathbf{v}_\theta^n \rangle = \langle \mathbf{v}_\theta^n, B^T \mathbf{v}_\theta^n \rangle = -\langle B \mathbf{v}_\theta^n, \mathbf{v}_\theta^n \rangle = 0$$

Et donc (4.8) devient

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n, \mathcal{U}^n + \theta(\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n) \rangle \\ &= \langle \mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n, \mathcal{U}^n \rangle + \theta \|\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n\|^2 \\ &= \langle \mathcal{U}^{n+1}, \mathcal{U}^n \rangle - \|\mathcal{U}^n\|^2 + \theta \|\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n\|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\|\mathcal{U}^{n+1}\|^2 + \|\mathcal{U}^n\|^2 - \|\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n\|^2) - \|\mathcal{U}^n\|^2 + \theta \|\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n\|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\|\mathcal{U}^{n+1}\|^2 - \|\mathcal{U}^n\|^2 - (1 - 2\theta) \|\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n\|^2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Autrement dit,

$$\|\mathcal{U}^{n+1}\|^2 = \|\mathcal{U}^n\|^2 + (1 - 2\theta) \|\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n\|^2 \quad (4.10)$$

On en déduit que :

Si  $\theta = \frac{1}{2}$ ,  $\|\mathcal{U}^{n+1}\|^2 = \|\mathcal{U}^n\|^2$  et donc la norme  $L^2$  numérique est conservée.

Si  $\theta > \frac{1}{2}$ ,  $\|\mathcal{U}^{n+1}\|^2 < \|\mathcal{U}^n\|^2$  et donc la norme  $L^2$  décroît. (il y a dissipation d'énergie)

Si  $\theta < \frac{1}{2}$ ,  $\|\mathcal{U}^{n+1}\|^2 > \|\mathcal{U}^n\|^2$  et donc la norme  $L^2$  croît. (le schéma est instable)

### Choix d'un schéma pour la dérivée troisième

Pour la suite nous poserons pour  $B$  l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} B : l^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ (\mathbf{v}_i)_{i \in \mathbb{Z}} &\mapsto \left( \frac{\mathbf{v}_{i-2} - 2\mathbf{v}_{i-1} + 2\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_{i+2}}{2(\Delta_x)^3} \right)_{i \in \mathbb{Z}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Cet opérateur est antisymétrique. Le schéma associé est consistant à l'ordre 2 à l'opérateur  $\partial_{xxx}$ .

#### 4.1.4 Implémentation numérique

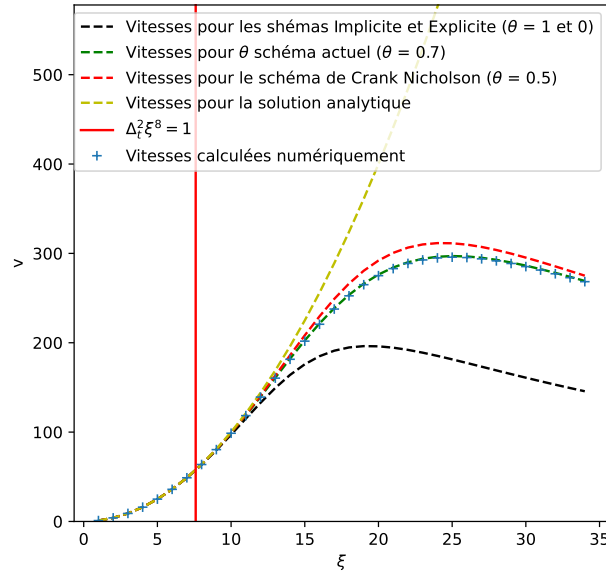


FIGURE 4 – Estimation des vitesses des harmoniques de chaque schéma en fonction de la fréquence pour  $\Delta_t = 3 \times 10^{-4}$ , comparé avec les vitesses numériquement calculées lors simulation de Airy avec le  $\theta$ -schéma pour  $\theta = 0, 7$ .

## 4.2 L'équation de KdV

Dans cette partie nous écrirons plutôt (**KdV**) sous la forme

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u + \frac{1}{2} \partial_x (u^2) = 0$$

### 4.2.1 Quelques lois de conservation des équations de KdV

L'équation de **KdV** présente de nombreux invariants. Dans cette sous-partie, nous mettrons en lumière 3 principaux invariants : la masse, la norme et l'énergie que vous retrouverez par exemple dans JOHNSON[13]. Cependant, Miura a démontré en 1974 qu'il existe en réalité une infinité d'invariants pour cette équation.

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $u$  une solution de (**KdV**). Supposons que  $u$  et toutes ses dérivées en espace tendent vers 0 lorsque  $|x|$  tend vers l'infini (conformément à l'hypothèse ( $\mathbf{H}_9$ )). Supposons aussi que  $u$  est intégrable. Alors les égalités suivantes sont vérifiées.*

$$\partial_t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u \right) = 0 \quad (4.12)$$

$$\partial_t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \right) = 0 \quad (4.13)$$

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u \partial_{xx} u + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^3}{6} \right) = 0 \quad (4.14)$$

*Démonstration.* Commençons par la moyenne de  $u$  :

$$\begin{aligned}\partial_t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t u \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\partial_{xxx} u - \frac{1}{2} \partial_x (u^2) \right) \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{xxx} u - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x (u^2) \\ &= - [\partial_{xx} u]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} [u^2]_{-\infty}^{+\infty}\end{aligned}$$

Comme  $\partial_x u$  et  $u^2$  sont nuls en l'infini, on a donc l'égalité voulue.

Regardons ensuite la norme  $L^2$  de  $u$  :

$$\begin{aligned}\partial_t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t (u^2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2u \partial_t u \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} u \times \left( -\partial_{xxx} u - \frac{1}{2} \partial_x (u^2) \right) \\ &= -2 \int_{-\infty}^{+\infty} u \partial_{xxx} u - \int_{-\infty}^{+\infty} u \partial_x (u^2)\end{aligned}$$

Après une intégration par partie, il vient alors

$$\begin{aligned}\partial_t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \right) &= -2 [u \partial_{xx} u]_{-\infty}^{+\infty} + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x u \partial_{xx} u - [u^3]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \partial_x u \\ &= -2 [u \partial_{xx} u]_{-\infty}^{+\infty} + 2 \left[ \frac{(\partial_x u)^2}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - [u^3]_{-\infty}^{+\infty} + \left[ \frac{u^3}{3} \right]_{-\infty}^{+\infty}\end{aligned}$$

Comme toutes ces fonctions sont nulles en l'infini, tous les termes sont nuls et il découle donc l'égalité voulue.

Pour finir regardons l'énergie de l'équation de **(KdV)**. Pour cela, multiplions  $u$  par  $\partial_{xx} u$ . Remarquons à l'aide de deux intégrations par parties successives que

$$\begin{aligned}\partial_t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u \partial_{xx} u \right) &= -\partial_t \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x u)^2 \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \partial_x (\partial_t u) \partial_x u \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t u \partial_{xx} u\end{aligned}$$

En remplaçant  $\partial_t u$  conformément à l'équation de KdV, il s'en suit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \partial_t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u \partial_{xx} u \right) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \partial_{xxx} u + \frac{1}{2} \partial_x (u^2) \right) \partial_{xx} u \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{xxx} u \partial_{xx} u - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x (u^2) \partial_{xx} u \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x ((\partial_{xx} u)^2) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \partial_{xxx} u \\ &= [-(\partial_{xx} u)^2]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \partial_{xxx} u\end{aligned}$$

Encore une fois, par hypothèse, la fonction  $\partial_{xx} u$  est nulle en l'infini et donc le premier terme de cette dernière ligne est nul. Quant au second terme, en remplaçant  $\partial_{xxx} u$  conformément à l'équation de KdV, il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \partial_t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u \partial_{xx} u \right) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \left( -\partial_t u - \frac{1}{2} \partial_x (u^2) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \partial_t u - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \partial_x (u^2) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3} \partial_t (u^3) - \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x (u^4) \\ &= -\frac{1}{6} \partial_t \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 - \frac{1}{8} [u^4]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{6} \partial_t \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 + 0,\end{aligned}$$

ce qui nous donne l'égalité voulue. □

**Remarque :** Dans notre cas précis, nous étudierons des solutions sous la forme de vagues localisées telles que des solitons, on supposera alors une convergence très rapide vers 0 de la hauteur du fluide à mesure que l'on s'éloigne de cette vague. Dans ce contexte, il est alors sensé de supposer  $u$  intégrable.

#### 4.2.2 Discrétisation en temps : Les invariants du schéma de Sanz Serna

De manière analogue à (4.4), posons  $t^n = n\Delta_t$ , et intéressons à l'approximation  $\mathcal{U}^n \approx u(\cdot, t^n)$  générée par le  $\theta$ -schéma si dessous.

$$\frac{\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta_t} + \partial_{xxx} \left( \frac{\theta \mathcal{U}^{n+1} + (1-\theta)\mathcal{U}^n}{2} \right) + \frac{1}{2} \partial_x \left( \left( \frac{\theta \mathcal{U}^{n+1} + (1-\theta)\mathcal{U}^n}{2} \right)^2 \right) = 0 \quad (4.15)$$

On supposera que les fonctions  $\mathcal{U}^n$  et toutes leurs dérivées sont nulles à l'infini (conformément à l'hypothèse  $(H_9)$ ). Le cas  $\theta = \frac{1}{2}$  est connu sous le nom de schéma de Sanz-Serna.

#### Étude de l'évolution de la moyenne de $\mathcal{U}^n$

**Proposition 4.2.2.** *Soit  $(\mathcal{U}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions au moins trois fois dérivables satisfaisant (4.15) pour un certain  $\theta \in [0, 1]$ . Supposons que, pour tout entier  $n$ , la fonction  $\mathcal{U}^n$  et toutes ses dérivées en espace tendent vers 0 lorsque  $|x|$  tend vers l'infini (conformément à l'hypothèse  $(H_9)$ ). Alors pour tout entier  $n$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}^{n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}^n$ .*

*Démonstration.* Notons par  $\bar{\mathcal{U}}^n$  la moyenne  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}^n$ . En intégrant l'équation (4.15) on trouve la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mathcal{U}}^{n+1} - \bar{\mathcal{U}}^n}{\Delta_t} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{xxx} \left( \frac{\theta \mathcal{U}^{n+1} + (1-\theta)\mathcal{U}^n}{2} \right) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \left( \left( \frac{\theta \mathcal{U}^{n+1} + (1-\theta)\mathcal{U}^n}{2} \right)^2 \right) \\ &= - \left[ \partial_{xx} \left( \frac{\theta \mathcal{U}^{n+1} + (1-\theta)\mathcal{U}^n}{2} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\theta \mathcal{U}^{n+1} + (1-\theta)\mathcal{U}^n}{2} \right)^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $\bar{\mathcal{U}}^{n+1} - \bar{\mathcal{U}}^n = 0$ . □

#### Étude de l'évolution la norme $L^2$ de $\mathcal{U}^n$

On tire ici les même conclusion que pour l'équation de Airy, c'est à dire :

**Proposition 4.2.3.** *Soit  $(\mathcal{U}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions au moins trois fois dérivables satisfaisant (4.20) pour un certain  $\theta \in [0, 1]$ . Supposons que, pour tout entier  $n$ , la fonction  $\mathcal{U}^n$  et toutes ses dérivées en espace tendent vers 0 lorsque  $|x|$  tend vers l'infini (conformément à l'hypothèse  $(H_9)$ ).*

*Alors pour tout entier  $n \geq 0$  :*

*si  $\theta = \frac{1}{2}$ ,  $\int (\mathcal{U}^{n+1})^2 = \int (\mathcal{U}^n)^2$  donc la norme  $L^2$  est conservée.*

*si  $\theta > \frac{1}{2}$ ,  $\int (\mathcal{U}^{n+1})^2 \leq \int (\mathcal{U}^n)^2$  et donc la norme  $L^2$  décroît. (il y a dissipation d'énergie)*

*si  $\theta < \frac{1}{2}$ ,  $\int (\mathcal{U}^{n+1})^2 \geq \int (\mathcal{U}^n)^2$  et donc la norme  $L^2$  croît. (le schéma est instable)*

*Démonstration.* Posons  $\mathcal{V}_\theta^n = \frac{\theta \mathcal{U}^{n+1} + (1-\theta)\mathcal{U}^n}{2}$ . En multipliant (4.15) par  $\mathcal{V}_\theta^n$  puis en intégrant, la relation suivante s'obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta_t} \mathcal{V}_\theta^n &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}_\theta^n \partial_{xxx} \mathcal{V}_\theta^n - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}_\theta^n \partial_x \left( (\mathcal{V}_\theta^n)^2 \right) \\ (i.p.p) \quad &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \mathcal{V}_\theta^n \partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{V}_\theta^n)^2 \partial_x \mathcal{V}_\theta^n \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\partial_x \mathcal{V}_\theta^n)^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{6} \left[ (\mathcal{V}_\theta^n)^3 \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 0. \end{aligned}$$



Remarquons de plus, par un développement analogue à (4.9), que

$$(\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n) \mathcal{V}_\theta^n = \frac{1}{2} ((\mathcal{U}^{n+1})^2 - (\mathcal{U}^n)^2 + (1 - 2\theta)(\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n)^2).$$

On obtient alors la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{U}^{n+1})^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{U}^n)^2 = (1 - 2\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n)^2. \quad (4.16)$$

La croissance de la norme  $L^2$  dépend donc du signe de  $(1 - 2\theta)$  ce qui nous donne le résultat.  $\square$

### Évolution de l'énergie globale du système

Posons  $\mathcal{J}$  la fonctionnelle quadratique suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u \partial_{xx} u + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(u)^3}{6} \end{aligned}$$

**Proposition 4.2.4.** *Soit  $(\mathcal{U}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions au moins trois fois dérivables satisfaisant (4.20) pour un certain  $\theta \in [0, 1]$ . Supposons que, pour tout entier  $n$ , la fonction  $\mathcal{U}^n$  et toutes ses dérivées en espace tendent vers 0 lorsque  $|x|$  tend vers l'infini (conformément à l'hypothèse  $(H_9)$ ). Alors pour tout entier  $n \geq 0$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{J}(\mathcal{U}^{n+1}) - \mathcal{J}(\mathcal{U}^n)}{\Delta_t} &= -\theta(\Delta_t)^2 \left( \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta_t} \right)^3 \right) \\ &\quad + (1 - 2\theta) \left( \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{U}^{n+1})^3 - (\mathcal{U}^n)^3}{\Delta_t} \right) \\ &\quad - (1 - 2\theta) \left( \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}^n \left( \frac{(\mathcal{U}^{n+1})^2 - (\mathcal{U}^n)^2}{\Delta_t} \right) \right) \\ &\quad - (1 - 2\theta)(\Delta_t) \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial_x \mathcal{U}^{n+1} - \partial_x \mathcal{U}^n}{\Delta_t} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Posons à nouveau  $\mathcal{V}_\theta^n = \frac{\theta \mathcal{U}^{n+1} + (1-\theta) \mathcal{U}^n}{2}$ . En multipliant (4.15) par  $\partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n$  puis en intégrant, il vient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta_t} \partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n = - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{xxx} \mathcal{V}_\theta^n \partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \left( (\mathcal{V}_\theta^n)^2 \right) \partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n.$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{xxx} \mathcal{V}_\theta^n \partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \left( (\partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n)^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus, par une intégration par parties, il vient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \left( (\mathcal{V}_\theta^n)^2 \right) \partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n = - \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{V}_\theta^n)^2 \partial_{xxx} \mathcal{V}_\theta^n.$$

On parvient donc à la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta_t} \partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{V}_\theta^n)^2 \partial_{xxx} \mathcal{V}_\theta^n.$$

En remplaçant  $\partial_{xxx} \mathcal{V}_\theta^n$  conformément à la relation (4.20), on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta_t} \partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{V}_\theta^n)^2 \times \left( -\frac{\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta_t} - \frac{1}{2} \partial_x ((\mathcal{V}_\theta^n)^2) \right) \\ &= -\frac{1}{2\Delta_t} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{V}_\theta^n)^2 (\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n) - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{V}_\theta^n)^2 \partial_x ((\mathcal{V}_\theta^n)^2). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{V}_\theta^n)^2 \partial_x ((\mathcal{V}_\theta^n)^2) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x ((\mathcal{V}_\theta^n)^4) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\mathcal{V}_\theta^n)^4 \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 0\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n) \partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{V}_\theta^n)^2 (\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n). \quad (4.17)$$

Observons chacun de ces deux termes séparément. Tout d'abord une intégration par parties permet d'écrire

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n) \partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x (\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n) \partial_x \mathcal{V}_\theta^n \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x \mathcal{U}^{n+1} - \partial_x \mathcal{U}^n) (\theta \partial_x \mathcal{U}^{n+1} + (1 - \theta) \partial_x \mathcal{U}^n)\end{aligned}$$

Par un développement analogue à (4.9), on obtient alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n) \partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x \mathcal{U}^{n+1})^2 - (\partial_x \mathcal{U}^n)^2 + (1 - 2\theta) (\partial_x \mathcal{U}^{n+1} - \partial_x \mathcal{U}^n)^2$$

Que l'on peut aussi écrire, après une brève intégration par parties,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n) \partial_{xx} \mathcal{V}_\theta^n = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}^{n+1} \partial_{xx} \mathcal{U}^{n+1} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}^n \partial_{xx} \mathcal{U}^n + \frac{(1 - 2\theta)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x \mathcal{U}^{n+1} - \partial_x \mathcal{U}^n)^2 \quad (4.18)$$

Quant au second terme, cette même analogie permet d'avoir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{V}_\theta^n)^2 (\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}_\theta^n ((\mathcal{U}^{n+1})^2 - (\mathcal{U}^n)^2 + (1 - 2\theta) (\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n)^2) \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}_\theta^n ((\mathcal{U}^{n+1})^2 - (\mathcal{U}^n)^2) + \frac{1 - 2\theta}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}_\theta^n (\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n)^2\end{aligned}$$

Et, en développant le premier terme de la dernière ligne,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}_\theta^n ((\mathcal{U}^{n+1})^2 - (\mathcal{U}^n)^2) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (\theta (\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n) + (1 - 2\theta) \mathcal{U}^n) ((\mathcal{U}^{n+1})^2 - (\mathcal{U}^n)^2) \\ &= \frac{\theta}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n) ((\mathcal{U}^{n+1})^2 - (\mathcal{U}^n)^2) + \frac{1 - 2\theta}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}^n ((\mathcal{U}^{n+1})^2 - (\mathcal{U}^n)^2)\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'identité  $3(a + b)(a^2 - b^2) = 4(a^3 - b^3) - (a - b)^3$  nous donne

$$\frac{\theta}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n) ((\mathcal{U}^{n+1})^2 - (\mathcal{U}^n)^2) = 2\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{U}^{n+1})^3}{6} - \frac{(\mathcal{U}^n)^3}{6} + \frac{\theta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n)^3}{6}$$

Ce qui donne donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}_\theta^n ((\mathcal{U}^{n+1})^2 - (\mathcal{U}^n)^2) &= 2\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{U}^{n+1})^3}{6} - \frac{(\mathcal{U}^n)^3}{6} + \frac{\theta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n)^3}{6} \\ &\quad + \frac{1 - 2\theta}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}^n ((\mathcal{U}^{n+1})^2 - (\mathcal{U}^n)^2)\end{aligned} \quad (4.19)$$

En combinant (4.17), (4.18) et (4.19) on parvient finalement à la relation

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}^{n+1} \partial_{xx} \mathcal{U}^{n+1} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{U}^{n+1})^3}{6} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}^n \partial_{xx} \mathcal{U}^n + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{U}^n)^3}{6} - \theta \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n)^3}{6} \right) \\ &\quad + (1 - 2\theta) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{U}^{n+1})^3}{6} - \frac{(\mathcal{U}^n)^3}{6} \right) - (1 - 2\theta) \left( \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}^n ((\mathcal{U}^{n+1})^2 - (\mathcal{U}^n)^2) \right) \\ &\quad - (1 - 2\theta) \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x \mathcal{U}^{n+1} - \partial_x \mathcal{U}^n)^2 \right)\end{aligned}$$

□

**Remarque :** Pour  $\theta = \frac{1}{2}$ , certains termes s'annulent et ce résultat devient

$$\frac{\mathcal{J}(\mathcal{U}^{n+1}) - \mathcal{J}(\mathcal{U}^n)}{\Delta_t} = -\frac{(\Delta_t)^2}{24} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta_t} \right)^3.$$

**Pour résumer,** la norme  $L^2$  et la moyenne sont deux invariants du schéma de Sanz Serna ( $\theta = \frac{1}{2}$ ). En revanche l'énergie  $\mathcal{J}$  n'est pas invariante, elle est soumise à des variations de l'ordre  $\mathcal{O}(\Delta_t^2)$ .

### 4.2.3 Schéma numérique : les invariants discrets du schéma de Sanz Serna

De manière analogue à (4.7), posons  $x_j = j\Delta_x$  et  $t^n = n\Delta_t$  et intéressons nous à l'approximation  $\mathcal{U}_j^n \approx u(x_j, t^n)$  définie par le schéma de Sanz-Serna suivant

$$\frac{\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta_t} + B\left(\frac{\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n}{2}\right) + \frac{1}{2}D\left(\left(\frac{\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n}{2}\right)^2\right) = 0 \quad (4.20)$$

Où  $B$  et  $D$  sont deux opérateurs antisymétriques et où, pour toute suite  $\mathbf{V} = (v_i)_{i \in I}$ ,  $\mathbf{V}^2$  désigne le vecteur  $(v_i^2)_{i \in I}$ . Pour tout entier  $n$ , on supposera que la suite  $\mathcal{U} := (\mathcal{U}_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$  est sommable (i.e. qu'elle est dans  $l^1(\mathbb{Z})$ ). Par abus de notation, on notera  $\langle v, \mathbf{1} \rangle$  la somme  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j$ , où  $\mathbf{1}$  désigne la suite constante égale à 1, indexée par  $\mathbb{Z}$  et où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire dans  $l^2(\mathbb{Z})$  précédemment défini.

**Remarque :** Dans la pratique, nous simulerons sur un domaine fini avec conditions périodiques. Dans les démonstrations précédentes et celles qui suivront, tous les arguments qui utilisent la limite en l'infini de nos suites pour simplifier nos calculs peuvent être adaptées au cas périodique par des argument de télescopage de nos sommes. De plus, la présence d'un terme non linéaire empêche de calculer  $\mathcal{U}^{n+1}$  à partir de  $\mathcal{U}^n$  à l'aide d'une simple résolution linéaire. En pratique, à chaque itération, nous calculerons une approximation de  $\mathcal{U}^{n+1}$  à l'aide d'un algorithme de type point fixe de Picard, c'est à dire par l'intermédiaire de la suite  $V^k$  définie par

$$\frac{V^{k+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta_t} + B\left(\frac{V^{k+1} + \mathcal{U}^n}{2}\right) + \frac{1}{2}D\left(\left(\frac{V^k + \mathcal{U}^n}{2}\right)^2\right) = 0$$

### Évolution de la moyenne de $\mathcal{U}^n$

Les opérateurs  $B$  et  $D$  correspondant à une approximation aux sens des différences finies de  $\partial_{xxx}$  et  $\partial_x$  respectivement, on a les égalités  $B\mathbf{1} = D\mathbf{1} = 0$ . On s'intéresse à l'évolution de la somme  $\langle \mathcal{U}^n, \mathbf{1} \rangle := \sum_j \mathcal{U}_j^n$  lorsque  $n$  croît.

**Proposition 4.2.5.** Si  $(\mathcal{U}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $l^1(\mathbb{Z})$  satisfaisant (4.20), alors pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\langle \mathcal{U}^{n+1}, \mathbf{1} \rangle = \langle \mathcal{U}^n, \mathbf{1} \rangle$$

*Démonstration.* En sommant sur  $j \in \mathbb{Z}$  les coefficients des suites présentes dans l'équation (4.20), on obtient la relation suivante :

$$\frac{\langle \mathcal{U}^{n+1}, \mathbf{1} \rangle - \langle \mathcal{U}^n, \mathbf{1} \rangle}{\Delta_t} + \langle B\left(\frac{\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n}{2}\right), \mathbf{1} \rangle + \frac{1}{2} \langle D\left(\left(\frac{\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n}{2}\right)^2\right), \mathbf{1} \rangle = 0.$$

Par antisymétrie de  $B$ ,

$$\begin{aligned} \langle B\left(\frac{\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n}{2}\right), \mathbf{1} \rangle &= -\left\langle \left(\frac{\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n}{2}\right), B\mathbf{1} \right\rangle \\ &= -\left\langle \left(\frac{\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n}{2}\right), 0 \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, par antisymétrie de  $D$ ,

$$\langle D\left(\left(\frac{\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n}{2}\right)^2\right), \mathbf{1} \rangle = 0.$$

Il vient alors

$$\frac{\langle \mathcal{U}^{n+1}, \mathbf{1} \rangle - \langle \mathcal{U}^n, \mathbf{1} \rangle}{\Delta_t} = 0.$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $\langle \mathcal{U}^n, \mathbf{1} \rangle = \langle \mathcal{U}^0, \mathbf{1} \rangle$ . □

### Évolution norme $l^2$ de $\mathbf{U}^n$ dans le cas d'un schéma d'ordre 2 de la dérivée pour l'opérateur $D$

Pour cette partie, posons comme  $D$  l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} D : l^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ (\mathbf{v}_j)_{j \in \mathbb{Z}} &\mapsto \left( \frac{\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_{j-1}}{2\Delta_x} \right)_{j \in \mathbb{Z}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

On souhaite étudier l'évolution de la norme  $l^2$  de  $\mathbf{U}^n$ . Pour cela on effectue le produit scalaire des termes de l'équation (4.20) par  $\mathbf{V}^n = \frac{(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n)}{2} = (\mathbf{v}_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ . Ceci donne

$$\frac{\langle \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n, \mathbf{V}^n \rangle}{\Delta_t} + \langle B\mathbf{V}^n, \mathbf{V}^n \rangle + \frac{1}{2} \langle D(\mathbf{V}^n)^2, \mathbf{V}^n \rangle = 0.$$

Remarquons que  $\langle \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n, \mathbf{V}^n \rangle = \frac{1}{2} (\|\mathbf{U}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{U}^n\|^2)$ . De plus, par antisymétrie de  $B$ , on sait que  $\langle B\mathbf{V}^n, \mathbf{V}^n \rangle = 0$ . Ces simplifications nous amènent à l'égalité suivante

$$\frac{\|\mathbf{U}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{U}^n\|^2}{\Delta_t} = -\langle D(\mathbf{V}^n)^2, \mathbf{V}^n \rangle.$$

Dès lors, prenons compte de la proposition suivante :

**Proposition 4.2.6.** *Soit  $\mathbf{V} = (v_j)_{j \in \mathbb{V}}$  une suite appartenant à  $l^2(\mathbb{Z})$  telle que  $\mathbf{V}^2 := (v_j^2)_{j \in \mathbb{V}}$  est aussi dans  $l^2(\mathbb{Z})$  et soit  $D$  l'opérateur précédemment explicité. Alors l'égalité suivante est vérifiée*

$$\langle D\mathbf{V}^2, \mathbf{V} \rangle = -\frac{(\Delta_x)^2}{6} \langle (\tilde{D}\mathbf{V})^3, \mathbf{1} \rangle \quad (4.22)$$

Où  $\tilde{D}$  est définie par  $(\tilde{D}\mathbf{V})_j = \frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta_x}$  et représente une approximation à l'ordre  $\mathcal{O}(\Delta_x)$  de l'opérateur  $\partial_x$ .

