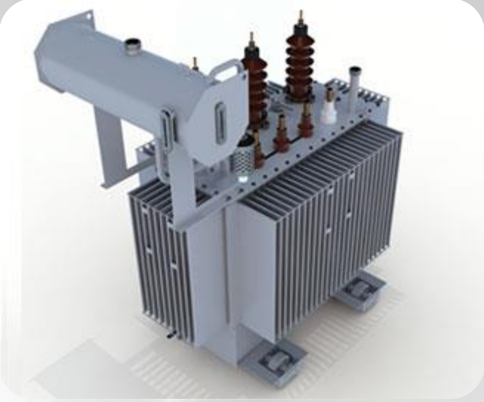
Universidade Federal de Uberlândia
- UFU -

Faculdade de Engenharia
Elétrica - FEELT -

CAPÍTULO 01

CIRCUITOS MAGNETICAMENTE ACOPLADOS



PROF. PAULO HENRIQUE OLIVEIRA REZENDE

paulohenrique16@gmail.com

Uberlândia – 2018/1

SUMÁRIO

I. Introdução;
II. Indutância Própria;
III. Indutância Mútua;
IV. Polaridade das tensões induzidas;
V. Associação de Indutores (Indutância Equivalente);
VI. Análise de Circuitos Magneticamente Acoplados;
VII. Energia armazenada em Circuitos Magneticamente Acoplados;
VIII. Transformadores Lineares;
IX. Transformadores Ideais;
X. Transformadores com núcleo de ferro.

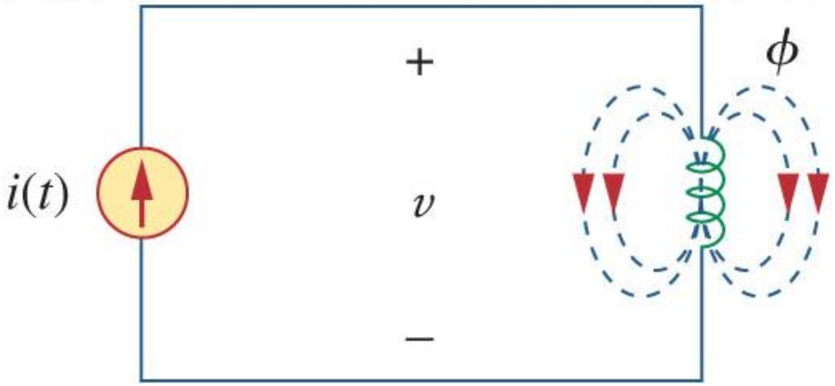
I. Introdução

- Os circuitos estudados nas aulas anteriores são chamados de condutivos, pois um circuito afeta o vizinho pela condução da corrente elétrica por meios físicos;

- Quando dois circuitos com ou sem contatos entre eles afetam por meio de campo magnético gerado por um deles, diz-se que são acoplados magneticamente;

- Os transformadores são exemplo de dispositivo elétrico projetado com base no conceito de acoplamento magnético, pois usam bobinas acopladas magneticamente para transferir energia de um circuito para o outro.

II. INDUTÂNCIA PRÓPRIA



Quando uma corrente **i(t)** flui através de um indutor simples, um fluxo magnético ϕ é produzido ao redor dele.

Lei de Faraday:

$$\boxed{v = N\frac{d\phi}{dt}}$$

O fluxo magnético ϕ é produzido pela corrente **i(t)**.
Assim, qualquer alteração nesse fluxo é causada por uma variação de **i(t)**.

$$v = N\frac{d\phi}{dt}\frac{di}{di} = \underbrace{N\frac{d\phi}{di}}_{L}\frac{di}{dt} \Rightarrow v = L\frac{di}{dt}$$

Então:

$$N\frac{d\phi}{\cancel{dt}}\frac{\cancel{di}}{di} = L\frac{\cancel{di}}{\cancel{dt}} \Rightarrow \boxed{L = N\frac{d\phi}{di}}$$ **Indutância própria**

A **indutância própria** relaciona a tensão induzida em uma bobina provocada por uma corrente variante no tempo, na mesma bobina.

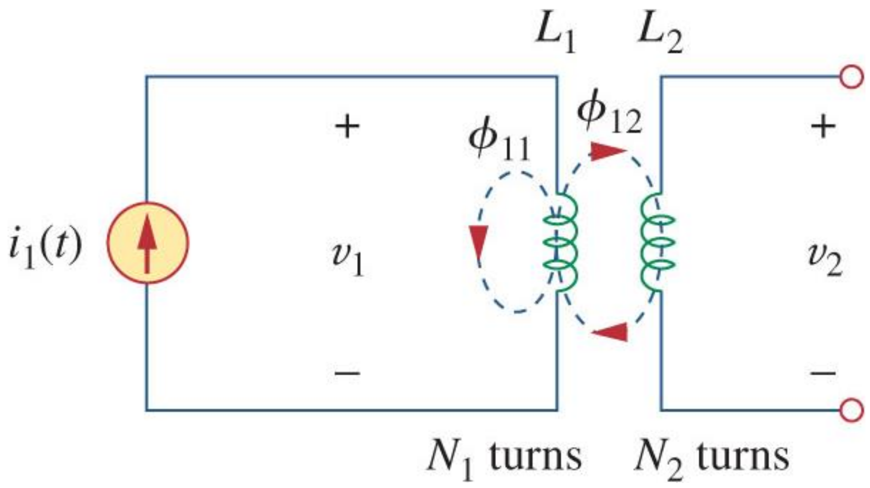
Tem-se duas bobinas próximas, com indutâncias próprias $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$, contendo $\mathbf{N_1}$ e $\mathbf{N_2}$ espiras, respectivamente. Em um primeiro momento, considera-se que não há circulação de corrente em $\mathbf{L_2}$.

É evidente que o fluxo magnético ϕ_1, originado na bobina 1, possui duas componentes:

ϕ_{11} = fluxo magnético que percorre a bobina 1 apenas;

ϕ_{12} = fluxo magnético que percorre as duas bobinas.

$$\boxed{\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}}$$



$$i(t) \rightarrow \phi(t) \rightarrow v(t) \quad \therefore \quad v(t) \Rightarrow i(t)$$

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dt}\frac{di_1}{di_1} = N_1 \frac{d\phi_1}{di_1}\frac{di_1}{dt} \Rightarrow v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \Rightarrow L_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{di_1}$$

L_1

Indutância própria da bobina 1

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt}\frac{di_1}{di_1} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1}\frac{di_1}{dt} \Rightarrow v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} \Rightarrow \boxed{M_{21} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1}}$$

M_{21}

Tensão induzida na bobina 2 em circuito aberto

Indutância Mútua

da bobina 2 com respeito à bobina 1

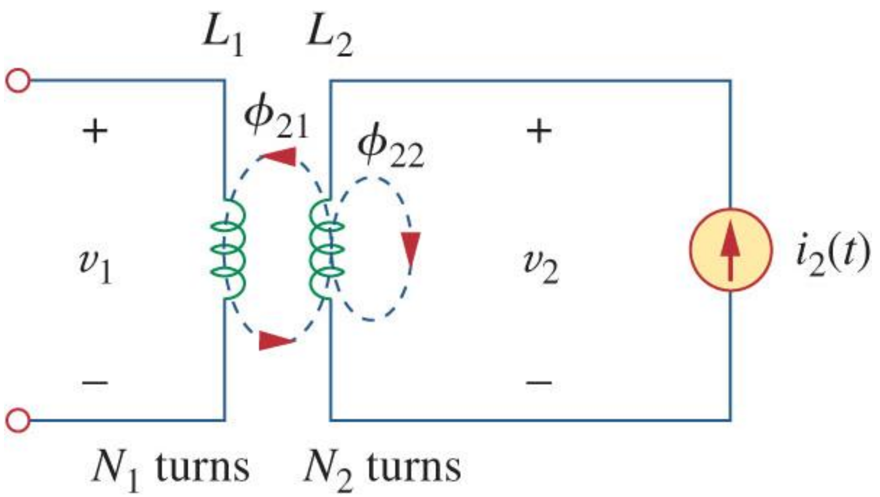
III. INDUTÂNCIA MÚTUA

Tem-se duas bobinas próximas, com auto-indutâncias **L_1** e **L_2**, contendo **N_1** e **N_2** espiras, respectivamente. Em um primeiro momento, considera-se que não há circulação de corrente em **L_1**.

É evidente que o fluxo magnético ϕ_2, originado na bobina 2, possui duas componentes:

ϕ_{21} = fluxo magnético que percorre a bobina 2 apenas;
ϕ_{22} = fluxo magnético que percorre as duas bobinas.

$$\boxed{\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}}$$



$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt}\frac{di_2}{di_2} = N_2 \frac{d\phi_2}{di_2}\frac{di_2}{dt} \Rightarrow v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \Rightarrow L_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{di_2}$$

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_{21}}{dt}\frac{di_2}{di_2} = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2}\frac{di_2}{dt} \Rightarrow v_1 = M_{12} \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \boxed{M_{12} = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2}}$$

L_2

M_{12}

Indutância própria da bobina 2

Tensão induzida na bobina 1 em circuito aberto

Indutância Mútua

da bobina 1 com respeito à bobina 2

III. INDUTÂNCIA MÚTUA

- Considerando-se a permeabilidade constante do meio físico (no caso o ar), tem-se uma relutância fixa da trajetória do fluxo magnético ($\mathscr{R}_{21} = \mathscr{R}_{12}$)

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$$

- ***M*** é a indutância mútua entre dois enrolamentos, expressa em ***henryes (H)***

Indutância Mútua é a capacidade de um indutor induzir uma tensão sobre um indutor vizinho

COEFICIENTE DE ACOPLAMENTO MAGNÉTICO

(Indica a porcentagem da parcela de fluxo (ϕ_{12} e ϕ_{21}) que consegue enlaçar a bobina vizinha, e é definido por:

$$K = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2}$$

Onde $0 < k < 1$

Tomando o produto dos dois valores de indutância mútua e assumindo que K (coeficiente de acoplamento) depende apenas da geométrica do sistema, temos:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$$M^2 = M_{12} \cdot M_{21}$$

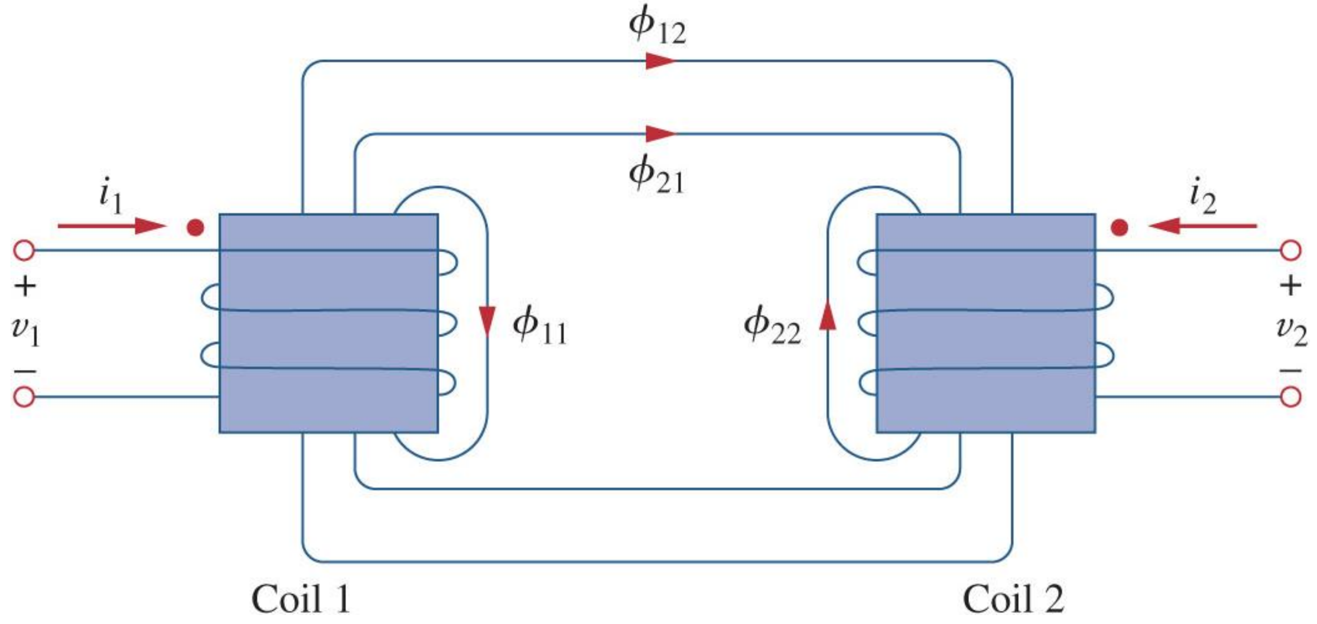
$$\left\{ \begin{aligned} M_{12} &= N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \\ M_{21} &= N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{k_M = \sqrt{\left(\frac{M}{L_1}\right)\left(\frac{M}{L_2}\right)} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}}$$

