

ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. О. ГОНЧАРА  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ  
КАФЕДРА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ  
КІБЕРНЕТИКИ

Лабораторна робота №3  
«МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ»  
з курсу «Методи обчислень»  
Варіант №2

Виконав:  
студент групи ПА-18-1(2)  
Лешанов Андрій

Дніпро, 2020

# Зміст

## Постановка задачі

Розглянемо рівняння

$$f(x) = 0, \text{ де } f(x) \in C[a, b]. \quad (1)$$

Число  $\xi$ , що перетворює рівняння (1) у тотожність, будемо називати коренем цього рівняння, або нулем функції  $f(x)$ . Розв'язати рівняння - означає знайти всі його корені. Корені рівняння можуть бути дійсними, комплексними, кратними, ізольованими (простими).

Лише у виняткових випадках розв'язок рівняння можна побудувати у вигляді формули. Крім того, у деяких випадках рівняння (1) може мати коефіцієнти, які відомі лише наближено, тоді задача про точне визначення коренів такого рівняння втрачає сенс.

Наближений пошук ізольованих дійсних коренів складається з двох етапів: відокремлення коренів і уточнення.

Відокремити дійсний корінь - означає знайти інтервал (за можливістю малий), який містить лише один корінь рівняння.

Уточнити корінь - означає довести його наближене значення до потрібної точності.

# 1. Основні теоретичні відомості

## 1.1. Методи відокремлення дійсних коренів

При відокремленні дійсних коренів аналітичним методом слід опиратися на першу теорему Больцано-Коші.

**Теорема.** Якщо визначена і неперервна на відрізку  $[a, b]$  функція  $f(x)$  приймає на кінцях цього відрізка значення різних знаків, тобто  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , то цей відрізок містить хоча б 1 дійсний корінь рівняння  $f(x) = 0$ .

Корінь буде єдиним, якщо  $f'(x)$  існує та зберігає знак на  $[a, b]$ , тобто  $f(x)$  є монотонною.

Процес відокремлення коренів на  $[a, b]$  починається з визначення знаків  $f(x)$  у межових точках  $x = a$ ,  $x = b$ . Якщо на кінцях  $[a, b]$   $f(x)$  набуває значень різних знаків, то на цьому проміжку розташована непарна кількість коренів рівняння (1), якщо одного знаку - на відрізку або не існують корені рівняння, або їх кількість парна.

Далі визначаються знаки функції в деяких проміжних точках  $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , вибір яких враховує особливості функції. Якщо  $f(\alpha_k) \cdot f(\alpha_{k+1}) < 0$ , то відрізок  $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$  містить корені рівняння (1). Якщо  $f'(x)$  зберігає знак  $\forall x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ , то корінь на цьому відрізку єдиний, якщо змінює - відрізок треба розбити на ще менші відрізки так, щоб  $f'(x)$  зберігала знак на кожному з них.

Процес вважається закінченим, коли визначені проміжки монотонності  $f(x)$ , на кінцях яких  $f(x)$  набуває значень різних знаків.

Універсальним методом відокремлення коренів є побудова графіка функції  $y = f(x)$  за допомогою ЕОМ (графічний метод). Координати точок перетину графіка з віссю абсцис і є нулями функції  $f(x)$ .

При застосуванні цього методу інколи буває зручно записати спочатку рівняння (1) у вигляді  $\varphi(x) = \psi(x)$  і далі побудувати графіки функцій  $y = \varphi(x)$  і  $y = \psi(x)$ . Абсциси точок перетину всіх графіків і будуть значеннями коренів.

**Теорема 1.** Алгебраїчне рівняння  $n$ -го степеня має  $n$  комплексних коренів, причому кожен корінь рахується стільки разів, яка його кратність.

**Теорема 2.** Якщо в алгебраїчного рівняння всі коефіцієнти дійсні, то комплексні корені (якщо вони є) будуть обов'язково комплексно спряженими парами.

*Наслідок.* Алгебраїчне рівняння непарного степеня з усіма дійсними коефіцієнтами має хоча б 1 дійсний корінь.

**Теорема 3.** В алгебраїчному рівнянні з усіма дійсними коефіцієнтами кількість додатніх коренів (з урахуванням кратності) дорівнює кількості змін знаків у послідовності коефіцієнтів  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  або менше на парне число. Нульові коефіцієнти рівняння не враховуються.

