Aufgabe 1: Modellieren mit Prädikatenlogik

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik und zeigen Sie die Konsistenz der Aussagen indem Sie ein gemeinsames Modell angeben. Geben Sie die Bedeutung der verwendeten Prädikate und Funktionen an.

a) Es gibt Wirbeltiere, Säugetiere, und Fledertiere.

b) Delfine sind Säugetiere

c) Jedes Fledertier ist ein Säugetiere und jedes Säugetier ist ein Wirbeltier.

d) Fledertiere legen keine Eier.

e) Nicht alle Säugetiere können fliegen.

f) Es existieren sowohl Säugetiere als auch Nicht-Säugetiere die Fliegen können.

g) Ein Säugetier kann genau dann fliegen wenn es ein Fledertier ist.

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass alle Objekte Tierarten sind. Sie müssen das in Ihren Formeln also nicht gesondert überprüfen.

GDS UE 8.1

Wirbeltier(x) ...x ist ein Wirbeltier

Säugetier(x) ... x ist ein Säugetier

Fledertier(x) ... x ist ein Fledertier

Delfin(x) ... x ist ein Delfin

LegtEier(x) ... x legt Eier

Fliegt(x) ... x kann Fliegen

a) $\exists x \exists y \exists z\,(Wirbeltier(x) \wedge Säugetier(y) \wedge Fledertier(z))$

b) $\forall x(Delfin(x) \wedge Säugetier(x))$

c) $\forall x\,(Fledertier(x) \Rightarrow Säugetier(x)) \wedge \forall y\,(Säugetier(y) \Rightarrow Wirbeltier(y))$

d) $\forall x(Fledertier(x) \wedge \neg LegtEier(x))$

e) $\neg \forall x\,(Säugetier(x) \wedge Fliegt(x))$

f) $\exists x\,(Säugetier(x) \wedge Fliegt(x)) \wedge \exists y\,(\neg Säugetier(y) \wedge Fliegt(y))$

g) $\forall x(Säugetier(x) \wedge Fliegt(x) \Leftrightarrow Fledertier(x))$

Aufgabe 2: Modellieren mit Prädikatenlogik

Seien *Verprügelt*, *Angriffslustig*, *Gallier* und *Römer* Prädikatensymbole und *obelix*, *lacmus* und *caesar* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

Verprügelt(x, y)	… x verprügelt y	*obelix*	… Obelix
Angriffslustig(x)	… x ist angriffslustig	*lacmus*	… Lacmus
Gallier(x)	… x ist ein Gallier	*caesar*	… Caesar
Römer(x)	… x ist ein Römer		

a) Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

(i) Alle Römer werden von Obelix aber nicht von Caesar verprügelt.

(ii) Manche Gallier verprügeln alle angriffslustigen Römer.

b) Sei weiters folgende Interpretation gegeben:

$$\mathcal{U} = \{\text{Aerobus, Asterix, Bonus, Caesar, Lacmus, Obelix, Troubadix, Verleihnix}\}$$
$$\mathrm{I}(\textit{Gallier}) = \{\text{Asterix, Obelix, Verleihnix}\}$$
$$\mathrm{I}(\textit{Römer}) = \{\text{Aerobus, Bonus, Caesar}\}$$
$$\mathrm{I}(\textit{Verprügelt}) = \{(\text{Asterix, Aerobus}), (\text{Asterix, Lacmus}), (\text{Obelix, Aerobus}), (\text{Obelix, Bonus}), (\text{Obelix, Caesar}), (\text{Obelix, Lacmus}), (\text{Troubadix, Bonus}), (\text{Verleihnix, Lacmus})\}$$
$$\mathrm{I}(\textit{caesar}) = \text{Caesar}$$
$$\mathrm{I}(\textit{lacmus}) = \text{Lacmus}$$
$$\mathrm{I}(\textit{obelix}) = \text{Obelix}$$

Geben Sie an, ob die nachfolgenden Formeln in dieser Interpretation wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem konkreten Beispiel; es ist keine formale Auswertung erforderlich. Übersetzen Sie die Formeln auch in natürliche Sprache.

