Aufgabe 1: Aussagenlogik

Analysieren Sie die folgenden Sätze und identifizieren Sie ihre logische Struktur sowie die Elementaraussagen.

(1) Das Auto ist schwarz, aber besonders dunkel ist es nicht.

(2) Jan möchte Vanille- oder Schokogrießpudding.

(3) Du darfst nicht gleichzeitig essen und reden.

(4) Ich werde die Lehrveranstaltung nur schaffen, wenn ein Wunder geschieht oder ich viel lerne.

(5) Ich habe gute Laune.

(6) Mir wird kalt werden, wenn ich meine Jacke vergesse.

(7) Die Direktorin und ihr Stellvertreter gehen nicht gleichzeitig auf Urlaub.

(8) Wenn es eisig ist, ist es nie der Fall, dass Mira und Emil gemeinsam in die Vorlesung gehen.

GDS UE 6.1

1)

A = "Auto ist schwarz" $= A \land \neg B$

B = "Auto ist dunkel"

2)

A = "Jan möchte Vanillegrießpudding"

B = "Jan möchte Schokogrießpudding" $= A \lor B$

3)

A = "Du darfst essen" $= (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$

B = "Du darfst reden"

4)

A = "es geschieht ein Wunder"

B = "Ich lerne viel" $= C \Leftrightarrow A \lor B$

C = "Ich schaffe die Lehrveranstaltung"

5)

A = "Ich habe gute Laune" $= A$

6)

A = "Ich habe meine Jacke vergessen"

B = "Mir ist kalt" $= A \Rightarrow B$

7)

A = "Direktorin geht auf Urlaub" $= \neg(A \land B)$

B = "Stellvertreterin geht auf Urlaub"

8)

A = "Es ist eisig"

B = "Mira geht in die Vorlesung" $= A \Rightarrow \neg(B \land C)$

C = "Emil geht in die Vorlesung"

Aufgabe 2: Aussagenlogik

Thomas wird im Sommer in das Ferienlager am Wolfgangsee fahren. Um den Organisatoren die Planung zu erleichtern, soll er davor bekannt geben, welche Sportarten (maximal drei) er dort ausüben möchte. Thomas kann sich nur schwer entscheiden und schreibt folgende Email.

> *Liebe Organisatoren,*
> *ich freue mich schon sehr auf den Sommer und das Camp!*
> F_1 *Fußball und Handball sind beide ok, ich möchte aber auf keinen Fall beide machen, das wäre mir zu anstrengend. Mein Freund Florian kommt auch ins Camp und geht Bogenschießen, das* F_2 *möchte ich auf jeden Fall auch machen! Falls ich beim Rudern teilnehme, möchte ich auch segeln,* F_3 *damit sich der Weg zum See auszahlt; Segeln ohne Rudern kann ich mir aber schon vorstellen, das ist alleine auch spannend genug. Ich möchte gerne meine Oberarme trainieren, dafür sind wohl Rudern oder Handball ganz gut geeignet; auch beide gleichzeitig wären in Ordnung.* F_4
> *Bis bald, Thomas*

a) Helfen Sie den Organisatoren die Email zu analysieren, indem Sie die Rahmenbedingungen und die beschriebenen Wünsche mit allen Anhaltspunkte durch aussagenlogische Formeln ausdrücken. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

b) Lassen sich Thomas' Wünsche berücksichtigen? Welche Varianten sind möglich? Begründen Sie die Antwort mithilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

GDS UE 6.2

F = "Thomas möchte Fußball machen"

H = "Thomas möchte Handball machen"

B = "Thomas möchte Bogenschießen machen"

R = "Thomas möchte Rudern machen"

S = "Thomas möchte Segeln machen"

a)

$F_1 := (F \land \neg H) \lor (\neg F \land H) = F <\not=> H$

$F_2 :=$ B

$F_3 :$ $R => S$

$F_4 :$ $R \lor H$

b) $(F <\not=> H) \land B \land (R => S) \land (R \lor H)$

B = true H = true S = true

B = true

Aufgabe 3: Aussagenlogik

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\text{and}, \text{iff}, \text{false}\}$ vollständig ist für die Klasse der aussagenlogischen Funktionen.

b) Sei F die Formel $\underbrace{(A \Rightarrow \overbrace{(B \downarrow C)}^{x})}_{z} \vee \underbrace{(C \not\Leftrightarrow \overbrace{(B \uparrow A)}^{y})}_{w}$.

   (1) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Verwenden Sie die semantische Methode.

   (2) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Verwenden Sie die algebraische Methode.

GDS UE 6.3

a)

not = x iff false

x	not x	x iff false
0	1	1
1	0	0

or = not (not x and not y)

x	y	not x	not y	not x and not y	not (not x and not y)
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

$\Rightarrow$ {and, iff, false} ist vollständig da {not, and, or} vollständig is

b) 1)

A	B	C	$\underbrace{B \downarrow C}_{x}$	$\underbrace{B \uparrow A}_{y}$	$\underbrace{A \Rightarrow x}_{z}$	$\underbrace{C \not\Leftrightarrow y}_{w}$	$z \vee w$	
1	1	1	0	0	0	1	1	
1	1	0	0	0	0	0	0	D_{110}
1	0	1	0	1	0	0	0	D_{101}
1	0	0	1	1	1	1	1	
0	1	1	0	1	1	0	1	
0	1	0	0	1	1	1	1	
0	0	1	0	1	1	0	1	
0	0	0	1	1	1	1	1	

$$\text{KNF} = D_{110} \wedge D_{101} = \overbrace{(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)}^{\text{KKNF}} = \overbrace{C \wedge B}^{\text{KNF}}$$

2)

$(A \Rightarrow (B \downarrow C)) \vee (C \not\Leftrightarrow (B \uparrow A))$

$(A \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)) \vee (C \not\Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B))$

$(\neg A \vee (\neg A \wedge \neg B)) \vee (((C \wedge \neg(\neg A \vee \neg B)) \vee (\neg C \wedge (\neg A \vee \neg B)))$

$(\neg A \vee (\neg A \wedge \neg B)) \vee ((C \wedge (A \vee B)) \vee (\neg C \wedge (\neg A \vee \neg B))$ ↯ De Morgan

$(\neg A) \vee ((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \vee ((\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C))$

$\neg A \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C)$ DNF

Aufgabe 4: SAT Solver, Konsequenzbeziehung

a) Untersuchen Sie die folgenden Formeln mittels eines SAT-Solvers auf Erfüllbarkeit / Unerfüllbarkeit. Wie sieht Ihre Eingabedatei und die Ausgabe aus? Geben Sie die gefundene Interpretation der Variablen an, falls die Formel erfüllbar ist.

$(\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_2 \vee X_1)$

$(\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_2 \vee X_1) \wedge X_1 \wedge \neg X_2$

$(A \wedge B) \Rightarrow (B \vee A)$

$(A \wedge B) \wedge \neg(B \vee A)$

$C \not\Leftrightarrow \neg D$

$C \Leftrightarrow \neg D$

Auf `https://derivation.org/public/minisat` finden Sie dazu die Web-Version des Solvers Minisat. Informationen zu DIMACS, dem Eingabe-Format von Minisat, finden Sie zB. unter `https://dwheeler.com/essays/minisat-user-guide.html`.

b) Geben Sie die Schritte an, mit denen Sie mit einem SAT-Solver für eine beliebige Formel F prüfen können, ob $\models F$ gilt.

