Lista de Exercícios referente à Prova 2

Professora Ana Paula
FEELT - EP - Probabilidade e Distribuição de Probabilidade

7 de dezembro de 2018

Livro: Estatística Básica. Morettin & Bussab. 6ª. Ed.
Probabilidade (pág. 122-127): 26, 27, 33, 37, 38, 40, 41, 42
Distribuição de Probabilidade Discreta (pág. 151): 20, 21, 22, 24, 25, 26
Distribuição de Probabilidade Contínua (pág. 180): 14, 15, 17, 18, 19, 21, 21

Questão 26. Probabilidade - página 122

Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses são homens e os seguintes eventos:

H: freguês é homem   A: freguês prefere salada
M: freguês é mulher   B: freguês prefere carne

Calcular:
(a) $P(H), P(A|H), P(B|M)$;
(b) $P(A \cap H), P(A \cup H)$;
(c) $P(M|A)$.

Solução. Primeiramente é possível montar uma tabela com os dados fornecidos:

Tabela 1: Tabela dos dados fornecidos.

	Salada	Carne	Total
Homens	20% de 75%	80% de 75%	75%
Mulheres	70% de 25%	30% de 25%	25%
Total	32.5%	67.5%	100%

A partir dessa tabela, foram realizados os cálculos necessários para chegar na tabela, sobre a qual será retirada as informações para a resolução dos itens (a), (b) e (c).

Tabela 2: Desenvolvimento dos dados da Tabela 1.

	Salada (A)	Carne (B)	Total
Homens (H)	15%	60%	75%
Mulheres (M)	17.5%	7.5%	25%
Total	32.5%	67.5%	100%

(a) P(H), P(A|H), P(B|M);

De acordo com a tabela:

$$P(H) = \frac{75\%}{100\%} = 75\%$$

$$P(A|H) = \frac{15\%}{75\%} = 20\%$$

$$P(B|M) = \frac{7.5\%}{25\%} = 30\%$$

(b) $P(A \cap H), P(A \cup H)$;

De acordo com a tabela:

$$P(A \cap H) = P(A|H) * P(H) = 20\% * 75\% = 15\%$$

$$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) = \frac{32.5\%}{100\%} + \frac{75\%}{100\%} - 15\% = 92.5\%$$

(c) $P(M|A)$.

De acordo com a tabela:

$$P(M|A) = \frac{17.5\%}{32.5\%} = 53.85\%$$

Questão 27. Probabilidade - página 122

Uma companhia de seguros analisou a frequência com que 2.000 segurados (1.000 homens e 1.000 mulheres) usaram o hospital. Os resultados são apresentados na tabela:

	Homens	Mulheres
Usaram o hospital	100	150
Não usaram o hospital	900	850

(a) Qual a probabilidade de que uma pessoa segurada use o hospital?
(b) O uso do hospital independe do sexo do segurado?

Solução. Construiu-se uma nova tabela com os dados totais do problema:

Tabela 3: Dados totais do problema.

	Homens (H)	Mulheres (M)	Total
Usaram o hospital (S)	100	150	250
Não usaram o hospital (N)	900	850	1750
Total	1000	1000	2000

(a) De acordo a tabela:

$$P(S) = \frac{250}{2000} = 12.5\%$$

(b) Pede-se a correlação entre as variáveis S, H e M, que são variáveis quantitativas.

