Curso de Optimización (DEMAT)

Tarea 7

Leslie Janeth Quincosa Ramírez

Descripción:	Fechas
Fecha de publicación del documento:	**Marzo 19, 2022**
Fecha límite de entrega de la tarea:	**Marzo 27, 2022**

Indicaciones

- **Envie el notebook que contenga los códigos y las pruebas realizadas de cada ejercicio.**
- **Si se requiren algunos scripts adicionales para poder reproducir las pruebas, agreguelos en un ZIP junto con el notebook.**
- **Genere un PDF del notebook y envielo por separado.**

Ejercicio 1 (5 puntos)

Programar el método de Gauss-Newton para resolver el problema de mínimos cuadrados no lineales

$$\min_x \quad f(z) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} r_j^2(z),$$

donde $r_j: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ **para** $j = 1, \ldots, m$**. Si definimos la función** $R: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ **como**

$$R(z) = \begin{pmatrix} r_1(z) \\ \vdots \\ r_m(z) \end{pmatrix},$$

entonces

$$min_z f(z) = \frac{1}{2} R(z)^\top R(z).$$

Dar la función de residuales $R(z)$**, la función Jacobiana** $J(z)$**, un punto inicial** z_0**, un número máximo de iteraciones** N**, y una tolerancia** $\tau > 0$**.**

1. **Hacer** $res = 0$**.**
2. **Para** $k = 0, 1, \ldots, N$**:**

- **Calcular** $R_k = R(z_k)$
- **Calcular** $J_k = J(z_k)$
- **Calcular la dirección de descenso** p_k **resolviendo el sistema**

$$J_k^\top J_k p_k = -J_k^\top R_k$$

- **Si** $\|p_k\| < \tau$**, hacer** $res = 1$ **y terminar el ciclo**
- **Hacer** $z_{k+1} = z_k + p_k$**.**

1. **Devolver** $z_k, R_k, k, \|p_k\|$ **y** res**.**

---

1. **Escriba una función que implementa el algoritmo anterior usando arreglos de Numpy.**
2. **Leer el archivo** **puntos2D_1.npy** **que contiene una matriz con dos columnas. La primer columna tiene los valores** $x_1, x_2, \ldots, x_m$ **y en la segunda columna los valores** $y_1, y_2, \ldots, y_m$**, de modo que cada par** (x_i, y_i) **es un dato. Queremos ajustar al conjunto de puntos** (x_i, y_i) **el modelo**

$$A\sin(wx + \phi)$$

por lo que la función $R(\mathbf{z}) = R(A, w, \phi)$
está formada por los residuales

$$r_i(z) = r_i(A, w, \phi) = A\sin(wx_i + \phi) - y_i$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$
.

Programe la función $R(\mathbf{z})$
con $\mathbf{z} = (A, w, \phi)$
y su Jacobiana $J(\mathbf{z})$
.

Nota: Puede programar estas funciones de la forma `funcion(z, paramf)`**, donde** `paramf` **corresponda a la matriz que tiene los puntos** (x_i, y_i)
. También puede pasar el arreglo `paramf` **como arumento del algoritmo para que pueda evaluar las funciones.**

3. **Use el algoritmo con estas funciones** $R(\mathbf{z})$
y $J(\mathbf{z})$
, el punto inicial $\mathbf{z}_0 = (15, 0.6, 0)$
(esto es $A_0 = 15$
, $w_0 = 0.6$
y $\phi_0 = 0$
), un número máximo de iteraciones $N = 5000$
y una tolerancia $\tau = \sqrt{\epsilon_m}$
donde ϵ_m
es el épsilon máquina.

- **Imprima el valor inicial** $f(\mathbf{z}_0) = \frac{1}{2} R(\mathbf{z}_0)^\top R(\mathbf{z}_0)$
.
- **Ejecute el algoritmo e imprima un mensaje que indique si el algoritmo converge dependiendo de la variable** res
.
- **Imprima** $\mathbf{z}_k$
, $f(\mathbf{z}_k) = \frac{1}{2} R(\mathbf{z}_k)^\top R(\mathbf{z}_k)$
, la norma $\|p_k\|$
, y el número de iteraciones k
realizadas.

