Problemas de Aritmética

y cómo resolverlos

Por : Hernán Flores Velazco

COLECCIÓN RACSO

Problemas de
Aritmética
y cómo resolverlos

Colección Racso

Dirigido por:

FÉLIX AUCALLANCHI VELÁSQUEZ

Primera edición en español

Printed in Peru - Impreso en Perú
Imprenta MAQUETI E.I.R.L. - Jr. Carlos Arrieta 1319 - Lima 1

SERIE DE LIBROS Y
COMPENDIOS
CIENTIFICOS
COLECCION RACSO

PROBLEMAS DE ARITMETICA Y COMO RESOLVERLOS

1ra EDICION

COLABORADORES:

Ing. Jaime Rojas L.	UNI
Ing. Guillermo López Zamora	UNI
Ing. Mario Seguil Mirones	UNCP
Lic. Javier Reynaga Alarcón	UNI
Ing. Carlos Paucarpura Castañeda	UNCP
Ing. Jorge Chumberiza Manzo	UNI
Ing. Lucio Toledo Sarzoza	UNI

RACSO EDITORES

LIMA 1999

Título de la obra:
Problemas de Aritmética y cómo resolverlos
© 1999, por ***Hernán Flores Velasco***

Primera edición
Publicada por RACSO EDITORES - OCTUBRE 1999

Supervisión general:

Lic. ***Mario Seguil Mirones*** (UNCP)
Profesor de la Escuela Matemática Zárate - Hyo

Revisión de estilo:

Dr. Carlos Chávez Vega

Revisión Técnica :

Mr. Aurelio Games Cabanillas
Profesor de la Universidad Nacional Enrique Guzman y Valle (La Cantuta)

Ing. Guillermo López Zamora
Profesor del Centro de Bachillerato Pitágoras

Composición, Diagramación e Ilustraciones:

Compañia Editorial: ***RACSO EDITORES***

Supervisión de la edición:

Miguel Angel Díaz Lorenzo

Compañia Editorial: *RACSO EDITORES*

Dirigida por: ***Félix Aucallanchi V.***

Primera edición en español

Printed in Peru - Impreso en Perú

PROLOGO DEL AUTOR

Siempre ha sido una necesidad permanente por parte de quienes desarrollamos la profesión de docentes en el área matemática, el de contar con un material bibliográfico adecuado para poner en práctica los principios de esta ciencia, bien llamada : La reina de las matemáticas.

Por experiencia podemos ir acumulando una serie de ejercicios adecuados para cultivar el dominio en las distintas situaciones problemáticas en que puede encontrarse un estudiante de secundaria, de nivel intermedio y porqué no decirlo, los de nivel superior. Por tales razones acepté elaborar un texto práctico de aritmética para la prestigiosa Colección Racso, denominado Problemas de Aritmética y cómo resolverlos, en el que he intentado plasmar a través de ejercicios, la mayor parte de mis experiencias como docente.

Debo señalar que en concordancia con las demás publicaciones de la colección de esta misma línea, se inicia cada capítulo con una breve referencia a los fundamentos teóricos, los que a su vez están enriquecidos con ejemplos dirigidos especialmente para observar las aplicaciones o algunas propiedades particulares. A continuación presento los problemas resueltos que he seleccionado de modo que el nivel de dificultad sea creciente y de criterio amplio, con la finalidad de abarcar el máximo de los modelos o tipos de problemas de cada tema.

Muchas veces por atender determinados programas educativos, especialmente los referidos a centros pre-universitarios, el curso de Aritmética suele iniciar su desarrollo con los capítulos de Aritmética Comercial : Razones y Proporciones, Proporcionalidad, Reparto Proporcional, ...etc. Sin embargo, una exposición serie de este importante curso, supone un desarrollo matemático formal que no dé lugar a la utilización de términos que aún no han sido definidos, lo cual constituye un verdadero impase lógico entre lo que se propone y lo que se quiere proponer; por tal razón hemos iniciado el curso a partir de un tema que consideramos básico en la ciencias matemáticas denominado Lógica Matemática, para seguir luego con Teoría de Conjuntos, Sistemas de Numeración, Conteo de Números,...., hasta llegar a los temas de la Aritmética Comercial.

No cabe duda que la aritmética ha evolucionado y mejorado su contenido, metodología y su campo de aplicación, de modo pues que hay marcadas diferencias entre lo que se hacia el siglo pasado con lo que se hace ahora en el umbral del tercer milenio. No podemos entonces estar al margen de toda esta vorágine de cambios que se vienen dando en todos los campos del que hacer humano tecnológico y científico. Por esta razón, resulta poco práctico y muy tedioso resolver los casos de la aritmética convencional a través del razonamiento puro, tal como se hacia en décadas pasadas; ha sido entonces una lucha intestina por conservar viejos y anquilosados métodos con los nuevos enfoques que la aritmética actual exige.

No es extraño observar resoluciones de problemas de aritmética clásica por medio de algunos procedimientos algebráicos, puesto que el campo de aplicación de la aritmética se introdujo en regiones más áridas del pensamiento humano. Lo que antes no fué lícito, es hoy una necesidad que apuesta por el avance.

Deseo expresar mis mayores sentimientos de gratitud a la editorial Racso que depositó en mi persona la confianza de poder realizar el presente trabajo, el que espero esté en el nivel de la exigencia del buen público lector.

Conciente que toda obra que llega al público lector especializado, se expone a la crítica respectiva, por ello agradeceré a todo aquel que lo estime conveniente alcanzarnos su opinión y sus críticas relativas al presente texto.

Hernán Flores Velasco

PROLOGO DEL EDITOR

Como todo lo que se ha logrado producir a través de esta casa editorial, nos complace ver concluído lo que antes fuera un proyecto del libro titulado : Problemas de Aritmética y cómo resolverlos. Han sido prolongados meses de marchas y contramarchas, de diléctos conversatorios y de enriquecidas discusiones respecto de un sinnúmero de puntos de vista, de lo que podía ser y de lo que debía ser, un libro de amplio alcance y contemporáneo enfoque.

El texto que ponemos en vuestras manos, intenta satisfacer todas las exigencias de la aritmética actual, la misma que se encuentra sumergida y conectada, como en sus inicios, con muchas otras disciplinas de la matemática; sin embargo, continúa siendo la "reina". Esto ha sido el preámbulo de un trabajo serio y permanente en busca de darle lo mejor a nuestro público lector. Creemos haber hecho bastante, sin embargo somos concientes de que la realidad es cambiante y lo que hoy nos parece aceptable o bueno, dentro de no mucho tiempo nos parecerá poco y con menos bondades; sin embargo estamos predispuestos a todo lo nuevo que se nos exija, por que aceptamos la renovación por las cosas mejores.

Colección Racso se satisface de contar con un prestigioso profesional de las matemáticas, como es el Lic. Hernán Flores Velasco, profesor de dilatada trayectoria y autor de varias obras que han ido enriqueciendo la bibliografía matemática nacional. No dudamos que la presente obra corresponda a uno de los trabajos más serios en el campo de la Aritmética Práctica, que se ha publicado en estos últimos tiempos, por la enorme cantidad de información que ella posee, por el orden en que ésta se presenta y por la selecta concurrencia de problemas resueltos y propuestos.

En esta obra se pueden distinguir temas que la aritmética convencional pocas veces atendió, sin embargo debemos reconocer que en la actualidad estos son temas básicos para todo educando que aspira a los niveles superiores como son los institutos y las universidades. Entre estos tenemos : Lógica Matemática, Conteo de Números, Relaciones y Funciones, Estadística, ... etc.

Se puede apreciar a lo largo de la obra una profusa y generosa entrega de notas que enriquecen la información y la aplicación de los principios teóricos. Asi tenemos los resúmenes teóricos, los ejercicios de aplicación, los problemas resueltos y los problemas propuestos. Todo este material hace posible que el lector tenga un panorama completo de todos los temas, sus aplicaciones principales, asi como también una serie de casos resueltos de un modo directo, general y simple.

Espero que el presente texto constituya la fuente del orden en temas y problemas que todo profesor busca al inicio de su carrera, aliviándole de este modo su labor, pues todos por experiencia sabemos que un ejercicio o problema con características apropiadas, originales y de resolución a veces inesperada y directa (pero meditada) y con cálculos que casi siempre conducen a números de fácil operatividad, nos permite ser aceptados con agrado por nuestros alumnos, provocando en ellos una especial atención por el curso.

Como en todas nuestras publicaciones anteriores, estoy totalmente seguro que así como he quedado satisfecho de la lectura de los manuscritos, por su aceptable sencillez y eficaz precisión matemática, los lectores experimentarán una agradable sensación de seguridad, puesto que todo lo que aqui se expone fue aplicado por el autor durante muchos años de docencia.

Atentamente:

Félix Aucallanchi Velásquez

INDICE GENERAL

SIMBOLOS

$\{1; 2; 3\}$	conj. con elementos 1, 2 y 3
N_0	conj. de los números naturales: 0; 1; 2; 3; ...
N	conj. de los números naturales: 1; 2; 3; ...
Z	conj. de los números enteros:...; -2; -1; 0; 1;
Z^+	conj. de los números enteros positivos
Z^-	conj. de los números enteros negativos
Q	conj. de los números racionales
Q'	conj de los números irracionales
$\Re$	conj. de los números reales
$\Re^+$	conj. de los números reales positivos
$\Re^-$	conj. de los números reales negativos
C	conj. de los números complejos
i	símbolo que representa a $\sqrt{-1}$
$\{\}$ o $\emptyset$	conjunto nulo o vacío
$\in$	pertenece a ...
$\notin$	no pertenece a ...
$A \subset B$	A es subconjunto de B
$A \cap B$	A intersección B
$A \cup B$	A unión B
A', o, $\complement_A$	complemento del conj. A
$\exists$	existe
$\nexists$	no existe
$\exists!$	existe un único
$\nexists!$	no existe un único
$\forall$	para todo
$\not\forall$	no para todo
Σ	suma, o, sumatoria
$(x; y)$	un par ordenado de números
$d_{(A, B)}$	distancia entre los puntos A y B
$\rightarrow$ o $\therefore$	implica, luego, por lo tanto
$\leftrightarrow$	es equivalente a, implica en ambos sentidos
$\Rightarrow$	entonces

$\Leftrightarrow$	si y solo si
/	tal que
$=$	igual
$\neq$	desigual, distinto
$\equiv$	idéntico
$\approx$	aproximadamente
$2n$	número par $(n \neq 0)$
$2n + 1$	número impar $(n \in Z)$
$2n - 1$	número impar $(n \in N)$
$\propto$	proporcional a
$\lvert a \rvert$	valor absoluto de a
$a > b$	a es mayor que b
$a < b$	a es menor que b
$a \geq b$	a es mayor o igual que b
$a \leq b$	a es menor o igual que b
$a \gg b$	a es mucho mayor que b
$a \ll b$	a es mucho menor que b
$a < c < b$	c es mayor que a y menor que b
$\sim$	semejante
$\cong$	congruente
$\wedge$	y
$\vee$	o
$f(x)$	función de x
$f^{-1}(x)$	función inversa de x
$n!$	factorial de $n = n.(n - 1).(n - 2). ... ().2.1$
sen x	*seno* del número x
cos x	*coseno* del número x
tg x	*tangente* del número x
ctg x	*cotangente* del número x
sec x	*secante* del número x
csc x	*cosecante* del número x
lím	límite

1

LOGICA MATEMATICA

Entenderemos por lógica matemática a una disciplina intermedia entre las ciencias formales : Lógica y matemática, que trata de resolver los problemas de la lógica mediante un *simbolismo* de tipo algebraico.

PROPOSICIÓN DE LA LÓGICA

Es aquella oración o enunciado que puede calificarse o bien como verdadero (V) o bien como falso (F) pero no ambas posibilidades al mismo tiempo.

Las proposiciones lógicas pueden ser SIMPLES, si expresan una sola idea, o COMPUESTAS, si se forman a partir de proposiciones simples ligadas entre si por lo que, más adelante llamaremos *conectivbs lógicos*.

La verdad o falsedad de una proposición lógica recibe el nombre de VALOR DE VERDAD o también VALOR VERITATIVO.

Las proposiciones lógicas se suelen denotar con letras minúsculas tales como : p, q, r, s, t, ..., etc. Por ejemplo :

p representa la proposición : " 2 es un número entero "	(V)
q representa la proposición : " 1/2 es un número natural "	(F)
r representa la proposición : " Teófilo Cubillas es peruano "	(V)
s representa la proposición : " Todo hombre es mortal "	(V)
t representa la proposición : " $4 . 2 = 9$ "	(F)

No se consideran como proposiciones lógicas :

¿Dónde vas?
Muchas gracias
$a + b = x$

En todas ellas, no se pueden identificar sus valores de verdad o de falsedad.

NEGACIÓN DE UNA PROPOSICIÓN

La negación de una proposición, consiste en cambiar el valor de verdad que tiene una proposición original. Asimismo, dada una proposición "p", su negación se denota así : $\sim p$

Por ejemplo :

p : 19 es un número impar	(V)
$\sim p$: 19 no es un número impar	(F)
q : Caracas es la capital de Bolivia	(F)
$\sim q$: Caracas no es la capital de Bolivia.	(V)

Si realizamos una tabulación:

p	$\sim p$
V	F
F	V

"$\sim p$" se lee : " es falso que p "
" no p "

EQUIVALENCIA : $\sim p$: No es cierto que p

1.1 CONECTIVOS LÓGICOS

1. DISYUNCION.- Dos proposiciones lógicas simples se pueden enlazar por medio del conectivo "o" (en el sentido inclusivo y/o) para formar una proposición compuesta llamada DISYUNCIÓN de ambas proposiciones .

La disyunción de las proposiciones p y q se denota así : $p \vee q$

Por ejemplo : p : Jorge es peruano

q : Michael es norteamericano

$p \vee q$: Jorge es peruano o Michael es norteamericano

Su tabla de valores veritativos será :

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Nótese que :

$p \vee q$ es falsa (F), únicamente, cuando p y q son ambas falsas.

2. CONJUNCION: Un par de proposiciones simples pueden enlazarse mediante el conectivo "y" para formar una proposición compuesta llamada CONJUNCION de ambas proposiciones. La conjunción de las proposiciones p y q se denota : $p \wedge q$.

Por ejemplo : p : Raúl es ingeniero

q : Samuel es médico

$p \wedge q$: Raúl es ingeniero y Samuel es médico

Su tabla de valores de verdad será :

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Obsérvese que :

$p \wedge q$ solamente es verdadera (V), cuando p y q son ambas verdaderas

EQUIVALENCIAS : *Pero , sin embargo , además, no obstante , aunque , a la vez.*

3. CONDICIONAL.- Muchas proposiciones compuestas, especialmente en matematica, son de la forma «si p entonces q» , tales proposiciones se llaman CONDICIONALES o IMPLICACIONES y se les denota por : $p \rightarrow q$, que significa: «p implica q».

Por ejemplo : p : José es limeño

q : José es peruano

$p \rightarrow q$: Si José es limeño, entonces Juan es peruano.

EQUIVALENCIAS : *Porque , puesto que , ya que , cada vez que , siempre que*

La tabla de valores veritativos será :

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

De donde se observa que :

La proposición $p \rightarrow q$ es falsa (F), cuando el antecedente (p) es verdadero y el consecuente (q) es falso.

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

4. BICONDICIONAL.- Otra proposición compuesta bastante común es la de la forma «p si y solo si q »; tal proposición se llama BICONDICIONAL o DOBLE IMPLICACION y se le denota por : $p \leftrightarrow q$, que se lee : «p es condición necesaria y suficiente para q ».

Por ejemplo : p : 3 es impar

q : 4 es par

$p \leftrightarrow q$: 3 es impar si y solo si 4 es par

En una tabla de valores de verdad se tendrá :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Notemos que :

$p \leftrightarrow q$ es verdadera (V), cuando p y q tienen valores idénticos de verdad.

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\ &\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim q) \end{aligned}$$

5. DISYUNCIÓN EXCLUSIVA.- Dadas las proposiciones p y q, la DISYUNCIÓN EXCLUSIVA de dichas proposiciones se denota $p \Delta q$ que se lee : « p ó q pero no ambas » o también : « o bien p o bien q ».

Por ejemplo : p : Jorge va al cine con Edith

q : Jorge va al cine con Gabriela

$p \Delta q$: Jorge va al cine, o bien con Edith o bien con Gabriela

Tabulando los valores veritativos :

p	q	$p \,\Delta\, q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observemos que :

$p \,\Delta\, q$ es verdadera (V), solamente cuando p y q tienen valores de verdad opuestos.

$$p \,\Delta\, q \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$$
$$\equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$$
$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

1.2 TAUTOLOGIA, CONTRADICCION Y CONTINGENCIA

1.- TAUTOLOGIA.- Es toda proposición compuesta cuyo valor de verdad es siempre verdadero (V) para cualquier combinación de valores veritativos de sus componentes.

Por ejemplo, construyamos, paso por paso, la tabla de verdad de :

$$[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$$

p	q	$p \vee q$	$\sim q$	$(p \vee q) \wedge \sim q$	$[(p \vee q) \wedge \sim q]$	$\rightarrow$	p
V	V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	V	F

Luego, la proposición $[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$ es una TAUTOLOGÍA

2.- CONTRADICCION.- Llamamos así a toda proposición compuesta cuyo valor veritativo es siempre falso para cualquier combinación de valores de verdad de sus componentes.

Por ejemplo, construyamos la tabla de valores veritativos de :

$$[(p \wedge q) \vee \sim q] \wedge \sim p$$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee q$	$\sim q$	$[(p \wedge q) \vee q]$	$\wedge$	$\sim p$
V	V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F	F	V

De donde notamos que la proposición $[(p \wedge q) \vee q] \wedge \sim p$ es una CONTRADICCIÓN

3 - CONTINGENCIA.- Es aquella proposición lógica simple o compuesta, cuya tabla de verdad tiene al menos un verdadero (V) y un falso (F).

Construyamos por ejemplo la tabla de verdad de :

$$(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$		
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V

Luego, podemos afirmar que la proposición : $(\sim p \wedge \sim p) \vee \sim q$ es una CONTINGENCIA

1.3 PROPOSICIONES LOGICAMENTE EQUIVALENTES

Dos proposiciones lógica p y q se dice que son *lógicamente equivalentes* cuando sus tablas de verdad son idénticas; en este caso se denota :

$$p \equiv q$$

Como por ejemplo, construyamos las tablas de verdad de :

$$\sim p \rightarrow \sim q \quad \text{y} \quad p \vee \sim q$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$p \vee \sim q$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

idénticos

Luego, las proposiciones compuestas : $\sim p \rightarrow \sim q$ y $p \vee \sim q$ son LOGICAMENTE EQUIVALENTES, y lo denotamos así:

$$\sim p \rightarrow \sim q \;\equiv\; p \vee \sim q$$

1.4 LEYES DEL ALGEBRA DE PROPOSICIONES

1ra Ley : IDEMPOTENCIA

$$p \wedge p \equiv p$$
$$p \vee p \equiv p$$

2da Ley : CONMUTATIVA

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p$$

3ra Ley : ASOCIATIVA

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

4ta Ley : DISTRIBUTIVA

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

5ta Ley : MORGAN

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$
$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

6ta Ley : COMPLEMENTO

T = Tautología

C = Contradicción

$p \vee \sim p \equiv$ T (Tercio excluido)

$p \wedge \sim p \equiv$ C (Contradicción)

$\sim \sim p \equiv p$ (Doble Negación)

$\sim \mathrm{T} \equiv \mathrm{C}$

$\sim \mathrm{C} \equiv \mathrm{T}$

7ma Ley : IDENTIDAD

$$p \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T} \qquad p \wedge \mathrm{T} \equiv p$$
$$p \vee \mathrm{C} \equiv p \qquad p \wedge \mathrm{C} \equiv \mathrm{C}$$

8va Ley : IMPLICANCIA MATERIAL

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

9na Ley : CONTRARECIPROCA

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

10ma Ley : DOBLE IMPLICACION

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$
$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$
$$\equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

11ra Ley : ABSORCION

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$
$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$$
$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Dadas las proposiciones : ***p : Marco es comerciante***
q : Marco es próspero industrial
r : Marco es ingeniero

Simbolizar el enunciado :

" Si no es el caso que, Marco sea un comerciante y un próspero industrial, entonces, es ingeniero o no es comerciante "

A) $\sim(p \wedge q) \rightarrow (r \vee p)$ ***B)*** $(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge q)$ ***C)*** $\sim(p \vee q) \rightarrow (r \vee p)$

D) $\sim(p \wedge q) \rightarrow (r \vee \sim p)$ ***E)*** $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim r \vee p)$

Resolución.-

Si no es el caso que, Marco sea un comerciante y un próspero industrial

$\sim(p \wedge q)$

(entonces)

es ingeniero o no es comerciante

$(r \vee \sim p)$

solución $\sim(p \wedge q) \rightarrow (r \vee \sim p)$ RPTA. D

2.- Si : ***p : Luis compra pan***
q : Luis Toma desayuno
r : Luis se levanta temprano

Simbolizar : $(r \wedge \sim p) \rightarrow q \wedge$

« Si Luis se levanta temprano y no compra pan, implica que podrá tomar desayuno; pero, que haya comprado el pan es condición necesaria y suficiente para que se halla levantado temprano »

A) $[(r \wedge \sim p) \vee \sim q] \wedge [(p \leftrightarrow r)$ ***D)*** $[(r \wedge \sim p) \leftrightarrow q] \wedge (r \rightarrow p)$

B) $[(r \wedge p) \rightarrow \sim q] \wedge (q \chi r)$ ***E)*** $[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge p$

C) $[(r \wedge \sim p) \rightarrow \sim q] \wedge (p \leftrightarrow r)$

Resolución.-

Si Luis se levanta temprano y no compra pan

$[\,(r \wedge \sim p)$

(implica que)

no podrá tomar desayuno

$\sim q\,]$

pero

$\wedge$

que haya comprado el pan es condición necesaria y suficiente para que se haya levantado temprano.

$(p \leftrightarrow r)$

solución : $[\,(r \wedge \sim p) \rightarrow \sim q\,] \wedge (p \leftrightarrow r)$ RPTA. C

F

3.- *Si la proposición compuesta $(\sim p \wedge r) \rightarrow (r \wedge \sim q)$ es falsa, determinar el valor de verdad de las proposiciones r, p y q respectivamente.*

A) FVV ***B) FVF*** ***C) VFV*** ***D) VVF*** ***E) VVV***

<u>Resolución</u>.-

V → F $\boxed{F}$

La proposición compuesta : $(\sim p \wedge r) \rightarrow (r \wedge \sim q)$ es una CONDICIONAL, la cual será falsa (F) solo cuando el antecedente $(\sim p \wedge r)$ sea verdadero (V) y el consecuente $(r \wedge \sim q)$ sea falso (F).

V V V

La conjunción $(\sim p \wedge r)$ será verdadera (V) solo en caso que $\sim p$ sea V y r sea V , luego :

$$\boxed{p : F} \text{ y } \boxed{r : V}$$

En la conjunción $(r \wedge \sim q)$, para que sea verdadera (V), como r es V, entonces $\sim q$ es F, por lo tanto :

V

r : V q : V p : F RPTA. D

F

4.- *De la falsedad de la proposición : $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$, deducir el valor de la verdad de las siguientes proposiciones compuestas :*

a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$

b) $[(\sim r \vee q) \wedge p] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

A) VFV ***B) FFF*** ***C) VVV*** ***D) VVF*** ***E) FFV***

<u>Resolución</u>.-

$$(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s) \equiv F$$

Nótese que la expresión dada es una DISYUNCION, la que solo es falsa (F) cuando sus dos componentes son falsos (F), luego :

$$p \rightarrow \sim q \equiv F \quad \text{y} \quad \sim r \rightarrow s \equiv F$$

Ambas expresiones resultantes son CONDICIONALES que únicamente son falsas (F) cuando el antecedente es verdadero (V) y el consecuente es falso (F).

De donde : $p \equiv V$ $\sim q \equiv F$ y $\sim r \equiv V$ $s \equiv F$

Entonces : p : V q : V r : F s : F

Reemplazando estos valores de verdad en cada uno de las expresiones dadas se tendrá:

a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q \equiv (\sim V \wedge \sim V) \vee \sim V$

$$\equiv (F \wedge F) \vee F$$

$$\equiv F \vee F$$

$$\equiv F$$

b) $[(\sim r \vee q) \wedge p] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s] \equiv [(\sim F \vee V) \wedge V] \leftrightarrow [(\sim V \vee F) \wedge F]$

$$\equiv [(V \vee V) \wedge V] \leftrightarrow [(F \vee F) \wedge F]$$
$$\equiv [\ V \wedge V\ ] \leftrightarrow [\ F \wedge F\ ]$$
$$\equiv V \leftrightarrow F$$
$$\equiv F$$

c) $(p \to q) \to [(p \vee q) \wedge \sim q] \equiv (V \to V) \to [(V \vee V) \wedge \sim V]$

$$\equiv V \to [\ V \wedge F\ ]$$
$$\equiv V \to F$$
$$\equiv F$$

Luego : F F F RPTA. B

5.- Si la proposición : $(\sim p \to \sim q) \vee (r \,\Delta\, q)$, es falsa; entonces los valores de verdad de :

a) $(p \to q) \to (r \,\Delta \sim q)$ ***b) $\sim q \to [(p \leftrightarrow q) \wedge r]$***

son respectivamente :

A) VV ***B) VF*** ***C) FV*** ***D) FF*** ***E) Indefinidos***

<u>Resolución</u>.-

Notamos que nos dan como dato una DISYUNCION : $(\sim p \to q) \vee (r \,\Delta\, q)$; ésta sólo será falsa (F) cuando sus dos componentes sean falsas ; es decir

$$\sim p \to \sim q \equiv F \qquad y \qquad r \,\Delta\, q \equiv F$$

La primera de ellas, por ser una CONDICIONAL, únicamente será falsa cuando $\sim p$ sea verdadera (V) y $\sim q$ sea falsa (F), luego : $p \equiv F$ $q \equiv V$

En la segunda que es una DISYUNCION EXCLUSIVA , se cumple que es falsa (F) cuando las proposiciones componentes tienen valores de verdad iguales, entonces como q es falsa : $r \equiv F$

Reemplazando los valores de verdad en las expresiones pedidas se tiene :

a) $(p \to q) \to (r \,\Delta \sim q) \equiv (F \to V) \to (F \,\Delta \sim V)$

$$\equiv V \to (F \,\Delta\, F)$$
$$\equiv V \to F$$
$$\equiv F$$

b) $\sim q \to [(p \leftrightarrow q) \wedge r] \equiv \sim V \to [(F \leftrightarrow V) \wedge F]$

$$\equiv F \to [\ F \wedge F]$$
$$\equiv V$$

Luego : F V RPTA. C

6.- Si la proposición : $\sim[(p \wedge \sim r) \to (r \,\Delta \sim q)]$ es verdadera . Hallar el valor de la verdad de:

a) $(r \wedge p) \,\Delta\, [(p \,\Delta\, q) \to (r \vee q)]$ ***b) $(p \leftrightarrow q) \,\Delta\, (r \leftrightarrow q)$*** ***c) $(r \wedge p \wedge q) \vee (r \wedge q) \vee q$***

A) VFV ***B) FFV*** ***C) VVF*** ***D) VVV*** ***E) FFF***

Resolución.-

Fácilmente se deduce que : $(p \wedge \sim p) \rightarrow (r \,\Delta \sim q)$ debe ser falsa (F), luego por ser una CONDICIONAL, solo será falsa (F) cuando $(p \wedge \sim r)$ sea verdadera (V) y $(r \,\Delta \sim q)$ sea falsa (F).

Ahora bien, para que $(p \wedge \sim r)$ sea verdadera: $p \equiv V$ y $\sim r \equiv V$, es decir $p \equiv V$ y $r \equiv F$.

La otra proposición $(r \,\Delta \sim q)$ solamente será falsa (F) cuando $r \sim q$ tengan indénticos valores veritativos, entonces como r es falsa (F) , $\sim q$ también es falsa (F), se deduce que : $q \equiv V$

Reemplazando en las expresiones pedidas :

a) $(r \wedge p) \,\Delta\, [\, (p \,\Delta\, q) \rightarrow (r \vee q)\,] \equiv (F \wedge V) \,\Delta\, [\, (V \,\Delta\, V) \rightarrow (F \vee V)\,]$

$$\equiv F \;\Delta\; [\; F \rightarrow V \;]$$

$$\equiv F \;\Delta\; V$$

$$\equiv V$$

b) $(p \leftrightarrow q) \,\Delta\, (r \leftrightarrow q) \equiv (V \leftrightarrow V) \,\Delta\, (F \leftrightarrow V)$

$$\equiv V \;\Delta\; F$$

$$\equiv V$$

c) $(r \wedge p \wedge q) \vee (r \wedge q) \vee q \equiv (\underbrace{F \wedge V} \wedge V) \vee (F \wedge V) \vee V$

$$\equiv (F \wedge V) \vee F \vee V$$

$$\equiv \underbrace{F \vee F} \vee V$$

$$\equiv \underbrace{F \vee V}$$

$$\equiv V$$

Luego : VVV RPTA. D

7.- ***Se sabe que :*** $t = (r \rightarrow s) \,\Delta \sim$[illegible]

MAL HECHO

$u = (r \rightarrow \sim s) \rightarrow \sim r$

Además, "t" es falso y "u" es verdadero; determinar el valor de verdad respectivo de :

a) $[(r \rightarrow u) \wedge (t \,\Delta\, S) \,\Delta \sim t]$

b) $[(r \rightarrow u) \rightarrow t] \rightarrow s$

c) $[r \,\Delta\, (u \,\Delta\, t)] \rightarrow s$

A) VFF ***B) VVV*** ***C) VFV*** ***D) FVV*** ***E) FFF***

Resolución.-

Veamos , ahora otro procedimiento para determinar los valores de verdad de r y s , construyendo la tabla de verdad de t y u :

r	s	$r \to s$	$\sim s$	$r \to \sim s$	$\sim r$	$\overbrace{(r \to s)\,\Delta \sim r}^{t}$	$\overbrace{(r \to \sim s) \to r}^{u}$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	F	F

Notamos que t es falso (F) y u es verdadero (V) solamente cuando r es verdadero (V) y s es falso (F), es decir:

$$r : V \qquad s : F \qquad t : F \qquad u : V$$

Reemplazando en las expresiones pedidas :

a) $[\,(r \to u) \wedge (t \,\Delta\, s)\,\Delta \sim t\,] \equiv [\,(V \to V)\,] \wedge (F \,\Delta\, F)\,]\,\Delta \sim F$

$$\equiv [\quad V \quad \wedge \quad F \quad]\,\Delta\, V$$
$$\equiv \quad F \quad \Delta\, V$$
$$\equiv \quad V$$

b) $[\,(r \to u) \to t\,] \to s$ $\quad\equiv [\,(V \to V) \to F] \to F$

$$\equiv [\quad V \quad \to F] \to F$$
$$\equiv \quad F \quad \to F$$
$$\equiv \quad V$$

c) $[\,r \,\Delta\, (u \,\Delta\, t)\,] \to s$ $\quad\equiv [\,V \,\Delta\, (V \,\Delta\, F)\,] \to F$

$$\equiv [\,V \,\Delta \quad V \quad] \to F$$
$$\equiv \quad F \quad \to F$$
$$\equiv \quad V$$

Luego : VVV RPTA. B

8.- Sabiendo que el valor de verdad de la proposición compuesta :

$$\{\ \sim[\,(p \wedge r) \to q\,] \wedge [\,(p \vee q)\,\Delta\, s\,]\,\} \to \{\,(s \,\Delta\, p\,) \to t\,\}$$

siempre es falso, determinar el valor de verdad de la siguiente proposición :

$$\{\ [\,(\sim p \,\Delta\, q)\,\Delta\, r\,]\ \to\ \sim[\,q \to (t \to p)\,]\,\}\,\Delta\,(p \,\Delta\, q)$$

A) V   B) F   C) V ó F   D) Tautología   E) Contradicción

Resolución.-

La expresión dada como dato es una CONDICIONAL; ahora bien, ésta solo puede ser falsa (F) cuando el antecedente sea verdadero (V) y consecuente sea falso (F), es decir.

$\sim[(p \wedge r) \rightarrow q] \wedge [p \vee q] \,\Delta\, s] \equiv V$ y $(s \,\Delta\, p) \rightarrow t \equiv F$

$\sim[(p \wedge r) \rightarrow q] \equiv V$ y $(p \wedge q) \,\Delta\, s \equiv V$

$(p \wedge r) \rightarrow q \equiv F$

$p \wedge r \equiv V$ y $\boxed{q \equiv F}$

$\boxed{p \equiv V}$ $\boxed{r \equiv V}$

Reemplazando

$(V \vee F) \,\Delta\, s \equiv V$

$V \quad \Delta\, s \equiv V$

$\boxed{s \equiv F}$

Reemplazando

$(F \,\Delta\, V) \rightarrow t \equiv F$

$V \quad \rightarrow t \equiv F$

$\boxed{t \equiv F}$

Reemplazando en la proposición pedida :

$$\{[(\sim p \,\Delta\, q] \,\Delta\, r] \rightarrow \sim[q \rightarrow (t \rightarrow p)]\} \,\Delta\, (p \,\Delta\, q) \equiv \{[(\sim V \,\Delta\, F) \,\Delta\, V] \rightarrow \sim[F \rightarrow (F \rightarrow V)]\} \,\Delta\, (V \,\Delta\, F)$$

$$\equiv \{[(\;F \,\Delta\, F) \,\Delta\, V] \rightarrow \sim[F \rightarrow V]\} \,\Delta\, V$$

$$\equiv \{[\;F \quad \Delta \quad V] \rightarrow \sim[V]\} \quad \Delta\, V$$

$$\equiv \quad \{\; F \quad \rightarrow \quad F \;\} \quad \Delta\, V$$

$$\equiv \qquad V \qquad \Delta\, V$$

$$\equiv \qquad F$$

Luego : $\boxed{V}$ RPTA. A

9.- Es posible determinar si la proposición "p" es verdadera o falsa sabiendo que:

$\sim(p \wedge r)$ es verdadera ; $p \rightarrow q$ es verdadera y $\sim r \rightarrow \sim q$ es verdadera ?

A) Si, es verdadera ***B) Si, es falsa*** ***C) No se puede***

D) Depende de r ***E) Depende de ~r***

Resolución.-

Nuevamente utilizaremos las tablas de verdad para determinar el valor de verdad de "p". Como hay tres proposiciones : p, q y r se formarán 8 (= 2^3) combinaciones de valores :

p	q	r	$\sim r$	$\sim q$	$p \wedge r$	$\sim(p \wedge r)$	$p \rightarrow q$	$\sim r \rightarrow \sim q$
V	V	V	F	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V

Puede observarse que las proposiciones compuestas $\sim(p \wedge r)$, $p \rightarrow q$ y $r \rightarrow \sim q$ son verdaderas en tres casos (marcados en la tabla) y en cualquiera de esos casos "p" es falsa.

Luego : $p \equiv$ F RPTA. B

10.- Si definimos : $p * q \equiv \sim(p \rightarrow q)$ entonces si : $\sim p * (\sim p \rightarrow q)$ verdadera ; determinar el valor de verdad de :

a) $\sim(q * p)$ b) $\sim q * \sim p$

A) VF B) VV C) FV D) FF E) N.A

Resolución.-

(I) La equivalencia $p * q \equiv \sim(p \rightarrow q)$ indica que la tabla de verdad de ambos miembros son idénticos :

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

$\Rightarrow$

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

De donde observamos que $p * q$ sólo es verdadera (V) cuando p (antecedente) es verdadera (V) y q (consecuente) es falsa (F) ; luego, en el dato :

$$\sim p * (\sim p \rightarrow q) \equiv V$$

$\sim p \equiv V$ y $\sim p \rightarrow q \equiv F$

$\boxed{p \equiv F}$

Reemplazando

$\sim F \rightarrow q \equiv F$

$V \rightarrow q \equiv F$

$\boxed{q \equiv F}$

Reemplazando en las expresiones pedidas :

a) $\sim(q * p) \equiv \sim(F * F)$

$\equiv \sim \ F$

$\equiv V$

b) $\sim q * \sim p \equiv \sim F * \sim F$

$\equiv \ V * V$

$\equiv \ F$

Luego: $\boxed{VF}$ RPTA. A

II) De la equivalencia $p * q \equiv \sim(p \rightarrow q)$ podemos darnos cuenta que el nuevo conectivo= "*" es equivalente a una CONDICIONAL NEGADA, luego en el dato :

$$\sim p * (\sim p \rightarrow q) \equiv \sim[\sim p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)] \equiv V$$

Luego : $\sim p \rightarrow (\sim p \rightarrow q) \equiv F$

$\sim p \equiv V$ y $\sim p \rightarrow q \equiv F$

$\boxed{p \equiv F}$

$V \rightarrow q \equiv F$

$\boxed{q \equiv F}$

Luego, en las expresiones pedidas :

a) $\sim(q * p) \equiv \sim[(q \rightarrow p)]$

$\equiv q \rightarrow p$

$\equiv F \rightarrow F$

$\equiv \ V$

b) $\sim q * \sim p \equiv \sim[\sim q \rightarrow \sim p]$

$\equiv \sim[\sim F \rightarrow \sim F]$

$\equiv \sim[\ V \rightarrow\ V]$

$\equiv \sim\ V$

$\equiv\ F$

Luego : V F RPTA. A

11.- Utilizando las leyes del álgebra de proposiciones, determinar el equivalente más simple de la expresión.

$$(p \wedge q) \vee [(\sim p \wedge \sim q) \vee p]$$

A) $(p \vee q)$ ***B)*** $\sim p \wedge q$ ***C)*** $p \rightarrow q$ ***D)*** $q \rightarrow p$ ***E)*** $p \wedge \sim q$

Resolución.-

Utilizando las leyes del álgebra de proposiciones :

$(p \wedge q) \vee [(\sim p \wedge \sim q) \vee p] \equiv (p \wedge q) \vee [p \vee (\sim p \wedge \sim q)]$ .... por ley CONMUTATIVA

$\equiv (p \wedge q) \vee [p \vee \sim p]$ .... por ABSORCION

$\equiv [(p \wedge q) \vee p] \vee \sim q$ .... por ley CONMUTATIVA

$\equiv [p \vee (p \wedge q)] \vee \sim q$ .... por ABSORCION

$\equiv p \vee \sim q$ .... por ley CONMUTATIVA

$\equiv \sim q \vee p$ .... por IMPLICANCIA MATERIAL

$\equiv q \rightarrow p$ ....

Solución : $q \rightarrow p$ RPTA. D

12.- Cuál es el equivalente más simple de : $\sim(p \rightarrow q) \vee \sim(p \vee q)$.

A) q ***B)*** $\sim q$ ***C)*** p ***E)*** $\sim p$ ***E)*** $p \vee q$

Resolución.-

$\sim(p \rightarrow q) \vee \sim(p \vee q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(p \vee q)$ ...... por ley IMPLICANCIA MATERIAL

$\equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)]$ ....por MORGAN

$\equiv \sim[(\sim p \wedge p) \vee q)]$ .... por ley DISTRIBUTIVA

$\equiv \sim[\ C \vee q\ ]$ .... por CONTRADICCION

$\equiv \sim[\ q\ ]$ .... por IDENTIDAD

$\equiv \sim q$

Solución : $\sim q$ RPTA. B

13.- Simplificar la siguiente expresión : $[(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim q \vee p) \wedge \sim(p \wedge q)]$

A) p **B)** q **C)** $\sim p$ **D)** $\sim q$ **E)** $p \wedge q$

Resolución.-

$[(\sim p \vee q) \rightarrow (q \vee p)] \wedge \sim(p \wedge q) \equiv [\sim(\sim p \vee q) \vee (\sim q \vee p)] \wedge \sim(p \wedge q)$ .... por IMPLICANCIA MATERIAL

$\equiv [(\sim\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q \vee p)] \wedge \sim(p \wedge q)$ ... por MORGAN

$\equiv [(p \wedge \sim q) \vee (\sim q \vee p)] \wedge \sim(p \wedge q)$ .... por DOBLE NEGAC.

$\equiv [((p \wedge \sim q) \vee \sim q) \vee p] \wedge \sim(p \wedge q)$ .... por ley ASOCIATIVA

$\equiv [\ \sim q \vee p\ \ ] \wedge \sim(p \wedge q)$ .... por ABSORCION

$\equiv (\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ .... por MORGAN

$\equiv \ \sim q \vee (p \wedge \sim p)$ .... por ley DISTRIBUTIVA

$\equiv \ \sim q \vee C$ .... por CONTRADICCION

$\equiv \ \sim q$ .... por IDENTIDAD

Solución : $\sim q$ RPTA. D

14.- Simplificar : $\sim[(p \,\Delta\, q) \rightarrow \sim q]$

A) $p \wedge q$ **B)** $p \vee q$ **C)** $p \wedge \sim q$ **D)** $p \vee \sim q$ **E)** $\sim p \wedge q$

Resolución.-

Comparando las tablas se verdad de la BICONDICIONAL y de la DISYUNCION EXCLUSIVA se observa que :

$$p \,\Delta\, q \equiv \sim(p \leftrightarrow q) \quad .... (\alpha)$$

$\sim[(p \,\Delta\, q) \rightarrow \sim q] \equiv \sim[\sim(p \,\Delta\, q) \vee \sim q]$ .... por IMPLICANCIA

$\equiv \sim[\sim(\sim(p \leftrightarrow q)) \vee \sim q]$ .... por ley (α)

$\equiv \sim[\ (p \leftrightarrow q) \vee \sim q\ ]$ .... por DOBLE NEGACION

$\equiv \sim(p \leftrightarrow q) \wedge \sim\sim q$ .... por MORGAN

$\equiv \sim(p \leftrightarrow q) \wedge q$ .... por DOBLE NEGACION

$\equiv \sim[\ (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)\ ] \wedge q$ .... por DOBLE IMPLICANCIA

$\equiv [\sim(p \wedge q) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q)] \wedge q$ .... por MORGAN

$\equiv [\ (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim\sim p \vee \sim\sim q)\ ] \wedge q$ ... por MORGAN

$\equiv [\ (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)\ ] \wedge q$ .... por DOBLE NEGACION

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge [\ (p \vee q) \wedge q\ ]$ .... por ley ASOCIATIVA

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge\ q$ .... por ABSORCION

$\equiv \quad \sim p \wedge q$ .... por ABSORCION

Solución : $\sim p \wedge q$ RPTA. E

15.- La siguiente proposición : «Si Patty no va al cine o Patty va al cine, pero no va con falda, implica que no va al cine pero tiene puesta su falda » ; es equivalente a :

A) Patty va al cine

B) Patty no va al cine

C) Patty tiene puesta su falda

D) Patty no lleva puesta su falda

E) Es una Tautología

Resolución.-

Consideremos las siguientes proposiciones :

p : Patty va al cine

q : Patty tiene puesta su falda

Entonces la proposición compuesta resultante del enunciado dado será :

$\{ [(\sim p \vee p) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p \} \wedge q \equiv \{[T \wedge \sim q] \rightarrow \sim p\} \wedge q$ ...... por TERCIO EXCLUIDO

$\equiv \{\sim q \rightarrow \sim p\} \wedge q$ .... por IDENTIDAD

$\equiv \{\sim\sim q \vee \sim p] \wedge q$ .... por IMPLICANCIA MATERIAL

$\equiv \{q \vee \sim p] \wedge q$ .... por DOBLE NEGACION

$\equiv q$

Luego, la proposición dada será equivalente a :

Patty tiene puesta su falda RPTA. C

16.- Dada la proposición : « Si hoy hace calor entonces me pondré un pantalón blanco; y que no me ponga pantalón blanco es condición necesaria y suficiente para que hoy haga calor». Está proposición es equivalente a:

A) Hoy me pondré un pantalón blanco

B) Hoy no hace calor

C) Hoy no hace calor y usaré un pantalón blanco

D) Hoy no me pondré un pantalón blanco

E) Hoy hace calor

Resolución.-

Sean : p : Hoy hace calor

q : Hoy me pondré un pantalón blanco

Luego, la proposición que resulta del enunciado será :

$(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \leftrightarrow p) \equiv (p \rightarrow q) \wedge [(\sim q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \sim q)]$ .... por DOBLE IMPLICANCIA

$\equiv (\sim p \vee q) \wedge [(\sim\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)]$ .. por IMPLICANCIA MATERIAL

$\equiv (\sim p \vee q) \wedge [(q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)]$ ...... por DOBLE NEGACION

$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge (q \vee p)] \wedge (\sim p \vee \sim q)$ .... por ley ASOCIATIVA

$\equiv [\ (\sim p \wedge p) \vee q\ ] \wedge (\sim p \vee \sim q)$ .... por ley DISTRIBUTIVA

$\equiv [\ C \vee q] \wedge (\sim p \vee \sim q)$ .... por CONTRADICCION

$\equiv\ q \wedge (\sim p \vee \sim q)$ .... por IDENTIDAD

$\equiv\ q \wedge \sim p$ .... por ABSORCION

$\equiv\ \sim p \wedge q$ .... por ley ASOCIATIVA

Por lo tanto, la proposición dada resultó equivalente a :

Hoy no hace calor y usaré pantalón blanco RPTA. C

17.- ¿Cuál o cuáles de las siguientes proposiciones es equivalente a : «Si hoy sale el sol, entonces mañana no vamos a la playa» ?

I) No es el caso que, hoy salga el sol y mañana vamos a la playa

II) Hoy sale el sol y mañana no vamos a la playa

III) Hoy no sale el sol o mañana no vamos a la playa

A) I B) I y II C) II D) III E) I y III

<u>Resolución</u>.-

Sean : p : Hoy sale el sol
q : Mañana nos vamos a la playa

Entonces, la expresión dada se simboliza así : $p \rightarrow \sim q \equiv \sim p \vee \sim q$

Ahora, formalicemos las expresiones y luego simplifiquemos :

I) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim p$

II) $p \wedge q$

III) $\sim p \vee \sim q$

Luego la proposición dada es equivalente a :

I y III RPTA. E

18.- La negación de : "Ni Pepe estudia matemática ni atiende la clase" es :

A) No es cierto que, Pepe estudie matemática y atienda la clase

B) Pepe atiende la clase y estudia matemática

C) Pepe no atiende la clase o no estudia matemática

E) Pepe atiende la clase o estudia matemática

<u>Resolución</u>.-

Asumiendo las proposiciones : p : Pepe estudia matemática
q : Pepe atiende a la clase

Luego, la proposición compuesta : " Ni Pepe estudia matemática ni atiende la clase ", se simbolizará así : $\sim p \wedge \sim q$. Esta proposición, por la de Morgan se convierte en : $\sim(p \vee q)$. Entonces, la negación de ésta será :

$$\sim\sim(p \vee q) \equiv p \vee q$$

$$\Downarrow$$

$\therefore$ Pepe atiende a la clase o estudia matemática RPTA. E

19.- De las siguientes premisas:

- Si estudio en la mañana entonces no me levantaré temprano
- Estudio en la mañana o no voy al cine en la tarde
- Iré al cine en la tarde

Se puede concluir :

I) Estudio en la mañana

II) No me levanto temprano

A) Solo I ***B) I y II*** ***C) Solo II*** ***D) Falta información*** ***E) Ninguna***

Resolución.-

Este problema corresponde al llamado METODO DE DERIVACION FORMAL mediante el cual hallamos una conclusión formal en base a premisas supuestamente verdaderas. En este caso las premisas se formulan en función a tres proposiciones.

p : Estudio en la mañana
q : Me levantaré temprano
r : Voy al cine en la tarde

Premisa Nº 1 : $p \rightarrow \sim q$
Premisa Nº 2 : $p \vee \sim r$
Premisa Nº 3 : r

} Las tres premisas se supone que tienen a verdadero (V) como valor veritativo

* En la premisa Nº 3 : $\boxed{r \equiv V}$

* En la premisa Nº 2 : $p \vee \sim r \equiv V$, luego : $p \vee \sim V \equiv V$

$p \vee F \equiv V$, entonces : $p \equiv V$

* En la premisa Nº 1 : $p \rightarrow \sim q \equiv V$, luego : $V \rightarrow \sim q \equiv V$, entonces : $\sim q \equiv V$

De donde : $\boxed{q \equiv F}$

De donde las conclusiones serán :

$p \equiv V$: Estudio en la mañana
$q \equiv F$: No me levantaré temprano
$r \equiv V$: Iré al cine en la tarde

$\Rightarrow$ En alternativas $\boxed{\text{I y II}}$

RPTA. B

20.- Para una proposición cualquiera "p" se define :

$$\psi(p)\begin{cases} 1\ ;\ \textit{Si p es verdadero} \\ 0\ ;\ \textit{Si p es falso} \end{cases}$$

Si : $\psi(x) = 1$; $x \equiv (p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$

$\psi(y) = 0$; $y \equiv w \vee \sim s$

Hallar respectivamente : $\psi(s \leftrightarrow \sim w)$ ***y*** $\psi(\sim p \vee r)$.

A) 1 ; 1 ***B) 1 ; 0*** ***C) 0 ; 1*** ***D) 0 ; 0*** ***E) No se puede***

Resolución.-

De acuerdo a la definición $\psi(y) = 0$ cuando "y", es decir la DISYUNCION $w \vee \sim s$, es falsa y esto solo ocurre si w es falso (F) y s es verdadero (V), entonces con estos valores de verdad se deduce que : $s \rightarrow w$ es falso (F). Esto servirá en el siguiente análisis.

A partir de la misma definición: $\psi(x) = 1$ entonces : $x \equiv (p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es verdadero (V), de donde, como $s \rightarrow w$ es falso (F), $(p \wedge \sim r)$ es falso (F).

Analizando las expresiones pedidas :

*) $s \leftrightarrow \sim w \equiv V \leftrightarrow \sim F \equiv V \leftrightarrow V \equiv V$, luego : $\psi(s \leftrightarrow \sim w) = 1$

*) $\underbrace{\sim p \vee r \equiv \sim(p \wedge \sim r)}_{\text{por ley de Morgan}} \equiv \sim F \equiv V$, luego : $\psi(\sim p \vee r) = 1$

$\therefore$ 1 ; 1 RPTA. A

21.- Al evaluar la tabla de verdad de la siguiente proposición compuesta :

«Si el triángulo tiene dos lados iguales , entonces el triángulo se llama isósceles y el triángulo no se llama isósceles. Luego el triángulo no tiene dos lados iguales»

Se obtiene : ¿Tautología, contingencia o contradicción?

A) Tautología ***B) Contradicción*** ***C) Contingencia***

D) No se puede ***E) Imposible***

Resolución.-

En el enunciado se puede distinguir 2 proposiciones:

p : El triángulo tiene 2 lados iguales

q : El triángulo se llama isósceles

Luego, la proposición formalizada en forma simbólica será :

$[p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p \equiv [\sim p \vee (q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p$ .... por IMPLICANCIA MATERIAL

$\equiv [\sim p \vee C] \rightarrow \sim p$ .... por TERCIO EXCLUIDO

$\equiv \sim p \rightarrow \sim p$ .... por IDENTIDAD

$\equiv \sim\sim p \vee \sim p$ .... por IMPLICANCIA MATERIAL

$\equiv p \vee \sim p$ .... por DOBLE NEGACION

$\equiv T$ .... por TERCIO EXCLUIDO

Tautología RPTA. A

22.- Determinar cuántas de las siguientes proposiciones son tautológicas :

I) $\sim q \to [\,(p \to q) \wedge \sim p\,]$

II) $[\,(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$

III) $(p \wedge q) \wedge (p \to \sim p)$

IV) $[\sim (p \wedge q) \to p) \wedge \sim p$

A) 0 ***B) 1*** ***C) 2*** ***D) 3*** ***E) 4***

<u>Resolución</u>.-

(I) $\sim q \to [\,(p \to q)\,] \wedge \sim p \equiv \sim q \to [\,(\sim p \vee q) \wedge \sim p]$ .... por IMPLICANCIA MATERIAL

$\equiv \sim q \to \quad \sim p$ .... por ABSORCION

$\equiv \quad p \to \quad q$ .... por CONTRARECIPROCO

(II) $[\,(p \to q) \wedge \sim q\,] \to \sim p \equiv [\,(\sim p \vee q) \wedge \sim q\,] \to \sim p$ .... por IMPLICANCIA MATERIAL

$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \to \sim p$ .... por ABSORCION

$\equiv \sim(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p$ .... por IMPLICANCIA MATERIAL

$\equiv (\sim\sim p \vee \sim\sim q) \vee \sim p$ .... por MORGAN

$\equiv (\,p \quad \vee \quad q\,) \vee \sim p$ .... por DOBLE NEGACION

$\equiv (\,q \quad \vee \quad p\,) \vee \sim p$ .... por ley CONMUTATIVA

$\equiv \quad q \quad \vee \quad (p \;\vee \sim p)$ .... por ley ASOCIATIVA

$\equiv \quad q \quad \vee \quad T$ .... por TERCIO EXCLUIDO

$\equiv \quad T$ .... por IDENTIDAD (Tautología)

(III) $(p \wedge q) \wedge (p \to \sim q) \equiv (p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ .... por IMPLICANCIA MATERIAL

$\equiv (p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge q)$ .... por MORGAN

$\equiv \quad C$ .... por CONTRADICCION

(IV) $[\sim(p \wedge q) \to p] \vee \sim p \equiv [\sim\sim(p \wedge q) \vee p] \vee \sim p$ .... por IMPLICANCIA MATERIAL

$\equiv [\,(p \wedge q) \vee p\,] \vee \sim p$ .... por DOBLE NEGACION

$\equiv \quad p \vee \sim p$ .... por ABSORCION

$\equiv \quad T$ .... por TERCIO EXCLUIDO (Tautología)

2 RPTA . C

23.- Si definimos un nuevo conectivo "Δ" como : $p \,\Delta\, q \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ entonces la fórmula $(p \,\Delta \sim q) \,\Delta\, p$ equivale a:

A) $p \to q$ ***B)*** $\sim p \wedge \sim q$ ***C)*** $\sim p \leftrightarrow q$ ***D)*** $\sim q$ ***E)*** $\sim p$

<u>Resolución</u>.-

Utilizando la definición dada :

$$(p \,\Delta \sim q) \,\Delta\, p \equiv [\, (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \,] \,\Delta\, p$$

$$\equiv \{[(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)] \vee p\} \wedge \{\sim[(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)] \vee \sim p\}$$

Aplicando la ley DISTRIBUTIVA y de MORGAN :

$$\equiv \{[(p \vee \sim q) \vee p] \wedge [(\sim p \vee q) \vee p]\} \wedge \{\sim(p \vee \sim q) \vee \sim(\sim p \vee q) \vee \sim p\}$$

Aplicando la ley CONMUTATIVA y de MORGAN :

$$\equiv \{(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee p \vee q)\} \wedge \{(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee \sim p\}$$

Aplicando la ley del TERCIO EXCLUIDO y ASOCIATIVA :

$$\equiv \{(p \vee \sim q) \wedge (\mathrm{T} \vee p)\,\} \wedge \{(\sim p \wedge q) \vee \sim p \vee (p \wedge \sim q)\}$$

Aplicando la ley de IDENTIDAD Y ABSORCION :

$$\equiv \{(p \vee \sim q\} \wedge \mathrm{T}\,\} \wedge \{\sim p \vee (p \wedge \sim q)\}$$

Aplicando la ley de IDENTIDAD Y ABSORCION :

$$\equiv \{p \vee \sim q\} \wedge \{\sim p \vee \sim q\}$$

Aplicando la ley DISTRIBUTIVA :

$$\equiv \{p \wedge \sim q\} \vee \sim q$$

Aplicando la ley de CONTRADICCION :

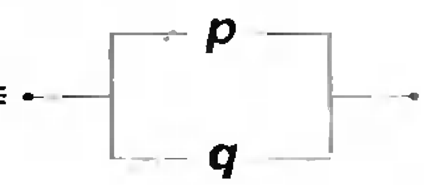
$$\equiv \mathrm{C} \vee \sim q$$

Aplicando la ley de IDENTIDAD :

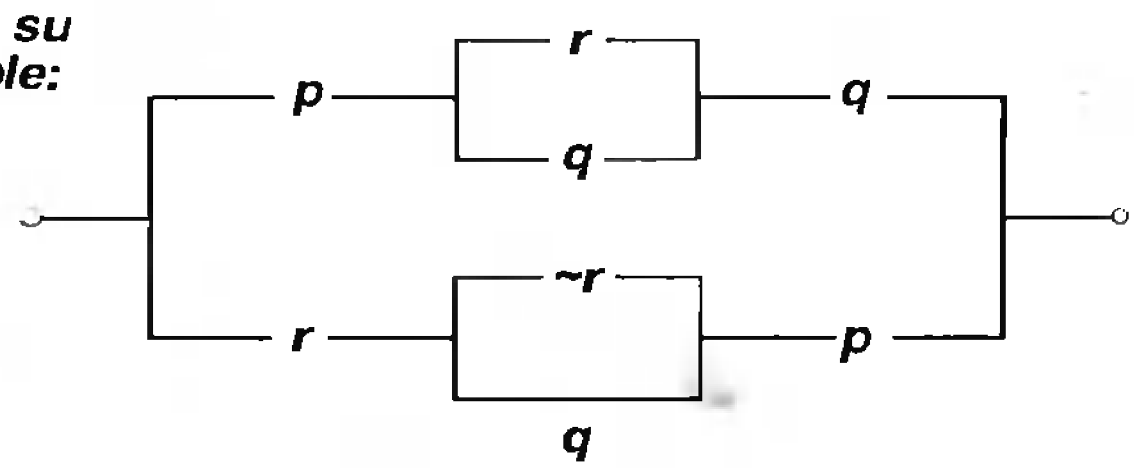
$$\equiv \sim q$$

$\sim q$ RPTA. D

24.- Se tiene que : $p \wedge q \equiv$ ·— p —— q —· $p \vee q \equiv$



Representar proposicionalmente el siguiente círculo lógico es indicar su proposición equivalente más simple:



A) p ***D)*** $p \wedge q$

B) r ***E)*** $\sim p \wedge r$

C) $\sim q$

Resolución.-

La representación proposicional del circuito será :

$$[p \wedge (r \vee q) \wedge q] \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]$$

$[p \wedge (r \vee q) \wedge q] \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p] \quad \equiv [p \wedge q] \vee [r \wedge \ q \wedge p]$ .... por ABSORCION

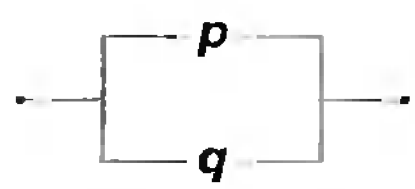
$\equiv [p \wedge q] \vee [r \wedge (p \wedge q)]$....... por ASOCIATIVA

$\equiv p \wedge q$ .... por ABSORCION

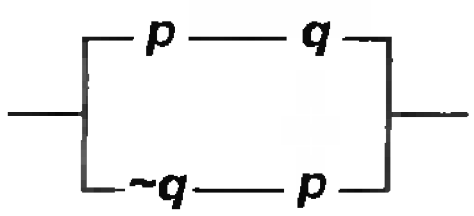
$p \wedge q$ RPTA. D

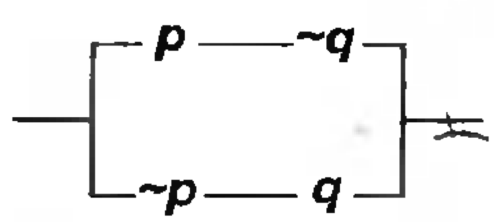
25.- Sabiendo que se diseña un circuito lógico de la siguiente manera :

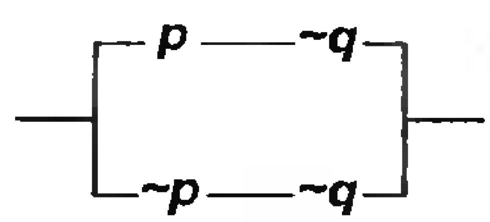
$p \wedge q \equiv \cdot$ —— p —— q —— $\cdot$

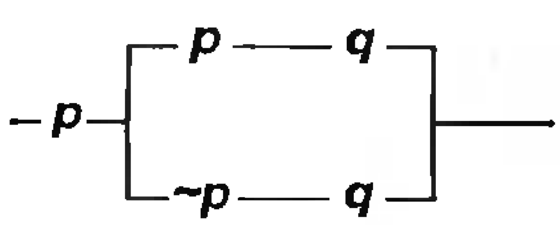
$p \vee q \equiv$ 

Diseñar un circuito para : p Δ q

A) 

B) 

C) 

D) 

E) N.A

Resolución.-

Comparando las tablas de verdad de la BICONCIONAL y la DISYUNCION EXCLUSIVA se puede llegar a la siguiente equivalencia :

$p \Delta q \equiv \sim (p \leftrightarrow q)$

$\equiv \sim [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ .... por DOBLE IMPLICANCIA

$\equiv \sim (p \wedge q) \wedge \sim (\sim p \wedge \sim q)$ .... por MORGAN

$\equiv \sim (p \vee \sim q) \wedge (\sim\sim p \vee \sim\sim q)$ .... por MORGAN

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (\ p \vee \ q)$ .... por DOBLE NEGACION

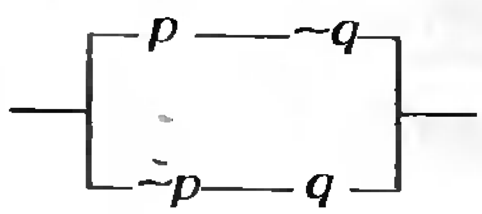
$\equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ .... por ASOCIATIVA

$\equiv [p \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee [q \wedge (\sim p \vee \sim q)]$ ..... por DISTRIBUTIVA

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ .... por ABSORCION

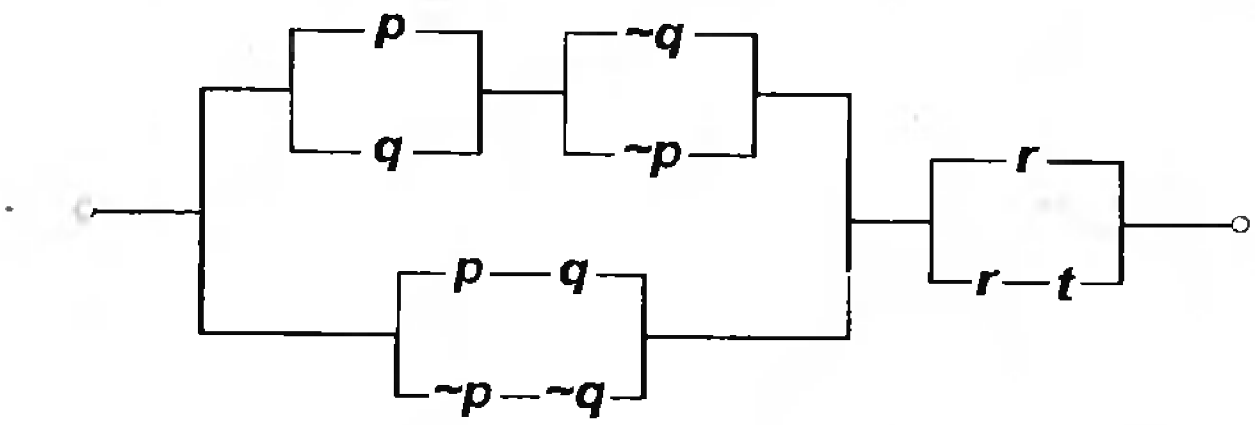
$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ .... por CONMUTATIVA

Construyendo el circuito :



RPTA. B

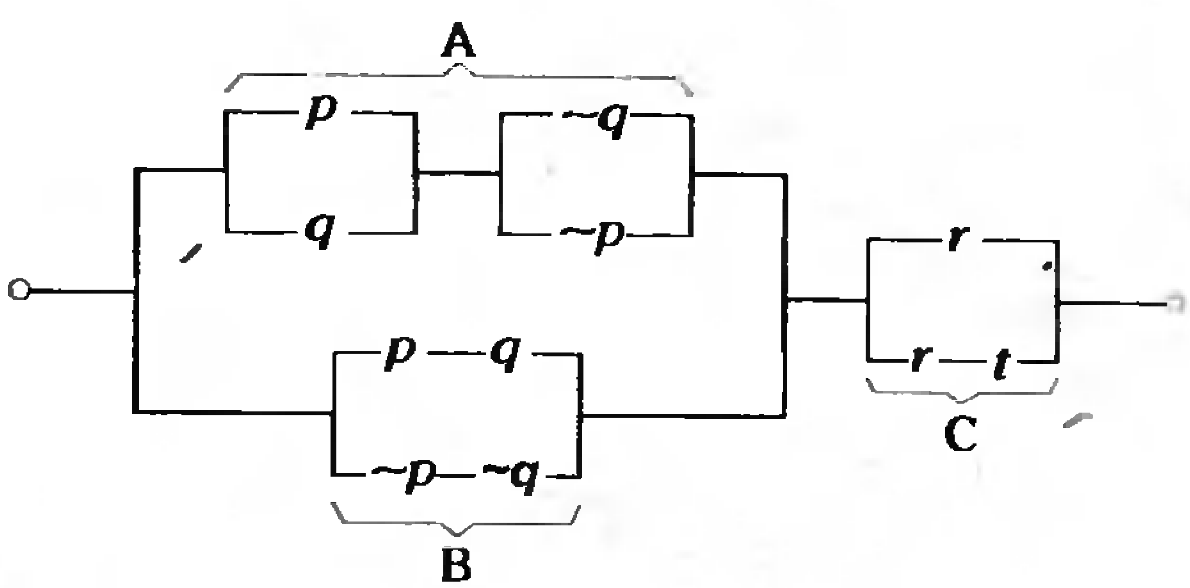
26.- Hallar la proposición equivalente más simple de :



A) - P - ***B) - r - t -*** ***C)*** ***D) - r -*** ***E) - p - ~ q***

<u>Resolución</u>.-

Dividiendo el circuito



Entonces el circuito será :

$\equiv (A \cup B) \wedge C$

Resolviendo cada parte :

$A \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

$\equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$ .... por MORGAN

$\equiv p \,\Delta\, q$ .... por DISYUNCION EXCLUSIVA

$B \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$\equiv (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$ .... por MORGAN

$\equiv \sim[\sim(p \wedge q) \wedge (p \vee q)]$ .... por MORGAN

$\equiv \sim[(p \vee q)] \wedge \sim(p \wedge q)]$ .... por CONMUTATIVA

$\equiv \sim(p \Delta q)$ .... por DISYUNCION EXCLUSIVA

$C \equiv r \vee (r \wedge t)$

$\equiv r$ .... por ABSORCION

Reuniendo las partes

$[(p \Delta q) \vee \sim(p \Delta q)] \wedge r$ ....

$T \wedge r$ .... por TERCIO EXCLUIDO

r .... por IDENTIDAD

—— r ——   RPTA. D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- De las expresiones:

(I) x^2+4

(II) ! Hola ¡

(III) ¿ 4 - 0 = 4 ?

(IV) 2 + 2 = 4

(V) Cuzco es la capital del Perú

Son proposiciones :

A) Todas
B) I , IV y V
C) IV y V
D) I , II , III , IV y V
E) Solo V

2.- Sean las proposiciones:

p : Carlos estudia en la U.N.I.

q : Carlos es comerciante

r : Carlos gasta poco dinero

Simbolizar :

«Es suficiente que Carlos sea comerciante o gaste mucho dinero, para que no estudie en la U.N.I. Pero si estudia en la U.N.I. entonces no es comerciante»

A) $[(q \vee r) \rightarrow \sim p] \wedge (p \rightarrow q)$

B) $[(q \vee \sim r) \rightarrow \sim p] \wedge (p \rightarrow \sim q)$

C) $[(q \vee r) \rightarrow p] \wedge (p \rightarrow q)$

D) $[(p \wedge r) \rightarrow p] \wedge (\sim p \rightarrow q)$

E) $[(p \vee r) \vee \sim p] \wedge (p \wedge q)$

3.- Sean las proposiciones :

p : Roberto se casa con Janet.

q : Sus padres se enojarán con él

r : Sus suegros se enojarán con él

Simbolizar :

«Roberto se casa con Janet entonces sus padres se enojarán con él, y si no se casa con Janet entonces sus suegros se enojarán con él. Pero Roberto se casa con Janet o no se casa. Por lo tanto, sus padres o sus suegros se enojarán con él».

A) $\{[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)] \vee (p \vee \sim p)\} \rightarrow (q \vee r)$

B) $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r) \vee (p \vee \sim p)] \rightarrow (q \vee r)$

C) $\{[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)] \vee [(p \vee \sim p)] \rightarrow (q \vee r)]\}$

D) $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r) \vee (p \vee \sim p) \wedge (q \vee r)$

E) $\{[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)] \wedge (p \vee \sim p)\} \rightarrow (q \vee r)$

4.- Si se sabe que : $p \vee \sim q$ es falso, $q \rightarrow s$ es verdadero y $r \vee s$ es verdadero ; al hallar el valor de verdad de las fórmulas :

(I) $(\sim q \wedge \sim r) \leftrightarrow (t \vee \sim t)$

(II) $(p \leftrightarrow \sim s) \vee \sim (t \wedge \sim s)$;

se obtiene :

A) VF
B) FV
C) VV
D) FF
E) Contradicción, contingencia

5.- Si se sabe que $p \wedge q$ es verdadera, $r \vee t$ es V y $p \leftrightarrow r$ es falsa, entonces los valores de verdad de p, q, r y t son respectivamente :

A) VFFV
B) VVVF
C) VVFV
D) VFVV
E) VVFF

6.- Si se sabe que : $(p \wedge q)$ es falso y $(q \rightarrow t)$ es falso. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

(I) $(\sim p \vee t) \vee s$

(II) $\sim [p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$

(III) $[p \vee (q \wedge \sim t)] \rightarrow [(r \rightarrow q) \wedge \sim (q \wedge t)]$

A) Solo I D) II y III solamente
B) Solo III E) Todas
C) I y III solamente

7.- Si la proposición: $\sim[(q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow r)]$ es verdadera ; hallar el valor de verdad de:

(I) $(\sim s \rightarrow \sim q)\ \Delta\ (r \rightarrow p)$

(II) $\sim(q \wedge \sim s) \wedge (p \wedge \sim r)$

(III) $(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \leftrightarrow r)$

A) VFV B) FVV C) FVF D) VVV E) FFF

8.- Si la proposición: $(r \vee s) \rightarrow [(p \wedge \sim s) \rightarrow (p \wedge \sim q)]$ es falsa, determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes expresiones proposicionales:

(I) $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow r$

(II) $q \wedge (\sim p \vee \sim s)$

(III) $(\sim p \rightarrow r) \vee \sim s$

A) VVV B) VFV C) VVF D) FVV E) FVF

9.- Sabiendo que : $-(p \rightarrow q) \vee \sim r$ es falsa.
$-(s \leftrightarrow p)\ \Delta\ r$ es verdadera

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) correcta(s)?

(I) $\sim(p \vee s)$ es verdadera.

(II) $s \wedge t$ es falsa.

(III) $p \rightarrow s$ es verdadera.

A) I y II B) I y III C) II y III
D) Todas E) Solo una de ellas.

10.- La proposición $\sim[(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)]$ es falsa teniendo r y s valores de verdad opuestos ¿Cuál es el valor veritativo de cada una de las proposiciones siguientes?

(I) $[(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge s)] \wedge p$

(II) $[(\sim p \vee q) \wedge (r \vee s)] \vee (\sim p \wedge q)$

(III) $[(\sim r \wedge \sim s) \rightarrow (p \vee \sim q)] \wedge \sim(r \wedge s)$

A) VVV B) FVF C) VFV
D) FFV E) VVF

11.- Si la proposición compuesta :

$$\sim(p \vee \sim q) \wedge (q \leftrightarrow r)$$

es verdadera y las proposiciones s y t tienen valor de verdad desconocido. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas ?

(I) $(p \vee s) \wedge q$

(II) $(t \wedge q) \rightarrow r$

(III) $(s\ \Delta\ q) \rightarrow q$

A) Solo I B) I y II C) I y III
D) II y III E) N.A.

12.- Si se sabe que la negación de la fórmula :

$$(p \rightarrow q) \vee (q \vee \sim r)$$

es verdadera, entonces los respectivos valores veritativos de p, q y r son :

A) VFF B) VFV C) FVF
D) VVF E) FFV

13.- Dadas las proposiciones : p , q y r ; donde :

q : 4 es un número impar; tal que :

$$\sim[(r \vee q) \rightarrow (r \rightarrow p)]$$

es verdadera; hallar el valor de verdad de las siguientes expresiones proposicionales:

(I) $r \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

(II) $[r \leftrightarrow (p \wedge q)] \leftrightarrow (q \wedge \sim p)$

A) VV D) FF
B) VF E) Ninguna anterior
C) FV

14.- Hallar el valor veritativo de cada una de las siguientes expresiones proposicionales :

(I) $[(p \wedge q) \leftrightarrow r] \leftrightarrow [p \leftrightarrow (q \wedge \sim r)]$

(II) $[(p \vee \sim q) \rightarrow r] \wedge [\sim p \leftrightarrow (q \rightarrow r)]$

Sabiendo que : $r \rightarrow [p \leftrightarrow (q \rightarrow r)]$ es falso

A) VV B) VF C) FV

D) FF E) Ninguna

15.- Sean las proposiciones : p, q y r tales que las siguientes proposiciones compuestas

$$p \leftrightarrow \sim(q \wedge r) \quad \text{y} \quad \sim p \,\Delta\, q$$

son siempre verdaderas ; determinar el valor de verdad de :

(I) $[\sim r \wedge (p \vee s)] \rightarrow (q \vee s)$

(II) $[r \vee (\sim q \wedge s)] \rightarrow \sim p$

A) VV B) VF C) FV

D) FF E) Ninguna

16.- Si la proposición :

$$(p \wedge \sim q) \rightarrow (r \rightarrow \sim s)$$

es falsa. Determinar cuántas de las proposiciones siguientes son verdaderas:

(I) $\sim (p \vee q) \vee \sim q$

(II) $[(r \rightarrow q) \wedge q] \leftrightarrow [(\sim q \,\Delta\, r) \wedge s]$

(III) $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow r$

(IV) $\sim [(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17.- Luego de construir la tabla de verdad de la siguiente proposición:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \,\Delta \sim p)$$

¿Cuántas "V" y cuántas "F" aparecen respectivamente?

A) 6 ; 2 B) 5 ; 3 C) 4 ; 4

D) 7 ; 1 E) 3 ; 5

18.- En la siguiente tabla :

p	q	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
V	V	1
V	F	2
F	V	3
F	F	4

Los valores de verdad que deben reemplazar a los círculos en el orden indicado son :

A) VVVV B) VFFV C) VVFF

D) FVFV E) FFFF

19.- Al hacer la tabla de verdad de la siguiente proposición compuesta :

«Te levantas temprano o estudias en la noche si y solo si, no es cierto que, no te levantes temprano y que no estudies en la noche»

Se obtiene una :

A) Tautología D) Faltan datos

B) Contradicción E) Ninguna anterior

C) Contingencia

20.- Indicar las proposiciones verdaderas :

(I) $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow (p \vee q)$ es una contradicción

(II) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ es una tautología

(III) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow (q \,\Delta\, r)$ es una contingencia.

A) I , II y III B) Solo I y II C) Solo I

D) Solo I y III E) Solo II y III

21.- ¿Cuál de las siguientes proposiciones es una tautología?

(I) $[\sim (p \wedge q) \rightarrow p] \vee \sim p$

(II) $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee \sim q)$

(III) $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III

D) I y II E) Todas

22.- De las siguientes proposiciones. ¿Cuál es (son) contradicción(es)?

(I) $\sim[\sim(p \vee q) \rightarrow \sim q] \wedge \sim(p \rightarrow q)$

(II) $\sim(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

A) Ninguna B) Solo I C) Solo II

D) I y II E) Faltan datos

23.- Dadas las proposiciones :

$a \equiv \sim p \wedge (p \vee \sim q)$

$b \equiv (\sim p \rightarrow q) \wedge [q \wedge (\sim q \rightarrow p)]$

$c \equiv q \vee (p \wedge q \wedge r)$

Indicar si es tautología, contradicción o contingencia la proposición:

$$(a \leftrightarrow b) \wedge c$$

A) Tautología D) Faltan datos

B) Contradicción E) Ninguna

C) Contingencia

24.- Simplificar : $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

A) p B) q C) $p \wedge q$ D) $p \vee q$ E) $p \rightarrow q$

25.- Simplificar : $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee p$

A) $p \vee q$ B) $\sim p \vee q$ C) $p \wedge \sim q$

D) $p \vee \sim q$ E) $\sim p \wedge q$

26.- Simplificar el esquema :

$$(\sim p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

A) $p \wedge q$ B) $\sim(p \vee q)$ C) $p \rightarrow q$

D) $p \vee q$ E) $q \rightarrow p$

27.- Simplificar :

$$\sim[(p \rightarrow \sim q) \vee \sim q) \rightarrow [\sim p \leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)]$$

A) $\sim p \wedge q$ B) $\sim p \wedge \sim q$ C) $\sim(p \vee q)$

D) $\sim(p \wedge q)$ E) $p \rightarrow q$

28.- Si : $p \sqcap q \equiv \sim p \rightarrow \sim q$

$p \diamond q \equiv \sim p \wedge \sim q$

Simplificar : $[(p \sqcup q) \rightarrow (p \diamond q)] \vee q$

A) $\sim p \wedge q$ B) $p \rightarrow q$ C) $q \rightarrow \sim p$

D) $\sim(p \vee q)$ E) $\sim(p \vee \sim q)$

29.- Si se define : $p \oplus q \equiv \sim p \rightarrow \sim q$

$p * q \equiv p \wedge \sim q$

Decir cuáles son proposiciones equivalentes :

(I) $(r * \sim q) \oplus p$

(II) $\sim p \oplus \sim(r * \sim q)$

(III) $\sim[(p * (r \oplus \sim q)]$

A) Solo I y II D) I , II y III

B) Solo II y III E) Ninguno

C) Solo II

30.- La proposición :

$$\sim(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim r),$$

es equivalente a cuál o cuáles de las siguientes proposiciones :

(I) $p \wedge (p \vee \sim r) \wedge \sim q$

(II) $p \wedge \sim q \wedge \sim(q \wedge r)$

(III) $(p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge \sim r) \wedge \sim q]$

A) I B) II C) Todas

D) IV , I y II E) V , II y III

31.- Sea : $A = \{x/x \text{ es una proposición}\}$

además se define :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \ , & \text{si } x \text{ es verdadero} \\ 0 \ , & \text{si } x \text{ es falso} \end{cases}$$

Indicar verdadero o falso, segun los siguientes enunciados:

(I) $\phi(p \vee q) = \phi(p) + \phi(q)$

(II) $\phi(\sim p) = 1 - \phi(p)$

(III) $\phi(p \rightarrow q) = 1 - \phi(\sim q)$

A) VVV B) VFV C) FVF

D) VFF E) FVV

32.- Dada la premisa :

«No es brillante pero se ve su esfuerzo» ,

es equivalente a :

A) No es cierto que, sea brillante y no se vea su esfuerzo.

B) No es cierto que, se vea su esfuerzo y no sea brillante .

C) No es cierto que, sea brillante o no se vea su esfuerzo.

D) No es cierto que, se vea su esfuerzo o no sea brillante.

E) Ninguna anterior

33.- De las siguientes premisas :

- Si estudio en la mañana entonces me levantaré temprano.

- Estudio en la mañana o no voy al cine en la tarde.

- Iré al cine en la tarde

Se puede concluir :

(I) Estudio en la mañana

(II) No me levanto temprano

A) Solo I B) Solo II C) I y II

D) Ninguno E) Falta información

34.- ¿A qué fórmula corresponde el siguiente circuito lógico :

A) $(p \wedge q) \wedge r \wedge [(\sim p \vee q) \vee r]$

B) $(p \wedge q) \wedge r \wedge (p \vee q)$

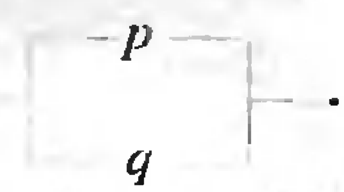
C) $(p \vee q) \wedge r \wedge [(\sim p \wedge q) \vee r]$

D) $(p \wedge q) \wedge r \wedge (\sim p \wedge \sim q)$

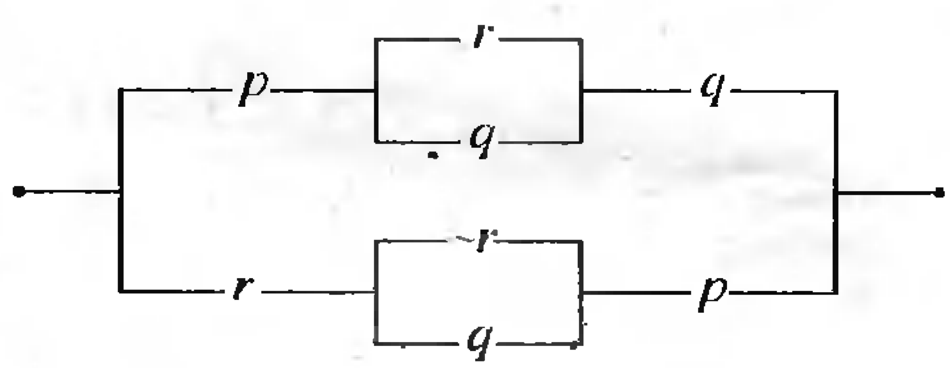
E) B y C

35.- Se tiene : $p \wedge q \equiv$

$p \vee q \equiv$



Si el costo de cada llave en la instalación del circuito :



es de S/. 50 ¿En cuánto se reduciría el costo de la instalación si se reemplaza este circuito por su equivalente más simple?.

A) 200 B) 400 C) 300

D) 100 E) 500

2 TEORIA DE CONJUNTOS

2.1 NOCION DE CONJUNTO

Conjunto, es una palabra sin definición, cuyos sinónimos son : reunión, colección, agrupación, agregado, clase, conglomerado o familia , de objetos homogéneos reales o abstractos llamados *elementos*.

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas (A ; B ; C ; ...) y sus elementos, separados por comas (o punto y coma en el caso de números), encerrados entre llaves.

2.2 DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Se dice que un conjunto está correctamente determinado cuando se puede establecer, sin ambigüedad, si un elemento dado es integrante o no de dicho conjunto. Todo conjunto puede determinarse de dos maneras :

2.2.A POR EXTENSION O FORMA TABULAR

Cuando se mencionan uno a uno a sus elementos, o se dá una idea de la sucesión de ellos.

2.2.B POR COMPRENSION O FORMA CONSTRUCTIVA

Cuando se enuncia a sus elementos por medio de una propiedad o cualidad común a ellos y que les es válida únicamente a éstos.

Ejemplos :

(A) Determinar el conjunto de las cinco vocales.

(B) Determinar el conjunto de los números impares (+) menores que 16.

(C) Determinar el conjunto de los números enteros (+) que terminan en 5

* Por Extensión : $A = \{a ; e ; i ; o ; u\}$

$B = \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15\}$

$C = \{5 ; 15 ; 25 ; 35 ; 45 ; ...\}$

* Por Comprensión : $A = \{x \,/\, x$ es una letra vocal$\}$

$B = \{y \,/\, y$ es un # impar $(+) \wedge y < 16\}$

$C = \{10n + 5 \,/\, n$ es un # entero no negativo$\}$

2.3 RELACION DE PERTENENCIA

Un elemento pertenece ($\in$) a un conjunto si forma parte o es agregado de dicho conjunto. Un elemento no pertenece ($\notin$) a un conjunto si no cumple con la condición anterior. Esta relación vincula un elemento con un conjunto, más no vincula elementos o conjuntos entre sí.

Ejemplo : *Dado el conjunto* : $A = \{4 ; 6 ; 7 ; 9\}$

Entonces: $4 \in A$ (4 pertenece a A)
$9 \in A$ (9 pertenece a A)
$5 \notin A$ (5 no pertenece a A)

2.4 CARDINAL DE UN CONJUNTO

Es el número entero, no negativo, que indica la cantidad de elementos diferentes de un conjunto. El cardinal de un conjunto A se denota : n (A).

Ejemplos : $A = \{7 ; 4 ; 6 ; 3\} \rightarrow n(A) = 4$
$B = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10\} \rightarrow n(B) = 5$
$C = \{6 ; 4 ; 4 ; 6 ; 4\} \rightarrow n(C) = 2$

2.5 RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

2.5.A INCLUSION

Se dice que un conjunto A está incluido en otro conjunto B, cuando todos los elementos de A pertenecen a B. Se denota por $A \subset B$ y simbólicamente se define la inclusión así :

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B$$

$A \subset B$
- ∗ A está incluído en B
- ∗ A está contenido en B
- ∗ A es parte de B
- ∗ A es subconjunto de B

$B \supset A$
- ∗ B incluye a A
- ∗ B contiene a A
- ∗ B es superconjunto de A

Nota : Si algún elemento del conjunto A, no pertenece a B entonces decimos que A no está incluído en B y se denota : $A \not\subset B$.

Ejemplos : *Dado el conjunto* : $A = \{6 ; 4 ; 2 ; 7 ; 5\}$

Entonces: $\{4 ; 2\} \subset A$ $\quad \{2 ; 4 ; 5\} \subset A$
$\{6 ; 7 ; 3\} \not\subset A$ $\quad \{7\} \subset A$

2.5.B IGUALDAD

Se dice que dos conjuntos A y B son iguales cuando ambos poseen los mismos elementos, se denota A = B y simbólicamente se define la igualdad así :

$$\boxed{A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A}$$

Ejemplo : *Dados*: $A = \{1 ; 5 ; -1 ; 3\}$
$B = \{2x - 3 / x \text{ es entero } (+) \wedge x \leq 4\}$

En el conjunto B, x toma los valores : 1 ; 2 ; 3 y 4 , luego $(2x - 3)$ toma valores :

$$2x - 3 = \begin{cases} \to 2(1) - 3 = -1 \\ \to 2(2) - 3 = 1 \\ \to 2(3) - 3 = 3 \\ \to 2(4) - 3 = 5 \end{cases}$$

Luego, el conjunto B, determinado por extensión será:

$$B = \{-1 ; 1 ; 3 ; 5\}$$

Como : $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A = B$

2.5.C COMPARACION

Se dice que dos conjuntos son comparables cuando por lo menos uno de ellos está incluido en el otro.

Ejemplos : * *Sean* : $A = \{7 ; 4 ; 6\}$
$B = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$
como $A \subset B$, entonces A y B son comparables

* Dados : $M = \{6 ; 2 ; 3 ; 9\}$
$N = \{3 ; 6\}$
como $N \subset M$, luego M y N son comparables

* Si : $P = \{5 ; 8 ; 3\}$
$Q = \{3 ; 6\}$
se observa que $P \not\subset Q$ y $Q \not\subset P$, luego P y Q no son comparables.

2.5.D DISJUNCION

Dos conjuntos A y B son disjuntos cuando no poseen elementos comunes.

Ejemplo : *Sean los conjuntos* : $A = \{x / x \text{ es un número par}\}$
$B = \{x / x \text{ es un número impar}\}$

como no hay elementos comunes a A y B, entonces son disjuntos.

2.5.E EQUIVALENCIA

Dos conjuntos A y B son equivalentes, si poseen la misma cantidad de elementos, lo cual se denota así : A <> B. Simbólicamente se define la equivalencia así :

$$A <> B \iff n(A) = n(B)$$

2.6 CLASES DE CONJUNTOS

2.6.A CONJUNTO NULO O VACIO

Es aquel conjunto que no posee elementos y se le denota comunmente como : ϕ o { }. Convencionalmente al conjunto nulo se le considera incluido en cualquier otro conjunto A :

$$\phi \subset A$$

Ejemplo : $A = \{x / x$ es número entero y : $3 < x < 5\}$

2.6.B CONJUNTO UNITARIO O SINGLETON

Es aquel conjunto que tiene un solo elemento.

Ejemplos : $A = \{5\}$
$B = \{\phi\}$
$C = \{x / x$ es número entero y $7 < x < 8\}$
$D = \{9 ; 9 ; 9 ; 9\}$

2.6.C CONJUNTO UNIVERSAL O REFERENCIAL

Es un conjunto referencial dado que se elige de manera arbitraria de acuerdo a la situación particular que se está tratando. Contiene a todos los conjuntos considerados y se le denota generalmente con $\mathbb{U}$.

Ejemplos : *Dados los conjuntos* : $A = \{3 ; 5 ; 7 ; 9\}$
$B = \{5 ; 13 ; 19 ; 23\}$

Un conjunto universal para A y B puede ser cualquiera de los siguientes conjuntos :

$\mathbb{U} = \{x / x$ es impar $\wedge x < 25\}$

$\mathbb{U} = \{x / x$ es número entero positivo$\}$

$\mathbb{U} = \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ...\}$

2.6.D CONJUNTO DE CONJUNTOS

Es aquel que por lo menos tiene a un conjunto como elemento.

Ejemplos : $A = \{\{3\} ; 2\}$
$B = \{\{1\} ; \{1 ; 2\}\}$

2.6.E CONJUNTO POTENCIA

Dado un conjunto A, se denomina conjunto potencia de A al que está formado por todos los subconjuntos de A. Se le denota P(A)

Ejemplo : *Dado* : A = {7 ; 5 ; 3} , los subconjuntos de A son:
ϕ , {7} , {5} , {3} , {7 ; 5} , {7 ; 3} , {5 ; 3} , {7 ; 5 ; 3}

Entonces el conjunto potencia de A es :
P(A) = {ϕ , {7} , {5} , {3} , {7 ; 5} , {7 ; 3} , {5 ; 3} , {7 ; 5 ; 3}}

Nota : Si n(A) es el cardinal del conjunto A , se verifica que :

$$\begin{array}{c}\#\text{ de subconjuntos de A} \\ \text{ó }\#\text{ de elementos P(A)} = 2^{n(A)}\end{array}$$

$$n[P(A)] = 2^{n(A)}$$

2.6.F SUBCONJUNTO PROPIO ($\subsetneq$)

Es aquel que siendo subconjunto de un conjunto dado, no es igual a éste.

Ejemplo : *Dado el conjunto* : A = {2 ; 6 ; 8} , sus subconjuntos son:
ϕ , {2} , {6} , {8} , {2 ; 6} , {2 ; 8} , {6 ; 8} , {2 ; 6 ; 8}

Luego, sus subconjuntos propios son:
ϕ , {2} , {6} , {8} , {2 ; 6} , {2 ; 8} , {6 ; 8}

Nota : Si n(A) representa el cardinal del conjunto A:

$$\#\text{ de subconjuntos propios de A} = 2^{n(A)} - 1$$

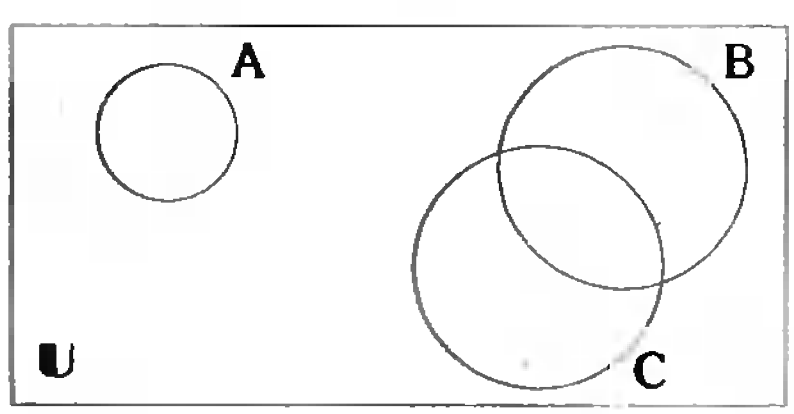
2.6.G SUBCONJUNTO IMPROPIO ($\subseteq$)

Es aquel que siendo subconjunto de un conjunto dado es igual a éste.

2.7 DIAGRAMAS DE VENN - EULER

Son regiones planas limitadas por figuras geométricas cerradas que se utilizan para representar gráficamente a los conjuntos. Se estila representar al conjunto universal mediante un rectángulo.

Ejemplo : *Dados los conjuntos* A, B y C *incluidos en el conjunto universal* U, *podríamos tener el siguiente diagrama*:

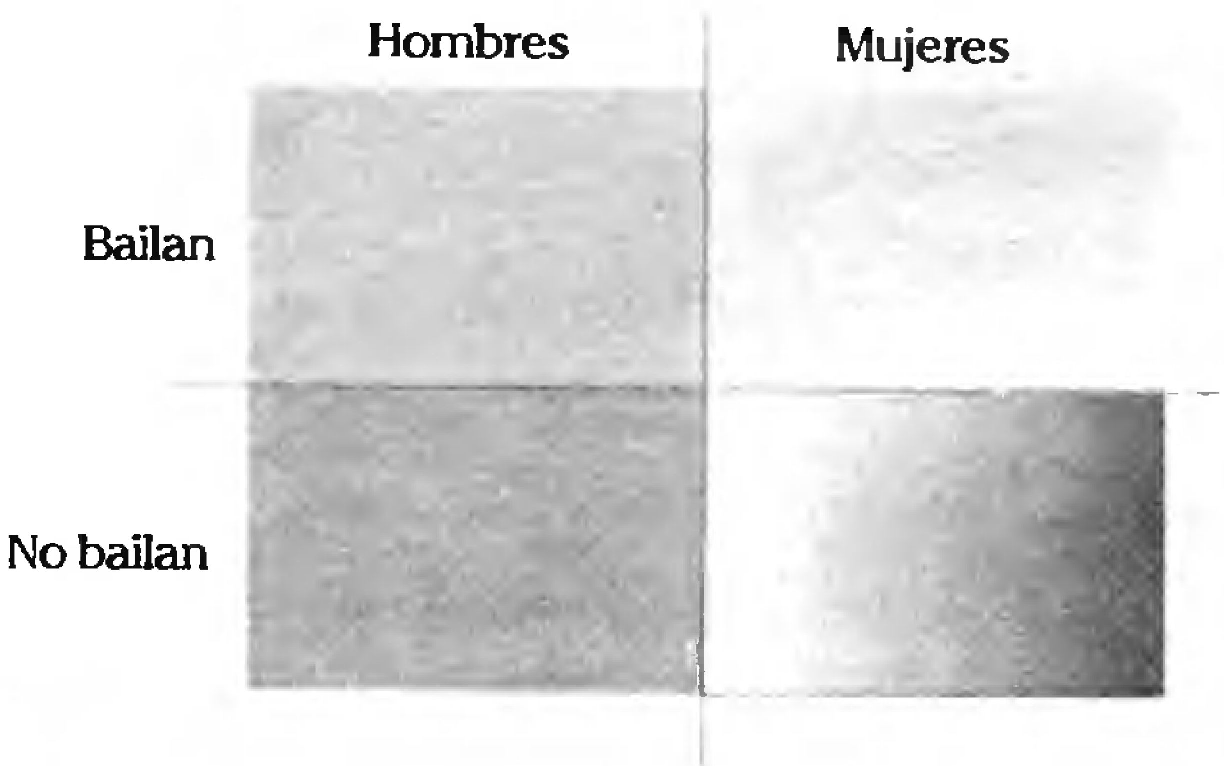


Nota : Otros diagramas usados para representar gráficamente a los conjuntos son:

2.7.A DIAGRAMA DE CARROLL

Llamado así en homenaje a Lewis Carroll, seudónimo de Charles Lutwidge Dodgson, escritor y matemático inglés (1 832 - 1 898) que fue el primero que lo utilizó en su obra "Alicia en el País de las Maravillas". Se úsa generalmente para conjuntos disjuntos.

Ejemplo :



Donde :

- → Hombres que bailan
- → Mujeres que bailan
- → Hombres que no bailan
- → Mujeres que no bailan

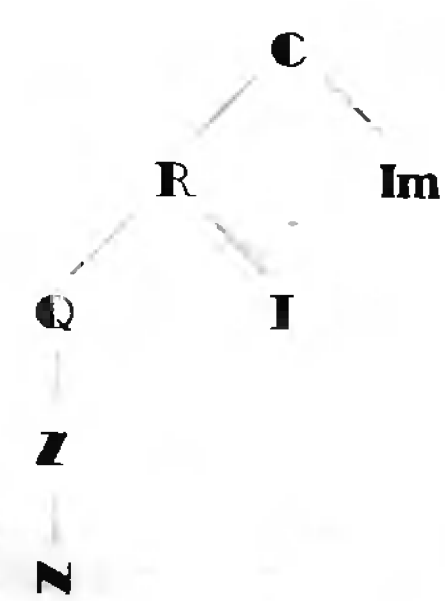
2.7.B DIAGRAMA LINEAL

Se usa para conjuntos comparables : $\begin{matrix} A \\ | \\ B \end{matrix}$ significa $B \subset A$.

Ejemplo : *Sean los conjuntos numéricos*:

$\mathbb{C}$: Conjunto de los número complejos
Im : Conjunto de los números imaginarios
$\mathbb{R}$: Conjunto de los números reales
$\mathbb{Q}$: Conjunto de los números racionales
$\mathbb{I}$: Conjunto de los números irracionales
$\mathbb{Z}$: Conjunto de los números enteros
$\mathbb{N}$: Conjunto de los números naturales

Teniendo en cuenta la precedencia de la inclusión, se establece:



2.8 OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

2.8.A UNION

Dados dos conjuntos A y B, la *unión* de ellos es el conjunto formado por aquellos elementos que pertenecen por lo menos a uno de esos conjuntos A o B. Se denota $A \cup B$ y se define:

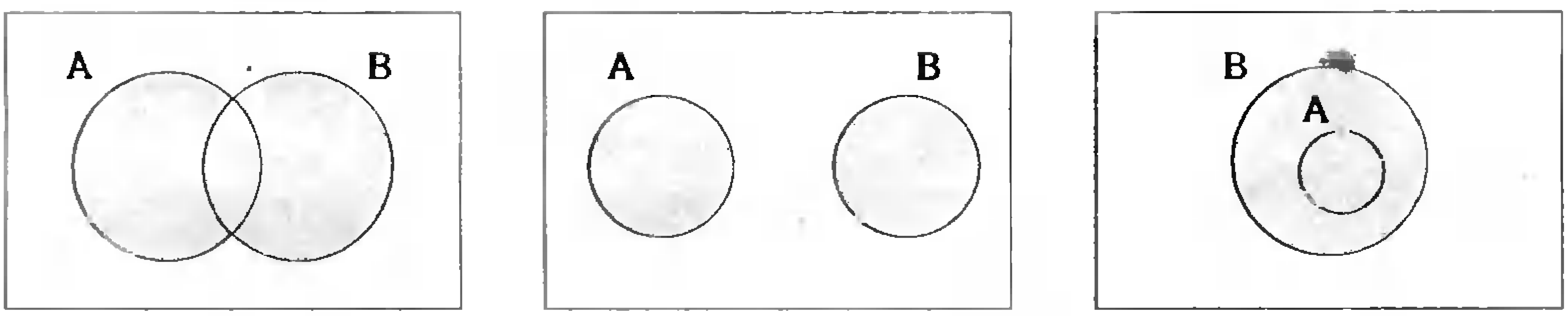
$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo : *Dados*: $A = \{6\,;8\,;2\}$

$B = \{3\,;7\}$

$\rightarrow A \cup B = \{2\,;3\,;6\,;7\,;8\}$

Diagramas :



2.8.B INTERSECCION

Para dos conjuntos A y B , la *intersección* de ellos es el conjunto formado por los elementos comunes de A y B. Se denota $A \cap B$ y se define:

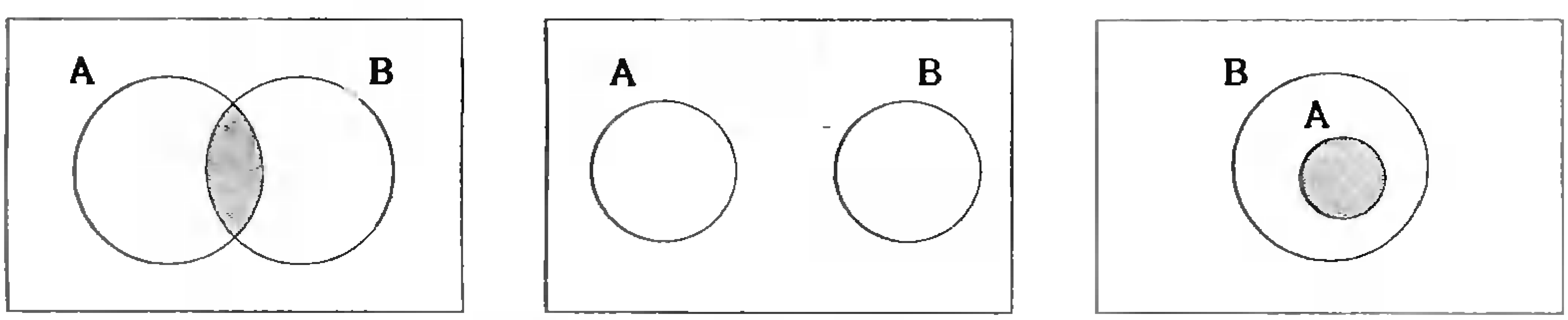
$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$$

Ejemplo : *Dados*: $A = \{1\,;3\,;5\}$

$B = \{2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

$\rightarrow A \cap B = \{3\,;5\}$

Diagramas :



$A \cap B = \phi$ $A \cap B = A$

2.8.C DIFERENCIA

La *diferencia* de dos conjuntos A y B (en ese orden), es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A, pero no a B. Se denota por A - B y se define :

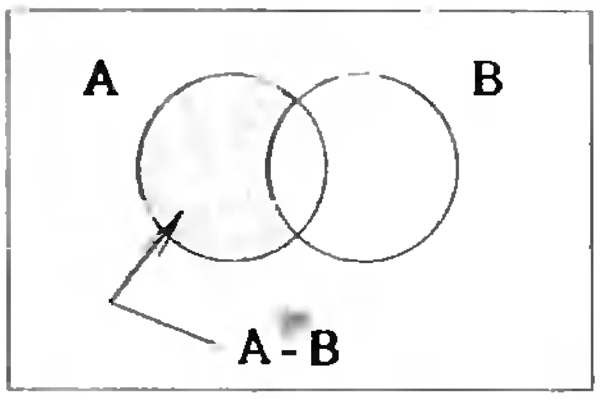
$$A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

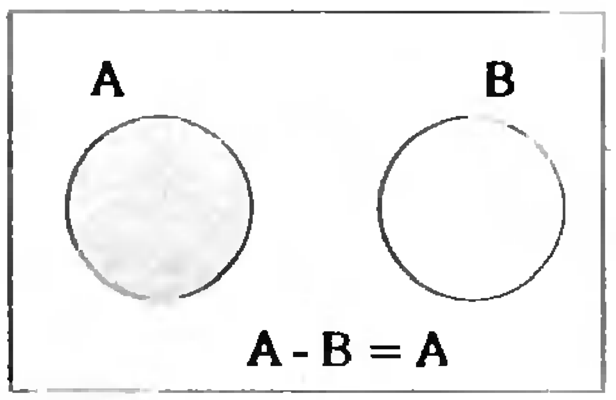
Ejemplo : *Dados*: A = {6 ; 8 ; 4 ; 7 ; 2}

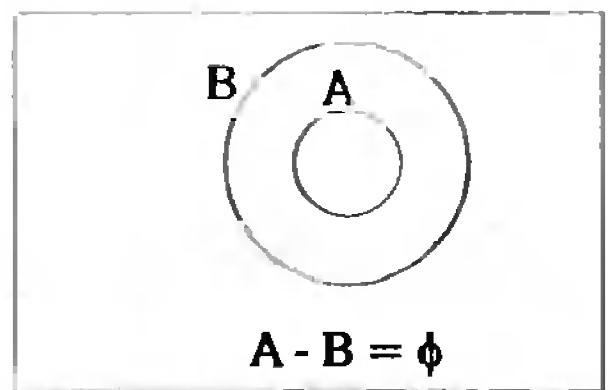
B = {3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7}

→ A - B = {8 ; 7 ; 2}

Diagramas :







2.8.D DIFERENCIA SIMETRICA

Dados dos conjuntos A y B, la *diferencia simétrica* de ellos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o B pero no a ambos. Se denota por A Δ B y se define :

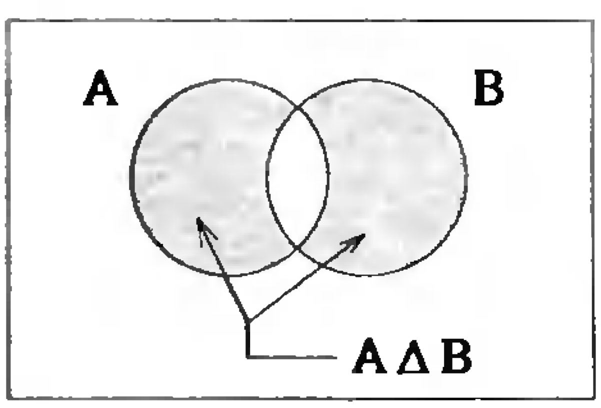
$$A \,\Delta\, B = \{x \,/\, x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$$

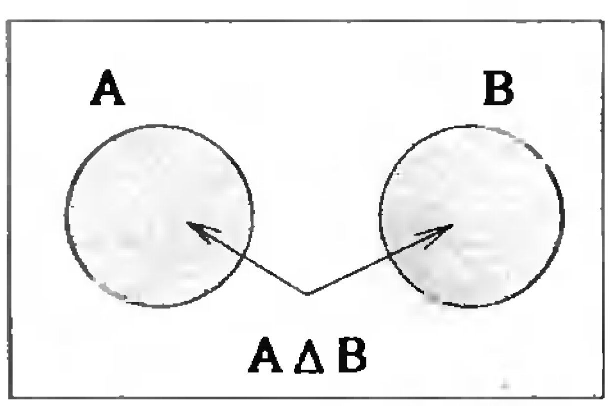
Ejemplo : *Dados*: A = {6 ; 4 ; 2 ; 8}

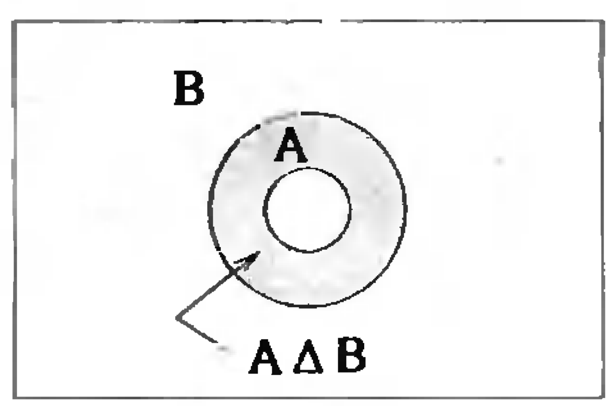
B = {3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7}

→ A Δ B = {2 ; 8 ; 3 ; 5 ; 7}

Diagramas :







2.8.E COMPLEMENTO

El complemento de un conjunto A, es el conjunto formado por los elementos del conjunto universal U que no pertenecen a A. Se denota por: A^c, A', $\overline{A}$ o C (A) y se define :

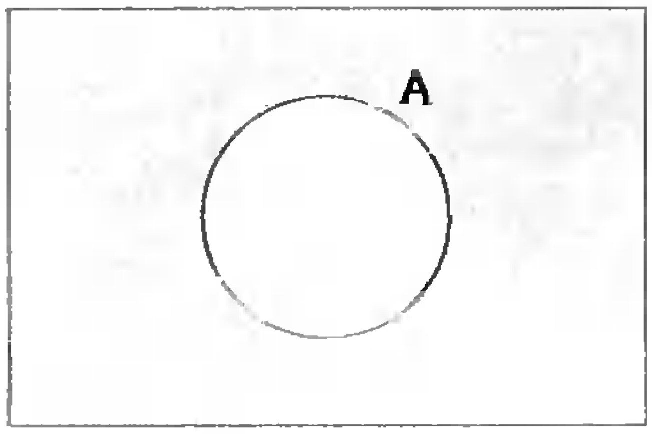
$$A' = \{x \,/\, x \in U \wedge x \notin A\} = U - A$$

Ejemplo : *Sea* : $U = \{x / x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x < 8\}$

y : $A = \{2 ; 3 ; 5\}$

$\rightarrow A' = \{1 ; 4 ; 6 ; 7\}$

Diagrama :



2.8.F PRODUCTO

Llamado también *producto cartesiano* de dos conjuntos A y B, es aquel conjunto cuyos elementos son pares ordenados donde las primeras componentes pertenecen a A y las segundas componentes pertenecen a B. Se denota A × B y se define :

$$A \times B = \{(a ; b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo : *Si* : $A = \{1 ; 2 ; 3\}$

$B = \{m ; n\}$

$\rightarrow A \times B = \{(1 ; m), (1 ; n), (2 ; m), (2 ; n), (3 ; m), (3 ; n)\}$

$\rightarrow B \times A = \{(m ; 1), (m ; 2), (m ; 3), (n ; 1), (n ; 2), (n ; 3)\}$

Nótese que si $A \neq B$: $\boxed{A \times B \neq B \times A}$

2.9) LEYES Y PROPIEDADES DEL ALGEBRA DE CONJUNTOS

2.9.1 REFLEXIVAS

1A. $A \cup A = A$

1B. $A \cap A = A$

1C. $A \,\Delta\, A = A$

2.9.2 CONMUTATIVAS

2A. $A \cup B = B \cup A$

2B. $A \cap B = B \cap A$

2C. $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$

2.9.3 ASOCIATIVAS

3A. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

3B. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3C. $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$

2.9.4 DISTRIBUTIVAS

4A. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4B. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4C. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

4D. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

2.9.5 DE LA INCLUSION

$$\text{Si: } A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \\ A - B = \phi \\ A \Delta B = B - A \end{cases}$$

2.9.6 DE LA EXCLUSION

$$\text{Si: A y B son disjuntos} \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = \phi \\ A - B = A \\ A \Delta B = A \cup B \end{cases}$$

2.9.7 ELEMENTO NEUTRO

7A. $A \cup \phi = A$

7B. $A \cap \phi = \phi$

7C. $A \cup U = U$

7D. $A \cap U = A$

2.9.8 DEL COMPLEMENTO

8A. $(A')' = A$

8B. $A \cup A' = U$

8C. $A \cap A' = \phi$

8D. $\phi' = U$

8E. $U' = \phi$

2.9.9 DE LA DIFERENCIA

9A. $A - B = A \cap B'$

9B. $A - B = B' - A'$

2.9.10 LEYES DE MORGAN

10A. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

10B. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

2.9.11 DEL CONJUNTO PRODUCTO

11A. $n(A \times B) = n(A) \,.\, n(B)$

11B. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

11C. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

2.9.12 DE ABSORCION

12A. $A \cup (A \cap B) = A$

12B. $A \cap (A \cup B) = A$

12C. $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

12D. $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

2.10 RELACIONES CON CARDINALES

(I) Si A y B son disjuntos :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

(II) Para 2 conjuntos cualesquiera A y B :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

(III) Para 3 conjuntos cualesquiera A , B y C :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

-1

1.- Si el conjunto A tiene 3 elementos ¿Cuántos subconjuntos propios tiene el conjunto potencia de P(A)?

A) $2^3 - 1$ ***B)*** $2^8 - 1$ ***C)*** $2^{16} - 1$ ***D)*** $2^{256} - 1$ ***E)*** $2^{64} - 1$

Resolución.-

* Si el conjunto A tiene 3 elementos, el conjunto P(A) tiene $2^3 = 8$ elementos.

* Si el conjunto P(A) tiene 8 elementos, el conjunto potencia de P(A) tiene $2^8 = 256$ elementos.

Por lo tanto, el número de subconjuntos propios del conjunto potencia de P(A) será:

$\therefore$ $2^{256} - 1$ RPTA. D

2.- Sabiendo que el conjunto : A = {a + b ; a + 2b - 2 ; 10} es un conjunto unitario. ¿Cuál es el valor de = $a^2 + b^2$?

A) 16 B) 80 C) 68 D) 58 E) 52

Resolución.-

Para que sea un conjunto unitario, los elementos deben ser iguales, luego :

* $a + b = 10$ ... (α)

* $a + 2b - 2 = 10 \rightarrow a + 2b = 12$ ... (β)

De (α) y (β) : $a = 8 \wedge b = 2$

$\therefore$ $a^2 + b^2 = 68$ RPTA. C

3.- Si : $A = \{x \ / \ x \in \mathbb{Z} \wedge 10 < x < 20\}$

$$B = \left\{y + 5 \, / \, y \in \mathbb{Z} \wedge \left(\sqrt{y} + 15\right) \in A\right\}$$

¿Cuál es la suma de los elementos de B?

A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 65

Resolución.-

El conjunto A, determinado por extensión es :

$$A = \{11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19\}$$

En el conjunto B, como $\left(\sqrt{y} + 15\right) \in A$:

$$\sqrt{y} \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$$

$$\rightarrow y \in \{0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16\}$$

Luego : $B = \{5 ; 6 ; 9 ; 14 ; 21\}$

$\therefore$ Suma de elementos de B = 55 RPTA. C

4.- Dados los siguientes conjuntos iguales:

$A = \{a + 2 \,;\, a + 1\}$
$B = \{7 - a \,;\, 8 - a\}$
$C = \{b + 1 \,;\, c + 1\}$
$D = \{b + 2 \,;\, 4\}$

Determinar el valor de : a + b + c

A) 2 B) 5 C) 7 D) 10 E) 12

Resolución.-

Para que sean iguales deben tener los mismos elementos, luego:
Si: A = B, los elementos de A y los de B deben ser los mismos, entonces, igualando los mayores:

$$a + 2 = 8 - a \rightarrow a = 3$$

De donde los elementos de A son 5 y 4, por lo que, si A = D :

$$b + 2 = 5 \quad \rightarrow b = 3$$

Finalmente, en el conjunto "C" : $b + 1 = 4 \rightarrow c + 1 = 5 \rightarrow c = 4$
Por lo tanto :

$$\therefore \quad a + b + c = 10 \qquad \text{RPTA. D}$$

5.- Sea : U = {1 ; 2 ; 3 ; ...}.

Entonces, dados los conjuntos : $A = \{2x \,/\, x \in U \wedge x < 5\}$
$B = \{1{,}5x - 1 \,/\, x \in A\}$

¿Cuál es el número de elementos de A ∩ B?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución.-

Determinando el conjunto A por extensión :
Como : $x < 5 \rightarrow x \in \{1\,;2\,;3\,;4\} \rightarrow A = \{2\,;4\,;6\,;8\}$
Determinando el conjunto B por extensión :
Como : $x \in A = \{2\,;4\,;6\,;8\} \rightarrow B = \{2\,;5\,;8\,;11\}$
Luego : $A \cap B = \{2\,;8\}$

$$\therefore \quad n(A \cap B) = 2 \qquad \text{RPTA. B}$$

6.- El conjunto A tiene 2 elementos menos que el conjunto B, que por cierto posee 3 072 subconjuntos más que A. Si tales conjuntos son disjuntos. ¿Cuál es el cardinal de A ∪ B?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 24

Resolución.-

Si asumimos que el número de elementos de A es "x" , se tiene:

$n(A) = x \quad \rightarrow$ # de subconjuntos de A = 2^x
$n(B) = x + 2 \rightarrow$ # de subconjuntos de B = 2^{x+2}

Luego, por dato $\quad 2^{x+2} - 2^x = 3\,072$

Operando algebráicamente : $2^x\,(2^2 - 1) = 3\,072$

$$2^x = \frac{3\,072}{3} = 1\,024 = 2^{10}$$

Luego : $x = 10$

Entonces : $n(A) = 10 \wedge n(B) = 12$

Por lo tanto, como A y B son disjuntos :

$\therefore$ $n(A \cup B) = 10 + 12 = 22$ RPTA. D

7.- ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto "B", donde:

$B = (A \cup C) - (A \cap C)$,

si : $A = \{x / x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0\}$,

y : $C = \{x / x^2 + x - 20 = 0\}$ ***?***

A) 2 ***B) 4*** ***C) 8*** ***D) 16*** ***E) 32***

Resolución.-

Determinando ambos conjuntos por extensión luego de observar algebráicamente que:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$$
$$x^2 + x - 20 = (x - 4)(x + 5)$$

Se tiene:

$A = \{x / (x - 2)^3 = 0\} = \{x / x - 2 = 0\} \rightarrow A = \{2\}$

$C = \{x / (x - 4)(x + 5) = 0\} = \{x / x - 4 = 0 \vee x + 5 = 0\} \rightarrow C = \{4 ; -5\}$

Entonces : $A \cup C = \{2 ; 4 ; -5\}$

$A \cap C = \phi$

Luego : $B = (A \cup C) - (A \cap C) = \{2 ; 4 ; -5\}$

Como : $n(B) = 3 \rightarrow$ $\therefore$ $\#$ de subconjuntos de $B = 2^3 = 8$ RPTA. C

8.- Para 2 conjuntos A y B se cumple que :

**** A tiene 16 subconjuntos***

**** B tiene 8 subconjuntos***

******* $A \cup B$ ***tiene 32 subconjuntos***

¿Cuántos subconjuntos tiene $A \cap B$***?***

A) 2 ***B) 4*** ***C) 8*** ***D) 16*** ***E) 32***

Resolución.-

Recuerde que el número de subconjuntos de x es $2^{n(x)}$ donde $n(x)$ es el número de elementos del conjunto x, entonces:

* # de subconjuntos de $A = 16 = 2^4 \rightarrow n(A) = 4$

* # de subconjuntos de $B = 8 = 2^3 \rightarrow n(B) = 3$

* # de subconjuntos de $A \cup B = 32 = 2^5 \rightarrow n(A \cup B) = 5$

Como : $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Reemplazando : $5 = 4 + 3 - n(A \cap B) \rightarrow n(A \cap B) = 2$

Por lo tanto : $\#$ subconjuntos de $A \cap B = 2^2 = 4$ RPTA. B

9.- Si : $B \subset A$, demostrar que : $B \cup (A - B) = A$.

<u>Resolución</u>.-

Aplicando la propiedad 9A : $B \cup (A - B) = B \cup (A \cap B')$

Por propiedad 12C : $= B \cup A$

Como $B \subset A$: $= A$

$\therefore$ Si $B \subset A : B \cup (A - B) = A$

10.- Demostrar que : $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$.

<u>Resolución</u>.-

Comenzando por el lado más complicado y aplicando la propiedad 9A :

$$(A \cap C) - (B \cap C) = (A \cap C) \cap (B \cap C)'$$

Por propiedad 10B : $= (A \cap C) \cap (B' \cup C')$

Por propiedad 4B : $= [(A \cap C) \cap B'] \cup [(A \cap C) \cap C']$

Por propiedad 3B : $= [(A \cap B') \cap C] \cup [(A \cap (C \cap C')]$

Por propiedad 8B : $= [(A \cap B') \cap C] \cup [(A \cap \phi]$

Por propiedad 7B : $= [(A \cap B') \cap C] \cup \phi$

Por propiedad 7A : $= [(A \cap B') \cap C]$

Por propiedad 9A : $= (A - B) \cap C$

$\therefore$ $(A \cap C) - (B \cap C) = (A - B) \cap C$

11.- Demostrar que : $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

<u>Resolución</u>.-

Se sabe que : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

Por propiedad 9A : $= (A \cap B') \cup (B \cap A')$

Por propiedad 4D : $= [A \cup (B \cap A')] \cap [B' \cup (B \cap A')]$

Por propiedad 12C : $= (A \cup B) \cap (B' \cup A')$

Por propiedad 2A : $= (A \cup B) \cap (A' \cup B')$

Por propiedad 10B : $= (A \cup B) \cap (A \cap B)'$

Por propiedad 9A : $= (A \cup B) - (A \cap B)$

$\therefore$ $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

12.- Demostrar que : $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

<u>Resolución</u>.-

Comenzando por el miembro más complicado y aplicando lo demostrado en el problema anterior:

$$(A \cap C) \Delta (B \cap C) = [(A \cap C) \cup (B \cap C)] - [(A \cap C) \cap (B \cap C)]$$

Por propiedad 4C : $= [(A \cup B) \cap C] - [(A \cap C) \cap (B \cap C)]$

Por propiedad 3B : $= [(A \cup B) \cap C] - [(A \cap B) \cap (C \cap C)]$

Por propiedad 1B : $= [(A \cup B) \cap C] - [(A \cap B) \cap C]$

Por problema 2 : $= [(A \cup B) - (A \cap B)] \cap C$

Por problema 3 : $= (A \Delta B) \cap C$

$\therefore \quad (A \cap C) \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \cap C$

13.- Demostrar que : $[A' - (B' - C)]' \cap (B' \cap C')' = A \cap (B \cup C)$.

<u>Resolución</u>.-

Comenzando por el miembro más complicado y aplicando la propiedad 9A:

$$[A' - (B' - C)]' \cap (B' \cap C')' = [A' \cap (B' - C)']' \cap (B' \cap C')'$$

Por propiedades 10B y 8A : $= [A \cup (B' - C)] \cap (B \cup C)$

Por propiedad 9A : $= [A \cup (B' \cap C')] \cap (B \cup C)$

Por propiedad 10A : $= [A \cup (B \cup C)'] \cap (B \cup C)$

Por propiedad 12D : $= A \cap (B \cup C)$

$\therefore \quad [A' - (B' - C)]' \cap (B' \cap C')' = A \cap (B \cup C)$

14.- Simplificar : $[A - (B \cup P)] \cap (B - A)$ sabiendo que $A \subset P$.

A) B ***B)*** A ***C)*** $A \cup P$ ***D)*** $A \cap P$ ***E)*** ϕ

<u>Resolución</u>.-

Por dato : $A \subset P$

Se sabe que : $P \subset (B \cup P)$ $\Rightarrow$ $A \subset (B \cup P)$

Luego por propiedad de inclusión : $A - (B \cup P) = \phi$

Entonces : $[A - (B \cup P)] \cap (B - A) = \phi \cap (B - A)$

Por propiedad 7B : $= \phi$

$\therefore \quad [A - (B \cup P)] \cap (B - A) = \phi$ RPTA. E

15.- Siendo A, B y C tres conjuntos contenidos en un mismo universo U y además satisfacen : $A' \cup B = C$; simplificar la expresión:

$$(A \cup B \cup C)' \cap (A \cap B' \cap C')$$

A) A ***B)*** $A \cap B$ ***C)*** $A - B$ ***D)*** C ***E)*** ϕ

<u>Resolución</u>.-

Por dato : $A' \cup B = C$

Aplicando complemento : $(A' \cup B)' = C'$

Por propiedades 8A y 10A : $A \cap B' = C'$

Por propiedad 9A : $A - B = C'$ ... (α)

Luego, por propiedad asociativa :

$$(A \cup B \cup C)' \cap (A \cap B' \cap C') = [(A \cup B) \cup C]' \cap [(A \cap B') \cap C']$$

Por propiedad 10A : $= [(A \cup B)' \cap C'] \cap [(A \cap B') \cap C']$

Por propiedad 9A y reemplazando C' de (α) : $= [(A \cup B)' \cap (A - B)] \cap [(A - B) \cap (A - B)]$

Por propiedades 9A y 1A : $= [(A - B) - (A \cup B)] \cap (A - B)$

Como $A - B \subset A \cup B$: $= \phi \cap (A - B)$

Por propiedad 7B : $= \phi$

$\therefore$ $(A \cup B \cup C)' \cap (A \cap B' \cap C') = \phi$ RPTA. E

16.- Definimos la operación "$*$" tal que : $A * B = (A - B)'$ según esto simplificar :

$$[(A * B) * (B - A)] * A$$

A) $A \cup B$ ***B)*** $A \cap B$ ***C)*** $A - B$ ***D)*** $B * A$ ***E)*** $A * B$

<u>Resolución</u>.-

Aplicando la definición de "$*$":

$$[(A * B) * (B - A)] * A = \{[(A - B)' - (B - A)]' - A\}'$$

Por propiedad 9A : $= \{[(A - B)' \cap (B - A)']' - A\}'$

Por propiedad 10B : $= \{[(A - B) \cup (B - A)] - A\}'$

Por propiedad 9A : $= \{[(A - B) \cup (B - A)] \cap A'\}'$

Por propiedad 4C : $= \{[(A - B) \cap A'] \cup [(B - A) \cap A')]\}'$

Por propiedad 9A : $= \{[(A - B) - A] \cup [(B - A) - A]\}'$

Como $A - B \subset A$: $= \{\phi \cup [(B - A) - A]\}'$

Por propiedad 7A : $= [(B - A) - A]'$

Como (B - A) y A son disjuntos : $= (B - A)'$

Por definición de "$*$" : $= B * A$

$\therefore$ $[(A * B) * (B - A)] * A = B * A$ RPTA. D

17.- De 150 alumnos, 104 no postulan a la U.N.I., 109 no postulan a la P.U.C. y 70 no postulan a estas universidades. ¿Cuántos postulan a ambas?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

<u>Resolución</u>.-

Sean A y B los conjuntos de alumnos que postulan a la U.N.I. y a la P.U.C. respectivamente se tendrá , por datos del problema:

$n(A') = 104 \rightarrow n(A) = 150 - 104 = 46$

$n(B') = 109 \rightarrow n(B) = 150 - 109 = 41$

$n[(A \cup B)'] = 70 \rightarrow n(A \cup B) = 150 - 70 = 80$

Como : $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Reemplazando : $80 = 46 + 41 - n(A \cap B)$

Luego, postulan a ambas universidades : $n(A \cap B) = 7$ RPTA. B

18.- De cierto número de figuras geométricas se sabe que 60 son cuadriláteros, 20 son rombos, 30 son rectángulos y 12 no son rombos ni rectángulos. ¿Cuántos son cuadrados?

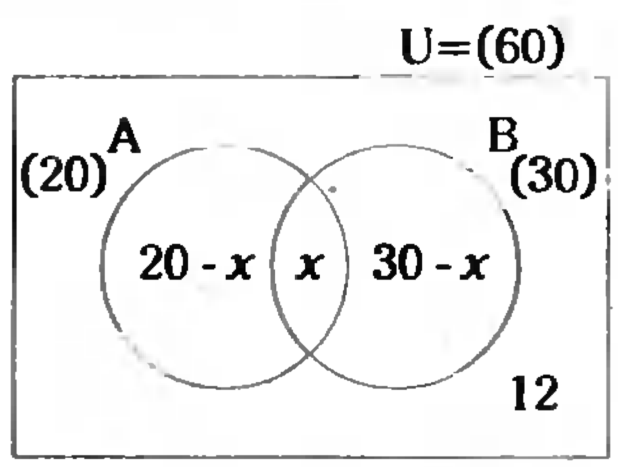
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

<u>Resolución</u>.-

Si : A : conjunto de rombos

B : conjunto de rectángulos

Nótese que, en el diagrama de Venn - Euler, la intersección de ambos conjuntos, A y B, está dada por los cuadrados.



Luego : $20 - x + x + 30 - x + 12 = 60 \rightarrow \therefore x = 2$ RPTA. B

19.- En una encuesta realizada entre los estudiantes de una universidad, se obtuvo los siguientes resultados:

**** El 60% usan el producto A***

**** El 50% usan el producto B***

**** El 80% usan los productos A o B pero no ambos***

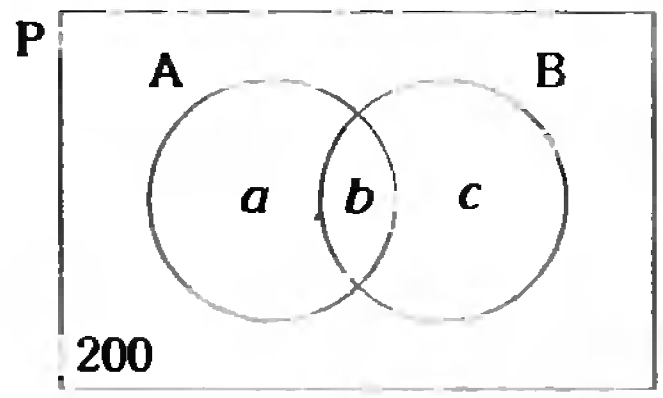
**** 200 alumnos no usan estos productos***

¿Cuántos alumnos fueron encuestados?

A) 2 400 B) 3 200 C) 4 000 D) 6 400 E) 5 600

Resolución.-

Consideremos a "P" como el número de estudiantes encuestados, entonces el diagrama de Venn - Euler correspondiente será :



De donde : $a + b = 60\%$ P

$b + c = 50\%$ P

$a + c = 80\%$ P

Sumando miembro a miembro :

$2(a + b + c) = 190\%$ P

$\rightarrow a + b + c = 95\%$ P

Entonces, como el total es representado por el 100%, las 200 personas representan el 5% del total de encuestados:

5% de P = 200 $\rightarrow$ $\therefore$ $\boxed{P = 4\,000}$ RPTA. C

20.- En una ciudad se determinó que:

**** A la cuarta parte de la población no le gusta la natación ni el futbol***

**** A la mitad les gusta la natación***

**** A los 5/12 les gusta el futbol***

¿A qué parte de la población les gusta solamente uno de los deportes mencionados?

A) 3/4 B) 1/4 C) 1/3 D) 7/12 E) 1/2

Resolución.-

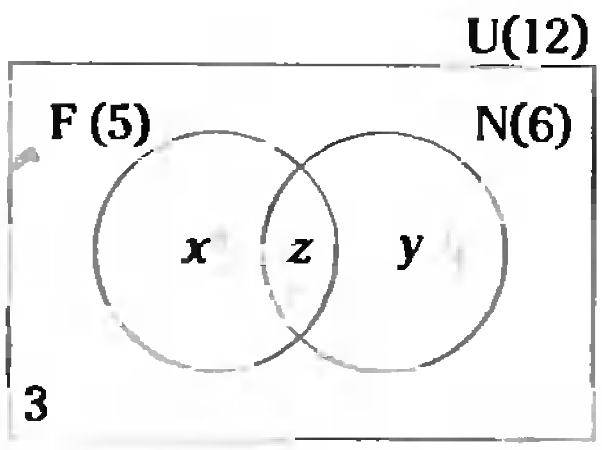
Sean : "F" el conjunto de habitantes que gustan del futbol y "N" el conjunto de habitantes que gustan de la natación. Entonces *suponiendo* una población de 12 habitantes se tendrá:

* A $\frac{1}{4}$ (12) = 3 habitantes no les gusta la natación ni el futbol

* A $\frac{1}{2}$ (12) = 6 habitantes les gusta la natación

* A $\frac{5}{12}$ (12) = 5 habitantes les gusta el futbol

En un diagrama de Venn - Euler :



$x + y + z = 9$

Se observa que : $x + z = 5 \rightarrow y = 4$

$z + y = 6 \rightarrow x = 3$

El número de personas que gustan solamente de uno de estos deportes será :

$x + y = 4 + 3 = 7$

Que representa los : $\therefore$ 7/12 de la población RPTA. D

21.- Se dan tres conjuntos X, Y , Z incluidos en un mismo conjunto universal U, tal que:

$Z \cap X = Z$

$n(Z') = 150$

$n(X' \cap Y') = 90$

$n[(X \cup Y) - Z] = 6 \,.\, n(Z)$

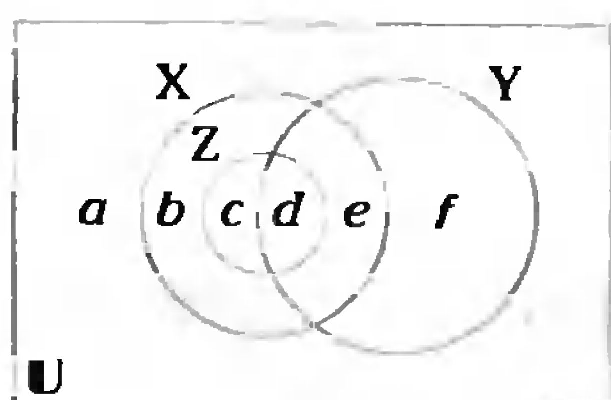
Hallar : $n(U)$

A) 140 B) 170 C) 150 D) 180 E) 160

Resolución.-

Por propiedad de la inclusión se sabe que: $Z \cap X = Z \Leftrightarrow Z \subset X$

Luego, el diagrama de Venn - Euler correspondiente a este problema será :



Analizando los datos :

* $n(Z') = 150 \rightarrow a + b + e + f = 150$ ... (α)

* Aplicando la propiedad 10A:

$n(X' \cap Y') = n[(X \cup Y)'] = 90 \rightarrow a = 90$

* $n[(X \cup Y) - Z] = 6 \,.\, n(Z) \rightarrow b + e + f = 6\,(c + d)$

Reemplazando en (α) : $90 + 6\,(c + d) = 150 \rightarrow c + d = 10$

$n(U) = a + b + c + d + e + f$

$$= \underbrace{a+b+e+f}+\underbrace{c+d} = 150 + 10$$

$\therefore \quad \boxed{n(U) = 160}$ RPTA. E

22.- En una encuesta a 170 comerciantes que laboran en un mercado del centro de Lima se tiene:

**** 30 son sordos y venden libros***
**** 32 que oyen música, venden libros***
**** 75 que venden libros, no oyen música***
**** 55 son sordos***
**** 60 oyen música***

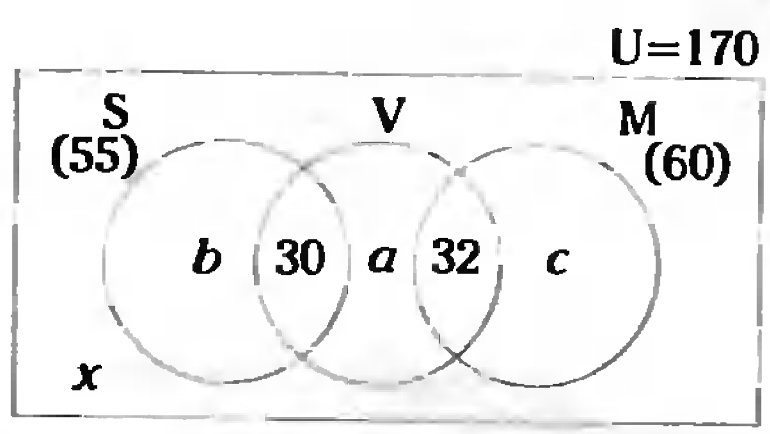
¿Cuántos de los que no oyen música, no venden libros, ni son sordos?

