计算机视觉底层数学逻辑——第二回合

高等代数拓扑入门与拓扑几何流形分析

许笑颜

University of Science and Technology of China

2024 年 6 月 7 日

Semi-Group

假设 S 是一个非空集合，如果它有一个代数运算满足结合律，则称 S 是一个半群。

- 如果半群 S 中有元素 e，它对 S 中任意元素 a，都有:
$$ea = a.$$
则称 e 为半群 S 的一个左单位元。
- 如果在 S 中有元素 e', 它对 S 中任意元素 a 都有:
$$ae' = a.$$
则称 e' 为 S 的一个右单位元。
- 如果半群 S 有单位元 (既是左单位元又是右单位元) 则称 S 为有单位元的半群, 或简称么半群 (monoid)。

Abelian Group

如果对于非空集合 G 有代数运算 $\circ$ 满足以下条件:

1. 结合律成立，即对于 G 中任意元素 a, b, c，都有
$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c). \tag{1}$$
2. G 中有元素 e，叫做 G 的左单位元，它对于 G 中每一个元素 a 都有
$$e \circ a = a. \tag{2}$$
3. 对 G 中每一个元素 a，在 G 中都有元素 a^{-1}，叫做 a 的左逆元，使得
$$a^{-1} \circ a = e. \tag{3}$$

则称 G 对这个代数运算 $\circ$ 作成一个群。

Abelian Group

Abelian Group: 如果对群 G 中任意二元素 a, b，均有

$$a \circ b = b \circ a, \tag{4}$$

则 G 的代数运算满足交换律，则称 G 为交换群（可换群）或 Abelian Group，记作 $(G, \circ)$。
General Linear Group:
数域 F 上全体 n 阶满秩方阵对矩阵的普通乘法 (或 F 上 n 维线性空间的全体满秩线性变换对线性变换的乘法) 作成一个群, 通常称其为 F 上的一般线性群，或 F 上的 n 阶线性群, 并用 $GL_n(F)$ 表示。

Abelian Group

1. If G is finite, the order of G is $|G|$.
2. $(Z,+),(R,\ \cdot\ ),(R,+)$ 是不是 group?
3. $(Z,\cdot)$ 是不是一个 group?
4. 矩阵乘法是不是一个 Abelian group?

Sub-Group

假设 $(G,*)$ 是一个群 (group)，若 H 是 G 的一个非空子集 (subset) 且同时 H 与相同的二元运算 $*$ 亦构成一个群，则 $(H,*)$ 称为 $(G,*)$ 的一个子群 (subgroup)。
更精确地来说，若运算 $*$ 在 H 的限制也是个在 H 上的群运算，则称 H 为 G 的子群。

- 如果 $|G|>1$, 则群 G 至少有两个子群, 一个是只由单位元 e 作成的子群 e, 另一个是 G 本身. 这两个子群称为群 G 的平凡子群。
  别的子群叫做群 G 的非平凡子群或真子群.
- 当 H 是群 G 的子群时, 简记为 H G; 若 H 是 G 的真子群, 则简记为 $H<G$.
- 正有理数乘群是非零有理数乘群的一个子群，正实数乘群又是非零实数乘群的子群.

Coset

设 H 是群 G 的一个子群,$a \in G$. 则称群 G 的子集

$$aH = \{ax | x \in H\}$$

为群 G 关于子群 H 的一个左陪集. 而称

$$Ha = \{xa | x \in H\}$$

为群 G 关于子群 H 的一个右陪集。

Coset

左陪集有以下一些今后经常用到的重要性质，

- $a \in aH$.

$$a = ae \in aH.$$

- $a \in H \longleftrightarrow aH = H$.

$$a \in aH \longrightarrow a \in H, x \in H, x = a(a^{-1}x) \in aH.$$

- $b \in aH \longleftrightarrow aH = bH$.

$$b = ax(x \in H, xH = H), bH = axH = aH.$$

Coset

- $aH = bH$，即 a, b 同在一个左陪集之中 $\longleftrightarrow a^{-1}b \in H$.

$$aH = bH, a^{-1}aH = a^{-1}bH, H = a^{-1}bH.$$

- 若 $aH \cap bH \neq \emptyset$，则 $aH = bH$.

$$Assume \quad c \in bH \cap aH, \longrightarrow c \in aH, c \in bH, aH = cH = bH.$$