Кількість від'ємних коренів можна знайти, якщо застосувати теорему

3 до рівняння  $P_n(-x) = 0$ .

**Теорема Штурма.** Нехай  $P(x)$  - алгебраїчний многочлен з усіма дійсними коефіцієнтами,  $a$  і  $b$  ( $a < b$ ) - дійсні числа, які не є його нулями, тобто  $P(a) \neq 0$ ,  $P(b) \neq 0$ ;  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$  - система функцій Штурма, побудована для  $P(x)$  на  $[a, b]$ . Тоді кількість різних (без урахування кратності) дійсних коренів рівняння  $P_n(-x) = 0$ , що належать  $[a, b]$ , дорівнює різниці  $N(a) - N(b)$ , де  $N(a)$  - кількість змін знаків у послідовності значень  $f_0(a), f_1(a), \dots, f_m(a)$ , а  $N(b)$  - кількість змін знаків у послідовності значень  $f_0(b), f_1(b), \dots, f_m(b)$ . Нульові значення в цих послідовностях не приймаються до уваги (пропускаються).

**Система функцій Штурма**  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{0, m}$  для полінома  $P(x)$  будується так. Дві перші функції знаходяться за правилом:  $f_0(x) = P(x)$ ,  $f_1(x) = P'(x)$ . Кожна з наступних функцій  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{2, m}$  знаходиться як остача від ділення  $f_{i-2}(x)$  на  $f_{i-1}(x)$ , але взята з протилежним знаком, тобто якщо записати  $f_{i-2}(x) = f_{i-1}(x) \cdot q(x) + r_i(x)$ , де  $r_i(x)$  - остача, то  $f_i(x) = -r_i(x)$ . За цим правилом знаходяться функції до останньої не рівної нулю остачі. Функції системи Штурма можна будувати з точністю до додатного сталого множника.

У випадку, коли поліном  $P(x)$  не має кратних дійсних коренів остання функція у системі  $f_m(x)$  дорівнює сталому не рівному нулю числу, та  $m = n$ , де  $n$  - степінь алгебраїчного рівняння. Також теоремою можна користуватися і у випадку присутності кратних дійсних коренів, тоді кратність теорема не враховує, а функція  $f_m(x)$  є алгебраїчним поліномом степеня вище нульового, тобто  $m < n$ .

## 1.2. Загальна ідея ітераційних методів уточнення кореня

Нехай відомо, що рівняння (1) на  $[a, b]$  має єдиний дійсний ізольований корінь  $\xi$ , функція  $f(x) \in C^{(2)}[a, b]$ , причому  $f'(x)$  та  $f''(x)$  зберігають знак на  $[a, b]$ . Рівняння (1) перепишемо у більш зручному для ітерування вигляді

$$x = \varphi(x). \quad (2)$$

Помножимо обидві частини рівності (1) на деяку неперервну функцію  $\psi(x) \neq 0$ ,  $x \in [a, b]$ , а потім до лівої та правої частин одержаної рівності додамо  $x$ . Отримаємо:

$$x + \psi(x) \cdot f(x) = 0 \cdot \psi(x) + x.$$

Позначимо

$$\varphi(x) \equiv x + \psi(x) \cdot f(x), \quad (3)$$

і перейдемо до вигляду (2). Легко бачити, що корені рівнянь (2) і (1) збігаються на  $[a, b]$ .

Далі на  $[a, b]$  обираємо довільну точку  $x_0$  як початкове наближення до кореня  $\xi$ , а потім за допомогою ітераційної формули

$$x_{n+1} = \varphi(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

будуємо послідовність

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (5)$$

Ітераційний метод збігається, якщо послідовність (5) прямує до кореня  $\xi$ , тобто виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi, \quad \text{або} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\xi - x_n| = 0. \quad (6)$$

Якщо ітераційний метод збігається, то число  $x_n$  - окремий член послідовності (5) - можна вважати наближеним значенням кореня  $\xi$ .

**Теорема (збіжності).** Нехай рівняння (2) має єдиний дійсний корінь  $\xi \in [a, b]$  і нехай функція  $\varphi(x)$  така, що виконуються умови:

- 1)  $\varphi(x) \in [a, b]$  при  $\forall x \in [a, b]$ ;
- 2)  $\exists \varphi'(x)$  і  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$  для  $\forall x \in [a, b]$ .

