Aufgabe 1: BDDs

a) Aus einer Wahrheitstabelle mit der Variablenreihenfolge $\pi = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ wurde folgender Bead mit Don't-Cares ausgelesen:

00XX 1XX1 0XXX XXX1 X00X 111X 0XXX 11XX

Dieser Bead wurde mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren aus der Wahrheitstabelle von unten nach oben ausgelesen.

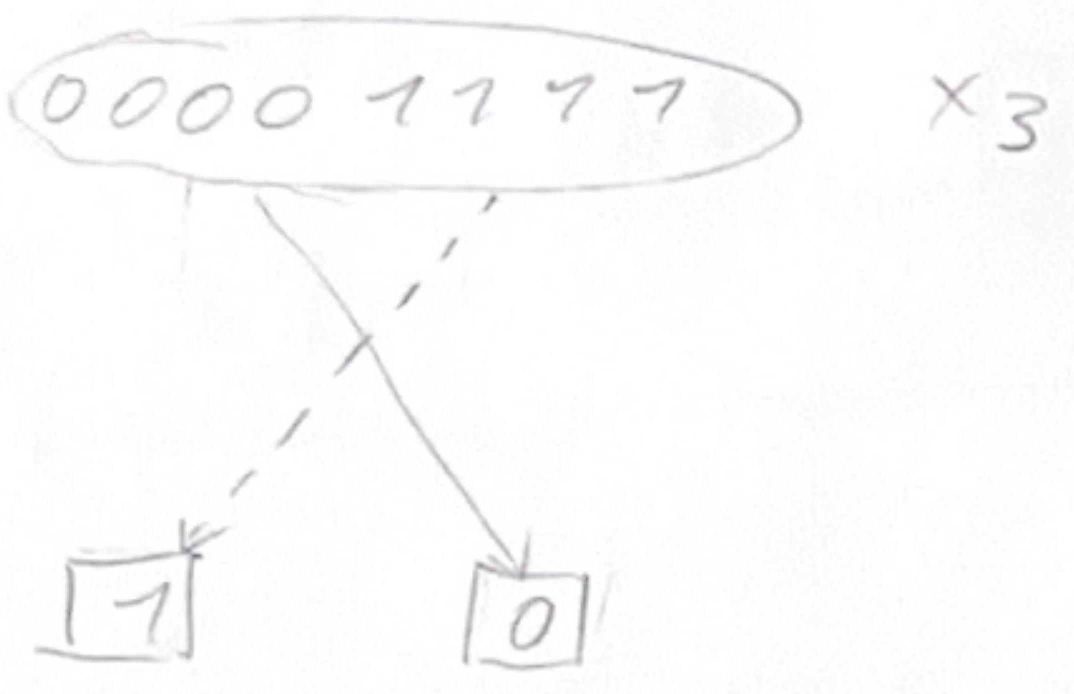
(a) Erstellen Sie das minimale BDD mittels der **gierigen** Variante von Beads.

