Ordenación interna

(Parte I)

Prof. Cristian Cappo

Agosto/2020

En esta clase

- Conceptos
  - Definición
  - Algoritmos y clasificación
  - Rendimiento
  - Inversiones
- Algoritmos
  - Inserción
  - ShellSort

Ordenación
Conceptos

- Conceptos fundamentales
  - La ordenación es el proceso de tomar una colección de *objetos ordenables*(a_1, a_2, a_3, .. , a_n) y retornar la misma colección pero
    reubicados (a'_1, a'_2, a'_3, .. , a'_n) de tal forma que
    - $a'_1 < a'_2 < a'_3 < .. < a'_n$

> - **Objetos ordenables**: siempre que exista posibilidad de compararlos y aplicar operadores relacionales < , >, == . *Ejemplos: números, nombres, fechas, etc.*

Ordenación

Conceptos

- Muchos problemas se basan en operaciones de ordenación.
  - A veces la eficiencia de la solución a esos problemas queda determinada por el método de ordenación utilizado (*ver problema 8.1 en* [WEISS2000])
- Operación más estudiada en computación.
- Se han ideado muchos algoritmos que lo resuelven. Ver en https://en.wikipedia.org/wiki/Sorting_algorithm
- ***Ordenación Interna:***
  - Realizada enteramente en memoria principal (RAM)

Ordenación

Conceptos

- Estudiaremos algoritmos que operan bajo la premisa de que los elementos pueden compararse.

La mayoría de los algoritmos asumen esto, y se denominan ***Algoritmos de Ordenación basados en comparación***

Existen otros algoritmos que no necesitan realizar comparaciones y también los veremos en la siguiente clase.

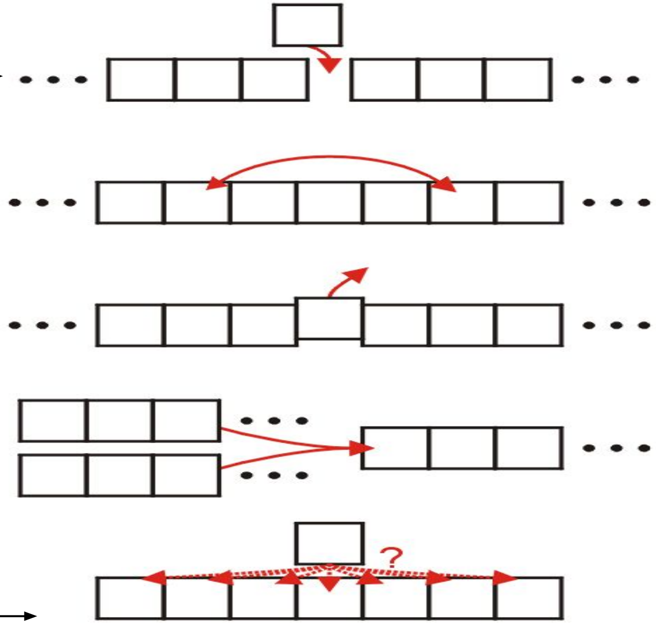
Ordenación

Conceptos

- Memoria adicional para los algoritmos:
  - **In-Place** : no existe un consumo adicional de memoria por tanto su costo espacial esta en *O(1)*. Esto es: solo lo necesario para variables locales.
    - Inserción, Selección, Burbuja, ShellSort, QuickSort, HeapSort
  - **Not-in-place**: requieren memoria adicional en relación a la cantidad de elementos a ordenar. Por ejemplo un arreglo auxiliar, lo que sería un costo espacial *O(n)*.
    - MergeSort, RadixSort

Ordenación
Conceptos

- Podemos clasificar los algoritmos por las operaciones que hacen
  - Inserción
  - Extracción
  - Selección
  - Mezcla
  - Distribución



Ordenación
Rendimiento

- El rendimiento de los algoritmos suelen estar en una de estas tres posibles opciones
  - $O(n)$ $\quad$ $O(n \log n)$ $\quad$ $O(n^2)$
- En general examinaremos los escenarios para cada caso: peor, promedio y mejor
- El tiempo de ejecución de cada algoritmo cambia radicalmente de acuerdo al escenario.

¿Por qué $O(n)$ es el mínimo? y $O(n^2)$ el máximo?

Ordenación
Rendimiento

- Algunos algoritmos de ordenación agrupados por su rendimiento

Cuadráticos **$O(n^2)$**	**Sub-Cuadráticos** **$O(n^2) > T(n) > O(n)$**	**Lineales** **$O(n)$** *Asumen algunas características de los datos*
Burbuja Selección Inserción	*$O(n \log n)$* - QuickSort - Montículo (HeapSort) - Mezcla (MergeSort) ShellSort $O(n^{3/2})$	Cubetas (BinSort) Residuos (RadixSort) *Estos no se basan en comparación*

Ordenación
Conceptos

- *Inversiones*
  - Considere las siguientes listas de tamaño 20
  - 1 16 12 26 25 35 33 58 45 42 56 67 83 75 74 86 81 88 99 95
  - 1 17 21 42 24 27 32 35 45 47 57 23 66 69 70 76 87 85 95 99
  - 22 20 81 38 95 84 99 12 79 44 26 87 96 10 48 80 1 31 16 92
  - *¿Cuál es el grado de "desorden" de estas listas?*