A) 20 B) 15 C) 18 D) 12 E) 10

<u>Resolución</u>.-

Sean : S : Conjunto de sordos
M : Conjunto de los que oyen música
V : Conjunto de los que venden libros

Notemos que ningún sordo puede oir música, entonces los conjuntos S y M son disjuntos; luego en un diagrama de Venn - Euler se tendrá :



Notemos que: $b + 30 = 55 \rightarrow b = 25$
$30 + a = 75 \rightarrow a = 45$
$32 + c = 60 \rightarrow c = 28$

Los que no oyen música, no venden libros ni son sordos son:

$x = 170 - (25 + 30 + 45 + 32 + 28)$

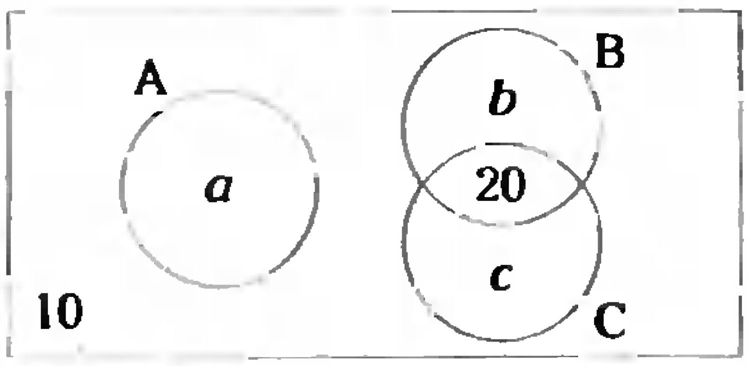
$\therefore \quad \boxed{x = 10}$ RPTA. E

23.- De 120 alumnos que rindieron una prueba que contiene los cursos A, B y C se sabe que:
**** Se anuló 10 pruebas y el resto aprobó por lo menos un curso***
**** Los que aprobaron A, desaprobaron B y C***
**** Hay 20 alumnos que aprobaron B y C***
¿Cuántos aprobaron un solo curso?

A) 60 B) 70 C) 90 D) 80 E) 100

Resolución.-

Teniendo en cuenta que los que aprobaron A, desaprobaron B y C; se tendrá el siguiente diagrama de Venn - Euler :



Del diagrama :

$10 + a + b + 20 + c = 120$

Luego, aprobaron un solo curso:

$\therefore \quad a + b + c = 90$ RPTA. C

24.- Se hizo una encuesta entre 170 personas para ver la preferencia entre partidos políticos: A y B de centro, C de derecha y D de izquierda con los siguientes resultados :

10 no simpatizan con partido alguno, 32 solo con D, 22 solo con A, 20 solo con B y 20 solo con C; 20 con A y D pero no con B; 6 solo con B y C; 4 solo con A y C; 24 con B y D y 28 con A y B.

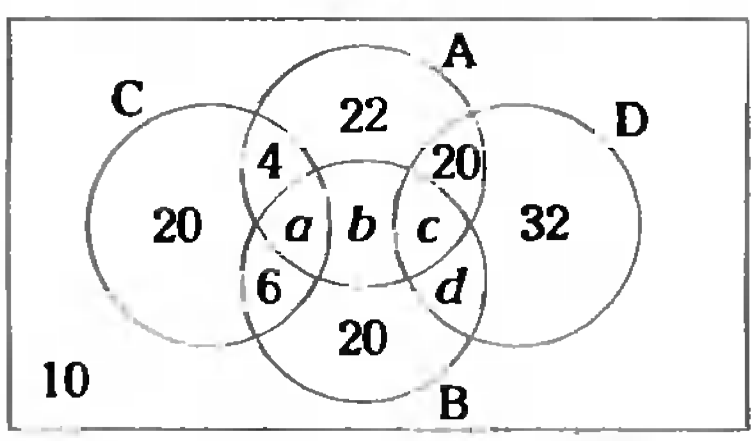
Si ninguno que simpatiza con la derecha simpatiza con la izquierda.

¿Cuántos simpatizan con A, B y D?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

Resolución.-

Considerando que ninguno que simpatiza con la derecha, simpatiza con la izquierda, se tiene el siguiente diagrama de Venn - Euler :

U=170


Además :

$c + d = 24$

$a + b + c = 28$

Luego :

$20 + 4 + a + 6 + 22 + b + 20 + 20 + c + d + 32 + 10 = 170$

$\rightarrow a + b + c + d + 134 = 170$

$\rightarrow \quad a + b + c + d = 36$

Como : $a + b + c = 28 \quad \rightarrow \quad d = 36 - 28 = 8$

Finalmente : $c = 24 - 8$

Por lo tanto, los que simpatizan con A, B y D son:

$c = 16$ RPTA. C

25.- *Se tomó una encuesta a 300 personas sobre preferencia de 3 diarios: A, B y C, averiguándose que:*

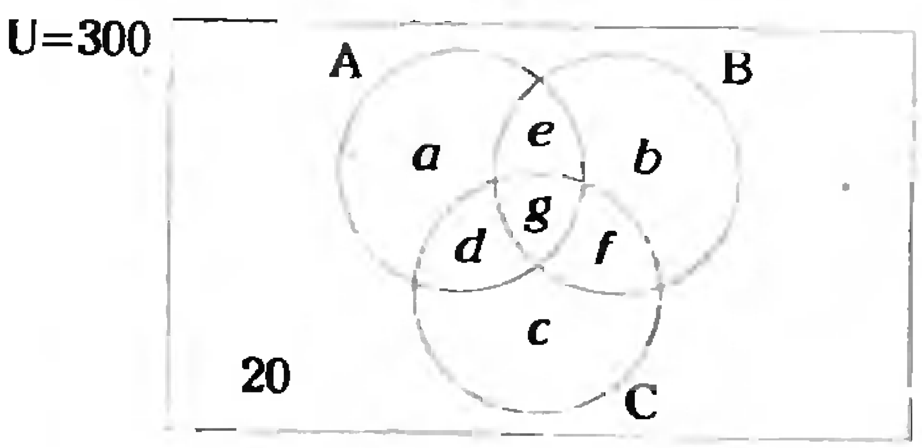
**** 250 leen A o B***
**** 100 leen A pero no leen B***
**** 120 leen B pero no leen A***
**** 20 no leen estos diarios***
**** No más de 10 leen los 3 diarios***

¿Cuántas personas, como mínimo, leen A y B pero no C?

A) 18 ***B) 19*** ***C) 20*** ***D) 21*** ***E) 22***

<u>Resolución</u>.-

El diagrama de Venn - Euler correspondiente será :



Nos piden : $e_{min} = ?$

De los datos : $* \; a + d + e + g + b + f = 250$ ... (I)

$* \; a + d = 100$ ... (II)

$* \; b + f = 120$ ... (III)

$* \; g \leq 10$

Reemplazando (II) y (III) en (I) :

$100 + e + g + 120 = 250 \rightarrow e + g = 30$

$\rightarrow e = 30 - g$

El menor valor de "e" se conseguirá si g es máximo o sea : $g = 10$

$\therefore \; e_{min} = 20$ RPTA. C

26.- *En un aula de clases:*

**** 40 alumnos tienen el libro de Aritmética, 30 el de Física y 30 el de Geometría***
**** A 12 de ellos les falta sólo el libro de Física, a 8 solo el de Geometría y a 6 solo el de Aritmética***
**** 5 tienen los 3 libros y 6 no tienen estos libros***
¿Cuántos alumnos hay en el aula?

A) 48 ***B) 60*** ***C) 65*** ***D) 70*** ***E) 90***

<u>Resolución</u>.-

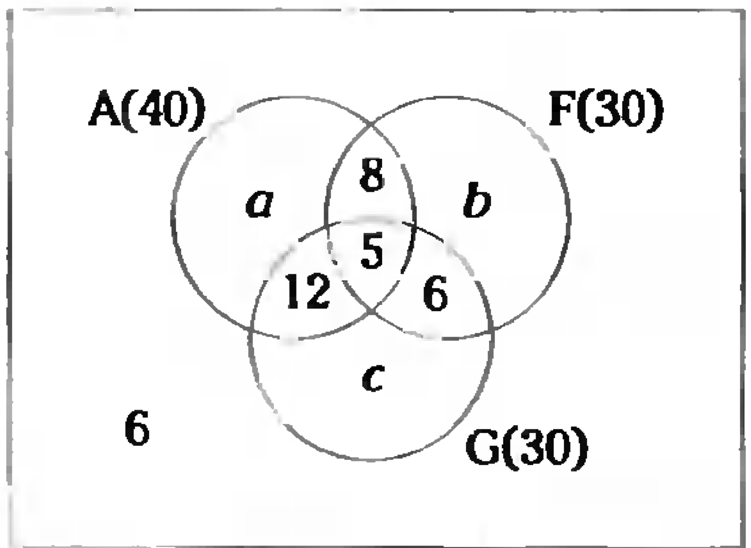
Considerando los siguientes conjuntos :

A $\rightarrow$ Alumnos que tienen el libro de Aritmética

F $\rightarrow$ Alumnos que tienen el libro de Física

G $\rightarrow$ Alumnos que tienen el libro de Geometría

Y, colocando los datos en un diagrama de Venn - Euler :



* $a + 8 + 12 + 5 = 40 \rightarrow a = 15$

* $b + 8 + 6 + 5 = 30 \rightarrow b = 11$

* $c + 12 + 6 + 5 = 30 \rightarrow c = 7$

Luego, el total de alumnos será :

$\therefore$ $15 + 8 + 11 + 12 + 5 + 6 + 7 + 6 = 70$ RPTA. D

27.- De un grupo de 41 estudiantes de idiomas que hablan inglés, francés o alemán, son sometidos a un examen de verificación, en el cual se determinó que:

**** 22 hablan inglés y 10 solamente inglés***

**** 23 hablan francés y 8 solamente francés***

**** 19 hablan alemán y 5 solamente alemán***

¿Cuántos hablan inglés, francés y alemán?

A) 6 B) 9 C) 4 D) 5 E) 2

<u>Resolución</u>.-

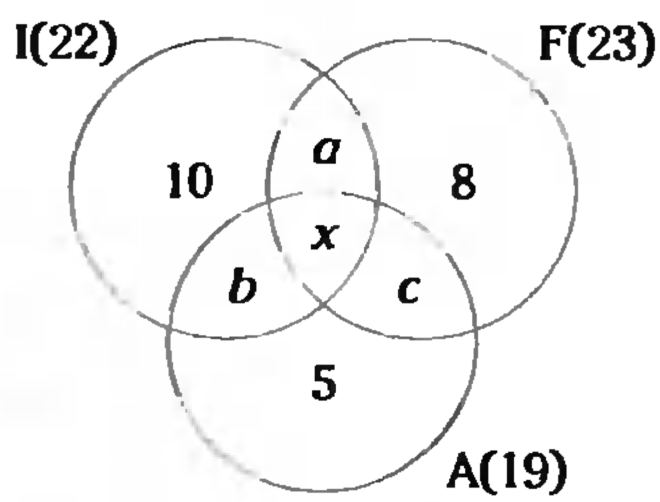
Considerando los conjuntos :

I : Estudiantes que hablan inglés

F : Estudiantes que hablan francés

A : Estudiantes que hablan alemán

Colocando los datos en un diagrama de Venn - Euler :



De donde :

* $10 + a + b + x = 22 \rightarrow a + b + x = 12$ ... (I)

* $8 + a + c + x = 23 \rightarrow a + c + x = 15$ ... (II)

* $5 + b + c + x = 19 \rightarrow b + c + x = 14$ ... (III)

(I) + (II) + (III) : $2(a + b + c) + 3x = 41$ ... (IV)

Además : $10 + a + 8 + b + x + c + 5 = 41 \rightarrow a + b + c + x = 18$ ... (V)

(IV) - 2x (V) : $\therefore$ $\boxed{x = 5}$ RPTA. D

28.- De un total de 99 personas, 5 hablan inglés y español únicamente, 7 español y alemán únicamente y 8 inglés y alemán únicamente. Si los números de personas que hablan alemán, español e inglés son el doble, el triple y el cuádruple del número de personas que hablan los 3 idiomas respectivamente.
¿Cuántas personas hablan español?

A) 46 ***B) 36*** ***C) 31*** ***D) 41*** ***E) 51***

Resolución.-

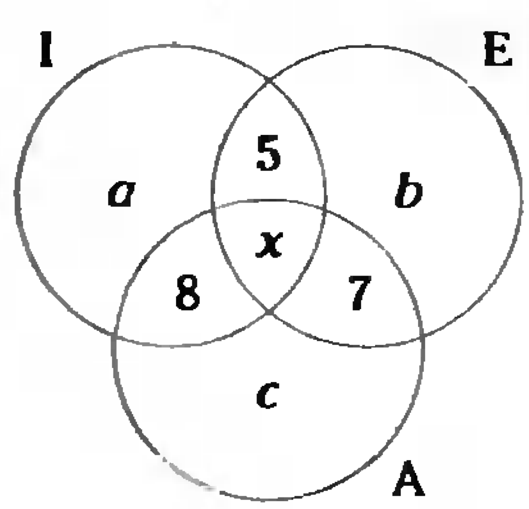
Sean los conjuntos :

I : Personas que hablan inglés

E : Personas que hablan español

A : Personas que hablan alemán

Entonces, en un diagrama de Venn - Euler se tendrá :



De donde :

* $c + x + 8 + 7 = 2x \rightarrow c = x - 15$ ... (I)
* $b + x + 5 + 7 = 3x \rightarrow b = 2x - 12$ ... (II)
* $a + x + 5 + 8 = 4x \rightarrow a = 3x - 13$ ... (III)

(I) + (II) + (III) : $a + b + c = 6x - 40$ ... (IV)

Además : $a + 5 + b + 8 + x + 7 + c = 99$

$$\rightarrow \quad a + b + c = 79 - x \quad ... (V)$$

Igualando (IV) y (V) : $6x - 40 = 79 - x \rightarrow x = 17$

En (II) : $b = 2(17) - 12 \rightarrow b = 22$

$$\therefore \quad n(E) = 5 + b + x + 7 = 51 \qquad \text{RPTA. E}$$

29.- De un total de 100 alumnos que postularon a la U.N.I., 40 aprobaron Aritmética y Física; 39 Química y Geometría; mientras que 48 aprobaron Algebra y Trigonometría; 10 aprobaron los 6 cursos; 21 no aprobó curso alguno; 9 aprobaron Aritmética, Geometría, Física y Química solamente; 19 no aprobaron Física, ni Geometría, ni Química, ni Aritmética pero si los otros dos cursos. Halle el número de alumnos que aprobaron solo dos cursos.

A) 37 B) 41 C) 36 D) 53 E) 29

<u>Resolución</u>.-

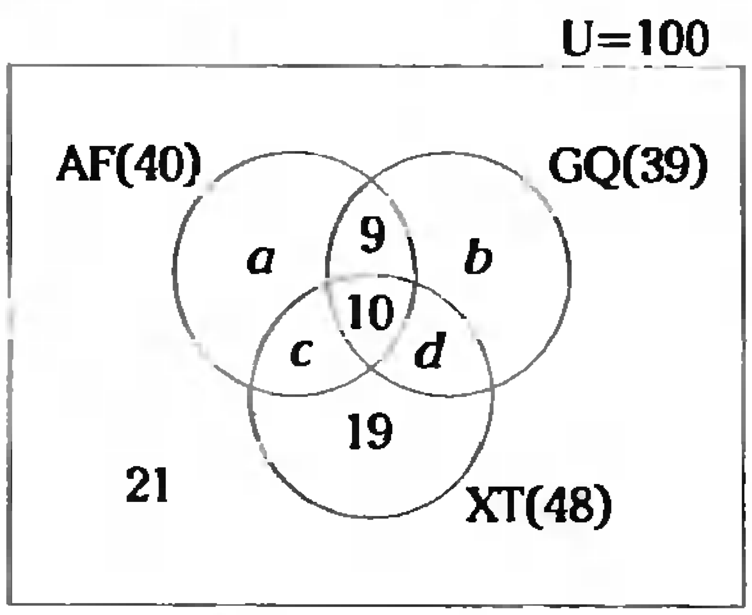
Consideraremos los siguientes conjuntos :

AF → Alumnos que aprobaron Aritmética y Física

GQ → Alumnos que aprobaron Geometría y Química

XT → Alumnos que aprobaron Algebra y Trigonometría

Colocando los datos del problema en el siguiente diagrama de Venn - Euler :



Se observa que:

$* \; a + c + 10 + 9 = 40 \rightarrow a + c = 21 \quad ... (\alpha)$

$* \; b + d + 9 + 10 = 39 \rightarrow b + d = 20 \quad ... (\beta)$

$* \; c + d + 10 + 19 = 48 \rightarrow c + d = 19 \quad ... (\gamma)$

$$(\alpha) + (\beta) : a + b + \underbrace{c + d} = 41$$

$$\text{De } (\gamma) \quad : \quad a + b + 19 = 41$$

$$\rightarrow a + b = 22$$

Por lo tanto, los que aprobaron solo 2 cursos son:

$$\therefore \quad a + b + 19 = 22 + 19 = 41 \qquad \text{RPTA. B}$$

30.- En un conjunto de 132 personas, se sabe que el número de los que saben Word, Excel y Access es igual a:

**** 1/6 de los que saben solo Word***

**** 1/5 de los que saben solo Excel***

**** 1/4 de los que sabe solo Access***

**** 1/2 de los que saben Word y Excel***

**** 1/3 de los que saben Word y Access***

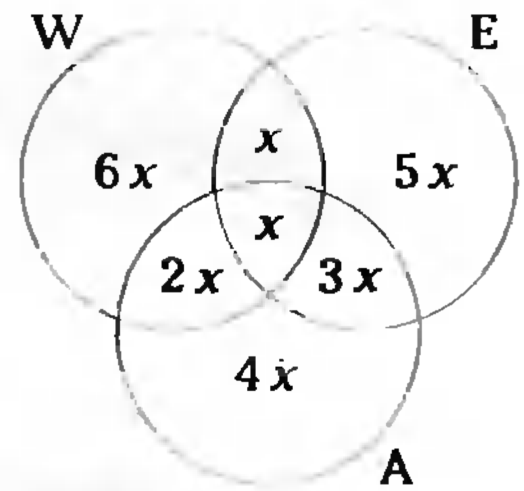
**** 1/4 de los que saben Excel y Access***

¿Cuántos saben Word o Excel?

A) 91 ***B) 84*** ***C) 72*** ***D) 90*** ***E) 108***

<u>Resolución</u>.-

Sean : W : personas que saben Word
E : personas que saben Excel
A : personas que saben Access



Llamamos "x" al número de personas que saben Word, Excel y Access y colocando los datos del problema en un diagrama de Venn - Euler :

Luego : $6x + x + 5x + 2x + x + 3x + 4x = 132 \rightarrow x = 6$

Por lo tanto, saben Word o Excel :

$\therefore$ $6x + x + 5x + 2x + x + 3x = 18x = 18\,(6) = 108$ RPTA. E

31.- En un aula de clase, a 49 alumnos les gusta la Aritmética, a 47 el Algebra y a 53 la Geometría. Se sabe además que el total de alumnos es 100 y de ellos a 8 les gusta los 3 cursos y a 8 ninguno de los tres. Determinar:

(I) ¿A cuántos les gusta solamente 2 de estos cursos?

(II) ¿A cuántos les gusta solamente 1 de estos cursos?

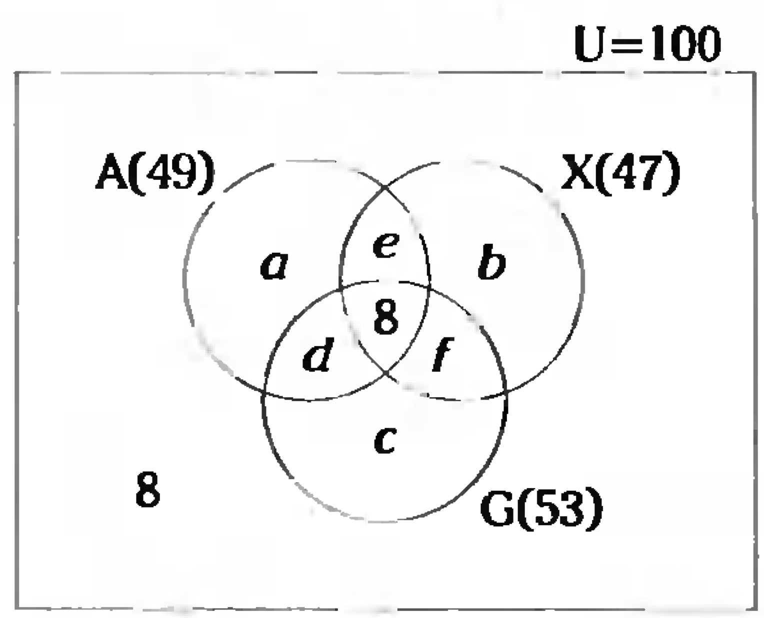
A) 46 ; 39 ***B) 24 ; 31*** ***C) 51 ; 63*** ***D) 41 ; 43*** ***E) 36 ; 39***

<u>Resolución</u>.-

Considerando los conjuntos:

A : Alumnos que gustan del curso de Aritmética
X : Alumnos que gustan del curso de Algebra
G : Alumnos que gustan del curso de Geometría

Y el siguiente diagrama de Venn - Euler :



En el diagrama :

$$\left.\begin{aligned} *a+e+d+8&=49\\ *b+e+f+8&=47\\ *c+d+f+8&=53 \end{aligned}\right\}$$

Sumando : $(a + b + c) + 2\,(d + e + f) + 24 = 149$

$\rightarrow$ $a + b + c + 2\,(d + e + f) = 125$ ... (α)

Además : $a + b + c + d + e + f + 8 + 8 = 100$

$\rightarrow$ $(a + b + c) + (d + e + f) = 84$ ... (β)

$(\alpha) - (\beta)$: $d + e + f = 41$

En (β) : $a + b + c = 43$ $\therefore$ 41 ; 43 RPTA. D

32.- Para una competencia deportiva de 150 deportistas se realizaron 3 pruebas (para dar la tercera era necesario aprobar la primera o la segunda); sabiendo que el número de hombres que aprobó las 3 pruebas es igual al número de hombres que no aprobó prueba alguna e igual al número de hombres que aprobó las dos primeras pero no la tercera. En el caso de las mujeres, las que aprobaron las 3 pruebas son la mitad de las que aprobaron la primera y la segunda y este último número igual al de las que no aprobaron examen alguno.

El número de personas que aprobó la primera o la segunda pero no la tercera es igual al número de personas que aprobó las 3 pruebas.

Los que aprobaron la primera y tercera solamente es el triple del número de hombres que aprobó las 3 pruebas y el número de los que aprobaron la segunda y tercera solamente el igual al número de mujeres que no aprobó prueba alguna.

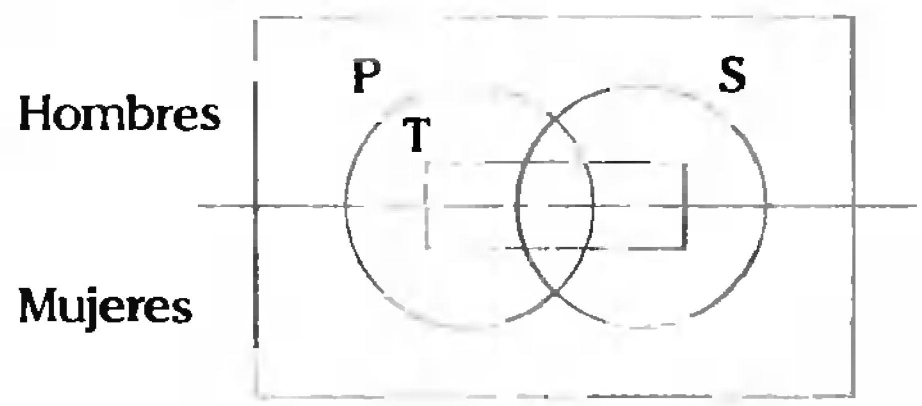
¿Cuántos aprobaron las 2 primeras pruebas?

A) 50 B) 40 C) 35 D) 60 E) 70

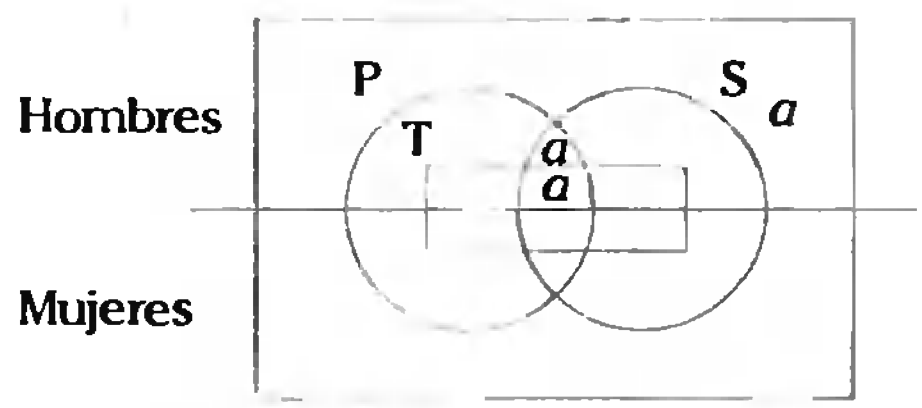
Resolución.-

Sean : P : Conjunto de los que aprobaron la primera prueba
S : Conjunto de los que aprobaron la segunda prueba
T : Conjunto de los que aprobaron la tercera prueba

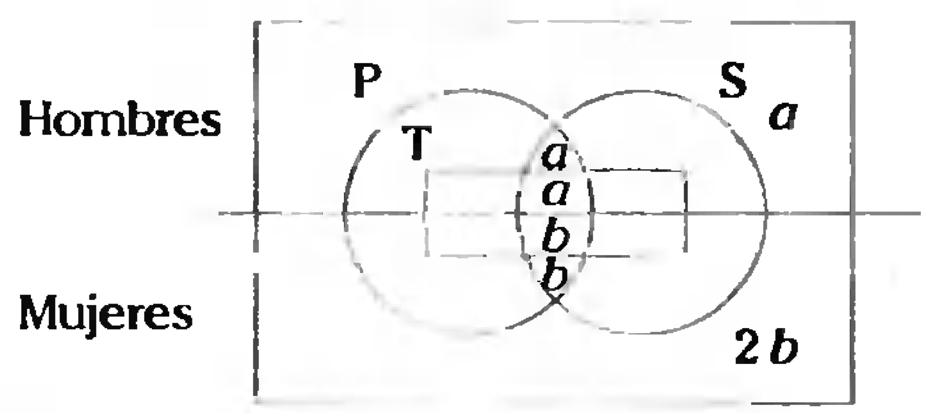
Para dar la tercera prueba era necesario aprobar la primera o la segunda luego realizado una combinación entre los diagramas de Carroll y Venn - Euler, se tiene :



El número de hombres que aprobó las 3 pruebas es igual al número de hombres que no aprobó prueba alguna e igual al número de hombres que aprobó las dos primeras pero no la tercera.



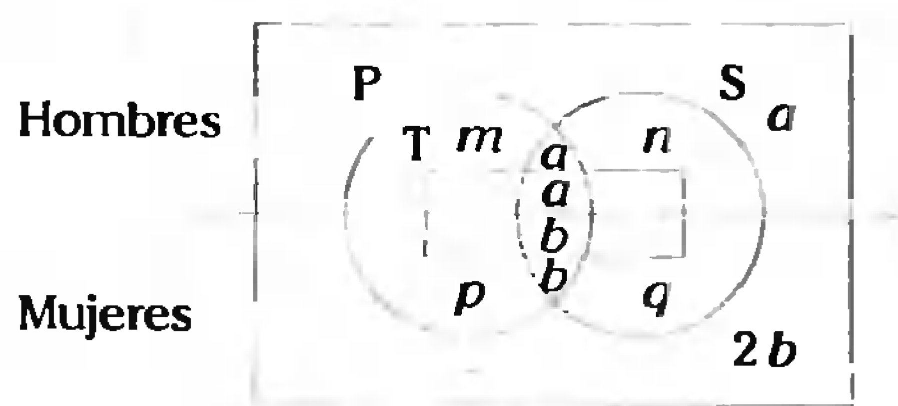
En el caso de las mujeres, las que aprobaron las 3 pruebas son la mitad de las que aprobaron la primera y la segunda y este último número igual al de las que no aprobaron prueba alguna.



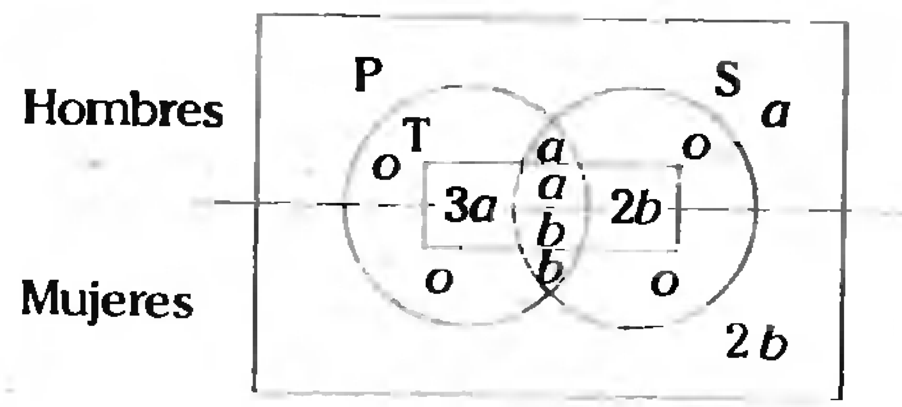
El número de personas que aprobó la primera o la segunda pero no la tercera es igual al número de personas que aprobó las 3 pruebas :

$$m+a+n+p+b+q=a+b \rightarrow m+n+p+q=0$$

$$\rightarrow m=n=p=q=0$$



Los que aprobaron la primera y la tercera solamente es el triple del número de hombres que aprobó las 3 pruebas y el número de los que aprobaron la segunda y tercera solamente es igual al número de mujeres que no aprobaron examen alguno.



Luego, como el total de participantes es 150 :

$$3a + a + a + b + b + 2b + a + 2b = 150 \rightarrow 6a + 6b = 150$$
$$\rightarrow \quad a + b = 25$$

Nos piden : ¿Cuántos aprobaron las dos primeras pruebas?

$\therefore$ $2\,(a + b) = 2\,(25) = 50$ RPTA. A

33.- En una encuesta a 100 viviendas de un pueblo joven se obtuvo que:

**** 60 casas tenían aparatos de TV a color***

**** 30 tenían equipo de sonido***

**** 20 tenían VHS***

**** 21 tenían TV a color y equipo de sonido***

**** 15 tenían TV a color y VHS***

**** 16 tenían equipo de sonido y VHS***

¿Cuántas casas, como máximo, no tenían estos aparatos?

A) 24 B) 32 C) 25 D) 31 E) 18

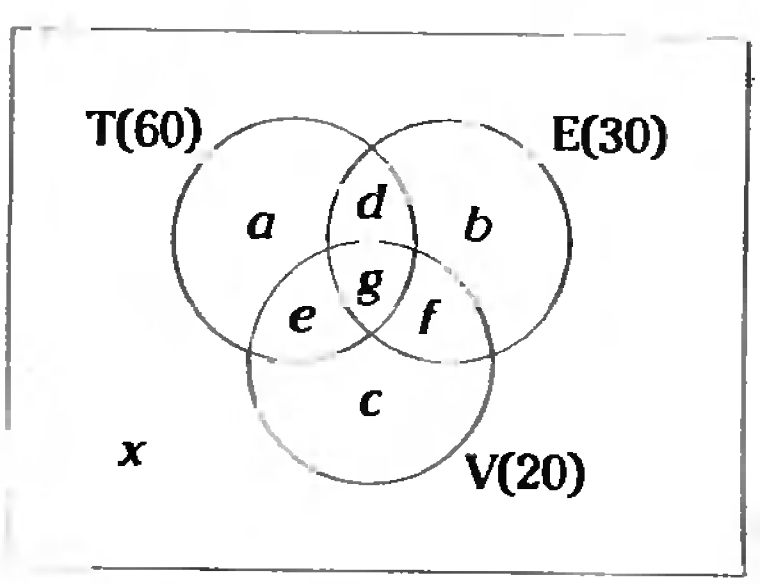
Resolución.-

Considerando los conjuntos:

T : Viviendas que tienen TV a color

E : Viviendas que tienen equipo de sonido

V : Viviendas que tienen VHS



De los datos :

* $a + d + e + g = 60$ ... (I)

* $b + d + f + g = 30$ ... (II)

* $c + e + f + g = 20$ ... (III)

* $d + g = 21 \rightarrow d = 21 - g$

* $e + g = 15 \rightarrow e = 15 - g$

* $f + g = 16 \rightarrow f = 16 - g$

En (I) : $a + (21 - g) + (15 - g) + g = 60 \rightarrow a = 24 + g$
En (II) : $b + (21 - g) + (16 - g) + g = 30 \rightarrow b = g - 7$
En (III) : $c + (15 - g) + (16 - g) + g = 20 \rightarrow c = g - 11$

Nótese, en las deducciones hechas, que : $11 \leq g \leq 15$

Además : $a + b + c + d + e + f + g + x = 100$

$(24 + g) + (g - 7) + (g - 11) + (21 - g) + (15 - g) + (16 - g) + g + x = 100 \Rightarrow x = 42 - g$

Para que "x" sea máximo, "g" debe ser mínimo : $x_{\text{máx}} = 42 - 11 = 31$ RPTA. D

34.- En el centro de cómputo de la U.N.I. se decide analizar que coincidencias se produjeron en el último examen de admisión, notándose que :

**** El número de personas que aprobó solo el primer examen es igual al número de personas que aprobó el segundo y tercer examen.***

**** El número de personas que aprobó solo el segundo examen es igual al número de personas que aprobó el primer y tercer examen.***

**** El número de personas que aprobó solo el tercer examen es igual al número de personas que aprobó el segundo y tercer examen.***

**** El número de personas que aprobó solo 2 exámenes es igual al triple de los que aprobaron los 3 exámenes.***

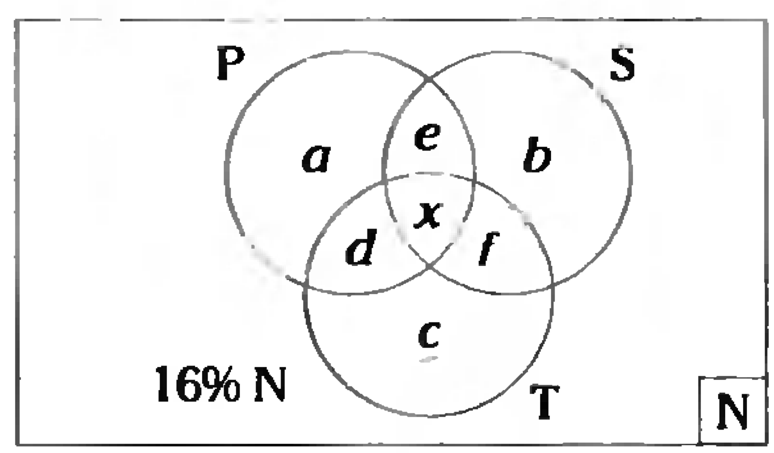
Si para ingresar basta con aprobar 2 de los exámenes. ¿Qué porcentaje del total de postulantes fueron admitidos si el 16% de los postulantes no aprobaron examen alguno?

A) 24% ***B) 25,2%*** ***C) 33,6%*** ***D) 43,5%*** ***E) 48%***

<u>Resolución</u>.-

Sea "N" el número de postulantes y los conjuntos :

P → aprobaron el primer examen
S → aprobaron el segundo examen
T → aprobaron el tercer examen



Nos piden : $d + e + f + x$

De los datos :

$$\left.\begin{array}{l} * \ a = f + x \\ * \ b = d + x \\ * \ c = e + x \end{array}\right\} \text{ Sumando : } a + b + c = d + e + f + 3x \quad \text{... (I)}$$

$* \ d + e + f = 3x$ .... (II)

(II) en (I) : $a + b + c = 3x + 3x \rightarrow a + b + c = 6x$

Además : $\underbrace{a+b+c} + \underbrace{d+e+f} + x + 16\% \text{ N} = \text{N}$

Reemplazando : $6x + 3x + x + 16\% \text{ N} = \text{N} \rightarrow x = 8{,}4\% \text{ N}$

Finalmente : $d + e + f + x = 3x + x = 4x = 4(8{,}4\% \text{ N}) = 33{,}6\% \text{ N}$ RPTA. C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Si $n(A) \leq 1$ y B = C. Calcular el valor de :

$$m + n + p$$

$A = \{2p \,;\, m\}$

$B = \{n + 1 \,;\, 2m - 3\}$

$C = \{n + 5 \,;\, 2p - 1\}$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

2.- En una academia de computación se observa que todos los que estudian Pascal, estudian Cobol; 15 estudian Pascal, Cobol y Basic; 60 estudian Basic; 80 estudian Cobol. La cantidad de los que estudian Cobol y Basic pero no Pascal es el doble de los que estudian solo Basic y a su vez es el triple de los que estudian solo Cobol. ¿Cuántos estudian Pascal pero no Basic?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 45

3.- En un congreso internacional de Medicina se debatió el problema de la Eutanasia, planteándose una moción :

* 115 Europeos votaron a favor
* 75 cardiólogos votaron en contra
* 60 Europeos votaron en contra
* 80 cardiólogos votaron a favor

Si el número de cardiólogos europeos excede en 30 al número de americanos de otras especialidades y no hubo abstenciones. ¿Cuántos médicos participaron en el congreso?

A) 300 B) 200 C) 350 D) 310 E) 230

4.- En un salón hay 29 alumnos que dan los exámenes de Aritmética, Algebra y Geometría, de los cuales solo 2 aprueban los cursos y se observa que:

* La novena parte de los que aprobaron Aritmética o Algebra, aprobaron Aritmética y Algebra.
* La onceava parte de los que aprobaron Aritmética o Geometría, aprobaron Aritmética y Geometría.
* La séptima parte de los que aprobaron Algebra o Geometría, aprobaron Algebra y Geometría.

¿Cuántos aprobaron solamente Aritmética, si los 29 alumnos aprobaron al menos un curso?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

5.- Un agente de seguridad busca a un delincuente entre la multitud reunida, el cual según informes, viste chompa azul pantalón negro, con ojos verdes y acento extranjero. Hay 20 personas que tienen chompa azul, 15 con pantalón negro, 18 de ojos verdes, además 7 con chompa azul y pantalón negro, pero no tienen ojos verdes; 4 con chompa azul y ojos verdes, pero no tienen pantalón negro; 6 con pantalón negro y ojos verdes, pero sin chompa azul. Si las personas con una sola característica suman 16. ¿Cuántos interrogatorios tiene que hacer el agente de seguridad para hallar al delincuente?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6.- Una empresa hace un estudio de mercado con miras a que tipo de leche producir : embotellada, enlatada o embolsada. En una encuesta sobre 1 600 personas, los resultados son : 140 compran leche en botella, 360 enlatada y 500 embolsada : 90 compran leche en botella y en lata; 62 compran leche en botella y en bolsa; 30 compran leche en botella y en bolsa pero no en lata. Si 560 compran leche enlatada o en bolsa pero no en botella. ¿Cuántos compran leche en lata y en bolsa pero no en botella?

A) 140 B) 144 C) 148 D) 150 E) 160

7.- En una reunión de 10 personas, unos sordos, otros mudos, otros sordomudos y otros normales, de los cuales se forman grupos según sus características. Al comenzar Juan le dice a José : "Si vienes a mi grupo seríamos tantos como los que quedan en el tuyo". José no le entiende ni le puede contestar. Entonces Juan le dice a Luis : "Si voy a tu grupo, seríamos 3 y en el mío quedaría solo uno". Luis le contesta : "No te entiendo". ¿Cuántos son mudos y no sordos?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

8.- A un Congreso Internacional de Dermatología asistieron médicos británicos, alemanes y franceses. Hay el doble de franceses que alemanes y estos son a su vez el doble de los británicos. Se proponen dos técnicas diferentes para tratar lo mejor posible cierta enfermedad, de las cuales cada médico presente es invitado a elegir. La técnica del profesor Smith es apoyada, entre otros, por todos los británicos. Para la técnica del profesor Simon hay tantos alemanes favorables como franceses hostiles. ¿En qué relación están los votos del Doctor Smith y los del Doctor Simon?

A) 1/3 B) 2/3 C) 3/4 D) 1/4 E) 1/2

9.- 300 alumnos rindieron exámenes de Aritmética, Algebra o Geometría con el siguiente resultado:
10% desaprobaron los 3 cursos; de los que aprobaron al menos uno de los 3 exámenes, el 60% no desaprobaron al menor 2 exámenes. Con respecto a los que aprobaron exactamente un examen. ¿Qué tanto por ciento representan los que aprobaron los 3 exámenes si estos son el 20% de los que aprobaron exactamente 2 exámenes?

A) 20% B) 25% C) 35% D) 30% E) 15%

10.- De un grupo de 70 mujeres:
* 24 tienen ojos azules, pero no tienen 15 *años*.
* 8 no tienen ojos negros ni azules y son mayores de 18 *años*.
* De las que no son mayores de 18 *años*, 14 no tienen ojos negros ni azules.

¿Cuántas quinceañeras tienen ojos azules, si ellas son la tercera parte de todas las que tienen ojos negros?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

11.- Simplificar : $[(A \cap C') - B]' \cap [B \cup (E - F)]$ sabiendo que:

* $E \subset F$

* $C = (A - B)' \cap (B - A)$

A) $A \cap B$ B) A C) B' D) B E) A'

12.- Si $D \subset (A \Delta B)$ simplificar :

$$(A \cup B) - [(B - D) \cup (A - D) \cup (A \cap B)]$$

A) $A \cup B$ B) B C) D D) A - B E) A

13.- Hallar $C_D[(B \Delta C) - (A \Delta D)]$ sabiendo que:

$A = \{x \in D / x \in B \wedge x \notin C\}$

$B = \{x \in C / x \notin D \vee x \in A\}$

$C = \{x \in B / x \notin A \vee x \notin D\}$

$D = \{x \in C / x \in B \wedge x \in A\}$

<u>Nota</u> : A - B también se llama complemento de B relativo a A : C (B)

A) $B \cup C$ B) B C) C D) ϕ E) B'

14.- Sea $U = \{x / x \in \mathbb{N}\}$ definimos el operador matemático $\boxed{}$ donde $\boxed{x}$ indica el máximo múltiplo de 3 menor que x. Tenemos:

$$A = \left\{ \boxed{\frac{x^2+x+1}{3}} / x \in \mathbb{N} \wedge 2 \le x < 6 \right\}$$

$$B = \{ \boxed{x+2} / x \in \mathbb{N} \wedge x < 9 \}$$

¿Cuántos elementos tiene $(A \cap B)$?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

15.- Dados 3 conjuntos A ; B y C donde los 2 últimos son disjuntos, se establecen las operaciones que se indican a continuación:

$A \cup B = \{-1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 6\}$
$A \cup C = \{-1 ; 0 ; 2 ; 1 ; 3 ; 7 ; 8\}$
$B' = \{-2 ; -1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 8 ; 9\}$
$(A \cup B \cup C)' = \{-2 ; 5 ; 9\}$
$A \cap C = \{2\}$

¿Cuántos elementos tiene $(A \cup B) - (B \cup C)$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16.- Sea : $A = \left\{ \overline{ab}_n \,/\, a \leq b \leq 15 \ \wedge \ n = 20 \right\}$
¿Cuantos elementos tiene A?

A) 100 B) 110 C) 115 D) 120 E) 150

17.- Se sabe que los siguientes operadores matemáticos indican:

* $^{a}b| = a \,.\, b + b$
* $\binom{a}{b} = a \,.\, b - a$

Teniendo:

$E = \{\, ^{a}b| \,/\, a \,;\, b \in \boldsymbol{/} \ \wedge \ 2 \leq a \,;\, b < 5 \}$

$F = \{\, \binom{a}{b} \,/\, a \,;\, b \in \boldsymbol{/} \ \wedge \ 2 \leq a \,;\, b < 5 \}$

¿Cuantos elementos tiene $E \,\Delta\, F$?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

18.- Para 3 conjuntos A ; B y C tenemos que :

* $n(A) = 20 \quad n(B) = 40 \quad n(C) = 29$
* $n(B \cap C) = 12 \quad n(A \cap C) = 10 \quad n(A \cap B) = 8$
* $n\,[(A \cup B \cup C)'] = n\,(A \cap B \cap C)$
* $n\,[(A \cup B \cup C)] = 61$

Hallar : $n\,[(C \cup B) - A]$

A) 48 B) 50 C) 41 D) 52 E) 56

19.- En una asamblea comunal participaron 400 vecinos; el número de limeños gobiernistas era igual a:

* 1/4 del número de los que no son limeños ni gobiernistas.
* 1/10 del número de limeños
* 1/3 del número de gobiernistas

¿Cuántos limeños no son gobiernistas?

A) 200 B) 175 C) 225 D) 215 E) 235

20.- En una población el 45% de los habitantes leen las revistas A y/o B pero no las dos a la vez, el 50% no lee la revista A, el 75% no lee la revista B y 4 800 personas leen las revistas A y B. ¿Cuántos habitantes hay en la población?

A) 32 000 B) 40 000 C) 42 000
D) 45 000 E) 48 000

21.- En una población se determinó que el 30% de los habitantes usan anteojos y el 50% de los habitantes fuman. Si la suma de los que solo fuman y de los que solo usan anteojos es el 44% de las población y que 17 100 habitantes no fuman ni usan anteojos. ¿Cuál es el número de habitantes de dicha población?

A) 35 000 B) 36 000 C) 40 000
D) 45 000 E) 48 000

22.- En una votación participan 600 diputados: 300 de ellos gubernamentales representantes de los distritos del sur, votaron a favor de la proposición; 25 diputados de la oposición representantes de los distritos norteños votaron en contra. Entre los diputados que tomaron parte en la votación los gubernamentales superan en 98 a los de oposición. De los votantes, 135 representan a los distritos norteños. 18 diputados gubernamentales votaron en contra de la proposición; 102 diputados norteños votaron por ella. La votación fue aprobada por 310 votos de margen. ¿Cuántos sureños votaron en contra de la proposición?

A) 98 B) 108 C) 112 D) 117 E) 121

23.- En la maternidad se observó que de las 47 personas presentes : 29 eran hombres, de los cuales 19 no eran mayores de edad, si 11 personas nacieron hoy, y las mujeres mayores de edad son tantas como las menores de edad, de estas las que no nacieron hoy representan el 20% del número de hombres mayores de edad. ¿Cuántos hombres menores de edad no nacieron hoy?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

24.- Se hizo una encuesta entre 480 personas sobre el control de natalidad, observándose :

* La cantidad de solteros encuestados es a la de casados como 3 es a 5.
* La cantidad de quienes dieron su opinión a favor es a la de los que opinaron en contra como 7 es a 5.

* Entre los que opinaron a favor : la cantidad de varones casados es igual a la de mujeres solteras.

* La cantidad de mujeres casadas que opinaron a favor es la tercera parte de los varones casados que opinaron así.

* Entre las mujeres casadas las que opinaron a favor son la mitad de las que opinaron en contra.

* Entre los solteros que opinaron en contra la cantidad de mujeres excede a los varones en 12.

* 42 varones solteros opinaron a favor.

¿Cuántas mujeres solteras están en contra?

A) 20 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

25.- De un grupo de 80 estudiantes:

* Todos los varones tienen más de 22 *años*
* 49 mujeres hay en el grupo y 25 son casados
* 16 estudiantes casados tienen más de 22 *años*
* 10 mujeres casadas tienen más de 22 *años*
* 60 estudiantes tienen más de 22 *años*

Sin considerar a las mujeres mayores de 22 *años*, no se casaron "x" estudiantes. Hallar "x" :

A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

26.- En un seminario participan Agrónomos, Abogados y Economistas. De estas personalidades se sabe que:

* 20 tienen 2 profesiones, 12 de estos son mujeres.

* No hay Abogados que son también Agrónomos.

* Hay igual número de Agrónomos - Economistas, Abogados - Economistas, así como solo Abogados en el caso de mujeres como de hombres.

* Hay tantos Economistas hombres como Agrónomos mujeres.

* Hay tantos Economistas mujeres como agrónomos hombres.

* Hay 30 economistas.

¿Cuántos hombres existen con una sola profesión?

A) 18 B) 20 C) 24 D) 25 E) 28

27.- En un aula de 95 alumnos, se tomó 3 exámenes A , X y G. En los resultados se observó que todos aprobaron por lo menos un examen, además:

* 24 mujeres aprobaron A. 16 de estas aprobaron X.

* 25 mujeres aprobaron un solo examen. 7 de estas aprobaron A.

* De los que aprobaron 2 exámenes únicamente : en el grupo que no aprobó A los hombres eran 4 más que las mujeres, mientras que en los otros 2 grupos hubo empate entre ellos y ellas, además 5 mujeres no aprobaron A.

* En el grupo que aprobó los 3 exámenes, ellas eran 2 más que ellos.

¿Cuántos hombres aprobaron exactamente un examen?

A) 24 B) 21 C) 18 D) 15 E) 12

28.- De un grupo de 64 damas de una oficina, se observó lo siguiente:

* 25 son simpáticas.
* 36 son blancas.
* 12 son solo blancas.
* 8 son blancas, simpáticas con ojos azules.
* 18 no tienen estas características.

Además se sabe que todas las damas de ojos azules son blancas. ¿Cuántas damas son blancas y simpáticas, que no tienen los ojos azules?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

29.- Se sabe que de un total de 660 personas que toman Whisky; Gin o Vodka; 210 no toman Whisky, 180 no toman Gin y 190 no toman Vodka; además los que no toman solo uno de estos tragos es la mitad de los que toman Vodka. ¿Cuántos toman Whisky, Vodka y Gin?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

30.- De un grupo de músicos que tocan guitarra, mandolina o charango se sabe que la séptima parte tocan solo guitarra, la sexta parte tocan solo mandolina, la diferencia entre los que tocan solo guitarra y los que tocan solo mandolina tocan solo charango. Si además 84 tocan por lo menos 2 de estos instrumentos. ¿Cuántos tocan solo mandolina?

A) 18 B) 21 C) 24 D) 27 E) 30

31.- En el populoso distrito de Comas de 20 000 habitantes se recogió los siguientes datos :

El 80% toma café, el 42,5% toma té y el 10% toma leche; entre los que toman café, el 35% también toma té y el 8% toma leche; el 85% de los que toman leche también toman té y solo el 5% de la población toma leche, café y té. ¿Cuántos habitantes no toman leche, café ni té?

A) 1 050 B) 1 080 C) 1 120
D) 1 180 E) 1 210

32.- De 500 postulantes que se presentaron a la UNI y/o a La Católica, 300 lo hicieron a La Católica, igual número a la UNI, ingresando la mitad del número total de postulantes; los no ingresantes se presentaron a San Martín: de estos, 90 no se presentaron a la UNI y 130 no se presentaron a La Católica. ¿Cuántos postulantes ingresaron a la UNI y a La Católica?

A) 55 B) 60 C) 65 D) 70 E) 75

33.- "Blanquita" comenta : el 70% de los profesores son simpáticos, el 70% de los profesores son excelentes y además el 70% de los profesores son jóvenes. ¿Cuál es, como mínimo, el porcentaje de profesores excelentes, simpáticos y jóvenes?

A) 8% B) 10% C) 12% D) 15% E) 16%

34.- Al revelarse los resultados de una encuesta a cierto número de personas, se supo que la tercera parte tomaban solamente; la sexta parte solo fumaban; 36 fuman, toman y van a discotecas. Además la cantidad de personas que van a discotecas pero no toman ni fuman es igual a la semidiferencia entre quienes solo toman y solo fuman. También, el número de personas que tienen exactamente dos de estas costumbres es el doble de los que solo van a discotecas. Averiguar cuantos solo toman o solo fuman (todos fuman, toman o van a discotecas).

A) 36 B) 48 C) 60 D) 72 E) 84

35.- De un conjunto de deportistas se observa que 45 practican basquet y 48 voley. La cantidad de hombres que practican solo basquet es el triple de la cantidad de mujeres que practican basquet y voley; esta última es la mitad de la cantidad de hombres que únicamente practican voley. La cantidad de mujeres que practican solo voley excede en 2 a la cantidad de hombres que practican basquet y voley, mientras esta cantidad es el doble de la cantidad de mujeres que solo practican basquet. ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de hombres y mujeres?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

36.- Para el ingreso a la U.N.I. en el año 1 996 se inscribieron 8 440 estudiantes. De los que aprobaron alguno de los 3 exámenes asuma los siguientes datos:

* 40% de aprobados en solo 2 exámenes
* 30% de aprobados en el primer examen
* 60% de aprobados en el segundo examen
* 60% de aprobados en el tercer examen

Además sabemos que el 10% no aprobó examen alguno con respecto a los estudiantes que aprobaron solo un examen ¿Cuántos estudiantes aprobaron los 3 exámenes, si estos representan el 11 1/9% de los que aprobaron al menos 2 exámenes?

A) 260 B) 350 C) 400
D) 480 E) 540

3 SISTEMAS DE NUMERACION

3.1 NOCIONES PRELIMINARES

3.1.A NUMERO

Idea o abstracción de una cantidad observada en la realidad concreta.

3.1.B NUMERAL

Símbolo empleado para representar un número. Es como un vehículo para comunicar ideas de números. Por ejemplo, algunos numerales para representar al número cinco son:

$$5 \quad ; \quad V \quad ; \quad 卌 \quad ; \quad \text{cinco} \quad ; \quad 2^2 + 1 \quad ; \quad 3^2 - 2^2 \quad ; \ldots\ldots , \text{etc.}$$

3.1.C ORDEN

Lugar o posición, contado de derecha a izquierda, que ocupan una cifra dentro de un numeral. Por ejemplo:

7 6 2 5 8

- 8 → 1^{er} orden u orden 0
- 5 → 2^{do} orden u orden 1
- 2 → 3^{er} orden u orden 2
- 6 → 4^{to} orden u orden 3
- 7 → 5^{to} orden u orden 4

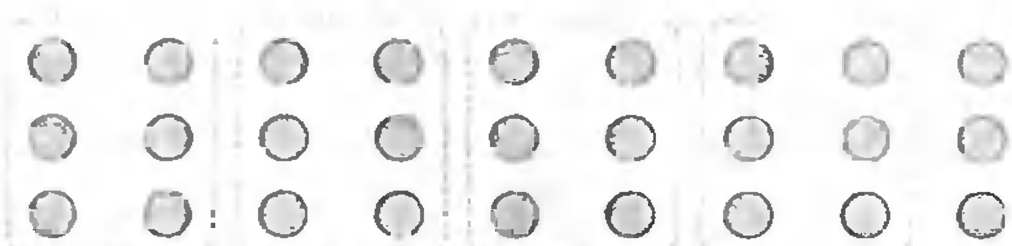
3.1.D SISTEMA DE NUMERACION

Conjunto de símbolos, reglas y nomenclaturas que rigen la expresión de los cardinales de un conjunto.

3.1.E BASE DE UN SISTEMA DE NUMERACION

Es un numeral referencial que indica como deben agruparse las cantidades para formar las órdenes de un numeral en cierto sistema de numeración.

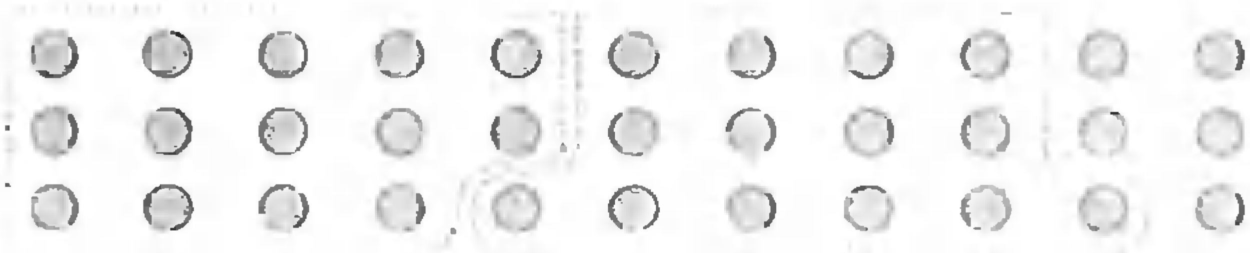
Ejemplo 1 : *Si se tuviera 27 bolitas; para representar esta cantidad en el sistema de base 6, se tendría que agrupar de 6 en 6, es decir :*



De donde se tiene 4 grupos de 6 y sobran 3, lo cual se expresa así :

$$43_6$$

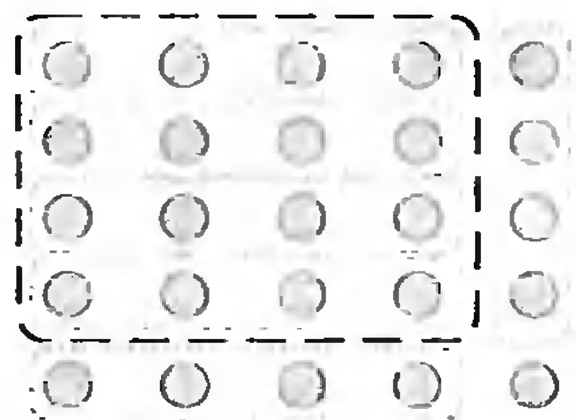
Ejemplo 2 : *Para representar 33 bolitas en el sistema de base 14 se agrupa de 14 en 14, así:*



Observándose que tenemos 2 grupos de 14 y sobran 5, que se expresa :

$$25_{11}$$

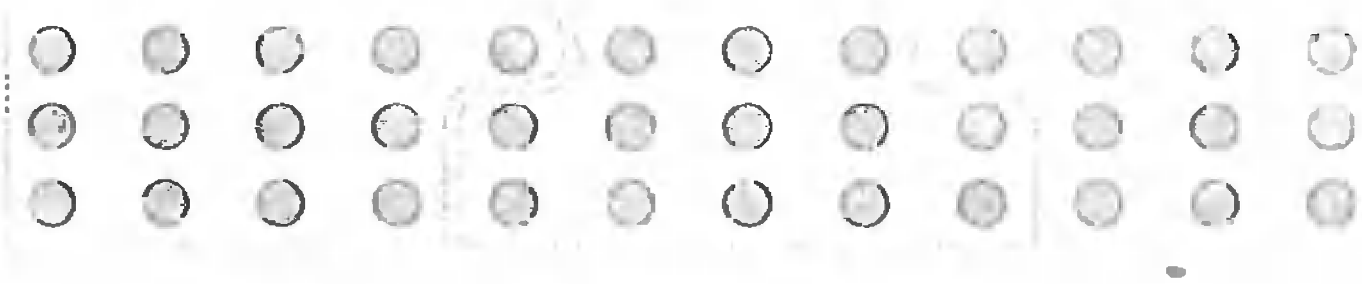
Ejemplo 3 : *Si se desea expresar 25 en el sistema de base 4, debe agruparse de 4 en 4 en forma sucesiva, es decir :*



Tendremos entonces un grupo de 16 (4^2), 2 grupos de 4 y sobra 1, lo que se escribe :

$$121_4$$

Ejemplo 4 : *Para expresar 36 en el sistema de base 13 se agrupa de 13 en 13, así tenemos:*



Donde notamos que hay 2 grupos de 13 y sobran 10 que se representa por "α" y se escribe :

$$2\,\alpha_{13}$$

3.2 CONSIDERACIONES IMPORTANTES

1.- La base de un sistema de numeración debe ser un numeral entero y mayor que 1; en consecuencia, existen *infinitos* sistemas de numeración, siendo los principales :

Base	Sistema de Numeración	Cifras que utiliza
2	Binario o Dual	0 ; 1
3	Ternario	0 ; 1 ; 2
4	Cuaternario	0 ; 1 ; 2 ; 3
5	Quinario	0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4
6	Senario o Hexanario	0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5
7	Heptanario	0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6
8	Octanario	0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7
9	Nonario	0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8
10	Decimal o Décuplo	0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9
11	Undecimal	0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; α
12	Duodecimal	0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; α ; β

Otros sistemas utilizados son el hexadecimal (Base 16) y el vigesimal (Base 20).

Con frecuencia se estila utilizar las siguientes letras para denotar algunas cifras :

A	Alfa :	$\alpha <> 10$	Además :	$f <> 15$
B	Betta :	$\beta <> 11$		$g <> 16$
C	Gamma :	$\gamma <> 12$		$h <> 17$
D	Delta :	$\delta <> 13$		$i <> 18$
E	Epsilon :	$\varepsilon <> 14$		$\vdots \quad \vdots$

2.- La base de un sistema de numeración siempre es mayor que cualquiera de las cifras que se usan en dicho sistema; esto permite determinar si un numeral está bien o mal escrito, por ejemplo :

42652_5	Numeral mal escrito
3749_8	Numeral mal escrito
3142_7	Numeral bien escrito
51643_6	Numeral mal escrito
37194_{12}	Numeral bien escrito
$615\beta 3_{11}$	Numeral mal escrito

3.- En el sistema de numeración de base "n" se dispone de "n" cifras para representar a todos los numeros, como puede observarse en el cuadro anterior, la mínima cifra es cero y la máxima es *menor en* 1 que la base del sistema de numeración.

4.- Toda cifra que forma parte de un numeral tiene 2 tipos de valor:

a.- Valor Absoluto (VA) : Aquel que la cifra toma sólo por forma y figura, independiente de la base, ejemplo :

$N = 7496$	$N_8 = 3546_8$
VA (7) = 7	VA (3) = 3
VA (4) = 4	VA (5) = 5
VA (9) = 9	VA (4) = 4
VA (6) = 6	VA (6) = 6

b.- Valor Relativo (VR) : Aquel que depende del lugar que la cifra ocupa en el numeral; por ejemplo :

$N = 7\,496$	$N_8 = 3546_8$
$VR(7) = 7 \cdot 10^3$	$VR(3) = 3 \cdot 8^3$
$VR(4) = 4 \cdot 10^2$	$VR(5) = 5 \cdot 8^2$
$VR(9) = 9 \cdot 10^1$	$VR(4) = 4 \cdot 8^1$
$VR(6) = 6 \cdot 10^0$	$VR(6) = 6 \cdot 8^0$

En general :

$$\boxed{VR\ (\text{cifra}) = (\text{cifra}) \,.\, (\text{Base})^k}$$

Donde "k" expresa el número de cifras que quedan a la derecha de la cifra analizada.

3.2 A DESCOMPOSICION POLINOMICA DE UN NUMERAL

Consiste en expresar a un numeral mediante la suma de los valores relativos de cada una de sus cifras.

Ejemplos :

$$* \; 6573 = VR(6) + VR(5) + VR(7) + VR(3)$$
$$= 6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

$$* \; 3527_9 = VR(3) + VR(5) + VR(2) + VR(7)$$
$$= 3 \cdot 9^3 + 5 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9^1 + 7 \cdot 9^0$$

$$* \; 32402_5 = 3 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$$

$$* \; 162\alpha 3_{12} = 1 \cdot 12^4 + 6 \cdot 12^3 + 2 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12^1 + 3 \cdot 12^0$$

3.3 REPRESENTACION LITERAL DE NUMERALES

* Numeral de 3 cifras de base "n" :

$$\overline{abc}_n = a.n^2 + b.n + c$$

* Numeral de 4 cifras del sistema decimal :

$$\overline{mcdu} = m \,.\, 10^3 + c \,.\, 10^2 + d \,.\, 10 + u$$

* Numeral de 3 cifras del sistema heptanario :

$$\overline{mnp}_7 = m \,.\, 7^2 + n \,.\, 7 + p$$

* Numeral capicúa : Es aquel cuyas cifras equidistantes del centro *son iguales* ,y se les reconoce porque su escritura y lectura de izquierda a derecha es igual que de derecha a izquierda.

Capicúa de 2 cifras : $\overline{aa}$

Capicúa de 3 cifras : $\overline{aba}$

Capicúa de 4 cifras : $\overline{abba}$

Capicúa de 5 cifras : $\overline{abcba}$

Capicúa de 6 cifras : $\overline{abccba}$

3.4 CAMBIOS DE BASE

Caso I : DE BASE DIFERENTE DE 10 A BASE 10.

Ejemplo : *Convertir 2 6 7 4 del sistema de numeración octanario al sistema de numeración decimal.*

* Por el método de la descomposición canónica :

$$\begin{aligned} 2\,6\,7\,4_8 &= 2\cdot 8^3 + 6\cdot 8^2 + 7\cdot 8 + 4 \\ &= 2\,(512) + 6\,(64) + 7(8) + 4 \\ &= 1\,024 + 384 + 56 + 4 \\ &= 1\,468 \end{aligned}$$

$$\therefore\ 2\,6\,7\,4_8 = 1\,468$$

* Por el método de Ruffini :

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 6 & 7 & 4 \\ & & (+) & (+) & (+) \\ 8 & \downarrow & 16 & 176 & 1\,464 \\ \hline & 2 & 22 & 183 & \boxed{1\,468} \end{array}$$

$(\times 8)$ $(\times 8)$ $(\times 8)$

$$\therefore\ 2\,674_8 = 1\,468$$

Caso II : DE BASE 10 A BASE DIFERENTE DE 10.

Ejemplo : *Convertir 7 426 al sistema de numeración nonario.*

* Por el método de las Divisiones Sucesivas :

$$\begin{array}{lllll} 7426 & \underline{|\ 9} & & & \\ (1) & 925 & \underline{|\ 9} & & \\ & (7) & 102 & \underline{|\ 9} & \\ & & (3) & 11 & \underline{|\ 9} \\ & & & (2) & (1) \end{array}$$

$$\therefore\ 7\,426 = 1\,2\,3\,7\,1_9$$

Caso III : DE BASE DIFERENTE DE 10 A BASE DIFERENTE DE 10.

Ejemplo : *Convertir $3\,5\,2\,6_7$ al sistema de numeración undecimal.*

Paso I : Convertir $3\,5\,2\,6_7$ al sistema decimal (Caso I).

$$\begin{aligned} * \quad 3\,5\,2\,6_7 &= 3\cdot 7^3 + 5\cdot 7^2 + 2\cdot 7 + 6 \\ &= 3\,(343) + 5\,(49) + 2\,(7) + 6 \\ &= 1\,029 + 245 + 14 + 6 \\ &= 1\,294 \end{aligned}$$

Paso 2 : Convertir 1 294 al sistema de numeración undecimal (Caso II).

$$\begin{array}{r|l} 1294 & 11 \\ \cline{2-2} 7 & \begin{array}{r|l} 117 & 11 \\ \cline{2-2} 7 & 10 \end{array} \end{array}$$

$\therefore \quad 3526_7 = \alpha 77_{11} \qquad (\alpha : \text{Diez})$

3.5 CASOS ABREVIADOS DE CONVERSIÓN

Caso I : DE BASE "n" A BASE "n^k" ($k \in \mathbb{Z}^+$).

Se divide al numeral de base "n" en grupos de "k" cifras (comenzando por la derecha) y luego a cada grupo se le convierte directamente (mediante descomposición polinómica) al sistema de base "n^k".

Ejemplo : *Convertir 101001101011111100011_2 al sistema octanario.*

De base 2 a base 8 = 2^3 ($n = 2 \wedge k = 3$)

Por descomposición polinómica

$$\underbrace{1\,0}_{2}\;\underbrace{1\,0\,0}_{4}\;\underbrace{1\,1\,0}_{6}\;\underbrace{1\,0\,1}_{5}\;\underbrace{1\,1\,1}_{7}\;\underbrace{1\,0\,0}_{4}\;\underbrace{0\,1\,1}_{3}\,{}_2$$

$\therefore \quad 101001101011111100011_2 = 2465743_8$

Caso II : DE BASE "n^k" A BASE "n" ($n \in \mathbb{Z}^+$).

A cada una de las cifras del numeral de base "n^k" se les convierte directamente (mediante divisiones sucesivas) al sistema de base "n" teniendo cuidado de obtener grupos de "k" cifras por cada cifra convertida (los grupos incompletos se llenan con ceros a la izquierda)

Ejemplo : *Convertir 642673_8 al sistema de numeración binario.*

De base 2^3 a base 2 ($n = 2 \wedge k = 3$)

$$\underbrace{1\,1\,0}_{6}\;\underbrace{1\,0\,0}_{4}\;\underbrace{0\,1\,0}_{2}\;\underbrace{1\,1\,0}_{6}\;\underbrace{1\,1\,1}_{7}\;\underbrace{0\,1\,1}_{3}$$

$\therefore \quad 642673_8 = 110100010110111011_2$

3.6 PROPIEDADES DE LA NUMERACION

1.- Toda base es mayor que cualquiera de sus cifras.

BASE > CIFRA

* CIFRA MAYOR = BASE -1

2.- Si un número se expresa en dos sistemas de numeración, se cumple que :

«A mayor representación aparente le corresponde menor base y viceversa»

Por ejemplo, en la igualdad : $\overline{abcd}_x = \overline{mnp}_y$

Por tener un mayor numero de cifras, se prevee que : $\overline{abcd} > \overline{mnp}$

$\Rightarrow \quad x < y$

3.7 CONSIDERACIONES FINALES

1.- Para convertir al mayor numeral de "*k*" cifras de base *n* al sistema decimal se puede utilizar la siguiente relación :

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)(n-1)\ldots(n-1)}_n}_{\text{"}k\text{" cifras}} = n^k - 1$$

Ejemplos :
* $666_7 = 7^3 - 1 = 343 - 1 = 342$
* $5555_6 = 6^4 - 1 = 1\,296 - 1 = 1\,295$
* $33333_4 = 4^5 - 1 = 1\,024 - 1 = 1\,023$

2.- Para bases sucesivas, o bases de bases, puede usarse :

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\ddots_{\overline{1x}_n}}}} = n + (a + b + c + \ldots + x)$$

Ejemplos :
* $16_{19_{15_{14_{17_n}}}} = n + (6 + 9 + 5 + 4 + 7) = n + 31$

* $\left.15_{15_{15_{\ddots_{15_x}}}}\right\}\text{24 veces} = x + (\underbrace{5 + 5 + 5 + \ldots + 5}_{\text{24 sumandos}}) = x + 120$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Si los siguientes numerales están correctamente escritos:

$$\overline{n32q}_m \ ; \ \overline{p21}_n \ ; \ \overline{n3m}_6 \ ; \ 1\,211_p$$

Calcular el máximo valor de $(m + n + p + q)$.

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Resolución.-

Observando convenientemente las desigualdades en cada numeral , se tendrá :

$$\overline{n32q}_m \Downarrow n < m \qquad \overline{p21}_n \Downarrow p < n \qquad \overline{n3m}_6 \Downarrow m < 6 \qquad 1\,211_p \Downarrow 2 < p$$

De donde : $2 < \underset{3}{p} < \underset{4}{n} < \underset{5}{m} < 6$

Además : $q < m \rightarrow q < 5 \rightarrow$ El mayor valor de q es 4

$\therefore \quad (m + n + p + q)_{max} = \boxed{5 + 4 + 3 + 4 = 16}$ RPTA. D

2.- El mayor numeral de 3 cifras diferentes de cierto sistema de numeración se escribe en el sistema senario como 313. Dar la base desconocida.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Resolución.-

Considerando a "n" como la base desconocida, del dato del problema se deduce que el mayor numeral de tres cifras es de la forma :

$$\overline{(n-1)(n-2)(n-3)}_n = 313_6$$

Por descomposición polinómica :

$$(n - 1)\,n^2 + (n - 2)\,n + n - 3 = 3 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 3$$

Efectuando : $n^3 - \cancel{n^2} + \cancel{n^2} - 2n + n - 3 = 108 + 6 + 3$

Luego : $n^3 - n = 120$

Factorizando : $n\,(n + 1)\,(n - 1) = \underbrace{120}_{4 \cdot 5 \cdot 6}$

Entonces : $n = 6$ RPTA. C

3.- Un número se representa por 281 y 353 en dos sistemas de numeración cuyas bases son dos números enteros consecutivos. Indicar el número en base 10.

A) 305 ***B) 255*** ***C) 303*** ***D) 403*** ***E) 235***

Resolución.-

Si las bases son n y $n+1$, entonces recordando que a mayor escritura corresponde menor base, de acuerdo con los datos se tendrá :

$$N = 281_{n+1} = 353_n$$

Aplicando descomposición polinómica :

$$2(n+1)^2 + 8(n+1) + 1 = 3n^2 + 5n + 3$$

Efectuando : $$2(n^2 + 2n + 1) + 8(n+1) + 1 = 3n^2 + 5n + 3$$

$$2n^2 + 4n + 2 + 8n + 8 + 1 = 3n^2 + 5n + 3$$

$$8 = n^2 - 7n$$

$$1 \cdot 8 = n(n-7) \;\rightarrow\; n = 8$$

Luego, convirtiendo N a base 10 : $N = 353_8 = 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 3$

$\therefore$ $N = 235$ RPTA. E

4.- Determine el valor de (a + b + c) si se cumple que:

$$\overline{5no}_7 = \overline{abc5}_n$$

A) 7 ***B) 8*** ***C) 9*** ***D) 6*** ***E) 5***

Resolución.-

$$\overline{5no}_7 = \overline{abc5}_n$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$n < 7 \qquad 5 < n$$

Vinculando las desigualdades : $5 < n < 7 \;\rightarrow\; n = 6$

Entonces el dato quedará : $560_7 = \overline{abc5}_6$ ... (I)

Para calcular a , b y c convertimos al numeral 560_7 al sistema de base 6 :

* $560_7 = 5 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 0 = 245 + 42 + 0 = 287 \leftarrow$ Base 10

*
$$\begin{array}{r|l}
287 & 6 \\
\hline
5 & 47 \;|\; 6 \\
 & 5 \quad 7 \;|\; 6 \\
 & \qquad 1 \quad 1
\end{array}$$

$\Rightarrow$ $560_7 = 1\,155_6$ ... (II)

De (I) y (II) : $a = 1$ $b = 1$ $c = 5$

$\therefore$ $a + b + c = 7$ RPTA. A

5.- Calcular el valor de a + b , si se cumple que :

$$\overline{abbb}_6 = \overline{5ba}_8$$

A) 3 ***B) 4*** ***C) 5*** ***D) 6*** ***E) 7***

<u>Resolución</u>.-

$$\overline{abbb}_6 = \overline{5ba}_8$$

Por descomposición polinómica : $a \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + b \cdot 6 + b = 5 \cdot 8^2 + b \cdot 8 + a$

Efectuando operaciones : $216a + 36b + 6b + b = 320 + 8b + a$

$$215a + 35b = 320$$

$$43a + 7b = 64$$

Dando valores : $a = 1 \quad \wedge \quad b = 3$

$\therefore$ $a + b = 4$ RPTA. B

6.- Hallar el valor numérico de a + b, si se cumple que :

$$\overline{10ab}_6 = \overline{ab7}_8$$

A) 5 ***B) 8*** ***C) 9*** ***D) 10*** ***E) 12***

<u>Resolución</u>.-

$$\overline{10ab}_6 = \overline{ab7}_8$$

Por descomposición polinómica : $1 \cdot 6^3 + a \cdot 6 + b = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + 7$

Efectuando operaciones : $216 + 6a + b = 64a + 8b + 7$

$$209 = 58a + 7b$$

Dando valores : $a = 3 \quad \wedge \quad b = 5$

$\therefore$ $a + b = 8$ RPTA. B

7.- Sabiendo que : $\overline{23a}_9 = \overline{27b}_n = \overline{36a}_p$

Determinar el valor de : b - a + n + p

A) 17 ***B) 18*** ***C) 19*** ***D) 20*** ***E) 21***

Resolución.-

Del dato se tiene que : $\overline{23a}_9 = \overline{27b}_n = \overline{36a}_p$

$$\Downarrow$$
$$6 < p$$

* Como el numeral de base "p" tiene mayor representación que el de base "n" : $p < n$

* Además el numeral de base "n" tiene mayor representación que el de base 9, entonces : $n < 9$

Vinculando las desigualdades : $6 < \underset{\substack{\downarrow \\ 7}}{p} < \underset{\substack{\downarrow \\ 8}}{n} < 9$

Entonces, el dato del problema quedará : $\underbrace{\overline{23a}_9 = \overline{27b}_8}_{(I)} = \overline{36a}_7$

Por descomposición polinómica en (I) : $2 \cdot 9^2 \cdot 3 \cdot 9 + a = 2 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + b$

$$189 + a = 184 + b$$
$$\rightarrow \quad b - a = 5$$

$\therefore \quad b - a + n + p = 5 + 8 + 7 = 20$ RPTA. D

8.- Hallar : $x + y + m$

Si : $2\,312_m = 238_{12} = \overline{3xy}$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Resolución.-

$$2\,312_m = 238_{12} = \overline{3xy} \quad \text{... (I)}$$

Para calcular x e y se convierte a 238_{12} al sistema decimal :

* $238_{12} = 2 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12 + 8 = 288 + 36 + 8 = 332$ ... (II)

De (I) y (II) : $x = 3 \quad \wedge \quad y = 2$

También , trabajando con : $2312_m = 332$

Por descomposición polinómica : $2m^3 + 3m^2 + m + 2 = 332$

Efectuando : $m\,(2m^2 + 3m + 1) = 330$

$$m\,(2m + 1)\,(m + 1) = \underbrace{330}_{5 \cdot 6 \cdot 11}$$

De donde : $m = 5$

$\therefore \quad x + y + m = 10$ RPTA. A

9.- ¿Cuantos números de la forma $\overline{aba}$ existen en base 14 tal que al ser convertidos al sistema de base 7 se escriben como $\overline{bbaa}$?

A) 0 **B) 1** **C) 2** **D) 3** **E) 4**

Resolución.-

Por dato : $\overline{aba}_{14} = \overline{bbaa}_7$

De aqui se deduce que : $a < 7 \ \wedge \ b < 7)$

Descomponiendo polinómicamente : $a \cdot 14^2 + b \cdot 14 + a = b \cdot 7^3 + b \cdot 7^2 + a \cdot 7 + a$

$$196a + 14b + a = 343b + 49b + 7a + a$$

$$\rightarrow \quad 189a = 378b$$

$$\rightarrow \quad a = 2b$$

Dando valores :

* Si : $b = 1 \rightarrow a = 2 \rightarrow \overline{aba}_{14} = 212_{14}$
* Si : $b = 2 \rightarrow a = 4 \rightarrow \overline{aba}_{14} = 424_{14}$
* Si : $b = 3 \rightarrow a = 6 \rightarrow \overline{aba}_{14} = 636_{14}$

$\therefore$ Existen 3 números RPTA. D

10.- Si se cumple que : $\overline{a89}_m = \overline{81m}_n = \overline{6mp}_{12}$

¿Cuál es el valor de a + m + n + p?

A) 31 **B) 33** **C) 35** **D) 27** **E) 24**

Resolución.-

$$\overline{a89}_m = \overline{81m}_n = \overline{6mp}_{12}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$9 < m \qquad m < n$$

Como el numeral de base "n" tiene mayor escritura que el numeral de base 12, entonces por propiedad : $n < 12$

Luego, vinculando las desigualdades : $9 < m < n < 12$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$10 \quad 11$$

Entonces, el dato del problema quedará : $\overline{a89} = \overline{81\alpha}_{11} = \overline{6\alpha p}_{12}$

Por descomposición polinómica :

$$a \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 9 = 8 \cdot 11^2 + 1 \cdot 11 + 10 = 6 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12 + p$$

$$100a + 89 = 989 = 984 + p$$

De donde : $a = 9 \quad \wedge \quad p = 5$

$\therefore \quad a + m + n + p = 35$ RPTA. C

11.- *Calcular el valor de (a + b + n) , si :*

$$\overline{aa07}_n = \overline{bab}_9$$

A) 13 ***B) 14*** ***C) 15*** ***D) 16*** ***E) 17***

Resolución.-

$$\overline{aa07}_n = \overline{bab}_9$$

$$\Downarrow$$

$$7 < n$$

Como el primer numeral tiene mayor representación que el segundo , deducimos que : $n < 9$

Luego al vincular las desigualdades se tendrá : $7 < n < 9 \rightarrow n = 8$

De donde se puede deducir que : $\overline{aa07}_8 = \overline{bab}_9$

Por descomposición polinómica : $a \cdot 8^3 + a \cdot 8^2 + 7 = b \cdot 9^2 + a \cdot 9 + b$

Efectuando operaciones : $512a + 64a + 7 = 81b + 9a + b$

$$576a + 7 = 82b + 9a$$

$$567a + 7 = 82b$$

Dividiendo entre 7 : $81a + 1 = \frac{82b}{7}$ ... (*)

De donde observamos que: $b = 7$

Reemplazando en (*) : $81a + 1 = 82 \rightarrow a = 1$

$\therefore \quad a + b + n = 16$ RPTA. D

12.- *Si se cumple que : $\overline{abc3}_5 = \overline{xxx}_7$; entonces el valor de : a + b + c + x , es :*

A) 10 ***B) 12*** ***C) 6*** ***D) 9*** ***E) 5***

Resolución.-

$$\overline{abc3}_5 = \overline{xxx}_7$$

Descomponiendo polinómicamente y en forma conveniente cada miembro de la igualdad , se puede establecer que :

$$\overline{abc}_5 \,.\, 5 + 3 = x \,.\, 7^2 + x \,.\, 7 + x$$

$$\overline{abc}_5 \,.\, 5 + 3 = 57x \qquad \text{... (I)}$$

Como el producto de $\overline{abc}_5 \cdot 5$ solo puede terminar en 0 ó en 5, entonces al observar la relación notamos que : $57 \cdot x$, puede terminar en 3 ó en 8.

$$57 \cdot x = \ldots 3 \;\rightarrow\; x = 9 \quad \text{(Imposible por estar en base 7)}$$

$$57 \cdot x = \ldots 8 \;\rightarrow\; x = 4$$

En (I) : $\qquad \overline{abc}_5 \cdot 5 + 3 = 57 \cdot 4$

$$\rightarrow \;\overline{abc}_5 = 45 \qquad \ldots\ldots\ldots\ (II)$$

Convirtiendo 45 al sistema de base 5 :

$$\begin{array}{r|l} 45 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & \begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \cline{2-2} 4 & 1 \end{array} \end{array} \quad \Rightarrow \quad 45 = 140_5 \qquad \ldots\ldots\ (III)$$

De (II) y (III) : $\qquad a = 1 \quad , \quad b = 4 \quad \wedge \quad c = 0$

$$\therefore \qquad a + b + c + x = 9 \qquad \text{RPTA. D}$$

13.- Calcular $(a + b + n)$ en : $1105_n = \overline{aba}_7$

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

<u>Resolución</u>.-

En primer lugar notamos que : $\quad 5 < n$

Además, como en la igualdad dada el numeral de base "n" tiene más cifras que el numeral de base 7 , podemos establecer que : $n < 7$

Entonces de ambas desigualdades deducimos que : $\qquad n = 6$

De este modo la condición del problema quedará así : $\quad 1105_6 = \overline{aba}_7 \quad \ldots$ (I)

Para calcular a y b se convierte al numeral 1105_6 al sistema de base 7 :

$$* \quad 1105_6 = 1 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6 + 5$$
$$= 216 + 36 + 5 = 257 \;\leftarrow\; \text{Base 10}$$

$$* \quad \begin{array}{r|l} 257 & 7 \\ \cline{2-2} 5 & \begin{array}{r|l} 36 & 7 \\ \cline{2-2} 1 & 5 \end{array} \end{array} \qquad \text{Es decir : } 1105_6 = 515_7 \quad \ldots \text{(II)}$$

De (I) y (II) : $\quad a = 5 \quad \wedge \quad b = 1$

$$\therefore \qquad a + b + n = 12 \qquad \text{RPTA. B}$$

14.- Sabiendo que : $\overline{ab4}_n = \overline{b1n}_6$ ***; calcular :*** $a + b + n$

A) 10 ***B) 11*** ***C) 12*** ***D) 13*** ***E) 14***

Resolución.-

$$\overline{ab4}_n = \overline{b1n}_6$$

A partir de la igualdad notamos que : $4 < n \;\wedge\; n < 6 \;\rightarrow\; n = 5$

Luego, la expresión queda : $\overline{ab4}_5 = \overline{b15}_6$

Y ahora por descomposición polinómica :

$$a\,.\,5^2 + b\,.\,5 + 4 = b\,.\,6^2 + 1\cdot 6 + 5$$

Efectuando : $25a = 31b + 7$

Dando valores : $a = 4 \;\wedge\; b = 3$

$$\therefore \quad a + b + n = 12 \qquad \text{RPTA. C}$$

15.- Si : $\overline{4(b+1)3}_6 = \overline{bbb4}_n$ ***¿Cuál es el valor de "b"?***

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 0***

Resolución.-

$$\overline{4(b+1)3}_6 = \overline{bbb4}_n \qquad \ldots (*)$$

$$\Downarrow$$

$$4 < n$$

Como el primer numeral tiene menor representación que el segundo, deducimos que : $n < 6$.

Vinculando las desigualdades tendremos : $4 < n < 6 \;\rightarrow\; n = 5$

Reemplazando en (*) : $\overline{4(b+1)3}_6 = \overline{bbb4}_5$

Por descomposición polinómica :

$$4\cdot 6^2 + (b + 1)\,6 + 3 = b\cdot 5^3 + b\cdot 5^2 + b\cdot 5 + 4$$

Efectuando : $144 + 6b + 6 + 3 = 125b + 25b + 5b + 4$

$$153 + 6b = 155b + 4$$

$$149 = 149.b$$

$$\therefore \quad b = 1 \qquad \text{RPTA. A}$$

16.- Si se cumple que : $\overline{ab7cd}_m = 7\,607_9$***; hallar el valor de :*** $a + b + c + d + m$

A) 16 ***B) 18*** ***C) 17*** ***D) 13*** ***E) 20***

Resolución.-

A partir de la relación dada : $\overline{ab7cd}_m = 7\,607_9$

Deducimos del numeral del 2do miembro que : $7 < m$

Y como en la igualdad el numeral de base "m" tiene más cifras que el de base 9, podemos concluir que : $m < 9$

Vinculando las desigualdades deducimos que : $7 < m < 9 \rightarrow m = 8$

A partir de esto el dato del problema quedará así : $\overline{ab7cd}_8 = 7\,6\,0\,7_9$ ... (I)

Para calcular a , b , c y d al numeral $7\,6\,0\,7_9$ se le debe convertir al sistema octanario :

* $7\,607_9 = 7 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 + 0 \cdot 9 + 7$

$= 5\,103 + 486 + 0 + 7 = 5\,596 \leftarrow$ Base 10

$$\begin{array}{l|l}
5596 & 8 \\
\hline
4 & 699 \;|\; 8 \\
 & 3 \quad\;\, 87 \;|\; 8 \\
 & \qquad\quad 7 \quad 10 \;|\; 8 \\
 & \qquad\qquad\quad\;\; 2 \quad 1
\end{array}$$

Entonces : $7\,6\,0\,7_9 = 1\,2\,7\,3\,4_8$ .... (II)

Comparando (I) y (II) : $a = 1$ $b = 2$ $c = 3$ $d = 4$

$\therefore$ $a + b + c + d + m = 18$ RPTA. B

17.- *Si se cumple que : $\overline{ababab}_n = 707_8$, calcular el valor de : $a + b + n$*

A) 5 ***B) 6*** ***C) 7*** ***D) 8*** ***E) 9***

<u>Resolución</u>.-

$$\overline{ababab}_n = 707_8$$

Descomponiendo polinómicamente en forma conveniente :

$$\overline{ab}_n \cdot n^1 + \overline{ab}_n \cdot n^2 + \overline{ab}_n = 7 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 7$$

$$\overline{ab}_n\,(n^4 + n^2 + 1) = \underbrace{455}_{5 \cdot 91}$$

Puesto que $n > 1$, de (*) podemos establecer que : $n^4 + n^2 + 1 = 91$

$\rightarrow n = 3$

De este modo se tendrá que : $\overline{ab}_n = 5 \rightarrow \overline{ab}_3 = 5 = 12_3$

A base 3

De esta última igualdad podemos deducir que : $a = 1 \wedge b = 2$.

$$\therefore \qquad a + b + n = 6 \qquad\qquad \text{RPTA. B}$$

18.- Un número de 4 cifras empieza en 9, y si se le suprime esta cifra, el número resultante es 1/21 del original. Entonces la suma de las cifras del numeral original es :

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

Resolución.-

Sea el número $9\overline{abc}$ donde suprimiendo el 9 quedará el número $\overline{abc}$, de manera que de acuerdo con el dato del problema se tendrá que :

$$\overline{abc} = \frac{1}{21} . \overline{9abc}$$

Efectuando : $21 . \overline{abc} = \overline{9abc}$

$$\Rightarrow \quad 21 . \overline{abc} = 9\,000 + \overline{abc}$$

$$20 . \overline{abc} = 9\,000$$

$$\Rightarrow \quad \overline{abc} = 450 \quad \Rightarrow \quad a = 4 \ , b = 5 \wedge c = 0$$

Luego el número será : $\overline{9abc} = 9450$

$$\therefore \qquad \text{Suma de cifras} = 18 \qquad\qquad \text{RPTA. B}$$

19.- Hallar un número de 4 cifras que empieza en 2, tal que si ese 2 se coloca al final del número se obtiene otro que excede en 1 755 al original. Dar como respuesta la suma de las 4 cifras.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 15 E) 14

Resolución.-

El dato será : $\overline{2abc} = \overline{abc2} - 1\,755$

Descomponiendo polinómicamente y de manera conveniente tendremos :

$$2 \cdot 10^3 + \overline{abc} = \overline{abc} . 10 + 2 - 1\,755$$

$$2\,000 + \overline{abc} = 10\ \overline{abc} - 1\,753$$

$$3\,753 = 9 . \overline{abc}$$

$$417 = \overline{abc} \quad \Rightarrow \quad a = 4 \ . \ b = 1 \wedge c = 7$$

Entonces : $\overline{2abc} = 2\,417$

$$\therefore \qquad \text{Suma de cifras} = 14 \qquad\qquad \text{RPTA. E}$$

20.- Si se cumple : $458_m = 284_n$ ***y*** $460_m = 288_n$ ***; calcular el valor de :*** $m + n$

A) 24 ***B) 26*** ***C) 28*** ***D) 23*** ***E) 25***

<u>Resolución</u>.-

Ordenado los datos : $458_m = 284_n$ ... (I)

$460_m = 288_n$ ... (II)

Descomponiendo polinómicamente y restando (II) - (I) miembro a miembro :

$$m - 8 = 4 \;\rightarrow\; m = 12$$

Reemplazando en (II) : $460_{12} = 288_n$

Descomposición polinómicamente :

$$4 \cdot 12^2 + 6 \cdot 12 = 2n^2 + 8n + 8$$

$$648 = 2n^2 + 8n + 8$$

Dividiendo entre 2 : $324 = n^2 + 4n + 4$

Expresando como un cuadrado perfecto la primer miembro :

$$18^2 = (n+2)^2 \;\rightarrow\; n = 16$$

$\therefore$ $m + n = 28$ RPTA. C

21.- Si : $\overline{a45}_m = \overline{bb43}_n$ ***y*** $\overline{a50}_m = \overline{bb44}_n$ ***; calcular el valor de :*** $a + b + m + n$

A) 15 ***B) 16*** ***C) 17*** ***D) 18*** ***E) 19***

<u>Resolución</u>.-

Ordenando los datos : $\overline{a45}_m = \overline{bb43}_n$ ... (I)

$\overline{a50}_m = \overline{bb44}_n$ ... (II)

Procediendo como en el problema anterior , descomponemos polinómicamente y restamos (II) - (I) , obtiendose :

$$m - 5 = 1 \;\rightarrow\; m = 6$$

En (I) : $\overline{a45}_6 = \overline{bb43}_n$

$$\Downarrow$$

$$4 < n$$

Como el primer numeral tiene menor escritura que el segundo podemos decir que : $n < 6$

Luego, al vincular las desigualdades concluimos que :

$$4 < n < 6 \;\rightarrow\; n = 5$$

Reemplazando en (II) : $\overline{a50}_6 = \overline{bb44}_5$

Descomponiendo polinómicamente :

$$a \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 = b \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 4$$

$$36a + 30 = 125b + 25b + 20 + 4$$

$$36a + 6 = 150b$$

Dividiendo entre 6 : $6a + 1 = 25.b$

Dando valores : $a = 4 \ \wedge \ b = 1$

$\therefore \quad a + b + m + n = 16$ RPTA. B

22.- Calcular : a - b + c , si : $\overline{ab}_{c+3} = \overline{ca}_b$; donde b y c son números impares y :

$a + b + c = 22$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 4

<u>Resolución</u>.-

De los datos deducimos : $\overline{ab}_{c+3} = \overline{ca}_b$ ... (I)

$$b < c + 3 \qquad c < b$$

Luego : $c < b < c + 3 \ \rightarrow \ b = c + 1 \ \vee \ b = c + 2$

Y como b y c son números impares, deducimos que : $b = c + 2$ ... (1)

Descomponiendo polinómicamente en (I) : $a\,(c + 3) + b = c\,.\,b + a$

Transponiendo términos : $a\,(c + 3) - a = cb - b$

Factorizando el segundo miembro : $a\,(\underbrace{c+2}_{b}) = b\,(c - 1)$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) : $a = c - 1$ ... (*)

Por dato : $a + b + c = 22$ ... (**)

Reemplazando (*) en (**) : $c - 1 + c + 2 + c = 22$

$$\rightarrow \quad c = 7$$

Al sustituir en (1) y (*) : $a = 6 \ \wedge \ b = 9$

$\therefore \quad a - b + c = 4$ RPTA. E

23.- Sabiendo que : $122_a = 101_b = 72_c$

¿Cuál es el menor valor de a + b + c?

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

<u>Resolución</u>.-

$$122_a = 101_b = 72_c$$

Descomponiendo polinómicamente : $a^2 + 2a + 2 = b^2 + 1 = 7c + 2$

Restando 1 a cada miembro : $a^2 + 2a + 1 = b^2 = 7c + 1$

$$\rightarrow \quad (a+1)^2 = b^2 = 7c + 1 \quad \ldots \text{(I)}$$

Observamos que : $7c + 1$, debe ser un cuadrado perfecto, en donde además $c > 7$. Luego deducimos que : $c_{min} = 8$

En (I) intentamos con $c = 9$: $(a+1)^2 = b^2 = 7\,(9) + 1$

$$(a+1)^2 = b^2 = 64$$

De donde se deduce que : $a = 7 \;\wedge\; b = 8$

$$\therefore \quad \boxed{(a+b+c)_{\min} = 24} \qquad \text{RPTA. C}$$

24.- Calcular "n" si se cumple que : $\underbrace{24_{19_{19_{19_{\ddots_{19_n}}}}}}_{\textbf{24 veces}} = 558_9$

A) 10 ***B) 11*** ***C) 12*** ***D) 13*** ***E) 14***

<u>Resolución</u>.-

Aplicando bases de bases : $\underbrace{19_{19_{19_{\ddots_{19_n}}}}}_{\textbf{24 veces}} = n + 24 \cdot 9 = n + 216$

En el dato : $24_{n+216} = 558_9$

Por descomposición polinómica :

$$2\,(n + 216) + 4 = 5 \cdot 9^2 + 5 \,.\, 9 + 8$$

$$2n + 432 + 4 = 405 + 45 + 8$$

$$\therefore \quad \boxed{n = 11} \qquad \text{RPTA. B}$$

25.- Calcular el valor de "n" en : $\underbrace{\overline{1n}_{\overline{1n}_{\overline{1n}_{\ddots_{\overline{1n}_8}}}}}_{\textbf{"n" veces}} = 112_n$

A) 3 ***B) 4*** ***C) 5*** ***D) 6*** ***E) 7***

<u>Resolución</u>.-

Aplicando la fórmula de bases sucesivas y la descomposición polinómica se tendrá :

$$8 + (\underbrace{n+n+n+...+n}_{"n"\text{ veces}}) = n^2 + n + 2$$

Luego :
$$8 + n^2 = n^2 + n + 2$$

$$\therefore \qquad n = 6 \qquad\qquad \text{RPTA. D}$$

26.- Cumpliéndose que : $\underbrace{\overline{1n}_{\overline{2n}_{\overline{2n}_{\overline{2n}_{\ddots_{\overline{2n}}}}}}}_{"n"\text{ veces}}$ ***= 2 176 ; calcular el valor de "n".***

A) 5 ***B) 6*** ***C) 7*** ***D) 8*** ***E) 9***

<u>Resolución</u>.-

Efectuaremos varios calculos (iterativos) de modo que sea posible reconocer alguna regla de formación en los resultados obtenidos, para luego poder generalizar :

* 1 vez : $\overline{2n} = 20 + n = 2^1 \cdot 10 + (2^1 - 1)\,n$

* 2 veces : $\overline{2n}_{\overline{2n}} = \overline{2n}_{20+n} = 2\,(20 + n) + n = 40 + 3n = 2^2 \cdot 10 + (2^2 - 1)\,n$

* 3 veces : $\overline{2n}_{\overline{2n}_{\overline{2n}}} = \overline{2n}_{40+3n} = 2\,(40 + 3n) + n = 80 + 7n = 2^3 \cdot 10 + (2^3 - 1)\,n$

Para "n" veces : $\underbrace{\overline{2n}_{\overline{2n}_{\overline{2n}_{\ddots_{2n}}}}}_{"n"\text{ veces}} = 2^n \cdot 10 + (2^n - 1)\,n$

En el dato : $\overline{1n}_{2^n \cdot 10 + (2^n - 1)n} = 2\,176$

Por descomposición polinómica :

$$2^n \cdot 10 + (2^n - 1)\,n + n = 2\,176$$

$$\rightarrow \qquad 2^n \cdot 10 + 2^n \cdot n - n + n = 2\,176$$

$$\rightarrow \qquad 2^n\;(10 + n) = \underbrace{2\,176}_{2^7 \cdot 17}$$

$$\therefore \qquad n = 7 \qquad\qquad \text{RPTA. C}$$

27.- Calcular x + y , si se cumple la igualdad : $333_{\overline{n9}} = \overline{2xy}_{\overline{2n}}$

A) 17 ***B) 18*** ***C) 19*** ***D) 20*** ***E) 21***

Resolución.-

A partir del dato podemos reconocer que el primer numeral tiene mayor representación que el segundo, luego :

$$\overline{n9} < 2n \quad \rightarrow \quad n = 1$$

Reemplazando en la condición dada : $333_{19} = \overline{2xy}_{21}$ ... (I)

Para calcular x e y debemos convertir al numeral 333_{19} al sistema de numeración de base 21:

$$* \ 333_{19} = 3 \cdot 19^2 + 3 \cdot 19 + 3$$

$$= 1\,083 + 57 + 3 = 1\,143 \ \leftarrow \ \text{Base } 10$$

$$* \quad \begin{array}{r|l} 1143 & 21 \\ \cline{2-2} 9 & \begin{array}{r|l} 54 & 21 \\ \cline{2-2} 12 & 2 \end{array} \end{array} \quad \Rightarrow \quad 333_{19} = 2\,\gamma\,9_{21} \quad \text{... (II)}$$

Donde : γ = Doce

De (I) y (II) : $x = 12 \quad \wedge \quad y = 9$

$$\therefore \quad x + y = 21 \qquad \text{RPTA. E}$$

28.- Hallar el valor de "a" si el número $\overline{ab0ab}$ (0 = cero) es el producto de 4 números enteros consecutivos.

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Por descomposición polinómica : $\overline{ab0ab} = \overline{ab} \,.\, 10^3 + \overline{ab}$

$$\rightarrow \quad \overline{ab0ab} = 1\,001 \,.\, \overline{ab}$$

Transformando convenientemente : $\overline{ab0ab} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{ab}$

Para que $\overline{ab0ab}$ sea el producto de 4 números enteros consecutivos, $\overline{ab}$ debe ser el producto de los factores que faltan, luego : $\overline{ab} = 24 = 2 \cdot 12$, para que :

$$\overline{ab0ab} = 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 = 24\,024$$

$$\therefore \quad a = 2 \qquad \text{RPTA. B}$$

29.- Un numeral del sistema de base "n" es igual al cuadrado de la mayor cifra que existe en dicho sistema; si el numeral formado por las mismas cifras, pero en orden invertido, se convierte al sistema decimal se obtiene 16. ¿Cuál es el valor de "n"?.

A) 7 ***B) 8*** ***C) 9*** ***D) 11*** ***E) 13***

Resolución.-

Como sabemos la mayor cifra que existe en base n es $(n - 1)$, luego :

$$(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 = (n-2)\,n + 1 = \overline{(n-2)1}_n$$

$$\Uparrow$$

Numeral que es igual al cuadrado de la mayor cifra en base "n"

Por condición del problema : $\overline{1(n-2)}_n = 16$

Por descomposición polinómica : $n + n - 2 = 16$

$\therefore$ $n = 9$ RPTA. C

30.- Si se cumple que : $\overline{abab}_8 = \overline{xy0y}_7$ (0 = cero) ¿Cuál es el valor de : a + b + x + y?

A) 20 ***B) 21*** ***C) 22*** ***D) 23*** ***E) 24***

Resolucion.-

Del dato se sabe que : $\overline{abab}_8 = \overline{xy0y}_7$

Descomponiendo polinómicamente : $\overline{ab}_8 \cdot 8^2 + \overline{ab}_8 = x \cdot 7^3 + y \cdot 7^2 + y$

Efectuando operaciones, se tiene : $65 \cdot \overline{ab}_8 = 343x + 50y$

Dividiendo por 5 : $13 \cdot \overline{ab}_8 = \dfrac{343 \cdot x}{5} + 10y$

Observamos que : $x = 5 \rightarrow 13 \cdot \overline{ab}_8 = 343 + 10y$

Expresando a 343 como $13 \cdot 26 + 5$: $13 \cdot \overline{ab}_8 = 13 \cdot 26 + 5 + 10y$

A continuación dividimos por 13 : $\overline{ab}_8 = 26 + \dfrac{10y+5}{13}$ .... (*)

Luego, para que $\left(\dfrac{10y+5}{13}\right)$ sea un número entero, se requiere que : $y = 6$

Entonces en (*) : $\overline{ab}_8 = 26 + 5 = 31 = \underbrace{37_8}_{\text{A base 8}}$ $\begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases}$

$\therefore$ $a + b + x + y = 21$ RPTA. B

31.- Si un número tiene 6 cifras en el sistema cuaternario. ¿Cuántas cifras tendrá en el sistema de base 13?

A) 3 ***B) 4*** ***C) 3 ó 4*** ***D) 4 ó 5*** ***E) 6***

<u>Resolución</u>.-

Si un número, digamos "N", se escribe en el sistema cuaternario con 6 cifras, su valor mínimo es $100\,000_4$ y su valor máximo es $333\,333_4$, es decir :

$$100\,000_4 \leq N \leq 333\,333_4$$

Convirtiendo a base 10 : $1 \cdot 4^5 \leq N \leq 4^6 - 1$

Efectuando las potencias : $1\,024 \leq N \leq 4\,095$

Convirtiendo a base 13 : $60\alpha_{13} \leq N \leq 1\beta30_{13}$

De donde deducimos que : $\alpha = \text{diez} \wedge \beta = \text{once}$

Por lo tanto, N en base 13 tendrá :

3 ó 4 cifras RPTA. C

32.- Una persona muy caritativa reparte S/. 3 000 entre cierto número de personas, entregándoles : S/. 1 ; S/. 7 ; S/. 49 ; S/. 343 ; ... ; con la condición que ellas esteen agrupadas de modo que no exista más de 6 personas en cada grupo. Determinar el total de personas favorecidas con el reparto.

A) 8 ***B) 9*** ***C) 10*** ***D) 11*** ***E) 12***

<u>Resolución</u>.-

Supongamos que los S/. 3 000 se reparten de la siguiente manera :

"a" personas reciben S/. 1 cada una $(a \leq 6)$

"b" personas reciben S/. 7 cada una $(b \leq 6)$

"c" personas reciben S/. 49 cada una $(c \leq 6)$

"d" personas reciben S/. 343 cada una $(d \leq 6)$

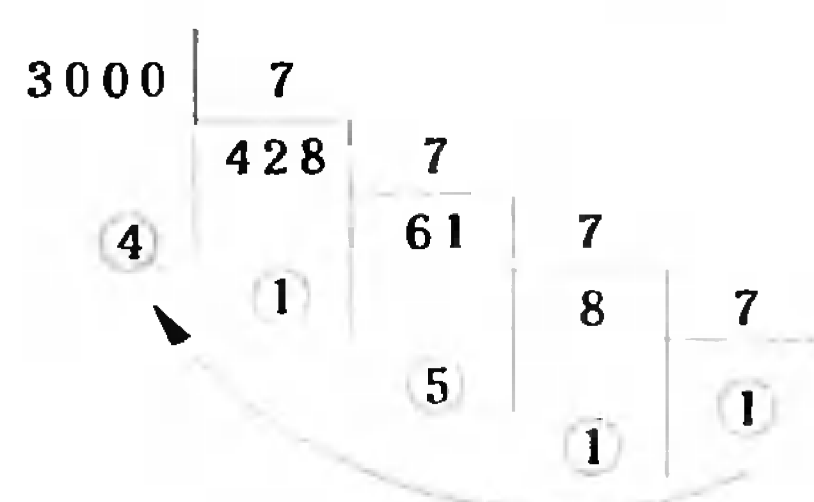
⋮

Luego : $3\,000 = a \cdot 1 + b \cdot 7 + c \cdot 49 + d \cdot 343 + \ldots$

Reconociendo que los factores de $a, b, c, d, \ldots$ son potencias de 7, tendremos que :

$$3\,000 = a \cdot 7^0 + b \cdot 7^1 + c \cdot 7^2 + d \cdot 7^3 + \ldots$$

Puede notarse que el segundo miembro es la descomposición polinómica en base 7 donde a, b, c, d, ... son las cifras, luego debe convertirse 3 000 a base 7.



Entonces :

$3\,000 = 1\,1\,5\,1\,4_7$

$3\,000 = 1 \cdot 7^4 + 1 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0$

Por tanto : 1 persona recibe $7^4 = S/.\ 2\ 401$ cada una

1 persona recibe $7^3 = S/.\ 343$ cada una

5 personas reciben $7^2 = S/.\ 49$ cada una

1 persona recibe $7^1 = S/.\ 7$ cada una

4 personas reciben $7^0 = S/.\ 1$ cada una

$\therefore$ # de personas favorecidas : $1 + 1 + 5 + 1 + 4 = 12$ RPTA. E

33.- Un número de dos cifras del sistema senario se escribe en base "n" con las mismas cifras pero en orden inverso. El máximo valor de "n" es:

A) 17 B) 26 C) 37 D) 50 E) 65

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo con los datos se establece que : $\overline{ab}_6 = \overline{ba}_n$

Descomponiendo polinómicamente : $6a + b = bn + a$

$$\Rightarrow \quad 5a + b = bn$$

Dividiendo por "b" : $\dfrac{5a}{b} + 1 = n \quad ... (*)$

Haciendo una inspección de (*), podemos deducir que el mayor valor de "n" se obtiene cuando "a" sea máximo (es decir 5, por que la base es 6) y "b" sea mínimo (o sea 1).

$$\Rightarrow \quad n_{máx} = \frac{5 \cdot 5}{1} + 1$$

$$\therefore \quad n_{máx} = 26$$ RPTA. B

34.- Si : $\overline{abcabc}_n = \overline{mnppq}_7$ y $n > 5$. Calcular el valor de : $a + b + c + m + n + p + q$

A) 13 B) 18 C) 19 D) 15 E) 16

<u>Resolución</u>.-

$$\overline{abcabc}_n = \overline{mnppq}_7$$

$$\Downarrow$$

$$n < 7$$

Pero por condición del problema : $n > 5$

Luego, vinculando las desigualdades tendremos : $5 < n < 7$

Por lo tanto deducimos que : $n = 6$

Entonces, el dato quedará así : $\overline{abcabc}_6 = \overline{m6ppq}_7$

Descomponiendo polinómicamente :

$$\overline{abc}_6 \, . \, 6^3 + \overline{abc}_6 = m \, . \, 7^4 + 6 \cdot 7^3 + p \, . \, 7^2 + p \, . \, 7 + q$$

$$\Rightarrow \quad 217 \, . \, \overline{abc}_6 = 2\,401m + 2\,058 + 49p + 7p + q$$

Dividiendo por 7 : $31 \, . \, \overline{abc}_6 = 343m + 294 + 7p + p + \dfrac{q}{7}$

Puede notarse que : $q = 0$

$$\Rightarrow \quad 31 \, . \, \overline{abc}_6 = 343m + 294 + 8p$$

Expresando convenientemente el segundo miembro para poderlo dividir por 31, tendremos:

$$31 \, . \, \overline{abc}_6 = 341m + 2m + 279 + 15 + 8p$$

$$\Rightarrow \quad 31 \, . \, \overline{abc}_6 = 31 \times 11m + 31 \times 9 + (2m + 8p + 15)$$

Dividiendo por 31 : $\overline{abc}_6 = 11m + 9 + \dfrac{2m+8p+15}{31}$ ... (*)

Luego : $2m + 8p + 15 = 31 \Rightarrow 2m + 8p = 16$

$$\Rightarrow \quad m + 4p = 8 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ p = 1 \end{cases}$$

En (*) : $\overline{abc}_6 = 11(4) + 9 + 1 = 54 = 130_6 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{cases}$

$$\therefore \quad a + b + c + m + n + p + q = 15$$ RPTA. D

35.- ¿Cuántos numerales de 2 cifras resultan ser iguales a "k" veces el producto de sus cifras ($k \in \mathbb{Z}$)?

A) 0 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Considerando a $\overline{ab}$ como un numeral de 2 cifras, se tendrá : $\overline{ab} = k \, . \, a \, . \, b$

Por descomposición polinómica : $10a + b = k \, . \, a \, . \, b$

Transponiendo términos y factorizando : $b = a\,(k \, . \, b - 10)$

Si hacemos : $kb - 10 = n \quad \rightarrow \quad b = a \, . \, n$ donde : $n < 10$

Entonces : $k \,.\, a \,.\, n - 10 = n \quad \rightarrow \quad k \,.\, a \,.\, n - n = 10$

$\rightarrow \quad n\,(k \,.\, a - 1) = 10$

Analizando las distintas posibilidades se tendrá :

	n	$k \,.\, a$	k	a	$b = a \,.\, n$	$\overline{ab}$
$n\,(k \,.\, a - 1) = 1 \cdot 10$	1	11	11	1	1	11
$n\,(k \,.\, a - 1) = 2 \cdot 5$	2	6	6	1	2	12
			2	3	6	36
			3	2	4	24
$n\,(k \,.\, a - 1) = 5 \cdot 2$	5	3	3	1	5	15

$\therefore$ **Existen 5 numerales** RPTA. E

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Calcular "a" si : $\overline{aa3a}_6 = \overline{64a}_9$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.- Hallar "a" si : $\overline{a4a}_7 = \overline{120a}_5$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.- Si el numeral : $\overline{n99n}_{\left(\frac{n}{2}+6\right)}$

está correctamente escrito. ¿Cuántos valores puede tomar "n"?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.- Si : $\overline{3a}_9 + 63_b + \overline{bb}_a = \overline{(a+1)(b+1)}_{a+b}$; dar el valor de : $a \,.\, b$.

A) 30 B) 56 C) 40 D) 42 E) 72

5.- Calcular el máximo valor de "n" en :

$$\overline{ab}_n = \overline{ba}_8$$

A) 65 B) 8 C) 17 D) 28 E) 50

6.- Hallar un número de nuestro sistema tal que escrito en dos sistemas de numeración de bases consecutivas se obtiene 252 y 207.

A) 153 B) 133 C) 98 D) 135 E) 100

7.- Si : $1\,331_m = 1\,000_n$; hallar el menor valor posible de $(m \,.\, n)$

A) 5 B) 10 C) 20 D) 25 E) 30

8.- Si : $\overline{62a}_n = \overline{47b}_8$; calcular el mayor valor de $(a + b)$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

9.- Hallar $(a+b)$ en : $\overline{4ab}_7 = \overline{2ba}_9$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10.- Hallar $(a+b)$ si : $\overline{abaa}_6 = \overline{(2a)ba}_{11}$

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

11.- ¿Cuál de las siguientes expresiones dadas en sistemas de numeración distintos representa el número mayor?

A) 43_6 B) $10\,110_2$ C) 24_9
D) 212_3 E) 102_{25}

12.- Si : $\overline{a73}_n = \overline{a27}_9$; hallar : $(a+n)$

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

13.- Si se verifica :

$$\overline{abc}_6 = 1\,022_c = 2\,021_b = 1\,022c$$

Hallar $\overline{abc}$ y expresarlo en base $(a+b)$.

A) 1 100 B) 1 102 C) 1 002
D) 2 100 E) 1 001

14.- Un número entero se escribe como $\overline{aab}$ y $\overline{bbb}$ en los sistemas quinario y cuaternario respectivamente. Hallar : $(a + b)$.

A) 4 B) 7 C) 8 D) 5 E) 6

15.- Si : $\overline{1m4}$ se expresa en base "n" como 504. Hallar $(m + n)$

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

16.- Se convierte un número de la base 10 a otros dos sistemas de numeración y se obtiene 1 331 y 2 626 respectivamente. Si una de las bases es 7 y la otra es mayor ; hallar la base desconocida.

A) 8 B) 9 C) 11 D) 12 E) 13

17.- Si : $\overline{ac}_b = \overline{cb}_{a+2}$

y : $a+b+c=24$

Expresar $\overline{abc}$ en el sistema hexadecimal.

A) 3511_{16} B) 372_{16} C) 363_{16}

D) 311_{16} E) 381_{16}

18.- ¿En cuántos sistemas de numeración el número 300 se escribe con 3 cifras?

A) 9 B) 10 C) 11

D) 12 E) N.A.

19.- El número 496 del sistema decimal se expresa como 354 en un sistema desconocido. Hallar la base.

A) 6 B) 8 C) 11 D) 12 E) 13

20.- Hallar $(a + b + c)$ si :

$$\overline{abcd}_7 = \overline{37(d+1)}$$

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

21.- Hallar $a \,.\, b$ si : $\overline{20a5}_b = 701_8$

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

22.- Hallar $(a + b + c)$ si : $\overline{6aa}_c = \overline{4bb}_8$

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

23.- Si : $\overline{abc}_5 = \overline{cba}_7$; hallar : $(a + b + c)$.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

24.- Convertir al sistema de numeración decimal al menor número capicúa de 4 cifras significativas del sistema de base 7, si se sabe que la suma de sus cifras es igual al producto de sus dos primeras cifras.

A) 1 368 B) 1 638 C) 1 863

D) 1 386 E) 1 838

25.- No se sabe en qué base está escrito el número $\overline{3xyz7}$, solo se sabe que en base 10 es el número 15 015. Hallar : $(x+y+z)$.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

26.- Si : $\overline{10a}_4$; $\overline{2bc}_a$; $\overline{bb}_c$ están correctamente escritos. Hallar : $(a+b+c)$.

A) 4 B) 55 C) 6 D) 7 E) 8

27.- El menor número de 4 cifras de la base "n" excede al mayor número de 2 cifras de dicha base "n" en 449. Dar "n".

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 5

28.- Si el número $\overline{abc1}_5$ se convierte al sistema de numeración nonario, viene expresado por 3 cifras iguales. Determinar $(a + b + c)$.

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

29.- Hallar un número de 4 cifras de la forma $\overline{abcd}$ sabiendo que :

* $\overline{ab} = 4\,(a+b)$
* $\overline{abc} = 19\,(a+b+c)$
* $\overline{abcd} = 118\,(a+b+c+d)$

Dar como respuesta el valor de $(a+b+c+d)$

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

30.- Determinar la suma de las cifras del número que excede en 13 a 14 veces la cifra de las unidades.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

31.- Si se cumple que $1\,331_k = 1\,000_t$ y además :

$$\underbrace{1k_{\overline{1k}_{\overline{1k}_{\ddots_{\overline{1k}_t}}}}}_{14 \text{ veces}} = 171_8$$

¿Cuál es el valor de $k+t$?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

32.- Si : $750_m = 1\,533_n$

$760_m = 1\,545_n$

Hallar el valor de "m"

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 11

33.- Si el número $\overline{a\,a\,a\,a\,a\,a}$ es la tercera parte del producto de 4 números impares consecutivos. ¿Cuál es el valor de "a"?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

34.- Si : $2^8 = 194$ se puede afirmar que 2^{16} es igual a :

A) $31\alpha14$ B) $31\beta14$ C) $31\gamma14$

D) $21\alpha14$ E) $21\beta14$

35.- Calcular $a+b+n$ si :

$$\overline{abba}_{\overline{ba}_{\overline{ba}_{\overline{ba}_{\overline{ba}_n}}}} = \overline{1\beta8a}_{20}$$

donde : β = once.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

36.- Hallar "n" si 245 de la base "n" se escribe en le sistema undecimal como 140.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 12

37.- Escribir : $121_n \cdot 12_n$ es base $(n.1)$

A) 101 B) 112 C) 111 D) 110 E) 120

38.- Determinar el valor de $x - y$ en la expresión:

$$\overline{2x6}_{12} = \overline{54y}_8$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

39.- Si : $312_4 = \overline{abcd}_4$

El valor de $(a+b+c)$ es :

A) 2 B) 4 C) 6 D) 5 E) 3

40.- Si : $\overline{(n-1)\ n\ (n+1)}_8 = 311_{11}$

Calcular "n"

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

41.- Si se cumple que :

$$\overline{3a}_c + \overline{c1}_b = 14_a + \overline{b1}_8$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Más de 3

42.- Si : $\overline{a(a+b)b}_8 = \overline{b022}_6$

Calcular $a - b$

A) 10 B) 12 C) 15 D) absurdo E) 6

43.- Indique la suma de los valores de "a" que verifican :

$$\overline{aaa}_7 = \overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)(2a)}$$

A) 6 B) 12 C) 10 D) 8 E) F.D.

4 CONTEO DE NUMEROS

4.1 PROGRESION ARITMETICA

Llamamos así a todo conjunto de números ordenados, de tal manera que, cada uno de ellos (a excepción del primero) se obtiene incrementando a su inmediato anterior en una cantidad constante llamada *razón* de la progresión aritmética.

Ejemplos :

* 12 ; 19 ; 26 ; 33 ; ... ; 425
  (Progresión aritmética de razón 7)

* 22 ; 36 ; 50 ; 64 ; ... ; 1 408
  (Progresión aritmética de razón 14)

* 7 ; 16 ; 25 ; 34 ; ... ; 223
  (Progresión aritmética de razón 9)

* 35 ; 32 ; 29 ; 26 ; ... ; 5
  (Progresión aritmética de razón -3)

En general, dada la siguiente progresión aritmética de razón "r" :

$$t_1 \; ; \; t_2 \; ; \; t_3 \; ; \; t_4 \; ; \; t_5 \; ; \; ... \; ; t_k \; ; ... \; ; t_n$$

Donde : t_1 : 1^er^ término

t_k : Término de lugar "k"

t_n : Último término

t_0 : Término anterior al 1^er^ término

$$\boxed{t_0 = t_1 - r}$$

n : Número de términos

Además : $$\boxed{r = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = t_5 - t_4 = ... = t_n - t_{n-1}}$$

Luego se observa que :

$$t_2 = t_1 + r$$
$$t_3 = t_2 + r = t_1 + 2r$$
$$t_4 = t_3 + r = t_1 + 3r$$
$$t_5 = t_4 + r = t_1 + 4r$$

Entonces podemos generalizar :

$$\boxed{t_k = t_1 + (k-1)r} \quad \ldots (\alpha)$$

También : $t_n = t_1 + (n-1)\,r$

Efectuando : $t_n = t_1 + nr - r$

$t_n - t_1 + r = nr$

Despejando "n" y dándole una forma apropiada :

$$n = \frac{t_n - t_1 + r}{r}$$

$$\rightarrow \quad n = \frac{t_n - (t_1 - r)}{r} = \frac{t_n - t_0}{r} \quad \ldots (\mathrm{I})$$

$$\rightarrow \quad n = \frac{t_n - t_1}{r} + \frac{r}{r} = \frac{t_n - t_1}{r} + 1 \quad \ldots (\mathrm{II})$$

De (I) :

$$\boxed{\#\text{ de términos} = \frac{\text{Último término} - \text{Anterior al } 1^{\circ}}{\text{Razón}}} \quad \ldots (\beta)$$

De (II) :

$$\boxed{\#\text{ de términos} = \frac{\text{Último término} - 1^{\circ}\text{ término}}{\text{Razón}} + 1} \quad \ldots (\gamma)$$

Ejemplo : *Calcular el vigésimo noveno término y el número total de términos en :*

5 ; 13 ; 21 ; 29 ; .... ; 637

<u>Resolución</u>.-

Nótese que la progresión aritmética propuesta es de razón 8 donde el primer término es 5, el último término es 637 y el término anterior al 1° es :

$5 - 8 = -3$

Aplicando la formula (α) para calcular el vigésimo noveno término ,tendremos :

$$t_{29} = 5 + (29-1)8 = 5 + 28 \cdot 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{29} = 229}$$

Para calcular el número de términos puede usarse la fórmula (β) :

$$\#\text{ de términos} = \frac{637-(-3)}{8} = \frac{640}{8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\#\text{ de términos} = 80}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Calcular el trigésimo segundo término de la siguiente progresión aritmética de 50 términos :

$$10 \; ; \; .... \; ; \; 304$$

A) 184 B) 192 C) 196 D) 180 E) 190

Resolución.-

Como la progresión dada tiene 50 términos, el último, es decir 304, será el término de lugar 50 :

$$t_{50} = 304 \quad \Rightarrow \quad 10 + (50 - 1)\,r = 304 \quad \Rightarrow \quad 49r = 294$$

Luego la razón de la progresión aritmética será : $r = 6$

Entonces el trigésimo segundo término será :

$$t_{32} = 10 + (32 - 1)6 = 10 + 31 \cdot 6$$

$$\therefore \qquad \boxed{t_{32} = 196} \qquad \text{RPTA. C}$$

2.- Una progresión aritmética empieza en 111, termina en 514 y tiene $\overline{3a}$ términos. Entonces el valor de "a" es :

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Resolución.-

Considerando que la razón de la progresión aritmética es r :

$$\#\text{ de términos} = \frac{514 - 111}{r} + 1 = \overline{3a}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{403}{r} + 1 = \overline{3a}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{31 \cdot 13}{r} + 1 = \overline{3a}$$

De donde notamos que : $r = 13 \quad \wedge \quad a = 2$

$$\therefore \quad \boxed{a = 2} \qquad \text{RPTA. A}$$

3.- Indicar el décimo quinto término de la siguiente progresión aritmética :

$$16_n \; ; \; 27_n \; ; \; 40_n \; ; \; ....$$

A) 203_n B) 204_n C) 214_n D) 212_n E) 205_n

Resolución.-

Por el concepto de razón :

$$27_n - 16_n = 40_n - 27_n \quad \Rightarrow \quad 2n + 7 - n - 6 = 4n - 2n - 7$$

$$n + 1 = 2n - 7 \quad \Rightarrow \quad n = 8$$

En la progresión : 16_8 ; 27_8 ; 40_8 ; ....

En base 10 : 14 ; 23 ; 32 ; ....

Como la razón es 9 :

$$t_{15} = 14 + (15 - 1)9 = 140 \text{ pasando a base } n = 8 : \quad t_{15} = 214_n$$ RPTA. C

4.- ¿Cuántos términos tiene la siguiente progresión aritmética?

$$12_n \; ; \; 17_n \; ; \; 24_n \; ; \; 31_n \; ; ... ; \; 620_n$$

A) 78 ***B) 79*** ***C) 80*** ***D) 81*** ***E) 82***

Resolución.-

Aplicando el concepto de razón :

$$17_n - 12_n = 24_n - 17_n \quad \Rightarrow \quad n + 7 - n - 2 = 2n + 4 - n - 7$$

$$5 = n - 3 \quad \Rightarrow \quad n = 8$$

Entonces, la progresión quedará : 12_8 ; 17_8 ; 24_8 ; 31_8 ; ... ; 620_8

En base 10 : 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; ... ; 400 (razón = 5)

$$\therefore \quad \#\text{ de términos} = \frac{400 - 10}{5} + 1 = 79$$ RPTA. B

5.- ¿En qué sistema de numeración, los numerales : 479 ; 698 y 907 ; están en progresión aritmética?

A) Decimal ***B) Undecimal*** ***C) Duodecimal*** ***D) Vigesimal*** ***E) Hexadecimal***

Resolución.-

Sea "n" la base : 479_n ; 698_n ; 907_n

Por el concepto de razón : $698_n - 479_n = 907_n - 698_n$

$$6n^2 + 9n + 8 - 4n^2 - 7n - 9 = 9n^2 + 7 - 6n^2 - 9n - 8$$

$$2n^2 + 2n - 1 = 3n^2 - 9n - 1$$

$$11n = n^2 \quad \Rightarrow \quad n = 11$$

$\therefore$ Sistema Undecimal RPTA. B

6.- ¿Cuántos términos tiene la siguiente progresión aritmética :

$$89 \; ; \; \overline{ab} \; ; \; \overline{ac} \; ; .... ; \; \overline{1cb} \; ;$$

sabiendo además que : b + c - 1 = a ?

A) 20 ***B) 21*** ***C) 22*** ***D) 23*** ***E) 24***

Resolución.-

Como es una progresión aritmética creciente : $89 < \overline{ab} \Rightarrow a = 9$

Usando el concepto de razón :

$$\overline{ab} - 89 = \overline{ac} - \overline{ab} \Rightarrow 10a + b - 89 = 10a + c - 10a - b$$

$$10a + b - 89 = c - b$$

Como $a = 9$: $90 + b - 89 = c - b$

$$\Rightarrow \qquad c = 2b + 1 \qquad ... \text{(I)}$$

Por dato : $b + c - 1 = a$

Reemplazando : $b + 2b + 1 - 1 = 9 \Rightarrow b = 3$

En (I) : $c = 2\,(3) + 1 \Rightarrow c = 7$

Entonces, la progresión artimética quedará : $89 \; ; \; 93 \; ; \; 97 \; ; \; .... \; ; \; 173$

La razón es 4, entonces :

$$\# \text{ de términos} = \frac{173 - 89}{4} + 1 = 22 \qquad \text{RPTA. C}$$

7.- Determinar el número de términos de la siguiente progresión aritmética :

$$\overline{ab}_n \; ; \; \overline{ba}_{n+1} \; ; \; 48_{n+3} \; ; .... ; \; \overline{1(n+2)3}_9$$

A) 9 ***B) 10*** ***C) 11*** ***D) 12*** ***E) 13***

Resolución.-

En el 3er y último término puede notarse que :

$$8 < n + 3 \Rightarrow 5 < n$$

$$n + 2 < 9 \Rightarrow n < 7$$

$$\Longrightarrow \qquad n = 6$$

La progresión aritmética quedará : $\overline{ab}_6 \; ; \; \overline{ba}_7 \; ; \; 48_9 \; ; \; ... \; ; \; 183_9$

Utilizando el concepto de razón : $r = \overline{ba}_7 - \overline{ab}_6 = 48_9 - \overline{ba}_7$

b = {4, 5}

Descomponiendo polinómicamente : $7b + a - 6a - b = 4 \cdot 9 + 8 - 7b - a$

Efectuando operaciones : $13b = 44 + 4a$

Dando valores : $b = 4 \quad \wedge \quad a = 2$

Entonces, la progresión será : $24_6 \; ; \; 42_7 \; ; \; 48_9 \; ; \; \ldots\ldots\ldots \; ; \; 183_9$

Pasando a base 10 : $16 \; ; \; 30 \; ; \; 44 \; ; \; \ldots\ldots\ldots \; ; \; 156$

Como la razon, se observa, es 14 :

$$\# \text{ de términos} = \frac{156 - 16}{14} + 1 \quad \Rightarrow \quad \# \text{ términos} = 11 \qquad \text{RPTA. C}$$

8.- En la progresión aritmética : 38 ; ..... ; 87 ; ..... ; 220 ; la cantidad de términos que hay entre 87 y 220 es el triple de la cantidad de términos existentes entre 38 y 87. Hallar la cantidad total de terminos.

A) 19 B) 15 C) 23 D) 27 E) 31

Resolución.-

Considerando a "r" como la razón de esta progresión; los términos que hay *entre* 87 y 220 son :

$$\underbrace{87+r \,;\, 87+2r \,;\, 87+3r \,;\, \ldots \,;\, 220-r}$$

$$\# \text{ de términos} = \frac{220 - r - 87}{r} = \frac{133 - r}{r}$$

y los términos que hay entre 38 y 87 son :

$$\underbrace{38+r \,;\, 38+2r \,;\, 38+3r \,;\, \ldots \,;\, 87-r}$$

$$\# \text{ de términos} = \frac{87 - r - 38}{r} = \frac{49 - r}{r}$$

Por dato : $\dfrac{133 - r}{r} = 3 \,.\, \dfrac{49 - r}{r} \quad \Rightarrow \quad r = 7$

Luego el número total de términos será :

$$\# \text{ de términos} = \frac{220 - 38}{7} + 1 = 27 \qquad \text{RPTA. D}$$

9.- ¿Cuántos numerales de tres cifras del sistema de numeración senario, se escriben con 4 cifras al ser convertidos al sistema cuaternario?

A) 131 B) 151 C) 152 D) 153 E) 154

Resolución.-

Sea N uno de los números que cumple las condiciones del problema, entonces como tiene 3 cifras en el sistema senario.

$$100_6 \leq N \leq 555_6 \quad ; \text{ pasando a base 10 : } 36 \leq N \leq 215 \qquad \ldots(I)$$

y para que tenga 4 cifras en el sistema cuaternario :

$$1\,000_4 \leq N < 3\,333_1 \text{ ; pasando a base 10 : } 64 \leq N \leq 255 \qquad \ldots (II)$$

De (I) y (II) : $\quad 64 \leq N \leq 215$

Luego : $\quad N \in \{64 ; 65 ; 66 ; \ldots ; 215\}$

$$\therefore \qquad \#\text{ de valores de } N = \frac{215-63}{1} = 152 \qquad \text{RPTA. C}$$

10.- Dada la siguiente serie : $\overline{8a}_{30}$; $\overline{9a}_{29}$; $\overline{\alpha a}_{28}$; .... ; (α = diez).

Calcular la máxima cantidad de términos si a < 10

A) 9 ***B) 10*** ***C) 11*** ***D) 16*** ***E) 18***

<u>Resolución</u>.-

Sea el último término : $\overline{xa}_y$, donde : $x < y$

Nótese que en cada término de la sucesión la suma de la primera cifra y la base siempre es 38, es decir :

$$8 + 30 = 9 + 29 = 10 + 28 = \ldots\ldots = 38 \;\Rightarrow\; x + y = 38 \qquad \ldots (I)$$

En el primer término : $30 - 8 = 22$

En el segundo término : $29 - 9 = 20$

En el tercer término : $28 - 10 = 18$

⋮

#s pares consecutivos decrecientes

$\Rightarrow$ En el último término : $\quad y - x = 2 \qquad \ldots (II)$

De (I) y (II) : $\quad y = 20 \quad \wedge \quad x = 18$

Luego la sucesión será : $\overline{8a}_{30}$; $\overline{9a}_{29}$; $\overline{\alpha a}_{28}$; ... ; $\overline{(18)a}_{20}$

Para calcular el número de términos puede tomarse en cuenta a las bases (razón = -1).

$$\#\text{ términos} = \frac{20-30}{-1} + 1 = 11 \qquad \text{RPTA. C}$$

4.2 PAGINACION

Es el acto de numerar páginas, recordando que un tipo de imprenta equivale a una cifra

Cálculo del número de cifras usadas al escribir en forma consecutiva desde 1 hasta $\overline{abc}$ (número de 3 cifras).

$$\underbrace{1;2;3;...;9}_{\substack{\text{9 números de}\\ \text{1 cifra}\\ \Downarrow \\ \text{9 cifras}}} \; ; \; \underbrace{10;11;12;...;99}_{\substack{\text{90 números de}\\ \text{2 cifras}\\ \Downarrow \\ \text{180 cifras}}} \; ; \; \underbrace{100;101;102;...;\overline{abc}}_{\substack{(\overline{abc}\text{ - 99) números}\\ \text{de 3 cifras}\\ \Downarrow \\ (\overline{abc}\text{ - 99)3 cifras}}}$$

Luego el número de cifras será :

$$9 + 180 + \left(\overline{abc} - 99\right)3 = 189 + \overline{abc}\ .\ 3 - 297$$

$$= \overline{abc}\ .\ 3 - 98$$

(Sumando y restando 3) $= \overline{abc}\ .\ 3 + 3 - 111$

De donde :

$$\boxed{\text{Número de cifras} = \left(\overline{abc}+1\right)3 - 111}$$

En general, el número de cifras usadas al escribir desde 1 hasta N, donde N es un número de "k" cifras, será :

$$\boxed{(N+1)k - \underbrace{111...1}_{\text{"}k\text{" cifras}}}$$

Por ejemplo, si deseamos averiguar cuántas cifras se utilizan al escribir los números naturales desde 1 hasta 5 296, en primer lugar notamos que 5 296 tiene 4 cifras, luego aplicando la fórmula tendremos :

$$\text{Número de cifras} = (5\,296 + 1) \cdot 4 - 1\,111$$

$$= 5\,297 \cdot 4 - 1\,111$$

$$= 21\,188 - 1\,111$$

$$= 20\,077$$

Ejercicio : ¿Cuántos tipos de imprenta se utilizarán al enumerar las 648 páginas de un libro?

Resolución.-

Para enumerar las 648 páginas del libro, se debe escribir, en forma consecutiva desde 1 hasta

648; luego, como para cada cifra se usa un tipo de imprenta (es decir, un caracter), el número de tipos de imprenta es igual al número de cifras usadas en la escritura :

Como 648 tiene 3 cifras :

$$\begin{aligned}\text{Número de tipos de imprenta} &= (648 + 1)3 - 111\\ &= 649 \cdot 3 - 111\\ &= 1\,947 - 111\\ &= 1\,836\end{aligned}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

11.- Para enumerar la primera cuarta parte de las páginas de un libro se emplearon 342 cifras. ¿Cuántas cifras se emplearon para enumerar todo el libro?

A) 1 522 B) 1 562 C) 1 692 D) 1 614 E) 1 624

<u>Resolución</u>.-

En primer lugar, averigüemos cuántas páginas tiene la cuarta parte del libro, sabiendo que se usaron en su enumeración 342 cifras :

$$\underbrace{1;2;3;...;9}_{\substack{\text{9 números de}\\ \text{1 cifra}\\ \Downarrow\\ \text{9 cifras}}} \quad ; \quad \underbrace{10;11;12;...;99}_{\substack{\text{90 números de}\\ \text{2 cifras}\\ \Downarrow\\ \text{180 cifras}}} \quad ; \quad \underbrace{100;101;102;...;N}_{}$$

En esta parte el número de cifras usadas será :

(N - 99)3 = 342 - 9 - 180

$\Rightarrow \qquad N = 150$

Como "N" es la última página de la primera cuarta parte del libro, entonces el libro tendrá en total : 4N = 4 · 150 = 600 páginas.

Entonces en todo el libro se usaron :

$(600 + 1)3 - 111 =$ 1 692 cifras RPTA. C

12.- Si un libro tiene 960 páginas. ¿Cuántas cifras se emplearon para enumerar sus páginas impares?