1. **Genere una gráfica que muestre a los puntos** (x_i, y_i)
y la gráfica del modelo $z_k[0]\sin(z_k[1]x + z_k[2])$
, evaluando esta función en el intervalo

$$x \in [\min x_i, \max x_i]$$

1. **De la gr\'afica de los datos, e interpretando el parámetro** A
como la amplitud de la onda, se ve que $A_0 = 15$
es una buena inicialización para este paramétro. Para los otros parámetros también debe se debería usar su

interpretación para dar buenos valores iniciales. Repita las pruebas con los puntos iniciales $z_0 = (15, 1, 0)$ y $z_0 = (15, 0.6, 1.6)$.

Solución:

In [99]:

```
# En esta celda puede poner el código de las funciones
# o poner la instrucción para importarlas de un archivo .py
import numpy as np
from numpy import linalg as LA
from numpy.linalg import eigvals
import sys
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def GaussNewton(R, J, z0, paramf, N, tol):
    res = 0
    zk = z0
    for k in range(N):
        Rk = R(zk, paramf)
        Jk = J(zk, paramf)
        pk = np.linalg.solve(Jk.T@Jk, -Jk.T@Rk) #JTkJkpk=-JTkRk
        norm = LA.norm(pk)
        if norm < tol:
            res = 1
            break
        else:
            zk = zk + pk
            if k+1 >= N:
                res = 0
                break
    return zk, Rk, k, norm, res
```

In [100]:

```
# Pruebas del algoritmo
def R(z, paramf):
    A = z[0]
    w = z[1]
    theta = z[2]
    return A*np.sin(w*paramf.T[0]+ theta) - paramf.T[1]

def J(z, paramf):
    A = z[0]
    w = z[1]
    theta = z[2]
    A1 = np.sin(w*paramf.T[0]+ theta)
    B1 = A*np.cos(w*paramf.T[0]+ theta)*paramf.T[0]
    C1 = A*np.cos(w*paramf.T[0]+ theta)
    return np.c_[A1, B1, C1]#np.sin(w*paramf.T[0]+ theta)] #A*np.cos(w*paramf.T[0]+ thet
a)@paramf.T[0], A*np.cos(w*paramf.T[0]+ theta)]


def ReadDataAndAdjust(archivo, zk):
    datos = np.load(archivo)
    x = np.array([m[0] for m in datos])
    y = np.array([m[1] for m in datos])
    min = x.min()
    max = x.max()
    z = np.linspace(min, max, 100)
    pz = zk[0]*np.sin(zk[1]*z+zk[2])
    plt.plot(z, pz, color='m')
    plt.scatter(x, y)
    plt.title('Ajuste Gauss-Newton')
    plt.xlabel('Eje X')
    plt.ylabel('Eje Y')
    plt.show()
```

```
def Probar(archivo_A, R, J, z0, N, tol):
    paramf = np.load(archivo_A)
    r = paramf.shape[0]
    print('Número de filas:',r)
    fz0 = 0.5*R(z0, paramf).T@R(z0, paramf)
    print('f(z0):', fz0)
    zk, Rk, k, norm, res = GaussNewton(R, J, z0, paramf, N, tol)
    if res == 1:
        print('Convergió.')
    else:
        print('No convergió.')
    print('zk:', zk)
    print('f(zk):', 0.5*R(zk, paramf).T@R(zk, paramf))
    print('||pk||:', norm)
    print('k:', k)
    ReadDataAndAdjust(archivo_A, zk)
```