Ordenación
Conceptos

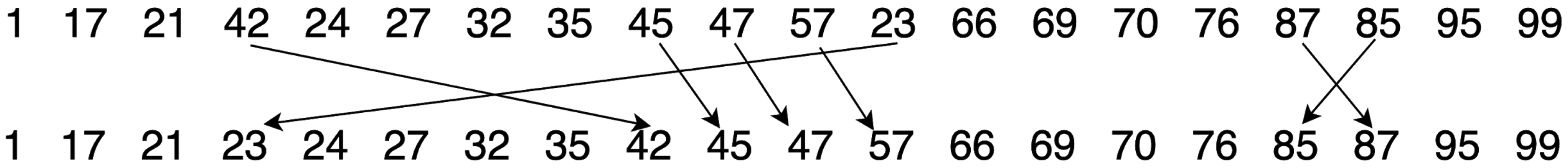
- Definiendo *inversión*
  - La primera solo requiere unos pocos ajustes

1 16 12 26 25 35 33 58 45 42 56 67 83 75 74 86 81 88 99 95

1 12 16 25 26 33 35 42 45 56 58 67 74 75 81 83 86 88 95 99

Ordenación
Conceptos

- Definiendo inversión
  - La segunda tiene dos entradas bien desordenadas



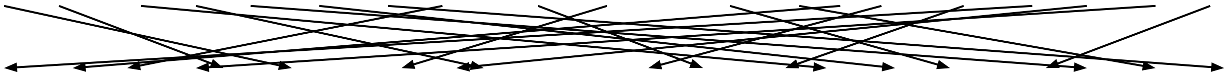
sin embargo, muchas entradas (13) ya están ordenadas.

Ordenación
Conceptos

- Definiendo inversión.

La tercera lista podemos decir que es significativamente desordenada.

22 20 81 38 95 84 99 12 79 44 26 87 96 10 48 80 1 31 16 92



1 10 12 16 20 22 26 31 38 44 48 79 80 81 84 87 92 95 96 99

Ordenación
Conceptos

- **Inversión**

Dada una lista de *n* números, hay

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$ par de números

Por ejemplo, la lista (1, 3, 5, 4, 2, 6) contiene los siguientes 15 pares

(1, 3)	(1, 5)	(1, 4)	(1, 2)	(1, 6)
	(3, 5)	(3, 4)	(3, 2)	(3, 6)
		(5, 4)	(5, 2)	(5, 6)
			(4, 2)	(4, 6)
				(2, 6)

Ordenación

Conceptos

Inversión

Los siguientes pares ya están ordenados

(1, 3)	**(1, 5)**	**(1, 4)**	**(1, 2)**	**(1, 6)**
(3, 5)	**(3, 4)**	(3, 2)	**(3, 6)**	
		(5, 4)	(5, 2)	**(5, 6)**
			(4, 2)	**(4, 6)**
				(2, 6)

Ordenación
Conceptos

Inversión

Los siguientes pares son inversiones

(1, 3)	(1, 5)	(1, 4)	(1, 2)	(1, 6)
(3, 5)	(3, 4)	**(3, 2)**	(3, 6)	
		(5, 4)	**(5, 2)**	(5, 6)
			(4, 2)	(4, 6)
				(2, 6)

Ordenación
Conceptos

- Considere un conjunto de elementos `S`
- Una permutación de los elementos de `S` es una reordenación de sus elementos
- Ej. dado `S = {0,1,2,3}`, las `4! = 24` permutaciones posibles son

0 1 2 3	0 1 3 2	0 2 1 3	0 2 3 1	0 3 1 2	0 3 2 1
1 0 2 3	1 0 3 2	1 2 0 3	1 2 3 0	0 3 1 2	0 3 2 1
2 0 1 3	2 0 3 1	2 1 0 3	2 1 3 0	2 3 0 1	2 3 1 0
3 0 1 2	3 0 2 1	3 1 0 2	3 1 2 0	3 2 0 1	3 2 1 0

Ordenación
Conceptos

Definición formal de Inversión

Dada una permutación de ***n*** elementos

- $p_0, p_1, p_2, .. , p_{n-1}$

una inversión es definida como un par de entradas que están intercambiadas

Esto es, (p_i, p_j) forma una inversión si:

- $\boldsymbol{i < j}$ pero $\boldsymbol{p_i > p_j}$

Ordenación
Conceptos

Así por ejemplo, la permutación

- 1, 3, 5, 4, 2, 6

contiene cuatro inversiones

- (3,2), (5,4), (5,2), (4,2)

Intercambiando dos entradas se puede:

- Remover una inversión ó
- Introducir una nueva inversión

Ordenación
Conceptos

Número de inversiones

- Hay $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ par de números en cualquier conjunto de *n* objetos (recordar combinación de n elementos en grupos de 2 elementos) $C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!}$
- Consecuentemente cada par puede:
  - Ser parte del conjunto ordenado de pares
  - Ser parte del conjunto de inversiones.
- Para una ordenación aleatoria, se espera aproximadamente que la mitad de todos los pares sean inversiones

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4} = \mathbf{O}(n^2)$$

Ordenación
Conceptos

Por ejemplo la siguiente lista de 56 elementos

261	548	3	923	195	973	289	237	57	299	594	928	515	55
507	351	262	797	788	442	97	798	227	127	474	825	7	182
929	852	504	485	45	98	538	476	175	374	523	800	19	901
349	947	613	265	844	811	636	859	81	270	697	563	976	539

tiene 655 inversiones y 885 pares ordenados. La fórmula predice 770 inversiones.