A) 1 585 B) 1 185 C) 1 385 D) 1 285 E) 1 485

Resolución.-

Considerando solo las páginas impares :

$$\underbrace{1;3;5;7;9}_{\text{5 números de 1 cifra}} \;;\; \underbrace{11;13;15;\dots;99}_{\text{45 números de 2 cifras}} \;;\; \underbrace{101;103;105;\dots;959}_{\text{430 números de 3 cifras}}$$

5 números de 1 cifra ⇓ **5 cifras**

45 números de 2 cifras ⇓ **90 cifras**

430 números de 3 cifras ⇓ **1 290 cifras**

Número de cifras = 5 + 90 + 1 290 = 1 385 RPTA. C

13.- Al escribir la siguiente secuencia : $1^1\,;\,2^2\,;\,3^3\,;\,4^4\,;\dots;\,abc^{\overline{abc}}\,;$

se han empleado 522 cifras. Hallar a + b + c

A) 5   B) 6   C) 7   D) 8   E) 9

Resolución.-

Nótese que, tanto en las bases como en los exponentes se usa la misma cantidad de cifras, luego :

$$\underbrace{1\;;\;2\;;\;3\;;\;\dots\;;\;\overline{abc}}$$

números de 3 cifras

$$\text{Número de cifras} = \frac{522}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\overline{abc}+1\right)3 - 111 = 261 \;\rightarrow\; \overline{abc} = 123$$

$$\therefore \quad a+b+c = 1+2+3 = 6$$ RPTA. B

14.- En la numeración de las $\overline{5ab}$ páginas de un libro se usan $\overline{15ab}$ cifras. Determinar el valor de a + b.

A) 7   B) 8   C) 9   D) 10   E) 11

Resolución.-

Para enumerar las $\overline{5ab}$ páginas de un libro debe escribirse en forma consecutiva desde 1 hasta $\overline{5ab}$, luego por dato :

$$\text{Número de cifras} = \overline{15ab}$$

Como $\overline{5ab}$ tiene 3 cifras : $\qquad (\overline{5ab}+1)\,3 - 111 = \overline{15ab}$

Descomponiendo polinómicamente : $\qquad (500 + \overline{ab} + 1)\,3 - 111 = 1\,500 + \overline{ab}$

Efectuando : $\qquad 1\,500 + 3\,.\,\overline{ab} + 3 - 111 = 1\,500 + \overline{ab} \quad \Rightarrow \quad \overline{ab} = 54$

$\therefore \qquad a + b = 5 + 4 = \boxed{9}$ RPTA. C

15.- En la escritura de los números (base y exponente) que forman la siguiente sucesión :

$$453^{125}\ ;\ 452^{126}\ ;\ 451^{127}\ ;\ \ldots\ ;\ 15x^{\overline{4x6}}$$

¿Cuántas cifras se utilizaron?

A) 1 800 B) 1 806 C) 1 812 D) 1 818 E) 1 824

<u>Resolución</u>.-

Para escribir cada término se usan 6 cifras (3 para la base y 3 para el exponente), luego habrá que calcular el número de términos y multiplicarlo por 6.

Nótese además que en cada término la suma de base y exponente siempre es 578, es decir :

$$453 + 125 = 578\ ;\ 452 + 126 = 578\ ;\ 451 + 127 = 578\ ;\ \ldots$$

Entonces : $\qquad \overline{15x} + \overline{4x6} = 578 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

Entonces la sucesión queda : $\qquad 453^{125}\ ;\ 452^{126}\ ;\ 451^{127}\ ;\ \ldots\ ;\ 152^{426}$

El número de términos se puede calcular con los exponentes : $\qquad 426 - 124 = 302$

$\therefore \qquad$ Número de cifras $= 302 \cdot 6 = \boxed{1\,812}$ RPTA. C

16.- ¿Cuántas páginas tiene un libro si en la enumeración de sus 385 últimas páginas se utilizaron 1 340 tipos de imprenta?

A) 1 182 B) 1 183 C) 1 184 D) 1 185 E) 1 186

<u>Resolución</u>.-

Si las 385 páginas finales tienen 4 cifras cada una, se utilizarían :

$$385 \cdot 4 = 1\,540 \text{ tipos de imprenta}$$

Como sólo se han usado 1 340 tipos de imprenta (es decir 200 tipos menos), se debe cambiar 200 números de 4 cifras por 200 números de 3 cifras, luego quedan : 385 - 200 = 185 números de 4 cifras, es decir :

$$\underbrace{1\,000\ ;\ 1\,001\ ;\ 1\,002\ ;\ \ldots\ ;\ N}$$

$$N - 999 = 185 \quad \Rightarrow \quad N = 1\,184$$

$\therefore \qquad$ El libro tiene $\boxed{1\,184}$ páginas $\qquad$ RPTA. C

17.- De un libro de 225 paginas se arrancaron cierto número de hojas del principio, notándose que en las páginas que quedaron sin arrancar se emplearon 452 tipos de imprenta. ¿Cuántas hojas se arrancaron?

A) 62 B) 24 C) 30 D) 31 E) 32

Resolución.-

En la enumeracion de todas las páginas del libro, es decir al escribir desde 1 hasta 225 (número de 3 cifras) se utilizaron :

$$(225 + 1)\,3 - 111 = 567 \text{ tipos de inprenta}$$

Luego, en las paginas que se arrancaron se utilizaron :

$$567 - 452 = 115 \text{ cifras}$$

Veamos, hasta que pagina se arranco :

* Del 1 al 9 hay 9 números de 1 cifra, es decir, se han utilizado 9 cifras

* En páginas de 2 cifras se usó : 115 - 9 = 106, es decir son 106 ÷ 2 = 53 paginas de 2 cifras

$$\underbrace{10\ ;\ 11\ ;\ 12\ ;\ldots;\ N}$$

$$N - 9 = 53 \quad \Rightarrow \quad N = 62$$

Por lo tanto, se arrancaron 62 páginas, es decir :

$$\therefore \quad 62 \div 2 = 31 \text{ hojas} \qquad \text{RPTA. D}$$

18.- Se han arrancado cierto número de hojas centrales de 2 cifras a un libro de 120 páginas notándose que en las páginas que quedaron se emplearon en su enumeración 12 tipos más de los que emplearon en las páginas arrancadas. ¿Cuántas hojas se arrancaron?

A) 30 B) 60 C) 33 D) 66 E) 120

Resolucion.-

Como el libro tiene 120 páginas, el número de tipos de imprenta usados en toda su enumeración será :

$$(120 + 1)\,3 - 111 = 252$$

Sean : A : numero de tipos usados en las páginas arrancadas

Q : numero de tipos usados en las páginas que quedan

Luego : $Q + A = 252$

Por dato : $Q - A = 12$ $\Rightarrow$ $Q = 132 \quad \wedge \quad A = 120$

Como en las páginas arrancadas se usaron 120 cifras y todas estas paginas tienen 2 cifras :

$$\text{Número de páginas arrancadas : } \frac{120}{2} = 60$$

$\therefore$ Se arrancaron : $\dfrac{60}{2} = $ **30 hojas** RPTA. A

19.- ¿Cuántas cifras "6" se emplean en la enumeración de los 700 primeros números naturales?

A) 180 ***B) 200*** ***C) 210*** ***D) 240*** ***E) 260***

Resolución.-

Analizando orden por orden :

* En las unidades : $\underbrace{\underline{6}\ ;\ 1\underline{6}\ ;\ 2\underline{6}\ ;\ 3\underline{6}\ ;\ldots;\ 69\underline{6}}_{\text{70 cifras "6"}}$

* En las decenas :

$$\left.\begin{array}{l} \underline{6}0;\ \underline{6}1;\ \underline{6}2;\ldots;\ \underline{6}9 \\ 1\underline{6}0;\ 1\underline{6}1;\ 1\underline{6}2;\ldots;1\underline{6}9 \\ 2\underline{6}0;2\underline{6}1;2\underline{6}2;\ldots;2\underline{6}9 \\ \vdots \\ 6\underline{6}0;6\underline{6}1;6\underline{6}2;\ldots;6\underline{6}9 \end{array}\right\} 10\cdot 7 = 70 \text{ cifras "6"}$$

* En las centenas : $\underbrace{600\ ;\ 601\ ;\ 602\ ;\ldots;\ 699}_{\text{100 cifras "6"}}$

$\therefore$ Número de cifras "6" = 70 + 70 + 100 = **240** RPTA. D

20.- De un libro se sacan las hojas que terminan en 4, notándose que en ellas se han utilizado 674 cifras. ¿Cuál de las siguientes no puede ser la última página del libro?

A) 1 123 ***B) 1 110*** ***C) 1 122*** ***D) 1 121*** ***E) 1 119***

Resolución.-

Nótese que al arrancar las hojas que terminan en 4, se arrancan las páginas que terminan en 3 y las que terminan en 4, luego, en las páginas que terminan en 4 se han utilizado : $674 \div 2 = 337$ cifras.

$$\underbrace{4}_{\substack{\text{1 número}\\ \text{de 1 cifra}}}\ ;\ \underbrace{14;24;34;\ldots;94}_{\substack{\text{9 números de}\\ \text{2 cifras}}}\ ;\ \underbrace{104;114;124;\ldots;994}_{\substack{\text{90 números de}\\ \text{3 cifras}}}$$

$\Downarrow$ 1 cifra $\Downarrow$ 18 cifras $\Downarrow$ 270 cifras

Hasta 994 se han usado : 1 + 18 + 270 = 289 cifras

Entonces, en números de 4 cifras, se usarán : 337 - 289 = 48 cifras

Es decir : $\underbrace{1\,004 \;;\; 1\,014 \;;\; 1\,024 \;;\ldots;\; N}$

$$\left(\frac{N-994}{10}\right)4 = 48 \quad \Rightarrow \quad N = 1\,114$$

Por lo tanto la última hoja arrancada contiene las páginas 1 113 y 1 114; luego, el número de páginas del libro debe ser no menor de 1 114 ni mayor de 1 123, pues de existir la página 1 124, se tendría que arrancar una hoja más, entonces en alternativas la única que no puede ser la última página del libro es :

$\therefore$ 1 110 RPTA. B

4.3 METODO COMBINATORIO

Fundamento : La cantidad de números o combinaciones que pueden formarse con varios órdenes o variables independientes entre si, es numéricamente igual al *producto* de las cantidades de valores que pueden tomar dichos órdenes o variables.

Ejemplo : *¿Cuántos números de dos cifras existen en el sistema decimal tal que su cifra de mayor orden sea par y su cifra de menor orden sea impar?*

Resolución.-

Considerando que los números son de la forma $\overline{ab}$ donde por condición del problema "*a*" debe ser par y "*b*" es impar, es decir :

$$a \in \{2\,;4\,;6\,;8\} \quad \wedge \quad b \in \{1\,;3\,;5\,;7\,;9\}$$

Combinando los valores de "*a*" y "*b*" se obtienen los números de la forma *ab*, así :

$$\overline{ab} \in \begin{Bmatrix} 21;23;25;27;29;41;43;45;47;49 \\ 61;63;65;67;69;81;83;85;87;89 \end{Bmatrix}$$

Donde puede observarse que hay *20 números* de la forma $\overline{ab}$.

Utilizando el *método combinatorio*, en un esquema, sería :

Variables	$\Rightarrow$	a $\downarrow$	b $\downarrow$
Valores de las variables		2 4 6 8	1 3 5 7 9
cantidad de valores de cada variable	$\Rightarrow$	4	$\cdot$ 5 = 20 números

El producto de las cantidades de valores de cada variable indica la cantidad de números.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

21.- ¿Cuántos números de 5 cifras existen en el sistema heptanario de manera que su cifra inicial sea impar, terminen en 2 ó 5, su cifra central no sea impar y las otras dos cifras sean significativas?

A) 726 B) 864 C) 802 D) 720 E) 750

Resolución.-

Considerando que los números son de la forma : $\overline{abcde}_7$ y utilizando el método combinatorio, se tendrá según las condiciones del problema :

$$\begin{array}{lccccc} & a & b & c & d & e \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ & 5 & 3 & 4 & 3 & \\ & & 4 & 6 & 4 & \\ & & 5 & & 5 & \\ & & 6 & & 6 & \\ & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \text{Cantidad de números} = & 3 & \cdot\ 6 & \cdot\ 4 & \cdot\ 6 & \cdot\ 2 \end{array} \Rightarrow \text{864 números} \quad \text{RPTA. B}$$

22.- ¿Cuántos números de la forma :

$$\overline{(a+2)(b-1)\left(\frac{a}{2}\right)(b+2)}$$

existen en el sistema de numeración duodecimal?

A) 24 B) 35 C) 60 D) 30 E) 45

Resolución.-

Para que el numeral exista en base 12, sus cifras deben ser menores que 12, es decir :

$$a + 2 < 12 \Rightarrow a < 10$$

$$b + 2 < 12 \Rightarrow b < 10$$

Donde además se observa, en el segundo orden, que "a" *es par* y, en el tercer orden, que $b \geq 1$; luego, por el método combinatorio, analizando las variables "a" y "b":

$$\begin{array}{lcc} & a & b \\ & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 1 \\ & 2 & 2 \\ & 4 & 3 \\ & 6 & 4 \\ & 8 & 5 \\ & & 6 \\ & & 7 \\ & & 8 \\ & & 9 \\ & \text{—} & \text{—} \\ \text{Cantidad de números} = & 5 & \cdot\ 9 \end{array} = \therefore \text{45 números} \quad \text{RPTA. E}$$

23.- ¿Cuántos números de 4 cifras existen tal que sus cifras de orden par son mayores en 1 que las cifras de orden precedente?

A) 64 B) 90 C) 81 D) 72 E) 56

<u>Resolución</u>.-

Los números son de la forma $\overline{abcd}$ donde las cifras de orden par (2^{do} y 4^{to}) son a y c, que por condición del problema deben ser mayores en 1 que las cifras de orden precedente (anterior), es decir :

$$a = b + 1 \quad \wedge \quad c = d + 1$$

Luego, el numeral quedará : $\overline{abcd} = \overline{(b+1)\,b\,(d+1)\,d}$

Por el método combinatorio, analizando las variables b y d :

$$\begin{array}{cc} b & d \\ \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 8 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Cantidad de números = $9 \cdot 9 = \therefore$ 81 números RPTA. C

24.- ¿Cuántos numerales capicúa de 3 cifras del sistema de base 6 tienen como suma de cifras a un número par?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 20 E) 24

<u>Resolución</u>.-

Si el numeral capicúa es de la forma $\overline{aba}_6$, entonces, por condición del problema :

$$a + b + a = \#\text{ par} \Rightarrow 2a + b = \#\text{ par}$$

Para cualquier valor de "a", el valor de $2a$ siempre es par, entonces "b" debe ser obligatoriamente par. Luego por el método combinatorio :

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 \\ 2 & \\ 3 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & \\ \hline \end{array}$$

Cantidad de números = $5 \cdot 3 = \therefore$ 15 números RPTA. C

25.- ¿Cuántos números mayores que 300 pero menores que 800 se pueden formar utilizando solo las siguientes cifras :

0 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 y 9 ?

A) 169 B) 196 C) 168 D) 195 E) 190

<u>Resolución</u>.-

Para que los números sean mayores que 300 y menores que 800, deben ser de la forma $\overline{abc}$, donde : $a \in \{3 ; 5 ; 6 ; 7\}$.

Luego, por el método combinatorio :

a	b	c
↓	↓	↓
3	0	0
	2	2
5	3	3
6	5	5
7	6	6
	7	7
	9	9

Cantidad de números = $4 \cdot 7 \cdot 7$ = 196 números

Pero, notemos además que el número 300 no cumple las condiciones del problema, luego :

$\therefore$ Cantidad de números = 196 - 1 = 195 RPTA. D

26.- ¿Cuántos números de 4 cifras, comienzan o terminan en 7?

A) 2 400 ***B) 3 600*** ***C) 900*** ***D) 1 800*** ***E) 7 200***

<u>Resolución</u>.-

Los números de 4 cifras que comienzan o terminan en 7 son de 3 tipos :

(I) Números de 4 cifras que comienzan en 7 y no terminan en 7 :

$\overline{7abc}$

a	b	c
↓	↓	↓
0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	8
8	8	
9	9	9

Cantidad de números = $10 \cdot 10 \cdot 9$ = 900 números

(II) Números de 4 cifras que no comienzan en 7 y terminan en 7 :

$$\overline{abc7}$$

a	b	c
	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
8	7	7
9	8	8
	9	9

Cantidad de números = 8 · 10 · 10 = 800 números

(III) Números de 4 cifras que comienzan y terminan en 7 :

$$\overline{7ab7}$$

a	b
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Cantidad de números = 10 · 10 = 100 números

∴ Cantidad de números = 900 + 800 + 100 = 1 800 RPTA. D

27.- ¿Cuántos números de la forma $\overline{a(a+b)b}$ existen en el sistema de numeración senario?

A) 30 ***B) 15*** ***C) 21*** ***D) 42*** ***E) 18***

Resolución.-

Para que el numeral $\overline{a(a+b)b}$ exista en base 6, debe verificarse que : $a + b < 6$ donde $a \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.

* Si $a = 1 \Rightarrow b \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\} \Rightarrow$ 5 números
* Si $a = 2 \Rightarrow b \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\} \Rightarrow$ 4 números

* Si $a = 3 \Rightarrow b \in \{0 ; 1 ; 2\}$ $\Rightarrow$ 3 números
* Si $a = 4 \Rightarrow b \in \{0 ; 1\}$ $\Rightarrow$ 2 números
* Si $a = 5 \Rightarrow b \in \{0\}$ $\Rightarrow$ 1 número

Finalmente :

$\therefore$ Cantidad de números = $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ = 15 números RPTA. B

28.- ¿Cuantos números de 4 cifras, todas impares y distintas entre si, existen en el sistema de numeración undecimal?

A) 144 B) 120 C) 240 D) 625 E) 720

Resolución.-

Sean los números pedidos de la forma $\overline{abcd}$ donde a ; b ; c y d son impares y diferentes entre sí.

Las variables a , b , c y d pueden tomar los valores : 1 ; 3 ; 5 ; 7 y 9 ; pero, por ser distintas entre sí se analiza de la forma siguiente :

* "a" toma 5 valores : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9.
* "b" toma solamente 4 valores, pues, uno de los valores anteriores fue tomado por "a", luego es prohibido para "b".
* "c" toma únicamente 3 valores, pues hay 2 valores prohibidos (los que tomaron "a" y "b")
* "d", por idéntico razonamiento, toma solo 2 valores.

Finalmente, la cantidad de números será :

$\therefore$ $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ RPTA. B

29.- Determinar ¿cuántos números capicúa están comprendidos entre 2 000 y 20 000?

A) 180 B) 179 C) 80 D) 184 E) 186

Resolución.-

Los números capicúa comprendidos entre 2 000 y 20 000 son de 4 cifras : $\overline{abba}$ y de 5 cifras : $\overline{mnpnm}$; entonces, aplicando el método combinatorio :

$$2\,000 < \overline{abba} \quad \wedge \quad \overline{mnpnm} < 20\,000$$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ \vdots & 3 \\ 9 & \vdots \\ & 9 \\ \hline 8 & 10 \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{ccc} m & n & p \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ & 2 & 2 \\ & \vdots & \vdots \\ & 9 & 9 \\ \hline 1 & 10 & 10 \end{array}$$

Cant. de #s = $8 \cdot 10 = 80$ Cant. de #s = $1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$

$\therefore$ Existen : $80 + 100$ = 180 #s RPTA. A

30.- ¿Cuántos números de 3 cifras de la base 8 utilizan la cifra 2 en su escritura?

A) 162 ***B) 172*** ***C) 146*** ***D) 154*** ***E) 108***

<u>Resolución</u>.-

Sean los números de la forma . $\overline{abc}_8$

* Calculamos la cantidad total de números :

$$\overline{abc}_8$$

a	b	c
	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
⋮	⋮	⋮
7	7	7

Cant. de #s = 7 · 8 · 8 = 448

* La cantidad de números que *no* utilizan la cifra 2 se calcula :

$$\overline{abc}_8$$

a	b	c
1	0	0
3	1	1
4	3	3
5	4	4
6	5	5
7	6	6
	7	7

Cant. de #s = 6 · 7 · 7 = 294

Finalmente, la cantidad de números que utilizan la cifra 2 será :

$\therefore$ 448 - 294 = 154 RPTA. D

31.- ¿Cuántos números de 3 cifras existen que tengan por lo menos una cifra par y por lo menos una cifra impar?

A) 225 ***B) 900*** ***C) 625*** ***D) 675*** ***E) 725***

<u>Resolución</u>.-

Los números pedidos son de la forma $\overline{abc}$; luego para calcular la cantidad de ellos que tengan por lo menos una cifra par y por lo menos una cifra impar, se procede así :

* Se calcula la cantidad total de números de 3 cifras :

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 9 & 9 & 9 \end{array}$$

Cant. de números = $8 \cdot 10 \cdot 10 = 900$

* Calculamos, ahora, los que no cumplen las condiciones del problema; es decir, los que tienen todas sus cifras pares (falta la impar) y los que tienen todas sus cifras impares (falta la par) :

$$\overline{mnp} \qquad\qquad\qquad \overline{xyz}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \\ 8 & 6 & 6 \\ & 8 & 8 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \\ 9 & 9 & 9 \end{array}$$

Cant. de #s = $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ Cant. de #s = $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Finalmente, la cantidad de números pedida será :

$\therefore$ $900 - 100 - 125 = 675$ RPTA. D

32.- ¿Cuántos números de 4 cifras existen tal que el producto de sus cifras sea par?

A) 9 000 ***B) 8 375*** ***C) 7 875*** ***D) 3 250*** ***E) 1 250***

Resolución.-

Para que el producto de las 4 cifras sea par, por lo menos una de estas cifras debe ser par, luego la única posibilidad para que este producto no sea par es que todas sus cifras sean impares, entonces :

* Calculamos, en primer lugar, la cantidad total de números de 4 cifras :

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overline{abcd}} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

Cant. de números = $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$

* Calculamos, ahora, la cantidad de números de 4 cifras que tienen todas sus cifras impares :

$$\overline{m\,n\,p\,q}$$

m	n	p	q
1	1	1	1
3	3	3	3
5	5	5	5
7	7	7	7
9	9	9	9

Cant. de números = $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

Finalmente, la cantidad de números pedida será la diferencia de las cantidades anteriormente calculadas :

$\therefore \quad 9\,000 - 625 = \boxed{8\,375}$ RPTA. B

33.- En el sistema de numeración cuaternario hay 3 072 números de "n" cifras. ¿Cuál es el valor de "n"?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

<u>Resolución</u>.-

Sea el número de "n" cifras : $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n}_{4}$

donde por el método combinatorio :

a_1	a_2	a_3	a_4	... a_n
↓	↓	↓	↓	↓
1	0	0	0	0
2	1	1	1	1
3	2	2	2	2
	3	3	3	3

Cant. de números = $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4 = 3\,072$

$4^{n-1} = 1024$

$\log_4 1024 = (n-1)$

$\rightarrow \dfrac{\log 1024}{\log 4} = n-1)$

$\therefore \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 4^n = 3 \cdot 4^5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = 5}$ RPTA. B

34.- ¿En qué sistema de numeración existen 90 números de la forma : $\overline{a(a+4)b(b+4)}$?

A) Nonario B) Duodecimal C) Hexadecimal D) Base 14 E) Base 15

<u>Resolución</u>.-

Sea "n" la base del sistema de numeración pedido; luego, como las cifras deben ser menores que la base :

$$a + 4 < n \;\Rightarrow\; a < n - 4 \quad \wedge \quad b + 4 < n \;\Rightarrow\; b < n - 4$$

Por el método combinatorio :

$$\begin{array}{cc}
a & b \\
\downarrow & \downarrow \\
 & 0 \\
1 & 1 \\
2 & 2 \\
3 & 3 \\
\vdots & \vdots \\
n-5 & n-5 \\
\hline
\end{array}$$

Cantidad de números $= (n-5) \cdot (n-4)$

Como existen 90 números (por dato) :

$$(n-5)(n-4) = \underbrace{90}_{9 \cdot 10} \Rightarrow n = 14$$

$\therefore$ **Base 14** RPTA. D

35.- ¿En qué sistema de numeración existen 180 numerales capicúa de 5 cifras?

A) Quinario B) Senario C) Nonario D) Octanario E) Decimal

Resolución.-

Los numerales capicúa son de la forma $\overline{abcba}_n$ donde "n" es la base del sistema de numeración pedido; entonces, por el método combinatorio :

$$\begin{array}{ccc}
a & b & c \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
3 & 3 & 3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
n-1 & n-1 & n-1 \\
\hline
\end{array}$$

Cantidad de números $= (n-1) \cdot n \cdot n$

luego, como la cantidad de números es, por dato, 180 :

$$(n-1) \cdot n \cdot n = \underbrace{180}_{5 \cdot 6 \cdot 6} \Rightarrow n = 6$$

$$\Downarrow$$

$\therefore$ **Sistema de numeración senario** RPTA. B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Sea n_1 ; n_2 y n_3 el número de términos de cada una de las siguientes sucesiones s_1, s_2 y s_3 respectivamente, donde :

s_1 : 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; ... ; 468

s_2 : 14 ; 18 ; 22 ; 26 ; ... ; 186

s_3 : 2 ; 9 ; 16 ; 23 ; ... ; 93

Hallar : $n_1 + n_2 + n_3$

A) 498 B) 488 C) 512 D) 489 E) 524

2.- Sean a y b los últimos términos de cada serie s_1 y s_2 respectivamente :

s_1 : 13 ; 18 ; 23 ; 28 ; ... (53 términos)

s_2 : 2 ; 11 ; 20 ; 29 ; ... (48 términos)

Hallar : $b - a$

A) 152 B) 153 C) 154 D) 151 E) 150

3.- Si la diferencia de los términos de lugar 73 y 58 de una progresión aritmética es 90. El décimo quinto término es 104. Calcular el vigésimo término.

A) 186 B) 194 C) 186 D) 144 E) 134

4.- Señalar cuántos términos tiene la siguiente progresión aritmética :

$$78 \,;\, \overline{ab} \,;\, \overline{ac} \,;\, \ldots \,;\, \overline{abc}$$

sabiendo además que : $a + b + c = 19$

A) 151 B) 152 C) 153 D) 154 E) 155

5.- Calcular $a + b + n$ en la siguiente progresión aritmética :

$$\overline{a3}_n \,;\, \overline{a5}_n \,;\, \overline{(a+1)1}_n \,;\, \overline{4b}_n \,;\, \ldots$$

A) 12 B) 15 C) 17 D) 18 E) 19

6.- En la siguiente progresión aritmética, que consta de 33 términos, determinar la suma del primer y último término :

$$\overline{3a7} \,;\, \overline{3a9} \,;\, \ldots$$

(La suma de cifras del último término es 7)

A) 665 B) 667 C) 776 D) 778 E) 887

7.- En la siguiente progresión aritmética :

$$31 \,;\, \ldots \,;\, \overline{abc} \,;\, 139 \,;\, \ldots \,;\, \overline{(2a)59}$$

El número de términos que hay desde 31 hasta 139 excede en 1 al número de términos que hay entre 139 y $\overline{(2a)59}$. Determinar el valor de $a + b + c$.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

8.- ¿Cuántos números del sistema decimal se representan con 3 cifras, tanto en el sistema octanario como en el sistema senario?

A) 150 B) 151 C) 152 D) 153 E) 154

9.- ¿Cuántos términos tiene la siguiente progresión aritmética?

$$\overline{ab}_n \,;\, \overline{ba}_{n+1} \,;\, 88_{n+2} \,;\, \ldots \,;\, \overline{64(n+1)}_9$$

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

10.- Un hombre tiene que pagar una deuda de S/. 3 600 en 40 pagos mensuales cuya diferencia mes a mes es constante. Cuando ya había cancelado 30 de las mensualidades fallece dejando una tercera parte de la deuda sin pagar. ¿Cuál fue el último importe que pagó?

A) 51 B) 131 C) 133 D) 127 E) 109

11.- ¿Cuantas cifras se emplearán al enumerar las siguientes secuencias?

(I) 39 ; 41 ; 43 ; ... ; 931

(II) 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 640

Dar la suma de ambos resultados.

A) 3 128 B) 3 222 C) 3 122

D) 3 424 E) 3 548

12.- Al escribir la serie de los números naturales a partir de 1 se emplearon 5 213 cifras en total. ¿Cuál es el último número escrito?

A) 1 570 B) 1 560 C) 1 540
D) 1 520 E) 1 580

13.- Al enumerar la primera mitad de las páginas de un libro se utilizó 702 cifras. ¿Cuántas cifras se empleó en todo el libro?.

A) 1 404 B) 1 418 C) 1 510
D) 1 512 E) 1 516

14.- En la paginacion de las 38 primeras hojas de un libro se ha usado la sexta parte de la cantidad de cifras que se emplean en la paginación total. El número de hojas del libro será :

A) 322 B) 135 C) 161 D) 228 E) 114

15.- ¿Cuántas páginas tiene un libro si en sus 100 últimas páginas se han utilizado 283 tipos de imprenta?

A) 180 B) 181 C) 182 D) 183 E) 184

16.- De un libro de 500 hojas se arrancan 5 hojas seguidas notándose que en las hojas que quedan se habían utilizado, 2 866 tipos, en su enumeración. Determine el número de la primera página arrancada.

A) 95 B) 96 C) 97 D) 98 E) 99

17.- De un libro de 321 hojas se arrancaron cierto número de hojas del principio, observándose que en las páginas restantes se usaron 1 679 tipos de imprenta. ¿Cuántas hojas se arrancaron?

A) 26 B) 27 C) 36 D) 37 E) 38

18.- ¿Cuántas páginas de un libro se podrán enumerar con el doble del número de cifras que se utilizan para enumerar un libro de 500 páginas?

A) 962 B) 972 C) 964 D) 948 E) 965

19.- Considere un folleto formato medio oficio elaborado con papel tamaño oficio. Al numerarlo se observa que una de las hojas tamaño oficio está numerado : 35 ; 36 ; 799 y 800. ¿Cuántas cifras se escribieron al enumerar las páginas del folleto?

A) 2 192 B) 2 394 C) 3 052
D) 2 564 E) 2 794

20.- Para numerar un libro se necesitan 855 cifras. Si se le divide en 3 capítulos de tal forma que la numeración de cada capítulo comienza en 1, siendo la diferencia de páginas entre dos capítulos sucesivos de 22 páginas. Hallar cuántas cifras, de más de menos, se necesitarán para su enumeración con respectivo a la forma inicial.

A) 200 más B) 200 menos C) 202 más
D) 202 menos E) 147 menos

21.- ¿Cuántos numerales naturales de 3 cifras existen que no utilizan la cifra 2 ni la cifra 3 en su escritura?

A) 800 B) 900 C) 810 D) 512 E) 448

22.- ¿Cuántos "capicúas" de 7 cifras, cuya suma de cifras sea impar, existen en el sistema de numeración decimal?

A) 4 050 B) 5 400 C) 5 040
D) 4 500 E) 4 000

23.- ¿Cuántos números de 3 cifras del sistema decimal tienen exactamente una cifra que pertenece a A?

$$A = \{2 ; 3 ; 4 ; 5\}$$

A) 384 B) 675 C) 225 D) 450 E) 288

24.- ¿Cuántas cifras se emplearán al enumerar todos los números pares mayores que 5 000 y menores que 15 000 que se pueden formar con las cifras :

$$0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 \text{ y } 8?$$

A) 4 124 B) 1 416 C) 3 672
D) 3 542 E) 4 700

25.- ¿Cuántos números de 3 cifras, diferentes entre sí, existen en el sistema de numeración heptanario?

A) 120 B) 180 C) 210 D) 250 E) 144

26.- ¿Cuántos números, capicúas pares de 5 cifras; tal que las 3 primeras sean diferente entre sí, existen en el sistema de numeración heptanario?

A) 100 B) 75 C) 120 D) 105 E) 117

27.- ¿Cuántos numeros de 3 cifras de la base 8 utilizan la cifra 2 en su escritura?

A) 162 B) 172 C) 146 D) 154 E) 108

28.- ¿Cuántos números de 3 cifras tienen alguna cifra 2 o alguna cifra 4 en su escritura?

A) 452 B) 252 C) 352
D) 180 E) 300

29.- ¿Cuántos números de 3 cifras tienen por lo menos una cifra que pertenece a A en su escritura?

$$A = \{2 ; 3 ; 4 ; 5\}$$

A) 180 B) 720 C) 360 D) 600 E) 540

30.- ¿Cuántos números de 4 cifras de la base 7, tienen por lo menos dos cifras iguales?

A) 720 B) 1 250 C) 1 344
D) 1 338 E) 1 348

31.- ¿Cuántos números de 4 cifras mayores que 4 000, terminan en 0 ó en 7 ?

A) 1 200 B) 599 C) 1 199
D) 600 E) 1 800

32.- ¿Cuántos números de 4 cifras mayores que 3 000 se puede formar con las cifras:

$$0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 \text{ y } 9 \text{ ?}$$

A) 3 071 B) 2 080 C) 2 058
D) 3 072 E) 2 688

33.- ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con la cifra :

$$1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 \text{ y } 9$$

de tal manera que el producto de la cuarta y la segunda cifra sea 18?

A) 216 B) 432 C) 864
D) 1 728 E) 3 456

34.- En cierto sistema de numeración, de todos los números que se escriben con 4 cifras, hay 20 que son capicúas. ¿Cuántos no son capicúas?

A) 280 B) 480 C) 380
D) 580 E) 600

35.- ¿En qué sistema de numeración existen 648 numeros de la forma :

$$\overline{a(a+2)\,b(b-2)\,c(c-1)\,(c+1)} \text{ ?}$$

A) Duodecimal D) Undecimal
B) Hexadecimal E) Nonario
C) Decimal

5

CUATRO OPERACIONES

5.1 ADICION

A. FÓRMULA PARA SUMAR NÚMEROS EN PROGRESIÓN ARITMETICA.

$$S = \frac{(1^{er}\text{ término} + \text{Ultimo término})(\text{número de términos})}{2}$$

Ejemplo : Calcular : $S = 5 + 12 + 19 + ... + 278$

Resolución : Nótese que la razón es 7 y además :

$$\text{Número de términos} = \frac{278-5}{7} + 1 = 40$$

Luego : $S = \dfrac{(5+278)40}{2} \Rightarrow S = 5\,660$

B. SUMAS IMPORTANTES.

B1) Suma de los "n" primeros números enteros positivos

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

B2) Suma de los "n" primeros números pares positivos

$$S_p = 2 + 4 + 6 + ... + (2n) = n\,(n + 1)$$

B3) Suma de los "n" primeros números impares positivos

$$S_I = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

B4) Suma de los "n" primeros números cuadrados perfectos ($\neq 0$)

$$S_{n^2} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

B5) Suma de los "n" primeros números cubos perfectos ($\neq 0$)

$$S_{n^B} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

B6) Suma de los "n" primeros productos de dos numeros consecutivos.

$$S = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

B7) Suma de las "n" primeras potencias naturales de un número A.

$$S = A^0 + A^1 + A^2 + A^3 + \dots + A^{n-1} = \frac{A^n - 1}{A - 1}$$

B8) Sumas triangulares.

a) Dadas las siguientes sumas :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$
$$S_2 = 2 + 3 + 4 + \dots + n$$
$$S_3 = 3 + 4 + \dots + n$$
$$\vdots$$

Se cumple que :

$$\Rightarrow \quad S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b) Dadas las siguientes sumas :

$$S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$
$$S_2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$
$$S_3 = 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$
$$\vdots$$

Se cumple que :

$$\Rightarrow \quad S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Calcular el valor de "S" si : $S = 1 \times 5 + 2 \times 6 + 3 \times 7 + ... + 20 \times 24$

A) 3640 ***B) 3590*** ***C) 3710*** ***D) 3774*** ***E) 3910***

Resolución.-

Escribiendo a los sumandos en forma conveniente :

$$S = 1\,(1 + 4) + 2\,(2 + 4) + 3\,(3 + 4) + ... + 20\,(20 + 4)$$

Efectuando operaciones :

$$S = 1^2 + 1 \times 4 + 2^2 + 2 \times 4 + 3^2 + 3 \times 4 + ... + 20^2 + 20 \times 4$$

Agrupando : $S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 20^2) + 4\,(1 + 2 + 3 + ... + 20)$

Utilizando las fórmulas de suma de números enteros positivos y de cuadrados perfectos :

$$S = \frac{20(21)(41)}{6} + 4 \times \frac{20(21)}{2}$$

$\therefore$ $S = 3710$ RPTA. C

2.- Indicar el valor de "K" que hace posible que la suma de los términos de la siguiente progresión aritmética : $K\,;\,K + 6\,;\,K + 12\,;\,...\,;\,TK$

A) 17 ***B) 18*** ***C) 19*** ***D) 20*** ***E) 21***

Resolución.-

Como la razón es 6, el número de términos es : $\dfrac{7K - K}{6} + 1 = K + 1$

Entonces, por la fórmula de la suma de números en progresión aritmética :

$$\frac{(K + 7K)(K + 1)}{2} = 1680$$

Efectuando y simplificando : $K\,(K + 1) = 420$

$$\therefore \quad K = 20 \qquad \text{RPTA. D}$$

3.- Calcular la suma de todos los términos de :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{array}$$

A) $2n^2$ ***B)*** n^3 ***C)*** $2n^3 - 1$

D) $n^3 - 1$ ***E)*** $3n^2$

Resolución.-

Notemos que en cada fila hay "n" números; entonces aplicando la fórmula de la suma de números en progresión aritmética para cada una, tendremos :

$$S = \frac{(1+n)n}{2} + \frac{(2+n+1)n}{2} + \frac{(3+n+2)n}{2} + \ldots + \frac{(n+2n-1)n}{2}$$

Efectuando las operaciones entre paréntesis y sacando factor común : $\frac{n}{2}$, tendremos :

$$S = \frac{n}{2}\left[(1+n)+(3+n)+(5+n)+\ldots+(3n-1)\right]$$

Aplicamos, nuevamente la fórmula para sumar números en progresión aritmética :

$$S = \frac{n}{2}\left[\frac{(1+n+3n-1)n}{2}\right]$$

$\Rightarrow$ $S = n^3$ RPTA. B

4.- Si : a + b + c = 14; hallar : M = $\overline{ab3}$ + $\overline{c2b}$ + $\overline{4ac}$ + $\overline{bca}$

A) 1554 B) 1777 C) 1754 D) 1977 E) 1654

Resolución.-

Ordenando a los sumandos de M en columna para sumar orden por orden, se obtiene el resultado de la suma :

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & \\ & a & b & 3 \quad + \\ & c & 2 & b \\ & 4 & a & c \\ & b & c & a \\ \hline 1 & 9 & 7 & 7 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} = 14 \text{ (dato)}$$

$M = 1977$ RPTA. D

5.- Hallar : x + y + a ; si : $\overline{a1x}$ + $\overline{a2x}$ + $\overline{a3x}$ + ... + $\overline{a7x}$ = $\overline{38y1}$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Resolución.-

Sumando orden por orden :

$$7 \text{ sumandos} \left\{ \begin{array}{cccc} & a & 1 & x \quad + \\ & a & 2 & x \\ & a & 3 & x \\ & & \vdots & \\ & a & 7 & x \\ \hline 3 & 8 & y & 1 \end{array} \right.$$

* En el 1^{er} orden : $7 \times x = ...1$

Luego : $x = 3$, pues , $7 \times 3 = 21$ (pongo 1 llevo 2)

* En el 2^{do} orden : $2 + (1 + 2 + 3 + ... + 7) = 2 + \dfrac{7(8)}{2} = 30$ (pongo 0 llevo 3)

$$\Rightarrow \quad y = 0$$

* En el 3^{er} orden : $3 + 7 \times a = 38$

$$7 \times a = 35 \quad \Rightarrow \quad a = 5$$

$$\therefore \quad a + x + y = 8 \qquad \text{RPTA. C}$$

6.- Hallar "c" si : $\overline{a74b} + \overline{c7a} + \overline{5ba2} = \overline{bba68}$

A) 4 ***B) 7*** ***C) 5*** ***D) 8*** ***E) 6***

<u>Resolución</u>.-

Escribimos a los números uno debajo de otro para sumar orden por orden :

$$\begin{array}{rrrrr} & a & 7 & 4 & b \; + \\ & & c & 7 & a \\ & 5 & b & a & 2 \\ \hline b & b & a & 6 & 8 \end{array}$$

* En el 1^{er} orden : $b + a + 2 = 8$

$$\Rightarrow \quad a + b = 6$$

* En el 2^{do} orden : $4 + 7 + a = ...6$

$$\Downarrow$$

$$a = 5 \quad \Rightarrow \quad b = 1 \quad \text{(llevamos 1 al } 3^{er} \text{ orden)}$$

* En el 3^{er} orden : $1 + 7 + c = ...a \quad \Rightarrow \quad (1 + 7 + c) + 1 = ...5$

$$\therefore \quad c = 6 \qquad \text{RPTA. E}$$

7.- Hallar (m + n) si se cumple que : $\overline{nm} + \overline{mn} + 352 = \overline{nmn}$

A) 12 ***B) 14*** ***C) 15*** ***D) 8*** ***E) 13***

<u>Resolución</u>.-

Colocamos a los números en forma vertical para sumar orden por orden :

$$\begin{array}{rrr} & n & m \; + \\ & m & n \\ 3 & 5 & 2 \\ \hline n & m & n \end{array}$$

* En el 1^{er} orden : $m + n + 2 = \ldots n$

$m + 2 = \ldots n - n$

$m + 2 = \ldots 0$

$\Rightarrow \quad m = 8$ (llevamos 1)

* En el 2^{do} orden : $1 + n + m + 5 = \ldots m$

$n + 6 = \ldots m - m$

$n + 6 = \ldots 0$

$\Rightarrow \quad n = 4$

$\therefore \quad m + n = 12$ RPTA. A

8.- Sabiendo que : $\overline{21ab} + \overline{24ab} + \overline{27ab} + \ldots + \overline{69ab} = \overline{xyz63}$. ¿Cuál es el valor de : $a+b+x+y+z$?

A) 27 B) 28 C) 29 D) 30 E) 31

<u>Resolución</u>.-

Colocamos a los sumandos en forma vertical para sumar orden por orden :

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 1 & a & b \; + \\ & 2 & 4 & a & b \\ & 2 & 7 & a & b \\ & & \vdots & & \\ & 6 & 9 & a & b \\ \hline x & y & z & 6 & 3 \end{array}$$

* El número de sumandos será : $\dfrac{69-21}{3} + 1 = 17$

* En el 1^{er} orden : $17 \times b \ldots 3$

Luego : $b = 9$, pues : $17 \times 9 = 153$ (pongo 3 llevo 15)

* En el 2^{do} orden : $17 \times a + 15 = \ldots 6$

Luego : $a = 3$, pues : $17 \times 3 + 15 = 66$ (pongo 6 llevo 6)

* En el 3^{er} y 4^{to} orden : $\underbrace{(21+24+27+\ldots+69)} + 6 = xyz$

$$\frac{(21+69)17}{2} + 6 = xyz$$

$$771 = xyz \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 7 \\ z = 1 \end{cases}$$

$\therefore \quad a + b + x + y + z = 27$ RPTA. A

9.- Hallar la suma de las 3 últimas cifras de la siguiente suma : 3 + 53 + 353 + 5353 + ... ; si dicha sumatoria tiene 24 sumandos.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Resolución.-

Colocando a los sumandos en forma vertical para sumar orden por orden :

$$24 \text{ sumandos} \left\{ \begin{array}{r} 3\ + \\ 53\ \ \\ 353\ \ \\ 5353\ \ \\ \vdots\ \ \end{array} \right.$$

* En el 1^{er} orden : $3 \times 24 = 72$ (pongo 2 llevo 7)

* En el 2^{do} orden : $5 \times 23 + 7 = 122$ (pongo 2 llevo 12)

* En el 3^{er} orden : $3 \times 22 + 12 = 78$ (pongo 8 llevo 7)

Luego la suma termina en : 822

$\therefore \quad 8 + 2 + 2 = 12$ RPTA. C

10.- Determinar la suma de cifras del resultado de la siguiente adición :

$$7 + 97 + 997 + ... + \underbrace{999...997}_{60\,cifras}$$

A) 67 B) 68 C) 69 D) 70 E) 71

Resolución.-

Escribiendo cada sumando en forma conveniente :

$$\begin{array}{rcrl} 7 & = & 10 & -\ 3 \\ 97 & = & 100 & -\ 3 \\ 997 & = & 1000 & -\ 3 \\ \vdots & & \vdots & \\ \underbrace{999...997}_{60\,cifras} & = & 1\,\underbrace{00...0000}_{60\,cifras\,"0"} & -\ 3 \end{array}$$

Sumando verticalmente se tendrá : $\underbrace{111...111}_{60\,cifras\,"1"}\,0 - 3\,(60)$

Restando orden por orden :

$$\begin{array}{r} 111...11110\ - \\ 180\ \ \\ \hline \underbrace{111...1}_{57\ cifras\ "1"}0930\ \ \end{array}$$

$\therefore$ Suma de cifras $= 57 + 9 + 3 + 0 =$ 69 RPTA. C

11.- La suma de todos los números de "n" cifras cuyo producto de cifras es 5, termina en 42. Calcular el valor de "n" sabiendo que es un número de 2 cifras.

A) 15 **B) 16** **C) 17** **D) 18** **E) 19**

Resolución.-

La suma será :

$$\text{"}n\text{" números} : \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{111...115}^{\text{"}n\text{" cifras}} + \\ 111...151 \\ 111...511 \\ \vdots \\ 115...111 \\ 151...111 \\ 115...111 \end{array} \right.$$
$$\overline{\quad......42}$$

Del 1^{er} y 2^{do} orden se puede concluir : $5 + (n - 1) = 22$

$\therefore \quad n = 18$ RPTA. D

12.- Se tiene la suma : $\overline{abcde} + \overline{edcba} = \overline{9x8yz}$; además se sabe que :

$$a^2 + b^2 + e^2 = c^3 + d^2 + 5 \quad ; \quad y \; ;$$

$$a > b > c > d > e > 1$$

Calcular : $x + y + z$.

A) 24 **B) 25** **C) 26** **D) 27** **E) 28**

Resolución.-

Ordenando la suma :

$$\begin{array}{l} a\ b\ c\ d\ e\ + \\ e\ d\ c\ b\ a \\ \hline 9\ x\ 8\ y\ z \end{array}$$

A partir de la desigualdad dada podemos inferir que $c > 9$, luego en el 3^{er} orden :

$$2 \times c = 8 \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

Luego, como d y e son menores que "c" pero mayores que 1; tendremos que :

$$d = 3 \quad \wedge \quad e = 2$$

En el 5^{to} orden : $a + e = 9 \quad \Rightarrow \quad a + 2 = 9 \quad \Rightarrow \quad a = 7$

Por dato : $a^2 + b^2 + e^2 = c^3 + d^2 + 5$

Reemplazando : $7^2 + b^2 + 2^2 = 4^3 + 3^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad b = 5$

Entonces, la suma será : $75\,432 + 23\,457 = 98\,889$ $\begin{cases} x=8 \\ y=8 \\ z=9 \end{cases}$

$\therefore \quad x + y + z = \boxed{25}$ RPTA. B

13.- La suma de los 6 números de 3 cifras distintas que pueden formarse con las cifras a, b y c (a > b > c) es 4 218. Si la suma de los 3 números mayores excede a la suma de los otros 3 en 792, hallar : $\dfrac{a \times b}{c}$

A) 7 B) 14 C) 21 D) 28 E) 56

<u>Resolución</u>.-

Ordenando de mayor a menor, los 6 números serán :

$$\begin{array}{r} a\;b\;c\;+ \\ a\;c\;b \\ b\;a\;c \\ b\;c\;a \\ c\;a\;b \\ c\;b\;a \\ \hline 4\;2\;1\;8 \end{array}$$

En el 1^{er} orden notamos que : $2(a + b + c) = 38$

$\Rightarrow \quad a + b + c = 19 \quad ...(\alpha)$

Por dato se sabe que la suma de los 3 mayores, más la suma de los 3 menores es 4 218

Asimismo, la suma de los 3 mayores excede en 792 a la suma de los 3 menores.

Luego la suma de los 3 mayores es : $\dfrac{4\,218 + 792}{2} = 2\,505$

Luego : $\begin{array}{r} a\,b\,c\,+ \\ a\,c\,b \\ b\,a\,c \\ \hline 2\,5\,0\,5 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 1^{er} \text{ orden : } 2c + b = 15 & ...(\beta) \\ 3^{er} \text{ orden : } 2a + b = 23 & ...(\gamma) \end{cases}$

Los únicos valores que cumplen (α) , (β) y (γ) son :

$$a = 8 \quad \wedge \quad b = 7 \quad \wedge \quad c = 4$$

$\therefore \quad \dfrac{a.b}{c} = \dfrac{(8)(7)}{4} = \boxed{14}$ RPTA. B

14.- Disponemos únicamente de las cifras : 0 ; 3 ; 4 ; 7 ; 8 y 9 . Hallar la suma de los números pares de 3 cifras que pueden formarse.

A) 60 810 B) 39 960 C) 51 615 D) 61 938 E) 62 716

Resolución.-

En primer lugar calcularemos, por el método combinatorio, la cantidad de números :

$$\begin{array}{cccl} & \overline{a\,b\,c} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 3 & 0 & 0 & \\ 4 & 3 & 4 & \left.\right\} \text{cifras pares} \\ 7 & 4 & 8 & \\ 8 & 7 & \vdots & \\ 9 & 8 & \vdots & \\ \vdots & 9 & \vdots & \\ \hline 5 \; \times & 6 \; \times & 3 & = 90 \text{ números posibles} \end{array}$$

Puesto que la suma se puede calcular orden por orden, tendremos :

* En el 1er orden : $\frac{90}{3}(0 + 4 + 8) = 360$

* En el 2do orden : $\frac{90}{6}(0 + 3 + + 4 + 7 + 8 + 9) = 465$

* En el 3er orden : $\frac{90}{5}(3 + 4 + 7 + 8 + 9) = 558$

Entonces la suma de esos números será :

$$\begin{array}{r} 360 + \\ 465 \\ 558 \\ \hline 60810 \end{array}$$

$\therefore$ $\boxed{60\,810}$ RPTA. A

15.- Hallar la suma de los números de 3 cifras que tengan por lo menos una cifra par y por lo menos una cifra impar.

A) 280 775 ***B) 370 775*** ***C) 300 675*** ***D) 380 775*** ***E) 360 775***

Resolución.-

En primer lugar calculamos la cantidad de números de 3 cifras que tienen por lo menos una cifra par y por lo menos una cifra impar, utilizando para ello la siguientes relación y el método combinatorio.

$$\left(\begin{array}{c}\text{Total de números}\\ \text{de 3 cifras}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Total de números}\\ \text{de 3 cifras pares}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Total de números}\\ \text{de 3 cifras impares}\end{array}\right) \quad ... (\alpha)$$

$$\begin{array}{ccc} \overline{abc} & \overline{abc} & abc \\ \downarrow \; \downarrow \; \downarrow & \downarrow \; \downarrow \; \downarrow & \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \\ \underbrace{9 \times 10 \times 10}_{900\,\#s} & \underbrace{4 \times 5 \times 5}_{100\,\#s} & \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{125\,\#s} \end{array}$$

Reemplazando estos resultados en (α) diremos existen : 900 - 100 - 125 = 675 , numeros 3 cifras que tienen por lo menos una cifra par y por lo menos una cifra impar.

La suma de estos números se calcula de manera similar :

$$\begin{pmatrix}\text{Suma de todos los} \\ \text{números de 3 cifras}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Suma de los números} \\ \text{de 3 cifras pares}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Suma de los números} \\ \text{de 3 cifras impares}\end{pmatrix} \quad ...(\beta)$$

$\Downarrow$

* En el 1^er^ y 2^do^ orden la suma es :

$$\frac{900}{10}(0+1+2+3+...+9) =$$

$$= 90\left(\frac{9\times10}{2}\right) = 4050$$

* En el 3^er^ orden la suma es :

$$\frac{900}{9}(1+2+3+..+9) =$$

$$= 100\left(\frac{9\times10}{2}\right) = 450$$

* La suma será :

$$\begin{array}{r} 4050 + \\ 4050 \\ 4500 \\ \hline 494550 \end{array}$$

$\Downarrow$

* En el 1^er^ y 2^do^ orden la suma es :

$$\frac{100}{5}(0+2+4+6+8) =$$

$$= 20\ (20) = 400$$

* En el 3^er^ orden la suma es :

$$\frac{100}{4}(2+4+6+8) =$$

$$= 25\ (20) = 500$$

* La suma será :

$$\begin{array}{r} 400 + \\ 400 \\ 500 \\ \hline 54400 \end{array}$$

$\Downarrow$

* En el 1^er^ , 2^do^ y 3^er^ orden la suma es :

$$\frac{125}{5}(1+3+5+7+9) =$$

$$= 25\ (25) = 625$$

* La suma será :

$$\begin{array}{r} 625 + \\ 625 \\ 625 \\ \hline 69375 \end{array}$$

Finalmente, reemplazando estos resultados en (β), la respuesta será :

494 550 - 54 400 - 69 375 = **370 775** RPTA. B

5.2 SUSTRACCION

$M - S = D$; Donde : M $\Rightarrow$ Minuendo
S $\Rightarrow$ Sustraendo
D $\Rightarrow$ Diferencia

PROPIEDAD (A)

$$M = S + D$$

PROPIEDAD (B)

$$M + S + D = 2M$$

PROPIEDAD (C)

«Si a un número de 3 cifras (*con su cifra de centenas mayor que su cifra de unidades*) se le resta el número que resulta de invertir el orden de sus cifras, entonces en la diferencia, la cifra de decenas siempre es 9 y la suma de sus cifras de unidades y centenas es 9».

Sea el número $\overline{abc}$ donde $a > c$; si : $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mnp}$, se cumple :

$$n = 9$$
$$m + p = 9$$
$$a - c = m + 1$$

Demostración :

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,- \\ \underline{c\,b\,a} \\ m\,n\,p \end{array}$$

1er orden : $10 + c - a = p$ .... (α)
2do orden : $10 + b - 1 - b = n$ .... (β)
3er orden : $a - 1 - c = m$ .... (γ)

En (β) : $10 + b - 1 - b = n \Rightarrow n = 9$
(α) + (γ) : $10 + c - a + a - 1 - c = p + m \Rightarrow m + p = 9$
En (γ) : $a - 1 - c = m \Rightarrow a - c = m + 1$

Ejemplo : Hallar : $a^2 + c^2$; si : $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mn2}$

Solución :

De acuerdo con la propiedad expuesta, se tendrá que :

$$n = 9$$

$$m + 2 = 9 \quad \Rightarrow \quad m = 7$$

$$a - c = m + 1 \quad \Rightarrow \quad a - c = 8$$

Luego : $a = 9 \quad \wedge \quad c = 1$ (únicas posibilidades)

$$\therefore \quad a^2 + c^2 = 9^2 + 1^2 = 82$$

NOTA :

En el sistema de numeración de Base "n" ; si : $\overline{abc}_n - \overline{cba}_n = \overline{xyz}_n$, se cumple :

$$\boxed{\begin{aligned} y &= n - 1 \\ x + z &= n - 1 \\ a - c &= x + 1 \end{aligned}}$$

METODO DE SUMAS Y DIFERENCIAS

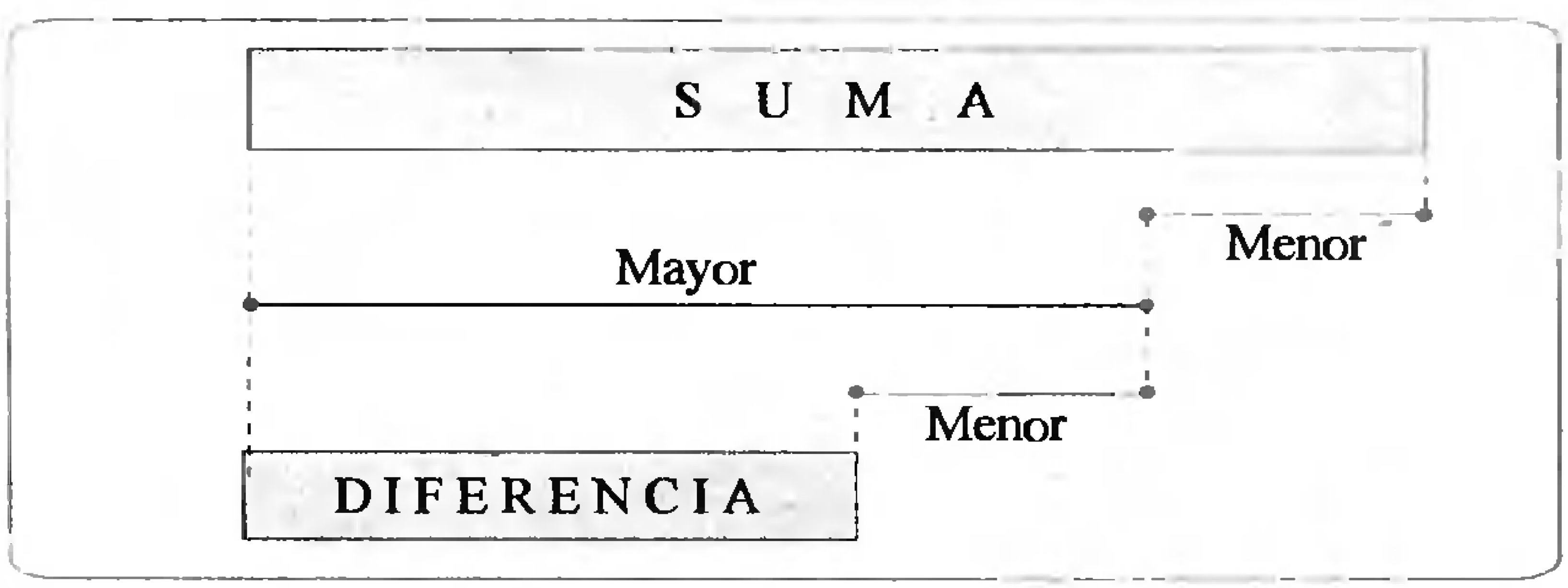
Se emplea cuando el problema a resolver tiene como datos tanto la suma como la diferencia de las cantidades desconocidas. Por lo general el cálculo de estas cantidades se hace operando mecánicamente con los datos (Suma y Diferencia) de la manera como se indica en el siguiente cuadro :

$$\text{Cantidad mayor} = \frac{\textbf{Suma} + \textbf{Diferencia}}{\mathbf{2}}$$

$$\text{Cantidad menor} = \frac{\textbf{Suma} - \textbf{Diferencia}}{\mathbf{2}}$$

ESQUEMA ILUSTRATIVO :

Representando por barras a la suma y diferencia de dos números: Mayor y menor, tendremos el siguiente esquema :



De esto observarás que :

1) Suma - Diferencia = dos veces menor
2) Diferencia + Menor = Mayor

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

16.- En una sustracción, la suma de sus 3 términos es 142 . Si la suma del sustraendo más el minuendo es 100. hallar la diferencia.

A) 26 B) 71 C) 29 D) 42 E) 13

Resolución.-

Sea la sustraccion : $M - S = D \Rightarrow M = S + D$

Por dato : $M + S + D = 142$

$2M = 142$

$\therefore M = 71$

Por dato : $S + M = 100 \Rightarrow S + 71 = 100 \Rightarrow S = 29$

Finalmente : $M - S = D \Rightarrow 71 - 29 = D$

$\therefore D = 42$ RPTA D

17.- En una sustracción, al sustraendo le sumamos 140 y le restamos el cuádruple de la suma del sustraendo más la diferencia, obteniéndose como resultado el minuendo. Sabiendo que el sustraendo es el mayor número posible cuya suma de cifras es 3 y que la diferencia es un número positivo; hallar la suma de los términos de dicha sustracción .

A) 68 B) 72 C) 78 D) 84 E) 56

Resolución.-

Sea la sustracción : $M - S = D \Rightarrow M = S + D$

Por dato : $S + 140 - 4(S + D) = M$

$S + 140 - 4M = M$

$\Rightarrow S + 140 = 5M$

Como el sustraendo tiene como suma de cifras a 3 : $S = 30$

Entonces : $30 + 140 = 5M \Rightarrow M = 34$

$\therefore M + S + D = 2M = 2(34) = 68$ RPTA. A

18.- En una resta, si al minuendo se le agrega 2 unidades en las decenas y al sustraendo se le aumenta 5 unidades en las centenas, entonces la diferencia disminuye en :

A) 52 B) 520 C) 502 D) 480 E) 370

Resolución.-

Sea la resta : $M - S = D$

Si al minuendo se le agrega 2 unidades en las decenas, el nuevo minuendo será :

$$M + 2\,(10) = M + 20$$

Si al sustraendo se le aumenta 5 unidades en las centenas, el nuevo sustraendo será :

$$S + 5(100) = S + 500$$

Entonces la nueva resta será :

$$(M + 20) - (S + 500) = (M - S) - 480 = D - 480$$

$\therefore$ La diferencia disminuye en 480 RPTA. D

19.- Al sumar a un número de 3 cifras el que resulta de invertir el orden de sus cifras se obtuvo 1 291; pero si en vez de haberse sumado se hubiera restado, el resultado hubiese terminado en 7. Hallar el mayor de los números.

A) 791 B) 794 C) 792 D) 793 E) 795

Resolución.-

Considerando que el número buscado es : $\overline{abc}$

Por dato : $\overline{abc} + \overline{cba} = 1291$

Asimismo : $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xy7}$

$= 297$ (Por propiedad (c))

Luego : $\overline{abc} = \dfrac{1291+297}{2}$

$\therefore$ $\overline{abc} = 794$ RPTA. B

20.- Un número de tres cifras $\overline{abc}$ es tal que : $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mn3}$

Si se sabe que la suma de sus cifras es 19; hallar el valor de : $a^2 + b^2 + c^3$

A) 150 B) 151 C) 152 D) 149 E) 153

Resolución.-

Por propiedad : $n = 9 \quad \wedge \quad m = 6$

Entonces : $\overline{abc} - \overline{cba} = 693 \Rightarrow a - c = 6 + 1 = 7$

Como : $a + b + c = 19$

Entonces : $a = 9$ $c = 12$ $b = 8$

$\therefore$ $a^2 + b^2 + c^3 = 153$ RPTA. E

21.- Si cada asterisco es una cifra en :

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 3**$$

$$\overline{abc} + \overline{cba} = *35*$$

Hallar el valor de : 2a + b + c

A) 18 ***B) 24*** ***C) 27*** ***D) 21*** ***E) 19***

<u>Resolución</u>.-

Según la propiedad (c), se tendrá que : $\overline{abc} - \overline{cba} = 396 \wedge a - c = 4$ ... (α)

Ahora en la suma :

$$\begin{array}{r} abc\ + \\ cba \\ \hline *35* \end{array}$$

Es fácil reconocer que : $b = 7 \wedge a + c = 12$ ... (β)

Resolviendo (α) y (β) : $a = 8$ y $c = 4$

$\therefore$ $2a + b + c = 2(8) + 7 + 4 = 27$ RPTA. C

22.- Considerando que todos los números que intervienen en el presente problema están expresados en base "n", calcular la cifra de 3^{er} orden de la diferencia de un numeral de 3 cifras y el que resulta de invertir el orden de sus cifras, sabiendo que, en dicha diferencia la suma de cifras es 17 y la cifra de 3^{er} orden excede en 2 a la cifra de 1^{er} orden.

A) 4 ***B) 5*** ***C) 3*** ***D) 6*** ***E) 7***

<u>Resolución</u>.-

Sea $\overline{abc}_n$ el número de 3 cifras que buscamos. Ahora según los datos se sabe que :

$\overline{abc}_n - \overline{cba}_n = \overline{xyz}_n$; donde nuestra incógnita es : $x = ?$

* $x + y + z = 17_n$ (pues todos los números del problema están en Base "n")

* $x - z = 2$

De acuerdo con la propiedad (c) : $y = n - 1 \wedge x + z = n - 1$

Como : $x + y + z = 17_n \Rightarrow (n - 1) + (n - 1) = n + 7 \Rightarrow n = 9$

Finalmente : $x + z = 8$

$x - z = 2 \Rightarrow x = 5$ RPTA. B

23.- *La diferencia de 2 números de 3 cifras significativas es 291. ¿Cuál será la diferencia de dichos números con el orden de sus cifras invertido?*

A) 191 ***B) 93*** ***C) 293*** ***D) 43*** ***E) 91***

<u>Resolución</u>.-

Analizando la resta, orden por orden :
$$\begin{array}{r} abc\,- \\ \underline{def\;\;} \\ 291\;\; \end{array}$$

* En el 1^{er} orden : $c - f = 1$ ... (α)

* En el 2^{do} orden : $10 + b - e = 9$ ... (β)

$\Rightarrow$ $e - b = 1$

* En el 3^{er} orden : $a - 1 - d = 2$

$\Rightarrow$ $a - d = 3$ ... (γ)

A partir de la resta pedida, tendremos :
$$\begin{array}{r} cba\,- \\ \underline{fed\;\;} \end{array}$$

Según (γ), en el 1^{er} orden : $a - d = 3$

Según (β), en el 2^{do} orden : $10 + b - e = 9$

Según (α), en el 3^{er} orden : $c - 1 - f = 0$

$$\therefore \quad \overline{cba} - \overline{fed} = 93 \qquad \text{RPTA. B}$$

24.- *¿Cuántos números de 3 cifras cumplen que al sumarles o restarles 424, en ambos casos se obtengan capicúas de 3 cifras?.*

A) 5 ***B) 6*** ***C) 7*** ***D) 8*** ***E) 9***

<u>Resolución</u>.-

Considerando a $\overline{abc}$ como uno de los números de 3 cifras se tendrá :

$$\overline{abc} + 424 = \overline{ded}$$

$$\overline{abc} - 424 = \overline{fgf}$$

d > f

Restando miembro a miembro : $848 = \overline{ded} - \overline{fgf}$

Es decir :
$$\begin{array}{r} d\;e\;d\;- \\ \underline{f\;g\;f\;\;\;} \\ 8\;4\;8\;\;\; \end{array}$$

* En el 1^{er} orden : $d - f = 8$

Luego : $d = 9 \quad \wedge \quad f = 1$

* En el 2^{do} orden : $\quad e - g = 4$

$$\begin{array}{cc} e & g \\ \downarrow & \downarrow \\ 4 & 0 \\ 5 & 1 \\ 6 & 2 \\ 7 & 3 \\ 8 & 4 \\ 9 & 5 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}4\\5\\6\\7\\8\\9\end{array}}\right\} \text{6 posibilidades}$$

Como hay 6 pares de números capicúa que cumplen el problema, entonces :

$\therefore$ **Existen 6 números** RPTA. B

25.- ¿Cuántos numerales de 4 cifras, distintas y diferentes de cero existen, tal que restados en el que resulta de invertir el orden de sus cifras dan en su diferencia, un numeral capicúa de 4 cifras.

A) 16 ***B) 15*** ***C) 18*** ***D) 12*** ***E) 10***

<u>Resolución</u>.-

Segun el enunciado :

$$\begin{array}{r} \overline{abcd}\ - \\ \underline{\overline{dcba}} \\ \overline{xyyx} \end{array}$$

$a > d \quad b > c$

* Del 1^{er} y 4^{to} orden : $\quad 10 + d - a = x$

$$a - d = x \quad \ldots (\theta)$$

Sumando miembro a miembro : $\quad x = 5$

* Del 2^{do} y 3^{er} orden : $\quad 10 + c - 1 - b = y$

$$b - 1 - c = y \quad \ldots (\gamma)$$

Sumando miembro a miembro : $\quad y = 4$

Luego en (θ) y (γ) :

$$\begin{array}{cc} a & d \\ \downarrow & \downarrow \\ 6 & 1 \\ 7 & 2 \\ 8 & 3 \\ 9 & 4 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}6\\7\\8\\9\end{array}}\right\} \text{4 posibilidades} \quad (a - d = 5) \quad \wedge \quad \begin{array}{cc} b & c \\ \downarrow & \downarrow \\ 6 & 1 \\ 7 & 2 \\ 8 & 3 \\ 9 & 4 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}6\\7\\8\\9\end{array}}\right\} \text{4 posibilidades} \quad (b - c = 5)$$

4

(4 - 1)

Como las cifras deben ser distintas concluimos que :

$\therefore$ **Cantidad de números = 4 × 3 = 12** RPTA. D

4 × (4 - 1)

5.3 MULTIPLICACION

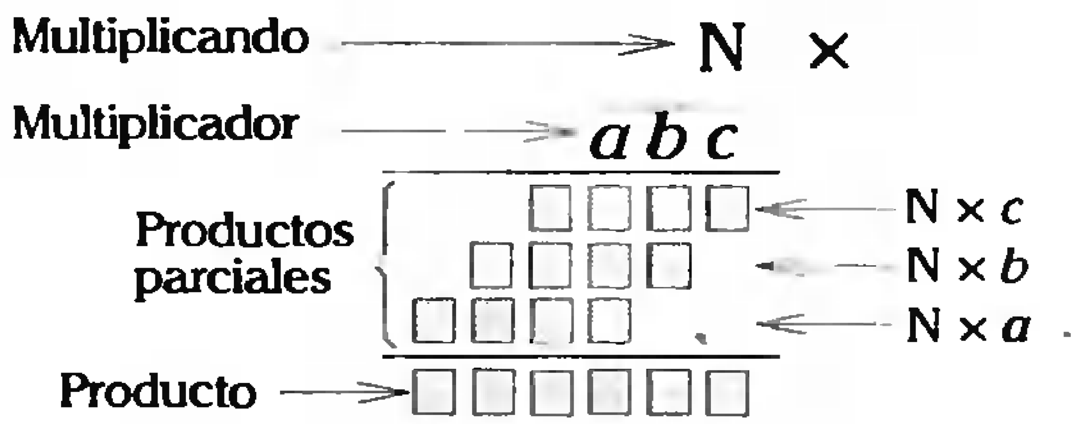
$$M \times m = P \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{M+M+M\ldots.+M}_{"m" \text{ veces}} = P$$

Donde : M $\Rightarrow$ Multiplicando

m $\Rightarrow$ Multiplicador

P $\Rightarrow$ Producto

ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN



Ejemplo : ***Hallar la suma de las cifras del producto en :***

$$\begin{array}{r} .1.\ \times \\ \underline{3.2} \\ .3. \\ 3.2. \\ \underline{.2.5} \\ 1.8.30 \end{array}$$

A) 20 ***B) 21*** ***C) 22*** ***D) 23*** ***E) 24***

<u>Resolución</u>.-

$$\begin{array}{r} a1b\ \times \\ \underline{3c2} \\ .30 \\ 3.20 \\ \underline{.2.5} \\ 1.8.30 \end{array}$$

* Como : $2\,.\,\overline{a1b} = \overline{.30} \quad \rightarrow \quad b = 5$

* Como : $c\,.\,\overline{a15} = \overline{3.20} \quad \rightarrow \quad c = 8$

* Ya que : $8 \times \overline{a15} = \overline{3.20} \quad \rightarrow \quad a = 4$

Entonces el producto será : $415\ .\ 382 = 15\,8530$

$$\therefore \quad \Sigma \text{ cifras } = 22$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

26.- El producto de dos números es 720; si se añaden 6 unidades al multiplicando, el producto es entonces 816 ¿Cuál es el multiplicador?

A) 72 B) 36 C) 45 D) 16 E) 32

Resolución.-

La multiplicación será : $M \times m = 720$ ... (*)

Por dato : $(M + 6) \times m = 816$

Efectuando : $\underbrace{M \times m} + 6 \times m = 816$

De (*) se tiene : $720 + 6 \times m = 816$

$$6 \times m = 96$$

$$\therefore \quad m = 16 \qquad \text{RPTA. D}$$

27.- En la multiplicación de dos números, si a uno de ellos se le quita 3 decenas, el producto disminuye en 10 830. Hallar uno de dichos números.

A) 320 B) 361 C) 412 D) 317 E) 326

Resolución.-

Considerando la multiplicación : $M \times m = P$

Por dato : $(M - 30) \times m = P - 10\,830$

Efectuando operaciones : $M \times m - 30 \times m = P - 10\,830$

$$P - 30 \times m = P - 10\,830$$

$$30 \times m = 10\,830$$

$$\therefore \quad m = 361 \qquad \text{RPTA. B}$$

28.- Hallar : E = (b + c) - (a + d), si en la multiplicación : $\overline{abcd}$ × 95, la diferencia de los productos parciales es 15 372.

A) 12 B) 6 C) 3 D) 8 E) 10

Resolución.-

En la multiplicación $\overline{abcd} \times 95$ los productos parciales son : $\overline{abcd} \times 5$ y $\overline{abcd} \times 9$

Por dato, se sabe que : $9 \times \overline{abcd} - 5 \times \overline{abcd} = 15\,372$

Entonces : $\overline{abcd} = 3843$

De donde se puede reconocer que : $a = 3$, $b = 8$, $c = \dot{4}$ $\wedge$ $d = 3$

$\therefore$ $E = (b + c) - (a + d) = 6$ RPTA. B

29.- Al multiplicar un número por 47 se comete el error de colocar los productos parciales, uno debajo del otro sin dejar un lugar vacío a la derecha, obteniéndose como resultado 5 973. Calcular el producto correcto.

A) 28 543 ***B) 25 532*** ***C) 25 521*** ***D) 25 510*** ***E) 26 312***

Resolución.-

El esquema de multiplicación realizado sería :

$$\begin{array}{r l} N \times & \\ 47 & \\ \hline \boxed{} & \leftarrow N \times 7 \\ \boxed{} & \leftarrow N \times 4 \\ \hline 5973 & \end{array}$$

Nótese que : $7 \times N + 4 \times N = 5973 \Rightarrow N = 543$

Entonces el producto correcto será : $543 \times 47 = 25\,521$ RPTA. C

30.- El producto de un número por "a" es 448 y por "b" es 336 . Hallar el producto de este número por el mayor número capicúa de 3 cifras que se puede formar con "a" y "b".

A) 48 608 ***B) 54 302*** ***C) 51 608*** ***D) 38 416*** ***E) 27 548***

Resolución.-

Sea "N" el número, entonces por datos : $N \times a = 448$

$N \times b = 336$

Nótese que $a > b$, luego el mayor número capicúa de tres cifras que se puede formar con a y b es : $\overline{aba}$

Entonces :

$$\begin{array}{r l} N \times & \\ \overline{aba} & \\ \hline 448 & \leftarrow N \times a \\ 336 & \leftarrow N \times b \\ 448 & \leftarrow N \times a \\ \hline 48608 & \end{array}$$

$\therefore$ $N \times \overline{aba} = 48\,608$ RPTA. A

31.- Hallar un número de la forma $\overline{aba}$ que multiplicado por 79 de como producto, un número que termina en $\overline{bcd3}$. Dar como respuesta : a + b + c + d.

A) 20 B) 19 C) 17 D) 24 E) 21

Resolución.-

La multiplicación será :

$$\begin{array}{rl} \overline{abcd} \times & \\ 79 & \\ \hline 4783 & \leftarrow \overline{abcd}\times 9 \\ 609 & \leftarrow \overline{abcd}\times 7 \\ \hline \overline{bcd3} & \end{array}$$

* En el 1er orden : $d \times 9 = \_3 \rightarrow d = 7$

* En el 2do orden : $6 + c \times 9 = \_8 \rightarrow c = 8$

* En el 3er orden : $7 + b \times 9 = \_7 \rightarrow b = 0$

* En el 4to orden : $a \times 9 = \_4 \rightarrow a = 6$

$\therefore$ $a + b + c + d = 21$ RPTA. E

32.- Si multiplicamos $\overline{abc}$ por $\overline{n0n}$ (0 = cero), observamos que el producto total es ** 435 (cada asterisco representa una cifra). Si a < 9 ¿Cuál es el valor de : a + b + c ?.

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

Resolución.-

La multiplicación será :

$$\begin{array}{rl} \overline{abc} \times & \\ \overline{n0n} & \\ \hline 935 & \leftarrow \overline{abc}\times n \\ 935 & \leftarrow \overline{abc}\times n \\ \hline {*}{*}435 & \end{array}$$

Luego : $\overline{abc} \times n = 935 = 187 \times 5$

Entonces : $a = 1$; $b = 8$; $c = 7$ $\wedge$ $n = 5$

$\therefore$ $a + b + c = 16$ RPTA. B

33.- Encontrar un número de 5 cifras que al ser multiplicado por 4, de un producto formado por las mismas cifras del original, pero dispuestas en orden invertido. Dar la suma de cifras de dicho número.

A) 21 B) 22 C) 25 D) 27 E) 29

Resolución.-

Según el enunciado del problema se tiene :

$$\begin{array}{r} \overline{abcde} \times \\ 4 \\ \hline \overline{edcba} \end{array}$$

* En el 1er orden : $4 \times e = \underline{\ \ }a$ $\Rightarrow$ $e = 8$

* En el 5to orden : $4 \times a < 10$ $\Rightarrow$ $a = 2$

* En el 2do orden : $4 \times d + 3 = \underline{\ \ }b$ $\Rightarrow$ $b = 1$

* En el 4to orden : $4 \times b < 10$ $\Rightarrow$ $d = 7$

* En el 3er orden : $4 \times c + 3 = 39$ $\Rightarrow$ $c = 9$

Así el número será : $\overline{abcde} = 21\,978$

$\therefore$ $\boxed{a + b + c + d + e = 27}$ RPTA. D

34.- Un número es tal que, multiplicado por : 2 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; y 11, resultan, como productos, números cuyas formas son : $\overline{abcdef}$; $\overline{efabcd}$; $\overline{bcdefa}$; $\overline{fabcde}$ y $\overline{defabc}$. Determinar el número sabiendo que : a + b + c + d + e + f = 27 .

A) 76 963 B) 76 023 C) 79 623 D) 76 293 E) 76 923

Resolución.-

Considerando a "N" como el número buscado se tendrá :

$$\begin{aligned} N \times 2 &= \overline{abcdef} \\ N \times 5 &= \overline{cdefab} \\ N \times 6 &= \overline{efabcd} \\ N \times 7 &= \overline{bcdefa} \\ N \times 8 &= \overline{fabcde} \\ N \times 11 &= \overline{defabc} \end{aligned}$$

Si efectuamos la suma miembro a miembro, se observará que en cada orden se repite la condición dada : $a + b + c + d + e + f = 27$.

Por tal razón obtendremos : $N \times 39 = 2\,999\,997$

$\therefore$ $\boxed{N = 76\,923}$ RPTA. E

5.4 DIVISION EN $\mathbb{Z}$ (DIVISIÓN ENTERA)

Es aquel caso particular de la división, en el cual todos sus términosson números enteros .

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots \}$$

Esquema :

Dividendo ($\mathrm{D} \in \mathbb{Z}$) → D

Divisor ($d \in \mathbb{Z}^+$) → d

Cociente ($q \in \mathbb{Z}$) → q

Resto o Residuo ($r \in \mathbb{Z}^+$) ($0 \le r < d$) → r

$$\begin{array}{l|l} \mathrm{D} & d \\ \cline{2-2} & q \\ r & \end{array}$$

EXPRESIÓN GENERAL :

$$\mathrm{D} = d \times q + r$$

CLASES DE DIVISIÓN :

(1) División Exacta ($r = 0$)

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{D} & d \\ \cline{2-2} 0 & q \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{D} = d \times q$$

Ejemplo :

$$\begin{array}{c|c} 476 & 14 \\ \cline{2-2} 0 & 34 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 476 = 14 \times 34$$

(II) División Inexacta ($r \neq 0$)

(A) Por Defecto

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{D} & d \\ \cline{2-2} & q \\ r & \end{array} \qquad \mathrm{D} = d \times q + r \quad \ldots (\alpha)$$

$$(0 < r < d)$$

Ejemplo :

$$\begin{array}{c|c} 138 & 19 \\ \cline{2-2} & 7 \\ 5 & \end{array}$$

$$138 = 19 \times 7 + 5$$

(B) Por Exceso

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{D} & d \\ \cline{2-2} & q+1 \\ r' & \end{array} \qquad \mathrm{D} = d\,(q+1) - r' \quad \ldots (\beta)$$

$$(0 < r' < d)$$

Ejemplo :

$$\begin{array}{c|c} 138 & 19 \\ \cline{2-2} & 8 \\ 14 & \end{array}$$

$$138 = 19 \times 8 - 14$$

PROPIEDADES DE LA DIVISION INEXACTA EN $\mathbb{Z}$

1. *En toda división inexacta la suma del resto por defecto y el resto por exceso es igual al divisor.*

$$\boxed{r + r' = d}$$

<u>Demostración</u> :

De (α) : $\quad D = d\,(q) + r$

De (β) : $\quad D = d\,(q + 1) - r'$

Igualando :

$$d \times q + r = d\,(q + 1) - r'$$

$$d \times q + r = d \times q + d - r'$$

$$r = d - r'$$

$$\therefore \quad r + r' = d$$

2. *Si en una división INEXACTA, se multiplica al dividendo y al divisor por un mismo número, el cociente no se altera, pero el resto queda multiplicado por ese número :*

Por defecto :

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} & q \\ r & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|l} D \times n & d \times n \\ \cline{2-2} & q \\ r \times n & \end{array}$$

Por exceso :

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} & q + 1 \\ r' & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|l} D \times n & d \times n \\ \cline{2-2} & q + 1 \\ r' \times n & \end{array}$$

3. *En una división inexacta, el resto máximo es menor en 1 que el divisor y el resto mínimo es la unidad.*

$$\boxed{\begin{array}{l} R_{\text{máximo}} = d - 1 \\ R_{\text{mínimo}} = 1 \end{array}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO IV)

35.- La suma del dividendo y el divisor de una división inexacta es 31 veces el resto y la diferencia de los mismos es 21 veces dicho resto. ¿Cuál es el cociente de dicha división?

A) 9 B) 7 C) 5 D) 12 E) 15

Resolución.-

Sea la división : $\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} & q \\ r & \end{array}$; donde : $D = d \times q + r$ ... (α)

De acuerdo con los datos : $D + d = 31\,r$

$D - d = 21\,r$

De donde : $D = 26\,r \quad \wedge \quad d = 5\,r$

Reemplazando en (α) : $26\,r = 5\,r \times q + r$

$26\,r = r\,(5\,q + 1)$

$\therefore \quad \boxed{q = 5}$ RPTA. C

36.- El cociente de la división de un número entero entre otro número entero es 19 y el resto, 26. Si se suman el dividendo, el divisor, el cociente y el resto, la suma obtenida es 1 011 ¿Cuál es el dividendo?.

A) 825 B) 872 C) 919 D) 966 E) 1 013

Resolución.-

La división será : $\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} & 19 \\ 26 & \end{array}$

Donde : $D = d \times 19 + 26$ ... (1)

Por dato se sabe que : $D + d + 19 + 26 = 1011$ ... (2)

De (1) en (2) : $\overbrace{19d + 26} + d + 19 + 26 = 1011 \Rightarrow d = 47$

Luego en (1) : $D = (47)\,19 + 26$

$\therefore \quad \boxed{D = 919}$ RPTA. C

37.- La suma de los 4 términos de una división entera inexacta es igual a 544. Hallar el dividendo si el cociente es 12 y el resto, la mitad del divisor.

A) 564 ***B) 470*** ***C) 462*** ***D) 480*** ***E) 475***

<u>Resolución</u>.-

Según los datos; la división es : $\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} & 12 \\ d/2 & \end{array}$

Donde : $D = d \times 12 + \dfrac{d}{2}$ ... (α)

Por dato también : $D + d + 12 + \dfrac{d}{2} = 544$ ... (β)

De (α) en (β) : $\overbrace{12d+\dfrac{d}{2}} + d + 12 + \dfrac{d}{2} = 544 \Rightarrow d = 38$

Remplazando en (α) : $D = (38)\,12 + \dfrac{38}{2}$

$\therefore$ $D = 475$ RPTA. E

38.- El cociente y el resto de una división inexacta son 17 y 19 respectivamente. Pero si al dividendo se le aumenta 49 unidades, el cociente sería 21 y el resto 6. Hallar la suma de dividendo y divisor primitivos.

A) 238 ***B) 240*** ***C) 244*** ***D) 241*** ***E) 243***

<u>Resolución</u>.-

Según los datos :

Divisón inicial: $\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} & 17 \\ 9 & \end{array}$

Nueva División: $\begin{array}{l|l} D+49 & d \\ \cline{2-2} & 21 \\ 6 & \end{array}$

División inicial : $D = d \times 17 + 9$ ... (α)

En la nueva división : $D + 49 = d \times 21 + 6$ ... (β)

De (α) en (β) : $\overbrace{d \times 17 + 9} + 49 = d \times 21 + 6 \Rightarrow d = 13$

Sustituyendo en (α) : $D = 13\,(17) + 9 \Rightarrow D = 230$

$\therefore$ $D + d = 243$ RPTA. E

39.- En una división entera inexacta, el divisor es 23 y el resto 4 ¿Cuál es la máxima cantidad que se le puede agregar al divisor de manera que el cociente aumente en 3?

A) 65 ***B) 42*** ***C) 66*** ***D) 88*** ***E) 87***

Resolución.-

De acuerdo con los datos :

División Inicial	Nueva división
$\begin{array}{r\|l} D & 23 \\ \cline{2-2} & q \\ 4 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} D+x & 23 \\ \cline{2-2} & q+3 \\ 22 & \end{array}$

Para que "x" sea máximo, el resto debe ser máximo.

En la división inicial : $D = 23q + 4$ ... (α)

En la nueva división : $D + x = 23(q + 3) + 22$ ... (β)

De (α) en (β) : $\overbrace{23q+4+x} = 23q + 69 + 22$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = 87}$ RPTA. E

40.- En una división inexacta el dividendo es 508 y el cociente es 13. ¿Cuántos valores puede tomar el divisor?

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Sea la división : $\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} & 13 \\ r & \end{array}$

De : $508 = d \,.\, 13 + r$; siendo : $d > r$

Luego : $13 \,.\, d < 508 \Rightarrow d \leq 39$

Asimismo : $13\,d + d > 508 \Rightarrow d > 36$

$\Rightarrow d \in \{37 ; 38 ; 39\}$

$\therefore$ $\boxed{\text{"}d\text{" puede tomar 3 valores}}$ RPTA. C

41.- En una división entera inexacta, el resto es 13; si al dividendo se le multiplica por 4 y al divisor por 2, entonces en la nueva división el resto es 16. ¿Cuál es el divisor original?

A) 16 ***B) 18*** ***C) 20*** ***D) 17*** ***E) 24***

Resolución.-

De acuerdo a los datos podemos establecer los siguientes algoritmos :

División inicial

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} & q \\ 13 & \end{array}$$

Nueva división

$$\begin{array}{r|l} 4\times D & 2\times d \\ \cline{2-2} & q_1 \\ 16 & \end{array}$$

* Nótese que : $d > 13$

* En la división inicial : $D = d \cdot q + 13$ ... (α)

* En la nueva división : $4D = 2d \cdot q_1 + 16$ ... (β)

De (α) en (β) : $4\overbrace{(dq+13)}^{\downarrow} = 2d \cdot q_1 + 16$

Efectuando : $4dq + 52 = 2d \cdot q_1 + 16$

$$36 = 2d(q_1 - 2q)$$

$$18 = d(q_1 - 2q)$$

Luego, reconocemos que la única posibilidad es : $d = 18$ RPTA. B

42.- En una división entera inexacta, si al dividendo y al divisor se les multiplica por 4, el resto por defecto aumenta en 96 ; pero si se dividen entre 3, el resto por exceso disminuye en 60. Si la suma de los cocientes, por defecto y por exceso es 37; hallar el dividendo.

A) 2 196 ***B) 2 228*** ***C) 1 956*** ***D) 3 128*** ***E) 2 000***

<u>Resolución</u>.-

* Si al dividendo y al divisor se le multiplica por 4, el resto por defecto queda también multiplicado por 4, entonces aumenta a 3 veces su valor, luego :

$3r = 96 \rightarrow$ $r = \dfrac{96}{3} \Rightarrow r = 32$ $r + 3r = r'$

$r + 96 = r'$

* Si al dividendo y al divisor se le divide por 3, el resto por exceso se divide también por 3, el resto por exceso se divide también por 3, entonces disminuye a 2/3 de su valor, luego :

$\dfrac{2}{3}r' = 60 \Rightarrow r' = 90$ $r - \dfrac{2}{3}r = r'$

Por Propiedad : $r + r' = d \Rightarrow d = 122$

Dado que los cocientes, por defecto y por exceso son siempre números consecutivos, luego :

$$q + (q + 1) = 37 \Rightarrow q = 18$$

Finalmente : $D = d \cdot q + r$

$$D = (122)(18) + 32$$

$\therefore$ $D = 2\ 228$ RPTA. B

43.- *La suma de los 4 términos de una división es 479. Si se multiplica al dividendo y al divisor por 6, la nueva suma de términos es 2 789 . Hallar la suma de todos los dividendos que cumplen con dicha condición.*

A) 854 ***B) 481*** ***C) 428*** ***D) 894*** ***E) 468***

<u>Resolución</u>.-

División Inicial

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} & q \\ r & \end{array}$$

División Final

$$\begin{array}{r|l} 6\times D & 6\times d \\ \cline{2-2} & q \\ 6\times r & \end{array}$$

Donde : $D = d \times q + r$ ... (α)

Por datos en la división inicial : $D + d + q + r = 479$ ... (β)

Asimismo en la división final : $6D + 6d + q + 6r = 2\,789$ ... (γ)

Multiplicando (β) por 6 y restándole (γ) :

$$5q = 85 \quad \Rightarrow \quad q = 17 \qquad ... (*)$$

Reemplazando en (α) : $D = d(17) + r$ ... (**)

De (*) y (**) en (β) : $17d + r + d + 17 + r = 479$

$$18d + 2r = 462$$

$$9d + r = 231 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 9d < 231 \Rightarrow d \leq 25 \\ 9d + d > 231 \Rightarrow d > 23 \end{cases}$$

* Si : $d = 24 \quad \Rightarrow \quad r = 15 \quad \Rightarrow \quad D = (24)(17) + 15 = 423$

* Si : $d = 25 \quad \Rightarrow \quad r = 6 \quad \Rightarrow \quad D = (25)(17) + 6 = 431$

$$\therefore \quad 423 + 431 = 854$$ RPTA. A

44.- *Si se realiza una división inexacta por defecto, la suma de los 4 términos es 847; pero, si dicha operación se hubiera realizado por exceso, la suma de los 4 términos hubiera sido 901, sabiendo que los cocientes suman 19; hallar el dividendo.*

A) 756 ***B) 806*** ***C) 587*** ***D) 743*** ***E) 692***

<u>Resolución</u>.-

Por Defecto

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} & q \\ r & \end{array}$$

Por Exceso

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} & q+1 \\ r' & \end{array}$$

Donde : $D = d\,.\,q + r$ ... (1) $\qquad D = d(q+1) - r'$ ... (2)

Por dato se sabe que : $q + (q + 1) = 19 \quad \Rightarrow \quad q = 9$

Entonces en (1) y (2) : $D = d(9) + r \quad \wedge \quad D = d(10) - r' \quad ...(*)$

También por dato : $D + d + q + r = 847 \quad ...(\alpha)$

Asimismo : $D + d + (q + 1) + r' = 901 \quad ...(\beta)$

De (*) en (β) : $\overbrace{10d - r'} + d + 10 + r' = 901 \quad \Rightarrow \quad d = 81 \quad ...(\gamma)$

De (γ) en (α) : $9(81) + r + 81 + 9 + r = 847 \quad \Rightarrow \quad r = 14$

$\therefore \quad \boxed{D = (81)(9) + 14 = 743}$ RPTA. D

45.- En una división entera inexacta : el resto por defecto, el resto por exceso, el resto máximo y el cociente por defecto forman una progresión aritmética de razón 5. ¿Cuál es el valor del dividendo?

A) 363 ***B) 360*** ***C) 368*** ***D) 385*** ***E) 272***

<u>Resolución</u>.-

Por Defecto

$$\begin{array}{c|l} D & \underline{d} \\ & q \\ r & \end{array}$$

Por Exceso

$$\begin{array}{c|l} D & \underline{d} \\ & q+1 \\ r' & \end{array}$$

Según los datos : $r = n \quad ...(1)$

$r' = n + 5 \quad ...(2)$

$d - 1 = n + 10 \quad \Rightarrow \quad d = n + 11 \quad ...(3)$

$q = n + 15 \quad ...(4)$

Por Propiedad : $r + r' = d \quad ...(5)$

Reemplazando (1), (2) y (3) en (5) : $n + (n + 5) = n + 11 \quad \Rightarrow \quad n = 6$

Luego en (3) : $d = 6 + 11 \quad \Rightarrow \quad d = 17$

Ahora en (4) : $q = 6 + 15 \quad \Rightarrow \quad q = 21$

Y en (1) : $r = 6$

Entonces : $D = d\,.\,q + r$

$D = (17)(21) + 6$

$\therefore \quad \boxed{D = 363}$ RPTA. A

46.- Hallar un número entero que dividido entre 150 de un resto por defecto que es el triple del cociente por exceso y un resto por exceso que es el cuádruple del cociente por defecto.

A) 3 128 ***B) 3 712*** ***C) 3 648*** ***D) 3 216*** ***E) 3 526***

Resolución.-

Sean las divisiones :

Por Defecto

$$\begin{array}{l|l} D & \underline{d} \\ & q \\ r & \end{array}$$

Por Exceso

$$\begin{array}{l|l} D & \underline{d} \\ & q+1 \\ r' & \end{array}$$

Por datos : $d = 150$ ... (1)

$r = 3(q+1)$ ... (2)

$r' = 4q$ ... (3)

Por Propiedad : $r + r' = d$ ... (4)

Reemplazando (1), (2) y (3) en (4) : $3(q+1) + 4q = 150 \Rightarrow q = 21$

Luego : $r = 3(21+1) \Rightarrow r = 66$

Finalmente : $D = d\,.\,q + r$ ... (*)

Ahora reemplazando en (*) : $D = (150)(21) + 66$

$\therefore$ $D = 3\ 216$ RPTA. D

47.- Al dividir dos números, una persona que lo hace por exceso da por respuesta el resto, otra persona revisa el resultado y asegura que el primero se excedió en 18 unidades al calcular el resto. Si las dos operaciones están bien hechas, calcular el dividendo si en la segunda operación el cociente es el triple del divisor y al resto le faltan 24 unidades para igualarse al divisor.

A) 1 806 ***B) 2 706*** ***C) 1 904*** ***D) 3 512*** ***E) 4 198***

Resolución.-

1^{ra} persona (Por Exceso)

$$\begin{array}{l|l} D & \underline{d} \\ & q+1 \\ r' & \end{array}$$

2^{da} persona (Por Defecto)

$$\begin{array}{l|l} D & \underline{d} \\ & q \\ r & \end{array}$$

Donde : $D = d(q+1) - r'$ $\wedge$ $D = d\,.\,q + r$

Según los datos : $r' - 18 = r$ ... (1)

Tamnbién : $q = 3d$ ... (2)

$r + 24 = d$ ... (3)

Como : $r + r' = d$ ... (4)

Igualando (3) y (4) : $r' = 24$

Luego : $r = 24 - 18 = 6$

Entonces : $d = r + r' = 30$

Por tanto : $q = 3d = 90$

$\therefore$ $\boxed{D = (30)(90) + 6 = 2\,706}$ RPTA. B

48.- En una división inexacta realizada por defecto y por exceso, al resto por exceso le faltan "n" unidades para ser igual al otro resto; al resto por defecto le faltan "2n" unidades para ser igual al divisor, mientras que al divisor le faltan "3n" unidades para ser igual al cociente. Si al cociente le faltan 1 410 unidades para ser igual al dividendo, hallar "n".

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

<u>Resolución</u>.-

Por Defecto: $\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} & q \\ r & \end{array}$

Por Exceso: $\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} & q+1 \\ r' & \end{array}$

Donde : $D = d \cdot q + r$ $\qquad$ $D = d(q+1) - r'$

Por datos :

$$\left.\begin{array}{r} r' + n = r \\ r + 2n = d \\ d + 3n = q \\ q + 1410 = D \ \ldots (\alpha) \end{array}\right\} \text{Como : } \boxed{r + r' = d} \quad \begin{array}{l} \to r' = 2n \\ \to r = 3n \\ \to d = 5n \\ \to q = 8n \end{array}$$

Como : $D = d \cdot q + r \quad \Rightarrow \quad D = (5n)(8n) + 3n \quad \Rightarrow \quad D = 40n^2 + 3n$

En (α) : $8n + 1410 = 40n^2 + 3n$

$1410 = 40n^2 - 5n$

$(\div 5) \Rightarrow 282 = n(8n - 1)$

$\therefore$ $\boxed{n = 6}$ RPTA. C

49.- En una división entera inexacta, cuyo dividendo es 5 355 se cumple que el divisor dista tanto del cociente como del resto. Hallar la suma del cociente, resto y divisor.

A) 64 B) 75 C) 196 D) 162 E) 148

Resolución.-

La división será : $\begin{array}{r|l} 5\,355 & d \\ \cline{2-2} & q \\ r & \end{array}$

Donde : $5\,355 = d \,.\, q + r$; y por dato : $d = \dfrac{q+r}{2} \Rightarrow r = 2d - q$. (α)

Reemplazando : $5\,355 = d\,.\,q + \overbrace{2d - q}^{\downarrow}$

$5\,355 = d(q + 2) - q$

Restando "2" a ambos miembros : $5\,353 = d(q + 2) - (q + 2)$

Luego : $\underbrace{5\,353}_{101 \times 53} = (q + 2)(d - 1) \Rightarrow 101 \times 53 = (q + 2)(d - 1)$

Si : $q + 2 = 101 \quad \wedge \quad d - 1 = 53$

$\Rightarrow \quad q = 99 \quad \wedge \quad d = 54$

En (α) : $2(54) = 99 + r \Rightarrow r = 9$

$\therefore$ $q + r + d = 162$ RPTA. D

50.- Determinar el menor número entero tal que multiplicado por 33, nos da un producto formado por solo cifras "Nº 7". Dar la suma de sus cifras.

A) 22 ***B) 23*** ***C) 24*** ***D) 25*** ***E) 26***

Resolución.-

Según el enunciado : $N \times 33 = 777 \ldots 7$

O lo que es lo mismo : $N = \dfrac{777\ldots7}{33}$

Efectuamos la división, agregando cifras "7" hasta que la división sea exacta, para asi tener el menor número formado por 7 :

$$\begin{array}{l|l} 777777 & 33 \\ \cline{2-2} \underline{66} & 23569 \\ 117 & \\ \underline{\ \ 99} & \\ \ \ 187 & \\ \ \ \underline{165} & \\ \ \ \ \ 227 & \\ \ \ \ \ \underline{198} & \\ \ \ \ \ \ \ 297 & \\ \ \ \ \ \ \ \underline{297} & \\ \ \ \ \ \ \ 000 & \end{array}$$

Finalmente : $N = 23\,569$

$\therefore$ Suma de cifras = 25 RPTA. D

5.5 COMPLEMENTO ARITMETICO DE UN NUMERAL

Sea N un número de "K" cifras, entonces se define el complemento aritmético de N : C. A. (N), a aquel número que se obtiene así :

$$C.A.(N) = 10^K - N$$

Ejemplos :

$C.A.(\underline{47}) = 10^2 - 47 = 53$
2 cifras

$C.A(\underline{272}) = 10^3 - 272 = 728$
3 cifras

$C.A.(\underline{5042}) = 104 - 5042 = 4958$
4 cifras

Método Práctico : A la primera cifra significativa, a partir de la derecha se le resta de 10 y a todas las cifras que quedan a la izquierda se les resta de 9. Si existen ceros al final del número, estos se conservan en el complemento aritmético.

Ejemplo :

$$C.A.(\overset{9}{5}\ \overset{9}{7}\ \overset{10}{2}) = \overset{(9-5)}{4}\ \ \overset{(9-7)}{2}\ \ \overset{(10-2)}{8}$$

En base a este ejemplo te presento los siguientes :

$$C.A.(\overset{9}{2}\,\overset{9}{0}\,\overset{9}{4}\,\overset{10}{3}) = 7\,957$$

$$C.A.(\overset{9}{2}\,\overset{9}{5}\,\overset{10}{7}\,0\,0) = 74\,300$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO V)

51.- *Un numeral de 3 cifras es tal que al restarle el doble de su complemento aritmético resulta 523. ¿Cuál es la suma de las cifras de dicho número?*

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Resolución.-

Sea el numeral : $\overline{abc}$

Según el dato : $\overline{abc} - 2\left[\text{C.A.}(\overline{abc})\right] = 523$

Por definición de C . A : $\overline{abc} - 2(10^3 - \overline{abc}) = 523$

Efectuando operaciones : $\overline{abc} = 841 \Rightarrow a = 8\,, b = 4 \wedge c = 1$

$\therefore \quad \boxed{a + b + c = 13}$ RPTA. D

52.- *Si : C . A $(\overline{abc})$ + C . A. $(\overline{cba}) = \overline{xyzw} - 2(\overline{abc})$*

Calcular : x + y + z + w ; si : a > c

A) 18 B) 16 C) 27 D) 20 E) 24

Resolución.-

Por definición de C. A. : $(10^3 - \overline{abc}) + (10^3 - \overline{cba}) = \overline{xyzw} - 2(\overline{abc})$

Efectuando se obtiene : $2\,000 - \overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyzw} - 2(\overline{abc})$

Transponiendo términos : $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyzw} - 2\,000$ ... (*)

De (*) podemos reconocer que : $x = 2$; luego : $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{yzw}$

Entonces por Propiedad (C) de Sustracción : $z = 9 \quad \wedge \quad y + w = 9$

$\therefore \quad \boxed{x + y + z + w = 20}$ RPTA. D

53.- *Dos números A y B tienen "n" cifras cada uno. Si el primero es el cuádruple de su complemento aritmético y el segundo es la cuarta parte de su complemento aritmético; hallar el valor (A + B).*

A) 10^n B) 10^{n+1} C) 10^{2n} D) 10^{n-1} E) 4×10^n

Resolución.-

Según los datos : $A = 4 \times \text{C . A. (A)}$ ... (α)

$B = \dfrac{1}{4} \times \text{C . A.}$ ... (β)

En (α) : $A = 4(10^n - A) \Rightarrow A = \frac{4}{5}(10^n)$

En (β) : $B = \frac{1}{4}(10^n - B) \Rightarrow B = \frac{1}{5}(10^n)$

Finalmente : $\boxed{A + B = 10^n}$ RPTA. A

54.- Hallar un número de dos cifras tal que su complemento aritmético sea igual al número de cifras que se requieren para escribir todos los números enteros positivos menores que dicho número de dos cifras. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 9 E) 10

<u>Resolución</u>.-

Si $\overline{ab}$ es un número de 2 cifras, los números enteros positivos menores que este número son:

$$1 ; 2 ; 3 ; .... ; \overline{ab} - 1$$

El número de cifras que se requieren para escribir esos números será :

$$\left[(\overline{ab}-1)+1\right] 2 - 11 \quad \text{(Recordando el capítulo anterior)}$$

Por dato : $C.A.(\overline{ab}) = \left[(\overline{ab}-1)+1\right]2 - 11$

Efectuando operaciones : $10^2 - \overline{ab} = (\overline{ab})2 - 11$

$$111 = 3(\overline{ab})$$

$$\overline{ab} = 37$$

$$\therefore \quad \boxed{a + b = 10} \qquad \text{RPTA. E}$$

55.- Si el número $\overline{ab7}$ se resta de su complemento aritmético, el resultado es un número de 3 cifras iguales. Dar (a + b).

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

<u>Resolución</u>.-

Según el dato : $C.A.(\overline{ab7}) - \overline{ab7} = \overline{xxx} \leftarrow$ (número de 3 cifras iguales)

Por definición de C. A. : $(10^3 - \overline{ab7}) - \overline{ab7} = \overline{xxx}$

$$\Rightarrow \quad 1\,000 - 2(\overline{ab7}) = \overline{xxx}$$

Nótese que $2(\overline{ab7})$ termina en 4 , luego : $1\,000 - 2(\overline{ab7})$ termina en 6, luego : $x = 4$

Entonces : $1\,000 - 2(\overline{ab7}) = 666$

Efectuando operaciones : $\overline{ab7} = 167$

Luego : $a = 1 \quad \wedge \quad b = 6$

Finalmente : $a + b = 7$ RPTA. D

56.- Encuentre un número de 4 cifras cuyo complemento aritmético sea igual a la suma de sus cifras. Dar como respuesta su menor cifra.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

<u>Resolución</u>.-

Sea el número de 4 cifras : $\overline{abcd}$

Por condición del problema : $C.A.(\overline{abcd}) = a + b + c + d$

Pero por definición de C. A. : $10^4 - \overline{abcd} = a + b + c + d$

$$10\,000 - \overline{abcd} = a + b = c + d \quad ...(*)$$

Como $(a + b + c + d)$ toma a 36 como valor máximo, se puede afirmar que :

$$a = 9 \quad \wedge \quad b = 9$$

Entonces al reemplazar en (*) : $1000 - \overline{99cd} = 9 + 9 + c + d$

Descomponiendo polinómicamente : $1000 - (9000 + 900 + 10c + d) = 18 + c + d$

Efectuando operaciones y despejando : $11c + 2d = 82$

Tanteando valores, obtenemos : $c = 6 \quad \wedge \quad d = 8$

$\therefore$ Menor cifra = 6 RPTA. C

57.- Se tiene un número de 4 cifras significativas, cuya suma de cifras es 21. ¿Cuál es la suma de las cifras de su complemento aritmético?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

<u>Resolución</u>.-

Considerando a $\overline{abcd}$ como el número de 4 cifras significativas, entonces :

$$a + b + c + d = 21$$

El complemento aritmético de $\overline{abcd}$ se puede calcular por el método práctico :

$$C.A.(\overline{abcd}) = \overline{(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)}$$

Entonces, la suma de las cifras del complemento aritmético será :

$$9 - a + 9 - b + 9 - c + 10 - d = 37 - (a + b + c + d)$$

Luego : $\quad$ Suma de cifras (C . A.) = 37 - 21

$\therefore \quad$ Suma de cifras (C . A.) = 16 $\qquad$ RPTA. D

58.- Con 3 cifras que suman 19, se forma un número de 3 cifras de tal manera que su complemento aritmético sea otro número de 3 cifras, pero consecutivas y crecientes. Hallar dicho número.

A) 577 $\qquad$ B) 766 $\qquad$ C) 676 $\qquad$ D) 757 $\qquad$ E) 874

<u>Resolución</u>.-

Sea $\overline{abc}$ el número buscado donde : $\quad a + b + c = 19 \qquad$ ... (*)

Por condición del problema : $\quad C.A.(\overline{abc}) = \overline{n(n+1)(n+2)}$

Y por el método práctico, se tiene : $\quad C.A.(\overline{abc}) = \overline{(9-a)(9-b)(10-c)}$

Luego : $\left.\begin{aligned} n &= 9 - a \\ n + 1 &= 9 - b \\ n + 2 &= 10 - c \end{aligned}\right\}$ Sumando miembro a miembro : $\quad 3n + 3 = 28 - (\underbrace{a + b + c}_{19 \text{ (por } \alpha)})$

$$\Rightarrow \quad n = 2$$

Reemplazando este dato obtenemos : $\quad a = 7 \qquad b = 6 \qquad c = 6$

$\therefore \quad \boxed{\overline{abc} = 766} \qquad$ RPTA. B

59.- La suma de los complementos aritméticos de los números :

$$\overline{1nn2}\ ;\ \overline{2nn3}\ ;\ \overline{3nn4}\ ;\ ....\ ;\ \overline{8nn9}\ ,\ \textit{es}\ 42\,196.$$

Calcular el valor de "n".

A) 3 $\qquad$ B) 2 $\qquad$ C) 5 $\qquad$ D) 6 $\qquad$ E) 7

<u>Resolución</u>.-

Aplicando el método práctico a cada número se logrará descubrir una regla de formación entre los resultados obtenidos. Veamos :

$$\begin{array}{lcr} \text{Número} & & \text{Complemento Aritmético} \\ \overline{1nn2} & \rightarrow & \overline{8(9-n)(9-n)8} \quad + \\ \overline{2nn3} & \rightarrow & \overline{7(9-n)(9-n)7} \quad\ \ \\ \overline{3nn4} & \rightarrow & \overline{6(9-n)(9-n)6} \quad\ \ \\ \vdots & & \vdots \qquad\qquad \\ \overline{8nn9} & \rightarrow & \overline{1(9-n)(9-n)1} \quad\ \ \\ \hline & & 4\ 2\ 1\ \quad 9\ \quad 6 \quad\ \ \end{array}$$

Efectuando las sumas por columnas tendremos :

En el 1er orden : $8 + 7 + 6 + ... + 1 = \dfrac{(8)(9)}{2} = 36$ (pongo 6 , llevo 3)

* En el 2do orden : $3 + 8\,(9 - n) = 59$

$\therefore \quad n = 2$ RPTA. B

60.- Cuántos números de 4 cifras significativas existen tales que su complemento aritmético sea igual al producto del complemento aritmético del número formado por sus dos primeras cifras por el complemento aritmético del número formado por sus dos últimas cifras.

A) 100 ***B) 90*** ***C) 81*** ***D) 72*** ***E) 64***

<u>Resolución</u>.-

Sea $\overline{abcd}$ el número de 4 cifras significativas que buscamos, luego por condición del problema se tendrá que :

$$C\,.\,A.\,(\overline{abcd}) = C\,.\,A.\,(\overline{ab}) \times C\,.\,A.\,(\overline{cd})$$

Por definición de C . A. : $10^4 - \overline{abcd} = (10^2 - \overline{ab})\,(10^2 - \overline{cd})$

$$10^4 - 100\overline{ab} - \overline{cd} = 104 - 100\,\overline{ab} - 100\,\overline{cd} + \overline{ab} \times \overline{cd}$$

$$99\,\overline{cd} = \overline{ab} \times \overline{cd} \quad \Rightarrow \quad \overline{ab} = 99$$

Luego, los números son de la forma : $\overline{99cd}$, de manera que para determinar la cantidad total de números con esta característica emplearemos el método combinatorio :

$$\begin{array}{cccc} 9 & 9 & c & d \\ & & \downarrow & \downarrow \\ & & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 3 & 3 \\ & & 1 & 1 \\ & & \vdots & \vdots \\ & & 9 & 9 \end{array}$$

$9 \times 9 = $ 81 números RPTA. C

5.6 DETERMINACION A PRIORI DE LA CANTIDAD DE CIERAS ENTERAS DE UN PRODUCTO Y UN COCIENTE

OBSERVACIONES PREVIAS :

Si "N" tiene 4 cifras $\Rightarrow$ $N \in \{1000 ; 1001 ; 1002 ; .... ; 9999\}$

Luego : $1000 \leq N < 10000$

$10^3 \leq N < 10^4$

Si "N" tienen 12 cifras $\Rightarrow$ $10^{11} \leq N < 10^{12}$

Si "N" tiene de 6 a 19 cifras $\Rightarrow$ $10^5 \leq N < 10^{19}$

Si "N" tiene entre 8 y 15 cifras $\Rightarrow$ $10^8 \leq N < 10^{14}$

Si : $10^7 \leq N \leqslant 10^8$ $\Rightarrow$ "N" tiene 8 cifras

Si : $10^6 \leq N < 10^{18}$ $\Rightarrow$ "N" tiene como minimo 7 cifras y como máximo 18 cifras

En general :

$$\boxed{10^m \leq N < 10^n} \Rightarrow \begin{cases} \text{mímino :} & m+1 \quad \text{cifras} \\ \text{máximo :} & n \quad \text{cifras} \end{cases}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO VI)

61.- Si : ***"A" es un número de "a" cifras***
"B" es un número de "b" cifras
"C" es un número de "c" cifras

¿Cuántas cifras, como máximo y como mínimo tendrá : D = A × B × C?

A) $\begin{matrix} mín: a+b+c \\ máx: a+b+c+3 \end{matrix}$ ***B)*** $\begin{matrix} mín: a+b+c+1 \\ máx: a+b+c \end{matrix}$ ***C)*** $\begin{matrix} mín: a+b+c-1 \\ máx: a+b+c \end{matrix}$

D) $\begin{matrix} mín: a+b+c-2 \\ máx: a+b+c \end{matrix}$ ***E)*** $\begin{matrix} mín: a+b+c-3 \\ máx: a+b+c+1 \end{matrix}$

Resolucion.-

Según el enunciado del problema :

A es un número de "a" cifras $\Rightarrow$ $10^{a-1} \leq A < 10^{a}$

B es un número de "b" cifras $\Rightarrow$ $10^{b-1} \leq B < 10^{b}$

C es un número de "c" cifras $\Rightarrow$ $10^{c-1} \leq C < 10^{c}$

Multiplicando miembro a miembro : $10^{a+b+c-3} \leq D < 10^{a+b+c}$

Luego : mínimo : $(a + b + c - 2)$ cifras
máximo : $(a + b + c)$ cifras RPTA. D

Observación .-

En general, sean los números : $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$

Cuyas cantidades de cifras respectivas son : $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$

Entonces el producto : $D = A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$, tendrá :

mínimo : $(k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_n - n + 1)$ cifras
máxima : $(k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_n)$ cifras

62.- Sean : ***"A" un número de 10 cifras***

"B" un número de 7 cifras

"C" un número de 12 cifras

¿Cuantas cifras, como mínimo y como máximo tendra : D = A . B . C?

A) max : 29 ***B) máx : 29*** ***C) máx : 28*** ***D) máx : 30*** ***E) máx : 30***
mín : 26 ***mín : 27*** ***mín : 26*** ***mín : 27*** ***mín : 26***

Resolución.-

Según la generalización anterior :

Cantidad máxima = 10 + 7 + 12 = 29 cifras
Cantidad mínima = 10 + 7 + 12 - 3 + 1 = 27 cifras

RPTA. B

63.- Si un número "A" tiene "x" cifras y otro número B tiene "y" cifras¿Cuántas cifras como mínimo y como máximo tendrá : $Q = \frac{A}{B}$?

A) máx : x - y + 1
mín : x - y

B) máx : x - y
mín : x - y + 1

C) máx : x + y - 1
mín : x - y - 2

D) máx : x - y - 1
mín : x - y - 2

E) máx : x - y + 1
mín : x - y - 1

Resolución.-

"A" tiene "x" cifras $\Rightarrow$ $10^{x-1} \leq A < 10^{x}$ ... (α)

"B" tiene "y" cifras $\Rightarrow$ $10^{y-1} \leq B < 10^{y}$

$\Rightarrow$ $10^{y} > B \geq 10^{y-1}$ ... (β)

Dividiendo miembro a miembro (α) $\div$ (β) : $10^{x-y-1} < Q < 10^{x-y+1}$

Luego :

Cantidad máxima = $x - y + 1$
Cantidad mínima = $x - y$

RPTA. A

64.- Dados dos números A y B que tienen 16 y 10 cifras respectivamente. Determinar la cantidad de cifras, máxima y mínima de : $Q = \frac{A}{B}$

A) máx : 6
mín : 5

B) máx : 7
mín : 5

C) máx : 7
mín : 6

D) máx : 6
mín : 4

E) máx : 8
mín : 6

Resolución.-

En base a la solución del problema anterior podemos afirmar que :

Cantidad máxima = 16 - 10 + 1 = 7 cifras
Cantidad mínima = 16 - 10 = 6 cifras

RPTA. C

65.- Sean los números : "A" que tiene 14 cifras
"B" que tiene de 12 a 19 cifras
"C" que tiene entre 6 y 12 cifras
"D" que tiene de 10 a 15 cifras

¿Cuántas cifras, como máximo y como mínimo, tendrá :

$$E = \frac{A^2 \times B^3 \times C^2}{D^4} \quad ?$$

A) máx : 72	***B) máx : 71***	***C) máx : 70***	***D) máx : 70***	***E) máx : 71***
mín : 13	***mín : 11***	***mín : 11***	***mín : 13***	***mín : 12***

Resolución.-

Según los datos :

$$10^{13} \leq A < 10^{14} \quad \Rightarrow \quad 10^{26} \leq A^2 < 10^{28}$$

$$10^{11} \leq B < 10^{19} \quad \Rightarrow \quad 10^{33} \leq B^3 < 10^{57}$$

$$10^{6} \leq C < 10^{11} \quad \Rightarrow \quad 10^{12} \leq C^2 < 10^{22}$$

Multiplicando, miembro a miembro :

$$10^{71} \leq A^2 \times B^3 \times C^2 < 10^{107} \qquad \ldots (\alpha)$$

También :

$$10^{9} \leq D < 10^{15}$$

$$\Rightarrow \quad 10^{34} \leq D^4 < 10^{60}$$

$$\Rightarrow \quad 10^{60} > D^4 \geq 10^{36} \qquad \ldots (\beta)$$

Dividiendo, miembro a miembro $(\alpha) \div (\beta)$: $10^{11} < E < 10^{71}$

Luego :

Cantidad máxima = 71 cifras	
Cantidad mínima = 12 cifras	RPTA. E

5.7 OPERACIONES COMBINADAS

A) FALSA SUPOSICIÓN

66.- A una fiesta ingresan en total 350 personas, entre hombres y mujeres, recaudándose S/. 1 850 debido a que cada hombre pagaba S/ 6 y cada mujer S/ 4 . ¿Cuál es la diferencia de los números de hombres y mujeres?

A) 100   B) 75   C) 150   D) 60   E) 50

Resolución.-

Supongamos que las 350 personas son hombres (FALSA SUPOSICION), entonces se habría recaudado :

$$S/.\ 350 \times 6 = S/\ 2\ 100$$

Como, realmente se recaudó S/. 1 850, entonces se ha cometido un error por exceso de :

$$2\ 100 - 1\ 850 = 250$$

Si reemplazamos un hombre por una mujer, el error disminuye en :

$$S/.\ 6 - S/.\ 4 = S/\ 2$$

Luego el número de reemplazos de hombres por mujeres lo obtendremos dividiendo la recaudación por exceso (S/. 250) con el error provocado por la diferencia de precios de las entradas : $\dfrac{250}{2} = 125$

Luego : Número de hombres = 350 - 125 = 225

Número de mujeres = 125

$\therefore$ Diferencia = 225 - 125 = 100   RPTA. A

67.- Un cazador dispara 3 veces para matar un águila y dos veces para matar una paloma. Si hoy día hizo 60 disparos llegando a matar 26 aves, hallar la diferencia entre el número de palomas y águilas.

A) 20   B) 10   C) 8   D) 11   E) 18

Resolución.-

Supongamos que las 26 aves que ha matado son águilas (FALSA SUPOSICION), entonces habría hecho :

$$26 \times 3 = 78 \text{ disparos}$$

Como sólo hizo 60 disparos, se ha cometido un error por exceso de :

$$78 - 60 = 18 \text{ disparos}$$

Si reemplazamos un águila por una paloma, el error disminuye en :

$$3 - 2 = 1 \text{ disparo}$$

Entonces, el número de reemplazos de águilas por palomas será : $\frac{18}{1} = 18$

Luego : Número de águilas $= 26 - 18 = 8$

Número de palomas $= 18$

$\therefore$ Diferencia $= 18 - 8 = 10$ RPTA. B

68.- Un estudiante se compromete a presentar a su padre la resolución de 8 problemas diarios. El padre da al hijo S/ 9 por cada problema bien resuelto y el hijo abona a su padre S/. 6 por cada problemas que deje de presentar o esté mal resuelto. Al cabo de 20 días el hijo ganó S/ 540. ¿Cuántos problemas resolvió bien el estudiante?

A) 60 B) 120 C) 80 D) 100 E) 90

Resolución.-

En los 20 días, el estudiante debe presentar : $20(8) = 160$ problemas, entonces suponiendo que todos son presentados correctamente resueltos (FALSA SUPOSICION), el hijo recibiría :

$$160 \text{ (S/. 9)} = \text{S/. } 1\,440$$

Como él solo recibe S/ 540 , habriamos cometido un error por exceso de :

$$\text{S/. } 1\,440 - \text{S/ } 540 = \text{S/. } 900$$

Si cambiamos un problema correctamente resuelto por otro no presentado o mal resuelto, el hijo deja de percibir S/. 9 y todavía debe pagar S/. 6 , luego el error disminuye en :

$$9 - (-6) = \text{S/. } 15$$

Entonces el número de cambios que debemos hacer es : $\frac{900}{15} = 60$ cambios

Luego :

Resolvió bien : $160 - 60 = 100$ problemas
Resolvió mal o no presentó : 60 problemas RPTA. D

69.- Asumiendo que un litro de leche pura pesa 1,032 kg y que un litro de agua pesa 1kg. Decir si está adulterada o no la leche de un recipiente en el cual se supone que existen 17 litros de leche, los cuales pesan 17,32 kg . En caso de ser así ¿Cuántos litros de agua contienen?

A) 6 B) 7 C) 7,5 D) 10 E) No está adulterada

Resolución.-

Supongamos que los 17 *litros* son de leche (FALSA SUPOSICION), entonces el peso sería :

$$17(1{,}032) = 17{,}544 \; kg$$

Como el peso real es 17,32 *kg*, se ha cometido un error por exceso de :

$$17{,}544 - 17{,}320 = 0{,}224 \; kg$$

Si cambiamos un litro de leche por un litro de agua, nuestro error deberá disminuir en :

$$1{,}032 - 1 = 0{,}032\ kg$$

Luego, el número de cambios que se debe hacer es : $\dfrac{0{,}224}{0{,}032} = 7$ cambios

Entonces :

Número de litros de leche = 17 - 7 = 10
Número de litros de agua = 7

RPTA. B

70.- Dos niños han recorrido en total 64 metros, dando entre los dos 100 pasos. Si cada paso del segundo mide 50 cm y cada paso del primero mide 70 cm ¿Cuántos pasos más que el segundo ha dado el primero?

A) 10 ***B) 20*** ***C) 30*** ***D) 40*** ***E) 50***

<u>Resolución</u>.-

Método Analítico.- Si todos los pasos fueran de 70 *centímetros*, el recorrido sería de :

$$100 \times 70 = 7\,000\ cm = 70\ metros$$

Pero el recorrido exacto es de 64 *metros*; luego hay :

$$70 - 64 = 6\ metros\ ,ó,\ 600\ cm \text{ de más.}$$

Sabemos que por cada paso de 50 *cm*, que ha sido tomado como de 70 *cm*, se genera un exceso de 20 *cm*, por ello el # de pasos de 50 *cm* se obtendrá por medio de la siguiente división :

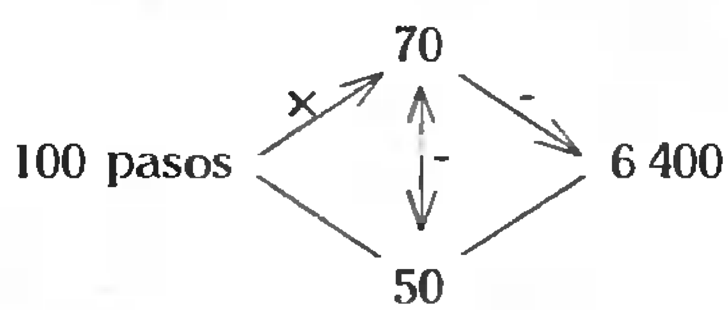
$$600 \div 20 = 30 \text{ pasos}$$

En resumen : - El primero dió 100 - 30 = 70 pasos de 70 *cm* : 49 *metros*

- El segundo dió 30 pasos de 50 *cm* : 15 *metros*.

El 1^{ro} dió : 70 - 30 = 40 pasos más que el 2^{do}.

Método abreviado .- Este consistirá en reconocer los elementos que componen al llamado Método del Rombo :



de pasos de 50 : $\dfrac{100 \times 70 - 6\ 400}{70 - 50} = 30$

de pasos de 70 : 100 - 30 = 70

Exceso de unos sobre los otros : 70 - 30 = **40** RPTA. D

B) REGLA DEL CANGREJO

71.- Tenía cierta suma de dinero, ahorré una cantidad igual a la que tenía y gasté S/. 80 . Luego ahorré una suma igual al doble de lo que me quedaba y gasté S/. 360. Si ahora tengo nada ¿Cuánto tenía al principio?

A) S/ 80 B) S/ 140 C) S/ 100 D) S/ 120 E) S/ 50

<u>Resolución</u>.-

Aplicando la regla del cangrejo :

	Operación	Operación Inversa	↑
Tenía cierta cantidad de dinero	?		100
Ahorré una cantidad igual a la que tenía	$\times 2$	$\div 2$	200
Gasté S/. 80	-80	$+80$	120
Ahorré una suma igual al doble de lo que quedaba	$\times 3$	$\div 3$	360
Gasté S/. 360	-360	$+360$	0 ← Tengo nada

$\therefore$ Al principio tenía S/ 100 RPTA. D

72.- Con un cierto número hago las siguientes operaciones : Lo elevo al cuadrado, al resultado le quito 15 y lo multiplico por 3 ; al número así obtenido lo dividido entre 6 y luego lo elevo al cubo, obteniendo un número al cual luego de aumentarle 19 unidades le extraigo raíz cuadrada para obtener 12 como resultado final. Siendo positivo el número que tenía inicialmente, diga ¿Cuál es el número?

A) 10 B) 6 C) 8 D) 4 E) 5

<u>Resolución</u>.-

Utilizando la REGLA DEL CANGREJO , es decir comenzando en la última operación, se tiene :

Operación : 0^2 -15 $\times 3$ $\div 6$ 0^3 $+19$ $\sqrt{\ }$

5 25 10 30 5 125 144 12

Operación inversa : $\sqrt{\ }$ $+15$ $\div 3$ $\times 6$ $\sqrt[3]{\ }$ -19 0^2

$\therefore$ El número es 5 RPTA. E

73.- Tres jugadores A, B y C convienen en que el que pierda en cada partida doblará el dinero de los otros 2. Habiendo perdido cada jugador una partida, en el orden en que han sido nombrados, resulta que el primero tiene S/ 24 , el segundo S/ 28 y el tercero S/ 14 ¿Cuánto dinero tenía el primer jugador al iniciar el juego?

A) 20   B) 32   C) 24   D) 36   E) 28

<u>Resolución</u>.-

Como al final tienen S/. 24 , S/. 28 y S/. 14 respectivamente, entonces entre los 3 tienen : 24 + 28 + 14 = S/. 66 que será la cantidad total de dinero que tienen los 3 en cualquier momento del juego.

La progresión del juego será :

	A	B	C	Total
Inicio del 1er juego (pierde A)				66
		×2	×2	
Inicio del 2do juego (pierde B)				66
	×2		×2	
Inicio del 3er juego (pierde C)				66
	×2	×2		
FINAL →	24	28	14	66

Completando el cuadro de abajo hacia arriba mediante la REGLA DEL CANGREJO, se tendrá :

	A	B	C	Total
Inicio del 1er juego (pierde A)	36	20	10	66
		×2	×2	
Inicio del 2do juego (pierde B)	6	40	20	66
	×2		×2	
Inicio del 3er juego (pierde C)	12	14	40	66
	×2	×2		
FINAL →	24	28	14	66

∴ "A" tenía al principio S/. 36   RPTA. D

74.- Están jugando "casino" A, B, C y D y cada uno de ellos gana una partida en orden inverso al que han sido nombrados. La regla del juego es la siguiente : Al que gane en primer lugar, los demás, le darán S/ 40; al que gane en segundo lugar, le darán S/ 30; al que gane el tercer juego, los que pierden, le darán S/ 20 y al que gane el último solo se le dará S/ 10 por cada uno de los que pierden. Luego de jugarse el cuarto juego y cumplirse con las reglas establecidas, cada uno tiene S/ 80 . Diga Ud. la diferencia entre lo que tenían inicialmente B y D.

A) 30   B) 80   C) 100   D) 60   E) 40

Resolución.-

En cualquier momento del juego, la cantidad total de dinero será :

$$80 + 80 + 80 + 80 = 320$$

De acuerdo a la progresión del juego y utilizando la REGLA DEL CANGREJO se tiene :

	A	B	C	D	Total
Inicio del 1er juego (gana D)	140	100	60	20	320
	(-40)	(-40)	(-40)		
Inicio del 2do juego (gana C)	100	60	20	140	320
	(-30)	(-30)		(-30)	
Inicio del 3er juego (gana B)	70	30	110	110	320
	(-20)		(-20)	(-20)	
Inicio del 4to juego (gana A)	50	90	90	90	320
		(-10)	(-10)	(-10)	
FINAL →	80	80	80	80	320

Entonces, la diferencia de lo que tenían inicialmente B y D es :

$\therefore$ $100 - 20 = 80$ RPTA. B

75.- Lilí, cada día gasta la mitad de lo que tiene más S/. 20; si gastó todo en 4 días. ¿Cuánto gasto el segundo día?

A) 100 ***B) 110*** ***C) 120*** ***D) 130*** ***E) 140***

Resolución:

En cada día sucede lo siguiente : "gasta la mitad; gasta S/. 20"

Es decir, en operaciones : " ÷ 2 ; - 20 "

Repetido 4 veces, porque son 4 días, tendremos :

$$x \rightarrow \boxed{\div 2\,;\,-20} \xrightarrow{y} \boxed{\div 2\,;\,-20} \xrightarrow{z} \boxed{\div 2\,;\,-20} \xrightarrow{w} \boxed{\div 2\,;\,-20} \rightarrow 0$$

Aplicamos el método del cangrejo y obtendremos los valores del dinero que tenía al inicio de cada proceso :

1ra iteración : $(0 + 20) \times 2 = 20$; $w = 20$

2da iteración : $(20 + 20) \times 2 = 80$; $z = 80$

3ra iteración : $(80 + 20) \times 2 = 200$; $y = 200$

4ta iteración : $(200 + 20) \times 2 = 440$; $x = 440$

Lo que gastó el 2do día es : $y - z = 200 - 80 =$ 120 RPTA. C

C) PROBLEMAS COMBINADOS

76.- Un librero adquirió 78 libros a S/ 40 cada uno, habiéndosele regalado uno por cada docena que compró. ¿A cómo debe vender cada ejemplar para ganar S/ 1 208, si él a su vez ha regalado 5 libros?

A) S/. 50 B) S/. 48 C) S/. 56 D) S/. 52 E) S/. 54

Resolución.-

Como le han regalado uno por cada docena que compró, el número de «docenas» que compró es :

$$\frac{78}{12+1} = 6$$

Entonces el costo de los libros será : $6\ (12)\ (S/.\ 40) = S/.\ 2\ 880$

Para ganar S/ 1 208, debe venderlos en : $2\ 880 + 1\ 208 = 4\ 088$

Si ha regalado 5 libros, solo cobró por : $78 - 5 = 73$ libros

Luego cada libro lo ha vendido en : $\frac{4088}{73} = S/.\ 56$ RPTA. C

77.- Ocho personas realizan un viaje, cuyos gastos convienen en pagar por partes iguales. Al termino del mismo, tres de ellos no pudieron hacerlo y entonces cada uno de los restantes tuvo que pagar S/ 180 más. ¿Cuánto costó el viaje?

A) S/ 2 400 B) S/ 1 800 C) S/ 1 200 D) S/ 3 600 E) S/ 2 100

Resolución.-

Como 3 de ellos no pueden pagar, los otros 5 deben poner adicionalmente y en total :

$$5\ (180) = S/.\ 900$$

Este monto es lo que no pudieron pagar las 3 personas, lo que significa que cada una de ellas debió pagar inicialmente :

$$\frac{900}{3} = 300$$

Por lo tanto el costo del viaje es : $300\ (8) = S/\ 2\ 400$ RPTA. A

78.- Un aprendiz entra al estudio de un notario y se le promete \$ 2 600 y una gratificación por 5 años de trabajo. Al cabo de 3 años y 3 meses, el aprendiz renuncia y recibe \$ 850 y la gratificación. ¿A cuánto asciende la gratificación?

A) \$ 2 400 B) \$ 2 600 C) \$ 2 000 D) \$ 2 700 E) \$ 2 100

Resolución.-

Por 5 años, es decir 60 meses, se le promete \$ 2600 más la gratificación.

Por 3 años y 3 meses, es decir 39 meses, recibe \$ 850 más la gratificación.

Luego por los : 60 - 39 = 21 meses que no trabajó, dejó de percibir : 2 600 - 850 = \$ 1 750

Entonces el pago mensual que le hacian era de : $\frac{1750}{21}$

Esto quiere decir que, por los 60 meses (5 años) debieron pagarle :

$$60\left(\frac{1750}{21}\right) = \$.\ 5\ 000$$

Teniendo en cuenta que este monto incluye la promesa de pago de 2 600 y la gratificación, concluímos que dicha gratificación es de :

5 000 - 2 600 = \$ 2 400 RPTA. A

79.- Una persona, en el mes de octubre, resta los años que tiene de los meses que ha vivido y obtiene 106. Si es mayor que otra persona en 3 meses ¿En qué mes nació la segunda persona?

A) Agosto B) Diciembre C) Junio D) Abril E) Mayo

Resolución.-

Asumiendo que esta persona, en el mes de Octubre, tiene :

"A" años vividos

"m" meses vividos

Donde la cantidad exacta de meses vividos es :

$$m = \text{A}\,(12) + m_p \quad ...\ (*)$$

Cantidad de meses que han pasado desde el mes de su cumpleaños (m_p < 12)

Según el enunciado del problema : $m - \text{A} = 106$ ... (**)

Reemplazando (*) en (**) : $(12\text{A} + m_p) - \text{A} = 106$

$$11\text{A} + m_p = 106$$

Los únicos valores que satisfacen esta igualdad son : $\text{A} = 9 \quad \wedge \quad m_p = 7$

Luego, hasta Octubre, han pasado 7 meses desde su cumpleaños, entonces, esta persona, nació en el mes de Marzo y como es mayor que la 2da persona en 3 meses , concluimos que:

La 2da persona nació en Junio RPTA. C

80.- Un ómnibus va de A a B y en uno de sus viajes recaudó S/ 152 . El precio único del pasaje es S/ 4 , cualquiera sea el punto donde el pasajero suba o baje del ómnibus. Cada vez que bajó un pasajero subieron 3 y el ómnibus llegó a B con 27 pasajeros. ¿Con cuántos pasajeros salió el ómnibus de A?