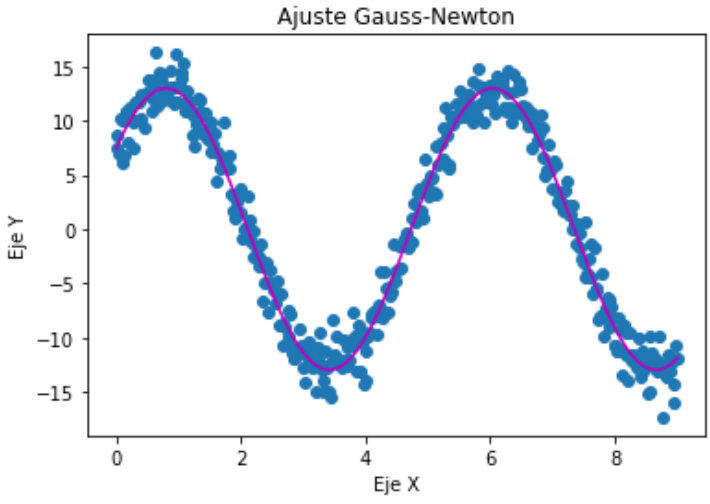
In [100]:

```
```

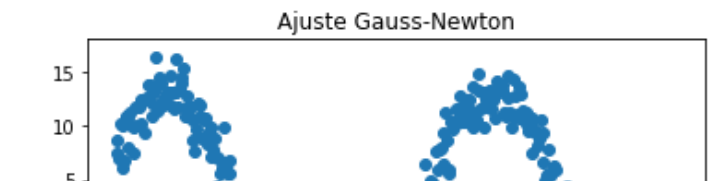
In [101]:

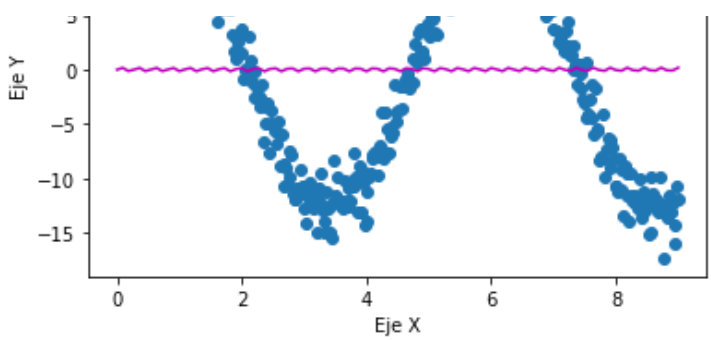
```
z0 = np.array([15, 0.6, 0])
z1 = np.array([15, 1, 0])
z2 = np.array([15, 0.6, 1.6])
eps = sys.float_info.epsilon
tol = eps**(1/2)

Probar("puntos2D_1.npy", R, J, z0, 50000, tol)
Probar("puntos2D_1.npy", R, J, z1, 50000, tol)
Probar("puntos2D_1.npy", R, J, z2, 50000, tol)
```

```
Número de filas: 400
f(z0): 45454.05280978729
Convergió.
zk: [12.99606648  1.19935917 -5.67317097]
f(zk): 457.1693612130722
||pk||: 1.454518968768975e-08
k: 8
```

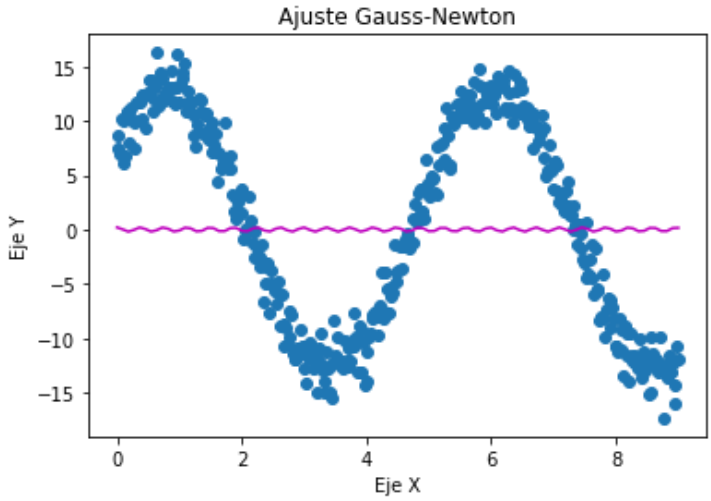



```
Número de filas: 400
f(z0): 40807.16289819636
No convergió.
zk: [ -0.1700118   23.21783424 -78.63302966]
f(zk): 18653.02330134146
||pk||: 2.032077004816657
k: 49999
```






```
Número de filas: 400
f(z0): 37048.62007346928
Convergió.
zk: [  -0.19679603   52.28163675 -183.75409605]
f(zk): 18651.983776007288
||pk||: 1.1529286187877427e-08
k: 54
```



El ajuste con el valor inicial $z_0 = (15, 0.6, 0)$
es muy bueno, la gráfica se ajusta de forma muy adecuada. La amplitud $A = 15$
es muy asertada al ver los datos que se ajustan a una amplitud similar. Por ello es más fácil que converja, y vemos que el desplazamiento de la gráfica está dado por 0
y la frecuecuencia angular por 0.6
.