对任二左陪集来说，要么相等，要么无公共元素 (即其交为空集)。
这样，群 G 中每个元素必属于一个左陪集，而且不能属于不同的左陪集。

1. Abelian Group
2. Normal Subgroup
3. Topological Theory Analysis

同态与同构

设 G 与 $\overline{G}$ 是两个群. 如果有一个 G 到 $\overline{G}$ 的映射 ϕ 保持运算, 即

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b), (\forall a, b \in G),$$

则称 ϕ 为群 G 到群 $\overline{G}$ 的一个同态映射。

- 当 ϕ 又是满射时, 称群 G 与 $\overline{G}$ 同态, 记为 $G \sim \overline{G}$。
- 当 ϕ 是一个双射时, 称 ϕ 为群 G 到 $\overline{G}$ 的一个同构映射. 如果群 G 到群 $\overline{G}$ 存在同构映射, 就称群 G 到群 $\overline{G}$ 同构, 记为

$$G \cong \overline{G}.$$

Normal Subgroup

设 N 是群 G 的一个子群. 如果对 G 中每个元素 a 都有

$$aN = Na, \Longleftrightarrow aNa^{-1} = N,$$

则称 N 是群 G 的一个正规子群 (或不变子群)。

- 这就是说, 正规子群的任何一个左陪集都是一个右陪集, 因此可以简称为陪集。
- 若 N 是群 G 的一个正规子群, 则简记为 $N \trianglelefteq G$。
- 若 $N \trianglelefteq G, N \neq G$, 则记为 $N \triangleleft G$。

Normal Subgroup

一个简单的例子：

- Supgroup $N = \{(1), (123), (132)\}$ is the normal subgroup of Symmetric group $S_3(\sigma N \sigma^{-1} = N, \sigma \in S_3)$.
- Subgroup $H = \{(1), (12)\}$?

$$\sigma = (123) \in S_3,$$

$$(123)H = \{(123), (13)\} \neq \{(123), (23)\} = H(123).$$

Normal Subgroup

direct product of group?

$$G_1 = Z \quad under+ \tag{5}$$

$$G_2 = \{1, -1, i, -i\} \quad under\times \tag{6}$$

$$G_1 \times G_2 = \{(x, y) | x \in Z, \quad y = \pm 1 \ or \ \pm i\} \tag{7}$$

G1 的群里的元素做 G1 的运算，G2 的元素做 G2 的元素：

$$(5, -i) \cdot (0, 1) = (5 + 0, -i \cdot 1) = (5, -i). \tag{8}$$

Quotient group

群 G 的正规子群 N 的全体陪集对于陪集的乘法作成一个群, 称为 G 关于 N 的商群, 记为 G/N.

$$G/N = \{\alpha N | \alpha \in G, N \lhd G\} \tag{9}$$

商群的元素都是集合，即正规子群的 H 和它的所有陪集，所以说商群是集合的集合，且满足群的特性。

1. **结合律**：子集乘法满足结合律，因此陪集也满足。
2. **单位元**：陪集 N 为关于陪集乘法的单位元，$N * N = N$.
3. **逆元**： $\alpha^{-1}N$ 是 αN 的逆元，即 $(\alpha N)^{-1} = \alpha^{-1}N$。

$$(\alpha^{-1}N)(\alpha N) = \alpha^{-1}\alpha N = N. \tag{10}$$

Boundary Operator

The boundary operator $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ acts linearly on a chain c by its action on any simplex $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_k] \in C$, i.e.,

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$$

where $\hat{v}_i$ indicates that v_i is deleted from the sequence.
For examples,

$$\partial_1[a, b] = [b] - [a], \tag{11}$$

$$\partial_2[a, b, c] = [b, c] - [a, c] + [a, b] = [b, c] + [c, a] + [a, b], \tag{12}$$

$$\partial_3[a, b, c, d] = [b, c, d] - [a, c, d] + [a, b, d] - [a, b, c], \tag{13}$$

$$\partial_1\partial_2[a, b, c] = [c] - [b] - [c] + [a] + [b] - [a] = 0. \tag{14}$$

Boundary Theorem

(Theorem) $\partial_{k-1}\partial_k = 0$, for all k.

Proof:

$$\partial_{k-1}\partial_k [v_0, v_1, \dots, v_k] =$$

$$= \partial_{k-1} \sum_i (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$$

$$= \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$$

$$+ \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k]$$

$$= 0$$

as switching i and j in the second sum negates the first sum.