*Démonstration.* Par antisymétrie de  $D$ ,

$$\langle D\mathbf{V}^2, \mathbf{V} \rangle = -\langle \mathbf{V}^2, D\mathbf{V} \rangle$$

En développant le terme de droite, on a donc

$$\begin{aligned} \langle D\mathbf{V}^2, \mathbf{V} \rangle &= -\frac{1}{2\Delta_x} \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j^2 (v_{j+1} - v_{j-1}) \\ &= -\frac{1}{2\Delta_x} \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j^2 v_{j+1} - v_j^2 v_{j-1} \\ &= -\frac{1}{2\Delta_x} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j^2 v_{j+1} - \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j^2 v_{j-1} \right). \end{aligned}$$

Si on ré-indexe la somme de droite par le changement de variable  $j' = j - 1$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} \langle D\mathbf{V}^2, \mathbf{V} \rangle &= -\frac{1}{2\Delta_x} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j^2 v_{j+1} - \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_{j+1}^2 v_j \right) \\ &= -\frac{1}{2\Delta_x} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (v_j^2 v_{j+1} - v_{j+1}^2 v_j) \\ &= -\frac{1}{2\Delta_x} \frac{1}{3} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (3v_j^2 v_{j+1} - 3v_{j+1}^2 v_j). \end{aligned}$$

En partant de la formule du binôme de Newton  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  pour  $a = v_{j+1}$  et  $b = v_j$ , il vient que

$$v_j^2 v_{j+1} - v_{j+1}^2 v_j = \frac{1}{3} ((v_{j+1} - v_j)^3 - v_{j+1}^3 + v_j^3).$$

Et donc

$$\langle D\mathbf{V}^2, \mathbf{V} \rangle = -\frac{1}{6\Delta_x} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} (v_{j+1} - v_j)^3 - \sum_{j \in \mathbb{Z}} (v_{j+1}^3 - v_j^3) \right).$$

Les termes de la somme de droite se télescopent, et  $v_j$  tend vers 0 en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Cette somme est donc nulle. Il nous reste donc

$$\langle D\mathbf{V}^2, \mathbf{V} \rangle = -\frac{1}{6\Delta_x} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (v_{j+1} - v_j)^3.$$

Autrement dit,

$$\langle D\mathbf{V}^2, \mathbf{V} \rangle = -\frac{(\Delta_x)^2}{6} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta_x} \right)^3.$$

□

On est finalement amené à la relation

$$\frac{\|\mathbf{U}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{U}^n\|^2}{\Delta_t} = (\Delta_x)^2 \frac{1}{6} \langle (\tilde{D}\mathbf{V}^n)^3, \mathbf{1} \rangle. \quad (4.23)$$

Ainsi, en assumant une certaine hypothèse de modération de la pente de  $u$ , ce qui est envisageable si on étudie de faibles longueurs d'onde, le terme  $(\Delta_x)^2 \frac{1}{12} \langle (\tilde{D}\mathbf{V}^n)^3, \mathbf{1} \rangle$  peut être considéré comme égal à  $\mathcal{O}((\Delta_x)^2)$ . Ce qui nous amène à

$$\frac{\|\mathbf{U}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{U}^n\|^2}{\Delta_t} = \mathcal{O}((\Delta_x)^2).$$

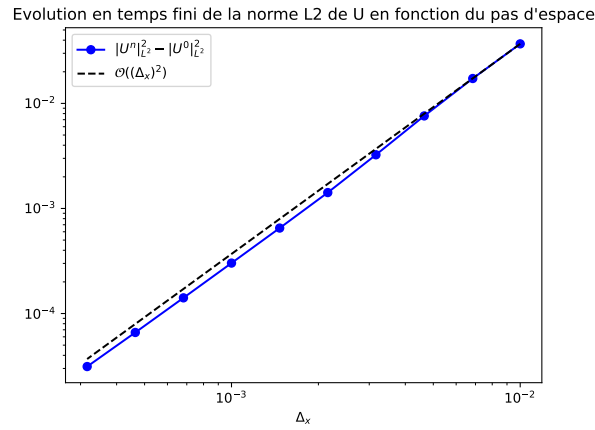


FIGURE 5 – Comparaison entre la norme  $L^2$  de  $U$  simulé au temps  $t = 0.1$  et la norme  $L^2$  de  $U$  au temps 0 pour  $\Delta_t = 10^{-3}$  pour plusieurs valeurs de  $\Delta_x$

### Évolution de l'énergie globale du système

**Proposition 4.2.7.** *Supposons qu'il existe un opérateur linéaire auto-adjoint  $L$ , telle que  $B = DL$ , posons  $J$  la fonctionnelle quadratique suivante*

$$J: U \mapsto \frac{1}{2} \langle U, LU \rangle + \frac{1}{6} \langle U^3, \mathbf{1} \rangle$$

Alors pour tout entier  $n$ ,

$$\frac{J(\mathbf{U}^{n+1}) - J(\mathbf{U}^n)}{\Delta_t} = -\frac{(\Delta_t)^2}{24} \left\langle \left( \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta_t} \right)^3, \mathbf{1} \right\rangle$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta_t}, LV^n \right\rangle &= -\langle DLV^n, LV^n \rangle - \frac{1}{2} \langle D(V^n)^2, LV^n \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \langle D(V^n)^2, LV^n \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle (V^n)^2, DLV^n \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \langle (V^n)^2, \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta_t} + (DV^n)^2 \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \langle (V^n)^2, \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta_t} \rangle - \frac{1}{2} \langle (V^n)^2, D(V^n)^2 \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \langle (V^n)^2, \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta_t} \rangle \\
&= -\frac{1}{8\Delta_t} \sum (U^{n+1} + U^n)^2 (U^{n+1} - U^n)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'identité  $3(a+b)^2(a-b) = 4(a^3 - b^3) - (a-b)^3$  nous donne

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta_t}, LV^n \right\rangle &= -\frac{1}{8\Delta_t} \sum \frac{4}{3} ((U^{n+1})^3 - (U^n)^3) + -\frac{1}{3} (U^{n+1} - U^n)^3 \\
&= -\frac{1}{\Delta_t} \left( \frac{1}{6} \langle D(U^{n+1})^3, \mathbf{1} \rangle - \frac{1}{6} \langle D(U^n)^3, \mathbf{1} \rangle \right) - \frac{(\Delta_t)^2}{24} \left\langle \left( \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta_t} \right)^3, \mathbf{1} \right\rangle
\end{aligned} \tag{4.24}$$

De plus, en développant le terme  $\left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta_t}, LV^n \right\rangle$ , il vient l'égalité suivante

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta_t}, LV^n \right\rangle &= \frac{1}{2\Delta_t} \langle U^{n+1} - U^n, LU^{n+1} + LU^n \rangle \\
&= \frac{1}{2\Delta_t} (\langle U^{n+1}, LU^{n+1} \rangle - \langle U^n, LU^n \rangle + \langle U^{n+1}, LU^n \rangle - \langle U^n, LU^{n+1} \rangle)
\end{aligned}$$

L'opérateur  $L$  étant auto-adjoint, on a  $\langle U^{n+1}, LU^n \rangle - \langle U^n, LU^{n+1} \rangle = 0$ , et donc

$$\left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta_t}, LV^n \right\rangle = \frac{1}{2\Delta_t} (\langle U^{n+1}, LU^{n+1} \rangle - \langle U^n, LU^n \rangle) \tag{4.25}$$

En combinant (4.24) et (4.25), on trouve alors le résultat voulu.  $\square$

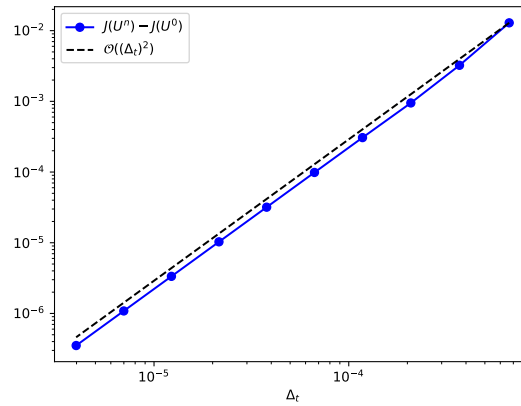


FIGURE 6 – Comparaison entre  $\mathbf{J}(U)$  simulé au temps  $t = 10^{-2}$  et  $\mathbf{J}(U)$  au temps 0 pour  $\Delta_x = 4 \times 10^{-3}$  en fonction du pas de temps  $\Delta_t$

**Pour résumer,** la moyenne est invariante pour le schéma de Sanz Serna tandis que la norme  $l^2$  et l'énergie ne sont que peu variant (Leurs variations sont de l'ordre de  $\mathcal{O}(\Delta_x^2)$  et  $\mathcal{O}(\Delta_t^2)$  respectivement).

#### 4.2.4 Un autre schéma rendant la norme $L^2$ discrètement invariant

Dans la pratique, lorsque nous étudierons ces équations avec des termes d'amortissement. Nous chercherons à évaluer numériquement l'effet de ce nouveau terme sur l'évolution de l'énergie au cours du temps. Dans ce but, lors de la simulation numérique, il sera important que l'énergie ne soit pas perturbée par les mauvais termes de notre schéma et donc que notre équation non amortie préserve "parfaitement" l'invariant relatif à la loi de conservation que nous chercherons ensuite à amortir. Une idée que l'on retrouve pour les équations de Schrödinger non-linéaires dans DELFOUR, FORTIN et PAYRE [5] permet d'avoir un schéma permettant une conservation exacte de cette grandeur.

Lors de la démonstration de la propriété 4.2.1, nous étions amené à utiliser l'égalité

$$\frac{1}{2} \int \partial_x(u^2)u = -\frac{1}{6} \int \partial_x(u^3)$$

L'équivalent discret de cette égalité avec notre schéma de Sanz Serna n'est pas une égalité exacte, mais une approximation à l'ordre  $\mathcal{O}(\Delta_x^2)$ . Pour cette raison, nous avons conclu à la relation 4.23. On peut cependant espérer trouver un opérateur  $\Psi$  supposé approcher  $u^2$  dans notre schéma de sorte que la partie supposée approcher  $\partial_x(u^3)$  devienne exactement  $-\frac{1}{6}\langle(D(\mathbb{U}^3), \mathbf{1})\rangle$ . Autrement dit, on cherche  $\Psi$  tel que

$$\frac{1}{2}\langle D\Psi(\mathbb{U}), \mathbb{U} \rangle = -\frac{1}{6}\langle(D(\mathbb{U}^3), \mathbf{1})\rangle.$$

Par antisymétrie de  $D$ , il viendrait alors

$$\frac{1}{6}\langle(D(\mathbb{U}^3), \mathbf{1})\rangle - \frac{1}{2}\langle\Psi(\mathbb{U}), D\mathbb{U}\rangle = 0,$$

ou encore

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{6} D(\mathbb{U}^3)_i - \frac{1}{2} \Psi(\mathbb{U})_i (D\mathbb{U})_i \right) \Delta_x = 0.$$

Un condition suffisante serait que  $\Psi$  satisfasse

$$\frac{1}{2} \Psi(\mathbb{U}) D\mathbb{U} = \frac{1}{6} D(\mathbb{U}^3)$$

Pour cela nous poserons donc

$$\begin{aligned} (\Psi(\mathbb{U}))_i &= \frac{1}{3} \frac{(D\mathbb{U}^3)_i}{(D\mathbb{U})_i} & \text{si } (D\mathbb{U})_i \neq 0 \\ (\Psi(\mathbb{U}))_i &= 0 & \text{si } (D\mathbb{U})_i = 0 \end{aligned}$$

**Remarque :** Si  $D$  est l'opérateur pour la dérivation d'ordre 2 défini par 4.21, alors

$$\Psi(\mathbb{U})_i = \frac{1}{6} ((\mathbb{U}_{i+1})^2 + (\mathbb{U}_{i+1} + \mathbb{U}_{i-1})^2 + (\mathbb{U}_{i-1})^2)$$

et  $\Psi$  est alors consistant à l'ordre  $\mathcal{O}(\Delta_x)$  à l'opérateur continu  $u \mapsto u^2$ .

Cela nous amène à étudier ce schéma que nous appellerons de Delfour-Fortin-Payre-Sanz-Serna.

$$\frac{\mathbb{U}^{n+1} - \mathbb{U}^n}{\Delta_t} + B \left( \frac{\mathbb{U}^{n+1} + \mathbb{U}^n}{2} \right) + \frac{1}{2} D\Psi \left( \frac{\mathbb{U}^{n+1} + \mathbb{U}^n}{2} \right) = 0 \quad (\text{DFP-SS})$$

La proposition la plus importante et qui découle de la façon dont nous avons construit  $\Psi$  est la conservation de la norme  $l^2$  induite par notre schéma.

**Proposition 4.2.8.** *Si  $(\mathbb{U}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $l^2(\mathbb{Z})$  satisfaisant (DFP-SS), alors pour tout entier naturel  $n$ ,*

$$\|\mathbb{U}^{n+1}\|_{l^2} = \|\mathbb{U}^n\|_{l^2}.$$

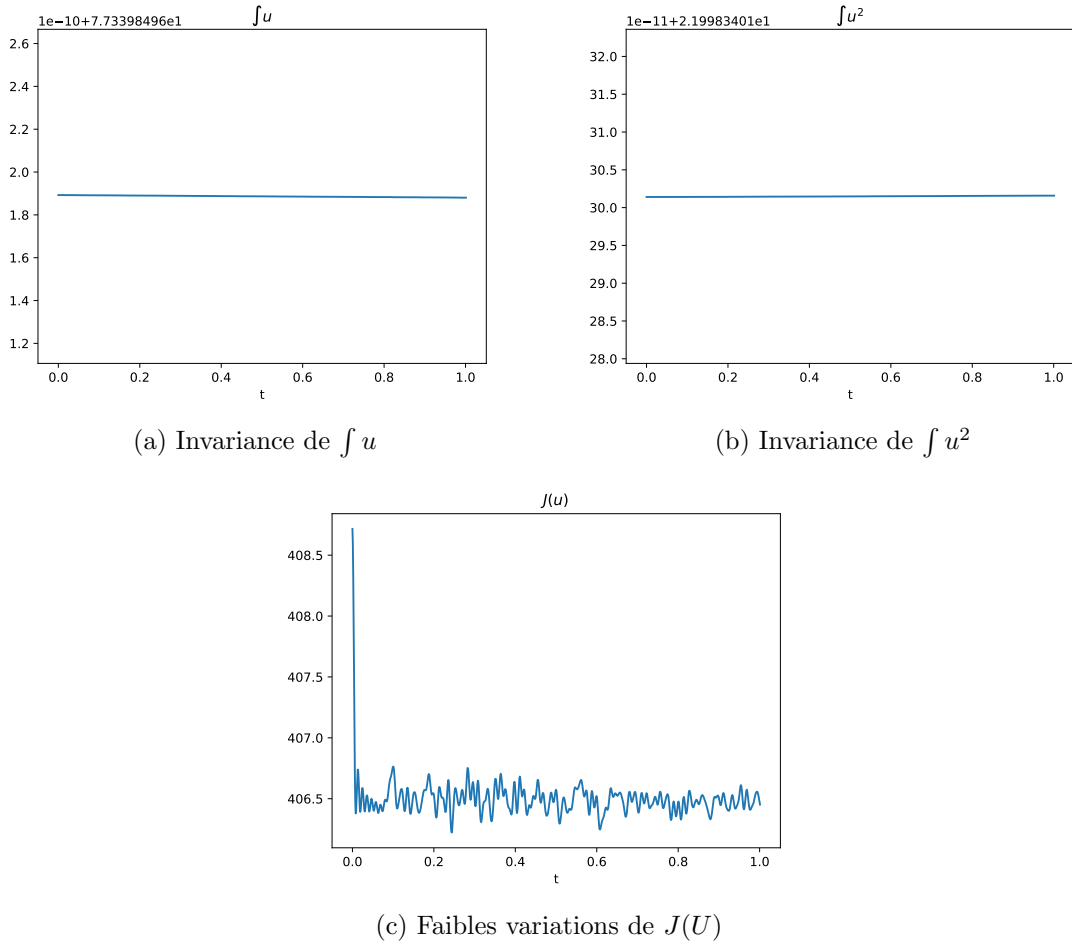


FIGURE 7 – Évolution des invariants de KdV en fonction du temps, simulés par le schéma numérique (DFP-SS)

*Démonstration.* Posons  $\mathbf{v}^n = \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2}$ , alors en effectuant le produit scalaire de l'équation (DFP-SS avec  $\mathbf{v}^n$ , il vient

$$\left\langle \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \mathbf{v}^n \right\rangle + \langle B\mathbf{v}^n, \mathbf{v}^n \rangle + \left\langle \frac{1}{2}D\Psi(\mathbf{v}^n), \mathbf{v}^n \right\rangle = 0.$$

Comme  $B$  est antisymétrique, on sait que

$$\langle B\mathbf{v}^n, \mathbf{v}^n \rangle = 0.$$

Par construction de  $\Psi$ , on sait que

$$\left\langle \frac{1}{2}D\Psi(\mathbf{v}^n), \mathbf{v}^n \right\rangle = -\frac{1}{6}\langle D(\mathbf{v}^n)^3, \mathbf{1} \rangle.$$

Et comme  $D$  est antisymétrique et  $D\mathbf{1} = 0$ , ce terme s'annule. Rappelons aussi que  $\langle \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n \rangle = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{u}^n\|^2)$ . Nous obtenons finalement

$$\frac{1}{2\Delta t}(\|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{u}^n\|^2) = 0.$$

□

De plus, on a toujours conservation de la moyenne.

**Proposition 4.2.9.** Si  $(\mathbf{u}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments  $l^1(\mathbb{Z})$  satisfaisant (DFP-SS), alors pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\langle \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{1} \rangle = \langle \mathbf{u}^n, \mathbf{1} \rangle$$

*Démonstration.* La preuve est la même que pour 4.2.5.

□



### 4.2.5 Un autre schéma rendant l'énergie discrètement invariant

Supposons disposer de  $L$ , un opérateur autoadjoint de  $l^2(\mathbb{Z})$  tel que  $B = DL$ . Rappelons que la fonctionnelle quadratique correspondant à l'énergie du système est

$$\mathbf{J} : \mathbf{U} \mapsto \frac{1}{2} \langle \mathbf{U}, L\mathbf{U} \rangle + \frac{1}{6} \langle \mathbf{U}^3, \mathbf{1} \rangle.$$

Tout comme pour la norme  $l^2$  dans la précédente sous-partie, cette quantité n'est pas conservée par le schéma de Sanz-Serna. Il est pourtant nécessaire pour la suite de ce mémoire chercher un schéma conservant parfaitement cette quantité en l'absence de terme d'amortissement. Pour cela, inspirons nous à nouveau à l'idée de DELFOUR, FORTIN et PAYRE [5] pour la conception d'un schéma préservant l'énergie. Lors de la démonstration de la propriété 4.2.1, concernant la conservation de l'énergie du système continu, nous avons été amené à utiliser l'égalité

$$\frac{1}{2} \int u^2 \partial_t u = \frac{1}{6} \int \partial_t u^3.$$

L'équivalent discret de cette égalité avec notre schéma de Sanz Serna n'est pas une égalité exacte, mais une approximation à l'ordre  $\mathcal{O}(\Delta_t^2)$  (voir (4.24)). Pour cette raison, nous avons conclu à la proposition 4.2.7. On peut cependant espérer trouver un opérateur  $\Xi$  supposé approcher  $u^2$  dans notre schéma de sorte que la partie supposée approcher  $\frac{1}{6} \int \partial_t (u^3)$  devienne exactement  $\frac{1}{6} \langle \frac{(\mathbf{U}^{n+1})^3 - (\mathbf{U}^n)^3}{\Delta_t}, \mathbf{1} \rangle$ . On cherche alors  $\Xi$  tel que

$$\frac{1}{2} \langle \Xi(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{U}^n), \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta_t} \rangle = \frac{1}{6} \langle \frac{(\mathbf{U}^{n+1})^3 - (\mathbf{U}^n)^3}{\Delta_t}, \mathbf{1} \rangle$$

ou encore

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( \Xi(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{U}^n)_i \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta_t} - \frac{1}{3} \frac{(\mathbf{U}^{n+1})^3 - (\mathbf{U}^n)^3}{\Delta_t} \right) = 0.$$

Il suffit alors que

$$\Xi(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{U}^n) = \frac{1}{3} \frac{(\mathbf{U}^{n+1})^3 - (\mathbf{U}^n)^3}{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n},$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$\Xi(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{U}^n) = \frac{1}{6} ((\mathbf{U}^{n+1})^2 + (\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n)^2 + (\mathbf{U}^n)^2).$$

Cela nous amène à étudier ce schéma que nous appellerons de Delfour-Fortin-Payre.

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta_t} + DL \left( \frac{\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2} \right) + \frac{1}{12} D ((\mathbf{U}^{n+1})^2 + (\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n)^2 + (\mathbf{U}^n)^2) = 0 \quad (\text{DFP})$$

De plus, on a toujours conservation de la moyenne.

**Proposition 4.2.10.** *Si  $(\mathbf{U}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments  $l^1(\mathbb{Z})$  satisfaisant (DFP), alors pour tout entier naturel  $n$ ,*

$$\langle \mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{1} \rangle = \langle \mathbf{U}^n, \mathbf{1} \rangle$$

*Démonstration.* La preuve est la même que pour 4.2.5. □

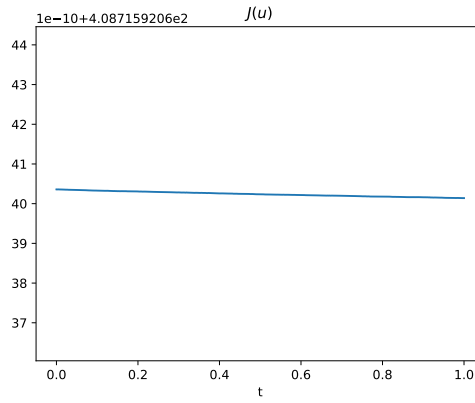
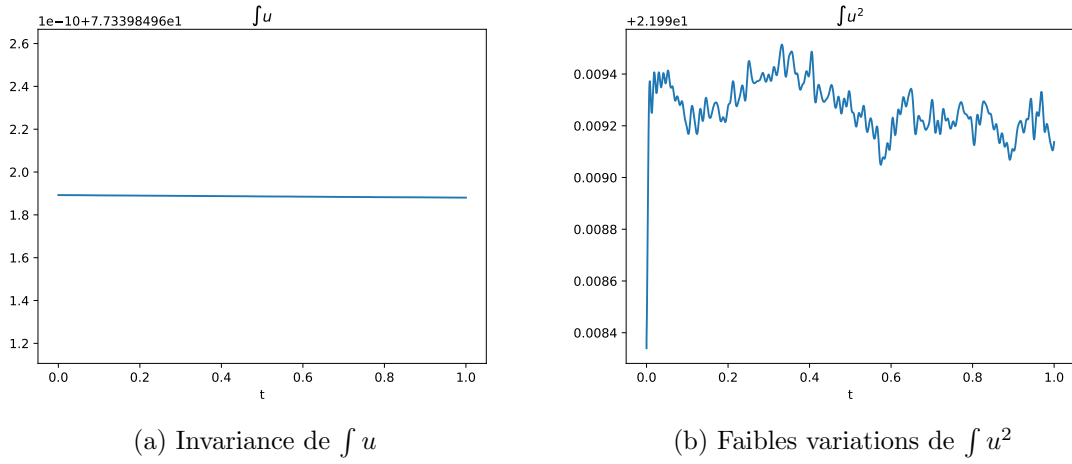
(c) "quasi-invariance" de  $J(u)$ 

FIGURE 8 – Évolution des invariants de KdV en fonction du temps, simulés par le schéma numérique (DFP)

**Remarque :** La très faible décroissance de  $J(u)$  observée ici (de l'ordre de  $10^{-11}$ ) est due au résidu de la méthode de point fixe utilisée pour gérer la non-linéarité du schéma.

#### 4.2.6 Les solitons de KdV

On cherche des solutions de l'équation de (**KdV**) sous la forme d'ondes voyageuses, qu'on appellera solitons. Le raisonnement de recherche de ce soliton présenté ci dessous est aussi trouvable dans MIRANVILLE et TEMAM[18] ainsi que dans GARNIER[8].

**Proposition 4.2.11.** Soit  $c \in \mathbb{R}$  et soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $u := (x, t) \mapsto g(x - ct)$  est solution de (**KdV**). Alors  $g$  vérifie

$$(g')^2 = cg^2 - \frac{1}{3}g^3 \quad (4.26)$$

*Démonstration.* En injectant  $g$  dans (**KdV**) on en déduit une équation régissant  $g$ .

$$-cg' + g^{(3)} + gg' = 0$$

Cette dernière peut aussi s'écrire

$$\left(-cg + g'' + \frac{1}{2}g^2\right)' = 0$$

En intégrant, il vient alors que

$$-cg + g'' + \frac{1}{2}g^2 = k_1.$$

Sachant l'hypothèse  $(\mathbf{H}_9)$ , on sait que  $k_1 = 0$ . Ce qui nous amène à

$$-cg + g'' + \frac{1}{2}g^2 = 0.$$

En multipliant cette équation par  $g'$ , il vient

$$\left(-\frac{c}{2}g^2 + \frac{1}{2}(g')^2 + \frac{1}{6}g^3\right)' = 0.$$

En intégrant, et en considérant à nouveau l'hypothèse  $(\mathbf{H}_9)$ , on obtient

$$-cg^2 + (g')^2 + \frac{1}{3}g^3 = 0.$$

□

Une astuce pour trouver une solution à cette équation, évoquée dans MIRANVILLE TEMAM[18] et détaillée dans GARNIER[8], revient à considérer la fonction transcendante élémentaire  $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et de chercher  $g$  sous la forme

$$g(x) = \lambda \text{ch}^\omega(\kappa x)$$

Puisque  $(\text{ch}')^2 = \text{ch}^2 - 1$ , on trouve

- $(g')^2 = \lambda^2 \omega^2 \kappa^2 (\text{ch}^{2\omega}(\kappa x) - \text{ch}^{2\omega-2}(\kappa x))$
- $cg^2 = c\lambda^2 \text{ch}^{2\omega}(\kappa x)$
- $\frac{1}{3}g^3 = \frac{\lambda^3}{3} \text{ch}^{3\omega}(\kappa x)$ .

On cherche alors  $\lambda$ ,  $\omega$  et  $\kappa$  tels que

$$\lambda^2 \omega^2 \kappa^2 \text{ch}^{2\omega}(\kappa x) - \lambda^2 \omega^2 \kappa^2 \text{ch}^{2\omega-2}(\kappa x) - c\lambda^2 \text{ch}^{2\omega}(\kappa x) + \frac{\lambda^3}{3} \text{ch}^{3\omega}(\kappa x) = 0.$$

On obtient alors les relations

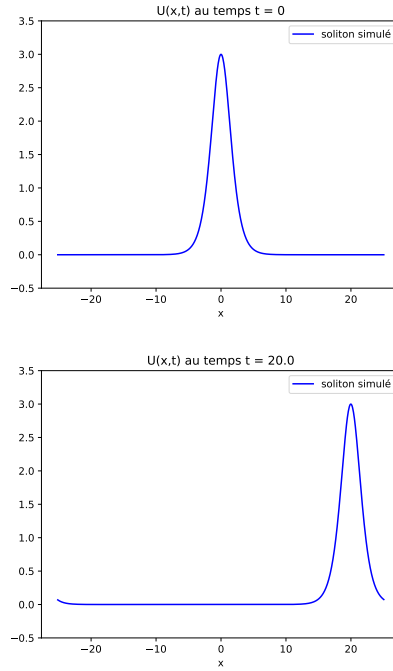
$$\begin{aligned} 2\omega - 2 &= 3\omega \\ \lambda^2 \omega^2 \kappa^2 &= c\lambda^2 \\ \lambda^2 \omega^2 \kappa^2 &= \frac{\lambda^3}{3}. \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} \omega &= -2 \\ \kappa &= \frac{\sqrt{c}}{2} \\ \lambda &= 3c. \end{aligned}$$

En résumé, une solution au problème (4.26) est

$$u(x, t) = \frac{3c}{\text{ch}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right)} \quad (\text{soliton})$$

FIGURE 9 – Simulation du soliton pour  $c = 1$ .