¿Es una lista relativamente aleatorizada?

Ordenación

Conceptos

Considere estas listas de 20 elementos cada una:

1 16 12 26 25 35 33 58 45 42 56 67 83 75 74 86 81 88 99 95

1 17 21 42 24 27 32 35 45 47 57 23 66 69 70 76 87 85 95 99

22 20 81 38 95 84 99 12 79 44 26 87 96 10 48 80 1 31 16 92

Hay 190 pares y se espera 95 inversiones

- La primera tiene 13 inversiones
- La segunda tiene 13 inversiones
- La tercera tiene 100 inversiones

¿Cual es la mejor "aleatorizada"?

Ordenación

Conceptos

- El número de inversiones brinda la idea del trabajo máximo que el algoritmo de ordenación debe hacer.

- Así... podemos tener una cota máxima para un algoritmo de ordenación basado en comparación..
  - es decir, $O(n^2)$

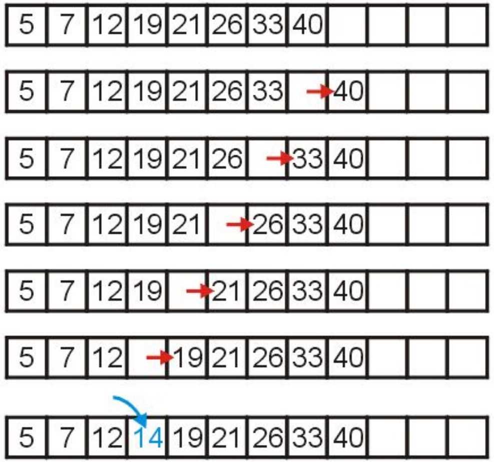
Ordenación
InsertSort

- El algoritmo:
  - Para cualquier lista desordenada
    - Trata el primer elemento como una lista ordenada de tamaño k=1
  - Entonces, dada una lista de tamaño k
    - Insertar el (k+1)ésimo ítem en la lista desordenada dentro de la ordenada.
    - La lista ordenada es ahora de tamaño k+1

Ordenación
InsertSort

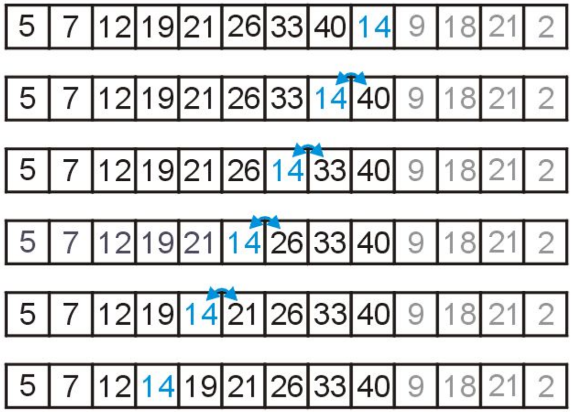
- Ejemplo, suponga que queremos insertar 14 en la siguiente lista ya ordenada (k=8)

5	7	12	19	21	26	33	40				

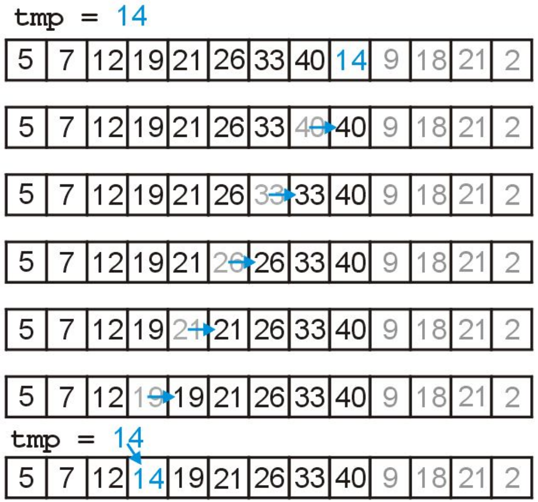


Ordenación
InsertSort

Usando intercambios en cada paso



Usando una variable temporal



Ordenación
InsertSort

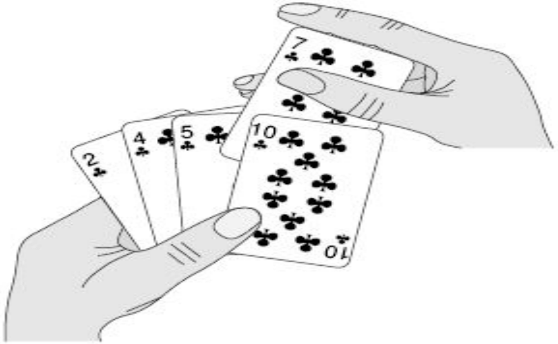
```
int key, i;

for ( int j=1; j < A.length; j++ ) {

   key = A[j];
   i   = j-1 ;

   while ( i >= 0 && A[i] > key ) {
      A[i+1] = A[i];
      i = i - 1 ;
   }

   A[i+1] = key;
}
```