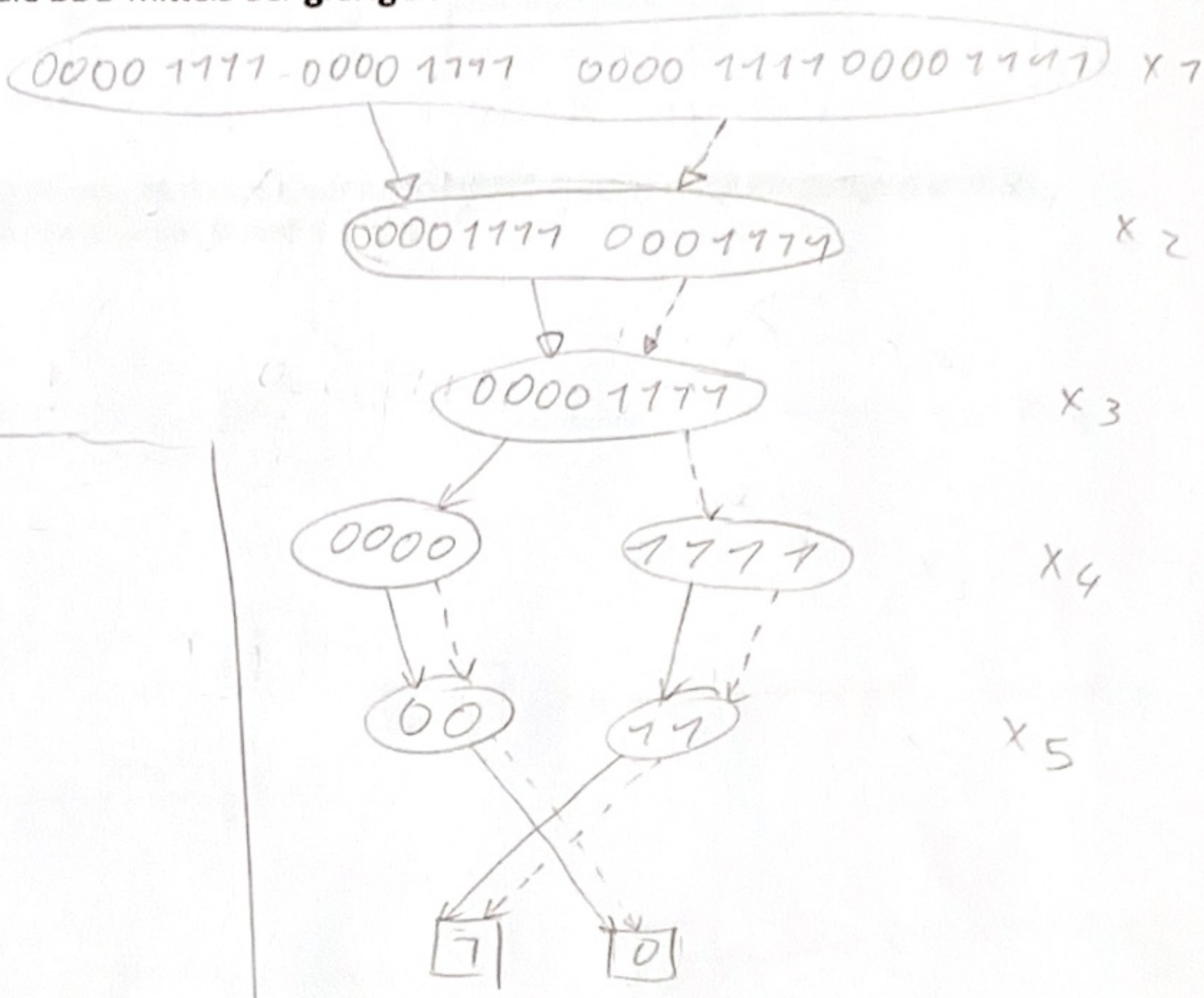
00XX 1XX1 0XXX XXX1
X00X 111X 0XXX 11XX

00X 1111 | 0XXX 11X1

0000 1111 00001111

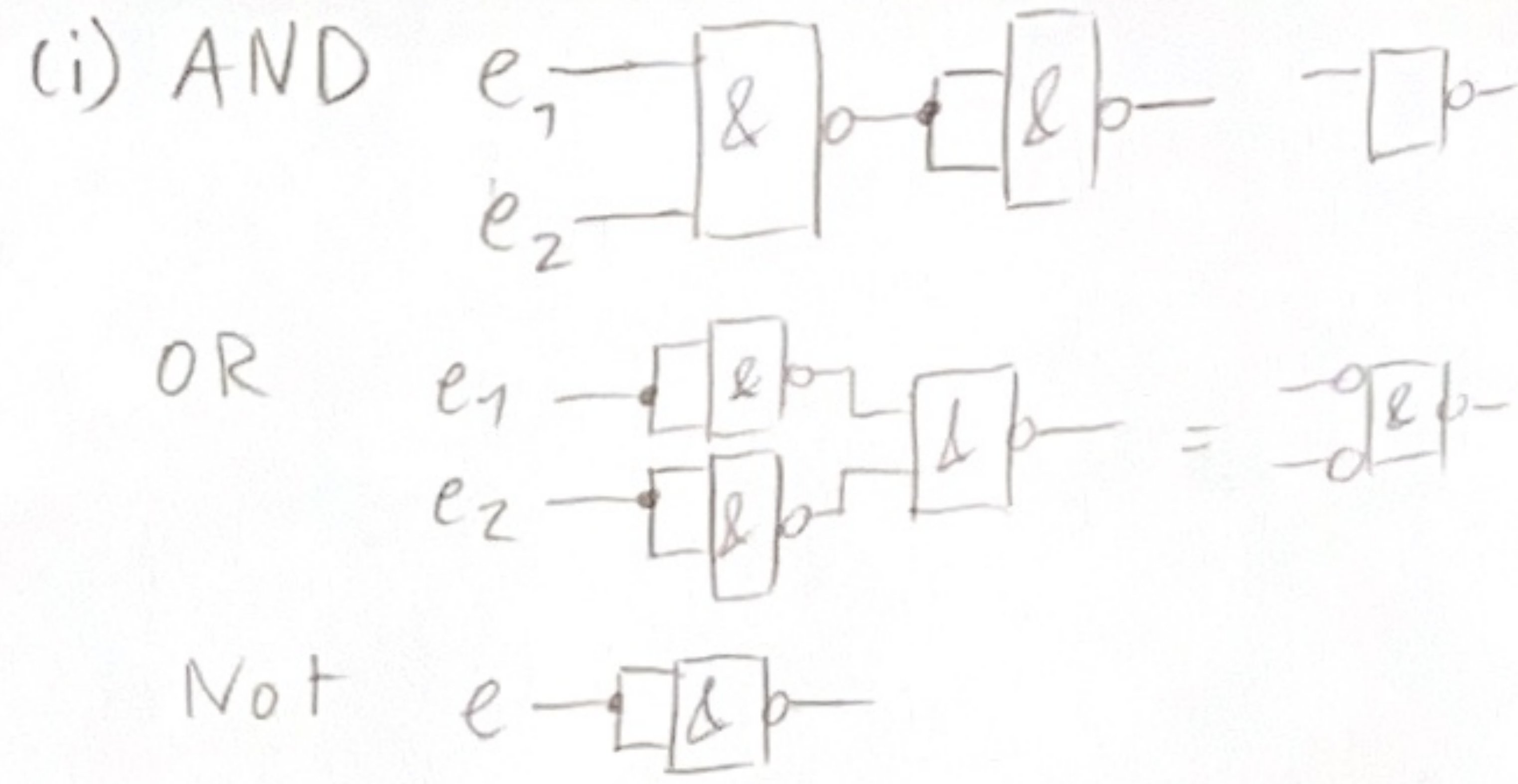
Minimal:





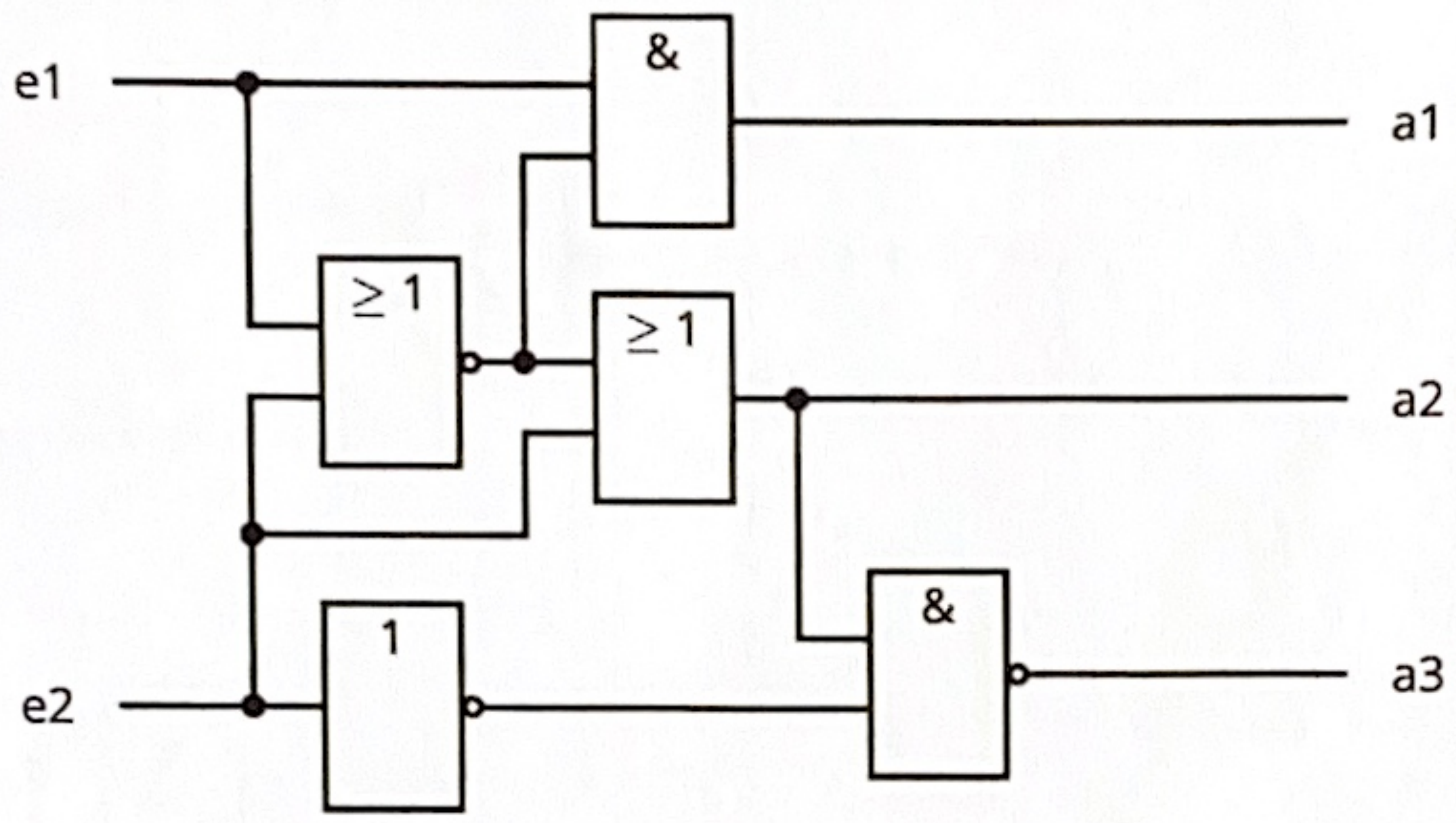
(b) Erstellen Sie die ITE-Darstellung Ihres BDDs aus Unteraufgabe (a).