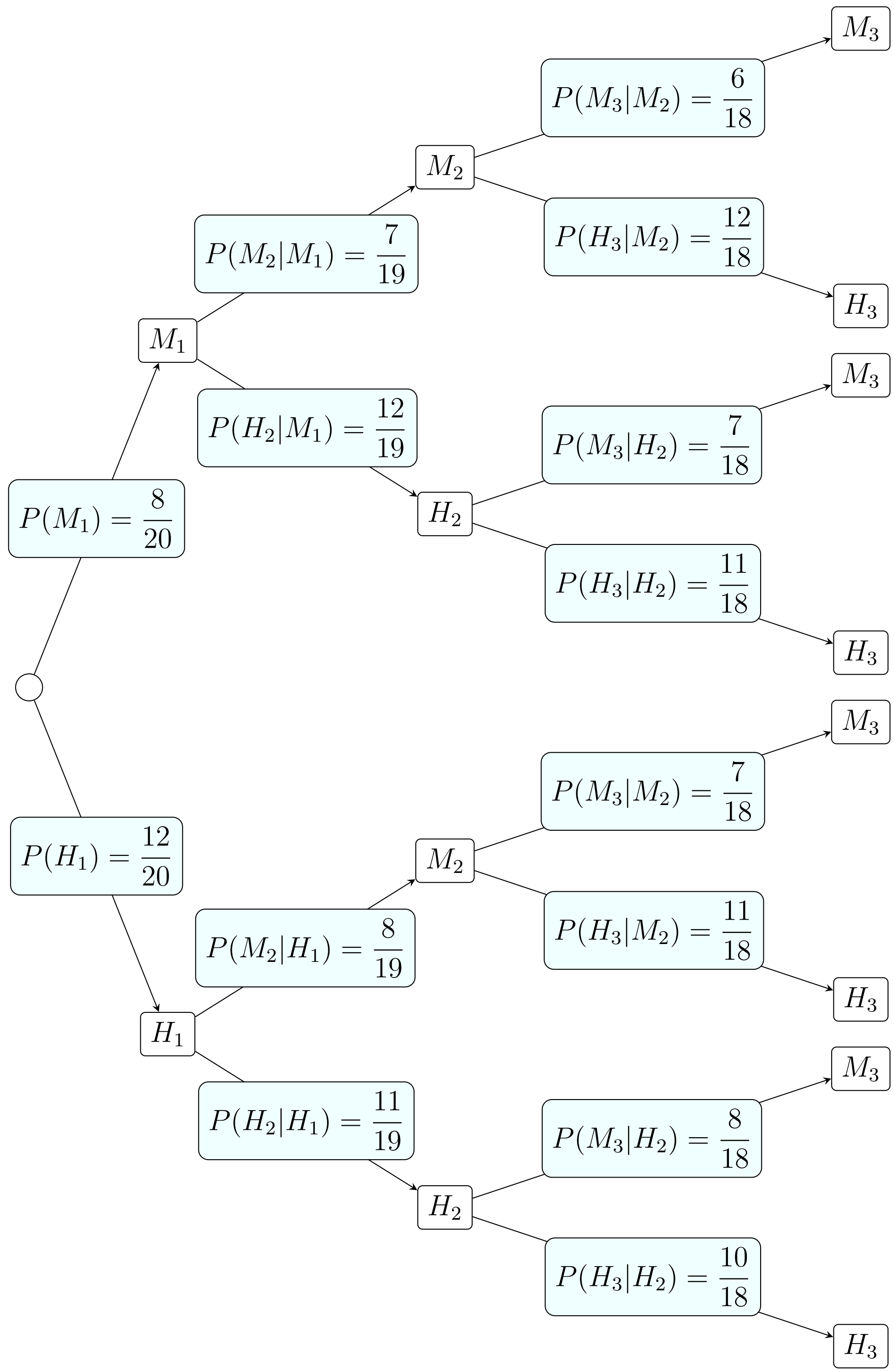
Questão 33. Probabilidade - página 123

Um grupo de 12 homens e 8 mulheres concorre a três prêmios através de um sorteio, sem reposição de seus nomes. Qual a probabilidade de:

(a) nenhum homem ser sorteado?
(b) um prêmio ser ganho por homem?
(c) dois homens serem premiados?

Solução.
Como não há reposição dos nomes, esse não pode ser considerado um caso de distribuição binomial, uma vez que as $n = 5$ repetições não são situações independentes. Lembrando que a distribuição binomial é um dos 4 modelos probabilísticos vistos em sala para variáveis aleatórias discretas (v.a.).

Assim, é necessário construir o diagrama em árvore com as probabilidades de cada situação, sendo que para o primeiro premiado tem-se o espaço amostral $\Omega_1 = 12+8 = 20$, para o segundo $\Omega_2 = 19$ e para o terceiro $\Omega_3 = 18$. Além disso, adote H para homem premiado e M para mulher premiada.



A partir do diagrama em árvore acima tem-se:

(a) P(nenhum H ser sorteado) $= P$(todas M serem premiadas), assim:

$$P(M_3|M_2|M_1) = P(M_3|M_2) \cdot P(M_2|M_1) \cdot P(M_1) = \frac{6}{18}\frac{7}{19}\frac{8}{20} \approx 4,91\%$$

(b) A probabilidade de somente um homem ser premiado ($P(B)$) será:

$P(B) = P(H_3|M_2|M_1) + P(M_3|H_2|M_1) + P(M_3|M_2|H_1)$

$$P(H_3|M_2|M_1) = P(H_3|M_2) \cdot P(M_2|M_1) \cdot P(M_1) = \frac{12}{18}\frac{7}{19}\frac{8}{20} \approx 9,82\%$$

$$P(M_3|H_2|M_1) = P(M_3|H_2) \cdot P(H_2|M_1) \cdot P(M_1) = \frac{7}{18}\frac{12}{19}\frac{8}{20} \approx 9,82\%$$

$$P(M_3|M_2|H_1) = P(M_3|M_2) \cdot P(M_2|H_1) \cdot P(H_1) = \frac{7}{18}\frac{8}{19}\frac{12}{20} \approx 9,82\%$$