### 4.3 Implémentation via FFT

Simuler ces équations aux dérivées partielles en passant par une transformée de Fourier discrète donne un résultat très proche de notre schéma semi-discrétisations en temps. On rappelle les équations de KDV

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u + \frac{1}{2} \partial_x (u^2) = 0$$

On peut le modéliser avec un schéma de semi-discrétisation de type Sanz-Serna

$$\frac{\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta_t} + \partial_{xxx} \left( \frac{\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n}{2} \right) + \frac{1}{2} \partial_x \left( \left( \frac{\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n}{2} \right)^2 \right) = 0$$

Après passage à la transformée de Fourier en  $x$ . Il vient que

$$\frac{\mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1}) - \mathcal{F}(\mathcal{U}^n)}{\Delta_t} + i\xi^3 \frac{\mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1}) + \mathcal{F}(\mathcal{U}^n)}{2} - \frac{i\xi}{2} \mathcal{F} \left( \left( \frac{\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n}{2} \right)^2 \right) = 0,$$

ce qui équivaut à

$$\left( 1 + \frac{\Delta_t i \xi^3}{2} \right) \mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1}) = \left( 1 - \frac{\Delta_t i \xi^3}{2} \right) \mathcal{F}(\mathcal{U}^n) + \frac{\Delta_t i \xi}{8} \mathcal{F} \left( (\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n)^2 \right),$$

où encore

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1}) = \frac{2 - \Delta_t i \xi^3}{2 + \Delta_t i \xi^3} \mathcal{F}(\mathcal{U}^n) + \frac{\Delta_t i \xi}{8 + 4 \Delta_t i \xi^3} \mathcal{F} \left( (\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n)^2 \right).$$

On se propose alors de modéliser l'équation de KDV par un schéma de discrétisation obtenu en remplaçant cette transformée de Fourier par la transformée de Fourier discrète.

$$F\mathcal{U}^{n+1} = \frac{2 - \Delta_t i \xi^3}{2 + \Delta_t i \xi^3} F\mathcal{U}^n + \frac{\Delta_t i \xi}{8 + 4 \Delta_t i \xi^3} F \left( (\mathcal{U}^{n+1} + \mathcal{U}^n)^2 \right)$$

Pour tout entier  $n$ , posons  $W^n = F\mathcal{U}^n$ . Alors  $W^n$  satisfait le schéma

$$W^{n+1} = \frac{2 - \Delta_t i \xi^3}{2 + \Delta_t i \xi^3} W^n + \frac{\Delta_t i \xi}{8 + 4 \Delta_t i \xi^3} F \left( F^{-1} (W^{n+1} + W^n)^2 \right)$$

Dans la pratique, nous utiliserons une méthodes de point fixe de picard pour traiter le terme non linéaire dans le calcul de  $W^{n+1}$  connaissant  $W^n$ . Autrement dit, à chaque étape  $n$ , nous calculerons  $W^{n+1}$  comme limite de la suite  $V^k$  définie par

$$V^{k+1} = \frac{2 - \Delta_t i \xi^3}{2 + \Delta_t i \xi^3} W^n + \frac{\Delta_t i \xi}{8 + 4 \Delta_t i \xi^3} F \left( F^{-1} (V^k + W^n)^2 \right)$$

#### 4.4 Une généralisation 2D de KDV : l'équation de Kadomstev-Petviashvili

Dans cette section on se propose d'étudier une généralisation de l'équation de KDV au cas 2D appelée équation de Kadomstev-Petviashvili, définie par

$$\partial_x (\partial_t u + \partial_{xxx} u + \partial_x (u^2)) + \partial_{yy} u = 0$$

Pour que l'opérateur  $\partial_x$  soit inversible, on imposera la condition  $\int u(t, x, y) dx = 0$ , autrement dit,  $\mathcal{F}_x(u)|_{\xi=0} = 0$ . Un schéma de Sanz-Serna en temps et un passage à la transformée de Fourier en la variable  $x$  donne alors

$$\begin{aligned} & -i\xi \left( \frac{\mathcal{F}(U^{n+1}) - \mathcal{F}(U^n)}{\Delta_t} + i\xi^3 \frac{\mathcal{F}(U^{n+1}) + \mathcal{F}(U^n)}{2} - \frac{i\xi}{2} \mathcal{F} \left( \left( \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right)^2 \right) \right) \\ & + \partial_{yy} \frac{\mathcal{F}(U^{n+1}) + \mathcal{F}(U^n)}{2} - \frac{i\xi}{2} = 0 \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$(2\xi + i\Delta_t (\xi^4 + \partial_{yy})) \mathcal{F}(U^{n+1}) = (2\xi - i\Delta_t (\xi^4 + \partial_{yy})) \mathcal{F}(U^n) + \frac{\Delta_t i \xi^2}{4} \mathcal{F}((U^{n+1} + U^n)^2)$$

Ce qui nous amène à étudier le schéma de discrétisation suivant

$$(2A_1 + i\Delta_t (A_2 - A_3)) W^{n+1} = (2A_1 - i\Delta_t (A_2 - A_3)) W^n + \frac{\Delta_t i}{4} A_4 F \left( F^{-1} (W^{n+1} + W^n)^2 \right)$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= I_{N_y} \otimes \text{diag}(\xi) \\ A_2 &= I_{N_y} \otimes \text{diag}(\xi^4) = (A_1)^4 \\ A_3 &= L \otimes I_{N_x-1} \\ A_4 &= I_{N_y} \otimes \text{diag}(\xi^2) = (A_1)^2 \end{aligned}$$

Encore une fois, un implémentera le calcul de  $W^{n+1}$  par une méthode de point fixe, c'est à dire comme limite de la suite  $(V^k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par

$$(2A_1 + i\Delta_t (A_2 - A_3)) V^{k+1} = (2A_1 - i\Delta_t (A_2 - A_3)) W^n + \frac{\Delta_t i}{4} A_4 F \left( F^{-1} (V^k + W^n)^2 \right)$$

##### 4.4.1 L'équation de Saint Venant

L'équation de Saint Venant, (Nonlinear Shallow Water Equations en anglais) est définie par le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x (\varepsilon h u) &= 0 \\ \partial_t u + \partial_x \left( \frac{\varepsilon}{2} u^2 + \frac{1}{\varepsilon} h \right) &= -\frac{\beta}{\varepsilon} \partial_x b \end{aligned} \tag{SV1}$$

**Remarque :** Dans la littérature, ce système est parfois écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\partial_t h + \partial_x (\varepsilon h u) &= 0 \\ \partial_t (hu) + \partial_x \left( \varepsilon h u^2 + \frac{h^2}{2\varepsilon} \right) &= -\frac{\beta}{\varepsilon} h \partial_x b\end{aligned}\tag{SV2}$$

ou, plus rarement,

$$\begin{aligned}\partial_t \zeta + \partial_x (\varepsilon (\zeta - \beta b) u) &= 0 \\ \partial_t u + \partial_x \left( \frac{\varepsilon}{2} u^2 + \frac{1}{\varepsilon} h \right) &= -\frac{\beta}{\varepsilon} \partial_x b\end{aligned}\tag{SV3}$$

Ces trois systèmes sont équivalents.

#### 4.5 Quelques lois de conservation de l'équation

**Proposition 4.5.1.** *Soit le couple  $(h, u)$ , solution de l'équation (SV1). Supposons que  $u$  et  $h$  sont nuls en l'infini conformément à l'hypothèse  $(H_9)$ . Les égalités suivantes sont vérifiées*

$$\partial_t \left( \int h \right) = 0\tag{4.27}$$

$$\partial_t \left( \int u \right) = 0\tag{4.28}$$

$$\partial_t \left( \varepsilon \int h u^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int h^2 + 2 \frac{\beta}{\varepsilon} \int h b \right) = 0\tag{4.29}$$

*Démonstration.* Les deux premières lois de conservations proviennent immédiatement de la nature conservative de notre équation. En effet,

$$\begin{aligned}\partial_t \left( \int h \right) &= \int \partial_t h \\ &= - \int \partial_x (\varepsilon h u) \\ &= - [\varepsilon h u]_{-\infty}^{\infty} \\ &= 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_t \left( \int u \right) &= \int \partial_t u \\ &= - \int \partial_x \left( \frac{\varepsilon}{2} u^2 + h \right) \\ &= - \left[ \frac{\varepsilon}{2} u^2 + h \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= 0\end{aligned}$$

La troisième loi de conservation est trouvable à partir du bilan d'énergie des équations d'Euler (voir GUYON et al.[11]). Le terme  $(\varepsilon \int h u^2)$  représente l'énergie cinétique du système tandis que le terme  $(\int h^2 + \int 2\beta b h)$  définit l'énergie potentielle du système. Partant de là, on prouve que la somme est bien conservée grâce au développement suivant.

$$\begin{aligned}
\partial_t \left( \varepsilon \int hu^2 \right) &= \varepsilon \int \partial_t (hu^2) \\
&= \varepsilon \int (\partial_t h)u^2 + 2\varepsilon \int (\partial_t u)hu \\
&= -\varepsilon \int \partial_x (\varepsilon hu)u^2 - 2\varepsilon \int \partial_x \left( \frac{\varepsilon}{2}u^2 + \frac{1}{\varepsilon}h + \frac{\beta}{\varepsilon}b \right)hu \\
&= -\varepsilon^2 \left( \int \partial_x (hu)u^2 + hu\partial_x (u^2) \right) - 2 \int \partial_x (h + \beta b)hu \\
&= -\varepsilon^2 \int \partial_x (hu^3) + \frac{2}{\varepsilon} \int (h + \beta b)\partial_x (\varepsilon hu) \\
&= 0 - \frac{2}{\varepsilon} \int (h + \beta b)\partial_t h \\
&= -\frac{1}{\varepsilon} \int 2h\partial_t h - \int 2\beta b\partial_t h \\
&= -\frac{1}{\varepsilon} \partial_t \left( \int h^2 + \int 2\beta bh \right)
\end{aligned}$$

□

#### 4.5.1 Première approche : les schémas conservatifs

Pour la modélisation d'équations hyperboliques de la forme

$$\partial_t U + \partial_x (F(U)),$$

une grande famille de schémas présentée dans LEVEQUE[15] et ayant pour conséquence de préserver la moyenne  $\int U$  sont les schémas dit conservatifs. Ils se présentent sous la forme suivante :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta_t \frac{\mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n) - \mathcal{F}(U_{i-1}^n, U_i^n)}{\Delta_x},$$

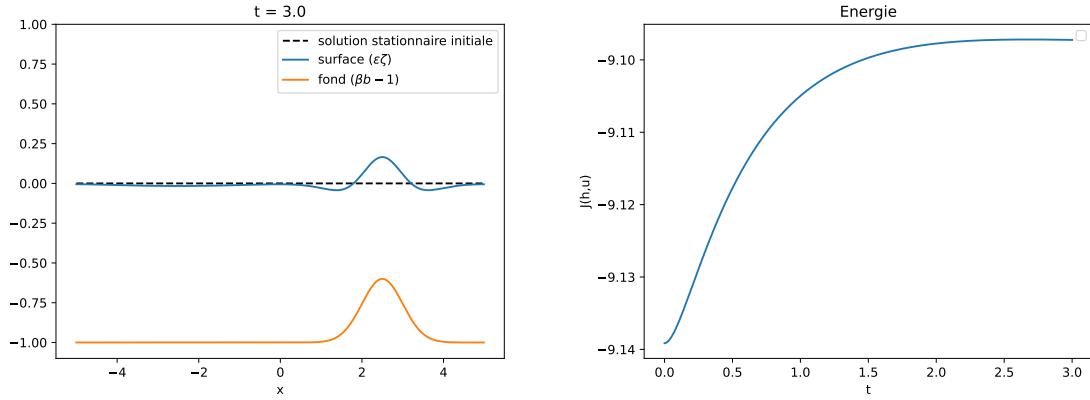
où on peut par exemple prendre  $\mathcal{F}$  souvent utilisée est

$$\mathcal{F}(A, B) = \frac{F(A) + F(B)}{2} - c_\Delta \frac{B - A}{2}.$$

Dans un premier temps, intéressons nous au cas où  $U = (h, u)$  et  $c_\Delta = \frac{\Delta_x}{\Delta_t}$ . Autrement dit, on s'intéresse au schéma de Lax-Friedrichs

$$U_i^{n+1} = \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} + \Delta_t \frac{F(U_{i+1}^n) - F(U_{i-1}^n)}{2\Delta_x}.$$

Les deux premières lois de conservation (4.27) et (4.28) sont alors par construction respectées par ce schéma. En revanche, ce schéma ne conserve pas la troisième loi (4.29) à cause d'une diffusion numérique. De plus, c'est une diffusion qui induit une convergence de ce système vers un état qui n'est pas d'énergie minimale et déstabilise alors l'état stationnaire .



(a) Solution stationnaire déformée par le schéma (b) Convergence vers un état d'énergie non minimale de Lax Friedrichs

FIGURE 10 – Simulation de Saint Venant par un schéma de Lax-Friedrichs pour une condition initiale  $h - \beta b + 1 = u = 0$

**Remarque :** Il existe une infinité de solution stationnaires à l'équation de Saint Venant (**SV1**). Celle citée précédemment,  $h - \beta b + 1 = u = 0$ , est la seule solution stationnaire satisfaisant l'hypothèse (**H**<sub>9</sub>) et est donc la seule qui nous intéresse dans ce document. Cette solution est appelée solution du lac au repos.

Un long travail a été effectué ces cinquante dernières années dans la recherche de schémas préservant la stabilité des états stationnaires d'équations hyperboliques telles que Saint-Venant. Depuis la publication de GREENBERG et LEROUX[10] en 1996, on dit de tels schémas qu'ils sont "bien balancés" (*Well-Balanced* en anglais).

Pour notre part, nous utiliserons un schéma proposé dans la thèse AUDUSSE[1] et dans AUDUSSE et al. [2].

#### 4.5.2 Construction d'une condition initiale unidirectionnelle

Une étape incontournable dans l'étude des écoulements fluides, et plus particulièrement dans l'étude la propagation de vagues isolées, est la nécessité de connaître ou de savoir approcher des conditions initiales permettant de simuler la propagation d'ondes solitaires unidirectionnelles. Contrairement à l'équation de KdV, l'équation de Saint-Venant n'admet pas d'onde solitaire indéformable. Cependant il est possible d'obtenir une condition initiale unidirectionnelle en simulant préalablement l'équation de Saint-Venant sur fond plat avec une condition initiale gaussienne.

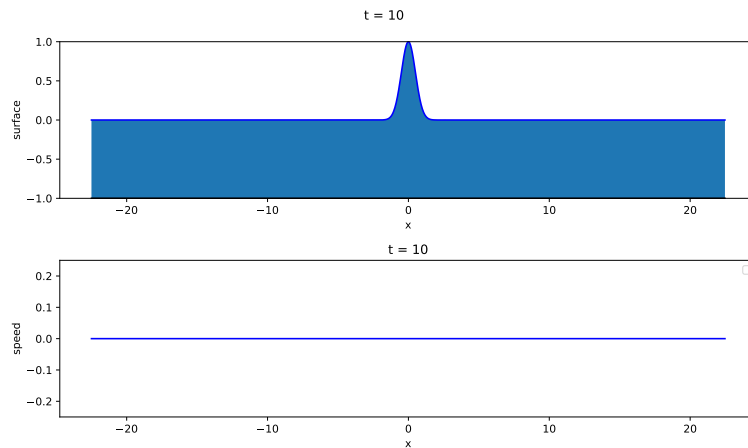


FIGURE 11 – Condition initiale de la simulation : une surface gaussienne et une vitesse nulle.



De la simulation avec cette condition initiale, il résulte deux vagues symétriques se déplaçant dans des directions opposées.

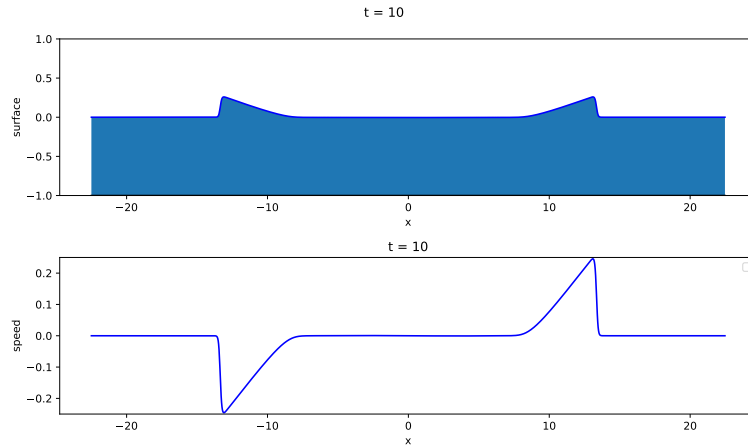


FIGURE 12 – Solution numérique obtenue après simulation jusqu'à  $t = 10$ .

En tronquant cette solution pour ne prendre que la vague de droite. On se retrouve avec une vague unidirectionnelle.

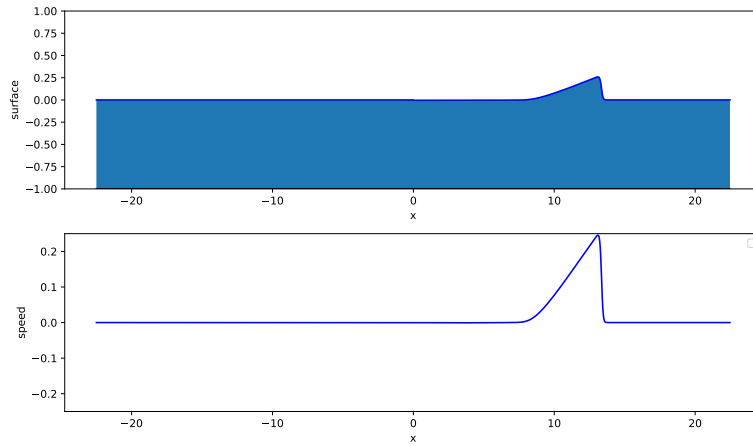


FIGURE 13 – Onde unidirectionnelle obtenue après troncature.

### 4.5.3 Reconstruction de la topographie du fond marin

Le raisonnement qui va suivre a pour but, en disposant de la hauteur  $h$  du fluide et de sa vitesse  $u$ , de déterminer la topographie  $b$  du fond marin supposée non connue.

Soit  $B$ , un opérateur tel que le schéma numérique

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta_t} + B(\mathbf{H}^n, \mathbf{U}^n, \mathbf{b}) = 0,$$

est consistant à l'équation d'évolution de la vitesse du système de Saint Venant explicité ci-dessus. Choisissons arbitrairement une topographie initiale  $\mathbf{b}_0$ . Appelons  $B_n$  l'application  $b \mapsto B(\mathbf{H}^n, \mathbf{U}^n, b)$ . Si  $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_0\|$  est assez petit, alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta_t} + B_n(\mathbf{b}_0) &= -(B_n(\mathbf{b}) - B_n(\mathbf{b}_0)) \\ &\approx -\text{Jac}(B_n) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) \end{aligned} \tag{4.30}$$

**Remarque :** Dans le cas d'un schéma classique tel que Lax-Friedrichs,  $B_n$  est affine et donc cette relation est une égalité. Cela ne sera (peut être) plus le cas lorsque nous étudierons d'autres schémas tels que certains schémas bien balancés. On cherche alors  $\mathbf{b}$  tels que

$$M_n \mathbf{b} = \Lambda_n \quad \forall n \quad (4.31)$$

avec  $M_n = -\text{Jac}(B_n)$  et  $\Lambda_n = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + B_n(\mathbf{b}_0) - M_n \mathbf{b}_0$ .

On s'intéressera à la résolution au sens des moindres carrés de ce système. On cherche alors un  $\mathbf{b}$  tel que

$$\mathbf{b} = \text{Argmin} \left( \sum_n \|M_n \mathbf{b} - \Lambda_n\|^2 \right) \quad (4.32)$$

On peut aussi chercher une approximation affine par morceau. Donnons nous  $(x_1, \dots, x_{N+2})$  une subdivision du domaine de définition de  $u$ ,  $h$  et  $b$ . Soit  $(\phi_i)_{i \in [1, N]}$  l'ensemble des fonctions chapeaux définissant la base de l'espace  $P_1$  relatif à cette subdivision.

$$\phi_i(x) := \max \left( 0, \min \left( \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \frac{x - x_{i+2}}{x_{i+1} - x_{i+2}} \right) \right)$$

Cherchons  $\mathbf{b}$  sous la forme

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i$$

Ceci revient à chercher  $\alpha$  tel que

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \\ &= \text{Argmin} \left( \sum_n \left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i M_n \phi_i - \Lambda_n \right\|^2 \right) \\ &= \text{Argmin} \sum_n \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \|M_n \phi_i\|^2 + 2 \sum_{j \neq i} \alpha_i \alpha_j \langle M_n \phi_i, M_n \phi_j \rangle - 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \langle M_n \phi_i, \Lambda_n \rangle + \|\Lambda_n\|^2 \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ce minimum est atteint en le point qui annule le gradient de cette fonctionnelle.  $\alpha$  vérifie alors

$$\left[ \sum_n \langle M_n \phi_i, M_n \phi_j \rangle \right]_{i,j} \cdot \alpha = \left[ \sum_n \langle M_n \phi_i, \Lambda_n \rangle \right]_i$$

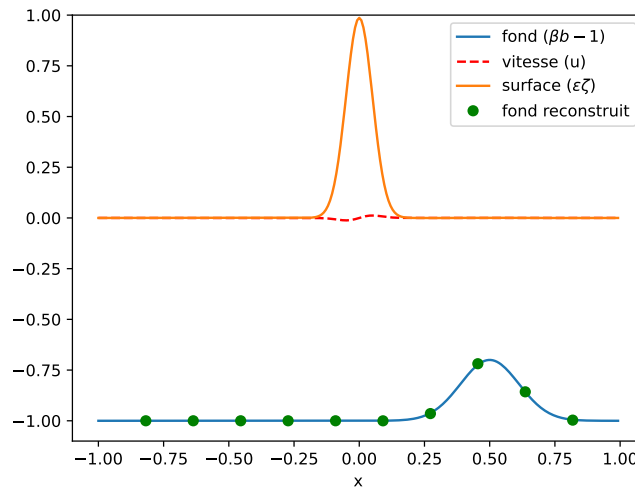


FIGURE 14 – Reconstruction du fond pour le schéma de Lax Friedrichs avec une seule itération pour un pas de temps  $\Delta t = 10^{-3}$

## 5 Vers les équations de Saint-Venant avec viscosité

En 2000, GERBEAU et PERTHAME [9], présentent pour la première fois la formulation des équations de Saint-Venant prenant en compte la viscosité sur un fond plat à partir des équations de Navier Stokes à surface libre. Trois ans plus tard, FERRARI et SALERI[7] abordent une généralisation prenant en compte notamment l'effet d'un fond (lentement) variable.

### 5.1 Introduction aux équations de Naviers Stokes à Surface libre pour un fond fixe non plat

Supposons que notre fluide ne vérifie désormais que les hypothèses  $(\mathbf{H}_1)$ ,  $(\mathbf{H}_4)$ ,  $(\mathbf{H}_5)$ ,  $(\mathbf{H}_6)$ ,  $(\mathbf{H}_7)$ ,  $(\mathbf{H}_8)$  et  $(\mathbf{H}_9)$ . L'ajout d'un terme de viscosité nous amène désormais à travailler sur les équations de Navier-Stokes incompressible (voir GUYON et al.[11]). En effet, la différence avec les équations d'Euler incompressible l'ajout d'une force dans le bilan des force (2.2) due à l'interaction de particules entre elles. Ce bilan des force devient alors

$$\rho \partial_{tt} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} = -\nabla P - \rho g \mathbf{z} + \mathbf{F}_{\text{visc}}(t, \mathcal{X}(t), \mathcal{Z}(t))$$

L'expression de la fonction vectorielle  $\mathbf{F}_{\text{visc}}$  est un sujet délicat car il dépend notamment de la nature du fluide en question. Dans notre cas, nous considérerons une expression représentative de fluides incompressibles dit newtoniens (tel que l'eau). Cette expression est

$$\mathbf{F}_{\text{visc}} = 2\nu \text{div}(\mathcal{D}(\mathbf{U})),$$

où  $\mathcal{D}$  désigne l'opérateur différentiel défini par

$$\mathcal{D}(\mathbf{U}) = \frac{\text{Jac}(\mathbf{U}) + \text{Jac}(\mathbf{U})^T}{2}.$$

L'évolution de la vitesse à l'intérieur d'un fluide incompressible se manifeste alors par les équations

$$\rho \partial_t \mathbf{U} + \rho(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} - 2\nu \text{div}(\mathcal{D}(\mathbf{U})) + \nabla P = -\rho g \mathbf{z}, \quad (\mathbf{N}_1)$$

et

$$\text{div}(\mathbf{U}) = 0. \quad (\mathbf{N}_2)$$

A l'instar de GERBEAU et PERTHAME [9], on pourra aussi écrire  $(\mathbf{N}_1)$  sous la forme

$$\rho \partial_t \mathbf{U} + \rho(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \text{div}(\sigma_T(\mathbf{U})) = -\rho g \mathbf{z}, \quad (\mathbf{N}_1^{\text{bis}})$$

avec

$$\sigma_T(\mathbf{U}) = -P \times Id + 2\nu \mathcal{D}(\mathbf{U}).$$

où  $\sigma_T(\mathbf{U})(x, z, t)$  est appelé tenseur de contrainte et représente toute les forces en action sur la particule de fluide située en le point  $(x, z)$  au temps  $t$ .

Dans le cas d'un problème de surface libre, on retrouve en partie les conditions de non sortie du fluide  $(\mathbf{E}_3)$  et  $(\mathbf{E}_4)$  présentées pour équations d'Euler dans le cas d'un fluide non visqueux. Pour le cas de la surface, on retrouve exactement la même expression :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(t, x) - \sqrt{1 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \zeta\|^2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{dans } \{z = \zeta(t, x)\}. \quad (\mathbf{N}_3)$$

A celle ci s'ajoute l'absence de contrainte en surface dans la direction de la normale sortante  $\mathbf{n}$ , car il n'y a pas de fluide dans cette direction.

$$\sigma_T(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} = -P_{\text{atm}} \mathbf{n} \quad \text{dans } \{z = \zeta(t, x)\}. \quad (\mathbf{N}_4)$$

Pour le cas du fond fixe, l'effet de la viscosité joue un grand rôle dans l'évolution de la vitesse transversale proche de ce dernier. Tout d'abord, on retrouve bien sûr la condition de non sortie  $(\mathbf{E}_3)$  :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{dans } \{z = b(x) - H_0\}. \quad (\mathbf{N}_5)$$

L'effet de viscosité induit une interaction entre le fond du fluide et les particules de fluide en contact avec celui ci. Ce frottement se traduit par la contrainte,

$$\sigma_T(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} = -\rho \kappa \mathbf{U} \quad \text{dans } \{z = b(x) - H_0\}. \quad (\mathbf{N}_6)$$

## 5.2 Cas de la dimension 2, adimensionnement des équations

En dimension 2 (  $x \in \mathbb{R}$  ), les équations précédemment décrites  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$  deviennent

$$\begin{aligned} \rho \partial_t U_1 + \rho U_1 \partial_x U_1 + \rho U_2 \partial_y U_1 + \partial_x P &= 2\nu \partial_{xx} U_1 + \nu \partial_{zz} U_1 + \nu \partial_{zx} U_2 \\ \rho \partial_t U_2 + \rho U_1 \partial_x U_2 + \rho U_2 \partial_y U_2 + \partial_y P &= 2\nu \partial_{zz} U_2 + \nu \partial_{xx} U_2 + \nu \partial_{zx} U_1 - \rho g, \\ \partial_x U_1 + \partial_y U_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4$  deviennent

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta + U_1 \partial_x \zeta - U_2 &= 0 \\ (2\nu \partial_x U_1 - (P - P_{\text{atm}})) \partial_x \zeta &= \nu \partial_y U_1 + \nu \partial_x U_2 \\ (\partial_z \nu U_1 + \nu \partial_x U_2) \partial_x \zeta &= 2\nu \partial_z U_2 - (P - P_{\text{atm}}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

et  $\mathbf{N}_5$  et  $\mathbf{N}_6$  deviennent

$$\begin{aligned} U_1 \partial_x b - U_2 &= 0 \\ \partial_x b (2\nu \partial_x U_1 - P) - \nu \partial_y U_1 - \nu \partial_x U_2 &= -\rho \kappa U_1 \\ \partial_x b (\nu \partial_y U_1 + \nu \partial_x U_2) - 2\nu \partial_y U_2 + P &= -\rho \kappa U_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Remarquons que le système (5.1) est équivalent à

$$\begin{aligned} \rho \partial_t U_1 + \rho \partial_x (U_1)^2 + \rho \partial_z (U_1 U_2) + \partial_x P &= 2\nu \partial_{xx} U_1 + \nu \partial_{zz} U_1 + \nu \partial_{zx} U_2 = 0 \\ \rho \partial_t U_2 + \rho \partial_x (U_1 U_2) + \rho \partial_z (U_2)^2 + \partial_z P &= 2\nu \partial_{zz} U_2 + \nu \partial_{xx} U_2 + \nu \partial_{zx} U_1 + \rho g = 0, \\ \partial_x U_1 + \partial_y U_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

De plus, le système (5.2), il est équivalent à

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta + U_1 \partial_x \zeta - U_2 &= 0 \\ (2\nu \partial_x U_1 - P_{\text{atm}}) \partial_x \zeta &= \nu \partial_z U_1 + \nu \partial_x U_2 \\ (2\nu \partial_x U_1 - P_{\text{atm}}) (\partial_x \zeta)^2 &= 2\nu \partial_z U_2 - P_{\text{atm}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

**Proposition 5.2.1.** *Soient les changement de de variable suivant*

$$U'_1(t, x, z) := \frac{L_1}{gt_0 a_{\text{surf}}} U_1(t_0 t, L_1 x, H_0 z) \quad (5.6)$$

$$U'_2(t, x, z) := \frac{H_0}{gt_0 a_{\text{surf}}} U_2(t_0 t, L_1 x, H_0 z) \quad (5.7)$$

$$P'(t, x, z) := \frac{t_0^2}{H_0^2 \rho_0} P(t_0 t, L_1 x, H_0 z) \quad (5.8)$$

$$P'_{\text{atm}} := \frac{t_0^2}{H_0^2 \rho_0} P_{\text{atm}} \quad (5.9)$$

$$\kappa' := \frac{t_0}{H_0} \kappa \quad (5.10)$$

où  $t_0, a_{\text{surf}}, L_1$  et  $H_0$  sont les paramètres défini dans la sous-section 2.4. Alors de (5.4), de (5.5) et de (5.3), on déduit les équations suivantes

$$\forall z \in [\beta b(x) - 1, \varepsilon \zeta(t, x)],$$

$$\partial_t U'_1 + \varepsilon \partial_x (U'_1)^2 + \frac{\varepsilon}{\mu} \partial_z (U'_1 U'_2) + \frac{\mu}{\varepsilon} \partial_x P' - \frac{2}{\text{Re}} \partial_{xx} U'_1 - \frac{1}{\mu \text{Re}} \partial_{zz} U'_1 - \frac{1}{\mu \text{Re}} \partial_{zx} U'_2 = 0 \quad (5.11)$$

$$\partial_t U'_2 + \varepsilon \mu \partial_x (U'_1 U'_2) + \frac{\varepsilon}{\mu} \partial_z (U'_2)^2 + \frac{\mu}{\varepsilon} \partial_z P' - \frac{2}{\mu \text{Re}} \partial_{zz} U'_2 - \frac{1}{\text{Re}} \partial_{xx} U'_2 - \frac{1}{\text{Re}} \partial_{zx} U'_1 = -\frac{1}{\varepsilon}, \quad (5.12)$$

$$\partial_z U'_2 + \mu \partial_x U'_1 = 0 \quad (5.13)$$

$$\forall z \in \{z = \varepsilon \zeta(t, x)\},$$

$$\partial_t \zeta' + \varepsilon U'_1 \partial_x \zeta' - \frac{1}{\mu} U'_2 = 0 \quad (5.14)$$

$$\varepsilon \mu \left( \frac{2}{\text{Re}} \partial_x U'_1 - \frac{\mu}{\varepsilon} (P' - P'_{\text{atm}}) \right) \partial_x \zeta' - \frac{1}{\text{Re}} (\partial_z U'_1 + \partial_x U'_2) = 0 \quad (5.15)$$

$$\varepsilon^2 \mu^2 \left( \frac{2}{\text{Re}} \partial_x U'_1 - \frac{\mu}{\varepsilon} (P' - P'_{\text{atm}}) \right) (\partial_x \zeta')^2 - \frac{2}{\text{Re}} \partial_z U'_2 + \frac{\mu^2}{\varepsilon} (P' - P'_{\text{atm}}) = 0 \quad (5.16)$$

$$\forall z \in \{z = \beta b(x) - 1\},$$

$$\beta \mu U'_1 \partial_x b' - U'_2 = 0 \quad (5.17)$$

$$\beta \mu \left( \frac{2}{\text{Re}} \partial_x U'_1 - \frac{\mu}{\varepsilon} P' \right) \partial_x b' - \frac{1}{\text{Re}} (\partial_z U'_1 + \partial_x U'_2) = -\mu \kappa' U'_1 \quad (5.18)$$

$$\frac{\beta \mu}{\text{Re}} (\partial_z U'_1 + \partial_x U'_2) \partial_x b' - \frac{2}{\text{Re}} \partial_z U'_2 + \frac{\mu^2}{\varepsilon} P' = -\mu \kappa' U'_2 \quad (5.19)$$

$$(5.20)$$

où  $\text{Re} = \frac{L_1^2 \rho_0}{t_0 \nu}$  est un paramètre appelé nombre de Reynolds.

