

ADM UE 9.44 g b)

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ggT}, \text{kGV})$

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ggT}) \dots \text{HG}$

Def ggT: $a, b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}: c = \text{ggT}(a, b)$

$$\Leftrightarrow c | a \wedge c | b,$$

$$\exists d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}: d | a \wedge d | b \Rightarrow d | c$$

$$\Rightarrow c \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a) \checkmark$$

Verschmelzungsgesetz:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}: a = \text{ggT}(a, \text{kGV}(a, b)), \\ a = \text{kGV}(a, \text{ggT}(a, b))$$

$$(1) x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a = \text{ggT}(a, x) \Leftrightarrow a | a \wedge a | x$$

$$x := \text{kGV}(a, b) \Rightarrow a | x \wedge b | x \Rightarrow x \text{ ist Vielfaches v. } a \Rightarrow \text{ggT}(a, x) = a$$

$$(2) x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a = \text{kGV}(a, x) \Leftrightarrow a | a \wedge x | a$$

$$x := \text{ggT}(a, b) \Rightarrow x | a \wedge x | b \Rightarrow a \text{ ist Vielfaches v. } x \Rightarrow \text{kGV}(a, x) = a$$

$\Rightarrow (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ggT}, \text{kGV})$ ist Verband $\Rightarrow \text{ggT} = \inf = 1, \text{kGV} = \sup = v$

Distributivität: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}: \text{ggT}(a, \text{kGV}(b, c)) = \text{kGV}(\text{ggT}(a, b), \text{ggT}(a, c)),$

$$\text{kGV}(a, \text{ggT}(b, c)) = \text{ggT}(\text{kGV}(a, b), \text{kGV}(a, c))$$

$$\text{ggT}(a, b) = \prod_{p \in P} p^{\min(v_p(a), v_p(b))}$$

$$\text{kGV}(a, b) = \prod_{p \in P} p^{\max(v_p(a), v_p(b))}$$

$$x = v_p(a), y = v_p(b), z = v_p(c)$$

$$\min(x, \max(y, z)) = \max(\min(x, y), \min(x, z))$$

$$\text{Ann: } x \leq y \leq z$$

$$\min(x, z) = \max(x, x)$$

$$x = x \checkmark$$

Boolesche Algebra:

$\exists 0, 1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}: \text{ggT}(a, 1) = a, \text{ kgV}(a, 0) = a$

\Rightarrow also nicht jedes Zahl kann Töter vom 1Element sein

\Rightarrow also nicht jede Zahl kann Vielfaches sein

\Rightarrow keine boolesche Algebra