Universidade Federal de Uberlândia

# Distribuição de Probabilidade

*Lesly Montúfar*

11811ETE001

FEELT

7 de dezembro de 2018

**Questão 1.**

Um sistema de computadores usa senhas que são exatamente sete caracteres, e cada caractere é uma das 26 letras (a-z) ou 10 inteiros (0-9). Você mantém uma senha para esse sistema de computadores. Seja A o subconjunto de senhas que começam com uma vogal (a, e, i, o ou u) e seja B o subconjunto de senhas que terminam com um número par (0, 2, 4, 6 ou 8).

(a) 1 ponto Suponha que um invasor selecione uma senha ao acaso. Qual a probabilidade de sua senha ser selecionada?

(b) 2 pontos Suponha que um invasor saiba que sua senha esteja no evento A e selecione uma senha ao acaso a partir desse subconjunto. Qual é a probabilidade de sua senha ser selecionada?

(c) 2 pontos Suponha que um invasor saiba que sua senha esteja em A e em B, e selecione uma senha ao acaso a partir desse subconjunto. Qual é a probabilidade de sua senha ser selecionada?

**Solução.**

(a) Como são sete caracteres a serem escolhidos e cada caractere possui um espaço amostral que contém letras e números, tem-se o seguinte espaço amostral:

$$\Omega = 26 + 10 = 36$$

Como a escolha de cada caractere é um evento independente, tem-se que a probabilidade de que minha senha seja selecionada (chamada de evento M) é de:

$$P(M) = \frac{1}{36^7} \approx 1,2761 \cdot 10^{-9}\,\%$$

(b) Pede-se $P(M|A)$, logo o espaço amostral para o primeiro caractere reduz-se a:

$$\Omega_1 = 5 \qquad \text{(5 vogais)}$$

Tem-se a seguinte probabilidade:

$$P(M|A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{36^6} \approx 9,1879 \cdot 10^{-9}\,\%$$

(c) Pede-se $P(M|A \cup B)$, assim, além do espaço amostral para o primeiro caractere reduzir-se, o espaço amostral para o último também reduz-se e obtém-se:

$$\Omega_1 = 5 \qquad \text{(5 vogais)}$$

$$\Omega_7 = 5 \qquad \text{(5 números pares)}$$

Assim, tem-se o seguinte resultado:

$$P(M|A \cup B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{36^5} \cdot \frac{1}{5} \approx 66,1527 \cdot 10^{-9}\,\%$$

**Questão 13.**

5 pontos Medidas de espessura em um processo de recobrimento são feitas com a precisão de centésimo de milímetro. As medidas de espessura estão uniformemente distribuídas, com valores 0,15; 0,16; 0,17; 0,18 e 0,19. Determine a média e a variância da espessura de recobrimento para esse processo.

**Solução.**

Cálculo da média:

$$\overline{X} = \frac{0,15 + 0,16 + 0,17 + 0,18 + 0,19}{5} = 0,17$$

Cálculo da variância:

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = 0,0002$$

**Questão 15.**

5 pontos A probabilidade de que um visitante de um site na internet forneça dados de contato para informações adicionais é de 0,01. Considere que 1.000 visitantes da página se comportem independentemente. Determine as seguintes probabilidades:

**Solução.**

Como os ensaios são independentes, seguem a distribuição binomial, que é um tipo de distribuição para uma variável aleatória discreta.

Considere o ato de fornecer os dados de contato como sucesso, logo:

$$n = 1000$$

$$p = 0,01 \quad \textbf{e} \quad q = 1 - p = 0,99$$

(a) A probablidade de que nenhum dos visitantes forneçam dados de contato, ou seja $P(X = 0)$, pois $k = 0$ em $n = 1000$ ensaios, é:

$$X \sim b(n, p) \Rightarrow X \sim b(1000,\ 0.01)$$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot q^{n-k}\Rightarrow P(X=0)=\binom{1000}{0}(0,01)^0\cdot(0,99)^{1000}$$

Portanto, $P(X=0)\approx 4,3171\cdot 10^{-5}$

(b) Pede-se P(X=10), logo:

$$P(X=10)=\binom{1000}{10}(0,01)^{10}\cdot(0,99)^{1000-10}$$

Portanto, $P(X=10)\approx 12,57\%$.