*Démonstration.* **Premièrement**, comme  $\rho(t, x, z) = \rho_0$  pour tout  $(t, x, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbf{X} \times \mathbb{R}$ , on sait que

$$(5.4) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_0 \partial_t U_1 + \rho_0 \partial_x (U_1)^2 + \rho_0 \partial_y (U_1 U_2) + \partial_x P - 2\nu \partial_{xx} U_1 - \nu \partial_{zz} U_1 - \nu \partial_{zx} U_2 = 0 \\ \rho_0 \partial_t U_2 + \rho_0 \partial_x (U_1 U_2) + \rho_0 \partial_z (U_2)^2 + \partial_y P - 2\nu \partial_{zz} U_2 - \nu \partial_{xx} U_2 - \nu \partial_{zx} U_1 + \rho_0 g = 0, \\ \partial_x U_1 + \partial_z U_2 = 0 \end{cases}$$

Alors,

$$(5.4) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_0 \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \frac{1}{t_0} \partial_t U'_1 + \rho_0 \frac{g^2 t_0^2 a_{\text{surf}}^2}{L_1^2} \frac{1}{L_1} \partial_x (U'_1)^2 + \rho_0 \frac{g^2 t_0^2 a_{\text{surf}}^2}{H_0 L_1} \frac{1}{H_0} \partial_z (U'_1 U'_2) + \frac{H_0^2 \rho_0}{t_0^2} \frac{1}{L_1} \partial_x P' \\ \quad - 2\nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \frac{1}{L_1^2} \partial_{xx} U'_1 - \nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \frac{1}{H_0^2} \partial_{zz} U'_1 - \nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} \frac{1}{L_1 H_0} \partial_{zx} U'_2 = 0 \\ \rho_0 \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} \frac{1}{t_0} \partial_t U'_2 + \rho_0 \frac{g^2 t_0^2 a_{\text{surf}}^2}{L_1 H_0} \frac{1}{L_1} \partial_x (U'_1 U'_2) + \rho_0 \frac{g^2 t_0^2 a_{\text{surf}}^2}{H_0^2} \frac{1}{H_0} \partial_z (U'_2)^2 + \frac{H_0^2 \rho_0}{t_0^2} \frac{1}{H_0} \partial_z P' \\ \quad - 2\nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} \frac{1}{H_0^2} \partial_{zz} U'_2 - \nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} \frac{1}{L_1^2} \partial_{xx} U'_2 - \nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \frac{1}{H_0 L_1} \partial_{zx} U'_1 + \rho_0 g = 0, \\ \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \frac{1}{L_1} \partial_x U'_1 + \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} \frac{1}{H_0} \partial_z U'_2 = 0 \end{cases}$$

Après factorisation par  $\rho_0 \frac{g a_{\text{surf}}}{L_1}$  de la première équation, par  $\rho_0 \frac{g a_{\text{surf}}}{H_0}$  de la deuxième et par  $\frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0^2}$  de la troisième, le système se simplifie, donnant

$$(5.4) \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t U'_1 + \frac{gt_0^2 a_{\text{surf}}}{L_1^2} \partial_x (U'_1)^2 + \frac{gt_0^2 a_{\text{surf}}}{H_0^2} \partial_z (U'_1 U'_2) + \frac{H_0^2}{gt_0^2 a_{\text{surf}}} \partial_x P' \\ \quad - \frac{2\nu t_0}{L_1^2 \rho_0} \partial_{xx} U'_1 - \frac{\nu t_0}{H_0^2 \rho_0} \partial_{zz} U'_1 - \frac{\nu t_0}{H_0^2 \rho_0} \partial_{zx} U'_2 = 0 \\ \partial_t U'_2 + \frac{gt_0^2 a_{\text{surf}}}{L_1^2} \partial_x (U'_1 U'_2) + \frac{gt_0^2 a_{\text{surf}}}{H_0^2} \partial_z (U'_2)^2 + \frac{H_0^2}{gt_0^2 a_{\text{surf}}} \partial_z P' \\ \quad - \frac{2\nu t_0}{H_0^2 \rho_0} \partial_{zz} U'_2 - \frac{\nu t_0}{L_1^2 \rho_0} \partial_{xx} U'_2 - \frac{\nu t_0}{L_1^2 \rho_0} \partial_{zx} U'_1 + \frac{H_0}{a_{\text{surf}}} = 0, \\ \partial_z U'_2 + \frac{H_0^2}{L_1^2} \partial_x U'_1 = 0 \end{cases}$$

En rappelant que  $\frac{H_0^2}{L_1^2} = \mu$ , que  $\frac{gt_0^2 a_{\text{surf}}}{L_1^2} = \varepsilon$  et que  $\frac{L_1^2 \rho_0}{\nu t_0} = \text{Re}$ , on obtient

$$(5.4) \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t U_1' + \varepsilon \partial_x (U_1')^2 + \frac{\varepsilon}{\mu} \partial_z (U_1' U_2') + \frac{\mu}{\varepsilon} \partial_x P' \\ \quad - \frac{2}{\text{Re}} \partial_{xx} U_1' - \frac{1}{\mu \text{Re}} \partial_{zz} U_1' - \frac{1}{\mu \text{Re}} \partial_{zx} U_2' = 0 \\ \partial_t U_2' + \varepsilon \mu \partial_x (U_1' U_2') + \frac{\varepsilon}{\mu} \partial_z (U_2')^2 + \frac{\mu}{\varepsilon} \partial_z P' \\ \quad - \frac{2}{\mu \text{Re}} \partial_{zz} U_2' - \frac{1}{\text{Re}} \partial_{xx} U_2' - \frac{1}{\text{Re}} \partial_{zx} U_1' + \frac{1}{\varepsilon} = 0, \\ \partial_z U_2' + \mu \partial_x U_1' = 0 \end{cases}$$

De plus,

$$(5.5) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{\text{surf}} \frac{1}{t_0} \partial_t \zeta' + \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} U_1' \times a_{\text{surf}} \frac{1}{L_1} \partial_x \zeta' - \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} U_2' = 0 \\ \left( 2\nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \frac{1}{L_1} \partial_x U_1' - \frac{H_0^2 \rho_0}{t_0^2} (P' - P'_{\text{atm}}) \right) a_{\text{surf}} \frac{1}{L_1} \partial_x \zeta' - \nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \frac{1}{H_0} \partial_z U_1' - \nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} \frac{1}{L_1} \partial_x U_2' = 0 \\ \left( 2\nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \frac{1}{L_1} \partial_x U_1' - \frac{H_0^2 \rho_0}{t_0^2} (P' - P'_{\text{atm}}) \right) a_{\text{surf}}^2 \frac{1}{L_1^2} (\partial_x \zeta')^2 - 2\nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} \frac{1}{H_0} \partial_z U_2' + \frac{H_0^2 \rho_0}{t_0^2} (P' - P'_{\text{atm}}) = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

En factorisant la première ligne par  $\frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0}$ , et les deux autres lignes par  $\rho_0 g a_{\text{surf}}$  on parvient à

$$(5.5) \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t \zeta' + \frac{gt_0^2 a_{\text{surf}}}{L_1^2} U_1' \partial_x \zeta' - \frac{gt_0^2}{H_0} U_2' = 0 \\ \left( 2 \frac{\nu t_0}{\rho_0 L_1^2} \partial_x U_1' - \frac{H_0^2}{gt_0^2 a_{\text{surf}}} (P' - P'_{\text{atm}}) \right) \frac{a_{\text{surf}}}{L_1} \partial_x \zeta' - \frac{\nu t_0}{\rho_0 L_1 H_0} (\partial_z U_1' + \partial_x U_2') = 0 \\ \left( 2 \frac{\nu t_0}{\rho_0 L_1^2} \partial_x U_1' - \frac{H_0^2}{gt_0^2 a_{\text{surf}}} (P' - P'_{\text{atm}}) \right) \frac{a_{\text{surf}}^2}{L_1^2} (\partial_x \zeta')^2 - 2 \frac{\nu t_0}{\rho_0 H_0^2} \partial_z U_2' + \frac{H_0^2}{gt_0^2 a_{\text{surf}}} (P' - P'_{\text{atm}}) = 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

Ce qui revient à dire,

$$(5.5) \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t \zeta' + \varepsilon U_1' \partial_x \zeta' - \frac{1}{\mu} U_2' = 0 \\ \left( 2 \frac{\mu}{\text{Re}} \partial_x U_1' - \frac{\mu}{\varepsilon} (P' - P'_{\text{atm}}) \right) \varepsilon \mu \partial_x \zeta' - \frac{1}{\text{Re}} (\partial_z U_1' + \partial_x U_2') = 0 \\ \left( 2 \frac{\mu}{\text{Re}} \partial_x U_1' - \frac{\mu}{\varepsilon} (P' - P'_{\text{atm}}) \right) \varepsilon^2 \mu (\partial_x \zeta')^2 - 2 \frac{1}{\mu \text{Re}} \partial_z U_2' + \frac{\mu}{\varepsilon} (P' - P'_{\text{atm}}) = 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

Enfin,

$$(5.3) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} U_1' a_{\text{bot}} \frac{1}{L_1} \partial_x b' - \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} U_2' = 0 \\ \left( 2\nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \frac{1}{L_1} \partial_x U_1' - \frac{H_0^2 \rho_0}{t_0^2} P' \right) a_{\text{bot}} \frac{1}{L_1} \partial_x b' - \nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \frac{1}{H_0} \partial_z U_1' - \nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} \frac{1}{L_1} \partial_x U_2' = -\rho_0 \kappa \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} U_1 \\ \left( \nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{L_1} \frac{1}{H_0} \partial_z U_1' + \nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} \frac{1}{L_1} \partial_x U_2' \right) a_{\text{bot}} \frac{1}{L_1} \partial_x b' - 2\nu \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} \frac{1}{H_0} \partial_z U_2' + \frac{H_0^2 \rho_0}{t_0^2} P' = -\rho_0 \kappa \frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0} U_2 \end{cases} \quad (5.24)$$

En factorisant la première ligne par  $\frac{gt_0 a_{\text{surf}}}{H_0}$ , et les deux autres lignes par  $\rho_0 g a_{\text{surf}}$ , on parvient à

$$(5.3) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_{\text{bot}} H_0}{L_1^2} U_1' \partial_x b' - U_2' = 0 \\ \left( 2 \frac{\nu t_0}{\rho_0 L_1^2} \partial_x U_1' - \frac{H_0^2}{gt_0^2 a_{\text{surf}}} P' \right) \frac{a_{\text{bot}}}{L_1} \partial_x b' - \frac{\nu t_0}{\rho_0 L_1 H_0} (\partial_z U_1' + \partial_x U_2') = -\kappa \frac{t_0}{L_1} U_1 \\ \frac{\nu t_0}{\rho_0 L_1 H_0} (\partial_z U_1' + \partial_x U_2') \frac{a_{\text{bot}}}{L_1} \partial_x b' - 2 \frac{\nu t_0}{\rho_0 H_0^2} \partial_z U_2' + \frac{H_0^2}{gt_0^2 a_{\text{surf}}} P' = -\kappa \frac{t_0}{H_0} U_2 \end{cases} \quad (5.25)$$

Autrement dit,

$$(5.3) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \beta U_1' \partial_x b' - U_2' = 0 \\ \left( \frac{2\mu}{\text{Re}} \partial_x U_1' - \frac{\mu}{\varepsilon} P' \right) \beta \sqrt{\mu} \partial_x b' - \frac{1}{\sqrt{\mu} \text{Re}} (\partial_z U_1' + \partial_x U_2') = -\sqrt{\mu} \kappa' U_1 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu} \text{Re}} (\partial_z U_1' + \partial_x U_2') \beta \sqrt{\mu} \partial_x b' - \frac{2}{\mu \text{Re}} \partial_z U_2' + \frac{\mu}{\varepsilon} P' = -\kappa' U_2 \end{cases} \quad (5.26)$$

Finalement, en factorisant la deuxième ligne par  $\sqrt{\mu}$ , on a

$$(5.3) \iff \begin{cases} \beta\mu U_1' \partial_x b' - U_2' = 0 \\ \beta\mu^2 \left( \frac{2}{\text{Re}} \partial_x U_1' - \frac{1}{\varepsilon} P' \right) \partial_x b' - \frac{1}{\text{Re}} (\partial_z U_1' + \partial_x U_2') = -\mu\kappa' U_1' \\ \frac{\beta\mu}{\text{Re}} (\partial_z U_1' + \partial_x U_2') \partial_x b' - \frac{2}{\text{Re}} \partial_z U_2' + \frac{\mu^2}{\varepsilon} P' = -\mu\kappa' U_2' \end{cases} \quad (5.27)$$

□

### 5.3 Vers les équation de Saint Venant non-linéaire avec viscosité

Dans cette partie nous considérons les équations adimensionnées obtenues dans 5.2.1. Posons l'hypothèse suivante

$\mathcal{H} : U_1, U_2, b$ , et  $\zeta$  sont les fonctions adimensionnées représentant un fluide visqueux satisfaisant  $(\mathbf{H}_1)$ ,  $(\mathbf{H}_4)$ ,  $(\mathbf{H}_5)$ ,  $(\mathbf{H}_6)$ ,  $(\mathbf{H}_7)$ ,  $(\mathbf{H}_8)$  et  $(\mathbf{H}_9)$ . Autrement dit,  $U_1, U_2, b$ , et  $\zeta$  satisfont les équations (5.11) jusqu'à (5.19) après omission des apostrophes. De plus, on suppose  $\mu \ll 1$  et si  $\mu \ll \frac{1}{\text{Re}}$ .

Nous nous permettrons d'omettre les apostrophes. Pour tout  $x \in \mathbf{X}$  et pour tout temps  $t > 0$ , posons à nouveau

$$\overline{U}_1(t, x) = \frac{1}{h} \int_{\beta b(t, x) - 1}^{\varepsilon \zeta(t, x)} U_1(t, x, z) dz$$

avec  $h = \varepsilon \zeta - \beta b + 1$

**Proposition 5.3.1.** *Si l'hypothèse  $\mathcal{H}$  vérifiée, alors les égalités suivantes sont vérifiées*

$$U_2 = \mathcal{O}(\mu) \quad (5.28)$$

$$U_1 = \overline{U}_1 + \mathcal{O}(\text{Re}\mu) \quad (5.29)$$

$$U_1^2 = \overline{U}_1^2 + \mathcal{O}(\text{Re}\mu) \quad (5.30)$$

$$\frac{\mu}{\varepsilon} P = \frac{\mu}{\varepsilon} P_{\text{atm}} + \frac{\varepsilon \zeta - z}{\varepsilon} - \frac{1}{\text{Re}} \left( (\partial_x U_1)|_{z=\varepsilon \zeta} + (\partial_x U_1) \right) + \mathcal{O}(\mu) \quad (5.31)$$

*Démonstration.* Premièrement, (5.13) et (5.17) donnent respectivement que

$$\partial_z U_2 = \mathcal{O}(\mu)$$

et

$$(U_2)|_{z=\beta b-1} = \mathcal{O}(\mu)$$

Ainsi, après intégration en  $z$  pour tout  $t > 0$  et pour tout  $(x, z) \in \Omega_t$ ,

$$\begin{aligned} U_2(t, x, z) &= U_2(t, x, \beta b(x, t) - 1) + \int_{\beta b(t, x) - 1}^z U_2(t, x, s) ds \\ &= \mathcal{O}(\mu). \end{aligned}$$

De plus en multipliant l'équation (5.11) par  $\mu$ , on observe que

$$\frac{1}{\text{Re}} \partial_{zz} U_1 = \mathcal{O}(\mu)$$

Or, (5.15) permet d'avoir

$$\frac{1}{\text{Re}} (\partial_z U_1)|_{z=\varepsilon \zeta} = \mu^2 (P - P_{\text{atm}}) + \mathcal{O}(\mu)$$

Tandis que (5.16) donne

$$\mu^2 (P - P_{\text{atm}}) = \mathcal{O}(\mu)$$

On a donc après intégration de  $\partial_{zz} U_1$ ,

$$\partial_z U_1 = \mathcal{O}(\text{Re}\mu)$$

et donc en intégrant encore une fois, il vient donc pour tout  $z$ ,

$$U_1(t, x, z) = \overline{U}_1(t, x) + \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}(\mu \text{Re})$$

De même

$$\frac{1}{h} \int U_1^2(t, x, z) = \overline{U_1^2}(t, x) + \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}(\mu \text{Re})$$

Comme conséquence, il vient par (5.12) que

$$\frac{\mu}{\varepsilon} \partial_z P = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\text{Re}} \partial_z \left( \frac{2}{\mu} \partial_z U_2 + \partial_x U_1 \right) + \mathcal{O}(\mu)$$

Et désormais, (5.16) permet de dire

$$\frac{\mu}{\varepsilon} (P|_{z=\varepsilon\zeta} - P_{\text{atm}}) = \frac{2}{\mu \text{Re}} \partial_z U_2 + \mathcal{O}(\mu)$$

Par l'hypothèse d'incompressibilité (5.13) on trouve alors

$$\frac{\mu}{\varepsilon} \partial_z P = -\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\text{Re}} \partial_z (\partial_x U_1) + \mathcal{O}(\mu)$$

et

$$\frac{\mu}{\varepsilon} (P|_{z=\varepsilon\zeta} - P_{\text{atm}}) = -\frac{2}{\text{Re}} (\partial_x U_1)|_{z=\varepsilon\zeta} + \mathcal{O}(\mu).$$

En intégrant par rapport à  $z$ , il vient donc

$$\frac{\mu}{\varepsilon} P = \frac{\mu}{\varepsilon} P_{\text{atm}} - \frac{2}{\text{Re}} (\partial_x U_1)|_{z=\varepsilon\zeta} + \frac{\varepsilon\zeta - z}{\varepsilon} + \frac{1}{\text{Re}} (\partial_x U_1)|_{z=\varepsilon\zeta} - \frac{1}{\text{Re}} (\partial_x U_1) + \mathcal{O}(\mu)$$

Autrement dit,

$$\frac{\mu}{\varepsilon} P = \frac{\mu}{\varepsilon} P_{\text{atm}} + \frac{\varepsilon\zeta - z}{\varepsilon} - \frac{1}{\text{Re}} \left( (\partial_x U_1)|_{z=\varepsilon\zeta} + (\partial_x U_1) \right) + \mathcal{O}(\mu)$$

□

**Théoreme 5.3.2.** *Si l'hypothèse  $\mathcal{H}$  vérifiée, alors les égalités suivantes sont vérifiées*

$$\partial_t h + \varepsilon \partial_x (h \overline{U_1}) = 0 \quad (5.32)$$

$$\partial_t (h \overline{U_1}) + \frac{\varepsilon}{2} \partial_x (h \overline{U_1^2}) + \frac{1}{2\varepsilon} \partial_x (h^2) = \kappa \overline{U_1} + \frac{4}{\text{Re}} \partial_x (h \partial_x \overline{U_1}) + \frac{\beta}{\varepsilon} \partial_x b h + \mathcal{O}((1 + \text{Re})\mu) \quad (5.33)$$

*Premières étapes de calcul. Première équation :* remarquons d'abord que

$$\partial_x (h \overline{U_1}) = (\varepsilon \partial_x \zeta U_1)|_{z=\varepsilon\zeta} - (\beta \partial_x b U_1)|_{z=\beta b-1} + \int_{\beta b(t,x)-1}^{\varepsilon\zeta(t,x)} \partial_x U_1(t, x, z) dz$$

Grâce à (5.13), il vient alors

$$\partial_x (h \overline{U_1}) = (\varepsilon \partial_x \zeta U_1)|_{z=\varepsilon\zeta} - (\beta \partial_x b U_1)|_{z=\beta b-1} - \frac{1}{\mu} \int_{\beta b(t,x)-1}^{\varepsilon\zeta(t,x)} \partial_z U_2(t, x, z) dz$$

et donc

$$\partial_x (h \overline{U_1}) = (\varepsilon \partial_x \zeta U_1)|_{z=\varepsilon\zeta} - (\beta \partial_x b U_1)|_{z=\beta b-1} - \frac{1}{\mu} (U_2)|_{z=\varepsilon\zeta} + \frac{1}{\mu} (U_2)|_{z=\beta b-1}$$

Enfin, (5.14) et (5.17) nous donne alors

$$\partial_x (h \overline{U_1}) = -\partial_t \zeta \quad (5.34)$$

Autrement dit,

$$\partial_t h + \varepsilon \partial_x (h \overline{U_1}) = 0$$

**Deuxième équation :** En dérivant  $h \overline{U_1}$  on a alors

$$\partial_t (h \overline{U_1}) = (\varepsilon \partial_t \zeta U_1)|_{z=\varepsilon\zeta} + \int_{\beta b(t,x)-1}^{\varepsilon\zeta(t,x)} \partial_t U_1(t, x, z) dz$$

Par (5.34), cette équation se réécrit

$$\partial_t (h \overline{U_1}) = -(\varepsilon \partial_x (h \overline{U_1}) U_1)|_{z=\varepsilon\zeta} + \int_{\beta b(t,x)-1}^{\varepsilon\zeta(t,x)} \partial_t U_1(t, x, z) dz$$

Et d'après 5.11,

$$\begin{aligned} \partial_t (h \overline{U_1}) &= -(\varepsilon \partial_x (h \overline{U_1}) U_1)|_{z=\varepsilon\zeta} - \varepsilon \int_{\beta b-1}^{\varepsilon\zeta} \partial_x (U_1')^2 - \int_{\beta b-1}^{\varepsilon\zeta} \frac{\varepsilon}{\mu} \partial_z (U_1' U_2') \\ &\quad - \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{\beta b-1}^{\varepsilon\zeta} \partial_x P' + \frac{2}{\text{Re}} \int_{\beta b-1}^{\varepsilon\zeta} \partial_{xx} U_1' + \frac{1}{\mu \text{Re}} \int_{\beta b-1}^{\varepsilon\zeta} \partial_{zz} U_1' + \frac{1}{\mu \text{Re}} \int_{\beta b-1}^{\varepsilon\zeta} \partial_{zx} U_2' \end{aligned}$$



Traitons chacun des termes de cette équation dans l'ordre. Premièrement,

$$\varepsilon \int_{\beta b-1}^{\varepsilon \zeta} \partial_x (U_1)^2 = \varepsilon h \partial_x \overline{U_1}^2 + \mathcal{O}(\mu(1 + \text{Re}))$$

Ensuite, par 5.14 et 5.17, et par (5.34) on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\mu} \int_{\beta b-1}^{\varepsilon \zeta} \partial_z (U_1' U_2') &= \varepsilon (U_1)_{|z=\varepsilon \zeta} \left( \frac{1}{\mu} U_2 \right)_{|z=\varepsilon \zeta} - \varepsilon (U_1)_{|z=\beta b-1} \left( \frac{1}{\mu} U_2 \right)_{|z=\beta b-1} \\ &= \varepsilon (U_1)_{|z=\varepsilon \zeta} (\partial_t \zeta + \varepsilon \partial_x \zeta (U_1)_{|z=\varepsilon \zeta}) - \varepsilon (U_1)_{|z=\beta b-1} \beta \partial_x b (U_1)_{|z=\beta b-1} \\ &= -\varepsilon \partial_x (h \overline{U_1}) (U_1)_{|z=\varepsilon \zeta} + \varepsilon^2 \partial_x \zeta (U_1^2)_{|z=\varepsilon \zeta} - \varepsilon \beta \partial_x b (U_1^2)_{|z=\beta b-1} \\ &= -\varepsilon \partial_x (h \overline{U_1}) \overline{U_1} + \varepsilon \partial_x h \overline{U_1}^2 + \mathcal{O}((1 + \text{Re})\mu) \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} h \partial_x \overline{U_1}^2 + \mathcal{O}((1 + \text{Re})\mu) \end{aligned}$$

De plus, grâce à l'hypothèse hydrostatique, on sait que

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{\beta b-1}^{\varepsilon \zeta} \partial_x P &= \int_{\beta b-1}^{\varepsilon \zeta} \left( \partial_x \zeta - \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \partial_x \zeta (\partial_{zx} U_1)_{|z=\varepsilon \zeta} - \frac{1}{\text{Re}} (\partial_{xx} U_1)_{|z=\varepsilon \zeta} - \frac{1}{\text{Re}} (\partial_{xx} U_1) \right) dz + \mathcal{O}(\mu) \\ &= h \partial_x \zeta - h \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \partial_x \zeta (\partial_{zx} U_1)_{|z=\varepsilon \zeta} - h \frac{1}{\text{Re}} (\partial_{xx} U_1)_{|z=\varepsilon \zeta} - \int_{\beta b-1}^{\varepsilon \zeta} \frac{1}{\text{Re}} (\partial_{xx} U_1) dz + \mathcal{O}(\mu) \\ &= h \partial_x \zeta - h \frac{1}{\text{Re}} (\partial_{xx} U_1)_{|z=\varepsilon \zeta} - \int_{\beta b-1}^{\varepsilon \zeta} \frac{1}{\text{Re}} (\partial_{xx} U_1) dz + \mathcal{O}(\mu) \\ &= h \partial_x \zeta - \frac{2}{\text{Re}} h \partial_{xx} \overline{U_1} + \mathcal{O}((1 + \text{Re})\mu) \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{2}{\text{Re}} \int_{\beta b-1}^{\varepsilon \zeta} \partial_{xx} U_1 = \frac{2}{\text{Re}} h \partial_{xx} \overline{U_1}$$

Pour finir, par (5.18) et (5.15), on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu \text{Re}} \int_{\beta b-1}^{\varepsilon \zeta} \partial_z (\partial_z U_1 + \partial_x U_2) &= \frac{1}{\mu \text{Re}} (\partial_z U_1 + \partial_x U_2)_{|z=\varepsilon \zeta} - \frac{1}{\mu \text{Re}} (\partial_z U_1 + \partial_x U_2)_{|z=\beta b-1} \\ &= -\kappa (U_1)_{|z=\varepsilon \zeta} + \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \partial_x \zeta (\partial_x U_1)_{|z=\beta b-1} - \frac{2\beta}{\text{Re}} \partial_x b (\partial_x U_1)_{|z=\beta b-1} - \varepsilon \partial_x \zeta \frac{\mu}{\varepsilon} (P - P_{\text{atm}}) \\ &\quad + \beta \partial_x b \frac{\mu}{\varepsilon} P \\ &= -\kappa (U_1)_{|z=\beta b-1} + \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \partial_x \zeta (\partial_x U_1)_{|z=\varepsilon \zeta} - \frac{2\beta}{\text{Re}} \partial_x b (\partial_x U_1)_{|z=\beta b-1} + \varepsilon \partial_x \zeta \frac{2}{\text{Re}} \partial_x U_1 \\ &\quad + \beta \partial_x b \left( \frac{\mu}{\varepsilon} P_{\text{atm}} + \frac{h}{\varepsilon} - \frac{1}{\text{Re}} (\partial_x U_1)_{|z=\varepsilon \zeta} - \frac{1}{\text{Re}} (\partial_x U_1)_{|z=\beta b-1} + \mathcal{O}(\mu) \right) \\ &= -\kappa \overline{U_1} + \frac{4}{\text{Re}} \partial_x h \partial_{xx} \overline{U_1} + \beta \partial_x b \frac{h}{\varepsilon} + \frac{\beta \mu}{\varepsilon} \partial_x b P_{\text{atm}} + \mathcal{O}((1 + \text{Re})\mu) \end{aligned}$$