Тоді ітераційний метод буде збігатися при будь-якому виборі нульового наближення  $x_0 \in [a, b]$ , і для наближеного розв'язку  $x_n$ , обчисленого за формулою (4), буде виконуватись така нерівність:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|. \quad (7)$$

**Доведення.** Візьмемо довільно  $x_0 \in [a, b]$  та за ітераційною формулою (4) побудуємо числову послідовність (5).

Використовуючи теорему Лагранжа:

$$\xi - x_n = \varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1}) = \varphi'(\eta) \cdot (\xi - x_{n-1}),$$

де  $\eta \in [a, b]$ . З добутої рівності можна записати:

$$|\xi - x_n| = |\varphi'(\eta)| \cdot |\xi - x_{n-1}| \leq q \cdot |\xi - x_{n-1}| \leq q^2 \cdot |\xi - x_{n-2}| \leq \dots \leq q^n \cdot |\xi - x_0|.$$

Якщо в останній нерівності число  $n \rightarrow \infty$ , отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\xi - x_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \cdot |\xi - x_0| = 0.$$

Це означає, що умова (6) виконується, тобто метод збігається, причому незалежно від вибору нульового наближення  $x_0 \in [a, b]$ .

Для доведення (7) виконаємо перетворення:

$$|\xi - x_n| \leq q \cdot |\xi - x_n + x_n - x_{n-1}| \leq q \cdot (|\xi - x_n| + |x_n - x_{n-1}|).$$

Звідси добудемо шукану нерівність (7). Теорему доведено.

При застосуванні ітераційних методів нерівність (7) використовується для оцінки похибки наближеного розв'язку  $x_n$ . Як тільки виконується умова

$$\frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon, \quad (8)$$

то  $|\xi - x_n| \leq \epsilon$ . На нерівність (8) можна дивитися як на умову зупинення ітераційного процесу, при цьому число  $q$  треба знайти за формулою

$$q = \max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)|. \quad (9)$$

Якщо число  $q$  важко знайти, то замість (7) можна використати:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{\min_{x \in [a, b]} |f'(x)|}. \quad (10)$$

Для доведення (10) візьмемо розвинення

$$f(x_n) = f(\xi) + (x_n - \xi) \cdot f'(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in (\xi, x_n),$$

і, припускаючи, що  $f'(x) \neq 0$ ,  $x \in [a, b]$ , знайдемо потрібну різницю

$$\xi - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\tilde{x})}.$$

Звідси і випливає нерівність (10). Якщо  $f''(x)$  зберігає знак на  $[a, b]$ , то  $f'(x)$  монотонна, тоді  $\min_{x \in [a, b]} |f'(x)| = \min \{|f'(a)|, |f'(b)|\}$ .

### Зауваження:

1. Інколи на практиці близькість наближеного розв'язку  $x_n$  до кореня  $\xi$  оцінюють за значенням  $|f(x_n)|$ , а не  $|\xi - x_n|$ .

Число  $|f(x_n)|$  може бути меншим, ніж  $\xi$ , а точка  $x_n$  при цьому знаходиться ще далеко від точки  $\xi$ . Можливо і навпаки, число  $|f(x_n)|$  ще перевищує  $\epsilon$ , а відстань  $|\xi - x_n|$  мала і вже треба зупинити ітераційний процес.

2. Оскільки метод ітерації збігається при будь-якому виборі  $x_0 \in [a, b]$ , якщо  $|\varphi'(x)| < 1$ , то цей метод має властивість самовиправленості. Це означає, що окрема помилка при обчисленні деякого наближення  $x_n$ , яка не виводить це наближення за межі  $[a, b]$ , не впливає на кінцевий результат. Помилкове значення  $x_n$  можна вважати новим нульовим наближенням  $x_0$ . Можливо зміниться лише обсяг обчислювальної роботи. Властивість самовиправленості робить ітераційний метод одним із надійних методів числення.