Chain Complex

The boundary operator connects the chain groups into a chain complex C_*:

$$\ldots \rightarrow \mathrm{C}_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} \mathrm{C}_k \xrightarrow{\partial_k} \mathrm{C}_{k-1} \rightarrow \ldots \tag{15}$$

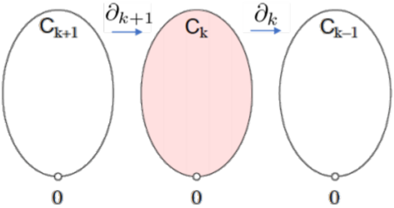


Fig. 1: chain complex C_*

Cycle Group

- $\partial_K c = \varnothing$, so $c \in \ker \partial_k$.
- The k-th cycle group is

$$Z_k = \ker \partial_k = \{c \in C_k | \partial_k c = \varnothing\}. \tag{16}$$

$$\partial = \delta$$

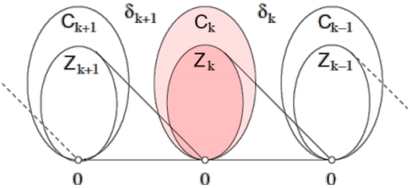


Fig. 2: Cycle Group

Boundary Group

- Let b be a k-chain. If b is a boundary of something, it is a k-boundary.
- The k-th boundary group is

$$B_k = \mathrm{im}\partial_{k+1} = \{c \in C_k | \exists d \in C_{k+1} : c = \partial_{k+1} d\}. \tag{17}$$

Simplicial Homology

- The k-th homology group is

$$H_k = Z_k/B_k = \ker \partial_k/\mathrm{im}\partial_{k+1}. \tag{18}$$

- If $z_1 = z_2 + B_k$, $z_1, z_2 \in Z_k$, we say z_1 and z_2 are homologous.

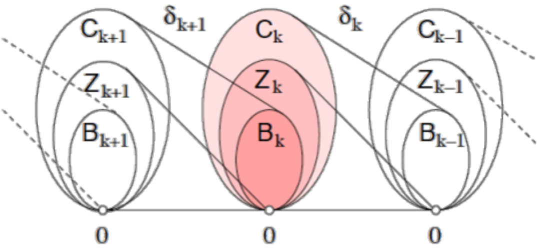
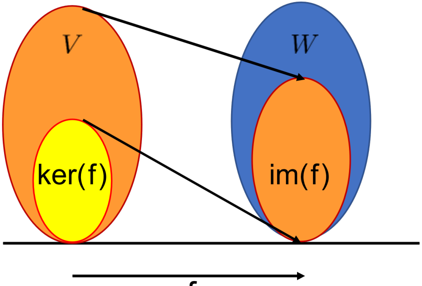


Fig. 3: Simplicial Homology

Simplicial Homology

- The kernel (null space) of ∂_k is the vectorspace of cycles in dimension k.
- The image of ∂_k is the subspace of boundary cycles in dimension $k-1$.
- Homology of a space X is the quotient:

$$H_k = Z_k/B_k = \ker \partial_k / \mathrm{im} \partial_{k+1}. \tag{19}$$



几何无关

对于 Euclid 空间 $\mathbb{R}^N$ 中的有限点集 $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$，如果满足下边的条件：

$$\sum_{i=0}^{n} k_i = 0, \tag{20}$$

$$\sum_{i=0}^{n} k_i \alpha_i = 0. \tag{21}$$

的实数组 $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ 中每一个数都是 0，就称 $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ 为几何无关的。

$\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ 当且仅当 $\{\alpha_i - \alpha_0\}_{i=1}^n$ 线性无关。

Simplex

Euclid 空间 $\mathbb{R}^N$ 中如果 $A=\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ 几何无关，其中 $n \leqslant N$，则称 $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ 的凸包

$$coA=\{\sum_{i=0}^{n} k_i\alpha_i : k_i \geqslant 0, \sum_{i=0}^{n} k_i = 1\}, \tag{22}$$

连同 Euclid 空间上度量拓扑的子空间拓扑为一个 n 维单纯形 (Simplex)。

k-Simplex

- A k-simplex is the convex hull of $k+1$ affinely independent points $S = v_0, v_1, ..., v_k$. The points in S are the vertices of the simplex.
- A k-simplex is a k-dimensional subspace of $\mathbb{R}^d$, $dim\sigma = k$.