(i) $\forall x\, \textit{Verprügelt}(x, \textit{lacmus})$

(ii) $\exists x \forall y\, (\textit{Römer}(y) \Rightarrow \textit{Verprügelt}(x, y))$

(iii) $\exists x \forall y\, (\textit{Römer}(x) \land (\textit{Gallier}(y) \Rightarrow \textit{Verprügelt}(y, x)))$

Bestimmen Sie unter Verwendung der Evaluierungsfunktion den Wahrheitswert der Formel

(iv) $\forall x\, (\textit{Verprügelt}(x, \textit{lacmus}) \lor \neg \textit{Gallier}(x))$

GDS ÜE 8.2

a)

(i) $\forall x\,(Römer(x) \Rightarrow (Verprügelt(obelix, x) \wedge \neg Verprügelt(caesar, x)))$

(ii) $\exists x\,\forall y\,(Gallier(x) \wedge Römer(y) \Rightarrow Verprügelt(x, y))$

b)

(i) $\forall x\, Verprügelt(x, lacmus)$ "Alle verprügeln Lacmus"

$\Rightarrow$ falsch, da jeder Lacmus verprügelt

z.B.: $x = Lacmus$ $Verprügelt(Lacmus, Lacmus)$

(ii) $\exists x\,\forall y\,(Römer(y) \Rightarrow Verprügelt(x, y))$ "Es gibt jemanden der alle Römer verprügelt"

$\Rightarrow$ wahr

z.B.: $x = Obelix$

$Verprügelt(x, Aerobus)\checkmark$
$Verprügelt(x, Bonus)\checkmark$
$Verprügelt(x, Caesar)\checkmark$

(iii) $\exists x\,\forall y\,(Römer(x) \wedge (Gallier(y) \Rightarrow Verprügelt(y, x)))$ "Es gibt einen Römer der von allen Galliern verprügelt wird"

$\Rightarrow$ wahr

z.B.: $x = Lacmus$

$(Asterix, x)\checkmark$
$(Obelix, x)\checkmark$
$(Verleihnix, x)\checkmark$

(iv) $val_{I,\sigma}(\forall x(Verprügelt(x, lacmus) \vee \neg Gallier(x))) = 1$

$val_{I,\sigma'}(Verprügelt(x, lacmus)) = 1$ or $val_{I,\sigma'}(\neg Gallier(x)) = 1$ für alle $\sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$

$I(Verprügelt)(val_{I,\sigma'}(x), I(lacmus)()) = 1$ or $\underbrace{not\ I(Gallier)(val_{I,\sigma'}(x)) = 1}$ für alle $\sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$

$\{(Asterix, Lacmus), (Obelix, Lacmus), (Verleihnix, Lacmus)\} = 1$

$U \setminus \{Asterix, Obelix, Verleihnix\} = 1$

$\Rightarrow$ die Formel ist wahr

Aufgabe 3: Induktive Definition als Grammatik umsetzen

Sei $\mathbb{V} = \{a, b, c, \ldots\}$ eine Menge von Variablen. Wir definieren Terme über $\mathbb{V}$, welche die Operationen $+$ und $*$ verwenden, wie folgt.

Die Menge der Terme $\mathbb{T}$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

1) $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{T}$
2) Wenn $X, Y \in \mathbb{T}$, dann auch
   (a) $(X) + (Y) \in \mathbb{T}$
   (b) $(X) * (Y) \in \mathbb{T}$
3) Wenn $X \in \mathbb{T}$ und $Y \in \mathbb{V}$, dann auch
   (a) $X + Y \in \mathbb{T}$
   (b) $(X) * Y \in \mathbb{T}$

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik in BNF an deren Sprache den Termen $\mathbb{T}$ für $\mathbb{V} = \{a, b, c, d\}$ entspricht.

b) Ist $\mathbb{T}$ eine reguläre Sprache? Begründen Sie ihre Antwort!

c) Geben Sie für jeden der folgenden Terme die Ableitung aus der Grammatik an. Geben Sie dabei jeden Produktionsschritt.