A) 5 B) 11 C) 6 D) 8 E) 16

<u>Resolución</u>.-

De los datos : Recaudación total = S/. 152

Precio de cada pasaje = S/. 4

Luego, el número de pasajeros que subieron al ómnibus es :

$$\frac{152}{4} = 38$$

Como a "B" solo llegaron 27 pasajeros, en el trayecto bajaron :

$$38 - 27 = 11 \text{ pasajeros}$$

Pero, según el enunciado, cada vez que bajó un pasajero, subieron 3, entonces subieron :

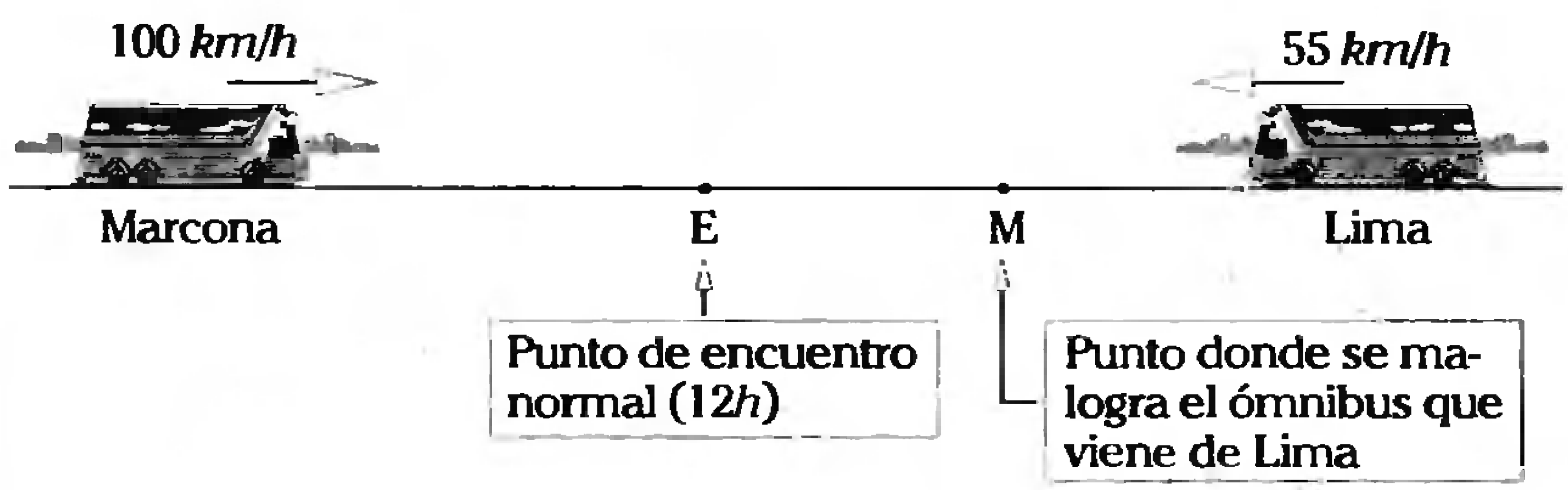
$$11(3) = 33 \text{ pasajeros}$$

Luego de A partieron : $\boxed{38 - 33 = 5 \text{ pasajeros}}$ RPTA. A

81.- Todos los días, sale de Marcona a Lima, un ómnibus con velocidad de 100 km/h. Este se encuentra diariamente a las 12h con un ómnibus que viene de Lima con velocidad de 55 km/h. Cierto día, el ómnibus que sale de Marcona encuentra malogrado al otro a las 14h 45' ¿A qué hora se malogró el ómnibus que sale de Lima?

A) 6h ***B) 7h*** ***C) 8h*** ***D) 9h*** ***E) 10h***

<u>Resolución</u>.-



El ómnibus que sale de Marcona demora, para la distancia EM :

$$14h\,45 - 12h = 2h\,45 = 2\frac{3}{4}\,h = \frac{11}{4}\,h$$

Como su velocidad es 100 *km/h* :

$$EM = (100\,km/h)\left(\frac{11}{4}h\right) \Rightarrow EM = 275\,km$$

El omnibus que sale de Lima tiene una velocidad de 55 *km/h*, luego para la distancia $\overline{EM}$ demora :

$$\frac{275\,km}{55\,km/h} = 5h$$

Entonces, como al punto "E" llega a las $12h$, llegó al punto M, 5 horas antes.

$\therefore$ Se malogró a las : $12h - 5h = 7h$ RPTA. B

82.- Suena la sirena de un pesquero "A" y a los 20 segundos suena la de otro "B" que está pescando a 10 000 m de "A". Calcular la posición de un tercer pesquero "C" situado entre "A" y "B" en línea recta, desde donde se oyen ambas sirenas en el mismo instante. (considerar que la velocidad del sonido es 340 m/s).

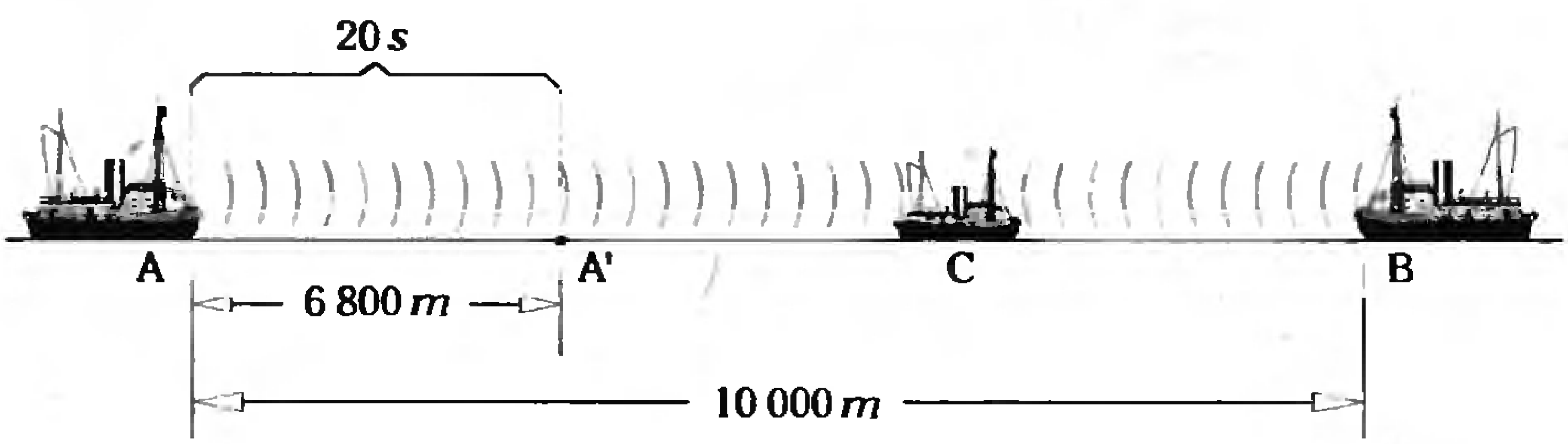
A) a 6 800 m de A ***B) a 3 200 m de B*** ***C) a 8 400 m de A***

D) a 1 600 m de B ***E) C y D son respuestas***

<u>Resolución</u>.-

La sirena de A suena 20 segundos antes que la de B, luego en esos 20 segundos, el sonido de la sirena de A habrá recorrido :

$$(340\ m/s)\ (20\ s) = 6\ 800m$$



Cuando el sonido de la sirena de A está en A' , suena la sirena de B, luego, el pesquero C para escuchar ambas sirenas al mismo tiempo, debe estar ubicado en el punto medio de $\overline{A'B}$:

$$\frac{10000 - 6800}{2} = 1\ 600\, m$$

Entonces, el pesquero C estará ubicado :

a : $6\ 800 + 1600 = 8\ 400\, m$ de A
a : $1\ 600\, m$ de B

RPTA. E

PROBLEMAS PROPUESTOS

ADICION :

1.- Hallar las 4 últimas cifras de la suma :

$$S = 888 + 8\,888 + 88\,888 + \ldots + \underbrace{888\ldots888}_{75\text{ cifras}}$$

A) 624 B) 724 C) 824
D) 1 624 E) 1 824

2.- Hallar "$a + b + c$" si se cumple que :

$$\overline{m1m} + \overline{m2m} + \overline{m3m} + \ldots + \overline{m9m} = \overline{abc}^3$$

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

3.- Hallar la siguiente suma :

$$S = 1\,.\,2 + 2\,.\,3 + 3\,.\,4 + 4\,.\,5 + \ldots + 97\,.\,98$$

A) 311 698 B) 313 698 C) 313 598
D) 312 698 E) 315 698

4.- Determinar la suma de los términos de la fila número 20 del siguiente triángulo numérico :

$$\begin{array}{c} 1 \\ 3 \; ; \; 5 \\ 7 \; ; \; 9 \; ; \; 11 \\ 13 \; ; \; 15 \; ; \; 17 \; ; \; 19 \\ \vdots \end{array}$$

A) 3 450 B) 6 230 C) 6 980
D) 7 200 E) 8 000

5.- Hallar "c" en la siguiente suma :

$$\overline{a74b} + \overline{5ba2} + \overline{c7a} = \overline{bba68}$$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

6.- Reemplazar las letras y los puntos por las cifras.

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ e & d & c & b & a \\ \hline :8 & . & 6 & . & . \end{array}$$

Sabiendo que se tiene : $a > b > c > d > e$ y que $a^2 + d^2 = b^2 + c^3 + e^2$.

A) 87678 B) 87696 C) 85667
D) 86698 E) 87669

7.- Hallar un número de dos cifras cuya suma sea 14, y tal que si se invierte el orden de las cifras, el número aumenta de 18.

A) 66 B) 67 C) 68 D) 69 E) 70

SUSTRACCION :

8.- Hallar : "$c + d + e$" ; si :

$$\overline{5cde} - \overline{edac} = 2579$$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

9.- Hallar el minuendo de una sustracción, sabiendo que la suma de sus términos tomados de dos en dos son : 380 ; 448 y 692.

A) 812 B) 342 C) 380 D) 392 E) 498

10.- Si al restar $\overline{\text{CBOA}}$ de $\overline{\text{5ABC}}$ se obtiene 2579; hallar : A + B + C

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

11.- Dado las siguientes operaciones :

$$\begin{array}{c} \text{RØMA} \\ \text{AMØR} \\ \hline 2\,x\,7\,y \end{array} - \qquad \begin{array}{c} \text{RØ} \\ \text{AM} \\ \hline 9\,6 \end{array} +$$

Donde : $\varnothing > M > R > A > O$

Determinar : $A + M + \varnothing + R$

A) 15 B) 17 C) 19 D) 24 E) 25

12.- Cuál es la suma del menor y mayor valor entero de 3 cifras que puede tomar N ; si la última de las siguientes restas es 7.

$N - a = p$; $p - a = Q$: $Q - a = R$; ... 33 restas

A) 846 B) 931 C) 964
D) 997 E) 1108

13.- Un número está compuesto de 3 cifras significativas, el número de las decenas es igual a la suma del de las centenas con las unidades y sobrepasa de 693 a éste número invertido. ¿Cuál es este número?

A) 888 B) 889 C) 890 D) 891 E) 892

MULTIPLICACION :

14.- Si $\overline{abcd} \times 9\,99^2 = \ldots 6\,578$; hallar :

$$a + b + c + d$$

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

15.- Si $N \times 4 = \ldots 3\,548$ y $N \times 3 = \ldots 2\,661$

Hallar las cuatro ultimas cifras de $N \times 1\,347$

A) 0889 B) 3549 C) 4709
D) 4789 E) 6209

16.- ¿Cuánto suman las seis cifras del menor orden del producto :

$$\underbrace{555\ldots55}_{130\text{ cifras}} \times \underbrace{333\ldots333}_{80\text{ cifras}} \; ?$$

A) 21 B) 23 C) 25 D) 27 E) 29

17.- Si A ; B ; C y D son números enteros de 8; 5 ; 6 y 7 cifras respectivamente. ¿Cuántas cifras puede tener $A \times B \times C \times D$?

A) 22 a 25 B) 23 a 26 C) 24 a 26
D) 24 a 17 E) 23 a 25

18.- Hallar el producto de $\overline{abc} \times 248$, sabiendo que el producto de sus productos parciales es 900^3

A) 53 800 B) 55 800 C) 56 800
D) 58 800 E) 59 800

19.- Si se sabe que

$$\overline{abc} \times \overline{acb} \times \overline{cba} = 31832164$$

Hallar : $a + b + c$.

A) 14 B) 15 C) 17 D) 16 E) 18

20.- Cuánto suman las cifras del producto :

$$p = 1998 \times \underbrace{999\ldots\ldots99}_{70\text{ cifras}} = (10^{70} - 1)1998$$

A) 602 B) 604 C) 608 D) 606 E) 630

21.- Un alumno, efectuando la multiplicación de 124 por un cierto número, halla por producto 5332; pero uno de sus compañeros le hace la observación que él ha tomado un 5 por un 3 en la cifra de las unidades del multiplicador. ¿Cuál debe ser el producto verdadero?

A) 5850 B) 5580 C) 8055
D) 8585 E) 8550

22.- Reconstruir la siguiente multiplicación :

$$\begin{array}{r} 1\;a\;b\;c\;d\;e \\ 3 \\ \hline a\;b\;c\;d\;e\;1 \end{array}$$

d = 5
c = 8

A) 482517 B) 245781 C) 154872
D) 452871 E) 428571

DIVISION:

23.- En una división le falta 15 unidades al residuo para ser sería mínimo al restarle 18 unidades. Determinar el dividendo de la división si el cociente es el doble del residuo.

A) 920 B) 989 C) 1 180

D) 1 330 E) 1 349

24.- La suma de dos números es 930, su cociente es 17 y el residuo de su división es el mayor posible. Hallar la diferencia de los números.

A) 832 B) 841 C) 842 D) 852 E) 862

25.- En una división entera inexacta el residuo por defecto, el residuo por exceso, cociente por exceso y el divisor forman una progresión aritmética de razón 6. Calcular el dividendo.

A) 18 B) 54 C) 128 D) 424 E) 702

26.- En una división entera el divisor es 23 y al residuo 15. Si al dividendo se le suma 60 unidades, el cociente aumenta en "x" unidades y el residuo disminuye en "y" unidades. Hallar $(x + y)$.

A) 12 B) 15 C) 17 D) 18 E) 20

27.- En una división inexacta el dividendo es 575 y el cociente 12. ¿Cuántos valores puede tomar el divisor?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

28.- El cociente de la división de un número entero D por el número entero d es 4; el residuo de la división es 30. Si se adiciona el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo, la suma asi obtenida es 574. Hallar el dividendo y el divisor.. Hallar la suma del dividendo y el divisor.

D = 473

d = 102

A) 510 B) 515 C) 528 D) 535 E) 540

29.- El residuo de la división de un número por 4 es 3; el residuo de la división del mismo número por 9 es 5. Hallar el residuo de la división del número por 36.

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

COMPLEMENTO ARITMETICO:

30.- Hallar un número de tres cifras cuyo C.A. sea igual al número de cifras necesarias para escribir todos los números enteros desde 1 hasta dicho número, inclusive indicar el producto de cifras de dicho número.

A) 48 B) 54 C) 63 D) 98 E) 120

31.- Hallar $(a + b)$; sabiendo que :

$$\text{C.A}(\overline{ab}) + \text{C.A.}(\overline{abab}) = 3674$$

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

32.- ¿Cuál es el mayor número de cuatro cifras significativas, tal que la diferencia de la suma de sus cifras y la suma de sus cifras de su complemento aritmético es 11?

A) 9 961 B) 9 861 C) 9 951

D) 9 972 E) 9 942

33.- Si el C.A. de un numeral capicúa de 4 cifras. Determinar la suma de cifras del numeral inicial.

A) 36 B) 37 C) 42 D) 43 E) 44

34.- La suma de los C.A. de los númerales

$\overline{a10}$; $\overline{a11}$; $\overline{a12}$; ... ; $\overline{a89}$ es 52 040

Determinar el valor de "α".

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

DETERMINACION A PRIORI :

35.- ¿Cuántas cifras como mínimo tiene el producto $[A^2 \times B^4 \times C^6]^2$. Sabiendo que los numeros enteros $A \times B \times C$ tienen 6 ; 4 y 2 cifras respectivamente.

A) 42 B) 47 C) 49 D) 51 E) 57

36.- Sabiendo que la expresión :

$$p = A^3 \times B^2 \times C$$

tiene 12 cifras además $A \times C$ tiene 8 cifras ¿Cuántas cifras tiene $A \times B$?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

37.- Hallar el valor de "n" si "E" tiene 15 cifras; A tiene 18 y B tiene 13 cifras, siendo :

$$E = \sqrt[n]{A^2 \times B^3}$$

A) 4 B) 5 C) 7 D) 12 E) 15

38.- Siendo A y B números enteros de 17 y 11 cifras enteras ¿Cuántas cifras enteras puede tener A/B?

A) 6 ó 6 B) 5,6 ó 7 C) 6 ó 7
D) 7 ó 8 E) 17,8 ó 9

39.- ¿Cuántas cifras tiene $p = \dfrac{A^2 \times B^3}{B^2}$?

Si sabemos que A/B tiene 20 cifras y B/C tiene 8 cifras.

A) 11 ó 12 B) 12 ó 13 C) 13
D) 12 a 14 E) 12 a 15

FALSA SUPOSICION :

40.- Un granjero muy aficionado a la aritmética le aumenta a un amigo lo siguiente : "traigo para vender a la feria 117 cabezas y 400 patos". ¿Cuántos cerdos y cuántas gallinas llevó el granjero a la feria?

A) 34 y 83 B) 32 y 83 C) 33 y 84
D) 33 y 85 E) 34 y 85

41.- Si se posaran 4 palomas en cada poste, faltarán 3 postes, pero si se posaran dos palomas en cada poste sobrarán 36 palomas. ¿Cuál es la cantidad de palomas?

A) 20 B) 39 C) 37 D) 59 E) 60

42.- Se compraron 1056 lápices de colores por S/. 2768 en cajas de 20 y 12 unidades, las primeras costaron S/. 82 y las otras S/. 32 ¿Cuántas cajas se compraron en total?

A) 172 B) 163 C) 100 D) 32 E) 64

43.- Para ganar S/. 28 en una rifa de un minicomponente se harán 90 boletos; pero se vendieron [redacted] 75 que originó una pérdida de S/. 17; determinar el costo del minicomponente :

A) 242 B) 354 C) 376 D) 789 E) 980

44.- Podría ahorrar 20 soles diarios, pero cada mañana de sol gasto 9 *soles* en helados y cada mañana fría gasto 6 soles en café; si ya tengo 258 *soles*. ¿Cuantos días ahorro?

A) 20 B) 21 C) 23 D) 26 E) 22

METODO DEL CANGREJO

45.- Del total de dinero que tenía 5/6 - 100 dí a Pilar, de lo que me quedaba 4/9 dí a Rocío, si todavía me quedaba 100 *soles*. ¿Cuánto tenía al comienzo?

A) 470 B) 460 C) 490 D) 480 E) 450

46.- A un cierto número se le multiplica por 18, al resultado se le suma 30, al resultado se le divide entre 5. Al resultado se le resta 24, al resultado se le extrae la raíz cuadrada y se obtiene 6. ¿Calcular dicho número?

A) 13 B) 14 C) 11 D) 16 E) 15

47.- A y B juegan 3 partidos de póker. Si "B" pierde, A recibirá la mitad de lo que tenía B; si A pierde, le pagará la quinta parte de lo que tiene a B. Si A y B acaban con 1920 y 1580 *soles* respectivamente y B sólo perdió la primera partida. ¿Cuánto perdió A?

A) 463 B) 580 C) 630 D) 680 E) 720

48.- Del total del dinero que tenía 5/12 +100 dí a Susana, de lo que me quedaba 5/8 -40 dí a Sonia, si todavía me queda 160 soles. ¿Cuánto tenía al comienzo?

A) 710 B) 705 C) 769 D) 720 E) 725

49.- Un padre del total de su fortuna 1/3 +500 dió a su hijo mayor, de lo que le quedaba 1/4 + 125 dió al segundo y lo que le quedaba 3/5 + 800 dió al último si todavía le queda 2 000 *soles*. ¿Cuál era la fortuna del padre?

A) 14 000 B) 15 000 C) 1 600
D) 15 200 E) 19 000

MOVILES

50.- Un tren sufre un accidente que lo demora 30 minutos; reiniciando el viaje con una velocidad que es los 3/4 de la que traía, llegando así con 2*h*30' de retrazo. Si el accidente hubiese ocurrido 150 *km* más adelante; hubiera llegado con 2*h* 5' de retraso. Calcular la distancia recorrida (en *km*) desde el accidente.

A) 540 B) 720 C) 780 D) 820 E) 840

51.- Un piloto conduce un auto a la velocidad de 150 *m/min* durante 15 *horas*; pero un desperfecto en el auto obliga a reducir su velocidad durante las últimas 40 *horas* de su viaje. Si la velocidad promedio fue de 70 *m/min*. ¿En cuánto redujo su velocidad inicial (en *m/min*)?

A) 110 B) 115 C) 420 D) 130 E) 140

52.- Una tripulación emplea 3 *horas* en remar 16 *km* río abajo y regresar, el tiempo empleado en remar 2 *km* río arriba es el mismo en remar 4 *km* río abajo. Hallar la velocidad del bote (en *km/h*) cuando se desplaza en aguas tranquilas.

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

53.- Dos ómnibus una que sale de Lima a 72 *km/h* y otro que sale de Tacna a 108 *km/h* se encuentran siempre a las 12 meridiano; pero un día el ómnibus que salió de Lima encuentra malogrado al ómnibus que salió de Tacna a las 2 *pm*. ¿A qué hora se malogro el ómnibus?

A) 10 *a.m* B) 10:10 *a.m* C) 10:20 *a.m*
D) 10:30 *a.m* E) 10:40 *a.m*

54.- Cierto día una persona recorre una distancia AB en 2 *horas*, de regreso aumenta su velocidad en 11 *m* por minuto, y recorre la misma distancia en 105 *minutos*; hallar la distancia AB.

A) 7,24 *km* B) 8,24 *km* C) 9,24 *km*
D) 5,24 *km* E) 6,24 *km*

PROBLEMAS COMBINADOS

55.- Si con 60 millones de francos se manda a fabricar billetes de S/. 1 000 a razón de 60 francos el millar de billetes y se cambia todo en dólares a razón de S/. 500 cada dólar ¿Cuántos miles de dólares se tendrá?

A) 2×10^9 B) 2×10^6 C) 2×10^4
D) 2×10^5 E) 2 000

56.- A la misa de gallo de cierta iglesia asistieron tal cantidad de personas que la mitad de ellos no se pudo sentar, pero si hubiesen asistido 214 personas menos, hubieran quedado 4 asientos vacíos. ¿Qué capacidad para personas sentadas tiene dicha iglesia?

A) 210 B) 320 C) 410 D) 420 E) 440

57.- En una fiesta a las que fueron 53 personas en un momento determinado 8 mujeres no bailaban y 15 hombres tampoco. ¿Cuántas mujeres asistieron a la reunión?

A) 19 B) 21 C) 23 D) 25 E) 27

58.- Un comerciante compra artículos a 3 por S/. 50 y los vende a 5 por S/. 100 ; si los 50 artículos que le quedan representa su ganancia. ¿Cuántos artículos en total compro?

A) 200 B) 250 C) 300 D) 275 E) 150

59.- Un exámen de ingreso de 140 preguntas durante 3 *horas*. Si un postulante dedica 60 *minutos* para leer y responder 40 preguntas y de cada 10 acierta 5 ¿Cuántas no acertó o deja de responder?

A) 80 B) 60 C) 20 D) 50 E) 130

60.- En una reunión numerosa, una de las personas propuso hacer una cuota para los pobres, se debería reunir una cierta suma, y un calculista, de la sociedad halla que esta suma se sobrepasaría de 110 *soles* si cada uno dierta 5 *soles*, mientras que faltarían 90 *soles* para hacer la suma en cuestión si cada uno se suscribiera con 3 *soles*. Se pide el número, de personas y la suma que ha sido necesaria.

A) 390 B) 391 C) 392 D) 393 E) 394

61.- En una sociedad numerosa había primitivamente tres veces más hombres que mujeres; después que se separaron 8 parejas, el número de hombres quedó cinco veces más grande que el de las mujeres; ¿Cuántos hombres y mujeres había al principio?

A) 46 B) 47 C) 48 D) 49 E) 50

62.- Un automovil recorre 315 kilómetros en 5 *horas*, y otro hace un recorrido del doble número de kilómetros en 7 *horas*. Suponiendo que los, dos marchan durante 9 *horas*, calcular la diferencia de los recorridos.

A) 239 B) 240 C) 241 D) 242 E) 243

63.- Un cartero repartía la correspondencia en los pisos entresuelo, principal, segundo y tercero de una casa. Durante un cierto año subió 25 días hasta el entresuelo, 72 hasta el principal, 43 hasta el segundo y el resto hasta el tercero. Siendo los números de escalones hasta el entresuelo y de piso a piso, 30, 22, 24 y 24, respectivamente; ¿Cuántos escalones subió el cartero en ese año, solamente para el servicio de dicha casa?

A) 30263 B) 30262 C) 31260
D) 32606 E) 31236

64.- Una fábrica gata diariamente 1 500 *soles* para el pago de los jornales de 40 operarios de una clase y 75 de otra; pero, con el mismo gasto desea duplicar el número de operarios de la primera clase y reducir a 25 los de la segunda. ¿Cuál es el jornal de un operario de cada clase?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

65.- Un padre a quién se le preguntó por la edad de su hijo, responde : Mi edad es tres veces la suya, pero hace 10 años era el quíntuple. ¿Cuál es la edad del hijo?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

6 TEORIA DE LA DIVISIBILIDAD

6.1 DIVISIBILIDAD

Se dice que un número entero A es divisible entre otro número entero positivo B llamado *módulo* , cuando la división entera de A entre B es exacta.

$$\text{A es divisible entre B} \Longleftrightarrow \begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} & K \\ 0 & \end{array}$$

Ejemplo 1 : ¿Será 91 divisible entre 13?

Veamos : $\begin{array}{r|l} 91 & 13 \\ \cline{2-2} & 7 \\ 0 & \end{array} \Rightarrow$ 91 es divisible entre 13

Ejemplo 2 : ¿Es -24 divisible entre 8?

Veamos : $\begin{array}{r|l} -24 & 8 \\ \cline{2-2} & -3 \\ 0 & \end{array} \Rightarrow$ -24 es divisible entre 8

6.2 MULTIPLICIDAD

Un número entero A es múltiplo de otro número entero B, si se verifica que :

$$A = B \times n$$

donde "n" es un número entero cualquiera , es decir :

$$n \in \{... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...\}$$

Notación.- A es múltiplo de B <> $A = \overset{\circ}{B}$ $\wedge$ $\overset{\circ}{B}$ es múltiplo de B

Ejemplos :

1.- $85 = \overset{\circ}{17}$, pues : $85 = 17\ (5)$ y $5 \in \mathbb{Z}$

2.- $-36 = \overset{\circ}{9}$, pues : $-36 = 9(-4)$ y $(-4) \in \mathbb{Z}$

3.- $0 = \overset{\circ}{11}$, pues : $0 = 11(0)$ y $(0) \in \mathbb{Z}$

4.- Los múltiplos de 8 son de la forma $8.n$, donde "n" es un número entero cualquiera . Esto permite afirmar que los múltiplos de 8 serán :

$$\ldots ; -24 ; -16 ; -8 ; 0 ; 8 ; 16 ; 24 ; \ldots$$

5.- Los múltiplos de 17 son de la forma $17.n$, donde "n" es un número entero cualquiera . Esto permite afirmar que los múltiplos de 17 serán :

$$\ldots ; -51 ; -34 ; -17 ; 0 ; 17 ; 34 ; 51 ; \ldots$$

6.3 CONCEPTOS EQUIVALENTES

Que un número A sea divisible por otro B puede tener las siguientes interpretaciones :

$$A = \overset{\circ}{B} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{A es divisible por B} \\ \text{A es múltiplo de B} \\ \text{B es divisor de A} \\ \text{B divide a A} \\ \text{B es factor de A} \end{array} \right.$$

6.4 DEFINICIONES BASICAS

1.- El cero (0) es divisible por todo número entero positivo.

2.- Todo número entero positivo es divisible por sí mismo.

3.- La unidad es divisor de todo número entero.

PRINCIPIOS :

Sea n un número y $\overset{\circ}{n}$ un múltiplo de él , entonces se cumplirá que :

Para una adición : $\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$

Para una sustracción : $\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$

Para una multiplicación : $\overset{\circ}{n} \times k = \overset{\circ}{n}$, donde : $k \in \mathbb{Z}$

Para una potencia : $\left(\overset{\circ}{n}\right)^k = \overset{\circ}{n}$, donde : $k \in \mathbb{Z}^+$

6.5 TEOREMA DE EUCLIDES

Si un cierto módulo divide al producto de dos números enteros y no tiene divisores comunes (aparte de la unidad) con uno de dichos números, entonces divide al otro número.

Si $A \times B = \overset{\circ}{n}$, y : A con n tienen un solo divisor común (la unidad) $\Rightarrow$ $B = \overset{\circ}{n}$

Ejemplos :

1.- Si $9 \, . \, P = \overset{\circ}{13}$, entonces $P = \overset{\circ}{13}$, pues : 9 y 13 solo tienen como divisor común a la unidad.

2.- Si $18 \, . \, Q = \overset{\circ}{7}$, entonces $Q = \overset{\circ}{7}$, pues : 18 y 7 tienen como único divisor común a la unidad.

PROPIEDADES

1ra.- Si un número entero A no es divisible por otro número entero positivo B, entonces puede expresarse de dos maneras :

$$A = \overset{\circ}{B} + r \quad \vee \quad A = \overset{\circ}{B} - r'$$

donde r y r' son los restos por defecto y por exceso respectivamente, de la división entera de A entre B.

2da.- Si un número entero posee "n - ésima" parte entera y exacta, entonces es múltiplo de "n", siendo "n" un número entero y positivo.

$$\frac{A}{n} = \#\text{ entero} \quad \Rightarrow \quad A = \overset{\circ}{n}$$

3ra.- Todo número entero es múltiplo de los factores positivos que lo forman y de toda combinación que con ellos se pueda efectuar.

Sea : $N = a \times b \times c$

Luego : $N = \overset{\circ}{1} \; ; \; \overset{\circ}{a} \; ; \; \overset{\circ}{b} \; ; \; \overset{\circ}{c} \; ; \; \overset{\circ}{\overline{a \times b}} \; ; \; \overset{\circ}{\overline{b \times c}} \; ; \; \overset{\circ}{\overline{a \times c}} \; ; \; \overset{\circ}{N}$

Donde a , b y c son números enteros positivos y se les llama FACTORES de N.

4ta.- Si un número entero es divisible por dos módulos, que no poseen divisores comunes (aparte de la unidad), entonces será divisible por el producto de dichos módulos.

$$\left.\begin{array}{l} N = \overset{\circ}{a} = a \times b \times c \\ \\ N = \overset{\circ}{b} = a \times b \times c \end{array}\right\} \Rightarrow N = \overset{\circ}{\overline{a \times b}}$$

Donde a y b no tienen divisores comunes (aparte de la unidad).

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Del 1 al 4 500 , determinar :

(i) ¿Cuántos números son divisibles por 15?

(ii) ¿Cuántos números son divisibles por 19?

Dar la suma de ambos resultados.

A) 624 B) 536 C) 524 D) 317 E) 724

Resolución.-

Del dato tenemos : $\underbrace{1 ; 2 ; 3 ; ... ; 4500}_{4500 \text{ números}}$

(*i*) Los números divisibles por 15 forman una progresión aritmética de razón 15 , es decir :

$$15 ; 30 ; 45 ; ... ; 450$$

Asi la cantidad de números estará dada por : $\dfrac{4500-15}{15} + 1 = 300$ números

En forma práctica, también puede obtenerse la cantidad de números dividiendo 4 500 por 15 :

$$\frac{4500}{15} \Rightarrow 300 \text{ números}$$

(*ii*) Por analogía , la cantidad de números divisibles por 19 será :

$$\frac{4500}{19} \Rightarrow 236 \text{ números}$$

↓

(solo se considera el cociente entero)

La suma de ambos resultados será : $300 + 236 = \boxed{536}$ RPTA. B

2.- En la siguiente secuencia : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ... ; 400

(I) ¿Cuántos son divisibles por 5?

(II) ¿Cuántos son divisibles por 3?

(III) ¿Cuántos son divisibles por 15?

(IV) ¿Cuántos no son divisibles por 3 ni por 5?

Dar como respuesta la suma de todos los resultados

A) 450 B) 451 C) 452 D) 453 E) 454

Resolución.-

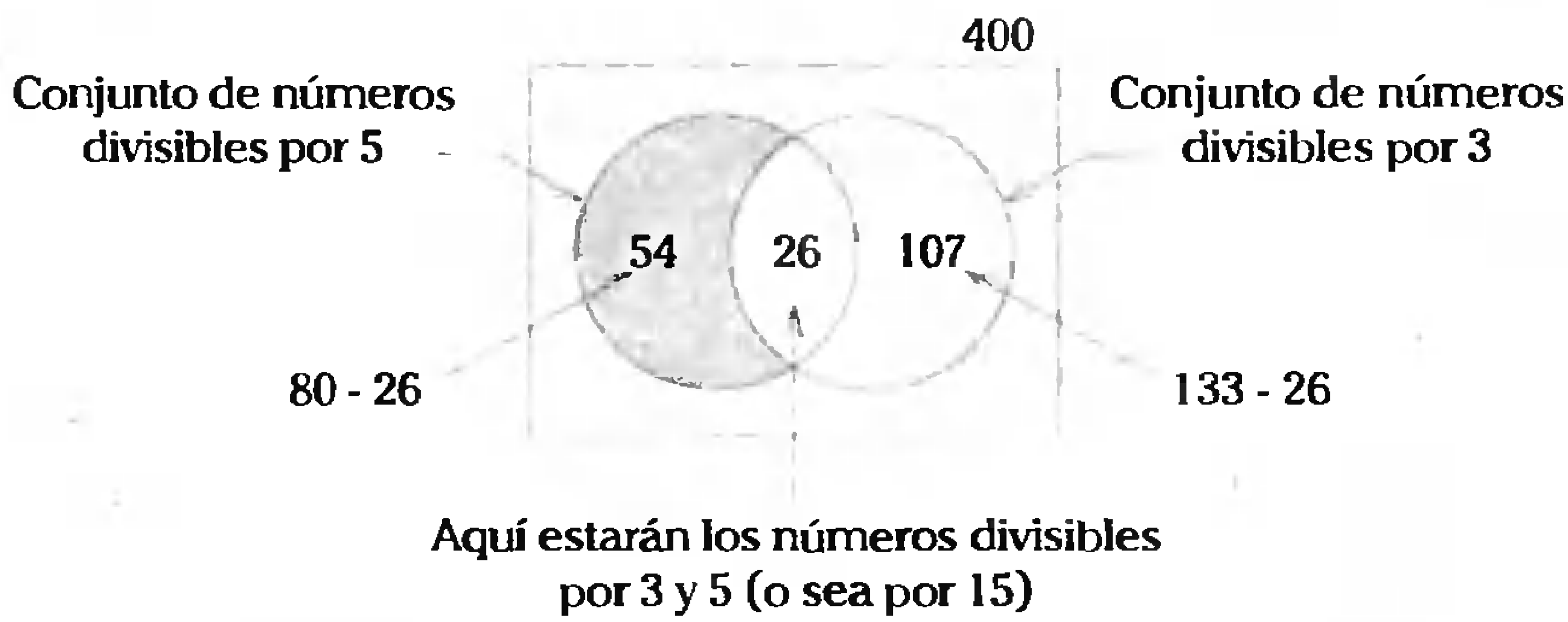
Del dato se tiene : $\underbrace{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ... ; 400}_{400 \text{ números}}$

(i) La cantidad de números divisibles entre 5 será : $\dfrac{400}{5}$ $\Rightarrow$ 80 números

(ii) La cantidad de números divisibles entre 3 será : $\dfrac{400}{3}$ $\Rightarrow$ 133 números

(iii) La cantidad de números divisibles entre 15 será : $\dfrac{400}{15}$ $\Rightarrow$ 26 números

(iv) Utilizando los diagramas de Venn-Euler y colocando convenientemente los resultados obtenidos en (i), (ii) y (iii) , se tendrá :



Entonces la cantidad de números que no son divisibles por 3 ni por 5 será :

$$400 - (54 + 26 + 107) = 213 \text{ números}$$

$\therefore$ La suma de los resultados será : 452 números RPTA. C

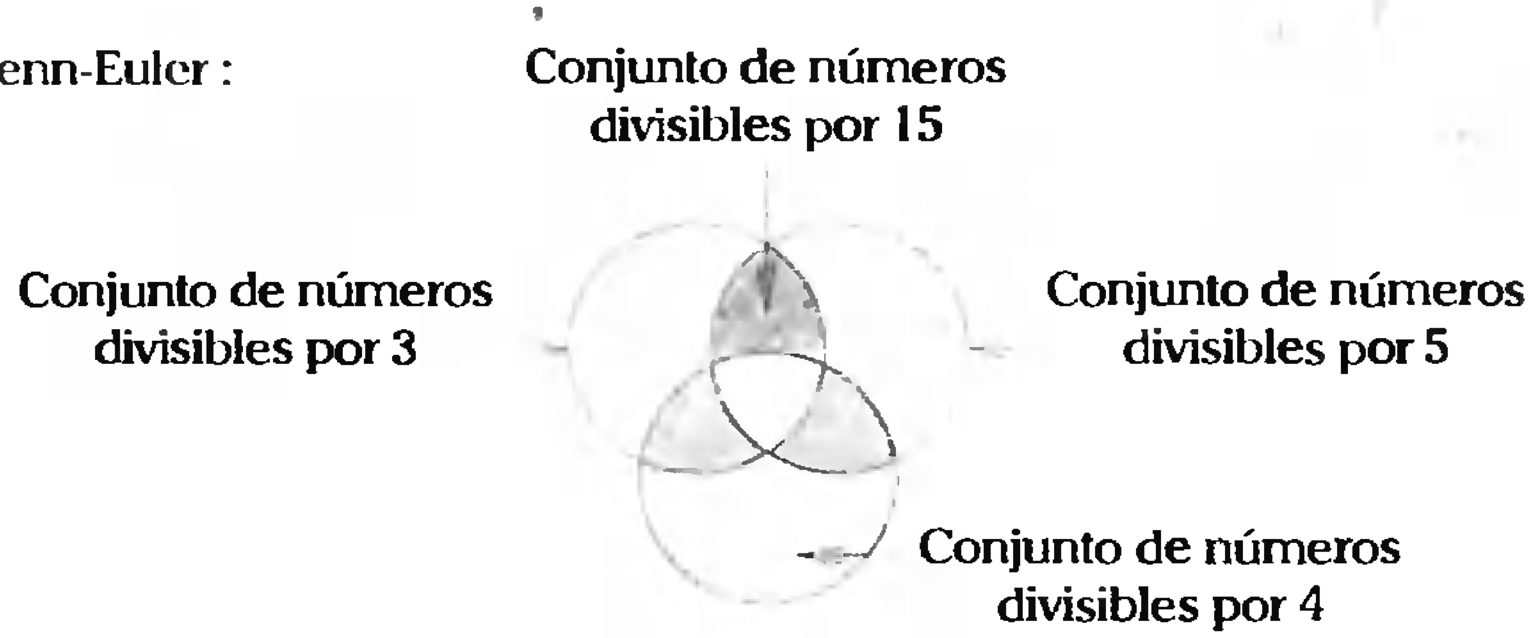
3.- ¿Cuántos numeros enteros positivos no mayores que 1 000 son múltiplos de 3 y 5 a la vez, pero no de 4?

A) 66 ***B) 45*** ***C) 52*** ***D) 50*** ***E) 16***

<u>Resolución</u>.-

A partir del dato se tiene que : $\underbrace{1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; 1000}_{1000 \text{ números}}$

En un diagrama de Venn-Euler :



Para calcular lo que nos piden (la región sombreada) se debe restar la cantidad de números divisibles entre 3 ; 5 y 4, es decir entre 60, de la cantidad de números divisibles entre 15.

La cantidad de números divisibles entre 15 será : $\frac{1000}{15}$ $\Rightarrow$ 66 números

La cantidad de números divisibles entre 60 será : $\frac{1000}{60}$ $\Rightarrow$ 16 números

Finalmente la cantidad de números solicitados será : $66 - 16 =$ 50 números RPTA. D

4.- ¿Cuántos números de tres cifras son divisibles por 12 ?

A) 71 B) 72 C) 73 D) 74 E) 75

<u>Resolución</u>.-

Como el número de 3 cifras $\overline{abc}$ es divisible por 12, se verificará que :

$$\overline{abc} = 12 \times k \quad , \text{ donde : } k \in \mathbb{Z}$$

Se sabe que : $100 \leq \overline{abc} \leq 999$

Reemplazando : $100 \leq 12.k \leq 999$

Dividiendo entre 12 : $8,33 \leq k \leq 83,25$

Luego : $k \in \{9 ; 10 ; 11 ; ... ; 83\}$ ....(sucesión de razón 1)

Entonces "k" puede tomar : $\frac{83-9}{1} + 1 = 75$ valores

Por lo tanto, existen : 75 números RPTA. E

5.- ¿Cuantos números de 3 cifras, que terminan en 4 resultan ser múltiplos de 7?

A) 72 B) 90 C) 29 D) 13 E) 10

<u>Resolución</u>.-

Por dato : $\overline{ab4} = \overset{\circ}{7} \Rightarrow \overline{ab4} = 7.k$, donde : $k \in \mathbb{Z}$

Para que $7.k$ origine un producto que termine en 4 , "k" será un número que solo puede terminar en 2 . Veamos :

Se sabe que : $104 \leq \overline{ab4} \leq 994$

Reemplazando : $104 \leq 7.k \leq 994$

Dividiendo por 7 : $14,8 \leq k \leq 142$

Luego : $k \in \{22 ; 32 ; 42 ; ... ; 142\}$ ...(sucesión de razón 10)

Entonces "k" puede tomar : $\dfrac{142-22}{10} + 1 = 13$ valores

Por lo tanto, existen : **13 números** RPTA. D

6.- ¿Cuántos múltiplos de 6, terminados en 2, existen entre 120 y 1 236?

A) 18 B) 19 C) 36 D) 37 E) 38

Resolución.-

Según los datos : $N = \overset{\circ}{6} \Rightarrow N = 6k$

$\Rightarrow N = ...2$

Nótese que, para que : $6.k$ termine en 2, el factor "k" deberá terminar en 2 ó en 7.

Por dato : $120 < N < 1236$

Reemplazando : $120 < 6k < 1236$

Dividiendo por 6 : $20 < k < 206$

Luego : $k \in \{22 ; 27 ; 32 ; 37 ; ... ; 202\}$ ...(sucesión de razón 5)

Entonces "k" puede tomar : $\dfrac{202-22}{5} + 1 = 37$ valores

Por tanto, hay : **37 números** RPTA. D

7.- De los 400 alumnos de una escuela, se supo que al finalizar el año los 2/5 de las mujeres aprobaron todos los cursos y los 3/7 de ellas desaprobaron al menos un curso y los 5/8 de las mismas seguirán estudiando en la escuela ¿Cuántas mujeres ya no seguirán estudiando en la escuela?

A) 120 B) 175 C) 112 D) 102 E) 105

Resolución.-

Llamemos "M" al número de mujeres de la escuela, entonces por condición del problema deberá cumplirse que : $M < 400$

Además : $\dfrac{2}{5}$ M aprobaron todos los cursos $\Rightarrow M = \overset{\circ}{5}$

$\dfrac{3}{7}$ M desaprobaron al menos un curso $\Rightarrow M = \overset{\circ}{7}$

$\dfrac{5}{8}$ M seguirán estudiando en la escuela $\Rightarrow M = \overset{\circ}{8}$

Como 5 ; 7 y 8 solo tienen como divisor común a la unidad , de acuerdo a la 4^{ta} propiedad del item 6.5 se deberá cumplir que :

$$M = \overset{\circ}{\overline{5\times7\times8}} \qquad \Rightarrow \qquad M = \overset{\circ}{280}$$

Por condición M es menor que 400 ,luego : $M = 280$

Por tanto el número de mujeres que ya no seguirán estudiando en la escuela será :

$$\frac{3}{8}\times 280 = \boxed{105} \qquad \text{RPTA. E}$$

8.- A una fiesta de aniversario asistieron un número de personas que es mayor que 200 pero menor que 350. En cierto momento se observó que los 2/11 de los asistentes son varones que están bebiendo y los 5/13 de los mismos son mujeres que están bailando . Si todos los varones están bailando o bebiendo. ¿Cuántas mujeres no están bailando en dicho momento?.

A) 14 B) 21 C) 64 D) 36 E) 24

<u>Resolución</u>.-

Sea N el número de personas , luego por condición : $200 < N < 350$ .....(*)

Por datos : Varones que están bebiendo : $\frac{2}{11}N \quad \Rightarrow \quad N = \overset{\circ}{11}$

Mujeres que están bailando : $\frac{5}{13}N \quad \Rightarrow \quad N = \overset{\circ}{13}$

Como "N" es divisible por 11 y 13 , será divisible entre 11×13 , es decir : $N = \overset{\circ}{143}$

Pero por la condición (*) se puede deducir que : $N = 143\times 2 \quad \Rightarrow \quad N = 286$

Reemplazando en los datos : Varones que están bebiendo : $\frac{2}{11}\times 286 = 52$

Mujeres que están bailando : $\frac{5}{13}\times 286 = 110$

Es fácil reconocer que al haber 110 mujeres bailando, habrá también 110 varones bailando; entonces como todos los varones están bailando o bebiendo :

Total de varones : $52 + 110 = 162$

Total de mujeres : $286 - 162 = 124$

Por tanto, el número de mujeres que no están bailando será :

$$124 - 110 = \boxed{14} \qquad \text{RPTA. A}$$

9.- En una fiesta donde asistieron 280 personas entre damas, caballeros y niños, la cantidad de caballeros que no bailaban en un momento dado era igual a la cuarta parte del número de damas; la cantidad de niños asistentes era igual a la séptima parte del número de damas. Si la quinta parte de las damas están casadas ¿Cuantas damas no bailaban en dicho momento?

A) 55 ***B) 75*** ***C) 65*** ***D) 45*** ***E) 35***

Resolución.-

Sean : D = Número de damas ; C = Número de caballeros ; N = Número de niños

Por condición del problema se tiene que : $D + C + N = 280$ .....(1)

Según los datos : Caballeros que no bailaban : $\dfrac{D}{4} \Rightarrow D = \overset{\circ}{4}$

Los niños son : $N = \dfrac{D}{7} \Rightarrow D = \overset{\circ}{7}$

Damas que están casadas : $\dfrac{D}{5} \Rightarrow D = \overset{\circ}{5}$

De lo cual deducimos que : $D = \overset{\circ}{\overline{4\times7\times5}} \Rightarrow D = \overset{\circ}{140}$ ....(2)

Y de (1) y (2) deducimos que : $D = 140 \Rightarrow N = \dfrac{140}{7} = 20 \Rightarrow$ en (1) : $C = 120$

También : Caballeros que no bailaban : $\dfrac{140}{4} = 35$

Entonces : Caballeros que bailaban : $120 - 35 = 85$

Luego : Damas que bailaban : 85

Por lo tanto : Damas que no bailaban : $140 - 85 = 55$ RPTA. A

10.- En un salón de clases donde hay 59 personas, la octava parte de los hombres usan anteojos y la séptima parte de las mujeres practican voley. ¿Cuántos hombres no usan anteojos?

A) 14 ***B) 7*** ***C) 28*** ***D) 21*** ***E) 35***

Resolución.-

Sean : H = Número de hombres y M = Número de mujeres

Por condición del problema : $H + M = 59$ .....(1)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Por datos : Hombres que usan anteojos : } \dfrac{H}{8} \Rightarrow H = \overset{\circ}{8} = 8k \\ \text{Mujeres que practican voley : } \dfrac{M}{7} \Rightarrow M = \overset{\circ}{7} \end{array}\right\} \text{.....(2)}$$

Para calcular "k" y posteriormente el número de hombres, reemplazamos (2) en (1) :

$$8k + \overset{\circ}{7} = 59 \;.......[\; 8k = (7+1)k \;\Rightarrow\; 8k = \overset{\circ}{7} + k]$$

Luego : $\overset{\circ}{7} + k + \overset{\circ}{7} = \overset{\circ}{7} + 3 \;\Rightarrow\; k = \overset{\circ}{7} + 3 \;\Rightarrow\; k = 3$

Entonces : $H = 8 \times 3 = 24$

Por tanto : Hombres que no usan anteojos : $\dfrac{7}{8} \times 24 = 21$ RPTA. D

11.- Hallar el año en qué nació Andrés A. Cáceres, sabiendo que fue presidente a los 53 años (ese año fue $\overset{\circ}{53} + 31$). Ocho años más tarde volvió a ser presidente (dicho año fue múltiplo de su edad más 3). Dar como respuesta el producto de sus cifras.

A) 24 B) 72 C) 40 D) 48 E) 32

<u>Resolución</u>.-

Sea "N" el año en que nació Andrés A. Cáceres, entonces cumplió 53 años en el año: (N + 53), luego, por condición del problema se deberá cumplir que :

$$N + 53 = \overset{\circ}{53} + 31 \;\Rightarrow\; N = \overset{\circ}{53} + 31 \quad ...(1)$$

Ocho años después cumplió 61 años, esto es , en el año (N + 61), luego por condición del problema se tendrá que :

$$N + 61 = \overset{\circ}{61} + 3 \;\Rightarrow\; N = \overset{\circ}{61} + 3 = 61k + 3 \quad ...(2)$$

Igualando (1) y (2) : $\overset{\circ}{53} + 31 = 61k + 3 \;.......[\; 61k = (53+8)k \;\Rightarrow\; 61k = \overset{\circ}{53} + 8k]$

Efectuando : $\overset{\circ}{53} + 31 = \overset{\circ}{53} + 8k + 3 \;\Rightarrow\; 8k - 28 = \overset{\circ}{53}$

$$\Rightarrow\; k = 30$$

Entonces, Andrés A. Cáceres nació en el año : $N = 61\,(30) + 3 = 1833$

Por tanto , el producto de sus cifras será : $1 \times 8 \times 3 \times 3 = 72$ RPTA. B

12.- ¿Cuántos valores puede tomar $\overline{ab}$; si : $\overline{ab} + 2.\overline{ab} + 3.\overline{ab} + ... + 15.\overline{ab} = \overset{\circ}{132}$?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

<u>Resolución</u>.-

Extrayendo factor común $\overline{ab}$ se tendrá que : $\overline{ab}\,(1 + 2 + 3 + ... + 15) = \overset{\circ}{132}$

$$\Rightarrow\; \overline{ab} \times 120 = \overset{\circ}{132}$$

Para que el primer miembro sea divisible por 132 ,deberá ser divisible por 11 y por 12. Puesto que 120 es divisible por 12 pero no por 11, deducimos que :

$$\overline{ab} = \overset{\circ}{11}$$

Entonces los números posibles serán : $\overline{ab} \in \{11 ; 22 ; 33 ; ... ; 99\}$

Por lo tanto, $\overline{ab}$ puede tomar : 9 valores RPTA. C

13.- Si : $\overline{mcdu} = \overset{\circ}{17}$ y $\overline{mc} = 3\left(\overline{du}-1\right)$; hallar el máximo valor de $\overline{mcdu}$ y dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 16 B) 14 C) 22 D) 15 E) 18

<u>Resolución</u>.-

Por dato se sabe que : $\overline{mcdu} = \overset{\circ}{17}$

Descomponiendo polinómicamente por bloques : $100\,\overline{mc} + \overline{du} = \overset{\circ}{17}$

Reemplazando $\overline{mc}$ por la condición ($3\overline{du}$ - 3) : $100\left(3\,\overline{du}-3\right) + \overline{du} = \overset{\circ}{17}$

Efectuando operaciones se tendrá que : $301\overline{du} - 300 = \overset{\circ}{17}$ ....(*)

A continuación reconocemos que por exceso: $301 = \overset{\circ}{17} - 5$

Amismo se reconoce que por exceso: $300 = \overset{\circ}{17} - 6$

Reemplazando en (*) y efectuando tendremos : $5\,.\overline{du} - 6 = \overset{\circ}{17}$

De donde deducimos que : $\overline{du} = 25$

Finalmente al reemplazar en la condición : $\overline{mc} = 3\,(25 - 1) = 72$

$$\therefore \quad m + c + d + u = 16$$ RPTA. A

14.- Si el número $\overline{abcd}$ se divide entre 23, el resto es 8. ¿Cuál es el valor de "b" si además: $a + b + c + d = 18$ y $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} = 163$?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

<u>Resolución</u>.-

Colocando los sumandos en forma vertical :

$$\begin{array}{r} 1 \\ \overline{ab}\ + \\ \overline{bc} \\ \underline{\overline{cd}} \\ 163 \end{array}$$

En el 1er orden se cumple que : $b + c + d = 13 \quad \Rightarrow \quad a = 5$

En el 2do orden se verifica que : $a + b + c = 15 \quad \Rightarrow \quad d = 3$

De donde se deduce que : $b + c = 10$

Por dato se sabe que : $\overline{abcd} = \overset{\circ}{23} + 8 \quad \Rightarrow \quad \overline{5bc3} = \overset{\circ}{23} + 8$

Descomponiendo en forma conveniente :

$$5\,000 + 10\overline{bc} + 3 = \overset{\circ}{23} + 8 \quad \Rightarrow \quad 5\,003 + 10\overline{bc} = \overset{\circ}{23} + 8 \qquad \text{.... (1)}$$

Como : $\begin{array}{r|l} 5003 & 23 \\ \hline 12 & 217 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 5\,003 = \overset{\circ}{23} + 12 \qquad \text{.... (2)}$

Reemplazando (2) en (1) : $\overset{\circ}{23} + 12 + 10\,.\,\overline{bc} = \overset{\circ}{23} + 8$

Efectuando se tiene que : $10\overline{bc} + 4 = \overset{\circ}{23}$

De aquí se deduce que : $\overline{bc} \in \{18\,;41\,;64\,;87\}$

Y como : $b + c = 10 \quad \Rightarrow \quad \overline{bc} = 64$

$\therefore \quad b = 6$ RPTA. C

15.- Si el numeral $\overline{2abc}$ se divide entre 17 el resto es 4 . ¿Cuál es el menor número entero positivo que se debe sumar a $\overline{abc2}$ para que sea divisible por 17 ?

A) 17 B) 14 C) 8 D) 7 E) 10

<u>Resolución</u>.-

Por dato : $\overline{2abc} = \overset{\circ}{17} + 4$

Descomponiendo : $2000 + \overline{abc} = \overset{\circ}{17} + 4$ ..... ($2000 = \overset{\circ}{17} - 6$) por exceso

Reemplazando : $\overset{\circ}{17} - 6 + \overline{abc} = \overset{\circ}{17} + 4 \quad \Rightarrow \quad \overline{abc} = \overset{\circ}{17} + 10$ ....(1)

Sea "x" el menor número entero positivo que debe sumarse a $\overline{abc2}$ para que sea divisible por 17 , entonces se tendrá que :

$$\overline{abc2} + x = \overset{\circ}{17}$$

Descomponiendo : $10 \times \overline{abc} + 2 + x = \overset{\circ}{17}$ ....(2)

Reemplazando (1) en (2): $10\,(\overset{\circ}{17} + 10) + 2 + x = \overset{\circ}{17}$

Efectuando operaciones : $\overset{\circ}{17} + 102 + x = \overset{\circ}{17}$

Como $102 = \overset{\circ}{17}$, se deduce que : $\qquad x = \overset{\circ}{17}$

$$\therefore \quad \boxed{x_{min} = 17} \qquad \text{RPTA. A}$$

16.- ¿Cuántos términos, como mínimo bastará tomar de la secuencia : 8 ; 16 ; 24 ; 32 ; ... para que la suma de ellos sea divisible por 38 ?

A) 38 B) 19 C) 15 D) 18 E) 37

<u>Resolución</u>.-

La condición del problema es : $\underbrace{8+16+24+32+\ldots\ldots}_{n \text{ términos}} = \overset{\circ}{38}$

Extrayendo factor común : $8(\underbrace{1+2+3+4+\ldots}_{\text{"}n\text{" términos}}) = \overset{\circ}{38}$

Luego : $8 \times \dfrac{n(n+1)}{2} = \overset{\circ}{38}$

Entonces : $4n(n+1) = \overset{\circ}{38}$, donde : $\overset{\circ}{38} = \overset{\circ}{19} \times \overset{\circ}{2}$

$\overset{\circ}{2}\, n(n+1) = \overset{\circ}{19} \times \overset{\circ}{2}$

Para que se verifique la igualdad : $n = \overset{\circ}{19}$, ó , $n + 1 = \overset{\circ}{19}$

$$\therefore \quad \boxed{n_{min} = 18} \qquad \text{RPTA. D}$$

6.6 DIVISIBILIDAD EN EL BINOMIO DE NEWTON

Dado que el binomio de Newton es una potencia , podemos aplicar en él los principios de Divisibilidad expuestos en el item 6.4 , con lo cual se logra establecer que :

$$(\overset{\circ}{n} + r)^k = \overset{\circ}{n} + r^k \quad , \text{donde}: \; k \in Z^+$$

$$(\overset{\circ}{n} - r)^k = \begin{cases} \overset{\circ}{n} + r^k & \text{si } k \text{ es par } (+) \\ \overset{\circ}{n} - r^k & \text{si } k \text{ es impar } (+) \end{cases}$$

Ejemplos :

(1) $(\overset{\circ}{9} + 2)^{52} = \overset{\circ}{9} + 2^{52}$

(2) $(\overset{\circ}{13} + 5)^{19} = \overset{\circ}{13} + 5^{19}$

(3) $(\overset{\circ}{11} - 4)^{36} = \overset{\circ}{11} + 4^{36}$

(4) $(\overset{\circ}{17} - 5)^{21} = \overset{\circ}{17} - 5^{21}$

6.7 RESTOS POTENCIALES

Son los residuos que se obtienen al dividir las potencias de exponente entero y positivo de un cierto número entre un módulo determinado.

Por ejemplo los restos potenciales de 5 respecto al módulo 13 serán :

$$\left.\begin{aligned} 5^1 &= \overset{\circ}{13} + 5 \\ 5^2 &= \overset{\circ}{13} + 12 \\ 5^3 &= \overset{\circ}{13} + 8 \\ 5^4 &= \overset{\circ}{13} + 1 \end{aligned}\right\} g = 4 \qquad \left.\begin{aligned} 5^5 &= \overset{\circ}{13} + 5 \\ 5^6 &= \overset{\circ}{13} + 12 \\ 5^7 &= \overset{\circ}{13} + 8 \\ 5^8 &= \overset{\circ}{13} + 1 \end{aligned}\right\} \qquad 5^9 = \overset{\circ}{13} + 5$$

Restos potenciales

Se denomina gaussiano (g) al número de restos potenciales diferentes entre sí y distintos de cero que se repiten en forma ordenada y periódica . Por ejemplo, en el caso descrito en el ejemplo el gaussiano es 4, pues hay 4 restos que se repiten : 5 ; 12 ; 8 y 1

Utilizando todo lo expuesto hasta aquí , podemos predecir el resto que se obtendría al dividir cualquier potencia de 5 entre 13 . Veamos :

$$5^{\overset{\circ}{4}} = 5^{4k} = (5^4)^k = (\overset{\circ}{13} + 1)^k = \overset{\circ}{13} + 1^k$$

$$\Rightarrow \quad 5^{\overset{\circ}{4}} = \overset{\circ}{13} + 1 \quad \wedge \quad 5^{\overset{\circ}{4}+2} = \overset{\circ}{13} + 12$$

$$5^{\overset{\circ}{4}+1} = \overset{\circ}{13} + 5 \quad \wedge \quad 5^{\overset{\circ}{4}+3} = \overset{\circ}{13} + 8$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

17.- Determinar el mayor valor del producto de a × b tal que a y b cumplan con la siguiente relación :

$$7.9^{\overline{ab}} + 8^{\overline{ba}} = \overset{\circ}{56} + a + b$$

A) 81 ***B) 63*** ***C) 72*** ***D) 54*** ***E) 56***

Resolución.-

Para formar los múltiplos de 56 puede trabajarse convenientemente con múltiplos de 7 ó de 8:

$$7.9^{\overline{ab}} + 8.8^{\overline{ba}-1} = \overset{\circ}{56} + a + b$$

$$7(8+1)^{\overline{ab}} + 8(7+1)^{\overline{ba}} = \overset{\circ}{56} + a + b$$

Aplicando la divisibilidad al binomio de Newton , tendremos :

$$7(\overset{\circ}{8}+1) + 8(\overset{\circ}{7}+1) = \overset{\circ}{56} + a + b$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas se tendrá que :

$$\overset{\circ}{56} + 7 + \overset{\circ}{56} + 8 = \overset{\circ}{56} + a + b$$

De lo cual deducimos que : $a + b = 15$

$$\text{posibilidades}\left\{\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 6 & 9 \\ 7 & 8 \\ 8 & 7 \\ 9 & 6 \end{array}\right.$$

$$\therefore \quad (a \times b)_{max} = 7 \times 8 = \boxed{56}$$ RPTA. E

18.- Hallar el resto de dividir 2^{200} entre 7.

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Según el problema se tiene :

$$\begin{array}{l|l} 2^{200} & 7 \\ \hline r & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 2^{200} = \overset{\circ}{7} + r$$

Puesto que es previsible analizar los restos potenciales de 2 respecto al módulo 7 , tendremos :

$$\left.\begin{array}{l} 2^1 = \overset{\circ}{7}+2 \\ 2^2 = \overset{\circ}{7}+4 \\ 2^3 = \overset{\circ}{7}+1 \end{array}\right\} g = 3 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2^{\overset{\circ}{3}+1} = \overset{\circ}{7}+2 \\ 2^{\overset{\circ}{3}+2} = \overset{\circ}{7}+4 \\ 2^{\overset{\circ}{3}} = \overset{\circ}{7}+1 \end{array}\right.$$

Reconociendo que : $200 = \overset{\circ}{3} + 2$

Se tendrá que : $2^{200} = 2^{\overset{\circ}{3}+2} = \overset{\circ}{7} + 4 \quad \Rightarrow \quad r = 4$ RPTA. D

19.- Sabiendo que : $\underbrace{23.23.23\ldots23}_{\text{"}n\text{" veces}} = \overset{\circ}{5}+2$ ***;donde además "n" es un número de dos cifras***

¿Cuál es la suma de todos los valores que puede tomar "n"?

A) 1025 ***B) 1265*** ***C) 1375*** ***D) 1155*** ***E) 1485***

<u>Resolución</u>.-

Expresando la condición dada de un modo más abreviado , se tendrá : $23^n = \overset{\circ}{5} + 2$ .....(1)

Analizando los restos potenciales de 23 respecto al módulo 5 :

$$\left.\begin{array}{l} 23^1 = \overset{\circ}{5}+3 \\ 23^2 = \overset{\circ}{5}+4 \\ 23^3 = \overset{\circ}{5}+2 \\ 23^4 = \overset{\circ}{5}+1 \end{array}\right\} g = 4 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 23^{\overset{\circ}{4}+1} = \overset{\circ}{5}+3 \\ 23^{\overset{\circ}{4}+2} = \overset{\circ}{5}+4 \\ 23^{\overset{\circ}{4}+3} = \overset{\circ}{5}+2 \\ 23^{\overset{\circ}{4}} = \overset{\circ}{5}+1 \end{array}\right. \quad \text{......(2)}$$

Comparando (1) y (2) deducimos que : $n = \overset{\circ}{4} + 3$

Puesto que la condición es que "n" sea un número de dos cifras , se puede predecir el siguiente conjunto de valores posibles :

$n \in \{11 ; 15 ; 19 ; \ldots ; 99\}$ ....(sucesión de razón 4)

Luego "n" tomará : $\dfrac{99-11}{4} + 1 = 23$ valores

La suma de todos ellos será : $\dfrac{(11+99)\times 23}{2} = 1\,265$ RPTA. B

20.- Si : $577^{\overline{aba}} = \overset{\circ}{11} + 4$. ***¿Cuantos valores puede tomar*** $\overline{aba}$ ***?***

A) 3 ***B) 10*** ***C) 20*** ***D) 30*** ***E) 40***

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo con el dato se sabe que : $577^{\overline{aba}} = \overset{\circ}{11} + 4$

Analizando los restos potenciales de 577 respecto al módulo 11, se tendrá :

$$\left.\begin{array}{l} 577^1 = \overset{\circ}{11}+5 \\ 577^2 = \overset{\circ}{11}+3 \\ 577^3 = \overset{\circ}{11}+4 \\ 577^4 = \overset{\circ}{11}+9 \\ 577^5 = \overset{\circ}{11}+1 \end{array}\right\} \quad g = 5 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 577^{\overset{\circ}{5}+1} = \overset{\circ}{11}+5 \\ 577^{\overset{\circ}{5}+2} = \overset{\circ}{11}+3 \\ 577^{\overset{\circ}{5}+3} = \overset{\circ}{11}+4 \\ 577^{\overset{\circ}{5}+4} = \overset{\circ}{11}+9 \\ 577^{\overset{\circ}{5}} = \overset{\circ}{11}+1 \end{array}\right. \quad .....(*)$$

Como : $577^{\overline{aba}} = \overset{\circ}{11} + 4 \Rightarrow$ de (*) , se deduce que : $\overline{aba} = \overset{\circ}{5} + 3$ ....(**)

De (**) podemos afirmar que "a" solo puede ser 3 ú 8 , mientras que b puede tomar cualquier valor . A continuación te muestro todos los posibles valores para generar el número $\overline{aba}$:

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \downarrow & \downarrow \\ 3 & 0 \\ 8 & 1 \\ & 2 \\ & 3 \\ & \vdots \\ & 9 \\ \overline{2} \times & \overline{10} = \end{array}$$

20 números RPTA. C

21.- Si sabemos que :

$$\overline{abc}^{\,a} = \overset{\circ}{11} + 2$$
$$\overline{abc}^{\,b} = \overset{\circ}{11} + 4$$
$$\overline{abc}^{\,c} = \overset{\circ}{11} + 9$$

Calcular el resto de dividir $\overline{abc}^{\,\overline{abc}}$ ***entre 11***

A) 1 ***B) 3*** ***C) 5*** ***D) 7*** ***E) 9***

Resolución.-

Sabiendo que : $\begin{array}{l|l} \overline{abc}^{abc} & 11 \\ r & k \end{array} \Rightarrow \overline{abc}^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{11} + r$

Operando : $\overline{abc}^{\overline{abc}} = \overline{abc}^{100a+10b+c} = \overline{abc}^{100a} \cdot \overline{abc}^{10b} \cdot \overline{abc}^{c}$ ....(1)

A continuación analizaremos factor por factor empleando los restos potenciales .

a) El primer factor : $\overline{abc}^{100a} = (\overline{abc}^{a})^{100}$.

Reemplazando el dato : $\overline{abc}^{100a} = (\overset{\circ}{11} + 2)^{100} = \overset{\circ}{11} + 2^{100}$ ....(*)

Ahora analizaremos los restos potenciales de 2 respecto al módulo 11 :

$$\left.\begin{array}{l} 2^1 = \overset{\circ}{11}+2 \\ 2^2 = \overset{\circ}{11}+4 \\ 2^3 = \overset{\circ}{11}+8 \\ 2^4 = \overset{\circ}{11}+5 \\ 2^5 = \overset{\circ}{11}+10 \\ 2^6 = \overset{\circ}{11}+9 \\ 2^7 = \overset{\circ}{11}+7 \\ 2^8 = \overset{\circ}{11}+3 \\ 2^9 = \overset{\circ}{11}+6 \\ 2^{10} = \overset{\circ}{11}+1 \end{array}\right\} g = 10 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2^{\overset{\circ}{10}+1} = \overset{\circ}{11}+2 \\ 2^{\overset{\circ}{10}+2} = \overset{\circ}{11}+4 \\ 2^{\overset{\circ}{10}+3} = \overset{\circ}{11}+8 \\ 2^{\overset{\circ}{10}+4} = \overset{\circ}{11}+5 \\ 2^{\overset{\circ}{10}+5} = \overset{\circ}{11}+10 \\ 2^{\overset{\circ}{10}+6} = \overset{\circ}{11}+9 \\ 2^{\overset{\circ}{10}+7} = \overset{\circ}{11}+7 \\ 2^{\overset{\circ}{10}+8} = \overset{\circ}{11}+3 \\ 2^{\overset{\circ}{10}+9} = \overset{\circ}{11}+6 \\ 2^{\overset{\circ}{10}} = \overset{\circ}{11}+1 \end{array}\right.$$

Dado que : $100 = \overset{\circ}{10} \Rightarrow 2^{100} = 2^{\overset{\circ}{10}} = \overset{\circ}{11} + 1$ ....(**)

Al reemplazar en (**) en (*) encontramos que : $\overline{abc}^{100a} = \overset{\circ}{11} + 1$ ....(2)

b) El segundo factor : $\overline{abc}^{10b} = (\overline{abc}^{b})^{10} = (\overset{\circ}{11} + 4)^{10} = \overset{\circ}{11} + 4^{10} = \overset{\circ}{11} + 2^{20}$

Y como : $20 = \overset{\circ}{10} \Rightarrow 2^{20} = \overset{\circ}{11} + 1 \Rightarrow \overline{abc}^{10b} = \overset{\circ}{11} + 1$ ....(3)

c) El tercer factor, es por dato : $\overline{abc}^{c} = \overset{\circ}{11} + 9$ ....(4)

Luego de (2) ,(3) y (4) en (10 : $\overline{abc}^{\overline{abc}} = (\overset{\circ}{11} + 1)(\overset{\circ}{11} + 1)(\overset{\circ}{11} + 9) = \overset{\circ}{11} + 9$

$\therefore$ $r = 9$ RPTA. E

6.8 CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Llamamos criterios de Divisibilidad a ciertas prácticas o procedimientos que aplicados a las cifras de un numeral permiten determinar su divisibilidad respecto a cierto módulo.

6.8A CRITERIO DE DIVISIBILIDAD ENTRE 3 ó 9

Un numeral es divisible entre 3 (o entre 9) si y sólo si la suma de sus cifras es divisible entre 3 (o entre 9).

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{3} \quad \Leftrightarrow \quad a + b + c + d = \overset{\circ}{3}$$

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{9} \quad \Leftrightarrow \quad a + b + c + d = \overset{\circ}{9}$$

Ejercicio : Calcular el valor de "x" sabiendo que $\overline{67x414}$ es divisible entre 9.

<u>Resolución</u> :

$$\overline{67x414} = \overset{\circ}{9}$$

$$\Rightarrow \quad 6 + 7 + x + 4 + 1 + 4 = \overset{\circ}{9}$$

$$22 + x = \overset{\circ}{9}$$

$$\therefore \quad x = 5$$

6.8B CRITERIO DE DIVISIBILIDAD ENTRE 11

Un numeral es divisible entre 11 si y sólo si la diferencia entre la suma de sus cifras de orden impar y la suma de sus cifras de orden par es divisible entre 11.

$$\overset{\overset{\leftarrow}{+-+-+}}{\overline{abcde}} = \overset{\circ}{11} \quad \Leftrightarrow \quad a - b + c - d + e = \overset{\circ}{11}$$

Ejemplo : ¿Cuál es el valor que debe tomar "y" para que el numeral $\overline{14y17}$ sea divisible entre 11?

<u>Resolución</u> :

$$\overset{+-+-+}{\overline{14y17}} = \overset{\circ}{11}$$

Luego : $1 - 4 + y - 1 + 7 = \overset{\circ}{11}$

$$\Rightarrow \quad 3 + y = \overset{\circ}{11}$$

$$\therefore \quad \boxed{y = 8}$$

6.8C CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD ENTRE POTENCIAS DE 2

Un numeral es divisible entre 2 (= 2^1) si y sólo si su última cifra es par (0 ; 2 ; 4 ; 6 u 8).

Un numeral es divisible entre 4 (= 2^2) si y sólo si el numeral formado por sus 2 últimas cifras es divisible entre 4.

Un numeral es divisible entre 8 (= 2^3) si y sólo si el numeral formado por sus 3 últimas cifras es divisible entre 8.

$$\overline{abcde} = \overset{\circ}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e = \overset{\circ}{2}$$

$$\overline{abcde} = \overset{\circ}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \overset{2\,1}{\overline{de}} = \overset{\circ}{4}$$

$$\overline{abcde} = \overset{\circ}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \overset{3\,2\,1}{\overline{cde}} = \overset{\circ}{8}$$

Ejercicio : ¿Qué valor debe asignársele a "z" para que el numeral $\overline{1143z}$ sea divisible entre 8?

<u>Resolución</u> :

$$\overline{1143z} = \overset{\circ}{8}\text{a}$$

Como $8 = 2^3$: $\overline{43z} = \overset{\circ}{8}$

$\therefore$ $z = 2$

6.8D CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD ENTRE POTENCIAS DE 5

Un numeral es divisible entre 5 si y sólo si su última cifra es múltiplo de 5 (0 ó 5).

Un numeral es divisible entre 25 si y sólo si el numeral formado por sus 2 últimas cifras es divisible entre 25.

Un numeral es divisible entre 125 si y sólo si el numeral formado por sus 3 últimas cifras es divisible entre 125.

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{5} \quad \Leftrightarrow \quad e = 0 \text{ ó } 5$$

$$\overline{abcde} = \overset{\circ}{25} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{de} = \overset{\circ}{25}$$

$$\overline{abcde} = \overset{\circ}{125} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{cde} = \overset{\circ}{125}$$

Ejemplo : ¿Cuál es el valor de la suma de los valores que deben reemplazar a "m" y "n" en el numeral $\overline{87653mn}$ para que sea divisible entre 125.

Resolución :

$$\overline{87653mn} = \overset{\circ}{125}$$

Como $125 = 5^3$: $$\overline{3mn} = \overset{\circ}{125}$$

$$\therefore \qquad \boxed{m = 7 \quad \wedge \quad n = 5}$$

6.8E CRITERIO DE DIVISIBILIDAD ENTRE 7

Un numeral es divisible entre 7 si al multiplicar a cada una de sus cifras (a partir de la derecha) por : 1 ; 3 ; 2 ; -1 ; - 3 ; - 2 ; 1 ; 3 ; ... y luego efectuar la suma algebraica resultante ésta resulta ser divisible entre 7.

$$\begin{array}{c} 1\,2\,3\,1\,2\,3\,1 \\ \overline{abcdefg} \\ +\quad -\quad + \end{array} = \overset{\circ}{7} \quad \Leftrightarrow \quad a - 2b - 3c - d + 2e + 3f + g = \overset{\circ}{7}$$

Ejemplo : ¿Cuál es el valor de "a" si el numeral $\overline{13a372}$ es divisible entre 7?

Resolución :

$$\begin{array}{c} 2\,3\,1\,2\,3\,1 \\ \overline{1\,3\,a\,3\,7\,2} \\ -\qquad + \end{array} = \overset{\circ}{7}$$

Entonces :$- 2(1) - 3(3) -(1)\, a + 2(3) + 3(7) + 1(2) = \overset{\circ}{7}$

$$\Rightarrow \qquad 18 - a = \overset{\circ}{7}$$

$$\therefore \qquad \boxed{a = 4}$$

6.8F CRITERIO DE DIVISIBILIDAD ENTRE 13

Un numeral es divisible entre 13 si al multiplicar a cada una de sus cifras (a partir de la derecha) por : 1 ; - 3 ; - 4 ; - 1 ; 3 ; 4 ; 1 ; - 3 ; - 4 ; ... y luego de efectuar la suma algebraica, resultara que ésta es divisible entre 13.

$$\begin{array}{c} 1\,4\,3\,1\,4\,3\,1 \\ \overline{abcdefg} \\ +\quad -\quad + \end{array} = \overset{\circ}{13} \quad \Leftrightarrow \quad a + 4b + 3c - d - 4e - 3f + g = \overset{\circ}{13}$$

Ejemplo : ¿Qué valor debe tomar "b" en el numeral $\overline{128b306}$ si éste es divisible entre 13.

Resolución :

$$\begin{array}{c} 1\,4\,3\,1\,4\,3\,1 \\ \overline{1\,2\,8\,b\,3\,0\,6} \\ +\quad -\quad + \end{array} = \overset{\circ}{13}$$

Entonces : $1 + 8 + 24 - b - 12 - 0 + 6 = \overset{\circ}{13}$

$$\Rightarrow \quad 27 - b = \overset{\circ}{13}$$

$$\therefore \quad \boxed{b = 1}$$

6.8G CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD ENTRE 33 'ó 99

Un numeral es divisible entre 33 si al multiplicar a cada una de sus cifras (a partir de la derecha) por : 1 ; 10 ; 1 ; 10 ; 1 ... y luego efectuar, la suma algebraica obtenida resultara ser divisible entre 33.

Un numeral es divisible entre 99 si al multiplicar a cada una de sus cifras (a partir de la derecha) por : 1 ; 10 ; 1 ; 10 ; 1 ... y luego efectuar, la suma algebraica obtenida resultara ser divisible entre 99.

$$\overset{1\ 10\ 1\ 10\ 1}{\overline{a\,b\,c\,d\,e}} = \overset{\circ}{33} \quad \Leftrightarrow \quad a + 10b + c + 10d + e = \overset{\circ}{33}$$

$$\overset{1\ 10\ 1\ 10\ 1}{\overline{a\,b\,c\,d\,e}} = \overset{\circ}{99} \quad \Leftrightarrow \quad a + 10b + c + 10d + e = \overset{\circ}{99}$$

Ejercicio : Calcular $(d + e)$ si el numeral $\overline{56d01e}$ es divisible entre 99 :

Resolución :

$$\overset{10\ 1\ 10\ 1\ 10\ 1}{\overline{5\,6\,d\,0\,1\,e}} = \overset{\circ}{99}$$

$$10(5) + 1(6) + 10d + 10(0) + 10(1) + e = \overset{\circ}{99}$$

$$66 + \overline{de} = \overset{\circ}{99}$$

$$\overline{de} = 33$$

Luego , es fácil deducir que : $d = 3 \quad \wedge \quad e = 3$

$$\therefore \quad \boxed{d + e = 6}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

22.- Dar el valor de a + b, si : $\overline{5a07a} = \overset{\circ}{9}$ ***(I)***

$\overline{b3b4b} = \overset{\circ}{11}$ ***(II)***

A) 4 ***B) 5*** ***C) 7*** ***D) 8*** ***E) 9***

<u>Resolución</u>.-

Resulta claro que debemos aplicar los criterios de divisibilidad entre 9 y entre 11 :

(I) $\overline{5a07a} = \overset{\circ}{9} \quad \Rightarrow \quad 5 + a + 0 + 7 + a = \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow \quad 12 + 2a = \overset{\circ}{9} \quad \Rightarrow \quad a = 3$

(II) $\overset{+-+-+}{\overline{b3b4b}} = \overset{\circ}{11} \quad \Rightarrow \quad b - 3 + b - 4 + b = \overset{\circ}{11}$

$\Rightarrow \quad 3b - 7 = \overset{\circ}{11} \quad \Rightarrow \quad b = 6$

$\therefore \quad a + b = 9$ RPTA. E

23.- Calcular la suma de todos los valores de "w" si el numeral $\overline{4ww8}$ es divisible entre 7 :

A) 2 ***B) 9*** ***C) 7*** ***D) 10*** ***E) 11***

<u>Resolución</u>.-

Aplicando el criterio de divisibilidad entre 7 :

$\underset{-\quad\;+}{\overset{1\,2\,3\,1}{\overline{4ww8}}} = \overset{\circ}{7} \quad \Rightarrow \quad -4 + 2w + 3w + 8 = \overset{\circ}{7}$

$\Rightarrow \quad 5w + 4 = \overset{\circ}{7}$

$\uparrow$

2

9

$\therefore \quad 2 + 9 = 11$ RPTA. E

24.- Hallar el valor de la cifra "x" si el número $\overline{2x6x8}$ es divisible entre 13.

A) 2 ***B) 3*** ***C) 4*** ***D) 6*** ***E) 8***

Resolución.-

Utilizando el criterio de divisibilidad entre 13 :

$$\underset{+\quad -\quad +}{\overset{3\,1\,4\,3\,1}{\overline{2x6x8}}} = \overset{\circ}{13} \quad \Rightarrow \quad 6 - x - 24 - 3x + 8 = \overset{\circ}{13}$$

$$\Rightarrow \quad -10 - 4x = \overset{\circ}{13}$$

$$\therefore \quad x = 4 \qquad \text{RPTA. C}$$

25.- Si el número $\overline{8xyx5y}$ es divisible entre 88, dar el valor numérico de x . y.

A) 5 B) 2 C) 9 D) 3 E) 8

Resolución.-

Para que $\overline{8xyx5y}$ sea divisible entre 88 debe ser divisible entre 11 y entre 8 :

a) $\overset{-+-+-+}{\overline{8xyx5y}} = \overset{\circ}{11} \quad \Rightarrow \quad -8 + x - y + x - 5 + y = \overset{\circ}{11}$

$$\Rightarrow \quad 2x - 13 = \overset{\circ}{11} \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

b) $\overline{8xyx5y} = \overset{\circ}{8}$, de acuerdo con lo establecido en el item 6.8C , tendremos que :

$$\overline{15y} = \overset{\circ}{8} \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

$$\therefore \quad x \,.\, y = 2 \qquad \text{RPTA. B}$$

26.- ¿Qué cifras deben sustituir a las letras "x" e "y" del número $\overline{7x36y5}$ para que sea divisible entre 1375. Indicar (x + y).

A) 5 B) 4 C) 8 D) 12 E) 3

Resolución.-

Dado que : 1375 = 125 × 11 , el número $\overline{7x36y5}$ debe ser divisible entre 125 y entre 11 :

a) $\overline{7x36y5} = \overset{\circ}{125}\ (5^3) \quad \Rightarrow \quad \overline{6y5} = \overset{\circ}{125}$

$$\Rightarrow \quad y = 2$$

b) $\overline{7x36y5} = \overset{\circ}{11} \quad \Rightarrow \quad \overset{-+-+-+}{\overline{7x3625}} = \overset{\circ}{11}$

$$\Rightarrow \quad -7 + x - 3 + 6 - 2 + 5 = \overset{\circ}{11}$$

$$\Rightarrow \quad x - 1 = \overset{\circ}{11} \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$\therefore \quad \boxed{x + y = 3} \qquad \text{RPTA. E}$$

27.- ¿Cuántos números de la forma $\overline{1a1bab}$ son divisibles entre 63?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución.-

El número $\overline{1a1bab}$ es divisible entre 63, sí y sólo sí es divisible entre 7 y entre 9 a la vez :

a) $\overset{2\,3\,1\,2\,3\,1}{\overline{\underbrace{1\,a\,1}_{-}\,\underbrace{b\,a\,b}_{+}}} = \overset{\circ}{7} \Rightarrow -2 - 3a - 1 + 2b + 3a + b = \overset{\circ}{7}$

$\Rightarrow 3b - 3 = \overset{\circ}{7}$

$\Rightarrow b = 1 \;,\; ó \;,\; b = 8$

b) $\overline{1a1bab} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow 1 + a + 1 + b + a + b = \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow 2a + 2b + 2 = \overset{\circ}{9}$

Si : $b = 1 \Rightarrow 2a + 2(1) + 2 = \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow 2a + 4 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 7$

Si : $b = 8 \Rightarrow 2a + 2(8) + 2 = \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow 2a + 18 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 0 \;, ó \;, a = 9$

Luego existen 3 números de la forma $\overline{1a1bab}$:

171171
101808
191898 RPTA. C

28.- Calcular la suma de todos los valores que toma el número $\overline{ab}$ si $\overline{12a03b}$ es divisible entre 33.

A) 164 B) 183 C) 181 D) 171 E) 167

Resolución.-

Aplicando el criterio de divisibilidad entre 33 : $\overset{10\,1\,10\,1\,10\,1}{\overline{1\,2\,a\,0\,3\,b}} = \overset{\circ}{33}$

$$\Rightarrow 10(1) + 1(2) + 10a + 1(0) + 10(3) + 1(b) = \overset{\circ}{33}$$

$$\Rightarrow \quad 10 + 2 + 10a + 0 + 30 + b = \overset{\circ}{33}$$

$$\Rightarrow \quad 10a + b + 42 = \overset{\circ}{33}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{ab} + 42 = \overset{\circ}{33}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{ab} \in \{24\,;57\,;90\}$$

Luego la suma de los posibles valores de $\overline{ab}$ es :

$$24 + 57 + 90 = \boxed{171}$$ RPTA. D

29.- ¿Cuántos números de tres cifras, divisibles entre 11, tienen como suma de cifras a 15?

A) 2 ***B) 3*** ***C) 4*** ***D) 5*** ***E) 6***

Resolución.-

Considerando a $\overline{abc}$ como el número de 3 cifras buscado , tendremos :

Según los datos : $\overline{abc} = \overset{\circ}{11}$ ... (1)

$a + b + c = 15$ ... (2)

De (1) : $\overset{+-+}{\overline{abc}} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow (a + c) - b = \overset{\circ}{11}$ ... (3)

De (2) : $a + c = 15 - b$ ... (4)

Reemplazando (4) en (3) : $15 - b - b = \overset{\circ}{11}$

$$15 - 2b = \overset{\circ}{11} \Rightarrow b = 2$$

En (4) : $a + c = 13$

$c \rightarrow$ 9 8 7 6 5 4

$a \rightarrow$ 4 5 6 7 8 9

Existen entonces , 6 números de la forma $\overline{abc}$:

429 ; 528 ; 627 ; 726 ; 825 ; 924 RPTA. E

30.- Calcular : a × b × c, si $\overline{abc}$ es divisible entre 9, $\overline{bac}$ es divisible entre 11 y $\overline{cab}$ es divisible entre 7.

A) 162 ***B) 126*** ***C) 154*** ***D) 96*** ***E) 90***

Resolución.-

Según los datos : $\overline{abc} = \overset{\circ}{9}$; $\overline{bac} = \overset{\circ}{11}$; $\overline{cab} = \overset{\circ}{7}$

Operando en forma conveniente :

$$\overline{abc} = \overset{\circ}{9} \quad \Rightarrow \quad a + b + c = \overset{\circ}{9} \quad \Rightarrow \quad \overline{cab} = \overset{\circ}{9}$$

$$\overset{+-+}{\overline{bac}} = \overset{\circ}{11} \quad \Rightarrow \quad b - a + c = \overset{\circ}{11} \quad \Rightarrow \quad \overline{cab} = \overset{\circ}{11}$$

Luego, como $\overline{cab}$ es divisible entre 7 ; 9 y 11 :

$$\overline{cab} = \overset{\circ}{\overline{7\times9\times11}} \quad \Rightarrow \quad \overline{cab} = \overset{\circ}{693}$$

Como $\overline{cab}$ es un número de 3 cifras : $\overline{cab} = 693$

Es decir : $c = 6$; $a = 9$; $b = 3$

$$\therefore \quad a\,.\,b\,.\,c = 162 \qquad \text{RPTA. A}$$

31.- Si mnp es divisible entre 37 y $\overline{npm}$ es divisible entre 14 ¿Cuál es el valor de (m + n + p)?

A) 13 ***B) 14*** ***C) 15*** ***D) 16*** ***E) 17***

<u>Resolución</u>.-

Por datos : $\overline{mnp} = \overset{\circ}{37}$ ... (1)

$\overline{npm} = \overset{\circ}{14}$ ... (2)

En (1) : $100m + 10n + p = \overset{\circ}{37}$

Multiplicando por 10 : $1000m + 100n + 10p = \overset{\circ}{37}$

Como $1000 = \overset{\circ}{37} + 1$: $(\overset{\circ}{37} + 1)m + 100n + 10p = \overset{\circ}{37}$

$$\overset{\circ}{37} + m + 100n + 10p = \overset{\circ}{37}$$

$$100n + 10p + m = \overset{\circ}{37} \quad \Rightarrow \quad \overline{npm} = \overset{\circ}{37}$$

Luego como $\overline{npm}$ es divisible entre 14 y entre 37 :

$$\overline{npm} = \overset{\circ}{\overline{14\times37}} \quad \Rightarrow \quad \overline{npm} = \overset{\circ}{518}$$

Como $\overline{npm}$ es un número de 3 cifras , podemos afirmar que : $\overline{npm} = 518$

Es decir : $n = 5$; $p = 1$; $m = 8$

$$\therefore \quad m + n + p = 14 \qquad \text{RPTA. B}$$

6.8 ECUACION DIOFANTICA O DIOFANTINA

Es aquella ecuación donde tanto los términos constantes como las variables son números enteros y además es un sistema insuficiente , asimismo puede ser una sola ecuación con dos o más incógnitas y de cualquier grado. El término "Diofántica" o "Diofantina" se utiliza en honor a DIOFANTO, matemático alejandrino que vivió alrededor de 250 A.C.

La ecuación diofántica lineal con dos incógnitas tiene la siguiente forma :

$$ax + by = c \qquad \dots (1)$$

donde a y b tienen como único divisor común a la unidad.

Siendo x_0 , y_0 una solución particular de la ecuación (1) , su solución general será :

$$x = x_0 + bt \quad \wedge \quad y = y_0 - at \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo Modelo : Resolver : $9x + 5y = 374 \quad \dots (\alpha)$

Expresemos la ecuación en función de múltiplos del menor coeficiente , es decir de 5. Veamos :

$$\overset{\circ}{5} - x + \overset{\circ}{5} = \overset{\circ}{5} + 4 \quad \Rightarrow \quad \overset{\circ}{5} = x + 4$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = 1$$

Reemplazando en (α) : $9(1) + 5y = 374 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 73$

La solución general será :

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 5t \\ y = 73 - 9t \end{array}\right\} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

Reemplazando algunos valores de "t" para determinar las soluciones posibles :

t	x	x
.	.	.
.	.	.
.	.	.
-2	-9	91
-1	-4	82
0	1	73
1	6	64
2	11	55
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO IV)

32.- ¿Cuántas parejas de valores cumplen que : $6x + 17y = 315$

Sabiendo que : $x \in \mathbb{Z}^+ \wedge y \in \mathbb{Z}^+$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución.-

Según la recomendación dada ,expresaremos la ecuación en función de múltiplos de 6 :

$$\overset{\circ}{6} + (\overset{\circ}{6} - 1)y = \overset{\circ}{6} + 3$$

$$\overset{\circ}{6} + \overset{\circ}{6} - y = \overset{\circ}{6} + 3 \quad \Rightarrow \quad \overset{\circ}{6} = y + 3$$

$$\Rightarrow \quad y_0 = 3$$

Reemplazando : $6x + 17(3) = 315 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 44$

Luego, la solución general será : $\left.\begin{array}{l} x=44+17t \\ y=3-6t \end{array}\right\} \quad (t \in \mathbb{Z})$

Para que $x \in \mathbb{Z}^+ \quad \wedge \quad y \in \mathbb{Z}^+$:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 44 \quad \wedge \quad y = 3$$

$$t = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 27 \quad \wedge \quad y = 9$$

$$t = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 10 \quad \wedge \quad y = 15$$

$\therefore$ Existen 3 parejas de valores RPTA. C

33.- Por S/. 241 se han comprado cuadernos a S/ 38 cada uno y lapiceros a S/ 17 cada uno. ¿Cuántos objetos se han comprado?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Resolución.-

Sean : x : número de cuadernos comprados
y : número de lapiceros comprados

$$\Rightarrow \quad 38x + 17y = 241 \quad ... (*)$$

Expresando (1) en función de múltiplos de 17 :

$$(\overset{\circ}{17} + 4)x + \overset{\circ}{17} = \overset{\circ}{17} + 3 \quad \Rightarrow \quad \overset{\circ}{17} + 4x + \overset{\circ}{17} = \overset{\circ}{17} + 3$$

$$\Rightarrow \quad 4x - 3 = \overset{\circ}{17}$$

Luego : $x_0 = 5$

Reemplazando en (1) : $38(5) + 17y = 241 \Rightarrow y_0 = 3$

Luego la solución general será : $\left.\begin{array}{l} x=5+17t \\ y=3-48t \end{array}\right\} \quad (t \in \mathbb{Z})$

Como tanto x como y son cantidades positivas : $t = 0$

$\therefore \quad x + y = 8$ RPTA. B

34.- Rocío va al mercado a comprar cierta cantidad de frutas, compra naranjas a S/ 0,84 cada una y manzanas a S/ 0, 36 cada una, gastando en total S/ 26, 04 . Calcular cuántas frutas compró en total, sabiendo que la cantidad de naranjas es la mayor posible ?

A) 33 B) 34 C) 35 D) 36 E) 37

<u>Resolución</u>.-

Rocío compró "x" naranjas (a S/.0,84 cada una)

"y" manzanas (a S/. 0,36 cada una)

$\Rightarrow \quad 0{,}84x + 0{,}36y = 26{,}04$

Multiplicando por 100 : $84x + 36y = 2\,604$

Dividiendo entre 12 : $7x + 3y = 217 \quad \ldots (*)$

Expresando (*) en función de múltiplos de 3 :

$$(\overset{\circ}{3} + 1)x + \overset{\circ}{3} = \overset{\circ}{3} + 1 \Rightarrow \overset{\circ}{3} + x = \overset{\circ}{3} + 1$$

$$\Rightarrow x - 1 = \overset{\circ}{3}$$

$$\Rightarrow x_0 = 1$$

Reemplazando en (*) : $7(1) + 3y = 217 \Rightarrow y_0 = 70$

Luego la solución general será : $\left.\begin{array}{l} x=1+3t \\ y=70-7t \end{array}\right\} \quad t \in \mathbb{Z}$

Porque la cantidad de naranjas sea máxima, la cantidad de manzanas debe ser mínima :

$$70 - 7t > 0 \Rightarrow 70 > 7t$$

$$\Rightarrow t < 10$$

Si $t = 9$: $x = 28 \wedge y = 7$

$\therefore \quad x + y = 35$ RPTA. C

35.- Por S/. 500 se compraron 100 frutas entre sandías, manzanas y ciruelas; si los precios unitarios de cada uno son S/. 50; S/.10 y S/. 1 respectivamente. ¿Cuántas frutas entre sandías y manzanas hay?

A) 39 B) 40 C) 41 D) 42 E) 43

<u>Resolución</u>.-

Sean : "x" el número de sandias compradas

"y" el número de manzanas compradas

"z" el número de ciruelas compradas

Luego : $x + y + z = 100$ ... (1)

$50x + 10y + z = 500$ ... (2)

Restando (1) de (2) llegamos a la ecuación diofántica :

$$49x + 9y = 400 \quad \text{... (3)}$$

Expresando esta ecuación en función de múltiplos de 9 :

$$(\overset{\circ}{9} + 4)x + \overset{\circ}{9} + 4 \quad \Rightarrow \quad \overset{\circ}{9} + 4x + \overset{\circ}{9} = \overset{\circ}{9} + 4$$

$$\Rightarrow \quad 4(x - 1) = \overset{\circ}{9}$$

Luego podemos deducir que : $x = 1$

Reemplazando en (3) : $49(1) + 9y = 400 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 39$

La solución general será : $\left.\begin{matrix} x = 1 + 9t \\ y = 39 - 49t \end{matrix}\right\} \; t \in \mathbb{Z}$

Para que tanto x como y sean enteros : $t = 0$

$\therefore \quad x + y = 40$ RPTA. B

36.- Jorge piensa cada día ahorrar S/.150, pero cada mañana se encuentra con Ana y gasta S/129 . Si no es Ana, es Betty con quién gasta S/. 73 . De esa manera ¿ en cuántos días, como mínimo y como máximo, Jorge ahorrará S/.1 456?

A) 32 y 64 B) 64 y 24 C) 24 y 56 D) 32 y 56 E) 32 y 48

<u>Resolución</u>.-

Cada día que sale con Ana ahorra : S/.150 - S/.129 = S/. 21

Y cada día que sale con Betty ahorra : S/. 150 - S/. 73 = S/. 77.

Si salio "x" *días* con Ana e "y" *días* con Betty : $21x + 77y = 1456$

Dividiendo entre 7 : $3x + 11y = 208$ ... (*)

Expresando la ecuación (1) en funcion de múltiplos de 3 :

$$\overset{\circ}{3} + (\overset{\circ}{3} + 2)y = \overset{\circ}{3} + 1 \Rightarrow \overset{\circ}{3} + \overset{\circ}{3} + 2y = \overset{\circ}{3} + 1$$

$$\Rightarrow 2y - 1 = \overset{\circ}{3}$$

$$\Rightarrow y_0 = 2$$

Reemplazando en (1) : $3x + 11(2) = 208 \Rightarrow x_0 = 62$

Luego, la solución general será : $\left.\begin{array}{l} x = 62 + 11t \\ y = 2 - 3t \end{array}\right\} t \in \mathbb{Z}$

Las soluciones serán :

t	x	x
0	62	2
-1	51	5
-2	40	8
-3	29	11
-4	18	14
-5	7	17

Entonces :

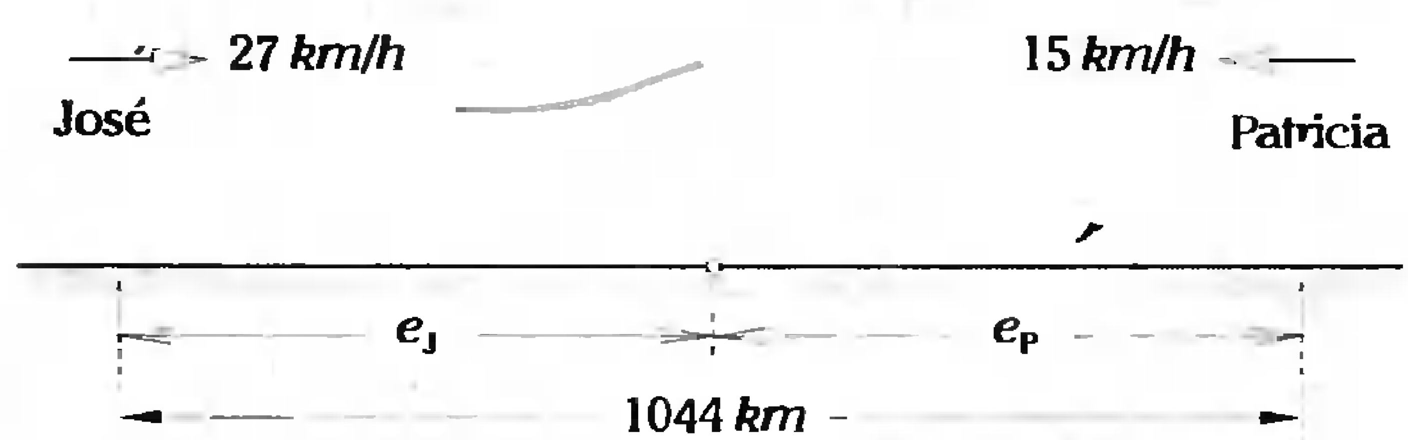
$$(x + y)_{maximo} = 62 + 2 = 64 \text{ días}$$
$$(x + y)_{minimo} = 7 + 17 = 24 \text{ días}$$

RPTA. B

37.- Cada vez que desean encontrarse, José y Patricia recorren entre ambos 1 044 km con rapideces constantes de 27 y 15 km/h respectivamente; cuando caminan un número entero de horas, descansan ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de kilómetros recorridos por cada uno de ellos cuando se encuentran, sabiendo que la diferencia de horas caminadas por cada uno es mínima y además pueden descansar?

A) 72 km B) 414 km C) 236 km D) 128 km E) 324 km

Resolucion.-



Del gráfico se puede apreciar que : $e_J + e_P = 1\,044$

Sea "x" el número de horas que estuvo caminando José , e , "y" el número de horas que estuvo caminando Patricia, luego : $27x + 15y = 1044$

Dividiendo entre 3 : $9x + 5y = 348$ ... (*)

Expresando (*) en función de múltiplos de 5 : $(\overset{\circ}{5} + 4)\,x + \overset{\circ}{5} = \overset{\circ}{5} + 3$

$\Rightarrow \quad \overset{\circ}{5} + 4x + \overset{\circ}{5} = \overset{\circ}{5} + 3$

$\Rightarrow \quad 4x - 3 = \overset{\circ}{5} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2$

Reemplazando en (*) : $9(2) + 5(y) = 348 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 66$

La solución general será : $x = 2 + 5t \quad \wedge \quad y = 66 - 9t$

Las posibles soluciones serán :

(x - y) mínimo

t	0	1	2	3	4	5	6	7
x	2	7	12	17	22	27	32	37
y	66	57	48	39	30	21	12	3

Luego : $e_J - e_P = 27(27) - 15(21)$

$\therefore \quad e_J - e_P = 414km$ RPTA. B

38.- Un microbusero recaudó en uno de sus recorridos S/. 24,40; si por cada escolar cobra S/. 0,30, por cada universitario S/.0,35 y por cada pasajero adulto S/.0,70. Averiguar a cuántos pasajeros transportó, sabiendo que el número de pasajeros adultos es el mayor posible?

A) 34 ***B) 35*** ***C) 36*** ***D) 37*** ***E) 38***

Resolución.-

Si subieron : x escolares (0,30 c/u.)

y universitarios (0,35 c/u.)

z adultos (0,70 c/u.)

Entonces se puede establecer que : $0{,}30x + 0{,}35y + 0{,}70z = 24{,}40$

Multiplicando por 20 : $6x + 7y + 14z = 488$ ... (1)

Expresando en función de múltiplos de 7 : $\overset{\circ}{7} - x + \overset{\circ}{7} + \overset{\circ}{7} = \overset{\circ}{7} + 5$

Puesto que "z" debe ser máximo , x debe ser mínimo : $\therefore \quad x = 2$

Reemplazando en (*) : $6(2) + 7y + 14z = 488$

$$7y + 14z = 476$$

$$y + 2z = 68$$

Como "z" es máximo, "y" es mínimo, luego : $y = 0$

$$\therefore \quad \boxed{z_{max} = 34} \qquad \text{RPTA. A}$$

39.- Un grupo de estudiantes compuesto de 30 personas, en un examen recibió calificaciones de 2; 3; 4 y 5 . La suma de las calificaciones es 93. Las notas de 3 fueron más que las de 5 y menos que las de 4. El número de las de 4 es divisible entre 10 y el número de las de 5 es par ¿Cuántas calificaciones son de 2?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

<u>Resolución</u>.-

Sean : "x" personas que recibieron calificación 2

"y" personas que recibieron calificación 3

"z" personas que recibieron calificación 4 $(z = \overset{\circ}{10})$

"w" personas que recibieron calificación 5 $(w = \overset{\circ}{2})$

Luego :

$$\left.\begin{array}{ll} x + y + z + w = 30 & \ldots(1) \\ 2x + 3y + 4z + 5w = 93 & \ldots(2) \end{array}\right\} \quad w < y < z$$

Multiplicando la ecuación (1) por (2) y restándola de la ecuación (2) se obtiene :

$$y + 2z + 3w = 33$$

Como "z" es divisible entre 10 : $z = 10$

Entonces : $y + 3w = 13$

$$\begin{array}{ccc} y & & 3w \\ \downarrow & & \downarrow \\ 7 & & 2 \end{array} \quad \leftarrow \quad \text{pues : } y > w$$

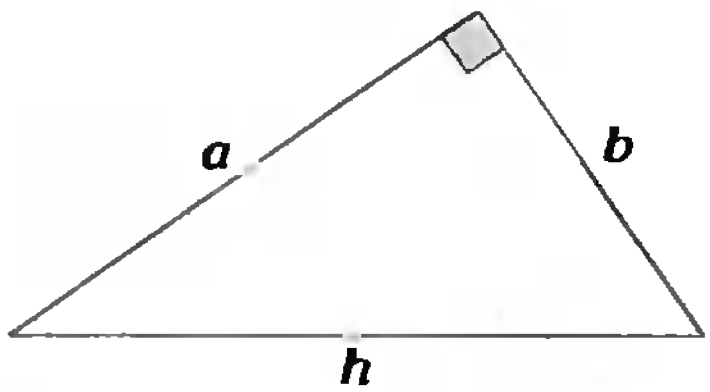
Reemplazando en (1) : $\boxed{x = 11}$ RPTA. D

40.- ¿Cuántos triángulos rectángulos cumplen con la siguiente condición : "Sus catetos son números enteros y si al mayor se le resta 14 y al menor se le agrega 8, la hipotenusa no varía"?

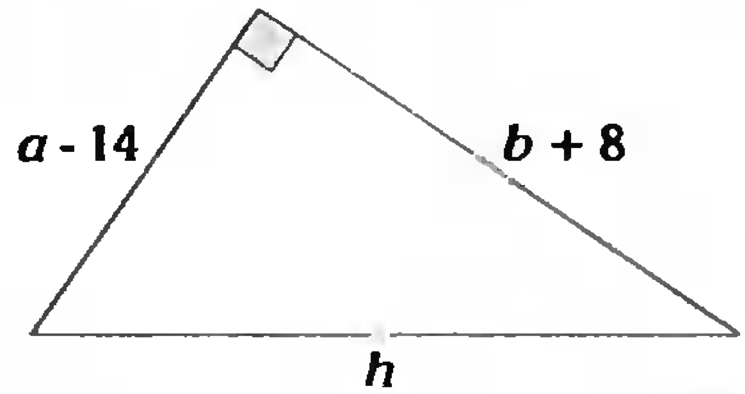
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución.-

Triángulo inicial



Triángulo final



Donde : $a > b$

a ↑ cateto mayor; b ↑ cateto menor

Por el teorema de Pitágoras : $a^2 + b^2 = h^2$

$$(a - 14)^2 + (b + 8)^2 = h^2$$

Igualando : $a^2 + b^2 = (a - 14)^2 + (b + 8)^2$

$$a^2 + b^2 = a^2 - 28a + 196 + b^2 + 16b + 64$$

Luego de simplificar se tiene : $28a - 16b = 260$

$$\boxed{7a - 4b = 65} \quad \dots (*)$$

4 (-)?

Expresando en función de múltiplos de 7 : $\overset{\circ}{7} - 4b = \overset{\circ}{7} + 2$

$$\Rightarrow \quad 4b + 2 = \overset{\circ}{7} \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

Reemplazando en (*) : $7a - 4(3) = 65 \quad \Rightarrow \quad a = 11$

La solución general será : $\left.\begin{array}{l} a = 11 - 4t \\ b = 3 - 7t \end{array}\right\} \quad t \in \mathbb{Z}$

Como $a > b$: $11 - 4t > 3 - t \quad \Rightarrow \quad 3t > -8$

$$\Rightarrow \quad t > -2{,}6$$

Luego : $t = -2 \quad \Rightarrow \quad a = 19 \wedge b = 17$

$t = -1 \quad \Rightarrow \quad a = 15 \wedge b = 10$

$\therefore$ $\boxed{\text{Existen 2 triángulos}}$ RPTA. B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- ¿Cuántos enteros positivos menores que 1 000 son divisibles entre 13?

A) 77 B) 76 C) 75 D) 78 E 72

2.- Entre 261 y 7214. ¿Cuántos números enteros terminados en 2. Son divisibles por 7?

A) 98 B) 99 C) 100 D) 101 E) 102

3.- ¿Cuántos números de 4 cifras terminados en 3 son divisibles por 13?

A) 110 B) 70 C) 71 D) 69 E) 109

4.- Del 1 al 1000 ¿Cuántos números son divisibles entre 3 pero no entre 8?

A) 290 B) 291 C) 292
D) 295 E) 296

5.- Por que números será divisible la diferencia de los cuadrados de $\overline{ab}$ y $\overline{ba}$.

A) 6 y 11 B) 9 y 11 C) 5 y 4
D) 7 E) 13

6.- Porque número es siempre divisible un número de la forma : $N = \overline{ab(2a)(2b)}$.

A) 13 B) 15 C) 17 D) 19 E) 31

7.- En una reunión asistieron 158 personas, se observó que a la onceava parte de los hombres les gustaba el baile de lambada y a la novena parte de las mujeres no le gustaba dicho ritmo erótico. ¿A cuántas mujeres le gustaba la lambada?

A) 72 B) 63 C) 66 D) 90 E) 81

8.- Toto podría ahorrar S/. 30 diariamente pero cada vez que sale con Bárbara gasta 19 *soles*, cada vez que sale con Raquel gasta 16 *soles* y cuando sale con su novia gasta 8 *soles*. Si todos los días sale con alguna de las tres y ya tiene ahorrado S/. 273. ¿Cuántos días salió con su novia, sabiendo que Toto ahorró dicha suma en un tiempo mínimo?

A) 14 B) 16 C) 10 D) 6 E) 3

9.- Un vendedor tiene 6 cestas que contienen huevos en unas tiene huevos de gallina y en las otras de pato. El número de huevos que tenían las cestas es como sigue : 8; 12; 21; 23; 24 y 29 meditaba el vendedor; "Si vendo esta cesta de huevos de pato. me quedarían el cuádruplo de huevos de gallina que de pato?

A) 12 y 29 B) 12 y 24 C) 12 y 8
D) 12 y 21 E) 23 y 29

10.- Si : $\overline{ab0ab} = \overset{\circ}{221}$. Hallar los valores de "b" e indique su suma.

A) 20 B) 12 C) 13 D) 25 E) 14

11.- ¿Cuántos números enteros positivos menores que 1500 cumplen con la con-dición de que al expresarlos en base 5; 7 y 11 siempre terminan en cero.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 2

12.- Un número de la forma :

$$\overline{(2a)(2b)(2c)abc}$$

es siempre divisible entre:

A) 7 B) 13 C) 19 D) 17 E) 23

13.- La suma de 45 números consecutivos resulta un múltiplo de 17. Si el primero es de 2 cifras. Dar el menor valor que toma el menor de los números.

A) 17 B) 13 C) 14 D) 12 E) 18

14.- ¿Cuántos números de la forma $\overline{31abc}$ son divisibles entre 95?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

15.- Si el número : $\overline{a(a+5)(a+4)}_{13}$

lo convertimos a base 61, termina en :

A) 4 B) 5 C) 8 D) α E) β

16.- ¿Cuántos números de la forma $\overline{abba}_8$ son múltiplos de 17?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17.- Hallar el menor valor de $(a+b)$ si :

$$\overline{1ab} + \overline{2ab} + \overline{3ab} + \ldots + \overline{20ab} = \overset{\circ}{51}$$

A) 2 B) 3 C) 13 D) 5 E) 6

18.- Las edades de 9 personas son diferentes entre sí y se forman usando únicamente 3 cifras; además el número de personas "mayores" excede en 3 al numero de personas "menores"; sabiendo que se consideran mayores a partir de los 50 años y que la suma de las edades de los "mayores" excede en 256 a la suma de las edades de los "menores". Hallar la edad del mayor de todos.

A) 55 B) 66 C) 77 D) 88 E) 99

19.- Podría ahorrar S/. 200 diarios pero cada mañana de sol gasto S/. 90 en helados y cada mañana de frío gasto S/. 60 en café Si ya tengo ahorrado S/. 2680. ¿Cuantos días ahorré? 2590

A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

20.- Una persona va a una tienda y compra lápices a S/. 2,60 cada uno y lapiceros a S/. 62,80. ¿Cuántos lápices compró si el número de lapiceros fue menor que una docena?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

21.- Un canguro debe avanzar una determinada distancia y da saltos de 17 *dm* cada uno, que es su mayor capacidad de salto, hasta completar la tercera parte; luego da saltos de 9 *dm* cada uno hasta avanzar 199 *dm* en total. ¿Cuántos saltos más debe dar para que llegue en forma exacta, si cada uno de ellos debe ser de igual distancia y de una dimensión entera en *dm*?

A) 11 B) 17 C) 8 D) 19 E) 23

22.- Se dispone de S/. 100 para comprar sellos de 1; 4 y 12 *soles* la unidad. ¿Cuántos sellos de cada uno de estos precios debe comprarse para hacer un total de 40 de ellos?

A) 28; 9; 3 D) 20; 11; 9
B) 28; 8; 4 E) 18; 16; 6
C) 20; 12; 8

23.- María va al mercado con S/. 22,59; compra papayas a S/. 0,77 cada una; naranjas a S/. 0,81 cada una y manzanas a S/. 1,43 cada una. Si compra la mayor cantidad posible de manzanas ¿Cuántas frutas compro en total, si gastó todo su dinero?

A) 23 B) 24 C) 25 D) 16 E) 17

24.- En un salón de 45 alumnos se rindió la prueba de aritmética obteniendo notas de: 44; 64 y 77 puntos, siendo la suma de notas 2711 ¿Cuántos alumnos han obtenido 44 puntos?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

25.- Qué cifras deben sustituir a las cifras 9 y 2 del número 59326 para que el resultado sea divisible entre 88.

A) 0 y 2 B) 3 y 6 C) 7 y 8
D) 0 y 3 E) 4 y 8

26.- Encontrar un número de cuatro cifras divisibles por 5; 9 y 11, donde la primera y la última cifra son iguales. Indicar la suma de las cifras del número.

A) 18 B) 21 C) 32 D) 9 E) 37

27.- Hallar un número de 5 cifras divisibles por 88 sabiendo que sus cifras centrales forman el número 452. (Dar como resultado la suma de cifras del número).

A) 15 B) 19 C) 21 D) 22 E) 23

28.- Si : $\overline{abc} = 66(a + c - b)$. Calcular el valor de : $a^2 + b^2 + c^2$.

A) 74 B) 136 C) 125 D) 89 E) 182

29.- Si $\overline{abc} = 27(a + b + c)$. Calcular "$a$" si "$c$" es par.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

30.- Indicar el valor de "a", si : $\overline{a3n2n}$ es divisible entre 104.

A) 3 B) 6 C) 5 D) 8 E) 7

31.- Calcular $a \cdot b$, si : $\overline{3a671b} = \overset{\circ}{72}$

A) 24 B) 32 C) 16 D) 14 E) 28

32.- Si : $\overline{xy6yz} = \overset{\circ}{1375}$.

Entonces $\overline{xyz}$ es divisible entre :

A) 11 B) 13 C) 17 D) 37 E) 29

33.- Si : $\overline{abc} = \overset{\circ}{11}$ (menor posible), y, $a + b + c = 17$. Hallar : $a + 2b + 3c$

A) 27 B) 32 C) 36 D) 38 E) 41

34.- Calcular $a + b$ si : $\overline{89a46b}$ es divisible entre 56.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

35.- Cuál es el valor de $(x + y + z)$ si : $\overline{20x28yz} = \overset{\circ}{875}$

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

36.- Si :

$$\overline{abc} = \overset{\circ}{13}$$
$$\overline{acb} = \overset{\circ}{11}$$
$$\overline{bac} = \overset{\circ}{5}$$

Hallar : $a \cdot b + c$

A) 65 B) 68 C) 11 D) 21 E) (2) ó (3)

37.- Si a un numeral se le extrae su quinta parte se obtiene como resultado $\overline{5ab48}$ el cuál es múltiplo de 504. Determinar la suma de cifras del numeral al cual se le ha extraído su quinta parte.

A) 15 B) 16 C) 18 D) 8 E) 24

38.- ¿Cuántos números de la forma $\overline{abbac}$ son divisibles entre 13?

A) 18 B) 36 C) 72 D) 48 E) 45

39.- El número de la forma $\overline{ab1ba}$, es divisible entre 44. Hallar : $(a + b)$.

A) 7 B) 10 C) 9 D) 8 E) 6

40.- Cuántos números de 3 cifras son iguales a 22 veces la suma de sus cifras.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7 NUMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

7.1 NUMERO PRIMO ABSOLUTO

Se llama así a cualquier número entero positivo mayor que uno, que se divide sin resto solamente por sí mismo y por la unidad.

Por Ejemplo : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 ...

OBSERVACIONES :

1) La serie de los números primos absolutos es infinita. (Demostrado por Euclides : Siglo IV *a. d. n. e.*)

2) Todo número de primo absoluto mayor que 3 al ser dividido entre 6 deja resto 1 ó 5

3) La unidad no es número primo.

7.2 NUMERO COMPUESTO

Se llama así a todo número entero positivo que se divide sin resto por otros números aparte de la unidad y el mismo.

Por ejemplo :

#	→	Divisores
18	→	1; 2; 3; 6; 9; 18
49	→	1; 7; 49
42	→	1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42

7.3 NUMEROS PRIMOS ENTRE SI (P. E. SI)

Llamados también números primos relativos, son aquellos que poseen un solo divisor común : La Unidad.

Por ejemplo sean los números :

#	→	Divisores
12	→	1; 2; 3; 4; 6; 12
25	→	1; 5; 25
35	→	1; 5; 7; 35

Entonces : (*) 12 y 25 son P. E. Si (*) 25 y 35 son P. E. Si

(*) 12 y 35 son P. E. Si (*) 12, 25 y 35 son P. E. Si

7.4 NUMEROS PRIMOS ENTRE SI 2 A 2

Son aquellos que al ser tomados por parejas (de 2 en 2) en todas las combinaciones posibles, siempre son primos entre sí. Por ejemplo, sean los números :

#	→	Divisores
15	→	1; 3; 5; 15
28	→	1; 2; 4; 7; 14; 28
143	→	1; 11; 13; 143

⇒ (*) 15 y 28 son P. E.Si

(*) 15 y 143 son P. E.Si

(*) 28 y 143 son P. E.Si

Entonces : 15; 28 y 143 son primos entre sí 2 a 2

7.5 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMETICA

"Todo número compuesto se descompone en una multiplicación de potencias de exponente entero positivo de sus divisores primos".

Por ejemplo : (*) $24 = 2^3 \times 3$

(*) $882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$

(*) $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

NOTAS :

1) A esta descomposición se le conoce con el nombre de DESCOMPOSICION CANONICA.

2) La descomposición canónica de un número es única.

Sea el número : $N = \underbrace{A^a \times B^b \times C^c \times \ldots \times P^p}_{\text{Descomposición Canónica}}$

Donde :

(*) A, B, C, ..., P : Números primos absolutos distintos entre sí (Factores primos o divisores primos)

(*) $a, b, c, \ldots p$: Exponentes enteros y positivos.

*) CANTIDAD DE DIVISORES DE N [D (N)]

$$D(N) = (a+1)(b+1)(c+1) \ldots (p+1) \qquad \ldots(7.1)$$

Ejemplo Aplicativo :

¿Cuántos divisores tiene 180?

(*) $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$

Luego : $D(180) = (2+1)(2+1)(1+1) = 18$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- ¿Cuántos divisores tiene el número : $N = 12^4 \cdot 15^3$ ***?***

A) 20 B) 120 C) 216 D) 288 E) 292

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente al número :

$$N = (2^2 . 3)^4 . (3 . 5)^3$$

$$= 2^8 . 3^4 . 3^3 . 5^3$$

$$= \underbrace{2^8 . 3^7 . 5^3}_{\text{Descomposición Canónica}}$$

Luego, la cantidad de divisores de N será :

$$D (N) = (8 + 1) (7 + 1) (3 + 1)$$

$\therefore$ $\boxed{D (N) = 288}$ RPTA. D

2.- ¿Cuántos divisores primos tiene : $N = 1\ 965\ 600$ ***?***

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente : $1\ 965\ 600 = 2^5 . 3^3 . 5^2 . 7^1 . 13^1$

Entonces los divisores primos serán : 2; 3; 5; 7 y 13

$\therefore$ $\boxed{D(Primos) = 5}$ RPTA. D

3.- Determinar la cantidad de divisores compuestos de : $N = 24^3 . 21^2$

A) 180 B) 177 C) 176 D) 194 E) 175

Resolución.-

Todo número entero positivo tiene como divisor a la unidad, tiene divisores primos y también divisores compuestos, luego :

$$\boxed{D (N) = 1 + D (Primos) + D (Compuestos)} \quad ... (1)$$

Descomponiendo canónicamente : $N = (2^3 . 3)^3 . (3 . 7)^2$

$$= 2^9 . 3^3 . 3^2 . 7^2$$

$$= 2^9 . 3^5 . 7^2 \leftarrow \text{Desc. canónica}$$

Luego : $D(N) = (9+1)(5+1)(2+1)$

$D(N) = 180$

Tiene como divisores primos a 2; 3 y 7 : $D(\text{Primos}) = 3$

En (1) : $180 = 1 + 3 + D(\text{Compuestos})$

$\therefore$ $\boxed{D(\text{Compuestos}) = 176}$ RPTA. C

4.- Para el número 2 160, determinar :

(I) Cuántos de sus divisores son múltiplos de 2?
(ii) Cuántos de sus divisores son múltiplos de 3?
(iii) Cuántos de sus divisores son múltiplos de 12?
(iv) Cuántos de sus divisores son múltiplos de 15?

Dar la suma de todos los resultados.

A) 72 B) 90 C) 124 D) 95 E) 200

Resolución.-

La descomposición canónica de 2 160 es : $2\,160 = 2^4 . 3^3 . 5^1$

Su cantidad total de divisores será : $D(2\,160) = 5 . 4 . 2 = 60$

(i) Para calcular la cantidad de divisores múltiplos de 2, se separa en la descomposición canónica un factor 2 :

$$2\,160 = 2(\underbrace{2^3 . 3^3 . 5^1}_{4\,.\,4\,.\,2})$$

De este modo los divisores múltiplos de 2 serán : $D(\overset{\circ}{2}) = 4 . 4 . 2 = 32$

(ii) Si se desea calcular la cantidad de divisores múltiplos de 3, se separa en la descomposición canónica un factor 3 :

$$2160 = 3(\underbrace{2^4 . 3^2 . 5^1}_{})$$

$$D(\overset{\circ}{3}) = 5 . 3 . 2 = 30$$

(iii) La cantidad de divisores múltiplos de 12 $(=2^2 . 3)$ se calcula :

$$2160 = 2^2 . 3(\underbrace{2^2 . 3^2 . 5^1}_{})$$

$$D(\overset{\circ}{12}) = 3 . 3 . 2 = 18$$

(iv) Análogamente, la cantidad de divisores múltiplos de 15(=3 . 5) será :

$$2160 = 3 . 5(\underbrace{2^4 . 3^2}_{})$$

$$D(\overset{\circ}{15}) = 5 . 3 = 15$$

La suma de todos los resultados será : $32 + 30 + 18 + 15 = 95$ **RPTA. D**

5.- ¿Cuántos divisores impares tiene 37 800?

A) 36 *B) 48* *C) 52* *D) 72* *E) 24*

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente : $37\,800 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1$

Cuya cantidad total de divisores será : $D(37\,800) = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$

La cantidad de divisores pares ($\overset{\circ}{2}$), será : $37\,800 = 2(\underbrace{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1})$

$$D(\overset{\circ}{2}) = \quad 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \quad = 72$$

Por lo tanto la cantidad de divisores impares será : $D(\text{impares}) = D(37\,800) - D(\overset{\circ}{2})$

$$= 96 - 72$$

$$\therefore \quad D\ (\text{impares}) = 24$$

Otro método : Eliminando de la descomposición canónica la potencia de 2, quedarán los factores que originan a los divisores impares : $3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1$.

Por lo tanto : $D(\text{impares}) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ **RPTA. E**

6.- ¿Cuántos divisores de 113 400 terminan en 1; 3; 7 ó 9?

A) 10 *B) 13* *C) 12* *D) 15* *E) 17*

Resolución.-

La descomposición canónica de 113 400 es : $113\,400 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$

Los divisores que terminan en 1; 3; 7 ó 9 son aquellos que no son divisibles por 2 ni por 5, por tanto, eliminando las potencias de 2 y de 5 :

$$113\,400 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$$

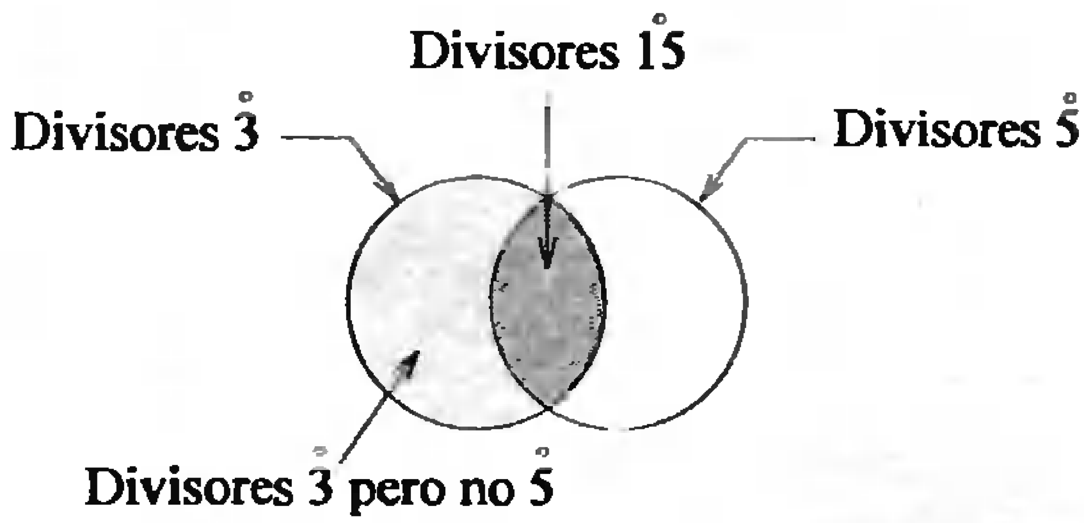
La cantidad de divisores pedida es : $(4 + 1)(1 + 1) = 10$ **RPTA. A**

7.- ¿Cuántos de los divisores de 396 000 son divisibles por 3 pero no por 5?

A) 24 *B) 36* *C) 18* *D) 72* *E) 48*

Resolución.-

Con la finalidad de poder tener un enfoque apropiado de los conjuntos de divisores solicitados, utilizaremos un diagrama de Venn - Euler :



La cantidad de divisores pedida se obtendrá restando : $D(\overset{o}{3}) - D(\overset{o}{15})$

Descomponiendo canónicamente : $396\,000 = 2^5 . 3^2 . 5^3 . 11^1$

La cantidad de divisores múltiplos de 3 es : $396\,000 = 3(\underbrace{2^5 . 3^1 . 5^3 . 11^1})$

$$D(\overset{o}{3}) = \quad 6 . 2 . 4 . 2 \quad = 96$$

La cantidad de divisores múltiplos de 15 (=3 . 5) es :

$$396\,000 = 3 . 5(\underbrace{2^5 . 3^1 . 5^2 . 11^1})$$

$$D(\overset{o}{15}) = \quad 6 . 2 . 3 . 2 \quad = 72$$

Por lo tanto, la cantidad de divisores múltiplos de 3 pero no de 5 será :

$$\boxed{96 - 72 = 24} \qquad \text{RPTA. A}$$

Otro método : Luego de extraer el factor 3, eliminamos la potencia de 5 para descartar a todos los divisores múltiplos de 5 :

$$396\,000 = 3(\underbrace{2^5 . 3^1 . 11^1})$$

$$D(\overset{o}{3} \text{ pero no } \overset{o}{5}) = \boxed{6 . 2 . 2 = 24} \qquad \text{RPTA. A}$$

7.6 FORMULAS ESPECIALES

Sea la descomposición canónica de N :

$$N = A^a . B^b . C^c \dots P^p \qquad \dots (*)$$

(1) SUMA DE LOS DIVISORES DE N [SD(N)]

Si queremos encontrar el valor de la suma de todos los divisores de un número N, debemos encontrar primero su descomposición canónica tal como se indica en (*), luego la relación que nos permite obtener dicha suma está dada así :

$$SD(N) = \frac{A^{a+1}-1}{A-1} . \frac{B^{b+1}-1}{B-1} . \frac{C^{c+1}-1}{C-1} \dots \frac{P^{p+1}-1}{P-1} \qquad \dots(7.2)$$

(2) SUMA DE LAS INVERSAS DE LOS DIVISORES DE N [SID(N)]

Conociendo la suma de los divisores de un número [SD(N)], el valor de la suma de sus inversos, estará dada por la siguiente relación :

$$SID(N) = \frac{SD(N)}{N} \qquad \dots(7.3)$$

Donde SD(N) es la suma de los divisores de N

(3) PRODUCTO DE LOS DIVISORES DE N [PD(N)]

Si deseamos encontrar el valor del producto de todos los divisores de un número N conocido, debemos encontrar primero su descomposición canónica como en (*) y a continuación determinar la cantidad de divisores que él posee [D(N)] y luego aplicar la siguiente relación :

$$PD(N) = \sqrt{N^{D(N)}} \qquad \dots(7.4)$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

8.- ¿Cuál es la suma de los divisores de 2 100?

A) 5218 ***B) 3124*** ***C) 2678*** ***D) 6944*** ***E) 8244***

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente : $2\,100 = 2^2 . 3^1 . 5^2 . 7^1$

Aplicando la fórmula : $SD(N) = \dfrac{2^{2+1}-1}{2-1} . \dfrac{3^{1+1}-1}{3-1} . \dfrac{5^{2+1}-1}{5-1} . \dfrac{7^{1+1}-1}{7-1}$

$= 7 . 4 . 31 . 8$

$\therefore$ $SD(N) = 6\,944$ RPTA. D

9.- Determinar la suma de las inversas de los divisores de 360.

A) 2,75 ***B) 3,25*** ***C) 3*** ***D) 2,8*** ***E) 3,$\hat{3}$***

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente : $360 = 2^3 . 3^2 . 5^1$

La suma de sus divisores será : $SD(360) = \dfrac{2^{3+1}-1}{2-1} . \dfrac{3^{2+1}-1}{3-1} . \dfrac{5^{1+1}-1}{5-1}$

$\Rightarrow$ $SD(360) = 1170$

Entonces, la suma de las inversas de los divisores de 360 es :

$$SID(360) = \frac{SD(360)}{360} = \frac{1170}{360}$$

$\therefore$ $SID(360) = 3,25$ RPTA. B

10.- Hallar el producto de los divisores del número : $N = 12^4 . 20^3$. Dar como respuesta el menor exponente de su descomposición canónica.

A) 4 200 ***B) 1 200*** ***C) 900*** ***D) 480*** ***E) 840***

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente : $N = (2^2 . 3)^4 . (2^2 . 5)^3$

$$\Rightarrow \quad N = \underbrace{2^{14} . 3^4 . 5^3}_{\text{Descomposición Canónica}}$$

Su número de divisores es : $D(N) = (14 + 1)(4 + 1)(3 + 1)$ $\Rightarrow$ $D(N) = 300$

Entonces, el producto de divisores será : $DD(N) = \sqrt{(2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^3)^{300}}$

$\therefore \quad DD(N) = 2^{4200} \cdot 3^{1200} \cdot 5^{900}$ RPTA. D

11.- Para el número 980. Determinar la suma de sus divisores múltiplos de 2.

A) 3048 B) 2072 C) 1026 D) 1036 E) 2052

Resolución.-

La descomposición canónica de 980 es : $980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$

Hallando los divisores múltiplos de 2 : $980 = 2\ (\underbrace{2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2}_{(1)})$

La suma de los divisores de (1) será : $SD(1) = \frac{2^2-1}{2-1} \cdot \frac{5^2-1}{5-1} \cdot \frac{7^3-1}{7-1}$

$\Rightarrow \quad SD(1) = 1026$

A cada uno de los divisores de (1) le falta multiplicarse por 2 para convertirse en múltiplo de 2, luego :

$SD(\overset{\circ}{2}) = 2 \times SD(1) \quad \Rightarrow \quad SD(\overset{\circ}{2}) = 2052$ RPTA. E

12.- Determinar el producto de los divisores múltiplos de 3 del número : 180

A) $2^9 \cdot 3^{18} \cdot 5^6$ B) $2^{12} \cdot 3^{18} \cdot 5^9$ C) $2^{18} \cdot 3^{12} \cdot 5^6$ D) $2^{12} \cdot 3^{18} \cdot 5^6$ E) $2^6 \cdot 3^{18} \cdot 5^{12}$

Resolución.-

La descomposición canónica de 180 es : $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

Hallando los divisores múltiplos de 3 : $180 = 3(\underbrace{2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1}_{(1)})$

La cantidad de divisores de (1) será : $D(1) = (2+1)(1+1)(1+1)$

$\Rightarrow \quad D(1) = 12$

Luego, el producto de los divisores de (1) será : $PD(1) = \sqrt{(2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1)^{12}}$

$PD(1) = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^6$

A cada uno de los divisores de (1) le falta multiplicarse por 3 para convertirse en múltiplo de 3, luego :

$PD(\overset{\circ}{3}) = 3^{12} \cdot PD(1) \quad \Rightarrow \quad PD(\overset{\circ}{3}) = 2^{12} \cdot 3^{18} \cdot 5^6$ RPTA. D

7.7 CONCEPTOS ADICIONALES

1. DIVISOR PROPIO :

Es aquel que, siendo divisor de un número, no es igual a él.

Ejemplos :

* Los divisores propios de 8 son : 1; 2 y 4
* Los divisores propios de 20 son : 1; 2; 4; 5 y 10

2.- NUMERO DEFECTUOSO :

Es aquel cuya suma de divisores propios es menor que él.

$$\text{N es defectuoso} \Leftrightarrow SD(N) - N < N$$

Ejemplo :

21 es un número defectuoso, pues la suma de sus divisores propios : $1 + 3 + 7 = 11 < 21$

3.- NUMERO ABUNDANTE :

Es aquel cuya suma de divisores propios es mayor que él.

$$\text{N es abundante} \Leftrightarrow SD(N) - N > N$$

Ejemplo :

18 es un número abundante, pues la suma de sus divisores propios : $1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21 > 18$

4.- NUMERO PERFECTO :

Es aquel cuya suma de divisores propios es igual a él.

$$\text{N es perfecto} \Leftrightarrow SD(N) - N = N$$

Ejemplo :

28 es un número perfecto, pues la suma de sus divisores propios : $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 = 28$

Los números perfectos se obtienen dando valores enteros y positivos a la variable "n" en la siguiente formula llamada *Relación de Euclides* :

$$\text{N (perfecto)} \quad 2^n(\underbrace{2^{n+1} - 1}_{\text{número primo absoluto}})$$

Si $n = 1$, el número perfecto será : $2^1 (2^{1+1} - 1) = 6$

Si $n = 2$, el número perfecto será : $2^2 (2^{2+1} - 1) = 28$

Si $n = 3$, el número $2^3(2^{3+1} - 1) = 120$ no será perfecto pues $2^{3+1} - 1 = 15$ no es número primo

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

13.- Determinar un número de 3 cifras que sea igual a la mitad de la suma de sus divisores. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 17 ***B) 18*** ***C) 19*** ***D) 20*** ***E) 21***

Resolución.-

Sea "N" el número pedido, entonces por dato : $N = \frac{1}{2} \times SD(N)$

$$2N = SD(N)$$

$$N = SD(N) - N$$

Luego, N es un número perfecto; ahora bien, como N debe tener 3 cifras, hacemos $n = 4$ en la RELACION DE EUCLIDES :

$$N = 2^4(\underbrace{2^5 - 1}_{\#\ \text{primo}}) = 496$$

La suma de cifras será : $4 + 9 + 6 = 19$ RPTA. C

7.8 FACTORIAL DE UN NUMERO "N" (N!)

Se define :

$$n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
$$0! = 1$$

Ejemplos :

* $4! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4$
* $9! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9$
* $24! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, 23 \,.\, 24 = 23! \,.\, 24$

Ejemplo :

Descomponer canónicamente a 12!

