Aya
Iguider
CNB1

DS de Maths

Exercice 1

1) Le petit théorème de Fermat dit que si $a \not\equiv 0 [p]$ et que p premier on a : $a^{p-1} \equiv 1 [p]$

2) $222^{333} \equiv x [11]$

or $333 \equiv 3 [5]$

et $222 \equiv 2 [11]$

$222^2 \equiv 2 \cdot 222 [11] \equiv 4 [11]$

$222^3 \equiv 4 \cdot 222 [11] \equiv 8 [11]$

donc $222^{333} \equiv 222^3 [11] \equiv 8 [11]$ or $0 < 8 < 11$

donc le reste de la division $N = 222^{333}$ par 11 est 8

3) Le Théoreme de Gauss dit que, soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ si $a \wedge b = 1$ et que $a | bc$ alors $a | c$

4) D'aprés l'enoncé, on peut noter que

$x \equiv 11 [24]$ avec x le nombre de livres

$x \equiv 11 [40]$

on peut donc écrire que $x = 11 + 24k$

et $x = 11 + 40t$

$\Leftrightarrow 11 + 24k = 11 + 40t$

$\Leftrightarrow 24k = 40t$

$\Leftrightarrow 6k = 10t$ $\quad 6 \wedge 10 = 1$ et 6 divise $10t$

D'après le theorème de Gauss, on peut écrire que 6 divise t $\Rightarrow$ $t = 6 \times n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Donc $x = 11 + 40 \times t$

$\Leftrightarrow$ $x = 11 + 40 \times 6 \times n$ et si on prend $n = 1$

on a $x = 11 + 40 \times 6 \times 1$

$= 251$ • on verifie $251 = 10 \times 24 + 11$

Le nombre minimal de livres dans la bibliothèque de Toto est de 251

5) $3^{n+1} - 2$ est premier donc

Exercice 2

1) P aura 7 racines dans $\mathbb{C}[X]$ car d'après le théorème d'Alembert - Gauss, P admet autant de racines que son degré

2) $1 + j = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}}$
$= e^{2i\pi} + e^{\frac{2i\pi}{3}}$
$= e^{\frac{6i\pi}{3}} + e^{\frac{2i\pi}{3}}$
$= e^{\frac{i\pi}{3}}$ or $-j^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$

3) $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{\frac{6i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$

4) $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$
- $P\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = 0$

$P' = 7(x+7)^6 - 7x^6$
- $P'\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = 0$

$P'' = 42(X+1)^5 - 42X^5$
- $P''\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = 42$ $\quad P''\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) \neq 0$

Donc j est racine double de P

- On peut dire que $\bar{j}$ est également une racine double

5) Les racines réelles evidentes de P sont 0 et -1

6)

Exercice 3

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{7X(X+1)(X-j)^2(X-\bar{j})^2}$$

La décomposition sur $\mathbb{C}[X]$ donne

$$\cancel{= \frac{1}{7X(X+1)(X-j)^2} \times \frac{1}{(X-\bar{j})(X-\bar{j})}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{7X(X+1)(X-j)^2}\left(\frac{A}{(X-\bar{j})} + \frac{B}{(X-\bar{j})}\right)}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{A}{7X} + \frac{B}{(X+1)} + \frac{C}{(X-j)^2} + \frac{D}{(X-j)} + \frac{E}{(X-\bar{j})^2} + \frac{F}{(X-\bar{j})}$$

Exercice 4

1) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ et $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $A = A^T$ donc

A est symetrique

- A n'est pas antisymétrique car $A^T \neq -A$
- A n'est également ni une matrice diagonale, ni triangulaire inférieure ou superieure car les élements hormis sa diagonale ne sont pas nuls

2) $\det(A) = 4 \times \det\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 2 \times \det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + 2 \times \det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$= 4 \times 12 - 2 \times 4 + 2 \times (-4)$

$= 48 - 8 - 8$

$= 32$

$J = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\det(J) = 2 \times \det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - 2 \times \det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + 2 \times \det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$= 2 \times 0 - 2 \times 0 + 2 \times 0$

