计算机视觉底层数学逻辑——第一回合

微分流形与微分形式

许笑颜

University of Science and Technology of China

2024 年 6 月 7 日

拓扑学的发源

(四色问题) 给地图上的各区域着色，要求相邻国家有不同的颜色．问至少需要几种颜色满足以上要求？这个问题的答案是：只需要 4 种颜色就足够了．这个问题首先被归结为图论问题，然后由计算机直接验证各类情形。
(莫比乌斯带) 将一条矩形的纸条一端扭转 180 度，与其对边粘合，得到的纸环称作莫比乌斯带．它和圆柱有着完全不同的几何 (拓扑) 性质．比如，它是单侧曲面．但是圆柱却是双侧曲面．

拓扑空间

设 X 是非空集合, T 是 X 上一些子集构成的集族, 满足以下条件:

- $\varnothing \in T, \quad X \in T$.
- T 中任意多个元素的并也在 T 中,
- T 中有限多个元素的交也在 T 中。

则称 T 是 X 上的一个拓扑 (Topology), X 称为拓扑空间. T 中的元素称为开集 (Open set).

拓扑空间的构造

- (实数轴上的标准拓扑) 设 $X \in \mathbb{R}^1, T = U|U$是开区间的并集. 显然 T 是集合 X 的拓扑, T 中的元素即为通常理解的开集. 这个拓扑称为标准拓扑。
- (平面上的标准拓扑) 设 $X \in \mathbb{R}^2, T = U|U$是开区间的并集 , T 也是 X 的标准拓扑, 其开集与我们在数学分析中理解的概念完全一致.
  1. 图像滤波中的标准拓扑
  2. 图像分割中的拓扑应用
- (平凡拓扑) 假设 X 是拥有有限可列可加个元素的集合, $T = \{\varnothing, X\}$, T 平凡的拓扑。

拓扑空间的构造

- 度量可以诱导出一个拓扑，其中的开集就定义为度量空间中的开集，这样的拓扑称为 [度量拓扑]（metric topology）。
- 设 X 是非空集合, T 是 X 的幂集. 该拓扑称为离散拓扑。
- 余有限拓扑 (finite complement topology): 无穷点集 X 上定义一个拓扑 T，其中的开集为空集或补集为有限集的子集合。
- 余可数拓扑 (countable complement topology): 无穷点集 X 上定义一个拓扑 T，其中的开集为空集或补集为可数集的子集合。

邻域和开集

邻域:
假设 $x \in X$，那么点 x 的一个邻域 (neighborhood) 是指包含 x 的一个开集 U。
开集:
开集 A 是空间 S 的子集合，A 中每点的 " 邻域 “完全在 A 中.
这里 " 邻域” 可用任意距离函数来定义，而上述开集定义应与所选距离函数无关.
例如, 实数轴 $\mathbb{R}^1$(一维线性空间 $\mathbb{R}^1$) 上不含端点的开区间 (a,b) 是开集, 但是含有端点的闭区间 [a,b] 不是开集, 因为其端点 a,b 的 “邻域” 并未完全属于此区间 [a,b].

Hausdorff 空间 & 同胚映射

- Hausdorff 空间是这样一个空间，其中任意两不同点间，均有不相交的开邻域。即对于任意两个不同的点 a 和 b，存在开集 U_a 和 U_b 使得：

$$a \in U_a, \quad b \in U_b,$$

并且 $U_a \cap U_b = \emptyset$。

- 同胚（Homeomorphism）是两个拓扑空间之间的双射连续函数。
映射 $f : X \to Y$ 称为是同胚映射或简称同胚，如果 f 是双射且 f^{-1} 是连续的。拓扑空间之间的映射 $f : X \to Y$ 在点 $x \in X$ 称为是连续的是指，对 $f(x)$ 在 Y 中的任何邻域 N，$f^{-1}(N)$ 是 x 的邻域。

1. Topology
2. Basic Conception
3. Manifold

流形 Manifold

设 M 是一个 Hausdorff 空间，如果 $\forall x \in M$，存在 x 在 M 中的一个邻域 $U \in M$，使得 U 同胚于 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 或其中一个开集，我们就说 M 是一个 n 维流形，一般称为拓扑流形，拓扑流形类记作 C^0.

- 几维空间中的单位球面 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ 是一个 $n-1$ 维流形，特别地 $n = 3$ 时就是三维空间中的单位球面:
- 相交（超）平面 $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| = |x_2|\}$ 不是流形，因为交点处的一个邻域不是平直的。
- 我们所处的世界应当理解为是三维流形，而不一定是三维欧氏空间，可以设想三维空间中的球面上处处都可以感知到球面是二维的，但它却不是二维欧氏空间。

Manifold Algorithm-Isomap(Recommended!)

Estimate the intrinsic geometry of a data manifold based on a rough estimate of each data point' s neighbors on the manifold.

- Determine the neighbors of each point.
  1. All points in some fixed radius.
  2. K nearest neighbors.
- Construct a neighborhood graph.
  1. Each point is connected to other if it is a K nearest neighbor.
  2. Edge length equal to Euclidean distance.
- Compute shortest path between two nodes.
  1. Dijkstra's algorithm
  2. Floyd–Warshall algorithm
- Compute lower-dimensional embedding.
  1. Multidimensional scaling

Manifold Algorithm-LLE

1. Compute the neighbors of each data point, X_i.
2. Compute the weights W_{ij} that best reconstruct each data point X_i from its neighbors, minimizing the cost by constrained linear fits.

$$E(W) = \sum_i |X_i - \sum_j W_{ij} X_j|.$$

3. Compute the vectors Y_i best reconstructed by the weights W_{ij}, minimizing the quadratic form by its bottom nonzero eigenvectors.

$$\Phi(Y) = \sum_i |Y_i - \sum_j W_{ij} Y_j|^2.$$

Manifold Algorithm-LLE

1. **Neighborhood selection:** For each data point in a high-dimensional space, the LLE identifies its k-nearest neighbor.
2. **Weight matrix construction:** LLE calculates a set of weights for each data point, representing it as a linear combination of its neighbors. These weights should be determined in such a way as to minimize reconstruction errors.
3. **Global Structure Preservation:** Once the weights matrix is constructed, LLE's goal is to find a low-dimensional representation of the data that best preserves the local linear relationship.
4. **Output Embedding:** Once the optimization process is complete, the LLE provides a final low-dimensional representation of the data. This representation captures the basic structure of the data while reducing its dimensionality.