- c
- $(a + b) * (c + d)$
- $(a + b + c) * d$

GDS UE 8.3

a) $G = \langle \{Var, Op, Term\}, \{"a", "b", "c", \ldots, "+", "-"\}, P, Term \rangle$

$\{\langle Var \rangle ::= "a" \mid "b" \mid "c" \mid \ldots$

$\langle Op \rangle ::= "+" \mid "-"$

$\langle Term \rangle ::= \langle Var \rangle \mid "(" \langle Term \rangle ")" \langle Op \rangle "(" \langle Term \rangle ")" \mid$

$\langle Term \rangle "+" \langle Var \rangle \mid "(" \langle Term \rangle ")" "*" \langle Var \rangle \} = P$

b) Nein ist nicht regulär. Analog zu Klammerausdrücken in den Folien, man müsste z.B. die offenen Klammern mitzählen um korrekt schließen zu können

c)

(i) $\langle Term \rangle \Rightarrow \langle Var \rangle$

$\Rightarrow c$

(ii) $\langle Term \rangle \Rightarrow (\langle Term \rangle) * (\langle Term \rangle)$

$\Rightarrow (\langle Term \rangle + \langle Var \rangle) * (\langle Term \rangle + \langle Var \rangle)$

$\Rightarrow (\langle Var \rangle + b) * (\langle Var \rangle + d)$

$\Rightarrow (a + b) * (c + d)$

(iii) $\langle Term \rangle \Rightarrow (\langle Term \rangle) * \langle Var \rangle$

$\Rightarrow (\langle Term \rangle + \langle Var \rangle) * d$

$\Rightarrow (\langle Term \rangle + \langle Var \rangle + c) * d$

$\Rightarrow (\langle Var \rangle + b + c) * d$

$\Rightarrow (a + b + c) * d$

Aufgabe 4: Regulärer Ausdruck zu Grammatik

Betrachten Sie folgende extended regular expression die eine reguläre Sprache L definiert.

$$[ab]^*([4-8]^+|cd^+)\backslash.[4-8]\{2,4\}$$

a) Geben Sie fünf Beispiele für Wörter in der Sprache L an.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik in BNF an die der Sprache L entspricht.

c) Reguläre Sprachen können mit Hilfe von sogenannten regulären Grammatiken beschrieben werden. Reguläre Grammatiken sind kontextfreie Grammatiken deren Produktionen alle von der Form (a) $A \Rightarrow a$, (b) $A \Rightarrow aB$, oder (c) $A \Rightarrow \varepsilon$ sind (wobei A, B beliebige Nonterminalsymbole sind und a ein beliebiges Terminalsymbol ist). Ist Ihre Grammatik eine reguläre Grammatik? Wenn nicht, welche Ihre Produktionen verletzt die Eigenschaft einer regulären Grammatik?

GDS UE 8.4

a)

- aba548.66
- b77.7777
- 4.44
- cdd.555
- abcd.4444

b) G = ⟨{S, A, B, ..., F}, {"a", "b", "c", "d", "4", ..., "8"}, P, S}

{<S> :== "a"<S> | "b"<S> | "4"<A> | ... | "8"<A> | c<B>

<A> :== "4"<A> | ... | "8"<A> | "."<C>

<B> :== "d"<B> | "."<C>

<C> :== "4"<D> | ... | "8"<D>

<D> :== "4"<E> | ... | "8"<E> | "4" | ... | "8"

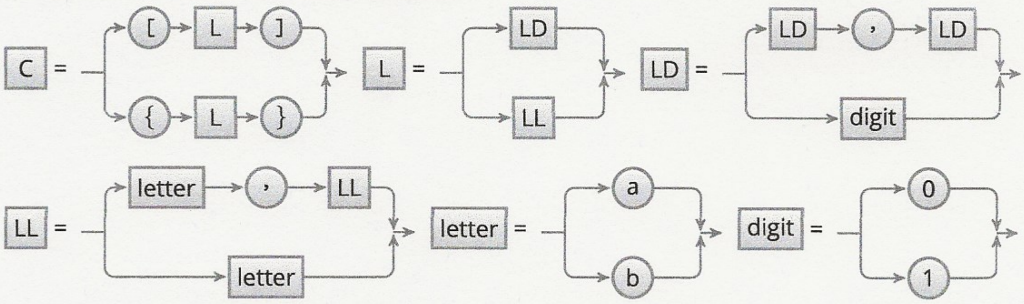
<E> :== "4"<F> | ... | "8"<F> | "4" | ... | "8"