if x_3 then 0
else 1

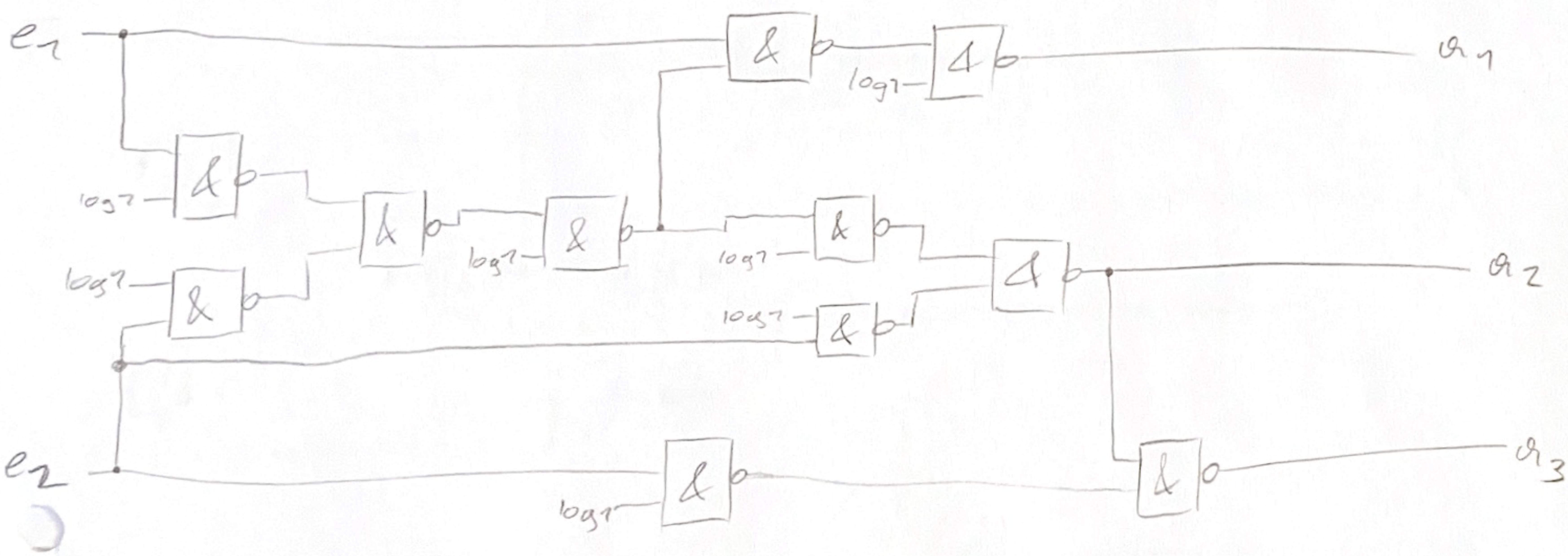


Aufgabe 2: Substitution mit NAND Gattern

Gegeben ist folgende Schaltung:

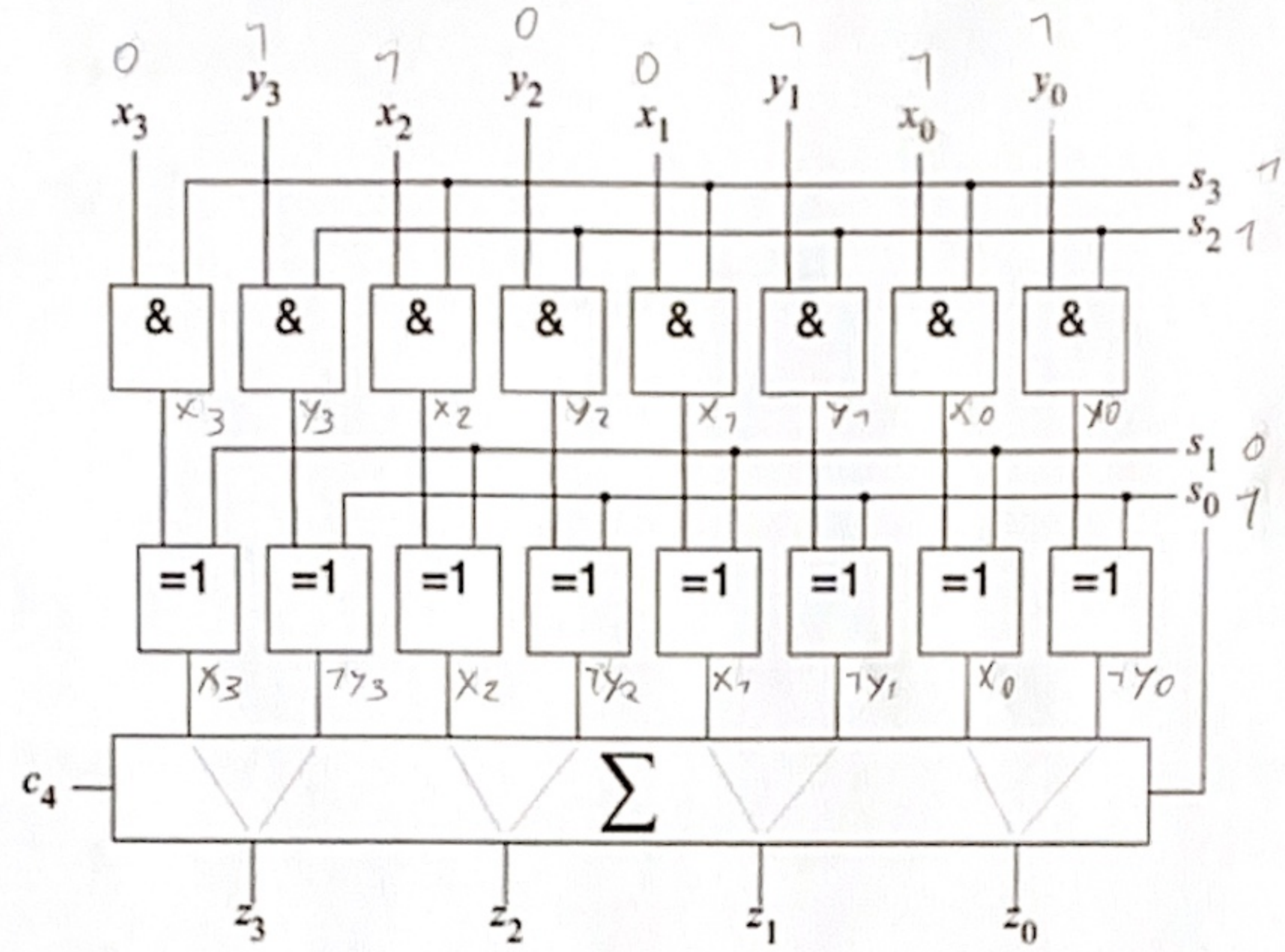


Formen Sie die gegebene Schaltung so um, dass diese nur noch **NAND Gatter** mit **2 Eingängen** enthält. Verwenden Sie dabei die logischen Konstanten 0 und 1 **nicht**.



Aufgabe 3: Schaltnetz

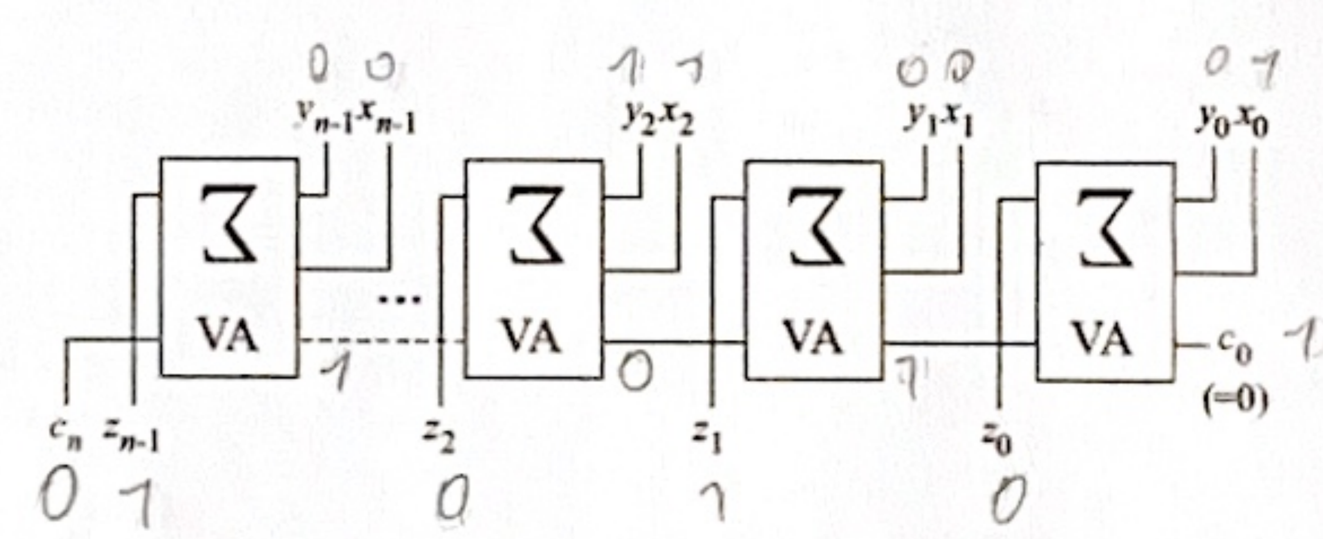
Sie haben folgendes Schaltnetz (spezielle arithmetic logic unit (ALU)) gegeben:



Dieses Schaltnetz verarbeitet als Eingabe zwei Zweierkomplementzahlen $x = x_3x_2x_1x_0$ und $y = y_3y_2y_1y_0$ mit jeweils vier Bit. Abhängig von den Steuersignalen s_0, s_1, s_2 und s_3 wird durch den 4-Bit Addierer (Block mit Summenzeichen) die Zweierkomplementzahl $z = z_3z_2z_1z_0$ berechnet.

Beispiel: Für $s_0 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ und $s_3 = 1$ berechnet dieses Schaltnetz $x+y$ (für beliebige Belegungen von x und y).

Der interne Aufbau für den hier verwendeten n-Bit Addierer sieht folgendermaßen aus:



Hinweis: c_0 wird bei der speziellen ALU durch s_0 bestimmt und ist nicht immer 0!

Welche Berechnungen werden durch folgende Kombinationen der Steuersignale realisiert?

- $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ und $s_3 = 1$ carry 1 + x
- $s_0 = 1$, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$ und $s_3 = 1$ carry 1 + ¬x
- $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$ und $s_3 = 0$ 15
- $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ und $s_3 = 1$ carry 1 + x - y

GDS UE 5.3

$s_0 = 1 \quad s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_3 = 1$

$x_3 \quad x_2 \quad x_1 \quad x_0 \quad x$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad y = 15$

$1 | 1 | 1 | 1 | 1 \quad s_0 = 1$

$x_3 \quad x_2 \quad x_1 \quad x_0$

$\Rightarrow$ carry $1 + x$

$s_0 = 1 \quad s_1 = 1 \quad s_2 = 0 \quad s_3 = 1$

$\neg x_3 \quad \neg x_2 \quad \neg x_1 \quad \neg x_0 \quad x$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad y = 15$

$1 | 1 | 1 | 1 | 1 \quad s_0$

$\neg x_3 \quad \neg x_2 \quad \neg x_1 \quad \neg x_0$

$\Rightarrow$ carry $1 + \neg x$

$s_0 = 0 \quad s_1 = 1 \quad s_2 = 0 \quad s_3 = 0$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x = 15$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad y = 0$

$0 | 0 | 0 | 0 \quad s_0 = 0$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$

$\Rightarrow 15 + 0 = 15$

$s_0 = 1 \quad s_1 = 0 \quad s_2 = 1 \quad s_3 = 1$

$x_3 \quad x_2 \quad x_1 \quad x_0 \quad x$

$\neg y_3 \quad \neg y_2 \quad \neg y_1 \quad \neg y_0 \quad y$

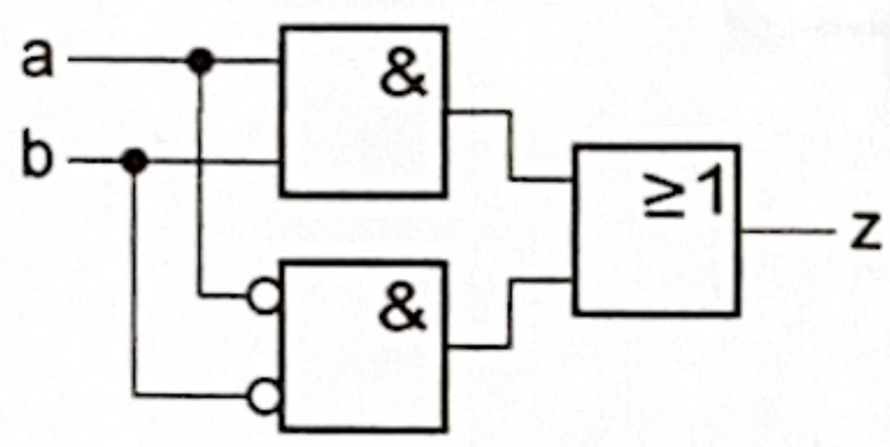
$1 \quad s_0$

$\Rightarrow$ carry $1 + x - y$

Aufgabe 4: Schaltnetze und Demultiplexer

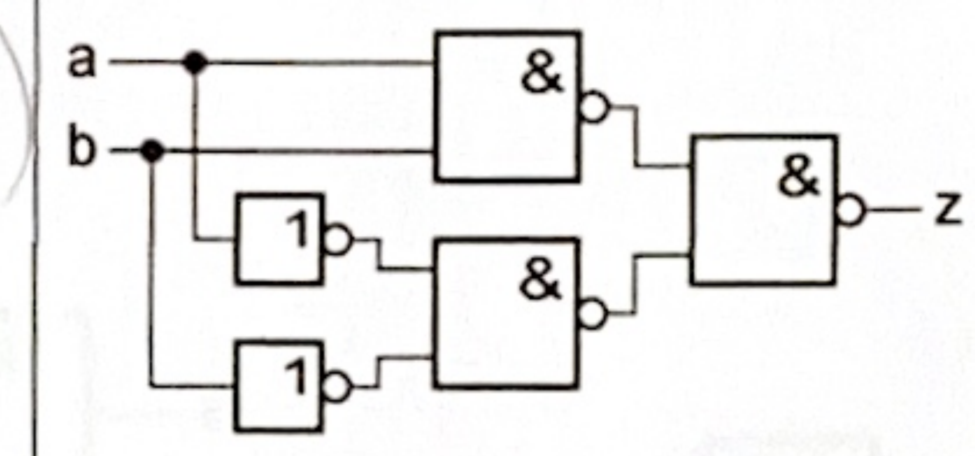
a) Gegeben ist ein Schaltnetz mit 4 Umformungen. Geben Sie zu jeder Umformung an, ob sie *gültig* oder *nicht gültig* ist. Eine Umformung ist gültig, wenn das umgeformte Schaltnetz dieselbe Funktion wie das ursprünglich gegebene Schaltnetz ausführt.

Schaltnetz:



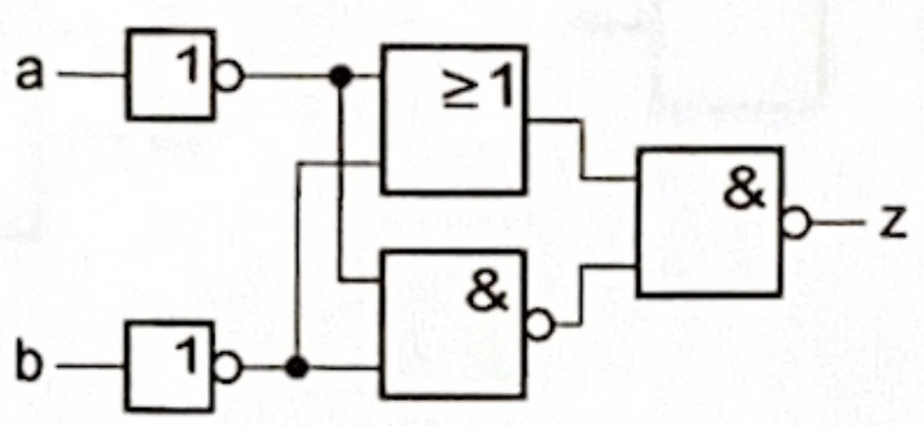
Kreuzen Sie rechts an, ob es sich um eine *gültige* oder um eine *nicht gültige* Umformung handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.

