Aufgabe 1: Unterschiedliche Arten von Automaten

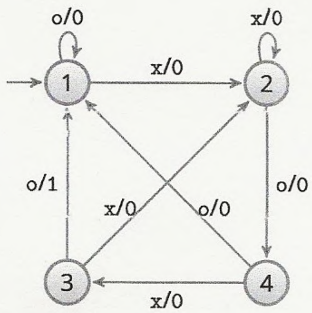
Kreuzen Sie nach den Vorlesungsfolien Zutreffendes an.

Aussage	DEA	NEA	Transducer	Mealy-Automat	Moore-Automat	Det. Büchi-Automat	Nichtdet. Büchi-Automat	trifft bei keinem zu
Ist ein klassischer endlicher Automat.	☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Besitzt ein Ein- und Ausgabealphabet.	☐	☐	☒	☒	☒	☐	☐	☐
Kann nichtdeterministisch sein.	☒	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐
Hat genau einen Startzustand.	☒	☒	☐	☒	☒	☒	☐	☐
Weniger Endzustände als Zustände möglich.	☒	☒	☒	☐	☐	☒	☒	☐
Ausgabe hängt nur von aktuellen Eingabesymbol ab.	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐
Sei a, b $\in \Sigma$. Übergang mit ab möglich.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒
Kann unendliche Symbolfolgen verarbeiten.	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐
ε-Übergänge sind erlaubt.	☐	☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Hinweis: In der Übung müssen Sie Ihre Antworten natürlich begründen können.

Aufgabe 2: Mealy-Automat

Sei $\mathcal{A}$ der folgende Mealy-Automat.



a) Geben Sie das Tupel an dass den Automaten $\mathcal{A}$ beschreibt.

b) Geben Sie die Ausgabe zur Eingabe xxoxoox an.

c) Berechnen Sie schrittweise $\delta^*(1, \text{oxoxox})$ und $\gamma^*(1, \text{oxoxox})$.

d) Beschreiben Sie die Übersetzungsfunktion $[\mathcal{A}]$.

a) $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \gamma, q_0 \rangle$

$Q = \{1,2,3,4\}$, $\Sigma = \{o, x\}$, $\Gamma = \{0,1\}$, $\delta: Q \times \Sigma \to Q$, $\gamma: Q \times \Sigma \to \Gamma$, $q_0 = 1$

b) 0000100

c) $\delta^*(1, oxoxox) = \delta^*(\delta(1,o), xoxox) =$
$\delta^*(1, xoxox) =$
$\delta^*(2, oxox) =$
$\delta^*(4, xox) =$
$\delta^*(3, ox) =$
$\delta^*(1, x) =$
$\delta^*(2, \varepsilon) = \underline{\underline{2}}$

$\gamma^*(1, oxoxox) = \gamma(1,o) \cdot \gamma^*(\delta(1,o), xoxox) =$
$= 0 \cdot \gamma^*(1, xoxox) =$
$= 00 \cdot \gamma^*(2, oxox) =$
$= 000 \cdot \gamma^*(4, xox) =$
$= 0000 \cdot \gamma^*(3, ox) =$
$= 00001 \cdot \gamma^*(1, x) =$
$= 000010 \cdot \gamma^*(2, \varepsilon)$
$= \underline{000010}$

d) $[\mathcal{A}](w) = \gamma^*(1, w)$ mit $w \in \Sigma^*$ und $[A](w) \in \Gamma^*$

W:	ε	o	x	oo	ox	xo	xx	ooo	oox	.... xoxo ....
[A](w):	ε	0	0	00	00	00	00	000	000	.... 0001 ....

Aufgabe 3: Moore-Automat

Ein Radiowecker mit Schlummertaste besitze folgendes Verhalten. Sobald die eingestellte Alarmzeit erreicht ist (A), beginnt er entweder laut zu piepen (p) oder er spielt das eingestellte Radioprogramm (r). Drückt man auf die Schlummertaste (S), dann ist der Wecker drei Minuten still (s), ehe er wieder zu piepen bzw. Radio zu spielen beginnt. Wird zu einem beliebigen Zeitpunkt der Alarm ausgeschaltet (O wie „off"), dann geht der Wecker zurück in den Wartezustand. Mittels eines Umschalters (U) kann zwischen Radio und Piepton gewechselt werden; zu Beginn ist der Piepton ausgewählt. Um die Zeit zu messen, erhält der Wecker von einem internen Zeitgeber jede Minute einen Tick (T).