$= 0$

3) $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 20 & 20 \\ 20 & 24 & 20 \\ 20 & 20 & 24 \end{bmatrix}$

et donc $\frac{A^2}{10} = \frac{1}{10} \times A^2 = \begin{bmatrix} 2,4 & 2 & 2 \\ 2 & 2,4 & 2 \\ 2 & 2 & 2,4 \end{bmatrix}$

4) Les élements de la diagonales de A sont égaux à 4, or ceux de J sont égaux à 2.

on pourrait donc écrire $A = J + 2I_3$

et par conséquent $A^2 = (J + 2I_3)^2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{A^2}{10} = \frac{(J+2I_3)^2}{10}$$

5) Soit $\alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3 = 0$

D'apres la question precedente on trouve

$1 \times A^2 + (-10) \times A + 16 \times I_3 = 0$

Soit $\alpha = 1$ $\beta = -10$ et $\gamma = 16$

6) $\det(A) = 32$ donc $\det(A) \neq 0$ A est inversible

Pour calculer A^{-1}, il faut calculer $com(A)$ et donc les cofacteurs de A

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

on a donc $C_{11} = (-1)^2 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \times 4 - (2 \times 2) = 12$

$C_{12} = (-1)^3 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4$

$C_{13} = (-1)^4 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$C_{21} = (-1)^3 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4$

$C_{22} = (-1)^4 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12$

$C_{23} = (-1)^5 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$C_{31} = (-1)^4 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$C_{32} = (-1)^5 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$C_{33} = (-1)^6 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12$

donc $com(A) = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{bmatrix}$

et donc $com(A)^T = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{bmatrix} = com(A)$

D'après le cours nous savons que

$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} com(A)^T$ sachant que $det(A) = 32$

on a $A^{-1} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{bmatrix}$

7) on a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ Soit la matrice A

8) Ce système d'équation linéaire de rang 3 n'est pas incompatible, il possède donc des solutions
or comme $det(A) \neq 0$, on peut dire qu'il possède une ou plusieurs solution(s)

9) Soit $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $det(A_1) = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$
$= 12 - 2 \times 4 + 4 \times (-4)$
$= -12$

$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ $det(A_2) = 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$
$= 4 \times 0 - 2 \times (-4) + 2 \times (-2)$
$= 4$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \det(A_3) = 4 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 12 - 2 \times 6 + 2 \times 0$$

$$= 36$$

or $x = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{-12}{32} = \boxed{\dfrac{-3}{8}}$

et $y = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{4}{32} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$

et $z = \dfrac{\det(A_3)}{\det(A)} = \dfrac{36}{32} = \boxed{\dfrac{9}{8}}$

Donc $S = \left\{ x = \dfrac{-3}{8} \, ; \, y = \dfrac{1}{8} \, ; \, z = \dfrac{9}{8} \right\}$.

Nous avons utilisé la méthode de Cramer

10) Nous pouvons utiliser la méthode de substitution

Soit $\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 4y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 - 4x - 2z \\ 2x + 2(1 - 4x - 2z) + 2z = 2 \\ 4z = 4 - 2x - 2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 - 4x - 2z \\ -6x - 2z + 2 = 2 \\ 4z = 4 - 2x - (1 - 4x - 2z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 - 4x - 2z \\ -6x - (3 + 2x) = 0 \Leftrightarrow -8x = 3 \\ 4z = 3 + 2x + 2z \Leftrightarrow 2z = 3 + 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 - \dfrac{4 \times -3}{8} - 2 \times \dfrac{9}{8} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{y = \dfrac{1}{8}} \\ \boxed{x = \dfrac{-3}{8}} \\ 2z = 3 + \dfrac{-6}{8} \Leftrightarrow 2z = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \boxed{z = \dfrac{9}{8}} \end{cases}$

$S = \left\{ x = \dfrac{-3}{8} \, ; \, y = \dfrac{1}{8} \, ; \, z = \dfrac{9}{8} \right\}$