3. Чим менше буде число  $q$ , тим вищою буде швидкість збіжності. Це впливає з (7). Крім того, з ітераційної формули (4) можна знайти залежність між похибками двох сусідніх ітерацій. Позначимо  $\xi - x_n \equiv r_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . На

підставі (4) маємо залежність  $\xi - r_{n+1} = \varphi(\xi - r_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Звідси знаходимо  $r_{n+1} = \xi - \varphi(\xi - r_n)$ . Вважаючи похибку малою величиною, перепишемо останню рівність у вигляді розкладу в ряд Тейлора:

$$r_{n+1} = \xi - \varphi(\xi) + \frac{r_n}{1!}\varphi'(\xi) - \frac{r_n^2}{2!}\varphi''(\xi) + \dots - \frac{(-r_n)^m}{m!}\varphi^{(m)}(\xi) + O(|r_n|^{m-1}).$$

Оскільки  $\xi$  - точний корінь рівняння, то  $\xi = \varphi(\xi)$  і остаточно маємо:

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{1!}\varphi'(\xi) - \frac{r_n^2}{2!}\varphi''(\xi) + \dots - \frac{(-r_n)^m}{m!}\varphi^{(m)}(\xi) + O(|r_n|^{m-1}).$$

Якщо в (2) функція  $\varphi(x)$  така, що виконуються умови

$$\varphi'(\xi) = 0, \varphi''(\xi) = 0, \dots, \varphi^{(m-1)}(\xi) = 0, \varphi^{(m)}(\xi) \neq 0, \quad (11)$$

то

$$r_{n+1} = (-1)^{m+1} \frac{(r_n)^m}{m!} \varphi^{(m)}(\xi) + O(|r_n|^{m+1}) = O(|r_n|^m).$$

У цьому випадку кажуть, що метод має  $m$ -тий порядок збіжності. Чим більше число  $m$ , тим більша швидкість збіжності методу.

### 1.3. Геометричне зображення ітераційних методів

Нехай в околі дійсного кореня  $x = \xi$  дійсна функція  $\varphi(x)$ , що стоїть праворуч у (2), має неперервну похідну  $\varphi'(x)$ , таку що  $\varphi'(x) \leq q < 1$ . Якщо  $\varphi'(x)$  зберігає знак в околі кореня  $\xi$ , то ітераційні методи мають наочну геометричну інтерпретацію (рис. 1).

Рис. 1. Геометричне зображення ітераційних методів:  
а - сходинок, б - спіраль

На площині  $xOy$  будуємо графіки функцій  $y = x$  та  $y = \varphi(x)$ . Абсциса точки перетину цих графіків і буде шуканим дійсним коренем  $\xi$  рівняння (2). Починаючи з деякої точки  $A_0(x_0, \varphi(x_0))$ , будуємо ламану  $A_0B_1A_1B_2A_2\dots$ , ланки якої по черзі паралельні осям  $Ox$  та  $Oy$ . На кривій  $y = \varphi(x)$  розташовані вершини  $A_0, A_1, A_2\dots$ , а вершини  $B_1, B_2\dots$  - на прямій  $y = x$ . Спільні абсциси точок  $A_1$  і  $B_1$ ,  $A_2$  і  $B_2$  є послідовними наближеннями  $x_1, x_2$  кореня  $\xi$ .

У випадку а, коли  $0 < \varphi'(x) < 1$ , всі наближення знаходяться з того боку кореня  $\xi$ , з якого взято нульове наближення  $x_0$ . Послідовність наближень монотонно прямує до кореня  $\xi$ , тобто кожне наступне наближення ближче до точного кореня, ніж попереднє.

У випадку б, коли  $-1 < \varphi'(x) < 0$ , наближення розташовані по черзі то з одного, то з іншого боку від кореня  $\xi$ . Кожне наступне наближення знаходиться по інший бік від кореня  $\xi$ , ніж попереднє. У цьому випадку послідовність



наближень збігається до кореня  $\xi$  за коливним законом. Це означає, що корінь знаходиться завжди між двома сусідніми ітераціями, тому зручно виходити з ітераційного процесу за умови  $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$ . Коли ітераційний процес збігається за коливним законом, то треба прослідкувати, щоб  $x_1 \in [a, b]$ .

З рис. 1 видно, що коли в околі кореня  $\xi$  функція  $|\varphi'(x)|$  близька до одиниці, то збіжність ітераційного процесу буде дуже повільною, а якщо функція  $|\varphi'(x)|$  близька до нуля, то ітераційний процес збігається дуже швидко.