Pour résumer, on a

$$\begin{aligned} \partial_t (h \overline{U_1}) &= -\varepsilon \partial_x (h \overline{U_1}) \overline{U_1} \\ &\quad - \varepsilon h \partial_x \overline{U_1}^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} h \partial_x \overline{U_1}^2 \\ &\quad - h \partial_x \zeta + \frac{2}{\text{Re}} h \partial_{xx} \overline{U_1} \\ &\quad + \frac{2}{\text{Re}} h \partial_{xx} \overline{U_1} \\ &\quad - \kappa \overline{U_1} + \frac{4}{\text{Re}} \partial_x h \partial_{xx} \overline{U_1} + \beta \partial_x b \frac{h}{\varepsilon} + \frac{\beta \mu}{\varepsilon} \partial_x b P_{\text{atm}} + \mathcal{O}((1 + \text{Re})\mu) \end{aligned}$$

Ce qui, après regroupement de quelques termes, nous donne

$$\partial_t (h \overline{U_1}) + \frac{\varepsilon}{2} \partial_x (h \overline{U_1}^2) + \frac{1}{2\varepsilon} \partial_x (h^2) = -\kappa \overline{U_1} + \frac{4}{\text{Re}} \partial_x (h \partial_{xx} \overline{U_1}) + \beta \partial_x b \left( \frac{\mu}{\varepsilon} P_{\text{atm}} \right) + \mathcal{O}((1 + \text{Re})\mu)$$

□

## 5.4 Implémentation numérique

On rappelle les équations de Saint Venant visqueux

$$\begin{aligned} \partial_t h + \varepsilon \partial_x(hu) &= 0 \\ \partial_t(hu) + \frac{\varepsilon}{2} \partial_x(hu^2) + \frac{1}{2\varepsilon} \partial_x(h^2) - \frac{\beta}{\varepsilon} h \partial_x b &= -\kappa u + \frac{4}{\text{Re}} \partial_x(h \partial_x(u)) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Posons

$$\begin{aligned} p &= uh, \\ \mathcal{R}_H(h, p) &= \frac{\varepsilon}{2} \partial_x\left(\frac{p^2}{h}\right) + \frac{1}{2\varepsilon} \partial_x(h^2) - \frac{\beta}{\varepsilon} h \partial_x b, \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{R}_V(h, p) = \kappa \frac{p}{h} - \frac{4}{\text{Re}} \partial_x \left( h \partial_x \left( \frac{p}{h} \right) \right).$$

On se retrouve alors avec le système

$$\begin{aligned} \partial_t h + \varepsilon \partial_x(hu) &= 0 \\ \partial_t p + \mathcal{R}_H(h, p) + \mathcal{R}_V(h, p) &= 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

En l'absence des termes de viscosité  $\mathcal{R}_V$ , nous avons un système d'équations hyperboliques et nous avons vu précédemment comment simuler ce type de système. Afin de pouvoir continuer à utiliser cette méthode, nous utiliserons une méthode dite de *splitting*. Qui correspond à effectuer en alternance les deux résolutions suivantes :

$$\partial_t p + \mathcal{R}_H(h, p) = 0$$

et

$$\partial_t p + \mathcal{R}_V(h, p) = 0.$$

Plus précisément, nous effectuerons la résolution suivante appelée *splitting de Lie*.

$$\begin{aligned} p^{*1} &= p^n - \Delta_t \mathcal{R}_V \left( h, \frac{p^* + p^n}{2} \right) \\ p^{n+1} &= p^{*1} - \Delta_t (F_p^+(p^*, h^n) - F_p^-(p^*, h^n)) \\ h^{n+1} &= h^n - \Delta_t (F_h^+(p^*, h^n) - F_h^-(p^*, h^n)) \end{aligned}$$

Détaillons la première et dernière ligne en explicitant une discrétisation des opérateurs de dérivation relative à la variable d'espace.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_V(h, p)(x_i) &\approx \kappa \frac{p_i}{h_i} - \frac{2}{\text{Re} \Delta_x} \left( h_{i+1} \left( \partial_x \frac{p}{h} \right)(x_{i+1}) - h_{i-1} \left( \partial_x \frac{p}{h} \right)(x_{i-1}) \right) \\ &\approx \kappa \frac{p_i}{h_i} - \frac{2}{\text{Re} \Delta_x} \left( h_{i+1} \left( \frac{\frac{p_{i+2}}{h_{i+2}} - \frac{p_i}{h_i}}{2 \Delta_x} \right) - h_{i-1} \left( \frac{\frac{p_i}{h_i} - \frac{p_{i-2}}{h_{i-2}}}{2 \Delta_x} \right) \right) \\ &= \kappa \frac{p_i}{h_i} + \frac{1}{\text{Re} \Delta_x^2} \left( (h_{i+1} + h_{i-1}) \frac{p_i}{h_i} - h_{i+1} \frac{p_{i+2}}{h_{i+2}} - h_{i-1} \frac{p_{i-2}}{h_{i-2}} \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

## 6 Méthodes d'approximation de symbole (SAM) d'un opérateur d'amortissement

### 6.1 Introduction à la notion d'amortissement

La plupart des équations présentées et étudiées plus tôt dans ce mémoire vérifient une où plusieurs conservation d'énergies. Cependant, dans les expériences réelles, il est systématiquement observé un phénomène dit d'amortissement qui se traduit par une diminution ces quantités. Dans cette partie nous verrons comment représenter cet amortissement par l'ajout d'un nouveau terme, noté  $\mathcal{L}(u)$  dans ces équations. Prenons pour exemple l'équation suivante

$$\partial_t u + \mathcal{G}(u) = 0 \quad (6.1)$$

avec par exemple  $\mathcal{G}(u) = \partial_{xxx}u$  pour (**Airy**) où encore  $\mathcal{G}(u) = \partial_{xxx}u + \frac{1}{2}\partial_x(u^2)$  pour (**KdV**).

Par cette équation il vient que

$$\begin{aligned} \partial_t \|u\|_{L^2}^2 &= \partial_t \int u^2 \\ &= 2 \int u \partial_t u \\ &= -2 \int u \mathcal{G}(u) \end{aligned}$$

La conservation de la norme  $L^2$  de  $u$  par cette équation se caractérise donc par la propriété

$$\int u \mathcal{G}(u) = 0. \quad (6.2)$$

Supposons cette propriété vérifiée pour  $\mathcal{G}$  et étudions à la place l'équation

$$\partial_t u + \mathcal{G}(u) + \mathcal{L}(u) = 0. \quad (6.3)$$

Il vient alors

$$\partial_t \|u\|_{L^2}^2 = -2 \int u \mathcal{L}(u).$$

La condition de décroissance de la norme  $L^2$  de  $u$  recherchée se caractérise alors par la propriété

$$\int u \mathcal{L}(u) \geq 0. \quad (6.4)$$

### 6.2 Les équations de KdV amortie

R. OTT et R. N. SUDAN[17] citent dans leur papier plusieurs cas d'opérateurs linéaires d'amortissement  $\mathcal{L}$  pour l'équation (**KdV**).

1.  $\mathcal{L}(u) := \nu \int \frac{y-x}{|y-x|^{3/2}} \partial_x u(y) dy$  dans le cas d'une vague en eau peu profonde, amortie par un terme de viscosité.
2.  $\mathcal{L}(u) := \nu(-\Delta)u$  dans le cas d'ondes magnéto-acoustiques, c'est à dire une onde acoustique dans un fluide compressible conducteur soumis à un champs magnétique.
3.  $\mathcal{L}(u) := \nu u$  dans le cas d'ondes iono-sonique, c'est à dire d'ondes de soniques dans un plasma, diffusées par les répulsions/attractions entre les particules chargées.
4.  $\mathcal{L}(u) := \nu \int \frac{1}{x-y} \partial_x u(y) dy$  dans le cas d'ondes iono-sonique diffusées par le phénomène d'amortissement de Landau (transferts d'énergie entre les particules chargées et l'onde électromagnétiques induite par l'oscillation).

On pourra aussi s'intéresser à d'autres opérateurs tels que  $(-\Delta)^{1/2}$ , où  $(-\Delta)^s$  pour  $0 < s < 1$  désignent les puissances fractionnaires de l'opérateur  $(-\Delta)$ . (Voir partie 8).

### 6.3 Généralités sur le symbole d'un opérateur

Supposons travailler sur une matrice  $A$  dont on ne connaît pas les coefficients. Supposons disposer de  $(\mathbf{V}^k)_{k \in I}$  et  $(\mathbf{W}^k)_{k \in I}$ , deux familles finies de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  liées par la relation

$$\mathbf{W}^k = A\mathbf{V}^k \quad \forall k \in I$$

En pratique nous ne connaissons pas  $A$ , la dimension  $n$  peut être très grande et le cardinal  $\#I$  trop petit pour déduire les coefficients de la matrice  $A$ . L'objectif de cette section est d'essayer de caractériser efficacement  $A$  avec le peu d'information que nous avons. Plus précisément, ce qui nous intéresse ici est, d'estimer le symbole de cet opérateur, si il existe, et sinon d'approcher  $A$  par une matrice  $Q$  qui admet un symbole.

#### 6.3.1 Définition et exemple

**Définition 6.3.1.** Soit  $\mathcal{L}$  un endomorphisme linéaire de  $L^2(\mathbb{R})$  (resp.  $L^2(\mathbb{T})$  pour les fonctions définies sur le Tore). Le symbole de l'opérateur  $\mathcal{L}$ , si il existe, est l'application  $\sigma_{\mathcal{L}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que, pour tout élément  $u$  de  $L^2(\mathbb{R})$  (resp.  $L^2(\mathbb{T})$ ), et pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(u))(\xi) = \sigma_{\mathcal{L}}(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi).$$

où  $\mathcal{F}$  désigne l'opérateur de transformée de Fourier sur  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{T}$ ).

Si  $\mathcal{L} = \partial_x$  alors  $\sigma_{\mathcal{L}}(\xi) = i\xi$

Si  $\mathcal{L} = \text{Id}$  alors  $\sigma_{\mathcal{L}}(\xi) = 1$

Si  $\mathcal{L}(u) = (x \mapsto u(x + \alpha))$  alors  $\sigma_{\mathcal{L}}(\xi) = e^{i\alpha\xi}$

Si on remplace  $L^2(\mathbb{R})$  (resp.  $L^2(\mathbb{T})$ ) par l'équivalent discret  $l^2(\mathbb{Z})$  (resp.  $\mathbb{R}^n$ ). On peut tout même définir la notion de symbole à l'aide de la transformée de Fourier discrète (TFD). Mais en pratique, on n'étudiera que le cas d'un nombre fini de composantes (donc  $\mathbb{R}^n$ ).

**Définition 6.3.2.** Soit  $I$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , soit  $S_I = (x_1, \dots, x_n)$  une subdivision (supposée uniforme) de  $I$ . Soit  $L$  un opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^n$ . Le symbole de l'opérateur  $L$ , si il existe, est le vecteur  $\sigma_L \in \mathbb{C}^{\lfloor n/2 \rfloor}$  tel que, pour vecteur  $\mathbf{V}$  de  $\mathbb{R}^n$ , et pour tout entiers  $k < n/2$ ,

$$(FL\mathbf{V})_k = \sigma_L(k)(FV)_k$$

où  $F$  désigne la matrice de transformée de Fourier discrète relative à la subdivision  $S_I$ .

**Remarque :** Dans le cas discret, on remarque que le symbole  $\sigma_L$  existe si et seulement si  $L$  est diagonalisable dans la base de Fourier, i.e. si  $FLF^T$  est une matrice diagonale. Le cas échéant, on a alors  $FLF^T = \text{diag}(\sigma)$ .

#### 6.3.2 Symbole de quelques opérateurs définis précédemment

Désignons par  $B$  l'opérateur consistant à la dérivée troisième  $\partial_{xxx}$  à l'ordre  $\mathcal{O}(\Delta_x^2)$ , défini dans (4.11), que nous appliquerons à  $\mathbb{R}^n$  par l'intermédiaire de la condition périodique  $V_{n+i} = V_i$ . Alors

$$\begin{aligned} (FBV)_k &= \left( \frac{1}{2\Delta_x^3} F(V_{-2} - 2V_{-1} + 2V_{+1} - V_{+2}) \right)_k \\ &= \frac{1}{2\Delta_x^3} (F(V_{-2}) - 2F(V_{-1}) + 2F(V_{+1}) - F(V_{+2}))_k \\ &= \frac{1}{2\Delta_x^3} (e^{-2\Delta_x k\pi} - 2e^{-\Delta_x k\pi} + 2e^{\Delta_x k\pi} - e^{2\Delta_x k\pi}) (FV)_k \\ &= \frac{1}{2\Delta_x^3} \left( (e^{-2\Delta_x k\pi} - e^{2\Delta_x k\pi}) - (e^{-\Delta_x k\pi} - e^{\Delta_x k\pi}) \right) (FV)_k \\ &= \frac{i}{\Delta_x^3} (\sin(2\Delta_x \pi) - 2\sin(\Delta_x \pi)) (FV)_k \end{aligned} \tag{6.5}$$

Le symbole de l'opérateur  $B$  est donc

$$\sigma_B(k) = \frac{i}{\Delta_x^3} (\sin(2\Delta_x k\pi) - 2\sin(\Delta_x k\pi))$$

Désignons par  $L$  l'opérateur consistant à  $-\partial_{xx}$  à l'ordre  $\mathcal{O}(\Delta_x^2)$ , défini dans (??), que nous appliquerons à  $\mathbb{R}^n$  par l'intermédiaire de la condition périodique  $V_{n+i} = V_i$ . Alors

$$\begin{aligned} (FLV)_k &= \left( \frac{1}{\Delta_x^2} F(2V - V_{+1} - V_{-1}) \right)_k \\ &= \left( \frac{1}{\Delta_x^2} (2FV - FV_{+1} - FV_{-1}) \right)_k \\ &= \frac{1}{\Delta_x^2} (2 - (e^{\Delta_x k\pi} + e^{-\Delta_x k\pi})) (FV)_k \\ &= \frac{2}{\Delta_x^2} (1 - \cos(\Delta_x k\pi)) FV \end{aligned} \tag{6.6}$$

Le symbole de l'opérateur  $L$  est donc

$$\sigma_L(k) = \frac{2}{\Delta_x^2} (1 - \cos(\Delta_x k\pi))$$

### 6.3.3 Une première méthode numérique pour calculer numériquement du symbole d'un opérateur d'amortissement

Si  $U^k$  est une suite de vecteur issue de la modélisation d'une EDP satisfaisant le schéma

$$\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta_t} + G(U^k, U^{k+1}) + L \left( \frac{U^{k+1} + U^k}{2} \right) = 0,$$

et si  $G$  est connu, alors on peut caractériser la famille d'opérateur  $L_k$  par l'ensemble de relations suivant

$$L \left( \frac{U^{k+1} + U^k}{2} \right) = - \left( \frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta_t} + G(U^k, U^{k+1}) \right) \quad \forall k \in I$$

Le symbole de l'opérateur  $L$  se caractérise alors par

$$\sigma_L = \frac{-2F \left( \frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta_t} + G(U^k, U^{k+1}) \right)}{F(U^{k+1} + U^k)}$$

En pratique, pour calculer une transformée de Fourier discrète  $F\mathbf{V}$ , on utilisera un algorithme récursif appelé F.F.T. (*Fast Fourier Transform*) qui permet de calculer rapidement le produit  $F\mathbf{V}$  sans avoir à construire la matrice pleine qu'est  $F$ .

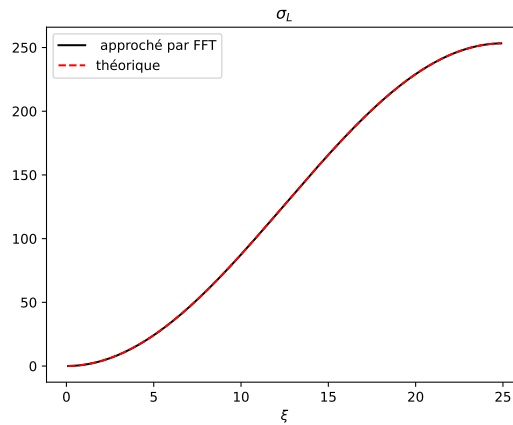


FIGURE 15 – Calcul par F.F.T. du symbole du terme d'amortissement  $-\partial_{xx}$  discrétisé à l'ordre 2 et ajouté au schéma (DFP)

En revanche, dans le cas 2D, il y a beaucoup de cas où la géométrie de l'espace ne permet pas l'utilisation d'outils aussi efficace que la transformée de Fourier. Ce qui va suivre traite d'une méthode stochastique permettant d'estimer la moyenne des valeurs du symbole. Pour le dire autrement, nous allons approcher ce symbole par une fonction constante. Cette constante n'étant autre que la trace de l'opérateur. Ensuite, exploiterons des méthodes de filtrage de fréquences, telles qu'une méthode multi-grille, pour étendre la précédente approche à l'approximation du symbole de l'opérateur par une fonction constante par morceaux.

## 6.4 Méthodes stochastiques pour l'approximation de la trace d'une matrice (TAM)

Une première idée est de s'intéresser à la moyenne des valeurs propres, autrement dit la trace. En 1990, HUTCHINSON[12] aborde l'utilisation d'une méthode stochastique pour estimer la trace d'un opérateur linéaire. Dans cette partie nous verrons des résultats généraux permettant d'obtenir cet algorithme.

### 6.4.1 Cas général

**Proposition 6.4.1.** *Si  $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_n)$  est un vecteur aléatoire et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors*

$$\mathbb{E}(\langle A\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle) = \text{tr}(A\mathbf{Cov}(\mathbf{V})) + \langle \mathbb{E}(A\mathbf{V}), \mathbb{E}(\mathbf{V}) \rangle$$

où  $\mathbf{Cov}(\mathbf{V})$  désigne la matrice de covariance de  $\mathbf{V}$ .

*Démonstration.* Par linéarité

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\langle A\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^n v_i \sum_{j=0}^n a_{ij} v_j\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i,j=0}^n a_{ij} v_i v_j\right) \\ &= \sum_{i,j=0}^n a_{ij} \mathbb{E}(v_i v_j) \\ &= \sum_{i,j=0}^n a_{ij} (\text{Cov}(v_i, v_j) + \mathbb{E}(v_i)\mathbb{E}(v_j)) \\ &= \text{tr}(A\mathbf{Cov}(\mathbf{V})^T) + \langle A\mathbb{E}(\mathbf{V}), \mathbb{E}(\mathbf{V}) \rangle \\ &= \text{tr}(A\mathbf{Cov}(\mathbf{V})) + \langle \mathbb{E}(A\mathbf{V}), \mathbb{E}(\mathbf{V}) \rangle \end{aligned}$$

□

En ajoutant une première hypothèse d'indépendance, on aboutit à une première méthode stochastique d'approximation de la trace :

**Proposition 6.4.2.** *Si  $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_n)$  est un vecteur aléatoire d'espérance nulle et si les composantes  $v_1, \dots, v_n$  sont linéairement indépendantes (i.e. si  $\mathbf{Cov}(\mathbf{V})$  est inversible), alors*

$$\mathbb{E}(\langle \mathbf{Cov}(\mathbf{V})^{-1} A \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle) - \langle \mathbf{Cov}(\mathbf{V})^{-1} \mathbb{E}(A\mathbf{V}), \mathbb{E}(\mathbf{V}) \rangle = \text{tr}(A)$$

*Démonstration.* D'après la proposition 6.4.1, on a alors pour toute matrice  $B$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\langle B\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle) &= \text{tr}(B\mathbf{Cov}(\mathbf{V})) + \langle \mathbb{E}(B\mathbf{V}), \mathbb{E}(\mathbf{V}) \rangle \\ &= \text{tr}(\mathbf{Cov}(\mathbf{V})B) + \langle \mathbb{E}(B\mathbf{V}), \mathbb{E}(\mathbf{V}) \rangle \end{aligned}$$

En posant  $B = \mathbf{Cov}(\mathbf{V})^{-1}A$ , on obtient donc

$$\mathbb{E}(\langle \mathbf{Cov}(\mathbf{V})^{-1} A \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle) = \text{tr}(A) + \langle \mathbf{Cov}(\mathbf{V})^{-1} \mathbb{E}(A\mathbf{V}), \mathbb{E}(\mathbf{V}) \rangle$$

□

**Remarque :** En conséquence, par la loi des grands nombres, pour  $\mathbf{V}^k$  une suite de vecteurs aléatoires *i.i.d* de même loi que  $\mathbf{V}$ , on aboutit à une première approximation de la trace de  $A$  :

**Proposition 6.4.3.** *Si  $(\mathbf{V}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  désigne une suite de vecteurs aléatoires *i.i.d* de  $\mathbb{R}^n$  alors*

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{Cov}(\mathbf{V})^{-1}(A \mathbf{V}^k), \mathbf{V}^k \rangle - \frac{1}{N^2} \langle \mathbf{Cov}(\mathbf{V})^{-1} \left( \sum_{k=1}^N A \mathbf{V}^k \right), \sum_{k=1}^N \mathbf{V}^k \rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \text{tr}(A) \quad (\text{TAM2})$$

C'est un algorithme très coûteux car cela nécessite, pour un  $N$  fixé, d'inverser  $N + 1$  fois la matrice de taille  $n$  qu'est  $\mathbf{Cov}(\mathbf{V})$  (et  $n$  peut être très grand !). En revanche, en choisissant bien notre échantillon  $(\mathbf{V}^k)_{k \in K}$ , de sorte que la matrice de covariance associée soit facile à inverser, on peut se ramener à un algorithme très peu coûteux. Ces simplifications font l'objet de la sous-partie suivante.

#### 6.4.2 Si $\mathbf{Cov}(\mathbf{V})$ est une matrice scalaire et $\mathbb{E}(\mathbf{V}) = 0$

Les différents cas que nous verrons dans cette partie nous offrent comme avantage la proposition suivante

**Proposition 6.4.4.** *Si  $\mathbf{V}$  est un vecteur aléatoire dont les composantes  $v_1, \dots, v_n$  sont d'espérances nulles, indépendantes et de mêmes variances  $\sigma^2$  et si  $(\mathbf{V}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  désigne une suite de vecteurs aléatoires *i.i.d* de même loi que  $\mathbf{V}$ , alors*

$$\frac{\sum_{k=1}^N \langle A \mathbf{V}^k, \mathbf{V}^k \rangle}{\sum_{k=1}^N \langle \mathbf{V}^k, \mathbf{V}^k \rangle} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(A)}{n} \quad (\text{TAM1})$$

*Démonstration.* Si les composantes  $v_1, \dots, v_n$  sont d'espérances nulles, indépendantes et de mêmes variances  $\sigma^2$ , alors  $\mathbf{Cov}(\mathbf{V}) = \sigma^2 I_n$  et la proposition 6.4.1 donne alors

$$\mathbb{E}(\langle A \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle) = \sigma^2 \text{tr}(A)$$

Ainsi, d'après la loi des grands nombres, pour  $\mathbf{V}^k$  une suite de vecteurs aléatoires *i.i.d* de même loi que  $\mathbf{V}$ , il vient que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle A \mathbf{V}^k, \mathbf{V}^k \rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sigma^2 \text{tr}(A)$$

presque sûrement. Et comme  $\mathbf{V}^k = I_n \cdot \mathbf{V}^k$  on a aussi

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{V}^k, \mathbf{V}^k \rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sigma^2 \text{tr}(I_n) = n \sigma^2$$

Ce qui nous donne alors

$$\frac{\sum_{k=1}^N \langle A \mathbf{V}^k, \mathbf{V}^k \rangle}{\sum_{k=1}^N \langle \mathbf{V}^k, \mathbf{V}^k \rangle} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(A)}{n}$$

□

De plus, on peut estimer la variance de  $\langle A \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle$ .

**Proposition 6.4.5.** *Si  $\mathbf{V}$  est un vecteur aléatoire tel que ses composantes  $v_1, \dots, v_n$  sont d'espérances nulles, indépendantes et de mêmes variances  $\sigma^2$ , alors*

$$\text{Var}(\langle A \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 (\mathbb{E}(v_i^4) - 3\sigma^4) + \sigma^4 (\text{tr}(A^T A) + \text{tr}(A^2))$$

*Démonstration.* Par la formule de König-Huygens, il vient que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\langle A \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle) &= \mathbb{E}(\langle A \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle^2) - \mathbb{E}(\langle A \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle)^2 \\ &= \mathbb{E} \left( \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_i v_j \right)^2 \right) - \sigma^4 \text{tr}(A)^2 \end{aligned}$$

De plus, on peut écrire

$$\mathbb{E} \left( \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_i v_j \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij} a_{kl} \mathbb{E}(v_i v_j v_k v_l).$$

Si un quadruplet d'entiers  $(a, b, c, d)$  est tel que l'un de ses quatre éléments est différent des trois autres, alors  $\mathbb{E}(v_a v_b v_c v_d) = 0$  (Par exemple si  $a \notin \{b, c, d\}$ , par indépendance des  $v_i$ ,  $\mathbb{E}(v_a v_b v_c v_d) = \mathbb{E}(v_a) \mathbb{E}(v_b v_c v_d) = 0$ ). Ainsi, après simplification des termes,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_i v_j \right)^2 \right) &= \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \mathbb{E}(v_i^4) + \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 \mathbb{E}(v_i^2) \mathbb{E}(v_j^2) + \sum_{i \neq j} a_{ij} a_{ji} \mathbb{E}(v_i^2) \mathbb{E}(v_j^2) + \sum_{i \neq j} a_{ii} a_{jj} \mathbb{E}(v_i^2) \mathbb{E}(v_j^2) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \mathbb{E}(v_i^4) + \sigma^4 \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 + \sigma^4 \sum_{i \neq j} a_{ij} a_{ji} + \sigma^4 \sum_{i \neq j} a_{ii} a_{jj}. \end{aligned}$$

Grâce aux identités

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} a_{ij} a_{ji} &= \text{tr}(A^2) \\ \sum_{i \neq j} a_{ii} a_{jj} &= \text{tr}(A)^2 - \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \\ \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 &= \text{tr}(A^T A) - \sum_{i=1}^n a_{ii}^2, \end{aligned}$$

on trouve finalement

$$\mathbb{E} \left( \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_i v_j \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 (\mathbb{E}(v_i^4) - 3\sigma^4) + \sigma^4 \text{tr}(A^T A) + \sigma^4 \text{tr}(A^2) + \sigma^4 \text{tr}(A)^2.$$

Et donc

$$\text{Var}(\langle A\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 (\mathbb{E}(v_i^4) - 3\sigma^4) + \sigma^4 \left( \text{tr}(A^T A) + \text{tr}(A^2) \right)$$

□

**Exemple :** Un exemple de vecteur aléatoire  $\mathbf{V}$  satisfaisant cette hypothèse, que nous utiliserons pour la suite, est le vecteur de bernoulli, défini par

$$\mathbb{P}(v_i = 1) = \mathbb{P}(v_i = -1) = \frac{1}{2} \quad \forall v_i.$$

Dans ce cas,  $\text{Cov}(\mathbf{V}) = I_n$  et alors

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle A\mathbf{V}^k, \mathbf{V}^k \rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \text{tr}(A).$$

Et on connaît alors sa variance :

$$\text{Var}(\langle A\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle) = \text{tr}(A^2) + \text{tr}(A^T A) - 2 \sum_{i=1}^n a_{ii}^2.$$

**Vérifions numériquement ces propositions :** Fixons  $V$  un vecteur de Bernoulli. Définissons l'erreur relative par

$$\varepsilon_A = \frac{\langle A\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle - \text{tr}(A)}{\text{tr}(A)}$$

et son approximation numérique par

$$\varepsilon_A^N = \frac{\frac{1}{N} \sum \langle A\mathbf{V}^k, \mathbf{V}^k \rangle - \text{tr}(A)}{\text{tr}(A)}$$

Le Théorème Central Limite nous donne alors que  $\varepsilon_A^N$  suit une loi normale centrée de variance

$$\text{Var}(\varepsilon_A^N) = \frac{\text{Var}(\langle A\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle)}{N |\text{tr}(A)|^2} = \frac{\text{tr}(A^2) + \text{tr}(A^T A) - 2 \sum_{i=1}^n a_{ii}^2}{N |\text{tr}(A)|^2}$$



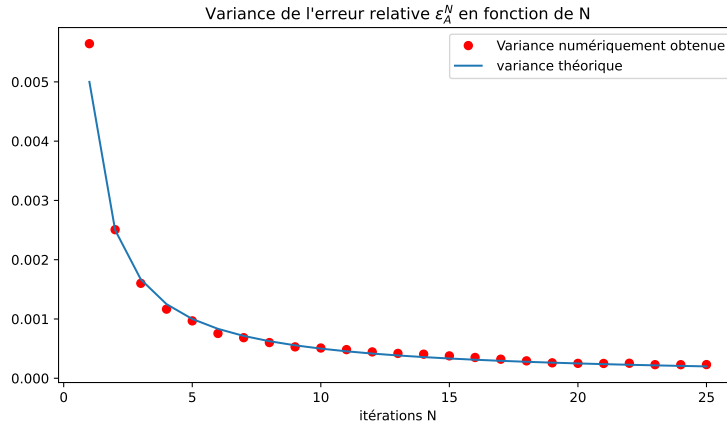


FIGURE 16 – Comparaison entre la variance numérique et la variance théorique de l'approximation numérique de l'erreur relative de de TAM1 pour des vecteurs de Bernoulli (calculé pour la matrice de discrétisation de l'opérateur  $-\partial_{xx}$  à l'ordre 2 pour un maillage de taille  $n = 200$ ) simulé 250 fois.