Embora a indutância mútua (M) seja sempre positiva, a tensão mútua $\left(M\frac{di}{dt}\right)$ pode ser negativa ou positiva

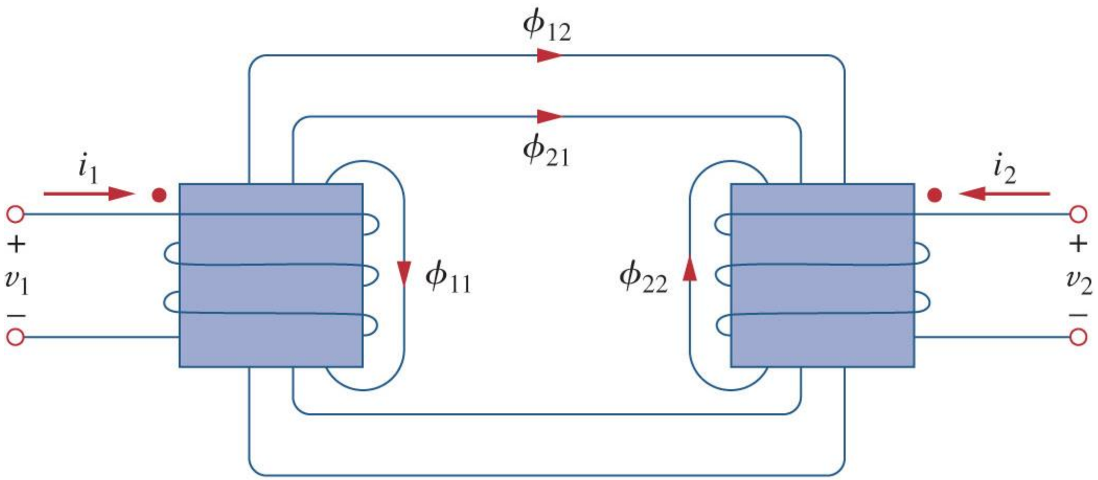
A escolha da polaridade de “M” deve ser feita analisando a orientação particular de enrolamento de ambas as bobinas. Mas mostrar os detalhes construtivos das bobinas nos circuitos é inviável, diante disso criou-se a “**regra do ponto**”

Considere um circuito magnético abaixo:



IV. Polaridade das tensões induzidas

Como marcar os pontos em um circuito magneticamente acoplado:



Sequência:

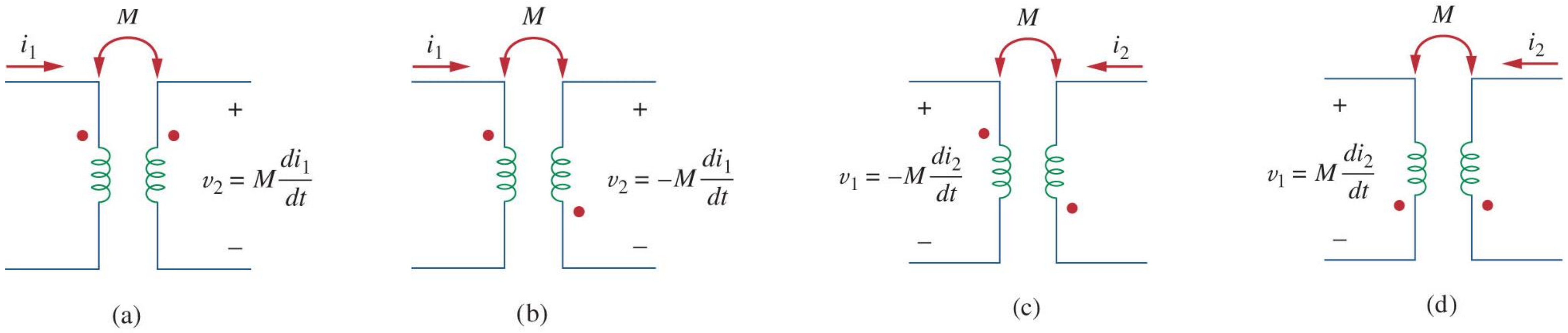
1. Marca-se um "ponto" no terminal do primário (bobina 1) por onde a corrente entra (***i_1***);
2. Desenha-se o sentido do fluxo magnético originado pela bobina 1 que atinge a bobina 2 (***ϕ_{12}***) (Regra da mão direita);
3. Verificar qual é o sentido da corrente na bobina 2 que dará origem a um fluxo (***ϕ_{21}***) que se soma com o inicial;
4. Marca-se um "ponto" no terminal da bobina 2, por onde a corrente entra (***i_2***);

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Faculdade de Engenharia Elétrica FEELT

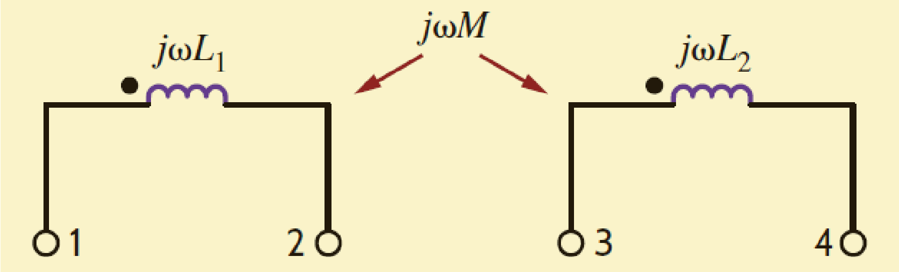
COMO IDENTIFICAR A POLARIDADE DA TENSÃO INDUZIDA CONHECENDO-SE OS "PONTOS":

Opção 01: Se a corrente **entra** pelo terminal do ponto em uma bobina, a tensão mútua será **positiva** no terminal da segunda bobina que contém o ponto.

Opção 02: Se a corrente **sai** pelo terminal do ponto em uma bobina, a tensão mútua será **negativa** no terminal da segunda bobina que contém o ponto.

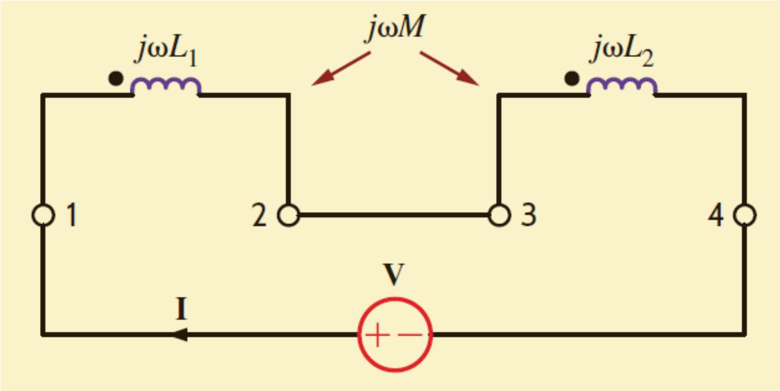


DUAS BOBINAS MUTUAMENTE ACOPLADAS PODEM SER LIGADAS DA SEGUINTE MANEIRA:



Associação Série:

Polaridade Série Aditiva

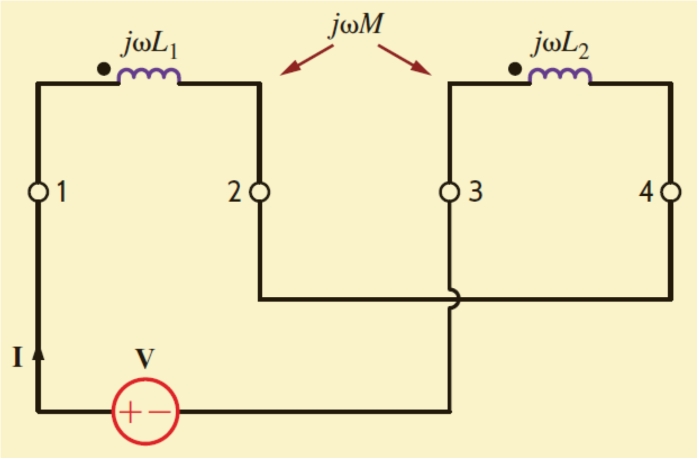


$$\mathbf{V} = j\omega L_1\mathbf{I} + j\omega M\mathbf{I} + j\omega L_2\mathbf{I} + j\omega M\mathbf{I}$$

$$\mathbf{V} = j\omega L_{eq}\mathbf{I}$$

$$\Rightarrow \quad L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

Polaridade Série Subtrativa



$$\mathbf{V} = j\omega L_1\mathbf{I} - j\omega M\mathbf{I} + j\omega L_2\mathbf{I} - j\omega M\mathbf{I}$$

$$\mathbf{V} = j\omega L_{eq}\mathbf{I}$$

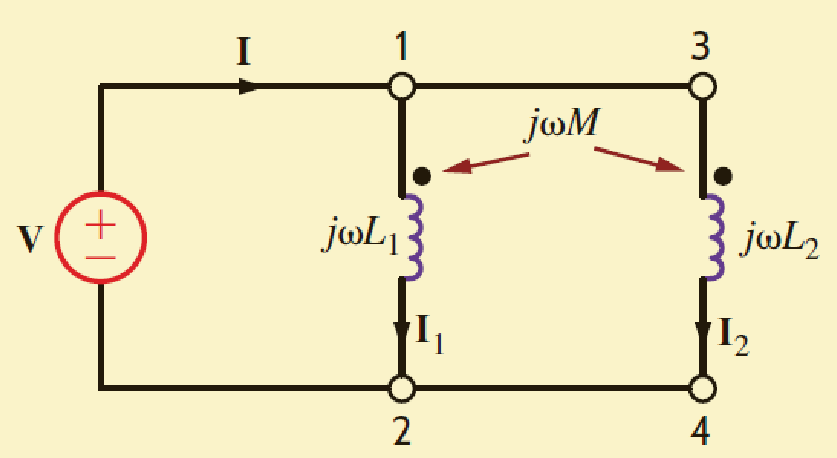
$$\Rightarrow \quad L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$$