Якщо  $\max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)| > 1$ , то процес ітерацій може розбігатися. Геометрично це показано на рис. 2 при  $\varphi'(x) > 1$ .

Рис. 2. Геометричне зображення розбіжного методу

Якщо  $\varphi'(x)$  не зберігає знак в околі кореня  $\xi$ , але умова збіжності  $|\varphi'(x)| < 1$  виконується, то ітераційний процес буде збігатися за схемою, яка буде якоюсь комбінацією розглянутих двох випадків, показаних на рис. 1. При цьому, для алгоритму не можна дати такого наочного геометричного зображення, як у розглянутих двох випадках.

Ітераційні методи відрізняються один від одного вибором функції  $\psi(x)$  у формулі (3).

## 1.4. Метод простої ітерації

Цей метод побудемо як частковий випадок ітераційних методів, якщо функцію  $\psi(x)$ , що знаходиться у правій частині рівності (3), виберемо у вигляді

$$\psi(x) = -k = \text{const} \neq 0.$$

Ітераційна формула (4) для методу простої ітерації приймає вигляд

$$x_{n+1} = x_n - k \cdot f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Вважаємо, що на  $[a, b]$  похідна  $f'(x)$  існує, неперервна та зберігає знак (це умова застосування методу). Коефіцієнт  $k$  виберемо так, щоб виконувалась умова  $|\varphi'(x)| = |1 - k \cdot f'(x)| < 1$  (щоб метод збігався). Останню нерівність можна переписати у вигляді  $-1 < 1 - k \cdot f'(x) < 1$ , або у вигляді системи двох нерівностей

$$\begin{cases} k \cdot f'(x) > 0, \\ k \cdot f'(x) < 2 \end{cases} \quad (12)$$

Нехай  $m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1, \forall x \in [a, b]$ . Розглянемо 2 випадки.

1)  $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ . З умов (12) добуваємо нерівності  $0 < k < \frac{2}{f'(x)}$ .

Звідси випливає, що коефіцієнтом  $k$  може бути будь-яке число з проміжку  $\left(0; \frac{2}{M_1}\right)$ .

2)  $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$ . З умов (12) добуваємо нерівності  $\frac{-2}{|f'(x)|} < k < 0$ . Звідси випливає, що якщо  $k$  належить проміжку  $\left(\frac{-2}{M_1}; 0\right)$ , то  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ .

В обох випадках швидкість збіжності залежить від числа  $q$ . Метод буде збігатися найшвидше, якщо

$$k = \frac{2}{M_1 + m_1} \text{ у випадку } f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]. \quad (13)$$

$$k = \frac{-2}{M_1 + m_1} \text{ у випадку } f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]. \quad (14)$$

Доведемо формулу (13). Пам'ятаємо, що  $q = \max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)|$ . Позначимо  $|\varphi'(x)| = |1 - k \cdot f'(x)| \equiv \rho(k, x)$ . Тут  $k$  є аргументом,  $x$  - параметром функції  $\rho(k, x)$ . Кожному значенню  $x \in [a, b]$  відповідає свій графік функції  $\rho(k, x)$  (рис. 3). Тоді  $q = \max_{x \in [a, b]} \rho(k, x) \equiv q(k)$ . Оскільки  $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ , то  $k \in \left(0; \frac{2}{M_1}\right)$ . Позначимо  $k_{\text{опт}}$  таке значення аргументу  $k$ , при якому  $q(k_{\text{опт}})$  буде мінімальним, тобто

$$q(k_{\text{опт}}) = \min_{k \in \left(0; \frac{2}{M_1}\right)} q(k).$$

Задачу мінімізації функції  $q(k)$  розв'язуємо графічно. З рис. 3 видно, що функція  $q(k)$  своє мінімальне значення приймає в точці  $D$ , де

$$1 - m_1 \cdot k_{\text{опт}} = -(1 - M_1 \cdot k_{\text{опт}}).$$

Звідси знаходимо  $(M_1 + m_1) \cdot k_{\text{опт}} = 2$ , тобто  $k_{\text{опт}} = \frac{2}{M_1 + m_1}$ . Отже, формула (13) доведена.

Для випадку  $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$  формула (14) доводиться аналогічно.