Logo, $P(B) = 9,82\% + 9,82\% + 9,82\% = 29,47\%$

(c) A probabilidade de somente dois homens serem premiados ($P(C)$) será:

$P(C) = P(H_3|H_2|M_1) + P(M_3|H_2|H_1) + P(H_3|M_2|H_1)$

$$P(H_3|H_2|M_1) = P(H_3|H_2) \cdot P(H_2|M_1) \cdot P(M_1) = \frac{11}{18}\frac{12}{19}\frac{8}{20} \approx 15,44\%$$

$$P(M_3|H_2|H_1) = P(M_3|H_2) \cdot P(H_2|H_1) \cdot P(H_1) = \frac{8}{18}\frac{11}{19}\frac{12}{20} \approx 15,44\%$$

$$P(H_3|M_2|H_1) = P(H_3|M_2) \cdot P(M_2|H_1) \cdot P(H_1) = \frac{11}{18}\frac{8}{19}\frac{12}{20} \approx 15,44\%$$

Logo, $P(C) = 15,44\% + 15,44\% + 15,44\% = 46,32\%$

Questão 37. Probabilidade - página 123

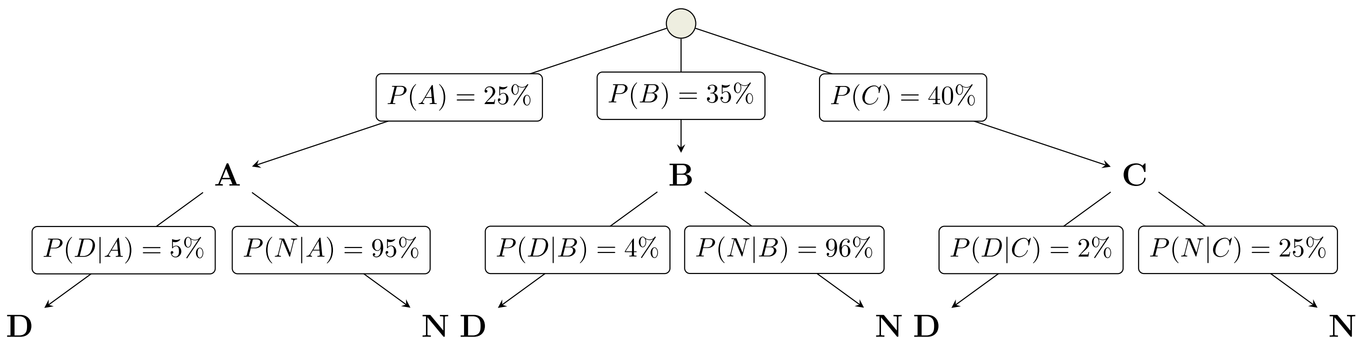
Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem 25%, 35% e 40% do total, respectivamente. Da produção de cada máquina 5%, 4% e 2%, respectivamente, são parafusos defeituosos. Escolhe-se ao acaso um parafuso e verifica-se que é defeituoso. Qual a probabilidade de que o parafuso venha da máquina A; da B; e da C?

Solução. Para a resolução dessa questão será necessário utilizar o Teorema de Bayes.

Teorema de Bayes: Seja $\{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ uma partição do espaço amostral Ω e A um evento desse espaço amostral, tem-se:

$$P(R_k|A) = \frac{P(A|R_k) \cdot P(R_k)}{\sum P(A|R_i) \cdot P(R_i)}$$

A partir dos dados do problema é possível montar o seguinte diagrama em árvore:



Adote:

D: parafuso defeituoso
N: parafuso não defeituoso

1.Probabilidade de que o parafuso venha da máquina A:

$$P(A|D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C)}$$
$$= \frac{0,05 \cdot 0,25}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,40} = \frac{0,0125}{0,345} = 3,62\%$$

2.Probabilidade de que o parafuso venha da máquina B:

Do item anterior, tem-se:

$$P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) = 0,345$$

$$P(B|D) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C)}$$
$$= \frac{0,04 \cdot 0,35}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,40} = \frac{0,014}{0,345} = 4,06\%$$