GDS UE 6.4 a)

$(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_1)$

p cnf 2 2

-1 2 0

-2 1 0

SAT -1 -2 $= I(x_1)=0 \; I(x_2)=0$ $(1 \vee 0) \wedge (1 \vee 0) = 1$ ✓

$(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_1) \wedge x_1 \wedge \neg x_2$

p cnf 2 4

-1 2 0

-2 1 0

1 0

-2 0

UNSAT

$(A \wedge B) \Rightarrow (B \vee A)$ $= (\neg A \vee \neg B \vee B \vee A)$

p cnf 2 1

-1 -2 2 1 0

SAT -1 -2

$I(A)=0 \; I(B)=0$

$(0 \wedge 0) \Rightarrow (0 \vee 0)$

$0 \Rightarrow 0$

1 ✓

$(A \wedge B) \wedge \neg(B \vee A)$ $= A \wedge B \wedge \neg B \wedge \neg A$

p cnf 2 4

1 0

2 0

-2 0

-1 0

UNSAT

$C \not\Leftrightarrow \neg D = (\neg C \vee D) \wedge (C \vee \neg D)$

p cnf 2 2

-1 2 0

1 -2 0

SAT -1 -2

$I(C)=0$

$\Rightarrow I(D)=0$

$0 \not\Leftrightarrow \neg 0$

$0 \not\Leftrightarrow 1$

1 ✓

$C \Leftrightarrow \neg D = (\neg C \vee D) \wedge (C \vee D)$

p cnf 2 2

-1 2 0

1 2 0

SAT -1 2

$I(C)=0$

$\Rightarrow I(D)=1$

$0 \Leftrightarrow \neg 1$

$0 \Leftrightarrow 0$

1 ✓

GDS UE 6.4 b)

$\models F$ ... F ist gültig

F gültig $\Leftrightarrow$ $\neg F$ unerfüllbar

1) F negieren

2) $\neg F$ in KNF umformen

3) Lösen

Bsp $F = A \vee \neg A$ offensichtlich gültig

$\Downarrow$

$I(A)$	$\models A \vee \neg A$
1	1
0	1

$\neg F = (\neg A \wedge A)$

p cnf 1 2

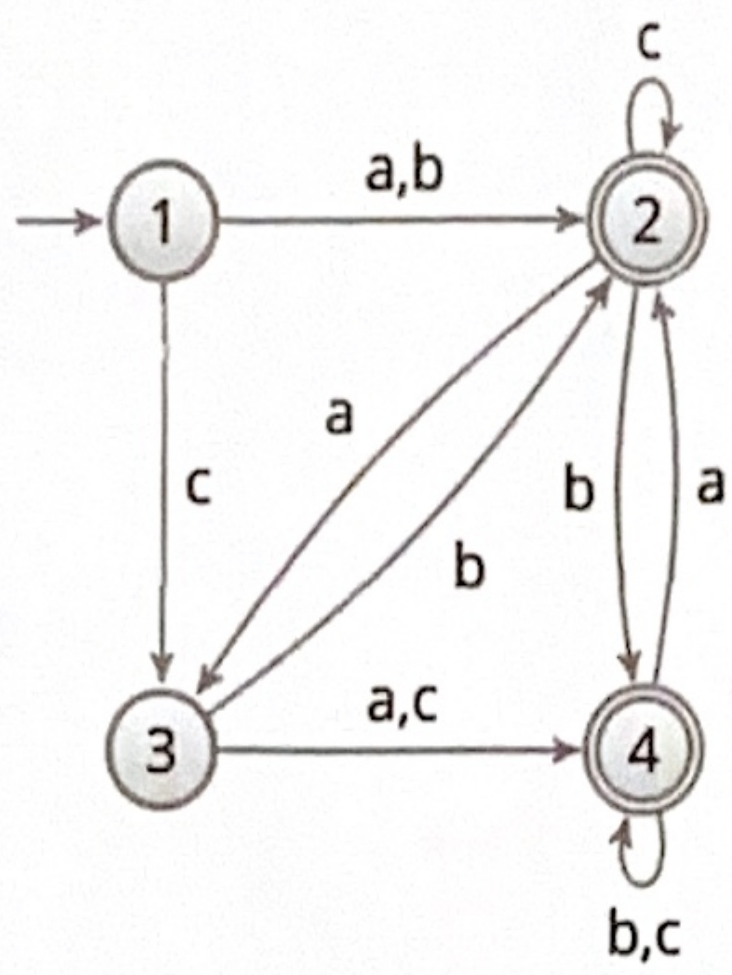
-1 0

1 0

UNSAT

Aufgabe 5: Reguläre Automaten

Gegeben sei folgender Automat $\mathcal{A}$:



a) Geben Sie alle akzeptieren Wörter der Länge drei an (insgesamt 22).

b) Geben Sie ein Wort der Länge vier an, das nicht akzeptiert wird. In welchen Zustand führt es?

c) Berechnen Sie schrittweise $\delta^*(1, \text{ccabc})$.

d) Spezifizieren Sie $\mathcal{A}$ in tabellarischer Form. Handelt es sich bei $\mathcal{A}$ um einen deterministischen oder indeterministischen Automaten?

GDS UE 6.5

a)

aaa bbb ccc
aab bba cca
aac bbc ccb
aba baa caa
abb bab cab
abc bac cac
acb bcb cbc
acc bcc cbb 24?

b)

acca

↳ führt in Zustand 3

c) $\delta^*(1, ccabc) =$

$= \delta^*(\delta(1,c), cabc)$

$= \delta^*(3, cabc)$

$= \delta^*(\delta(3,c), abc)$

$= \delta^*(4, abc)$

$= \delta^*(\delta(4,a), bc)$

$= \delta^*(2, bc)$

$= \delta^*(\delta(2,b), c)$

$= \delta^*(4, c)$

$= \delta^*(\delta(4,c), \varepsilon)$

$= \delta^*(4, \varepsilon)$

$= 4$

d)

	δ	a	b	c
A	1	{2}	{2}	{3}
E	2	{3}	{4}	{2}
	3	{4}	{2}	{4}
E	4	{2}	{4}	{4}

=> ist deterministisch da Zustand & Eingabesymbol den nächsten Zustand eindeutig festlegen

Aufgabe 6: Modellierung mit regulären Automaten

Ein *Spiel* in einem Tennismatch besteht aus mehreren Ballwechseln. Wer einen Ballwechsel gewinnt, bekommt einen Punkt. Die traditionelle Zählweise der Punkte ist 00, 15, 30, und 40. Nach zwei Punkten für Spieler:in A und einem Punkt für Spieler:in B steht es dann beispielsweise 30:15. Wer zuerst vier Punkte erreicht und mindestens zwei Punkte voran ist, gewinnt das Spiel. Ansonsten läuft das Spiel weiter, bis eine:r der beiden einen Abstand von zwei Punkten hat.

Modellieren Sie das Spiel als endlichen Automaten indem Sie folgenden Aufgaben erfüllen:

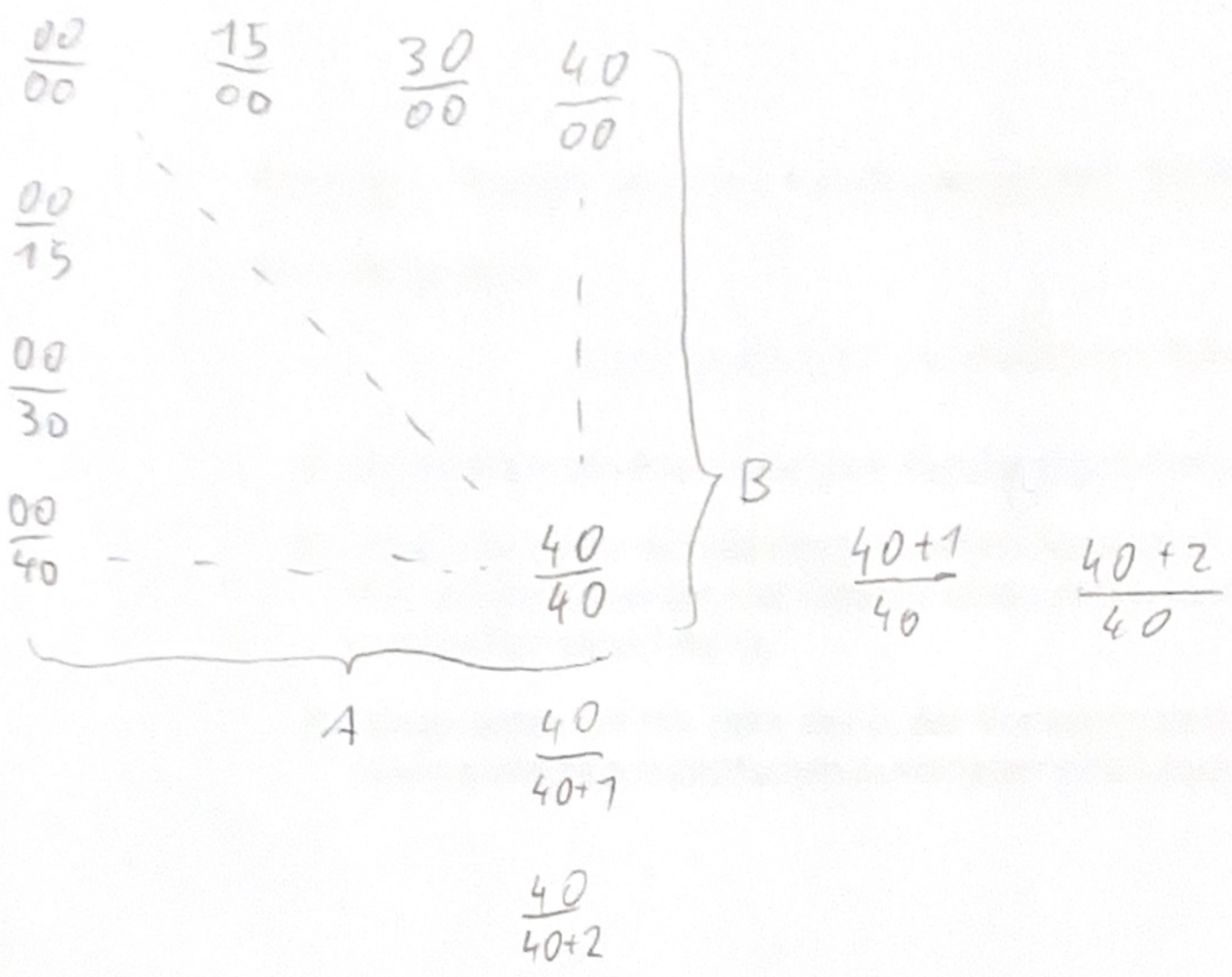
a) Identifizieren Sie die notwendigen Zustände, um alle Verläufe eines Spiels darzustellen. Finden Sie eine passende Darstellung, die einen Zustand eindeutig beschreibt. Wieviele Zustände gibt es insgesamt?

b) Welche Aktionen gibt es, die einen Zustand in einen anderen überführen? Geben Sie wieder eine passende Darstellung an.

c) Geben Sie einen regulären Automaten an, der alle möglichen Verläufe und Ausgänge eines Spiels darstellt. Geben Sie jeweils eine Zustandsfolge an, bei der sechs bzw. neun Punkte gemacht werden. Ist der von Ihnen gefundene Automat deterministisch?

GDS UE 6.6

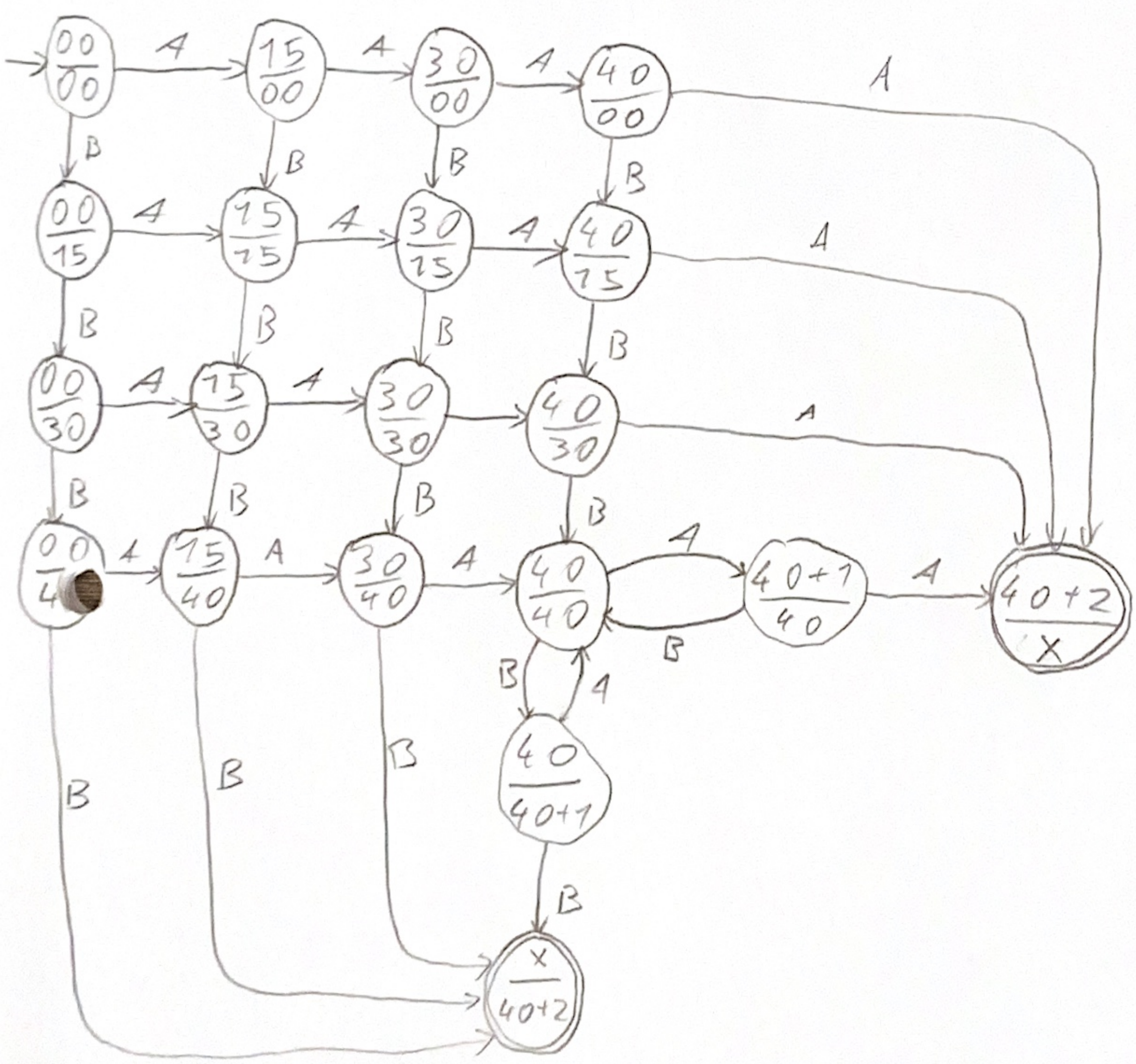
a)



b) A = "A macht einen Punkt"

B = "B macht einen Punkt"

c)



• 6P: AAABBA

• 9P: AAABBBABB ist aber kein Endzustand

• Deterministisch: Ja weil jeder Folgezustand durch Zustand und Eingangsvariable bestimmt werden kann

Aufgabe 7: Reguläre Sprachen, reguläre Automaten, (Nicht-)Determinismus

Sei L die Sprache

$$\{ w \in \{\mathtt{H}, \mathtt{A}, \mathtt{L}, \mathtt{O}, \mathtt{E}\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } \mathtt{HALLO} \text{ oder } \mathtt{HOLO} \} \ .$$

a) Geben Sie einen Posix Extended Regular Expression an, der die Sprache L beschreibt.