Зауважимо, що  $\varphi'(\xi) = 1 - k \cdot f'(\xi) \neq 0$ . Це означає, що порядок збіжності методу простої ітерації дорівнює одиниці.

Рис. 3. Графічне доведення формули (13)

## 1.5. Метод Ньютона

Цей метод одержимо, якщо функцію  $\psi(x)$ , що стоїть у правій частині формули (3), виберемо у вигляді  $\psi(x) = -\frac{1}{f'(x)}$ , тоді  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

Вважаємо, що на  $[a, b]$  похідні  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  існують, неперервні та зберігають знак (це умови застосування методу дотичних). Знаходимо похідну  $\varphi'(x)$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}. \quad (15)$$

Як видно з (15),  $\varphi(\xi) = 0$ . Це означає, що існує такий окіл точки  $\xi$ , де  $\max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)| < 1$ , тобто ітераційний процес буде збігатися. Отже, якщо метод Ньютона розбігається, то треба звужити відрізок  $[a, b]$ . З (15) знаходимо  $\varphi''(\xi) = \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \neq 0$ . Це означає, що в умовах (11)  $m = 2$ , тобто порядок збіжності методу Ньютона дорівнює двом.

Запишемо ітераційну формулу методу Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Якщо  $x_0$  вибрати так, щоб  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ , то  $\varphi'(x_0) > 0$ , тому всі наближення, починаючи з  $x_0$ , будуть знаходитись з одного і того ж боку від кореня  $\xi$  (з того, де розташоване  $x_0$ ) та будуть прямувати до  $\xi$  монотонно.

Якщо  $x_0$  вибрати так, щоб  $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$ , то наближення  $x_1$  буде з іншого боку від кореня  $\xi$ , ніж  $x_0$ , і якщо  $x_1$  не вийде за межі відрізка  $[a, b]$ , то всі наступні наближення  $x_2, x_3, \dots$  будуть з того боку від кореня  $\xi$ , з якого знаходиться  $x_1$ . Отже, послідовність  $x_1, x_2, x_3, \dots$  буде монотонно прямувати до кореня  $\xi$ . Якщо  $x_1$  вийде за межі  $[a, b]$ , то треба змінити  $x_0$ .

Метод Ньютона має своє власне геометричне зображення, показане на рис. 4. Ітераційну формулу (16) можна добути з геометричного зображення методу, для цього треба записати рівняння дотичної до графіка функції  $y = f(x)$  в точці  $(x_n, f(x_n))$

$$y = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n).$$

Точка перетину цієї дотичної з віссю абсцис має координати  $(x_{n+1}, 0)$ . Підставивши координати цієї точки в рівняння дотичної, добудемо формулу (16).

## 1.6. Метод хорд

Цей частковий випадок ітераційних методів добудемо, якщо функцію  $\psi(x)$ , що стоїть у правій частині формули (3), виберемо у вигляді

$$\psi(x) = -\frac{x - c}{f(x) - f(c)},$$

де  $c$  - якась точка з  $[a, b]$ . З формули (3) маємо

$$\varphi = x - \frac{(x - c)f(x)}{f(x) - f(c)}.$$

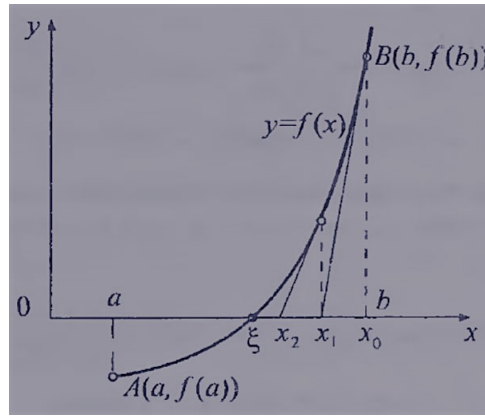


Рис. 4. Графічне зображення методу Ньютона

Ітераційна формула методу хорд має вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - c)f(x_n)}{f(x_n) - f(c)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Щоб проаналізувати особливості збіжності методу, знайдемо похідну  $\varphi'(x)$ .