Ordenación
InsertSort

Resumen de tiempos de ejecución

Caso	Tiempo	Comentario
Peor	$\Theta(n^2)$	Orden inverso
Medio	$O(d+n)$	$d = O(n^2)$ $(d = inversiones)$
Mejor	$\Theta(n)$	Muy pocas inversiones (por ejemplo ya esta ordenado)

Ordenación
InsertSort

- Ventajas
  - Simple de implementar
  - Para tamaños pequeños es bastante rápido, en promedio ***(¿porqué?)***
- Desventajas
  - Para tamaños grandes es bastante ineficiente en comparación con los algoritmos subcuadráticos

Ordenación
ShellSort

Propuesta por Donald Shell en 1959

La idea: *incrementos decrecientes* evitando gran cantidad de movimientos.

Es básicamente la misma idea que InsertSort

Uno puede utilizar los incrementos que le parezca con la **condición** de que el incremento final sea 1 (como en InsertSort).

Tiempo de ejecución sub-cuadrático ($O(n^{3/2})$).
Algunas cotas son mejores con incrementos diferentes

Ordenación

ShellSort

```
public void shellsort ( int [] a ) {
    for ( int gap = a.length / 2; gap > 0 ;
        gap = gap == 2 ? 1 : (int) (gap/2.2) )

        for (int i = gap; i < a.length; i++ ){
            int key = a[i];
            int j   = i;
            while ( j >= gap && key < a[j-gap] ) {
                a[j] = a[j-gap];
                j    = j- gap;
            }
            a[j] = key;
        }
}
```

InsertSort

Ordenación

ShellSort

Secuencia de decrementos producida por el algoritmo mostrado en la lámina anterior.

Ejemplo $n = 1000000$

500000
227272
103305
46956
21343
9701
4409
2004
910
413
187
85
38
17
7
3
1

Ordenación
Ejemplo de ShellSort

Ordenar : *18, 32, 12, 5, 38, 33, 16, 2*

Por simplicidad usamos incremento de n/2

Incremento 4:

1				2				3				4			

18	32	12	5	38	33	16	2

Paso 1) solo miramos el 18 y 38, no hay intercambio

Paso 2) solo vemos el **32** y **33**, no hay intercambio

Paso 3) solo observamos el **12** y **16**, no hay intercambio

Paso 4) vemos el **5** y **2**, y existe intercambio.

Ordenación
Ejemplo de ShellSort

Resultado con intercambio de 4: *18, 32, 12,* ***2****, 38, 33, 16,* ***5***

Incremento 2:

1	2						
18	32	12	2	38	33	16	5

Paso 1) mirar el **18, 12, 38, 16** , hay intercambios

Resultado: **12**, 32, **16**, 2, **18**, 33, **38**, 5

Paso 2) mirar el **32, 2, 33, 5**, hay intercambios

Resultado: 12, **2**, 16, **5**, 18, **32**, 38, **33**

Ordenación
Ejemplo de ShellSort

Resultado con intercambio de 2: *12*, ***2***, *16*, ***5***, *18*, ***32***, *38*, ***33***

Incremento 1:

1

12 2 16 5 18 32 38 33

Paso único) mirar todos los elementos (InsertSort normal)

Resultado final : *2, 5, 12, 16, 18, 32, 33, 38*

Ordenación

QuickSort

- Inventado por C.A. Hoare en 1962
- Su tiempo de ejecución en promedio es O($n \log n$)
- Su peor caso está en $O(n^2)$, aunque con algunas modificaciones puede evitarse.

Ordenación
QuickSort

- Por ejemplo, dada la siguiente lista

  80 38 95 84 99 10 79 44 26 87 96 12 43 81 3

- Podemos seleccionar el elemento central, 44, y ordenar el resto en dos grupos, los menores a 44 y los mayores a 44.

  38 10 26 12 43 3 44 80 95 84 99 79 87 96 81

- Si nosotros cada sublista, la volvemos a ordenar entonces podemos tener ordenado todo el arreglo.