On remarque que peu d'itérations sont nécessaires ( $N = 20$  dans notre cas suffit) pour atteindre une variance de l'ordre de  $10^{-4}$  soit une erreur relative de l'ordre de 1%.

#### 6.4.3 Approximation de la trace pour un échantillons qui perd en fréquences

Si  $U^k$  est une suite de vecteurs issue de la modélisation d'une EDP, satisfaisant le schéma

$$\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta_t} + G(U^k, U^{k+1}) + L\left(\frac{U^{k+1} + U^k}{2}\right) = 0,$$

et si  $G$  est connu, alors on peut caractériser l'opérateur  $L$  par l'ensemble de relations suivant

$$L(V^k) = W^k \quad \forall k \in I$$

avec

$$V^k = \frac{U^{k+1} + U^k}{2}$$

$$W^k = -\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta_t} - G(U^k, U^{k+1})$$

En pratique le vecteur  $V^k$  n'a pas une matrice de covariance scalaire. Par exemple, si  $L = -\nu\Delta$  la vecteur  $V^k$  va devenir de plus en plus régulier et donc  $v_i^k$  deviendra de plus en plus dépendant de  $v_{i+1}^k$ . L'algorithme (TAM1) sera alors de moins en moins efficace au fur et à mesure que  $N$  (et donc  $k$ ) augmente.

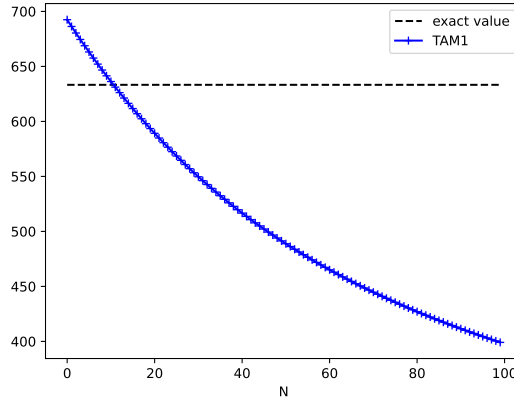


FIGURE 17 – Approximation de la trace de l'opérateur d'amortissement de type  $-\nu\Delta$  sur l'équation de KdV par l'algorithme (TAM1)

On peut alors se demander si il est utile ou non de revenir sur (TAM2).

**Remarque :** Si on veut exploiter la loi des grand nombres, il nous faut une indépendance des  $V^k$ . Cette indépendance n'est pas assurée comme  $V^{k+1}$  et  $V^k$  ont tendance à se corrélérer à mesure que le pas de temps  $\Delta_t$  est petit si  $L$  est de type passe-bas.

On supposera qu'il est possible de prendre un sous-échantillon  $(V^{k_j})$  tel que  $V^{k_j}$  et  $V^{k_{j+1}}$  soient peu corrélés.

#### 6.4.4 Approximation de la trace pour un échantillons soumis à un faible filtre passe-bas

Pour un amortissement de type Passe-Bas, la solution  $V^k$  de notre schéma numérique subit une décroissance forte de ces composantes en Fourier de haute fréquence. Comme conséquence un lissage de la fonction induit une forte corrélation entre les termes adjacents du vecteurs. De plus, si la loi de  $V^k$  est invariant par translation la proposition suivante s'applique.

**Proposition 6.4.6.** *Soit  $J$  la matrice de permutation de taille  $n \times n$  suivante*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Si  $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^n$  invariant par multiplication par  $J$  (i.e. tel que  $JV$  est de même loi que  $V$ ). Alors  $\text{Cov}(V)$  est une matrice circulant et

$$\text{Cov}(V) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\langle V, V \rangle I_n + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \langle J^i V, V \rangle (J^i + J^{-i})}{n},$$

*Démonstration.* Par définition,  $JV$  et  $V$  sont de même loi. En conséquence,

$$\text{Cov}(V) = \text{Cov}(JV) = J \text{Cov}(V) J^T.$$

$\text{Cov}(V)$  est donc une matrice circulante. Comme tout matrice de covariance est symétrique on trouve alors

$$\text{Cov}(V) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_4 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} = a_0 I_n + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_i (J^i + J^{-i})$$

Rappelons que  $(J^i)_{i \in [[0, n-1]]}$  est une famille orthogonale pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{Fro}}$ , donc on obtient

$$\begin{aligned}
 a_i &= \frac{\langle \text{Cov}(V), J^i \rangle_{\text{Fro}}}{\langle J^i, J^i \rangle_{\text{Fro}}} \\
 &= \frac{\langle \text{Cov}(V), J^i \rangle_{\text{Fro}}}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(v_l v_{l+i}) \\
 &= \mathbb{E}(v_1 v_{i+1})
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Par la loi des grands nombres, on trouve une bonne approximation en sommant tous les  $v_i v_{i+l}$  pour  $i$  allant de 1 à  $n$ .

$$a_i \approx \frac{\langle J^i V, V \rangle}{n}$$

□

On peut alors s'attendre à ce que les premiers coefficients  $a_0^k, a_1^k, a_2^k \dots$  de la matrice de covariance soient prédominants. On peut donc envisager approximation de la matrice de covariance par une matrice creuse de la forme

$$\text{Cov}(V^k) \approx S_q^k := a_0^k I_n + \sum_{i=1}^q a_i^k (J^i + J^{-i})$$

où  $q \ll \frac{n}{2}$ .

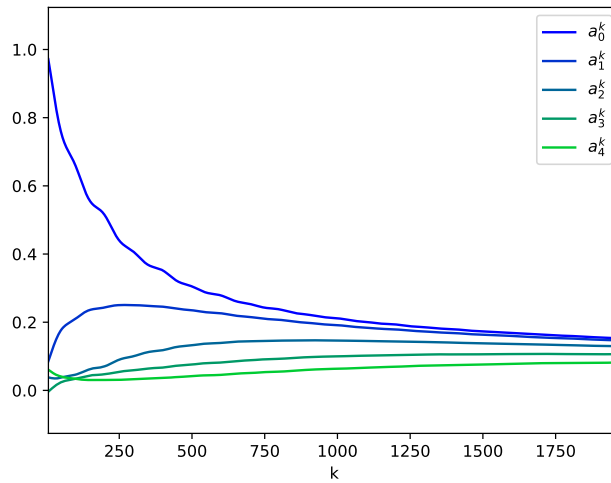


FIGURE 18 – Évolution des premiers coefficients de la matrice de covariance en fonction du temps  $k$ . pour  $n = 400$  durant la simulation de KdV avec amortissement du type  $-f(t)\Delta$  (voir FIGURE 20)

Ce qui nous donne à inverser une matrice creuse symétrique (et dans la plupart des cas définie positive). C'est une simplification qui permet l'utilisation d'algorithmes de résolution itératives très rapides de type gradient conjugués et qui rend donc envisageable l'utilisation de (TAM2) pour un faible coût de calcul. Ceci donne une nouvelle méthode d'approximation de la trace

$$\text{tr}(A) \approx \frac{1}{n \times N} \sum_{k=1}^N \left\langle \left( \langle V^k, V^k \rangle I_n + \sum_{i=1}^q \langle J^i V^k, V^k \rangle (J^i + J^{-i}) \right)^{-1} (A V^k), V^k \right\rangle \tag{TAM3}$$

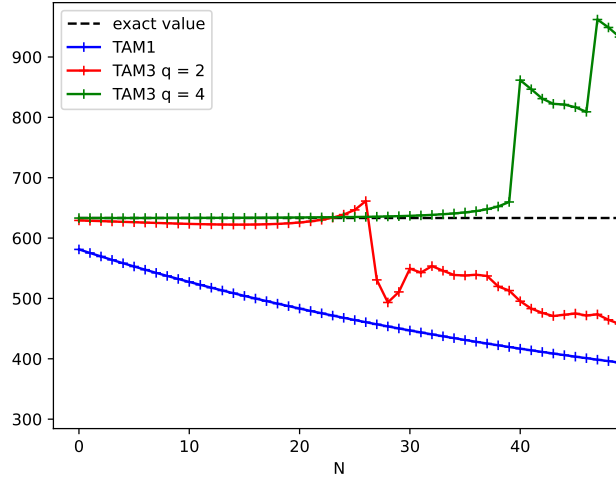


FIGURE 19 – Approximation de la trace de l'opérateur d'amortissement de type  $-\nu\Delta$  sur l'équation de KdV

On remarque que plus on va loin dans le temps, plus il faut prendre un  $q$  élevé pour approcher pertinemment la matrice de covariance.

#### 6.4.5 Approximation de la trace pour un échantillons soumis à un faible filtre passe-bas dépendant du temps.

Supposons disposer cette fois ci d'une famille de triplets opérateur-vecteur-vecteur  $(A_k, V^k, W^k)$  liés par la relation

$$A_k V^k = W^k$$

L'objectif de cette partie est de déduire de l'algorithme précédemment cité un algorithme permettant d'approcher  $\text{tr}(A_k)$  pour tout  $k$ . Nous supposons pour la suite que  $A_k$  évolue lentement. Autrement dit, on supposera qu'il existe en entier  $p$ , pas trop petit, tel que pour tout  $k$  et pour tout  $l \leq p$ ,

$$A_{k+l} \approx A_k$$

Par l'algorithme (??), on déduit cette approximation de  $\text{tr}(A_N)$  :

$$\text{tr}(A_N) \approx \frac{1}{n \times (2p+1)} \sum_{k=-p}^p \langle P_{N+k}(J)^{-1} A_{N+k} V^{N+k}, V^{N+k} \rangle, \quad (\text{TD-TAM3})$$

avec

$$P_k(J) := \langle V^k, V^k \rangle I_n + \sum_{i=1}^q \langle J^i V^k, V^k \rangle (J^i + J^{-i}).$$

Pour éviter d'avoir à calculer (ou stocker) plusieurs fois  $\langle P_N(J)^{-1} A_N V^N, V^N \rangle$  qu'on utilise pour  $\text{tr}(A_{N-p}), \text{tr}(A_{N-p+1}), \dots, \text{tr}(A_{N+p})$ . On va se servir de l'opérateur la transformée en  $z$ ,

$$\mathcal{Z}((v_k)_{k \in \mathbb{N}})(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} v_k z^{-k}$$

**Proposition 6.4.7.** Soit  $p \in \mathbb{R}$  et  $(x_N), (y_N)$  deux suites réelles telles que, pour tout entier naturel  $N$ ,

$$y^N = \sum_{k=0}^{2p} x^{N+k}$$

Alors

$$y^N = \mathcal{Z}^{-1} \left( \frac{1 - z^{-2p-1}}{1 - z^{-1}} \mathcal{Z}((x_{2p+N})) \right)$$

*Démonstration.* En remarquant le produit de Cauchy suivant

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}((y_N))(z) &= \sum_{N=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{2p} x_{N+k} \right) z^{-N} \\ &= \sum_{N=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{2p} x_{2p+N-k} \right) z^{-N} \\ &= \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^N a_k b_{N-k} + \sum_{N=0}^{+\infty} r_N z^{-N}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}a_N &:= \mathbf{1}_{[0,2p]}(N) \left( \frac{1}{z} \right)^N, \\ b_N &:= x_{2p+N} \left( \frac{1}{z} \right)^N,\end{aligned}$$

et  $r_N = \sum_{k=N}^{2p} x_{N+k} = 0$  si  $N > 2p$ . On arrive à l'écriture suivante

$$\mathcal{Z}((y_N))(z) = \mathcal{Z}(\mathbf{1}_{[0,2p]})(z) \times \mathcal{Z}(x_{2p+N})(z) + \mathcal{Z}(r_N)(z)$$

Et comme

$$\mathcal{Z}(\mathbf{1}_{[0,2p]})(z) = \sum_{N=0}^{2p} z^{-N} = \frac{1 - z^{-2p-1}}{1 - z^{-1}},$$

on se retrouve avec

$$\mathcal{Z}((y_N))(z) = \frac{1 - z^{-2p-1}}{1 - z^{-1}} \mathcal{Z}(x_{2p+N})(z) + \mathcal{Z}(r_N)(z).$$

Un passage par la transformée en  $z$  inverse donne le résultat.  $\square$

Comme conséquence de cette proposition, on trouve pour tout entier naturel  $N > 2p$ ,

$$\text{tr}(A_{N+p}) \approx \mathcal{Z}^{-1} \left( \frac{1}{n \times (2p+1)} \frac{1 - z^{-2p-1}}{1 - z^{-1}} \sum \langle P_{2p+N}(J)^{-1} A_{2p+N} V^{2p+N}, V^{2p+N} \rangle z^{-N} \right) \quad (\text{Z-TD-TAM3})$$

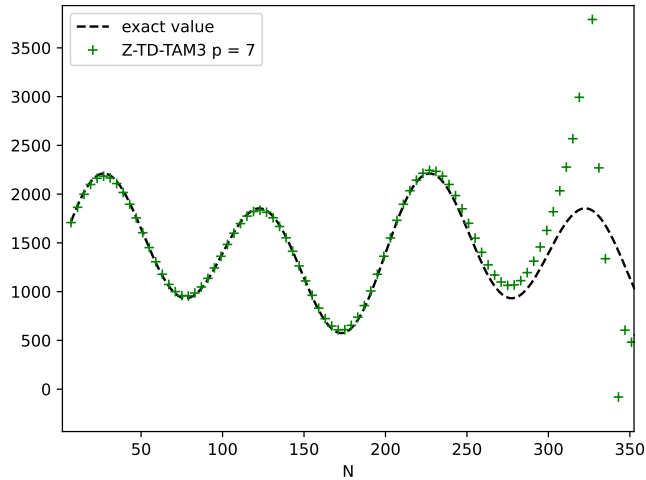


FIGURE 20 – Approximation de la trace de l'opérateur d'amortissement de type  $-f(t)\Delta$  sur l'équation de KdV pour  $p = 7$ ,  $q = 4$

## 6.5 Approximation du symbole d'un opérateur

### 6.5.1 Proposition clé

La méthode qui va suivre à été proposé dans CHEHAB[4], elle consiste en la proposition suivante

**Proposition 6.5.1.** *Soit  $A$  un opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^n$  diagonalisable. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$ , une base orthonormée de vecteurs propres de  $A$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Soit  $\mathcal{I} \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  et soit  $P_{\mathcal{I}}$  l'opérateur de projection orthogonale sur  $\text{Vect}((e_i)_{i \in \mathcal{I}})$ . Si  $\mathbf{V}$  est un vecteur aléatoire tel que ses composantes  $v_1, \dots, v_n$  sont d'espérances nulles, indépendantes et de mêmes variances  $\sigma^2$ , si  $(\mathbf{V}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite i.i.d. de vecteurs aléatoires de même loi de  $\mathbf{V}$ , et si  $(\mathbf{W}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est définie par  $\mathbf{W}^k = P_{\mathcal{I}} \mathbf{V}^k \forall k \in \mathbb{N}$  alors*

$$\frac{\sum_{i=1}^N \langle A \mathbf{W}^k, \mathbf{W}^k \rangle}{\sum_{i=1}^N \langle \mathbf{W}^k, \mathbf{W}^k \rangle} = \frac{1}{\#\mathcal{I}} \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i$$

*Démonstration.* Remarquons que

$$\sum_{i=1}^N \langle A \mathbf{W}^k, \mathbf{W}^k \rangle = \sum_{i=1}^N \langle P_{\mathcal{I}}^T A P_{\mathcal{I}} \mathbf{V}^k, \mathbf{V}^k \rangle \rightarrow \sigma^2 \text{tr}(P_{\mathcal{I}}^T A P_{\mathcal{I}})$$

Si  $Q$  est la matrice de changement de base orthogonales de la base canonique vers la base  $(e_1, \dots, e_n)$ , trouve alors

$$Q P_{\mathcal{I}}^T A P_{\mathcal{I}} Q^T = (Q P_{\mathcal{I}}^T Q^T)(Q A Q^T)(Q P_{\mathcal{I}} Q^T) = (J_{\mathcal{I}}^T D J_{\mathcal{I}})$$

où  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $J_{\mathcal{I}} = \text{diag}(\mathbf{1}_{1 \in \mathcal{I}}, \dots, \mathbf{1}_{n \in \mathcal{I}})$  et donc

$$\sum_{k=1}^N \langle A \mathbf{W}^k, \mathbf{W}^k \rangle \rightarrow \sigma^2 \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i$$

En remplaçant  $A$  par  $I_n$ , on trouve aussi

$$\sum_{k=1}^N \langle \mathbf{W}^k, \mathbf{W}^k \rangle \rightarrow \sigma^2 \sum_{i \in \mathcal{I}} 1 = \sigma^2 \#\mathcal{I}$$

□

**Remarque :** Dans cette proposition, on remarque que, dans la base de vecteurs propres, les deux opérateurs  $P_{\mathcal{I}}$  et  $A$  sont diagonaux. Ils commutent donc entre eux ce qui nous permet d'utiliser plutôt l'algorithme suivant :

$$\frac{\sum_{i=1}^N \langle P_{\mathcal{I}} A \mathbf{V}^k, P_{\mathcal{I}} \mathbf{V}^k \rangle}{\sum_{i=1}^N \langle P_{\mathcal{I}} \mathbf{V}^k, P_{\mathcal{I}} \mathbf{V}^k \rangle} = \frac{1}{\#\mathcal{I}} \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i$$

### 6.5.2 Une première méthode d'approximation de symbole

Il est alors possible d'utiliser cette propriété pour approcher le symbole d'un opérateur différentiel par une application constante par morceaux. Prenons encore en exemple le cas  $1D$ . Si  $P_{k_1}^{k_2} := P_{\llbracket k_1+1, k_2 \rrbracket}$  désigne un filtre passe-bande, il est possible de calculer une approximation peu coûteuse des moyennes locales de notre symbole. On a alors

$$\frac{\sum_{i=1}^N \langle P_{k_1}^{k_2} A \mathbf{V}^k, P_{k_1}^{k_2} \mathbf{V}^k \rangle}{\sum_{i=1}^N \langle P_{k_1}^{k_2} \mathbf{V}^k, P_{k_1}^{k_2} \mathbf{V}^k \rangle} = \frac{1}{k_2 - k_1} \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \sigma(k)$$

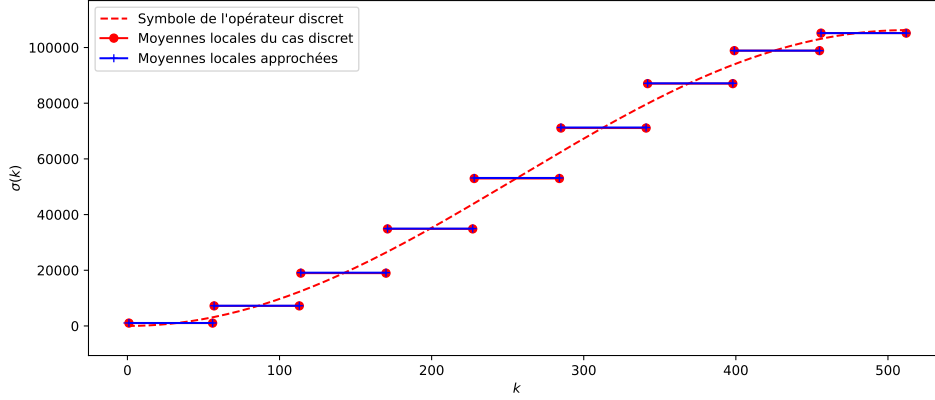


FIGURE 21 – Approximation numérique par des filtres passe-bande du symbole de la matrice de discrétisation d'ordre 2 de  $-\partial_{xx}$ , avec un échantillon de 10 vecteurs de Bernoulli de taille  $n = 1024$ .

En pratique, cette méthode nécessite de connaître et d'utiliser des filtres passe-bande qui peuvent s'avérer coûteux. Nous allons dans ce qui suit proposer l'utilisation d'une méthode multigrille pour filtrer rapidement les fréquences.

### 6.5.3 Une méthode multigrille d'approximation de symbole

Une méthode radicale qui permet de "couper" les fréquences en deux est projeter notre discrétisation  $U$  que l'on souhaite filtrer dans un maillage plus petit. Si  $G_0$  désigne un maillage  $(x_1, \dots, x_N)$ , uniforme, de pas d'espace  $h$ , posons  $G_1 \subset G_0$  la sous-grille de sorte que  $G_1$  soit un maillage uniforme de pas  $2h$ . Le maillage étant plus grossier, la transformée de Fourier discrète associée ne représentera alors plus que la moitié des fréquences présente dans la TFD de  $G_0$  d'après le théorème d'échantillonnage de NYQUIST-SHANON. Cela peut donc être vu comme une façon de filtrer les hautes fréquences. Il faut tout de même faire attention au phénomène de repliement de spectre (*aliasing*) il sera alors intéressant d'utiliser des filtres anti-repliement ou *anti-aliasing* avant de sous-échantillonner.

Supposons disposer d'une succession de sous-maillage

$$G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_q$$

Soit  $U$  un vecteur représentant la discrétisation d'une fonction  $u$  sur le maillage  $G_0$ . Soit  $S_i$  l'application qui à un tel élément  $U$  renvoie une discrétisation  $U^{(i)}$  défini sur  $G_i$ . On appelle  $S_i^{-1}$  l'inverse à gauche de  $S_i$ , c'est à dire l'application qui à un élément  $U^{(i)}$  renvoie un élément  $U'$  antécédent de  $U^{(i)}$  par  $S_i$  sans ajout de fréquences. De sorte que  $K_i := S_i^{-1} \circ S_i$  soit un filtre passe-bas.

A la différence de l'algorithme précédent, ici nous n'avons pas à notre disposition des filtres passe-bande mais des filtres passe-bas. Ce qui donne en théorie

$$m_i := \frac{\sum_{k=1}^N \langle S_i^{-1} S_i A V^k, S_i^{-1} S_i V^k \rangle}{\sum_{k=1}^N \langle S_i^{-1} S_i V^k, S_i^{-1} S_i V^k \rangle} \approx \frac{1}{k_i} \sum_{k=0}^{k_i-1} \sigma(k)$$

où  $k_i := \lfloor \frac{n_0}{2^{i+1}} \rfloor$ .

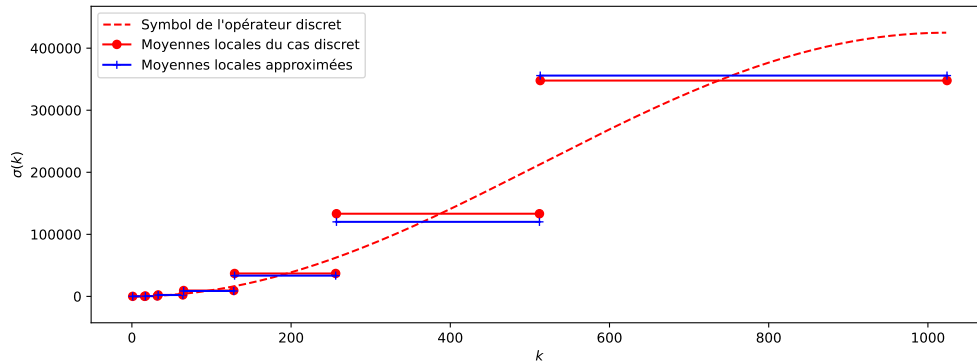
On peut alors estimer les moyennes du symbole sur les bandes de fréquences  $\llbracket k_i, k_{i+1} - 1 \rrbracket$  par la formule

$$\frac{1}{k_{i+1} - k_i} \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} \sigma(k) = \frac{k_{i+1} m_{i+1} - k_i m_i}{k_{i+1} - k_i}$$

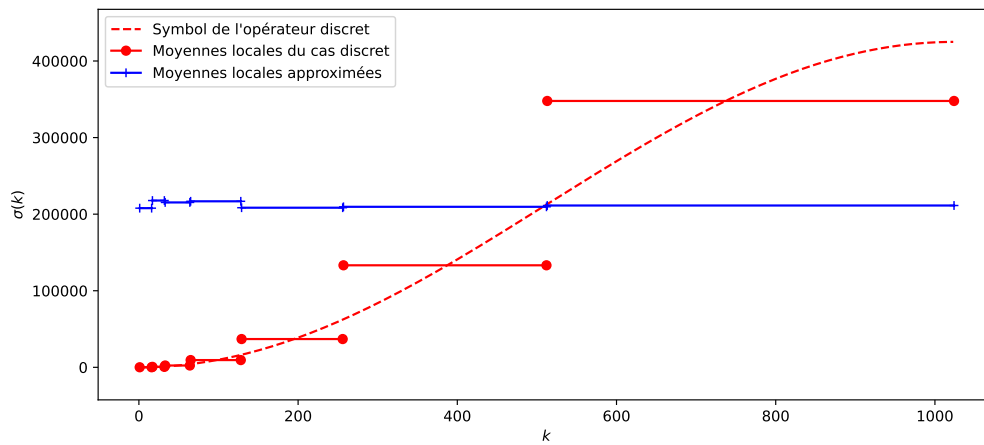
On peut se demander si il est possible de se ramener à la simplification :

$$m_i := \frac{\sum_{k=1}^N \langle S_i A V^k, S_i V^k \rangle}{\sum_{k=1}^N \langle S_i V^k, S_i V^k \rangle} \approx \frac{1}{k_i} \sum_{k=0}^{k_i-1} \sigma(k)$$

Notons qu'il ne s'agit alors plus du même produit scalaire, ce nouveau étant défini sur un espace vectoriel de dimension inférieure. On remarque que l'utilisation d'un filtre antialiasing rend cette simplification pertinente.



(a) avec anti-aliasing



(b) sans anti-aliasing

FIGURE 22 – Méthode d'approximation de symbole multigrille simplifiée pour la matrice de discrétisation d'ordre 2 de  $-\partial_{xx}$ , pour  $n_0 = 1024$  et  $N = 20$  et  $\mathbf{V}^k$  des vecteurs de Bernoulli.

## 7 Analyse spectrale de quelques solutions

Dans cette rubrique, nous étudierons en détail l'évolution de la richesse spectrale de notre solution  $u$  au cours du temps, pour différentes équations et différents schémas. Autrement dit, nous observerons l'évolution de  $\mathcal{F}(u)$  en fonction du temps. Le graphique représentant cette évolution est appelé spectrogramme.

### 7.1 L'équation de la chaleur

**Domaine continu :** Commençons par étudier l'effet de l'opérateur  $-\partial_{xx}$  sur le spectre en fréquence d'une solution riche en fréquence. Soit alors  $u$  une fonction de la variable  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , à valeur dans  $\mathbb{R}$ , satisfaisant l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$$

Dès lors, le passage à la transformée de Fourier en espace donne

$$\partial_t \mathcal{F}(u) = -\xi^2 \mathcal{F}(u)$$



et alors

$$\mathcal{F}(u) = e^{-t\xi^2} \mathcal{F}(u_0)$$

Le spectrogramme attendu d'une telle équation serait de la forme

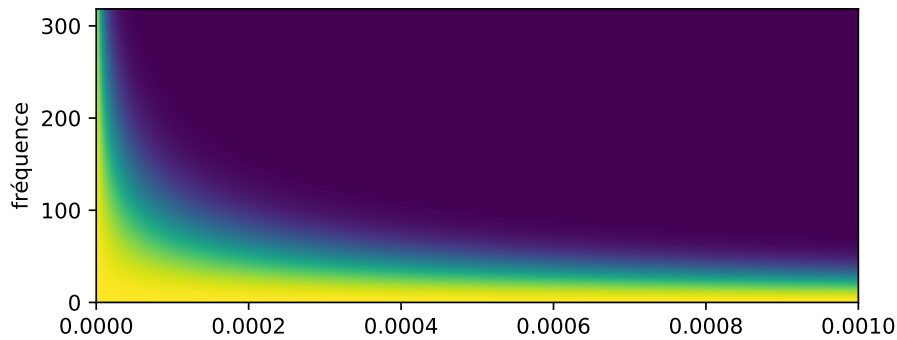


FIGURE 23 – Spectrogramme théorique de la solution théorique pour l'équation de la chaleur, dans le cas où  $\mathcal{F}(u_0) = 1_{[0, \xi_{\max}]}$ .