(c) Pede-se $P(X>3)$, mas tem-se a relação:

$$P(X>3)=1-P(X=0)-(P=1)-(P=2)-(P=3) \tag{1}$$

Do item (a) tem-se $P(X=0)=4,3171\cdot 10^{-5}$.

$P(X=1)=\binom{1000}{1}(0,01)^1\cdot(0,99)^{999}=4,3601\cdot 10^{-5}$

$P(X=2)=\binom{1000}{2}(0,01)^2\cdot(0,99)^{998}=2,2002\cdot 10^{-3}$

$P(X=3)=\binom{1000}{3}(0,01)^3\cdot(0,99)^{997}=7,3932\cdot 10^{-3}$

Substituindo $P(X=0),P(X=1),P(X=2)$ e $P(X=3)$ em (1), tem-se:

$$P(X>3)=1-4,3171\cdot 10^{-5}-4,3607\cdot 10^{-4}-2,2002\cdot 7,3932\cdot 10^{-3}\approx 99,01\%$$

**Questão 18.** A largura do espaçamento é uma propriedade importante em um cabeçote magnético de gravação. Em unidades codificadas, se a largura for uma variável aleatória contínua ao longo da faixa de $0<x<2$, com $f(x)=0,5x$, determine a função densidade de probabilidade acumulada da largura do espaçamento.

**Solução.** A função de densidade de probabilidade acumulada $F(X)$ é dada por:

$$F(x) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\text{Assim, tem-se: } \int 0,5\ x\ dx\ = 0,5\ \frac{x^2}{2}\ = 0,25\ x^2$$

$$\text{Logo, escrito de outra forma: } \quad F(x)\ = \begin{cases} 0 & \text{, para } x < 0 \\ 0,25x^2, & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & \text{, para } \ x > 2 \end{cases}$$

**Questão 16.** O número de chamadas telefônicas que chegam a uma central é frequentemente modelado como uma variável aleatória de Poisson. Considere que, em média, há 10 chamadas por hora.

(a) Qual é a probabilidade de que haja exatamente cinco chamadas em uma hora?
(b) Qual é a probabilidade de que haja três ou menos chamadas em uma hora?
(c) Qual é a probabilidade de que haja exatamente 15 chamadas em duas horas?
(d) Qual é a probabilidade de que haja exatamente cinco chamadas em 30 minutos?

**Solução.**

(a) Em média, há 10 chamadas por hora, logo $\lambda = 10$ e pede-se $P(N = 5)$.

$$P(N = 5)\ = \frac{e^{-10} \cdot 10^5}{5!} \approx 0,0378\ = 3,78\%$$

(b) O intervalo de tempo continua sendo 1 hora, $\lambda = 10$ ainda e pede-se $P(N \leqslant 3)$.

$$P(N \leqslant 3) = P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) + P(N = 3)$$

$$P(N \leqslant 3) = \frac{e^{-10} \cdot 10^0}{0!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^1}{1!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^2}{2!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^3}{3!}$$

$$P(N \leqslant 3) = 0,01033 \approx 1,03\%$$

(c) Em duas horas, espera-se em média 10*2 chamadas = 20 chamadas, pois são em média 10 chamadas por hora. Assim, $\lambda = 20$ chamadas e pede-se $P(N = 15)$.

$$P(N = 15)\ = \frac{e^{-20} \cdot 10^{15}}{15!} \approx 0,0516\ = 5,16\%$$

(d) Em 30 minutos, a média de chamadas é de 10/2 chamadas, logo $\lambda = 5$ chamadas e pede-se $P(N = 5)$, em que $N \sim Pois(5)$.

$$P(N = 5) \ = \frac{e^{-5} \cdot 5^5}{5!} \approx 0,1754 \ = 17,54\%$$