* $12! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 12$

Descomponiendo canónicamente :

* $12! = 2 \,.\, 3 \,.\, 2^2 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 7 \,.\, 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 11 \,.\, 2^2 \,.\, 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{12! = 2^{10} \,.\, 3^5 \,.\, 5^2 \,.\, 7^1 \,.\, 11^1}$

Un análisis de estos resultados ha permitido determinar una relación entre el número, su factorial y los exponentes correspondientes a cada uno de sus factores primos. Puede probarse que los exponentes de los divisores obtenidos también se pueden encontrar dividiendo 12 entre cada uno de ellos y sumando los cocientes obtenidos. Veamos :

* Exponente de 2 :

$$\begin{array}{llll} 12 & \underline{|\,2} & & \\ & 6 & \underline{|\,2} & \\ & & 3 & \underline{|\,2} \\ & & & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{Exp}(2) = 6 + 3 + 1 = 10$$

* Exponente de 3 :

$$\begin{array}{lll} 12 & \underline{|\,3} & \\ & 4 & \underline{|\,3} \\ & & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{Exp}(3) = 4 + 1 = 5$$

* Exponente de 5 :

$$\begin{array}{ll} 12 & \underline{|\,5} \\ & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{Exp}(5) = 2$$

* Los exponentes de 7 y 11 serán, obviamente 1 y 1 :

$$\Rightarrow \quad \text{Exp}(7) = 1 \quad \wedge \quad \text{Exp}(11) = 1$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO IV)

14.- ¿Cuál es el exponente de 2 en la descomposición canónica de $2^{12}!$?

A) 511 ***B) 1 023*** ***C) 2 047*** ***D) 4 095*** ***E) 8 191***

Resolución.-

Para hallar el exponente de 2 bastará dividir sucesivamente 2^{12} entre 2 y sumar los cocientes :

$$\begin{array}{llllllll}
2^{12} & \underline{|\,2} & & & & & & \\
 & 2^{11} & \underline{|\,2} & & & & & \\
 & & 2^{10} & \underline{|\,2} & & & & \\
 & & & 2^{9} & \ddots & & & \\
 & & & & 2^{2} & \underline{|\,2} & & \\
 & & & & & 2 & \underline{|\,2} & \\
 & & & & & & 1 &
\end{array}$$

Luego : Exponente (2) = $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10} + 2^{11}$

$$= \frac{2^{12}-1}{2-1}$$

$\therefore$ Exponente de 2 = 4095 RPTA. D

7.8 METODO COMBINATORIO

La cantidad de maneras en que puede descomponerse un número N como el producto de dos factores enteros y positivos [f (N)], se obtendrá a partir del conjunto de todos sus divisores elegidos convenientemente de dos en dos.

Ejemplo (1) : Los 8 divisores de 24 son :

$$1 \;;\; 2 \;;\; 3 \;;\; 4 \;;\; 6 \;;\; 8 \;;\; 12 \;;\; 24$$

Luego, 24 puede descomponerse de 4 maneras.

$$24 = \begin{Bmatrix} 1\times 24 \\ 2\times 12 \\ 3\times 8 \\ 4\times 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{f(24) = 4}$$

Ejemplo (2) : Los 9 divisores de 36 son :

$$1 \;;\; 2 \;;\; 3 \;;\; 4 \;;\; 6 \;;\; 9 \;;\; 12 \;;\; 18 \;;\; 36$$

Luego, 36 puede descomponerse de 5 maneras :

$$36 = \begin{Bmatrix} 1\times 36 \\ 2\times 18 \\ 3\times 12 \\ 4\times 9 \\ 6\times 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{f(36) = 5}$$

En general :

$$f(N) = \begin{cases} \dfrac{D(N)}{2} & \text{, si } D(N) \text{ es par} \\[2mm] \dfrac{D(N)+1}{2} & \text{, si } D(N) \text{ es impar} \end{cases}$$

Donde D(N) es la cantidad de divisores del número "N".

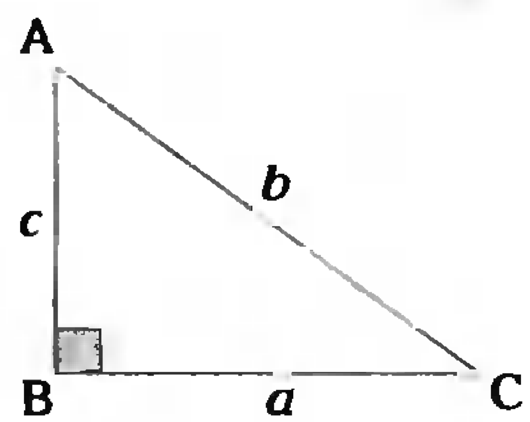
MISCELANEA

15.- Cuántos triángulos rectángulos, cuyos catetos miden un número entero de metros, tienen un área igual a 1 200 m^2?

A) 30 ***B) 36*** ***C) 15*** ***D) 18*** ***E) 24***

<u>Resolución</u>.-

Sea el triángulo ABC de área 1 200 m^2 :



Area = 1 200 $\Rightarrow$ $\dfrac{a.c}{2} = 1\,200$

Luego : $a \,.\, c = 2\,400$

Para determinar el número de triángulos que satisfacen la condición dada, se debe encontrar de cuántas maneras puede descomponerse 2 400 como el producto de 2 números enteros, es decir, debemos obtener : $f\,(2\,400)$. Veamos :

$$2\,400 = 2^5 \,.\, 3^1 \,.\, 5^2$$

$$\Rightarrow \quad D(2\,400) = (5+1)\,(1+1)\,(2+1)$$

$$D(2\,400) = 36 \qquad (\#\text{ par})$$

$$\therefore \quad \boxed{f\,(2400) = \frac{36}{2} = 18} \qquad \text{RPTA. D}$$

16.- Determinar el valor de "n", si : $N = 15 \,.\, 18^n$, tiene 144 divisores.

A) 3 ***B) 4*** ***C) 5*** ***D) 6*** ***E) 7***

<u>Resolución</u>.-

Descomponiendo polinómicamente : $N = (3 \,.\, 5) \,.\, (2 \,.\, 3^2)^n$

$$= 3 \,.\, 5 \,.\, 2n \,.\, 3^{2n}$$

$$= \underbrace{2^n \,.\, 3^{n+1} \,.\, 5^1}_{\text{Descomposicion Canónica}}$$

Por dato sabemos que : $D(N) = 144$

Luego : $(n + 1)(2n + 2)(1 + 1) = 144$

$$(n + 1)\,2(n + 1)(2) = 144$$

$$(n + 1)^2 = 36$$

$\therefore$ $n = 5$ RPTA. C

17.- Si N = 15 × 30^n tiene 294 divisores ¿Cuál es el valor de "n"?

A) 3 ***B) 4*** ***C) 5*** ***D) 7*** ***E) 8***

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente : $N = 3 . 5 . (2 . 3 . 5)^n$

$$= 3 . 5 . 2n . 3n . 5^n$$

$$= \underbrace{2^n . 3^{n+1} . 5^{n+1}}_{\text{Descomposición Canónica}}$$

Por dato sabemos que : $D(N) = 294$

Luego : $(n + 1)(n + 2)(n + 2) = \underbrace{294}_{6 . 7 . 7}$

$\therefore$ $n = 5$ RPTA. C

18.- ¿Cuántos ceros hay que agregar a la derecha de 275 para que el número resultante tenga 70 divisores?

A) 2 ***B) 3*** ***C) 4*** ***D) 5*** ***E) 6***

Resolución.-

Sea "n" el número de ceros agregados : $N = 275\underbrace{000...00}_{"n"}$

Descomponiendo canónicamente : $N = 275 . 10^n$

$$N = 5^2 . 11 . (2 . 5)^n$$

$$N = \underbrace{2^n . 5^{n+2} . 11^1}_{\text{Descomposicion Canónica}}$$

Por dato se sabe que : $D(N) = 70$

$$\Rightarrow \quad (n + 1)(n + 3)(2) = 70$$

$$(n+1)(n+3)(2) = 70$$

$$(n+1)(n+3) = \underbrace{35}_{5.7}$$

$$\therefore \quad \boxed{n = 4} \qquad \text{RPTA. C}$$

19.- Si el número N = 42 . 3^n tiene 3 divisores menos que 900, hallar dicho número y dar la suma de sus cifras.

A) 9 B) 5 C) 11 D) 8 E) 13

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente : $N = 2 . 3 . 7 . 3^n \Rightarrow N = \underbrace{2^1 . 3^{n+1} . 7^1}_{\text{Descomposición Canónica}}$

El número 900 descompuesto canónicamente es :

$$900 = 2^2 . 3^2 . 5^2$$

Entonces tiene : $(2+1)(2+1)(2+1) = 27$ divisores

De este modo : $D(N) = 27 - 3$

$$(2)(n+2)(2) = 24 \quad \Rightarrow \quad n = 4$$

$$\therefore \quad \boxed{N = 42 . 3^4 = 3402} \qquad \text{RPTA. A}$$

20.- Sabiendo que A = 12 . 30^n tiene doble cantidad de divisores que B = 12^n . 30 ; hallar el valor de "n".

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Resolución.-

Descomponiendo polinómicamente :

$$A = (2^2 . 3) . (2 . 3 . 5)^n \quad \Rightarrow \quad A = 2^n + 2 . 3^{n+1} . 5^n$$

$$B = (2^2 . 3)^n . (2 . 3 . 5) \quad \Rightarrow \quad B = 2^{2n+1} . 3^{n+1} . 5^1$$

Por condición del problema : $D(A) = 2 \times D(B)$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 2(2n+2)(n+2)(1+1)$$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 2 . 2(n+1)(n+2)(2)$$

$$n + 3 = 8$$

$$\therefore \quad \boxed{n = 5} \qquad \text{RPTA. C}$$

21.- Si la suma de los números de divisores de : $N_1 = 14 . 30^n$ $\wedge$ $N_2 = 21 . 15^n$ es 96 . ¿Cuál es el valor de "n"?

A) 2 ***B) 3*** ***C) 4*** ***D) 5*** ***E) 6***

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente :

$$N_1 = 2 . 7 . (2 . 3 . 5)^n \quad \Rightarrow \quad N_1 = 2^{n+1} . 3^n . 5^n . 7^1$$
$$N_2 = 3 . 7 . (3 . 5)^n \quad \Rightarrow \quad N_2 = 3^{n+1} . 5^n . 7^1$$

Por dato se sabe que : $D(N_1) + D(N_2) = 96$

$$(n + 2)(n + 1)(n + 1)(2) + (n + 2)(n + 1)(2) = 96$$

Dividiendo entre 2 : $(n + 2)(n + 1)^2 + (n + 2)(n + 1) = 48$

Factorizando : $(n + 2)(n + 1)[(n + 1) + 1] = 48$

$$(n + 2)^2 (n + 1) = \underbrace{48}_{4^2 . 3}$$

$\therefore$ $n = 2$ RPTA. A

22.- Si 16^n tiene "p" divisores. ¿Cuantos divisores tendrá 256^n?

A) 4p + 1 ***B) 4p - 1*** ***C) 2p +1*** ***D) 2p - 1*** ***E) 8p***

Resolución.-

Como $16 = 2^4$, entonces : $16^n = 2^{4n}$

Por dato se sabe que : $D(16^n) = p \quad \Rightarrow \quad 4n + 1 = p \quad ... (1)$

Como $256 = 2^8$, se tendrá : $256^n = 2^{8n}$

Luego : $D(256^n) = 8n + 1$

$$= 2(4n + 1) - 1 \quad ... (2)$$

Finalmente de (2) en (1) : $D(256^n) = 2p - 1$ RPTA. D

23.- Si el número : $N = 13^{k+2} - 13^k$; tiene 75 divisores compuestos; indicar el valor de "k".

A) 3 ***B) 4*** ***C) 5*** ***D) 6*** ***E) 7***

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente : $N = 13^k . 13^2 - 13^k$

Sacando factor común : $N = 13^k (13^2 - 1)$

Efectuando, se tiene : $N = 13^k . 168$

A continuación : $N = \underbrace{13^k . 2^3 . 7^1}_{\text{Descomposición Canónica}}$

Según el dato del problema, "N" tiene 75 divisores compuestos; asimismo observamos de la descomposición canónica de "N" , que éste tiene 4 divisores primos (13; 2; 3 y 7), luego :

$$D(N) = 1 + 4 + 75$$

$$(k + 1)(4)(2)(2) = 80$$

$$\therefore \quad k = 4 \qquad \text{RPTA. B}$$

24.- ¿Cuántos ceros se debe poner a la derecha de 9 para que el resultado tenga 239 divisores compuestos?

A) 4 ***B) 5*** ***C) 6*** ***D) 8*** ***E) 9***

Resolución.-

Llamando "n" al número de ceros agregados : $N = 9\underbrace{000...0}_{"n"}$

Descomponiendo canónicamente : $N = 9 . 10^n$

$$N = \underbrace{3^n . 2^n . 5^n}_{\text{Descomposición Canonica}}$$

Se observa que N tiene 3 divisores primos (3; 2 y 5). Asimismo se sabe que N tiene 239 divisores compuestos, luego :

$$D(N) = 1 + 3 + 239$$

$$3(n + 1)(n + 1) = 243$$

$$(n + 1)^2 = 81$$

$$\therefore \quad n = 8 \qquad \text{RPTA. D}$$

25.- ¿Cuántas veces habrá que multiplicar por 8 al número 300 para que el producto resultante tenga 126 divisores?

A) 3 ***B) 5*** ***C) 6*** ***D) 9*** ***E) 10***

Resolución.-

Multiplicando "n" veces por 8 a 300 se tendrá :

$$P = 300 \times \underbrace{8 \times 8 \times 8 \times ... \times 8}_{"n" \text{ veces}} = 300 \times 8^n$$

De donde se obtiene : $P = 2^2 . 3 . 5^2 . 2^{3n}$

Y reduciendo : $P = \underbrace{2^{3n+2} . 3^1 . 5^2}_{\text{Descomposición Canónica}}$

Por dato : $D(P) = 126$

$$(3n + 3)(2)(3) = 126$$

$$\therefore \quad n = 6 \qquad \text{RPTA. C}$$

26.- ¿Cuántos términos debe tener la siguiente multiplicación para que el producto sea un número que tenga 961 divisores :

$$P = 36 \times 36^2 \times 36^3 \times 36^4 \ldots 36^n \ ?$$

A) 3 ***B) 4*** ***C) 5*** ***D) 6*** ***E) 7***

Resolución.-

Descomposición canónicamente : $P = 36^{1+2+3+\ldots+n}$

Sustituyendo el exponente : $P = 36^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Descomponiendo 36 : $P = (2^2 . 3^2)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Efectuando : $P = \underbrace{2^{n(n+1)} . 3^{n(n+1)}}_{\text{Descomposición Canónica}}$

Pero por condición : $D(P) = 961$

$$[n(n + 1) + 1]\,[n(n + 1) + 1] = 961$$

$$[n(n + 1) + 1]^2 = 31^2$$

$$\therefore \quad n = 5 \qquad \text{RPTA. C}$$

27.- Encontrar el menor número entero divisible por 15 que tenga 21 divisores. Dar la suma de sus cifras.

A) 18 ***B) 9*** ***C) 27*** ***D) 15*** ***E) 12***

Resolución.-

Como el número (lo llamamos N) es divisible por 15, debe ser divisible por 3 y por 5, luego su descomposición canónica será :

$$N = 3^a . 5^b$$

Para que tenga 21 divisores : $(a+1)(b+1) = \underbrace{21}_{3\cdot 7}$

Si "N" es lo menor posible, el exponente de 3 debe ser lo máximo posible, luego :

$$a + 1 = 7 \quad \wedge \quad b + 1 = 3$$
$$a = 6 \qquad\qquad b = 2$$

$$\therefore \quad \boxed{N = 3^6 . 5^2 = 18225} \qquad \text{RPTA. A}$$

28.- Hallar un número "N" que admite solo a los factores primos 3 y 5; tal que 125 N tiene el doble de divisores que N y 81 N tiene el triple.

A) 150 B) 45 C) 90 D) 75 E) 375

Resolución.-

Como el número N solo admite los factores primos 3 y 5, su descomposición canónica será :

$$N = 3^x . 5^y$$

Entonces las descomposiciones canónicas de 125N y 81N serán :

$$125 . N = 5^3 . 3^x . 5^y \quad \Rightarrow \quad 125 . N = 3^x . 5^{y+3}$$
$$81 . N = 3^4 . 3^x . 5^y \quad \Rightarrow \quad 81 . N = 3^{x+4} . 5^y$$

Según la primera condición : $D(125N) = 2 . D(N)$

$$(x+1)(y+4) = 2(x+1)(y+1)$$
$$\Rightarrow \quad y = 2$$

Y por la segunda condición : $D(81N) = 3 . D(N)$

$$(x+5)(y+1) = 3(x+1)(y+1)$$
$$\Rightarrow \quad x = 1$$

Por lo tanto : $\boxed{N = 3^1 . 5^2 = 75}$ RPTA.D

29.- Hallar un número entero compuesto únicamente por los factores primos 2 y 3, sabiendo que al multiplicarlo por 12, su cantidad de divisores aumenta en 19 y al dividirlo por 18, la cantidad de divisores disminuye en 17.

A) 5 184 B) 5 288 C) 5 284 D) 5 174 E) 5 080

Resolución.-

La descomposición canónica del número será : $N = 2^x . 3^y$

Si lo multiplicamos por 12 o lo dividimos entre 18, sus descomposiciones serán :

$$12 . N = 2^2 . 3 . 2^x . 3^y$$
$$\Rightarrow \quad 12 . N = 2^{x+2} . 3^{y+1}$$

$$\frac{N}{18} = \frac{2^x \cdot 3^y}{2 \cdot 3^2} = 2^{x-1} \cdot 3^{y-2}$$

Por condición : $D(12N) - D(N) = 19$

$\Rightarrow \quad (x+3)(y+2) - (x+1)(y+1) = 19$

$\Rightarrow \quad xy + 2x + 3y + 6 - xy - x - y - 1 = 19$

$\Rightarrow \quad x + 2y = 14 \quad ...(1)$

Y por la segunda condición : $D(N) - D\left(\frac{N}{18}\right) = 17$

$\Rightarrow \quad (x+1)(y+1) - (x)(y-1) = 17$

$\Rightarrow \quad xy + x + y + 1 - xy + x = 17$

$\Rightarrow \quad 2x + y = 16 \quad ...(2)$

Resolviendo (1) y (2) : $x = 6 \quad \wedge \quad y = 4$

$\therefore \quad N = 2^6 \cdot 3^4 = 5184$ RPTA. A

30.- Un numero tiene como únicos factores primos a 2 y 3 ; si lo duplicamos tiene 4 divisores más, pero si lo multiplicamos por 3, la cantidad de divisores se incrementa en 3. Calcular el número y dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

Resolución.-

Llamemos "N" al número buscado, luego su descomposición canónica será :

$$N = 2^a \cdot 3^b \quad ...(1)$$

Multiplicando a "N" por 2 ó por 3, quedará : $2N = 2 \cdot 2^a \cdot 3^b = 2^{a+1} \cdot 3^b$

$3N = 3 \cdot 2^a \cdot 3^b = 2^a \cdot 3^{b+1}$

Según la primera condición : $D(2N) - D(N) = 4$

$(a+2)(b+1) - (a+1)(b+1) = 4$

$(b+1)[(a+2) - (a+1)] = 4$

$\Rightarrow \quad b = 3 \quad ...(2)$

Y por la otra condición : $D(3N) - D(N) = 3$

$(a+1)(b+2) - (a+1)(b+1) = 3$

$(a+1)[(b+2) - (b+1)] = 3$

$\Rightarrow \quad a = 2 \quad ...(3)$

Finalmente de (2) y (3) en (1) se tendrá que : $N = 2^2 \cdot 3^3$

$\therefore \quad N = 108$ RPTA. C

31.- Los divisores primos de un entero positivo N son 2 y 3, el número de divisores de su raíz cuadrada es 12 y el número de divisores de su cuadrado es 117. ¿Cuántos de tales "N" existen?

A) 5 ***B) 4*** ***C) 3*** ***D) 2*** ***E) 1***

Resolución.-

Asumiendo que la descomposición canónica de N es : $N = 2^{2a} . 3^{2b}$

Las descomposición canónica de su raíz cuadrada es : $\sqrt{N} = 2^a . 3^b$

Y la de su cuadrado será : $N^2 = 2^{4a} . 3^{4b}$

Por condición se tiene : $D(\sqrt{N}) = 12$

$$(a + 1)(b + 1) = 12$$

$$ab + a + b = 11 \quad ... (1)$$

Y por la otra condición : $D(N^2) = 117$

$$(4a + 1)(4b + 1) = 117$$

$$16ab + 4a + 4b = 116$$

$$4ab + a + b = 29 \quad ... (2)$$

De (1) y (2) obtenemos que : $a.b = 6 \quad \wedge \quad a + b = 5$

Entonces : $a = 3 \quad \wedge \quad b = 2$

O : $a = 2 \quad \wedge \quad b = 3$

Por lo tanto, existirán 2 de tales números :

$$N = 2^{2(3)} . 3^{2(2)} = 5\ 184$$
$$N = 2^{2(2)} . 3^{2(3)} = 11\ 664$$

RPTA. D

32.- ¿Cuántos números existen que contengan como únicos factores primos a 2 y 3, de modo que la cantidad de divisores de su cuadrado sea el triple de su respectiva cantidad de divisores?.

A) 0 ***B) 1*** ***C) 2*** ***D) 3*** ***E) 4***

Resolución.-

Como los únicos factores primos son 2 y 3, la descomposición canónica del número será :

$$N = 2^a . 3^b$$

La descomposición canónica de su cuadrado deberá ser :

$$N^2 = 2^{2a} . 3^{2b}$$

Por condición : $D(N^2) = 3 \cdot D(N)$

$$(2a + 1)(2b + 1) = 3(a + 1)(b + 1)$$

Efectuando : $4ab + 2a + 2b + 1 = 3ab + 3a + 3b + 3$

Simplificando : $ab = a + b + 2$

Acomodando convenientemente : $ab - a = b - 1 + 3$

$$a(b - 1) = (b - 1) + 3$$

Dividiendo por $(b - 1)$: $a = 1 + \dfrac{3}{b-1}$

Luego $(b - 1)$ es divisor de 3, entonces : $b = 2 \quad \wedge \quad a = 4$

O : $b = 4 \quad \wedge \quad a = 2$

Por lo tanto, N toma 2 valores :

$$N = 2^4 \cdot 3^2 = 144$$
$$N = 2^2 \cdot 3^4 = 324 \qquad \text{RPTA. C}$$

33.- Determinar el valor de "n", si N = 175 . 245ⁿ tiene 28 divisores que no son divisibles por 35.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente : $N = 5^2 \cdot 7 \cdot (5 \cdot 7^2)^n$

Efectuando y reduciendo términos : $N = 5^{n+2} \cdot 7^{2n+1}$ ... (*)

$$\Rightarrow \quad D(N) = (n + 3)(2n + 2) \quad ... (1)$$

Los divisores que son divisibles por 35 se obtienen sacando el factor 5.7 de (*) :

$$N = 5 \cdot 7\underbrace{(5^{n+1} \cdot 7^{2n})}$$

$$\Rightarrow \quad D(\overset{\circ}{35}) = (n + 2)(2n + 1) \quad ... (2)$$

Luego, como hay 28 divisores que no son divisibles por 35, tendremos que :

$$D(N) - D(\overset{\circ}{35}) = 28 \quad ... (3)$$

De (1) y (2) en (3) : $(n + 3)(2n + 2) - (n + 2)(2n + 1) = 28$

Efectuando : $(2n^2 + 8n + 6) - (2n^2 + 5n + 2) = 28$

$$\therefore \quad n = 8 \qquad \text{RPTA. D}$$

34.- Si N = 2 . 3ᵃ . 7ᵇ tiene 40 divisores divisibles por 9 y 30 divisores pares; hallar (a + b).

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Resolución.-

A partir del dato : $N = 2^1 . 3^a . 7^b$

La cantidad de divisores divisibles por 9 es 40, luego :

$$N = 3^2 (\underbrace{2^1 . 3^{a-2} . 7^b})$$

$$D(\overset{\circ}{9}) = \quad 2(a - 1)(b + 1) = 40$$

$$\Rightarrow \qquad (a - 1)(b + 1) = 20 \quad ...(1)$$

La cantidad de divisores pares $(\overset{\circ}{2})$ es 30, luego :

$$N = 2(\underbrace{3^a . 7^b})$$

$$D(\overset{\circ}{2}) = (a + 1)(b + 1) = 30 \quad ...(2)$$

Dividiendo (1) ÷ (2) : $\dfrac{a-1}{a+1} = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad a = 5$

Y en (1) : $b = 4$ $\therefore$ $\boxed{a + b = 9}$ RPTA. B

35.- La suma de los divisores del número : $N = 6^{3a+1} . 8^a$ es 17 veces la suma de los divisores de : $M = 8^a . 3^{3a+1}$. ¿Cuál es el valor de "a" ?

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente : $N = (2 . 3)^{3a+1} . 923)^a = 26^{a+1} . 3^{3a+1}$

$M = (2^3)^a . 3^{3a+1} = 2^{3a} . 3^{3a+1}$

Por condición : $SD(N) = 17 \times SD(M)$

Sustituyendo cada suma por la fórmula expuesta en el item 7.6, tendremos :

$$\frac{2^{6a+1+1} - 1}{2-1} \times \frac{3^{3a+1+1} - 1}{3-1} = 17 \times \frac{2^{3a+1} - 1}{2-1} \times \frac{3^{3a+1+1} - 1}{3-1}$$

Simplificando : $2^2(3^{a+1}) - 1 = 17(2^{3a+1} - 1)$

$$(2^{3a+1} + 1)(2^{3a+1} - 1) = 17(2^{3a+1} - 1)$$

$$\Rightarrow \qquad 2^{3a+1} - 1 = 17$$

$$\therefore \quad \boxed{a = 1} \quad \text{RPTA. A}$$

36.- Hallar la diferencia de los números primos p y q (mayores que 2) sabiendo que la suma de los divisores de N = 8pq es igual al triple del número N.

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente : $N = 2^3 . p . q$

Por condición del problema : $SD(N) = 3 . N$

Ahora sustituimos el 1er miembro por la relación (7.2) :

$$\frac{2^4-1}{2-1} . \frac{p^2-1}{p-1} . \frac{q^2-1}{q-1} = 3 . 8 . p . q$$

Efectuando : $15 . (p+1)(q+1) = 24 . p . q$

$$5(p+1)(q+1) = 8 . p . q$$

Como el factor primo 5 aparece en el primer miembro, uno de los factores primos del segundo miembro debe ser 5, luego si asumimos que :

$$p = 5 \quad \Rightarrow \quad 5(5+1)(q+1) = 8 . 5 . q$$

Efectuando operaciones : $q = 3$

$$\therefore \quad p - q = 2 \qquad \text{RPTA. E}$$

37.- El producto de los divisores de un número es $3^{18} . 7^{12}$.- Hallar la suma de las inversas de los divisores de dicho número.

A) 1,72 B) 1,49 C) 1,18 D) 1,26 E) 1,14

Resolución.-

Sea "N" el número buscado , luego : $PD(N) = 3^{18} . 7^{12}$

Expresando en forma conveniente : $PD(N) = (3^3 . 7^2)^6$

Lo que equivale a : $PD(N) = \sqrt{(3^3 . 7^2)^{12}}$

Nótese que 12 es la cantidad de divisores de $3^3 . 7^2$ pues : $(3+1)(2+1) = 12$

Entonces por la relación (7.4) , podemos reconocer que :

$$N = 3^3 . 7^2 = 1\,323$$

Luego la suma de sus divisores es : $SD(N) = \dfrac{3^4-1}{3-1} . \dfrac{7^3-1}{7-1} = 2\,280$

Finalmente por la relación (7.3) obtendremos la suma de las inversas de dichos divisores :

$$SID(N) = \frac{SD(N)}{N} \quad \Rightarrow \quad SID(N) = \frac{2280}{1323} = 1{,}72 \qquad \text{RPTA. A}$$

38.- Sabiendo que $N = 6^a \cdot 15^b$ tiene 756 divisores es 63 veces la suma de los divisores de $M = 3^a \cdot 15^b$. ¿Cuál es el valor de a + b ?

A) 9 ***B) 12*** ***C) 11*** ***D) 13*** ***E) 15***

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente a los números dados :

$$N = (2 \cdot 3)^a \cdot (3 \cdot 5)^b \Rightarrow N = 2^a \cdot 3^{a+b} \cdot 5^b \quad ...(*)$$

$$M = 3^a \cdot (3 \cdot 5)^b \Rightarrow M = 3^{a+b} \cdot 5^b$$

Por condicion del problema : $SD(N) = 63 \cdot SD(M)$

Por la formula : $\dfrac{2^{a+1}-1}{2-1} \cdot \dfrac{3^{a+b+1}}{3-1} \cdot \dfrac{5^{b+1}-1}{5-1} = 63 \cdot \dfrac{3^{a+b+1}}{3-1} \cdot \dfrac{5^{b+1}-1}{5-1}$

Simplificando : $2^{a+1} - 1 = 63 \Rightarrow a = 5$

Luego en (*), el número N quedará : $N = 2^5 \cdot 3^{b+5} \cdot 5^b$

Asimismo por dato se sabe que : $D(N) = 756$

$$6(b + 6)(b + 1) = 756$$

Entonces : $(b + 6)(b + 1) = 126 \Rightarrow b = 8$

$$\therefore \quad a + b = 13 \qquad \text{RPTA. D}$$

39.- Determinar 3 números primos entre sí tales que cada uno de ellos se diferencia con el anterior en 4 unidades, que el mayor de ellos sea divisible por 5 y que la suma de los tres sea un número de tres cifras divisible entre 63. Dar la suma de cifras del menor de ellos.

A) 6 ***B) 10*** ***C) 11*** ***D) 20*** ***E) 2***

Resolución.-

Los 3 números forman una progresión aritmética de razón 4, luego estos son de la forma :

$$N - 4 \ ; \ N \ ; \ N + 4$$

El mayor de ellos debe ser múltiplo de 5, luego : $N + 4 = \overset{\circ}{5}$

Entonces N + 4 solo puede terminar en 0 ó en 5, estableciéndose las siguientes posibilidades :

$$\left\{\begin{matrix} N + 4 = ...0 \\ N \quad = ...6 \\ N - 4 = ...2 \end{matrix}\right\} \vee \left\{\begin{matrix} N + 4 = ...5 \\ N \quad = ...1 \\ N - 4 = ...7 \end{matrix}\right\}$$

Del primer caso reconocemos que los números no son primos entre sí, por ello trabajaremos con la segunda posibilidad . A continuación, como la suma de ellos es divisible por 63, tendremos :

$$(N - 4) + N + (N - 4) = \overset{\circ}{63}$$
$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$
$$\underbrace{...5 + ...1 + ...7}_{...3 = \overset{\circ}{63}} = \overset{\circ}{63}$$

Ahora bien por condición del problema, la suma debe ser un número de 3 cifras, que, como se ha demostrado, termina en 3, por lo tanto solo puede ser :

$$63 \times 11 = 693$$

Es decir : $(N - 4) + N + (N + 4) = 693$

$$3N = 693$$
$$N = 231$$

Finalmente los números serán :

$$\boxed{\begin{aligned} N - 4 &= 227 \\ N &= 231 \\ N + 4 &= 235 \end{aligned}}$$

RPTA. C

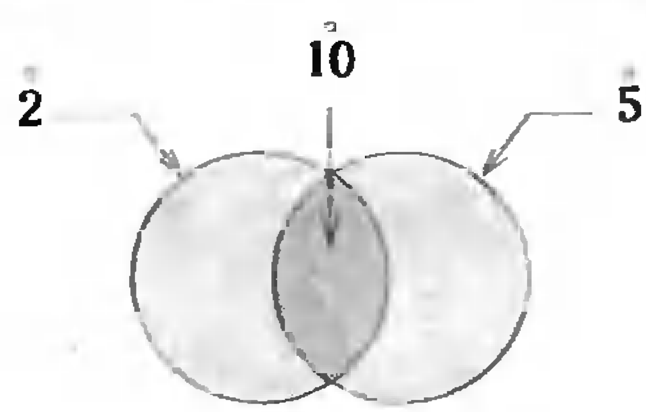
40.- ¿Cuántos números no mayores que 400 son primos relativos con el?

A) 160 ***B) 200*** ***C) 240*** ***D) 320*** ***E) 180***

<u>Resolución</u>.-

Como la descomposición canónica de 400 es : $400 = 2^4 . 5^2$

Entonces, todo número no mayor que 400 que sea primo con él, no puede ser divisible por 2 ni por 5, entonces con la ayuda de un diagrama de Venn - Euler, se tendrá :

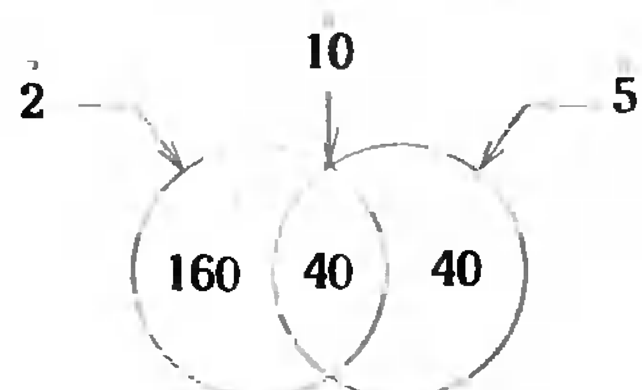


Luego : Cantidad de números $(\overset{\circ}{2}) = 400 \div 2 = 200$

Cantidad de números $(\overset{\circ}{5}) = 400 \div 5 = 80$

Cantidad de números $(\overset{\circ}{10}) = 400 \div 10 = 40$

Colocando estos valores en el diagrama :



Por lo tanto, la cantidad de números primos relativos con 400 pero no mayores que él será :

$$400 - (160 + 40 + 40) = \boxed{160} \qquad \text{RPTA. A}$$

<u>Otro Método</u>.-

Si la descomposición canónica de N es : $N = A^a \,.\, B^b \,.\, C^c \,....\, P^p$

La cantidad de números no mayores que N pero primos relativos con él se puede calcular por una relación llamada FUNCION DE EULER ó INDICADOR DE UN NUMERO :

$$\psi(N) = N\left(1-\frac{1}{A}\right)\left(1-\frac{1}{B}\right)\left(1-\frac{1}{C}\right)...\left(1-\frac{1}{P}\right)$$

En el problema, como : $400 = 2^4 \,.\, 5^2$

$$\Rightarrow \quad \psi(400) = 400\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{\psi(N) = 160} \qquad \text{RPTA. A}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- ¿Cuántos divisores tiene el número :

471 744 ?

A) 40 B) 96 C) 140 D) 70 E) 84

2.- Si : $N = 15 . 21^n$, tiene 60 divisores ; hallar : "n".

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3.- Si : $8^k + 8^k + 2$, tiene 84 divisores compuestos; hallar "k" .

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

4.- Si los números : $A = 24 . 30^n$

$B = 24^{n+3} . 3^{2n+3}$

tienen la misma cantidad de divisores; hallar "n".

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5.- Si : 6^n tiene 30 divisores más que 7^n. ¿Cuántos tendrá 12^n?

A) 44 B) 50 C) 32 D) 66 E) 45

6.- Calcular el valor de "n" para que el número: $N = 9 . 12^n$ tenga 150 divisores.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

7.- ¿Cuántos divisores compuestos tiene:

$N = 18^{18}$?

A) 16 B) 703 C) 364 D) 548 E) 700

8.- Si se cumple que la expresión :

$E = \overline{ab00} + \overline{cd0} + \overline{ab}$ tiene 27 divisores; hallar $(a + b)$ si : $\overline{cd} = 2 . ab$.

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

9.- Si : "m" y "n" son dos números cuya diferencia es 3; hallar $(m + n)$ si :

$$N = 3^m + 3^n$$

tiene 36 divisores.

A) 9 B) 11 C) 13 D) 15 E) 16

10.- ¿Cuál es el menor número impar que tiene 14 divisores?

A) 14 B) 625 C) 2 025
D) 5 624 E) 900

11.- Hallar el valor de "n" para que el número de divisores de $N = 30^n$ tenga el doble del número de divisores de $M = 15 \times 18^n$.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

12.- ¿Cuántos divisores tiene el número $N = 2^2 . 3^a$ sabiendo que al multiplicarse por 18 su número de divisores aumenta en 12?

A) 16 B) 15 C) 12 D) 18 E) 24

13.- Calcular el valor de "n" sabiendo que la expresión 481^n tiene $\overline{n1}$ divisores.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

14.- Hallar el residuo de dividir el producto de los 2 000 primeros números primos entre 60.

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 15

15.- ¿Cuántos triángulos existen cuyos catetos sean números enteros y además tengan como área $600m^2$?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

16.- ¿Cuántos números enteros existen que sean primos relativos con 10^4 y menores que 10^4?

A) 3 000 B) 4 000 C) 6 000
D) 2 000 E) 70 000

17.- Si : 63! tiene "n" divisores. ¿Cuántos tendrá 64!

A) $\frac{64n}{29}$ B) $\frac{32n}{29}$ C) $\frac{16n}{29}$
D) $\frac{16n}{58}$ E) $\frac{12n}{58}$

18.- Dar la suma de cifras del número que descompuesto en sus factores primos es: $3^a \cdot b^b \cdot a^3$, sabiendo que tiene 72 divi-sores y no es múltiplo de 27.

A) 9 B) 18 C) 24 D) 27 E) 30

19.- Si : $A! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ $(a > b > c)$; hallar :

$$SD(A+1)! - SD(A-1)!$$

A) 3164 B) 791 C) 4325
D) 10244 E) 18984

20.- ¿Cuántos divisores múltiplos de 3 pero no de 7 ni de 5 tiene el número 126 000?

A) 80 B) 40 C) 60 D) 10 E) 30

21.- ¿Cuántos de los divisores de 22176 son divisibles entre 8 pero no entre 16?

A) 16 B) 8 C) 12 D) 36 E) N.A.

22.- ¿Cuántos números de 3 cifras del sistema cuaternario son primos absolutos?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

23.- Sabiendo que el número $24^n \times 36^n$ tiene 589 divisores. Hallar cuántos divisores tendrá $18^n \times 30^n$.

A) 1729 B) 1056 C) 2640
D) 585 E) N.A.

24.- Calcular la suma de las inversas de los divisores múltiplos de 15 del número 81 900.

A) 224/65 B) 672/13 C) 224/975
D) 112/65 E) N.A.

25.- Sabiendo que el producto de los divisores de un número es $3^{12} \times 5^{18}$, determinar el número y dar la suma de los cuadrados de sus cifras.

A) 31 B) 90 C) 33 D) 45 E) N.A.

26.- Un número que contiene en su descomposición canónica a los números 2, 3 y 7 al ser multiplicado por 4 aumenta en 12 su cantidad de divisores y al ser dividido entre 3 disminuye en 10 dicha cantidad de divisores. Dar el resto de dividir el número entre 13.

A) 3 B) 4 C) 7 D) 10 E) N.A.

27.- Sea : $N = A^a \times B^b \times C^c$, donde A, B y C son primos absolutos. Si dividimos N entre A se eliminan 42 divisores, dividiendo entre B se suprimen 35 y si se divide entre C se eliminan 30. Hallar: $a + b + c$.

A) 12 B) 15 C) 18 D) 9 E) 21

28.- Encontrar 2 factores primos p y q, tales que la suma de todos los divisores del número $2^5 \times p \times q$ sea el triple de este mismo número. Dar la cantidad de divisores de $p + q$.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) N.A.

29.- Hallar "n" si: $N = 21 . 15^n$ tiene 20 divisores compuestos.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

30.- Calcular $(a + b)$ si el número $N = 36^a . 5^b$ tiene 96 divisores compuestos.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

31.- Señalar $(a + b)$ sabiendo que el número $N = 5000 \times 3^a \times 7^b$ tiene 240 divisores (a y b son cifras significativas)

A) 5 B) 7 C) 9 D) 10 E) 9

32.- Un número tiene solamente 2 factores primos; si posee 5 divisores impares y 15 divisores múltiplos de 18. Hallar la suma de sus cifras.

A) 9 B) 18 C) 27 D) 42 E) 36

33.- Si $\overline{ab}$ es un número primo absoluto. ¿Cuántos divisores como mínimo tiene $\overline{ab0ab}$ (0 = cero)?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 16

34.- Hallar $(a + b)$ si la suma de los divisores del número $N = 2^5.a.b$, es 27/10 de N (a y b son primos absolutos mayores de 2)

A) 7 B) 10 C) 11 D) 12 E) 14

35.- Hallar la suma de las inversas de los divisores de un número cuyo producto de divisores es : $2^{40} . 5^{30}$.

A) 2,93 B) 2,163 C) 2,418
D) 3,125 E) 1,725

36.- Un número tiene 22 divisores y su cubo tiene 64 divisores. ¿Cuántos divisores tiene su raíz cúbica?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

37.- ¿Cuántas veces hay que multiplicar por 12 al número 135 para que el producto tenga 144 divisores?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

38.- ¿Cuántas veces debe multiplicarse a 18 por sí mismo para que el resultado tenga 88 divisores compuestos?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

39.- Un número entero positivo se llama "perfecto" si es igual a la suma de todos los divisores menores que él incluyendo la unidad; según esta definición. ¿Cuántos de los siguientes números son números perfectos? 4; 6; 8; 12; 14; 28.

A) Ninguno B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

40.- Sea "m" la diferencia entre la cantidad de divisores que tienen 136^n y 147^n entonces, determinar cuál (cuáles) de las afirmaciones siguientes es (son) correctas :

I. "m" es el producto de dos números consecutivos.

II. "m" es siempre par.

III. "m" es el producto de dos números pares.

IV. "m" es el producto de dos números impares.

V. "m" es el doble de la suma de 1 hasta "n"

A) I y II B) I, II y V C) IV
D) III E) II y III

8 M.C.D Y M.C.M.

8.1 MAXIMO COMUN DIVISOR (M.C.D)

Es el mayor de los divisores comunes de varios números. También se le conoce con el nombre de Prodivisor o Máximo Divisor Común.

Sean los números 45 y 75 :

DIVISORES

45 →	1	3	5	9	15	45
75 →	1	3	5	15	25	75

DIVISORES COMUNES

El mayor de los divisores comunes es 15, entonces : M.C. D. (45 ; 75) = 15

NOTA : Los divisores comunes de varios números son los divisores de su M.C.D.

Nótese que los divisores de 15 son : 1; 3; 5 y 15; es decir, los divisores comunes de 45 y 75

En general :

$A = \overset{o}{d}$

$B = \overset{o}{d}$ ⇨ "*d*" *es* divisor común de A , B y C, entonces es divisor del : M.C.D. (A ; B ; C)

$C = \overset{o}{d}$

8.2 MINIMO COMUN MULTIPLO (M.C.M) :

Se llama sí al menor de los múltiplos positivos comunes de varios números.

Se le llama también Promúltiplo o Mínimo Común.

MULTIPLOS POSITIVOS

8 → 8 ; 16 ; 24 ; 32 ; 40 ; 48 ; 56 ; 64 ; 72 ; 80 ; ...

12 → 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ; 84 ; ...

MULTIPLOS POSITIVOS COMUNES

El menor de los múltiplos positivos comunes es 24, entonces : m. c. m. (8 ; 12) = 24

NOTA : Los múltiplos comunes de varios números son los múltiplos de su m.c.m.

Por ejemplo, los múltiplos positivos de 24 son : 24 ; 48; 72; ...

Es decir, los múltiplos comunes de 8 y 12

En general :.

$$\left.\begin{array}{l} N = \overset{\circ}{a} \\ N = \overset{\circ}{b} \\ N = \overset{\circ}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{N = \overset{\circ}{\overline{\text{m.c.m}(a,b,c)}}}$$

8.3 PROCEDIMIENTOS DE CALCULO

1) POR DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA :

Se descompone canónicamente a cada uno de los números y luego :

A. El M.C.D. es el producto de aquellos factores primos que sean comunes a todas las descomposiciones, elevados al menor exponente con que aparecen en ellas.

B. El m.c.m será el producto de todos aquellos factores primos existentes en las descomposiciones, elevados al mayor exponente con que aparecen en ellas.

Sean los números 1800; 756 y 2376 cuyas descomposiciones canónicas son :

$$1\,800 = 2^3 . 3^2 . 5^2$$

$$756 = 2^2 . 3^3 . 7$$

$$2\,376 = 2^3 . 3^3 . 11$$

Entonces : M.C.D. (1800; 756; 2376) $= 2^2 . 3^2 = 36$

m.c.m (1800 ; 756 ; 2376) $= 2^3 . 3^3 . 5^2 . 7 . 11 = 415\,800$

2) METODO PRACTICO :

Se descompone a los números en forma simultánea y luego :

A. El procedimiento para el M.C.D. termina al encontrar números primos entre sí.

B. El procedimiento para el m.c.m termina al encontrar la unidad.

Dados los números 1800 ; 756 y 2376 :

$$\begin{array}{rrr|l}
1800 - & 756 - & 2376 & 2 \\
900 - & 378 - & 1188 & 2 \\
450 - & 189 - & 594 & 3 \\
150 - & 63 - & 198 & 3 \\
50 - & 21 - & 66 & 2 \\
25 - & 21 - & 33 & 3 \\
25 - & 7 - & 11 & 5 \\
5 - & 7 - & 11 & 5 \\
1 - & 7 - & 11 & 7 \\
1 - & 1 - & 11 & 11 \\
1 - & 1 - & 1 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\text{M.C.D.} \\
\text{m.c.m.}
\end{array}$$

Entonces : M.C.D. (1800 ; 756 ; 2376) $= 2^2 \,.\, 3^2 = 36$

m.c.m. (1800 ; 756 ; 2376) $= 2^3 \,.\, 3^3 \,.\, 5^2 \,.\, 7 \,.\, 11 = 415800$

3) METODOS INDIRECTOS :

A) El M.C.D. o el M.C.M. de más de dos números también puede calcularse, encontrando en forma sucesiva el M.C.D. o el m.c.m. de parejas de números.

Por ejemplo :

$$\underbrace{\underbrace{375 \quad 250}_{\text{M.C.D.} = 25} \qquad\qquad \underbrace{285 \quad 225}_{\text{M.C.D.} = 15}}_{\text{M.C.D.} = 5}$$

$\Rightarrow$ M.C.D. (375 ; 250 ; 285 ; 225) = 5

(Análogamente para el caso del m.c.m.)

B) Si varios números se multiplican o dividen por un mismo número entero, entonces el M.C.D. y el m.c.m de ellos quedará multiplicado o dividido por dicho número entero.

Sea : M.C.D. (A; B; C) $= k$

m.c.m. (A ; B ; C) $= m$

Entonces : M.C.D. $(A \times n ; B \times n ; C \times n) = k \times n$

m.c.m $(A \times n ; B \times n ; C \times n) = m \times n$

$$\text{M.C.D.}\left(\frac{A}{n} ; \frac{B}{n} ; \frac{C}{n}\right) = \frac{k}{n}$$

$$\text{m.c.m.}\left(\frac{A}{n} ; \frac{B}{n} ; \frac{C}{n}\right) = \frac{m}{n}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Al dividir 1020 y 665 entre 'n" los residuos respectivos fueron 12 y 17. ¿Cuál es el mayor valor de "n"?

A) 64 B) 72 C) 90 D) 108 E) 8

Resolución.-

Según los datos :

$$\begin{array}{r|l} 1020 & n \\ \cline{2-2} & q_1 \\ 12 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 1020 = \overset{\circ}{n} + 12 \\ 1008 = \overset{\circ}{n} \quad \ldots (\alpha) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 665 & n \\ \cline{2-2} & q_2 \\ 17 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 665 = \overset{\circ}{n} + 17 \\ 648 = \overset{\circ}{n} \quad \ldots (\beta) \end{array}$$

De (α) y (β) , n es divisor común de 1008 y 648. Si queremos que "n" sea el mayor posible, entonces : n = M.C.D. (1008 ; 648)

Calculando el M.C.D :

$$\left.\begin{array}{rcr|l} 1008 & - & 648 & 2 \\ 504 & - & 324 & 2 \\ 252 & - & 162 & 2 \\ 126 & - & 81 & 3 \\ 42 & - & 27 & 3 \\ 14 & - & 9 & \end{array}\right\} \text{M.C.D.} = (1008 ; 648) = 72$$

$\therefore$ $\boxed{n = 72}$ RPTA. B

2.- El menor número entero positivo que dividido entre 4; 5; 6; 7 y 8 deja siempre de resto 3 es:

A) 663 B) 766 C) 843 D) 1683 E) 708

Resolución.-

Llamando "N" al número pedido :

$$\begin{array}{lcl} N = \overset{\circ}{4} + 3 & \Rightarrow & N - 3 = \overset{\circ}{4} \\ N = \overset{\circ}{5} + 3 & \Rightarrow & N - 3 = \overset{\circ}{5} \\ N = \overset{\circ}{6} + 3 & \Rightarrow & N - 3 = \overset{\circ}{6} \\ N = \overset{\circ}{7} + 3 & \Rightarrow & N - 3 = \overset{\circ}{7} \\ N = \overset{\circ}{8} + 3 & \Rightarrow & N - 3 = \overset{\circ}{8} \end{array}$$

Luego, (N - 3) es un múltiplo común de 4; 5; 6; 7 y 8

También (N - 3) debe ser lo menor posible, entonces : $N - 3 = \text{m.c.m}(4; 5; 6; 7; 8)$

Calculando el m.c.m :

$$\left.\begin{array}{c|c} 4-5-6-7-8 & 2 \\ 2-5-3-7-4 & 2 \\ 1-5-3-7-2 & 2 \\ 1-5-3-7-1 & 3 \\ 1-5-1-7-1 & 5 \\ 1-1-1-7-1 & 7 \\ 1-1-1-1-1 & \end{array}\right\} \text{m.c.m.}(4;5;6;7;8) = 840$$

Por tanto : $N - 3 = 840$

$\therefore$ $\boxed{N = 843}$ RPTA. C

3.- Calcular el número de divisores del M.C.D. de los números :

$$A = 40^{10} \,.\, 21^4$$

$$B = 60^5 \,.\, 35^3$$

$$C = 80^4 \,.\, 14^2$$

A) 165 B) 150 C) 128 D) 180 E) 120

<u>Resolución</u>.-

Descomponiendo canónicamente : $A = (2^3 \,.\, 5)^{10} \,.\, (3 \,.\, 7)^4 = 2^{30} \,.\, 3^4 \,.\, 5^{10} \,.\, 7^4$

$B = (2^2 \,.\, 3 \,.\, 5)^5 \,.\, (5 \,.\, 7)^3 = 2^{10} \,.\, 3^5 \,.\, 5^8 \,.\, 7^3$

$C = (2^4 \,.\, 5)^4 \,.\, (2 \,.\, 7)^2 = 2^{10} \,.\, 5^4 \,.\, 7^2$

Entonces, el M.C.D. de ellos será : $\text{M.C.D.}(A, B) = 2^{10} \,.\, 5^4 \,.\, 7^2$

Luego : $D(\text{M.C.D}) = (10 + 1)(4 + 1)(2 + 1)$

$\therefore$ $\boxed{D(\text{M.C.D}) = 165}$ RPTA. A

4.- Hallar "n" sabiendo que el m.c.m de los números :

$$A = 12^n \,.\, 15$$

$$B = 12 \,.\, 15^n$$

tiene 140 divisores.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente a ambos números :

$$A = (2^2 . 3)^n . (3 . 5) = 2^{2n} . 3^{n+1} . 5^1$$

$$B = (2^2 . 3) . (3 . 5)^n = 2^2 . 3^{n+1} . 5^n$$

Recuerde que el m.c.m. es el producto de todos los factores primos elevados a su mayor exponente, luego :

$$\text{m.c.m. } (A , B) = 2^{2n} . 3^{n+1} . 5^n$$

Por dato : $D(\text{m.c.m}) = 140$

$$(2n + 1)(n + 2)(n + 1) = 140$$

$\therefore$ $\boxed{n = 3}$ RPTA. C

5.- Dados tres números A, B y C se sabe que el M.C.D. de A y B es 30 y el M.C.D. de B y C es 198. ¿Cuál es el M.C.D. de A, B y C?

A) 4 ***B) 12*** ***C) 18*** ***D) 6*** ***E) 16***

Resolución.-

Según los datos : M.C.D (A ; B) = 30

M.C.D (B ; C) = 198

El M.C.D. de A , B y C será igual al M.C.D de 30 y 198 es decir :

$$\begin{array}{rcr|l} 30 & - & 198 & 2 \\ 15 & - & 99 & 3 \\ 5 & - & 33 & \end{array} \Bigg\} \text{M.C.D.} = (30 ; 198) = 6$$

$\therefore$ $\boxed{\text{M.C.D } (A ; B ; C) = 6}$ RPTA. D

6.- Si el m.c.m. de A y B es 484 y el m.c.m. de C y D es 363. Determinar el m.c.m. de A, B, C y D.

A) 1322 ***B) 1432*** ***C) 1542*** ***D) 1452*** ***E) 1632***

Resolución.-

Por datos : m.c.m (A ; B) = 484

m.c.m (C ; D) = 363

El m.c.m. de A, B, C y D será igual al m.c.m de 484 y 363 que se calcula :

$$\begin{array}{rcl|l} 484 & - & 363 & 11 \\ 44 & - & 33 & 11 \\ 4 & - & 3 & 3 \\ 4 & - & 1 & 2 \\ 2 & - & 1 & 2 \\ 1 & - & 1 & \end{array} \Bigg\} \text{ m.c.m. } (484 ; 363) = 1452$$

$\therefore$ $\boxed{\text{m.c.m. } (A, B, C, D) = 1452}$ RPTA. D

7.- *Si el M.C.D. de 45A y 63B es 36. ¿Cuál es el M.C.D. de 25A y 35B?*

A) 16 ***B) 27*** ***C) 20*** ***D) 24*** ***E) 18***

Resolución.-

Por dato : M.C.D. $(45A \;;\; 63B) = 36$

Dividiendo entre 9 : M.C.D. $\left(\dfrac{45A}{9} ; \dfrac{63B}{9}\right) = \dfrac{36}{9}$

$\Rightarrow$ M.C.D. $(5A \;;\; 7B) = 4$

Multiplicando por 5 : M.C.D. $(5\times5A ; 5\times7B) = 5 \times 4$

$\therefore$ $\boxed{\text{M.C.D. } (25A \;;\; 35B) = 20}$ RPTA. C.

8.4. ALGORITMO DE EUCLIDES

Permite calcular el M.C.D. de solamente dos números mediante divisiones sucesivas.

Ejemplo :

Sean los números : 1812 y 672

							← Cocientes
1812	672						← Dividendos y divisores
							← Residuos

Se divide 1812 ÷ 672 colocando el cociente y el residuo en el lugar correspondiente :

	2					
1812	672					
468						

El residuo 468 pasa a ocupar el siguiente casillero central y ahora se divide 672 ÷ 468 :

	2	1				
1812	672	468				
468	204					

Así sucesivamente hasta llegar a una división exacta :

	2	1	2	3	2	2
1812	672	468	204	60	24	12
468	204	60	24	12	0	

El último divisor empleado, es decir 12, será el M.C.D.

$\therefore$ M.C.D. (1812 ; 672) = 12

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

8.- El M.C.D. de dos números es 14 y los cocientes sucesivos obtenidos en su determinación por el método del Algoritmo de Euclides han sido : 4 ; 2 ; 2 y 3. ¿Cuál es la suma de estos números?

A) 1288 ***B) 1414*** ***C) 1396*** ***D) 966*** ***E) 1206***

<u>Resolución</u>.-

Siendo A y B los números, como el M.C.D. de ellos es 14, el esquema del Algoritmo de Euclides quedará :

	4	2	2	3
A	B			14
			0	

Reconstruyendo, por la Regla del Cangrejo se tendrá :

	4	2	2	3
1050	238	98	42	14
98	42	14	0	

Luego : $A = 1050 \quad \wedge \quad B = 238$

$\therefore \quad \boxed{A + B = 1288}$ RPTA. A

9.- La suma de dos números es 1248 . Si los cocientes sucesivos obtenidos al hallar su M.C.D. por "divisiones sucesivas" fueron : 2; 6; 1; 1 y 2 . Hallar la diferencia de dichos números.

A) 204 ***B) 456*** ***C) 228*** ***D) 912*** ***E) 432***

<u>Resolución</u>.-

Si A y B son los números y llamamos "*k*" a su M.C.D. el esquema del Algoritmo de Euclides quedará :

	2	6	1	1	2
A	B				*k*
				0	

Reconstruyendo, por la Regla del Cangrejo :

	2	6	1	1	2
$71k$	$33k$	$5k$	$3k$	$2k$	k
$5k$	$3k$	$2k$	k	0	

Luego : $A = 71k \quad \wedge \quad B = 33k$

Por dato : $A + B = 1248$

Reemplazando : $71k + 33k = 1248$

$\Rightarrow \quad k = 12$

Entonces : $A = 71(12) = 852$

$B = 33(12) = 396$

$\therefore \quad A - B = 456$ RPTA. B

8.5. PROPIEDADES RELATIVAS AL M.C.D Y AL M.C.M

1. Los cocientes de dividir a varios números por el M.C.D de ellos son números Primos entre sí

Sea : M.C.D. (A ; B; C) = K

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A}{K} = C_1 \\[2ex] \dfrac{B}{K} = C_2 \\[2ex] \dfrac{C}{K} = C_3 \end{array}\right\} \text{ Números primos entre si :}$$

2. Los cocientes de dividir el m.c.m. de varios números entre cada uno de ellos son números primos entre sí :

Sea : m.c.m. (A ; B ; C) = m

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m}{A} = P_1 \\[2ex] \dfrac{m}{B} = P_2 \\[2ex] \dfrac{m}{C} = P_3 \end{array}\right\} \text{ Números primos entre si :}$$

3. Para dos números se cumple que :

"Si multiplicamos los cocientes primos entre sí de la propiedad 1; dicho producto es igual al cociente de su M.C.M. entre su M.C.D"

Sea : M.C.D. (A ; B) = k

m.c.m (A ; B) = m

$$\frac{A}{K} = C_1 \qquad \frac{B}{K} = C_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 \times C_2 = \frac{m}{k}}$$

4. El producto de dos números es igual al producto de su M.C.D. y su m.c.m

Sean : M.C.D. (A ; B) = k

m.c.m (A ; B) = m $\Rightarrow$ $\boxed{A \times B = k \times m}$

5. Si dos números son P.E.SI, su M.C.D es la unidad y su m.c.m es el producto de dichos números.

A y B son P.E.SI $\Rightarrow$

M.C.D. (A ; B) = 1

m.c.m (A ; B) = A × B

6. Si un número entero A es divisible entre otro número B, su M.C.D. es B y su m.c.m. es

$A = \overset{\circ}{B}$ $\Rightarrow$

M.C.D. (A ; B) = B

m.c.m. (A ; B) = A

En Resumen : M.C.D. = (A ; B) = k

$\Rightarrow$

$A = kC_1$

$B = k\,C_2$

m.c.m. (A , B) = $kC_1\,C_2$

Donde : $C_1 \wedge C_2$: P.E. Sí.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

10.- El producto de dos números es 5915 y el M.C.D. de ellos es 13. Hallar el mayor de esos números si ambos son números que 100.

A) 78 B) 91 C) 61 D) 52 E) 98

<u>Resolucion</u>.-

Sean los números A y B, luego : $A \times B = 5915 \ldots (\alpha)$

Como : $M.C.D.\ (A\ ;\ B) = 13$

Entonces : $A = 13C_1$

$B = 13C_2$

Donde C_1 y C_2 son números P.E.SI.

Reemplazando en (α) : $13C_1 \times 13C_2 = 5915$

$\Rightarrow \quad C_1 \times C_2 = 35$

Como, tanto A como B son menores que 100 : $C_1 = 5 \quad \wedge \quad C_2 = 7$

Por lo tanto : $A = 13(5) = 65$

$B = 13(7) = 91$ RPTA. B

11.- Hallar dos números sabiendo que su M.C.D. es 36 y su m.c.m. es 5148. Uno de ellos será:

A) 360 B) 396 C) 458 D) 520 E) 612

<u>Resolución</u>.-

Sean A y B los números : $M.C.D.(A,B) = 36 \begin{cases} A = 36C_1 \\ B = 36C_2 \\ m.c.m. = 36C_1C_2 \\ C_1 \wedge C_2 \ : P.E.\ Si \end{cases}$

Como : $m.c.m.\ (A\ ,\ B) = 5148$

$36C_1C_2 = 5148$

$\Rightarrow \quad C_1 \cdot C_2 = 143$

Entonces, tenemos dos opciones :

$(C_1 = 11) \quad C_2 = 13) \quad \vee \quad (C_1 = 1 \quad \wedge \quad C_2 = 143)$

Por lo tanto, hay dos parejas de números :

$$\boxed{\begin{array}{l} A = 36(11) = 396 \\ B = 36(13) = 468 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} A = 36(1) = 36 \\ B = 36(143) = 5148 \end{array}}$$ RPTA. C

12.- El producto del M.C.D. por el m.c.m. de dos números es 1620. Si uno de los números es el M.C.D. de 108 y 162 ¿Cuál es el otro?

A) 16 B) 24 C) 30 D) 90 E) 85

<u>Resolución</u>.-

Sean los números A y B se tendrá : M.C.D. $(A, B) = k$

m.c.m. $(A, B) = m$

Por datos : $k \cdot m = 1620$

$$A = \text{M.C.D.}(108 ; 162) \Rightarrow A = 54$$

Por Propiedad : $A \times B = k \cdot m$

Reemplazando : $54 \times B = 1620$

$\therefore$ $\boxed{B = 30}$ RPTA. C

13.- Determinar dos números primos entre sí tal que su suma sea 23 y su m.c.m. sea 120. Dar la diferencia de ellos.

A) 5 B) 7 C) 9 D) 13 E) 3

<u>Resolución</u>.-

Sean A y B los números primos entre sí, entonces por propiedad :

$$\text{M.C.D.}(A, B) = 1$$

$$\text{m.c.m.}(A, B) = A \cdot B$$

Por datos : $A + B = 23 \quad \wedge \quad \text{m.c.m.}(A ; B) = 120$

Entonces : $A + B = 23 \quad \wedge \quad A \times B = 120$

Luego, los números son : $A = 15 \quad \wedge \quad B = 8$

$\therefore$ $\boxed{A - B = 7}$ RPTA. B

14.- Un número es 13 veces el valor del otro. Además el m.c.m. de estos es 559. Hallar el M.C.D. de dichos números.

A) 43 B) 55 C) 52 D) 53 E) 45

Resolución.-

Siendo A y B los números : $A = 13 \times B$

Nótese que A es divisible entre B (el cociente de su división es 13), entonces :

$$\text{M.C.D. }(A\,;B) = B$$

$$\text{m.c.m. }(A\,;B) = A$$

Por dato : $\text{m.c.m. }(A\,;B) = 559$

Entonces : $A = 559$

Reemplazando : $13B = 559$

$$B = 43$$

$\therefore$ $\boxed{\text{M.C.D. }(A\,,B) = 43}$ RPTA. A

15.- Hallar el mayor valor de P que cumple con las condiciones :

$$753 = \overset{\circ}{P} - 3$$

$$421 = \overset{\circ}{P} - 13$$

Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 7 ***B) 6*** ***C) 8*** ***D) 9*** ***E) 5***

Resolución.-

Por datos : $753 = \overset{\circ}{P} - 3$

$$421 = \overset{\circ}{P} - 13$$

Luego : $756 = \overset{\circ}{P}$

$$434 = \overset{\circ}{P}$$

"P" es divisor común de 756 y 434

Como "P" debe ser lo mayor posible : P = M.C.D. (756 ; 434)

Calculando el M.C.D. :

$$\begin{array}{rcr|l} 756 & - & 434 & 2 \\ 378 & - & 217 & 7 \\ 54 & - & 31 & \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}2\\7\end{array}}\right\} \text{M.C.D.} = (756\,;434) = 14$$

Por lo tanto : $\boxed{P = 14}$ RPTA. E

16.- Un negociante tiene tres barriles de vino de 360 ; 480 y 600 litros; desea venderlos en recipientes pequeños de máxima capacidad de modo que no sobre vino en ninguno de los barriles. ¿Cuántos recipientes necesita?

A) 12 ***B) 15*** ***C) 24*** ***D) 30*** ***E) 10***

Resolución.-

La capacidad de los barriles pequeños debe ser un divisor común de 360; 480 y 600 y además debe ser lo mayor posible, luego debe ser el M.C.D. de esos números :

$$\begin{array}{rcrcr|l} 360 & - & 480 & - & 600 & 2 \\ 180 & - & 240 & - & 300 & 2 \\ 90 & - & 120 & - & 150 & 2 \\ 45 & - & 60 & - & 75 & 3 \\ 15 & - & 20 & - & 25 & 5 \\ 3 & - & 4 & - & 5 & \end{array} \quad \text{M.C.D.} = (360\,;480\,;600) = 120$$

Luego, la capacidad de los recipientes pequeños es 120 *litros*

El número de recipientes necesarios será :

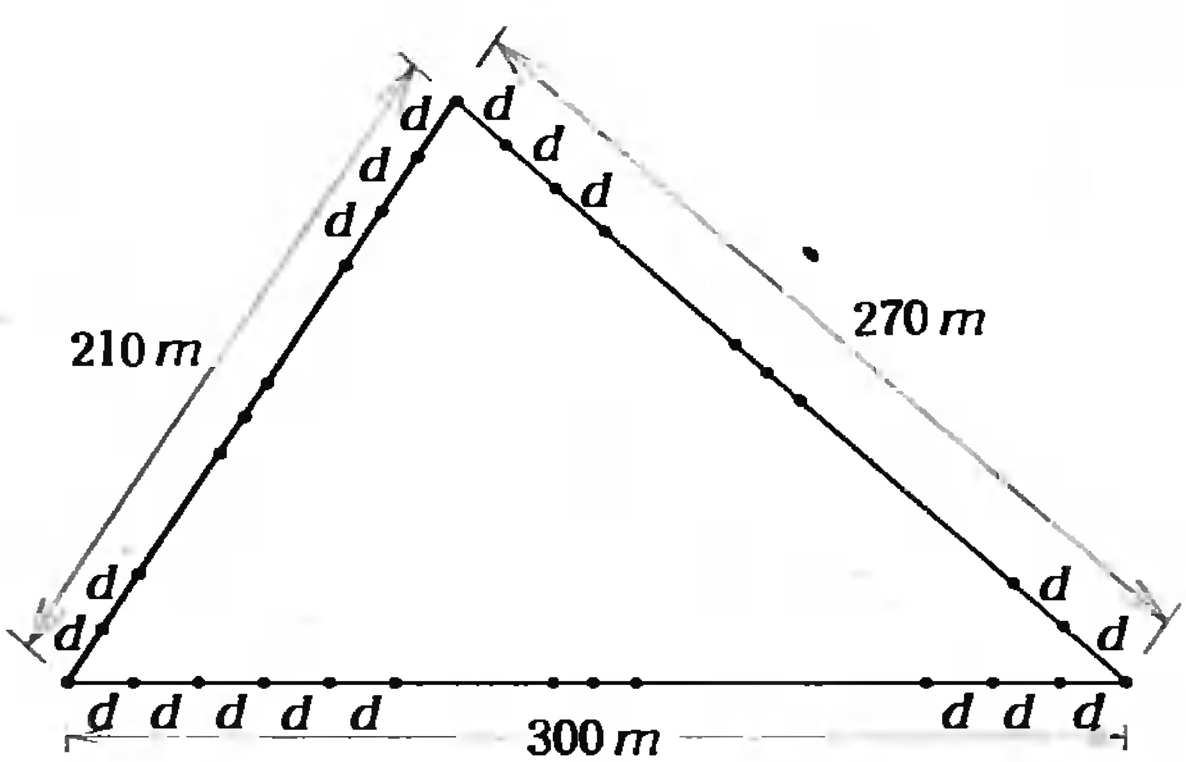
$$\#\ \text{recipientes} = \frac{360}{120} + \frac{480}{120} + \frac{600}{120}$$

$$\therefore \quad \#\ \text{recipientes} = 12 \qquad \text{RPTA. A}$$

17.- Se han colocado postes igualmente espaciados en el contorno de un campo triangular cuyos lados miden 210; 270 y 300 m respectivamente. Sabiendo que hay un poste en cada vértice y que la distancia entre poste y poste es la mayor posible. ¿Cuántos postes se colocaron?

A) 24 ***B) 26*** ***C) 23*** ***D) 30*** ***E) 27***

Resolución.-



Denotando por "*d*" a la distancia entre poste y poste se observa :

$$210 = \overset{\circ}{d} \quad ; \quad 270 = \overset{\circ}{d} \quad \wedge \quad 300 = \overset{\circ}{d}$$

Luego, "*d*" es un divisor común de 210; 270 y 300

Además, la distancia entre poste y poste, o sea "*d*", es lo mayor posible, entonces :

$$d = \text{M.C.D. } (210; 270; 300)$$

Calculando el M.C.D. :

$$\begin{array}{rcrcr|l} 210 & - & 270 & - & 300 & 2 \\ 105 & - & 135 & - & 150 & 3 \\ 35 & - & 45 & - & 50 & 5 \\ 7 & - & 9 & - & 10 & \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{M.C.D.} = (210 ; 270 ; 300) = 30$$

Entonces : $d = 30$ (La distancia entre poste y poste es 30*m*)

Para calcular el número de postes colocados se divide el perímetro del campo entre la distancia entre poste y poste es decir :

$$\# \text{ postes} = \frac{210+270+300}{30}$$

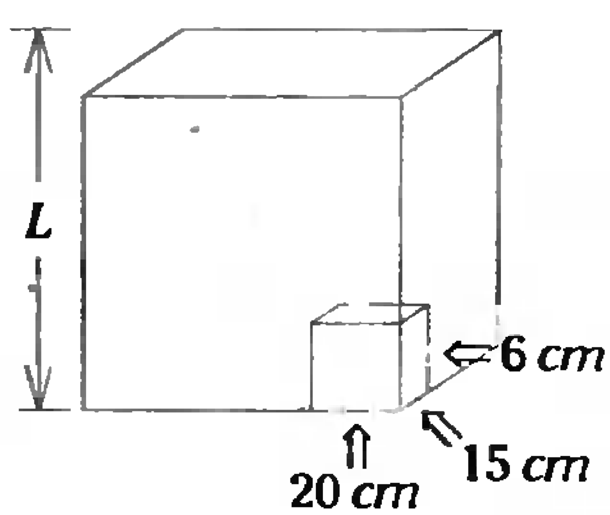
$$\therefore \quad \# \text{ postes} = 26 \qquad \text{RPTA. B}$$

18.- Se trata de formar un cubo con ladrillos cuyas dimensiones son 20cm. 15cm y 6cm. Diga cuántos ladrillos son necesarios para formar el cubo más pequeño posible.

A) 100 ***B) 60*** ***C) 120*** ***D) 160*** ***E) 180***

<u>Resolución</u>.-

Denotando por "L" a la longitud de la arista del cubo a construir :



$$L = \overset{\circ}{20} \quad ; \quad L = \overset{\circ}{15} \quad \wedge \quad L = \overset{\circ}{6}$$

Entonces "L" es múltiplo común de 20; 15 y 6.

Para formar el cubo más pequeño posible, es necesario que "L" sea lo menor posible, luego :

$$L = \text{m.c.m. } (20; 15; 6)$$

Calculando el m.c.m. :

$$\begin{array}{rcrcr|l} 20 & - & 15 & - & 6 & 2 \\ 10 & - & 15 & - & 3 & 2 \\ 5 & - & 15 & - & 3 & 3 \\ 5 & - & 5 & - & 1 & 5 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array} \Bigg\} \text{ m.c.m.} = (20 ; 15 ; 6) = 60$$

Entonces : L = 60 (La longitud de la arista del cubo es 60 *cm*)

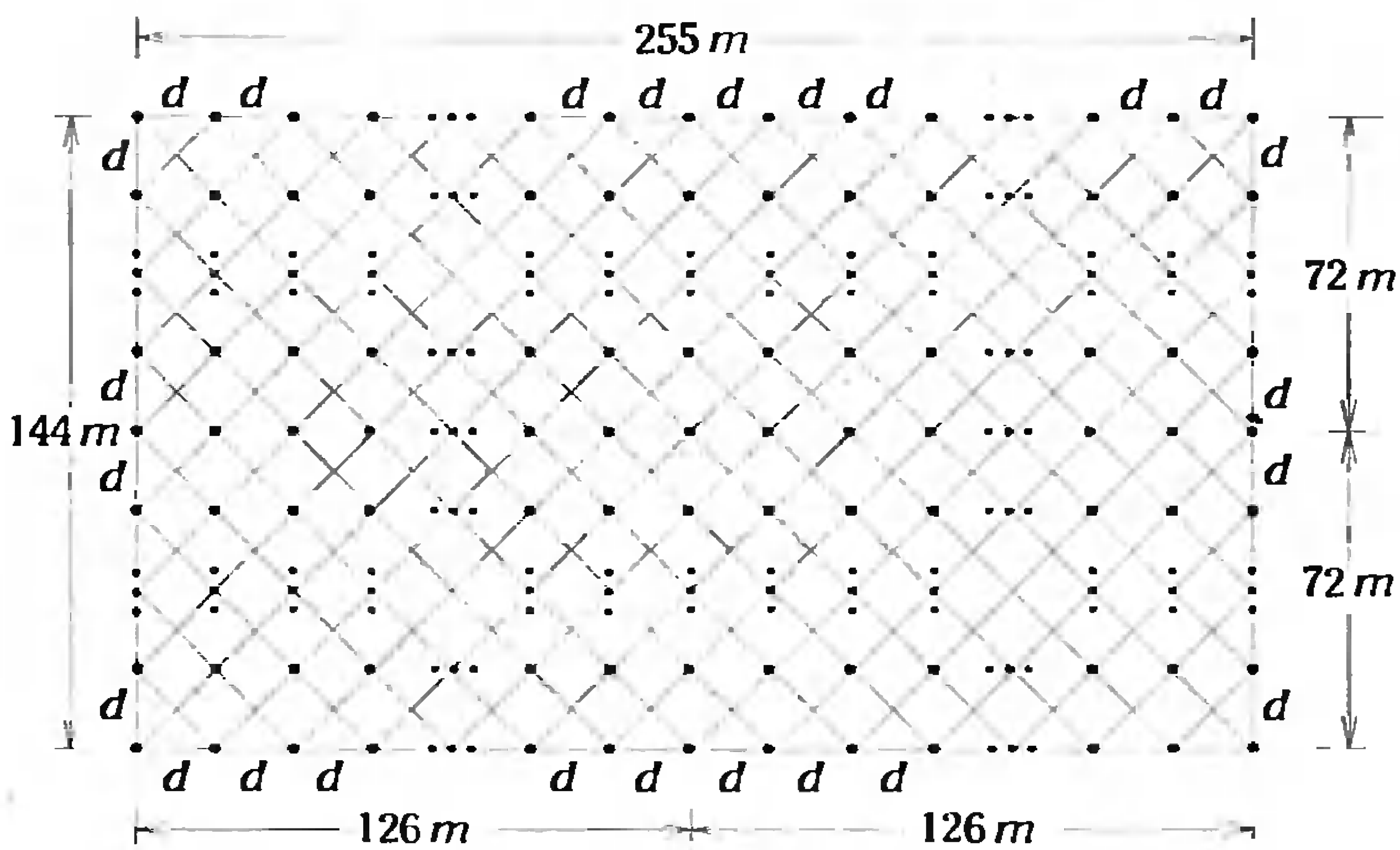
Por lo tanto, el número de ladrillos es : $\#\text{ ladrillos } = \dfrac{60}{20} \times \dfrac{60}{15} \times \dfrac{60}{6}$

$$\therefore \quad \#\text{ ladrillos } = 120 \qquad \text{RPTA. C}$$

19.- Un terreno de forma rectangular cuyos lados miden 144m y 252 m están sembrados con árboles equidistantes y separados lo más posible. Si se observa que hay un árbol en cada vértice y uno en el centro del terreno. ¿Cuántos árboles hay en total?

A) 112 ***B) 56*** ***C) 40*** ***D) 135*** ***E) 120***

<u>Resolución</u>.-



Llamando "*d*" a la distancia que existe entre árbol y árbol, nótese que para que se tenga un árbol en el centro del terreno, éste debe ser la intersección de dos filas que pasan por los puntos medios de los lados, luego "*d*" debe ser un *divisor común* de 72 y 126.

Además, para los árboles estén separados lo más posible "d" debe ser lo *mayor posible*, entonces :

$$d = \text{M.C.D.}\ (72; 126)$$

Calculando el M.C.D :

$$\begin{array}{rcl|l} 72 & - & 126 & 2 \\ 36 & - & 63 & 3 \\ 12 & - & 21 & 3 \\ 4 & - & 7 & \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l}2\\3\\3\end{array}}\right\} \text{M.C.D.} = (72\,;\,126) = 18$$

Luego : $d = 18$ (la distancia entre árbol y árbol es 18m)

El número de filas de árboles por cada lado será :

- Largo : $\dfrac{252}{18} + 1 = 15$ filas

- Ancho : $\dfrac{144}{18} + 1 = 9$ filas

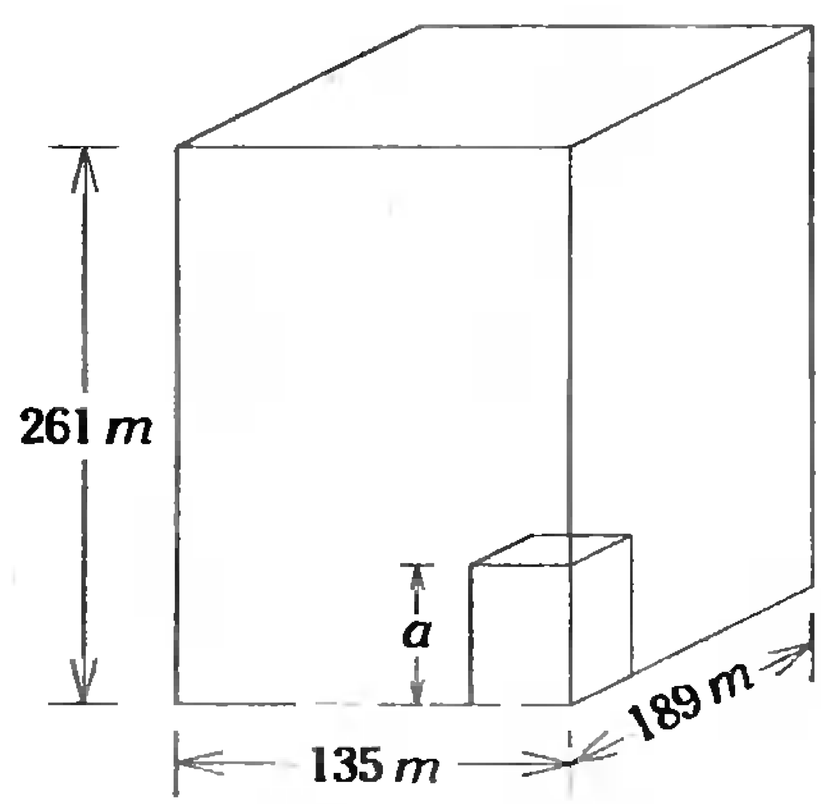
Por lo tanto : # de árboles $= 15 \times 9 = 135$ RPTA. D

20.- Se desea construir un prisma rectangular recto de dimensiones : 135m, 189m y 261m respectivamente con la menor cantidad de ladrillos cúbicos de dimensiones enteras de metros posibles. ¿Cuántos ladrillos se usarán?

A) 585 B) 21 C) 10135 D) 315 E) 9135

<u>Resolución</u>.-

Llamando "a" a la longitud de la arista de los ladrillos cúbicos :



$$135 = \overset{\circ}{a} \quad ; \quad 261 = \overset{\circ}{a} \quad \wedge \quad 189 = \overset{\circ}{a}$$

Entonces "a" es un *divisor común* de 135; 261 y 189.

Ahora bien, para usar la menor cantidad de ladrillos, la longitud de la arista de los ladrillos es decir "a", debe ser lo *mayor posible*, luego :

$$a = \text{M.C.D.}\ (135; 261; 189)$$

Calculando el M.C.D. :

$$\begin{array}{ccccc|c} 135 & - & 261 & - & 189 & 3 \\ 45 & - & 87 & - & 63 & 3 \\ 15 & - & 29 & - & 21 & \end{array} \quad \text{M.C.D.} = (135\,;261\,;189) = 9$$

Entonces $a = 9$

Por lo tanto, el número de ladrillos necesarios será :

$$\#\ \text{ladrillos} = \frac{135}{9} \times \frac{261}{9} \times \frac{189}{9}$$

$$\therefore \quad \#\ \text{ladrillos} = 9135 \qquad \text{RPTA. E}$$

21.- El número de niños de un colegio es el menor posible. Si se agrupan de 10 en 10 sobran 3; si se agrupan de 12 en 12 sobran 5 y de 15 en 15 sobran 8. ¿Cuántos niños tiene el colegio?

A) 61 B) 53 C) 73 D) 113 E) 173

<u>Resolución</u>.-

Sea N el número de niños del colegio; entonces, por los datos :

$$N = \overset{\circ}{10} + 3$$
$$N = \overset{\circ}{12} + 5$$
$$N = \overset{\circ}{15} + 8$$

Expresandolos en su forma por exceso :

$$N = \overset{\circ}{10} - 7$$
$$N = \overset{\circ}{12} - 7$$
$$N = \overset{\circ}{15} - 7$$

Como el m.c.m. (10; 12; 15) es igual a 60, se tiene :

$$N = \overset{\circ}{60} - 7$$

Por lo tanto, el menor valor de N será :

$$N = 53 \qquad \text{RPTA. B}$$

22.- En una empresa trabajan 180 empleados. Se selecciona un grupo de ellos, notándose que si se les agrupa de 8 en 8, de 10 en 10 y de 12 en 12, siempre sobra 1; del número de no seleccionados. ¿Cuál es la suma de sus cifras?

A) 4 B) 7 C) 10 D) 14 E) 16

Resolución.-

Si asumimos que de los 180 empleados, se selecciona "N" empleados, se tendrá por datos :

$$N = \overset{\circ}{8} + 1 \quad ; \quad N = \overset{\circ}{10} + 1 \quad \wedge \quad N = \overset{\circ}{12} + 1$$

Como el m.c.m. de 8, 10 y 12 es 120 se concluye que : $N = \overset{\circ}{120} + 1$

Entonces el número de seleccionados es : $N = 121$

Por lo tanto, el número de no seleccionados es : $180 - 121 = 59$ RPTA. D

23.- Hallar la cifra de unidades del mayor número de 3 cifras que convertido a los sistemas de numeración de bases : 6 ; 8 y 9 da como resultados números que terminan en 5; 7 y 8 respectivamente.

A) 3 ***B) 4*** ***C) 5*** ***D) 6*** ***E) 7***

Resolución.-

Considerando a abc como el número de tres cifras :

$$\overline{abc} = \ldots 5_6 \Rightarrow \overline{abc} = \overset{\circ}{6} + 5$$
$$\overline{abc} = \ldots 7_8 \Rightarrow \overline{abc} = \overset{\circ}{8} + 7$$
$$\overline{abc} = \ldots 8_9 \Rightarrow \overline{abc} = \overset{\circ}{9} + 8$$

Expresando por exceso :

$$\overline{abc} = \overset{\circ}{6} - 1$$
$$\overline{abc} = \overset{\circ}{8} - 1$$
$$\overline{abc} = \overset{\circ}{9} - 1$$

Como el m.c.m. de 6; 8 y 9 es 72, se tiene : $\overline{abc} = \overset{\circ}{72} - 1$

Luego : $\overline{abc} \in \{143; 215; 287; \ldots\}$

El mayor valor de $\overline{abc}$ será : $\overline{abc}_{max} = 72(13) - 1$

$$\therefore \quad \overline{abc}_{max} = 935$$ RPTA. C

24.- Al dividir 199 y 369 entre "n" los restos respectivos fueron 7 y 9. ¿Cuántos valores toma "n"?

A) 2 ***B) 3*** ***C) 4*** ***D) 5*** ***E) más de 5***

Resolución.-

Por datos :

$$\begin{array}{r|l} 199 & n \\ \cline{2-2} & q_1 \\ 7 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 199 = \overset{\circ}{n} + 7 \Rightarrow 192 = \overset{\circ}{n}$$

$$\begin{array}{r|l} 369 & n \\ \hline & q_2 \\ 9 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 369 = \overset{\circ}{n} + 9 \quad \Rightarrow \quad 360 = \overset{\circ}{n}$$

Nótese que "n" es dividir común de 192 y 360, entonces es dividir de su M.C.D.

Calculando el M.C.D. de 192 y 360 :

$$\left.\begin{array}{rcr|l} 192 & - & 360 & 2 \\ 96 & - & 180 & 2 \\ 48 & - & 90 & 2 \\ 24 & - & 45 & 3 \\ 8 & - & 15 & \end{array}\right\} \text{M.C.D.} = (192\,;360) = 24$$

Entonces "n" debe ser un divisor de 24 y además mayor que 9, pues en las divisiones iniciales el divisor debe ser mayor que el resto; luego :

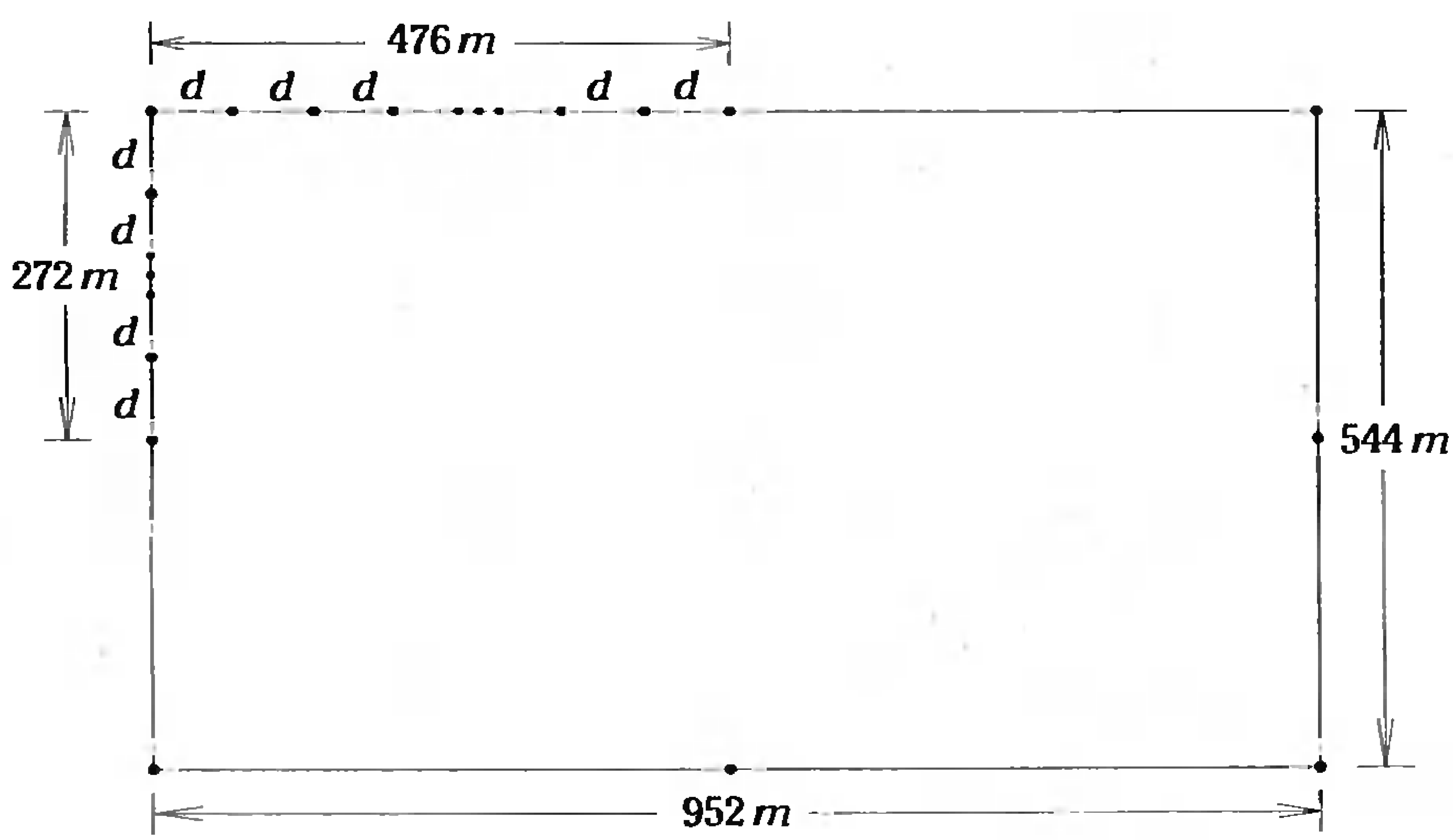
$$n \in \{12\,;24\}$$

$\therefore$ n puede tomar 2 valores RPTA. A

25.- A un terreno rectangular de 952m de largo y 544m de ancho se le quiere cercar con alambre sujeto a postes equidistantes de manera que disten de 30 a 40m y que corresponde un poste a cada vértice, así como también uno a cada uno de los puntos medios de los lados del rectángulo. ¿Cuántos postes se necesitan?

A) 56 ***B) 96*** ***C) 72*** ***D) 83*** ***E) 88***

Resolución.-



Nótese que "*d*" es un divisor común de 272 y 476, luego es un divisor de su M.C.M. entonces :

$$\begin{array}{rcl|l} 272 & - & 476 & 2 \\ 136 & - & 238 & 2 \\ 68 & - & 119 & 17 \\ 4 & - & 7 & \end{array} \quad \text{M.C.D.} = (272\,;476) = 68$$

Entonces "*d*" es un divisor de 68 comprendido (por dato) entre 30 y 40, luego : $d = 34$

Por lo tanto : $\#\text{ postes } = \dfrac{952+544+952+544}{34}$

$\therefore \quad \#\text{ postes } = 88$ RPTA. E

26.- Calcular el valor de "n". Sí : m.c.m. (A ; B) = 19 440 [M.C.D. (A , B)]

Donde : $A = 18.30^n \quad \wedge \quad B = 45.20^n$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Resolución.-

Descomposición canónicamente : $A = (2\,.\,3^2)\,.\,(2\,.\,3\,.\,5)^n = 2^{n+1}\,.\,3^{n+2}\,.\,5^n$

$B = (3^2\,.\,5)\,.\,(2^2\,.\,5)^n = 2^{2n}\,.\,3^2\,.\,5^{n+1}$

Calculando su M.C.D. y su m.c.m. : $\text{M.C.D. }(A\,,B) = 2^{n+1}\,.\,3^2\,.\,5^n$

$\text{m.c.m. }(A\,,B) = 2^{2n}\,.\,3^{n+2}\,.\,5^{n+1}$

Por dato : m.c.m. (A , B) = 19 440 [M.C.D. (A , B)]

Reemplazando y descomponiendo canónicamente a 19 440 :

$$2^{2n}\,.\,3^{n+2}\,.\,5^{n+1} = 2^4\,.\,3^5\,.\,5\left[2^{n+1}\,.\,3^2\,.\,5^n\right]$$

Efectuando : $2^{2n}\,.\,3^{n+2}\,.\,5^{n+1} = 2^{n+5}\,.\,3^7\,.\,5^{n+1}$

Igualando los exponentes de un mismo factor primo : $n = 5$ RPTA. D

27.- ¿Cuántos de los divisores de 100^{40} son también divisor de 200^{30}; 300^{20} y 400^{10}?

A) 832 B) 961 C) 861 D) 931 E) 1061

Resolución.-

Los divisores comunes de 100^{40} ; 200^{30} ; 300^{20} y 400^{10} son los divisores de su M.C.D. ; entonces descomponiendo canónicamente :

$$100^{40} = (2^2\,.\,5^2)^{40} = 2^{80}\,.\,5^{80}$$
$$200^{30} = (2^3\,.\,5^2)^{30} = 2^{90}\,.\,5^{60}$$
$$300^{20} = (2^2\,.\,3\,.\,5^2)^{20} = 2^{40}\,.\,3^{20}\,.\,5^{40}$$
$$400^{10} = (2^4\,.\,5^2)^{10} = 2^{40}\,.\,5^{20}$$

Luego, el M.C.D. de ellos será : $\text{M.C.D} = 2^{40} \cdot 5^{20}$

Por lo tanto para determinar la cantidad de divisores comunes, bastará hallar el número de divisores de su M.C.D. :

$$D(\text{comunes}) = (40 + 1)(20 + 1)$$

$$\therefore \quad \boxed{D(\text{comunes}) = 861} \qquad \text{RPTA. C}$$

28.- Calcular A . B sabiendo que : ***M.C.D. (35A ; 5B) = 70***
m.c.m. (42A , 6B) = 504

A) 126 ***B) 135*** ***C) 140*** ***D) 168*** ***E) 191***

<u>Resolución</u>.-

Según los datos : $\text{M.C.D.}(35A, 5B) = 70 \quad \ldots (1)$

$\text{m.c.m.}(42A, 6B) = 504 \quad \ldots (2)$

Si dividimos a los números entre un divisor común, el M.C.D. y el m.c.m. quedan divididos entre caída entre dicho divisor común, entonces :

$$(1) \div 5: \qquad \text{M.C.D.}\left(\frac{35A}{5}; \frac{5B}{5}\right) = \frac{70}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \text{M.C.D.}(7A; B) = 14 \quad \ldots (\alpha)$$

$$(2) \div 6: \qquad \text{m.c.m.}\left(\frac{42A}{6}; \frac{6B}{6}\right) = \frac{504}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \text{m.c.m.}(7A; B) = 84 \quad \ldots (\beta)$$

Por propiedad en (α) y (β) : $7A \times B = 14 \times 84$

$$\therefore \quad \boxed{A \times B = 168} \qquad \text{RPTA. D}$$

29.- Si el m.c.m de A y B es igual a 2A y el M.C.D. es A/3 . Hallar el valor de A sabiendo además que :

$$A - B = 145$$

A) 335 ***B) 165*** ***C) 515*** ***D) 435*** ***E) 505***

<u>Resolución</u>.-

Según los datos : $\text{m.c.m.}(A, B) = 2A$

$\text{M.C.D.}(A, B) = A/3$

Por Propiedad : $A \times B = \dfrac{A}{3} \times 2A$

Simplificando "A" : $B = \dfrac{2A}{3}$

También : $A - B = 145$

Reemplazando : $A - \frac{2A}{3} = 145$

Efectuando operaciones : $A = 435$ RPTA. D

30.- Se divide A entre B y el cociente resulta exacto e igual al cuadrado de su M.C.D. si :

$$m.c.m.\ (A\ ,\ B) - M.C.D.\ (A\ ,\ B) = 504.$$

Determinar el valor de "A".

A) 8 B) 64 C) 512 D) 729 E) 81

Resolución.-

Si el cociente de la división de A entre B es exacto, entonces A es divisible entre B, luego :

$$M.C.D.\ (A\ ,\ B) = B$$

$$m.c.m.\ (A\ ,\ B) = A$$

Por dato : $\frac{A}{B} = [M.C.D.\ (A\ ,\ B)]^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{B} = [B]^2$

$$\Rightarrow \quad A = B^3 \quad ...\ (1)$$

También : $m.c.m.\ (A\ ,\ B) - M.C.D.\ (A\ ,\ B) = 504$

Reemplazando : $A - B = 504 \quad \Rightarrow \quad B^3 - B = 504$

Factorizando : $B\,(B + 1)\,(B - 1) = \underbrace{504}_{8\times9\times7}$

Luego : $B = 8$

En (1) : $A = 8^3$

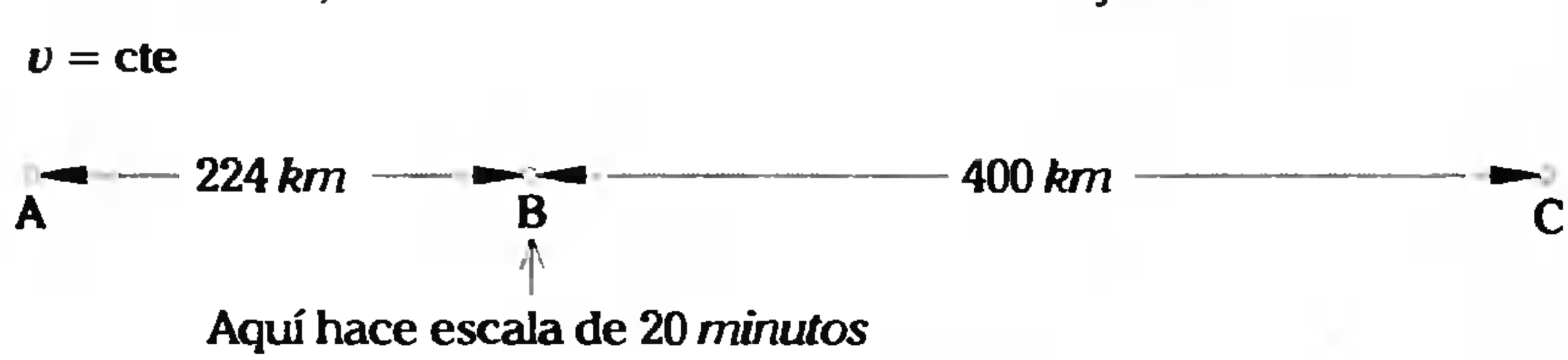
$$\therefore \quad A = 512 \qquad \text{RPTA. C}$$

31.- Una ciudad A está a 224 km de la ciudad B y a 624km de la ciudad C. Un avión que vuela a velocidad constante hace escala en B al ir de A a C. Suponiendo que tarda 20 minutos en la ciudad B y que el m.c.m. de los tiempos que demora en ir de A a B y de B a C es 700 minutos. ¿Cuántos minutos dura el viaje de A a C? (Las ciudades A, B y C están en línea recta).

A) 77 B) 98 C) 107 D) 116 E) 87

Resolución.-

De acuerdo al enunciado, B es una ciudad intermedia entre A y C :



Llamando "t_1" al tiempo que demora en ir de A a B y "t_2" al tiempo que demora en ir de B a C:

$$\text{m.c.m.}\ (t_1\ ;\ t_2) = 700$$

Como t = distancia ÷ velocidad : $\quad \text{m.c.m.}\left(\frac{224}{V};\frac{400}{V}\right) = 700$

Multiplicando por "V" : $\quad \text{m.c.m.}\ (224\ ;\ 400) = 700 \times V \qquad ...\ (1)$

Calculando el m.c.m. :

$$\begin{array}{rcr|l}
224 & - & 400 & 2 \\
112 & - & 200 & 2 \\
56 & - & 100 & 2 \\
28 & - & 50 & 2 \\
14 & - & 25 & 2 \\
7 & - & 25 & 5 \\
7 & - & 5 & 5 \\
7 & - & 1 & 7 \\
1 & - & 1 &
\end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \text{m.c.m.}\ (224\ ;\ 400) = 5\,600$$

En (1) : $\quad 5600 = 700 \times V$

$\Rightarrow \quad V = 8$

Entonces : $\quad t_1 = 224 \div 8 = 28$ *minutos*

$t_2 = 400 \div 8 = 50$ *minutos*

Por lo tanto el viaje de A a C dura : $28 + 20 + 50 = 98$ minutos RPTA. B

32.- Al calcular el M.C.D. de los números $\overline{abbc}$ y $\overline{cbba}$ por el Algoritmo de Euclides, los cocientes han sido : 2; 2; 1; 1 y 2. Hallar a . b . c si : a - c = 4

A) 688 B) 682 C) 96 D) 128 E) 628

<u>Resolución</u>.-

Si el M.C.D de $\overline{abbc}$ y $\overline{cbba}$ es "k" el esquema del Algoritmo de Euclides quedará :

	2	2	1	1	2
$\overline{abbc}$	$\overline{cbba}$				k
				0	

Reconstruyendo, por la regla del cangrejo :

	2	2	1	1	2
$31k$	$13k$	$5k$	$3k$	$2k$	k
$5k$	$3k$	$2k$	k	0	

Luego : $\overline{abbc} = 31k \quad \wedge \quad \overline{cbba} = 13k$

Como $a - c = 4$; descomponiendo polinómicamente y efectuando se tendrá :

$$\overline{abbc} - \overline{cbba} = 999\,(a - c)$$

$$= 999\,(4)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{abbc} - \overline{cbba} = 3\,996$$

Reemplazando : $31k - 13k = 3\,996 \quad \Rightarrow \quad k = 222$

Luego : $\overline{abbc} = 31(222) = 6\,882$

Entonces :

$$a = 6$$
$$b = 8$$
$$c = 2$$

$$\therefore \quad a\,.\,b\,.\,c = 96 \qquad \text{RPTA. C}$$

33.- Al calcular el M.C.D de los números $\overline{xyzw}$ y $\overline{(a+1)a(a+2)}$ por el Algoritmo de Euclides se obtuvieron como cociente sucesivos : 7; 1; 3 y 3. Calcular el valor de :

$$a + x + y + z + w$$

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

<u>Resolución</u>.-

Denotando por "k" al M.C.D. de $\overline{xyzw}$ y $\overline{(a+1)a(a+2)}$, se tendrá :

	7	1	3	3
$\overline{xyzw}$	$\overline{(a+1)a(a+2)}$			k
			0	

Reconstruyendo, por la Regla del Cangrejo :

	7	1	3	3
$101k$	$13k$	$10k$	$3k$	k
$10k$	$3k$	k	0	

Luego : $\overline{xyzw} = 101k \quad \wedge \quad \overline{(a+1)a(a+2)} = 13k$

Nótese que : $\overline{(a+1)a(a+2)} = \overset{\circ}{13}$

Aplicando el criterio de divisivilidad entre 13 : $\underbrace{\overset{4}{(a+1)}\overset{3}{a}}_{-}\underbrace{\overset{1}{(a+2)}}_{+} = \overset{\circ}{13}$

$\Rightarrow \quad -4(a+1)-3(a)+(a+2)=\overset{\circ}{13}$

$\Rightarrow \quad -6a-2=\overset{\circ}{13}$

$\Rightarrow \quad a=4$

Entonces : $\overline{(a+1)a(a+2)} = 13k$

Reemplazando : $546 = 13k \quad \Rightarrow \quad k = 42$

También : $\overline{xyzw} = 101(42) = 4242$

Luego :

$x = 4$
$y = 2$
$z = 4$
$w = 2$

$\therefore \quad \boxed{a+x+y+z+w=16}$ RPTA. D

34.- La suma de los cuadrados de dos números es 832 y su M.C.D. es 8. La suma de los números es :

A) 8 ***B) 40*** ***C) 60*** ***D) 20*** ***E) 80***

<u>Resolución</u>.-

Suponiendo que los números son A y B : $A^2 + B^2 = 832 \quad ... (\alpha)$

$$\text{M.C.D. (A , B)} = 8 \begin{cases} A = 8\,C_1 \\ B = 8\,C_2 \\ C_1 \text{ y } C_2 \text{ son P.E. Si} \end{cases}$$

Reemplazando en (α) : $(8C_1)^2 + (8C_2)^2 = 832$

$64C_1^2 + 64C_2^2 = 832$

$\Rightarrow \quad C_1^2 + C_2^2 = 13$

Luego : $C_1 = 2 \quad \wedge \quad C_2 = 3$

Entonces : $A = 8(2) = 16$

$B = 8(3) = 24$

$\boxed{A + B = 40}$ RPTA. B

35.- Hallar la diferencia de dos números enteros sabiendo que su M.C.D. es 48 y su suma es 288.

A) 187 ***B) 189*** ***C) 191*** ***D) 192*** ***E) 193***

Resolución.-

Sean A y B los números :

M.C.D. (A, B) ⇨ $A = 48\,C_1$
$B = 48\,C_2$
donde C_1 y C_2 son P.E. Si :

Por dato : $A + B = 288$

$48C_1 + 48C_2 = 288$

$\Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 6$

Como C_1 y C_2 son P.E. sí : $C_1 = 5$

$C_2 = 1$

Luego : $A = 48(5) = 240$

$B = 48(1) = 48$

$\therefore \quad \boxed{A - B = 192}$ RPTA. D

36.- ¿Cuántos pares de números enteros existen tales que su suma está comprendida entre 400 y 500 y tenga como M.C.D. a 48?

A) 5 ***B) 4*** ***C) 3*** ***D) 2*** ***E) 1***

Resolución.-

Sean los números A y B : $400 < A + B < 500$ ... (α)

$$\text{M.C.D. } (A, B) = 48 \begin{cases} A = 48\,C_1 \\ B = 48\,C_2 \\ C_1 \wedge C_2 : \text{P.E. Si} \end{cases}$$

En (α) : $400 < 48C_1 + 48C_2 < 500$

$8\,1/3 < C_1 + C_2 < 10\,5/12$

Entonces : $C_1 + C_2 = 9 \quad \vee \quad C_1 + C_2 = 10$

C_1	C_2		C_1	C_2
↓	↓		↓	↓
1	8		1	9
2	7		3	7
4	5			

$\therefore$ $\boxed{\text{EXISTEN 5 PARES}}$ RPTA. A

37.- La suma de dos números es 105, siendo su m.c.m. 180. Dar la diferencia de ellos.

A) 12 ***B) 10*** ***C) 15*** ***D) 25*** ***E) 30***

Resolución.-

Sean los números A y B tal que :

$$\text{M.C.D}(A\,;B)=k \Rightarrow \begin{cases} A = k\,C_1 \\ B = k\,C_2 \\ \text{m.c.m.} = k\,C_1\,;C_2 \\ C_1 \wedge C_2 : \text{P.E. Si} \end{cases}$$

Como : $A + B = 105$

$kC_1 + kC_2 = 105 \Rightarrow k(C_1 + C_2) = 105$ ... (α)

También : $\text{m.c.m.} = 180 \Rightarrow kC_1C_2 = 180$ ... (β)

Dividiendo (α) ÷ (β) : $\dfrac{C_1 + C_2}{C_1C_2} = \dfrac{7}{12}$

Entonces : $C_1 + C_2 = 7 \wedge C_1C_2 = 12$

Luego : $C_1 = 4 \wedge C_2 = 3$

En (α) : $k(4 + 3) = 105 \Rightarrow k = 15$

De donde : $A = 15 \times 4 = 60 \wedge B = 15 \times 3 = 45$

$\therefore$ $A - B = 15$ RPTA. C

38.- Un número excede a otro en 44 unidades y la diferencia de su m.c.m. y su M.C.D. es 500. Hallar dichos números y dar su suma.

A) 77 ***B) 99*** ***C) 110*** ***D) 100*** ***E) 144***

Resolución.-

$$\text{Sea : M.C.D.}(A, B) = k \begin{cases} A = k\,C_1 \\ B = k\,C_2 \\ m.c.m. = k\,C_1\,C_2 \\ C_1 \wedge C_2 : \text{P.E. Si} \end{cases}$$

Por datos : $A - B = 44 \Rightarrow k(C_1 - C_2) = 44$ ... (α)

m.c.m. (A , B) - M.C.D. (A , B) = 500

$kC_1C_2 - k = 500 \Rightarrow k(C_1\,C_2 - 1) = 500$ ... (β)

Dividiendo (α) ÷ (β) : $\dfrac{C_1 - C_2}{C_1 . C_2 - 1} = \dfrac{11}{125}$

Luego : $C_1 - C_2 = 11 \quad \wedge \quad C_1 . C_2 = 126$

De donde : $C_1 = 18 \quad \wedge \quad C_2 = 7$

En (α) : $k(18 - 7) = 44 \quad \Rightarrow \quad k = 4$

Entonces : $A = 4 . 18 = 72$

$B = 4 . 7 = 28$

$\therefore \quad A + B = 100$ RPTA. D

39.- Calcular el valor de N sabiendo que : m.c.m. (500 - N ; 770 - N) = 1053

A) 410 B) 472 C) 419 D) 412 E) 370

Resolución.-

Asumiendo que : M.C.D. (500 - N ; 770 - N) = k

Entonces : $500 - N = kC_1$ ... (α)

$700 - N = kC_2$ ... (β)

m.c.m. (500 - N ; 770 - N) = kC_1C_2

$\Rightarrow \quad 1053 = kC_1C_2$ ... (1)

Restando (β) - (α) : $270 = k(C2 - C1)$ ... (2)

Dividiendo (1) ÷ (2) : $\dfrac{39}{10} = \dfrac{C_1 . C_2}{C_2 - C_1}$

Luego : $C_1 . C_2 = 39 \quad \wedge \quad C_2 - C_1 = 10$

De donde : $C_2 = 13 \quad \wedge \quad C_1 = 3$

En (2) : $270 = k(13 - 3) \quad \Rightarrow \quad k = 27$

En (α) : $500 - N = 27 . 3$

$\therefore \quad N = 419$ RPTA. C

40.- Carlos mandó a su empleado a la librería a comprar borradores, lapiceros y cuadernos con la condición de gastar la misma suma para cada tipo de artículo escolar y que sea lo menor posible, bajo pena de pagar 10 centavos por cada artículo que compre demás. El empleado encontró borradores a 300 centavos, lapiceros a 600 centavos y cuadernos a 750 y 900 centavos cada uno de estos; tomó los más baratos y tuvo que pagar una suma a Carlos. ¿Cuál fue esta suma?

A) 50 B) 60 C) 70 D) 80 E) 90

Resolución.-

La primera opción es que el empleado compre borradores a 300 centavos, lapiceros a 600 centavos y cuadernos a 750 centavos; entonces como debe gastar una misma suma (la menor posible) para cada tipo de artículo, esta debe ser el m.c.m. de 300; 600 y 750, luego :

$$\begin{array}{rcrcr|l}
300 & - & 600 & - & 750 & 2 \\
150 & - & 300 & - & 375 & 5 \\
30 & - & 60 & - & 75 & 5 \\
6 & - & 12 & - & 15 & 3 \\
2 & - & 4 & - & 5 & 2 \\
1 & - & 2 & - & 5 & 2 \\
1 & - & 1 & - & 5 & 5 \\
1 & - & 1 & - & 1 &
\end{array}
\quad \text{m.c.m.}\ (300\ ;600\ ;750) = 3\,000$$

Entonces la suma gastada par cada tipo de artículo es 3 000 centavos.

El número de artículos comprados es : $\dfrac{3000}{300}+\dfrac{3000}{600}+\dfrac{3000}{750}=19$

La segunda opción es que el empleado compre borradores a 300 centavos, lapiceros a 600 centavos y cuadernos a 900 centavos; luego como debe gastar la misma suma (la menor posible) para cada tipo de artículo, esta debe ser el m.c.m. de 300; 600 y 900, es decir :

$$\begin{array}{rcrcr|l}
300 & - & 600 & - & 900 & 2 \\
150 & - & 300 & - & 450 & 2 \\
75 & - & 150 & - & 225 & 3 \\
25 & - & 50 & - & 75 & 5 \\
5 & - & 10 & - & 15 & 5 \\
1 & - & 2 & - & 3 & 2 \\
1 & - & 1 & - & 3 & 3 \\
1 & - & 1 & - & 1 &
\end{array}
\quad \text{m.c.m.}\ (300\ ;600\ ;900) = 1\,800$$

Luego la suma gastada para cada tipo de artículo es 1 800 centavos.

Entonces, el número de artículos comprados sería : $\dfrac{1800}{300}+\dfrac{1800}{600}+\dfrac{1800}{900}=11$

Como el empleado eligió la primera opción, ha comprado : 19 - 11 = 8 artículos de más, luego debe pagar a Carlos :

$\therefore$ $\boxed{8 \times 10 = 80 \text{ centavos}}$ RPTA. D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Se han plantado árboles igualmente espaciados en el contorno de un campo triangular cuyos lados miden 144 *m*, 180*m* y 240 *m*. Sabiendo que hay un árbol en cada vértice y que la distancia entre 2 árboles consecutivos está comprendida entre 4*m* y 10*m*. Calcular el número de árboles.

A) 88 B) 94 C) 90 D) 95 E) 96

2.- Un móvil se desplaza con velocidad constante: recorriendo primero 180*km* y luego 240*km*. Si el M.C.M. de los tiempos empleados es 96 horas. ¿Cuántas horas se ha demorado en total?

A) 24 B) 37 C) 28 D) 56 E) 25

3.- Hallar el valor de "*n*" si el m.c.m. de los números : $A = 12^n \cdot 45$ y $B = 12 \cdot 45^n$. Tiene 450 divisores.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 2 E) 6

4.- Se dispone de un terreno de forma rectangular de dimensiones 480*m* por 72*m* y se desea sembrar íntegramente con árboles equidistantes a lo largo y ancho del terreno, de modo que haya uno en cada vértice. ¿Cuántos árboles serán nece-sarios si se desea emplear la menor cantidad posible de ellos?

A) 80 B) 89 C) 88 D) 84 E) 82

5.- Si tenemos que llenar 4 cilindros de capacidades 72; 24; 56 y 120 galones respectivamente. ¿Cuál es la capacidad del balde que puede usarse para llenarlos exactamente si está comprendida entre 2 y 8 galones?

A) 6 B) 4 C) 5 D) 3 E) 7

6.- ¿Cual es el menor número no divisible por: 4; 6; 9; 11 y 12 que al dividirlo entre estos se obtiene restos iguales?

A) 215 B) 317 C) 397 D) 428 E) 459

7.- ¿Cuántos divisores tiene el MCD de :

$$A = 12^3 \times 10^4$$
$$B = 18^4 \times 15^2$$
$$C = 10^2 \times 30^3$$

A) 16 B) 20 C) 60 D) 46 E) N.A.

8.- Hallar "*n*" si el m.c.m. de $A = 28 \times 32^n$ y $B = 28^n \times 32$ tiene 72 divisores.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9.- Se han dividido 3 barras de acero de longitudes 540; 480 y 360*cm*, en trozos de igual longitud, siendo está la mayor posible. ¿Cuántos trozos se han obtenido?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

10.- Se dispone de un terreno de forma rectangular de $540 \times 120m$ el cual se ha dividido en parcelas cuadradas todas iguales exactamente. Hallar el lado de la parcela si se desea obtener entre 400 y 500 parcelas.

A) 12*m* B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

11.- Si : M.C.D. $(\overline{x1y8}\ ;\ \overline{x9y0}) = 18$.

Hallar : $x + y$

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 14

12.- Dados los números : $A = 15 \times 90^n$

$B = 90 \times 15^n$

Hallar el valor de "*n*" sabiendo que el m.c.m. de A y B es 36 veces el M.C.D. de dichos números.

A) 2   B) 3   C) 4   D) 5   E) 7

13.- Se divide A entre B y el cociente resulta exacto e igual al cuadrado de su M.C.D. Si M.C.D.(A , B) + m.c.m.(A , B) = 520. Hallar el valor de "B".

A) 8   B) 7   C) 9   D) 6   E) 12

14.- El producto del m.c.m. por el M.C.D.de $\overline{ab}$ y $\overline{abab}$ es 17069. Hallar $(a+b)$.

A) 2   B) 1   C) 4   D) 3   E) 5

15.- La suma de los números a y b es 651. El cociente entre m.c.m. y M.C.D. es 108. Hallar $a - b$.

A) 481   B) 473   C) 423
D) 483   E) 581

16.- m.c.m. (A . B) = A^2 y M.C.D.(A , B) = 21.
El valor de B será :

A) 21   B) 121   C) 42   D) 420   E) 441

17.- Hallar la suma de dos números enteros sabiendo que la suma de los cocientes obtenidos al dividir cada uno de ellos entre su M.C.D. es 9 y que su producto dividido entre este mismo M.C.D. da como resultado 180.

A) 49   B) 81   C) 63   D) 101   E) 64

18.- Si : M.C.D.(3A ,3B) = 3 y
m.c.m. (4A,4B) = 572
Hallar : A . B.

A) 110   B) 121   C) 132
D) 143   E) 154

19.- El producto de dos números es 3500 y la suma de su M.C.D. y su m.c.m. es 360. Uno de los números puede ser :

A) 35   B) 60   C) 70   D) 150   E) N.A.

20.- ¿Cuántas parejas de números existen cuyo m.c.m sea igual a 180 veces su M.C.D?

A) 16   B) 24   C) 32   D) 64   E) 4

21.- Hallar 2 números, uno con 21 divisores y el otro con 10 divisores, cuyo máximo común divisor sea 18. Dar la diferencia entre ellos.

A) 2868   B) 414   C) 684
D) 522   E) N.A.

22.- Al calcular el M.C.D. de dos números primos entre si mediante "divisiones sucesivas" se obtuvo como cociente sucesivos : 2; 1; 3; 3 y 2. La diferencia de los números es :

A) 7   B) 30   C) 83   D) 53   E) 23

23.- Al calcular el M.C.D. de 2 números por el método de las divisiones sucesivas se obtuvo por cocientes : 1; 1; 2; 3 y 4. Determinar el mayor de ellos si el M.C.D. de ellos fue 56.

A) 7300   B) 3920   C) 2408
D) 4368   E) 4088

24.- Al encontrar el M.C.D. de dos números mediante el algoritmo de Euclides se obtuvo como cocientes sucesivos: 1; p; 3 y 2. Hallar el valor de "p" si la suma de los números es igual a 53 veces su M.C.D.

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 7

25.- Hallar $a + b + c$, sabiendo que los cocientes sucesivos al calcular el M.C.D. por el algoritmo de Euclides de los números : $\overline{a(a+4)a}$ y $\overline{a(a+4)bc}$ fueron : 1; 1; 1 y 3

A) 11   B) 13   C) 17   D) 21   E) 22

26.- ¿Cuántos pares de números suman 476 y tiene como M.C.D a 28?

A) 16   B) 1   C) 6   D) 8   E) 9

27.- El M.C.D. de dos números es 9 y el cuadrado del primero más el segundo es 486. ¿Cuál es la suma de los números?

A) 414 B) 405 C) 426
D) 477 E) 423

28.- Los cuadrados de dos números difieren en 3375 y su M.C.D. es 15. Diga cuál de los siguientes no es uno de los números.

A) 60 B) 120 C) 15 D) 75 E) 105

29.- Sean A y B dos números que guardan una relación de 60 a 40. Si el M.C.D. es 9. Determine la diferencia de dichos números.

A) 8 B) 9 C) 18 D) 27 E) 36

30.- Para los números : A = 2400 y B = 4950, el valor de : $\dfrac{M.C.M.(A,B)}{M.C.D.(A,B)}$, es :

A) Mayor que 1056 D) 264
B) 1056 E) Menor que 264
C) 528

31.- El M.C.D. de dos números enteros y positivos es 12 y el M.C.M. es 72. Si el producto de los números entre la suma de ellos da un cociente mayor que 12. Hallar la diferencia de los números.

A) 17 B) 15 C) 12 D) 10 E) 16

32.- El M.C.M. de dos números es 147 y la diferencia de los números es 28. Hallar la suma de los números.

A) 56 B) 70 C) 84 D) 31 E) 77

33.- Hallar dos números enteros que sumen 225 y que la suma de su M.C.M. y su M.C.D. sea 315.

A) 60 y 165 B) 40 y 185 C) 45 y 180
D) 90 y 135 E) 200 y 45

34.- Hallar dos números enteros, sabiendo que la suma de sus cuadrados es 3492 y que su producto es 216 veces su máximo común divisor. Dar la suma de los números.

A) 78 B) 82 C) 72 D) 80 E) 86

35.- Hallar dos números sabiendo que su producto es 30 veces su M.C.D. y que la suma de sus cuadrados es 87 veces su M.C.D. Dar como respuesta el menor de los números.

A) 10 B) 6 C) 15 D) 27 E) 25

36.- El M.C.M. de dos números enteros es igual a 55 veces su M.C.D. si la diferencia de dichos números es 18. Dar la suma de los números.

A) 30 B) 60 C) 48 D) 32 E) 96

37.- Hallar dos números enteros sabiendo que su suma es 581 y su M.C.M. es 240 veces su M.C.D. Dar como respuesta el mayor de ellos.

A) 560 B) 280 C) 350
D) 420 E) 630

38.- Hallar dos números enteros sabiendo que su suma es igual a 6 veces su M.C.D. y su producto es igual a 8 veces su M.C.M.

A) 30 y 5 B) 48 y 8 C) 40 y 8
D) 24 y 6 E) 48 y 5

39.- Se sabe que el cuadrado del M.C.M. de dos números es igual al cubo de su M.C.D. y que la suma de estos números es 180. Hallar su diferencia.

A) 12 B) 24 C) 60 D) 36 E) 90

40.- Se tiene dos números de 3 cifras cada uno, de tal manera que uno de ellos es el complemento aritmético del otro. Si el M.C.M. de los dos números es 1875. Hallar la diferencia de los dos números.

A) 100 B) 50 C) 200
D) 125 E) 250

9 NUMEROS FRACCIONARIOS

9.1 FRACCION O QUEBRADO

Es toda expresión de la forma a/b donde a y b son números enteros diferentes de cero (0), donde a no es divisible entre b.

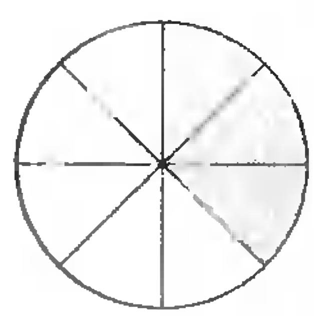
$$f = \frac{\overset{\text{numerador}}{a}}{\underset{\text{denominador}}{b}} \text{ es fracción} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \\ a \neq \overset{\circ}{b} \end{cases}$$

El Denominador.- Indica en cuántas partes iguales se ha dividido a la unidad.

El Numerador.- Indica cuántas de esas partes se están considerando.

Ejemplo : Utilizando un gráfico represente a la fracción :$f = \frac{3}{8}$

$$f = \frac{3 \leftarrow \text{Número de partes que se toma.}}{8 \leftarrow \text{Número de partes en que se divide la unidad.}}$$



CLASIFICACION

9.1A. POR LA RELACIÓN ENTRE SUS TÉRMINOS :

a) Propia. $f = \frac{a}{b}$ es propia $\Leftrightarrow$ $a < b$ $\vee$ $0 < f < 1$

Por ejemplo, son fracciones propias : $\frac{3}{5}; \frac{7}{12}; \frac{15}{23}; \frac{1}{4}; \ldots$

b) Impropia. $f = \frac{a}{b}$ es impropia $\Leftrightarrow$ $a > b$ $\vee$ $f > 1$

Por ejemplo, son fracciones impropias : $\frac{7}{3}; \frac{12}{5}; \frac{8}{7}; \frac{27}{15}; \ldots$

9.1B. POR SU DENOMINADOR :

a) Fracción Común.- Es aquella cuyo denominador no es una potencia de 10

$$f = \frac{a}{b} \text{ es común } \Leftrightarrow b \notin 10^n$$

Por ejemplo, son fracciones comunes : $\frac{7}{12}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{24}{11}$; $\frac{11}{19}$; . . .

b) Fracción Decimal.- Es aquella cuyo denominador es una potencia de 10.

$$f = \frac{a}{b} \text{ es decimal } \Leftrightarrow b \in 10^n$$

Donde : $10^n = \{10 ; 10^2 ; 10^3 ; 10^4 ; \ldots\}$

Por ejemplo, son fracciones decimales :

$$\frac{13}{100} ; \frac{24}{10} ; \frac{15}{1000} ; \frac{236}{10000} ; \ldots$$

9.1C. POR GRUPOS DE FRACCIONES :

a) Fracciones Homogéneas. Si todas las fracciones tienen el mismo denominador.

Por ejemplo : $\frac{3}{7}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{24}{7}$; $\frac{15}{7}$

b) Fracciones Heterogéneas. Si todas las fracciones no tienen el mismo denominador.

Por ejemplo : $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{13}{3}$; $\frac{14}{10}$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- ¿Cuál es la fracción que dividida entre su inversa resulta 169/576? Dar la suma de sus términos.

A) 32 ***B) 36*** ***C) 37*** ***D) 39*** ***E) 41***

Resolución.-

Sea la fracción : $f = \dfrac{a}{b}$

Por dato : $\dfrac{f}{f^{-1}} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}} = \dfrac{169}{576}$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{13^2}{24^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a}{b} = \frac{13}{24}$$

$\therefore$ $a + b = 37$ RPTA. C

2.- ¿Cuál es la fracción ordinaria que resulta triplicada si se agrega a sus dos términos su denominador?

A) 1/4 ***B) 5/13*** ***C) 2/13*** ***D) 2/9*** ***E) 1/5***

Resolución.-

Sea la fracción : $f = \dfrac{a}{b}$

Por condición del problema : $\dfrac{a+b}{b+b} = 3\left(\dfrac{a}{b}\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{2b} = \frac{3a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} = 3a$$

$$\Rightarrow \quad a + b = 6a$$

$$\Rightarrow \quad b = 5a$$

Acomodando los términos : $\dfrac{1}{5} = \dfrac{a}{b}$

$\therefore$ $f = \dfrac{1}{5}$ RPTA. E

9.2 CONCEPTOS IMPORTANTES

9.2A. Número Mixto.- Son aquellos que tienen parte entera y parte fraccionaria.

$$\underbrace{A}_{\text{Parte entera}}\underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{Parte fraccionaria}} = A\frac{a}{b} = \frac{Ab+a}{b}$$

Por ejemplo :

$$* \ 3\frac{2}{5} = \frac{3(5)+2}{5} = \frac{17}{5} \qquad * \ 4\frac{7}{9} + \frac{4(9)+7}{9} = \frac{43}{9} \qquad * \ 2\frac{4}{7} = \frac{2(7)+4}{7} = \frac{18}{7}$$

9.2B. Fracciones equivalentes.- Son aquellas que teniendo términos distintos, tienen el mismo valor. Por ejemplo, son fracciones equivalentes :

$$\frac{5}{9} <> \frac{10}{18} <> \frac{15}{27} <> \frac{20}{36} <> \ldots$$

9.2C. Simplificación de fracciones.- Es un procedimiento en el cual, dada una fracción, se busca una equivalente a ella pero de menores términos. Por ejemplo; simplificando la fracción 108/84.

$$\frac{108}{84} \overset{\div 2}{\underset{\div 2}{<>}} \frac{54}{42} \overset{\div 2}{\underset{\div 2}{<>}} \frac{27}{21} \overset{\div 3}{\underset{\div 3}{<>}} \frac{9}{7}$$

9.2D. Fracción irreductible.- Es aquella que no se puede simplificar, es decir sus términos (numerador y denominador) son números primos entre si .

$$f = \frac{a}{b} \text{ es irreductible } \Leftrightarrow \ a \text{ y } b \text{ son P.E. si}$$

Por ejemplo, son fracciones irreductibles : $\frac{5}{9};\frac{2}{5};\frac{9}{7};\frac{13}{6}$

9.2E. Expresión general de las fracciones equivalentes.- Sea $f = \frac{a}{b}$ una fracción irreductible y $f_{EQ} = \frac{m}{n}$ una fracción equivalente a f :

$$\frac{m}{n} <> \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{matrix} m = ak \\ n = bk \end{matrix} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

3.- ¿Qué fracción de 17/24 hay que añadirle a los $2\frac{1}{2}$ de $5\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{34}$ para que pueda ser igual a la tercera parte de la mitad de las cinco sextas partes?

A) 15/8 B) 5/4 C) 30/17 D) 15/17 E) 31/17

Resolución.-

Sea "f" la fracción, entonces, por el enunciado del problema se podrá establecer que :

$$f \cdot \frac{17}{24} + \left(2\frac{1}{2}\right)\left(5\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{34}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{6}\right)(12)$$

$$f \cdot \frac{17}{24} + \frac{5}{2} \cdot \frac{17}{3} \cdot \frac{1}{34} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 12$$

$$f \cdot \frac{17}{24} + \frac{5}{12} = \frac{5}{3}$$

$$f \cdot \frac{17}{24} = \frac{5}{3} - \frac{5}{12}$$

$$f \cdot \frac{17}{24} = \frac{15}{12}$$

$$\therefore \quad \boxed{f = \frac{30}{17}}$$

4.- ¿Cuántas fracciones irreductibles cuyo denominador es 12, cumplen la condición que sean mayores que 2/7 pero menores que 5/7?

A) 4 B) 5 C) 3 D) 2 E) 1

Resolución.-

Las fracciones son de la forma : $f = \frac{N}{12}$

Por dato : $\frac{2}{7} < f < \frac{5}{7}$

$$\frac{2}{7} < \frac{N}{12} < \frac{5}{7}$$

Multiplicando por 12 : $\frac{24}{7} < N < \frac{60}{7}$

$$\Rightarrow \quad 3{,}4 < N < 8{,}5$$

Como "f" debe ser irreductible, N debe ser primo con 12, luego :

$$N \in \{5 ; 7\} \quad \Rightarrow \quad f \in \left\{\frac{5}{12} ; \frac{7}{12}\right\}$$

$\therefore$ Existen 2 fracciones RPTA. D

5.- *Hallar una fracción equivalente a 7/12 cuya suma de términos sea 209.*

A) 71/138 ***B) 69/140*** ***C) 77/132*** ***D) 82/127*** ***E) 75/134***

Resolución.-

Sea : $f = \frac{a}{b}$ la fracción equivalente a $\frac{7}{12}$

$$f = \frac{a}{b} <> \frac{7}{12} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 7k \\ b = 7k \end{cases}$$

Por dato sabemos que : $a + b = 209$

$$\Rightarrow \quad 7k + 12k = 209$$

$$\Rightarrow \quad k = 11$$

Luego se tendrá que : $a = 7(11) = 77$

$$b = 12(11) = 132$$

$\therefore$ $f = \dfrac{77}{132}$ RPTA. C

9.3 PROPIEDAD

Si la suma de dos fracciones irreductibles es un número entero, entonces, ambas fracciones son homogéneas.

Sean: $f_1 = \frac{a}{b}$ y $f_2 = \frac{c}{d}$ dos fracciones irreductibles :

Si : $$\boxed{f_1 + f_2 = k \; (k \in \mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad b = d}$$

9.4 M.C.D. Y M.C.M. DE FRACCIONES

Dadas las fracciones irreductibles :

$$f_1 = \frac{a}{b} \quad ; \quad f_2 = \frac{c}{d} \quad \wedge \quad f_3 = \frac{e}{f}$$

$$\boxed{\text{M.C.D. } (f_1 ; f_2 ; f_3) = \frac{\text{M.C.D. } (a , c , e)}{\text{m.c.m. } (b , d , f)}}$$

$$\boxed{\text{m.c.m. } (f_1 ; f_2 ; f_3) = \frac{\text{m.c.m.} (a , c , e)}{\text{M.C.D. } (b , d , f)}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

6.- Si la suma de dos fracciones irreductibles resulta 5 y la suma de sus numeradores es 40 ¿Cuál es la suma de sus denominadores?

A) 8 ***B) 10*** ***C) 14*** ***D) 16*** ***E) 18***

<u>Resolución</u>.-

Como la suma de ambas fracciones es 5, que es un número entero, deducimos que las fracciones deben ser homogéneas, luego :

$$f_1 = \frac{a}{c} \quad \vee \quad f_2 = \frac{b}{c}$$

Donde : $a + b = 40$

Luego : $f_1 + f_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 5$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{c} = 5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{40}{c} = 5$$

$$\Rightarrow \quad c = 8$$

Por lo tanto, la suma de los denominadores es : $c + c = 16$ RPTA. D

7.- ¿Cuál es el M.C.D. y el m.c.m. de las siguientes fracciones :

$$f_1 = \frac{20}{45} \quad ; \quad f_2 = \frac{48}{72} \quad \wedge \quad f_3 = \frac{56}{63}$$

A) ***M.C.D. = 2/9***
m.c.m. = 8/3

B) ***M.C.D. = 2/9***
m.c.m. = 3/8

C) ***M.C.D. = 2/3***
m.c.m. = 8/9

D) ***M.C.D. = 2/3***
m.c.m. = 8/3

E) ***M.C.D. = 2/3***
m.c.m. = 9/3

Resolución.-

Simplificando las fracciones hasta hacerlas irreductibles , tendremos :

$$f_1 = \frac{4}{9} \quad : \quad f_2 = \frac{2}{3} \quad \wedge \quad f_3 = \frac{8}{9}$$

Luego : $\text{M.C.D.} = \dfrac{\text{M.C.D.}(4,2,8)}{\text{m.c.m.}(9,3,9)} = \boxed{\dfrac{2}{9}}$

$\text{m.c.m.} = \dfrac{\text{m.c.m.}(4,2,8)}{\text{M.C.D.}(9,3,9)} = \boxed{\dfrac{8}{3}}$ RPTA. A

9.5 EXPRESION DECIMAL DE UNA FRACCION

Se llama así al resultado de la división del numerador entre el denominador de una fracción. Por ejemplo, dada la fracción 7/8.

$$\begin{array}{r|l} 70 & \underline{\;8\;\;\;\;} \\ \underline{64} & 0{,}875 \\ 60 & \\ \underline{56} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ 00 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \text{Fracción} \\ \Downarrow \\ \dfrac{7}{8} = \underbrace{0{,}875} \\ \Uparrow \\ \text{EXPRESIÓN} \\ \text{DECIMAL} \end{array}$$

Parte entera
Parte decimal

De acuerdo al número de cifras de su parte decimal una expresión decimal puede ser :

9.5A. Exacta.- Cuando posee una cantidad limitada de cifras en la parte decimal.

$$* \ \frac{3}{4} = 0{,}25 \qquad\qquad * \ \frac{31}{8} = 3{,}875$$

9.5B. Inexacta.- Cuando posee infinitas cifras en la parte decimal. Además existe un grupo de ellas que se repite en forma ordenada y periódica (Periodo) . A su vez puede ser :

a) Periódica Pura : Cuando el periodo comienza inmediatamente después de la coma decimal.

$$* \ \frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots = 0{,}\widehat{45}$$

$$* \ \frac{40}{27} = 1{,}481481481\ldots = 1{,}\widehat{481}$$

b) Periódica Mixta : Cuando el periodo no comienza inmediatamente después de la coma decimal, sino luego de un conjunto de cifras que representan la parte no periódica.

$$* \ \frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots = 0{,}8\widehat{3}$$

$$* \ \frac{47}{22} = 2{,}1363636\ldots = 2{,}1\widehat{36}$$

9.6 EXPRESION DECIMAL A FRACCION

Convertir una expresión decimal a una fracción , es encontrar la fracción generatriz que dió origen a la expresión decimal analizada. Dicha fracción generatriz debe ser irreductible.

CASO 1 :

La fracción generatriz de una expresión decimal exacta se obtiene al simplificar la fracción cuyos términos respectivos son : la parte decimal y la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal. Veamos :

$$0,abc = \frac{\overline{abc}}{1000}$$

Ejemplos :

$$* \ 0,42 = \frac{42}{100} <> \underbrace{\frac{21}{50}}_{\text{Fracción generatriz}}$$

$$* \ 0,375 = \frac{375}{1000} <> \underbrace{\frac{3}{8}}_{\text{Fracción generatriz}}$$

CASO 2 :

La fracción generatriz de una *expresión decimal inexacta periódica pura* se obtiene al simplificar la fracción cuyos términos respectivos son : el período y un número formado por tantas cifras "9" como cifras tiene el período.

$$0,\widehat{abc} = \frac{\overline{abc}}{999}$$

Ejemplos :

$$* \ 0,\widehat{36} = \frac{36}{99} <> \underbrace{\frac{4}{11}}_{\text{Fracción generatriz}}$$

$$* \ 0,\widehat{081} = \frac{81}{999} <> \underbrace{\frac{3}{37}}_{\text{Fracción generatriz}}$$

CASO 3 :

La fracción generatriz de una expresión decimal inexacta periódica mixta se obtiene al simplificar la fracción cuyos términos respectivos son : La parte no periódica seguida del periodo, disminuída en la parte no periódica y un número formado por tantas cifras "9" como cifras tiene la parte no periódica y tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

$$0,abc\widehat{cde} = \frac{\overline{abcde} - \overline{ab}}{99900}$$

Ejemplos :

$$* \ 0,3\widehat{8} = \frac{38-3}{90} <> \overbrace{\frac{7}{18}}^{\text{Fracción generatriz}} \qquad * \ 0,2\widehat{46} = \frac{246-2}{990} <> \overbrace{\frac{122}{495}}^{\text{Fracc. Gener.}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO IV)

8.- Determinar las fracciones generatrices de cada una de las siguientes expresiones decimales :

(I) $2{,}36$ ***(II)*** $4{,}\widehat{27}$ ***(III)*** $5{,}8\widehat{3}$

Dar la suma de los numeradores.

