ADM UE 1.3

$P(n) =$ „$7^n - 1$ ist durch 6 teilbar" für alle $n \in \mathbb{N}$

$= \exists k \in \mathbb{Z}: 7^n - 1 = 6 \cdot k$

IA

$P(0) = 7^0 - 1$

$= 1 - 1$

$= 0$ ist durch 6 teilbar ✓

IS

(✱) $7^n - 1 = 6k$

V $\exists n \in \mathbb{N}: P(n) =$ „$7^n - 1$ ist durch 6 teilbar"

B $P(n+1) =$ „$7^{n+1} - 1$ ist durch 6 teilbar" (✱) $7^{n+1} - 1 = 6k$

Beweis

$$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1$$

$$= 7 \cdot (7^n - 1 + 1) - 1$$

$$= 7 \cdot \underbrace{(7^n - 1)}_{(✱)\ 6 \cdot k} + 7 - 1$$

$$= 7 \cdot 6k + 6$$

$$7^{n+1} - 1 = 6 \cdot (7k + 1)$$ ✓

ADM UE 1.5

$P(n)$: „$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j\cdot(j+1)} = \frac{n}{n+1}$" für alle $n \geq 1 \in \mathbb{N}$

IA

$P(1)$: $\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{j\cdot(j+1)} = \frac{1}{1+1}$

$\frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{1+1}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

IV $\exists n \geq 1 \in \mathbb{N}$: $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j\cdot(j+1)} = \frac{n}{n+1}$ $P(n)$

IB $P(n+1)$: $\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j\cdot(j+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$

Beweis $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j\cdot(j+1)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j\cdot(j+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1+1)}$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$$

$$= \frac{n\cdot(n+2)+1}{(n+1)\cdot(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)\cdot(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}\cdot(n+2)}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j\cdot(j+1)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$ ✓

ADM UE 1.10

$P(n)$: $a_n = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

IA

$P(0)$: $a_0 = \frac{(0+1)\cdot 0}{2}$

$= 0$ ✓

~~IS~~

IV $\exists n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ $P(n)$ } I.S. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

IB $P(n+1)$: $a_{n+1} = \frac{(n+1+1)\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$

Beweis $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$a_{n+1} = a_n + (n+1)$

$= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1)$

$= (n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$= (n+1)\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)$

$a_{n+1} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$ ✓

ADM UE 1.11

$P(n): \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

IA

$P(0): \quad F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[1-1\right] = 0 \checkmark$

$P(1): \quad F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \checkmark$

~~IS~~

IV $\quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

IB $\quad P(n+2): \quad F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$

Beweis $\quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad$ IS: $P(n+1) \to P(n+2)$

Substituieren $\quad a = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad b = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^{n+2} - b^{n+2}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^{n+1} - b^{n+1}\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^n - b^n\right] \quad / : \frac{1}{\sqrt{5}}$

$a^{n+2} - b^{n+2} = a^{n+1} - b^{n+1} + a^n - b^n$

$a^{n+2} - a^{n+1} - a^n = b^{n+2} - b^{n+1} - b^n$

$a^n \cdot \underbrace{(a^2 - a - 1)} = b^n \cdot \underbrace{(b^2 - b - 1)}$

Lösen:

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1 =$

$= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{2-2\sqrt{5}}{4} - \frac{4}{4} =$

$= \frac{1}{4} \cdot (6-6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}) =$

$= \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - 1 =$

$= \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{2+2\sqrt{5}}{4} - \frac{4}{4} =$

$= \frac{1}{4} \cdot (6-6-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}) =$

$= \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$

$a^n \cdot 0 = b^n \cdot 0$

$0 = 0 \checkmark$

ADM UE 1.27

$P(n): \quad (n+1)\cdot 3^n \leq 4^n$

IA

$P(0): \quad (0+1)\cdot 3^0 \leq 4^0$
$= \quad 0 \leq 0 \checkmark$

$P(1): \quad 2\cdot 3 \leq 4$ ↯

$P(2): \quad 3\cdot 9 \leq 16$ ↯

$P(3): \quad 4\cdot 27 \leq 64$ ↯

$P(4): \quad 5\cdot 81 \leq 256$
$405 \leq 256$ ↯

$P(5): \quad 6\cdot 243 \leq 1024$
$1358 \leq 1024$ ↯

$P(6): \quad 7\cdot 729 \leq 4094$
$5103 \leq 4094$ ↯

$P(7): \quad 8\cdot 2187 \leq 16384$
$17496 \leq 16384$ ↯

$P(8): \quad 9\cdot 6561 \leq 65536$
$59049 \leq 65536 \checkmark$

$P(9): \quad 10\cdot 19683 \leq 262144$
$196830 \leq 262144 \checkmark$

IS

V $\quad \exists n \geq 8 \in \mathbb{N}: \quad (n+1)\cdot 3^n \leq 4^n$

B $\quad P(n) \to P(n+1)$

$(n+1+1)\cdot 3^{n+1} \leq 4^{n+1}$

Beweis

$4^{n+1} \geq (n+2)\cdot 3^{n+1}$

$= 4^n \cdot 4$

$\geq 4\cdot 3^n \cdot (n+1)$

$(n+2)\cdot 3^n + 3$

$= 3^n \cdot (4n+4) \geq 3^n \cdot (3n+6) \quad /:3^n$

$4n+4 \geq 3n+6 \quad /-4/-3n$
$n \geq 2$

$(4n+4) \geq (3n+6)$ für alle $n \geq 8$

$32+4 \geq 24+6$

$36 \geq 30 \checkmark$

ADM UE 1.24

$P(n)$ = „Je zwei nat Zahlen a, b sind gleich" $= \max\{a,b\} = n$

IA $P(0)$

$$\max\{a,b\} = \begin{cases} a \geq b \ ; & a \\ a < b \ ; & b \end{cases} = 0 \quad \Rightarrow a = b = 0$$

IS

IV $\exists a, b, n \in \mathbb{N}$: $\max\{a,b\} = n \Rightarrow a = b = n$ $P(n)$

IE $\max\{a,b\} = n+1$ $P(n+1) = \max\{a,b\} = n+1 \Rightarrow a = b = n+1$

BEWEIS $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$a = b = n+1$

$a = n+1$

$b = n+1$

$$\left.\begin{array}{l} a-1 = n \\ b-1 = n \end{array}\right\} \Rightarrow \max\{a-1, b-1\} = n$$

$a-1 = b-1$

$a = b$

ABER

$\max\{a-1, b-1\} = n$ gilt nicht für alle $a, b, n \in \mathbb{N}$

z.B. $n = 0$

$a = b = n = 0$

$\max\{a-1, b-1\} = n$

$\max\{0-1, 0-1\} = 0$ ↯

1) $-1 \notin \mathbb{N}$

2) def von max nicht erfüllt