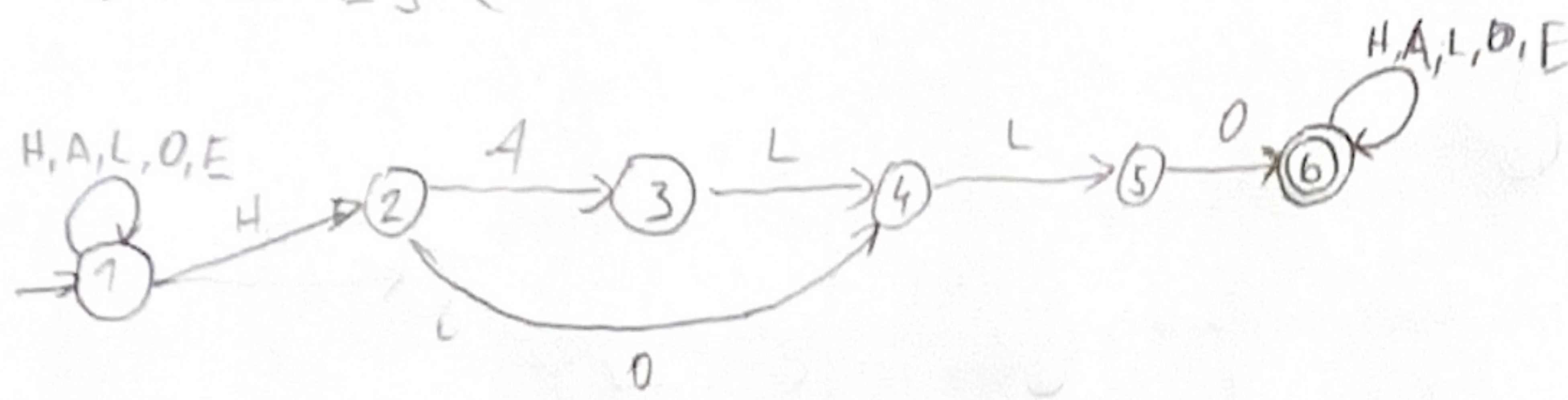
b) Geben Sie einen nichtdeterministischen Automaten an, der die Sprache L akzeptiert. Der Automat soll der Definition der Sprache direkt entsprechen, sodass die Korrektheit der Modellierung unmittelbar einsichtig ist.

c) Konstruieren Sie mit Hilfe des in der Vorlesung besprochenen Determinisierungsverfahrens zu Ihrem nichtdeterministischen Automaten einen äquivalenten deterministischen.

GDS UE 6.7

a) ^[HALOE]*(HALLO|HOLO)[HALOE]*$

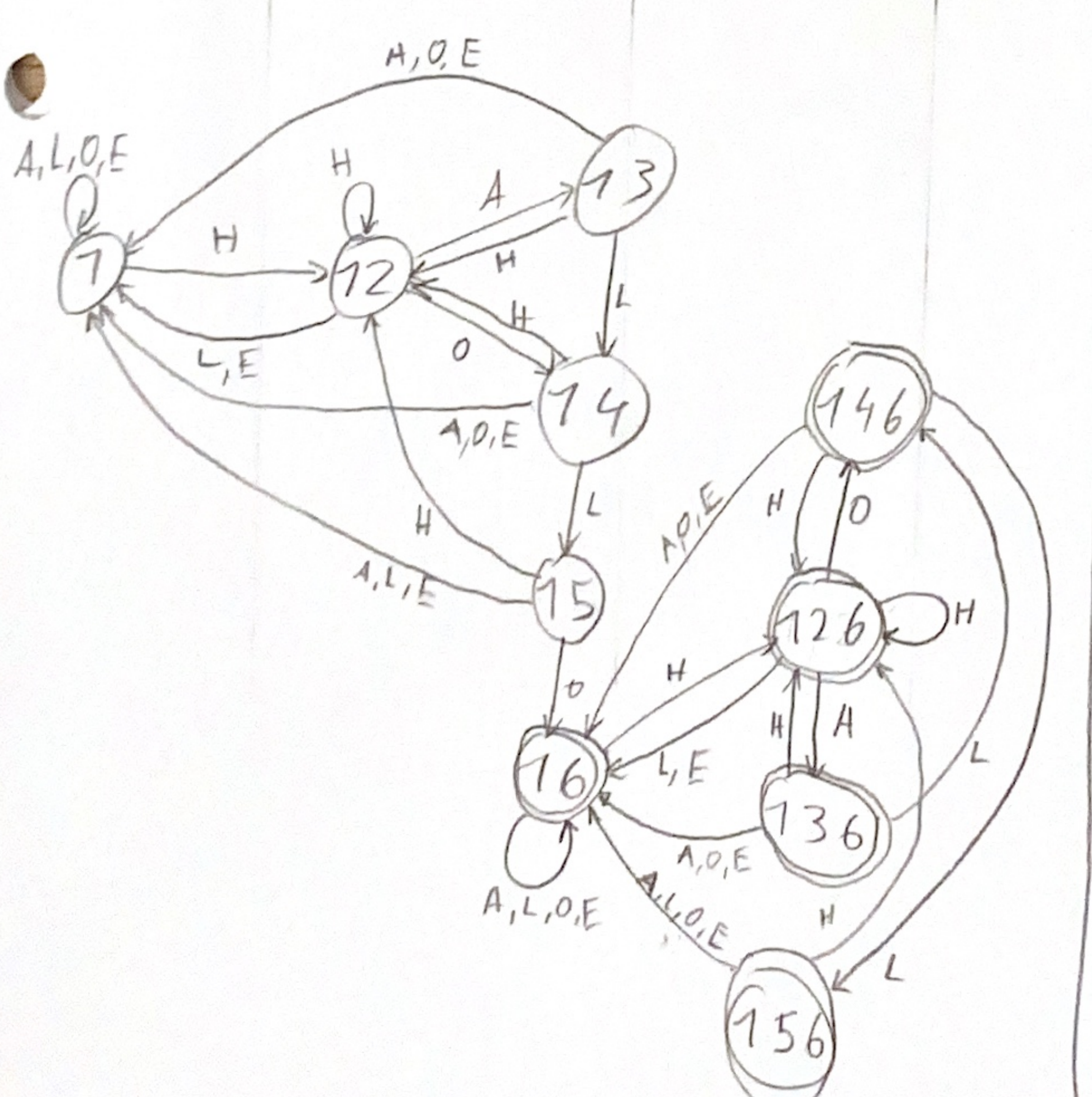
b)