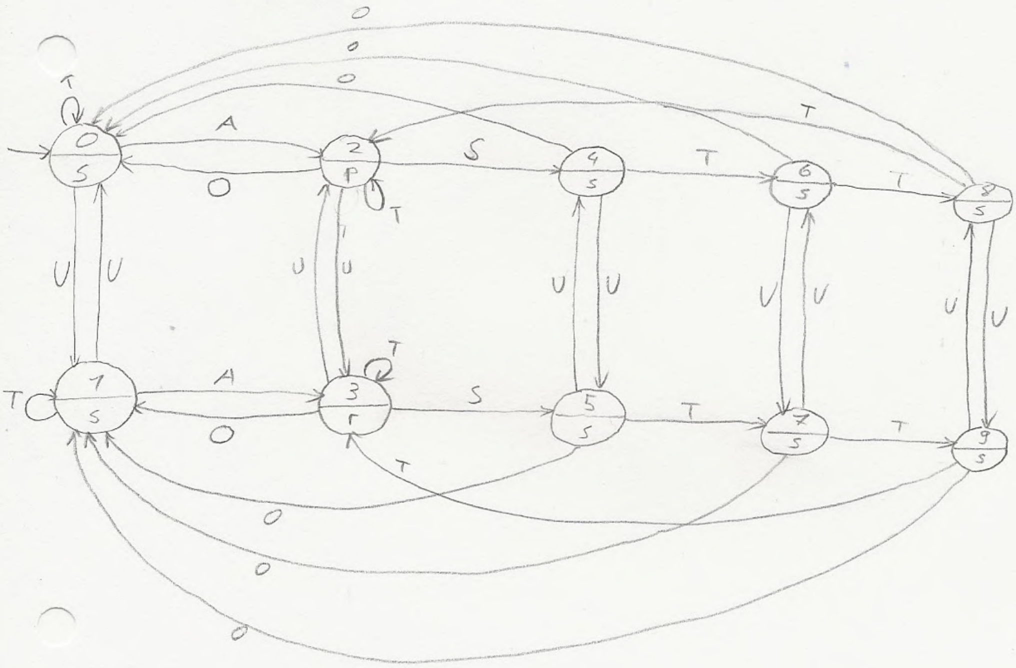
Modellieren Sie den Wecker mithilfe eines Moore-Automaten. Eingangssignale sind A, S, T, U und O, Ausgangssignale sind p, r und s. Sie können den Automaten tabellarisch oder graphisch darstellen.

Geben Sie die Ausgabe für folgende Eingangssignale an:

a) `ATTO`

b) `UTTASTTTTSO`

c) `TTAUTTO`



a) s|ppps

b) s|sssrsssrrss

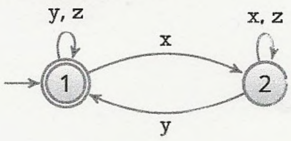
c) s|ssprrrs

Aufgabe 4: Büchi-Automat

In dieser Aufgabe verwenden wir die $(\cdot)^\omega$ Operation um formalen Sprachen mit unendliche Wörter zu definieren. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache über einem Alphabet Σ dann verstehen wir unter L^ω die Sprache die alle Wörter enthält die sich durch das Verketten von unendlichen vielen Wörter aus L bilden lassen.

Bsp: Sei $L = \{01, 1\}$, dann enthält die Sprache L^ω alle unendlichen Folgen von 0, 1 sodass auf jede 0 eine 1 folgt. In algebraischer Notation können wir diese Sprache wir folgt beschreiben $(01 + 1)^\omega$.

a) Welche Sprache akzeptiert folgender Büchi-Automat? Geben Sie die Sprache in der algebraischen Schreibweise an.