V. ASSOCIAÇÃO DE INDUTORES (INDUTÂNCIA EQUIVALENTE)

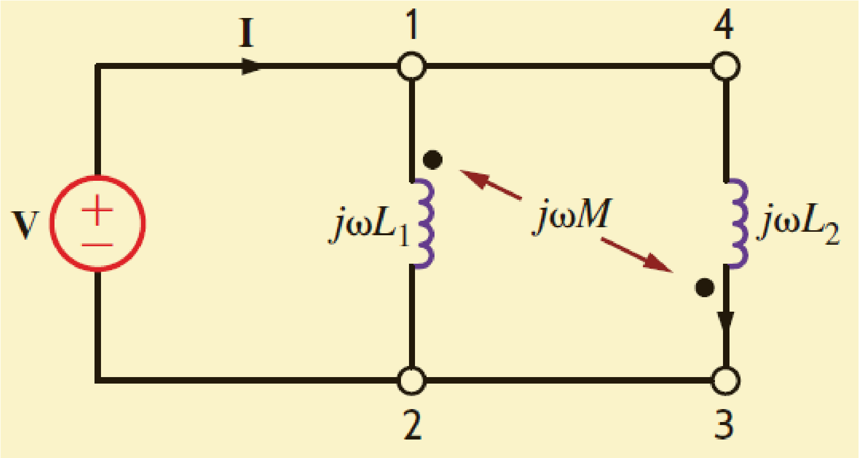
DUAS BOBINAS MUTUAMENTE ACOPLADAS PODEM SER LIGADAS DA SEGUINTE MANEIRA:

Associação Paralela:

Polaridade Paralela Aditiva



Polaridade Paralela Subtrativa



$$\mathbf{V} = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V} = j\omega M \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}(L_2 - M)}{j\omega(L_1L_2 - M^2)}$$
$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}(L_1 - M)}{j\omega(L_1L_2 - M^2)}$$

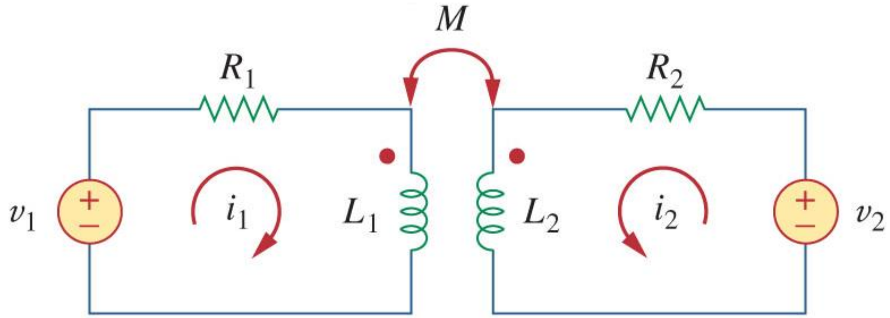
$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}(L_1 + L_2 - 2M)}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L_{eq}}$$

$$L_{eq} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

$$L_{eq} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

VI. ANÁLISE DE CIRCUITOS MAGNETICAMENTE ACOPLADOS

CIRCUITO COM FONTE EM AMBOS OS LADOS

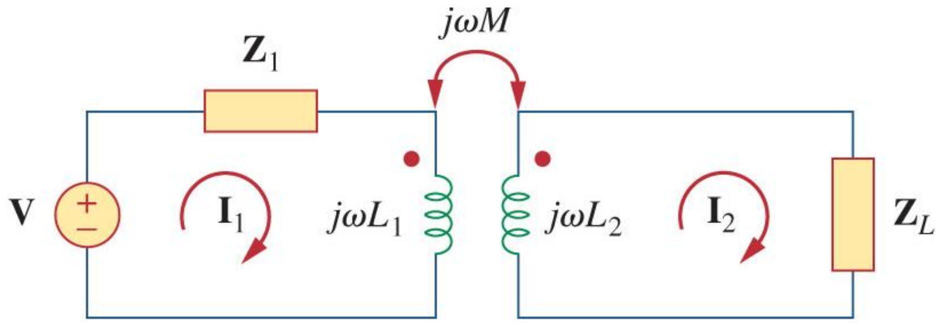


Polaridade aditiva

$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 + j\omega M\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = + j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\mathbf{I}_2$$

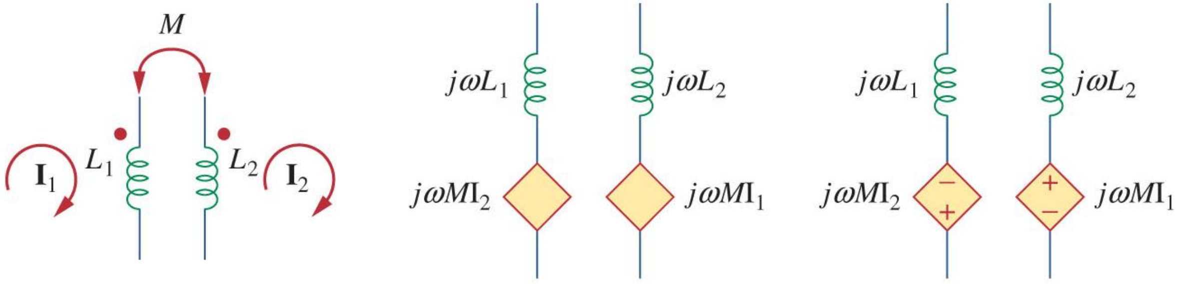
CIRCUITO COM FONTE EM APENAS UM LADO



Polaridade subtrativa

$$\mathbf{V} = (\mathbf{Z}_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2$$

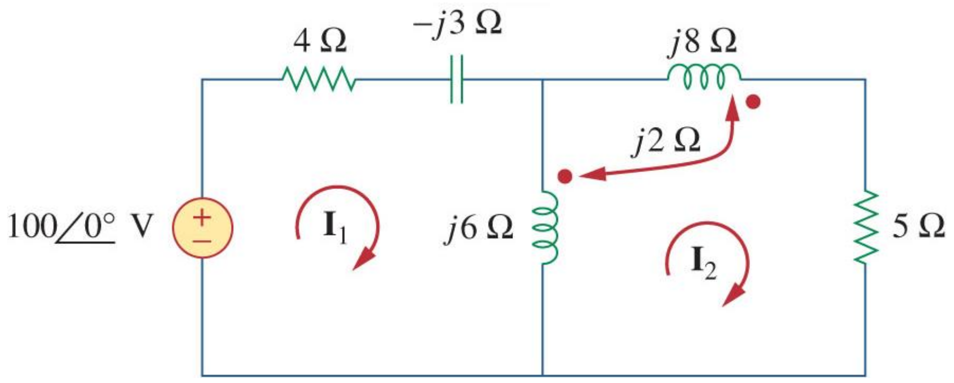
$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_L + j\omega L_2)\mathbf{I}_2$$

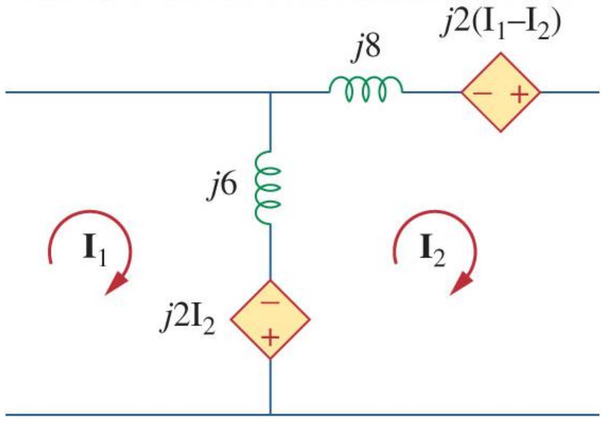


(a) (b) (c)

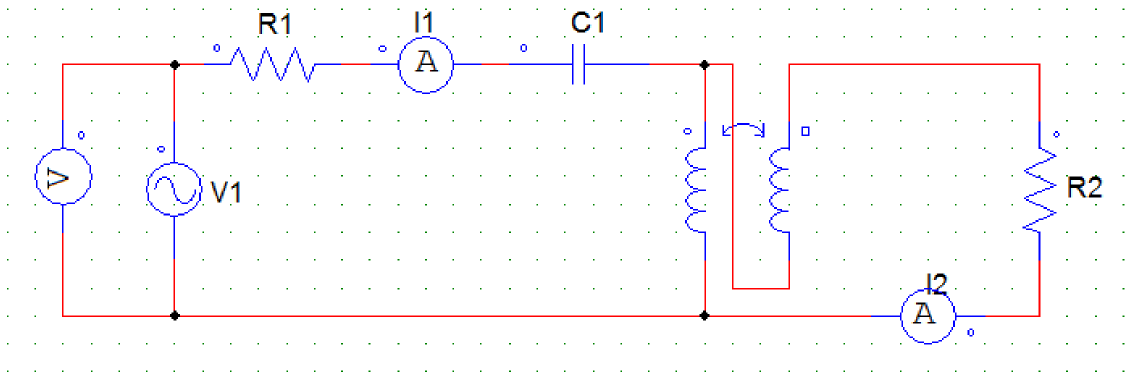
VI. ANÁLISE DE CIRCUITOS MAGNETICAMENTE ACOPLADOS

EXERCÍCIO 01: CALCULE AS CORRENTES DE MALHA DO CIRCUITO ABAIXO:





Simulação:
Software *Psim* (Demo)