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 1 - \left( \frac{x - c}{f(x) - f(c)} \right)' \cdot f(x) - \frac{(x - c) \cdot f'(x)}{f(x) - f(c)} = \\ &= 1 - f(x) \left( \frac{1}{f(x) - f(c)} - \frac{(x - c) \cdot f'(x)}{(f(x) - f(c))^2} \right) - \frac{(x - c) \cdot f'(x)}{f(x) - f(c)} = \\ &= 1 - \frac{f(x)}{f(x) - f(c)} + \frac{(x - c)f'(x)}{f(x) - f(c)} \left( \frac{f(x)}{f(x) - f(c)} - 1 \right) = \\ &= \frac{f(c)}{(f(x) - f(c))^2} (f(c) - f(x) + (x - c)f'(x)). \end{aligned}$$

Якщо скористатися наступним розвиненням

$$f(c) = f(x) + (c - x) \cdot f'(x) + \frac{(c - x)^2}{2!} f''(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in (x, c),$$

то шукану похідну  $\varphi'(x)$  можна переписати у вигляді

$$\varphi'(x) = \frac{f(c) \cdot f''(\tilde{x}) \cdot (c - x)^2}{2(f(x) - f(c))^2}, \quad \tilde{x} \in (x, c). \quad (18)$$

Похідні  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  зберігають знак на  $[a, b]$  (це умова застосування методу хорд), тому якщо точку  $c$  вибрати так, щоб виконувалася нерівність

$$f(c) \cdot f''(c) > 0, \quad (19)$$

то на всьому відрізку  $[a, b]$  буде виконуватись умова  $\varphi'(x) > 0$ , а це означає, що послідовність наближень  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  буде прямувати до кореня  $\xi$  монотонно. Якщо при цьому нульове наближення  $x_0$  вибрати так, щоб

$$f(x_0) \cdot f(c) < 0, \quad (20)$$

то в знаменнику ітераційної формули (17) модулі чисел  $f(x_n)$  та  $f(c)$  будуть додаватися.

Коли число  $c$  взято достатньо близьким до точного кореня  $\xi$ , то, як видно з (18),  $\varphi'(x)$  буде малим за модулем числом за рахунок множника  $f(c)$  і тому існує такий окіл точки  $\xi$ , в якому буде виконуватися нерівність  $|\varphi'(x)| < 1$ , а це означає, що ітераційний процес буде збігатися до точного кореня  $\xi$ .

З формули (18) маємо  $\varphi'(\xi) = \frac{f(c) \cdot f''(\xi) \cdot (c - \xi)^2}{2(f(c))^2} \neq 0$ . Це означає, що в умовах (11)  $m = 1$ , тобто метод хорд має перший порядок збіжності.

Метод хорд має своє власне геометричне зображення, показане на рис. 5.

Ітераційну формулу (17) можна добути з геометричного зображення методу хорд. Для цього запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки з координатами  $(x_n, f(x_n))$  та  $(c, f(c))$

$$\frac{x - x_n}{c - x_n} = \frac{y - f(x_n)}{f(c) - f(x_n)}.$$

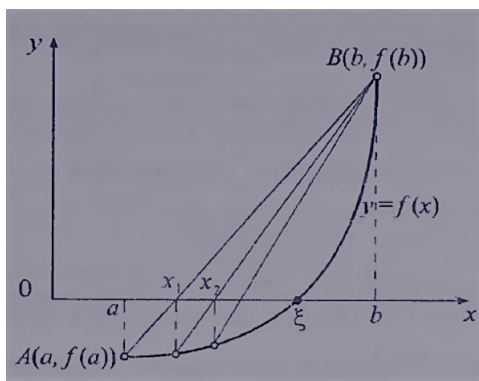


Рис. 5. Графічне зображення методу хорд

Ця пряма (хорда) перетинає вісь абсцис у точці з координатами  $(x_{n+1}, 0)$ . Підставивши координати цієї точки до рівняння хорди, добудемо формулу (17).

## 1.7. Комбінований метод

Методи хорд і дотичних дають наближення кореня з різних боків. Тому часто їх застосовують у комбінації один з одним, і уточнення кореня відбувається швидше.

З урахуванням типу графіка функції ці методи комбінують так.

Якщо  $f'(x_0)f''(x_0) > 0$ , то метод хорд дає наближене значення кореня з недостачею, а метод дотичних - з надлишком.