**Semi-discrétisation en temps :** Si on approche la solution  $u$  par une solution demi discrétisée en temps  $\mathcal{U}$  par un schéma de Crank-Nicholson on se retrouve cette fois ci avec

$$\frac{\mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1}) - \mathcal{F}(\mathcal{U}^n)}{\Delta_t} = -\xi^2 \frac{\mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1}) + \mathcal{F}(\mathcal{U}^n)}{2}$$

Ce qui nous donne

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1}) = \left( \frac{2 - \Delta_t \xi^2}{2 + \Delta_t \xi^2} \right) \mathcal{F}(\mathcal{U}^n).$$

Notons qu'il faut que  $\Delta_t \xi_{\max}^2 < 2$  pour que le schéma n'oscille pas. Cette conséquence du non respect de cette condition sera également visible dans le spectrogramme.

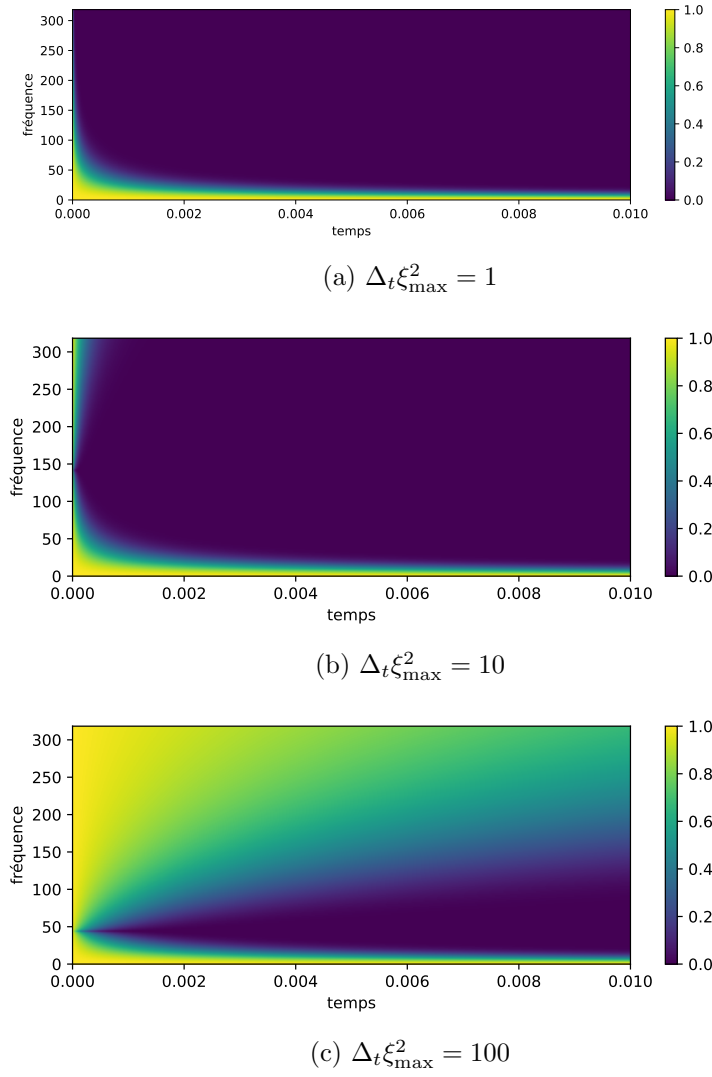


FIGURE 24 – Spectrogrammes théorique du schéma de Crank-Nicholson pour l'équation de la chaleur, dans le cas où  $\mathcal{F}(u_0) = 1_{[0, \xi_{\max}]}$ .

## 7.2 L'équation de Airy

### 7.2.1 Sans terme d'amortissement

**Domaine continu :** Rappelons l'équation de (**Airy**), aussi appelée équation de KDV linéarisée :

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u.$$

Si  $u$  désigne une solution de cette équation définie sur  $R$  (ou le Tore), alors  $\mathcal{F}(u)$ , sa transformée (resp. série) de Fourier vérifiera

$$\partial_t \mathcal{F}(u) = i\xi^3 \mathcal{F}(u)$$

Autrement dit,

$$\mathcal{F}(u) = e^{i\xi^3 t} \mathcal{F}(u_0)$$

Et donc  $|\mathcal{F}(u)|$  est supposée constante.

**Semi-discrétisation en temps :** On avait vu que, pour respecter cette condition en approchant la solution  $u$  par une solution demi discrétisée en temps  $\mathcal{U}$ , il fallait utiliser un schéma de Crank-Nicholson

$$\frac{\mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1}) - \mathcal{F}(\mathcal{U}^n)}{\Delta_t} = i\xi^3 \frac{\mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1}) + \mathcal{F}(\mathcal{U}^n)}{2}.$$

Ceci donnait

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1}) = \left( \frac{2 + i\Delta_t \xi^3}{2 - i\Delta_t \xi^3} \right) \mathcal{F}(\mathcal{U}^n).$$

Dans ces deux cas le spectrogramme attendu est constant en temps.

**Discretisation en temps et en espace :** C'est toujours le cas si on discrétise en espace, pourvu que la matrice de dispersion  $B$  qui approche l'opérateur  $\partial_{xxx}$  est antisymétrique. Par exemple, on avait vu précédemment que, pour  $B$  l'opérateur consistant à d'ordre 2 à  $\partial_{xxx}$ , et pour une discrétisation  $(\mathcal{U}_i^n)$  satisfaisant le schéma de Crank-Nicholson associé, la transformée de Fourier discrète de  $\mathcal{U}$  vérifie

$$\frac{(F\mathcal{U}^{n+1})_k - (F\mathcal{U}^n)_k}{\Delta_t} = -\sigma_B(k) \frac{(F\mathcal{U}^{n+1})_k + (F\mathcal{U}^n)_k}{2},$$

où on rappelle que

$$\sigma_B = \frac{i}{\Delta_x^3} (\sin(2\Delta_x k\pi) - 2\sin(\Delta_x k\pi)).$$

Ce qui donne

$$(F\mathcal{U}^{n+1})_k = \left( \frac{2 - \frac{i\Delta_t}{\Delta_x^3} (\sin(2\Delta_x k\pi) - 2\sin(\Delta_x k\pi))}{2 + \frac{i\Delta_t}{\Delta_x^3} (\sin(2\Delta_x k\pi) - 2\sin(\Delta_x k\pi))} \right) (F\mathcal{U}^n)_k$$

### 7.2.2 Avec un terme d'amortissement

**Domaine continu :** Si on ajoute un terme d'amortissement linéaire  $L$  à notre équation, de sorte qu'on considère désormais  $u$  comme la solution de l'équation

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u + L(u),$$

il vient cette fois ci que

$$\mathcal{F}(u) = e^{it\xi^3 - t\sigma_L(\xi)} \mathcal{F}(u_0),$$

et donc  $|\mathcal{F}(u)| = e^{-t\sigma_L} |\mathcal{F}(u_0)|$ . Cela nous ramène au même spectrogramme que l'équation de la chaleur FIGURE 23.

**Semi-discrétisation en temps :** Le schéma de Crank-Nicholson sur cette équation donnerait donc

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1}) = \left( \frac{2 + \Delta_t(i\xi^3 - \sigma_L(\xi))}{2 - \Delta_t(i\xi^3 - \sigma_L(\xi))} \right) \mathcal{F}(\mathcal{U}^n)$$

Si  $L = -\partial_{xx}$ , il vient par exemple que

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1}) = \left( \frac{2 + \Delta_t(i\xi^3 - \xi^2)}{2 - \Delta_t(i\xi^3 - \xi^2)} \right) \mathcal{F}(\mathcal{U}^n)$$

Et donc

$$|\mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1})|^2 = \frac{(2 - \Delta_t \xi^2)^2 + \Delta_t^2 \xi^6}{(2 + \Delta_t \xi^2)^2 + \Delta_t^2 \xi^6} |\mathcal{F}(\mathcal{U}^n)|^2$$

Que l'on peut aussi écrire

$$|\mathcal{F}(\mathcal{U}^{n+1})|^2 = \frac{\Delta_t(2 - \Delta_t \xi^2)^2 + (\Delta_t \xi^2)^3}{\Delta_t(2 + \Delta_t \xi^2)^2 + (\Delta_t \xi^2)^3} |\mathcal{F}(\mathcal{U}^n)|^2$$

Lorsque  $\Delta_t \xi^2 \gg 1$ , le termes d'ordre 3 de ces deux polynômes en  $\Delta_t \xi^2$  deviennent prédominants et ce quotient est alors proche de 1. Lorsque  $\Delta_t \xi^2 \ll 1$ , le coefficient constant de ces polynômes devient prédominant et ce quotient est proche de 1 également. C'est lorsque  $\xi$  n'est dans aucun de ces deux extrême que l'amortissement est important.

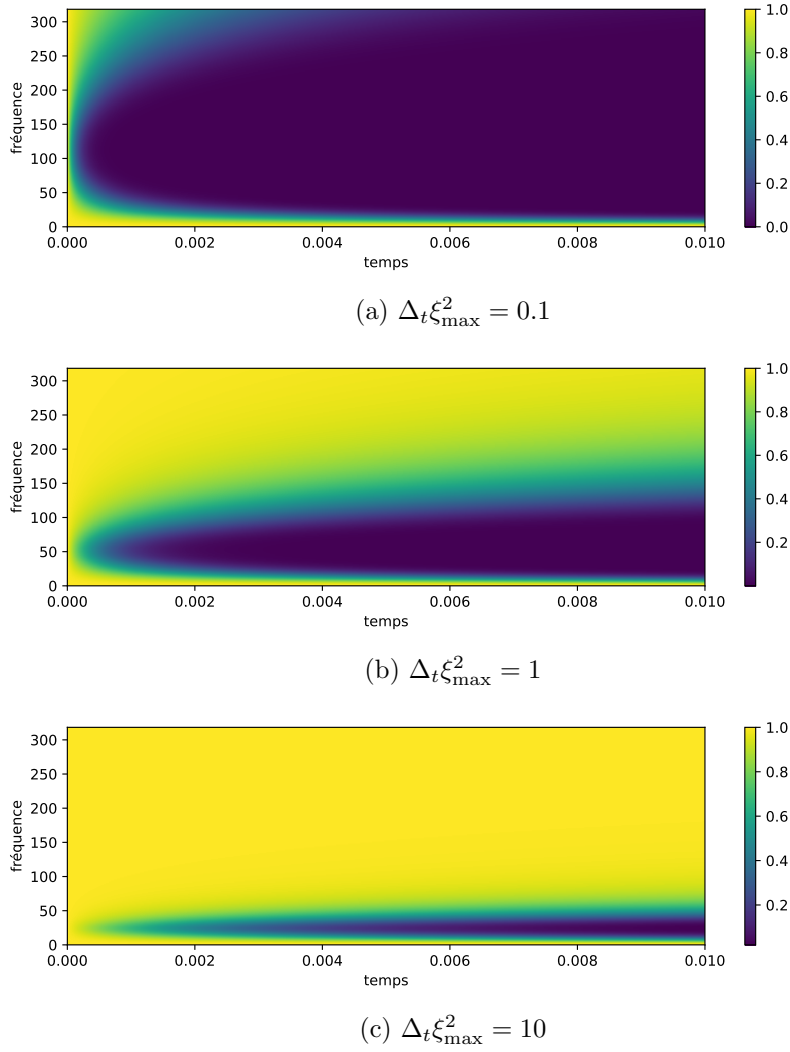


FIGURE 25 – Spectrogramme théorique d'un schéma de Crank Nicholson pour l'équation de Airy amortie par l'opérateur  $-\partial_{xx}$ , dans le cas où  $\mathcal{F}(u_0) = 1_{[0, \xi_{\max}]}$ .

**Discretisation en temps et en espace :** Pour  $B$  l'opérateur consistant à d'ordre 2 à  $\partial_{xxx}$ , et pour  $L$  l'opérateur consistant à l'ordre 2 à  $-\partial_{xx}$ , le schéma de Crank-Nicholson donne

$$F(\mathbf{U}^{n+1}) = \left( \frac{2 - \Delta_t(\sigma_B + \sigma_L)}{2 - \Delta_t(\sigma_B + \sigma_L)} \right) F(\mathbf{U}^n)$$

où

$$\sigma_B = \frac{i}{\Delta_x^3} (\sin(2\Delta_x k\pi) - 2\sin(\Delta_x k\pi))$$

et

$$\sigma_L = \frac{2}{\Delta_x^2} (1 - \cos(\Delta_x k\pi))$$

Comme  $\sigma_B$  est imaginaire et  $\sigma_L$  est réel positif, il vient

$$|(F(\mathbf{U}^{n+1}))_k|^2 = \left( \frac{(2 - \Delta_t \sigma_L(k))^2 + \Delta_t^2 |\sigma_B(k)|^2}{(2 + \Delta_t \sigma_L(k))^2 + \Delta_t^2 |\sigma_B(k)|^2} \right) |(F(\mathbf{U}^n))_k|^2$$

### 7.2.3 Comment retrouver numériquement le symbole de l'opérateur d'amortissement à partir du spectrogramme

Supposons connaître le spectrogramme de la solution discrétisée en temps et en espace. Il est donc possible, pour toute fréquence  $k$ , d'en déduire la quantité

$$s_k := \frac{(2 - \Delta_t \sigma_L(k))^2 + \Delta_t^2 |\sigma_B(k)|^2}{(2 + \Delta_t \sigma_L(k))^2 + \Delta_t^2 |\sigma_B(k)|^2}.$$

Supposons connaître  $\sigma_B$  et  $\Delta_t$ , alors il est possible de retrouver  $\sigma_L$  à partir de  $s_k$ . Tout d'abord remarquons que

$$s_k = \frac{4 + \Delta_t^2 |\sigma_B(k)|^2 + \Delta_t^2 \sigma_L(k)^2 - 4\Delta_t \sigma_L(k)}{4 + \Delta_t^2 |\sigma_B(k)|^2 + \Delta_t^2 \sigma_L(k)^2 + 4\Delta_t \sigma_L(k)}$$

Le symbole  $\sigma_L$  est donc la plus grande racine positive du polynôme

$$(s_k - 1) (4 + \Delta_t^2 |\sigma_B(k)|^2 + \Delta_t^2 \mathbf{X}^2) + (s_k + 1) (4\Delta_t \mathbf{X})$$

### 7.3 L'équation de KdV

#### 7.3.1 Solution initiale gaussienne

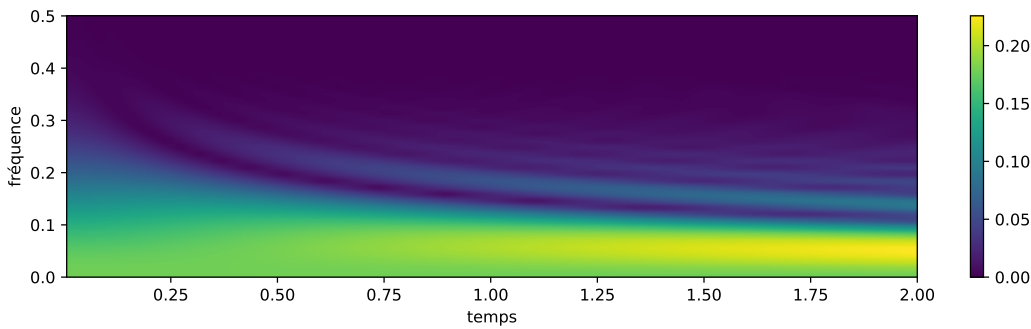


FIGURE 26 – Spectrogramme de la simulation d'une gaussienne.

Dans un temps très court, on remarque la création de bandes sombres sur les hautes fréquences ainsi qu'une augmentation de la luminosité dans les basses fréquences. Le terme non linéaire de l'équation de (KdV) semble avoir pour effet de déplacer certaines fréquences vers de plus basses fréquences.

#### 7.3.2 Le Soliton

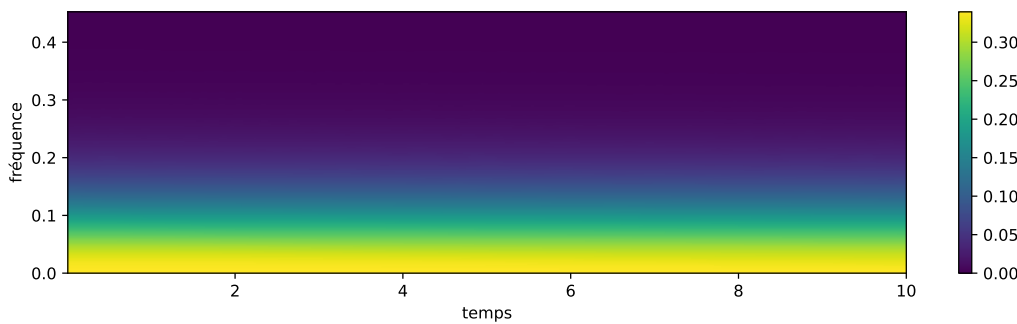


FIGURE 27 – Spectrogramme de la simulation d'un soliton.

Comme attendu d'un soliton, son spectrogramme est constant en temps. Cela signifie que le soliton n'est pas déformé. Un tel spectrogramme ne permet cependant pas d'observer la translation du soliton (où d'éventuels phénomènes de dispersion chez d'autres conditions initiales). Une façon de palier ce problème et donc de se rendre compte de l'évolution d'un soliton est d'afficher  $|f(\xi, t) - f(\xi, 0)|$  au lieu du spectrogramme habituel  $|f(\xi, t)|$ . Ceci revient à considérer le spectrogramme de  $u - u_0$ . Ceci donne alors

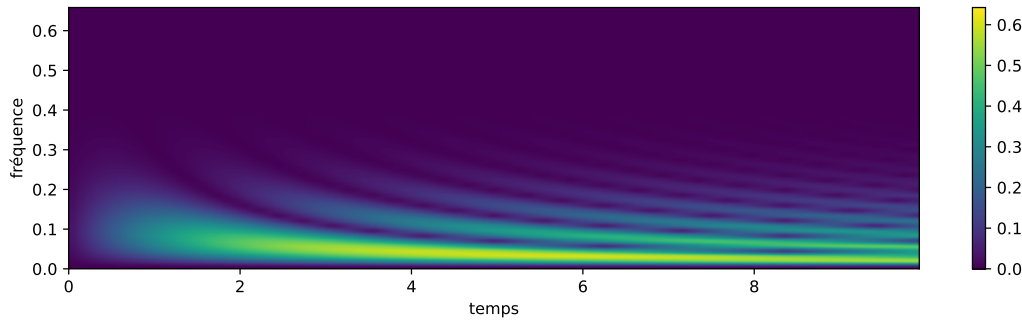


FIGURE 28 – Spectrogramme de  $u - u_0$ , où  $u$  est la simulation de KdV avec pour donnée initiale un soliton  $u_0$  de vitesse  $c$ .

La transformée de fourier attendue de l'évolution en temps d'un soliton est de la forme  $(e^{i\xi ct})\mathcal{F}(u_0)$ . la transformée de fourier de  $u - u_0$  serait alors de la forme  $(e^{i\xi ct} - 1)\mathcal{F}(u_0)$ . Les zones sombres représenteraient alors les point  $(\xi, t)$  vérifiant  $e^{i\xi ct} = 1$ . Le long de ces bandes sombre  $\xi ct$  est alors une constante multiple de  $2\pi$ . Les bandes sombres sont alors les graphes des applications de la forme  $t \mapsto \frac{2q\pi}{tc}$ . Par le même raisonnement, les bandes claires correspondent aux graphes des applications de la forme  $t \mapsto \frac{(2q+1)\pi}{tc}$ .

### 7.3.3 Chevauchement de deux solitons

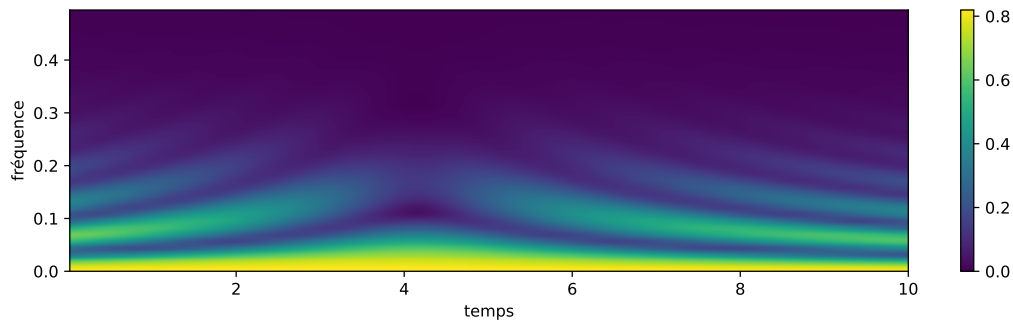


FIGURE 29 – Spectrogramme de la simulation de deux solitons qui se chevauchent.

Avant et après le chevauchement des solitons, qui a lieu vers  $t = 4$ , on distingue une alternance de zones sombre et de zones claires selon l'axe des fréquences. Ceci est du au fait que la vague se constitue de deux paquets d'ondes se déplaçant à des vitesses différentes et la transformée de Fourier de la solution numérique est alors de la forme  $e^{itc_1\xi}f_1(\xi) + e^{itc_2\xi}f_2(\xi)$ . A certains moments et à certaines fréquences, les deux complexes  $e^{itc_1\xi}f_1(\xi)$  et  $e^{itc_2\xi}f_2(\xi)$  ont des arguments égaux et donc s'additionnent. A d'autres moments et d'autres fréquences, ils sont opposés, ce qui fait qu'ils se compensent partiellement. Le spectrogramme représentant la norme de cette somme, il fait apparaître des zones sombres aux endroits ou ces quantités se compensent et des zones plus claires aux endroits ou ces quantité s'additionnent.

On remarque que les bandes sont d'autant plus resserrées que les solitons sont éloignés l'un de l'autre.

### 7.3.4 Le Soliton amorti

## 7.4 L'équation de Saint-Venant sans viscosité

Dans cette partie nous implémenterons l'équation de Saint-Venant 1D par le schéma bien balancé précédemment défini. Nous observerons de comportement spectral de la vague dans plusieurs cas de figure. Nous analyserons notamment également l'effet de la topographie sur la norme L2 finale de notre vague. Par exemple nous regarderons le cas d'une bosse gaussienne au fond, le cas de deux

bosses gaussiennes, le cas de bosses discontinues ou encore le cas d'un fond oscillant. Dans chacun de ces contextes, nous observerons l'influence des grandeurs caractéristiques entrant en jeu (par exemple l'influence de la taille de la bosse relativement à la taille de la vague). Dans chaque partie, pour comparer efficacement les différents cas de figures, nous effectuerons toutes les simulations avec la même surface initiale et la même vitesse initiale :

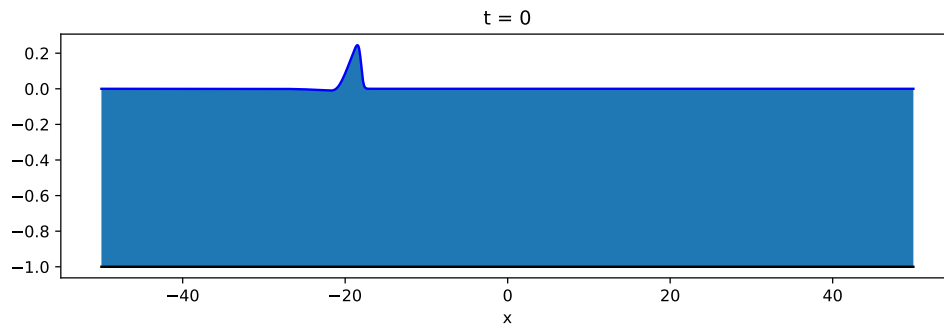


FIGURE 30 – Aperçu de la condition initiale qui sera utilisée dans cette sous-section.

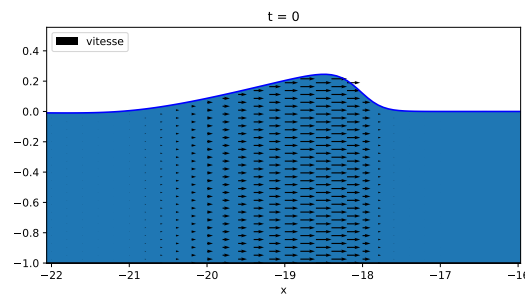


FIGURE 31 – Aperçu de la vitesse initiale qui sera utilisée dans cette sous-section.

#### 7.4.1 Fond plat

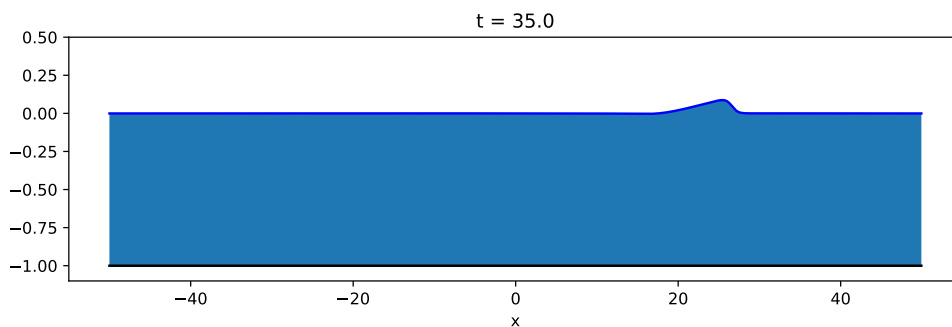


FIGURE 32 – Aperçu de la simulation de l'équation de Saint-Venant avec un fond plat, pour  $\varepsilon = 1$ .

On observe une vague moins haute et plus large que la vague au temps  $t = 0$ . Le schéma semble avoir un effet d'amortissement.

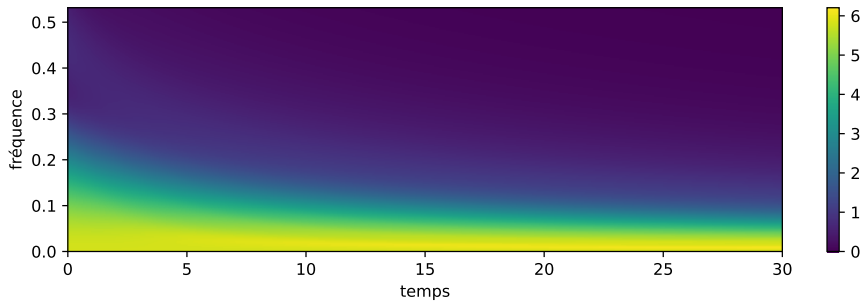


FIGURE 33 – Spectrogramme de la simulation de l'équation de Saint-Venant avec un fond plat, pour  $\varepsilon = 1$ .

Ce spectrogramme confirme notre intuition : Le schéma agit comme un filtre passe-bas sur la vague.

En calculant le symbole associé au schéma, c'est à dire le symbole de l'opérateur qui à  $u_0$  associe  $u(T)$  la solution numérique au temps  $T$  de solution initiale  $u_0$ , on trouve

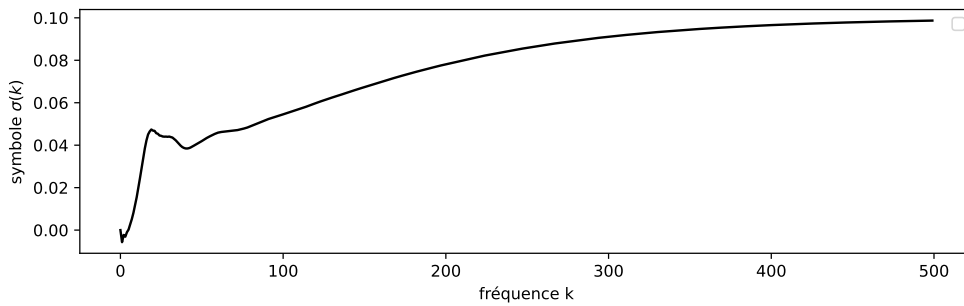


FIGURE 34 – Symbole numérique de l'amortissement de l'équation de Saint-Venant avec un fond plat, pour  $\varepsilon = 1$ , simulé au temps  $T = 30$ .

Ce symbole croissant met en évidence la nature passe-bas de l'équation de Saint-Venant et semble converger vers une borne supérieure lorsque la fréquence  $k$  croît.

#### 7.4.2 Fond gaussien (une bosse)

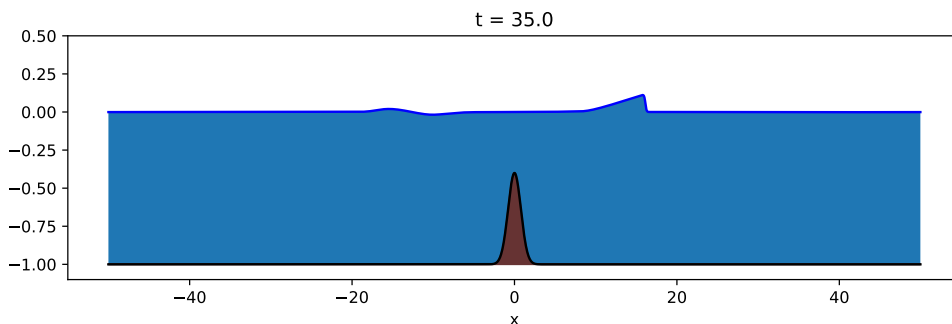


FIGURE 35 – Aperçu de la simulation de l'équation de Saint-Venant avec un fond gaussien, pour  $\varepsilon = 1$ .

