

Sur l'étude de plusieurs régimes asymptotiques des équations d'Euler à surface libre.

Lesage Adrien

4 février 2024

Table des matières

1	Introduction aux équations d'Euler à surface libre.	3
1.1	Hypothèses	3
1.2	Formulation des équations d'Euler.	3
1.2.1	Formulation de l'évolution du champ de vitesse	3
1.2.2	Formulation de la condition d'incompressibilité	4
1.2.3	Formulation des conditions aux bords et de l'évolution de la surface	4
1.3	Formulation de Bernoulli	6
1.4	Formulation de Craig-Sulem-Zakharov	7
1.5	Adimensionnement des paramètres du système	7
2	Cas du fond plat : Vers les équations de Korteweg-de Vries	8
3	Annexe 1 : Quelques rappels sur les opérateurs différentiels linéaires : Laplacien, Rotationnel, Gradient	8

1 Introduction aux équations d'Euler à surface libre.

1.1 Hypothèses

Tout le long de ce mémoire, nous nous intéresserons à l'étude d'un fluide dont nous supposons les hypothèses suivantes vérifiées

(H₁) : Le fluide est *homogène* et *incompressible*.

(H₂) : Le fluide est *non visqueux*.

(H₃) : Le fluide est *irrotationnel*.

Soit $\mathbf{X} = \mathbb{R}^d$ avec $d \in \{1, 2\}$. On souhaite étudier un tel fluide évoluant dans le domaine

$$\Omega_t = \{(x, z) \in \mathbf{X} \times \mathbb{R} \mid b(x) - H_0 \leq z \leq \zeta(t, x)\}$$

- $b : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ désigne les variations du fond du fluide, de profondeur caractéristique $H_0 > 0$
- le graphe $\zeta : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{X}$ désigne la surface du fluide, de sorte que les hypothèses suivantes soient vérifiées

(H₄) : Les particules de fluide ne traversent pas le fond.

(H₅) : Les particules de fluide ne traversent pas la surface.

(H₆) : En tout point $x \in \mathbf{X}$ et en tout instant $t \geq 0$, l'épaisseur du fluide $\zeta(t, x) - (b(x) - H_0)$ est supérieure à une constante $H_0 > 0$ indépendante de x et de t .

(H₇) : La pression du fluide à la surface est égale à la pression atmosphérique P_{atm} (on néglige les tensions de surface).

(H₈) : Le fluide est soumis à une force de gravité d'intensité g et de direction opposée au vecteur $\mathbf{z} = (0_{\mathbf{X}}, 1)$.

ajouter schéma

1.2 Formulation des équations d'Euler.

1.2.1 Formulation de l'évolution du champ de vitesse

Pour commencer, nous allons adopter un point de vue lagrangien :

- Posons $\begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbb{R}$ la fonction qui suit le déplacement d'une particule de fluide de position initiale $\begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix}(0) \in \Omega_0$.
- Posons $\mathbf{U}(t, x, z)$ la vitesse d'une particule de fluide située en $(x, z) \in \Omega_t$ à l'instant t .

Les hypothèses (H₄) et (H₅) nous donnent que $\begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} \in \Omega_t$ pour tout instant $t \geq 0$. Ceci nous permet d'écrire

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} = \mathbf{U}(t, \mathcal{X}(t), \mathcal{Z}(t)) \quad (1.1)$$

En dérivant une fois de plus, on obtient

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{U}(t, \mathcal{X}(t), \mathcal{Z}(t))}{\partial t} + \text{Jac}(\mathbf{U}) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix}$$

Ou, autrement dit,

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) (t, \mathcal{X}(t), \mathcal{Z}(t))$$

Les hypothèses (\mathbf{H}_2) nous dit que les particules ne s'influencent pas mutuellement en dehors de la pression. Chaque particule n'est alors soumise qu'à deux forces : la force de gravité $F_g = -\rho g \mathbf{z}$ et la force de pression $F_P = -\nabla P$. La deuxième loi de Newton donne alors

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} (t) = -\rho g \mathbf{z} - \nabla P(t, X(t), Z(t))$$

Ce qui nous donne les équations d'Euler définies par le système suivant.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) + \rho g \mathbf{z} + \nabla P = 0 \quad (\mathbf{E}_1)$$

1.2.2 Formulation de la condition d'incompressibilité

L'hypothèse (\mathbf{H}_1) se traduit par

$$\rho(t, x, z) = \rho_0$$

En conséquence, la loi de conservation de la masse d'un fluide

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (1.2)$$

devient

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}) = 0 \quad (\mathbf{E}_2)$$

1.2.3 Formulation des conditions aux bords et de l'évolution de la surface

L'hypothèse (\mathbf{H}_4) s'exprime ainsi

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \{z = b(x) - H_0\} \quad (\mathbf{E}_3)$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur normal extérieur au domaine Ω_t .