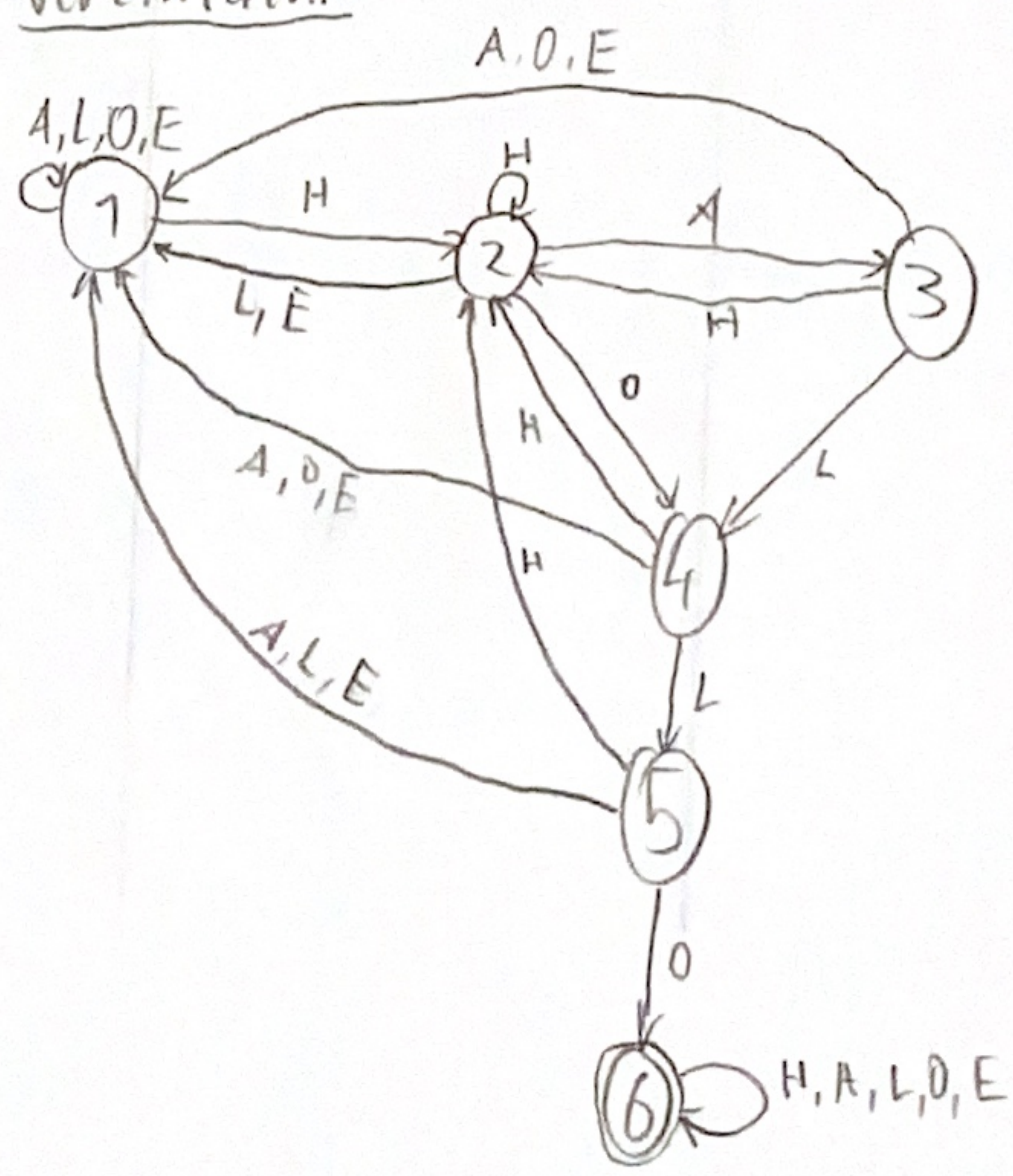
GDS UE 6.7 c)

δ^*	H	A	L	O	E
A 1	{1,2}	{1}	{1}	{1}	{1}
2		{3}		{4}	
3			{4}		
4			{5}		
5				{6}	
E 6	{6}	{6}	{6}	{6}	{6}

$\hat{\delta}$	H	A	L	O	E
A {1}	{1,2}	{1}	{1}	{1}	{1}
{1,2}	{1,2}	{1,3}	{1}	{1,4}	{1}
{1,3}	{1,2}	{1}	{1,4}	{1}	{1}
{1,4}	{1,2}	{1}	{1,5}	{1}	{1}
{1,5}	{1,2}	{1}	{1}	{1,6}	{1}
E{1,6}	{1,2,6}	{1,6}	{1,6}	{1,6}	{1,6}
E{1,2,6}	{1,2,6}	{1,36}	{1,6}	{1,4,6}	{1,6}
E{1,3,6}	{1,2,6}	{1,6}	{1,4,6}	{1,6}	{1,6}
E{1,4,6}	{1,2,6}	{1,6}	{1,5,6}	{1,6}	{1,6}
E{1,5,6}	{1,2,6}	{1,6}	{1,6}	{1,6}	{1,6}



Vereinfacht:



Aufgabe 8: Induktiv definierte Sprachen, reguläre Darstellung einer Sprache

Sei Z die Menge aller Ziffern: $Z = \{'0','1','2','3','4','5','6','7','8','9'\}$. Wir definieren nun N als die kleinste Sprache, die folgende Bedingungen erfüllt:

- Jede Ziffer ist in N: $Z \subseteq N$
- Sei $z_1 \dots z_n$ ein Wort in N, sodass $z_i \in Z$ für $0 \leq i \leq n$ sind. Dann ist auch $zz_1 \dots z_n$ für jedes $z \in Z$ ein Wort der Sprache N. Außerdem ist auch $'-'z_1 \dots z_n$ ein Wort in N.
- Seien $x_1 \dots x_n$ und $y_1 \dots y_m$ Worte in N, sodass $x_i \in Z$ und $y_j \in Z$ für $0 \leq i \leq n$ bzw. $0 \leq i \leq m$ sind. Dann sind auch $x_1 \dots x_n','y_1 \dots y_m$ und $'-'x_1 \dots . x_n','y_1 \dots y_m$ Worte in N.

a) Beschreiben Sie Wörter in N in natürlicher Sprache.

b) Geben Sie das (kleinste) Alphabet Σ an, aus dem die Worte in N gebildet werden.

c) Geben Sie drei Wörter über Σ^* aus N an.

d) Geben Sie drei Wörter über Σ^* an, die nicht in N liegen.

e) Liegt das Leerwort ϵ in N? Warum (nicht)?

f) Beschreiben Sie N mittels eines regulären Ausdrucks.

GDS UE 6.8

a) Die Sprache N beschreibt alle Reellen Zahlen.
Negative Zahlen sind möglich. Kommazahlen werden als Dezimalentw. dargestellt.

b) $\Sigma = \{'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', '-', ','\}$

c)

42

-1

-0,5

d)

10-5

1,2,3

-,

e)
Ja.
Wenn N eine reguläre Sprache ist muss gelten:
$\{\}, \{\varepsilon\}, \{s \mid s \in \Sigma\}$ sind reguläre Sprachen

f)

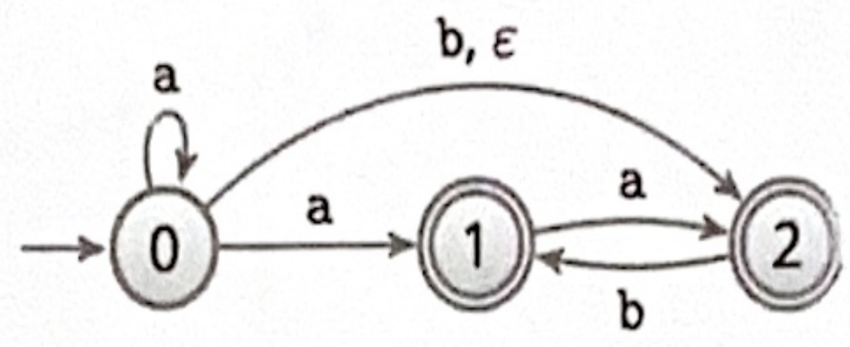
$D = '0' + '1' + '2' + '3' + '4' + '5' + '6' + '7' + '8' + '9'$

$R = (\varepsilon + '-')D^{+}(\varepsilon + ',')D^{*}$

Aufgabe 9: Umwandlungen zwischen Automaten und regulären Ausdrücken

a) Gegeben sei der reguläre Ausdruck $(a^*b)^+(a+\varepsilon)$ (in algebraischer Notation). Konstruieren Sie den einen endlichen Automaten, der dieselbe Sprache akzeptiert.