3.Probabilidade de que o parafuso venha da máquina C:

$$
\begin{aligned}
P(C|D) &= \frac{P(C|A)\cdot P(A)}{P(D|A)\cdot P(A)+P(D|B)\cdot P(B)+P(D|C)\cdot P(C)}\\
&= \frac{0,02\cdot 0,40}{0,05\cdot 0,25+0,04\cdot 0,35+0,02\cdot 0,40} = \frac{0,008}{0,345} = 2,32\%
\end{aligned}
$$

Questão 38. Probabilidade - página 123

Um fabricante afirma que apenas 5% de todas as válvulas que produz têm duração inferior a 20 horas. Uma indústria compra semanalmente um grande lote de válvulas desse fabricante, mas sob a seguinte condição: ela aceita o lote se, em dez válvulas escolhidas ao acaso, no máximo uma tiver duração inferior a 20 horas; caso contrário, o lote todo é rejeitado.

(a) Se o fabricante de fato tem razão, qual a probabilidade de um lote ser rejeitado?

(b) Suponha agora que o fabricante esteja mentindo, isto é, na verdade a proporção de válvulas com duração inferior a 20 horas é de 10%. Qual a probabilidade de um lote ser aceito, segundo o critério acima?

Solução. O exercício envolve o conteúdo de variáveis aleatórias discretas, especialmente a distribuição binomial, na qual são realizados n ensaios de Bernoulli.

Na distribuição binomial para n ensaios e k sucessos, logo $n-k$ fracassos, tem-se:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

onde p é a probabilidade de se obter sucesso, e q de se obter fracasso, sendo $q = 1-p$ (probabilidade complementar).

(a) A probabilidade do lote ser rejeitado equivale dizer:

$$P(0 \leq X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

em que X é o número de válvulas com duração inferior a 20 horas, tal que $X \sim Ber(p)$ e p representa o sucesso - válvula com duração inferior a 20 horas - em $n=10$ ensaios. Do exercício tem-se $p = 5\% = 0.05$, logo $q = 1-p = 0.95$.

Assim, tem-se:

$$P(X=0) = \binom{10}{0}\, 0,05^0 \cdot 0,95^{10-0} = 1\cdot 1\cdot 0,95^{10} \approx 59,87\%$$

$$P(X=1) = \binom{10}{1}\, 0,05^1 \cdot 0,95^{10-1} = 10\cdot 0,05\cdot 0,95^{9} \approx 31,51\%$$

$P(0 \leq X \leq 1) = 59,87\% + 31,51\%$

(b) Para $p = 10\%0,10$ e $q = 0,90$, tem-se:

$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0,10^0 \cdot 0,90^{10-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0,90^{10} \approx 34,87\%$

$P(X = 1) = \binom{10}{1} 0,10^1 \cdot 0,90^{10-1} = 10 \cdot 0,1 \cdot 0,90^9 \approx 38,74\%$

$P(0 \leq X \leq 1) = 34,87\% + 38,74\% = 73,61\%$

Questão 40. Probabilidade - página 124

A empresa M & B tem 15.800 empregados, classificados de acordo com a tabela abaixo.

Idade/Sexo	Homens (M)	Mulheres (F)	Total
$<$ 25 anos (A)	2.000	800	2.800
25 – 40 anos (B)	4.500	2.500	7.000
$>$ 40 anos (C)	1.800	4.200	6.000
Total	8.300	7.500	15.800

Se um empregado é selecionado ao acaso, calcular a probabilidade de ser ele:

(a) um empregado com 40 anos de idade ou menos;
(b) um empregado com 40 anos de idade ou menos, e mulher;
(c) um empregado com mais de 40 anos de idade e que seja homem;
(d) uma mulher, dado que é um empregado com menos de 25 anos.

Solução.

(a) Como os eventos são independentes $P(A \cap B) = 0$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2800}{15800} + \frac{7000}{15800} + 0 = \frac{9800}{15800} = 62,03\%$$

(b) $P(A \cup B \cap F) = P(A \cup B|F) \cdot P(F)$

$P(A \cup B \cap F) = \left[P(A|F) + P(B|F) - P(A \cap B|F)\right] \cdot P(A \cup B|F) \cdot P(F)$

$$= \left[\frac{800}{7500} + \frac{2500}{7500} - 0\right] \cdot \frac{7500}{15800} = \frac{3300}{15800} = 20,89\%$$

(c) $P(C \cap M) = P(C|M) \cdot P(M) = \frac{1800}{8300} \cdot \frac{8300}{15800} = 11,39\%$

(d) $P(F|A) = \dfrac{800}{2800} = 28,57\%$

Questão 41. Probabilidade - página 124

Considere o Problema 40 e suponha que escolhamos dois empregados ao acaso, com reposição. Qual a probabilidade de que:

(a) ambos sejam do sexo masculino;

(b) o primeiro tenha menos de 25 anos, e o segundo seja do sexo masculino e tenha menos de 25 anos;

(c) nenhum tenha menos de 25 anos.