$(y + z + (x^+z^*y))^\omega$

Alle Wörter die y oder z enthalten

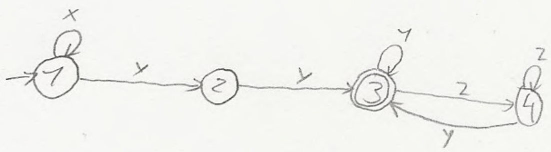
b) Konstruieren Sie einen deterministischen Büchi-Automaten, der genau jene Wörter aus

$$x^*yy(y + z^+y)^\omega$$

akzeptiert.

c) Gegeben sei ein Büchi-Automaten $\mathcal{A}$. Geben Sie ein Verfahren an, das entscheidet, ob $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

b)



c) - beliebiges Wort aus Σ^ω auswählen

- so lange $\delta(q_{i-1}, w_i) = q_i$ ausführen bis

↳ es keinen Übergang gibt $\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \emptyset$

↳ q_i ein endzustand ist $\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$

Aufgabe 5: Syntax der Prädikatenlogik

Betrachten Sie die prädikatenlogischen Formeln über die Variablen x, y, z, eine einstellige Funktion f/1, eine zweistellige Funktion g/2, eine Konstante k/0, ein einstelliges Prädikat R/1 und ein zweistelliges Prädikat S/2.

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Formeln syntaktisch korrekte prädikatenlogische Formeln sind und begründen Sie Ihre Aussage.

  (i) $(\neg R(f(y)) \Rightarrow \forall x \exists y\, S(x, g(z, y)))$ ✓

  (ii) $\forall x(\forall y\, S(x, y) \wedge \exists z\, R(\neg z))$ ↯

  (iii) $\exists z\, (P(z) \Rightarrow \forall x\, (S(x, k(y)) \wedge \forall y\, P(f(y)))$ ↯

  (iv) $\forall x\, (g(x, g(y, z)) \vee \exists z\, \neg S(z, x))$ ✓

  (v) $\forall\, (P(x) \Leftrightarrow S(x))$ ↯

(b) Überlegen Sie welche Terme hier gebildet werden können. Welche Teile der Angabe sind hierfür relevant? Geben Sie mindestens 5 verschieden gültige Terme an und versuchen Sie dabei alle Möglichkeiten Terme zu bilden zu verwenden.

GDS UE 7.5

a)

(i)

$$\frac{\frac{\frac{\frac{f/1 \in F \quad \frac{y \in V}{y \in T}}{f(y) \in T}}{R(f(y)) \in PF}}{\neg R(f(y)) \in PF} \qquad \frac{x \in V \quad \frac{y \in V \quad \frac{\frac{x \in V}{x \in T} \quad \frac{g/2 \in F \quad \frac{z \in V}{z \in T} \quad \frac{y \in V}{y \in T}}{g(z,y) \in T}}{S(x, g(z,y)) \in PF}}{\exists y S(x, g(z,y)) \in PF}}{\forall x \exists y S(x, g(z,y)) \in PF}}{(\neg R(f(y)) \Rightarrow \forall x \exists y S(x, g(z,y)) \in PF}$$

(ii)

$$\frac{x \in V \quad \frac{\frac{y \in V \quad \frac{\frac{x \in V}{x \in T} \quad \frac{y \in V}{y \in T}}{S(x,y) \in PF}}{\forall y S(x,y) \in PF} \qquad \frac{z \in V \quad \frac{\neg z \in T}{R(\neg z) \in PF}}{\exists z R(\neg z) \in PF}}{(\forall y S(x,y) \wedge \exists z R(\neg z)) \in PF}}{\forall x (\forall y S(x,y) \wedge \exists z R(\neg z)) \in PF}$$

Variable kann nicht negiert werden

(iii)

P verlangt 2 Argumente

$$\frac{z \in V \quad \frac{\frac{P/1 \in P \quad z \in T}{P(z) \in PF} \qquad \forall x (S(x, k(y)) \wedge \forall y P(f(y)))}{(P(z) \Rightarrow \forall x (S(x, k(y)) \wedge \forall y P(f(y))) \in PF}}{\exists z (P(z) \Rightarrow \forall x (S(x, k(y)) \wedge \forall y P(f(y))) \in PF}$$