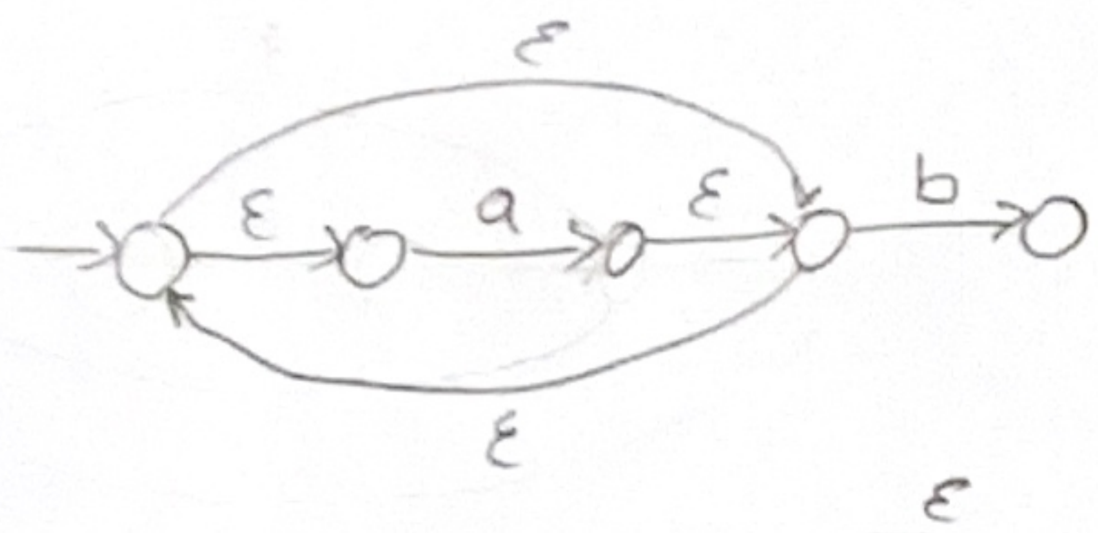
b) Konstruieren Sie zu folgendem endlichen Automaten einen regulären Ausdruck. Orientieren Sie sich am Algorithmus, der in der Vorlesung besprochen wurde und geben Sie den Automaten nach jeder Zustandselimination an.