<F> :== "4" | ... | "8"} = P

c) Ja es ist eine. Jede Produktionsregel enthält ein Terminalsymbol und (optional) ein Non-Terminalsymbol

Aufgabe 5: Syntaxdiagramme

a) Betrachten Sie folgende Syntaxdiagramme



(i) Welche Sprache beschreiben diese Syntaxdiagramme

(ii) Beschreiben Sie die Sprache mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik. Verwenden Sie BNF-Notationen.

b) Betrachten Sie folgende Grammatik in BNF-Notationen

$$\langle W \rangle ::= \texttt{"a"}\langle W \rangle\texttt{"a"} \mid \texttt{"b"}\langle W \rangle\texttt{"b"} \mid \texttt{"c"}\langle W \rangle\texttt{"c"} \mid \varepsilon$$

(i) Welche Sprache beschreiben diese Grammatik? Welches der folgenden Wörter ist enthalten `"abcabc"`,`"bbbb"`,`"abba"`?

(ii) Beschreiben Sie die Sprache mit Hilfe eines Syntaxdiagramms.

GDS UE 8.5

a)

(i) eine kontextfreie Sprache welche Listen bzw. Mengen von Buchstaben (a,b) oder Ziffern (0,1) enthält

(ii) < <> ::= "[" <L> "]" | "{" <L> "}"

<L> ::= <LD> | <LL>

<LD> ::= <LD> "," <LD> | <Digit>

<LL> ::= <Letter> "," <LD> | <Letter>

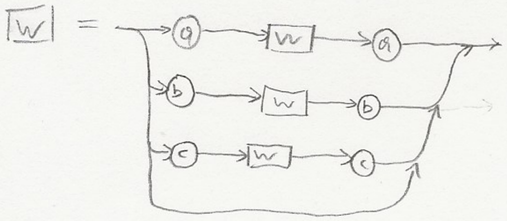
<Letter> ::= "a" | "b"

<Digit> ::= "0" | "1"

b)

(i) eine kontextfreie Grammatik welche Palyndrome über {a, b, c} zulässt
"bbbb" und "abba" ist enthalten

(ii)



Aufgabe 6: Grammatik erstellen

Binomialkoeffizienten können im Textsatzsystem LaTeX unter anderem mit dem Befehl

```
{N \choose K}
```

dargestellt werden. Für diese Aufgabe nehmen wir an, dass N und K nur nicht negative ganze Zahlen, weitere Binomialkoeffizienten sowie Summen und Differenzen solcher Zahlen und Binomialkoeffizienten sein können. Der gesamte Ausdruck muss entweder zwischen `$` und `$` oder zwischen `\[` und `\]` gestellt werden, damit LaTeX weiß, ob der Bruch im Fließtext oder auf einer eigenen Zeile gesetzt werden soll.

Einige Beispiele für derartige Ausdrücke mit dem entsprechenden LaTeX-Code (wobei der Unterschied zwischen Fließtext und eigener Zeile, also zwischen `$ ... $` und `\[ ... \]` nicht sichtbar ist):

$\binom{42}{7}$	`${42 \choose 7}$`
$\binom{6+2}{7-4}$	`\[{6+2 \choose 7-4}\]`
$\binom{\binom{42}{7}}{3-\binom{4}{7-9}}$	`${{42 \choose 7} \choose 3 - {4 \choose 7-9}}$`
$\binom{\binom{42}{7}}{3-\binom{4}{7-9}+27}$	`${{42 \choose 7} \choose 3 - {4 \choose 7-9} +27}$`

Sei L die Sprache dieser LaTeX Ausdrücke.

a) Beschreiben Sie die Sprache L mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik. Verwenden Sie EBNF-Notationen, um die Grammatik übersichtlich zu strukturieren.

b) Handelt es sich bei L um eine reguläre Sprache, d.h., lässt sich diese Sprache im Prinzip auch durch einen (komplizierten) regulären Ausdruck spezifizieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

GDS UE 8.6 a)

S = B | \[B \]