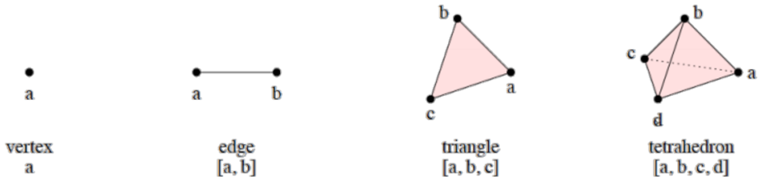


Fig. 5: k-simplex

Simplicial Complexes

假设 Euclid 空间中有一个收集了一些单形的集合 K，如果它满足：

1. K 是局部有限的，即和每个 K 中的单形有非空交的 K 中的单形是有限个。
2. K 中的任意两个单形规则相处。

$$\sigma \in K, \tau \leqslant \sigma \longrightarrow \tau \in K. \tag{23}$$

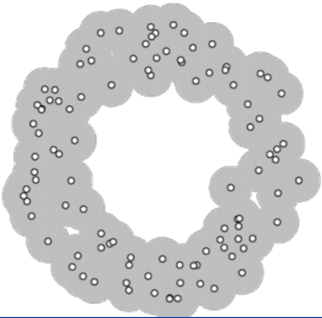
3. K 中的单形的每个面还在 K 中。

$$\sigma, \sigma' \in K \longrightarrow \sigma \cap \sigma' \leqslant \sigma, \sigma' \quad or \quad \sigma \cap \sigma' = \varnothing. \tag{24}$$

我们就称 K 是单纯复合形（simplicial complex）或简称复形。注意复形不一定是 [拓扑空间]。

ϵ-Balls

1. ϵ-Balls: $B_\epsilon(x) = \{y|d(x,y) < \epsilon\}$.
2. ϵ-Balls are open sets in Topology Space.
3. Manifold is $\tilde{\mathbb{M}} = \bigcup_{m_i \in M} B_\epsilon(m_i)$.
4. For a dataset X we study the topology of the union of balls $\tilde{\mathbb{M}} = \bigcup_{m_i \in M} B_\epsilon(m_i)$.



1. Abelian Group
2. Normal Subgroup
3. Topological Theory Analysis
   - Basic Conception
   - Special Complex

Cech Complex

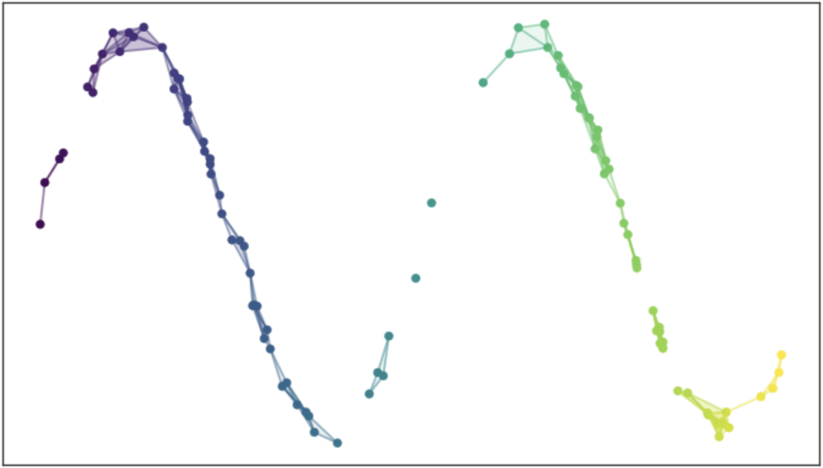
1. **Step 1: 为每一个** m_i **构造** ϵ-Ball $B_\epsilon(x)=\{y|d(x,y)<\epsilon\}$.
2. **Step 2: 构造单纯形：对于数据点集合** X **中的每一组点** $m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，**如果这组点的** ϵ-**邻域的交集非空，即**

$$B_\epsilon(m_{i_1})\cap B_\epsilon(m_{i_2})\cap\cdots\cap B_\epsilon(m_{i_k})\neq\varnothing, \tag{25}$$

则这组点构成 Cech Complex。

$$C_\epsilon(M)=\{convT|T\subseteq M,\cap_{m_i\in T}B_\epsilon(m_i)\neq\varnothing\}. \tag{26}$$

An example for Cech Complex



A simplicial complex built from the test data¶

Rips-Vietoris Complex

$$R_\epsilon(M) = \{convT \mid T \subseteq M, d(m_i, m_j) < \epsilon, m_i, m_j \in T\}. \tag{27}$$

- Relationship with Cech Complex:

$$B_\epsilon(x_1) \cap B_\epsilon(x_2) \neq \oslash \Longrightarrow d(x_1, x_2) \leqslant 2\epsilon, \tag{28}$$

$$x_1, x_2 \in R_{2\epsilon}(M). \tag{29}$$

$$C^{\frac{\alpha}{2}}(L) \subseteq R^\alpha(L) \subseteq C^\alpha(L) \subseteq R^{2\alpha}(L) \subseteq \cdots. \tag{30}$$