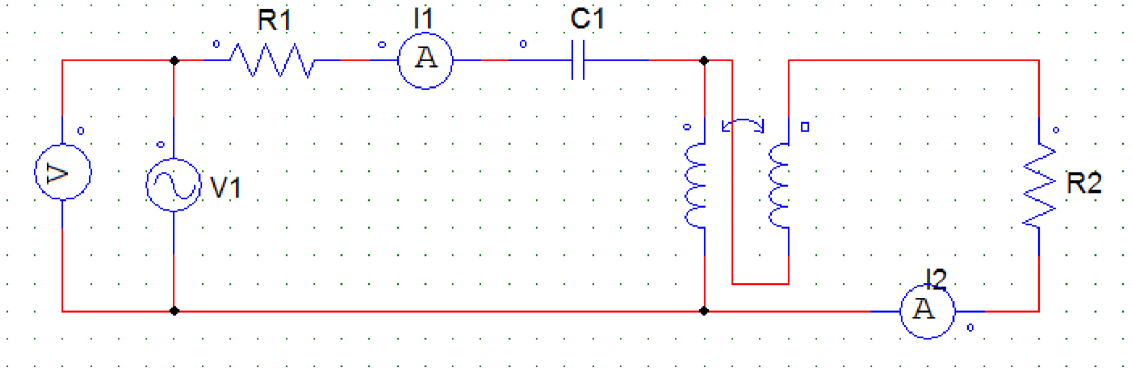


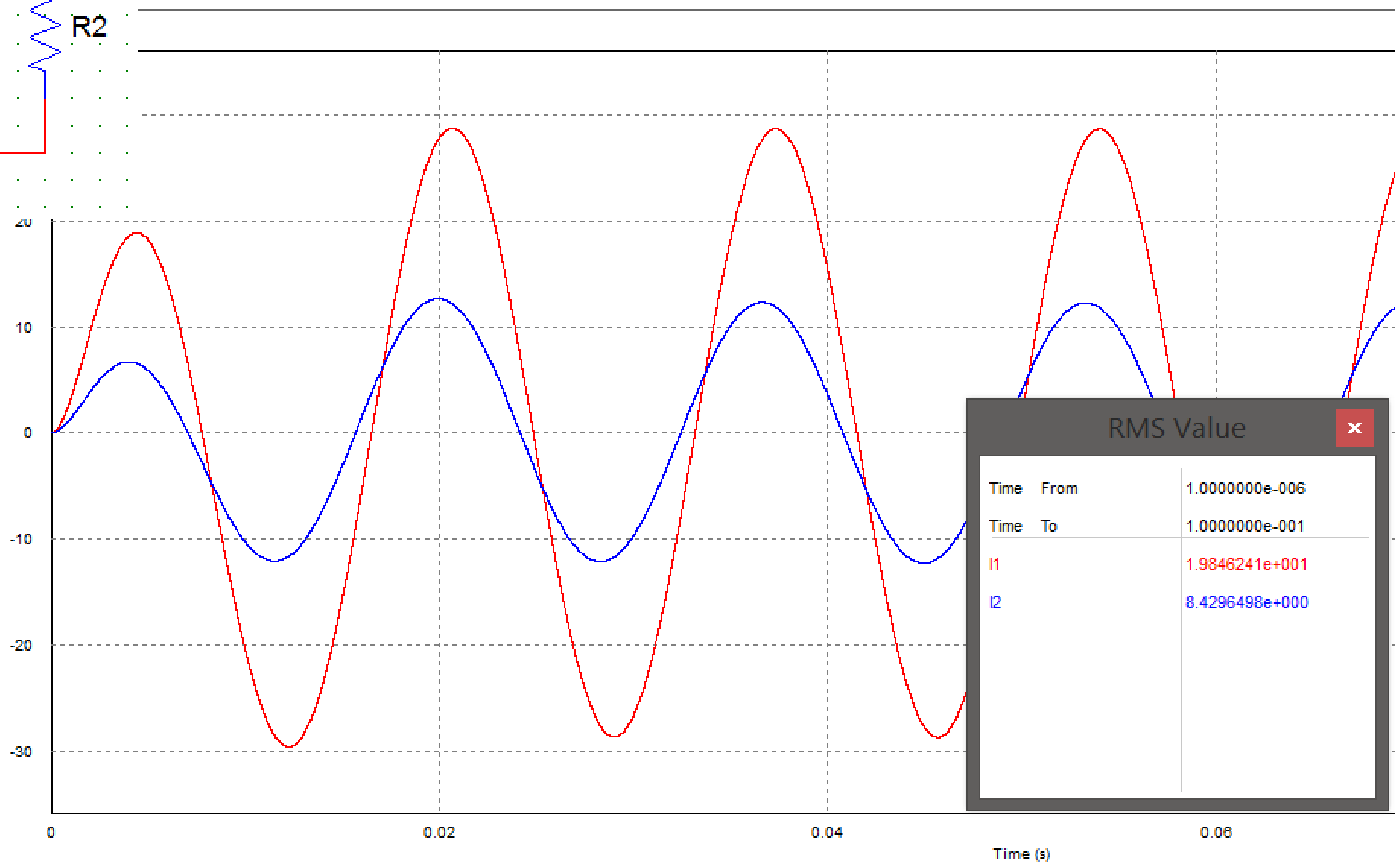
MALHA 01: $100 < 0º = 4I_1 + [(-j3)I_1] + j6(I_1 - I_2) - j2I_2$

MALHA 02: $0 = 5I_2 + j2(I_2 - I_1) + j8I_2 + j6(I_2 - I_1) + j2I_2$

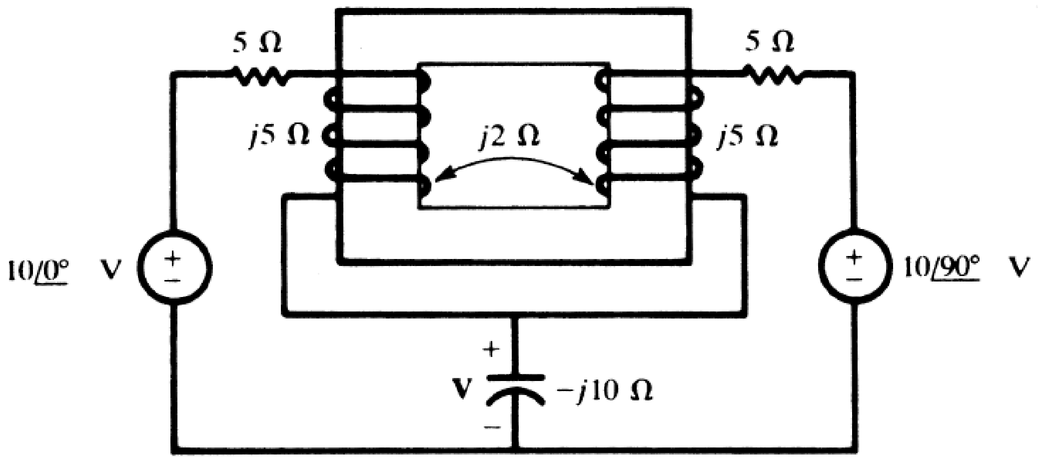
$$\begin{cases} I_1 = 20{,}3 < 3{,}5º \ A \\ I_2 = 8{,}69 < 19{,}03º \ A \end{cases}$$

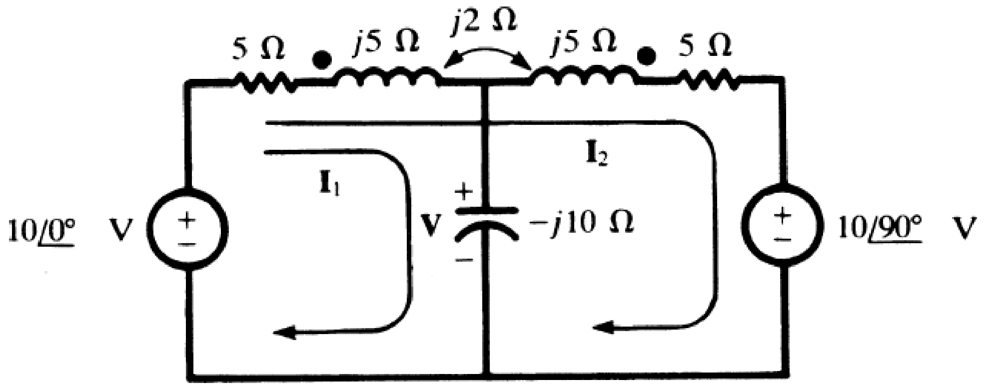
EXERCÍCIO 01: CALCULE AS CORRENTES DE MALHA DO CIRCUITO ABAIXO:





EXERCÍCIO 02: FAÇA UM CIRCUITO EQUIVALENTE SUBSTITUINDO O SENTIDO DOS ENROLAMENTOS DAS BOBINAS MAGNETICAMENTE ACOPLADAS PELOS PONTOS E ENCONTRE A TENSÃO EM CIMA DO CAPACITOR DE REATÂNCIA 10 Ω:



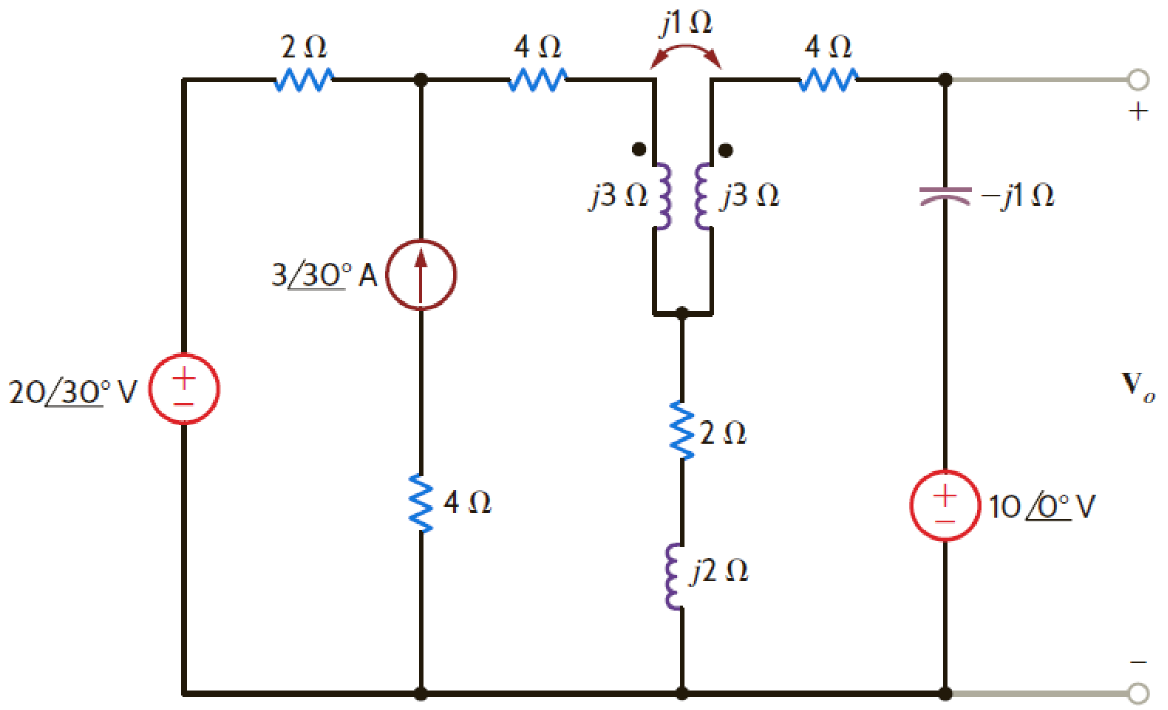


$$\begin{bmatrix} 5-j5 & 5+j3 \\ 5+j3 & 10+j6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ 10-j10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5+j3 \\ 10-j10 & 10+j6 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 1.015\angle 113.96^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}_1(-j10) = 10.15\angle 23.96^\circ \text{ V}$$

Exercício 03: Encontre a tensão V_0 do circuito acoplado magneticamente abaixo:



Resposta:

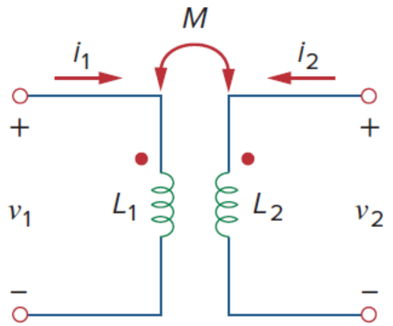
$$\mathbf{V}_o = 11.4\underline{/0.334^\circ}\ \text{V}.$$

VII. ENERGIA ARMAZENADA EM CIRCUITOS MAGNETICAMENTE ACOPLADOS

A energia armazenada num indutor é dada por:

$$w = \frac{1}{2} L i^2$$

Agora, queremos determinar a energia armazenada em bobinas acopladas magneticamente:



Consideremos o circuito da Figura acima. Suponhamos que as correntes i_1 e i_2 sejam, inicialmente, zero, de modo que a energia armazenada nas bobinas seja zero. Se aumentarmos i_1 de zero até I_1 mantendo $i_2 = 0$, a potência e energia na bobina 1 será:

$$p_1(t) = v_1 i_1 = i_1 L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \xrightarrow{\text{Energia}} \quad w_1 = \int p_1 dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1\, di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Se agora mantivermos $i_1 = I_1$ e aumentarmos i_2 de zero até I_2, a tensão mútua induzida na bobina 1 será $M_{12}\, di_2/dt$, enquanto a tensão mútua induzida na bobina 2 será zero, já que i_1 não muda. A potência e energia na bobina 2 agora é:

$$p_2(t) = i_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 v_2 = I_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 L_2 \frac{di_2}{dt} \quad \xrightarrow{\text{Energia}} \quad w_2 = \int p_2 dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 + L_2 \int_0^{I_2} i_2 di_2$$

$$= M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

VII. ENERGIA ARMAZENADA EM CIRCUITOS MAGNETICAMENTE ACOPLADOS

A energia total armazenada nas bobinas quando tanto i_1 quanto i_2 atingiram valores constantes é:

$$w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

Se invertermos a ordem na qual as correntes atingem seus valores finais, isto é, aumentarmos, primeiro, i_2 de zero até I_2 e, posteriormente, i_1 de zero a I_1, a energia total armazenada nas bobinas será:

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

Como a energia total armazenada deve ser a mesma independentemente de como atingimos as condições finais, comparar as Equações anteriores nos leva a concluir que:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

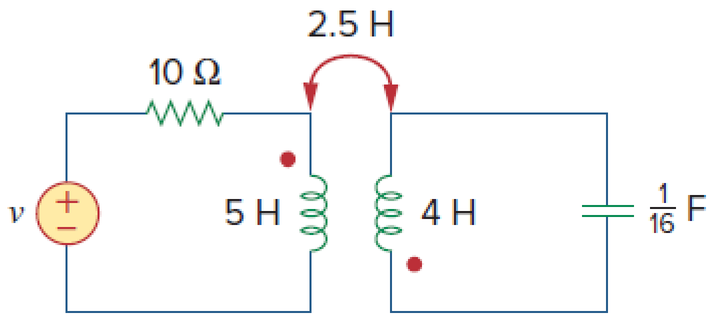
Se uma corrente entrar por um terminal marcado com um ponto, enquanto a outra corrente deixa o outro terminal marcado com um ponto, a tensão mútua será negativa, de modo que a energia mútua MI_1I_2 também será negativa.