Ordenación
QuickSort

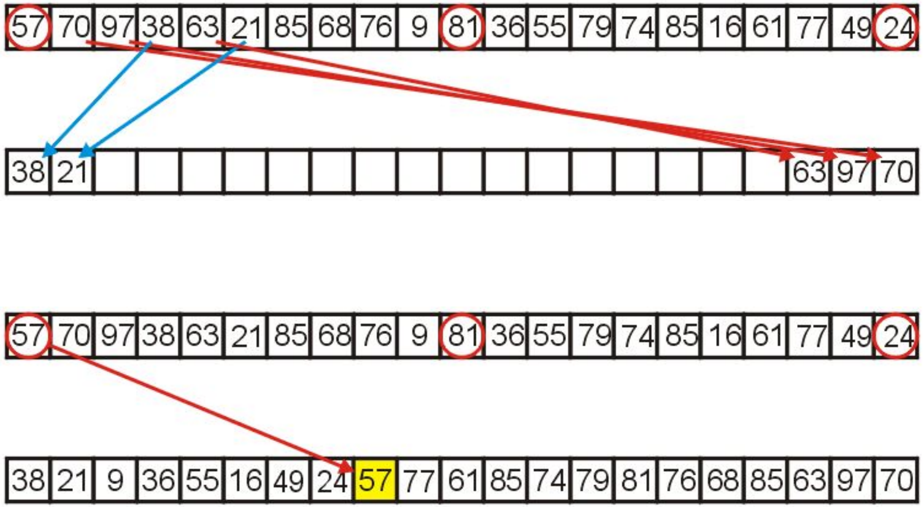
- Uno de los principales puntos en este algoritmo: *selección del pivot*
- Mostramos la mediana de tres

80	38	95	84	99	10	79	44	26	87	96	12	43	81	3
38	10	26	12	43	3	44	80	95	84	99	79	87	96	81
38	10	26	12	43	3	44	80	95	84	99	79	87	96	81
38	10	26	12	43	3	44	80	95	84	99	79	87	96	81

Ordenación

QuickSort

- Ejemplo (pivot = 57) (con auxiliar)