La función $seno$
creada con los otros valores iniciales, no se ajustan tan bien, a pesar de estar dde que estos valores están muy cerca al punto inicial. El vector resultante de z_k
nos devuelve valores que no ajustan una buena función y en un caso no converge.

Ejercicio 2 (5 puntos)

Programar el método de Levenberg-Marquart para mínimos cuadrados.

Dar la función de residuales $R(z)$
, la función Jacobiana $J(z)$
, un punto inicial z_0
, un número máximo de iteraciones N
, $\mu_{ref} > 0$
y la tolerancia $\tau > 0$
.

1. **Hacer** $res = 0$
   y construir la matriz identidad I
   de tamaño igual a la dimensión de z_0
   .
2. **Calcular** $R = R(z_0)$

2. **Calcular** $R_0 = R(z_0)$
3. **Calcular** $J_0 = J(z_0)$
4. **Calcular** $f_0 = 0.5 R_0^\top R_0$
5. **Calcular** $\mathbf{A} = J_0^\top J_0$
   y $\mathbf{g} = J_0^\top R_0$
6. **Calcular** $\mu = \min\{\mu_{ref}, \max a_{ii}\}$
   , donde a_{ii}
   son los elementos de la diagonal de la matriz $\mathbf{A}$
   .
7. **Para** $k = 0, 1, \ldots, N$
   :

- **Calcular** $\mathbf{p}_k$
  resolviendo el sistema

$$(\mathbf{A} + \mu \mathbf{I})\mathbf{p}_k = -\mathbf{g}$$

- **Si** $\|\mathbf{p}_k\| < \tau$
  , hacer $res = 1$
  y terminar el ciclo.
- **Calcular** $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \mathbf{p}_k$
- **Calcular** $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}(\mathbf{z}_{k+1})$
- **Calcular** $f_{k+1} = 0.5 \mathbf{R}_{k+1}^\top \mathbf{R}_{k+1}$
- **Calcular el parámetro** ρ
  (ver las notas de la clase 16)

$$\rho = (f_k - f_{k+1})/(q_k(\mathbf{x}_k) - q_k(\mathbf{x}_{k+1})) = (f_k - f_{k+1})/(-\mathbf{p}_k^\top \mathbf{g} + 0.5 \mu_k \mathbf{p}_k^\top \mathbf{p}_k)$$

- **Si** $\rho < 0.25$
  , hacer $\mu = 2\mu$
  .
- **Si** $\rho > 0.75$
  , hacer $\mu = \mu/3$
  .
- **Calcular** $\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{J}(\mathbf{z}_{k+1})$
- **Calcular** $\mathbf{A} = \mathbf{J}_{k+1}^\top \mathbf{J}_{k+1}$
  y $\mathbf{g} = \mathbf{J}_{k+1}^\top \mathbf{R}_{k+1}$
  .

1. **Devolver el punto** $\mathbf{z}_k$
   , f_k
   , k
   y res
   .