1)



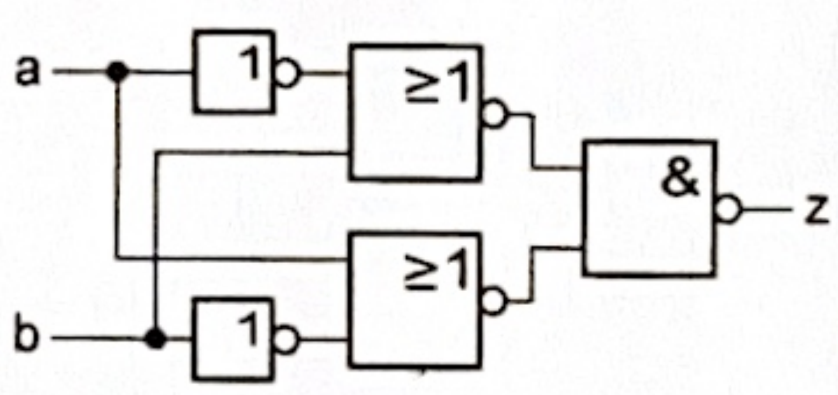
⊗ gültig
O nicht gültig

2)



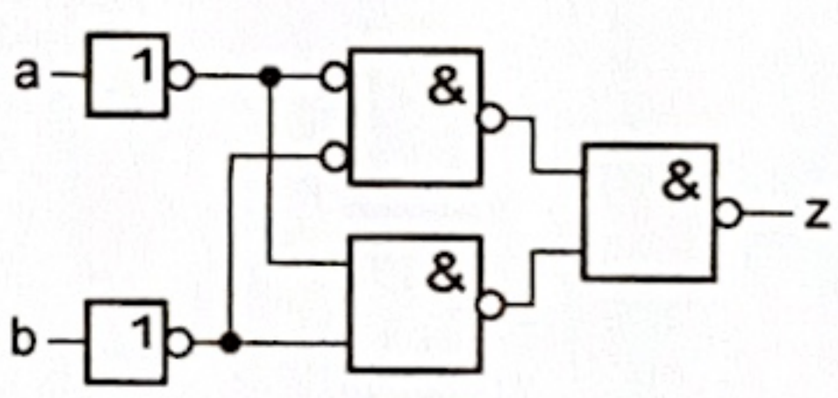
⊗ gültig
O nicht gültig

3)



O gültig
⊗ nicht gültig

4)



O gültig
⊗ nicht gültig

$\boxed{(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)}$

1) $\neg(\neg(a \wedge b) \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b))$
$= \neg\neg(a \wedge b) \vee \neg\neg(\neg a \wedge \neg b)$
$= (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$ ✓

2) $\neg((\neg a \vee \neg b) \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b))$
$\neg(\neg a \vee \neg b) \vee \neg\neg(\neg a \wedge \neg b)$
$(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$ ✓

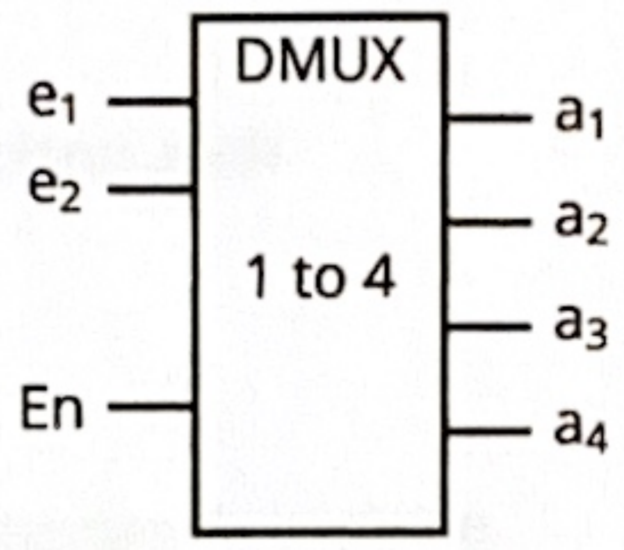
3) $\neg(\neg(\neg a \vee b) \wedge \neg(a \vee \neg b))$
$= \neg((a \wedge \neg b) \wedge (\neg a \wedge b))$
$= (\neg a \vee b) \vee (a \vee \neg b)$ ↯

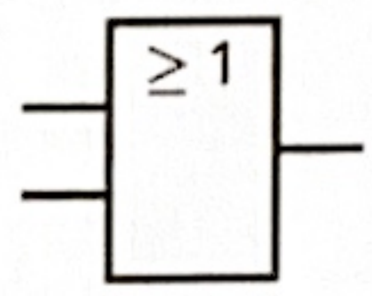
4) $\neg(\neg(\neg\neg a \wedge \neg\neg b) \wedge \neg(\neg\neg a \wedge \neg\neg b))$
$= \neg(\neg(a \wedge b) \wedge \neg(a \wedge b))$
$= \neg\neg(a \wedge b) \vee \neg\neg(a \wedge b)$
$= (a \wedge b) \vee (a \wedge b)$ ↯

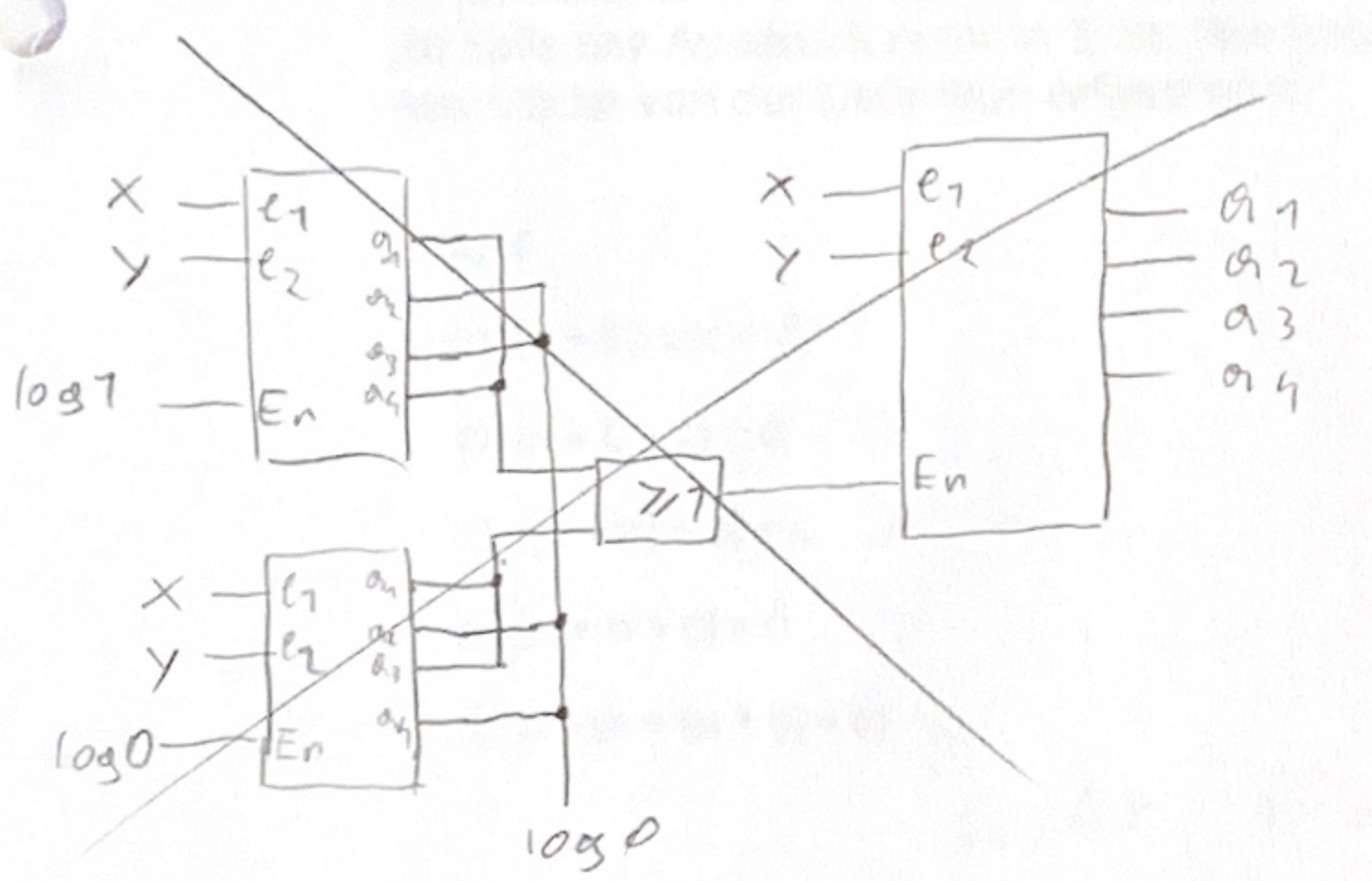
b) Erstellen Sie ein Schaltbild für die in der Wahrheitstabelle gegebene Funktion mit Hilfe der unten gegebenen Bausteine (DMUX ist ein Demultiplexer) und den Konstanten **log 1** und **log 0**. Vergessen Sie nicht, alle Eingänge und Ausgänge Ihrer Lösung zu beschriften.