Solução.

Como a escolha dos empregados é com reposição, logo os ensaios são independentes, e o ensaio é repetido $n = 2$ vezes, tem-se que a variável aleatória $X = \textit{sexo}$ ou $X = \textit{idade}$ segue uma Distribuição Binomial.

(a) Considere a probalidade de ser do sexo M como sucesso p.

$$P(M) = \frac{8300}{15800} = 52,53\% \approx 0,53$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(X = 2) = \binom{2}{2} (0,53)^2 (1 - 0,53)^{2-2} = p^2 = (0,53)^2 = 28,09\%$$

(b) Considere dois eventos E_1 e E_2, tal que:

$$\#E_1 = \#A$$

$$\#E_2 = \#M \cup A$$

Logo, pede-se $P(E_1 \cap E_2)$.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Calculando as probabilidades separadamente, tem-se:

$$P(E_1) = P(A) = \frac{2800}{15800}$$

$$P(E_2) = P(M \cup A) = P(M|A) \cdot P(A) = \frac{2000}{2800} \cdot \frac{2800}{15800} = \frac{2000}{15800}$$

Assim, tem-se:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{2800}{15800} \cdot \frac{2000}{15800} = 2,24\%$$

(c) Considere a probalidade de ser menor de 25 anos como fracasso q.

$$q = P(A) = \frac{2800}{15800} = 17,72\% \approx 0,18\%$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(X = 2) = \binom{2}{2} (0,18)^2 (1 - 0,18)^{2-2} = q^2 = (0,18)^2 = 3,24\%$$

$$p = 1 - q \Rightarrow p = 1 - 0,0324 = 96,76\%$$

Questão 42. Probabilidade - página 124

Resolva as questões (a) e (c) do Problema 41, supondo que a amostragem é feita sem reposição.

Solução.

Como a amostragem é feita sem reposição os ensaios não seguem a distribuição de Bernoulli, no entanto o cálculo é intuitivo, por isso não será esquematizado os diagramas em árvore para cada situação.

(a) $P(M_1 \cup M_2) = P(M_2|M_1) \cdot P(M_1)$
(como o evento não é independente é necessária essa notação)

$$P(M_1) = \frac{8300}{15800}$$

$$P(M_2|M_1) = \frac{8299}{15799}$$

Assim,

$$P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2|M_1) = \frac{8300}{15800} \cdot \frac{8299}{15799} = 27,59\%$$

(c) O cálculo será realizado a partir da probabilidade complementar, ou seja:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$$

(como o evento não é independente é necessária essa notação)

$$P(A_1) = \frac{2800}{15800}$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{2799}{15799}$$

Assim,

$$P(\overline{E}) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{2800}{15800} \cdot \frac{2799}{15799} = 3,14\%$$

Portanto,

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0,0314 = 96,86\%$$

Questão 20. Distribuição de Probabilidade Discreta - Página 151

Para os exercícios (a) a (e) abaixo, considere o enunciado: Das variáveis abaixo descritas, assinale quais são binomiais, e para essas dê os respectivos campos de definição e função de probabilidade. Quando julgar que a variável não é binomial, aponte as razões de sua conclusão.

(a) De uma urna com dez bolas brancas e 20 pretas, vamos extrair, com reposição, cinco bolas. X é o número de bolas brancas nas cinco extrações.

(b) Refaça o problema anterior, mas dessa vez as n extrações são sem reposição.

(c) Temos cinco urnas com bolas pretas e brancas e vamos extrair uma bola de cada urna. Suponha que X seja o número de bolas brancas obtidas no final.

(d) Vamos realizar uma pesquisa em dez cidades brasileiras, escolhendo ao acaso um habitante de cada uma delas e classificando-o em pró ou contra um certo projeto federal. Suponha que X seja o número de indivíduos contra o projeto no final da pesquisa.

(e) Em uma indústria existem 100 máquinas que fabricam determinada peça. Cada peça é classificada como boa ou defeituosa. Escolhemos ao acaso um instante de tempo e verificamos uma peça de cada uma das máquinas. Suponha que X seja o número de peças defeituosas.

Solução.

(a) A variável é binomial.

(b) Como não há reposição, a variável não é binomial, pois os ensaios não são independentes.

(c) A variável é binomial.

(d) A variável é binomial.