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2$$

$$w = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$

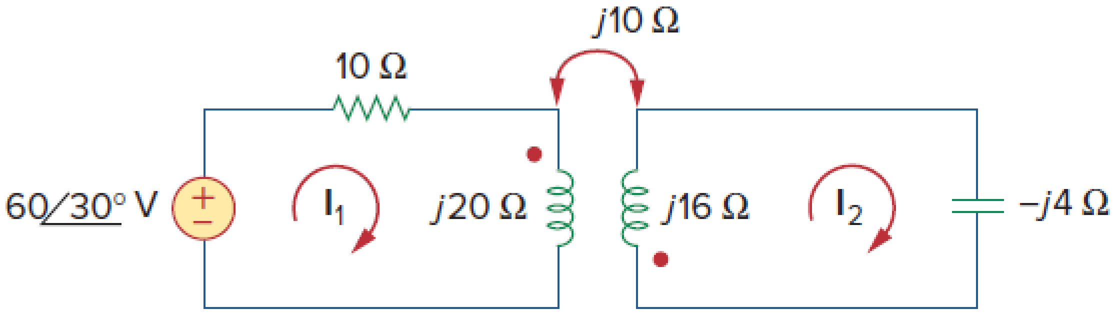
Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Faculdade de Engenharia Elétrica FEELT

EXERCÍCIO 04: DETERMINE O COEFICIENTE DE ACOPLAMENTO E CALCULE A ENERGIA ARMAZENADA NOS INDUTORES ACOPLADOS NO INSTANTE ***t* = 1 s** SE ***v* = 60 cos (4*t* + 30°)** V.

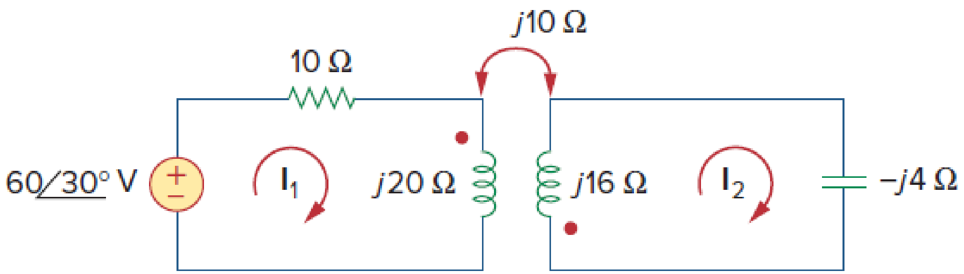


$$60\cos(4t+30^\circ) \Rightarrow 60\underline{/30^\circ},\ \omega = 4\text{ rad/s}$$
$$5\text{ H} \Rightarrow j\omega L_1 = j20\ \Omega$$
$$2.5\text{ H} \Rightarrow j\omega M = j10\ \Omega$$
$$4\text{ H} \Rightarrow j\omega L_2 = j16\ \Omega$$
$$\frac{1}{16}\text{ F} \Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j4\ \Omega$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{2.5}{\sqrt{20}} = 0.56$$



EXERCÍCIO 04: DETERMINE O COEFICIENTE DE ACOPLAMENTO E CALCULE A ENERGIA ARMAZENADA NOS INDUTORES ACOPLADOS NO INSTANTE ***t* = 1 s** SE ***v* = 60 cos (4*t* + 30º)** V.



$$(10 + j20)\mathbf{I}_1 + j10\mathbf{I}_2 = 60\underline{/30^\circ}$$

$$j10\mathbf{I}_1 + (j16 - j4)\mathbf{I}_2 = 0$$

$$\mathbf{I}_1 = -1.2\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{I}_2(-12 - j14) = 60\underline{/30^\circ}$$

$$\mathbf{I}_2 = 3.254\underline{/160.6^\circ}\text{ A}$$

$$\mathbf{I}_1 = -1.2\mathbf{I}_2 = 3.905\underline{/-19.4^\circ}\text{ A}$$

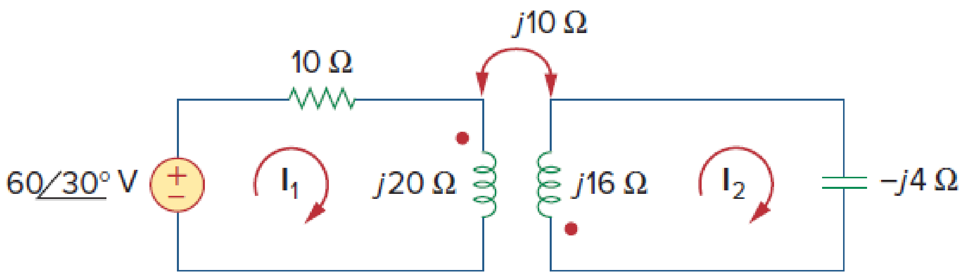
As correntes no domínio do tempo:

$$i_1 = 3.905\cos(4t - 19.4^\circ), \qquad i_2 = 3.254\cos(4t + 160.6^\circ)$$

Em *t = 1 s, 4t = 4 = 229,2º:*

$$i_1 = 3.905\cos(229.2^\circ - 19.4^\circ) = -3.389\text{ A}$$
$$i_2 = 3.254\cos(229.2^\circ + 160.6^\circ) = 2.824\text{ A}$$

EXERCÍCIO 04: DETERMINE O COEFICIENTE DE ACOPLAMENTO E CALCULE A ENERGIA ARMAZENADA NOS INDUTORES ACOPLADOS NO INSTANTE ***t* = 1 s** SE ***v* = 60 cos (4*t* + 30°)** V.



A energia total armazenada nos indutores acoplados é

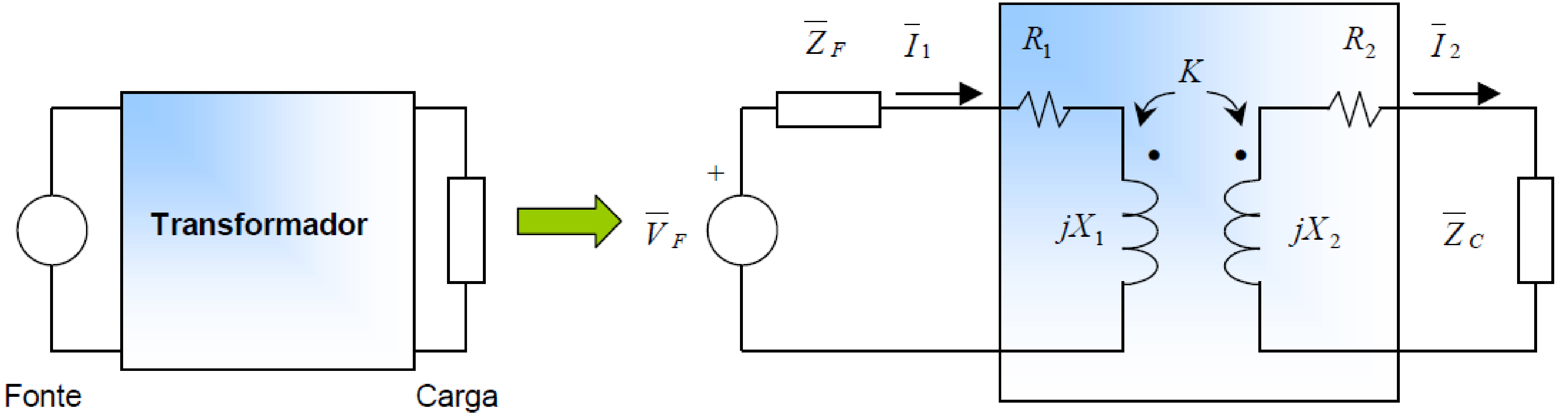
$$w = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

$$= \frac{1}{2}(5)(-3.389)^2 + \frac{1}{2}(4)(2.824)^2 + 2.5(-3.389)(2.824) = 20.73\ \mathrm{J}$$

VIII. TRANSFORMADORES LINEARES

- Diz-se que o transformador é linear se as bobinas forem enroladas em um material magneticamente linear – um material para o qual a permeabilidade magnética é constante;

- Entre esses materiais, temos ar, plástico, baquelite e madeira. Na realidade, a maioria dos materiais é magneticamente linear. (Desvantagem desses materiais é o coeficiente de acoplamento relativamente baixo)



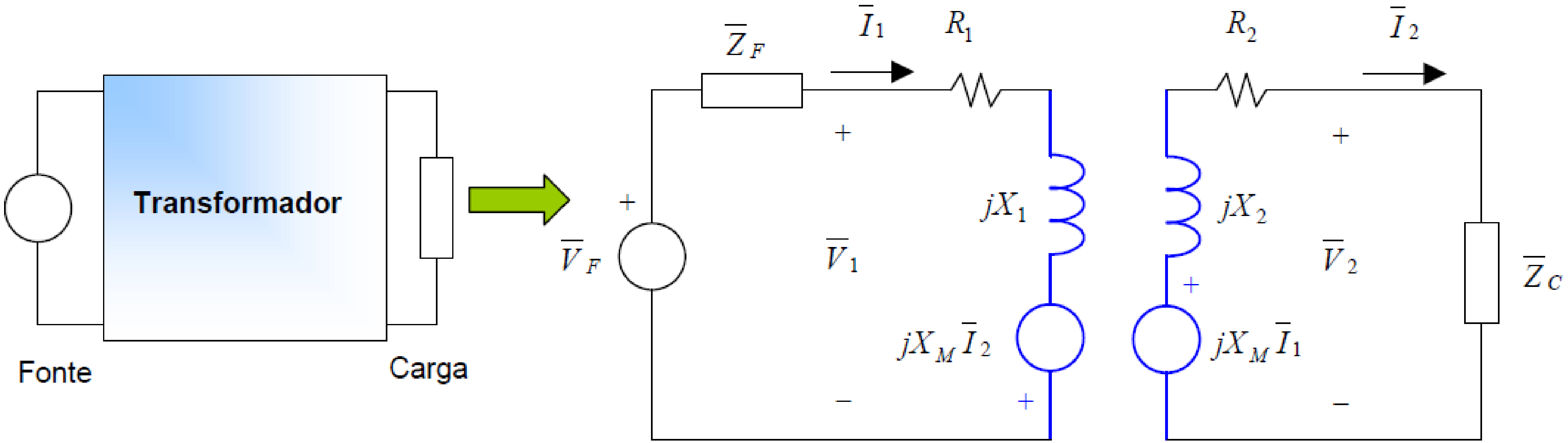
$$X_M = K\sqrt{X_1 X_2}$$

R_1 e X_1 – Impedância própria (resistência e reatância) do enrolamento primário;
R_2 e X_2 – Impedância própria (resistência e reatância) do enrolamento secundário;
X_M – Reatância relativa ao acoplamento mútuo entre os enrolamentos.