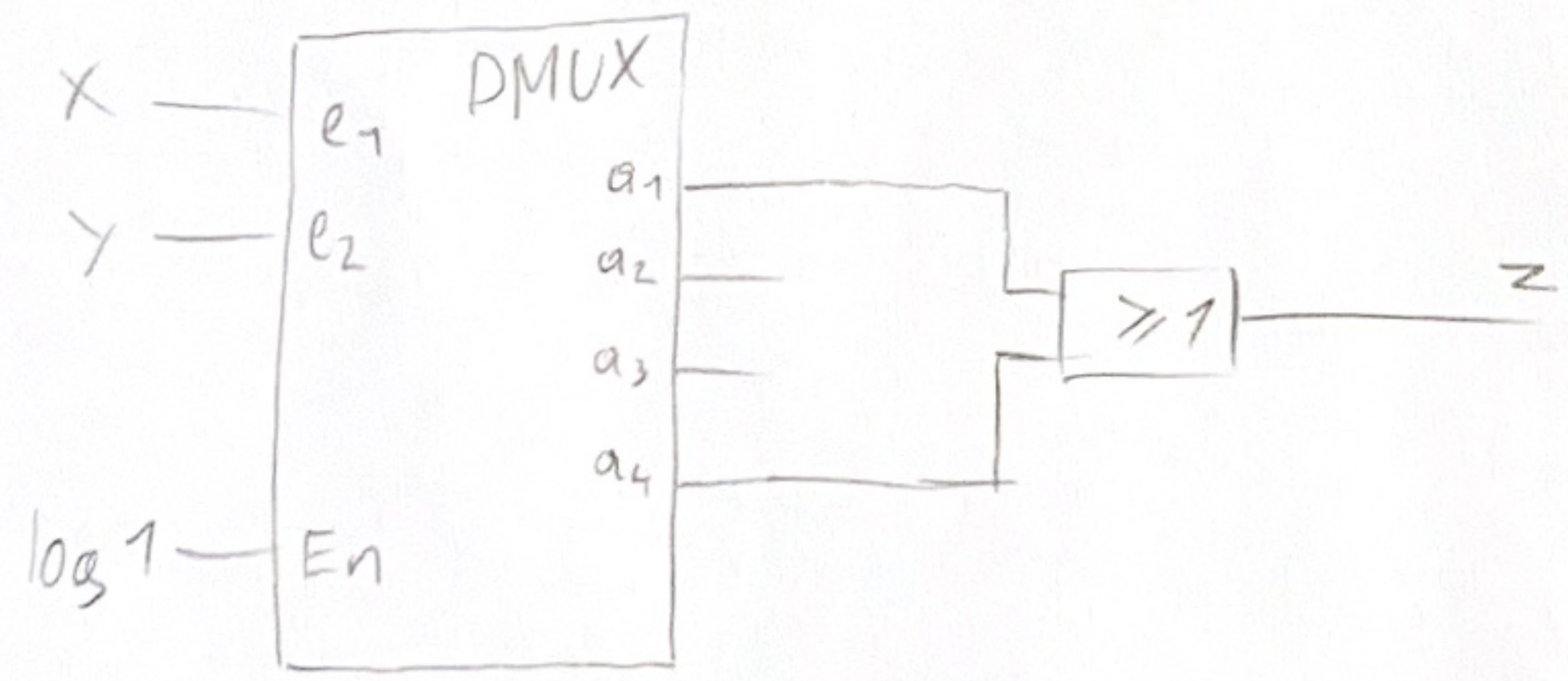
Äquivalenz:

x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1









Aufgabe 5: Induktive Definition

Sei $\mathbb{V} = \{a, b, c, \dots\}$ eine Menge von Variablen. Wir definieren Terme über $\mathbb{V}$, welche die Operationen $+$ und $*$ verwenden, wie folgt.

Die Menge der Terme $\mathbb{T}$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

1) $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{T}$
2) Wenn $X, Y \in \mathbb{T}$, dann auch
   (a) $(X) + (Y) \in \mathbb{T}$
   (b) $(X) * (Y) \in \mathbb{T}$
3) Wenn $X \in \mathbb{T}$ und $Y \in \mathbb{V}$, dann auch
   (a) $X + Y \in \mathbb{T}$
   (b) $(X) * Y \in \mathbb{T}$

Betrachten Sie jeden der folgenden Ausdrücke:
(a) Entscheiden Sie ob der Ausdruck nach obiger Definition ein Term in $\mathbb{T}$ ist.
(b) Falls der Ausdruck nicht in $\mathbb{T}$ ist: Wie könnte man die Definition von $\mathbb{T}$ ändern damit auch dieser Ausdrücke von der Definition erfasst wird?

a) c ✓
b) $(a + b) * (c + d)$ ✓
c) $(a * b * c) + d$ ↯
d) $([c + a] * b) * c$ ↯
e) $(a + b + c) * d$ ✓
f) $b * (a + (a + c) * b)$ ↯

Siehe Blatt

GDS UE 5.5

a) c ✓ weil $c \in \mathbb{V}$, $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{T}$

b) $(a+b)*(c+d)$ ✓ $a+b \in \mathbb{T}$, $c+d \in \mathbb{T}$ $\Rightarrow (a+b)*(c+d) \in \mathbb{T}$

c) $(a*b*c)+d$ ↯

- $(X)+Y \in \mathbb{T}$ für $X \in \mathbb{T}, Y \in \mathbb{V}$
- $(X)*(Y)*(Z) \in \mathbb{T}$ für $X, Y, Z \in \mathbb{T}$

d) $([c+a]*b)*c$ ↯

- $[X]*Y \in \mathbb{T}$ für $X \in \mathbb{T}, Y \in \mathbb{V}$

(i) wenn aber [ ] wie ( ) interpretiert wird ist d ein Term

e) $(a+b+c)*d$

$\underbrace{a+b \in \mathbb{T} \qquad c \in \mathbb{V}}_{a+b+c \in \mathbb{T} \qquad 3a)}$ $\longrightarrow$ $(X)+d \in \mathbb{T}$ 3b)

f) $b*(a+(a+c)*b)$ ↯

- $(X)+(Y)*(Z) \in \mathbb{T}$ für $X, Y, Z \in \mathbb{T}$

(ii) würde richtig geklammert werden wäre f ein Term

Aufgabe 6: Inferenzen

Geben Sie für die folgenden Schlussfolgerungen die zugrundeliegende Inferenzregel an und stellen Sie fest, ob diese gültig ist. Wenn ja, geben Sie unter Verwendung von Alltagsbegriffen eine weitere Schlussfolgerung an, die derselben Regel folgt. Wenn nein, geben Sie ein (weiteres) Gegenbeispiel an, das heißt, geben Sie eine Schlussfolgerung an, die derselben Regel folgt und bei der die Prämissen wahr, die Schlussfolgerung aber falsch ist.