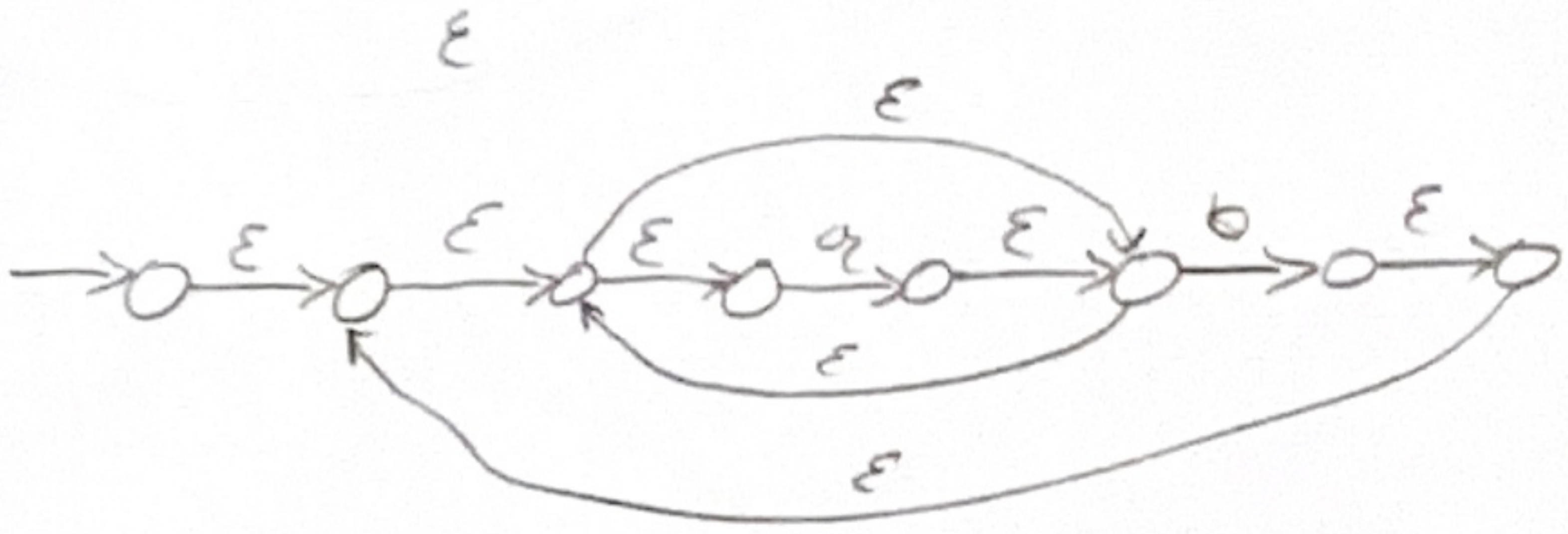
GDS UE 6.9

a) $(a^*b)^+(a+\varepsilon) \;\hat{=}\; (a^*b)^+ a?$

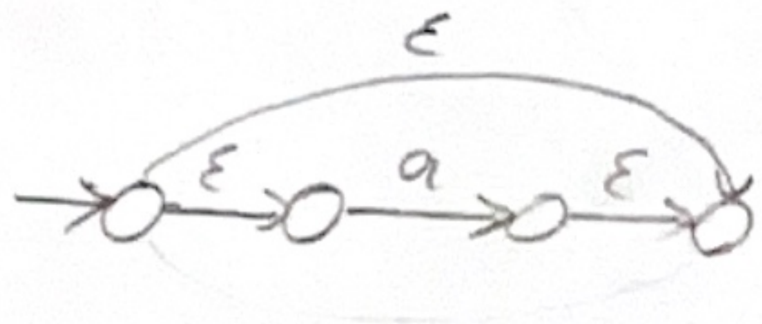
a^*b



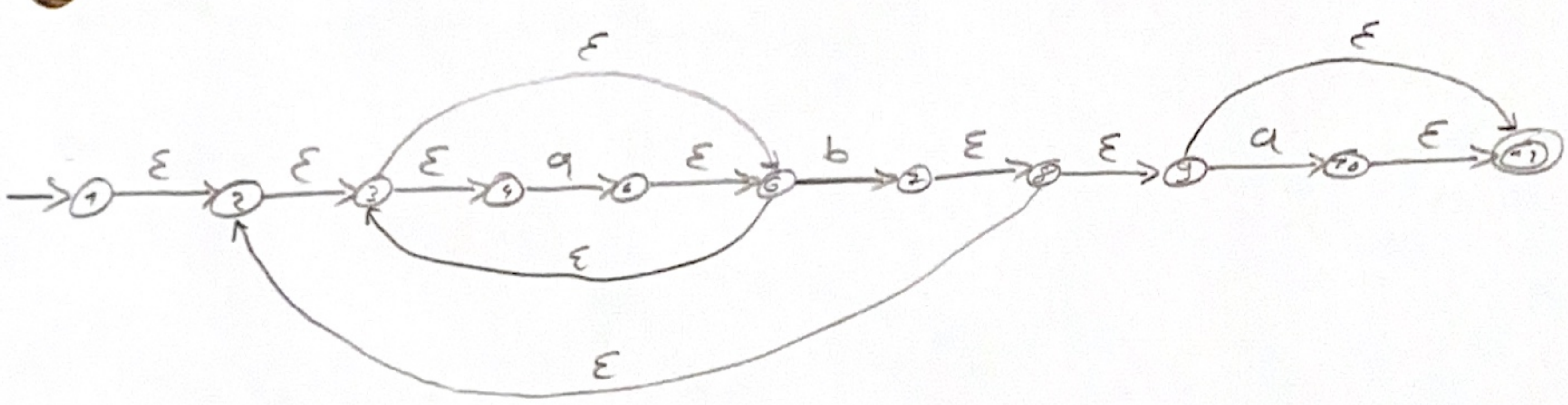
$(a^*b)^+$

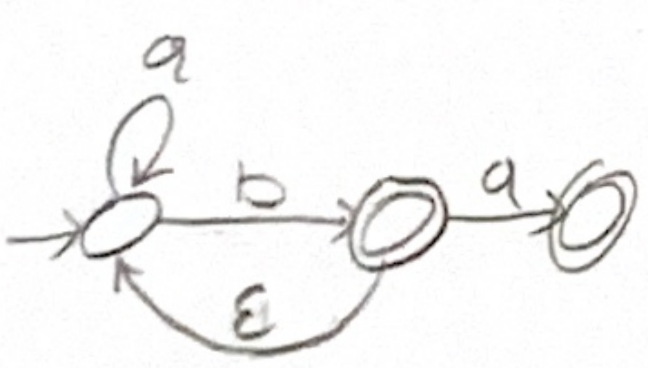


$a?$

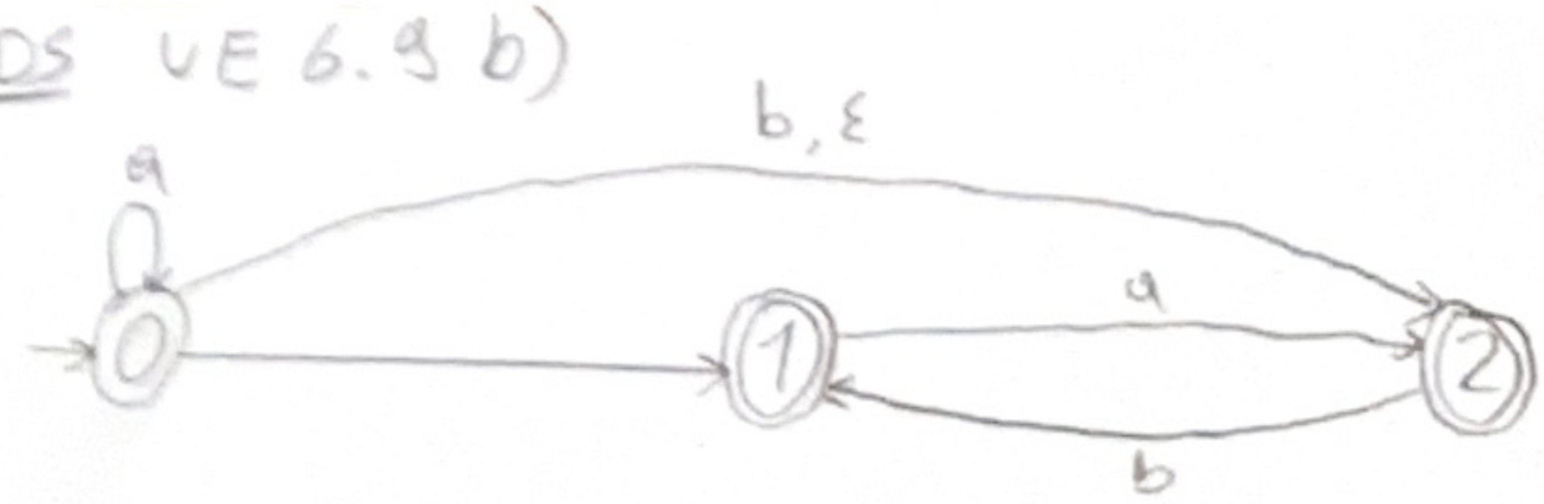


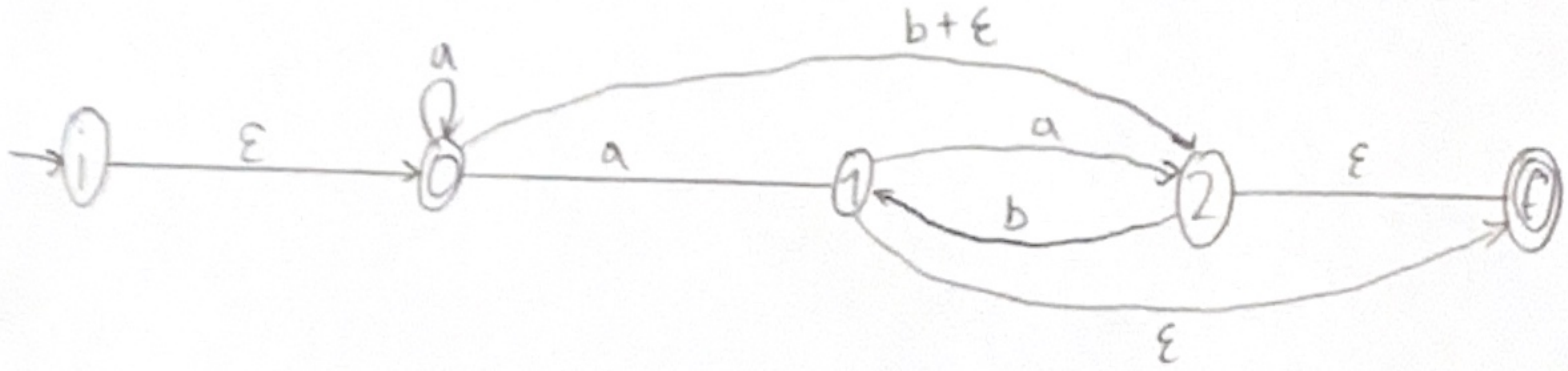