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Faculdade de Engenharia Elétrica FEELT

IMPEDÂNCIA DE ENTRADA (Z) VISTA PELA FONTE:

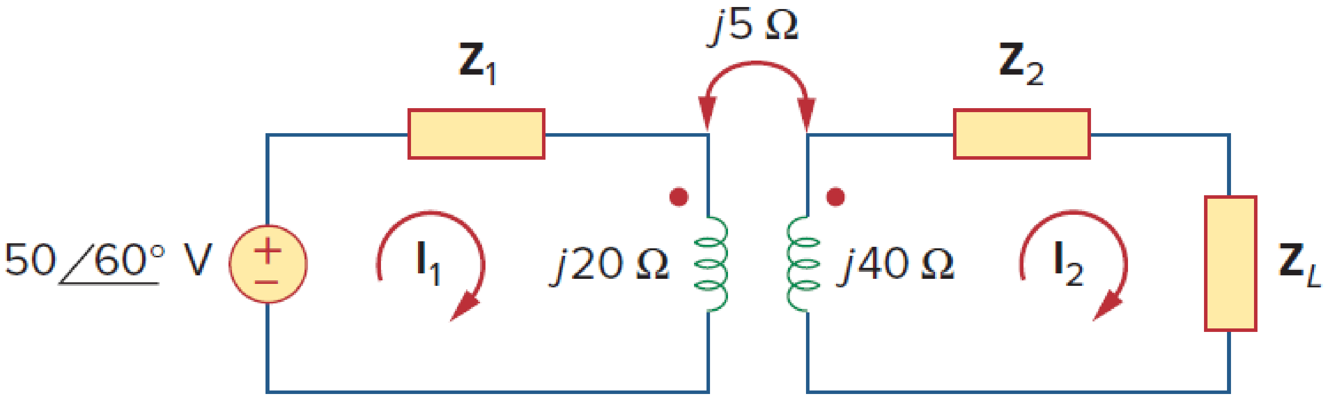


Sentido dos pontos não importa!!

Expressando I_2 em termos de I_1, temos:

$$\overline{Z} = \frac{\overline{V}_F}{\overline{I}_1} = \frac{\left(\overline{Z}_F + R_1 + jX_1 + \dfrac{X_M^2}{R_2 + jX_2 + \overline{Z}_C}\right)\overline{I}_1}{\overline{I}_1} = \overbrace{\overline{Z}_F}^{\text{Fonte}} + \overbrace{R_1 + jX_1}^{\text{Impedância do primário}} + \overbrace{\frac{X_M^2}{R_2 + jX_2 + \overline{Z}_C}}^{\overline{Z}_2^{ref}}$$

EXERCÍCIO 05: NO CIRCUITO DA FIGURA ABAIXO, CALCULE A IMPEDÂNCIA DE ENTRADA E A CORRENTE I_1. CONSIDERE $Z_1 = 60 - j100\ \Omega$, $Z_2 = 30 - j40\ \Omega$ E $Z_L = 80 - j60\ \Omega$:



$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_1 + j20 + \frac{(5)^2}{j40 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_L}$$

$$= 60 - j100 + j20 + \frac{25}{110 + j140}$$

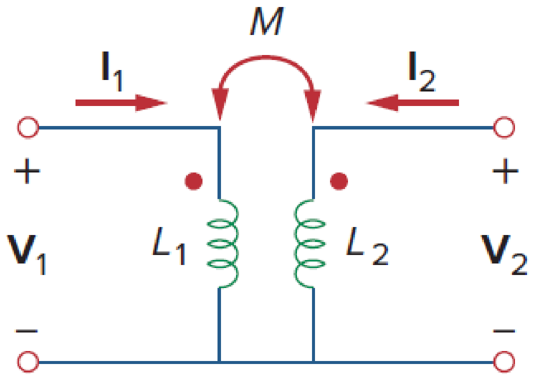
$$= 60 - j80 + 0.14\underline{/-51.84^\circ}$$

$$= 60.09 - j80.11 = 100.14\underline{/-53.1^\circ}\ \Omega$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{in}} = \frac{50\underline{/60^\circ}}{100.14\underline{/-53.1^\circ}} = 0.5\underline{/113.1^\circ}\ \text{A}$$

CIRCUITOS EQUIVALENTES NÃO ACOPLADOS:

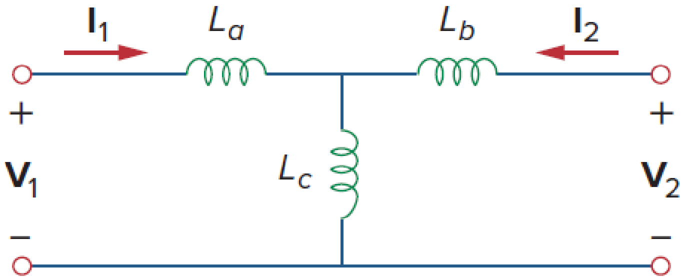
Por vários motivos, é conveniente substituir um circuito acoplado magneticamente por um sem acoplamento magnético. Dessa forma, considerem o transformador abaixo e suas equações de malha de tensão:



$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Circuito Equivalente T:

Para o circuito T (abaixo), a análise de malhas fornece as equações terminais, como segue:



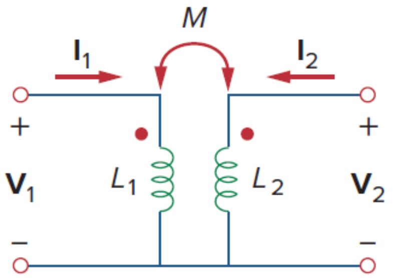
$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega(L_a + L_c) & j\omega L_c \\ j\omega L_c & j\omega(L_b + L_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \; \left. \right\} \; \begin{aligned} L_a &= L_1 - M, \\ L_b &= L_2 - M, \\ L_c &= M \end{aligned}$$

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Faculdade de Engenharia Elétrica FEELT

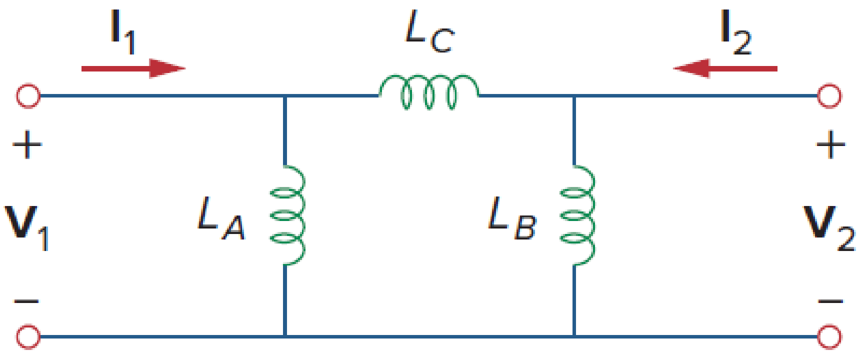
CIRCUITOS EQUIVALENTES NÃO ACOPLADOS:

Circuito Equivalente π:

Para o circuito π (abaixo), a análise nodal fornece as equações nos terminais, como segue:



$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{j\omega L_A} + \dfrac{1}{j\omega L_C} & -\dfrac{1}{j\omega L_C} \\ -\dfrac{1}{j\omega L_C} & \dfrac{1}{j\omega L_B} + \dfrac{1}{j\omega L_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Por inversão de matrizes, é possível escrever as correntes como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L_2}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \dfrac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \\ \dfrac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \dfrac{L_1}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

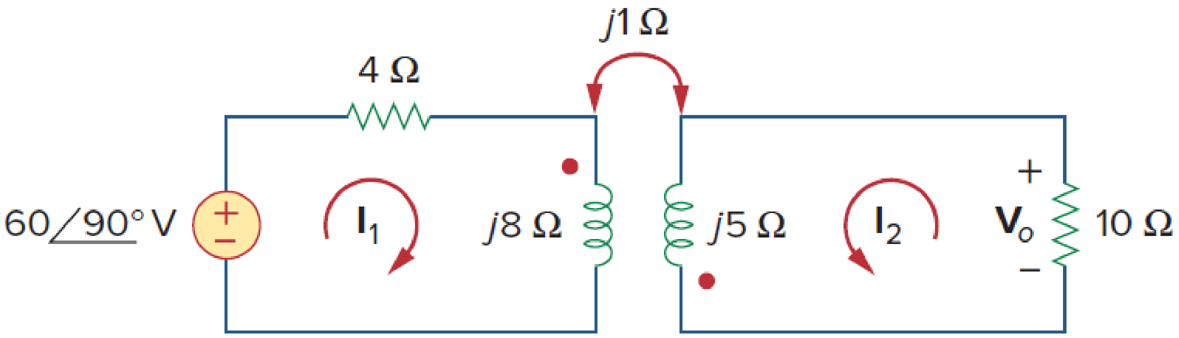
$$L_A = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M}, \qquad L_B = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}$$

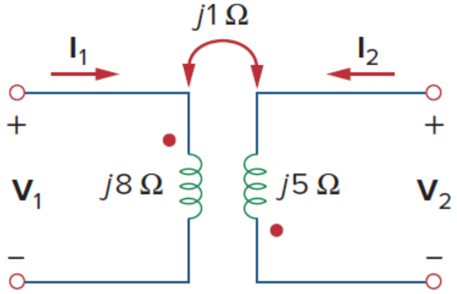
$$L_C = \frac{L_1L_2 - M^2}{M}$$

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

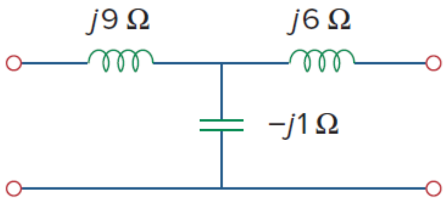
Faculdade de Engenharia Elétrica FEELT

EXERCÍCIO 05: DETERMINE I_1, I_2 E V_O NA FIGURA ABAIXO USANDO O CIRCUITO **T** EQUIVALENTE PARA O TRANSFORMADOR LINEAR.





(a)



$$L_a = L_1 - (-M) = 8 + 1 = 9 \text{ H}$$

$$L_b = L_2 - (-M) = 5 + 1 = 6 \text{ H}, \qquad L_c = -M = -1 \text{ H}$$

$$j6 = \mathbf{I}_1(4 + j9 - j1) + \mathbf{I}_2(-j1)$$

$$0 = \mathbf{I}_1(-j1) + \mathbf{I}_2(10 + j6 - j1)$$

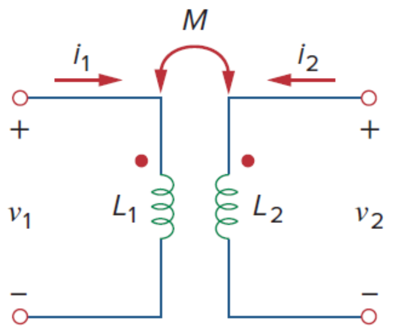
$$\mathbf{I}_2 = \frac{j6}{100} = j0.06 = 0.06\underline{/90^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_1 = (5 - j10)j0.06 = 0.6 + j0.3 \text{ A}$$

$$\mathbf{V}_o = -10\mathbf{I}_2 = -j0.6 = 0.6\underline{/-90^\circ} \text{ V}$$

IX. TRANSFORMADORES IDEAIS

Transformador ideal é um transformador sem perdas ($R_1 = R_2 = 0$) com coeficiente de acoplamento unitário ($k = 1$) no qual as bobinas primárias e secundária possuem autoindutâncias infinitas ($L1$, $L2$, $M \to \infty$).