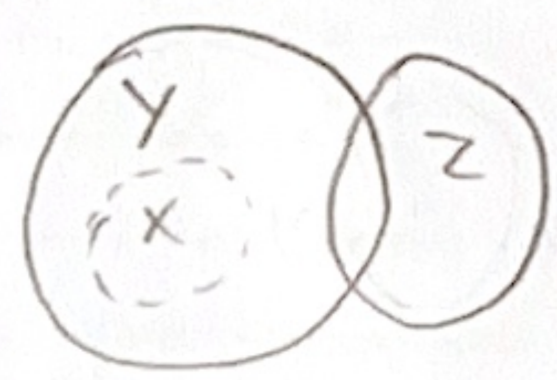
a) Alle Bäume sind Pflanzen. Manche Pflanzen sind grün. Daraus folgt, dass manche Bäume grün sind.

b) Alle Krixis sind Kraxis. Kein Kraxi ist sinnvoll. Deshalb ist auch kein Krixi sinnvoll.

c) Manche Bands sind auf Tour. Niemand auf Tour ist im Weltraum. Darum ist auch keine Band im Weltraum.

a) Alle x sind y
Manche y sind z
Manche x sind z

x... Bäume
y... Pflanzen
z... Grün

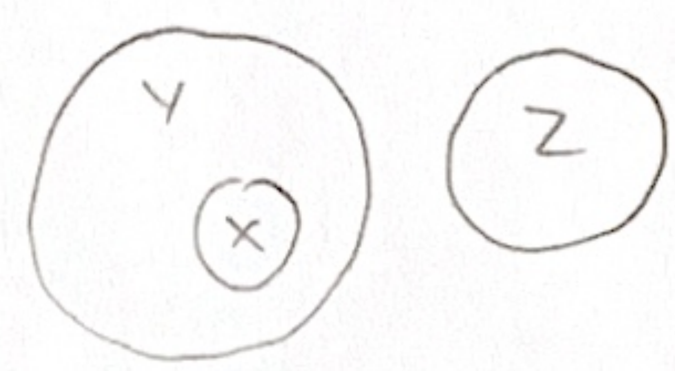


falsch

Alle Hunde sind Tiere
Manche Tiere haben Flügel
Manche Hunde haben Flügel

b) Alle x sind y
Kein y ist z
Kein x ist z

x... Krixis
y... Kraxis
z... sinnvoll

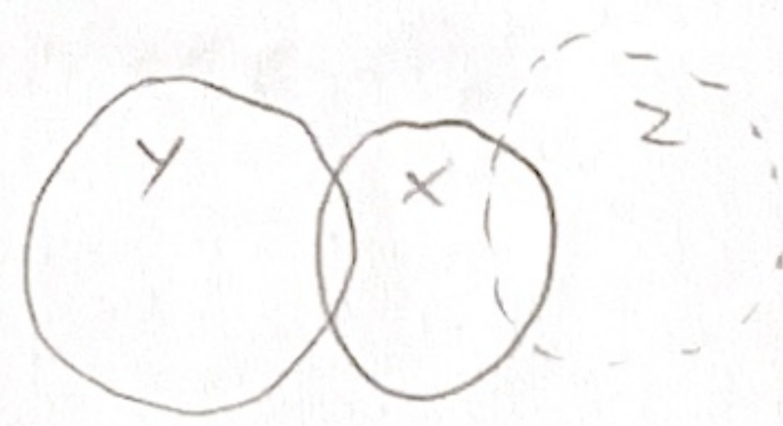


wahr

Alle Tomaten sind Gemüse
kein Gemüse ist Obst
keine Tomate ist Obst

c) Manche x sind y
Kein y ist z
Kein x ist z

x... Band
y... auf Tour
z... im Weltraum



falsch

Manche Autos sind rot
Nichts rotes ist grün
Kein Auto ist grün

Aufgabe 7: Syntax der Aussagenlogik

Betrachten Sie die formale Definition der Syntax von aussagenlogischen Formeln für Variablen $\mathcal{V} = \{A, B, C, \cdots\}$ aus der Vorlesung.

a) Legen Sie diese Definition exakt aus und geben Sie für jeden der folgenden Ausdrücke an ob es sich dabei um eine syntaktisch korrekte aussagenlogische Formel handelt. Begründen Sie Ihre Antworten!

i) $\neg A$ ✓ A ist eine Formel -> $\neg A$ ist eine Formel

ii) $A \Leftrightarrow C$ ✓ A, C sind Formeln; <=> ist ein gültiger operator (eig. auch ↯ siehe b3)

iii) $\neg((A \wedge B) \vee D)$ ✓ A, B, D sind Formeln; $\wedge$ und $\vee$ sind gültige operatoren

iv) $\exists A (A \wedge \neg C)$ ↯ $\exists$ ist nicht gültig; F(G) ist nicht definiert,

v) $((A \uparrow \neg C) \Leftarrow (D \downarrow \neg D))$ ✓ A, C, D sind Formeln, $(A \uparrow \neg C)$ auch, $(D \downarrow \neg D)$ auch, <= ist ein gültiger OP

vi) $(A \Rightarrow (B \not\Leftrightarrow C) \Rightarrow \neg D)$ ↯ $(F * G * H)$ ist nicht definiert (bzw. falsch geklammert)

vii) $((A \wedge C) \Rightarrow \neg(B \vee \neg D))$ ✓

viii) $\neg((A \Leftarrow (D \wedge B)) \wedge C)$ ✓

ix) $((D \neg B \vee) \Rightarrow (AC\wedge))$ ↯ FG ist keine Formel

x) $(A \oplus B)$ ↯ $\oplus$ ist kein gültiger operator

b) In der Praxis wird die Definition nicht so streng ausgelegt. Betrachten Sie die folgenden Beispiele und erklären Sie wieso (a) diese genau genommen nicht der Definition von aussagenlogischen Formeln entsprechen und (b) wieso das in der Praxis kein Problem ist.

i) $(\neg A \vee \neg B \vee C)$ $(F * G * H)$ ist nicht definiert; aber alle Op. gleich daher impl. Klammern

ii) $(A \wedge D \wedge E) \vee \neg D \vee \neg E$ — // —

iii) $A \Rightarrow B$ Keine Klammer

- $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$
- $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$
- $\neg F \in \mathcal{A}$ wenn $F \in \mathcal{A}$
- $(F * G) \in \mathcal{A}$ wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $*$ gültige Op

Hinweis: *wir verwenden ab hier die vereinfachte Notation aus der Vorlesung und lassen beispielsweise Klammern weg, wenn das eindeutig ist.*

Aufgabe 8: Interpretationen, Auswertung von Formeln, Logische Konsequenz

a) Sei G die Formel $(A \Rightarrow (B \vee C)) \downarrow (D \wedge E)$. Untersuchen Sie die folgenden unvollständigen Interpretationen I, J und K in Bezug auf G.

- Interpretation I mit $I(A) = I(D) = 0$
- Interpretation J mit $J(B) = 1$
- Interpretation K mit $K(A) = K(D) = 1$, $K(B) = K(C) = 0$

Lassen sich trotzdem $\mathrm{val}_I(G)$, $\mathrm{val}_J(G)$, $\mathrm{val}_K(G)$ bestimmen? Wenn ja, was ist das Ergebnis? Wenn nein, kann man die Interpretation so vervollständigen, dass die Formel wahr wird?

b) Sei G die Formel aus der letzten Teilaufgabe. Bestimmen Sie für jede der folgenden logischen Konsequenzbeziehungen, ob in dem Fall $\models$ oder $\not\models$ korrekt ist und begründen Sie Ihr Ergebnis durch die Auswertung der Wahrheitstabelle.