(iv)

$$\frac{x \in V \quad \frac{\frac{g/2 \in F \quad \frac{x \in V}{x \in T} \quad \frac{g/2 \in F \quad \frac{y \in V}{y \in T} \quad \frac{z \in V}{z \in T}}{g(y,z) \in T}}{g(x, g(y,z)) \in PF} \qquad \frac{z \in V \quad \frac{\frac{\frac{z \in V}{z \in T} \quad \frac{x \in V}{x \in T}}{S(z,x) \in PF}}{\neg S(z,x) \in PF}}{\exists z \neg S(z,x) \in PF}}{(g(x, g(y,z)) \vee \exists z \neg S(z,x)) \in PF}}{\forall x (g(x, g(y,z)) \vee \exists z \neg S(z,x)) \in PF}$$

(v)

$\forall\,(P(x) \Leftrightarrow S(x)) \in PF$ ↯ variable Fehlt

b) Die Prädikate sind für die Bildung von Termen irrelevant

1) x weil $x \in V$ und $V \subseteq T$

2) k weil $k/0 \in F$

3) $g(x, y)$ weil $g/2 \in F$ und $x, y \in V$

4) $g(k, f(z))$

5) $f(x)$

Aufgabe 6: Prädikatenlogik: Prädikaten- / Funktionssymbole finden

Stellen Sie für die folgenden Situationen fest, welche Teile Sie als Prädikat oder Funktion darstellen können. Geben Sie jeweils passende Namen mit Aritäten an und legen Sie die Bedeutung des Prädikats bzw. der Funktion fest. Geben Sie gegebenenfalls auch die Bedeutung der Argumente an. Finden Sie ein eigenes Beispiel für eine atomare Aussage oder einen Term, die sich mit Ihren Symbolen bilden lassen.

a) Ein Zoo hat Exemplare verschiedener Tierarten. Der Zoo hält auch fest in welchem Gehege sich die Tiere befinden und welches Futter sie essen können. Die Pinguine Skipper und Private befinden sich etwa im Südgehege und fressen sowohl Fische als auch Krebse.

b) Punkte im zweidimensionalen Raum sind durch ihre x-Koordinate und ihre y-Koordinate bestimmt. Eine Strecke ist durch ihre zwei Endpunkte bestimmt, ein Dreieck durch seine drei Eckpunkte.

GDS UE 7.6

a)

"Der zoo hat Pinguine" $\exists x$ Pinguin(x)

"x lebt im Südgehege" LebtIn(x, südgehege)

"x frisst Fische" Frisst(x, fische)

"x frisst Krebse" Frisst(x, krebse)

U = {Skipper, Private, Südgehege, Fische, Krebse}

I(Pinguin) = {Skipper, Private}

I(LebtIn) = {(Skipper, Südgehege), (Private, Südgehege)}

I(Frisst) = {(Skipper, Fische), (Skipper, Krebse),
(Private, Fische), (Private, Krebse)}

I(südgehege) = Südgehege

I(fische) = Fische

I(krebse) = Krebse

"Alle Pinguine fressen Fische und Krebse"

$\forall x$ (Pinguin(x) $\Rightarrow$ Frisst(x, fische) $\wedge$ Frisst(x, krebse))

GDS UE 7.6

b)

"Ein Punkt besteht aus x- & y-Koordinaten" $\forall x \forall y (Punkt(x, y))$

"Eine Strecke besteht aus zwei Punkten" $\forall x \forall y \forall v \forall w (Strecke(Punkt(x, y), Punkt(v, w)))$

"Ein Dreieck besteht aus drei Punkten" $\forall x \forall y \forall v \forall w \forall i \forall j (Dreieck(Punkt(x, y), Punkt(v, w), Punkt(i, j)))$

"Eine Strecke kann durch vertauschen der Punkte gespiegelt werden"

$$\forall x \forall y \forall v \forall w (Strecke(Punkt(x, y), Punkt(v, w)) \Leftrightarrow Strecke(Punkt(v, w), Punkt(x, y)))$$

Alternative:

$\forall p (Punkt(p) \Rightarrow koordX(p) \land koordY(p))$

$\forall s (Strecke(s) \Rightarrow \exists p \exists q (Punkt(p) \land Punkt(q)))$

$\forall d (Dreieck(d) \Rightarrow \exists p \exists q \exists r (Punkt(p) \land Punkt(q) \land Punkt(r)))$

"Strecke Spiegeln ..."