$(a^*b)^+ a?$

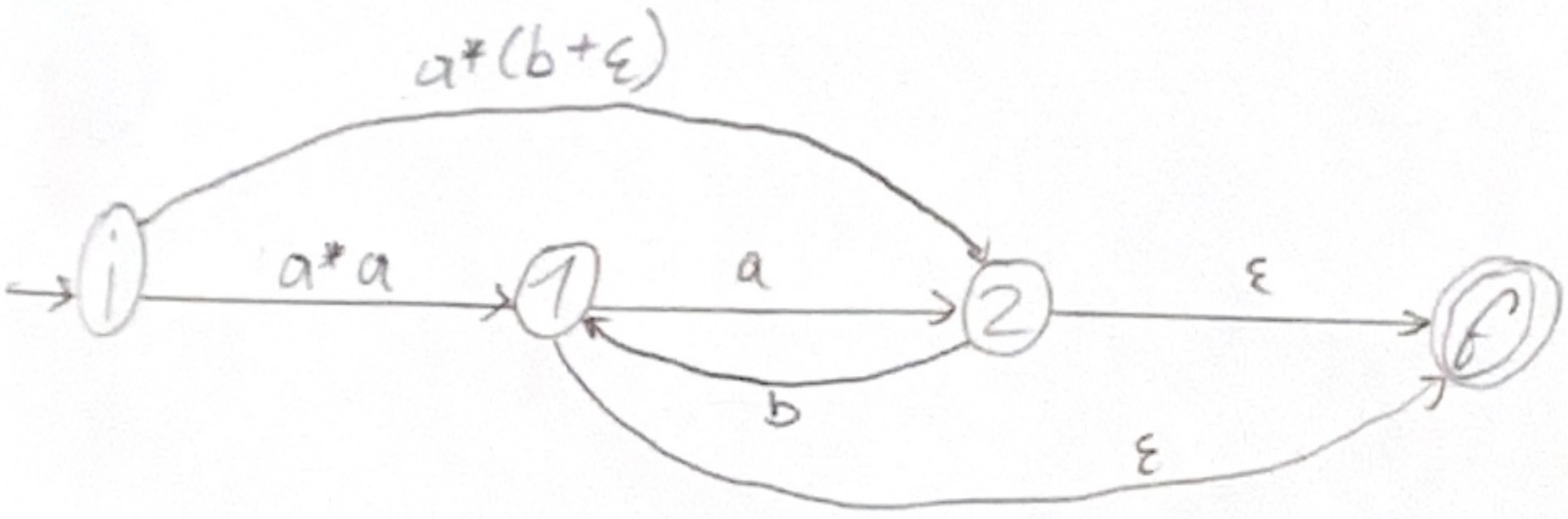


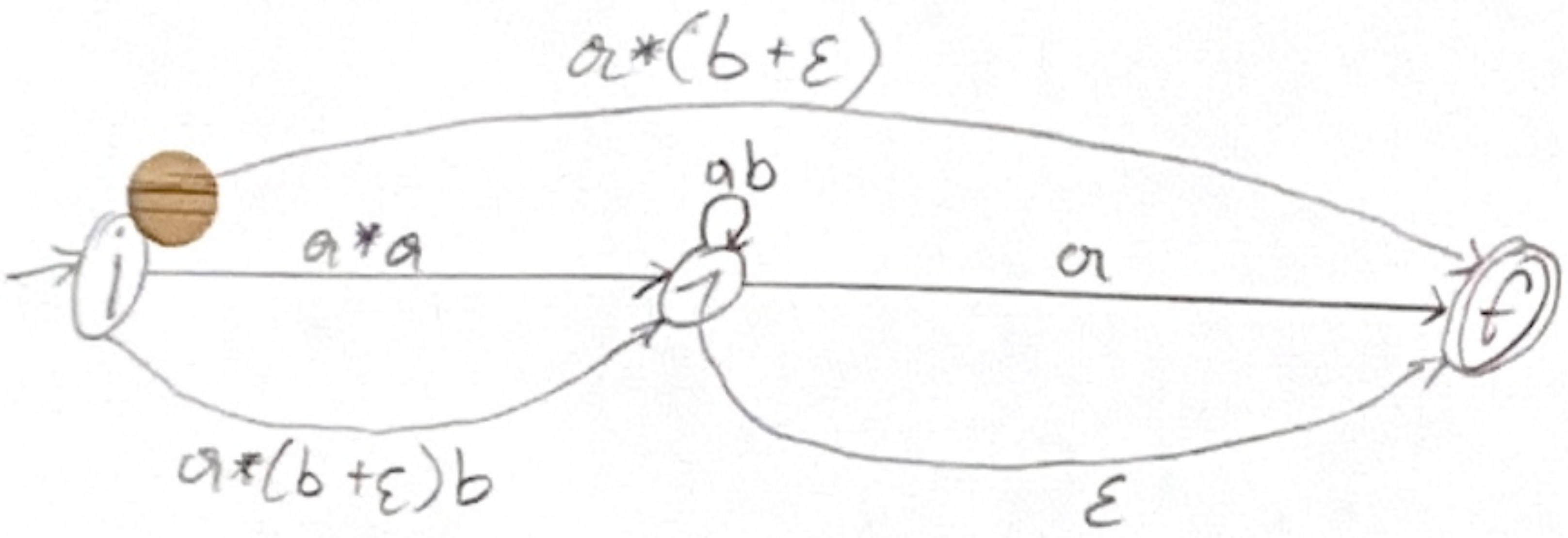


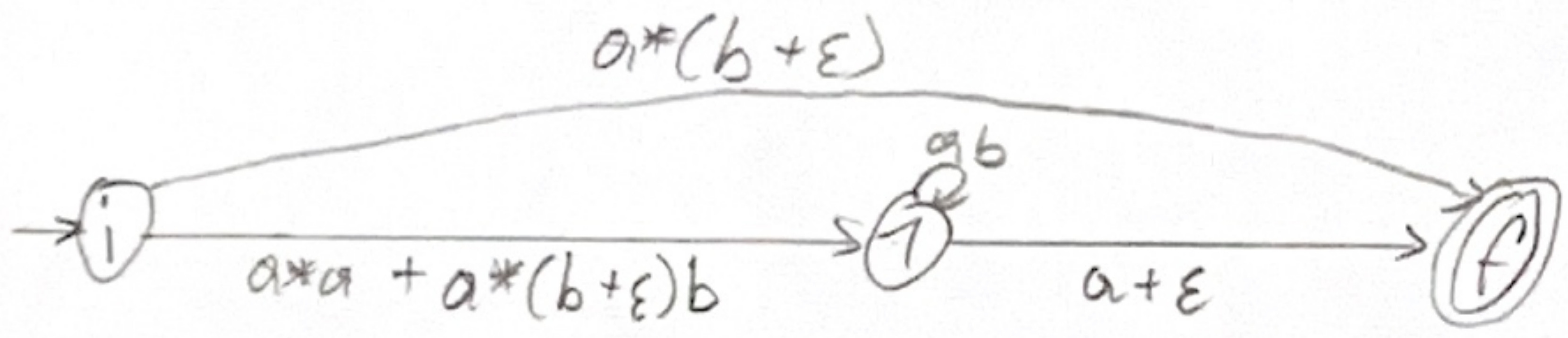
GDS UE 6.9 b)

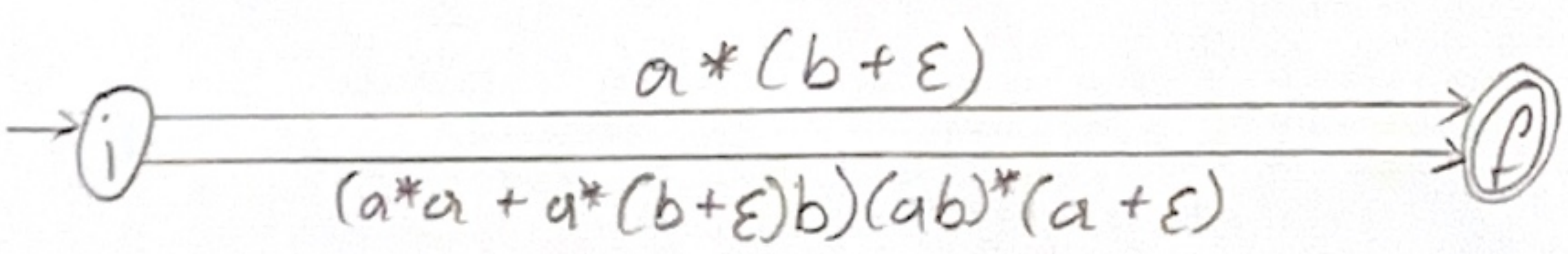


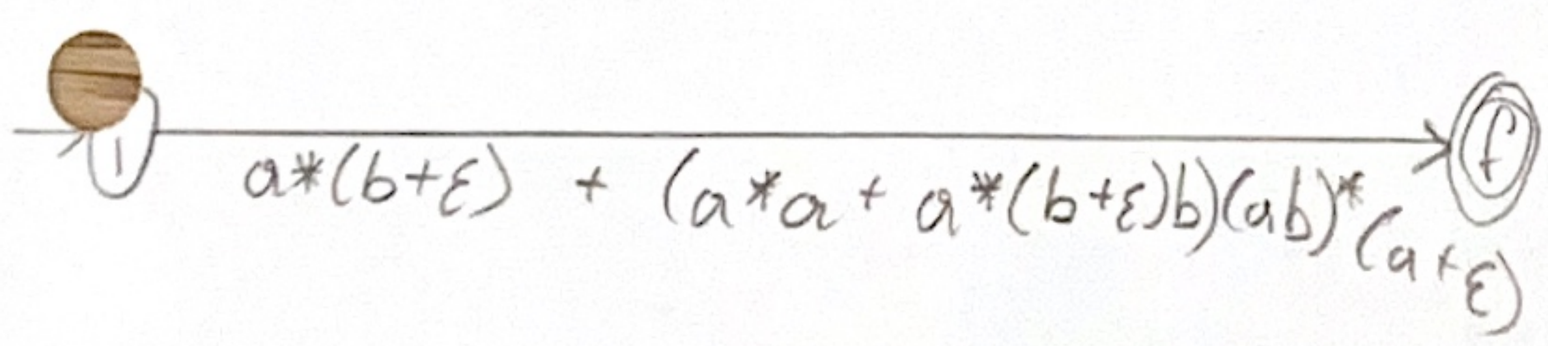












$r = a^*(b+\varepsilon) + (a^*a + a^*(b+\varepsilon)b)(ab)^*(a+\varepsilon)$