A) 36 ***B) 151*** ***C) 159*** ***D) 141*** ***E) 139***

<u>Resolución</u>.-

Desdoblando cada número en parte entera y parte decimal ,tendremos :

(I) $2{,}36 = 2 + 0{,}36 = 2 + \dfrac{36}{100} = 2 + \dfrac{9}{25} = \dfrac{59}{25}$

Fracción generatriz

(II) $4,\widehat{27} = 4 + 0,\widehat{27} = 4 + \dfrac{27}{99} = 4 + \dfrac{3}{11} = \dfrac{47}{11}$

Fracción generatriz

(III) $4{,}8\widehat{3} = 5 + 0{,}8\widehat{3} = 5 + \dfrac{83-8}{90} = 5 + \dfrac{5}{6} = \dfrac{35}{6}$

Fracción generatriz

Luego la suma de los numeradores es : $59 + 47 + 35 = 141$ RPTA. D

En forma directa :

(I) $2{,}36 = \dfrac{236}{100} = \dfrac{59}{25}$ Fracción generatriz

(II) $4,\widehat{27} = \dfrac{427-4}{99} = \dfrac{423}{99} = \dfrac{47}{11}$ Fracción generatriz

(III) $5,\widehat{83} = \dfrac{583-58}{90} = \dfrac{525}{90} = \dfrac{35}{6}$ Fracción generatriz

Suma de numeradores : $59 + 47 + 35 = 141$ RPTA. D

9.- Simplificar : $$\frac{0{,}393939\ldots + 0{,}3060606\ldots}{2\dfrac{31}{42} + 0{,}024 \div 2{,}016}$$

Indicar la diferencia entre los términos de la fracción irreductible resultante.

A) 31 ***B) 41*** ***C) 82*** ***D) 40*** ***E) 62***

Resolución -

La expresión a simplificar es :

$$\frac{0.\widehat{39} + 0,\widehat{306}}{2\frac{31}{42} + 0,024 \div 2,016}$$

Expresando cada decimal como fracción ordinaria :

$$\frac{\frac{39}{99} + \frac{306-3}{990}}{\frac{115}{42} + \frac{24}{1000} \div \frac{2016}{1000}}$$

Simplificando :

$$\frac{\frac{13}{33} + \frac{101}{330}}{\frac{115}{42} + \frac{24}{1000} \times \frac{1000}{2016}}$$

Efectuando las operaciones indicadas :

$$\frac{\frac{231}{330}}{\frac{115}{42} + \frac{1}{84}}$$

Entonces al reducir y simplificar nos queda :

$$\frac{\frac{231}{330}}{\frac{231}{84}} = \frac{14}{55}$$

Por lo tanto : 55 - 14 = 41 RPTA. B

9.7 DETERMINACION A PRIORI DEL TIPO DE EXPRESION DECIMAL QUE ORIGINA UNA FRACCION

Bastará analizar el denominador de una fracción irreductible para predecir el tipo de expresión decimal que ella originará.

CASO 1 : Si en la descomposición canónica del denominador de una fracción irreductible solo aparecen los factores primos 2 y/o 5; entonces, dicha fracción originará una *expresión decimal exacta*. El número de cifras de la parte decimal estará indicado por el mayor exponente de 2 o de 5 que aparece en la descomposición.

Ejemplos :

* $f_1 = \dfrac{7}{2^4 \cdot 5^2}$ $\Rightarrow$ Origina una expresión decimal exacta con 4 cifras decimales

* $f_2 = \dfrac{15}{2^9}$ $\Rightarrow$ Origina una expresión decimal exacta con 9 cifras decimales

* $f_3 = \dfrac{4}{5^6}$ $\Rightarrow$ Origina una expresión decimal exacta con 6 cifras decimales

CASO 2 : Si en la descomposición canónica del denominador de una fracción irreductible no aparecen los factores primos 2 y 5; entonces, dicha fracción origina una *expresión decimal inexacta periódica pura*. La cantidad de cifras del periodo está indicada por la cantidad de cifras del menor número formado solo por cifras "9" que contiene exactamente al denominador.

Ejemplos :

* $f_4 = \dfrac{13}{37}$ $\Rightarrow$ Origina una expresión decimal inexacta periódica pura con 3 cifras en el periodo, pues : $999 = \overset{\circ}{37}$

* $f_5 = \dfrac{2}{7}$ $\Rightarrow$ Origina una expresión decimal inexacta periódica pura con 6 cifras en el periodo, pues : $999999 = \overset{\circ}{7}$

CASO 3 : Si en la descomposición canónica del denominador de una fracción irreductible aparecen los factores primos 2 y/o 5 y además otro(s) factor(s) diferente(s) de ellos entonces, dicha fracción originará una *expresión decimal inexacta periódica mixta*. La cantidad de cifras de la parte no periódica está indicada por el mayor exponente de 2 o de 5 que aparece en la composición y la cantidad de cifras del periodo se calcula por el método de los "nueves".

Ejemplos :

* $f_6 = \dfrac{19}{2^3 \cdot 5^5 \cdot 101}$ $\Rightarrow$ Origina una expresión decimal inexacta periódica mixta con 5 cifras en la parte no periódica y 4 cifras en el periodo, pues :$9999 = \overset{\circ}{101}$

* $f_7 = \dfrac{4}{2^4 \cdot 27}$ $\Rightarrow$ Origina una expresión decimal inexacta periódica mixta con 4 cifras en la parte no periódica y 3 cifras en el periodo, pues :$999 = \overset{\circ}{27}$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO V)

10.- Determinar el tipo de expresión decimal que origina la siguiente fracción :

$$f = \frac{1}{2^6 \ 5^4 \ 11 \ 3^3 \ 13 \ 101}$$

A) Inexacta periódica pura con 12 cifras en el periodo.

B) Inexacta periódica pura con 15 cifras en el periodo.

C) Inexacta periódica mixta con 6 cifras en la parte no periódica y 12 en el periodo.

D) Inexacta periódica mixta con 4 cifras en la parte no periódica y 12 en el periodo.

E) Inexacta periódica mixta con 4 cifras en la parte no periódica y 15 en el periodo.

Resolucion.-

Simplificando la fracción : $f = \dfrac{1}{2^6 \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 3^3 \ 13 \cdot 101}$

* Como el denominador contiene, aparte de 2 y 5, a otros factores, la fracción origina un expresión decimal inexacta periódica mixta.

* El mayor exponente de 2 ó 5 es 4, luego tiene 3 cifras en la parte no periódica.

* Analizando la cantidad de cifras que origina cada factor diferente de 2 y 5 :

$99 = \overset{\circ}{11} \quad \Rightarrow \quad$ 2 cifras en el periodo.

$999 = \overset{\circ}{\overline{3^3}} \quad \Rightarrow \quad$ 3 cifras en el periodo.

$999999 = \overset{\circ}{13} \quad \Rightarrow \quad$ 6 cifras en el periodo.

$9999 = \overset{\circ}{101} \quad \Rightarrow \quad$ 4 cifras en el periodo.

Luego, la cantidad de cifras del periodo es : m.c.m. (2 ; 3 ; 6 ; 4) = 12

Por lo tanto, "f" origina una expresión decimal :

Inexacta periódica mixta con 4 cifras en la parte no periódica y 12 cifras en el período. RPTA. d

11.- ¿Cuál es el período impropio que resulta duplicado, si se resta a sus dos términos, la mitad de su numerador?

A) 9/5 ***B) 5/2*** ***C) 7/2*** ***D) 3/2*** ***E) 5/3***

Resolución.-

Sea el quebrado : $f = \dfrac{a}{b}$

Por dato : $$\frac{a-\frac{a}{2}}{b-\frac{a}{2}} = 2\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{2a-a}{2}}{\frac{2b-a}{2}} = \frac{2a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2b-a} = \frac{2a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2b-a} = \frac{2}{b}$$

$$\Rightarrow \quad b = 4b - 2a$$

$$\Rightarrow \quad 2a = 3b$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{f = \frac{3}{2}}$$ RPTA. D

12.- El denominador excede al numerador de una fracción en la unidad. Si al denominador se le agrega 4 unidades, el resultado es 2 unidades menos que el triple de la fracción original. ¿Cuál es el numerador de la fracción original?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Resolución.-

La fracción será : $$f = \frac{a}{a+1}$$

Por dato : $$\frac{a}{a+1+4} = 3\left(\frac{a}{a+1}\right) - 2$$

Dando común denominador : $$\frac{a}{a+5} = \frac{3a-2(a+1)}{a+1}$$

$$\frac{a}{a+5} = \frac{a-2}{a+1}$$

Efectuando operaciones : $\boxed{a = 5}$ RPTA. C

13.- Hallar una fracción equivalente a 2/5 tal que el producto de sus términos sea igual a 640. Dar la suma de sus términos

A) 448 B) 312 C) 112 D) 56 E) 128

Resolución.-

Sea $f = a/b$ la fracción equivalente a 2/5. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 5k \end{cases}$ ... (*)

Por dato : $a \cdot b = 640$

De (*) : $(2k)(5k) = 640$

Efectuando : $k = 8$ ... (**)

Entonces al reemplazar (**) en (*), se tendrá : $a = 2(8) = 16$

$b = 5(8) = 40$

$\therefore$ $a + b = 56$ RPTA. D

14.- La fracción equivalente a 5/7, cuya diferencia de términos es 20, es representada por m/n; la fracción equivalente a 5/7, cuya suma de sus términos es 48 la representamos por p/q. Entonces m + q es :

A) 40 B) 48 C) 82 D) 78 E) 72

Resolución.-

m/n es la fracción equivalente a 5/7, cuya diferencia de términos es 20.

$$\frac{m}{n} <> \frac{5}{7} \Rightarrow m = 5a \wedge n = 7a$$

Para que la diferencia de m y n sea 20 : $a = 10$

Entonces : $m = 50 \wedge n = 70$

p/q es la fracción equivalente a 5/7, cuya suma de términos es 48.

$$\frac{p}{q} <> \frac{5}{7} \Rightarrow p = 5b \wedge q = 7b$$

Para que la suma de p y q sea 48 : $b = 4$

Entonces : $p = 20 \wedge q = 28$

$\therefore$ $m + q = 78$ RPTA. D

15.- Hallar una fracción equivalente a 693/945 tal que la suma de sus términos sea divisible entre 22 y sus términos, los menores enteros positivos posibles.

A) 88/154 B) 110/144 C) 121/165 D) 143/165 E) 121/143

Resolución.-

Sea : $f = a/b$ la fracción equivalente a 693/945 :

$$\frac{a}{b} <> \frac{693}{945} < \frac{11}{15} \Rightarrow a = 11k \wedge b = 15k$$

Por dato : $a + b = \overset{\circ}{22}$

$11k + 15k = \overset{\circ}{22}$

$26k = \overset{\circ}{22}$

$\Rightarrow \quad k = 11$

Para que la fracción tenga como términos a los menores enteros positivos posibles, $k = 11$:

$$f = \frac{11(11)}{15(11)} = \frac{121}{165}$$ RPTA. C

16.- ¿Cuántas fracciones con términos, numerador y denominador de tres y cuatro cifras respectivamente se reducen a 7/11?

A) 40 B) 50 C) 51 D) 52 E) 53

<u>Resolución</u>.-

Sea : $f = a/b$ la fracción que se reduce a 7/11

$$\frac{a}{b} <> \frac{7}{11} \quad \Rightarrow \quad a = 7k \ \wedge \ b = 11k$$

Como "a" es un número de 3 cifras : $100 \leq a \leq 999$

$100 \leq 7k \leq 999$

$14{,}3 \leq k \leq 142{,}7 \quad ... (1)$

Como "b" es un número de 4 cifras : $1000 \leq b \leq 9999$

$1000 \leq 11k \leq 9999$

$90{,}9 \leq k \leq 909 \quad ... (2)$

De (1) y (2) : $90{,}9 \leq k\ 142{,}7$

Entonces : $k \in \{91 ; 92 ; 93 ; . . . ; 142\}$

Luego "k" puede tomar : $142 - 90 = 52$ valores

$\therefore$ Existen 52 fracciones RPTA. D

17.- La suma de las fracciones irreductibles es 2 y la suma de sus numeradores es 30 ¿Cuántos pares de fracciones irreductibles de este tipo existen?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

<u>Resolución</u>.-

Sea un par de fracciones irreductibles : $f_1 = \dfrac{a}{b} \quad \wedge \quad f_2 = \dfrac{c}{d}$

Por datos : $f_1 + f_2 + = 2 \quad \wedge \quad a + c = 30$

Como la suma de f_1 y f_2 es un número entero, las fracciones son homogéneas; luego : $b = d$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = 2 \quad \wedge \quad a + c = 30$$

$$\frac{a+c}{b} = 2 \quad \wedge \quad a + c = 30$$

Luego : $b = 15$

Entonces a y c deben ser primos con 15, luego :

$$\begin{array}{cc} a & +\, c = 30 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 29 \\ 2 & 28 \\ 4 & 26 \\ 7 & 23 \\ 8 & 22 \\ 11 & 19 \\ 13 & 17 \\ 14 & 16 \end{array}$$

$\therefore$ **Existen 8 pares** RPTA. D

18.- Simplificar : $E = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$

A) $\frac{n}{n+2}$ *B)* $\frac{n+1}{n+2}$ *C)* $\frac{n}{n+1}$ *D)* $\frac{n-1}{n}$ *E)* $\frac{2n+1}{n+1}$

<u>Resolución</u>.-

Expresando y efectuando en forma conveniente :

$$E = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots \frac{1}{n(n+1)}$$

$$E = 1 + \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \frac{4-3}{3\cdot 2} + \frac{5-4}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)}$$

$$E = 1 + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Simplificando : $E = 2 - \frac{1}{n+1}$

$\therefore$ $\boxed{E = \frac{2n+1}{n+1}}$ RPTA. E

19.- Descomponer la fracción 101/110 en otras dos que tengan como denominadores a 5 y 22. Dar la suma de los numeradores de las fracciones.

A) 12 ***B) 11*** ***C) 10*** ***D) 14*** ***E) 15***

Resolución.-

la ecuación quedará : $$\frac{101}{110} = \frac{a}{5} + \frac{b}{22}$$

Dando común denominador : $$\frac{101}{110} = \frac{22a+5b}{110}$$

$$\Rightarrow \quad 101 = 22a + 5b \qquad \dots (1)$$

Para resolver la ecuación diofántica (1) aplicamos múltiplos de 5 :

$$\overset{\circ}{5} + 1 = \overset{\circ}{5} + 2a + \overset{\circ}{5}$$

$$\overset{\circ}{5} = 2a - 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = 3$$

Reemplazando en (1) : $$101 = 22(3) + 5b \qquad \Rightarrow \qquad b = 7$$

$$\therefore \quad \boxed{a + b = 10} \qquad \text{RPTA. C}$$

20.- ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles cuyo denominador es 1008 existen?

A) 144 ***B) 288*** ***C) 216*** ***D) 244*** ***E) 324***

Resolución.-

Las fracciones son de la forma : $f = \frac{N}{1008}$

Si "f" es propia : N < 1008

Si "f" es irreductible : N es primo con 1008

La cantidad de valores de N que sean menores que 1008 y primos con él, se obtiene por la función de Euler, vista en el capítulo VI.

Descomponiendo canónicamente : 1008 = 24 . 32 . 71

Entonces la cantidad de valores de N es : $$1008\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = 288$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{Existen } 288 \text{ fracciones}} \qquad \text{RPTA. B}$$

21.- Hace 5 años habían en un pueblo 132000 vacas que es igual a los 11/12 de la cantidad que hay actualmente. Hallar el crecimiento promedio anual.

A) 4000 ***B) 4100*** ***C) 2400*** ***D) 6000*** ***E) 3600***

Resolución.-

Sea "N" la cantidad de vacas que hay actualmente, entonces, según el dato :

$$132000 = \frac{11}{12} \cdot N$$

$$\Rightarrow \qquad N = 144000$$

Esto quiere decir que en 5 años han aumentado en : $144000 - 132000 = 12000$

Por lo tanto, el crecimiento promedio anual fue : $\frac{12000}{5} = \boxed{2400}$ RPTA. C

22.- Si gastara los 2/5 de lo que tengo y diera una limosna de S/. 36, me quedaría los 3/7 de lo que tengo ¿Cuánto tengo?

A) S/. 1260 B) S/. 72 C) S/. 66 D) S/. 420 E) S/. 210

Resolución.-

Sea "N" lo que tengo : $\left(N - \frac{2}{5}N\right) - 36 = \frac{3}{7}N$

Efectuando : $N - \frac{2}{5}N - \frac{3}{7}N = 36$

$$\frac{35N - 14N - 15N}{35} = 36$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{N = 210} \qquad \text{RPTA. E}$$

23.- Juan le dijo a Pedro : "Si se restan 13 años y 1/3 de año del duplo de mi edad en 1980, resulta los 3/4 más los 5/6 de la misma" ¿En qué año nació Juan?

A) 1958 B) 1968 C) 1948 D) 1949 E) 1959

Resolución.-

Llamando "N" a la edad de Juan en 1980, el dato quedaría : $2N - 13\frac{1}{3} = \frac{3}{4}N + \frac{5}{6}N$

Efectuando : $2N - \frac{3}{4}N - \frac{5}{6}N = 13\frac{1}{3}$

$$\frac{24N - 9N - 10N}{12} = \frac{40}{3}$$

$$\frac{5N}{12} = \frac{40}{3}$$

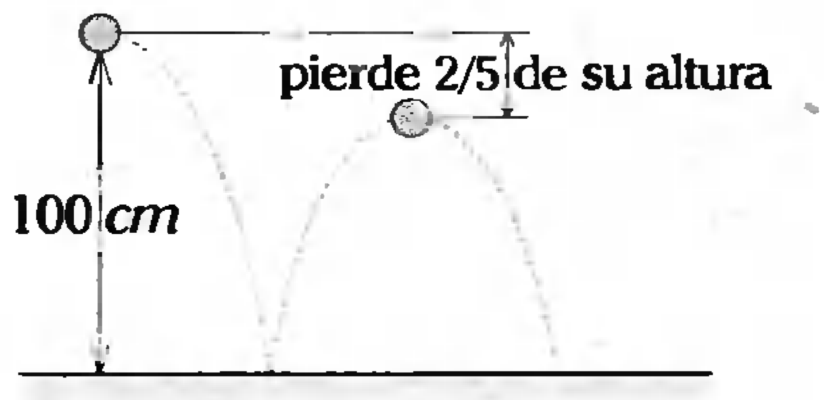
$$\Rightarrow \qquad N = 32$$

Por lo tanto, Juan nació en : $1980 - 32 = \boxed{1948}$ RPTA. C

24.- Una pelota pierde las 2/5 partes de su altura en cada rebote que da; si se deja caer desde un metro de altura. ¿Qué altura alcanzará después del tercer rebote?

A) 51,20 cm ***B) 36 cm*** ***C) 6,40 cm*** ***D) 21,60 cm*** ***E) 12,96 cm***

Resolución.-



Nótese que, si pierde las 2/5 partes de su altura, solo se eleva los 3/5 de altura de la cual cayó.

Después del primer rebote se eleva : $\frac{3}{5}\,(100\,cm)$

Luego del segundo rebote se eleva : $\frac{3}{5}\left[\frac{3}{5}\,(100\,cm)\right]$

Por lo tanto, después del tercer rebote se eleva :

$$\frac{3}{5}\left\{\frac{3}{5}\left[\frac{3}{5}(100cm)\right]\right\} = \boxed{21{,}60\ cm} \qquad \text{RPTA. D}$$

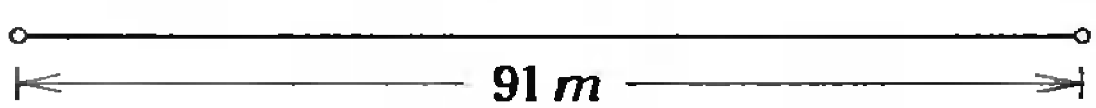
Tercer rebote
Segundo rebote
Primer rebote

25.- Un alambre de 91 m de longitud se corta en 4 trozos, de modo que cada trozo tiene una longitud igual a la del trozo anterior aumentada en su mitad. ¿Cuál es la longitud, en metros del trozo más corto?

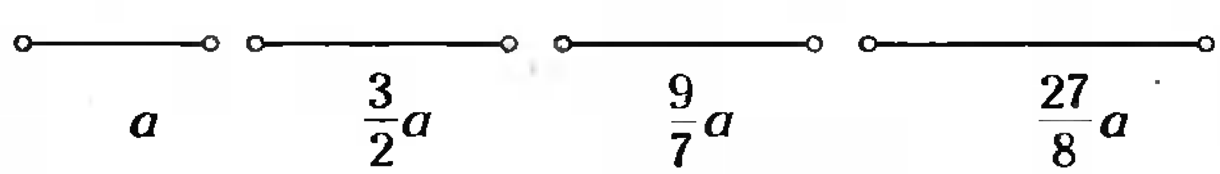
A) 7,20 ***B) 11,20*** ***C) 10,60*** ***D) 25,20*** ***E) 16,40***

Resolución.-

El alambre de 91 m de longitud :



Se corta en 4 pedazos donde cada trozo mide, según los datos :



Luego : $$a + \frac{3a}{2} + \frac{9a}{4} + \frac{27a}{8} = 91$$

Efectuando : $\dfrac{8a+12a+18a+27a}{8} = 91$

Reduciendo : $\dfrac{65a}{8} = 91$

$\therefore \quad \boxed{a = 11{,}20\ cm}$ RPTA. B

26.- Los obreros A, B y C hacen una obra en 18 días, pero se sabe que A y B hacen la misma obra en 30 días ¿En cuántos días hace la obra "C" trabajando solo?

A) 50 B) 60 C) 90 D) 84 E) 45

<u>Resolución</u>.-

A, B y C hacen la obra en 18 días, luego, en 1 día y en conjunto, hacen 1/18 de la obra.

A y B hacen la obra en 30 días, luego, en 1 día hacen 1/30 de la obra.

Entonces C en 1 día hace : $\dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{30} = \dfrac{1}{45}$ de la obra

Por lo tanto , C hace la obra en : $\boxed{45\ días}$ RPTA. E

27.- Un caño llena un estanque en 20 horas, otro en 8 horas y un desagüe puede vaciarlo en 10 horas. Si a las 8h se abren los dos caños y recién a las 10 horas se abre el desagüe. ¿A qué hora se llenará el estanque?

A) 11:30 min B) 14:40 min C) 8:40 min D) 16:40 min E) 18:40 min

<u>Resolución</u>.-

Si el primer caño llena el estanque en 20 horas, entonces, en 1 hora llena 1/20 del estanque.

El segundo caño llena el estanque en 8 horas, entonces, en 1 hora llena 1/8 del estanque.

El desagüe vacía todo el estanque en 10 horas, entonces, en 1 hora vacía 1/10 del estanque.

De este modo en 1 hora, los dos caños llenan : $\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{2+5}{40} = \dfrac{7}{40}$ del estanque

Luego desde las 8 horas hasta las 10 horas, es decir en 2 horas, los dos caños han llenado.

$$2\left(\frac{7}{40}\right) = \frac{7}{20} \text{ del estanque}$$

Entonces falta llenar : $\dfrac{13}{20}$ del estanque.

Si ahora entran en funcionamiento los dos caños y el desagüe, en 1 hora se llenará :

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{2+5-4}{40} = \frac{3}{40} \text{ del estanque}$$

Para llenar lo que falta del estanque (13/20), demorarán : $\dfrac{\frac{13}{23}}{\frac{3}{40}} = \dfrac{26}{3}$ *horas* $= 8\,h\ 40\,min$

Por lo tanto, se termina de llenar a las : $10\,h + 8\,h\ 40\,min = 18\,h\ 40\,min$ RPTA. E

28.- Una madre y su hija limpian una casa. Juntas lo harían en 15 días : trabajan juntas 6 días y la hija hace el resto en 30 días. ¿Qué tiempo hubiese necesitado cada una separadamente en hacer dicho trabajo? Dar la suma de estos tiempos (en días).

A) 50 ***B)*** $21\frac{3}{7}$ ***C)*** $61\frac{3}{7}$ ***D)*** $41\frac{3}{7}$ ***E)*** $71\frac{3}{7}$

Resolución.-

La madre y la hija limpian la casa en 15 días, luego en 1 día y en conjunto limpian 1/15 de la casa, luego en 6 días limpiarán :

$$6\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} \text{ de la casa}$$

Esto significa que falta limpiar los 3/5 de la casa . Si la hija lo hace en 30 días, en 1 día limpia :

$$\frac{\frac{3}{5}}{30} = \frac{1}{50} \text{ de la casa}$$

Luego la hija trabajando sola limpia la casa en 50 días .

Por lo tanto, la madre en 1 día limpia : $\dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{50} = \dfrac{7}{150}$ de la casa

Luego la madre trabajando sola lo hace en $\dfrac{150}{7} = 21\dfrac{3}{7}$ días.

$$\therefore \quad 50 + 31\frac{3}{7} = 71\frac{3}{7} \text{ días} \qquad \text{RPTA. E}$$

29.- Dos grupos de obreros podrían hacer un trabajo : Uno en 15 días y el otro en 10 días. Se toma 3/5 del primero y 2/3 del segundo ¿En cuántos dias acabaran el trabajo?

A) 9 ***B) 9,5*** ***C) 9,375*** ***D) 10,25*** ***E) 7,125***

Resolución.-

Si el primer grupo puede hacer el trabajo en 15 días, luego en 1 día hace 1/15 del trabajo. Entonces en 1 día los 3/5 del primer grupo harán :

$$\frac{3}{5}\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{1}{25} \text{ del trabajo}$$

Si el segundo grupo puede hacer el trabajo en 10 días, en 1 día harán 1/10 del trabajo. Entonces en 1 día los 2/3 del segundo grupo harán :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{15} \text{ del trabajo}$$

Esto significa que en 1 día ,los 3/5 del primer grupo y los 2/3 del segundo hacen :

$$\frac{1}{25}+\frac{1}{15}=\frac{8}{75} \text{ del trabajo}$$

Por lo tanto acabarán el trabajo en : $\frac{75}{8}=\boxed{9{,}375\ \textit{días}}$ RPTA. C

30.- ¿Cuál es el producto de las fracciones decimales periódicas : 0,222 . . . y 0,818181 . . .?

A) $0,\widehat{28}$ ***B)*** $0,\widehat{16}$ ***C) 3,2*** ***D)*** $0,\hat{8}$ ***E)*** $0,\widehat{18}$

Resolución.-

Debe calcularse el producto de : $(0,\hat{2})\times(0,\widehat{81})$

Reemplazando cada uno por su generatriz : $\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{9}{11}\right)=\frac{2}{11}$

$$\therefore \quad \boxed{(0,\hat{2})\,(0,\widehat{81})=0,\widehat{18}} \qquad \text{RPTA. E}$$

31.- Hallar el cuadrado de la raíz cúbica de : 0,296296296 . . .

A) 0,1/9 ***B)*** $\widehat{16}$***/25*** ***C) 9/4*** ***D) 4/9*** ***E) 16/81***

Resolución.-

Calculando la fracción generatriz de la expresión decimal dada :

$$0{,}296296296... = 0,\widehat{296}=\frac{296}{999}=\frac{8}{27}$$

Fracción generatriz

Su raíz cúbica es : $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$

Entonces, el cuadrado de la raiz cúbica es : $\boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}}$ RPTA. D

32.- La operación : $\left(\sqrt{0{,}91666...}+\sqrt{3{,}666...}\right)^2$***, es igual a :***

A) 8,20 ***B) 8,24*** ***C) 8,21*** ***D) 8,22*** ***E) 8,25***

Resolución.-

Convirtiendo cada expresión decimal a fracción ordinaria :

$$0{,}91666\ldots = 0{,}91\bar{6} = \frac{916-91}{900} = \frac{11}{12}$$

$$3{,}666\ldots = 3{,}\bar{6} = \frac{36-3}{9} = \frac{11}{3}$$

Luego :
$$\left(\sqrt{0{,}91666\ldots}+\sqrt{3{,}666\ldots}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{11}{12}}+\sqrt{\frac{11}{3}}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{\frac{11}{12}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{\frac{11}{12}}\right)\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right) + \left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right)^2$$

$$= \frac{11}{12} + 2\left(\frac{11}{6}\right) + \frac{11}{3}$$

$$= \frac{11}{12} + \frac{11}{3} + \frac{11}{3}$$

Dando común denominador :
$$= \frac{11+44+44}{12}$$

$$= \frac{99}{12}$$

$$= \frac{33}{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{\left(\sqrt{0{,}91666\ldots}+\sqrt{3{,}666\ldots}\right)^2 = 8{,}25} \quad \text{RPTA. E}$$

33.- Calcular (a + b) si : $0{,}a\bar{b} + 0{,}b\bar{a} = 1{,}\bar{4}$

A) 10 ***B) 12*** ***C) 13*** ***D) 14*** ***E) 15***

Resolución.-

Convirtiendo cada decimal a fracción ordinaria :

$$\frac{\overline{ab}-a}{90} + \frac{\overline{ba}-b}{90} = \frac{14-1}{9}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{10a+b-a-10b+a-b}{90} = \frac{13}{9}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{10(a+b)}{90} = \frac{13}{9}$$

$$\therefore \quad \boxed{a + b = 13} \quad \text{RPTA. C}$$

34.- Hallar la fracción equivalente a $1,041\widehat{6}$ tal que la suma de sus términos sea múltiplo de 42 comprendida entre 500 y 600. Dar la diferencia de términos.

A) 12 B) 8 C) 9 D) 10 E) 6

Resolución.-

Calculando la fracción generatriz :

Fracción generatriz

$$1,041\widehat{6} = \frac{10416-1041}{9000} = \frac{9375}{9000} <> \frac{25}{24}$$

Si: $f = a/b$ es equivalente a 25/24 , se tendrá que : $a = 25k \wedge b = 24k$

Como : $a + b = \overset{o}{42} \quad \wedge \quad 500 < a + b < 600$

$25k + 24k = \overset{o}{42} \quad \wedge \quad 500 < 25k + 24k - 600$

$49 = \overset{o}{42} \quad \wedge \quad 500 < 49k - 600$

$k = \overset{o}{6} \quad \wedge \quad 10,2 < k < 12,2$

Luego : $k = 12$

Por lo tanto : $\boxed{f = \dfrac{25(12)}{24(12)} = \dfrac{300}{288}}$ RPTA. A

35.- Hallar la última cifra del periodo originado por : $f = \dfrac{3}{47^{47}}$

A) 1 B) 3 C) 7 D) 9 E) 5

Resolución.-

Como el denominador no contiene a 2 ni a 5, "f" origina una expresión decimal periódica pura.

$$f = \frac{3}{47^{47}} = 0,\widehat{abc\ldots n} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{47^{47}} = \frac{\overline{abc\ldots n}}{999\ldots9}$$

$$\Rightarrow \quad 3(999\ldots9) = \left(47^{47}\right)(\overline{abc\ldots n}) \quad \ldots (*)$$

Analizando por restos potenciales en qué cifra termina 47^{47}, tendremos :

$$\left.\begin{array}{l} 47 = \ldots 7 \\ 47^2 = \ldots 9 \\ 47^3 = \ldots 3 \\ 47^4 = \ldots 1 \end{array}\right\} \quad g = 4 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 47^{4+1} = \ldots 7 \\ 47^{4+2} = \ldots 9 \\ 47^{4+3} = \ldots 3 \\ 47^{4} = \ldots 1 \end{array}\right.$$

Luego podemos deducir que : $47^{47} = 47^{\overset{\circ}{4}+3} = \ldots 3$

Ahora al sustituir en (*) : $3(\ldots 9) = (\ldots 3)(\ldots n)$

$$\ldots 7 = (\ldots 3)(\ldots n)$$

$\therefore$ $\boxed{n = 9}$ RPTA. D

36.- ¿Cuántas fracciones periódicas puras de 2 cifras en el período existen entre 1/5 y 1/3?

A) 9 ***B) 10*** ***C) 11*** ***D) 12*** ***E) 13***

Resolución.-

Para que estén comprendidas entre 1/5 y 1/3, las expresiones decimales dadas deben ser propias, luego :

$$\frac{1}{5} < 0,\widehat{ab} < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{5} < \frac{\overline{ab}}{99} < \frac{1}{3}$$

Multiplicando por 99 : $\dfrac{99}{5} < \dfrac{99\,\overline{ab}}{99} < \dfrac{99}{3}$

$$19,8 < \overline{ab} < 33$$

Esto significa que : $\overline{ab} \in \{20\,;21\,;22\,;\ \ldots\ ;32\}$

De este conjunto 22 sería el único que no satisface la condición dada, pues la expresión decimal sería : $0,\widehat{22} = 0,222222\ldots 0,\bar{2}$ (una sola cifra en el período)

$\therefore$ $\boxed{\text{Existen : } (32 - 19) - 1 = 12 \text{ fracciones}}$ RPTA. D

37.- Determine la cantidad de cifras de la parte no periódica de la fracción :

$$f = \frac{25600}{64! - 32!}$$

A) 19 ***B) 20*** ***C) 21*** ***D) 22*** ***E) 23***

Resolución.-

Si descomponemos canónicamente a 64 ! y a 32!, de acuerdo con el capítulo VI :

$$64\,! = 2^{63} \times 5^{14} \times \ \ldots$$

$$32\,! = 2^{31} \times 5^{7} \times \ \ldots$$

Luego : $f = \dfrac{25600}{64! - 32!} = \dfrac{2^{10} \cdot 5^{2}}{2^{63} \cdot 5^{14} \ldots - 2^{31} \cdot 5^{7} \ldots}$

Factorizando el denominador : $f = \dfrac{2^{10}.5^{2}}{2^{31}.5^{5}.(\quad)} = \dfrac{1}{\underbrace{2^{21}\cdot 5^{5}}_{\text{origina la parte no periódica}}[\quad]}$

Por lo tanto, en la parte no periódica hay : **21 cifras** RPTA. C

38.- *Hallar una fracción propia irreductible de denominador 22 tal que la cifra no periódica sea igual a la suma de las cifras del período. Dar como respuesta la suma de las cifras del numerador.*

A) 3 ***B) 4*** ***C) 5*** ***D) 6*** ***E) 7***

Resolución.-

Como el denominador es 2^2 $(= 2^1 \cdot 11)$, la fracción origina una expresión decimal periódica mixta con una cifra en la parte no periódica y 2 en el período pues : $99 = \overset{o}{11}$.

Luego se puede establecer que : $f = \dfrac{N}{22} = 0\,a\widehat{bc}$ ... (1)

Donde, por condición del problema : $a = b + c$

Reemplazando en (1) : $\dfrac{N}{22} = \dfrac{\overline{abc} - a}{990}$

Efectuando en aspa : $45\,N = \overline{abc} - a$

Descomponiendo polinómicamente : $45\,N = 100\,a + 10\,b + c - a$

$\Rightarrow \quad 45\,N = 100\,a + 9\,b + \underbrace{b + c}_{a} - a$

$\Rightarrow \quad 45\,N = 100\,a + 9\,b \ldots (2)$

Aplicando en (2) divisibilidad entre 9 : $\overset{o}{9} = \overset{o}{9} + a + \overset{o}{9} \quad \Rightarrow \quad a = 9$

Aplicando en (2) divisibilidad entre 5 : $\overset{o}{5} = \overset{o}{5} + \overset{o}{5} - b \quad \Rightarrow \quad b = 5$

Luego se puede deducir que : $c = 4$

Finalmente en (2) : $45\,N = 100\,(9) + 9\,(5)$

$\therefore$ **N = 21** RPTA. A

39.- *Obtener una fracción irreductible cuyo numerador sea 675, tal que convertida a una expresión decimal se obtiene un decimal periódico mixto con 2 cifras en la parte no periódica y 3 cifras en el periodo. Dar la suma de cifras del denominador.*

A) 12 ***B) 13*** ***C) 14*** ***D) 15*** ***E) 16***

Resolución.-

La fracción irreductible quedará : $f = \dfrac{675}{D} = p,ab\widehat{cde}$

$$\Rightarrow \quad \frac{5^3 \cdot 3^3}{D} = p,ab\widehat{cde}$$

Para que admita 2 cifras en la parte no periódica, en la descomposición canónica debe aparecer 2^2 y/o 5^2.

Para que tenga 3 cifras en el período, el denominador debe ser divisible entre 3^3 y/ o 37

Así para que "f" sea irreductible se debe cumplir que : $D = 2^2 \,.\, 37 = 148$ RPTA.B

40.- Hallar la menor fracción mayor que 5/12 tal que al sumar "n" veces el denominador al numerador y "n" veces el numerador al denominador se obtiene como resultado 2.

A) 5/17 ***B) 8/19*** ***C) 3/17*** ***D) 5/19*** ***E) 3/19***

Resolución.-

Sea la fracción : $f = \dfrac{a}{b}$

Por condición del problema : $\dfrac{a+nb}{b+na} = 2$

$$\Rightarrow \quad a + nb = 2b + 2na$$

$$\Rightarrow \quad a - 2na = 2b - nb$$

$$\Rightarrow \quad a(1 - 2n) = b(2 - n) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{2-n}{1-2n}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{n-2}{2n-1}$$

Como la fracción es mayor que 5/12 : $\dfrac{n-2}{2n-1} > \dfrac{5}{12}$

$$\Rightarrow \quad 12n - 24 > 10n - 5$$

$$\Rightarrow \quad 2n > 19$$

$$\Rightarrow \quad n > 9,5$$

Para hallar la menor fracción $n = 10$: $f = \dfrac{10-2}{2(10)-1} = \dfrac{8}{19}$ RPTA. B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- ¿Cuánto le falta a 3/7 para ser igual a los 3/5 de 13/21 de 2/3 de 5/14 de 7?

A) 4/9 B) 3/21 C) 7/9 D) 4/21 E) 11/9

2.- Los 3/4 de un barril más 7 litros es petróleo y 1/3 del barril menos unos 20 litros de agua. ¿Cuántos litros son de petróleo?

A) 123 B) 112 C) 134 D) 156 E) 154

3.- Hallar una fracción que no cambia su valor al sumar 5 unidades a su numerador y 9 unidades a su denominador.

A) 5/29 B) 15/28 C) 15/27

D) 16/27 E) N.A.

4.- Encontrar un número racional comprendido entre 2/13 y 41/52 cuya distancia al primero sea el doble de la distancia del segundo.

A) 11/52 B) 19/52 C) 49/104

D) 15/26 E) 9/13

5.- La fracción 23/55 está comprendida en 2 fracciones homogéneas cuyo denominador común es 19 y los numeradores son 2 enteros consecutivos. Hallar estos números

A) 6 y 7 B) 8 y 9 C) 20 y 21

D) 7 y 8 E) 19/20

6.- Un automovilista observa que 1/5 de lo recorrido equivale a los 3/5 de lo que le falta recorrer. ¿Cuántas horas habrán empleado hasta el momento si todo el viaje lo hará en 12 horas?

A) 9 B) 7 C) 5 D) 4 E) 2

7.- Un alumno hizo 1/12 de su tarea en la mañana. ¿Qué fracción de lo que queda, debe hacer en la tarde, para terminar los 2/3 de dicha tarea?

A) 2/5 B) 7/12 C) 7/9 D) 7/11 E) 7/8

8.- A y B pueden hacer una obra en 3 días, B y C en 6 días y A y C en 5 días. ¿En cuántos días puede hacer la obra C trabajando solo?

A) $6\frac{2}{3}$ B) $5\frac{5}{11}$ C) 60 D) 30 E) 20

9.- Un tejido pierde en cada lavada 1/20 de largo y 1/19 de su ancho. Determinar cuántos metros cuadrados de estas tela deben comprarse para que después de 2 lavados quedo: 40,50 m^2

A) 45 B) 46 C) 48 D) 50 E) 60

10.- Un vagón lleno de carbón pesa 3 720 kg. ¿Cuándo contiene los 5/8 de su capacidad pesa 95/124 del peso anterior?. Hallar el peso del vagón vacío.

A) 1200 kg B) 1400 kg C) 1440 kg

D) 1520 kg E) 1560 kg

11.- De un tonel que contiene 225 litros de vino se sacan 45 litros y se reemplazan por agua. Se hace lo mismo con la mezcla del tonel por segunda y tercera vez ¿Qué cantidad de vino queda después de la tercera operación?

A) 110 B) 117.2 C) 115.2 D) 120 E) 25

12.- Un comerciante vende 1/3 de su mercadería perdiendo 1/7 de su costo. ¿Cuánto debe ganar en las partes restantes si en toda la mercadería quiere ganar 1/5 de su costo?

A) 13/35 B) 17/35 C) 19/35

D) 23/35 E) 27/35

13.- La fortuna de un comerciante asciende en la actualidad a $ 540 000. Durante 3 años consecutivos ha aumentado cada año la mitad de lo que era al principio de año. ¿Cuál ha sido la fortuna primitiva?

A) $240000 B) $300000 C) $160000

D) $270000 E) $180000

14.- Se tiene 4 volúmenes de hielo tales como: V_1, V_2, V_3, V_4. Si el volumen del primero es los 4/5 del volumen del segundo, el volumen del segundo es los 3/4 del volumen del tercero y el volumen del tercero es los 5/8 del volumen del cuarto. Determinar qué fracción es V_4 de V_1.

A) 3/8 B) 8/3 C) 10/3 D) 24/5 E) 12/5

15.- Tres personas deciden repartirse una herencia, a la primera le corresponde los 3/11 del total; y las otras dos se reparten el resto. La segunda gasta los 4/13 de su parte y la tercera gasta \$ 300, quedándoles a los tres sumas iguales. ¿A cuánto ascendía la herencia?

A) \$ 5500 B) \$ 4950 C) \$ 7150
D) \$ 5005 E) \$ 5720

16.- Un jugador después de ir ganando los 3/5 de lo que tenía al empezar el juego, pierde los 2/3 de lo que había ganado, luego pierde 1/3 de lo que tenía en ese instante y por último gana 1/4 de lo que tiene con lo cual se retira del juego con \$ 4832. Determinar con cuánto dinero empezó a jugar.

A) \$ 5346 B) \$ 6845 C) \$ 3565
D) 4832 E) \$ 5237

17.- Una tubería "A" puede llenar un estanque en 6 horas y otra tubería "B" de desagüe la puede vaciar en 8 horas; estando vacío el estanque se abre "A" a las 8 *a.m* y recién a las 10 a.m se abre "B" funcionando así las dos. ¿A qué hora se llenará el estanque?

A) 4 *a.m* del día siguiente

B) 6 *a.m* del día siguiente

C) 8 *a.m* del día siguiente

D) 10 *p.m* del mismo día E) N.A.

18.- Un granjero ha llevado a la ciudad cierta cantidad de gallinas. Vende primero 5 gallinas, al segundo cliente la mitad de las que le quedan, al tercer cliente le vende los 3/4 de las gallinas que le restaban y al último cliente la 1/3 parte de las que aún habían. ¿Cuántas gallinas llevó a la ciudad si le quedó 5 gallinas ?

A) 139 B) 293 C) 273 D) 199 E) 149

19.- Un recipiente está lleno hasta 7/9 de su capacidad, se extrae una cantidad de agua que es igual a los 3/4 de lo que queda. La cantidad de agua que se ha extraído. ¿Qué fracción de la cantidad del recipiente representa?

A) 3/25 B) 3/4 C) 1/4 D) 7/12 E) 1/3

20.- Averiguar en qué día y hora del mes de Abril de un año bisiesto se cumplió que la fracción transcurrida del mes es igual a la fracción transcurrida del año.

A) 9 de Abril a las 5 *p.m*

B) 8 de Abril a las 12

C) 9 de Abril a las 3 *a.m*

D) 8 de Abril a las 3 *a.m* E) N.A.

21.- Simplificar : $E = \sqrt{\dfrac{0{,}2\widehat{4}}{0{,}42} \times 1{,}\widehat{90} - 0{,}\widehat{6}}$

A) $0{,}\widehat{6}$ B) $0{,}\bar{4}$ C) $0{,}\bar{5}$ D) $0{,}\widehat{8}$ E) $0{,}\bar{7}$

22.- ¿En cuánto excede la fracción decimal periódica mixta 0,43737 . . . a la fracción decimal periódica mixta 0,21515?

A) 3/11 B) 4/11 C) 5/9 D) 4/9 E) 2/9

23.- ¿Cuánto le falta a los 2/3 de los 9/10 de los 5/6 de 0,04545 . . . para ser igual a la mitad de los 5/8 de los 10/11 de 0,21333 . . . ?

A) 1/22 B) 1/33 C) 1/32 D) 7/132 E) 5/132

24.- Hallar la suma de los términos de una fracción equivalente a 4/11 si al sumarle 11 a cada término se obtiene 0,52272727 . . .

A) 30 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

25.- Simplificar : $S = \dfrac{7{,}2727\ldots}{63{,}6363\ldots} + \dfrac{22222}{77777}$

A) 1 B) 1/2 C) 3/4 D) 0,4 [illegible]

26.- Hallar : $a + b$

Sabiendo que : a y $b \in \mathbb{N}$

Tal que : $a/11 + b/5 = 1.03636\ldots$

A) 9 B) 11 C) 7 D) 6 E) 8

27.- La expresión : $\left(\sqrt[3]{1,74545}-\sqrt[3]{0,517171}\right)$, es igual a :

A) $0,\widehat{64}$ B) $0,\widehat{54}$ C) $0,\widehat{54}$
D) $0,0646$ E) $0,0\widehat{64}$

28.- Hallar el menor número "n" tal que al sumarlo y restarlo al denominador de la fracción generatriz de $0,\widehat{148}$ se convierte en fracción impropia.

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

29.- ¿Cuántas fracciones impropias existen de términos impares consecutivos que sean mayores que $1,\widehat{136}$?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 9

30.- El período de una fracción de denominador 11 es de 2 cifras, que se diferencian en 5 unidades. Hallar la suma de los términos de dicha fracción si es la mayor posible.

A) 17 B) 19 C) 15 D) 14 E) 18

31.- ¿Cuántas fracciones de denominador 120, irreductibles y que estén comprendidas entre 4/5 y 11/12 existen?

A) 8 B) 5 C) 11 D) 15 E) 13

32.- Hallar dos fracciones que tengan denominadores 13 y por numerador 2 números consecutivos que comprendan entre ellos a la fracción decimal 0,15454 . . .
Dar como respuesta la suma de las fracciones.

A) 2/13 B) 4/13 C) 5/13 D) 9/13 E) 3/13

33.- ¿Cuántas fracciones equivalentes a $0,0\widehat{45}$, existen tales que su numerador sea un número de 2 cifras y su denominador un número de 3 cifras?

A) 36 B) 35 C) 40 D) 41 E) 42

34.- Hallar las dos últimas cifras del período que origina la fracción 3/47.

A) 23 B) 31 C) 51 D) 34 E) 12

35.- Si : $\dfrac{0,\widehat{ab}+0,\widehat{bc}+0,\widehat{cd}}{0,\widehat{abc}}=4,\bar{1}$;

hallar el máximo valor de $a\times b\times c$

A) 24 B) 56 C) 144 D) 192 E) 196

36.- Si a dos términos de una fracción propia e irreductible se le suma el denominador y el denominador queda aumentado en $0,14\bar{2}$. Hallar la suma de los términos de la fracción inicial. Dar como respuesta la suma de las fracciones.

A) 15 B) 12 C) 37 D) 23 E) 16

37.- A una fracción positiva irreductible se le multiplica por 5 y luego la fracción original se divide entre 7. El producto de las dos fracciones resultantes es $3,\bar{8}$.
Hallar la suma de los términos de la fracción original.

A) 8 B) 4 C) 10 D) 12 E) 16

38.- Determinar una fracción propia irreductible, cuyo denominador es 37 y que reducida a un número decimal origina un periódico puro que tiene sus tres cifras en progresión aritmética creciente de razón igual a 2 en el periodo.

A) $\dfrac{23}{37}$ B) $\dfrac{5}{37}$ C) $\dfrac{8}{37}$ D) $\dfrac{6}{37}$ E) $\dfrac{21}{37}$

39.- ¿Cuántas fracciones impropias o irreductibles cuyo denominador es 12 existen tales que sean menores que 63/17?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 9 E) 10

40.- Encontrar dos fracciones que tengan por denominadores al número 13 y por numeradores, dos números enteros consecutivos y tales que comprendan entre ellos a la fracción 17/110. Dar como respuesta la suma de sus numeradores

A) 15 B) 13 C) 11 D) 9 E) 5

10 POTENCIACION

10.1 DEFINICION

La potenciación es aquella operación aritmética que consiste en encontrar el producto de una misma cantidad, llamada *base*, tantas veces como lo indica otra llamada *exponente*.

$$N^k = P \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{N \cdot N \cdot N \cdot \ldots \cdot N}_{\text{"}k\text{" factores}} = P$$

Donde : $N \Rightarrow$ Base $\in \mathbb{Z}$

$k \Rightarrow$ Exponente $\in \mathbb{N}$

$P \Rightarrow$ Potencia $\in \mathbb{Z}$

10.1A CUADRADO PERFECTO.

Es aquel número que resulta del producto de dos cantidades iguales. Se denota por k^2.

Por ejemplo, son cuadrados perfectos los siguientes números :

* 25 , pues : $25 = 5 \times 5 \Rightarrow 25 = 5^2$
* 324 , pues : $324 = 18 \times 18 \Rightarrow 324 = 18^2$
* 1024 , pues : $1024 = 32 \times 32 \Rightarrow 1024 = 32^2$

10.1B CUBO PERFECTO.

Es aquel número que resulta del producto de tres cantidades iguales. Comúnmente se denota por k^3.

Por ejemplo, son cubos perfectos los siguientes números :

* 27, pues : $27 = 3 \times 3 \times 3 \Rightarrow 27 = 3^3$
* 512, pues : $512 = 8 \times 8 \times 8 \Rightarrow 512 = 8^3$
* 1331, pues : $1331 = 11 \times 11 \times 11 \Rightarrow 1331 = 11^3$

10.2 CONDICION DE RACIONALIDAD

Para que un número sea cuadrado perfecto es necesario y suficiente que los exponentes de los factores primos de su descomposición canónica sean pares. Para que el número sea cubo perfecto, dichos exponentes deben ser múltiplos de 3.

Sea la descomposición canónica de N : $N = A^a \cdot B^b \cdot C^c \ldots P^p$

$$N = k^2 \Leftrightarrow a, b, c, \ldots, p = \overset{\circ}{2}$$
$$N = k^3 \Leftrightarrow a, b, c, \ldots, p = \overset{\circ}{3}$$

10.3 CRITERIOS DE EXCLUSION PARA CUADRADOS PERFECTOS

Son reglas prácticas que permiten determinar cuando un número no es cuadrado perfecto o de lo contrario cuando podría serlo.

9.3A Ningún número terminado en 2; 3; 7 ú 8 es cuadrado perfecto.

$$N = k^2 = \overline{\ldots a} \quad \Rightarrow \quad a \notin \{2; 3; 7; 8\}$$

9.3B Si un número termina en 0 y es cuadrado perfecto, la cantidad de ceros en que termine debe ser par.

$$N = k^2 = \overline{\ldots a\underbrace{000\ldots0}_{n}} \quad \Rightarrow \quad n = \overset{\circ}{2}$$

9.3C Si un número es cuadrado perfecto y termina en 5, su cifra de decenas es siempre 2 y su cifra de centenas podría ser 0; 2 ó 6.

$$N = k^2 = \overline{\ldots ab5} \quad \Rightarrow \quad b = 2 \wedge a = 0; 2; 6$$

9.3D Si un número es cuadrado perfecto y es divisible entre 2; o entre 3, o entre 5, ... , o entre p (p: primo) entonces será divisible entre 4, entre 9, entre 25, ... , entre p^2 respectivamente.

$$N = k^2 \quad \wedge \quad N = \overset{\circ}{p} \ (p : \text{primo}) \quad \Rightarrow \quad N = \overset{\circ}{\overline{p^2}}$$

9.3E Si un número impar es cuadrado perfecto, entonces al dividirse entre 8 da residuo 1.

$$N = k^2 \quad \wedge \quad N = \text{impar} \quad \Rightarrow \quad N = \overset{\circ}{8} + 1$$

10 POTENCIACION

10.1 DEFINICION

La potenciación es aquella operación aritmética que consiste en encontrar el producto de una misma cantidad, llamada *base*, tantas veces como lo indica otra llamada *exponente*.

$$N^k = P \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{N \cdot N \cdot N \cdot \ldots \cdot N}_{\text{"}k\text{" factores}} = P$$

Donde : $N \Rightarrow$ Base $\in \mathbb{Z}$

$k \Rightarrow$ Exponente $\in \mathbb{N}$

$P \Rightarrow$ Potencia $\in \mathbb{Z}$

10.1A CUADRADO PERFECTO.

Es aquel número que resulta del producto de dos cantidades iguales. Se denota por k^2.

Por ejemplo, son cuadrados perfectos los siguientes números :

* 25 , pues : $25 = 5 \times 5 \Rightarrow 25 = 5^2$
* 324 , pues : $324 = 18 \times 18 \Rightarrow 324 = 18^2$
* 1024 , pues : $1024 = 32 \times 32 \Rightarrow 1024 = 32^2$

10.1B CUBO PERFECTO

Es aquel número que resulta del producto de tres cantidades iguales. Comúnmente se denota por k^3.

Por ejemplo, son cubos perfectos los siguientes números :

* 27, pues : $27 = 3 \times 3 \times 3 \Rightarrow 27 = 3^3$
* 512, pues : $512 = 8 \times 8 \times 8 \Rightarrow 512 = 8^3$
* 1331, pues : $1331 = 11 \times 11 \times 11 \Rightarrow 1331 = 11^3$

10.2 CONDICION DE RACIONALIDAD

Para que un número sea cuadrado perfecto es necesario y suficiente que los exponentes de los factores primos de su descomposición canónica sean pares. Para que el número sea cubo perfecto, dichos exponentes deben ser múltiplos de 3.

Sea la descomposición canónica de N : $N = A^a . B^b . C^c . \dots . P^p$

$$N = k^2 \Leftrightarrow a, b, c, \dots, p = \overset{\circ}{2}$$
$$N = k^3 \Leftrightarrow a, b, c, \dots, p = \overset{\circ}{3}$$

10.3 CRITERIOS DE EXCLUSION PARA CUADRADOS PERFECTOS

Son reglas prácticas que permiten determinar cuando un número no es cuadrado perfecto o de lo contrario cuando podría serlo.

9.3A Ningún número terminado en 2; 3; 7 ú 8 es cuadrado perfecto.

$$N = k^2 = \overline{\dots a} \quad \Rightarrow \quad a \notin \{2; 3; 7; 8\}$$

9.3B Si un número termina en 0 y es cuadrado perfecto, la cantidad de ceros en que termine debe ser par.

$$N = k^2 = \overline{\dots a\underbrace{000\dots0}_{n}} \quad \Rightarrow \quad n = \overset{\circ}{2}$$

9.3C Si un número es cuadrado perfecto y termina en 5, su cifra de decenas es siempre 2 y su cifra de centenas podría ser 0; 2 ó 6.

$$N = k^2 = \overline{\dots ab5} \quad \Rightarrow \quad b = 2 \wedge a = 0; 2; 6$$

9.3D Si un número es cuadrado perfecto y es divisible entre 2; o entre 3, o entre 5, ... , o entre p (p: primo) entonces será divisible entre 4, entre 9, entre 25, ... , entre p^2 respectivamente.

$$N = k^2 \quad \wedge \quad N = \overset{\circ}{p} \ (p : \text{primo}) \quad \Rightarrow \quad N = \overset{\circ}{\overline{p^2}}$$

9.3E Si un número impar es cuadrado perfecto, entonces al dividirse entre 8 da residuo 1.

$$N = k^2 \quad \wedge \quad N = \text{impar} \quad \Rightarrow \quad N = \overset{\circ}{8} + 1$$

(V) *Podría ser cuadrado perfecto*, pues sumando cifras :

$$\overline{ababab1} = \overset{\circ}{3} + (a + b + a + b + a + b + 1)$$

$$= \overset{\circ}{3} + 3\,(a + b) + 1$$

$$= \overset{\circ}{3} + 1 \qquad \text{(item 9.3F)}$$

$$\therefore \qquad = \boxed{2} \qquad \text{RPTA. B}$$

2.- *Con los mismos números del problema anterior. ¿Cuántos podrían ser cubos perfectos?*

A) 0 ***B) 1*** ***C) 2*** ***D) 3*** ***E) 4***

Resolución.-

Aplicando los criterios de exclusión para cubos perfectos tendremos :

(I) *Podría ser cubo perfecto*, pues si acaba en 5, su cifra de decenas es 2. (item 9.4C)

(II) *No es cubo perfecto*, pues :

$$\overline{abbcac} = \overset{\circ}{9} + (a + b + b + c + a + c)$$

$$= \overset{\circ}{9} + 2\,(a + b + c)$$

$$= \overset{\circ}{9} + 2(7)$$

$$= \overset{\circ}{9} + 14$$

$$= \overset{\circ}{9} + \overset{\circ}{9} + 5$$

$$= \overset{\circ}{9} + 5 \qquad \text{(item 9.3E)}$$

(III) *Podría ser cubo perfecto*, pues no hay restricción para su última cifra. (item 9.3A)

(IV) *No es cubo perfecto*, pues sumando sus cifras :

$$33\,(5) + 32(6) = 165 + 192 = 357 = \overset{\circ}{9} + 6 \qquad \text{(item 9.3E)}$$

(V) *No es cubo perfecto*, pues :

$$\overline{ababab1} = \overset{\circ}{9} + (a + b + a + b + a + b + 1)$$

$$= \overset{\circ}{9} + 3(a + b) + 1$$

$$= \overset{\circ}{9} + 3(\overset{\circ}{3} + 2) + 1$$

$$= \overset{\circ}{9} + \overset{\circ}{9} + 6 + 1$$

$$= \overset{\circ}{9} + 7 \qquad \text{(item 9.3E)}$$

$$\therefore \qquad = \boxed{2} \qquad \text{RPTA. C}$$

3.- ¿Cuál es el menor número entero por el que se debe multiplicar a 84 000 para que sea cuadrado perfecto?

A) 210 B) 640 C) 320 D) 275 E) 142

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente : $84\,000 = 2^5 \times 3 \times 5^3 \times 7$

Para que sea cuadrado perfecto, los exponentes de su descomposición canónica deben ser pares, luego para completar se debe multiplicar por :

$\therefore \quad 2 \times 3 \times 5 \times 7 = \boxed{210}$ RPTA. A

4.- ¿Cuál es el menor número entero por el que se debe dividir a 20! para que el cociente sea un cuadrado perfecto?

A) 124 B) 12 603 C) 1 528 D) 42 613 E) 46 189

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente a 20! según lo visto en el capítulo VII :

$$20! = 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1 \times 17^1 \times 19^1$$

Para que sea cuadrado perfecto se le debe dividir entre un número que elimine los factores que no son cuadrados perfectos, luego :

$\therefore \quad 11 \times 13 \times 17 \times 19 = \boxed{46\,189}$ RPTA. E

5.- ¿Cuál es el menor número entero por el que se debe multiplicar a 28 800 para que se convierta en un cubo perfecto?

A) 45 B) 60 C) 2 D) 288 E) 360

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente : $28\,800 = 2^7 \times 3^2 \times 5^2$

Para que se convierta en cubo perfecto, se debe multiplicar por :

$\therefore \quad 2^2 \times 3 \times 5 = \boxed{60}$ RPTA. B

6.- Determinar el menor valor de N, sabiendo que al dividir 18! entre N se obtiene un cubo perfecto. Dar la suma de sus cifras.

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 27

Resolución.-

Descomponiendo canónicamente a 18 ! : $18\,! = 2^{16} \times 3^8 \times 5^3 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1 \times 17^1$

Luego, según condición : $\dfrac{18!}{N} = \dfrac{2^{16} \times 3^8 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17}{N} = k^3$

$$\Rightarrow \qquad N = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17$$

$$N = 2\,144\,142$$

$$\therefore \qquad \boxed{\Sigma = 18} \qquad \text{RPTA. D}$$

7.- ¿Cuál es el número que sumado con su ouadrado da 2 970?

A) 54 B) 55 C) 51 D) 64 E) 61

<u>Resolución</u>.-

Sea "N" el número : $N + N^2 = 2970$

$N(N + 1) = 2970$

Reconociendo que 2 970 es el producto de dos números consecutivos; estos son 54 y 55, luego :

$$\therefore \qquad \boxed{N = 54} \qquad \text{RPTA. A}$$

8.- La mitad de un número es un cuadrado perfecto y su triple es un cubo perfecto. El menor número que cumple con estas condiciones está comprendido :

A) Entre 50 y 100 B) Entre 100 y 200 C) Entre 200 y 350
D) Entre 350 y 500 E) Entre 500 y 600

<u>Resolución</u>.-

Sea "N" el número, entonces : $\dfrac{N}{2} = k^2 \quad \wedge \quad 3N = p^3$

$N = 2n^2 \quad \wedge \quad N = 3^2m^3$

Entonces se puede inferir que : $N = 3^2 \times 2^3$

$$\therefore \qquad \boxed{N = 72} \qquad \text{RPTA. A}$$

9.- ¿Cuántos números cuadrados perfectos de 3 cifras existen en base 11?

A) 26 B) 16 C) 18 D) 20 E) 25

<u>Resolución</u>.-

Sean los números de la forma $\overline{abc}_{11}$, tal que : $\overline{abc}_{11} = k^2$

Se sabe que : $100_{11} \leq \overline{abc}_{11} < 1000_{11}$;

$\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow$

Convirtiendo a base 10 : $121 \leq k^2 < 1331$

Extrayendo raíz cuadrada : $11 \leq k < 36{,}5$

Luego : $k \in \{11; 12; 13; ... ; 36\}$

Entonces : Cantidad de números $= \dfrac{36-11}{1} + 1$

$\therefore$ Cantidad de números = 26 RPTA. A

10.- Encontrar el menor número entero tal que la suma de su tercera y su sétima parte sea un cubo perfecto. Dar la suma de sus cifras.

A) 3 B) 9 C) 5 D) 12 E) 15

Resolución.-

Sea "N" el número pedido : $\dfrac{N}{3} + \dfrac{N}{7} = k^3$

Dando común denominador : $\dfrac{7N+3N}{21} = k^3$

$$\frac{10N}{21} = k^3$$

$$\frac{2\times 5\times N}{3\times 7} = k^3$$

Luego el menor N será : $N = 3 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$

$\therefore$ $N = 2\,100$ RPTA. A

11.- Encontrar un número de 4 cifras consecutivas ascendentes tal que al permutar sus dos primeras cifras nos dé un cuadrado perfecto. Dar su cifra de centenas.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) 7

Resolución.-

Considerando como el número de cuatro cifras consecutivas a :

$$N = \overline{a(a+1)(a+2)(a+3)}$$

Por dato : $\overline{a(a+1)a(a+2)(a+3)} = k^2$

Descomponiendo polinómicamente :

$$(a+1)\cdot 10^3 + a\cdot 10^2 + (a+2)\cdot 10 + (a+3) = k^2$$

Efectuando operaciones : $1111a + 1023 = k^2$

$$11\,(101a + 93) = k^2$$

Entonces : $101a + 93 = \overset{\circ}{11}$

$\Rightarrow \qquad \overset{\circ}{11} + 2a + \overset{\circ}{11} + 5 = \overset{\circ}{11}$

$\Rightarrow \qquad 2a + 5 = \overset{\circ}{11}$

$\Rightarrow \qquad a = 3$

$\therefore \qquad$ N = 3 456 $\qquad$ RPTA. B

12.- Calcular a + b + c si el número $\overline{3a6bc0}$ es un cuadrado perfecto, es múltiplo de 3 y múltiplo de 7.

A) 9 $\qquad$ B) 18 $\qquad$ C) 0 $\qquad$ D) 42 $\qquad$ E) 21

Resolución.-

Como $\overline{3a6bc0}$ debe ser un cuadrado perfecto deducimos que : $\qquad c = 0$

Entonces el número quedará así : $\qquad \overline{3a6b00} = k^2$

Transformando , tendremos : $\qquad \overline{3a6b} \cdot 102 = k^2$

Como $\overline{3a6b00}$ es múltiplo de 3 y de 7 : $\qquad \overline{3a6b} = 3^2 \cdot 7^2 \cdot n^2$

$$\overline{3a6b} = 441 \cdot n^2$$

Luego se puede inferir que : $\quad n = 3 \quad \Rightarrow \quad \overline{3a6b} = 441 \cdot 3^2$

$$\Rightarrow \quad \overline{3a6b} = 3969$$

$$\Rightarrow \quad a = 9 \quad \wedge \quad b = 9$$

$\therefore \qquad a + b + c = 18 \qquad$ RPTA. B

13.- Entre dos cubos perfectos consecutivos hay 546 números enteros. Calcular el menor de los cubos.

A) 1 331 $\qquad$ B) 1 728 $\qquad$ C) 2 197 $\qquad$ D) 2 744 $\qquad$ E) 3 375

Resolución.-

Sean k^3 y $(k + 1)^3$ los cubos perfectos consecutivos : $k^3 ; \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{546 \text{ números}} ; (k+1)^3$

Entonces se puede establecer que : $\qquad (k + 1)^3 - 1 - k^3 = 546$

Desarrollando por productos notables : $\qquad k^3 + 3k(k + 1) + 1 - 1 - k^3 = 546$

$$\Rightarrow \qquad \underset{13\,.\,14}{\underset{\Uparrow}{k(k + 1)}} = 182$$

Luego : $k = 13$

$\therefore$ $\boxed{k^3 = 2\ 197}$ RPTA. C

14.- ¿Cuántos números de la forma $\overline{9abc1}$ que sean cuadrados perfectos existen?

A) 2 ***B) 3*** ***C) 4*** ***D) 0*** ***E) 1***

<u>Resolución</u>.-

Por dato : $\overline{9abc1} = k^2$

Se sabe que : $90001 \leq \overline{9abc1} \leq 99991$

$90001 \leq k^2 \leq 99991$

$300{,}1 \leq k \leq 316{,}2$

Para que "k^2" termine en 1, "k" debe terminar en 1 ó en 9 , luego : $k \in \{301; 309; 311\}$

$\therefore$ $\boxed{\text{Existen 3 números}}$ RPTA. B

14.- ¿Cuántos cuadrados perfectos de 4 cifras existen que sean divisibles entre 21?

A) 42 ***B) 9*** ***C) 6*** ***D) 3*** ***E) 10***

<u>Resolución</u>.-

Denotando por $\overline{mcdu}$ a los números de 4 cifras :

$$\overline{mcdu} = k^2 \quad \wedge \quad \overline{mcdu} = \overset{\circ}{21}$$

$$\overline{mcdu} = k^2 \quad \wedge \quad \overline{mcdu} = 21n$$

$$\overline{mcdu} = k^2 \quad \wedge \quad \overline{mcdu} = 3 \times 7 \cdot n$$

Luego : $n = 3 \times 7 \times p^2$, donde : $p \in \mathbb{Z}^+$

Se sabe que : $1000 \leq \overline{mcdu} \leq 9999$

$1000 \leq 21n \leq 9999$

$47{,}6 \leq n \leq 476{,}1$

$47{,}6 \leq 3 \cdot 7 \cdot p^2 \leq 476{,}1$

$2{,}3 \leq p^2 \leq 22{,}7$

Entonces se puede deducir que : $p \in \{2 ; 3 ; 4\}$

$\therefore$ $\boxed{\text{Existen 3 números}}$ RPTA. D

16.- ¿Cuántos cubos perfectos hay en la siguiente sucesión de números :

$$36 . 12 ; 36 . 24 ; 36 . 36 ; ... ; 36 . 24\,000 \ ?$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 7 E) 8

Resolución.-

La sucesión será : $36 \cdot 12\,(1) ; 36 \cdot 12(2) ; 36 \cdot 12(3) ; ... ; 36 \cdot 12(2000)$

Es decir, todos los términos son de la forma :

$$36 . 12(n) ; \text{ donde : } n \in \mathbb{Z}^+ \quad \wedge \quad n \leq 2\,000$$

Descomponiendo canónicamente : $2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 3(n) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot (n)$

Luego para que sea un cubo perfecto : $n = 2^2 \cdot k^3$

Como es conocido :

$$\begin{aligned} n &\leq 2000 \\ 2^2 \cdot k^3 &\leq 2000 \\ k^3 &\leq 500 \\ &\downarrow \\ k &\in \{1; 2; 3; ... ; 7\} \end{aligned}$$

$\therefore$ Existen 7 cubos perfectos RPTA. D

17.- ¿A cuántos números cuadrados perfectos, si le añadimos 729 se obtiene otro número cuadrado perfecto?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

Resolución.-

Sean N y M los cuadrados perfectos, entonces del enunciado :

$$\text{N} = k^2$$

$$\text{M} = p^2$$

Además : $\text{M} = \text{N} + 729$

$$p^2 = k^2 + 729$$

$$\Rightarrow \quad p^2 - k^2 = 729$$

Descomponiendo: $(p + k)\,(p - k) = \begin{cases} 729 \times 1 \\ 243 \times 3 \\ 81 \times 9 \end{cases}$

Caso (1) : $p + k = 729 \Rightarrow p = 365 \wedge \text{M} = 133\,225$

$p - k = 1 \Rightarrow k = 364 \wedge \text{N} = 132\,496$

Caso (2) : $p + k = 243 \Rightarrow p = 123 \wedge M = 15129$

$p - k = 3 \Rightarrow k = 120 \wedge N = 14400$

Caso (3) : $p + k = 81 \Rightarrow p = 45 \wedge M = 2025$

$p - k = 9 \Rightarrow k = 36 \wedge N = 1296$

$\therefore$ Existen 3 números RPTA. B

18.- Si : $\overline{ab}^2 = \overline{cde}$ ***y*** $\overline{ba}^2 = \overline{edc}$

Donde : $e - c = 3$

Hallar : $a + b + c + d + e$

A) 10 ***B) 11*** ***C) 12*** ***D) 13*** ***E) 14***

Resolución.-

Según los datos : $\overline{ab}^2 = \overline{cde}$ ... (1)

$\overline{ba}^2 = \overline{edc}$ ... (2)

Restando (2) - (1) : $\overline{ba}^2 - \overline{ab}^2 = \overline{edc} - \overline{cde}$

$\Rightarrow (\overline{ba} + \overline{ab})(\overline{ba} - \overline{ab}) = \overline{edc} - \overline{cde}$

Descomponiendo polinómicamente :

$$11(b + a)\,9(b - a) = 99(e - c)$$

Como $e - c = 3$: $(b + a)(b - a) = 3$

Entonces : $b + a = 3 \wedge b - a = 1$

Luego : $b = 2 \wedge a = 1$

En (1) : $12^2 = \overline{cde}$

$144 = \overline{cde}$

$\Rightarrow c = 1 \; ; \; d = 4 \; ; \; e = 4$

$\therefore$ $a + b + c + d + e = 12$ RPTA. C

19.- Hallar $\overline{mcdu}$ ***tal que sea cubo perfecto y además :*** $\overline{mc} = 3 \cdot \overline{du} + 10.$

A) 4913 ***B) 4914*** ***C) 4915*** ***D) 4311*** ***E) 6117***

Resolución.-

Por dato : $\overline{mcdu} = k^3$

Descomponiendo polinómicamente por bloques : $100\overline{mc} + \overline{du} = k^3$

Como $\overline{mc} = 3 \cdot \overline{du} + 10$: $100\,(3\overline{du} + 10) + \overline{du} = k^3$

Efectuando operaciones : $301\ \overline{du} + 1000 = k^3$

$$\Rightarrow \quad 301 \cdot \overline{du} = k^3 - 10^3$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{301}_{7 \times 43} \cdot \overline{du} = (k - 10)\,(k^2 + 10k + 100)$$

Luego podemos reconocer que : $k - 10 = 7 \quad \wedge \quad 43 \cdot \overline{du} = k^2 + 10k + 100$

Entonces : $k = 17 \quad \wedge \quad \overline{du} = 13$

Finalmente : $\overline{mc} = 3(13) + 10 \quad \Rightarrow \quad \overline{mc} = 49$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{mcdu} = 4\,913} \qquad \text{RPTA. A}$$

20.- Determinar los números enteros de la forma $\overline{mcdu}$ tal que $m + c + d + u = s$ y : $mcdu = 11 \cdot s^2$. Dar como respuesta la cantidad de soluciones.

A) 2 ***B) 3*** ***C) 4*** ***D) 5*** ***E) 6***

Resolución.-

Por datos : $m + c + d + u = s$ ... (1)

$\overline{mcdu} = 11 \cdot s^2$ ... (2)

Aplicando propiedad de múltiplos de 9 en (2) :

$$\overset{\circ}{9} + m + c + d + u = 11s^2$$

De (1) : $\overset{\circ}{9} + s = 11s^2$

$$\Rightarrow \quad \overset{\circ}{9} = s(11s - 1)$$

Si : $s = \overset{\circ}{9} \quad \Rightarrow \quad s \in \{9 ; 18 ; 27\}$

Si : $11s - 1 = \overset{\circ}{9} \quad \Rightarrow \quad s \in \{5 ; 14 ; 23 ; 32\}$

Luego : Si : $s = 9 \quad \Rightarrow \quad \overline{mcdu} = 11(9^2) = 891$

Si : $s = 18 \quad \Rightarrow \quad \overline{mcdu} = 11(18^2) = 3\,564 \quad (*)$

Si : $s = 27 \quad \Rightarrow \quad \overline{mcdu} = 11(27^2) = 8\,019$

Si : $s = 5 \quad \Rightarrow \quad \overline{mcdu} = 11(5^2) = 275$

Si : $s = 14 \quad \Rightarrow \quad \overline{mcdu} = 11(14^2) = 2\,156$ (*)

Si : $s = 23 \quad \Rightarrow \quad \overline{mcdu} = 11(23^2) = 5\,819$ (*)

Si : $s = 32 \quad \Rightarrow \quad \overline{mcdu} = 11(32^2) = 11\,264$

De todos estos números , los únicos que cumplen con (1) son : 3 564 ; 2 156 y 5 819

$\therefore$ Existen 3 soluciones RPTA. B

21.- Hallar un número de 4 cifras de la forma $\overline{mcdu}$ sabiendo que es cuadrado perfecto y además se satisfacen las siguientes relaciones :

$$* \; m + c + d + u = \overline{mc}$$
$$* \; c = d + u$$

Dar como respuesta : $c + u + d$

A) 18 B) 17 C) 19 D) 16 E) 15

Resolución.-

Descomponiendo polinómicamente : $m + c + d + u = 10m + c$

$$\Rightarrow \quad d + u = 9m$$

A partir de la condición : $c = d + u \quad \Rightarrow \quad c = 9m$

Luego, se puede deducir que : $m = 1 \quad \wedge \quad c = 9$

Además : $\overline{mcdu} = k^2$

Entonces : $\overline{19du} = k^2$

Como :
$$1900 \leq \overline{19du} \leq 1999$$
$$1900 \leq k^2 \leq 1999$$
$$43{,}6 \leq k \leq 44{,}7$$

Luego : $k = 44 \quad \Rightarrow \quad \overline{mcdu} = 44^2 = 1936$

$\therefore$ $c + u + d = 18$ RPTA. A

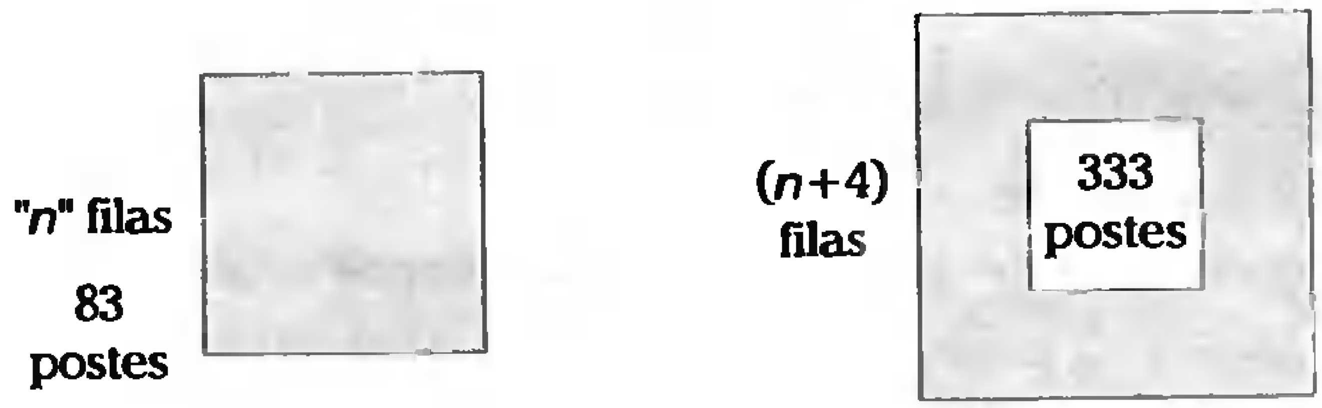
22.- Se quiere plantar postes de tal manera que el número de filas sea igual al número de columnas obervándose que sobrarían 83; pero, si se deja un hueco en el centro se pueden aumentar 4 filas y 4 columnas. ¿Cuántos postes se tiene, si para llenar el centro vacío se necesitan 333 postes?. Dar la cifra de decenas de esta cantidad.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

Resolución.-

Disposición (1) "n" columnas

Disposición (2) $(n + 4)$ columnas



$\Downarrow$ $(n^2 + 83)$ postes

$\Downarrow$ $[(n+4)^2 - 333]$ postes

Luego se puede establecer que : $n^2 + 83 = (n + 4)^2 - 333 \quad \Rightarrow \quad n = 50$

$\therefore$ $\boxed{\#\ \text{postes} = 50^2 + 83 = 2\,583}$ RPTA. E

23.- Encontrar "a:" sabiendo que el número de la forma $\overline{aa36}$ es un cuadrado perfecto.

A) 8 B) 5 C) 2 D) 9 E) 4

Resolución.-

Por dato se sabe que : $\overline{aa}36 = k^2$

Descomponiendo polinómicamente por bloques : $\overline{aa} \cdot 10^2 + 36 = k^2$

$$100\ \overline{aa} = k^2 - 36$$

$$100 \cdot \overline{aa} = (k + 6)(k - 6)$$

Luego se pueden establecer las siguientes relaciones : $k + 6 = 100 \quad \wedge \quad k - 6 = \overline{aa}$

$$k = 94 \quad \wedge \quad 94 - 6 = \overline{aa}$$

$\therefore$ $\boxed{a = 8}$ RPTA. A

24.- Calcular : a + k , si : $\overline{aa64} = k^2$, siendo : $k \in \mathbb{N}$

A) 61 B) 60 C) 59 D) 57 E) 58

Resolución.-

Descomponiendo polinómicamente por bloques : $100\overline{aa} + 64 = k^2$

$$50 \cdot 2 \cdot \overline{aa} = k^2 - 64$$

$$50 \cdot 2 \cdot \overline{aa} = (k + 8)(k - 8)$$

Luego : $k - 8 = 50 \quad \wedge \quad k + 8 = 2 \,.\, \overline{aa}$

$k = 58 \quad \wedge \quad 58 + 8 = 2 \,.\, \overline{aa}$

$k = 58 \quad \wedge \quad a = 3$

$\therefore \quad \boxed{a + k = 61}$ RPTA. A

25.- Encontrar un cuadrado perfecto de la forma $\overline{abcd}$ donde : $\overline{ab} - \overline{cd} = 4$

Dar como respuesta : a + b + c + d

A) 6 B) 9 C) 18 D) 16 E) 22

<u>Resolución</u>.-

Por datos : $\overline{abcd} = k^2 \quad \wedge \quad \overline{ab} - \overline{cd} = 4$

Descomponiendo : $100\overline{ab} + \overline{cd} = k^2 \quad \wedge \quad \overline{ab} = \overline{cd} + 4$

Reemplazando : $100(\overline{cd} + 4) + \overline{cd} = k^2$

Efectuando : $101\overline{cd} + 400 = k^2$

Despejando : $101\overline{cd} = k^2 - 400$

Descomponiendo : $101\overline{cd} = (k + 20)(k - 20)$

Luego , se pueden establecer las siguientes relaciones : $k + 20 = 101 \quad \wedge \quad k - 20 = \overline{cd}$

$k = 81 \quad \wedge \quad 81 - 20 = \overline{cd}$

Entonces : $\overline{cd} = 61 \quad \wedge \quad \overline{ab} = 65$

$\therefore \quad \boxed{a + b + c + d = 18}$ RPTA. C

26.- Encontrar un cuadrado perfecto de la forma : $\overline{abab1}$

Dar como respuesta : a + b

A) 4 B) 6 C) 9 D) 8 E) 7

<u>Resolución</u>.-

Por dato : $\overline{abab1} = k^2$

Descomponiendo polinómicamente por bloques : $\overline{ab} \cdot 103 + \overline{ab} \cdot 10 + 1 = k^2$

Reduciendo y transponiendo : $1010\,\overline{ab} = k^2 - 1$

Factorizando : $\underbrace{101\times 2}\times\underbrace{5\times\overline{ab}} = (k+1)(k-1)$

Entonces : $k+1 = 202 \quad \wedge \quad k-1 = 5\cdot\overline{ab}$

$k = 201 \quad \wedge \quad 201-1 = 5\cdot\overline{ab}$

$\therefore \quad \boxed{\overline{ab} = 40}$ RPTA. A

27.- *Encontrar un cubo perfecto de la forma $\overline{abcde}$ donde : $a+c+e=19 \ \wedge \ b+d=8$.*
Dar como respuesta : $a+d+e$

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

<u>Resolución</u>.-

Por dato : $\overline{abcde} = k^3$

Además : $a+c+e = 19$ ... (1)

$b+d = 8$ ... (2)

Sumando (1) + (2) : $a+c+e+b+d = 27 \Rightarrow \overline{abcde} = \overset{\circ}{3}$

Restando (1) - (2) : $(a+c+e)-(b+d) = 11 \Rightarrow \overline{abcde} = \overset{\circ}{11}$

Por tratarse de un cubo perfecto : $\overline{abcde} = 3^3 \,.\, 11^3 \Rightarrow \overline{abcde} = 35\,937$

$\therefore \quad \boxed{a+d+e = 13}$ RPTA. B

28.- *¿Cuántos números de cuatro cifras son iguales al cubo de la suma de sus cifras?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

<u>Resolución</u>.-

Sea $\overline{mcdu}$ el número de 4 cifras, tal que : $m+c+d+u = k$ ... (1)

Por condición del problema se sabe que : $\overline{mcdu} = (m+c+d+u)^3$

Aplicando múltiplos de 9 : $\overset{\circ}{9} + m+c+d+u = (m+c+d+u)^3$

Es decir : $\overset{\circ}{9} + k = k^3$

Despejando se tiene : $\overset{\circ}{9} = k^3 - k$

Factorizando : $\overset{\circ}{9} = k(k+1)(k-1)$ ... (2)

Se sabe que : $10^3 \leq \overline{mcdu} < 10^4$

Sustituyendo por la condición : $10^3 \leq (m+c+d+u)^3 < 10^4$

Haciendo cambio de variable : $10^3 \leq k^3 < 10^4$

Extrayendo raíz cúbica : $10^3 \leq k < 22$

En (2) : Si : $k = \overset{\circ}{9} \Rightarrow k = 18 \wedge \overline{mcdu} = 18^3 = 5832$

Si : $k + 1 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow k = 17 \wedge \overline{mcdu} = 17^3 = 4913$

Si : $k - 1 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow k = 19 \wedge \overline{mcdu} = 19^3 = 6859$

Los únicos números que cumplen con (1) son : 5 832 y 4 913

$\therefore$ Existen 2 números RPTA. B

29.- Encontrar un número de 4 cifras, cuadrado perfecto, tal que la suma de sus cifras sea 31. Dar su cifra de decenas.

A) 6 ***B) 8*** ***C) 9*** ***D) 3*** ***E) 7***

Resolución.-

Sea $\overline{mcdu}$ el número de 4 cifras tal que : $\overline{mcdu} = k^2 \wedge m + c + d + u = 31$

Nótese que : $\overline{mcdu}_{\text{min}} = 4\,999$

$\overline{mcdu}_{\text{max}} = 9\,994$

Entonces se puede establecer que : $4999 \leq \overline{mcdu} \leq 9994$

Reemplazando : $4999 \leq k^2 \leq 9994$

Extrayendo raíz cuadrada : $71 \leq k \leq 99$ ...(α)

A continuación diremos que : $\overline{mcdu} = k^2$

$$\overset{\circ}{9} + m + c + d + u = k^2$$

$$\overset{\circ}{9} + 31 = k^2$$

$$\overset{\circ}{9} + \overset{\circ}{9} + 4 = k^2$$

$$\overset{\circ}{9} = k^2 - 4$$

Factorizando : $\overset{\circ}{9} = (k+2)(k-2)$

Si: $k + 2 = \overset{\circ}{9} \quad \Rightarrow \quad$ de (α): $k \in \{79 ; 88 ; 97\}$

Si: $k - 2 = \overset{\circ}{9} \quad \Rightarrow \quad$ de (α): $k \in \{74 ; 83 ; 92\}$

Luego se logran obtener los siguientes números :

$$\overline{mcdu} = \begin{cases} 79^2 = 6241 & \Rightarrow \quad 6+2+4+1 = 13 \\ 88^2 = 7744 & \Rightarrow \quad 7+7+4+4 = 22 \\ 97^2 = 9409 & \Rightarrow \quad 9+4+0+9 = 22 \\ 74^2 = 5476 & \Rightarrow \quad 5+4+7+6 = 22 \\ 83^2 = 6889 & \Rightarrow \quad 6+8+8+9 = 31 \ (*) \\ 92^2 = 8464 & \Rightarrow \quad 8+4+6+4 = 22 \end{cases}$$

El único que tiene como suma de cifras a 31 es :

$$\therefore \quad \boxed{\overline{mcdu} = 6\,889} \qquad \text{RPTA. B}$$

30.- Determinar el valor de : a + b , si $\overline{ababab1}$ es un cubo perfecto.

A) 10 ***B) 12*** ***C) 15*** ***D) 7*** ***E) 9***

<u>Resolución</u>.-

Por dato : $\overline{ababab}1 = k^3$

Descomponiendo polinómicamente por bloques :

$$\overline{ab} \cdot 105 + \overline{ab} \cdot 10^3 + \overline{ab} \cdot 10 + 1 = k^3$$

$$101010\overline{ab} = k^3 - 1$$

Factorizando : $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \overline{ab} = (k - 1)(k^2 + k + 1)$ ...(1)

Por el número de cifras se sabe que :

$$\begin{array}{ccccc} 10^6 & \leq & \overline{ababab}1 & < & 10^7 \\ 10^6 & \leq & k^3 & < & 10^7 \\ 100 & \leq & k & < & 15 \end{array}$$

Entonces, en (1) : $k - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Efectuando y despejando: $k = 211$

Luego : $\overline{ababab}1 = 211^3 = 9393931$

$$\therefore \quad \boxed{a + b = 12} \qquad \text{RPTA. B}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- La diferencia de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 448. ¿Cuál es la suma de las cifras del mayor de dichos números impares?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2.- La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 295. Hallar el mayor de los números.

A) 146 B) 147 C) 148 D) 149 E) 150

3.- Hallar dos números cuadrados perfectos sabiendo que su diferencia es 61. Dar el mayor.

A) 30 B) 31 C) 900 D) 961 E) 972

4.- Si entre dos números cuadrados perfectos consecutivos existen 194 números; hallar el mayor de dichos números.

A) 9216 B) 9409 C) 9604
D) 9801 E) 9025

5.- Hallar dos números consecutivos sabiendo que la diferencia de sus cuadrados es 95. Dar el menor.

A) 45 B) 46 C) 47 D) 48 E) 49

6.- La edad en años de una tortuga es mayor en 20 que el cuadrado del número "n" y menor en 5 que el cuadrado del número siguiente a "n". ¿Cuántos años tiene la tortuga?

A) 141 B) 164 C) 189 D) 216 E) 245

7.- Hallar la suma de las cifras de un numeral sabiendo que la diferencia entre el cubo de este número y el número mismo es 7980.

A) 10 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.- ¿Cuántos cuadrados perfectos de 3 cifras existen?

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

9.- ¿Cuántos números cuadrados perfectos que terminan en 6, están comprendidos entre 800 y 2 000?.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.- ¿Cuántos cuadrados perfectos de 4 dígitos existen que sean divisibles entre 21?

A) 42 B) 9 C) 6 D) 3 E) N.A.

11.- Hallar el menor múltiplo de 18 tal que al sumarle sus 3/7 nos de como resultado un cubo perfecto. ¿Cuántos divisores tiene dicho número?

A) 72 B) 36 C) 24 D) 18 E) N.A.

12.- ¿Cuántos números de 5 cifras termina-dos en 6 son cuadrados perfectos?

A) 43 B) 44 C) 42 D) 46 E) N.A.

13.- Sabiendo que el número de la forma $\overline{abcabc}$ del sistema quinario es un cuadrado perfecto, hallar $a + b + c$.

A) Cuatro B) Seis C) Ocho
D) Doce E) N.A.

14.- Dado el número $N = \underbrace{999\ldots\ldots9}_{n \text{ cifras}}$,¿ cuál será la suma de las cifras de N^2?

A) n B) $2n$ C) $9n$ D) $9n\ 1$ E) N.A.

15.- Hallar un número de la forma $\overline{9abc1}$ que sea cuadrado perfecto. Dar : $a + b + c$.

11 RADICACION

11.1 DEFINICION

Es la operación aritmética en la que dadas dos cantidades : Radicando e Indice, se busca una tercera cantidad llamada Raíz, que elevada a un exponente igual al índice, reproduce al radicando.

$$\sqrt[n]{N} = q \quad \Leftrightarrow \quad q^n = N$$

Donde : N $\rightarrow$ Radicando $\in \mathbb{R}^+$

n $\rightarrow$ Indice $\in \mathbb{N}$

q $\rightarrow$ Raiz $\in \mathbb{R}^+$

Si el índice es $n = 2$, tendremos una raíz cuadrada y si es $n = 3$, una raíz cúbica.

11.2 RAIZ CUADRADA ENTERA

Es un caso particular de la raíz cuadrada en la cual, todos sus términos son números enteros positivos .

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\;N\;} & \underline{\;q\;} \\ \;r & \end{array}$$

n : Radicando

q : Raíz cuadrada

r : Resto o Residuo

Podría ser exacta o inexacta :

11.2A EXACTA.

Esta es aquella en la que el residuo es cero (0)

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\;N\;} & \underline{\;q\;} \\ \;0 & \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad N = q^2$$

11.2B INEXACTA

Es aquella en la que el residuo es diferente de cero .

Por Defecto

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{N} & q \\ \cline{2-2} r & \end{array}$$

$$\boxed{N = q^2 + r}$$

Por Exceso

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{N} & q+1 \\ \cline{2-2} r' & \end{array}$$

$$\boxed{N = (q+1)^2 + r'}$$

Donde :

$$r + r' = 2q + 1$$

$$r + r' = q + (q + 1)$$

$$r_{max} = 2q$$

$$r_{min} = 1$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1.- Determinar el valor de a + b en :

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{abab} & 2.ab \\ \cline{2-2} ab & \end{array}$$

A) 5 ***B) 6*** ***C) 7*** ***D) 8*** ***E) 9***

Resolución.-

Observamos que la raíz cuadrada dada se efectuó por defecto, entonces por definición se tendrá que :

$$\overline{abab} = \left(2 \cdot \overline{ab}\right)^2 + \overline{ab}$$

Descomponiendo polinómicamente el primer miembro y efectuando las operaciones :

$$100\,\overline{ab} + \overline{ab} = 4\,\overline{ab}^{\,2} + \overline{ab}$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{ab} = 25$$

Puesto que se pide la suma de las cifras del número obtenido, se tendrá :

$$\therefore \quad \boxed{a + b = 7} \qquad \text{RPTA. C}$$

11 RADICACION

11.1 DEFINICION

Es la operación aritmética en la que dadas dos cantidades : Radicando e Indice, se busca una tercera cantidad llamada Raíz, que elevadá a un exponente igual al índice, reproduce al radicando.

$$\sqrt[n]{N} = q \quad \Leftrightarrow \quad q^n = N$$

Donde : N	$\rightarrow$	Radicando	$\in$	$\mathbb{R}^+$
n	$\rightarrow$	Indice	$\in$	$\mathbb{N}$
q	$\rightarrow$	Raiz	$\in$	$\mathbb{R}^+$

Si el índice es $n = 2$, tendremos una raíz cuadrada y si es $n = 3$, una raíz cúbica.

11.2 RAIZ CUADRADA ENTERA

Es un caso particular de la raíz cuadrada en la cual, todos sus términos son números enteros positivos .

$$\begin{array}{c|l} \sqrt{\;N\;} & \underline{\;q\;} \\ r & \end{array}$$

n : Radicando

q : Raíz cuadrada

r : Resto o Residuo

Podria ser exacta o inexacta :

11.2A EXACTA.

Esta es aquella en la que el residuo es cero (0)

$$\begin{array}{c|l} \sqrt{\;N\;} & \underline{\;q\;} \\ 0 & \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad N = q^2$$

11.2B INEXACTA.

Es aquella en la que el residuo es diferente de cero .

Por Defecto

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\text{N}} & q \\ \hline r & \end{array}$$

$$\boxed{\text{N} = q^2 + r}$$

Por Exceso

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\text{N}} & q+1 \\ \hline r' & \end{array}$$

$$\boxed{\text{N} = (q+1)^2 + r'}$$

Donde :

$r + r' = 2q + 1$

$r + r' = q + (q + 1)$

$r_{max} = 2q$

$r_{min} = 1$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1.- Determinar el valor de a + b en :

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\overline{abab}} & 2.\overline{ab} \\ \hline \overline{ab} & \end{array}$$

A) 5 ***B) 6*** ***C) 7*** ***D) 8*** ***E) 9***

Resolución.-

Observamos que la raíz cuadrada dada se efectuó por defecto, entonces por definición se tendrá que :

$$\overline{abab} = \left(2 \cdot \overline{ab}\right)^2 + \overline{ab}$$

Descomponiendo polinómicamente el primer miembro y efectuando las operaciones :

$$100\ \overline{ab} + \overline{ab} = 4\ \overline{ab}^2 + \overline{ab}$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{ab} = 25$$

Puesto que se pide la suma de las cifras del número obtenido, se tendrá :

$$\therefore \quad \boxed{a + b = 7} \qquad \text{RPTA. C}$$

2.- Al extraer la raíz cuadrada entera, por defecto y por exceso de N se obtuvo como restos, por defecto y por exceso, a 37 y 44 respectivamente ¿Cuál es el valor de N?

A) 1 644 ***B) 1 727*** ***C) 1 647*** ***D) 1 637*** ***E) 1 517***

Resolución.-

Por Defecto

$$\begin{array}{c|l} \sqrt{\text{N}} & q \\ \hline r = 37 & \end{array}$$

Por Exceso

$$\begin{array}{c|l} \sqrt{\text{N}} & q+1 \\ \hline r' = 44 & \end{array}$$

Donde al examinar la raíz por defecto se establecerá por definición que :

$$\text{N} = q^2 + 37 \quad .... (*)$$

Asimismo por la propiedad expuesta para los restos , tendremos :

$$r + r' = 2q + 1$$

$$37 + 44 = 2q + 1$$

$$q = 40$$

Al sustituir en (*) : $\text{N} = 40^2 + 37$

$$\therefore \quad \text{N} = 1\ 637 \qquad \text{RPTA. D}$$

11.3 RAIZ CUBICA ENTERA

Es aquel caso particular de la raíz cúbica en la cual todos sus términos son números enteros positivos .

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{N} & q \\ \hline r & \end{array}$$

n : Radicando

q : Raíz cúbica

r : Resto o Residuo

Podría ser exacta o inexacta :

11.3A EXACTA.

Es aquella que no posee resto

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{N} & q \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad N = q^3$$

11.3B INEXACTA.

Por Defecto

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{N} & q \\ \hline r & \end{array}$$

$$N = q^3 + r$$

Por Exceso

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{N} & q+1 \\ \hline r' & \end{array}$$

$$N = (q + 1)^3 - r'$$

Donde los restos verifican las siguientes relaciones :

$$r + r' = 3\,q\,(q + 1) + 1$$

$$r_{\text{máx}} = 3q\,(q + 1)$$

$$r_{\text{mín}} = 1$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

3.- En una raíz cúbica entera : El resto por defecto es 620 y el resto por exceso es 767 ¿Cuál es el radicando?

A) 9 881 B) 10 600 C) 11 248 D) 10 648 E) 10 000

<u>Resolución</u>.-

Por Defecto	Por Exceso
$\sqrt[3]{N}$ q	$\sqrt[3]{N}$ $q+1$
$r = 620$	$r' = 767$

Donde por definición se establece que : $N = q^3 + 620$ .... (*)

Aplicando la propiedad de raices : $r + r' = 3q\,(q + 1) + 1$

Reemplazando datos : $620 + 767 = 3q\,(q + 1) + 1$

Resolviendo encontramos que : $q = 21$

Luego al sustituir en (*) : $N = 21^3 + 620$

$\therefore$ $\boxed{N = 9\,881}$ RPTA. A

4.- Al encontrar la raíz cúbica de un número se obtuvo como residuo el máximo posible : 2 610 ¿Cuál es el radicando? Dar su mayor cifra.

A) 26 898 B) 26 98 C) 26 999 D) 26 990 E) 26 789

<u>Resolución</u>.-

Sea "N" el número :

$\sqrt[3]{N}$ q

r

$\Rightarrow$ $N = q^3 + r$ ....(*)

Por dato se sabe que : $r_{max} = 2610$

Por la propiedad de raices : $3q\,(q + 1) = 2610$

Resolviendo tendremos : $q = 29$

Reemplazando en (*): $N = 29^3 + 2610$

$\therefore$ $\boxed{N = 26\,999}$ RPTA. C

11.4 APROXIMACION DE RAICES

Encontrar la raíz cuadrada de N en menos de *a/b* equivale a encontrar un valor aproximado para dicha raíz cuya diferencia respecto del valor real es menor que *a/b*.

« $\sqrt{N}$ en menos de *a/b* »

$$q = \frac{a}{b} \underbrace{\sqrt{N\left(\frac{b}{a}\right)^2}}_{\text{Por Defecto}}$$

Donde :

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Raíz cuadrada} \\ \text{por defecto en} \\ \text{menos de } a/b}}{q} \leq \sqrt{N} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Raíz cuadrada} \\ \text{por exceso en} \\ \text{menos de } a/b}}{q + \frac{a}{b}}$$

En forma similar para la raíz cúbica :

« $\sqrt[3]{N}$ en menos de *a/b* »

$$q = \frac{a}{b} \underbrace{\sqrt[3]{N\left(\frac{b}{a}\right)^3}}_{\text{Por Defecto}}$$

Donde :

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Raíz cúbica por} \\ \text{defecto en} \\ \text{menos de } a/b}}{q} \leq \sqrt[3]{N} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Raíz cúbica por} \\ \text{exceso en} \\ \text{menos de } a/b}}{q + \frac{a}{b}}$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

5.- Calcular la raíz cuadrada por defecto de 20 en menos de 1/5.

A) 4,40 ***B) 4,42*** ***C) 4,41*** ***D) 4,43*** ***E) 4,47***

Resolución.-

Notamos que se desea la «Raíz cuadrada por defecto de 20 en menos de 1/5» , luego :

$$q = \frac{1}{5}\underbrace{\sqrt{20\left(5^2\right)}}_{\text{Por defecto}}$$

Efectuando, se tendrá : $$q = \frac{1}{5}\underbrace{\sqrt{500}}_{\text{Por defecto}}$$

Como la raíz cuadrada, por defecto de 500 es 22 :

$$\Rightarrow \quad q = \frac{1}{5}(22)$$

$$\therefore \quad \boxed{q = 4,40} \qquad \text{RPTA. A}$$

6.- Encontrar la raíz cúbica por defecto de 240 en menos de 1/10.

A) 6,20 ***B) 6,21*** ***C) 6,25*** ***D) 6,27*** ***E) 6,30***

Resolución.-

Se solicita la «Raíz cúbica por defecto es 240 en menos de 1/10», por lo tanto :

$$q = \frac{1}{10}\underbrace{\sqrt[3]{240\left(10^3\right)}}_{\text{Por defecto}}$$

Efectuando operaciones : $$q = \frac{1}{10}\underbrace{\sqrt[3]{240000}}_{\text{Por defecto}}$$

Como la raíz cúbica, por defecto de 240 000 es 62 , tendremos que :

$$q = \frac{1}{10}(62)$$

$$\therefore \quad \boxed{q = 6,20} \qquad \text{RPTA. A}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

7.- Al extraer la raíz cuadrada por defecto de 276 800 ¿Cuál es el resto?

A) 120 ***B) 122*** ***C) 123*** ***D) 124*** ***E) 126***

Resolución.-

Este ejercicio nos permitirá fundamentar el proceso para la obtención de la raíz cuadrada , para lo cual nos apoyaremos en el ejemplo de un número de dos cifras :

$$\begin{aligned} \overline{du}^2 &= (10\,d + u)^2 \\ &= 100\,d^2 + 2\,.\,10\,d\,.\,u\,.\,u^2 \\ &= 100\,d^2 + [(2d)\,.\,10 + u]\,u \\ &= 100\,d^2 + \overline{(2d)u}\,.\,u \end{aligned}$$

Ahora para extraer la raíz cuadrada de 276 800 , seguiremos los siguientes pasos :

Paso 1 : Se separa al número (Radicando) en grupos de 2 cifras (comenzando por la derecha).

Paso 2 : La primera cifra de la raíz cuadrada es la raíz cuadrada por defecto del primer grupo de la izquierda.

Paso 3 : Luego de restar del primer grupo de la izquierda el cuadrado de la raíz cuadrada parcial, se coloca, a la derecha de la diferencia el siguiente grupo de dos cifras.

Paso 4 : Se duplica la raíz cuadrada parcial, se le agrega una cifra a la derecha y se le multiplica por la cifra agregada, cuidando no exceder el número resultante del paso anterior. El resultado se resta de dicho número.

Paso 5 : La cifra agregada en el paso anterior se convierte en la siguiente cifra de la raíz cuadra parcial.

Paso 6 : Se repiten los pasos 4 y 5 hasta el último grupo del radicando.

$$\begin{array}{r l r|l l} & & & \text{Paso 1} \quad \text{Paso 5} & \\ & & \sqrt{27'68'00} & 5\,2\,6 & \\ \hline \text{Paso 2} & \rightarrow & \underline{25} & & \\ \text{Paso 3} & \rightarrow & 268 & 10\underline{2} \times \underline{2} = 204 & \text{Paso 4} \\ & & \underline{204} \leftarrow & & \\ & & 6400 & 104\underline{6} \times \underline{6} = 6276 & \\ & & \underline{6276} & & \\ & & 124 & & \end{array}$$

$\therefore$ $\boxed{r = 24}$ RPTA. D

8.- Determinar el resto al extraer la raíz cúbica por defecto de 14 709 625.

A) 2 600 ***B) 3 500*** ***C) 4 296*** ***D) 1 400*** ***E) 7 580***

<u>Resolución</u>.-

Tal como ocurrió con el ejercicio anterior, este ejercicio nos permitirá fundamentar el proceso para la obtención de la raíz cúbica, para lo cual nos apoyaremos en el ejemplo de un número de dos cifras :

$$\overline{ab}^{\,3} = (10\,a + b)^3 = 10^3 a^3 + 3\,a^2 b \,.\, 10^2 + 3\,ab^2 \,.\, 10 + b^3$$

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt[3]{14'709'625} & 24 \\ \hline
2^3 \longrightarrow \underline{8} \quad & * \, 3.2^2 = 12 \Rightarrow 67 \div 12 \approx 5\;6\;4 \\
6'709 & 3.2^2.4.10^2 = 4800 \\
\underline{5824} & 3.2.4^2.10 = 960 \quad \text{con 5 excedía} \\
885'625 & 4^3 = 64 \quad \text{a 6709} \\
\underline{882125} & \overline{5824} \\ \cline{2-2}
3500 & * \, 3.24^2 = 1728 \Rightarrow 8856 \div 1728 \approx 5 \\
 & 3.24^2.5.10^2 = 864000 \\
 & 3.24.5^2.10 = 18000 \\
 & 5^3 = 125 \\
 & \overline{882125}
\end{array}$$

$\therefore$ $\quad \boxed{r = 3500}$ RPTA. B

9.- El número $\overline{7c}$ es la raíz cuadrada por defecto y así mismo el residuo por defecto del número $\overline{6ab2}$. Hallar : a + c - b.

A) 2 ***B) 3*** ***C) 5*** ***D) 7*** ***E) 9***

<u>Resolución</u>.-

Del enunciado :
$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{\overline{6ab2}} & \overline{7c} \\ \cline{2-2}
\overline{7c} &
\end{array}$$

Donde :
$$\overline{6ab2} = \overline{7c}^{\,2} + \overline{7c}$$
$$\overline{6ab2} = \overline{7c}\,(\overline{7c} + 1)$$

Como $\overline{6ab2}$ debe ser el producto de dos números consecutivos, deducimos que :

$$\overline{6ab2} = 78 \,.\, 79 = 6162$$

Luego : $a = 1$; $b = 6$; $c = 8$

$\therefore$ $\quad \boxed{a + c - b = 3}$ RPTA. B

10.- Al extraer la raíz cúbica de un número de 4 cifras, la raíz fue uno de dos cifras iguales y el resto 286. Hallar la suma de las cifras de dicho número.

A) 8 ***B) 13*** ***C) 15*** ***D) 19*** ***E) 24***

Resolución.-

Según los datos :

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{\overline{abcd}} & \overline{nn} \\ \hline r = 286 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \overline{abcd} = \overline{nn}^3 + 286$$

Entonces : $\overline{abcd} = (11n)^3 + 286$

$$\overline{abcd} = 1331\, n^3 + 286$$

Nótese que, por ser $\overline{abcd}$ de 4 cifras, $n = 1$:

$$\overline{abcd} = 1331\,(1)^3 + 286$$

$$\overline{abcd} = 1671 \qquad \text{RPTA. C}$$

11.- Al extraer la raíz cuadrada a N resultó como 80. Al restarle 1 000 unidades la raíz se hizo exacta y disminuyó 10 unidades. Hallar "N".

A) 2001 ***B) 1781*** ***C) 6181*** ***D) 1643*** ***E) 2681***

Resolución.-

Según los datos :

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{N} & q \\ \hline 80 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \sqrt{N - 1000} & q - 10 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$N = q^2 + 80 \;\ldots (1) \qquad N - 1000 = (q - 10)^2 \;\ldots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) : $q^2 + 80 - 1000 = (q - 10)^2$

$$q^2 - 920 = q^2 - 20q + 100$$

$$\Rightarrow \quad q = 51$$

Sustituyendo en (1) : $N = 51^2 + 80$

$$\therefore \quad N = 2681 \qquad \text{RPTA. E}$$

12.- Al encontrar la raíz cuadrada de N se obtuvo 80 de residuo y al obtener la raíz cuadrada de 4 N se obtuvo 39 de resto. Dar la suma de las cifras de N.

A) 20 ***B) 21*** ***C) 22*** ***D) 23*** ***E) 24***

Resolución.-

Según los datos :

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\ \mathrm{N}\ } & q \\ \hline 80 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{\ 4\mathrm{N}\ } & k \\ \hline 39 & \end{array}$$

$$\mathrm{N} = q^2 + 80 \ \ldots (1) \qquad\qquad 4\mathrm{N} = k^2 + 39 \ \ldots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) : $4\,(q^2 + 80) = k^2 + 39$

$$4q^2 + 320 = k^2 + 39$$

$$281 = k^2 - 4q^2$$

$$281 = (k + 2q)\,(k - 2q)$$

Dado que 281 es un número primo, se tendrá que :

$$k + 2q = 281 \quad \wedge \quad k - 2q = 1$$

$$\Rightarrow \quad k = 141 \quad \wedge \quad q = 70$$

Luego en (1) : $\mathrm{N} = 70^2 + 80$

$\therefore$ $\mathrm{N} = 4980$ RPTA. B

13.- Determinar el valor de a + b si el numeral $\overline{22ab}$ es un cuadrado perfecto.

A) 8 ***B) 9*** ***C) 10*** ***D) 11*** ***E) 12***

Resolución.-

Como $\overline{22ab}$ es un cuadrado perfecto, su raiz cuadrada es exacta, cuyo proceso de obtención mostramos al lado :

$$\begin{array}{rr|l} & \sqrt{\overline{22ab}} & 4\underline{\ \ } \\ 4^2 \rightarrow & 16 & 8\underline{7} \times \underline{7} = 609 \\ & 6ab & \\ & 609 & \\ & 000 & \end{array}$$

Podemos apreciar que para satisfacer la condición de exactitud , se deberá cumplir que :

$$a = 0 \quad \wedge \quad b = 9$$

$\therefore$ $a + b = 9$ RPTA. B

14.- *Encontrar un cuadrado perfecto de 4 cifras significativas donde los números formados por sus dos primeras y sus dos últimas cifras son también cuadrado perfectos. Dar la suma de sus cifras.*

A) 20 ***B) 16*** ***C) 17*** ***D) 19*** ***E) 25***

Resolución.-

Sea el número $\overline{abcd}$ el cuadrado perfecto buscado, donde $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ son también cuadrados perfectos ; entonces :

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\overline{abcd}} & 4 \leftarrow \\ 4^2 \rightarrow 16 & 81 \times 1 = 81 \\ \overline{cd} & \\ 81 & \\ 00 & \end{array}$$

La primera cifra de la raíz debe ser 4, pues si fuera mayor, $\overline{cd}$ sería de 3 cifras.

De este proceso se observa que : $\overline{ab} = 16 \quad \wedge \quad \overline{cd} = 81$

$\therefore \quad a + b + c + d = 16$ RPTA. B

15.- *Hallar un cuadrado perfecto de 4 cifras que comienza en 6 y termina en 9. Dar la suma de las cifras de dicho número.*

A) 25 ***B) 27*** ***C) 29*** ***D) 31*** ***E) 33***

Resolución.-

Por dato : $\overline{6ab9} = k^2$

Entonces, la raíz cuadrada de $\overline{6ab9}$ es exacta :

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\overline{6ab9}} & 8 \\ 8^2 \rightarrow 64 & 163 \times 3 = 489 \\ \overline{ab9} & \\ 489 & \\ 000 & \end{array}$$

Luego : $a = 8 \quad \wedge \quad b = 8$

$\therefore \quad \overline{6ab9} = 6889$ RPTA. D

16.- *¿Cuántos números existen tales que su raíz cuadrada por defecto es $4\frac{4}{7}$ con una aproximación de 2/7?*

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

La raíz cuadrada por defecto de N con una aproximación de 2/7, se calcula así :

$$\underbrace{\frac{2}{7}\sqrt{N\left(\frac{7}{2}\right)^2}}_{\text{Por defecto}}$$

Es decir : $$\underbrace{\frac{2}{7}\sqrt{N\left(\frac{7}{2}\right)^2}}_{\text{Por defecto}} = 4\,\frac{4}{7}$$

Transponiendo términos : $$\underbrace{\frac{2}{7}\sqrt{N\left(\frac{49}{4}\right)}}_{\text{Por defecto}} = \frac{32}{7}$$

Despejando se obtiene : $$\underbrace{\sqrt{N\left(\frac{49}{4}\right)}}_{\text{Por defecto}} = 16$$

Luego : $16^2 < N < 17^2$

Dividiendo entre 49/4 : $20 < N < 24$

Luego : $N \in \{21 ; 22 ; 23\}$

$\therefore$ Existen 3 números RPTA. C

17.- ¿Cuál es el menor número tal que al extraerle su raíz cúbica se obtiene residuo máximo siendo este múltiplo de 21?

A) 228 ***B) 342*** ***C) 204*** ***D) 216*** ***E) 511***

Resolución.-

Sea N el número buscado , entonces :

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{N} & q \\ \hline r & \end{array} \quad \Rightarrow \quad N = q^3 + r \quad ...(1)$$

Como "r" es máximo : $r = 3q\,(q + 1)$ ... (2)

Por dato : $r = \overset{\circ}{21}$

Luego : $3q\,(q + 1) = \overset{\circ}{21}$

$\Rightarrow \quad q(q+1) = \overset{\circ}{7}$

$\Rightarrow \quad q = \overset{\circ}{7} \quad \vee \quad q+1 = \overset{\circ}{7}$

$\Rightarrow \quad q_{min} = 6$

En (2) : $\quad r = 3\,(6)\,(7) \quad \Rightarrow \quad r = 126$

En (1) : $\quad N = 6^3 + 126$

$\therefore \quad \boxed{N = 342} \quad$ RPTA. B

18.- Al extraer la raíz cuadrada de un número se observó que 270 es lo máximo que se le puede sumar a dicho número para que su raíz cuadrada quede aumentada en 2 unidades. Si al resto original le falta 42 para ser máximo, dar la suma de cifras de dicho número.

A) 15 B) 17 C) 18 D) 12 E) 16

<u>Resolución</u>.-

Sea N el número :

$$\begin{array}{c|l} \sqrt{N} & q \\ \hline r_1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|l} \sqrt{N+270} & q+2 \\ \hline r_2 & \end{array}$$

$N = q^2 + r_1 \quad \dots (1) \qquad\qquad N + 270 = (q+2)^2 + r_2 \quad \dots (2)$

Como 270 es la cantidad máxima que se puede agregar para que "q" aumente en 2, r_2 es máximo, luego, por propiedad :

$$r_2 = 2\,(q+2) \quad \dots (\alpha)$$

Además, a r_1 le falta 42 para ser máximo :

$$r_1 + 42 = 2q$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = 2q - 42 \quad \dots (\beta)$$

Reemplazando (1), (α) y (β) en (2) , tendremos :

$$q^2 + 2q - 42 + 270 = (q+2)^2 + 2\,(q+2)$$

$$\Rightarrow \quad q^2 + 2q + 228 = q^2 + 4q + 4 + 2q + 4$$

$$\therefore \quad q = 55$$

Finalmente en (1) : $\quad N = 55^2 + 2\,(55) - 42$

$\therefore \quad \boxed{N = 3093} \quad$ RPTA. A

19.- Hallar un número de 5 cifras tal que su raíz cuadrada por defecto es igual a su complemento aritmético. Dar la suma de sus cifras.

A) 34 B) 35 C) 36 D) 37 E) 38

Resolución.-

Teniendo en cuenta que un número de 5 cifras tiene como raíz cuadrada por defecto a un número de tres cifras, establecemos :

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\overline{abcde}} & \overline{mnp} \\ \cline{2-2} r & \end{array}$$

Donde : $\quad \text{C. A.}\left(\overline{abcde}\right) = \left(\overline{mnp}\right) \quad \Rightarrow \quad a = 9 \quad \wedge \quad b = 9$

Luego, al elaborar el proceso de cálculo para la raíz cuadrada, se tendrá:

$$\begin{array}{rr|l} & & \overline{mnp} \\ & \sqrt{\overline{99cde}} & 315 \\ \cline{3-3} 3^2 \to & 9 & 61 \times 1 = 61 \\ & 9c & \\ \cline{3-3} & 61 & 625 \times 5 = 3125 \\ & 35de & \end{array}$$

Entonces : $\quad \text{C. A.}\left(\overline{99cde}\right) = 315$

De donde se deduce que : $\quad c = 6 \quad ; \quad d = 8 \quad ; \quad e = 5$

$$\therefore \quad a + b + c + d + e = 37 \qquad \text{RPTA. D}$$

20.- En una reunión hay 100 personas entre damas, caballeros y niños, siendo estos últimos la raíz cuadrada del total de damas. En un instante dado los caballeros que no bailaban eran una cantidad igual a la raíz cúbica del total de damas. ¿Cuántas damas no bailaban en ese instante?

A) 60 B) 36 C) 48 D) 40 E) 32

Resolución.-

Sean : D $\rightarrow$ Número de damas

C $\rightarrow$ Número de caballeros

N $\rightarrow$ Número de niños

Según los datos : $\quad N = \sqrt{D} \quad \wedge \quad$ Caballeros que no bailan $= \sqrt[3]{D}$

Luego, el número de damas debe ser un cuadrado perfecto y cubo perfecto a la vez, esto nos permite asegurar que es de la forma k^6.

Como dicho número debe ser menor que 100 : $D = 2^6 = 64$

Entonces : $N = \sqrt{64} = 8 \quad \wedge \quad C = 100 - (64+8) = 28$

También : Caballeros que no bailan $= \sqrt[3]{64} = 4$

$\Rightarrow$ Caballeros que bailan $= 28 - 4 = 24$

Ahora bien, como cada caballero baila con una dama , se deduce que :

Damas que bailan $= 24$

$\therefore$ $\boxed{\text{Damas que no bailan} = 64 - 24 = 40}$ RPTA. D

21.- *Se extrae la raíz cúbica y cuarta de un número. Resultan exactas y su suma es 320. ¿Cuántas divisiones tiene el número?*

A) 12 ***B) 13*** ***C) 25*** ***D) 26*** ***E) 14***

Resolución.-

Si las raices cúbica y cuarta de un número N son exactas, entonces N es de la forma :

$$N = k^{12}$$

Por dato : $\sqrt[3]{k^{12}} + \sqrt[4]{k^{12}} = 320$

Efectuando : $k^4 + k^3 = 320$

Factorizando : $k^3(k+1) = 4^3(5)$

$\Rightarrow \quad k = 4$

Entonces : $N = 4^{12} = (2^2)^{12} = 2^{24}$

$\therefore$ $\boxed{D(N) = 24 + 1 = 25}$ RPTA. C

22.- *Sabiendo que :* $\underbrace{111\ldots1}_{\text{"n" cifras}}\ \underbrace{555\ldots56}_{\text{"n" cifras}}$ *es un cuadrado perfecto. Hallar la suma de cifras de su raíz cuadrada.*

A) 2n + 1 ***B) 3n + 1*** ***C) 2n - 1*** ***D) 3n - 1*** ***E) 3n***

Resolución.-

Por dato se tiene que : $\underbrace{111\ldots1}_{\text{"n" cifras}}\ \underbrace{555\ldots56}_{\text{"n" cifras}} = k^2$

Descomponiendo polinómicamente en forma conveniente, se obtiene :

$$\underbrace{111\ldots1}_{\text{"}n\text{" cifras}} \times 10^n + \underbrace{555\ldots56}_{\text{"}n\text{" cifras}} + 1 = k^2$$

$$\underbrace{111\ldots1}_{\text{"}n\text{" cifras}} \times 10^n + 5 \times \underbrace{555\ldots56}_{\text{"}n\text{" cifras}} + 1 = k^2$$

Multiplicando por 9 a ambos miembros de la igualdad se tiene :

$$\underbrace{999\ldots9}_{\text{"}n\text{" cifras}} \times 10^n + 5 \times \underbrace{999\ldots9}_{\text{"}n\text{" cifras}} + 9 = 9k^2$$

Luego expresando en potencias de 10 :

$$(10^n - 1) \times 10^n + 5\,(10^n - 1) + 9 = (3k)^2$$

$$10^{2n} - 10^n + 5 \times 10^n - 5 + 9 = (3k)^2$$

$$10^{2n} + 4 \times 10^n + 4 = (3k)^2$$

Reconociendo el trinomio cuadrado perfecto: $(10^n + 2)^2 = (3k)^2$

Luego al extraer raíz cuadrada y despejar : $k = \dfrac{10^n + 2}{3}$

Transformando convenientemente : $k = \dfrac{10^n - 1}{3} + 1$

$$k = \underbrace{333\ldots34}_{\text{"}n\text{" cifras}}$$

Finalmente : $\boxed{\text{Suma de cifras de } k = 3n + 1}$ RPTA. B

23.- Hallar la suma de las cifras del resto al extraer la raíz cuadrada de un número de 40 cifras, todas nueve.

A) 90 B) 120 C) 150 D) 180 E) 240

<u>Resolución</u>.-

Si denotamos por "k" a la raíz cuadrada pedida , se tendrá que :

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\underbrace{999\ldots9}_{40 \text{ cifras}}} & k \\ \hline r & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{999\ldots9}_{40 \text{ cifras}} = k^2 + r$$

Sustituyendo el primer miembro : $10^{40} = k^2 + r$ ...(*)

Notese que la raíz cuadrada por exceso de 10^{40} - 1 es 10^{20} donde el resto por exceso es mínimo (es decir 1), entonces la raíz cuadrada por defecto es :

$$k = 10^{20} - 1$$

Y el resto es máximo, luego : $r = 2\,(10^{20} - 1)$

$$r = 2\,(\underbrace{999\ldots9}_{20\text{ cifras}})$$

$$r = \underbrace{199\ldots998}_{21\text{ cifras}}$$

$\therefore$ Suma de cifras de $r = 20\,(9) = 180$ RPTA. D

24.- Determinar el valor de a + b + c , si :

$$\overline{abc} = k^3 + 37$$

$$\overline{cba} = (k+1)^3 + 45$$

A) 7 ***B) 8*** ***C) 9*** ***D) 10*** ***E) 11***

<u>Resolución</u>.-

De los datos se sabe que : $\overline{abc} = k^3 + 37$ ... (1)

$\overline{cba} = (k+1)^3 + 45$ ... (2)

Nótese que : $k \in \{5 ; 6 ; 7 ; 8\}$ ... (3)

Restando (2) - (1) : $\overline{cba} - \overline{abc} = [(k+1)^3 + 45] - [k^3 + 37]$

Efectuando operaciones : $99\,(c - a) = 3k\,(k+1) + 9$

$$33\,(c - a) = k\,(k+1) + 3$$

Luego observando el primer miembro, podemos reconocer que :

$$k\,(k+1) + 3 = \overset{\circ}{11}$$

Y de (3), el único valor que satisface es : $k = 5$

Entonces al reemplazar en (1) : $\overline{abc} = 5^3 + 37 = 162$

$\therefore$ $a + b + c = 9$ RPTA. C

25.- La raíz cuadrada del número $\overline{88xyz0}$ es exacta. Hallar : x + y + z.

A) 6 ***B) 7*** ***C) 8*** ***D) 9*** ***E) 10***

Resolución.-

Como la raíz cuadrada de $\overline{88xyz0}$ es exacta, entonces es un cuadrado perfecto, luego : $z = 0$

Extrayendo su raíz cuadrada :

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\overline{88}\,\overline{xy}\,\overline{00}} & 9 \\ \cline{2-2} 9^2 \rightarrow \underline{81} & \\ 7xy & 18\underline{4} \times \underline{4} = 736 \\ \underline{736} \leftarrow & \\ 000 & \end{array}$$

De este proceso se deduce que : $x = 3 \quad \wedge \quad y = 6$

$\therefore \quad \boxed{x + y + z = 9}$ RPTA. D

26.- Hallar : a + b + c + d, si $\overline{6abcd6}$ es cubo perfecto.

A) 18 B) 15 C) 17 D) 20 E) 14

Resolución.-

Como $\overline{6abcd6}$ tiene 6 cifras, su raíz cúbica tendrá 2 cifras, es decir :

$$\overline{6abcd6} = \overline{mn}^3 \quad ......(*)$$

Como termina en 6 , se tendrá que : $n = 6$

"m" debe ser la raíz cúbica por defecto de $\overline{6ab}$, luego : $m = 8$

Entonces al reemplazar en (*) : $\overline{6abcd6} = 86^3$

Efectuando la potencia : $\overline{6abcd6} = 636056$

Luego : $\boxed{a + b + c + d = 3 + 6 + 0 + 5 = 14}$ RPTA. E

27.- Si $\overline{ab}$ es la raíz cúbica del cubo perfecto $\overline{abcd8}$; hallar : a + b + c + d.

A) 11 B) 12 C) 16 D) 15 E) 18

Resolución.-

Por dato se tiene que : $\overline{abcd8} = \overline{ab}^3$

Como el cubo perfecto termina en 8 , deducimos que : $b = 2$

Si "a" es la raíz cúbica por defecto de $\overline{ab}$, entonces : $a = 3$

Luego se tendrá que : $\overline{32cd8} = 32^3$

$\Rightarrow \quad \overline{32cd8} = 32768$

$\Rightarrow \quad c = 7 \wedge d = 6$

$\therefore \quad \boxed{a + b + c + d = 18}$ RPTA. E

28.- Reconstruir y dar como respuesta la suma de las cifras del radicando :

```
√ ****98 | ***
  **     |------
   ***   |
    **   |
   ----  |
    4*** |
    **** |
   ----- |
     4** |
```

A) 31 ***B) 32*** ***C) 33*** ***D) 34*** ***E) 35***

Resolución.-

```
                          ┌── La primera cifra debe ser 4
                          ▼
   √ ____98  |  4 1 _
4² → 16      |--------------
     ___     |  81 × 1 = 81
      81     |--------------
      4___   |  825 × 5 = 4125
      4125   |
       4__   |
```

Entonces, completando :

```
√ 172698 | 415
  16     |--------------
   126   | 81 × 1 = 81
    81   |--------------
    4598 | 825 × 5 = 4125
    4125 |
     473 |
```

Luego, la suma de cifras del radicando es :

$\boxed{1 + 7 + 2 + 6 + 9 + 8 = 33}$ RPTA. C

29.- Al extraer la raíz cuadrada del número $\overline{14abcd64}$ se obtuvo el número $\overline{abcd}$. Dar :

$a + b + c + d$.

A) 18 ***B) 21*** ***C) 15*** ***D) 24*** ***E) 17***

<u>Resolución</u>.-

Aplicando el método para extraer la raíz cuadrada :

$$\begin{array}{r|l}
 & a = 3 \\
\sqrt{14'ab'cd'64} & 379 \\
\hline
3^2 \rightarrow \underline{9} & \\
5ab & 6\underline{7} \times \underline{7} = 469 \rightarrow b = 7 \\
\underline{469} & \\
\hline
537 - 469 \rightarrow 68cd & \\
\underline{6741} & 74\underline{9} \times \underline{9} = 6741 \rightarrow c = 9 \\
\hline
1--64 & \\
\underline{15164} & 758\underline{2} \times \underline{2} = 15164 \rightarrow d = 2 \\
00000 &
\end{array}$$

$\therefore$ $\boxed{a + b + c + d = 21}$ RPTA. B

30.- Si $\overline{xyzwmn5}$ es la menor potencia cuarta perfecta ; hallar : $x + y + z + w + m + n$.

A) 11 ***B) 12*** ***C) 13*** ***D) 14*** ***E) 15***

<u>Resolución</u>.-

Como $\overline{xyzwmn5}$ tiene 7 cifras, su raíz cuarta tendrá 2 cifras, es decir :

$$\overline{xyzwmn5} = \overline{ab}^4 \text{ ....(*)}$$

Como el número termina en 5 : $b = 5$

"a" es la raíz cuarta por defecto de $\overline{xyz}$: $\Rightarrow$ $a_{min} = 3$

Luego al reemplazar en (*) : $\overline{xyzwmn5}_{min} = 35^4$

$$\overline{xyzwmn5}_{min} = 1500625$$

$\therefore$ $\boxed{x + y + z + w + m + n = 14}$ RPTA. D

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL I

1.- Hallar un número sabiendo que sus raices cuadrada y cúbica que son inexactas, difieren en 180. Dar la suma de sus cifras.

A) 9 B) 18 C) 27
D) 36 E) 15

2.- En el centro de un terreno de forma cuadrada, se construye una cabaña también de forma cuadrada. Si la distancia entre el límite del terreno y el de la cabaña es $10m$; calcular el perímetro del terreno sabiendo que la superficie sin construir es 4 000 m^2.

A) 820 B) 950 C) 900
D) 2 050 E) 860

3.- Una caja con volumen de 180 unidades cúbicas se construyó cortando de cada extremo de una lámina cuadrada, cuadrados de 5 unidades lineales de lado y doblando lo restante. Encontrar el área de la lámina original.

A) 144 B) 196 C) 225
D) 256 E) 289

4.- Un jardinero quiere sembrar un cuadrado de dalias; con este fin, planta sus dalias a iguales distancias unas de otras, tanto a lo largo como a lo ancho. La primera vez le faltaron 15; la segunda puso una menos en todo sentido y entonces le sobraron 34 ¿Cuántas dalias tenía?

A) 25 B) 625 C) 610
D) 635 E) 591

5.- Un general desea formar con 1 152 hombres un cuadrado de centro vacío, que puede contener 42 hombres por lado ¿Cuántos hombres debe haber en la columna exterior del cuadrado?.

A) 51 B) 52 C) 53
D) 54 E) 55

6.- En una fiesta a la cual concurrieron menos de 2000 personas, se observó en cierto momento que el número de mujeres que baila es k^3 y el número de las que no baila es k; el número de hombres que baila es k_1^2 y el número de los que no bailan es k_1 ¿Cuál fue el número de asistentes si es el máximo posible?

A) 1 500 B) 1 458 C) 1 484
D) 1 485 E) 1 494

7.- Hallar : $a + b + c + d$, si : $\overline{6abcd6}$ es un cubo perfecto.

A) 14 B) 15 C) 17
D) 18 E) 20

8.- Hallar un número entero N sabiendo que al extraer la raíz cuadrada se obtiene por resto 7 y si le agregamos 36 a N, la raíz cuadrada aumenta en una unidad y es exacta. Dar la cifra de mayor orden del número.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 7 E) 8

9.- Un numeral capicúa de 5 cifras $\overline{abcba}$ tiene como raíz cuadrada a otro capicúa $\overline{mnm}$. Calcular : $a + b + m + n$, si la raíz cuadrada de $\overline{mnm}$ también es capicúa.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

10.- Si a un entero se le suma 167 su raíz aumenta en 4 unidades y el resto se hace máximo. Hallar el número si el resto primitivo fue 17. La suma de cifras del número es:

A) 12 B) 15 C) 18

D) 9 E) N.A.

11.- Al extraer la raíz cuadrada de un número obtuvimos 17 de resto y al extraer la raíz cuadrada de su cuádruple obtuvimos 27 de resto. Dar el resto de dividir dicho numero entre 11.

A) 5 B) 7 C) 9

D) 4 E) N.A.

12.- Hallar el menor número de 5 cifras sabiendo que tanto el residuo de su raíz cuadrada como el de su raíz cúbica son máximo. Dar la suma de sus cifras.

A) 18 B) 15 C) 12

D) 24 E) N.A.

13.- Al extraer la raíz cuadrada de un número obtuvimos 23 de resto y al extraer la raíz cuadrada de su cuádruplo obtuvimos 19 de resto. La suma de cifras del numero es:

A) 14 B) 15 C) 17

D) 23 E) N.A.

14.- ¿Cuántos números menores que 10 000 al extraer su raíz cúbica dan como resto el máximo posible, siendo éste múltiplo de 7?

A) 5 B) 7 C) 2

D) 8 E) N.A.

15.- ¿Cuántos números existen cuya raíz cuadrada es 52 y cuya raíz cúbica es 13?

A) 41 B) 40 C) 39

D) 42 E) N.A.

16.- Se sabe que el número de la forma $\overline{a(a+1)(a+2)(3a)(a+3)}$ es un cuadrado perfecto. Calcular la suma de cifras de su raíz cuadrada.

A) 12 B) 15 C) 16

D) 11 E) 18

17.- La suma de un número, de su raíz cuadrada y de su resto que es máximo da 644. Hallar el número y dar el resto de extraer su raíz cúbica.

A) 58 B) 43 C) 72

D) 63 E) 51

18.- Hallar un cubo perfecto de la forma $\overline{35abc77}$. Dar : $a + b + c$.

A) 13 B) 14 C) 15

D) 5 E) N.A.

19.- Hallar el número tal que al extraerle su raíz cúbica se obtenga como residuo el máximo, siendo éste un múltiplo de 36. Dicho número está entre :

A) 40 y 60 D) 150 y 300

B) 60 y 90 E) N.A.

C) 90 y 150

20.- Hallar un número sabiendo que la suma de los restos de su raíz cúbica es igual a 8 587 y que el resto por exceso excede en 3 463 al resto por defecto. Dar su suma de cifras.

A) 21 B) 23 C) 25

D) 29 E) N.A.

21.- Calcular la raíz cuadrada por defecto de 40 con un error menor que 2/3.

A) 6 B) 6,2 C) 6,3

D) 6,4 E) N.A.

22.- Calcular la raíz cúbica por exceso de 50 con un error menor que 2/5.

A) 3,6 B) 4 C) 4,2

D) 3,9 E) N.A.

23.- ¿Cuántos $\overline{abc}$ existen cuyo resto al extraerles su raíz cuadrada es igual a dicha raíz?

A) 22 B) 18 C) 15

D) 12 E) N.A.

24.- Un comandante dispone sus tropas formando un cuadrado y ve que le quedan fuera 36 hombres. Entonces pone un hombre más en cada lado del cuadrado y ve que le faltan 75 hombres para completar el cuadrado. ¿Cuántos hombres hay en la tropa?

A) 3 061 B) 55 C) 61

D) 100 E) 3 000

25.- Para pavimentar un patio cuadrado se emplean losetones de $50 \times 50\ cm$, si el patio tuviera un metro más por cada lado, se habría necesitado 140 losetones más. ¿Cuántos metros mide cada lado del patio?

A) 14,5 B) 16 C) 12,5

D) 17 E) 18

26.- Al extraer la raíz cuadrada del número $\overline{14abcd64}$ se obtuvo el número $\overline{abcd}$.

A) 18 B) 21 C) 15

D) 24 E) 25

27.- ¿Cuántos números de 2 cifras cuya raíz cuadrada es inexacta son divisibles entre su raíz cuadrada por defecto?

A) 12 B) 14 C) 13

D) 16 E) 15

28.- Al extraer la raíz cuadrada de un número se observó que 270 es lo máximo que se le puede sumar a dicho número para que su raíz cuadrada quede aumentada en 2 unidades. Si al resto original le falta 42 para ser máximo. Dar la suma de cifras de dicho número.

A) 15 B) 17 C) 18

D) 12 E) 16

29.- La raíz cuadrada por defecto con una aproximación, menor que 0,1 de una fracción irreductible es 1,4. Sabiendo que la suma de sus términos es 71, ¿Cuántas fracciones cumple esta condición?.