Isolar a corrente I_1 e substituir

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1\mathbf{I}_1 + j\omega M\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\mathbf{I}_1 + j\omega L_2\mathbf{I}_2$$

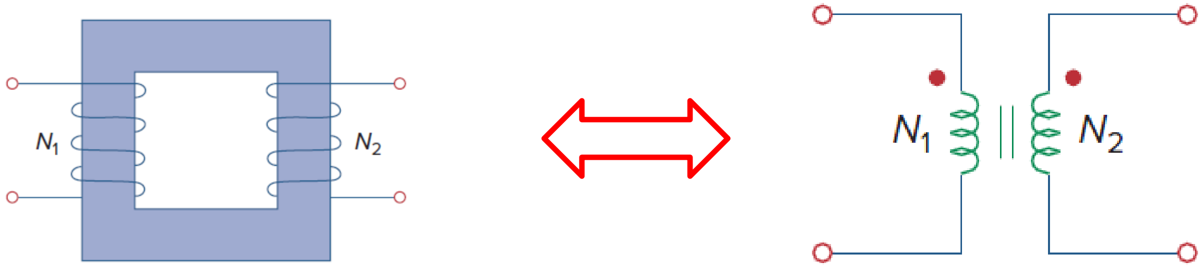
$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2\mathbf{I}_2 + \frac{M\mathbf{V}_1}{L_1} - \frac{j\omega M^2\mathbf{I}_2}{L_1}$$

$$\boxed{M = \sqrt{L_1L_2}}$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2\mathbf{I}_2 + \frac{\sqrt{L_1L_2}\,\mathbf{V}_1}{L_1} - \frac{j\omega L_1L_2\mathbf{I}_2}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\mathbf{V}_1 = n\mathbf{V}_1$$

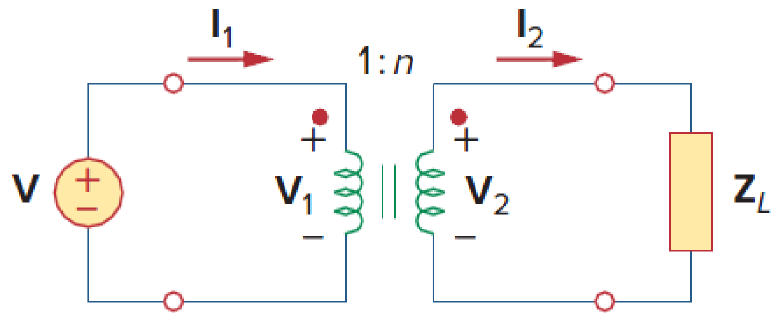
- Onde $n = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$ é chamada *relação de espiras*. Como L_1, L_2, M tende para ∞ de modo que n permanece a mesma, as bobinas acopladas se tornam um transformador ideal;

- Os transformadores com núcleo de ferro são boas aproximações dos transformadores ideais, usados em sistemas de geração de energia elétrica e em eletrônica.



IX. TRANSFORMADORES IDEAIS

Quando uma tensão senoidal é aplicada ao enrolamento primário, conforme mostrado na figura abaixo, o fluxo magnético ∅ atravessa ambos os enrolamentos.



- De acordo com a lei de Faraday, a tensão no enrolamento primário e secundário é:

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \qquad v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

- Se dividirmos uma equação pela outra, obtemos a *relação de espiras* ou a *relação de transformação*. Podemos usar as tensões fasoriais $\mathbf{V_1}$ e $\mathbf{V_2}$ em vez dos valores instantâneos v_1 e v_2:

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

- Por motivo de conservação de energia, a energia fornecida para o primário deve ser igual à energia absorvida pelo secundário, já que não existem perdas em um transformador ideal. Isso implica;

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \qquad \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n}$$

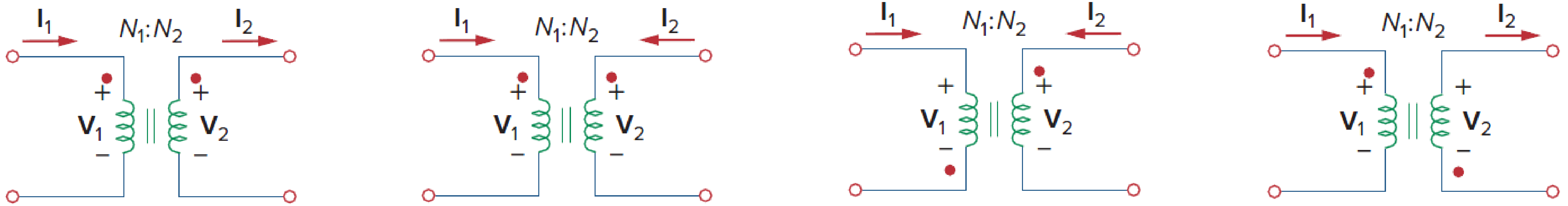
Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Faculdade de Engenharia Elétrica FEELT

COMO IDENTIFICAR A POLARIDADE DAS TENSÕES E SENTIDO DAS CORRENTES EM UM TRANSFORMADOR IDEAL:

Opção 01: Se tanto V_1 quanto V_2 forem positivas ou ambas negativas nos terminais pontuados, use **+*n*** na equação da relação de transformação de tensão. Caso contrário, use **–*n***.

Opção 02: Se tanto I_1 quanto I_2 entrarem ou ambos deixarem os terminais pontuados, use **–*n*** na equação da relação de transformação de corrente. Caso contrário, use **+*n***.



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

(a)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \frac{I_2}{I_1} = -\frac{N_1}{N_2}$$

(b)

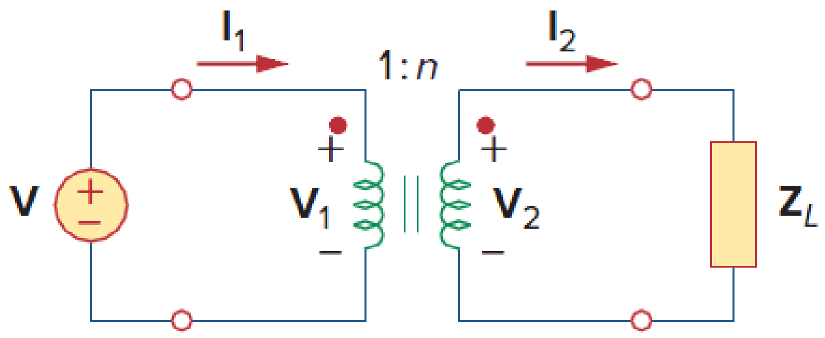
$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{N_2}{N_1} \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

(c)

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{N_2}{N_1} \qquad \frac{I_2}{I_1} = -\frac{N_1}{N_2}$$

(d)

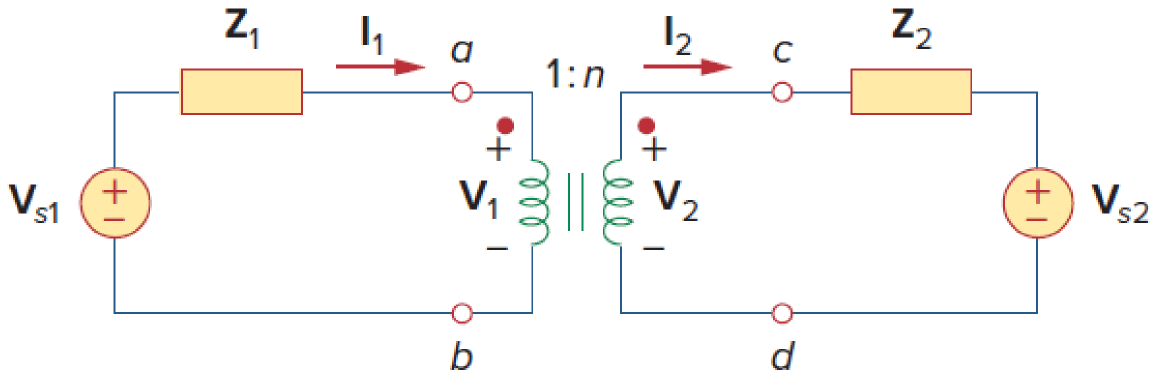
IMPEDÂNCIA REFLETIDA E CIRCUITOS EQUIVALENTES:



$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{1}{n^2}\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} \qquad \mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{Z}_L}{n^2}$$

A impedância de entrada também é chamada *impedância refletida*, uma vez que parece como se a impedância da carga fosse refletida para o lado do primário.

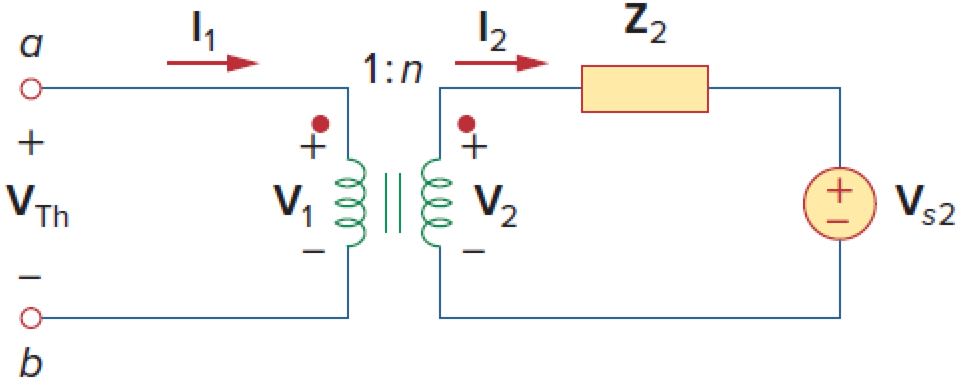
- ❑ Ao analisarmos um circuito contendo um transformador ideal, é prática comum eliminar o transformador refletindo as impedâncias e as fontes de um lado do transformador para o outro.



✓ Suponha que queiramos refletir o lado secundário do circuito para o lado primário. Encontramos o circuito equivalente de Thévenin do circuito à direita dos terminais *a*-*b*.

IMPEDÂNCIA REFLETIDA E CIRCUITOS EQUIVALENTES:

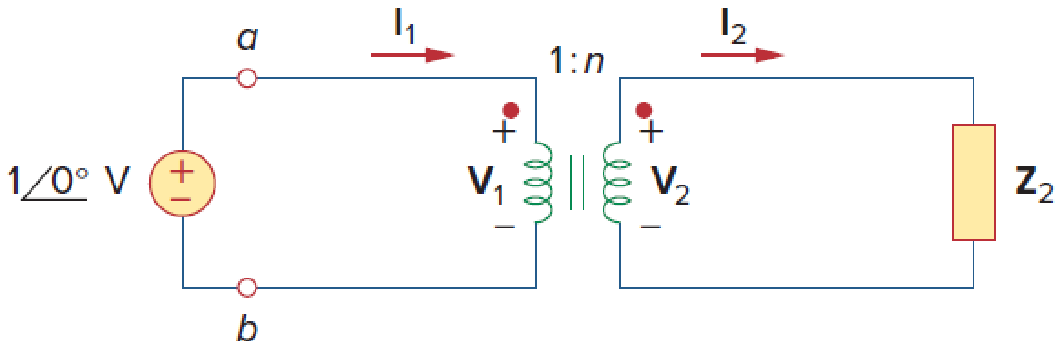
Obtemos $\boldsymbol{V_{Th}}$ como a tensão de circuito aberto nos terminais *a*-*b*, conforme mostrado na Figura abaixo.