Cette figure représente une vague, initialement unidirectionnelle (de gauche vers la droite), après chevauchement de la bosse. De ce chevauchement, il résulte la création d'une petite vague à gauche de la bosse, de direction opposée (de droite vers la gauche). Le moment exacte du chevauchement est remarquable sur le spectrogramme suivant.



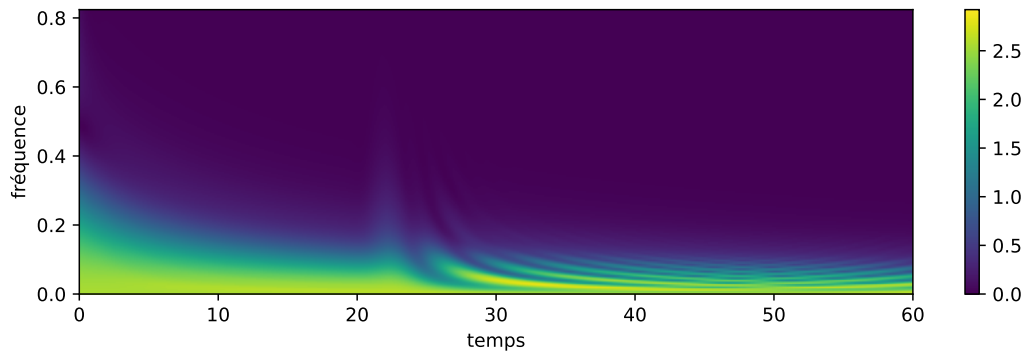


FIGURE 36 – Spectrogramme de la simulation de l'équation de Saint-Venant avec un fond gaussien, pour  $\varepsilon = 1$ .

La chevauchement se produit à  $t \approx 21$ . A ce moment, des composantes de hautes fréquences sont créées puis disparaissent. Après cela, comme pour la FIGURE 29, on voit une alternance de zones sombre et de zones claires selon l'axe des fréquences. Ceci est dû au fait que la vague se constitue désormais de deux paquets d'ondes se déplaçant à des vitesses différentes.

Lorsqu'on s'intéresse plus particulièrement à l'évolution de la norme  $L^2$  de la surface, on peut observer ce graphique :

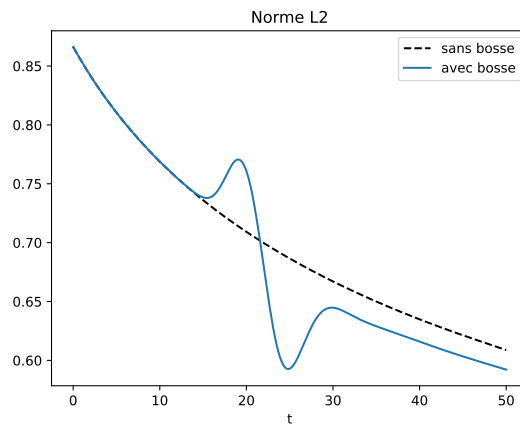


FIGURE 37 – Évolution de la norme  $L^2$  de la solution numérique de l'équation de Saint-Venant avec un fond gaussien, pour  $\varepsilon = 1$ .

La création de composantes de hautes fréquences se retrouve ici par la création d'un maximum local en  $t \approx 21$ . A la fin, on observe une norme  $L^2$  plus faible que pour un fond plat. Sur le long terme, la bosse a donc un effet amortissant. On peut comparer les symboles associés aux schémas avec et sans le fond gaussien.

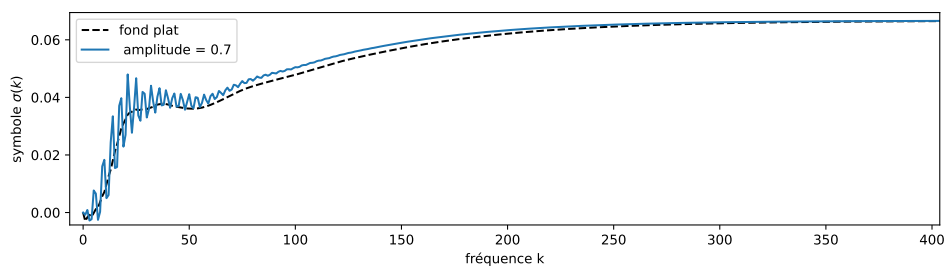


FIGURE 38 – Comparaison entre le symbol associé

Il peut être intéressant d'étudier l'influence de la taille de la bosse et de sa hauteur sur l'intensité de cet amortissement. Ceci nous donne

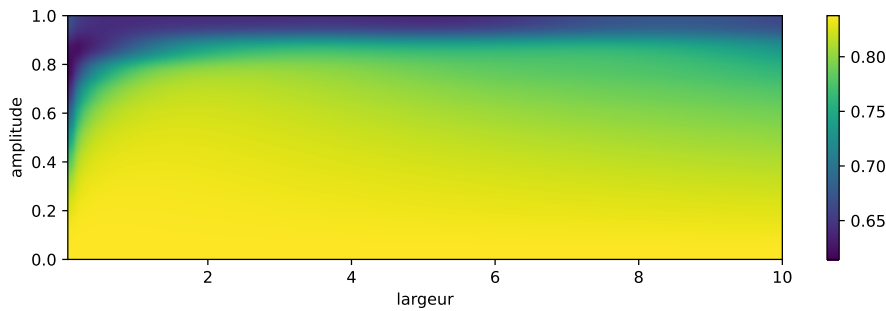


FIGURE 39 – Représentation de la norme  $L^2$  de la solution au temps  $t = 30$  pour un fond gaussien, en fonction de la largeur et de l'amplitude de la gaussienne, pour  $\varepsilon = 1$  pour une vague de hauteur 0.1 et de largeur 10, dans une eau de profondeur 1.

On observe qu'une bosse haute est préférable pour obtenir un effet d'amortissement accru. Plus déterminant encore, en particulier à faible profondeur, c'est une bosse fine qu'il faut privilégier pour amortir efficacement la vague.

#### 7.4.3 Fond à deux bosses gaussiennes

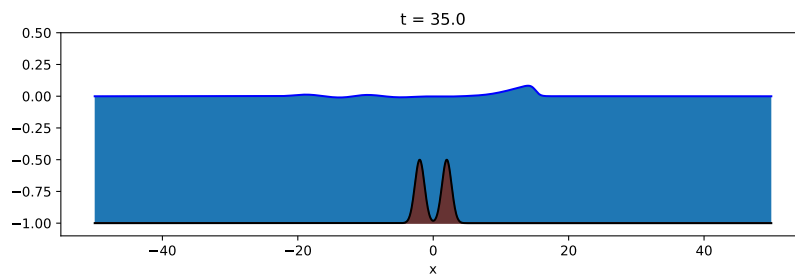


FIGURE 40 – Aperçu de la simulation de l'équation de Saint-Venant avec comme fond la somme de deux gaussiennes, pour  $\varepsilon = 1$ .

Cette figure représente une vague, initialement unidirectionnelle (de gauche vers la droite), après chevauchement de deux bosses gaussiennes consécutives. Ici, les deux bosses ont pour conséquence de générer deux vagues de vitesses opposées à la vague initiale.

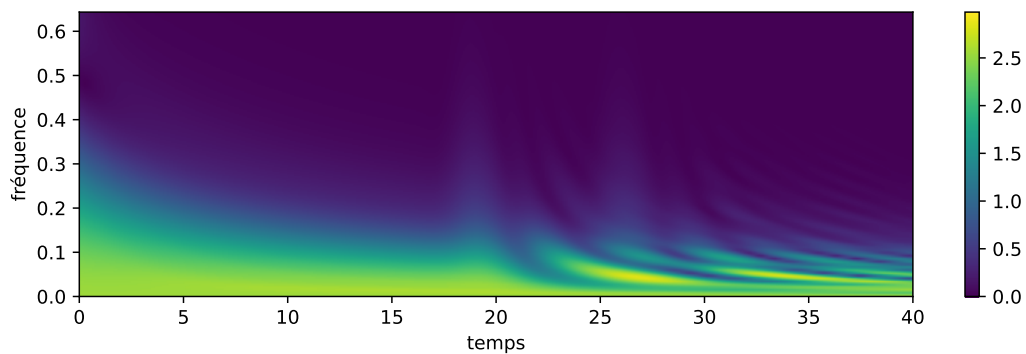


FIGURE 41 – Spectrogramme de la simulation de l'équation de Saint-Venant avec un fond sinusoïdal, pour  $\varepsilon = 1$ .

Ce spectrogramme est similaire à celui dans le cas d'une seule bosse. Avec deux pics de hautes fréquences au lieu d'un seul.

#### 7.4.4 Fond sinusoïdal

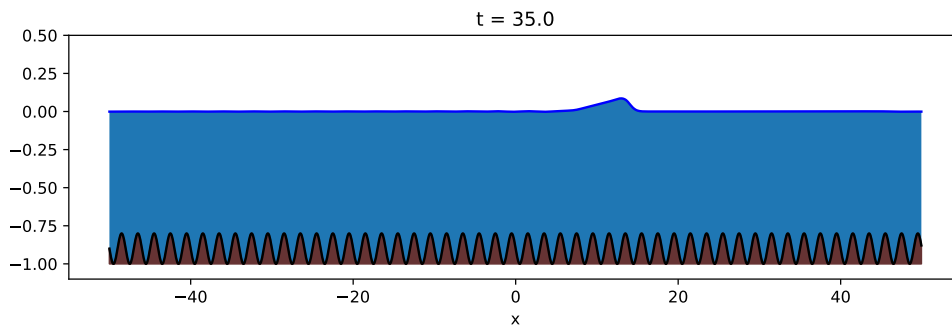


FIGURE 42 – Aperçu de la simulation de l'équation de Saint-Venant avec un fond sinusoïdal, pour  $\varepsilon = 1$ .

Pour la même raison qu'une bosse seule crée une vague, un fond sinusoïdal à pour effet de créer une myriade de petites vagues de vitesses opposées à la vitesse de la vague initiale. Ceci nous donne le spectrogramme suivant :

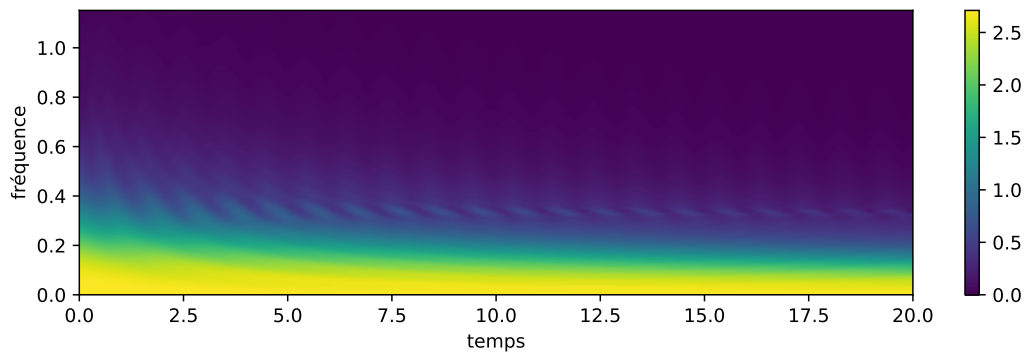


FIGURE 43 – Spectrogramme de la simulation de l'équation de Saint-Venant avec un fond sinusoïdal, pour  $\varepsilon = 1$ .

En dehors de la création périodique de composantes de hautes fréquences, on observe une forme similaire à la simulation avec fond plat. Mais une différence est visible lorsqu'on observe l'évolution de la norme  $L^2$  :

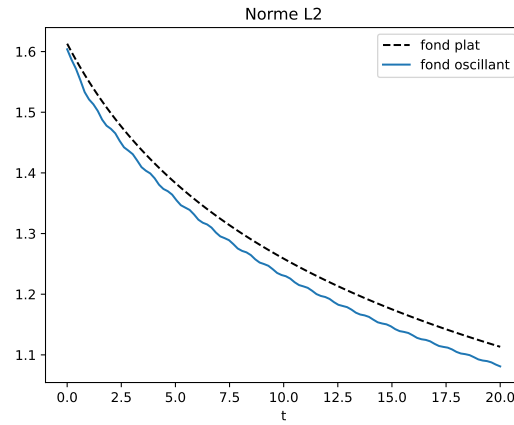


FIGURE 44 – Évolution de la norme  $L^2$  de la solution numérique de l'équation de Saint-Venant avec un fond sinusoïdal, pour  $\varepsilon = 1$ .

Les allures sont similaires mais la décroissance est plus forte avec un fond oscillant.

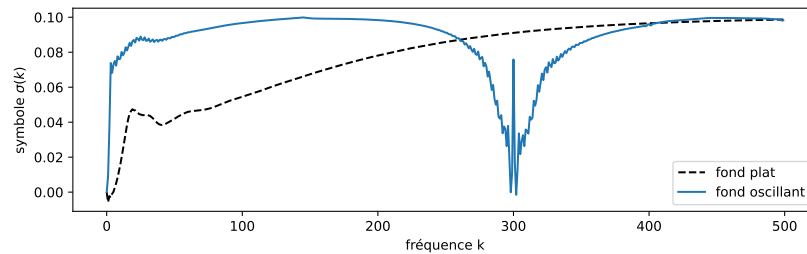


FIGURE 45 – Symbol du schéma de Saint-Venant avec un fond sinusoïdal, de fréquence  $300/L$  d'amplitude 0.5, pour  $\varepsilon = 1$ .

On peut se demander se qu'il se passe si on change la fréquence ou encore l'amplitude des oscillations :

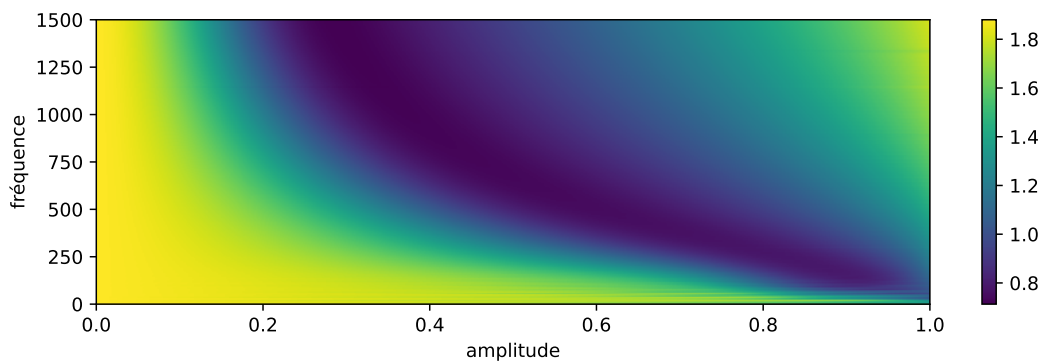


FIGURE 46 – Représentation de la norme  $L^2$  de la solution au temps  $t = 20$  pour un fond sinusoïdal, en fonction de la fréquence et de l'amplitude de l'harmonique, pour  $\varepsilon = 1$  pour une vague de hauteur 0.1 et de largeur 10, dans une eau de profondeur 1.

A partir du graphique ci dessus, on observe que l'amplitude maximisant l'amortissement est une fonction décroissante de la fréquence. Autrement dit, plus la fréquence est grande, plus l'amplitude optimale est petite.

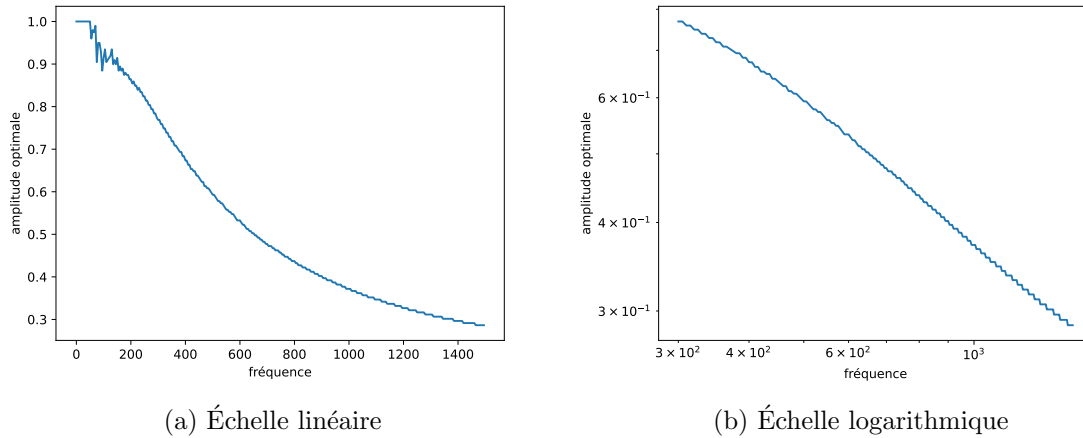


FIGURE 47 – Amplitude du fond sinusoïdal maximisant la décroissance de la norme  $L^2$  de la vague en fonction de la fréquence.

Lorsqu'on superpose le symbole obtenu pour l'amplitude optimale avec ceux d'amplitudes supérieures (sur-optimale) et inférieures (sous-optimale), on se retrouve avec

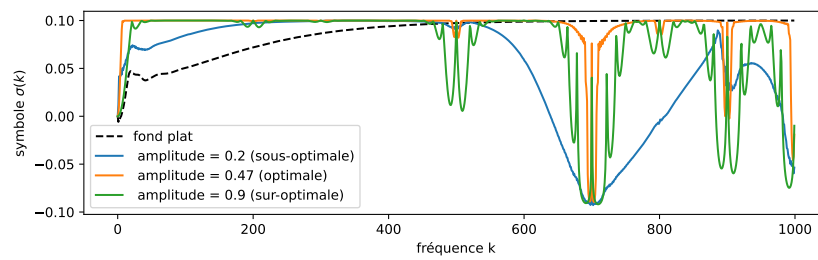


FIGURE 48 – Symbol du schéma de Saint-Venant avec des fonds sinusoïdaux, de fréquence  $k = 700$ , pour  $\varepsilon = 1$ .

Lorsque la fréquence augmente, la norme  $L^2$  finale minimale (i.e. obtenue à  $t = 20$  lorsque l'amplitude est optimale) semble converger vers une constante non nulle.

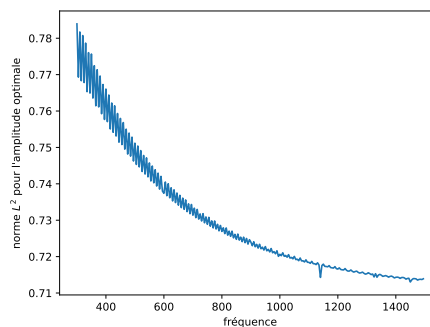


FIGURE 49 – Représentation la norme  $L^2$  de la solution au temps  $t = 20$  pour un fond sinusoïdal, obtenue à l'amplitude optimale, en fonction de la fréquence.

### 7.4.5 Fond à bosse rectangulaire

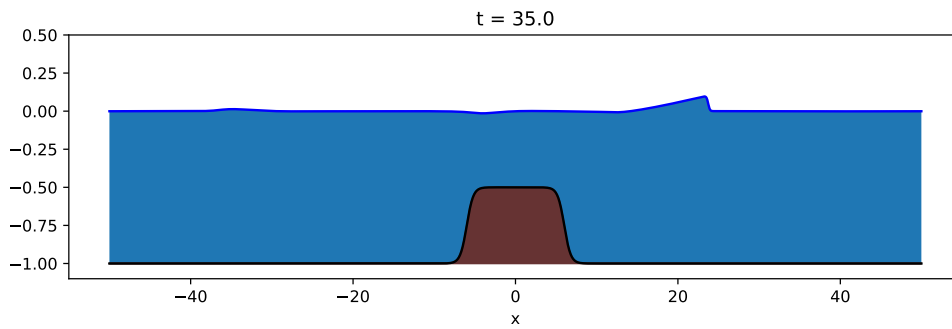


FIGURE 50 – Aperçu de la simulation de l'équation de Saint-Venant avec un fond rectangulaire, pour  $\varepsilon = 1$ .

Ce cas de figure a pour avantage de séparer distinctement les deux phases du chevauchement d'un obstacle : La croissance du fond et la décroissance du fond. Sur l'aperçu, on peut apercevoir deux contre-vagues. Une vague d'amplitude positive générée par la croissance du fond et une vague d'amplitude négative générée par la zone décroissante. Ces deux moments sont visibles dans les graphiques suivants.

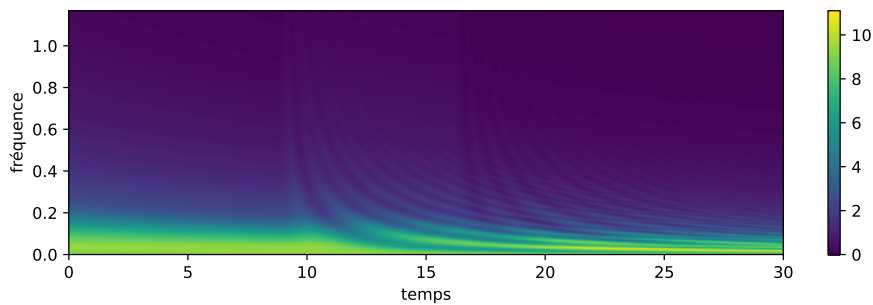


FIGURE 51 – Spectrogramme de la simulation.

Le début du chevauchement survient à  $t = 9$ , on observe alors une création de composantes de haute fréquence. À partir de  $t = 16$ , la phase de décroissance cause un phénomène inverse, c'est à dire une absorption des hautes fréquences.

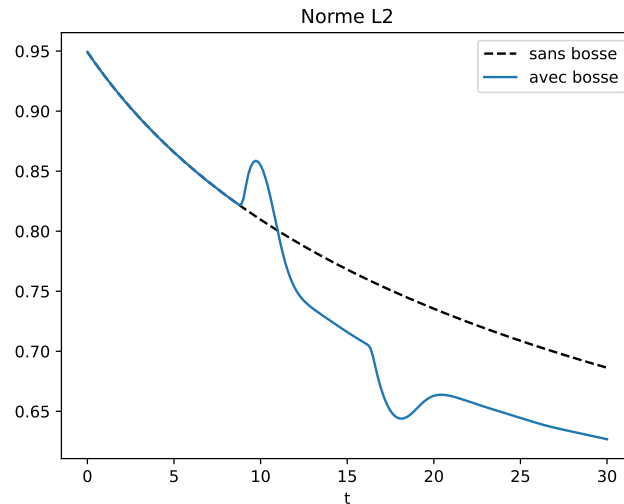


FIGURE 52 – Évolution de la norme L2 de la solution numérique de l'équation de Saint-Venant avec un fond rectangulaire, pour  $\varepsilon = 1$ .

## 8 ANNEXE : Sur les puissances fractionnaires de l'opérateur $(-\Delta)$

Intéressons nous à la puissance  $(-\Delta)^k$  au sens de la composée de l'opérateur  $-\Delta$  avec  $k$  un entier naturel. Pour tout élément  $u$  de  $\mathcal{C}^{2k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , on trouve après passage à la transformée de Fourier le résultat suivant

$$\widehat{(-\Delta)^k u}(\xi) = (4\pi)^2 |\xi|^{2k} \widehat{u}(\xi)$$

On peut définir la puissance fractionnaire du laplacien comme une généralisation de cette équation en remplaçant l'entier  $k$  par un réel  $0 < s < 1$ .

$$\widehat{(-\Delta)^s u}(\xi) = (4\pi)^2 |\xi|^{2s} \widehat{u}(\xi)$$

En appliquant la transformée inverse à cette définition, on aboutit à une deuxième définition, cette fois ci un peu plus explicite

$$(-\Delta)^s u = C_{(n,s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy$$

avec  $C_{(n,s)} = \frac{4^s \Gamma(s + \frac{n}{2})}{\pi^{n/2} \Gamma(-s)}$ .

# Références

- [1] Emmanuel AUDUSSE. *Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes [Thèse]*. 2004.
- [2] Emmanuel AUDUSSE et al. “A Fast and Stable Well-Balanced Scheme with Hydrostatic Reconstruction for Shallow Water Flows”. In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 25.6 (jan. 2004), p. 2050-2065. ISSN : 1095-7197. DOI : 10.1137/s1064827503431090. URL : <http://dx.doi.org/10.1137/s1064827503431090>.
- [3] Jean-Paul CHEHAB. “Damping, stabilization, and numerical filtering for the modeling and the simulation of time dependent PDEs”. In : *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S* 14.8 (2021), p. 2693. ISSN : 1937-1179. DOI : 10.3934/dcdss.2021002. URL : <http://dx.doi.org/10.3934/dcdss.2021002>.
- [4] Jean-Paul CHEHAB. “The symbol approximation method : a numerical approach to the approximation of the symbol of self-adjoint operators”. In : *Computational and Applied Mathematics* 43.2 (fév. 2024). ISSN : 1807-0302. DOI : 10.1007/s40314-023-02586-2. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s40314-023-02586-2>.
- [5] M DELFOUR, M FORTIN et G PAYR. “Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger equation”. In : *Journal of Computational Physics* 44.2 (déc. 1981), p. 277-288. ISSN : 0021-9991. DOI : 10.1016/0021-9991(81)90052-8. URL : [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90052-8](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(81)90052-8).
- [6] S. DESCOMBES et M. THALHAMMER. “The Lie-Trotter splitting for nonlinear evolutionary problems with critical parameters : a compact local error representation and application to nonlinear Schrodinger equations in the semiclassical regime”. In : *IMA Journal of Numerical Analysis* 33.2 (oct. 2012), p. 722-745. ISSN : 1464-3642. DOI : 10.1093/imanum/drs021. URL : <http://dx.doi.org/10.1093/imanum/drs021>.
- [7] Stefania FERRARI et Fausto SALERI. “A new two-dimensional Shallow Water model including pressure effects and slow varying bottom topography”. In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 38.2 (mars 2004), p. 211-234. ISSN : 1290-3841. DOI : 10.1051/m2an:2004010. URL : <http://dx.doi.org/10.1051/m2an:2004010>.
- [8] Pierre GARNIER. *[Thèse] Amortissement et phénomènes extrêmes en hydrodynamique*. 2016.
- [9] Jean-Frédéric GERBEAU et Benoit PERTHAME. “Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; Numerical validation”. In : *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B* 1.1 (2001), p. 89-102. ISSN : 1553-524X. DOI : 10.3934/dcdsb.2001.1.89. URL : <http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2001.1.89>.
- [10] J. M. GREENBERG et A. Y. LEROUX. “A Well-Balanced Scheme for the Numerical Processing of Source Terms in Hyperbolic Equations”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 33.1 (fév. 1996), p. 1-16. ISSN : 1095-7170. DOI : 10.1137/0733001. URL : <http://dx.doi.org/10.1137/0733001>.
- [11] Étienne GUYON, Jean-Pierre HULIN et Luc PETIT. *Hydrodynamique physique : 3e édition*. EDP Sciences, nov. 2020. ISBN : 9782759808939. DOI : 10.1051/978-2-7598-0893-9. URL : <http://dx.doi.org/10.1051/978-2-7598-0893-9>.
- [12] M.F. HUTCHINSON. “A stochastic estimator of the trace of the influence matrix for laplacian smoothing splines”. en. In : *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 19.2 (jan. 1990), p. 433-450. ISSN : 0361-0918, 1532-4141. DOI : 10.1080/03610919008812866. URL : <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03610919008812866>.
- [13] R. S. JOHNSON. *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*. Cambridge University Press, oct. 1997. ISBN : 9780511624056. DOI : 10.1017/cbo9780511624056. URL : <http://dx.doi.org/10.1017/cbo9780511624056>.
- [14] David LANNES. *The Water Waves Problem*. American Mathematical Society, mai 2013. ISBN : 9781470409487. DOI : 10.1090/surv/188. URL : <http://dx.doi.org/10.1090/surv/188>.



- [15] Randall J. LEVEQUE. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser Basel, 1992. ISBN : 9783034886291. DOI : 10.1007/978-3-0348-8629-1. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-8629-1>.
- [16] Fabien MARCHE. “Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects”. In : *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 26.1 (jan. 2007), p. 49-63. ISSN : 0997-7546. DOI : 10.1016/j.euromechflu.2006.04.007. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechflu.2006.04.007>.
- [17] E. OTT et R. N. SUDAN. “Damping of Solitary Waves”. In : *The Physics of Fluids* 13.6 (juin 1970), p. 1432-1434. ISSN : 0031-9171. DOI : 10.1063/1.1693097. URL : <http://dx.doi.org/10.1063/1.1693097>.
- [18] Roger TEMAM et Alain MIRANVILLE. *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, mai 2005. ISBN : 9780511755422. DOI : 10.1017/cbo9780511755422. URL : <http://dx.doi.org/10.1017/cbo9780511755422>.