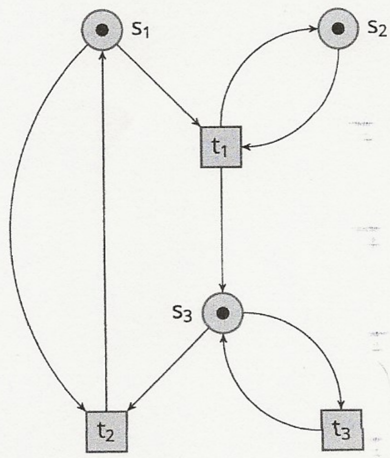
B = { T \choose T }

T = N{N} [(+ T) | (- T) | (*T) | (/T)] | B
N = 01...19

b) Nein es handelt sich um keine reguläre Sprache
Man müsste mitzählen in welcher Subformel man sich befindet
(zur Klammerschließung, etc.)

Aufgabe 7: Sprache eines Petri-Netzes bestimmen

Gegeben sei das folgende Petri-Netz mit Anfangsmarkierung.



a) Welche Transitionen sind aktiviert?

b) Geben Sie alle möglichen Reihenfolgen an, in denen die Transitionen feuern können (z.B. als regulären Ausdruck).

c) Geben Sie mindestens zwei Markierungen an, in denen keine Transition aktiviert ist.

GDS UE 8.7

a)

es sind t_1, t_2, t_3 aktiviert

b) t_3 kann unendlich oft ausgeführt werden
t_2 und t_1 nur einmal

$\Rightarrow t_3^* t_2 ? t_1 t_3^*$

c)

- $m_0(s_1)=1$ $m_0(s_2)=0$ $m_0(s_3)=0$
- $m_0(s_1)=0$ $m_0(s_2)=1$ $m_0(s_3)=0$
- $m_0(s_1)=0$ $m_0(s_2)=0$ $m_0(s_3)=0$

Aufgabe 8: Modellieren mittels Petri-Netz

Eine Ärztin hat eine Praxis mit zwei Behandlungszimmern. Ein Behandlunsgvorgang läuft folgendermaßen ab: die Patient:innen warten im Vorraum und begeben sich in eines der Behandlungszimmer, wenn sie aufgerufen werden. Ist eine Person im Behandlungszimmer, führt die Ärztin mit dieser ein Gespräch (inklusive Untersuchung und Verschreibung von Medikamenten). Danach verlässt die Patient:in den Behandlungsraum in Richtung Ausgang.

Aus Privatspäregründen darf dabei im Behandlungsraum höchstens ein:e Patient:in sein. Außerdem kann sich die Ärztin nur um eine Person gleichzeitig kümmern. Ist die Ärzten nicht in einem der Behandlungsräume, kümmert sie sich in ihrem Büro um andere Aufgaben.

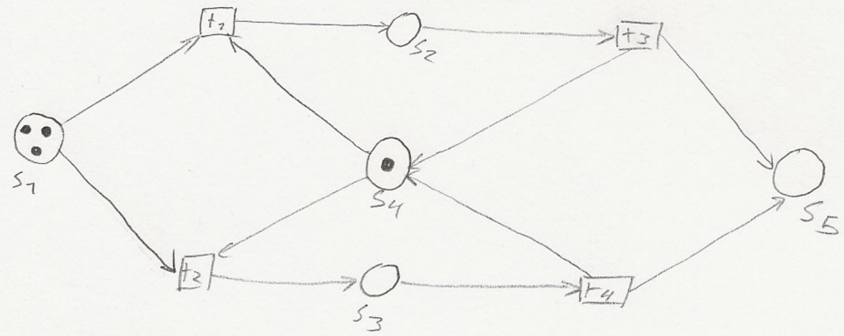
a) Modellieren Sie den Ablauf von Behandlungen in der Praxis als Petri-Netz. Beschreiben Sie auch die Aufgabe der einzelnen Stellen und Transitionen.

b) Gehen Sie davon aus, dass sich drei Personen Warteraum befinden. Geben Sie zwei mögliche Folgen von feuernden Transitionen an, bei denen jeweils mindestens zwei Personen behandelt werden.

c) Ist dieser Ablauf fair, dh. wird jede Person in einem Behandlungsraum früher oder später (nach endlich anderen feuernden Transitionen) auch von der Ärztin betreut? Begründen Sie Ihre Einschätzung.