Cette formule est une réécriture immédiate (\mathbf{H}_4) car $b - H_0$ ne dépend pas du temps. En revanche, comme ζ dépend du temps, la caractérisation de l'hypothèse (\mathbf{H}_5) est moins immédiate et est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 1.2.1 *L'hypothèse (\mathbf{H}_5) nous donne que*

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(t, x) - \sqrt{1 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \zeta\|^2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{dans } \{z = \zeta(t, x)\} \quad (\mathbf{E}_4)$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur normal extérieur au domaine Ω_t

Preuve :

Etape 1 : Commençons par déterminer \mathbf{n} en fonction de t , x , et ζ . A t fixé, la surface

est paramétrée par l'application

$$S_t : x \in \mathbf{X} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \zeta(t, x) \end{pmatrix}.$$

Sa différentielle en x est

$$DS_t(x) : v \in \mathbf{X} \mapsto DS_t(x).v = \begin{pmatrix} v \\ \nabla_X \zeta(t, x) \cdot v \end{pmatrix}.$$

Le vecteur normal \mathbf{n} vérifie alors

$$\mathbf{n} \cdot (DS_t(x).v) = 0$$

pour tout $v \in \mathbf{X}$. En posant $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$, on trouve alors

$$(n_1 + n_2 \nabla_X \zeta(t, x)) \cdot v = 0$$

pour tout $v \in \mathbf{X}$. On a alors

$$n_1 = -n_2 \nabla_X \zeta(t, x)$$

Donc $\mathbf{n} = n_2 \begin{pmatrix} -\nabla_X \zeta(t, x) \\ 1 \end{pmatrix}$ Comme la normale est dirigée vers le haut, il vient que $n_2 > 0$ et comme $\|\mathbf{n}\| = 1$, on trouve finalement

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla_X \zeta(t, x)\|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla_X \zeta(t, x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Considérons à nouveau $\begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix}$ la trajectoire d'une particule et supposons qu'elle est initialement située à la surface. l'hypothèse nous donne qu'alors la particule ne peut traverser la surface ni dans un sens, ni dans l'autre. Il y a alors, pour tout temps $t \geq 0$, l'égalité suivante.

$$\mathcal{Z} - \zeta(., \mathcal{X}) = 0$$

En dérivant cette égalité, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\mathcal{Z}}{dt} - \frac{\partial \zeta}{\partial t}(., \mathcal{X}) - \nabla_{\mathbf{X}} \zeta(., \mathcal{X}) \cdot \frac{d\mathcal{X}}{dt} \\ &= \mathbf{U} \cdot \begin{pmatrix} -\nabla_X \zeta(t, x) \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\partial \zeta}{\partial t}(., \mathcal{X}) \\ &= \sqrt{1 + \|\zeta\|^2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \zeta}{\partial t}(., \mathcal{X}) \end{aligned}$$

Pour résumer, en combinant (\mathbf{E}_1) , (\mathbf{E}_2) , (\mathbf{E}_3) et (\mathbf{E}_4) , on obtient les équations d'Euler à surface libre

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + g \mathbf{z} \right) + \nabla \mathbf{P} = 0 \\ \text{div}(\mathbf{U}) = 0 \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t}(t, x) - \sqrt{1 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \zeta\|^2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \{z = b(x) - H_0\} \\ \text{dans } \{z = \zeta(t, x)\} \end{array} \quad (\mathbf{E})$$

Remarque : L'égalité vectorielle suivante

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \text{rot}(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{U} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{U}|^2$$

Nous permet de réécrire (\mathbf{E}_1) sous la forme

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{U} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{U}|^2 + g \mathbf{z} \right) + \nabla \mathbf{P} = 0 \quad (1.3)$$

Ainsi, l'hypothèse (\mathbf{H}_3) , qui se traduit par $\text{rot}(\mathbf{U}) = 0$, permet alors d'avoir

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{U}|^2 + g \mathbf{z} \right) + \nabla \mathbf{P} = 0 \quad (\mathbf{E}_{1,\text{bis}})$$

1.3 Formulation de Bernoulli

Grace notamment à (\mathbf{H}_6) , on sait que Ω_t est simplement connexe à tout instant t , et comme $\text{rot}(\mathbf{U}) = 0$, on en déduit alors l'existence d'une fonction $\Phi(t, ., .) : \mathbf{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\mathbf{U} = \nabla \phi .$$

Ceci permet de réécrire le système $(\mathbf{E}_{1,\text{bis}})$.