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) Más de 3

30.- La raíz cuadrada por defecto con una aproximación, menor que 0,1 de una fracción irreductible es 1,2. Sabiendo que la suma de sus términos de dicha fracción es 38, calcular la diferencia entre dichos términos.

A) 6 B) 8 C) 10

D) 5 E) N.A.

31.- ¿Qué tiempo emplearía si la más veloz hace la tercera parte y luego la otra acaba el resto?

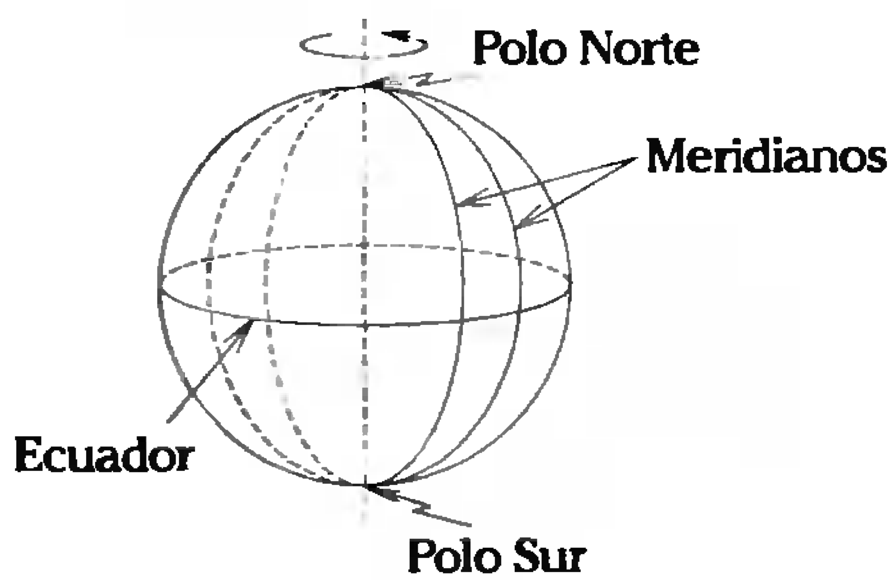
A) 2^{36} B) 2^{48} C) 2^{54}

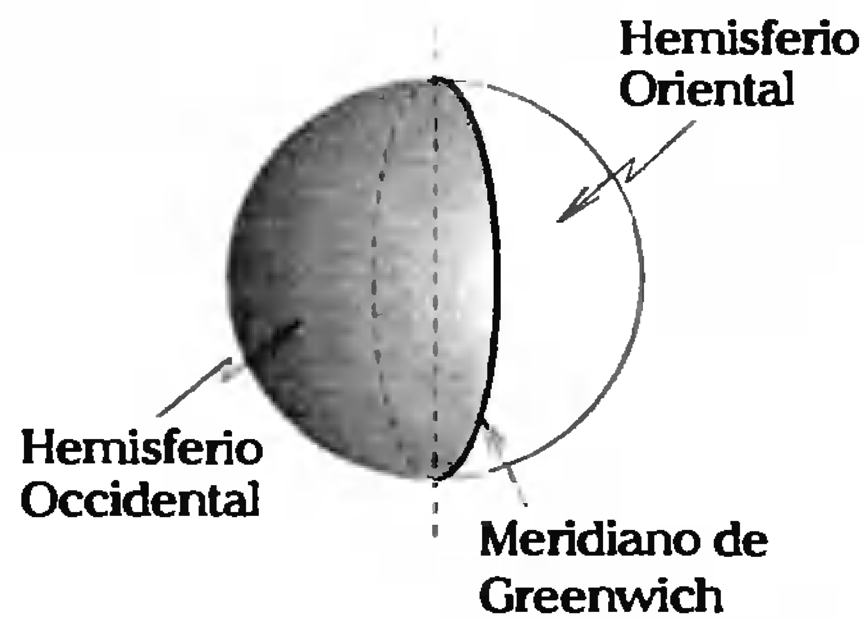
D) 2^{72} E) N.A.

12 LONGITUD Y TIEMPO

12.1 MERIDIANOS

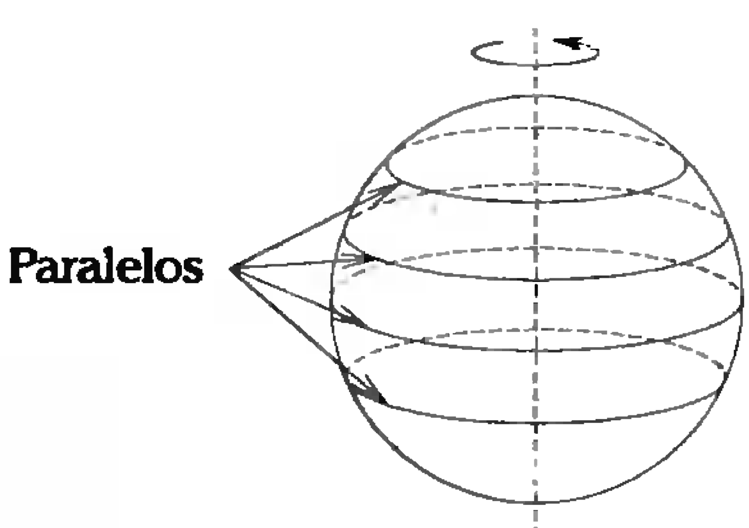
Son circunferencias máximas que pasan por los polos de la tierra y cortan perpendicularmente al Ecuador. Por convención se considera al meridiano de Greenwich como el meridiano principal que divide a la tierra en dos hemisferios : Oriental y Occidental

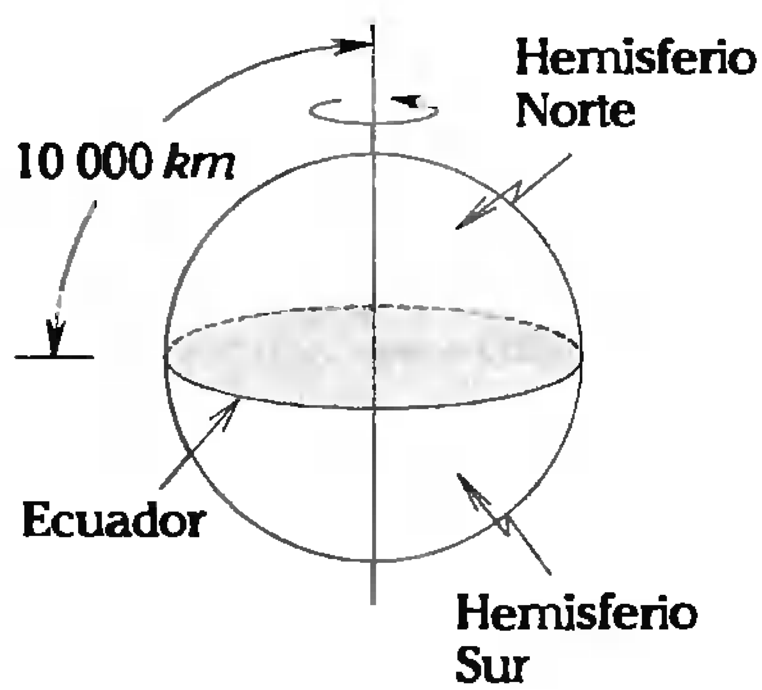




12.1A PARALELOS.

Son circunferencias transversales que cortan perpendicularmente a los meridianos. El paralelo principal es el Ecuador que es el de circunferencia máxima y divide a la tierra en dos hemisferios : Norte y Sur.





12.2 SISTEMA DE COORDENADAS GEOGRAFICAS

Para fijar la localización de un punto o lugar sobre la superficie de la tierra, se hace uso de dos coordenadas : Latitud y Longitud.

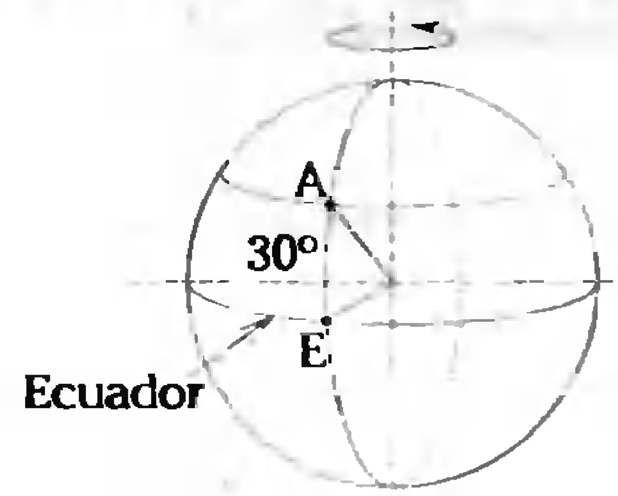
12.2A LATITUD

Es la distancia medida en arco que hay desde el Ecuador hasta el paralelo que pasa por el lugar en observación, medido en su meridiano. Varía de 0° a 90° y puede ser Norte o Sur.

Latitud de A = $m\ (\widehat{EA})$ Norte

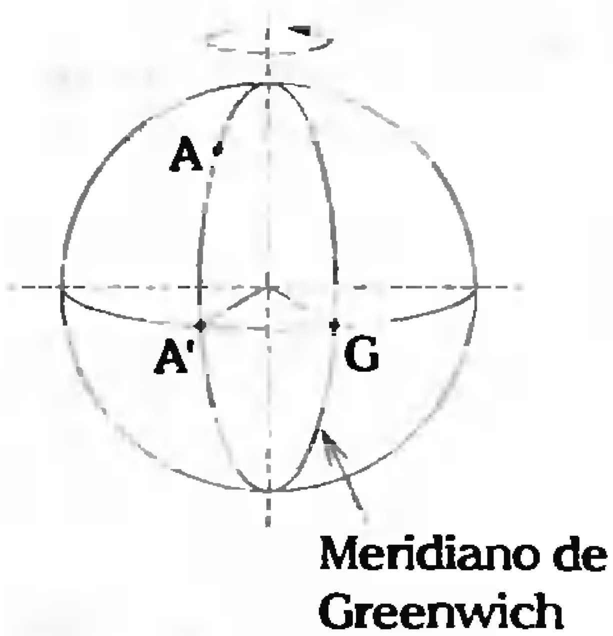
Del ejemplo, se puede expresar la latitud de A :

Latitud de A = 30° Norte



12.2B LONGITUD

Es la distancia, medida en arco (sobre el paralelo del Ecuador), que hay desde el Meridiano de Greenwich hasta el meridiano que pasa por el lugar de observación. Varía de 0° a 180° y puede ser Este u Oeste.



Longitud de A = $m\ (\widehat{A'G})$ Este

12.2C TIEMPO LEGAL O TIEMPO OFICIAL

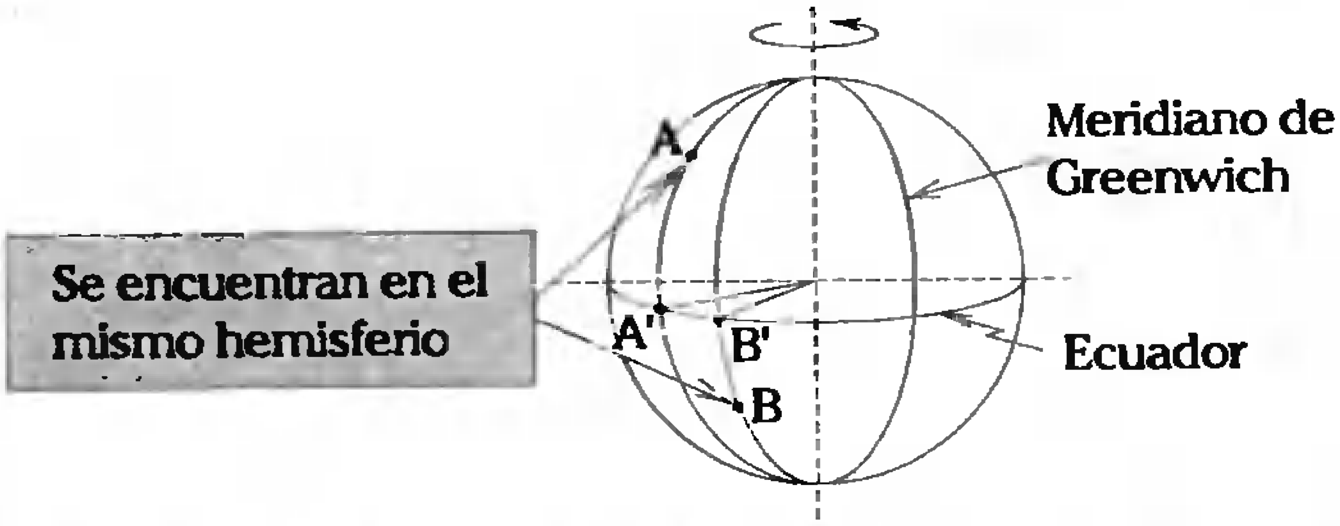
Por convención horaria internacional se ha convenido en dividir a la superficie de la tierra en 24 partes iguales ó 24 "*Husos Horarios*", correspondiendo a cada huso un ángulo de 15° siendo el Huso cero el que contiene al meridiano de Greenwich.

Los pueblos que se encuentran dentro de estos husos horarios que se extienden de polo a polo, limitados por los meridianos, tendrán la misma hora.

12.2D DIFERENCIA DE LONGITUDES

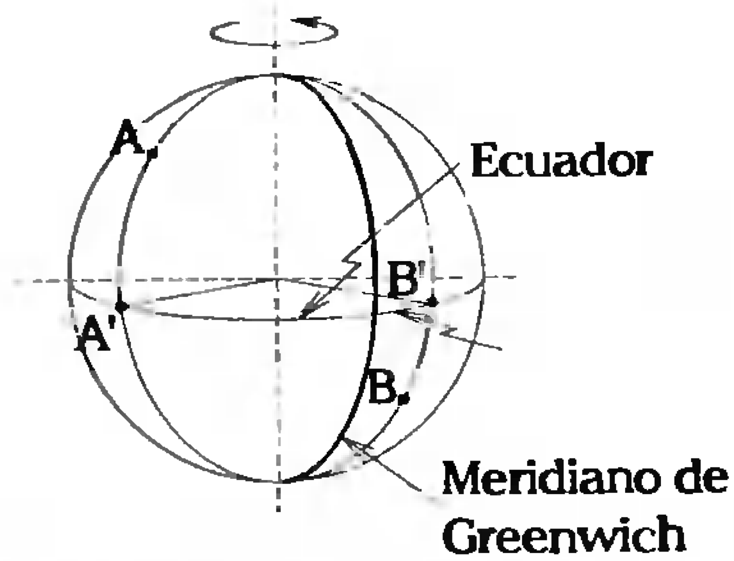
Es la distancia, medida en arco (sobre el Ecuador) que existe entre los meridianos que pasan por dos puntos de la superficie terrestre.

CASO 1 .- Si los puntos se encuentran en el mismo hemisferio :



Diferencia de Longitudes (AB) = $m\ (\widehat{A'B'})$ = Long(A) - Long(B)

Caso 2 .- Si los puntos se encuentran en distinto hemisferio :



Diferencia de Longitudes (AB) = $m\ (\widehat{A'B'})$ = Long (A) + Long (B)

12.E RELACIONES ENTRE LONGITUD Y TIEMPO

TIEMPO		LONGITUD
24 horas	< >	360°
1 horas	< >	15°
1 min	< >	15'
1 seg	< >	15"

Para calcular la diferencia de tiempo entre dos puntos se divide su diferencia de longitudes entre 15.

Para calcular la diferencia de longitudes entre dos puntos se multiplica su diferencia de tiempo por 15.

OBSERVACIONES FINALES

Como la tierra realiza su movimiento de rotación en el sentido Oeste - Este :

Todo punto ubicado al Este de otro tendrá la hora más adelantada.

Todo punto ubicado al Oeste de otro tendrá la hora más atrasada.

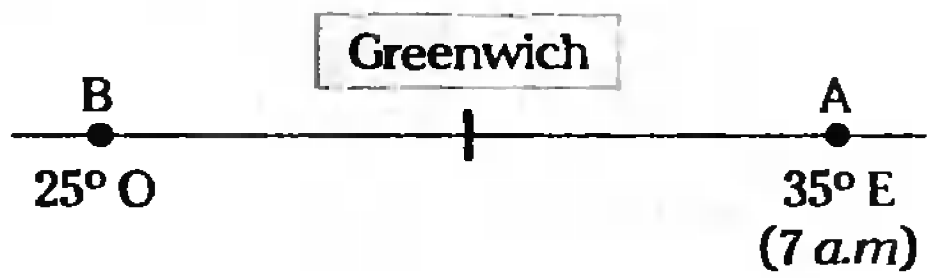
PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Una ciudad A está situada en un punto sobre la tierra tal que su longitud es 35º Este y otra ciudad B en un punto de longitud 25º Oeste. Determinar la hora en B cuando en A son las 7 a.m.

A) 11 am. B) 10 am. C) 3 am. D) 4 am. E) 7 am.

<u>Resolución</u>.-

Elaboramos un gráfico para ayudarnos :



* Como están en distinto hemisferio :

$$\text{Diferencia de Long} = 25 + 35 = 60^\circ$$

* La diferencia de tiempo estará dada por :

$$\frac{60^\circ}{15} = 4\,h$$

* Como B está al Oeste de A :

$$\text{Hora en B} = 7\text{ a.m.} - 4\,h$$

$\therefore$ Hora en B = 3 a.m. RPTA. C

2.- Cuando en Cajamarca son las 11h 46 min 05 seg, en Puno son las 12h 19min 51seg. Dígase ¿Cuál es la diferencia de longitudes entre estas dos ciudades?.

A) 8º 26' 30" B) 8º 26' C) 8' 06' 30"

D) 8º 30' 26" E) 8º 06'

<u>Resolución</u>.-

La diferencia de horas entre Cajamarca y Puno es :

$$12\,h\ 19\,min\ 51\,seg - 11\,h\ 46\,min\ 05\,seg = 33\,min\ 46\,seg$$

Para calcular la diferencia de longitudes, se multiplica la diferencia de horas por 15 :

$$(33\,min\ 46\,seg) \times 15 = 8^\circ\ 26'\ 30''$$

$\therefore$ Diferencia de Longitudes = 8° 26' 30" RPTA. A

3.- ¿Qué hora es en Washington (77º 3' 56" Oeste) cuando en París (2º 20' 14" Este) son las 7am. ?

A) 12 h 41 m 24 s am. del mismo día

B) 1 h 42 m 231/3 s am. del mismo día

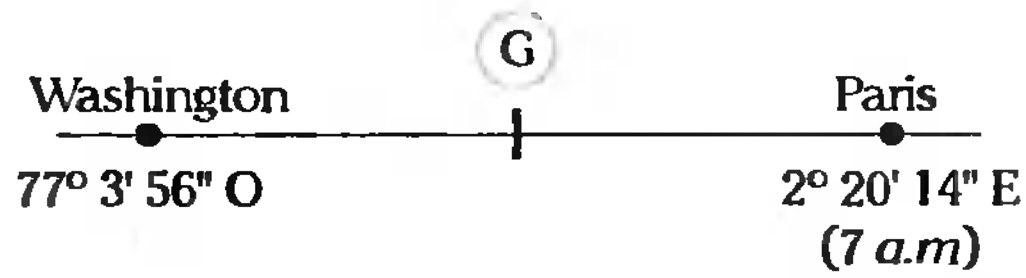
C) 3 h 42 m 22 1/3 s. am. del mismo día

D) 2 h 41 m 24 s am del mismo día

E) 2 h 42 m 221/3 s am. del mismo día

<u>Resolución</u>.-

Elaboramos un gráfico para ayudarnos :



Como están en distinto hemisferio, su diferencia de longitudes se obtendrá así :

$$77^\circ\,3'\,56'' + 2^\circ\,20'\,14'' = 79^\circ\,24'10''$$

Para calcular la diferencia de tiempo se divide la diferencia de longitudes entre 15 :

$$\frac{79^\circ 24'10''}{15} = 5\,h\ 17\,min\ 36\,\frac{2}{3}\,seg.$$

Como Washington está al Oeste de París , su hora será más atrasada :

$$\text{Hora en Washington} = 7\,h - 5\,h\ 17\,min\ 36\,\frac{2}{3}\,seg.$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{Hora en Washington} = 1\ h\ 42\ min\ 23\frac{1}{3}\ seg} \qquad \text{RPTA. B}$$

4.- Cuando es mediodía en A ¿Qué hora es en B?

Long de A : 20º 20' 15" Este

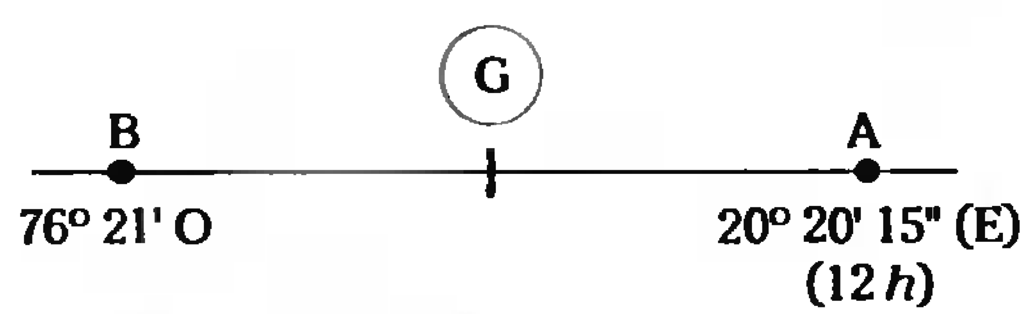
Long de B : 76º 21' Oeste

A) 6 h 5 min 15 seg am. ***B) 6 h 44 min 15 seg am.*** ***C) 5 h 33 min 15 seg am.***

D) 6 h 45 min 15 seg am. ***E) 6 h 35 min 15 seg am.***

<u>Resolución</u>.-

Elaboramos un gráfico para ayudarnos :



La diferencia de longitudes es :

$$76^\circ\,21' + 20^\circ\,20'\,15'' = 96^\circ\,41'\,15''$$

Asi la diferencia de horas viene dada por :

$$\frac{96°41'15"}{15} = 6\,h\ 26\,min\ 45\,seg$$

Como "B" está al Oeste de "A", su hora es más adelantada :

$$\text{Hora en B} = 12\,h - 6\,h\ \ 26\,min\ 45\,seg$$

$$\therefore \quad \text{Hora en B} = 5\,h\ 33\,min\ 15\,seg\ \text{am} \qquad \text{RPTA. C}$$

5.- La longitud de A es 22º 30' Oeste y cuando en A son las 10h 42min 32seg, en B son las 3h 07min 41seg del mismo día ¿Cuál es la longitud de B?

A) 113º 42'45" O ***B) 142º 36'15" O*** ***C) 136º 42' 45º O***

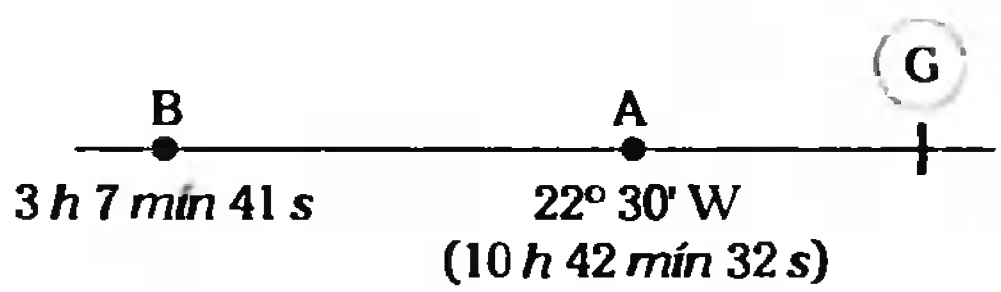
D) 136º 12' 45" O ***E) 113º 12' 45" O***

<u>Resolución</u>.-

Hora en A : $10\,h\ 42\,min\ 32\,seg$.

Hora en B : $3\,h\ 07\,min\ 41\,seg$.

Como en B es más temprano que en A, entonces B está al Oeste de A :



La diferencia de hora es :

$$10\,h\ 42\,min\ 32\,seg - 3\,h\ 07\,min\ 41\,seg = 7\,h\ 34\,min\ 51\,seg$$

Entonces la diferencia de longitudes es :

$$(7\,h\ 34\,min\ 51\,seg) \times 15 = 113°\ 42'\ 45"$$

Luego, la longitud de B será :

$$\text{Long de B} = 22°\ 30' + 113°\ 42'45"$$

$$\therefore \quad \text{Long de B} = 136°\ 12'45"\ \text{Oeste} \qquad \text{RPTA. D}$$

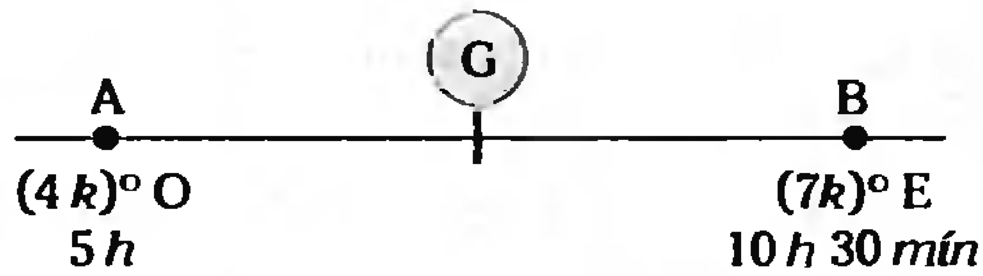
6.- Dos ciudades A y B están en Hemisferios opuestos de tal manera que la longitud de A es a la longitud de B como 4 es a 7. Si cuando en A son las 5 horas en B son las 10 h 30min ¿Cuál es la longitud de B?

A) 7º 30' E ***B) 7º 30' O*** ***C) 52º 30' E***

D) 52º 30' O ***E) 30º O***

Resolución.-

Como en B es más tarde que en A, la ubicación de A y B será tal como se indica en el siguiente esquema:



La diferencia de horas está dada por :

$$10\,h\ 30\text{ min} - 5\,h = 5\,h\ 30\text{ min}$$

Luego, la diferencia de longitudes será :

$$(5\,h\ 30\text{ min}) \times 15 = 82^\circ\,30'$$

Entonces : $\text{Long(A)} + \text{long(B)} = 82^\circ 30'$

Y de los datos : $4\,k + 7\,k = 82^\circ\,30'$

$$11\,k = 82^\circ\,30'$$

$$k = 7^\circ\,30'$$

$$\therefore \quad \text{Long (B)} = 7(7^\circ\,30')\ \text{E}$$

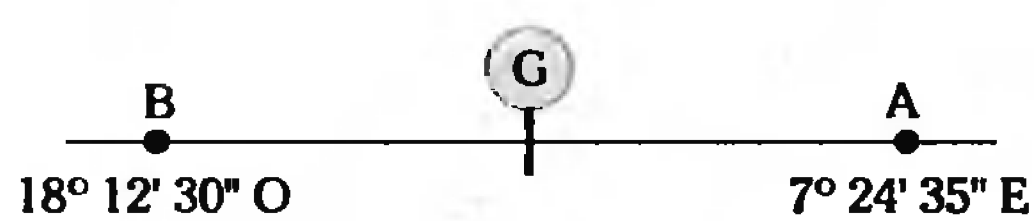
$$\therefore \quad \text{Long (B)} = 52^\circ\,30'\ \text{E}$$ RPTA. C

7.- Las longitudes de dos ciudades A y B son 7º 24' 35" Este y 18º 12' 30" Oeste. Un auto parte de A en dirección a B a las 17h 40min del día 19 de Setiembre y llega a B después de 6 h 20min 33seg de recorrido. ¿Qué hora es en la ciudad B cuando llegó el auto?

A) 15 h 57 min 31 2/3 seg del mismo día
B) 15 h 57 min 31 2/3 seg del día siguiente
C) 15 h 57 min 31 2/3 seg del día anterior
D) 22 h 18 min 04 2/3 seg del día siguiente
E) 22 h 18 min 04 2/3 seg del mismo día

Resolución.-

Elaboramos un gráfico para ayudarnos :



La diferencia de longitudes está dada así :

$$18^\circ\,12'\,30'' + 7^\circ\,24'\,35'' = 25^\circ\,37'\,05''$$

La diferencia de horas es :

$$\frac{25°37'05''}{15} = 1\,h\ 42\,m\ 28\ 1/3\,seg.$$

Como B está al Oeste de A, su hora es más atrasada, luego, cuando el auto sale de A a las 17 *h* 40 *min*, en B son :

$$17\,h\ 40\,min - 1\,h\ 42\,min\ 28\ 1/3\,seg = 15\,h\ 57\,min\ 312/3\,seg.$$

Luego, como el viaje duró 6 *h* 20 *min* 33 *seg*, la hora H a la que llegó el auto llegó a B se obtiene mediante la siguiente suma :

$$H = 15\,h\ 57\,min\ 312/3\,seg + 6\,h\ 20\,min\ 33\,seg.$$

$$\therefore \quad H = 22\ h\ 18\ min\ 04\ 2/3\ seg \qquad \text{RPTA. E}$$

8.- Nueva York tiene 73º 57' 45" Oeste y Brest tiene 4º 29' 45" Oeste. Si se envía un cable de Brest hacía Nueva York a las 4 de la tarde. ¿Qué hora será en Nueva York cuando se entregue el cable al destinatario suponiendo que transcurre una hora y media entre la expedición del cable y su entrega al destinatario?

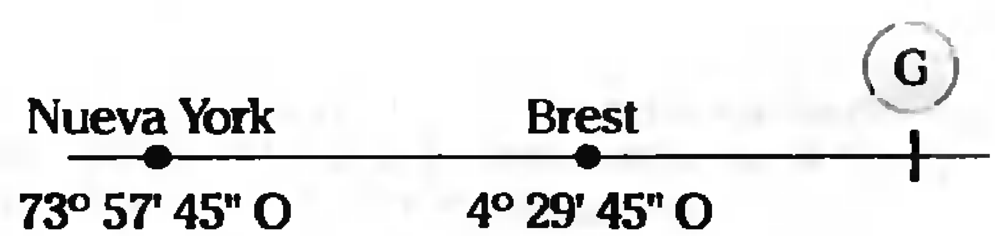
A) 11 h 22 min 08 seg am. ***D) 8 h 37 min 52 seg pm.***

B) 12 h 52 min 08 seg am. ***E) 7 h 7 min 52 seg pm.***

C) 9 h 52 min 08 seg am.

Resolución.-

Elaboramos un gráfico para ayudarnos :



Como se encuentran en el mismo hemisferio su diferencia de longitudes es :

$$73°\ 57'\ 45''' - 4°\ 29'\ 45'' = 69°\ 28'$$

La diferencia de horas estará dada por :

$$69°\ 28' \div 15 = 4\,h\ 37\,min\ 52\,seg$$

Como Nueva York está al Oeste de Brest, su hora será más atrasada, entonces en el momento en que se envía el cable de Brest a Nueva York (4pm = 16 horas) en nueva York son :

$$16\,h - 4\,h\ 37\,min\ 52\,seg = 11\,h\ 22\,min\ 08\,seg$$

Como la entrega del cable demoró 1 *h* 30 *min*, en Nueva York, cuando el cable llega a Brest, son:

$$H = 11\,h\ 22\,min\ 08\,seg + 1\,h\ 30\,m$$

$$\therefore \quad H = 12\ h\ 52\ min\ 08\ seg \qquad \text{RPTA. B}$$

9.- Una persona que se encuentra en una ciudad cuya ubicación es 30º E viaja con rumbo al Oeste. Al partir su avión observó su reloj y marcaba las 11 : 00pm. Hallar la ubicación geográfica (longitud) de su destino si al llegar tuvo que retrasar su reloj 5 horas.

A) 30º O ***B) 45º O*** ***C) 35º O*** ***D) 75º O*** ***E) 20º O***

Resolución.-

El viaje duró : $11\,h - 5\,h = 6$ horas

Cuando el avión llegó a su destino :

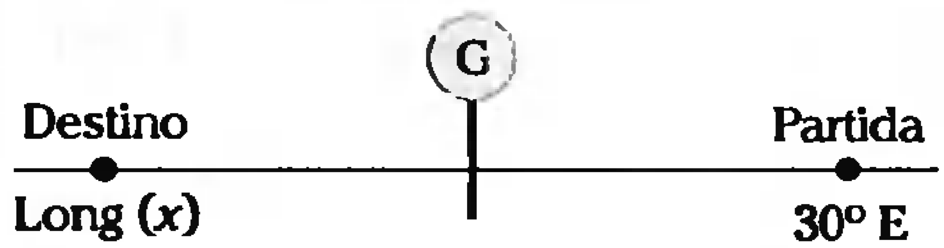
Hora en la ciudad de partida = 11 pm

Hora en la ciudad de destino = 11 - 5 = 6 pm.

La diferencia horaria es 5 horas, luego la diferencia de longitudes estará dada así :

$$5 \times 15 = 75^{\circ}$$

Entonces empleando el siguiente gráfico, diremos que :



Luego se concluye que : $\text{Long}(x) + 30^{\circ} = 75^{\circ}$

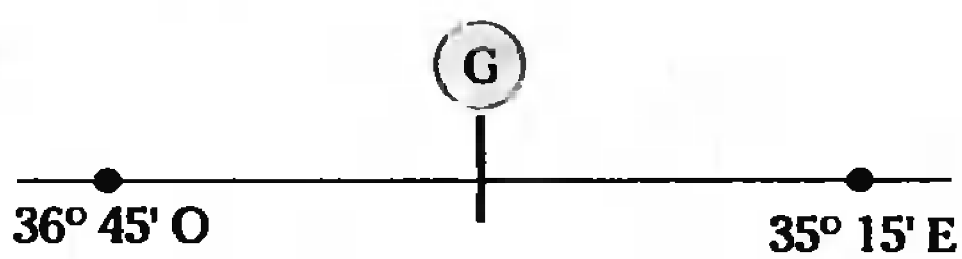
$\therefore$ $\boxed{\text{Long}\ (x) = 45^{\circ}\ \text{O}}$ RPTA. B

10.- Las longitudes de dos puntos ecuatoriales son 35º 15' Este y 36º 45' Oeste. Determinar en kilómetros la distancia entre estos dos puntos, suponiendo que la tierra es completamente esférica.

A) 6 500 km ***B) 7 000 km*** ***C) 7 500 km*** ***D) 10 250 km*** ***E) 8 000 km***

Resolución.-

Elaboramos un gráfico para ayudarnos :



La diferencia de longitudes es :

$$36^{\circ}\,45' + 35^{\circ}\,15' = 72^{\circ}$$

Luego se sabe que la longitud de un cuadrante es 10000 km :

$$90^{\circ} \longrightarrow 10000\ km$$

$$72^{\circ} \longrightarrow x$$

Aceptando el hecho de que entre los arcos y la longitud de los arcos ,aplicaremos una regla de tres simple :

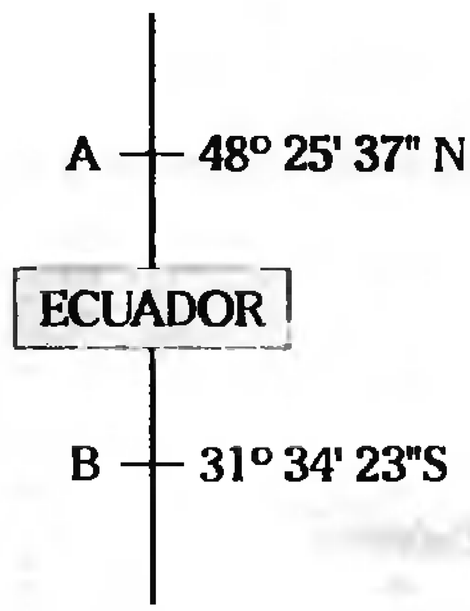
$$\therefore \qquad \boxed{x = 8000\ km} \qquad \text{RPTA.}$$

11.- Dos ciudades A y B se ubican sobre un mismo meridiano : La primera está a 48º 25' 37" Sur de latitud. ¿Qué distancia, en kilómetros, hay entre A y B?

A) 4 444,$\hat{4}$ km B) 6 666, $\hat{6}$ km C) 8 888, $\hat{8}$ km D) 10 000 km E) 3 333,3km

<u>Resolución</u>.-

Elaboraremos ahora un esquema distinto de los anteriores problemas por que se trata de dos ubicados sobre un meridiano , razón por lo cual el gráfico ubica a los puntos en una línea vertical :



La diferencia de latitudes es :

$$48^\circ 25' 37" + 31^\circ 34' 23" = 80^\circ$$

Luego, por regla de tres :

$$90^\circ \longrightarrow 10000\ km$$
$$80^\circ \longrightarrow x$$

$$\therefore \qquad \boxed{x = 8\ 888,\ \hat{8}\ km} \qquad \text{RPTA. C}$$

12.- ¿Qué distancia hay entre dos puntos :

A : 13º 17' 32" Oeste B : 15º 30' 28" Este

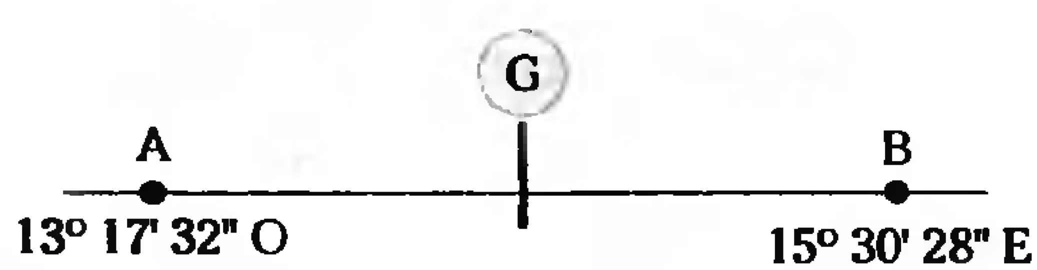
Qué están situados en el paralelo ecuatorial (Radio de la tierra ≈ 6400 km)

A) 32 153 km B) 3 215, 36 km C) 1 024,12 km

D) 512,20 km E) 2 048, 12 km

<u>Resolución</u>.-

Elaboramos un gráfico para ayudarnos :



La diferencia de longitudes es :

$$13^\circ\,17'\,32'' + 15^\circ\,30'\,28'' = 28^\circ\,48' = 1728'$$

Luego : $90^\circ <> 5\,400'$

Por regla de tres simple :

$$\begin{array}{ll} 5400' & 6400 \times \dfrac{\pi}{2} \\ 1728' & x \end{array}$$

$\therefore$ $\boxed{x = 3\,215{,}36\ km}$ RPTA. B

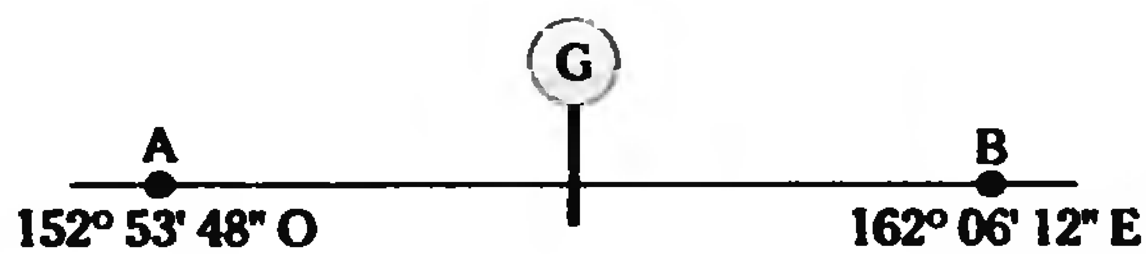
13.- La longitud de una ciudad A es 152º 53'48" Oeste y la de B es 162º 06'12" Este. Un avión que cubre la ruta AB avanza 9º de longitud en cada hora. ¿A qué hora debe partir de A para estar en B a las 15 horas?

A) 16 h del día anterior ***B) 14 h del día anterior*** ***C) 13 h del día anterior***

D) 12 h del día anterior ***E) 15 h del día anterior***

<u>Resolución</u>.-

Elaboramos un gráfico para ayudarnos :



Como se encuentran en distinto hemisferio, la diferencia de longitudes es :

$$152^\circ\,53'\,48'' + 162^\circ\,06'\,12'' = 315^\circ$$

Para ir de A hacía B, el avión recorrerá la ruta más corta, es decir :

$$360^\circ - 315^\circ = 45^\circ$$

Como en 1 hora, el avión; recorre 9° de longitud, el viaje dura :

$$45^\circ \div 9^\circ = 5 \text{ horas}$$

La diferencia de horas entre A y B es :

$$315 \div 15 = 21 \text{ horas}$$

Luego, cuando el avión llega a B a las 15 horas, en A son :

$$15\,h - 21\,h = 18 \text{ horas del día anterior}$$

Como el viaje duró 5 horas, el avión salió de A a las :

$\therefore$ $\boxed{18\,h - 5\,h = 13\,h \text{ del día anterior}}$ RPTA. C

14.- Un avión sale de una ciudad A de longitud 26º 23' 43" E hacía B. Luego de 6 h 25 min de recorrido llega a B el mismo día y a la misma hora que partió de A. ¿Cuál es la longitud de B?

A) 96º 15' E ***B) 96º 15' O*** ***C) 69º 51' 17" O***

D) 69º 51' 17" O ***E) 68º 52' 19" O***

Resolución.-

Suponiendo que el avión sale de A a las "h" horas, entonces cuando el avión llega a B :

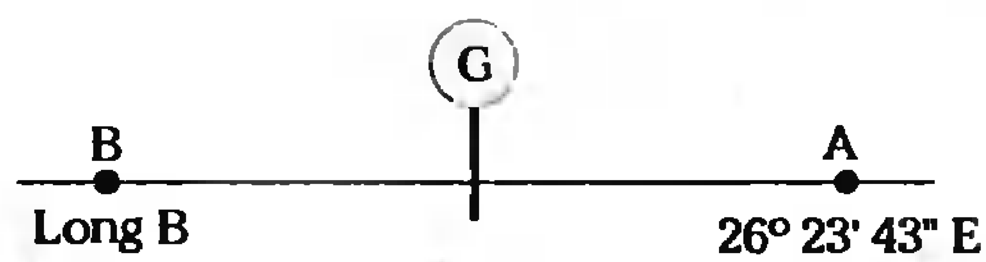
$$\text{Hora en A} = h + 6\,h\,25\,min$$
$$\text{Hora en B} = h$$

Entonces como en B es más temprano, B está al Oeste de A.

La diferencia de horas es : $(h + 6\,h\,25\,min) - h = 6\,h\,25\,min$

La diferencia de longitudes es : $(6\,h\,25\,min) \times 15 = 96°\,15'$

Luego elaboramos un gráfico para ayudarnos :



Entonces : $\text{Long B} + 26°\,23'\,43" = 96°\,15'$

$\therefore$ $\boxed{\text{Long B} = 69°\,51'\,17"\text{ W}}$ RPTA. D

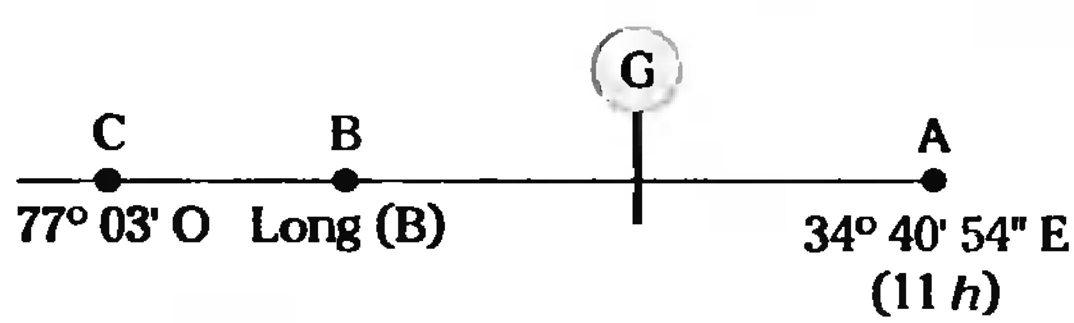
15.- Tres ciudades : A (34º 40' 54" Este); B y C (77º 03" Oeste) tienen la misma latitud. Si B está entre A y C de modo que la distancia de B a C es la mitad de la distancia de B a A. ¿Qué hora será en B cuando en A sean las 11 am. ? (Aproximadamente)

A) 6 h 05 min 13 seg ***B) 6 h 10 min*** ***C) 6 h 12 min***

D) 6 h 02 min 11 seg ***E) 6 h 04 min 10 seg***

Resolución.-

Elaboramos un gráfico para ayudarnos :



La distancia (en grados) de A a C es :

$$77° 03" + 34° 40' 54" = 111° 40' 57"$$

Como la distancia de B a C es la tercera parte de la distancia de B a A :

$$\text{Distancia (en grados) de C a B} = \frac{111°40'57"}{3}$$

$$= 37° 13' 39"$$

Entonces la longitud de B es : $\text{Long (B)} = 77° 03" - 37° 13' 39"$

$$= 39° 46' 24" \text{ O}$$

La diferencia de longitudes entre B y A será :

$$39° 46' 24" + 34° 40' 54" = 74° 27' 18"$$

Entonces, la diferencia de horas entre ellos estará dada por :

$$\frac{74°27'18"}{15} = 4\,h\ 57\,min\ 49\,\frac{1}{5}\,seg$$

Como B está al Oeste de A, tendrá la hora más atrasada :

$$\text{Hora en B} = 11\,h - 4\,h\ 57\,min\ 49\,\frac{1}{5}\,seg$$

$$\text{Hora en B} = 6\,h\ 2\,min\ 10\,\frac{4}{5}\,seg$$

$\therefore$ $\boxed{\text{Hora en B} = 6\,h\ 2\,min\ 11\,seg \text{ (aprox.)}}$ RPTA. D

16.- Un tren de pasajeros sale de la ciudad P a las 6:00 am , y viajando a razón de 80 km/h en dirección hacia el norte. Sabiendo que a las 9:00 pm llega a la ciudad Q ¿Cuál es la latitud de la ciudad Q si la de P es de 6º18' ?

A) 12º15' Norte ***B) 10º48' Sur*** ***C) 4º30' Sur***

D) 16º48' Norte ***E) 4º30' Norte***

Resolución.-

En primer lugar debemos determinar la distancia recorrida por el tren, para lo cual se necesitará conocer el tiempo que dura el viaje, el mismo que se encontrará así :

$$\Delta t = t_Q - t_P$$

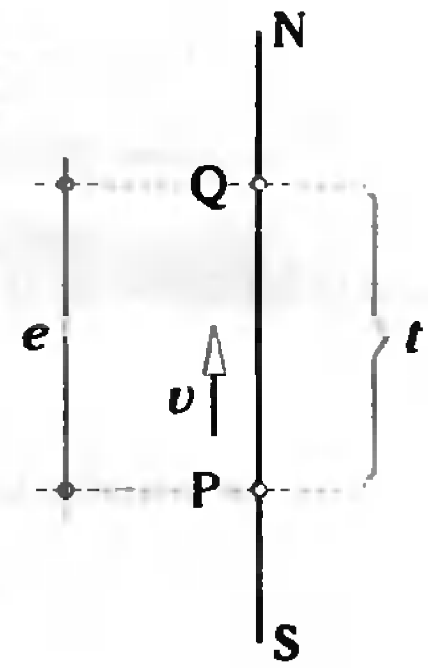
Donde : $t_P = 6{:}00$ y $t_Q = 12 + 9 = 21{:}00$

Entonces : $\Delta t = 21 - 6 = 15\ horas$

Ahora empelando la fórmula cinemática del M.R.U. para el espacio recorrido, tendremos :

$$e = v \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad e = 80\ \frac{km}{h} \cdot 15\,h$$

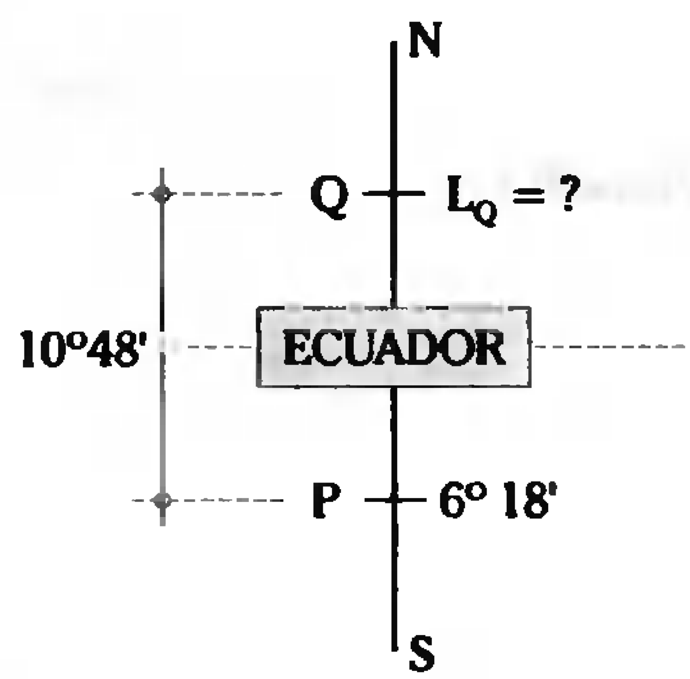
Entonces encontramos que : $e = 1\,200\ km$



A continuación determinaremos la longitud del arco comprendido entre los puntos P y Q los que suponemos ubicados sobre un mismo hemisferio. Esto lo deduciremos a partir de la siguiente regla de tres simple :

$$90^\circ \longrightarrow 10\,000\ km$$
$$x \longrightarrow 1\,200\ km$$

$$x = \frac{90^\circ \cdot 1\,200\,km}{10\,000\,km} \qquad \Rightarrow \qquad x = 10{,}8^\circ$$



A partir del esquema dado y del resultado obtenido, es fácil deducir que el punto Q se encuentra por encima de la línea ecuatorial. Por consiguiente la latitud del punto Q será obtenido a partir de :

Latitud de P + Latitud de Q = Arco PQ

Y reemplazando datos tendremos :

$6^\circ 18'$ + Latitud de Q = $10{,}8^\circ$

$6^\circ 18'$ + Latitud de Q = $10^\circ + (0{,}8)\,60'$

$6^\circ 18'$ + Latitud de Q = $10^\circ + 48'$

Latitud de Q = $10^\circ 48' - 6^\circ 18'$

Latitud de Q = $4^\circ 30'$ RPTA. E

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Las horas de dos ciudades difieren en 1/4 de hora. Hallar la diferencia de sus longitudes y la distancia que las separa, si ellas están sobre un mismo paralelo, midiendo 27 000 *km*.

A) 3° 45'   B) 3° 7'   C) 4° 25'

D) 5° 12'   E) 4° 25'

2.- Tres ciudades A (34° 40'54"E), B y C (77° 20'O) tienen la misma latitud. Si B está entre A y C de modo que la distancia de B a C es la mitad de la distancia de B a A. ¿Cuál es la longitud de B?

A) 39° 59'42" Oeste   D) 34° 12'45" Oeste

B) 37° 20'18" Oeste   E) 35° 24'32" Oeste

C) 37° 37' Oeste

3.- El sol sale en A 2 *h* 11 *min* 40 *s* antes que en B. Si la longitud de B es 100° 23' Oeste. ¿Cuál es la longitud de A?

A) 70° 23' Oeste   D) 73° 26' Oeste

B) 71° 21' Oeste   E) 67° 28' Oeste

C) 72° 25' Oeste

4.- Sidney tiene 151° 12'19" de longitud Este y Barcelona 2° 11' 04" también Este, si se manda un cable de Sydney a Barcelona a las 4 de la tarde. ¿ Que hora será en Barcelona cuando se entregue el cable al destinatario en el supuesto caso de que transcurren 3 *h* 56' 5" entre la expedición del cable y su entrega al destinatario?

A) 3 *h* 50 *min*   B) 5 *h*   C) 4 *h* 58 *min*

D) 4 *h* 59 *min* 58 *s*   E) 4 *h*

5.- Un avión sale de una ciudad A (longitud 37° 27'15" E) hacía otra ciudad B si después de 2 *h* 30 *min* de viaje llega a B el mismo día y a la misma hora que partió de A. Determinar la longitud geográfica de A

A) 2'40" E   B) 2'40" O   C) 2'45" O

D) 2'45" E   E) 2' 42" O

6.- Una ciudad esta comprendida entre los 44° 43' y 45° 53'20" de latitud Norte y los 2° 24'42" de longitud Este. Suponiendo que los puntos de latitudes extremas están sobre el mismo meridiano. ¿Cuál sería su distancia, contada sobre dicho meridiano? ¿Qué hora es en el punto más oriental cuando es mediodía en el punto más occidental?

A) 130 *km* ; 12 *h* 02 *min*

B) 139, 18 *km* ; 12 *h* 04 *min* 23 1/5 *s*

C) 142, 72 *km* ; 12 *h* 08 *min* 23 2/5 *s*

D) 130, 25 *km* ; 12 *h* 06 *min* 26 1/5 *s*

E) 137, *km* ; 12 *h* 07 *min* 24 1/5 *s*

7.- Un avión parte de Berlín cuya longitud es 45° 45'45" (E) a una cierta hora y llega a Río de Janeiro a la misma hora que partió. El tiempo neto de vuelo entre Berlín y Río de Janeiro es de 5 *h* 5 *min* 13 *s*. Calcular la longitud de Río de Janeiro.

A) 30° 32'30" Oeste

B) 30° 32'30" Este

C) 28° 26'30" Oeste

D) 28° 26'30" Este

E) 30° Oeste

8.- Si un viajero va de Roma a Londres; encontrará su reloj adelantado o atrasado. ¿Cuánto tiempo?

Long. de Londres : 5'43" Oeste

Long. de Roma : 12° 29'5" Este

A) 50 *min* 16 37/125 *s* adelantado

B) 50 *min* 16 37/125 *s* atrasado

C) 50 *min* 19 1/5 *s* adelantado

D) 50 *min* 19 1/5 *s* adelantado

E) 50 *min* atrasado

9.- Un auto parte de la ciudad A (6° 21'12" Este) a las 10 horas y llega a B (19° 23'48" Oeste) después de 7 horas de viaje. ¿A qué hora llegó a B?

A) 17 *h*

B) 16 *h*

C) 15 *h* 17 *min*

D) 16 *h* 12 *min*

E) 16 *h* 40 *min*

10.- Se ha recibido desde Escocia (4° 29'45" Oeste) a las 5 : 30 *p.m.* Si por término medio transcurre 2 horas entre la expedición del cable y su entrega al destinatario. ¿A qué hora fue expedido el cable, hora de escocia? (Longitud de Lima : 77° 2' Oeste)

A) 11 *h* 20 *min* 9 *s*

B) 20 *h* 20 *min* 9 *s*

C) 7 *h* 20 *min* 9 *s*

D) 18*h* 20 *min* 9 *s*

E) 15 *h* 20 *min* 9 *s*

11.- Un viajero que va de Bordeaux a Lyon parte a las 5 *h* 20 *min a.m.* y llega a Lyon después de 12 *h* 25 *min* de recorrido. ¿Qué hora será en Lyon si la primera ciudad está situada a 2° 55' Oeste y la segunda a 2° 29'. Este es el meridiano de París tomado como punto de referencia?

A) 19 *h* 2 *min* D) 19 *h* 15 *min*

B) 16 *h* 32 *min* E) 18 *h* 6 *min* 36 *s*

C) 19 *h* 13 *min*

12.- Se proyecta construir un aeropuerto en la ciudad A (74° 25'37" Oeste) y otro en la ciudad B (18° 43'46" Oeste). ¿Qué tiempo deberá durar un viaje de A hacía B si debe partir de A los lunes a las 12 *m* y deberá llegar a B el Martes siguiente a las 12 *m*?

A) 6 *h* 12 *m* 33 8/15 *s*

B) 24 *h*

C) 19 *h* 47 *min* 26 7/ 15 *s*

D) 17 *h* 47 *min* 26 7/15 *s*

E) 14 *h* 26 *min* 24 8/15 *s*

13.- Las longitudes de dos ciudades A y B son 7° 24'15" y 18° 12'30" Oeste respectivamente. Un vapor sale de A a las 7 *h* 58*min* 58 s y tarda 34 *h* 20 *min* en llegar a B. ¿Qué hora será en B cuando llegue el vapor?

A) 20 *h* 10 *min* del día siguiente

B) 21*h* 20 *min* del día siguiente

C) 17 *h* 20 *min* del día siguiente

D) 19 *h* 20 *min* del día siguiente

E) 18 *h* 10 *min* del día siguiente

14.- De un portaviones ubicado a 174° 34'25" Este sale un avión a atacar un objetivo ubicado a 170°3425" Oeste; si el viaje debe durar 2 horas y si sale del primer punto el jueves la 1*a.m.* ¿A qué hora será el ataque (ahora del segundo punto)?

A) Jueves ; 3 *a.m.* D) Jueves ; 1 *a.m.*

B) Jueves ; 2 *a.m.* E) Viernes ; 2 *a.m.*

C) Viernes ; 1 *a.m.*

15.- Si un aviador va de la ciudad "A" a la ciudad "B" debe adelantar su reloj un número entero de horas , pero si va de la ciudad "A" a la ciudad "C" debe retrasarlo una hora menos que las que adelantó cuando llego a "B". Si cuando va de "C" a "B" debe retrasarlo 5 horas; hallar la longitud de la ciudad "A" si la longitud "B" es 15° Este.

A) 15° E B) 35° E C) 40° E

D) 90° E E) 45° E

13 RELACIONES Y FUNCIONES

13.1 PAR ORDENADO

Es un conjunto particular formado por los dos elementos llamados primer y segundo componente respectivamente y en el cual el orden de los elementos es significativo.

$$(a\ ;\ b)$$

1^{er} componente ↑ ↑ 2^{do} componente

Si: $a \neq b \quad \Rightarrow \quad (a\,;b) \neq (b\,;a)$

$$\therefore \quad \boxed{(a\,;b) = (c\,;d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d}$$

Ejemplo : Si se cumple que : $(4\,;5) = (a + b\,;3a - b)$

Calcular el valor numérico de: $a - b$

<u>Resolución</u>.- Según el dato : $(4\,;5) = (a + b\,;3a - b)$

Entonces : $a + b = 4 \quad \wedge \quad 3a - b = 5$

De donde : $a = \dfrac{9}{4} \quad \wedge \quad b = \dfrac{7}{4}$

$$\therefore \quad \boxed{a \times b = \frac{63}{4}}$$

13.2 PRODUCTO CARTESIANO

Dados dos conjuntos A y B, se denomina producto cartesiano de A y B (A × B) al conjunto de todos los pares ordenados cuyas primeras componentes son elementos de A y cuyas segundas componentes son elementos de B.

$$\boxed{A \times B \{(x\,;y) / x \in A \quad \wedge \quad y \in B\}}$$

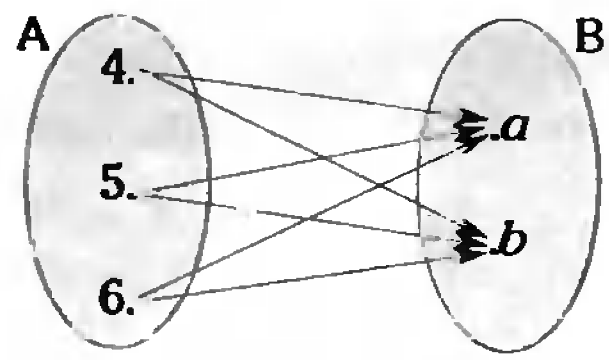
Sean : $A = \{4 ; 5 ; 6\} \wedge B = \{a ; b\}$

$A \times B = \{(4 ; a) , (4 ; b) , (5 ; a) , (5 ; b) , (6 ; a) , (6 ; b)\}$

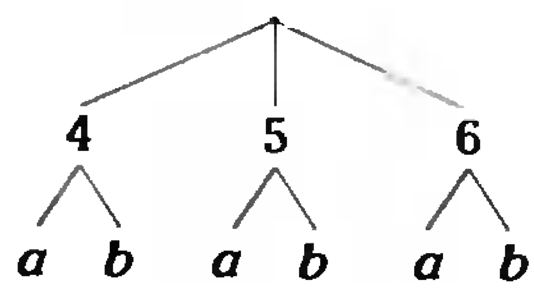
$B \times A = \{(a ; 4) , (a ; 5) , (a ; 6) , (b ; 4) , (b ; 5) , (b ; 6)\}$

Gráficamente el producto cartesiano puede representarse de varias maneras :

13.2A EN UN DIAGRAMA SAGITAL O DE FLECHAS



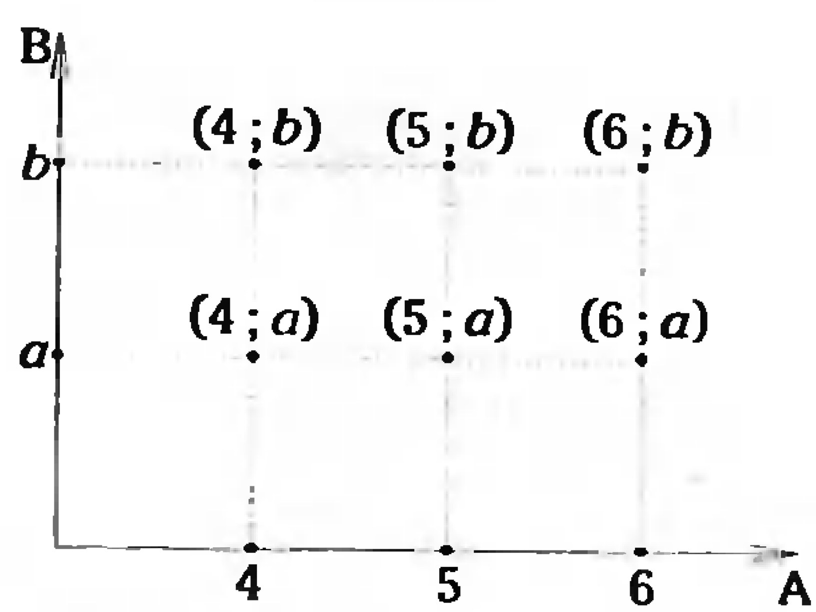
13.2B EN UN DIAGRAMA DE ÁRBOL



13.2C EN UNA TABLA DE DOBLE ENTRADA

A / B	a	b
4	$(4 ; a)$	$(4 ; b)$
5	$(5 ; a)$	$(5 ; b)$
6	$(6 ; a)$	$(6 ; b)$

13.2D EN UN DIAGRAMA CARTESIANO



Observación : $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

Ejemplo : Si : $A = \{a ; b\} \wedge B = \{2 ; 3\} \wedge C = \{3 ; 4\}$

Determinar por extensión :

I) $A \times (B \cup C)$

II) $A \times (B \cap C)$

III) $(A \times B) \cup (A \times C)$

IV) $(A \times B) \cap (A \times C)$

V) $(A \cup B) \times C$

VI) $(A \times C) \cup (B \times C)$

<u>Resolución</u>.-

I) $A = \{a ; b\}$

$B \cup C = \{2 ; 3 ; 4\}$

Entonces : $A \times (B \cup C) = \{(a ; 2) , (a ; 3) , (a ; 4) , (b ; 2) , (b ; 3) , (b ; 4)\}$

II) $A = \{a ; b\}$

$B \cap C = \{3\}$

Entonces : $A \times (B \cap C) = \{(a ; 3) , (b ; 3)\}$

III) $A \times B = \{(a ; 2) , (a ; 3) , (b ; 2) , (b ; 3)\}$

$A \times C = \{(a ; 3) , (a ; 4) , (b ; 3) , (b ; 4)\}$

Entonces : $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a ; 2) , (a ; 3) , (b ; 2) , (b ; 3) , (a ; 4) , (b ; 4)\}$

IV) Del cálculo anterior :

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(a ; 3) , (b ; 3)\}$

De los ejercicios anteriores se puede predecir que :

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

V) $A \cup B = \{a ; b ; 2 ; 3\}$

$C = \{3 ; 4\}$

Entonces : $$(A \cup B) \times C = \begin{Bmatrix} (a ; 3) , (a ; 4) , (b ; 3) , (b ; 4) \\ (2 ; 3) , (2 ; 4) , (3 ; 3) , (3 ; 4) \end{Bmatrix}$$

VI) $A \times C = \{(a ; 3) , (a ; 4) , (b ; 3) , (b ; 4)\}$

$B \times C = \{(2 ; 3) , (2 ; 4) , (3 ; 3) , (3 ; 4)\}$

Entonces : $$(A \times C) \cup (B \times C) = \begin{Bmatrix} (a ; 3) , (a ; 4) , (b ; 3) , (b ; 4) \\ (2 ; 3) , (2 ; 4) , (3 ; 3) , (3 ; 4) \end{Bmatrix}$$

Luego, de (V) y (VI) se puede notar :

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

También :

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

13.3 RELACION BINARIA

Dados dos conjuntos A y B, la relación binaria $\Re$ de A en B es un subconjunto del producto cartesiano A × B, en el que las componentes de sus pares ordenados guardan una correspondencia de acuerdo a una condición o regla de correspondencia dada.

La expresión simbólica : $\Re \to B$, se lee "relación $\Re$ de A en B " donde A es el conjunto de partida y B es el conjunto de llegada.

Ejemplo : Sean: $A = \{5 ; 6 ; 4 ; 9\}$ y $B = \{2 ; 3 ; 7 ; 8\}$

Se define : $\Re = \{(x ; y) \in A \times B / x < y\}$

Luego : $\Re = \{(5 ; 7) , (5 ; 8) , (6 ; 7) , (6 ; 8) , (4 ; 7) , (4 ; 8)\}$

Como : $\Re \subset A \times B$ entonces : $\Re$ es una relación binaria de A en B

$$\Re : A \to B \quad \Leftrightarrow \quad R \subset A \times B$$

Si el par ordenado $(x ; y) \in R$ se denota : $x R y$

Gráficamente, la relación R puede representarse :

Diagrama sagital :

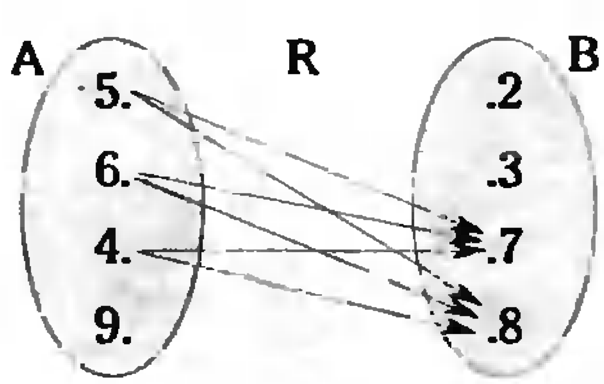
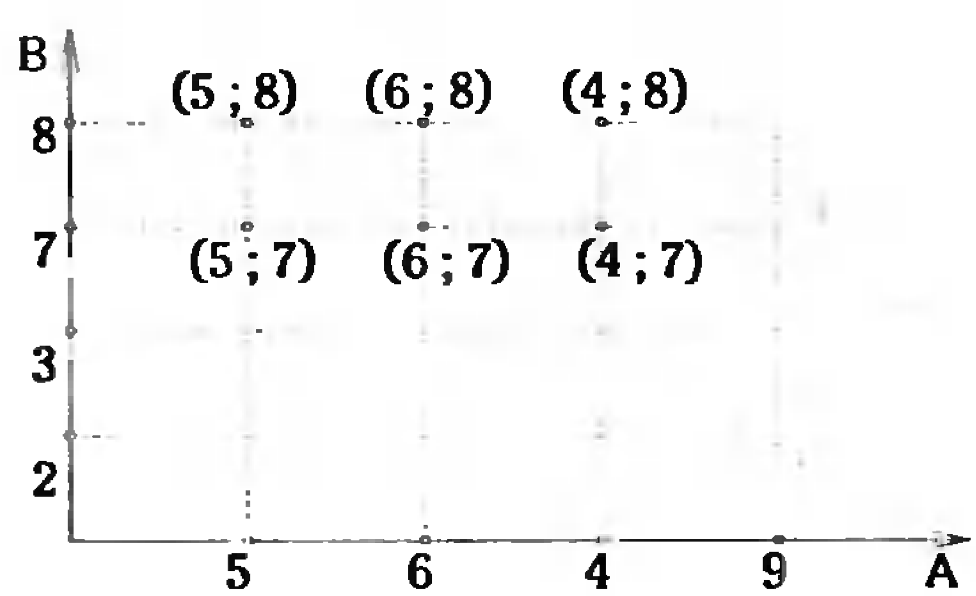


Tabla de entrada :

R	2	3	7	8
5			×	×
6			×	×
4			×	×
9			×	×

Diagrama cartesiano :



Denotamos : 5 R7, 5 R8, 6 R7, 6 R8 y 4 R8

Las relaciones binarias poseen dominio y rango.

DOMINIO : Es el conjunto formado por todas las primeras componentes de los pares ordenados que constituyen la relación. Se denota D(R) o *Dom*(R).

RANGO : Es el conjunto formado por todas las segundas componentes de los pares ordenados que constituyen la relación. Se denota R(R) o *Ran*(R).

Sea : $\Re : A \to B$

$$Dom\ (\Re) = \{x \in A / \exists\ y \in B \ \wedge\ (x ; y) \in \Re\}$$

$$Ran\ (\Re) = \{y \in B / \exists\ x \in B \ \wedge\ (x ; y) \in \Re\}$$

En el ejemplo :

* $Dom\ (\Re) = \{5 ; 6 ; 4\}$ * $Ran\ (\Re) = \{7 ; 8\}$

13.4 PROPIEDADES DE UNA RELACION BINARIA

13.4A Reflexividad : Una relación binaria $\Re$ definida de A en B es reflexiva si :

$$\forall\ x \in Dom\ (\Re) \ \Rightarrow\ x \Re x$$

13.4B Simetría : Una relación binaria $\Re$ definida de A en B es simétrica si :

$$\forall\ (x ; y) \in \Re \ \Rightarrow\ (y ; x) \in \Re$$

13.4C Transitividad : Una relación binaria $\Re$ definida de A en B es transitiva si se cumple que :

$$(x ; y) \in \Re \ \wedge\ (y ; z) \in \Re \ \Rightarrow\ (x ; z) \in \Re$$

13.4D Antisimétrica : Una relación binaria $\Re$ definida de A en B es antisimétrica si se cumple que:

$$(x ; y) \in \Re \ \wedge\ (y ; x) \in \Re \ \Rightarrow\ x = y$$

RELACION DE EQUIVALENCIA

Una relación binaria $\Re$ definida de A en B se denomina relación de equivalencia si :

a) $\Re$ es reflexiva b) $\Re$ es simétrica c) $\Re$ es transitiva

RELACION DE ORDEN :

Una relación binaria $\Re$ definida de A en B se denomina relación de orden si :

a) $\Re$ es reflexiva b) $\Re$ es antisimétrica c) $\Re$ es transitiva

RELACION INVERSA

Dada una relación binaria $\Re$ se puede obtener siempre una relación $\Re^{-1}$ llamada inversa de R, formada por los pares ordenados simétricos de los que pertenecen a ésta.

Si : $(x\,;y) \in \Re \quad \Rightarrow \quad (y\,;x) \in R^{-1}$

Ejemplo 1: Sean los conjuntos : A = {2 ; 4 ; 5} y B = {3 ; 4 ; 8}

y la relación R : A → B definida por : "es mayor que", representar la relación R :

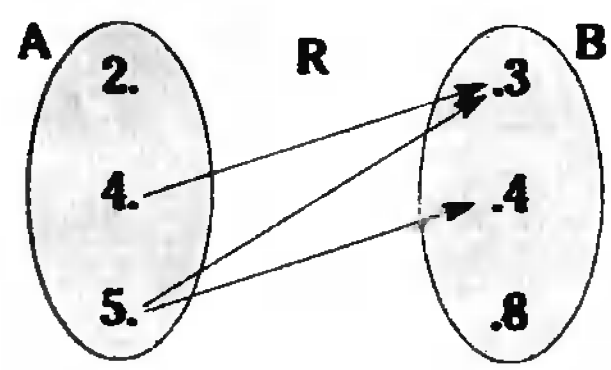
I) En el diagrama sagital

II) En una tabla de doble entrada

III) En un diagrama cartesiano

<u>Resolución</u>.-

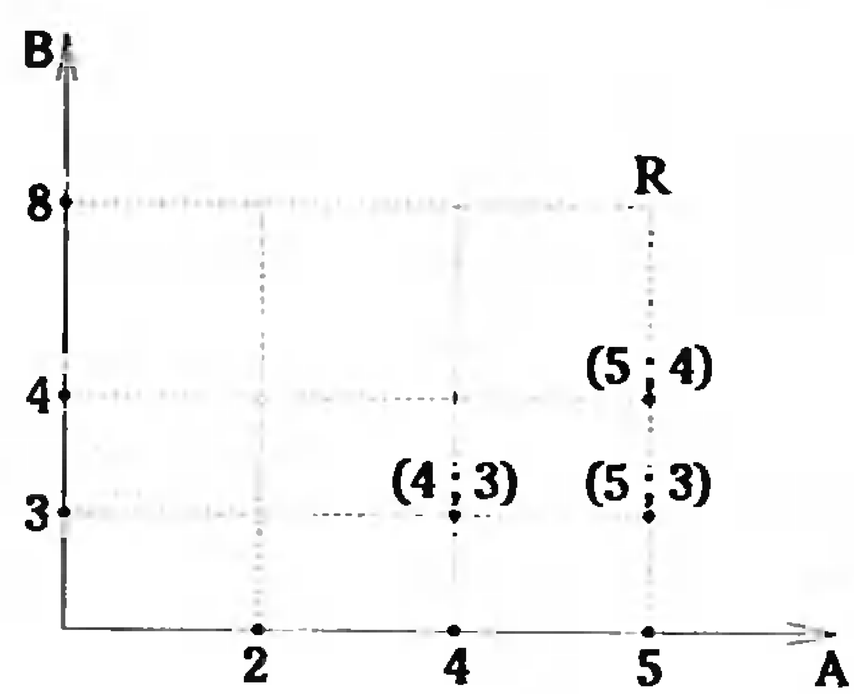
I) En un diagrama sagital será :



II) En una tabla de doble entrada será :

R	3	4	8
2			
4	×		
5	×	×	

III) En un diagrama cartesiano sería



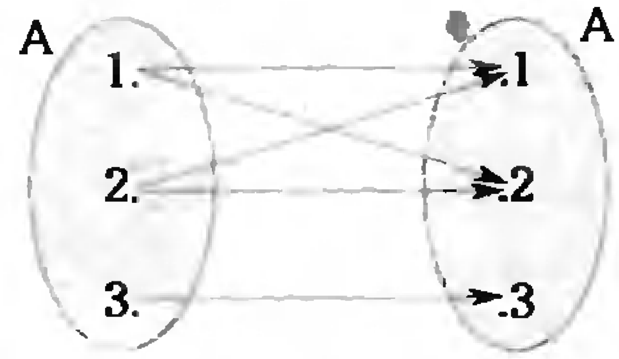
Ejemplo 2: Sea : $A = \{1 ; 2 ; 3\}$ se define la relación :

$$R = \{(a ; b) \in A \times A / a + b = 3 \ \vee \ a = b\}$$

Determinar : Dom (R) $\wedge$ Ran (R)

<u>Resolución</u>.-

Representando la relación $\Re$ en un diagrama sagital :



Luego : $\Re = \{(1 ; 1) , (1 ; 2); (2 ; 1) , (2 ; 2) ; (3 ; 3)\}$*

Entonces : $Dom\,(\Re) = \{1 ; 2 ; 3\}$

$Ram\,(\Re) = \{1 ; 2 ; 3\}$

De donde : $Dom\,(\Re) \cap Ram\,(\Re) = \{1 ; 2 ; 3\}$

$\therefore \quad \boxed{Dom\,(\Re) \cap Ran\,(\Re) = A}$

13.5 FUNCION

Dados dos conjuntos A y B, si a cada elemento del primero (A) le corresponde un único elemento en el segundo (B) a ésta correspondencia se denomina FUNCIÓN y se denota :

$$\boxed{f : \ A \rightarrow B}$$

Sean los conjuntos : $A = \{5 ; 8 ; 10\}$ y $B = \{3 ; 4 ; 9\}$;

tomamos subconjuntos de $A \times B$:

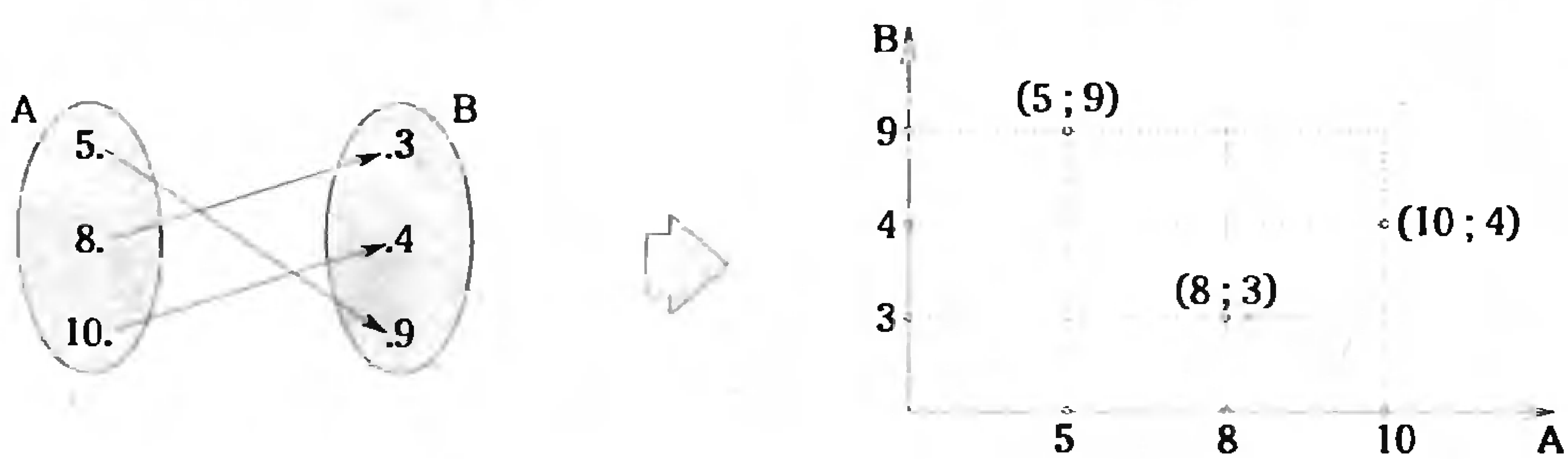
$$R_1 = \{(5 ; 9) ; (8 ; 3) \ , (10 ; 4)\}$$

$$R_2 = \{(5 ; 4) ; (8 ; 3) \ , (8 ; 9)\}$$

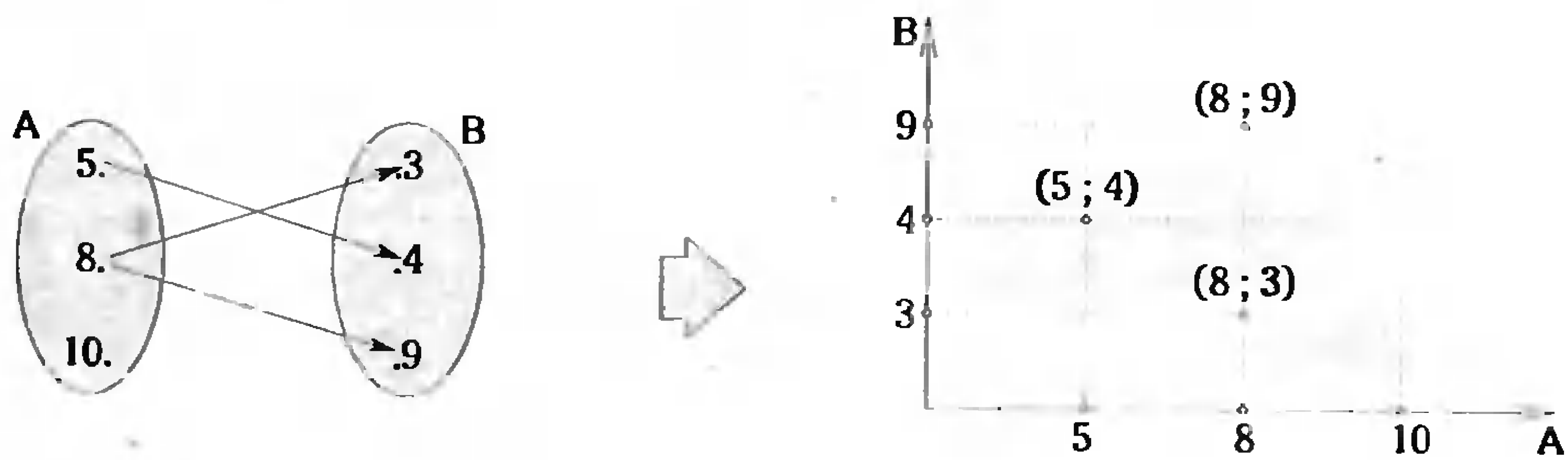
$$R_3 = \{(5 ; 9) ; (8 ; 9) \ , (10 ; 9)\}$$

$$R_4 = \{(8 ; 4) ; (10 ; 3) , (10 ; 9)\}$$

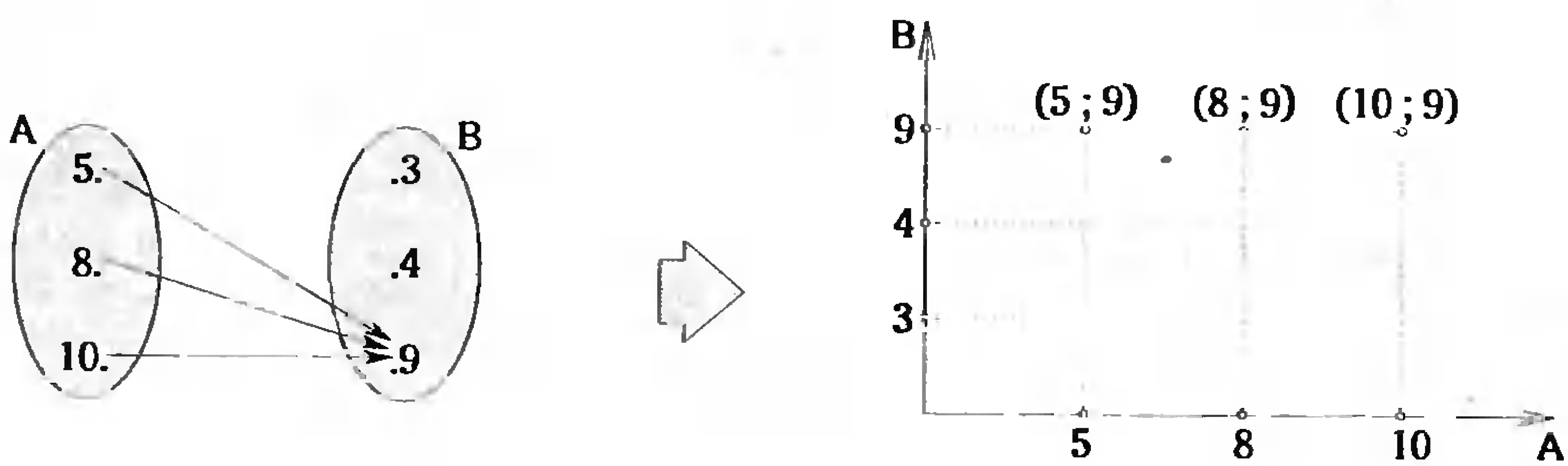
* R_1 es función de A en B pues a cada elemento de A le corresponde un único elemento B.



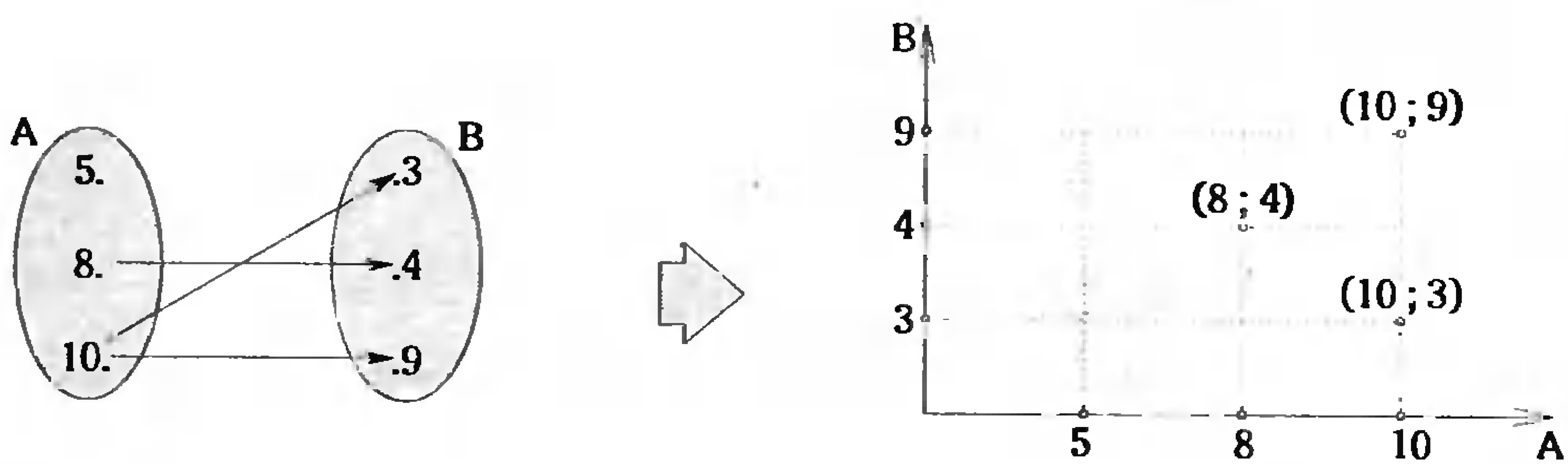
* R_2 no es función de A en B porque para su primer elemento (8) le corresponden dos segundos elementos diferentes :



* R_3 es función de A en B pues a cada elemento de A le corresponde un único elemento B.



* R_4 es función de A en B pues a cada elemento de A (10) le corresponden dos elementos distintos de B.



Ejemplo : Hallar a y b para que el conjunto : $f = \{(2 ; 5), (-1 ; -3), (2 ; 2a - b), (-1 ; b - a)\}$ sea una función :

<u>Resolución</u>.-

Para que "f" sea función se deberá cumplir que : $2a - b = 5 \quad \wedge \quad b - a = -3$

Luego : $a = 2 \quad \wedge \quad b = -1$ RPTA. B

PROBLEMAS DE APLICACION

1.- Si los pares ordenados : $(x + y\,;\,5)$ y $(12\,;\,x - y + 1)$ representan el mismo punto en el plano cartesiano ; hallar el valor numérico de $x.y$

A) 20   B) 32   C) 36   D) 35   E) 40

Resolución.-

Por dato : $(x + y\,;5) = (12\,; x - y + 1)$

Entonces : $x + y = 12 \quad \wedge \quad x - y = 4$

Por lo tanto : $x = 8 \quad \wedge \quad y = 4$

$\therefore \quad \boxed{x\,.\,y = 32}$ RPTA. B

2.- Dados los conjuntos :

$M = \{x \in R / x^2 = 8 - 2x\}$

$N = \{z \in R / z^3 = 2z^2 + 3z\}$

Indique el número de elementos de $N \times M$

A) 6   B) 8   C) 32   D) 63   E) 128

Resolución.-

Determinando ambos conjuntos por extensión :

$M = \{x \in R / x^2 = 8 - 2x$

$\Downarrow$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$x \quad 4$

$x \quad -2$

$(x + 4)\,(x - 2) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -4 \vee \; x = 2$

$\Rightarrow \quad M = \{-4\,; 2\}$

$N = \{z \in R/z^3 = 2z^2 + 3z\}$

$\Downarrow$

$z^3 - 2z^2 - 3z = 0$

$z\,(z^2 - 2z - 3) = 0$

$z \quad -3$

$z \quad 1$

$\Rightarrow \quad z(z - 3)(z + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad z = 0 \quad \vee \quad z = 3 \quad \vee \quad z = -1$

$\Rightarrow \quad N = \{0 ; 3 ; -1\}$

Luego : $n(M) = 2 \quad \wedge \quad n(N) = 3$

$\therefore \quad n(M \times N) = 2 \,.\, 3 = 6$ RPTA. A

3.- Sea "A" un conjunto que tiene "n" elementos.

Si : $B = A \times A$; y :

$C = \{(a ; b) / a \in A , b \in A , a \neq b\}$;

hallar la suma de elementos de B y C.

A) $n^2 - n - 1$ B) $2n^2 + n$ C) $2n^2 - n$ D) $2n^2 - 2n$ E) $2n^2 + n + 1$

Resolución.-

Como B = A × A, el número de elementos de B será :

$n(B) = n(A) \,.\, n(A) = n \,.\, n$

$\Rightarrow \quad n(B) = n^2$

"C" es el conjunto formado por los pares ordenados de A × A cuyos componentes son distintos, luego su número de elementos es :

$n(C) = n(n - 1) = n^2 - n$

$\therefore \quad n(B) + n(C) = 2n^2 - n$ RPTA. C

4.- Sean los conjuntos A y B tales que A tiene 4 elementos y B tiene 2 elementos; si todos los elementos de B son también elementos de A ¿Cuántos pares ordenados hay en :

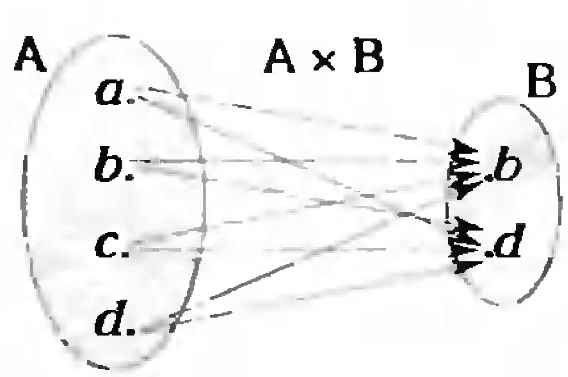
$(A \times B) \cup (B \times A)$?

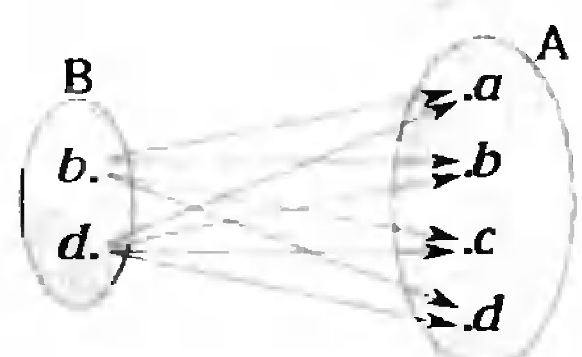
A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

Resolución.

Consideremos arbitrariamente dos conjuntos que cumplan las condiciones del problema :

$A = \{a ; b ; c ; d\} \quad \wedge \quad B = \{b ; d\}$. Entonces los diagramas sagitales serán :





Haciendo una inspección de estos diagramas, comprobamos que los elementos comunes de $A \times B$ y $B \times A$ son los pares ordenados del producto $B \times B$, luego :

$$\boxed{(A \times B) \cap (B \times A) = B \times B \quad \text{sólo si : } \quad B \subset A}$$

En el problema : $n\{(A \times B) \cup (B \times A)\} = n(B \times A) + n(B \times A) - n\{(A \times B) \quad (B \times A)]$

$$= n\,(A \times B) + n\,(B \times A) - n\,(B \times B)$$

$$= n\,(A)\,.\,n\,(B) + n\,(B)\,.\,n\,(A) - n\,(B)\,.\,n\,(B)$$

$$= 4\,.\,2 + 2\,.\,4 - 2\,.\,2$$

$\therefore$ $\boxed{n[(A \times B) \cup (B \times A)] = 12}$ RPTA. C

5.- Dadas las relaciones :

- ***P : "Padre de"***
- ***M : "Madre de"***
- ***P.M. : Abuelo materno de"***
- ***M.P. : Abuela paterna de"***

Entonces M.(P.M) representa.

A) Madre de la abuela paterna de
B) Madre de la abuela materna de
C) Madre del abuelo materno de
D) Abuela paterna del padre de
E) Abuela paterna de la madre de

Resolución.-

De acuerdo a las condiciones dadas podemos elaborar el siguiente diagrama :

$$\underbrace{M}_{\text{Madre de}}\;.\;\underbrace{(P.M)}_{\text{Abuelo materno de}}$$

$\therefore$ $\boxed{\text{Madre del Abuelo materno de}}$ RPTA. C

6.- Dados los conjuntos :

$$A = \{1\,;\,1\,;\,2\,;\,3\} \quad y \quad B = \{4\,;\,4\,;\,5\,;\,5\}\,;$$

el número posible de relaciones de A en B ($R : A \to B$), es :

A) 6 B) 64 C) 32 D) 63 E) 128

Resolución.-

Por definición, una relación $\Re$ es todo subconjunto del conjunto producto $A \times B$: $\Re \subset A \times B$

Nótese que : $n(A) = 3 \quad \wedge \quad n(B) = 2$

$$\Rightarrow \quad n(A \times B) = 3\,.\,2 = 6$$

Entonces, el número de subconjuntos de A × B, es decir, el número de relaciones de A en B será :

$\therefore \quad \boxed{2^6 = 64}$ RPTA. B

7.- Dados los conjuntos : $A = \{x \in N \,/ -1 < x < 15\}$

$B = \{y \in Z \,/ -5 < y < 100\}$

Se define la relación : $R = \{(x\,;\,y) \in A \times B \,/\, y = 1 + x^2\}$

Calcular el número de elementos de R.

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Resolución.-

Determinando a los conjuntos por extensión :

$A = \{0\,;1\,;2\,;3\,;...\,;14\}$

$B = \{-4\,;-3\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;...\,;99\}$

Los pares ordenados (x ; y) de $\Re$ deben cumplir con la condición :

$y = 1 + x^2$

Luego : $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0\,;1) \in \Re$

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (1\,;2) \in \Re$

$x = 2 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow (2\,;5) \in \Re$

$x = 3 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow (3\,;10) \in \Re$

. . .

. . .

. . .

$x = 9 \Rightarrow y = 82 \Rightarrow (9\,;82) \in \Re$

Para valores mayores de x se obtienen valores que no pertenecen a B, luego :

$$\Re = \{(0\,;1),(1\,;2),(2\,;5),(3\,;10),...,(9\,;82)\}$$

$\therefore \quad \boxed{n(R) = 10}$ RPTA. D

8.- Dada la relación : $S = \{(a\,;\,b) \in N \times N \,/\, b = 6 - a\}$

De los enunciados :

I) n (S) = 7

II) Dom (S) = Ran (S)

III) La suma de los elementos de Dom (S) es 20

Son verdaderos :

A) Solo (I) B) Solo (II) y (III) C) Solo (I) y (II) D) Solo (I) y (III) E) Todas

Resolución.-

Por condición : $S = \{(a\,;b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, b = 6 - a\}$

$$\Downarrow$$

$$a + b = 6$$

$b \rightarrow$ 6 5 4 3 2 1

$a \rightarrow$ 0 1 2 3 4 5

Luego : $S = \{(0\,;6)\,,(1\,;5)\,,(2\,;4\,,(3\,;3)\,,(4\,;2)\,,(5\,;1)\,,(6\,;0)\}$

Entonces : $Dom(S) = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

$Ran\,(S) = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

Por lo tanto : (I) $n\,(S) = 7$ (Verdadero)

(II) $Dom(S) = Ran\,(S)$ (Verdadero)

(III) La suma de los elementos de Dom(S) es 20 (Falso)

Son verdaderos : Solo (I) y (II) RPTA. C

9.- En el conjunto A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} se define una relación R por :

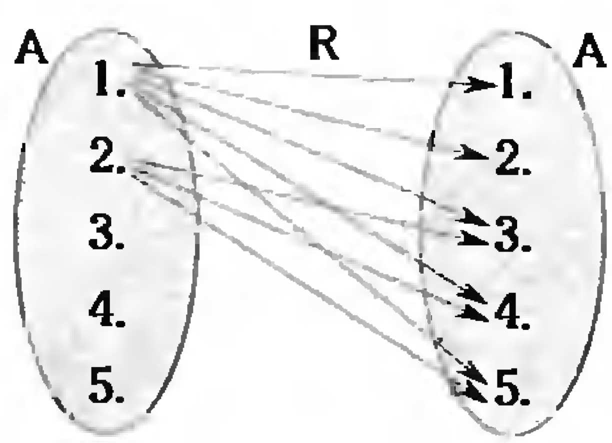
$$R = \{(x\,;y) \in A \times A \,/\, x^2 - 2 \leq y\}$$

Si "n" es la suma de los elementos del dominio de R y "n" es la suma de los elementos del rango de R ; hallar el valor de m + n.

A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 22

Resolución.-

Representando la relación $\Re$ en un diagrama sagital :



Es decir : $\Re = \{(1\,;1)\,,(1\,;2)\,,(1\,;3)\,,(1\,;4)\,,(1\,;5)\,,(2\,;3)\,,(2\,;4)\,,(2\,;5)\}$

Luego : $Dom(\Re) = \{1\,;2\}$

$Ran\,(\Re) = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$

Entonces se tendrá que : $m = 1 + 2 = 3$

$n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

$\therefore$ $m + n = 18$ RPTA. C

10.- Dados los conjuntos : $A = \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9\}$ $\wedge$ $B = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$

De las relaciones :

$R_1 = \{(x ; y) \in A \times B / x = y + 1\}$

$R_2 = \{(x ; y) \in B \times A / x = y + 1\}$

$R_3 = \{(x ; y) \in A \times B / x + y = 9\}$

¿Cuál o cuáles de las afirmaciones siguientes son correctas?

1. $R_1 = R_2$

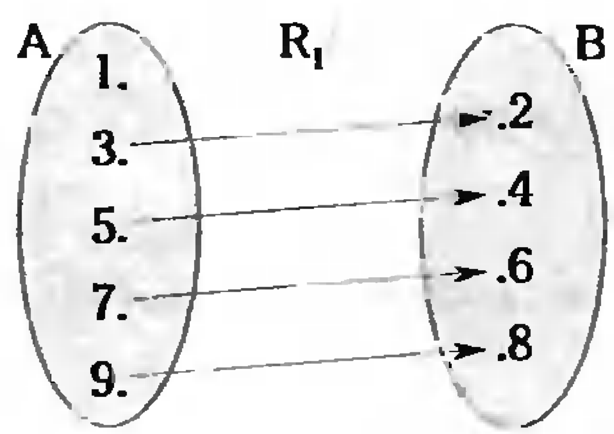
2. R_3 ***solo tiene 3 pares ordenados***

3. $R_1 \cap R_2 \neq \phi$

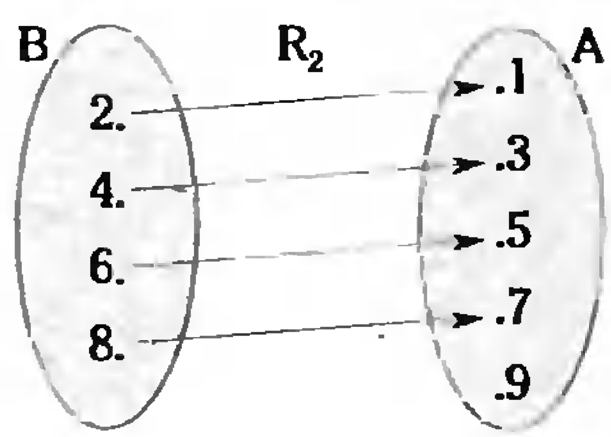
A) Solo 1 ***B) Solo 2*** ***C) Solo 3*** ***D) Solo 1 y 2*** ***E) Solo 2 y 3***

Resolución.-

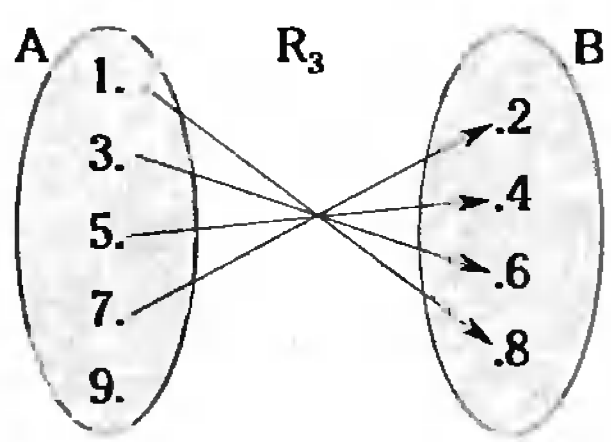
Representando a cada relación en un diagrama sagital :



$\Rightarrow$ $\Re_1 = \{(3 ; 2) ; (5 ; 4) ; (7 ; 6) ; (9 ; 8)\}$



$\Rightarrow$ $\Re_2 = \{(2 ; 1) ; (4 ; 3) ; (6 ; 5) ; (8 ; 7)\}$



$\Rightarrow$ $\Re_3 = \{(1 ; 8) ; (3 ; 6) ; (5 ; 4) ; (7 ; 2)\}$

Luego :

1. $\Re_1 = \Re_2$ (Falso)

2. $\Re_3$ solo tiene tres pares ordenados (Falso)

3. $\Re_1 \cap \Re_3 \neq \phi$ (Verdadero)

Es correcta : **Solo 3** RPTA. C

11.- Para las siguientes relaciones :

$$R_1 = \{(x\,;y) \in Z \times Z \,/\, x - y = \overset{\circ}{3}\}$$

$$R_2 = \{(x\,;y) \in Z \times Z \,/\, x + y = \overset{\circ}{2}\}$$

$$R_3 = \{(x\,;y) \in Z \times Z \,/\, x \leq y\}$$

¿Cuál o cuáles de las alternativas es la correcta?

A) R_1 no es transitiva

B) R_2 es transitiva

C) R_2 es reflexiva, pero no simétrica

D) R_3 es reflexiva y simétrica

E) R_1 y R_3 son de equivalencia

<u>Resolución</u>.-

Analizando R_1:

* $\Re_1$ es reflexiva, pues: $(x\,;x) \in \Re_1 \;\Rightarrow\; x - x = \overset{\circ}{3} \;\Rightarrow\; 0 = \overset{\circ}{3}$ (V)

* $\Re_1$ es simétrica, pues: $(x\,;y) \in \Re_1 \;\wedge\; (y\,;x) \in \Re$

$x - y = \overset{\circ}{3} \;\wedge\; y - x = \overset{\circ}{3}$ (V)

* $\Re_1$ es transitiva, pues: $(x\,;y) \in \Re_1 \;\wedge\; (y\,;z) \in \Re_1$

$x - y = \overset{\circ}{3} \;\wedge\; y - z = \overset{\circ}{3}$

Sumando miembro a miembro : $x - z = \overset{\circ}{3} \;\Rightarrow\; (x\,;z) \in \Re_1$ (V)

Luego : $\Re_1$ es de equivalencia :

Analizando $\Re_2$:

* $\Re_2$ es reflexiva : $(x\,;x) \in \Re_2 \;\Rightarrow\; x + x = \overset{\circ}{2} \;\Rightarrow\; 2x = \overset{\circ}{2}$ (V)

* $\Re_2$ es simétrica : $(x\,;y) \in \Re_2 \;\wedge\; (y\,;x) \in \Re_2$

$x + y = \overset{\circ}{2} \;\wedge\; y + x = \overset{\circ}{2}$ (V)

* $\Re_2$ es transitiva : $(x\,;y) \in \Re_2 \;\wedge\; (y\,;z) \in \Re_2$

$x + y = \overset{\circ}{2} \;\wedge\; y + z = \overset{\circ}{2}$

Sumando miembro a miembro : $x + 2y + z = \overset{\circ}{2}$

$\Rightarrow \quad x + z = \overset{\circ}{2} \quad \Rightarrow \quad (x;z) \in \Re_2 \qquad$ (V)

Luego $\Re_2$ es de equivalencia

Analizando $\Re_3$:

* $\Re_3$ es reflexiva : $(x;x) \in \Re_3 \quad \Rightarrow \quad x \leq x$ (V)

* $\Re_3$ no es simétrica : $(x;y) \in \Re_3 \quad \wedge \quad (y;x) \in \Re_3$ (V)

$x \leq y \quad \wedge \quad y \leq x$ (F)

* $\Re_3$ es transitiva : $(x;y) \in \Re_3 \quad \wedge \quad (y;z) \in \Re_3 \quad \Rightarrow \quad (x;z) \in \Re_3$

$x \leq y \quad \wedge \quad y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq y$ (V)

En alternativas : $\Re_2$ es transitiva RPTA. B

12.- Sea : A = {2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 10 ; 12} de modo que se definan :

$R_1 = \{(x;y) \in A \times A / x = \overset{\circ}{2} \wedge x = \overset{\circ}{y}\}$

$R_2 = \{(x;y) \in A \times A / x = 2y = 2\}$

Indicar cuántas de las siguientes proposiciones son correctas :

I) R_1 tiene 9 elementos

II) R_2 tiene 5 elementos

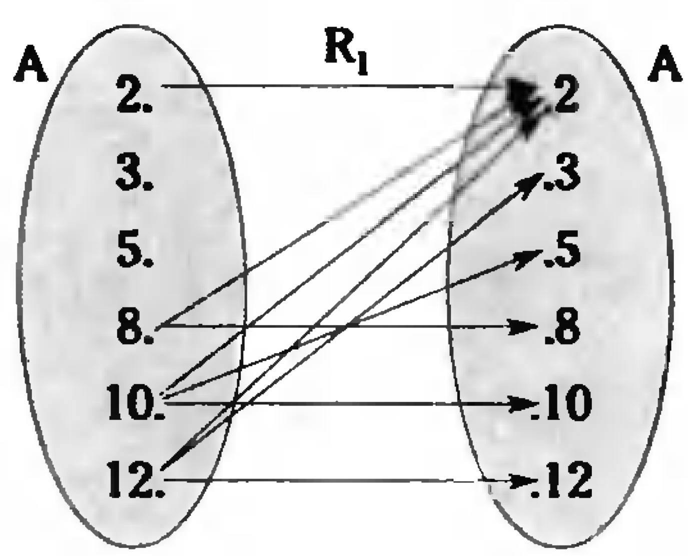
III) $R_1 \cap R_2 = \phi$

IV) R_1 no es simétrica y R_2 es transitiva

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

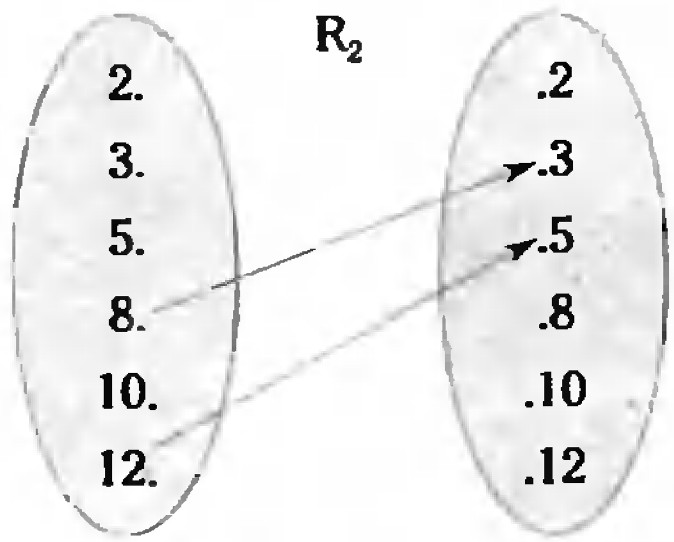
<u>Resolución</u>.-

Representando a $\Re_1$ en un diagrama sagital :



Entonces : $\Re_1 = \left\{ \begin{array}{l} (2;2), (8;2), (8;8), (10;2), (10;5) \\ (10;10), (12;2), (12;3), (12;12) \end{array} \right\}$

Representando a $\Re_2$ en diagrama sagital :



Entonces : $\Re_2 = \{(8 ; 3) ; (12 ; 5)\}$

Luego : I) $\Re_1$ tiene 9 elementos (verdadero)

II) $\Re_2$ tiene 5 elementos (falso)

III) $\Re_1 \cap \Re_2 = \phi$ (verdadero)

IV) $\Re_1$ no es simétrica y $\Re_2$ es transitiva (verdadero)

Son correctas : 3 proposiciones RPTA. D

13.- En el conjunto $N = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; . . .\}$

Se definen las relaciones : $R_1 = \{(x ; y) \in N \times N / 2x + 3y = 24\}$

$R_2 = \{(x ; y) \in N \times N / (x + y)(x - y) > 4\}$

Indicar cuáles son correctas : ***I)*** $R_1 \cap R_2 \neq \phi$

II) $(x ; y) \in R_1 \wedge (y ; x) \in R_1 \Rightarrow x = y$

III) $Dom(R_2) = N - \{0 ; 1 ; 2\}$

A) Solo I ***B) Solo II*** ***C) Solo II y III*** ***D) Solo I y II*** ***E) Todas***

Resolución.-

Determinar $\Re_1$ por extensión :

$$\Re_1 = \{(x ; y) \in N \times N / 2x + 3y = 24\}$$

x	y
0	8
3	6
6	4
9	2
12	0

$$\Rightarrow \quad \Re_1 = \{(0 ; 8), (3 ; 6), (6 ; 4), (9 ; 2), (12 ; 0)\}$$

Analizando : $\Re_2 = \{(x\,;y) \in N \times N \,/\, (x+y)(x-y) > 4$

$$x^2 - y^2 > 4$$
$$x^2 > y^2 + 4$$

Luego : $y^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; y^2 + 4 \geq 4$

$$\Rightarrow\; x^2 > 4$$
$$\Rightarrow\; x > 2$$
$$\Rightarrow\; Dom\,(\Re_2) = N - \{0\,;1;\,2\}$$

Finalmente podemos valorar las proposiciones :

I) $\Re_1 \cap \Re_2 \neq \phi$ (verdadero)

II) $(x\,;y) \in \Re_1 \;\wedge\; (y\,;x) \in \Re_1 \;\Rightarrow\; x = y$ (verdadero)

III) Dom $(\Re_2) = N - \{0\,;1\,;2\}$ (verdadero)

Son verdaderas : Todas RPTA. E

14.- Sea : A = {1 ; 2 ; 3} y " f " una función definida en A (f : A → A) por :

f = {(1 ; 3) , (2 ; a) , (a + 1 ; 2), (1 ; b - 1)}

Hallar : f (1) - f (2) + f (3)

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

<u>Resolución</u>.-

Para que " *f* " sea una función definida en A se deberá cumplir que :

$$b - 1 = 3 \quad \wedge \quad a + 1 = 3$$
$$\Rightarrow \quad b = 4 \quad \wedge \quad a = 2$$

Luego : $f = \{(1\,;3)\,,(2\,;2)\,,(3\,;2)\,,(1\,;3)\}$

De donde : $f(1) = 3$

$f(2) = 2$

$f(3) = 2$

$\therefore \quad f(1) - f(2) + f(3) = 3$ RPTA. D

15.- Si f es una función cuyo rango es un conjunto unitario; determinar el dominio de f :

$$f = \{(a + b ; b), (ab ; a - b) , (a ; 1) , (3b ; a - 1)\}$$

A) Dom f = {2 ; 3} ***B) Dom f = {4 ; 5}*** ***C) Dom f = {1}***

D) Dom f = {5 ; 3} ***E) Dom f = {0}***

Resolución.-

Nótese que por condición problema : $Ran\ (f) = \{1\}$

Luego : $b = 1 \quad \wedge \quad a - b = 1 \quad \wedge \quad a - 1 = 1$

Entonces : $a = 2 \quad \wedge \quad b = 1$

En la función : $f = \{(3 ; 1) ; (2 ; 1) , (2 ; 1) , (3 ; 1)\}$

De donde : $\text{Dom } (f) = \{2 ; 3\}$ RPTA. A

16.- Si $f = \{(2 ; 5) , (-1 ; -3) , (2 ; 2a - b) , (-1 ; b - a) , (a + b^2 ; a)\}$ es una función, hallar :

$$E = a \,.\, b + D + R$$

donde : D = Suma de los elementos del dominio de la función f
R = Suma de los elementos del rango de la función f

A) 6 ***B) 8*** ***C) -6*** ***D) -8*** ***E) 13***

Resolución.-

Para que f sea una función se necesita que : $2a - b = 5 \quad \wedge \quad b - a = -3$

Entonces : $a = 2 \quad \wedge \quad b = -1$

Luego : $f = \{(2 ; 5) , (-1 ; -3) , (2 ; 5) , (-1 ; -3) , (3 ; 2)\}$

$\text{Dom } (f) = \{2 ; -1 ; 3\}$

$\text{Ram } (f) = \{5 ; -3 ; 2\}$

De donde : $D = 2 + (-1) + 3 = 4$

$R = 5 + (-3) + 2 = 4$

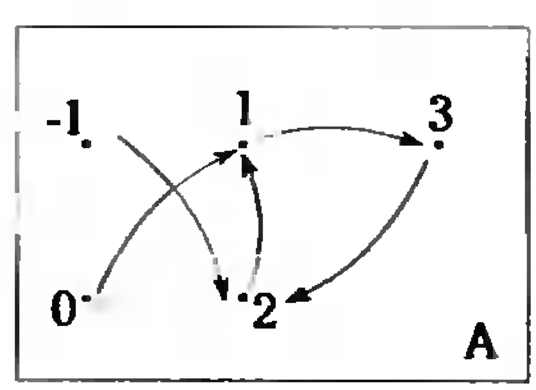
$\therefore \quad E = a \times b + D + R = 6$ RPTA. A

17.- Dada la función G de A en A definida por el diagrama sagital mostrado :
El rango de G posee :

A) 2 elementos ***D) 5 elementos***

B) 3 elementos ***E) 1 elementos***

C) 4 elementos



Resolución.-

Determinando la función G por extensión :

$$G = \{(-1 ; 2) , (1 ; 3) , (3 ; 2) , (2 ; 1) , (0 ; 1)\}$$

Luego : $Dom\ (G) = \{-1 ; 1 ; 3 ; 2 ; 0\}$

$Ran\ (G) = \{2 ; 3 ; 1\}$

Entonces el rango (G) posee : **3 elementos** RPTA. B

18.- En : $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ se definen las funciones f y g mediante :

$f = \{(2 ; 4) , (1 ; 5) , (3 ; m), (2 ; s) , (4 ; 3) , (5 ; b)\}$

$g = \{(x ; y) \in A \times A / y = mx + b)\}$

Tal que : $f(2) = g(1)$; $f(1) = g(2)$

Hallar : $E = 3m + 2s + b$

A) 11 ***B) 13*** ***C) 14*** ***D) 16*** ***E) 18***

Resolución.-

Para que "f" sea función : $(2 ; 4) = (2 ; s) \Rightarrow s = 4$

Nótese además que : $f(2) = 4 \wedge f(1) = 5$

Luego, por datos :

* $f(2) = g(1) \Rightarrow 4 = m(1) + b \Rightarrow m + b = 4 + b$ ...(1)

* $f(1) = g(2) \Rightarrow 5 = m(2) + b \Rightarrow 2m + b = 5 + b$ ...(2)

De (1) y (2) : $m = 1 \wedge b = 3$

Entonces : $E = 3(1) + 2(4) + 3$

$\therefore$ $\boxed{E = 14}$ RPTA. C

19.- Dada la función cuadrática : $F(x) = ax^2 + b$

Sabiendo que : $F(1) = 5$ ***y*** $F(2) = 14$

Indicar su rango.

A) $[0 ; \infty\rangle$ ***B)*** $[1 ; \infty\rangle$ ***C)*** $[2 ; \infty\rangle$ ***D)*** $[3 ; \infty\rangle$ ***E)*** $[4 ; \infty\rangle$

Resolución.-

En la función cuadrática, o ,de 2do grado : $F(x) = a\,x^2 + b$

Por dato : $F(1) = 5$

$$a(1)^2 + b = 5 \quad \Rightarrow \quad a + b = 5 \quad ...(1)$$

Por dato : $F(2) = 14$

$$a(2)^2 + b = 14 \quad \Rightarrow \quad 4a + b = 14 \quad ...(2)$$

De (1) y (2) : $a = 3 \quad \wedge \quad b = 2$

Luego : $F(x) = 3x^2 + 2$

Se sabe que : $x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 + 2 \geq 2 \quad \Rightarrow \quad F(x) \geq 2$$

$$\therefore \quad \boxed{Ran\ F(x) = [2\ ;\ \infty\rangle} \qquad \text{RPTA. C}$$

20.- Hallar la función lineal f (x) que cumple :

$f(1) = 2 \,.\, f(-3)$

$f(4) = 2 \,.\, f(-1) - 1$

A) $f(x) = x + 5$ B) $f(x) = x + 3$ C) $f(x) = x + 7$ D) $f(x) = 2x + 3$ E) $f(x) = 3x + 1$

<u>Resolución</u>.-

Si $f(x)$ es una función lineal, es decir, una función de 1er grado :

$$f(x) = ax + b$$

Por dato : $f(1) = 2 \,.\, f(-3)$

$$a(1) + b = 2 \,.\, [a(-3) + b]$$

$$\Rightarrow \quad a + b = -6a + 2b$$

$$7a = b \quad ...(1)$$

Por dato : $f(4) = 2 \,.\, f(-1) - 1$

$$a(4) + b = 2\,[a(-1) + b] - 1$$

$$\Rightarrow \quad 4a + b = -2a + 2b - 1$$

$$6a = b - 1 \quad ...(2)$$

De (1) y (2) : $a = 1 \ \wedge \ b = 7$

$$\therefore \quad \boxed{f(x) = x + 7} \qquad \text{RPTA. C}$$

21.- Se definen las siguientes relaciones en $\mathbb{Z}$: $R_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, (x\,y)^2$ es par$\}$ $\wedge$

$R_2 = \{(x\,;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, x + y^2 = y + x^2\}$ $\wedge$ $R_3 = \{(x\,;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, x \leq y\}$

Marcar verdadero (V) o falso (F) según convenga

I) R_1 es reflexiva .... ( )

II) R_2 es simétrica .... ( )

III) R_3 es transitiva .... ( )

A) FFV B) VVV C) FVF D) FVV E) VVF

Resolución.-

Analizando cada proposición por separado, tendremos :

I) R_1 no es reflexiva .- Por dato se sabe que : $R_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, (x\,y)^2$ es par$\}$

Elijamos : $3 \in \mathbb{Z}$, luego de acuerdo con lo expuesto en el item 23.4A, si R_1 es reflexiva $(3\,;3)$ deberá pertenecer a R_1. Por condición los elementos de R_1 son los pares $(x\,;y)$ donde $x \in \mathbb{Z}$ $\wedge$ $y \in \mathbb{Z}$, de tal modo que $(x\,y)^2$ es par. Debemos notar que para el valor elegido : $x = 3$; se tiene que : $(3\,;3) \notin R_1$, pues $(3.3)^2 = (9)^2 = 81$: ¡ No es par !

$\therefore$ R_1 no es reflexiva .... (F)

II) R_2 si es simétrica .- Por dato se sabe que : $R_2 = \{(x\,;y) \in Z \times Z \,/\, x + y^2 = y + x^2\}$

De acuerdo a lo expuesto en el item 23.4B debemos recordar que si R_2 es simétrica , se deberá cumplir que: $(x\,;y) \in R_2 \Rightarrow (y\,;x) \in R_2$. Veamos :

De la condición se sabe que : $x + y^2 = y + x^2 \Rightarrow (x\,;y) \in R_2$

Luego, al intercambiar las variables, se tendrá : $y + x^2 = x + y^2 \Rightarrow (y\,;x) \in R_2$

$\therefore$ R_2 si simétrica .... (V)

III) R_3 si es transitiva .- Por dato : $R_3 = \{(x\,;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, x \leq y\}$

De acuerdo con lo expuesto en el item 23.4C recordamos que si R_3 es transitiva ,deberá cumplirse que : $(x\,;y) \in R_3 \wedge (y\,;z) \in R_3 \Rightarrow (x\,;z) \in R_3$. Veamos :

Consideremos los siguientes paraes ordenados: $(x\,;y) \in R_3 \wedge (y\,;z) \in R_3 \Rightarrow (x\,;z) \in R_3$

Luego estos elementos, deberán satisfacer la condición dada : $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ¡ correcto !

$\therefore$ R_3 si es transitiva .... (V) RPTA. D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Si : $(2x+3y\,;4)=(16\,;2x-3y)$, indique :

$(xy\,;x-y)$

A) (6 ; 1) B) (6 ; -1) C) (10 ; 3)
D) (10 ; -3) E) (10 ; 9)

2.- De los siguientes enunciados :

I) $(x+y\,;9)=(21\,;x-y) \Rightarrow x.y=90$

II) $n(A)=5 \wedge n(B)=7 \Rightarrow n(A\times B)=35$

III) $n(A)=6 \wedge n(A\times B)=72$
$\Rightarrow n(B\times B)=144$

IV) $A=\{1\,;1\,;2\,;2\,;3\} \wedge B=\{2\,;1\,;3\,;3\,;2\}$
$\Rightarrow n(B\times A)=25$

V) $S=\{(2\,;3),(1\,;5),(2\,;4),(1\,;7)\}$
$\Rightarrow Dom(S)=\{1\,;2\}$

¿Cuántos son verdaderos?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.- Sea : $A=\{5\,;4\,;3\,;3\,;2\,;1\,;1\,;0\}$
$B=\{2\,;2\,;11\,;1\}$

Indique el número de elementos de $A\times B$.

A) 32 B) 40 C) 24 D) 18 E) 15

4.- Dados los conjuntos :

$A=\{x\in \mathbb{Z}\,/\,-12<x+6<20\}$
$B=\{y\in \mathbb{Z}\,/\,16<y^2+6<400\}$

¿Cuántos elementos tiene el conjunto $B\times A$?

A) 900 B) 870 C) 930 D) 960 E) 840

5.- Sean : $A=\{1\,;2\,;3\}$
$B=\{0\,;1\,;2\,;3\}$
$S=\{(x\,;y)\in A\times B\,/\,x+y=4\}$

Indique el número de elementos de S.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6.- Hallar el dominio de la relación :

$R=\{(x\,;y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\,/\,x^2+y^2-4x-6y=23\}$

A) [-4 ; 8] B) [-6 ; 6] C) [0 ; 6]
D) [2; 4] E) [2 ; 3]

7.- Dado el conjunto : $A=\{3\,;4\,;7\}$, se define la relación :

$\Re=\{(4\,;4),(a\,;a),(7\,;a),(b\,;c),(7\,;7)\}$

Donde $a<c$ y $\Re$ es reflexiva y simétrica, siendo :

P : $\Re$ es una relación de equivalencia
$q: (c-b\,;a)\notin \Re$
$r: \quad (4-b)\in \Re^{-1}$

Determine los correspondientes valores de verdad de :

I) $(\sim p \rightarrow r)\wedge \sim r$
II) $q \rightarrow p$
III) $\sim r \vee (p\wedge q)$

A) VVF B) VFV C) VVV
D) FVV E) VFF

8.- Se define las relaciones :

$S_1=\{(1\,;1),(2\,;2),(3\,;3)\}$
$S_2=\{(1\,;1),(2\,;1),(3\,;1),(3\,;2)\}$
$S_3=\{(1\,;3),(2\,;3),(3\,;3)\}$
$S_4=\{(2\,;1),(2\,;2),(2\,;3)\}$
$S_5=\{(1\,;1),(2\,;3),(1\,;4)\}$

¿Cuántas son funciones?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.- Sean las relaciones :

$S_1=\{(x\,;y)\,/\,x^2+2y=9\}$
$S_2=\{(x\,;y)\,/\,x^2+y^2=25\}$
$S_3=\{(x\,;y)\,/\,3x-y=8\}$

Son funciones :

A) S_1 solamente D) S_1 y S_2

B) S_2 solamente E) S_1 y S_3

C) S_3 solamente

10.- Si g es una función de A en B ($g : A \rightarrow B$) ¿Cuál de los siguientes enunciados son siempre verdaderos?

I) $\text{Ran}(g) \subset B$

II) $\forall x \in A : f(x) = y \ \wedge \ f(x) = k \ \Rightarrow \ y \neq k$

III) $\text{Dom}(g) \ \cap \ \text{Ran}(g) = \phi$

A) Solo I B) Solo I y III C) Solo I y III

D) Solo II E) Todas

11.- Sea la función :

$$g = \{(1;3), (2;9), (3;5), (0;a)\}$$

Donde : $g(0) + g(3) = 12$

Hallar el valor de "a"

A) 2 B) 3 C) 7 D) 12 E) 4

12.- Sea :

$$f = \{(1;7a+3b), (-2;3a+2b), (1;8)\}$$

una función ; hallar : $f(6) + f(-a) + f(b+2)$

A) 10 B) 8 C) 12 D) 6 E) 9

13.- Si : $M = \{1;2;3;4;5;6\}$

$N = \{1;3;4;5\}$

$f : M \rightarrow N$ es una función definida por :

$f(x;1);(2;4),(4;4),(y;4),(z;5)$

Hallar : $x + y + z$

A) 12 B) 0 C) 1 D) 5 E) 6

14.- En un salón de clase de 40 alumnos se toma un examen y se pone un calificativo de 0 a 20 con notas enteras. A continuación se establece la siguiente relación:

R_1 = {(nombre del alumno; nota del alumno)}

R_2 = {(nota del alumno; nombre del alumno)}

Luego se puede afirmar que :

A) R_1 y R_2 son funciones

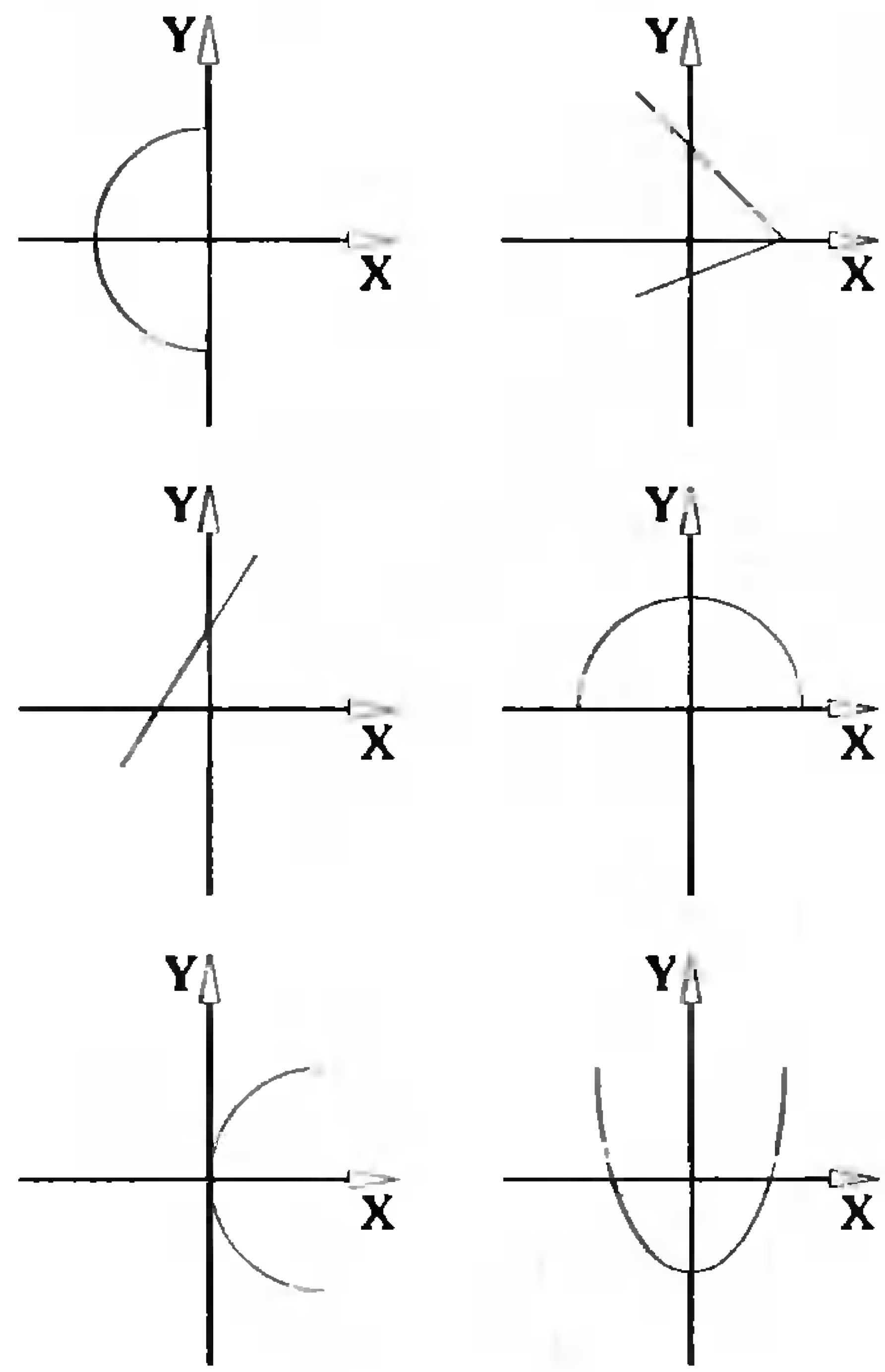
B) Solo R_2 es función

C) Solo R_1 es función

D) R_1 y R_2 no son funciones

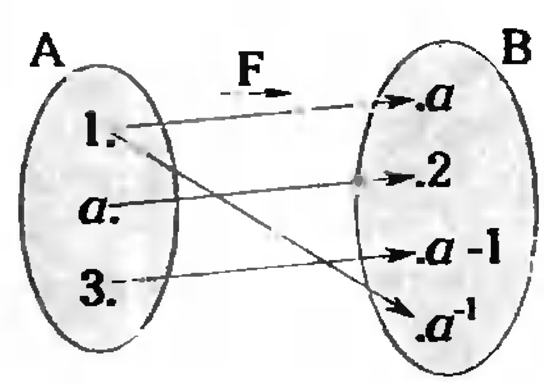
E) No se puede saber si son o no son funciones

15.- Indique cuántas de las siguientes gráficas son funciones :



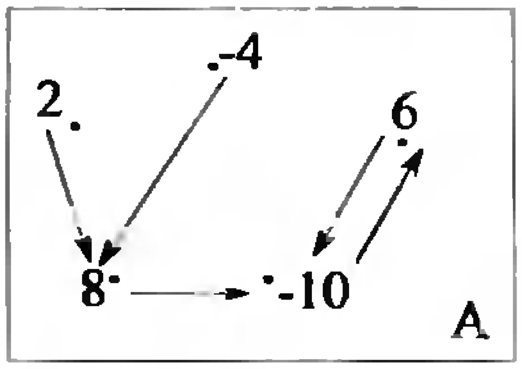
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

16.- Dada la función F : A → B ; calcular la suma de los elementos del dominio



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

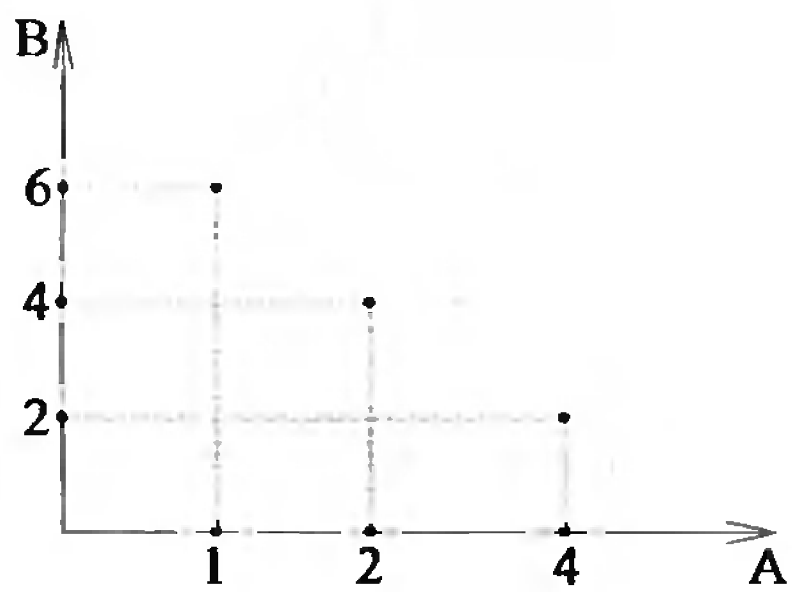
16.- Dada la función f: A → B, definida por el siguiente diagrama sagital :



Señale la suma de los elementos de su rango.

A) 4 B) 8 C) 12 D) 22 E) 30

18.- Dada la función F : A → B

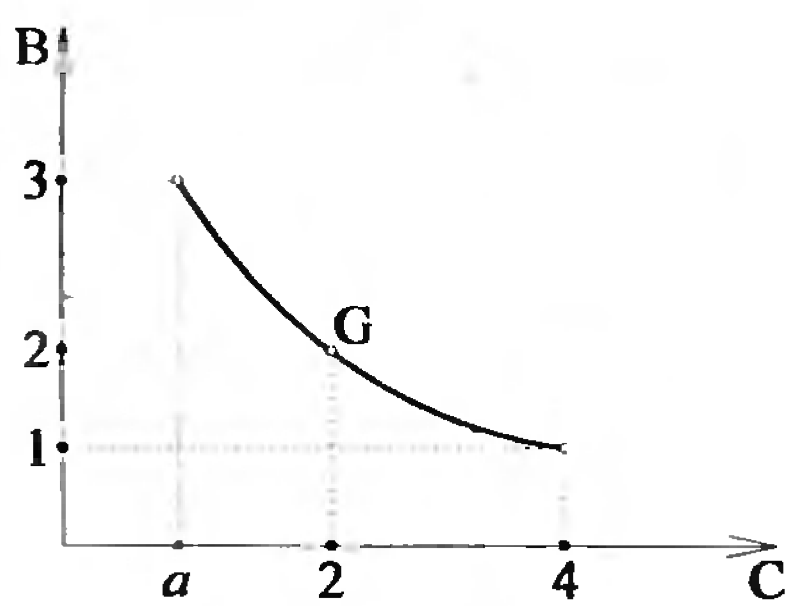


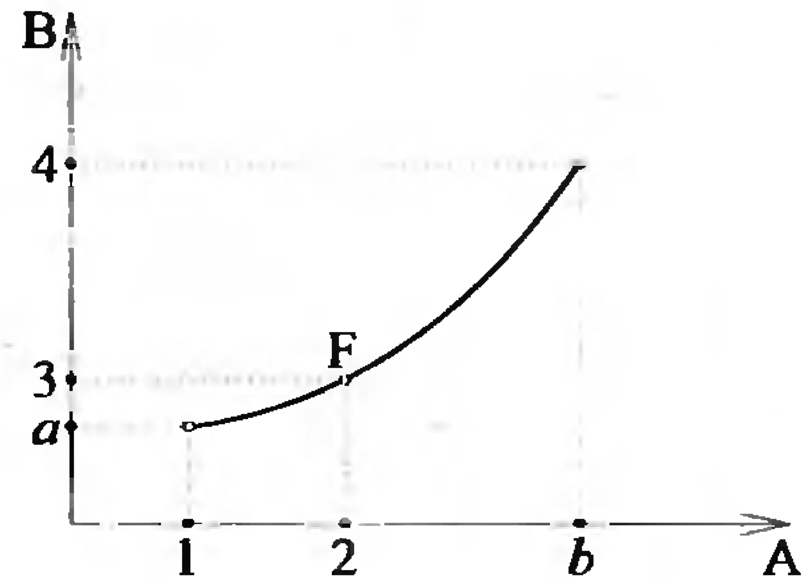
Calcular : $\dfrac{F(F(2)) + F(F(4))}{F(1)}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19.- Dadas las funciones :

F : A → B , G : C → D





Calcular : G(F(1)) + F(G(2))

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

20.- Determinar una función lineal "f" que tenga a R como dominio y $f(0) = 3$; $f(5) = 13$

A) $f(x) = 2x + 3$ D) $f(x) = -2x + 3$

B) $f(x) = -2x - 3$ E) $f(x) = 2x - 4$

C) $f(x) = 2x - 3$

21.- Se tiene una función lineal f : R → R donde se conoce que :

$$f(2) = 3 \quad \text{y} \quad f(3) = 2 . f(4)$$

Hallar : $E = f(f(0))$

A) 0 B) 10 C) 5 D) -5 E) 1

22.- Sea f una función cuadrática tal que :

$$f = \{(0 ; 0), (1 ; 1), (-1 ; 1), (4 ; m), \ldots\}$$

Indique el valor de "m"

A) 4 B) 1 C) 2 D) 16 E) 15

23.- Sea : $g = \{(a ; b), (3 ; c), (1 ; 3), (2b ; 4)\}$ una función cuya regla de correspondencia es $g(x) = x - 2a$. Calcular el producto de los elementos del conjunto.

$$A = \text{Dom}(g) \cap \text{Ran}(g)$$

A) 4 B) 2 C) 1 D) 5 E) 3

24.- Dadas las funciones :

$F = \{(a ; -19) . (1 ; b)\} \wedge g(x) = 7x - 3$

Si se cumple : $g(h) - 2 = F(h)$ para cualquier valor de h ; hallar : $a + b$.