Якщо ж  $f'(x_0)f''(x_0) < 0$ , то за методом хорд отримаємо значення кореня  $\alpha$  з надлишком, а методом дотичних - з недостачею.

У всіх випадках справжній корінь розміщений між наближеними значеннями, отриманими за методами хорд і дотичних, тобто

$$a < \underline{x}_n < \alpha < \overline{x}_n < b,$$

де  $\underline{x}_n$  - наближене значення кореня з недостачею;  $\overline{x}_n$  - наближене значення кореня з надлишком.

- Нехай  $f'(x_0)f''(x_0) > 0$ , тоді з кінця  $a$  лежать наближені значення, отримані за методом хорд, а з кінця  $b$  - за методом дотичних. Ітераційний процес матиме вигляд

$$\begin{aligned} \underline{x}_0 &= a; \quad \overline{x}_0 = b; \\ \underline{x}_n &= \underline{x}_{n-1} - \frac{f(\underline{x}_{n-1})(\overline{x}_{n-1} - \underline{x}_{n-1})}{f(\overline{x}_{n-1}) - f(\underline{x}_{n-1})}; \\ \overline{x}_n &= \overline{x}_{n-1} - \frac{f(\overline{x}_{n-1})}{f'(\overline{x}_{n-1})}; \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

- Нехай  $f'(x_0)f''(x_0) < 0$ , тоді, навпаки, з кінця  $a$  є наближені значення кореня за методом дотичних, а з кінця  $b$  - за методом хорд

$$\begin{aligned} \underline{x}_0 &= a; \quad \overline{x}_0 = b; \\ \underline{x}_n &= \underline{x}_{n-1} - \frac{f(\underline{x}_{n-1})}{f'(\underline{x}_{n-1})}; \\ \overline{x}_n &= \overline{x}_{n-1} - \frac{f(\overline{x}_{n-1})(\overline{x}_{n-1} - \underline{x}_{n-1})}{f(\overline{x}_{n-1}) - f(\underline{x}_{n-1})}; \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Ітераційний процес закінчується, коли  $|\overline{x}_n - \underline{x}_n| < \epsilon$ . За значення кореня обираємо середину звуженого проміжку

$$a = \frac{1}{2}(\overline{x}_n + \underline{x}_n).$$

Комбінований метод є нестационарним методом уточнення дійсних коренів рівняння  $f(x) = 0$ . Збігається він значно швидше, ніж метод дотичних.

Метод хорд є ітераційним методом першого порядку, а метод Ньютона - другого порядку. Метод Ньютона можна застосовувати і для знаходження комплексних коренів. Тоді для випадку дійсної функції  $f(x)$  початкове наближення  $0$  повинно бути комплексним числом.

**Зауваження 1.** За умов теореми метод ітерацій збігається для довільного початкового значення  $x_0 \in [a, b]$ . Завдяки цьому він є самовиправним, тобто окрема помилка в обчисленнях не впливає на кінцевий результат, бо помилкове значення можна розглядати як нове початкове наближення  $x_0$ . Ця властивість робить метод ітерацій найнадійнішим методом обчислень.

На практиці часто виникає ситуація, коли проміжок  $[a, b]$  досить великий і умова  $|\varphi'(x)| < 1$  виконується лише в деякому околі кореня, тому в разі невдалого вибору початкового наближення  $x_0$  послідовні наближення  $x_n = \varphi(x_{n-1})$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) можуть вийти за межі проміжку  $[a, b]$ .

**Зауваження 2.** У методі дотичних бачимо, що чим більше числове значення похідної  $f'(x)$  в околі заданого кореня, тим менша поправка, яку треба додати до  $n$ -го наближення, щоб отримати  $(n + 1)$ -ше наближення. Тому метод Ньютона особливо зручно застосовувати тоді, коли в околі заданого кореня графік функції має велику стрімкість. Однак коли числове значення похідної  $f'(x)$  біля кореня мале, то поправки будуть великими й обчислення кореня за цим методом може виявитись довгим, а іноді й зовсім неможливим. Отже, якщо крива  $y = f(x)$  поблизу точки перетину з віссю  $Ox$  майже горизонтальна, то застосовувати метод Ньютона для розв'язування рівняння  $f(x) = 0$  не рекомендуємо.

## 2. Чисельний експеримент та аналіз результатів

### 2.1. Опис програмної реалізації