Ordenación
QuickSort

- Ejemplo completo

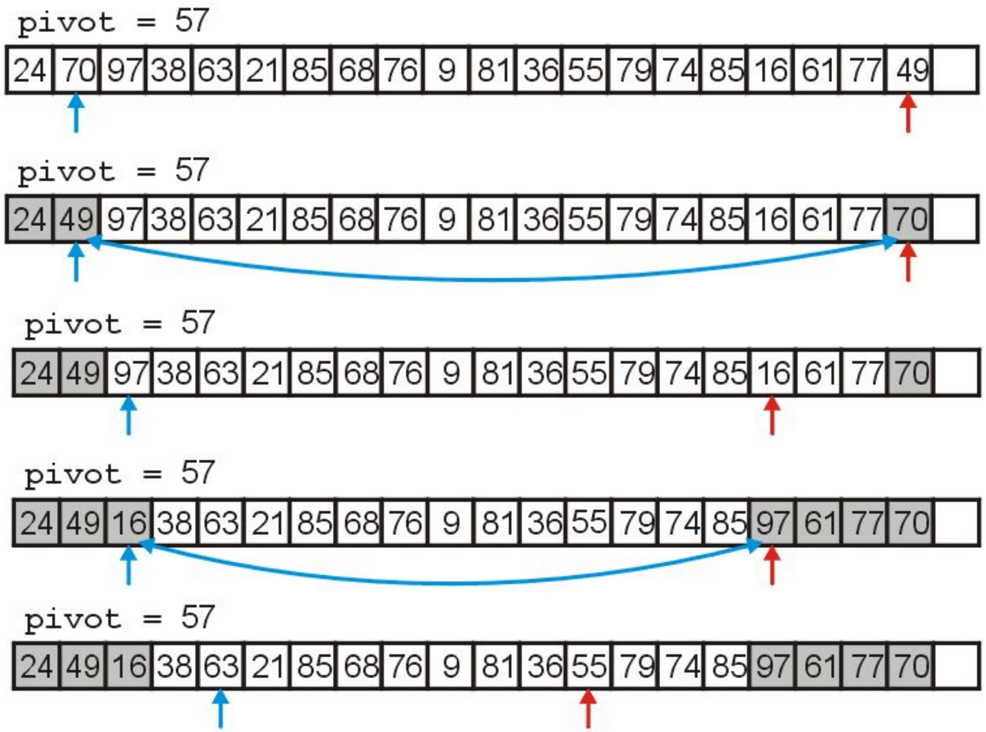
pivot =

57	70	97	38	63	21	85	68	76	9	81	36	55	79	74	85	16	61	77	49	24

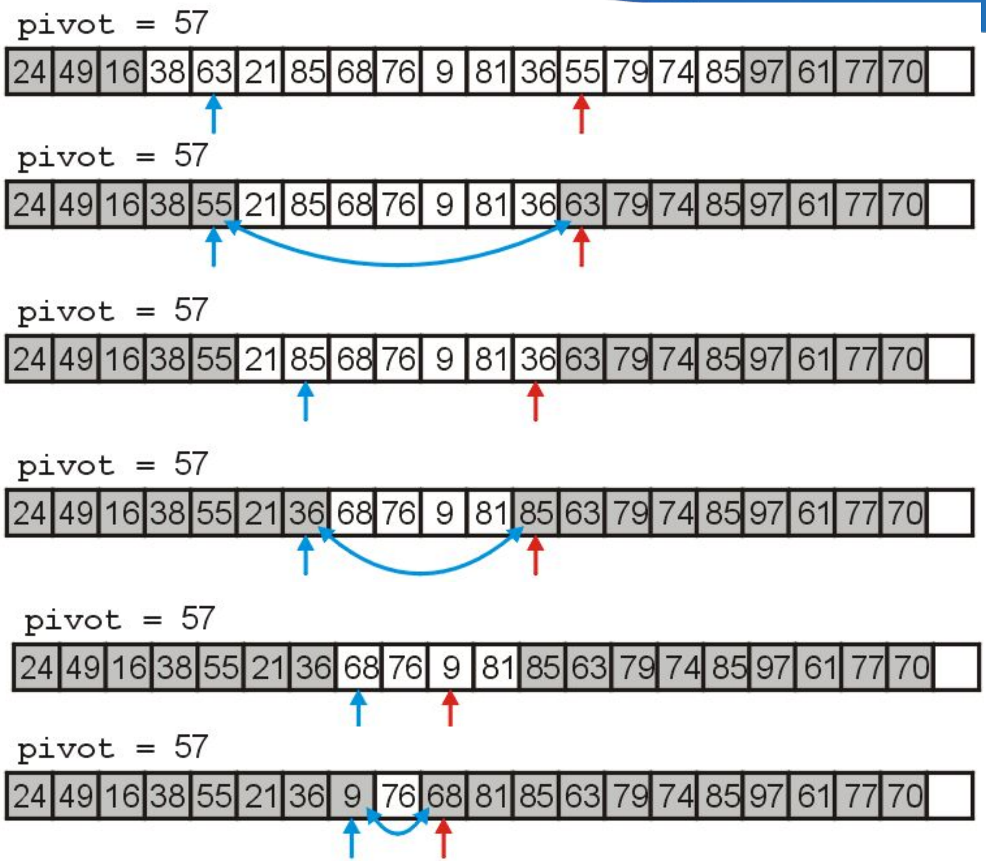
pivot = 57

24	70	97	38	63	21	85	68	76	9	81	36	55	79	74	85	16	61	77	49	

Ordenación
QuickSort

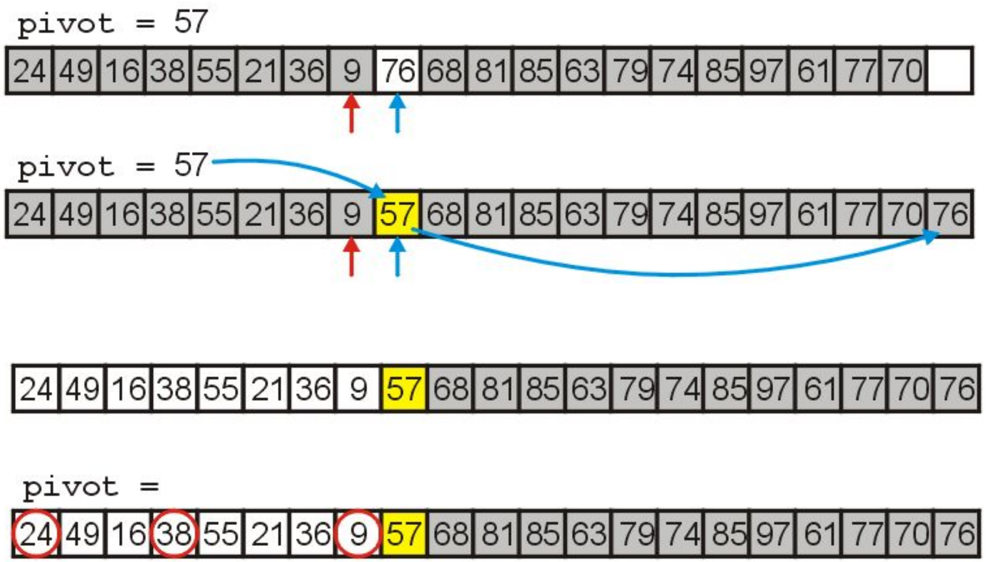


Ordenación
QuickSort



Ordenación

QuickSort



Ordenación
QuickSort
Implementación simple

QUICKSORT(*A, p, r*)

```
if p < r
   then q ← PARTITION(A, p, r )
        QUICKSORT(A, p, q - 1)
        QUICKSORT(A, q + 1, r )
```

Llamada inicial : `QUICKSORT(A, 1, n)`.

PARTITION(*A, p, r*)

```
 x ← A[r ] // estrategia muy simple,
// no usa mediana de tres, toma el último
  i ← p - 1
  for j ← p to r - 1
    do if A[ j ] ≤ x
       then i ← i + 1
            intercambiar A[i ] ↔ A[ j ]
  intercambiar A[i + 1] ↔ A[r ]

return i + 1
```

Ejercicio #1

a) Pruebe el algoritmo con la secuencia.
{4,8,10,9,6,2,1,7}
De qué lado quedan los menores y de que lado los mayores? Muestre el resultado luego de la primera llamada a PARTITION

b) Determine el tiempo de este algoritmo,
Indique su ecuación de recurrencia y
Luego calcule su cota O para el peor caso

Ordenación

QuickSort

Peor caso

-Ocurre cuando el arreglo esta totalmente desbalanceado

- Se tiene 0 elementos en un subarreglo y n-1 en otro.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + T(0) + \Theta(n) \\
&= T(n-1) + \Theta(n) \\
&= \Theta(n^2)
\end{aligned}
$$