Como os terminais *a*-*b* estão abertos, $I_1 = 0 = I_2$ de modo que V_2 e V_{s2}. Logo, obtemos:

$$\mathbf{V}_{\text{Th}} = \mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{n} = \frac{\mathbf{V}_{s2}}{n}$$

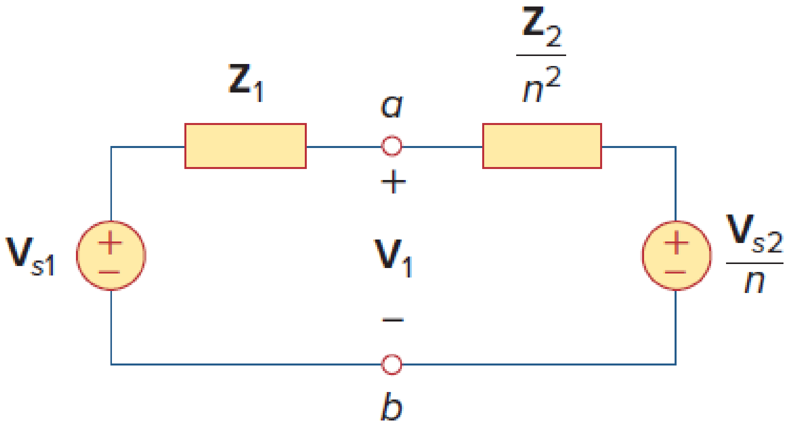
Para obter $\boldsymbol{Z_{Th}}$, eliminamos a fonte de tensão no enrolamento secundário e inserimos uma fonte unitária nos terminais *a*-*b*, como indicado na Figura abaixo:



$$\mathbf{Z}_{\text{Th}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{\mathbf{V}_2/n}{n\mathbf{I}_2} = \frac{\mathbf{Z}_2}{n^2}, \qquad \mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2$$

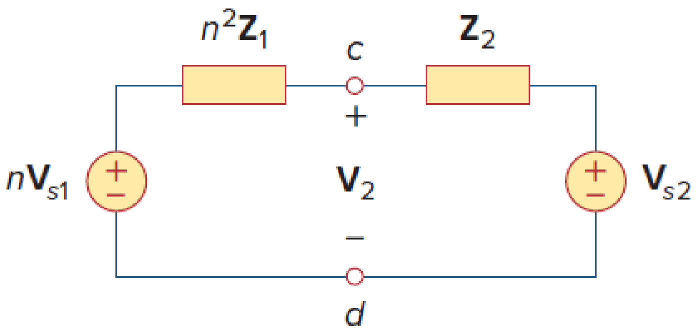
IMPEDÂNCIA REFLETIDA E CIRCUITOS EQUIVALENTES:

Assim que tivermos $\boldsymbol{V_{Th}}$ e $\boldsymbol{Z_{Th}}$, acrescentamos o circuito equivalente de Thévenin à parte do circuito original à esquerda dos terminais *a*-*b*. A Figura abaixo mostra o resultado:

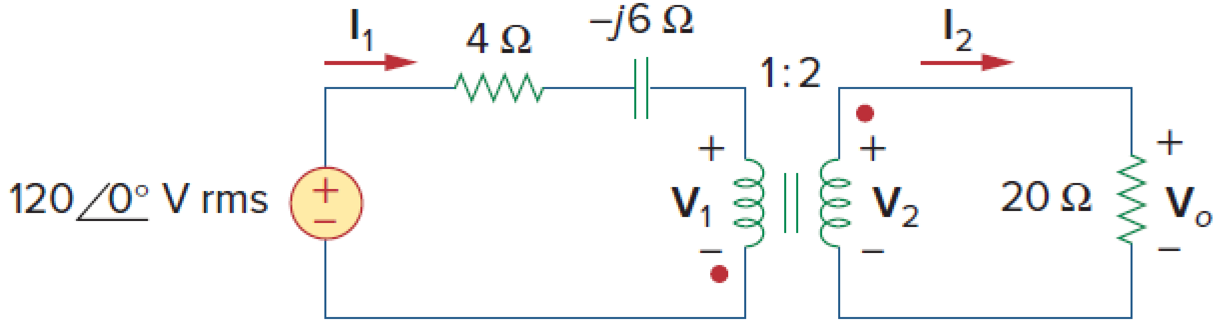


A regra para eliminar o transformador e refletir o circuito secundário para o lado primário é: dividir a impedância do secundário por $\boldsymbol{n^2}$, dividir a tensão do secundário por ***n*** e multiplicar a corrente do secundário por ***n***.

Também podemos refletir o lado primário do circuito para o lado secundário. A Figura abaixo mostra o circuito equivalente:



EXERCÍCIO 06: PARA O CIRCUITO COM TRANSFORMADOR IDEAL DA FIGURA ABAIXO, DETERMINE: (A) A CORRENTE DE FONTE $\boldsymbol{I_1}$; (B) A TENSÃO DE SAÍDA $\boldsymbol{V_O}$; (C) A POTÊNCIA COMPLEXA FORNECIDA PELA FONTE.



$$\mathbf{Z}_R = \frac{20}{n^2} = \frac{20}{4} = 5\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_{in} = 4 - j6 + \mathbf{Z}_R = 9 - j6 = 10.82\underline{/-33.69^\circ}\ \Omega$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{120\underline{/0^\circ}}{\mathbf{Z}_{in}} = \frac{120\underline{/0^\circ}}{10.82\underline{/-33.69^\circ}} = 11.09\underline{/33.69^\circ}\ \text{A}$$

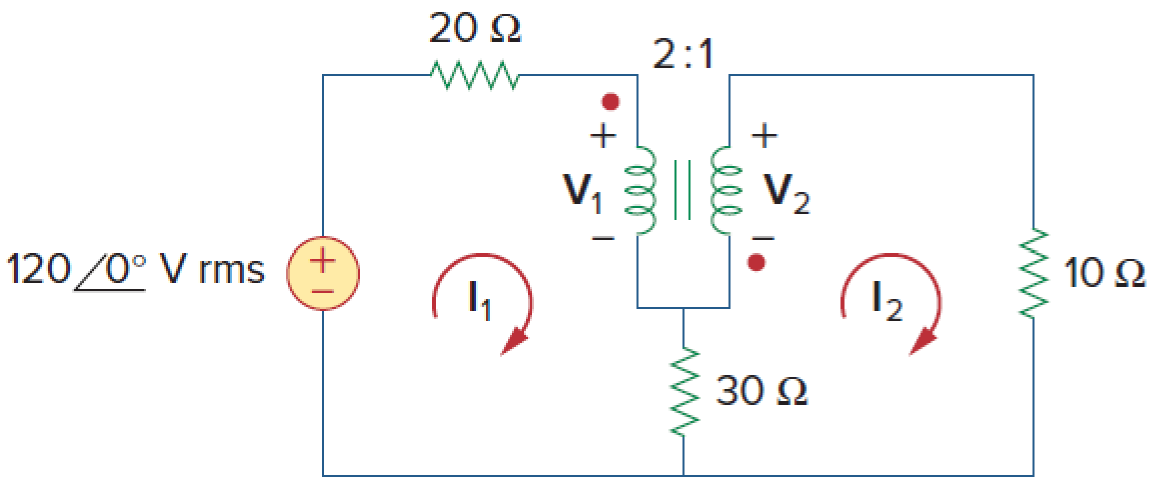
$$\mathbf{I}_2 = -\frac{1}{n}\mathbf{I}_1 = -5.545\underline{/33.69^\circ}\ \text{A}$$

$$\mathbf{V}_o = 20\mathbf{I}_2 = 110.9\underline{/213.69^\circ}\ \text{V}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_s\mathbf{I}_1^* = (120\underline{/0^\circ})(11.09\underline{/-33.69^\circ}) = 1{,}330.8\underline{/-33.69^\circ}\ \text{VA}$$

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Faculdade de Engenharia Elétrica FEELT

EXERCÍCIO 07: CALCULE A POTÊNCIA FORNECIDA AO RESISTOR DE 10Ω NO CIRCUITO COM TRANSFORMADOR IDEAL DA FIGURA ABAIXO.



$$-120 + (20 + 30)\mathbf{I}_1 - 30\mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_1 = 0$$

$$\mathbf{V}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{V}_1$$

$$\mathbf{I}_2 = -2\mathbf{I}_1$$

$$50\mathbf{I}_1 - 30\mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_1 = 120$$

$$-\mathbf{V}_2 + (10 + 30)\mathbf{I}_2 - 30\mathbf{I}_1 = 0$$

$$-30\mathbf{I}_1 + 40\mathbf{I}_2 - \mathbf{V}_2 = 0$$

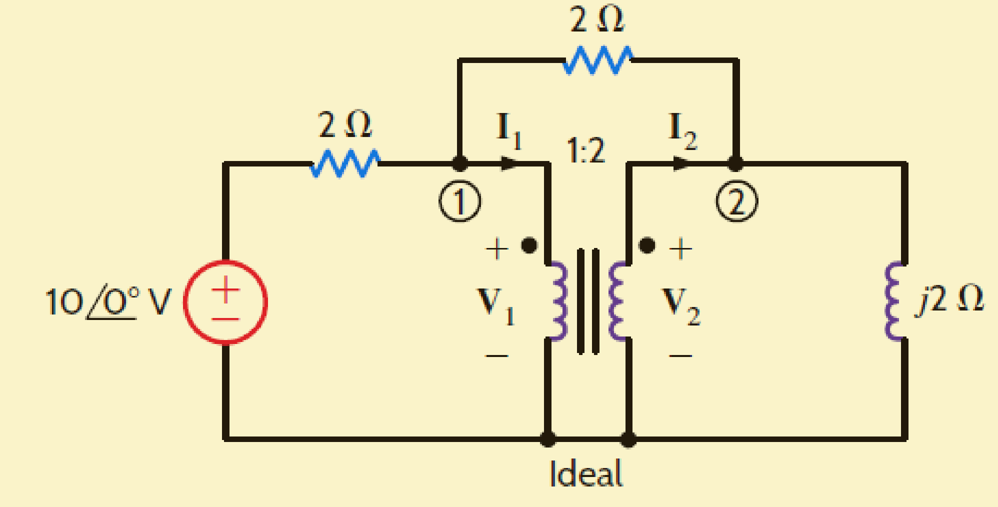
$$-55\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{V}_2 = 120$$

$$15\mathbf{I}_2 + 40\mathbf{I}_2 - \mathbf{V}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_2 = 55\mathbf{I}_2$$

$$-165\mathbf{I}_2 = 120 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_2 = -\frac{120}{165} = -0.7272 \text{ A}$$

$$P = (-0.7272)^2(10) = 5.3 \text{ W}$$

EXERCÍCIO 08: DETERMINE I_1 , I_2 , V_1 E V_2 DO CIRCUITO ABAIXO:



$$\frac{10-\mathbf{V}_1}{2} = \frac{\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2}{2} + \mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{I}_2 + \frac{\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2}{2} = \frac{\mathbf{V}_2}{2j}$$

The transformer relationships are $\mathbf{V}_2 = 2\mathbf{V}_1$ and $\mathbf{I}_1 = 2\mathbf{I}_2$. The first nodal equation yields $\mathbf{I}_1 = 5$ A and therefore $\mathbf{I}_2 = 2.5$ A. The second nodal equation, together with the constraint equations specified by the transformer, yields $\mathbf{V}_1 = \sqrt{5}\,\angle 63^\circ$ V and $\mathbf{V}_2 = 2\sqrt{5}\,\angle 63^\circ$ V.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Básicas:

- ALEXANDER, C.K.; SADIKU, M.N. Fundamentos de Circuitos Elétricos. 5ª ed. Porto Alegre: Mc Graw-Hill, 2015.

- IRWIN, J.D.; NELMS, R.M. Análise Básica de Circuitos para Engenharia. 10ª ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2014.

- MACEDO JÚNIOR, J. R. Circuitos Elétricos 2. Disponível em: http://www.jrubens.eng.br/ce2.htm. Acesso em: 03 maio 2018.

Complementar:

- BOYLESTAD, R. L. Introdução à Análise de Circuitos. 12ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.

- CHAPMAN, S. J. Fundamentos de Máquinas Elétricas. 5ª ed. Porto Alegre: Mc Graw-Hill, 2013.

OBRIGADO!

Paulo Henrique Oliveira Rezende

paulohenrique16@gmail.com