$\forall s (Strecke(s) \Rightarrow \exists p \exists q ((Punkt(p) \land Punkt(q)) \Leftrightarrow (Punkt(q) \land Punkt(p))))$

Aufgabe 7: Quantoren

Betrachten Sie die prädikatenlogischen Formeln über die Variablen x, y, z, eine einstellige Funktion f/1, eine zweistellige Funktion g/2, eine Konstante k/0, ein einstelliges Prädikat R/1 und ein zweistelliges Prädikat S/2.

Gegeben seien folgende Formeln.

(1) $\forall x\, \big(S(f(x), k) \Rightarrow \neg R(x)\big)$

(2) $\exists x\, \neg\big(R(x) \Rightarrow S(f(x), k)\big)$

Überprüfen Sie welche der folgenden Interpretationen die Formeln erfüllen, d.h. welche Interpretation Modell welcher Formel ist.

(i)

$\mathcal{U} = \{\text{Michael}, \text{Lisa}, \text{Sarah}\}$

$I(k) = \text{Michael}$

$I(f):\ I(f)(\text{Michael}) = \text{Sarah},\ I(f)(\text{Lisa}) = \text{Michael},$
$I(f)(\text{Nicole}) = \text{Nicole}$

$I(R) = \{\text{Michael}, \text{Lisa}\}$

$I(S) = \{(\text{Sarah}, \text{Michael})\}$

(ii)

$\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$

$I(k) = 4$

$I(f):\ I(f)(1) = 4,\ I(f)(2) = 4,$
$I(f)(3) = 2,\ I(f)(4) = 2$

$I(R) = \{1, 2\}$

$I(S) = \{(x, y) \mid x \in \{1, 2\}, y \in \{3, 4\}\}$

GDS UE 7.7

1) $\forall x(S(f(x),k) \Rightarrow \neg R(x))$

(i)

$\Rightarrow$ nicht erfüllbar

z.B.: $x = Michael$

$S(f(Michael), Michael) \Rightarrow \neg R(Michael)$

$S(Sarah, Michael) \Rightarrow \neg 1$

$1 \Rightarrow 0$ ↯

$\Rightarrow$ Somit kann (i) nicht für alle Werte von x stimmen

(ii)

$x=1$ $S(4,4) \Rightarrow \neg R(1)$

$0 \Rightarrow 0$ ✓

$x=2$ $S(4,4) \Rightarrow \neg R(2)$

$0 \Rightarrow 0$ ✓

$x=3$ $S(2,4) \Rightarrow \neg R(3)$

$0 \Rightarrow 1$ ✓

$x=4$ $S(2,4) \Rightarrow \neg R(4)$

$0 \Rightarrow 1$ ✓

$\Rightarrow$ Die Formel ist für alle $x = 1$

Daher ist (1) erfüllbar

GDS UE 7.7

2) $\exists x \neg (R(x) \Rightarrow S(f(x), h))$

(i)

$\neg(R(Lisa) \Rightarrow S(f(Lisa), Michael))$

$\neg(1 \Rightarrow S(Michael, Michael))$

$\neg(1 \Rightarrow 0)$

$\neg 0$

1 ✓

=> min. x führt dazu, dass die Formel wahr ist => (i) ist ein Modell von (2)

(ii)

$\neg(R(1) \Rightarrow S(f(1), 4))$

$\neg(1 \Rightarrow S(4,4))$

$\neg(1 \Rightarrow 0)$

$\neg 0$

1 ✓

=> (ii) ist ein Modell von (2)

Aufgabe 8: Modellieren mit PL

Gegeben seien folgende Prädikate, Funktionen und Konstanten:

Groesser(x, y)	... x ist größer als y	Gleich(x, y)	... x ist die gleiche Person wie y
vater(x)	... Vater von x	mutter(x)	... Mutter von x
Geschwister(x, y)	... x und y sind Geschwister	Kinder(x)	... x hat Kinder

(a) Schreiben Sie folgende deutsche Sätze als prädikatenlogische Formeln unter Verwendung der obigen Prädikate, Funktionen und Konstanten:

- (i) Es existiert eine Person die keine Kinder hat.
- (ii) Es existiert sowohl eine Person die keine Kinder hat als auch eine Person die Kinder hat.
- (iii) Wenn zwei Personen die gleiche Mutter haben dann sind sie Geschwister.
- (iv) Wenn zwei Personen den gleichen Vater haben dann sind sie Geschwister.
- (v) Es gibt Geschwister die unterschiedliche Väter haben.

(b) Übersetzen Sie die folgenden Formeln in deutsche Sätze.

- (i) $\forall x \forall y \forall z((\text{Groesser}(y, x) \land \text{Groesser}(x, z)) \Rightarrow \text{Groesser}(y, z))$
- (ii) $\forall x \forall y(\text{Geschwister}(x, y) \Rightarrow (\text{Gleich}(\text{mutter}(x), \text{mutter}(y)) \lor \text{Gleich}(\text{vater}(x), \text{vater}(y)))$

(c) Wie müssten wir die Prädikate und Funktionen verändern wenn wir modellieren wollen dass eine Person auch mehrere Mütter/Väter haben kann?

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass alle Objekte Personen sind. Sie müssen das in Ihren Formeln also nicht gesondert überprüfen.

GDS UE 7.8

a)

(i) $\exists x \neg Kinder(x)$

(ii) $\exists x \exists y (\neg Kinder(x) \land Kinder(y))$

(iii) $Gleich(mutter(x), mutter(y)) \Rightarrow Geschwister(x,y)$

(iv) $Gleich(vater(x), vater(y)) \Rightarrow Geschwister(x,y)$

(v) $\exists x \exists y (Geschwister(x,y) \land \neg Gleich(vater(x), vater(y))$

b)

(i) Für alle Personen gilt: wenn eine größer als die andere ist und diese widerrum größer als eine dritte, dann ist die erste größer als die dritte.

(ii) Wenn zwei Personen Geschwister sind müssen sie entweder die selbe Mutter oder den selben Vater haben

c) mutter bzw. vater könnte keine Funktion mehr sein, da ein x kein eindeutiges Ergebnis mehr hat.
Man musste ein Prädikat Mutter(x,y)/ Vater(x,y) machen, das überprüft ob x Mutter/Vater von y ist.

Aufgabe 9: Modellieren mit PL

Übersetzen Sie die folgenden deutschen Sätze in prädikatenlogische Formeln und geben Sie jeweils ein Modell an. Geben Sie auch die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Prädikate und Funktionen an. *Hinweis:* Sie können davon ausgehen, dass alle Objekte Boote sind. Sie müssen das in Ihren Formeln also nicht gesondert überprüfen.

a) Alle Kanus sind Paddelboote.

b) Es gibt Boote die keine Kanus sind.

c) Jedes Kanu ist entweder ein Kajak oder ein Kanadier.

d) Es gibt ein Tretboot, und ein Kajak oder ein Segelboot.

Kanu(x) ... x ist in der Kategorie der Kanus

Paddelboot(x) ... x ist vom Typ Paddelboot

Kajak(x) ... x ist ein Kajak

Kanadier(x) ... x ist ein Kanadier

Tretboot(x) ... x ist vom Typ Tretboot

Segelboot(x) ... x ist vom Typ Segelboot

kategorie(x) ... Kategorie von x

typ(x) ... Typ von x

a) $\forall x\, (Kanu(kategorie(x)) \Rightarrow Paddelboot(typ(x)))$

b) $\exists x\, \neg Kanu(kategorie(x))$

c) $\forall x\, (Kanu(kategorie(x)) \Rightarrow (Kajak(x) \vee Kanadier(x)))$

d) $\exists x\, \exists y\, (Tretboot(typ(x)) \wedge (Kajak(x) \vee Segelboot(typ(x))))$