- Gilt $\neg A, \neg D \stackrel{?}{\models} G$? $\not\models$
- Gilt $A, \neg B, \neg C, \neg D, E \stackrel{?}{\models} G$? $\models$
- Gilt $\neg A \Rightarrow \neg B \stackrel{?}{\models} A \Rightarrow B$? $\not\models$
- Gilt $A, A \Rightarrow B \stackrel{?}{\models} B$? $\models$

In welchen konkreten Interpretationen müssen Sie die Konsequenzrelation auf jeden Fall überprüfen? Sie dürfen irrelevante Fälle zusammenfassen.

GDS UE 5.8

a) $G = (A \Rightarrow (B \vee C)) \downarrow (D \wedge E)$

- $val_I((A \Rightarrow (B \vee C)) \downarrow (D \wedge E))$ mit $I(A) = I(D) = 0$

$val_I(A \Rightarrow (B \vee C))$ nor $val_I(D \wedge E)$

$(val_I(A)$ implies $val_I(B \vee C))$ nor $(val_I(D)$ and $val_I(E))$

$(0$ implies $(val_I(B)$ or $val_I(C))$ nor $(0$ and $val_I(E))$

1 nor 0 $= \underline{\underline{0}}$

- mit $J(B) = 1$

$val_J((A \Rightarrow (B \vee C)) \downarrow (D \wedge E))$

$val_J(A \Rightarrow (B \vee C))$ nor $val_J(D \wedge E)$

$(val_J(A)$ implies $val_J(B \vee C))$ nor $(val_J(D)$ and $val_J(E))$

$(val_J(A)$ implies $1)$ nor $(val_J(D)$ and $val_J(E))$

↯ zusätzlich $J(A)$ und $J(D)$ bzw $J(E)$ benötigt

- mit $K(A) = K(D) = 1$ $K(B) = K(C) = 0$

$(val_K(A)$ implies $val_K(B \vee C))$ nor $(val_K(D)$ and $val_K(E))$

$(1$ implies $(val_K(B) \vee val_K(C)))$ nor $(1$ and $val_K(E))$

$(1$ implies $0)$ nor $(1$ and $val_K(E))$

0 nor $(1$ and $val_K(E))$

↯ $K(E)$ fehlt

IDS UE 5.8 b)

A	B	C	D	E	¬A, ¬D	⊨	G
1	1	1	1	1			
1	1	1	1	0			
1	1	1	0	1			
1	1	1	0	0			
1	1	0	1	1			
1	1	0	1	0			
1	1	0	0	1			
1	1	0	0	0			
1	0	1	1	1			
1	0	1	1	0			
1	0	1	0	1			
1	0	1	0	0			
1	0	0	1	1			
1	0	0	1	0			
1	0	0	0	1			
1	0	0	0	0			
0	1	1	1	1			
0	1	1	1	0			
0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1			
0	1	0	1	0			
0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1			
0	0	1	1	0			
0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1			
0	0	0	1	0			
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	0

$\Rightarrow \neg A, \neg D \nvDash G$

GDS UE 5.8 b)

A	B	C	D	E	A	$\neg B$	$\neg C$	$\neg D$	E	FG
1	1	1	1	1						
1	1	1	1	0						
1	1	1	0	1						
1	1	1	0	0						
1	1	0	1	1						
1	1	0	1	0						
1	1	0	0	1						
1	1	0	0	0						
1	0	1	1	1						
1	0	1	1	0						
1	0	1	0	1						
1	0	1	0	0						
1	0	0	1	1						
1	0	0	1	0						
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0						
0	1	1	1	1						
0	1	1	1	0						
0	1	1	0	1						
0	1	1	0	0						
0	1	0	1	1						
0	1	0	1	0						
0	1	0	0	1						
0	1	0	0	0						
0	0	1	1	1						
0	0	1	1	0						
0	0	1	0	1						
0	0	1	0	0						
0	0	0	1	1						
0	0	0	1	0						
0	0	0	0	1						
0	0	0	0	0						

$(1 \Rightarrow (0 \vee 0)) \downarrow (0 \wedge 1)$

$(1 \Rightarrow 0) \downarrow 0$

$0 \downarrow 0$

1

$\Rightarrow A, \neg B, \neg C, \neg D, E \; FG$

GDS UE 5.8 b)

$I(A)$	$I(B)$	$\neg A \Rightarrow \neg B$	$\models$	$A \Rightarrow B$
1	1	1	✓	1
1	0	1	↯	0
0	1	0	✓	1
0	0	1	✓	1

$\Rightarrow \neg A \Rightarrow \neg B \not\models A \Rightarrow B$

$I(A)$	$I(B)$	A,	$A \Rightarrow B$	$\models$	B
1	1	1	1	✓	1
1	0	1	0	✓	0
0	1	0	1	✓	1
0	0	0	1	✓	0

$\Rightarrow A, A \Rightarrow B \models B$

Aufgabe 9: Unerfüllbare, widerlegbare, erfüllbare und gültige Formeln

Bestimmen Sie für die folgenden Formeln, ob diese unerfüllbar, widerlegbar, erfüllbar und / oder gültig sind. Geben Sie im Fall von erfüllbaren / widerlegbar Formeln eine entsprechende Wahrheitsbelegung an. Geben Sie bei gültigen / unerfüllbaren Formeln an, warum es kein Beispiel / Gegenbeispiel geben kann. Sie können dazu die aus der Vorlesung bekannten Äquivalenzumformungen verwenden, um die Formel zu vereinfachen und / oder die Wahrheitstabelle skizzieren.

a) $A \wedge \neg(B_1 \vee B_2 \vee B_3 \vee B_4 \vee B_5 \vee B_6 \vee B_7 \vee B_8 \vee B_9 \vee B_{10})$

b) $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow (A_4 \Rightarrow (A_5 \Rightarrow (A_6 \Rightarrow (A_7 \Rightarrow (A_8 \Rightarrow (A_9 \Rightarrow (A_{10} \Rightarrow A_1)))))))))$

c) $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow (A_4 \Rightarrow (A_5 \Rightarrow (A_6 \Rightarrow (A_7 \Rightarrow (A_8 \Rightarrow (A_9 \Rightarrow (A_{10} \Rightarrow \bot)))))))))$

d) $A_1 \not\Leftrightarrow (A_2 \not\Leftrightarrow (A_3 \not\Leftrightarrow (A_4 \not\Leftrightarrow (A_5 \not\Leftrightarrow A_5) \not\Leftrightarrow A_4) \not\Leftrightarrow A_3) \not\Leftrightarrow A_2) \not\Leftrightarrow A_1$

e) $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \wedge A_6 \wedge A_7 \wedge A_8 \wedge A_9 \wedge A_{10}) \uparrow \neg A_1$

a) erfüllbar: $A = 1$ und $\forall B = 0$
widerlegbar: $A = 0$ oder $\exists B = 1$

b) gültig: Edge Case ($A_1 = 0$ alle anderen 1 => Trotzdem 1)

c) erfüllbar: $\forall A = 0$
widerlegbar $\exists A = 1$

d) nicht erfüllbar $A_5 <\not> A_5$ ist nicht möglich

e) $\neg((A_1 \wedge \ldots \wedge A_{10}) \wedge \neg A_1)$
gültig: Edge Case 1: $A_1 = 0 \Rightarrow \neg(0 \wedge 1) = 1$
Edge Case 2: $A_1 = 1 \Rightarrow \neg(X \wedge 0) = 1$