ADM UE 9. 424

$\langle P(M), \Delta, \cap \rangle$ ... komm. Ring mit 1 Elem. ?

$\langle P(M), \Delta \rangle$ ... Gruppe

Abgeschlossen: $\forall a,b \in P(M): a \Delta b \in P(M)$ $(A \setminus B \cup B \setminus A)$

$M = \{1,2,3\}$

$A = \{1,2\} \mid B = \{1,2,3\}$ $C = A \Delta B = \{3\}$ $C \in P(M)$ ✓

Assoziativ: $\forall a,b,c \in P(M): (a \Delta b) \Delta c = a \Delta (b \Delta c)$

$A = \{1,2\}$ $B = \{1,2,3\}$ $C = \{3\}$

$(A \Delta B) \Delta C$

$\{3\} \Delta \{3\} = \emptyset$

$A \Delta (B \Delta C)$

$\{1,2\} \Delta \{1,2\} = \emptyset$ ✓

Neutr. Elem $\forall a \in P(M): a \Delta e = a$

$e = \emptyset$

$A = \{1,2\}$ $A \Delta \emptyset = \{1,2\}$

Inv: $\forall a \in P(M): \exists a' \in P(M): a \Delta a' = e$

$A = \{1,2\}$

$A' = \{1,2\}$ $\Rightarrow A \Delta A' = \emptyset$

$\langle P(M), \cap \rangle$ ... HG

Abg: $\forall a,b \in P(M): a \cap b \in P(M)$ ✓

Assoz: $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$

$(\{1,2\} \cap \{1,2,3\}) \cap \{3\} = \emptyset$

$\{1,2\} \cap (\{1,2,3 \cap \{3\}) = \emptyset$

1 Elem: $e = \{1,2,3\} = M$

$A \subseteq M$, $A \cap M = A$

Komm ✓

Distributiv:

$(A \Delta B) \cap C = A \cap C \Delta B \cap C$

$\{3\} \cap \{3\} = \emptyset \Delta \{3\}$

$\{3\} = \{3\}$

zz: M bei denen $\langle P(M), \Delta, \cap \rangle$ ein Körper ist

$\forall M$ gilt $\langle P(M), \Delta, \cap \rangle$ ist komm. und besitzt ein 1Elem

zz: $\forall A \in P(M): \exists A' \in P(M): A \cap A' = M$

$A, A' \subseteq M$

$\Rightarrow M = \{1\}$

$A = \{1\}, A' = \{1\}$

$A \cap A' = \{1\} = M$

Gegenbeispiel $M = \{1, 2\}$ $P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$A = \{1\}$ $A' \in P(M)$

$A \cap A' \neq M$

$\Rightarrow \langle P(M), \Delta, \cap \rangle$ ist für alle M mit $|M| = 1$ ein Körper

ADM   UE 9.427

Z.z.: $(-a)b = -(ab) \quad / + ab$

$ab + (-a)b = 0$

$b(a-a) = 0$

$b0 = 0$

$0 = 0$ ✓

ADM UE 9.430

$\langle R, +, \cdot \rangle$ ... Ring

zz: $(R \times R, +, \cdot)$ ein Ring mit komp. weiser Addition, Mult

$(R \times R, +)$ ... Gruppe

Abg.

$a, b, c, d \in R: \quad a+c \in R \wedge b+d \in R \Rightarrow (a+c, b+d) \in R \times R$

Assoz

$$((a,b)+(c,d))+(e,f) = (a+c, b+d)+(e,f) = (a+c+e, b+d+f)$$

$$= (a,b)+(c+e, d+f) = (a,b)+((c,d)+(e,f))$$

Neutr

$a = (a,b) \Rightarrow a+e = a$

$(a+e_R, b+e_R) = (a,b)$

$e = (e_R, e_R)$

Invers:

$a = (a,b) \Rightarrow a + a' = e$

$(a-a, b-b) = (e_R, e_R) = e$

$(R \times R, \cdot)$ ... HG

Abg: $x = (a,b) \quad y = (c,d)$

$x \cdot y = (a \cdot c, b \cdot d)$

$a, b, c, d \in R: a \cdot c \in R \wedge b \cdot d \in R \Rightarrow (a \cdot c, b \cdot d) \in R \times R$

Assoz. $((a,b) \cdot (c,d)) \cdot (e,f) = (ac, bd) \cdot (ef)$

$= (ace, bdf) = (a,b) \cdot (ce, df) = (a,b) \cdot ((c,d) \cdot (e,f))$

Distr: $x \cdot (y+z) = x \cdot (c+e, d+f) = (a \cdot (c+e), b \cdot (d+f))$

$= (ac+ae, bd+bf)$

$x \cdot y + x \cdot z = (a \cdot c, b \cdot d) + (a \cdot e, b \cdot f) = (ac+ae, bd+bf) \quad \square$

ADM UE S.435

Ad. 430

z.z: $R \to R \times R$ a) komm. b) NT frei c) $\exists$ Einselem

a) $\forall a, b, c, d \in R: a+c = c+a \land b+d = d+b \Rightarrow (a,b)+(c,d) = (c,d)+(a,b)$

Multiplikation analog

b) Ann: $\nexists (a,b),(c,d) \in R \times R: (a,b) \neq 0, (c,d) \neq 0 \Rightarrow (a,b)\cdot(c,d) = 0$

(Bedingung ist das nicht beide Elem. des Tupels 0 sind)

$\Rightarrow \exists (a,0),(0,d) \in R \times R: (a,0)\cdot(0,d) = (a\cdot 0, 0\cdot d) = (0,0)$ ↯

c) $\forall (a,b) \in R \times R \, \exists (1,1) \in R \times R: (a,b)\cdot(1,1) = (a,b)$

$\Rightarrow (a,b)\cdot(1,1) =$

$(a\cdot 1, b\cdot 1) = (a,b)$ $\square$

ADM UE 9.455

z.z. $\mathbb{R}^2$ ein Vektorraum mit $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$

$\lambda (x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$

über $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$

$\mathbb{R}$ = Körper ✓

$(\mathbb{R}^2, +)$ ... komm. Gruppe

Abgeschlossen: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2 : \bar{x} + \bar{y} = \bar{z} \in \mathbb{R}^2$ ✓

Assoz: $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}: (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$

$= (y_1 + x_1, 0) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2)$ ✓

Neutr: $\exists e \in \mathbb{R}^2 \; \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \bar{x} + e = \bar{x}$

$\Rightarrow (x_1, x_2) + (e_1, e_2) = (x_1 + e_1, 0) \; ↯ \neq \bar{x}$

$\Rightarrow$ keine Gruppe

daher Kein Vektorraum