GDS UE 8.8

a)



S_1 ... Wartezimmer

S_2, S_3 ... Behandlungszimmer

S_4 ... Büro (von dort werden Patienen aufgerufen)

S_5 ... Ausgang

t_1, t_2 ... Behandlungszimmer betreten

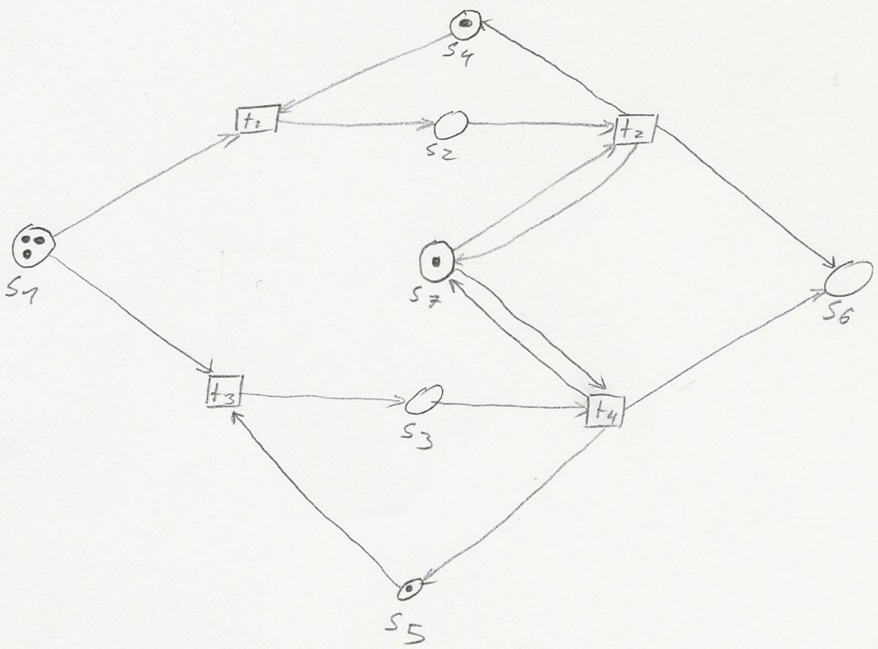
t_3, t_4 ... Gespräch führen

b)
- $t_1 - t_3 - t_2 - t_4 - \dots$
- $t_2 - t_4 - t_2 - t_4 - \dots$

c) Nein ist nicht fair.
Ein Patient muss immer für eine gesamte Behandlungsdauer warten selbst wenn das andere Zimmer frei ist.

GDS UE 8.8

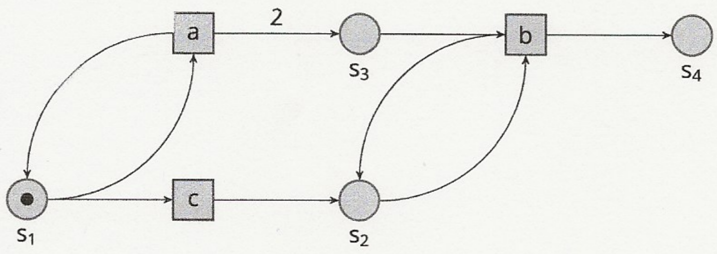
a) Alternative



Immer noch Problem, dass ein Patient beliebig lange Warten muss

Aufgabe 9: Petrinetz ausführen

Gegeben sei folgendes Petrinetz:



Jede Abfolge des Feuerns von Transitionen kann als Wort über den Transitionen interpretiert werden. Im obigen Petrinetz ist etwa acbb ein akzeptiertes Wort, während cb nicht akzeptiert wird.

a) Geben Sie die Sprache des gegebenen Petri-Netzes in Mengenschreibweise an.

b) Ist diese Sprache regulär? Begründen Sie Ihre Einschätzung (ein Beweis ist nicht notwendig).

UDS UE 8.9

a)

$A = \{a^n c b^{2n} \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, c, acbb, aacbbbb, \dots\}$

b)

Nein ist nicht regulär.

Man müsste mitzählen wie oft a vorgekommen ist.