

Теоретическое решение задачи С

9 октября 2021 г.

1 Условие задачи

В задаче требовалось найти остаток от деления на $10^9 + 7$ количества уникальных путей (далее просто путей) заданной длины на ориентированном мультиграфе из первой вершины. Количество вершин графа N , количество рёбер M , длина пути K :

$$1 \leq N \leq 50$$

$$1 \leq M \leq 10^5$$

$$1 \leq K \leq 10^9$$

2 Описание решения

Данная задача решается путём возведения матрицы смежности нашего графа в степень, равную длине пути. Матрицу смежности мы сформируем следующим образом: если из вершины i в вершину j есть ребро, то в ячейку матрицы A с индексами $A[i-1][j-1]$ (индексация элементов матрицы начинается с нуля) мы прибавим единицу. Изначально матрица заполнена нулями. Т.к. мы ищем количество путей из вершины с индексом 0 (первой вершины), то для получения общего количества путей мы используем следующую формулу:

$$Ans = \sum_{j=0}^{N-1} (A'[0][j]) \bmod (10^9 + 7) \quad (1)$$

Где A' - матрица смежности возведённая в степень, равную длине пути.

3 Доказательство верности решения

Пусть длина пути $k = 1$, а мы рассматриваем количество путей между вершиной i и j (нумерация вершин начинается с 0, то есть первая вершина это нулевая). Тогда количество путей из i -й вершины в j -ю равно значению в $A[i][j]$ (по определению). Пусть $k > 1$. Обозначим за D_k матрицу ответов (то есть матрицу, в которой ячейка $D_k[i][j]$ равна количеству путей между вершинами i и j длины k). Тогда:

$$D_{k+1}[i][j] = \left(\sum_{p=1}^N (D_k[i][p] * A[p][j]) \right) \bmod (10^9 + 7) \quad (2)$$

Несложно заметить, что (2) эквивалентна формуле произведения двух матриц, если i и j не фиксированы:

$$D_{k+1} = D_k * A, \text{ либо } D_k = A^k \quad (3)$$

Для возведения целевой матрицы в необходимую степень целесообразно использовать бинарное возведение, суть которого заключается в следующем:

$$a^n = (a^{n/2})^2 = a^{n/2} * a^{n/2}, \text{ если } n \text{ чётно. Если нечётно, то } a^n = a^{n-1} * a \quad (4)$$

4 Оценка времени работы

В ходе работы программы мы выполняем следующие операции: ввод матрицы, возведение в степень, подсчёт итогового количества путей.

- Ввод матрицы занимает $O(M)$, где M - количество путей.
- Возведение в степень занимает $O(\log(K))$, K - степень возведения.
- Используемый нами алгоритм перемножения матриц, используемый при возведении в степень, работает за $O(N^3)$, где N - размерность матрицы.
- Сумма элементов 0-й строки матрицы высчитывается за $O(N)$.

Таким образом, весь алгоритм будет работать за $O(n + n^3 * \log(n) + n) = O(n^3 * \log(n))$

5 Оценка потребляемой памяти

Для хранения матрицы смежности нам потребуется $O(N^2)$ памяти, где N - размерность матрицы, а также $O(N)$, $O(M)$, $O(K)$ для хранения соответствующих параметров [1]. Так как нам надо отдельно хранить матрицу смежности A , матрицу D_k , и временный массив для хранения результата произведения матриц, то в сумме нам потребуется $O(n^2 + n^2 + n^2 + n + n + n) = O(n^2)$ памяти.