---

1. **Escriba una función que implementa el algoritmo anterior usando arreglos de Numpy.**
2. **Aplique este algoritmo para resolver el problema del Ejercicio 1, imprimiendo la misma información y generando la gráfica correspondiente, usando** $\tau = \sqrt{\epsilon_m}, N = 5000, \mu_{ref} = 0.001$
   y los tres puntos iniciales

$$\mathbf{z}_0 = (15, 0.6, 0)$$

$$\mathbf{z}_0 = (15, 1.0, 0)$$

$$\mathbf{z}_0 = (15, 0.6, 1.6)$$

Solución:

In [102]:

```
# En esta celda puede poner el código de las funciones
# o poner la instrucción para importarlas de un archivo .py

def LevenbergMarquart(R, J, z0, paramf, N, muref, tol):
    res = 0
    n = z0.size
    I = np.identity(n)
    zk = z0
    Rk = R(zk, paramf)
    Jk = J(zk, paramf)
    fk = 0.5*Rk.T@Rk
    A = Jk.T@Jk
    g = Jk.T@Rk
    maxdiag = np.max(np.diag(A))
    mu = np.min(np.array([muref, maxdiag]))
    for k in range(N):
        pk = np.linalg.solve(A+mu*I, -g)
        norm = LA.norm(pk)
        if norm < tol:
            res = 1
            break
        else:
            zk = zk + pk
            Rk = R(zk, paramf)
            fk1 = 0.5*Rk.T@Rk     #ρ=(fk-fk+1)/(qk(xk)-qk(xk+1))=(fk-fk+1)/(-pTkg+0.5μkp
Tkpk)
            rho = (fk - fk1)/(-pk.T@g+0.5*mu*pk.T@pk) #revisa esto fk+1
            if rho<0.25:
                mu = 2*mu
            elif rho>0.75:
                mu = mu/3
            Jk = J(zk, paramf)
            A = Jk.T@Jk
            g = Jk.T@Rk
    return zk, fk, k, norm, res
```

In [103]:

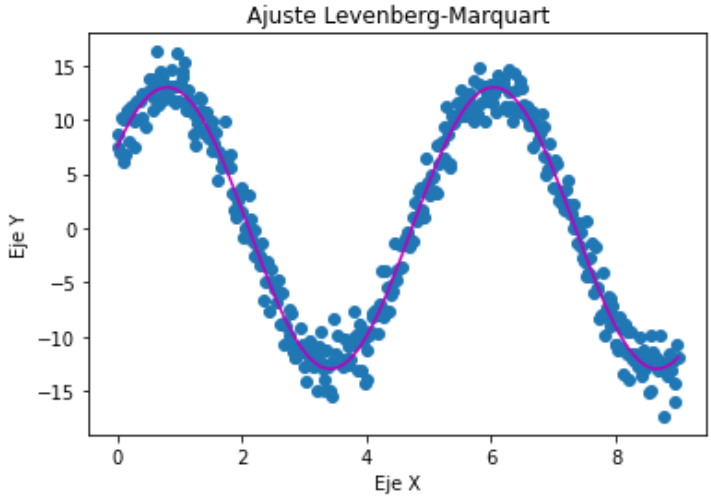
```
# Pruebas realizadas a la función de residuales del Ejercicio 1


def ReadDataAndAdjust(archivo, zk):
    datos = np.load(archivo)
    x = np.array([m[0] for m in datos])
    y = np.array([m[1] for m in datos])
    min = x.min()
    max = x.max()
    z = np.linspace(min, max, 100)
    pz = zk[0]*np.sin(zk[1]*z+zk[2])
    plt.plot(z, pz, color ='m')
    plt.scatter(x, y)
    plt.title('Ajuste Levenberg-Marquart')
    plt.xlabel('Eje X')
    plt.ylabel('Eje Y')
    plt.show()

def Probar1(archivo_A, R, J, z0, N, tol, muref):
    paramf = np.load(archivo_A)
    r = paramf.shape[0]
    print('Número de filas:',r)
    fz0 = 0.5*R(z0, paramf).T@R(z0, paramf)
    print('f(z0):', fz0)
    zk, fk, k, norm, res = LevenbergMarquart(R, J, z0, paramf, N, muref, tol)
    if res == 1:
        print('Convergió.')
    else:
        print('No convergió.')
    print('zk:', zk)
    print('f(zk):', 0.5*R(zk, paramf).T@R(zk, paramf))
```

```
    print('||pk||:', norm)
    print('k:', k)
    ReadDataAndAdjust(archivo_A, zk)
```