Ordenación
QuickSort

Mejor caso

-Ocurre cuando el arreglo está totalmente balanceado
- Se tiene n/2 elementos en cada subarreglo

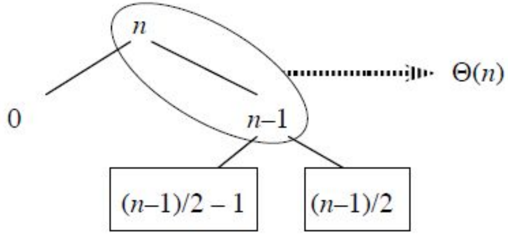
$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + \Theta(n) \\ &= \Theta(n \lg n) \end{aligned}$$

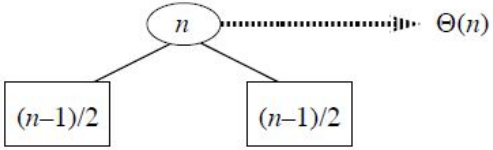
Ordenación
Quicksort

El caso promedio esta más relacionado al mejor caso que al peor caso.

Imaginar que la partición produzca arreglos en relación 9-1

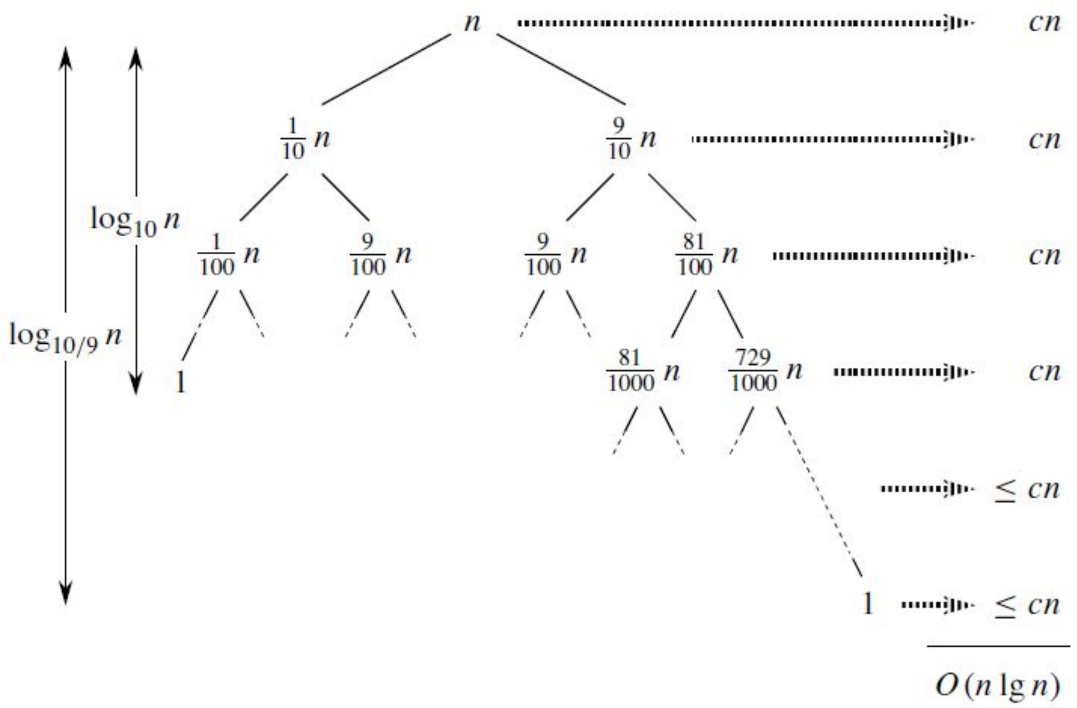
$$T(n) \quad = T(9n/10) + T(n/10) + \Theta(n)$$
$$= \Theta(n \lg n)$$





Ordenación

Quicksort



Ordenación
QuickSort

Caso	Tiempo de ejecución	Comentarios
Peor	$\mathbf{O}(n^2)$	Mala selección de pivot o entrada con sesgo
Promedio	$\mathbf{O}(n \lg(n))$	
Mejor	$\mathbf{O}(n \lg(n))$	Es la misma cota que el caso promedio