$$\begin{aligned} 0 &= \rho \left(\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\nabla \phi|^2 + g \mathbf{z} \right) + \nabla \mathbf{P} \\ &= \nabla \left(\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g z \right) + \mathbf{P} \right) \\ &= \nabla \left(\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g z \right) + \mathbf{P} - \mathbf{P}_{\text{atm}} \right) \end{aligned}$$

Une condition suffisante pour vérifier $(\mathbf{E}_{1,\text{bis}})$ est alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g z = \frac{1}{\rho} (\mathbf{P}_{\text{atm}} - \mathbf{P}) \quad (\mathbf{B}_1)$$

Et comme $\text{div}(\nabla \phi) = \Delta \phi$, la condition d'incompressibilité (\mathbf{E}_2) devient alors

$$\Delta \phi = 0 \quad (\mathbf{B}_2)$$

L'équation (\mathbf{E}_3) , devient

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{dans } \{z = b(x) - H_0\}. \quad (\mathbf{B}_3)$$

L'équation (\mathbf{E}_4) , devient

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(t, x) - \sqrt{1 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \zeta\|^2} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{dans } \{z = \zeta(t, x)\}. \quad (\mathbf{B}_4)$$

1.4 Formulation de Craig-Sulem-Zakharov

1.5 Adimensionnement des paramètres du système

ajouter schéma

On va chercher à réécrire ces équations en faisant apparaître les rapports entre les différentes grandeurs caractéristiques qui entrent en jeux. Ainsi la négligeabilité d'un paramètre relativement à un autre s'impactera sur nos équation sous la forme d'une possible simplification de un ou plusieurs termes. Une équation ne faisant intervenir que des rapports adimensionnés est dites adimensionnelle.

Dans notre cas, les grandeurs caractéristiques de notre système sont

- H_0 est la profondeur du système.
- $a_{\text{surf}} = \max(|\zeta|)$ est l'amplitude de la surface du fluide.
- $a_{\text{bot}} = \max(|b|)$ est l'amplitude du fond du fluide.
- L_1 est la longueur d'onde de ζ dans la direction \mathbf{e}_1 .
- L_2 est la longueur d'onde de ζ dans la direction transversale \mathbf{e}_2 (si $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$).

On étudiera les rapports suivants.

- $\varepsilon = \frac{a_{\text{surf}}}{H_0}$ le coefficient de *non-linéarité* du système.
- $\mu = \frac{H_0^2}{L_1^2}$ le coefficient de *profondeur*.
- $\beta = \frac{a_{\text{bot}}}{H_0}$ est le coefficient de *dénivellation* du fond.
- $\gamma = \frac{L_1}{L_2}$ est le coefficient de *transversalité*.
- $\epsilon = \frac{a_{\text{surf}}}{L_1}$ le coefficient d'*amplitude*.

Pour adimensionner nos équations, on pose l'isomorphisme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathbf{X} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbf{X} \times \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), z) &\longmapsto \left(\left(\frac{x_1}{L_1}, \frac{x_2}{L_2} \right), \frac{z}{H_0} \right) && \text{si } \mathbf{X} = \mathbb{R}^2 \\ (x_1, z) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{L_1}, \frac{z}{H_0} \right) && \text{si } \mathbf{X} = \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.4}$$

on effectue le changement de variable suivant.

- $(x', z') = \mathcal{I}(x, z)$
- $\zeta' = \frac{\zeta \circ \mathcal{I}^{-1}}{a_{\text{surf}}}$
- $b' = \frac{b \circ \mathcal{I}^{-1}}{a_{\text{bot}}}$
- $\phi' = \frac{\phi \circ \mathcal{I}^{-1}}{\phi_0}$ dont il nous restera à déterminer la constante ϕ_0

Ceci nous donne, entre autre,

$$-1 \leq \zeta' \leq 1 \quad (1.5)$$

$$-1 \leq b' \leq 1 \quad (1.6)$$

[... Justifications à ajouter...] L'équation (\mathbf{B}_1) devient

$$\partial_{z'z'}\phi' + \mu\partial_{x'_1x'_1}\phi' = 0 \quad \text{si } \mathbf{X} = \mathbb{R}$$

$$\partial_{z'z'}\phi' + \mu\partial_{x'_1x'_1}\phi' + \mu\gamma^2\partial_{x'_2x'_2}\phi' = 0 \quad \text{si } \mathbf{X} = \mathbb{R}^2$$

Par la suite, lorsqu'on travaillera sur les équations adimensionnés, on se permettra pour la suite d'omettre les apostrophes sur ces variables.

2 Cas du fond plat : Vers les équations de Korteweg-de Vries

3 Annexe 1 : Quelques rappels sur les opérateurs différentiels linéaires : Laplacien, Rotationnel, Gradient