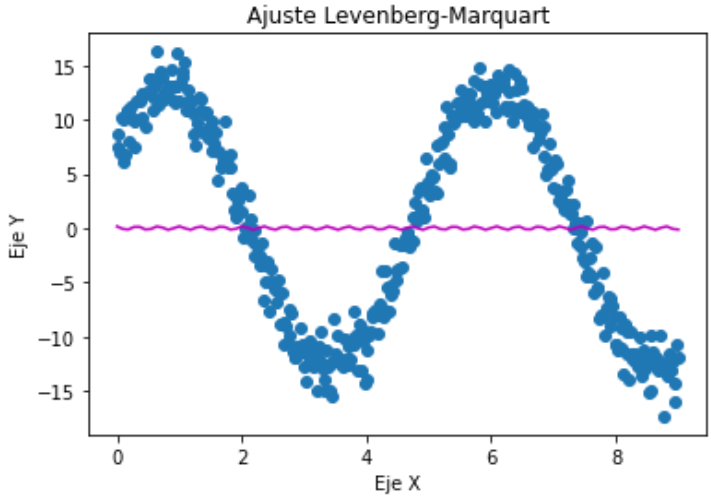
In [104]:

```
z0 = np.array([15, 0.6, 0])
z1 = np.array([15, 1, 0])
z2 = np.array([15, 0.6, 1.6])
eps = sys.float_info.epsilon
tol = eps**(1/2)

Probar1("puntos2D_1.npy", R, J, z0, 50000, tol, 0.001)
Probar1("puntos2D_1.npy", R, J, z1, 50000, tol, 0.001)
Probar1("puntos2D_1.npy", R, J, z2, 50000, tol, 0.001)
```

```
Número de filas: 400
f(z0): 45454.05280978729
Convergió.
zk: [12.99606648  1.19935917 -5.67317097]
f(zk): 457.16936121307225
||pk||: 1.4553292355606329e-08
k: 8
```

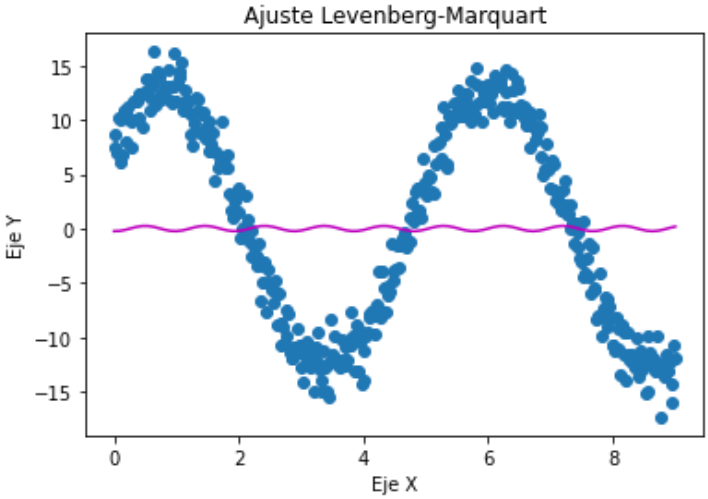



```
Número de filas: 400
f(z0): 40807.16289819636
Convergió.
zk: [ 1.61566084e-01  4.65280277e+02 -9.72682853e+02]
f(zk): 18653.24681633547
||pk||: 1.468800314782099e-08
k: 102
```




```
Número de filas: 400
f(z0): 37048.62007346928
Convergió.
zk: [ 2.44561555e-01 -1.44795531e+02  5.32641064e+02]
f(zk): 18649.91450095571
||pk||: 1.1965860981504653e-08
```

```
k: 56
```



El ajuste con el valor inicial $z_0 = (15, 0.6, 0)$
es muy bueno, la gráfica se ajusta de forma muy adecuada. La amplitud $A = 15$
es muy asertada al ver los datos que se ajustan a una amplitud similar. Por ello es más fácil que converja, y vemos que el desplazamiento de la gráfica está dado por 0
y la frecuecuencia angular por 0.6
.

La función $seno$
creada con los otros valores iniciales, no se ajustan tan bien, a pesar de estar dde que estos valores están muy cerca al punto inicial. El vector resultante de z_k
nos devuelve valores que no ajustan una buena función y en un caso no converge.