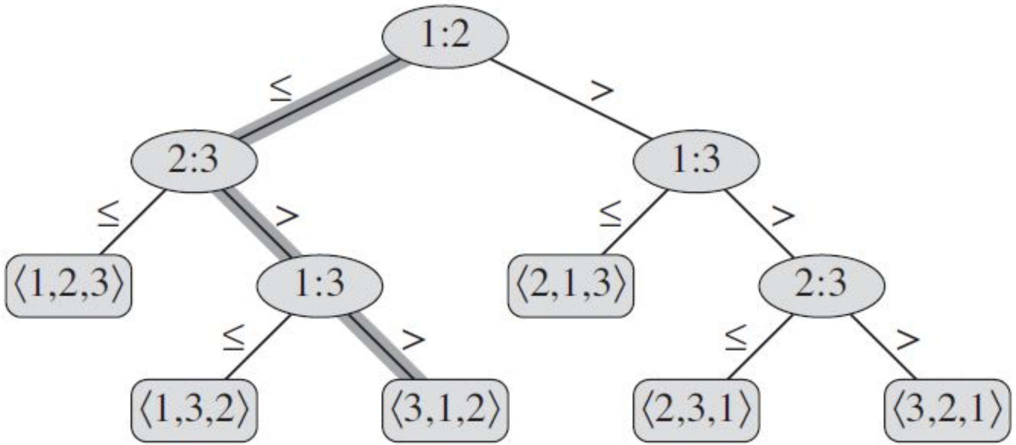
Ordenación QuickSort

DEMO de Código

Cota mínima para algoritmos de ordenación basados en ordenación

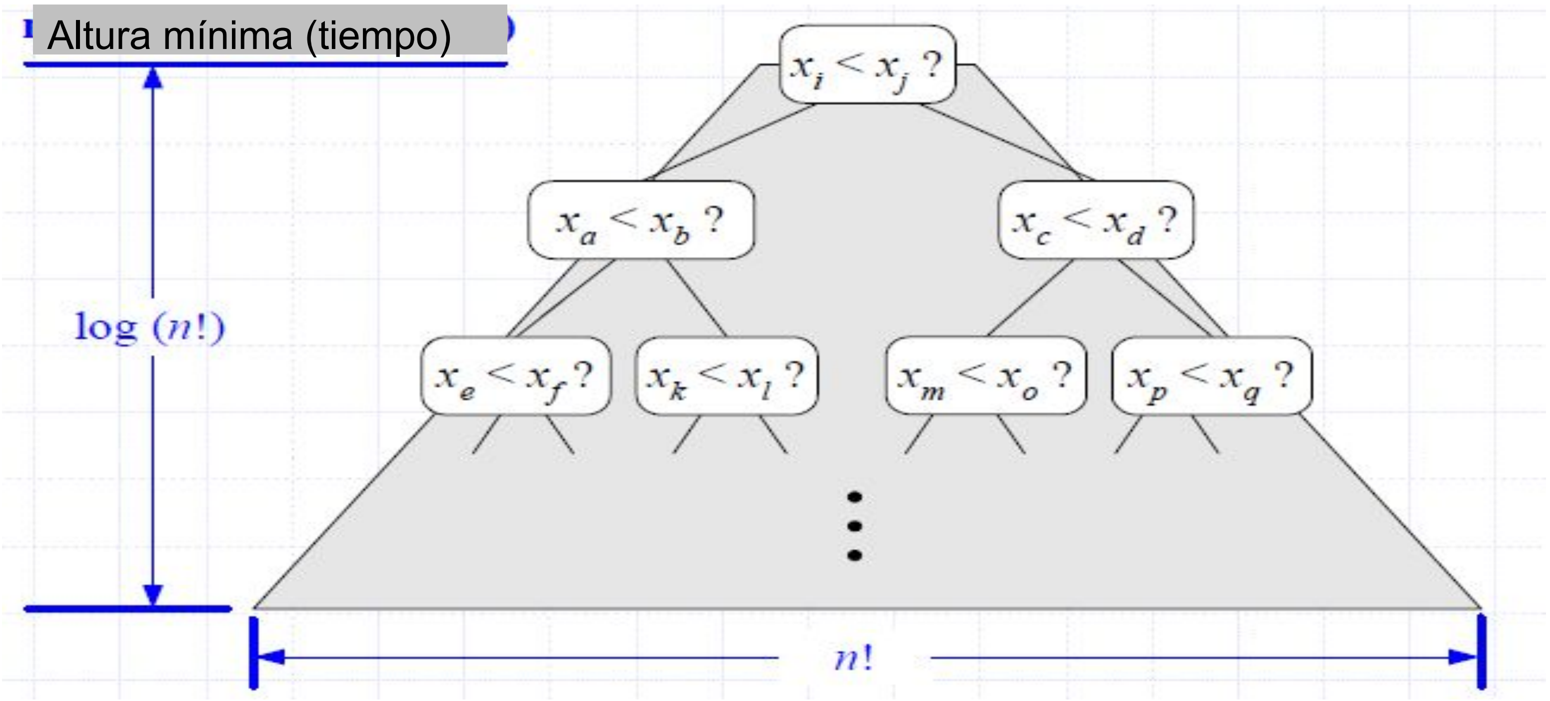
- CLRS – Capítulo 8 – ítem 8.1

Árbol de decisión



El AD del algoritmo de inserción para 3 elementos. En el nodo interno ***i:j*** indica la comparación entre a_i y a_j . En la hoja se indica la permutacion **<p(1), p(2)..p(n)>** que muestra la ordenación $a_p(1) <= a_p(2) <= .. <= a_p(n)$. El camino sombreado muestra las decisiones tomadas para la entrada $<a_1=6, a_2=8, a_3=5>$. La permutación ***<3,1,2>*** en la hoja indica que la entrada ordenada es $a_3=5 <= a_1=6 <= a_2=8$. Existen ***3!=6*** posibles permutaciones de la entrada, así el AD debe tener al menos 6 hojas.

Árbol de decisión



A continuación y en la próxima clase

- MergeSort
- HeapSort
- CountingSort
- RadixSort
- BucketSort