A) 1 B) 0 C) -1 D) 2 E) -2

25.- Sea " f " la función cuya regla de correspondencia es :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 2x+1 & \text{si } 2 \le x < 5 \end{cases}$$

Hallar:

$E=f(1)+f(4)+f(2x-1)+f(2x^2)+4x$

para: $1 \le x < \frac{3}{2}$

A) 7 B) 2 C) 6 D) 8 E) 10

26.- Dado el conjunto : A = {1 ; 2 ; 3 ; 4} y las relaciones en A :

I) $R_1 = \{ (1;2), (1;3), (1;4), (2;3), (2;4), (3;4) \}$

II) $R_2 = \{ (x;y) \;/\; x^2 + y^2 = 5 \} \cup \{ (1;1) \}$

III) $R_3 = \{ (1;1), (2;2), (2;3) \}$;

indicar las relaciones transitivas.

A) II B) I ∧ II C) II ∧ III

D) I, II ∧ III E) I ∧ III

27.- Dado el conjunto : A = {2 ; 4 ; 6} y las relaciones en A :

$R_1 = \{ (2;2), (2;4), (4;4), (6;6), (4;2) \}$

$R_2 = \{ (x;y) \;/\; y - x = 0 \}$

$R_3 = \{ (x;y) \;/\; y - 2 = x \}$;

¿Cuáles son relaciones de equivalencia?

A) R_1 B) R_2 C) R_1 y R_3

D) R_2 y R_3 E) R_1 y R_2

28.- Dados los conjuntos A y B, donde :

$A = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; -\infty < x \le -1 \} \cup \{ x \in \mathbb{R} \;/\; 1 \le x < \infty \}$

$B = \{ y \in \mathbb{R} \;/\; 1 \le y \le 2 \} \cup \{ 3 \}$;

entonces el conjunto A × B presenta :

A) Una semirecta disjunta con el tercer cuadrante.

B) Dos semirectas disjuntas en el cuarto cuadrante.

C) No contiene ninguna semirecta disjunta.

D) Contiene dos semirectas disjuntas, una en el segundo cuadrante y una en el primero.

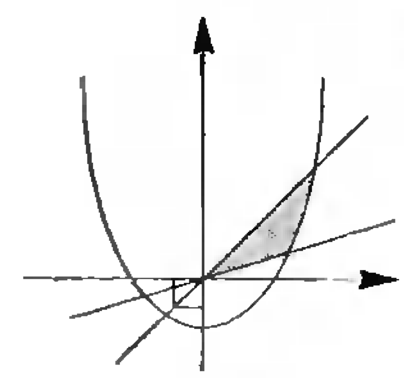
E) Dos semirectas disjuntas, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero.

29.- Dados los conjuntos :

$$A = \left\{ (x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \frac{y}{2} \le x \le 2y \right\}$$

$$B = \{ (x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y + 1 \le x^2 \} \;;$$

la región sombreada :



es :

A) A - B B) B - A C) A ∩ B

D) A ∪ B E) (A ∩ B)'

30.- Respecto al conjunto :

$A = \{ (x;y) \;/\; 2x + 3y - 6 = 0 \;;\; 4x - 3y - 6 = 0 \;;\; x - 1 = 1 \;;\; 3y = 2 \}$;

se puede decir que :

A) Tiene 6 elementos

B) Tiene 4 elementos

C) Tiene 1 elemento

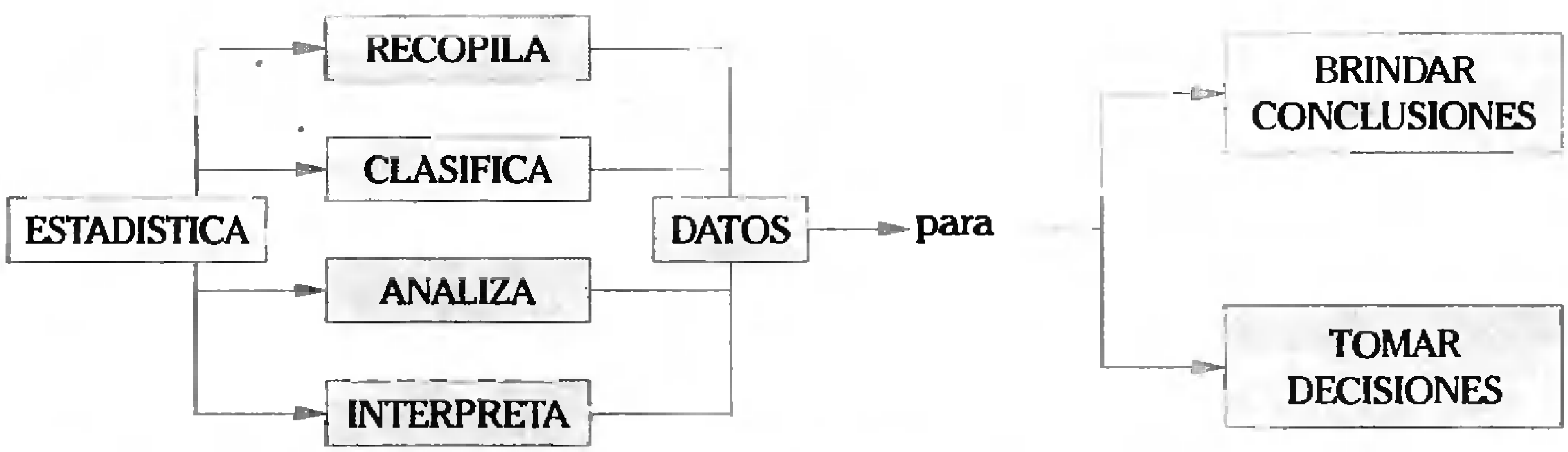
D) Es el conjunto vacío

E) Tiene un número ilimitado de elementos

14 ESTADISTICA

14.1 DEFINICION

Disciplina que tiene por objeto la clasificación y análisis de conjuntos de datos de observaciones, para interpretarlos y obtener conclusiones, es decir, leyes y relaciones entre aquellas. Es la ciencia que orienta la toma de decisiones a partir del análisis e interpretación de observaciones realizadas en forma directa y/o experimental.



14.2) DEFINICIONES BASICAS

14.2A POBLACION

Conjunto de elementos o datos que presentan una característica particular a ser analizada o estudiada de la cual se desea información.

Por ejemplo : La preferencia de los habitantes del distrito de Miraflores hacia el producto "*x*".

14.2B MUESTRA

Es un subconjunto de elementos seleccionados convenientemente de la población de tal manera que puede hacerse "deducciones" de ella respecto a la población completa.

Por ejemplo : Si se desea estudiar la preferencia de los habitantes del distrito de Miraflores hacia el producto "*x*" se pregunta a 50 vecinos de dicho distrito, adecuadamente escogidos, por la cantidad de veces que consumió el producto "*x*" a lo largo de la semana, obteniéndose las siguientes respuestas:

1	5	2	5	0	6	1	2	3	4	4	3	3	1	4	3	7	4	6	5	4	0	6	2	3
8	0	2	7	3	2	5	7	3	4	7	5	10	1	8	3	6	0	5	9	1	2	8	2	9

14.C VARIABLE

Es una característica que puede tomar varios valores. Es un "Dato" que sufre variación dentro de una escala recorrido o intervalo. Una variable puede ser :

1) Variable Cuantitativa : Cuando está asociada a una característica cuantitativa, es decir, cuando se puede establecer cuánto o en qué cantidad se posee una determinada característica. *Por ejemplo*, son variables cuantitativas :

Ingreso por familia , número de accidentes de tránsito , longitud , tiempo , etc.

Una variable cuantitativa puede ser :

* Discreta : Son aquellas que surgen por el procedimiento de conteo, es decir, pueden tomar solo algunos valores del intervalo considerado (generalmente números enteros positivos).

Por ejemplo : Una familia puede tener : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 10 hijos, pero no valores intermedios.

* Continua : Son aquellas que pueden tomar cualquier valor del intervalo considerado.

Por ejemplo . El peso, la estatura, la presión arterial, la superficie, etc.

2) Variable Cualitativa : Cuando está asociada a una característica cualitativa, es decir, cuando sus valores son cualidades, propiedades o atributos que presenta la población.

Por ejemplo : La variable "profesión" puede adoptar las modalidades : ingeniero, médico, biólogo, economista, ... etc.

14.3 TABLAS DE DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS

Son tablas de trabajo estadístico, que presentan la distribución de un conjunto de elementos de acuerdo a las categorías de una variable. En ellas se observa la frecuencia o repetición de cada uno de los valores de las variables, que se obtiene luego de realizar la operación de tabulación. Las tablas de distribución de frecuencias se elaboran a partir de los siguientes elementos :

14.3A Tamaño (n) .- Es la cantidad de datos recogidos. En el ejemplo :

$$n = 50$$

14.3B Alcance (A).- Es el intervalo cerrado que tiene por límites a los datos de menor y mayor valor .

En el ejemplo : $A = [0 ; 10]$

14.3C Rango (R).- Llamado también amplitud, es la diferencia de los datos de mayor y menor valor de la muestra.

En el ejemplo : $R = 10 - 0 = 10$

14.3D Número de clases (K).- Es la cantidad de grupos o intervalos en que se pueden dividir los datos y depende del criterio del estadístico, aunque es usual utilizar como un primer valor aproximado al obtenido por la Regla de Sturges , la cual viene dada por la siguiente relación :

$$K = 1 + 3,3 \text{ Log } (n)$$

En el ejemplo : $K = 1 + 3{,}3 \text{ Log } (50) \quad \Rightarrow \quad K = 6{,}6$

Luego K puede tomar valores enteros : 5 ; 6 ó 7; asumamos :

$$K = 5$$

14.3E Ancho de clase (W).- Es la longitud de una clase. Si se desea anchos de clase iguales se puede utilizar la siguiente relación :

$$\boxed{W = \frac{R}{K}}$$

En el ejemplo : $W = \dfrac{10}{5} \quad \Rightarrow \quad W = 2$

14.3F Frecuencia Absoluta (f) : Es la cantidad de datos que caen dentro de una clase.

En el ejemplo :

Intervalo de Clase	Conteo	Frecuencia Absoluta
I_i		f_i
[0 ; 2>	~~IIII~~ IIII	9
[2 ; 4>	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	15
[4 ; 6>	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
[6 ; 8>	~~IIII~~ III	8
[8 ; 10]	~~IIII~~ I	6

14.3G Frecuencia Relativa (h).- Es el cociente de cada frecuencia absoluta entre el tamaño de la muestra.

$$\boxed{h_i = \frac{f_i}{n}} \quad \text{Además :} \quad 0 \leq h_i \leq 1$$

La suma de todas las frecuencias relativas es igual a 1.

14.3H Frecuencia Absoluta Acumulada (F).- Es la suma de la frecuencia absoluta correspondiente a una clase con todas las precedentes.

14.3I Frecuencia Relativa Acumulada (H).- Es la suma de la frecuencia relativa a una clase con todas las precedentes.

14.3J Marca de clase (x).- Es un valor representativo de una clase, se calcula como la media aritmética de los límites del intervalo.

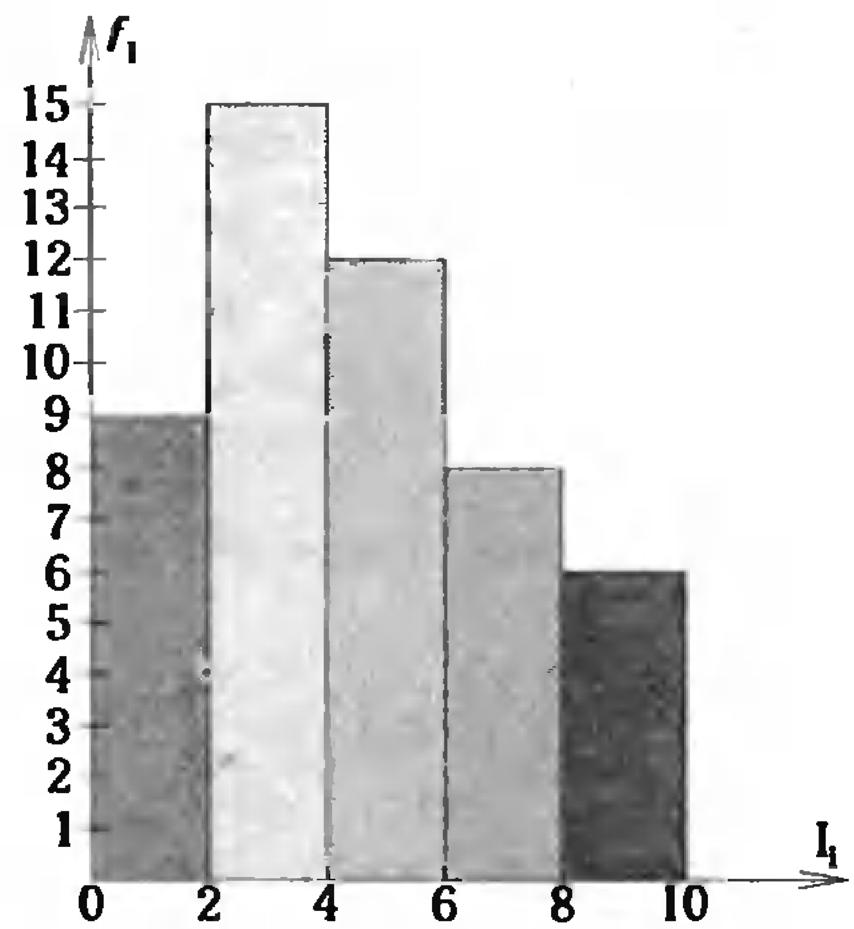
En el ejemplo :

I_i	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[0 ; 2>	1	9	0,18	9	0,18
[2 ; 4>	3	15	0,30	24	0,48
[4 ; 6>	5	12	0,24	36	0,72
[6 ; 8>	7	8	0,16	44	0,88
[8 ; 10>	9	6	0,12	50	1,00

13.4 REPRESENTACION GRAFICA

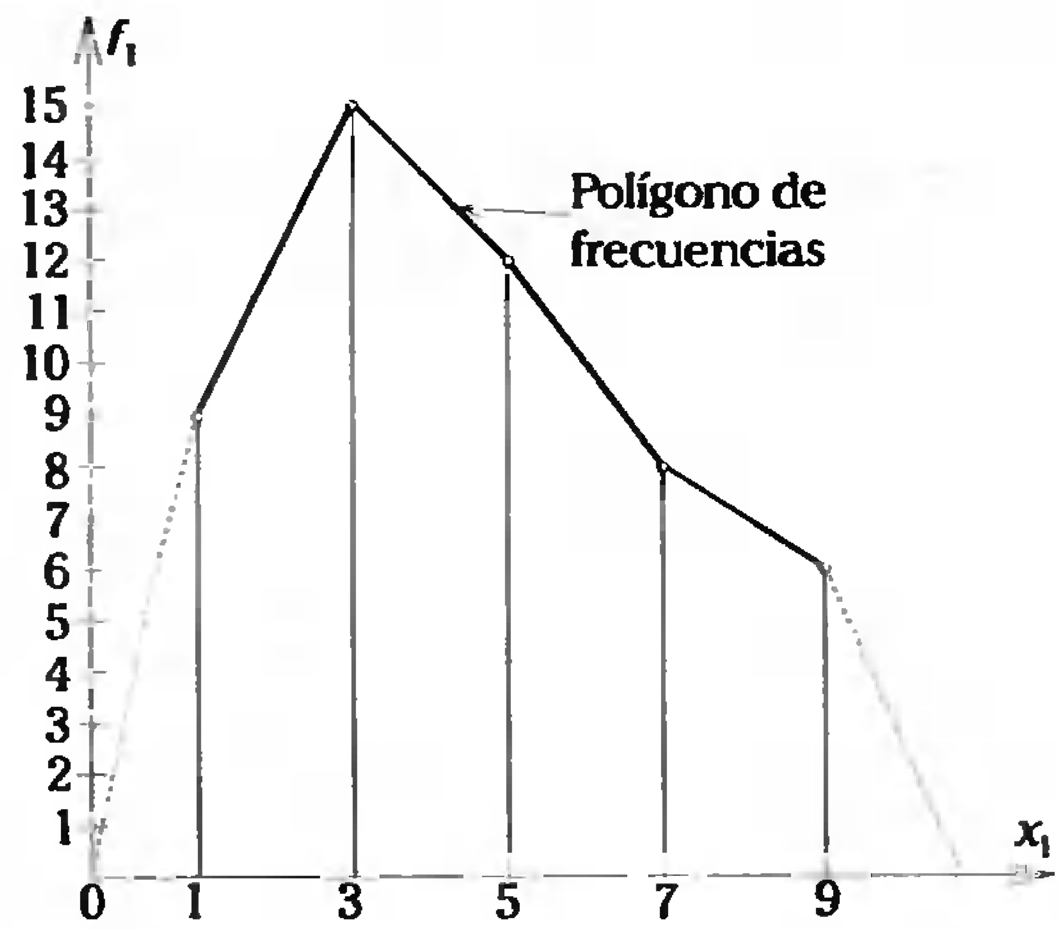
La representación gráfica de las frecuencias (absolutas o relativas) se hace mediante el HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS, que está constituido por un conjunto sucesivo de rectángulos, cuya base es igual a la amplitud del intervalo y la altura igual a la respectiva frecuencia.

En el ejemplo :



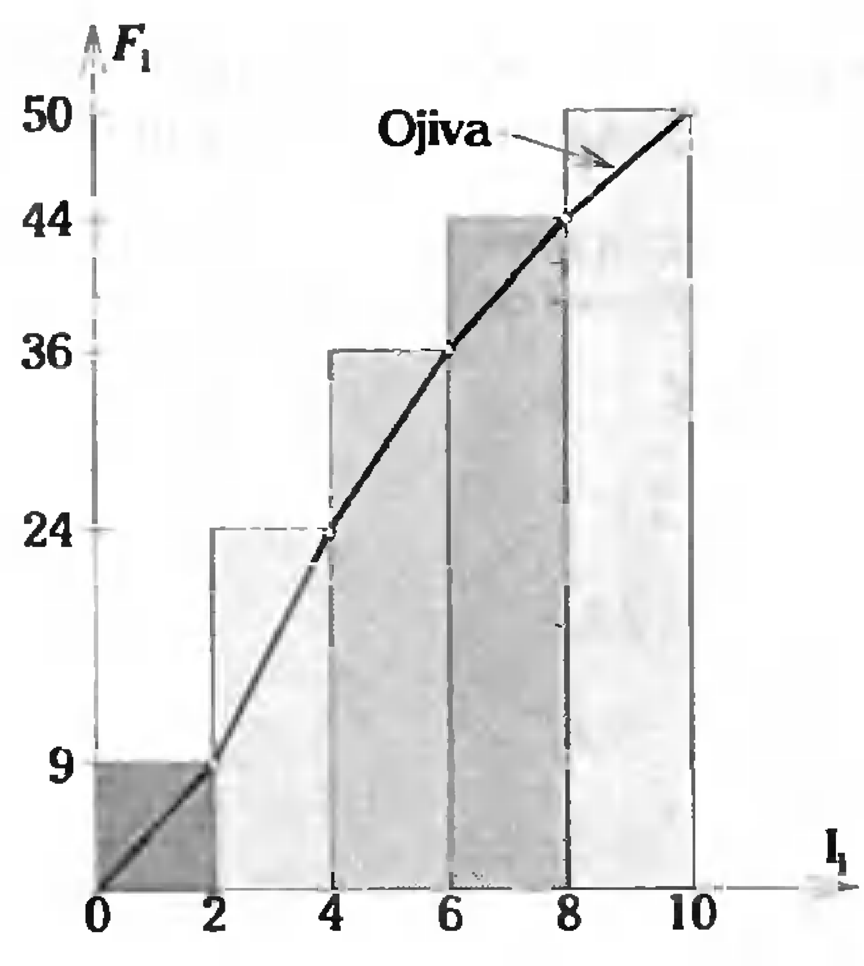
Otro gráfico que se usa para representar las frecuencias es el POLIGONO DE FRECUENCIAS , que se construye como sigue : en cada punto medio o marca de clase (x_i) de cada intervalo se levanta un segmento de altura igual a la respectiva frecuencia (f_i ó h_i), luego se une los extremos con una línea poligonal, resultando el polígono de frecuencias. Para completar los extremos se extiende el polígono en media amplitud del intervalo en cada extremo.

En el ejemplo :

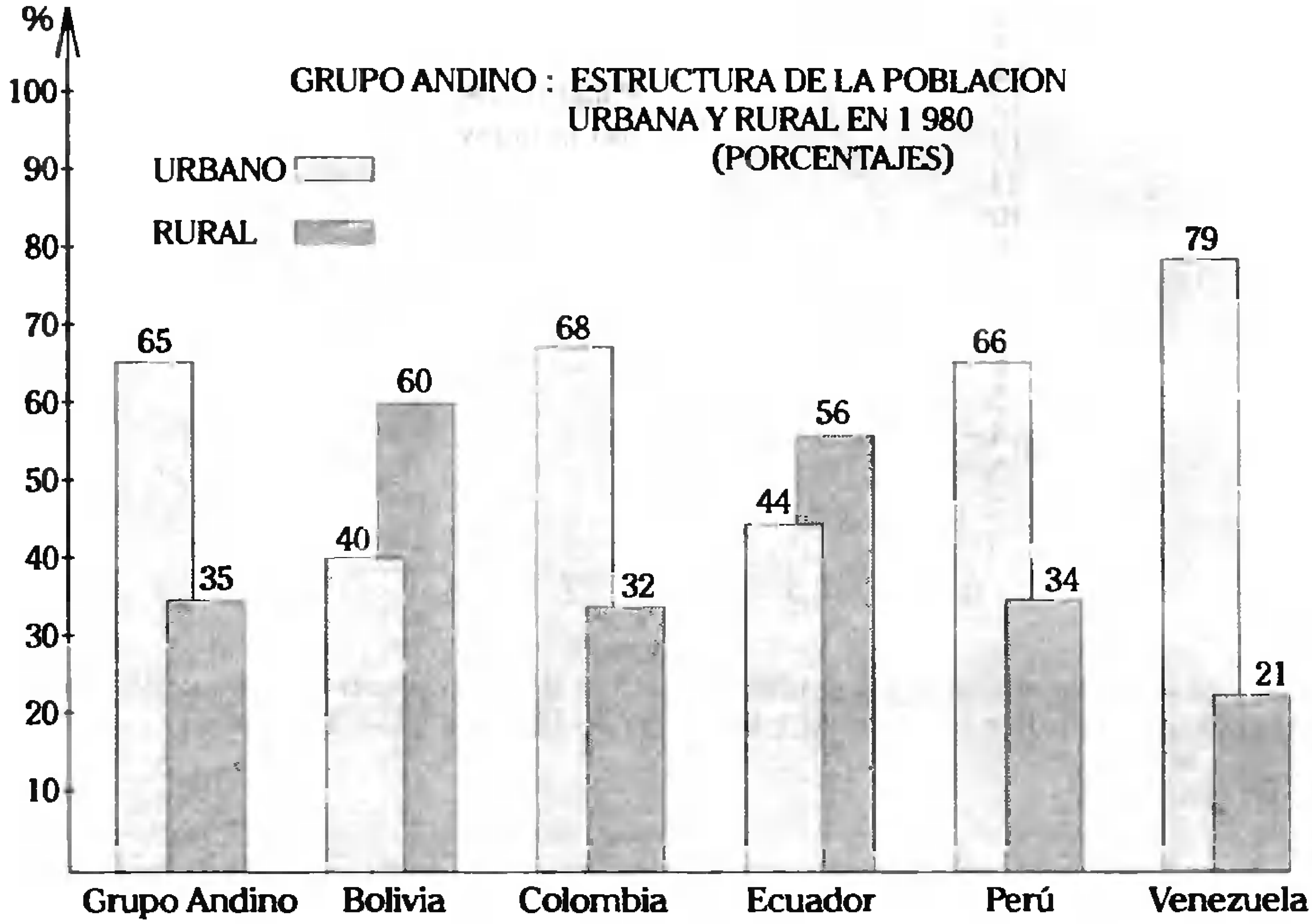


Por su parte las frecuencias acumuladas (F_i ó H_i) se grafican mediante los DIAGRAMAS ESCALONADOS o los POLIGONOS ACUMULATIVOS DE FRECUENCIA (ojivas)

En el ejemplo :

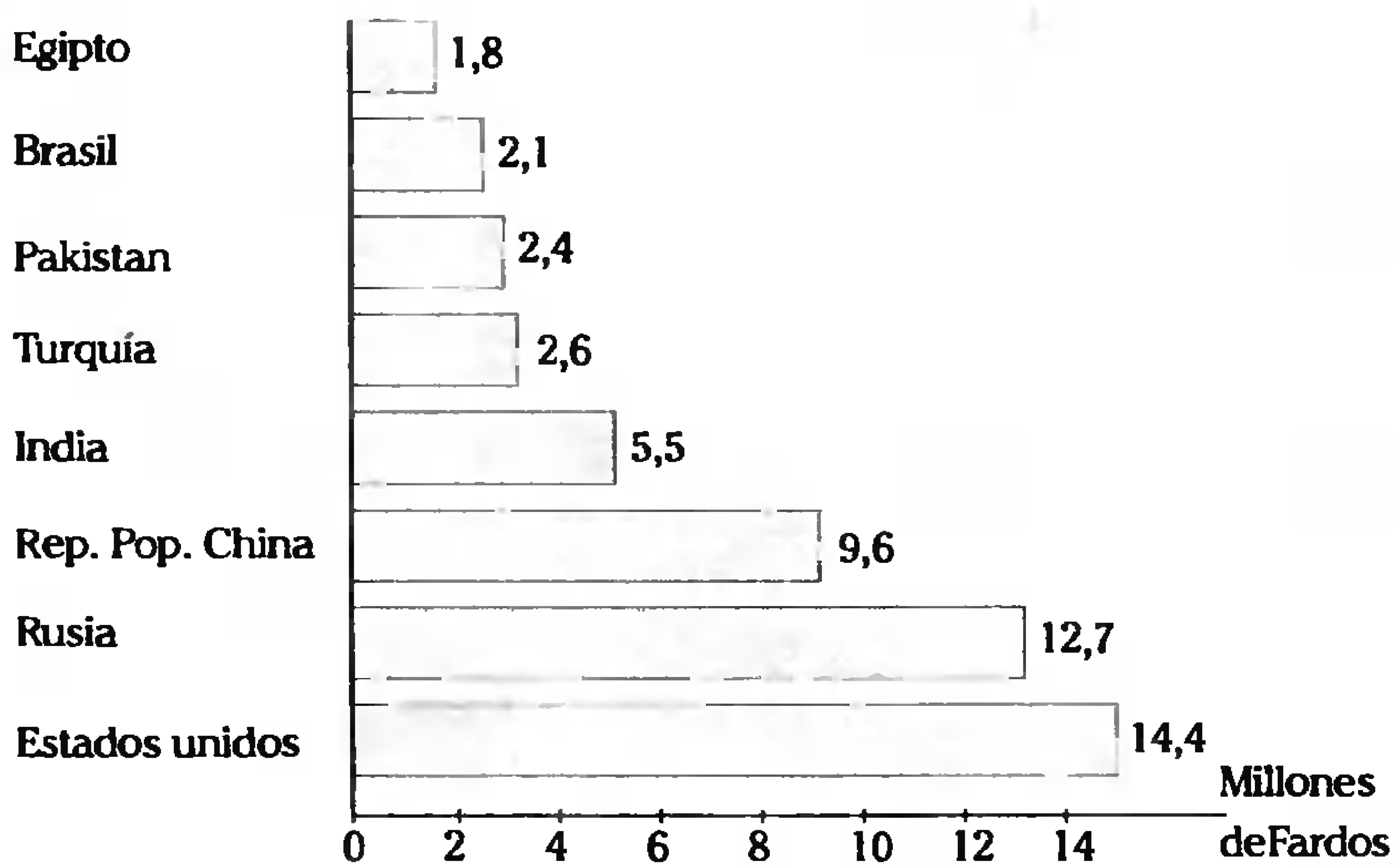


Para variables cualitativas se puede usar el DIAGRAMA DE RECTANGULOS O BARRAS, como por ejemplo :



Fuente : Grupo Andino - Boletín Estadístico 1980

PRODUCCION DE ALGODON EN ALGUNOS PAISES DEL MUNDO
1987 / 1988 (En millones de fardos de 480 libras cada uno)



Fuente : REVISTA ECONOMICA INTERAMERICANA "PROGRESO" . Diciembre 1989

También puede usarse el DIAGRAMA DE SECTORES en el cual, en un círculo, cada tipo de datos es representado por sectores circulares con áreas proporcionales a la frecuencia de los datos.

Por ejemplo, para graficar, en un DIAGRAMA DE SECTORES la siguiente tabla que se refiere a la producción de café en 1990 :

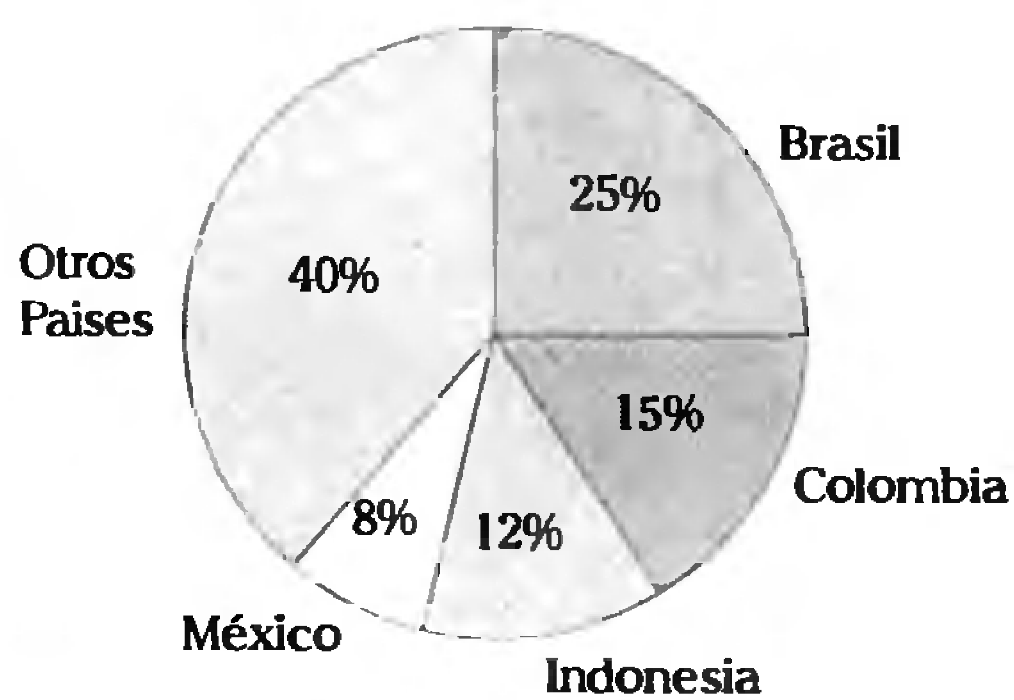
País	Producción de Café (*)
Brasil	1 500
Colombia	900
Indonesia	720
México	480
Otros paises	2 400
TOTAL	6 000

(*) En miles de toneladas

Asumiendo que a 6 000 le corresponde un porcentaje de 100% y un ángulo de 360°, se tiene :

País	Producción de Café	%	Angulo del sector
Brasil	1 500	25 %	90°
Colombia	900	15 %	54°
Indonesia	720	12 %	43,2°
México	480	8 %	28,8°
Otros paises	2 400	40 %	144°
TOTAL	6 000	100 %	360°

Entonces el diagrama de sectores será :



13.6 MEDIDAS DE POSICION O TENDENCIA CENTRAL (PROMEDIOS)

Una medida de posición es un valor que se calcula para un grupo de datos que se utiliza para describirlos de alguna manera. Generalmente se desea que el valor sea representativo de todos los valores incluidos en el grupo y por ello se desea alguna clase de promedio, que se entiende como una medida de tendencia central.

13 6A MEDIA ($\overline{x}$)

Llamada también promedio aritmético, se define :

a) Para datos no agrupados . Sean : x_1 ; x_2 ; x_3 ; ... ; x_n los valores de la variable x

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ejemplo : Dados los numeros 4 ; 3 ; 7 ; 8 y 11

$$\overline{x} = \frac{4+3+7+8+11}{5} \quad \Rightarrow \quad \overline{x} = 6{,}6$$

b) Para datos agrupados . Sean x_1 ; x_2 ; x_3 ; ... ; x_n las marcas de clase de cada uno de los intervalos y f_1 ; f_2 ; f_3 ; ... ; f_n sus respectivas frecuencias :

$$\overline{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$$

En el ejemplo :

I_i	x_i	f_i	$x_i f_i$
[0 ; 2>	1	9	9
[2 ; 4>	3	15	45
[4 ; 6>	5	12	60
[6 ; 8>	7	8	56
[8 ; 10]	9	6	54

Donde : $\sum f_i = 50$

$\sum x_i f_i = 224$

$$\overline{x} = \frac{224}{50} \quad \Rightarrow \quad \overline{x} = 4{,}48$$

13.6B MEDIANA (x_M)

Es el valor que divide al total de las observaciones, ordenados en forma ascendente o descendente, en dos partes de igual tamaño.

a) Para datos no agrupados. Luego de ordenados, ascendente o descendentemente, se escoge:

* x_m = Valor central, si el número de datos es impar.

* x_m = Semisuma de los dos valores centrales, si el número de datos es par.

Ejemplo : Mediana de los valores : 1 ; 4 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

$$\Rightarrow \quad x_m = 6 \text{ (valor central)}$$

Ejemplo : Mediana de los valores : 3 ; 4 ; 5 ; 8 ; 9 ; 10

$$\Rightarrow \quad x_m = \frac{5+8}{2} = 6{,}5 \qquad \text{(Semisuma de valores centrales)}$$

b) Para datos agrupados . Se define la clase mediana como la primera cuya frecuencia absoluta acumulada iguala o excede a la mitad del total de datos, luego el valor de la mediana se da por:

$$x_m = L_m + W_m \left[\frac{\frac{n}{2} - F_{m-1}}{f_m} \right]$$

Donde :

L_m : Límite inferior de la clase mediana

W_m : Ancho de clase de la clase mediana

F_{m-1} : Frecuencia absoluta acumulada de la clase que precede a la clase mediana.

n : Número total de datos

f_m : Frecuencia absoluta de la clase mediana

En el ejemplo :

I_i	x_i	f_i	F_i	
[0 ; 2⟩	1	9	9	
[2 ; 4⟩	3	15	24	
[4 ; 6⟩	5	12	36	⇐ Clase mediana
[6 ; 8⟩	7	8	44	
[8 ; 10]	9	6	50	

Como la mitad del total de datos es 50 :

$$x_m = L_m + W_m\left[\frac{\frac{n}{2} - F_{m-1}}{f_m}\right] = 4 + 2\left[\frac{\frac{50}{2} - 24}{12}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x_m = 4{,}17$$

13.6C MODA (M_O)

a) Para datos no agrupados. La moda es el valor que se presenta con mayor frecuencia en un grupo de datos. A una distribución que tiene una sola moda se le denomina unimodal. Si hubiese más de dos valores no adyacentes con frecuencias máximas similares, la distribución es multimodal: bimodal, trimodal, etc. En caso que ninguno se repita se dice que no existe moda.

Ejemplo : Moda de los valores ; 3 ; 4 ; 4 ; 5 ; 7 ; 4 ; 5 ; 6 ; 6 ; 9 ; 4

$$\Rightarrow \quad Mo = 4$$

b) Para datos agrupados : Con intervalos de igual ancho de clase se tiene que la clase modal es aquella que tiene la mayor cantidad de datos. Luego, el valor de la moda se da por :

$$M_o = L_o + W_o\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

Donde :

L_o : Límite inferior de la clase modal

W_o : Ancho de la clase modal

d_1 : Diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase precedente.

d_2 : Diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase siguiente.

En el ejemplo :

I_i	x_i	f_i
[0 ; 2>	1	9
[2 ; 4>	3	15
[4 ; 6>	5	12
[6 ; 8>	7	8
[8 ; 10]	9	6

⇐ Clase modal

$d_1 = 15 - 9 = 6$

$d_2 = 15 - 12 = 3$

$$M_o = L_o + W_o\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) = 2 + 2\left(\frac{6}{6+3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad M_o = 3{,}33$$

13.7 MEDIDAS DE DISPERSION

Para describir un conjunto de datos no es suficiente con conocer solo las medidas de tendencia central, para concluir el análisis es necesario tener una idea del grado de concentración o dispersión de los datos alrededor de un valor central.

Existen conjuntos de datos que siendo diferentes, tienen valores iguales para algunas de sus medidas de tendencia central, por ejemplo :

(I) 3 ; 7 ; 46 ; 67 ; 81 $\Rightarrow$ $\bar{x} = 40{,}8$; $x_m = 46$

(II) 15 ; 38 ; 46 ; 52 ; 53 $\Rightarrow$ $\bar{x} = 40{,}8$; $x_m = 46$

Nótese que, en ambos casos, tienen igual media y mediana; esto puede conducir a conclusiones equivocadas cuando se está comparando poblaciones. Para superar esta limitación se propone construir otras medidas que permitan analizar otras características como la dispersión o desviación de los datos alrededor de un valor central, estas son las MEDIDAS DE DISPERSION.

Entre los principales tenemos :

13.7A VARIANZA (S^2 ó $V(x)$)

Es la medida de dispersión más importante. Expresa el grado de dispersión de los datos respecto a la media. Se define como la media de los cuadrados de las desviaciones de los datos respecto a la media.

a) Para datos no agrupados. Dados los números $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \ldots ; x_n$ cuya media es $\bar{x}$:

$$S^2_{(x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

b) Para datos agrupados. Considerando a $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \ldots ; x_n$ las marcas de clase de cada uno de los intervalos de la distribución y $f_1 ; f_2 ; f_3 ; \ldots ; f_n$ sus respectivas frecuencias :

$$S^2_{(x)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

13.7B DESVIACION ESTANDAR O TIPICA (S) :

Se define como la raíz cuadrada de la varianza.

$$S(x) = \sqrt{S^2(x)}$$

En el ejemplo :

I_i	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
[0 ; 2>	1	9	9	-3,48	12,11	109
[2 ; 4>	3	15	45	-1,48	2,19	32,85
[4 ; 6>	5	12	60	0,52	0,27	3,24
[6 ; 8>	7	8	56	2,52	6,35	50,8
[8 ; 10]	9	6	54	4,52	20,43	122,58
		50	224			318,47

$\bar{x} = 4,48$

Luego reemplazando datos en la fórmula : $S^2_{(x)} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i} = \dfrac{318,47}{50}$

$\Rightarrow \quad S^2_{(x)} = 6,37$

Y la desviación estandar será : $S_{(x)} = \sqrt{6,37} \quad \Rightarrow \quad S_{(x)} = 2,52$

Propiedades de la Varianza.-Siendo "C" una constante :

1. Si $x_i = C \quad \forall\, i \quad \Rightarrow \quad S^2(x) = 0$
2. Si $Y_i = x_i + C \quad \Rightarrow \quad S^2(Y) = S^2(x)$
3. Si $Y_i = C x_i \quad \Rightarrow \quad S^2(Y) = C^2 . S^2(x)$
4. Si $Y_i = a x_i + b \quad \Rightarrow \quad S^2(Y) = a^2 S^2(x)$

3.8 METODO CORTO PARA CALCULAR LA VARIANZA

a) Para datos no agrupados

$$S^2_{(x)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

b) Para datos agrupados

$$S^2_{(x)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 f_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i} - (\bar{x})^2$$

En el ejemplo :

I_i	x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
[0 ; 2>	1	9	9	1	9
[2 ; 4>	3	15	45	9	135
[4 ; 6>	5	12	60	25	300
[6 ; 8>	7	8	56	49	392
[8 ; 10]	9	6	54	81	486
		50	224		1 322

$$\bar{x} = 4{,}48$$

$$S_{(x)}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \bar{x}^2 = \frac{1322}{50} - (4,\ 48)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_{(x)}^2 = 6,\ 37}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

ENUNCIADO :

Dada la siguiente distribución de frecuencias según el número de empleados por empresa :

Número de empleados	Frecuencia (f_i) ← Números de empresas
[0 ; 10 >	5
[10 ; 20 >	20
[20 ; 30 >	35
[30 ; 40 >	40
[40 ; 60 >	50
[60 ; 80 >	30
[80 ; 100 >	20
[100 ; 140 >	20
[140 ; 180 >	15
[180 ; 260]	15
TOTAL	250

1.- Determinar el porcentaje de empresas que tiene un número de empleados entre 50 y 90.

A) 23% ***B) 24%*** ***C) 25%*** ***D) 26%*** ***E) 27%***

Resolución.-

Las empresas que tienen un número de empleados comprendido entre 50 y 90, corresponden a la mitad de la quinta clase, toda la sexta clase y la mitad de la sétima clase, es decir :

$$\frac{50}{2} + 30 + \frac{20}{2} = 65 \text{ empresas}$$

Considerando que 250 es el total de empresas :

$$\begin{aligned} 250 &\longrightarrow 100\% \\ 65 &\longrightarrow x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 26\%} \qquad \text{RPTA. D}$$

2.- Determinar el porcentaje de empresas con número de empleados inferior a 35.

A) 32% ***B) 31%*** ***C) 30%*** ***D) 29%*** ***E) 28%***

Resolución.-

Las empresas cuyo número de empleados es inferior a 35, corresponden a las tres primeras clases y la mitad de la cuarta clase , es decir :

$$5 + 20 + 35 + \frac{40}{2} = 80$$

Luego, por regla de tres :

250 ⟶ 100%

80 ⟶ x

⇨ $x = 32\%$ RPTA. A

ENUNCIADO : ***En cierta fábrica se hizo un estudio sobre la edad de los trabajadores, con el fin de establecer un plan de seguro grupal. Los resultados fueron los siguientes :***

22	*34*	*60*	*33*	*32*	*30*	*47*	*37*	*61*	*38*
30	*34*	*47*	*41*	*55*	*67*	*32*	*49*	*46*	*48*
42	*42*	*46*	*43*	*53*	*48*	*46*	*26*	*51*	*23*
55	*41*	*57*	*44*	*45*	*67*	*31*	*51*	*47*	*52*

Clasificar los datos adecuadamente para resolver los problemas 3 y 4.

3.- ¿Cuántos trabajadores tienen por lo menos 49 años y que porcentaje representan?

A) 15 ; 37 ; 5% ***B) 12 ; 30%*** ***C) 24 ; 60%*** ***D) 20 ; 50%*** ***E) 10 ; 25%***

Resolución.-

Nótese que : Valor mínimo = 22

Valor máximo = 67

Para calcular el número de trabajadores que tienen por lo menos 49 años, es conveniente que 49 sea el límite inferior de un intervalo de clase, luego :

I_i	Conteo	f_i
[19 ; 29⟩	III	3
[29 ; 39⟩	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
[39 ; 49⟩	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	15
[49 ; 59⟩	~~IIII~~ III	8
[59 ; 69⟩	IIII	4

$\Sigma f_i = 40$

Los trabajadores que tienen por lo menos 49 años están ubicados en la cuarta y quinta clase; es decir:

$$8 + 4 = 12 \quad \text{trabajadores}$$

Por regla de tres :

40 ⟶ 100%

12 ⟶ x

⇨ $x = 30\%$

Luego : 12 ; 30% RPTA. B

4.- ¿Qué porcentaje de trabajadores tienen de 39 a 58 años?

A) 37,5% ***B) 40,25%*** ***C) 52,5%*** ***D) 57,5%*** ***E) 52%***

Resolución.-

Estos trabajadores se encuentran en la tercera y cuarta clase, es decir :

15 + 8 = 23 trabajadores

Por regla de tres :

$$\begin{array}{lcl} 40 & \longrightarrow & 1100 \\ 23 & \longrightarrow & 1\ x \end{array} \Rightarrow \boxed{x = 57,5\%}$$ RPTA. D

ENUNCIADO : Se clasificó la inversión de un grupo de compañías mineras en una tabla de distribución de frecuencias. Se sabe que la máxima inversión es de 56 millones de soles, que la amplitud de los intervalos es de 8 millones de soles, que las frecuencias absolutas correspondientes a los intervalos son : 1 ; 16 ; 21 ; 9 ; 8 ; 3 y 2. Con esta información resolver los problemas 5 ; 6 ; 7 ; 8 y 9

5.- ¿Qué porcentaje de compañías invierten menos de 40 millones de soles?

A) 63 1/3% ***B) 75 2/3%*** ***C) 78 1/3%*** ***D) 91 1/3%*** ***E) 91 2/3%***

Resolución.-

La tabla de distribución de frecuencias será así :

I_i	x_i	f_i
[0 ; 8>	4	1
[8 ; 16>	12	16
[16 ; 24>	20	21
[24 ; 32>	28	9
[32 ; 40>	36	8
[40 ; 48]	44	3
[48 ; 56]	52	2

$\Sigma f_i = 60$

Las compañías que invierten menos de 40 millones de soles están ubicadas en las 5 primeras clases, es decir son:

1 + 16 + 21 + 9 + 8 = 55 compañías

Por regla de tres :

$$\begin{array}{lcl} 60 & \longrightarrow & 100\% \\ 55 & \longrightarrow & x \end{array} \Rightarrow \boxed{x = 91\ 2/3\%}$$ RPTA. E

6.- ¿Qué porcentaje de compañías invierten 24 millones como mínimo?

A) 38 2/3% ***B) 36 2/3%*** ***C) 38 1/3%*** ***D) 36 1/3%*** ***E) 63 1/3%***

Resolución.-

Las compañías que invierten, como mínimo, 24 millones de soles están ubicadas en las 4 últimas clases, luego son :

9 + 8 + 3 + 2 = 22 compañías

Por regla de tres :

$$\begin{array}{lcl} 60 & \longrightarrow & 100\% \\ 22 & \longrightarrow & x \end{array} \Rightarrow \boxed{x = 36\ 2/3\%}$$ RPTA. A

7.- Hallar la inversión promedio (en millones de soles)

A) 25,2 ***B) 27,2*** ***C) 23,2*** ***D) 24,5*** ***E) 30,5***

<u>Resolución</u>.-

I_i	x_i	f_i	$x_i f_i$
[0; 8⟩	4	1	4
[8 ; 16⟩	12	16	192
[16 ; 24⟩	20	21	420
[24 ; 32⟩	28	9	250
[32 ; 40⟩	36	8	288
[40 ; 48⟩	44	3	132
[48 ; 56]	52	2	104
		60	1 392

Luego : $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1392}{60}$$

$\therefore$ $\boxed{\bar{x} = 23,2}$ RPTA. C

8.- Hallar la mediana de los datos clasificados (en millones de soles)

A) 20,95 ***B) 24*** ***C) 22,63*** ***D) 28*** ***E) 30***

<u>Resolución</u>.-

I_i	x_i	f_i	F_i	
[0 ; 8⟩	4	1	1	
[8 ; 16⟩	12	16	17	
[16 ; 24⟩	20	21	38	← Clase mediana
[24 ; 32⟩	28	9	47	
[32 ; 40⟩	36	8	55	
[40 ; 48]	44	3	58	
[48 ; 56]	52	2	60	

$$x_m = L_m + W_m \left(\frac{\frac{n}{2} - F_{m-1}}{f_m} \right) = 16 + 8\left(\frac{30-17}{21} \right)$$

$\therefore$ $\boxed{x_m = 20,95}$ RPTA. A

9.- Hallar la moda de los datos agrupados (en millones de soles)

A) 18 ***B) 20,25*** ***C) 19,35*** ***D) 18,35*** ***E) 20***

Resolución.-

I_i	x_i	f_i
[0 ; 8>	4	1
[8 ; 16>	12	16
[16 ; 24>	20	21
[24 ; 32>	28	9
[32 ; 40>	36	8
[40 ; 48]	44	3
[48 ; 56]	52	2

← Clase modal ([16 ; 24>)

$d_1 = 21 - 16 = 5$
$d_2 = 21 - 9 = 12$

$$M_o = L_o + W_o\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) = 16 + 8\left(\frac{5}{5+12}\right)$$

$\therefore$ $\boxed{M_o = 18,35}$ RPTA. D

ENUNCIADO : Se tiene la siguiente tabla de distribución de frecuencias relativas de 300 3 empleados según su edad

Edades	h_i
[19 ; 21]	0,15
[22 ; 24]	0,25
[25 ; 27]	0,40
[28 ; 30]	0,10
[31 ; 33]	0,10

10.- ¿Cuantos empleados tienen edades de 22 a 33 años?

A) 240 ***B) 230*** ***C) 220*** ***D) 210*** ***E) 255***

Resolución.-

Los empleados que tienen de 22 a 33 años están ubicados en las 4 últimas clases, es decir :

$$0,25 + 0,40 + 0,10 + 0,10 = 0,85$$

Es decir, el 85% de los empleados tiene de 22 a 33 años de edad, luego :

$\therefore$ $0,85\ (300) = \boxed{255 \text{ empleados}}$ RPTA. E

11.- ¿Qué porcentaje de los empleados tienen 25 años o más?

A) 45% ***B) 50%*** ***C) 60%*** ***D) 70%*** ***E) 75%***

Resolución.-

Los empleados que tienen 25 años o más están ubicados en las 3 últimas clases, es decir :

$$0,40 + 0,10 + 0,10 = 0,60$$
$$\Downarrow$$
$$60\ \%$$ RPTA. C

12.- ¿Cuántos empleados tienen 27 años o menos?

A) 220 ***B) 270*** ***C) 255*** ***D) 240*** ***E) 210***

Resolución.-

Los empleados que tienen 27 años o menos son los que se encuentran en las 3 primeras clases, o sea :

$$0,15 + 0,25 + 0,40 = 0,80 \quad \Rightarrow \quad 80\%$$

Luego : 80% de 300 = 240 RPTA. D

13.- ¿Qué porcentaje de los empleados tienen 24 años o menos?

A) 15% ***B) 25%*** ***C) 40%*** ***D) 45%*** ***E) 80%***

Resolución.-

Los empleados que tienen 24 años o menos corresponden a las dos primeras clases, es decir :

$$0,15 + 0,25 = 0,40$$
$$\Downarrow$$
$$40\%$$ RPTA. C

ENUNCIADO: La siguiente distribución muestra el peso en gramos de 30 paquetes en un determinado producto.

Peso (g)	h_i
[10 ; 14]	k/2
[15 ; 19]	0,17
[20 ; 24]	2k
[25 ; 29]	k
[30 ; 35⟩	0,13

14.- ¿Cuántos paquetes tienen pesos que van desde 15 hasta 29 gramos?

A) 21 ***B) 23*** ***C) 25*** ***D) 24*** ***E) 26***

Resolución.-

Para calcular el valor de "*k*" recordemos que :

$$\sum_{i=1}^{5} h_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{2} + 0,17 + 2k + k + 0,13 = 1$$

$$\Rightarrow \quad k = 0,20$$

Luego, la tabla de distribución de frecuencias quedará así :

Peso (g)	h_i
[10 ; 14]	0,10
[15 ; 19]	0,17
[20 ; 24]	0,40
[25 ; 29]	0,20
[30 ; 35>	0,13

Los paquetes, cuyos pesos van desde 15 hasta 29 gramos, co - rresponden a la segunda, tercera y cuarta clase, es decir :

$$0,17 = 0,40 + 0,20 = 0,77$$

Luego, la cantidad de paquetes será :

$\therefore$ $\boxed{(0,77)\ 30 = 23 \text{ paquetes}}$ RPTA. B

15.- ¿Cuántos paquetes tienen 22 gramos o más?

A) 11 ***B) 12*** ***C) 13*** ***D) 14*** ***E) 16***

Resolución.-

Los paquetes que tienen 22 gramos o más se ubican en la mitad de la tercera clase, toda la cuarta clase y la quinta clase, esto es :

$$\frac{0,40}{2} + 0,20 + 0,13 = 0,53$$

La cantidad de paquetes resultará ser :

$\therefore$ $\boxed{(0,53)\ 30 = 16 \text{ paquetes}}$ RPTA. E

16.- ¿Cuántos paquetes tienen 27 gramos o menos?

A) 22 ***B) 23*** ***C) 24*** ***D) 25*** ***E) 26***

Resolución.-

Los paquetes que tienen 27 gramos o menos se ubican en las tres primeras clases y la mitad de la cuarta clase, es decir :

$$0,10 + 0,17 + 0,40 + \frac{0,20}{2} = 0,77$$

La cantidad de paquetes será :

$\therefore$ $\boxed{(0,77)30 = 23 \text{ paquetes}}$ RPTA. B

ENUNCIADO : A partir de los siguientes datos :

2	4	8	3	3	9	5	8	1	4
5	8	9	1	10	4	0	10	10	3
3	0	10	12	2	7	8	4	2	9
9	4	6	5	1	6	9	3	11	9
9	6	2	5	7	3	2	7	4	10

17.- Completar la tabla para un ancho de clase común igual a 2.

I_i	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	$x_i\,f_i$
[0 ; >						
[; >						
[; >						
[; >						
[; 12]						

Resolución.-

I_i	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	$x_i\,f_i$
[0 ; 2>	1	6	0,12	6	0,12	6
[2 ; 4>	3	11	0,22	17	0,34	33
[4 ; 6>	5	10	0,20	27	0,54	50
[6 ; 8>	7	6	0,12	33	0,66	42
[8 ; 10]	9	10	0,20	43	0,86	90
[10 ; 12]	11	7	0,14	50	1,00	77
		50	1			298

18.- Calcular la media de los datos agrupados.

A) 5,84 B) 5,86 C) 5,74 D) 5,96 E) 5,80

Resolución.-

De los datos de la tabla tendremos que :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{6} f_i} = \frac{298}{50}$$

$\therefore \quad \bar{x} = 5,96$ RPTA. D

19.- Calcular la mediana para los datos agrupados.

A) 5,4 ***B) 5,5*** ***C) 5,6*** ***D) 5,7*** ***E) 5,9***

Resolución.-

Como la clase mediana es la primera cuya frecuencia acumulada (F_i) excede a la mitad de los datos, es decir a 25, por lo tanto, la clase mediana es la tercera clase, entonces :

$$x_m = L_m + W_m\left[\frac{\frac{n}{2} - F_{m-1}}{f_m}\right] = 4 + 2\left[\frac{25-17}{10}\right]$$

$\therefore$ $\boxed{x_m = 5{,}6}$ RPTA. C

20.- Calcular la moda para los datos agrupados.

A) 3,5 ***B) 3,62*** ***C) 3,6*** ***D) 3,67*** ***E) 3,72***

Resolución.-

En la tabla, la segunda clase es la clase modal pues es la de mayor frecuencia absoluta ($f_2 = 11$), luego la clase precedente tiene frecuencia 6 y la clase siguiente tiene frecuencia 10, entonces:

$d_1 = 11 - 6 = 5$

$d_2 = 11 - 10 = 1$

$$M_o = L_o + W_o\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right] = 2 + 2\left[\frac{5}{5+1}\right]$$

$\therefore$ $\boxed{M_o = 3{,}67}$ RPTA. D

21.- Considere la tabla siguiente; completarla e indicar la marca de clase de la clase mediana:

A) 55

B) 45

C) 35

D) 15

E) 25

I_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[10 ; 20⟩			0,1	
[20 ; 30⟩				
[30 ; 40⟩			0,16	
[40 ; 50⟩	20			0,6
[50 ; 60⟩	40			

<u>Resolución</u>.-

Inicialmente completemos la tabla con variables :

I_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[10 ; 20>	f_1	F_1	0,1	H_1
[20 ; 30>	f_2	F_2	h_2	H_2
[30 ; 40>	f_3	F_3	0,16	H_3
[40 ; 50>	20	F_4	h_4	0,6
[50 ; 60>	40	n	h_5	1
	n		1	

Luego :

$* \; 0,6 + h_5 = 1 \quad \Rightarrow \quad h_5 = 0,4$

$* \; h_5 = \dfrac{40}{n} \quad \Rightarrow \quad 0,4 = \dfrac{40}{n} \quad \Rightarrow \quad n = 100$

$* \; 0,16 = \dfrac{f_3}{n} \quad \Rightarrow \quad 0,16 = \dfrac{f_3}{100} \quad \Rightarrow \quad f_3 = 16$

$* \; 0,1 = \dfrac{f_1}{n} \quad \Rightarrow \quad 0,1 = \dfrac{f_1}{100} \quad \Rightarrow \quad f_1 = 10$

Entonces la tabla quedará :

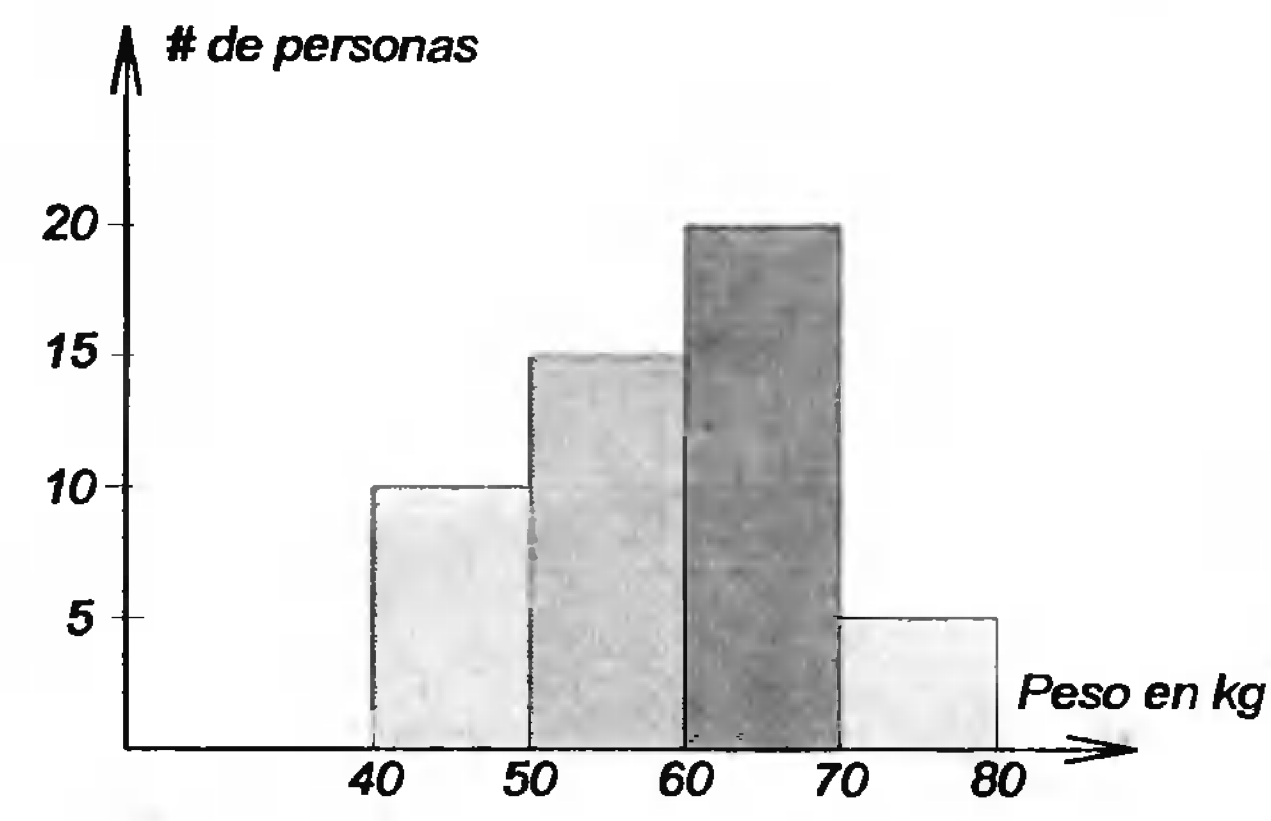
I_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[10 ; 20>	10	10	0,1	0,1
[20 ; 30>	14	24	0,14	0,24
[30 ; 40>	16	40	0,16	0,4
[40 ; 50>	20	60	0,2	0,6
[50 ; 60>	40	100	0,4	1
	100		1	

Como hay 100 datos, la clase mediana es la primera cuya frecuencia acumulada absoluta sea mayor que 50, luego, la cuarta clase es dicha clase mediana :

$I_4 = [40 ; 50> \quad \Rightarrow \quad x_4 = \dfrac{40+50}{2}$

$\therefore \quad \boxed{x_4 = 45}$ RPTA. B

22.- En el siguiente histograma se muestra la distribución de frecuencia de un conjunto de personas y sus pesos :



Calcular el peso promedio.

A) 60 kg ***B) 59 kg*** ***C) 57,5 kg*** ***D) 58 kg*** ***E) 58,5 kg***

Resolución.-

Colocando los datos en una tabla de distribución de frecuencias :

Peso en kg	# de personas	x_i	$x_i f_i$
I_i	f_i		
[40 ; 50>	10	45	450
[50 ; 60>	15	55	825
[60 ; 70>	20	65	1 300
[70 ; 80]	5	75	375
	$\Sigma f_i = 50$		$\Sigma x_i f_i = 2\,950$

Luego : $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{2950}{50}$

$\therefore$ $\boxed{\bar{x} = 59\ kg}$ RPTA. B

23.- A partir del siguiente diagrama escalonado, calcular la media de los datos agrupados.

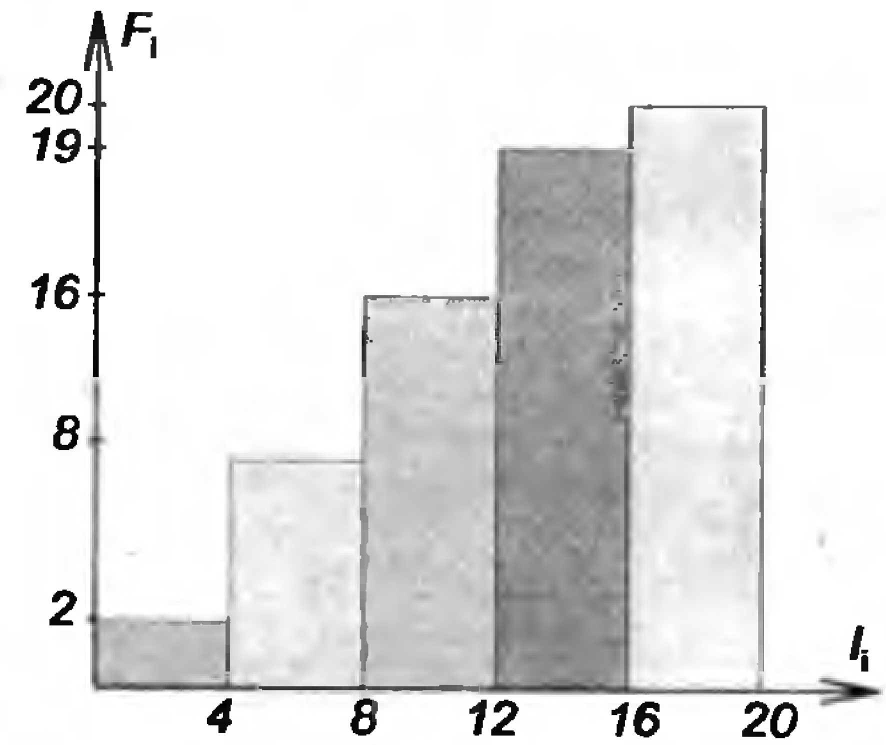
A) 9,1

B) 9,0

C) 8,9

D) 8,8

E) 8,7



Resolución.-

En una tabla de distribución de frecuencias, los datos quedarán :

Se sabe que :

$f_1 = F_1 \Rightarrow f_1 = 2$

$f_2 = F_2 - F_1 \Rightarrow f_2 = 6$

$f_3 = F_3 - F_2 \Rightarrow f_3 = 8$

$f_4 = F_4 - F_3 \Rightarrow f_4 = 3$

$f_5 = F_5 - F_4 \Rightarrow f_5 = 1$

I_i	F_i
[0 ; 4 >	$F_1 = 2$
[4 ; 8 >	$F_2 = 8$
[8 ; 12>	$F_3 = 16$
[12 ; 16>	$F_4 = 19$
[16 ; 20>	$F_5 = 20$

Luego, la tabla de distribución de frecuencias solutas quedará :

a b -

I_i	x_i	f_i	$x_i f_i$
[0 ; 4 >	2	2	4
[4 ; 8 >	6	6	36
[8 ; 12>	10	8	80
[12 ; 16>	14	3	42
[16 ; 20]	18	1	18
	$\Sigma x_i \rightarrow$	20	180 $\leftarrow \Sigma x_i f_i$

Por lo tanto :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{180}{20}$$

$\therefore$ $\boxed{\bar{x} = 9{,}0}$ RPTA. B

ENUNCIADO : La siguiente información representa la composición de una dieta alimenticia:

	Gramos	*Calorías*
Carbohidratos	*500*	*2 050*
Proteínas	*100*	*410*
Grasas	*100*	*930*

24.- ¿Qué porcentaje del total de calorías de la dieta se debe a las proteínas?

A) 12% ***B) 14%*** ***C) 22%*** ***D) 27%*** ***E) 32%***

Resolución.-

El total de calorías de la dieta es :

$$2\,050 + 410 + 930 = 3\,390 \text{ calorías}$$

El porcentaje de calorías que representan las proteínas se calcula por regla de tres :

$$\begin{array}{lcl} 3390 \text{ cal} & \longrightarrow & 100\% \\ 410 \text{ cal} & \longrightarrow & x \end{array} \Rightarrow \boxed{x = 12\%} \qquad \text{RPTA. A}$$

25.- ¿Cuántas calorías hay en 1 gramo de carbohidratos?

A) 0,2 ***B) 2*** ***C) 4,1*** ***D) 10,25*** ***E) 102,5***

Resolución.-

Por regla de tres :

$$\begin{array}{lcl} 500 \text{ gramos} & \longrightarrow & 2050 \text{ calorías} \\ 1 \text{ gramo} & \longrightarrow & x \end{array} \Rightarrow \boxed{x = 4{,}1 \text{ calorías}} \qquad \text{RPTA. C}$$

26.- ¿Qué cantidad de carbohidratos son necesarios para tener el mismo número de calorías que tienen 1 000 g de grasas?

A) 1 110 g ***B) 2 050 g*** ***C) 2 268 g*** ***D) 4 100 g*** ***E) 4 536 g***

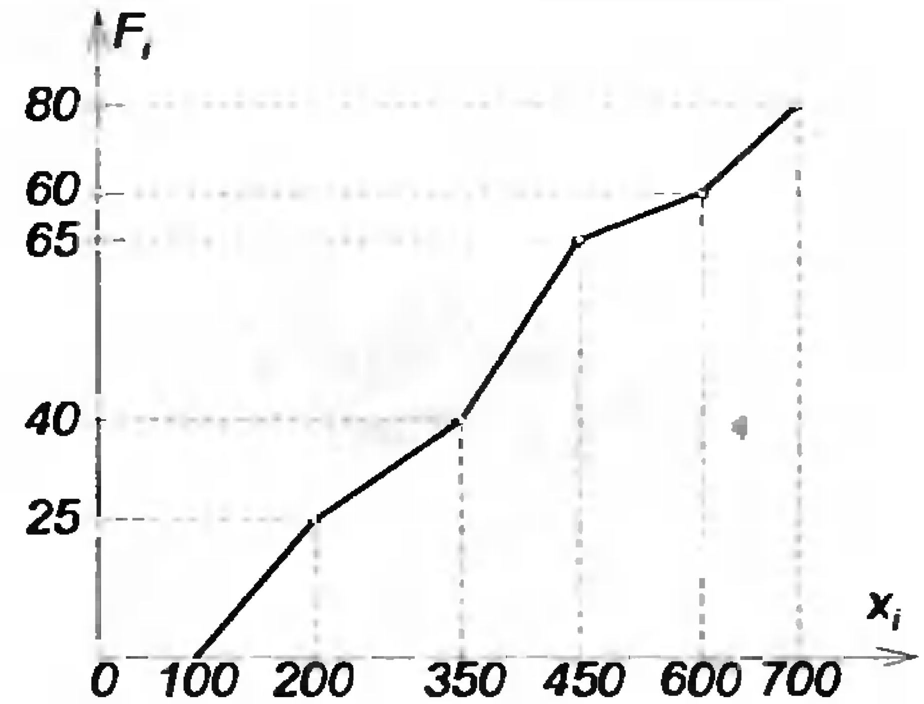
Resolución.-

Según la tabla, en 1 000 g de grasas hay 9 300 calorías, entonces :

$$\begin{array}{lcl} \text{En } 500 \text{ g de carbohidratos} & \rightarrow & 2\,050 \text{ calorías} \\ \text{En } x \text{ g de carbohidratos} & \rightarrow & 9\,300 \text{ calorías} \end{array}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 2\,268} \qquad \text{RPTA. C}$$

27.- De la siguiente ojiva acerca de los sueldos de los empleados :



Hallar la mediana

A) 320

B) 340

C) 350

D) 400

E) 450

Resolución.-

La tabla de distribución de frecuencias acumulados (F_i) quedará :

I_i	F_i
200	$F_1 = 25$
350	$F_2 = 40$
450	$F_3 = 65$
600	$F_4 = 70$
700	$F_5 = 80$

Nótese que al ser 80 observaciones, la mediana es la semisuma de las observaciones que ordenadas ascendentemente ocupen los lugares 40 y 41, es decir, 350 y 450, entonces :

$$x_m = \frac{350+450}{2}$$

$\therefore$ $\boxed{x_m = 400}$ RTA. D

28.- En una encuesta sobre los ingresos anuales, en miles de soles, de un grupo de familias se obtuvo la siguiente información :

$[L_i - L_s\rangle$	x_i	f_i
$[10 - 30\rangle$		20
$[30 - 50\rangle$		
$[50 - 70\rangle$		
$[70 - 90\rangle$		20

Además : $$\frac{\sum_{i=1}^{4} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{4} f_i} = 54 \qquad \frac{f_2}{f_3} = \frac{1}{5}$$

Calcular el número de familias con ingreso no menor de 50 mil soles.

A) 50 ***B) 60*** ***C) 70*** ***D) 80*** ***E) 85***

Resolución.-

Como : $\dfrac{f_2}{f_3} = \dfrac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad f_3 = 5 f_2$

La tabla de distribución de frecuencias será inicialmente :

$[L_i - L_s\rangle$	x_i	f_i	$x_i f_i$
$[10-30\rangle$	20	20	400
$[30-50\rangle$	40	f_2	$40\,f_2$
$[50-70\rangle$	60	$5\,f_2$	$300\,f_2$
$[70-90\rangle$	80	20	1 600

Nótese que : $\sum_{i=1}^{4} f_i = 54$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2000+340f_2}{40+6f_2} = 54$$

$$\Rightarrow \qquad f_2 = 10$$

Luego, la tabla de distribución de frecuencias quedará :

$[L_i - L_s\rangle$	x_i	f_i
$[10-30\rangle$	20	20
$[30-50\rangle$	40	10
$[50-70\rangle$	60	50
$[70-90\rangle$	80	20

Las familias con ingreso no menor de 50 mil soles están ubicados en las dos últimas clases, luego son :

$\therefore$ $\boxed{50 + 20 = 70 \text{ familias}}$ RPTA. C

29.- Sabiendo que el gráfico del lado representa el histograma de frecuencias absolutas, tomados de una muestra de tamaño 40.

Hallar $f_1 + f_4 + f_5$

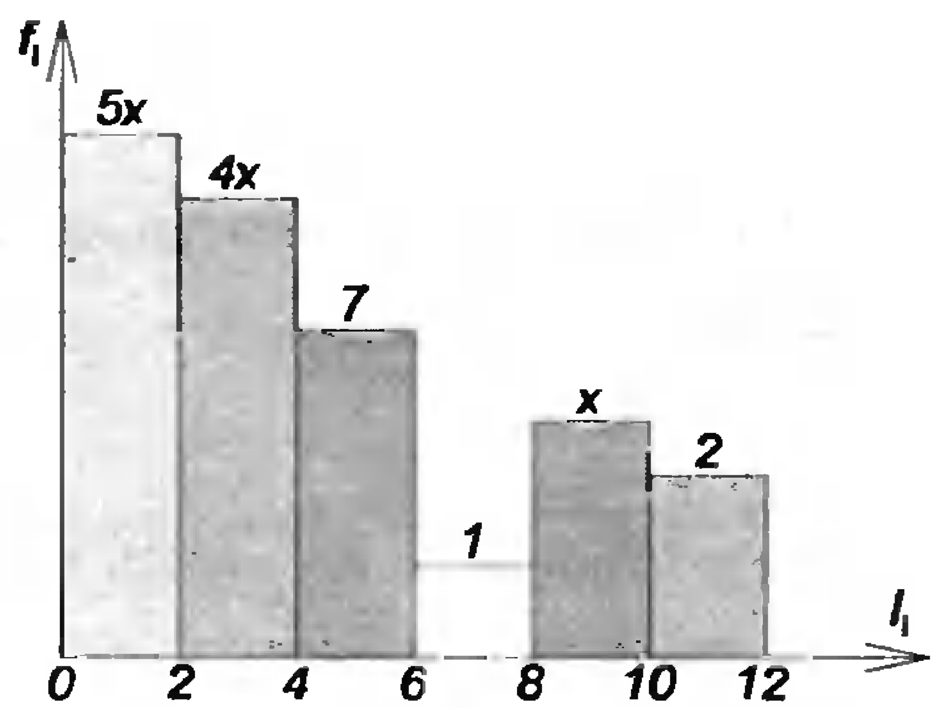
A) 19

B) 20

C) 17

D) 16

E) 22



Resolución.-

Colocando los datos del gráfico en una tabla de distribución de frecuencias :

Como la muestra tiene tamaño 40 :

$$\sum_{i=1}^{6} f_i = 40 \quad \Rightarrow \quad 5x + 4x + 7 + 1 + x + 2 = 40$$

$$\Rightarrow \qquad x = 3$$

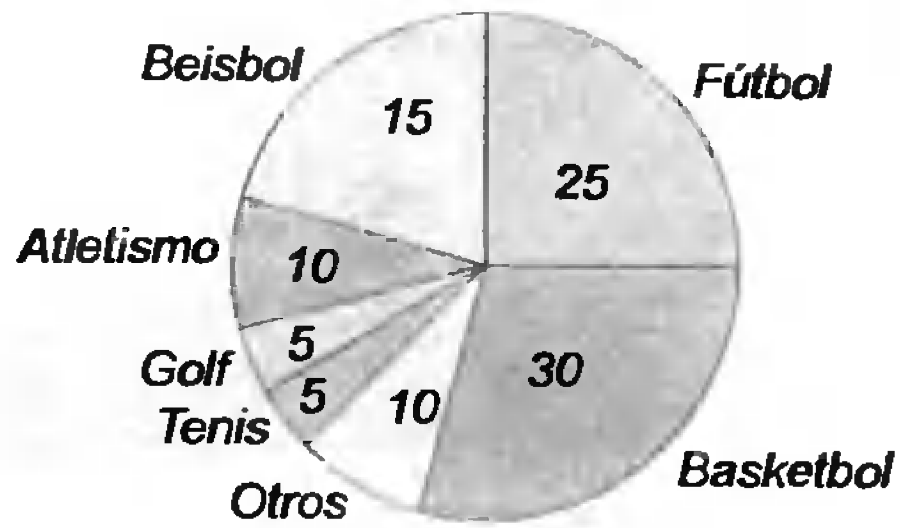
I_i	f_i
$[\ 0\,;2\ \rangle$	$F_1 = 5x$
$[\ 2\,;4\ \rangle$	$F_2 = 4x$
$[\ 4\,;6\ \rangle$	$F_3 = 7$
$[\ 6\,;8\ \rangle$	$F_4 = 1$
$[\ 8\,;10\rangle$	$F_5 = x$
$[10\,;12\rangle$	$F_6 = 2$

Luego : $f_1 + f_4 + f_5 = 5(3) + 1 + (3)$

$\therefore$ $\boxed{f_1 + f_4 + f_5 = 19}$ RPTA. A

ENUNCIADO :

Manuel hizo una encuesta entre 100 alumnos para averiguar cuáles eran sus deportes favoritos; el gráfico circular muestra el número de alumnos que escogieron un deporte determinado como favorito.



30.- ¿Qué fracción de la sección circular está representada por los alumnos que escogieron fútbol?

A) 1/3 ***B) 1/4*** ***C) 1/8*** ***D) 1/5*** ***E) 1/6***

Resolución.-

Como el total de alumnos es 100, entonces, por regla de tres :

$$\begin{array}{l} 100 \longrightarrow 1 \\ 25 \longrightarrow x \end{array} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}} \quad \text{RPTA. B}$$

31.- ¿Qué ángulo tiene el sector circular correspondiente a beisbol?

A) 48º ***B) 36º*** ***C) 15º*** ***D) 54º*** ***E) 72º***

Resolución.-

El total de alumnos es 100 y completa un ángulo de 360° entonces el ángulo correspondiente a beisbol (15 alumnos) es, por regla de tres :

$$\begin{array}{l} 100 \text{ alumnos} \longrightarrow 360^\circ \\ 15 \text{ alumnos} \longrightarrow x \end{array} \Rightarrow \boxed{x = 54^\circ} \quad \text{RPTA. D}$$

32.- Dado el siguiente cuadro :

Si $F_4 = 270$ ¿Cuántos tienen edades entre 22 y 32 años ?

A) 240

B) 230

C) 220

D) 210

E) 200

Edades	h_i
[19 ; 21]	0,15
[22 ; 24]	0,25
[25 ; 27]	0,40
[28 ; 30]	0,10
[31 ; 33]	0,10

Resolución.-

Se sabe que : $h_4 = 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}40 + 0{,}10 \quad \Rightarrow \quad h_5 = 0{,}90$

Si "n" es el total de personas de la muestra :

$$h_4 = \frac{F_4}{n} \quad \Rightarrow \quad 0{,}90 = \frac{270}{n} \quad \Rightarrow \quad n = 300$$

Calculando, ahora, las frecuencias absolutas :

* $f_1 = h_1 \cdot n \quad \Rightarrow \quad f_1 = (0{,}15)300 = 45$ para $[19\,;21]$
* $f_2 = h_2 \cdot n \quad \Rightarrow \quad f_2 = (0{,}25)\,300 = 75$ para $[22\,;24]$
* $f_3 = h_3 \cdot n \quad \Rightarrow \quad f_3 = (0{,}40)\,300 = 120$ para $[25\,;27]$
* $f_4 = h_4 \cdot n \quad \Rightarrow \quad f_4 = (0{,}10)\,300 = 30$ para $[28\,;30]$
* $f_5 = h_5 \cdot n \quad \Rightarrow \quad f_5 = (0{,}10)\,300 = 30$ para $[31\,;33]$

Para calcular la cantidad de personas que tienen edades comprendidas entre 22 y 32 años, no debe considerarse a los que tienen 22 años ni a los que tienen 32 años, luego son :

$$\therefore \quad \frac{2}{3}(75) + 120 + 30 + \frac{1}{3}(30) = \text{210 personas}$$ RPTA. D

33.- Del problema anterior ; hallar la moda y mediana. Indicar su suma.

A) 50 1/2 ***B) 25 2/3*** ***C) 50 1/6*** ***D) 51 1/6*** ***E) 51 6/7***

Resolución.-

La tabla de distribución de frecuencias absolutas del problema anterior quedará :

Edades	f_i	F_i
$[19\,;21]$	45	45
$[22\,;24]$	75	120
$[25\,;27]$	120	240
$[28\,;30]$	30	270
$[31\,;33]$	30	300

Nótese que la tercera clase es simultáneamente la clase mediana y la clase modal :

* Calculando la mediana :

$$x_m = L_m + W_m \left[\frac{\frac{n}{2} - F_{m-1}}{f_m}\right] = 25 + 2\left[\frac{150-120}{120}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad x_m = 25\,\frac{1}{2}$$

* Calculando la moda : $d_1 = 120 - 75 = 45$

$$d_2 = 120 - 30 = 90$$

$$M_o = L_o + W_o\left[\frac{d_1}{d_1+d_2}\right] = 25 + 2\left[\frac{45}{45+90}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad M_o = 25\ \frac{2}{3}$$

$$\therefore \qquad x_m + M_o = 51\ \frac{1}{6}$$ **RPTA. D**

34.- Dada la muestra : 1 ; 2 ; 3 ; ... ; n ; determinar la varianza de la muestra.

A) n^2 *B)* n^2+1 *C)* n^2-1 *D)* $\frac{n^2+1}{12}$ *E)* $\frac{n^2-1}{12}$

Resolución.-

Los elementos de la muestra forman una progresión aritmética cuya razón es 1 y la frecuencia absoluta de cada uno de los elementos es $f_i = 1$

x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
1	1	1	1^2	1^2
2	1	2	2^2	2^2
3	1	3	3^2	3^2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	1	n	n^2	n^2
	n	$\frac{n(n+1)}{2}$		$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Luego : $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{n+1}{2}$$

Entonces : $$S^2_{(x)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - (\bar{x})^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \left(n+1\right)^2$$

$$S^2_{(x)} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$S^2_{(x)} = (n+1)\left[\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{12}\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{S^2_{(x)} = \frac{n^2-1}{12}} \qquad \text{RPTA E}$$

35.- En un empresa donde los salarios tienen una media de \$ 100 y una desviación estándar de \$ 20, el sindicato solicita que cada salario x_i se transforme en Y_i mediante la siguiente relación : $Y_i = 2,5\,x_i + 10$. El directorio acoge parcialmente rebajando los salarios propuestos por el sindicato en un 10%, lo que es aceptado. Se pide calcular la media y la varianza de la nueva distribución de salarios.

A) Media : 32
Varianza : 2 025

B) Media : 34
Varianza : 2 025

C) Media : 34
Varianza : 900

D) Media : 32
Varianza : 900

E) Media : 34
Varianza : 909

Resolución.-

Sea x_i el salario inicial, donde, por datos, su promedio es $\bar{x} = 100$ y su desviación estándar es $S(x) = 20$.

El salario solicitado por el sindicato es : $\quad Y_i = 2,5\,x_i + 10$

Llamado Z_i al salario propuesto por el directorio :

$$Z_i = Y_i = 0,10\,Y_i = 0,9\,y_i = 0,9\,(2,5\,x_i + 10) = 2,25\,x_i + 9$$

Luego, la media y la varianza de los nuevos salarios serán :

$$\bar{z} = 2,25\,\bar{x} + 9 = 2,25\,(1000 + 9 \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 34$$

$$S^2_{(z)} = (2,25)^2\,S^2(x) = (2,25)^2\,(20)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S^2_{(z)} = 2\,025}$$

36.- Se da a un estudiante de Ingeniería la siguiente distribución de frecuencias que contiene datos sobre temperatura en º C :

Intervalos de clase	I_i						
Marcas de clase	x_i				3		
Frecuencia Absoluta	f_i	3	5	10	f_4	3	2

Se sabe además que son 24 observaciones que la amplitud de cada clase es constante e igual a 6. Calcúlese la desviación estándar de la muestra.

A) 8,37 ***B) 8,22*** ***C) 8*** ***D) 8,47*** ***E) 8,40***

Resolución.-

Por dato : $f_i = 24 \Rightarrow 3 + 5 + 10 + f_4 + 3 + 2 = 24$

$\Rightarrow f_4 = 1$

Completando el cuadro de distribución de frecuencias :

* Calculando la varianza :

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - (\bar{x})^2 = \frac{1872}{24} - (-2,5)^2$$

$S^2 = 71,75$

I_i	x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
[-18 ; -12>	-15	3	-45	225	675
[-12 ; -6>	-9	5	-45	81	405
[-6 ; 0>	-3	10	-30	9	90
[0 ; 6>	3	1	3	9	9
[6 ; 12>	9	3	27	81	243
[12 ; 18>	15	2	30	225	450
		24	-60		1 872

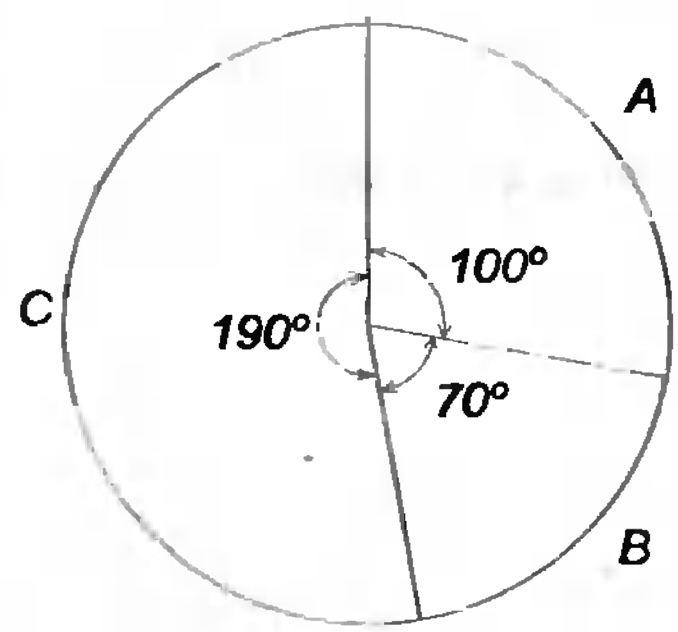
Luego, la desviación estándar será :

$S = \sqrt{71,75}$

$\therefore$ $\boxed{S = 8,47}$ RPTA. D

ENUNCIADO :

Para hacer el siguiente gráfico se ha realizado una encuesta a 7 200 alumnos de los cuales "A" es el sector que postula a Informática, en "B" prefieren Biología y "C" postulan al programa de Veterinaria.



37.- ¿Cuántos alumnos postulan a Informática ?

A) 2000 ***B) 700*** ***C) 1 400*** ***D) 3 800*** ***E) 1 000***

Resolución.-

Como 7 200 es el total de alumnos y 100° es el ángulo correspondientes a los que postulan a Informática :

$7200 \longrightarrow 360°$

$x \longrightarrow 100\%$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = 2\ 000}$ RPTA. A

38.- ¿Cuántos alumnos hay en el sector "C" ?

A) 700 ***B) 2 000*** ***C) 3 800*** ***D) 1 500*** ***E) 1 600***

Resolución.-

Considerando a 7200 como el total de alumnos de la muestra y notando que el ángulo correspondiente al sector C es 190º , tendremos :

$$\begin{array}{ccc} 7200 & \longrightarrow & 360^\circ \\ x & \longrightarrow & 190^\circ \end{array} \Rightarrow \boxed{x = 3\,800} \quad \text{RPTA. C}$$

39.- En una encuesta se obtuvo la siguiente información :

Si sabe que la media de la muestra vale 61 puntos. Determinar la varianza de la distribución.

Puntaje	Porcentaje
[0 ; 40⟩	10%
[40 ; 60⟩	?
[60 ; 80⟩	?
[80 ; 100⟩	10%

A) 320 ***D) 329***

B) 323 ***E) 331***

C) 326

Resolución.-

Inicialmente la tabla de distribución de frecuencias sería :

I_i	x_i	h_i	$x_i h_i$	x_i^2	$x_i^2\, h_i$
[0 ; 40⟩	20	0,1	2	400	40
[40 ; 60⟩	50	h_2	$50\,h_2$	2 500	$2\,500\,h_2$
[60 ; 80⟩	70	h_3	$70\,h_3$	4 900	$4\,900\,h_3$
[80 ; 100⟩	90	0,1	9	8 100	810

Nótese que : $h_2 + h_3 = 0{,}8$ ... (1)

Considerando que "n" es el número total de datos y que :

$$\bar{x} = 61 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum x_i f_i}{n} = 61 \quad \Rightarrow \quad \sum x_i h_i = 61$$

$$\Rightarrow \quad 2 + 50\,h_2 + 70\,h_3 + 9 = 61 \quad \Rightarrow \quad 5\,h_2 + 7\,h_3 = 5 \text{ ... (2)}$$

De (1) y (2) : $h_2 = 0{,}3 \quad \wedge \quad h_3 = 0{,}5$

Completamos ahora la tabla con estos datos :

Calculando la varianza :

I_i	x_i	h_i	$x_i h_i$	x_i^2	$x_i^2\, h_i$
[0 ; 40⟩	20	0,1	2	400	40
[40 ; 60⟩	50	0,3	15	2 500	750
[60 ; 80⟩	70	0,5	35	4 900	2 450
[80 ; 100⟩	90	0,1	9	8 100	810
			61		4 050

$$S^2_{(x)} = \frac{\sum x_i^2 f_i}{n} - (\bar{x})^2$$

$$S^2_{(x)} = \sum x_i^2 h_i - (\bar{x})^2$$

$$S^2_{(x)} = 4050 - (61)^2$$

$$\therefore \quad \boxed{S^2_{(x)} = 329} \quad \text{RPTA. D}$$

40.- En una distribución de frecuencias se multiplican los valores originales de la variable por 3 y se obtiene como media a 54. Además si se suma 5 a los valores originales de la variable se obtiene que la media de los cuadrados de los nuevos valores es 565. Calcular la desviación estándar correspondiente a los datos originales.

A) 5,8 ***B) 6*** ***C) 6,2*** ***D) 6,5*** ***E) 6,25***

Resolución.-

Considerando que "n" es el total de valores originales de la variable y que su media es $\bar{x}$:

* Si se multiplica a todos los valores originales por 3, la media también se multiplica por 3 :

$$3\bar{x} = 54 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 18$$

* Sumando 5 a cada uno de los valores de la variable y tomando la media aritmética de sus cuadrados se tendrá :

$$\frac{\sum (x_i + 5)^2 f_i}{n} = 565 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum (x_i^2 f_i + 10x_i f_i + 25 f_i)}{n} = 565$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sum x_i^2 f_i}{n} + 10\frac{\sum x_i f_i}{n} + 25\frac{\sum f_i}{n} = 565$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sum x_i^2 f_i}{n} + 10\bar{x} + 25 = 565$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sum x_i^2 f_i}{n} + 10(18) + 25 = 565$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sum x_i^2 f_i}{n} = 360$$

Luego : $$S_{(x)}^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{n} - (\bar{x})^2$$

$$S_{(x)}^2 = 360 - (18)^2$$

$$S_{(x)}^2 = 36$$

Por lo tanto : $$S_{(x)} = \sqrt{36}$$

$\therefore$ $\boxed{S_{(x)} = 6}$ RPTA. B

PROBLEMAS PROPUESTOS

Enunciado :

Se analizan las notas de 20 alumnos en el curso de Estadística recogiéndose los siguientes datos :

3 ; 4 ; 8 ; 2 ; 7 ; 11 ; 10 ; 12 ; 16 ; 15

7 ; 11 ; 13 ; 10 ; 6 ; 9 ; 9 ; 10 ; 13 ; 14

1.- Agrupe los datos en intervalos de ancho común igual a 4 y completa la siguiente tabla.

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	$x_i f_i$
[0 ; ⟩						
[; ⟩						
[; ⟩						
[; ⟩						
[; ⟩						

A) S/. 1,10 B) S/. 1,20 C) S/. 1,15

D) S/. 1,00 E) S/. 1,12

2.- ¿Cuántos estudiantes aprobaron el curso, según los datos originales y según los datos agrupados?. Dar como respuesta la diferencia de los valores. (Nota aprobatoria igual a 10).

A) 1 B) 2 C) 3 D) 1,71 E) 1,4

3.- ¿Cuántos obtuvieron notas superiores o iguales a 15?. Dar como respuesta la diferencia de los valores obtenidos (en datos originales y en datos agrupados).

A) 1,25 B) 0,5 C) 1,75

D) 0,75 E) 0,25

4.- Calcular la media (para los datos sin agrupar).

A) 10,5 B) 10,2 C) 9,5

D) 10,31 E) 12,7

5.- Calcular la media (para los datos agrupados).

A) 9,8 B) 11,3 C) 10.7

D) 10,3 E) 9.71

6.- Calcular la mediana (para los datos sin agrupar).

A) 9,5 B) 9,8 C) 9 D) 10 E) 10,5

7.- Calcular la mediana (para los datos ya agrupados).

A) 9,2 B) 9,8 C) 10,1

D) 10,0 E) 9,83

8.- Calcular la moda (para los datos sin agrupar).

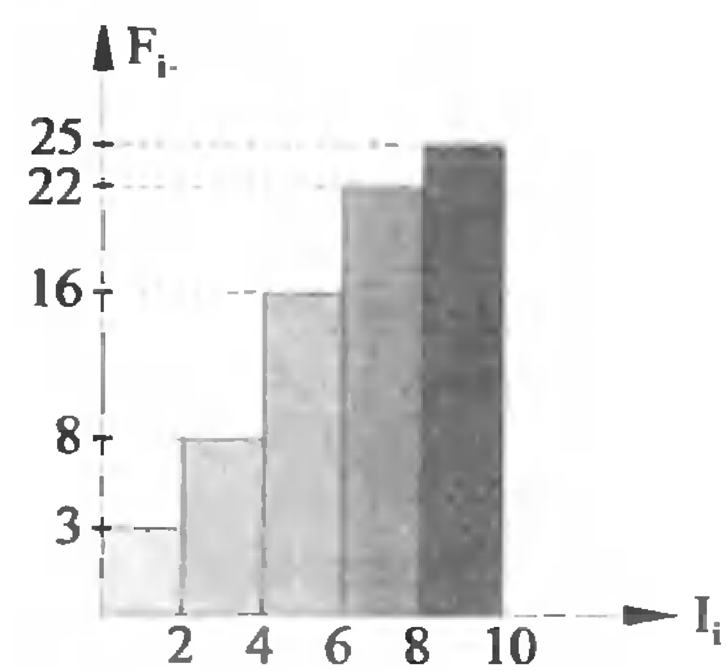
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

9.- Calcular la moda (para los datos ya agrupados).

A) 10,28 B) 9,83 C) 9,87

D) 10,17 E) 10,21

10.- A partir de la siguiente gráfica calcular el tamaño, la mediana y la moda de la muestra.

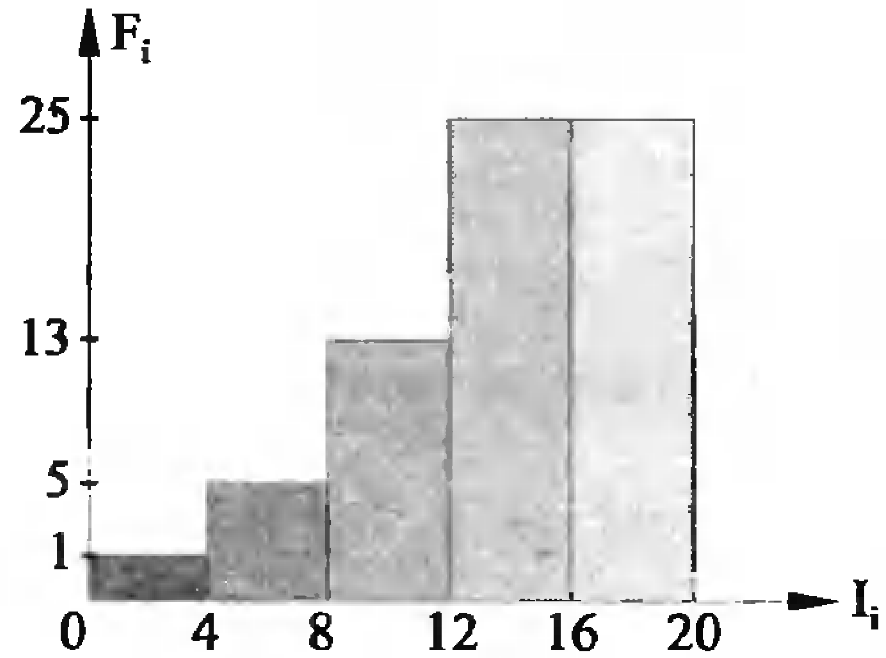


A) 10 ; 4,125 ; 5,2 D) 25 ; 5,125 ; 5,2

B) 25 ; 4,125 ; 5,2 E) 25 ; 5,125 ; 1,2

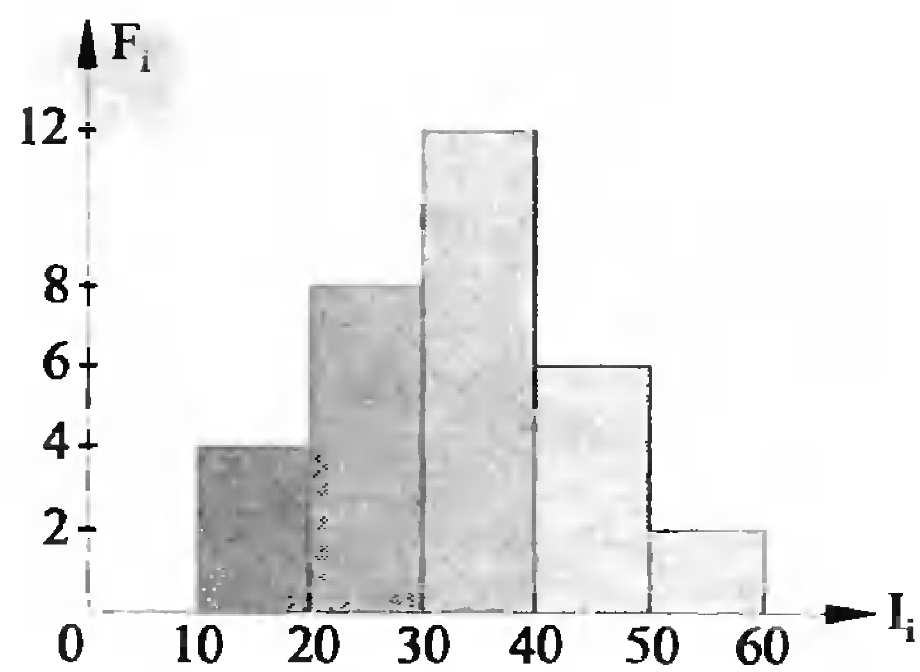
C) 25 ; 4,125 ; 1,2

11.- El diagrama muestra las notas de un grupo de alumnos (nota máxima : 20) ¿Cuántos alumnos aprobaron? (Nota aprobatoria : 11)



A) 8 B) 10 C) 14 D) 9 E) 12

12.- Del siguiente histograma :



Hallar la media aritmética

A) 32 B) 33,125 C) 32,450

D) 33,25 E) 33,5

13.- Dada la siguiente tabla :

I_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[10 ; 20⟩	a	b	0,1	e
[20 ; 30⟩	d	e	f	g
[30 ; 40⟩	h	i	0,3	j
[40 ; 50⟩	24	k	m	0,85
[50 ; 60⟩	30	p	q	r

Determinar $(a + b)$ y la marca de clase de la clase mediana.

A) 63;55 B) 38;45 C) 40;35

D) 42;15 E) 44;25

14.- Llenar la siguiente tabla de distribución de frecuencias :

I_i	f_i	h_i	H_i	F_i
[3 ; 6⟩	4	q		
[6 ; 9⟩	m	0,25	a	
[9 ; 12⟩	4	p		
[12 ; 15⟩	n	0,125		d
[15 ; 18⟩	g	0,125		
Totales	16	b		

Calcular : $a + b + d$

A) 19,5 B) 21 C) 17,5

D) 29 E) 15,5

Enunciado :

Dado el tablero incompleto de la distribución de frecuencia de las notas de 25 alumnos. Completar el tablero con una ancho de clase constante e igual a 2.

I_i	x_i	F_i	h_i	$x_i f_i$
[; ⟩				15
[; 6⟩				20
[; ⟩			11	14
[; ⟩		8		
[; ⟩				22
[; ⟩			25	

15.- Si la nota aprobatoria es 11 ¿Qué porcentaje de alumnos desaprobados existe?

A) 72% B) 74% C) 76%

D) 78% E) 80%

16.- Determinar la clase en la cual se encuentra el mayor porcentaje de alumnos y hallar dicho porcentaje.

A) 1^{ra} ; 20% B) 4^{ta} ; 32% C) 3^{ra} ; 44%

D) 4^{ta} ; 76% E) 3^{ra} ; 32%

17.- ¿Cuántos alumnos obtuvieron notas meno-res que 8?

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 11

18.- Dada la siguiente distribución :

Clases	[35 ; 45⟩	[45 ; 55⟩	[55 ; 65⟩	[65 ; 75⟩	[75 ; 85⟩	[85 ; 95⟩
f_i	5	12	18	14	6	3

Determinar la mediana.

A) 60,23 B) 61,67 C) 60,49

D) 61,50 E) 61

19.- Dada la siguiente distribución de frecuencias :

I_i	f_i
[10 ; 20⟩	4
[20 ; 40⟩	m
[40 ; 50⟩	4
[50 ; 70⟩	n
[70 ; 80⟩	g
	100

Se sabe además que : $h_1 = h_5$ y $h_2 = h_4$
Determinar la suma : $h_5 + h_2$

A) 1/3 B) 1/4 C) 1/2 D) 1/5 E) 3/4

20.- Se tiene la siguiente información sobre una distribución de frecuencias de 50 elementos de un material sometido a prueba de rotura (en kg/cm^3). Los intervalos tienen la misma amplitud igual a 20.

I_i	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$
[; ⟩	a	10	b	300
[; ⟩	c	d	18	400
[; ⟩	e	f	11	350
[; ⟩	g	17	h	i
[; ⟩	j	4	k	440
[; 120⟩	l	m		n

Determinar :

$$(a + b + c + d + e) + 2\,(f + g + h + i) + 3\,(j + k + l + m + n)$$

A) 6 708 B) 6 709 C) 6 710

D) 6 711 E) 6 712

NIVEL III

21.- Dada la siguiente tabla de distribución de frecuencias :

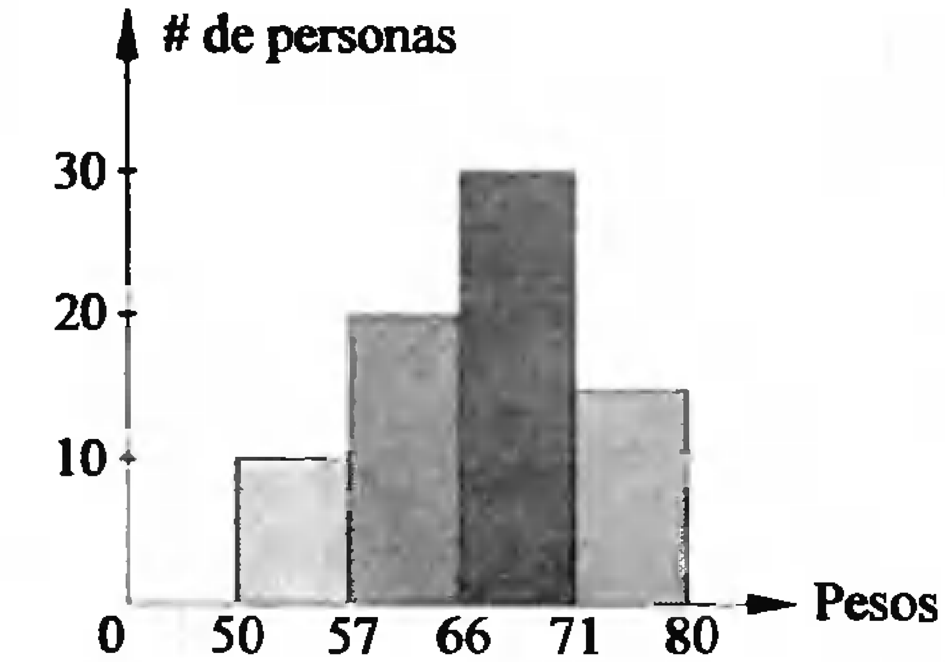
Edades (x_i)	Frecuencia Absoluta (f_i)
10	6
11	7
12	8
13	4
14	12
15	3

Calcular la suma de la media, la moda y la mediana.

A) 36 B) 36,65 C) 40,25

D) 38,45 E) 37

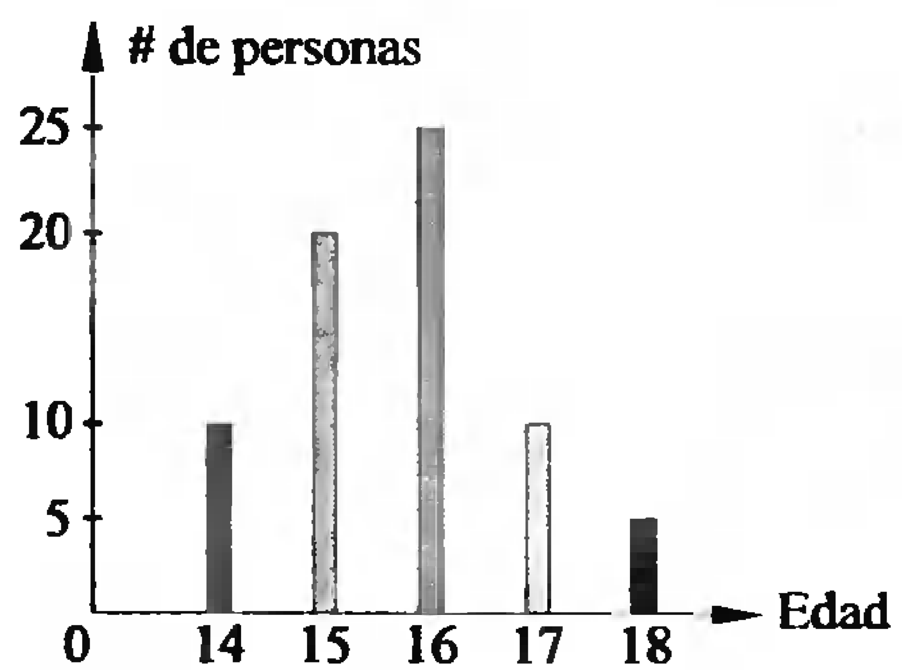
22.- Dado el siguiente histograma, calcular el peso promedio.



A) 65,85 B) 67,15 C) 64,95

D) 66,05 E) 67,35

23.- Calcular la edad promedio sabiendo que:



A) 15,71 B) 15,82 C) 15,63

D) 15,91 E) 17,23

24.- Calcular la mediana en :

Estatura	# de alumnos
[1,40 ; 1,50⟩	4
[1,50 ; 1,60⟩	12
[1,60 ; 1,70⟩	21
[1,70 ; 1,80⟩	10
[1,80 ; 1,90⟩	9

A) 1,619 B) 1,658 C) 1,674

D) 1,636 E) 1,624

25.- ¿Cuál es la moda en la siguiente tabla de distribución de frecuencias?

x_i	f_i
[55 ; 61⟩	4
[61 ; 67⟩	12
[67 ; 73⟩	25
[73 ; 79⟩	18
[79 ; 85⟩	13

A) 69,2 B) 70,9 C) 71,3

D) 72,4 E) 75,6

Enunciado :

En la siguiente tabla se muestra el número de autos vendidos en el primer trimestre del año, en referencia a tres marcas de automóviles : A, B y C.

	Marca A	Marca B	Marca C
Enero	300	240	100
Febrero	360	300	125
Marzo	450	360	180

26.- Las ventas de los autos marca A se incrementa en :

A) 40% B) 45% C) 50%

D) 100% E) $33\frac{1}{3}\%$

27.- De febrero a marzo, las ventas de los autos marca B se incrementaron en :

A) 20% B) $16\frac{1}{2}\%$ C) 25%

D) 44% E) 50%

28.- Señale la alternativa correcta :

A) Entre enero y febrero, la venta de los autos marca A y B se incrementó en igual porcentaje.

B) Entre febrero y marzo, la marca A sufrió el mayor incremento relativo en su ventas.

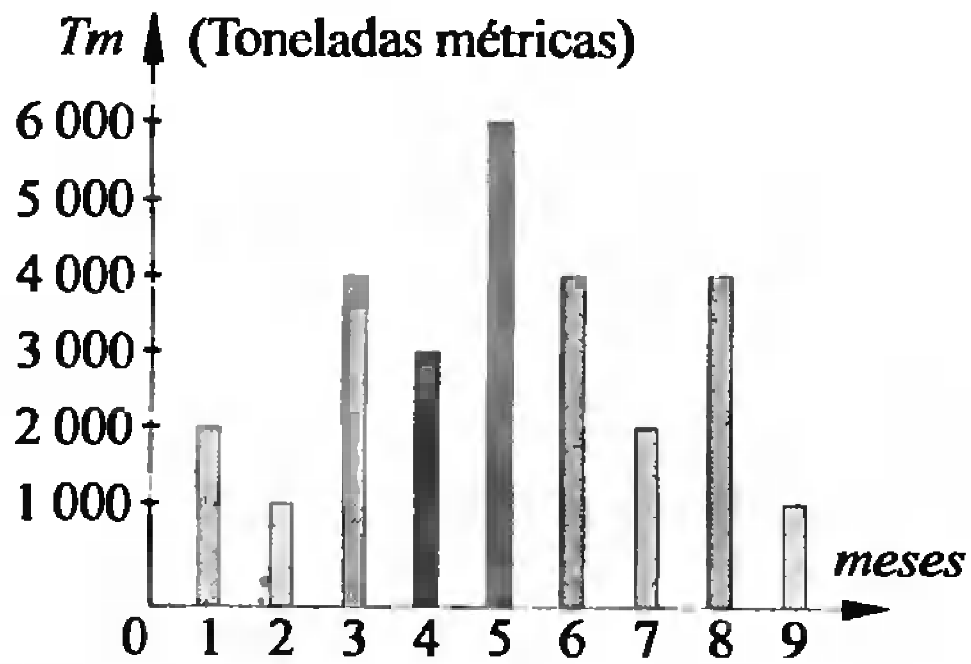
C) Entre enero y marzo, la marca C tuvo el mayor porcentaje de incremento en sus ventas.

D) El incremento absoluto de las ventas de B, es mayor que la marca A, entre febrero y marzo.

E) Porcentualmente, el incremento de B es igual, mes a mes.

Enunciado :

En la siguiente gráfica se muestra la producción de cierta industria durante los nueve primeros meses del año :



29.- ¿Entre qué meses se produjo el mayor decremento en la producción?

A) Entre febrero y marzo

B) Entre mayo y junio

C) Entre junio y julio

D) Entre agosto y setiembre

E) Entre julio y agosto

30.- La suma de la producción de dos meses consecutivos representa el $33\frac{1}{3}\%$ de la producción total de los nueve meses; estos meses son :

A) Febrero y marzo D) Mayo y junio

B) Abril y mayo E) Marzo y abril

C) Junio y julio

31.- La producción del mes de abril representa el 50% de la producción del mes de :

A) Setiembre B) Marzo C) Agosto

D) Mayo E) Enero

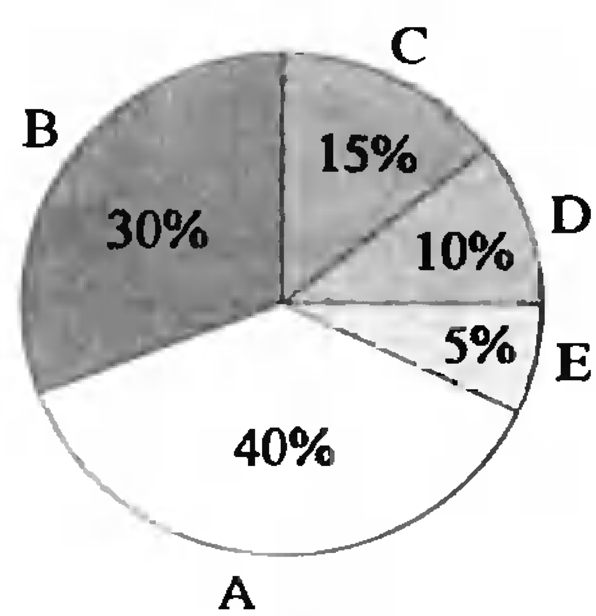
32.- ¿En cual de los tres trimestres hay una mayor producción?

A) 1° y 2° B) 1° y 3° C) 1°

D) 2° E) 3

Enunciado :

En una encuesta se tuvo la siguiente información, acerca del consumo de los producto A, B, C, D y E.



33.- ¿Qué porcentaje de los consumidores prefiere más el producto "A" que el producto "C"?

A) 37,5% B) 15% C) 15%

D) 40% E) 25%

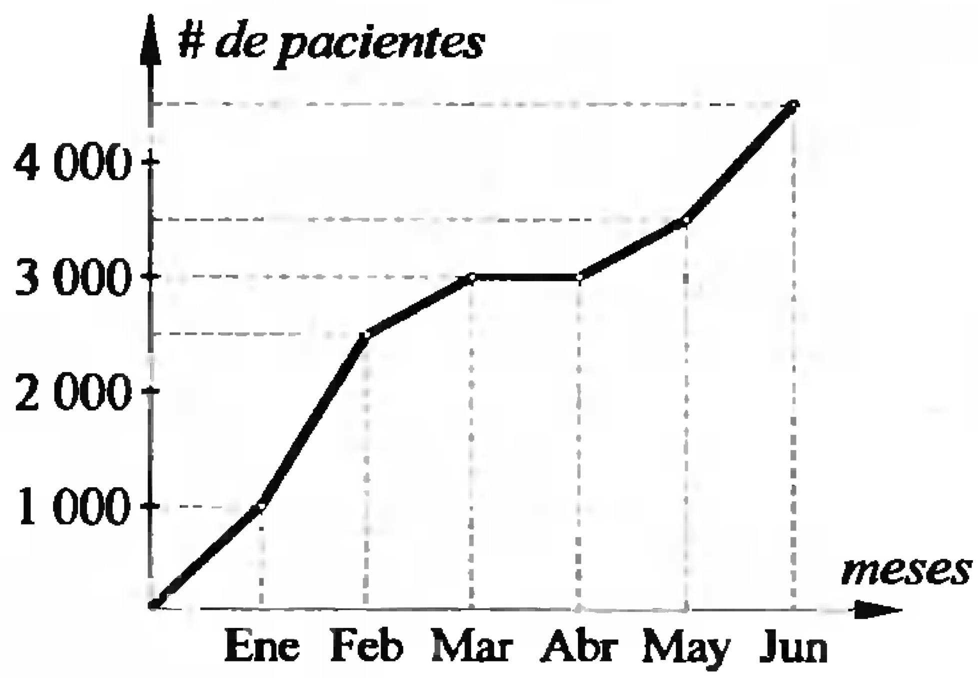
34.- ¿Qué porcentaje de los consumidores prefiere más el producto "C" que el producto "E"?

A) $33\frac{1}{3}\%$ B) 30% C) 5%

D) 10% E) 20%

Enunciado :

La gráfica señala la cantidad de pacientes atendidos durante el primer semestre del año:



35.- ¿Cuántos pacientes se atendieron entre los meses de enero y marzo inclusive?

A) 3 000 B) 2 000 C) 2 700

D) 1 850 E) 2 850

36.- ¿En qué mes se atendieron más pacientes?

A) Enero B) Febrero C) Marzo

D) Mayo E) Junio

37.- La menor cantidad de pacientes atendidos se produjo durante el mes de :

A) Abril B) Mayo C) Marzo

D) Junio E) Julio

38.- De la siguiente tabla de distribución de frecuencias :

Intervalo de clase	[20 ; 40⟩	[40 ; 50⟩	[50 ; 80⟩	[80 ; 90⟩	[90 ; 94⟩	Total
Frecuencia Absoluta	10	25	46	9	10	100

Determine la varianza de esta distribución :

A) 315 B) 315,1 C) 315,2

D) 315,3 E) 315,4

39.- Se tiene la siguiente información sobre una distribución de frecuencias de 50 elementos de material sometido a prueba de rotura (en kg/cm^2).
La longitud de los intervalos de clase es constante e igual a 20.

I_i	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$
				300
				400
			23	350
		17		
[; 120⟩				440

Determinar la mediana de la muestra.

A) 82,15 B) 82,25 C) 82,35

D) 82,45 E) 82,55

40.- Una distribución de frecuencias sobre notas de estudiantes de Matemáticas I presenta las frecuencias relativas h_3 y h_5 borrosas. Si se sabe que la media fue de 7,9; determinar la desviación estandar de la distribución.

Notas de Estudiantes	Númeo de estudiantes
[-0,5 ; 2,5⟩	0,02
[2,5 ; 4,5⟩	0,10
[4,5 ; 6,5⟩	h_3
[6,5 ; 8,5⟩	0,16
[8,5 ; 10,5⟩	h_5
[10,5 ; 12,5⟩	0,10
[12,5 ; 14,5⟩	0,02
[14,5 ; 6 más⟩	0,00

A) 6,48 B) 6,68 C) 6,88

D) 7,08 E) 7,18

15 RAZONES Y PROPORCIONES

15.1 RAZON

Comparación o relación matemática que se puede establecer por división o sustracción entre dos cantidades o números.

A RAZON ARITMETICA (R.A.)

Antecedente — Valor de la razón aritmética

$$a - b = r$$

Consecuente

Siendo *a* y *b* los términos de la razón aritmética.

Aplicación.- Los siguientes enunciados; representan una misma razón aritmética y son por consiguiente equivalentes :

* La edad de Jhon (J) excede a la edad de Marilyn (M) en 2 años
* La edad de Jhon es 2 años más que la edad de Marilyn
* La diferencia entre las edades de Jhon y Marilyn es 2 años

Todas ellas, se plantean simbólicamente del siguiente modo :

$$J - M = 2$$

B RAZON GEOMETRICA (R.G.)

Antecedente — Valor de la razón geométrica

$$\frac{a}{b} = k$$

Consecuente

Siendo *a* y *b* los términos de la razón geométrica.

OBSERVACIONES

1^ro^) Cuando se simplifica una fracción a su mínima expresión, la operación es de división de los dos términos de la fracción entre el M.C.D. de dichos términos.

Ejemplo : $\dfrac{14}{21} = \dfrac{2}{3}$; porque M.C.D. (14 ; 21) = 7 (numerador y denominador $\div 7$)

2^do^) Cuando el M.C. D. se desconoce se puede reemplazar por una constante usualmente de-signada por k.

Ejemplo : Dos números están en la razón de 3 : 5 ......

Se puede expresar :

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{5}$; de donde : $a = 3k$ y $b = 5k$ ($\times k$)

Aplicación.- Los siguientes enunciados son equivalentes :

* A es a B como 4 es a 5
* A y B están en la proporción de 4 a 5
* A y B están en la relación de 4 a 5

Todas ellas indican la razón geométrica entre A y B, y la planteamos así : $\boxed{\dfrac{A}{B} = \dfrac{4}{5}}$

Donde : $\dfrac{A}{B}$ y $\dfrac{4}{5}$ son equivalentes

Observación importante.- En adelante al referirnos a una razón, lo estaremos haciendo respecto de la razón geométrica.

15.2 RAZONES GEOMETRICAS EQUIVALENTES (R.G.E.)

Forma : $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} \dots = \dfrac{a_n}{b_n} = k$

Donde : $a_1, a_2, a_3, \dots\dots a_n$ = antecedentes

$b_1, b_2, b_3, \dots\dots b_n$ = consecuentes

Siendo : a_1 y b_n = extremos

$(b_1$ y $a_2)$, $(b_2$ y $a_3)$ ..... , $(b_{n-1}$ y $a_n)$ = Medios

Y : k = constante de proporcionalidad

Ejemplos :

1. $\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5}=2$

2. $\frac{6}{12}=\frac{8}{16}=\frac{5}{10}=\frac{7}{14}=\frac{9}{18}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

PROPIEDADES

1. La suma de los antecedentes entre la suma de los consecuentes es igual a la constante de proporcionalidad.

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}=k$$

2. El producto de los antecedentes entre el producto de los consecuentes es igual a la constante de proporcionalidad elevada a un exponente igual al número de razones multiplicadas.

$$\frac{a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_n}{b_1\times b_2\times b_3\times\ldots\times b_n}=k^n$$

3. La suma de los productos de los antecedentes por distintos números entre la suma de los productos respectivos de los consecuentes por los mismos números, es igual a la constante de proporcionalidad.

$$\frac{a_1.m+a_2.n+\ldots+a_n.z}{b_1.+m+b_2.n+\ldots+b_n.z}=k$$

4. La suma de las potencias *m*-ésimas de los antecedentes entre la suma de las potencias *m*-ésimas de los consecuentes es igual a la constante de proporcionalidad elevada a la *m*.

$$\frac{a_1^m+a_2^m+a_3^m+\ldots+a_n^m}{b_1^m+b_2^m+b_3^m+\ldots+b_n^m}=k^m$$

OBSERVACION :

En la serie : $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\frac{G}{H}=k$

Por ser equivalentes cumple que : $A=Bk$; $C=Dk$; $E=Fk$; $G=Hk$

15.3 RAZONES GEOMETRICAS EQUIVALENTES CONTINUAS

Son aquellas cuyos términos medios son iguales.

Ejemplos :

1. $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{E} = k$

2. $\frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

15.4 PROPORCION

Se denomina proporción a la equivalencia de dos razones de un mismo tipo.

A) PROPORCIÓN ARITMÉTICA O EQUIDIFERENCIA

Forma : $a - b = c - d$

Elementos : a = antecedente, extremo , primer término

b = consecuente, medio, segundo término

c = antecedente, medio, tercer término

d = consecuente, extremo, cuarto término

PROPIEDAD FUNDAMENTAL :

"En una proporción aritmética la suma de los extremos es igual a la suma de medios"

$$a + d = b + c$$

Observaciones :

1) Si los términos medios de la proporción son diferentes se les llama Progresión Aritmética *Discreta* y al último término se le llama generalmente *4ta diferencial*.

Ejemplos .- 24 - 12 = 30 - 18

25 - 10 = 50 - 35

2) Si los términos medios son iguales se les denomina Progresión Aritmética *Continua*, siendo los términos medios la *media diferencial* y el último término *tercera diferencial*..

Ejemplos.- 30 - 25 = 25 - 20

40 - 24 = 24 - 8

B) PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Llamamos así a la equivalencia que presentan dos razones geométricas.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

Elementos :

a = antecedente, extremo, 1er término

b = consecuente, medio, 2do término

c = antecedente, medio, 3er término

d = consecuente, extremo, 4to término

k = constante de proporcionalidad o razón de la proporción.

NOTAS :

1) En algunos medios matemáticos la proporción geométrica se denota así :

$$a : b : : c : d$$

2) Una Proporción Geométrica será *Discreta*, si los términos medios son diferentes denominándose generalmente al último término como la *cuarta proporcional*.

Ejemplo : $\frac{24}{12} = \frac{36}{18}$

Aquí 18 es la cuarta proporcional de la proporción geométrica dada

3) Una Proporción Geométrica es *Continua* si los términos medios son iguales, denominándose a cada uno de dichos términos la *media proporcional* y al último término la *tercera proporcional*.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad , \quad \text{tal que : } a > b > c$$

Ejemplo : $\frac{108}{36} = \frac{36}{12}$

Aquí 36 es la media proporcional y 12 la tercera proporcional de la proporción geométrica dada.

Observación Importante

En la actualidad se utiliza más las proporciones geométricas, por esta razón, en adelante al referirnos a una proporción, nos estaremos refiriendo a una proporción geométrica.

15.5 PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

Primera : En toda proporción geométrica, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\text{Si : } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad a \times d = b \times c$$

Segunda : En toda proporción geométrica continua, la media proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

Si : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{a \times c}$

Tercera : Toda proporción geométrica, se puede escribir de 8 formas diferentes :

(1) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ (5) $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}$

(2) $\dfrac{d}{b} = \dfrac{c}{a}$ (6) $\dfrac{c}{a} = \dfrac{d}{b}$

(3) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ (7) $\dfrac{b}{d} = \dfrac{a}{c}$

(4) $\dfrac{d}{c} = \dfrac{b}{a}$ (8) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$

Cuarta :

Si : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{a \times n}{b \times n} = \dfrac{c \times n}{d \times n} = k \\[2ex] \dfrac{a \div n}{b \div n} = \dfrac{c \div n}{d \div n} = k \end{cases}$

Si : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{a^n}{b^n} = \dfrac{c^n}{d^n} = k^n \\[2ex] \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}} = \sqrt[n]{k} \end{cases}$

Quinta : Si : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a \pm b}{c \pm d} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{a}$

Sexta : Si : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$

Séptima :Si : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a \pm c}{b \pm d} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

Octava : Si : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{b+d}{b-d}$

Novena :

Si : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{a \pm b}{a} = \dfrac{c \pm d}{c} \\[2ex] \dfrac{a \pm b}{b} = \dfrac{c \pm d}{d} \end{cases}$

Nótese que las operaciones de adición ; sustracción, multiplicación, ó, división que se realizan con los términos de la 1ra razón, igual y respectivamente se realizan con los términos de la 2da razón.

Ejemplos.- Sea : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-2b}{2a-3b}=\frac{c-2d}{2c-3d}$

Sea : $\frac{m}{p}=\frac{q}{r} \Rightarrow \frac{m-3p}{5m-2p}=\frac{q-3r}{5q-2r}$

Observación.-

La siguiente es una propiedad que se puede aplicar a las Razones Geométricas Equivalentes, veamos :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}=\frac{e+f}{e-f}=\frac{k+1}{k-1}}$$

PROBLEMAS DEMOSTRATIVOS

1.- Sabiendo que : $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=k$ ***; donde k es el valor de las razones, demostrar que :*** $\frac{A+C+E}{B+D+F}=k$

Demostración.-

1ro) A partir de la serie de razones equivalentes, despejaremos los antecedentes, obteniéndose :

$$\left.\begin{aligned} A &= Bk \\ C &= Dk \\ E &= Fk \end{aligned}\right\} \quad \ldots (*)$$

2do) Sumando miembro a miembro las igualdades de (*), tendremos : $A + C + E = Bk + Dk + Fk$

3ro) Sacando factor común k del 2do miembro : $A + C + E = (B + D + F)\,k$

4to) Transponiendo términos, obtenemos : $\frac{A+C+E}{B+D+F}=k$ *lqqd.*

2.- Dada la siguiente serie de razones geométricas equivalentes :

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=k$ ***, donde k es el valor de las razones ;***

demostrar que : $\frac{Ax+Cy+Ey}{Bx+Dy+Fz}=k$ ***,***

siendo $x, y, z \in \mathbb{R}$ ***(***$\mathbb{R}$ ***= Conjunto de los números reales).***

Demostración.-

1ro) Utilizando la 3ra propiedad de las Razones Geométricas Equivalentes, diremos que :

$$\frac{Ax}{Bx}=\frac{Cy}{Dy}=\frac{Ez}{Fz}=k$$

2do) Despejando los antecedentes de cada razón, tendremos :

$$\left.\begin{aligned} Ax &= Bx\,.\,k \\ Cy &= Dy\,.\,k \\ Ez &= Fz\,.\,k \end{aligned}\right\} \quad \ldots (*)$$

3ro) Sumando miembro a miembro todas las igualdades de (*) obtendremos :

$$Ax + Cy + Ez = Bx \cdot k + Dy \cdot k + Fz \cdot k$$

4to) Sacando factor común k del 2do miembro :

$$Ax + Cy + Ez = (Bx + Dy + Fz)\,k$$

5^{to}) Finalmente, transponemos términos y obtenemos : $\dfrac{Ax + Cy + Ez}{Bx + Dy + Fz} = k$

lqqd.

3.- Conociendo la siguiente serie de razones geométricas : $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} = \dfrac{E}{F} = k$,

demostrar que : $\dfrac{A^n + C^n + E^n}{B^n + C^n + F^n} = k^n$

Demostración.-

1^{ro}) Despejando todos los antecedentes :

$$\left.\begin{array}{l} A = B \,.\, k \\ C = D \,.\, k \\ E = F \,.\, k \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (*)$$

2^{do}) Elevando al exponente n a las relaciones mostradas en (*), obtendremos :

$$\left.\begin{array}{l} A^n = B^n \,.\, k^n \\ C^n = D^n \,.\, k^n \\ E^n = F^n \,.\, k^n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (**)$$

3^{ro}) Sumando miembro a miembro las relaciones indicadas en (**), tendremos : $A^n + C^n + E^n = B^n \cdot k^n + D^n \cdot k^n + F^n \cdot k^n$

4^{to}) Sacando factor común k^n en el 2^{do} miembro : $A^n + C^n + E^n = (B^n + D^n + F^n)\; k^n$

5^{to}) Transponiendo términos, obtenemos : $\dfrac{A^n + C^n + E^n}{B^n + D^n + F^n} = k^n$ *lqqd.*

4.- Dada la siguiente proporción geométrica : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$,

demostrar :

a) $\dfrac{a + b}{b} = \dfrac{c + d}{d}$

b) $\dfrac{a - b}{b} = \dfrac{c - d}{d}$

Demostración.-

a) Sumemos 1 a cada razón : $\dfrac{a}{b} + 1 = \dfrac{c}{d} + 1$

Efectuando las adiciones indicadas : $\dfrac{a + b}{b} = \dfrac{c + d}{d}$ *lqqd.*

b) Restemos 1 a cada razón : $\dfrac{a}{b} - 1 = \dfrac{c}{d} - 1$

Efectuando las sustracciones indicadas : $\dfrac{a - b}{b} = \dfrac{c - d}{d}$ *lqqd.*

5.- A partir de la siguiente proporción geométrica : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

demostrar : ***a)*** $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+b}$

b) $\dfrac{a}{a-b} = \dfrac{c}{c-b}$

Demostración.-

a) Elevamos al exponente -1, a la proporción dada : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\dfrac{c}{d}\right)^{-1}$

Por teoria de exponentes negativos se obtiene : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$ .... (*)

Aplicando la demostración 3a , del ejercicio anterior : $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{c+d}{c}$

Y elevando nuevamente al exponente -1, nos queda : $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+d}$ *lqqd.*

b) Multiplicando por -1, a la expresión (*) : $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{d}{c}$

Sumándole 1 a cada miembro : $-\dfrac{b}{a} + 1 = -\dfrac{d}{c} + 1$

Ordenando convenientemente, tendremos : $1 - \dfrac{b}{a} = 1 - \dfrac{d}{c}$

Efectuando las sustracciones indicadas, se obtiene : $\dfrac{a-b}{a} = \dfrac{c-d}{c}$

Elevando al exponente -1 a cada miembro, concluímos que : $\dfrac{a}{a-b} = \dfrac{c}{c-d}$ *lqqd.*

6.- Dada la siguiente proporción geométrica : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

demostrar : ***a)*** $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a}{b}$

b) $\dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{a}{b}$

Demostración.-

a) Intercambiando las posiciones de los medios, tendremos : $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ .... (*)

Aplicando la 1ra Propiedad de las P.G.E. : $\dfrac{a+c}{c} = \dfrac{b+d}{d}$

Intercambiando la posición de los medios, se tiene : $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{c}{d}$

Y de la proporción original, obtendremos : $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a}{b}$ *lqqd.*

b) A partir de (*) aplicamos la 3ra Propiedad de las P.G. : $\dfrac{a-c}{a} = \dfrac{b-d}{b}$

Intercambiando la posición de los medios : $\dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{a}{b}$ *lqqd.*

7.- Sea la siguiente proporción geométrica : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$,

demostrar que : $\dfrac{2a-3b}{5a+4b} = \dfrac{2c-3d}{5c+4d}$

<u>Demostración</u>.-

1ro) Multiplicando por 2/3 a cada razón, tendremos : $\dfrac{2a}{3b} = \dfrac{2c}{3d}$

2do) Aplicando la 3ra Propiedad de las proporciones geométricas, se tendrá : $\dfrac{2a-3b}{3b} = \dfrac{2c-3d}{3d}$

3ro) Simplificando y transponiendo términos : $\dfrac{2a-3b}{2c-3d} = \dfrac{b}{d}$ ... (1)

4to) Multiplicando ahora por 5/4 a cada razón, tendremos : $\dfrac{5a}{4b} = \dfrac{5c}{4d}$

5to) Aplicando la 2da Propiedad de las proporciones geométricas, se tendrá : $\dfrac{5a}{5a+4b} = \dfrac{5c}{5c+4d}$

6to) Simplificando y transponiendo términos : $\dfrac{a}{c} = \dfrac{5a+4b}{5c+4d}$ ... (2)

7mo) De la proporción dada, obtenemos : $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}$

8vo) Intercambiando la posición de los extremos : $\dfrac{b}{d} = \dfrac{a}{c}$ ... (3)

9no) Sustituyendo (1) y (2) en (3) : $$\overbrace{\dfrac{2a-3b}{2c-3d}}^{\left(\frac{b}{d}\right)} = \overbrace{\dfrac{5a+4b}{5c+4d}}^{\left(\frac{a}{c}\right)}$$

10mo) Finalmente intercambiamos los medios de esta última proporción y obtenemos : $\dfrac{2a-3b}{5a+4b} = \dfrac{2c-3d}{5c+4d}$

PROBLEMAS NUMERICOS

1.- Si : $m - n = 12$ y $\frac{m}{n} = \frac{6}{5}$; hallar : $m + n$

A) 100 B) 124 C) 132 D) 148 E) 162

Resolución.-

De la proporción geométrica inicial transponiendo los términos medios : $\frac{m}{6} = \frac{n}{5} = k$

Despejando los valores de m y n, tendremos : $\begin{cases} m = 6k \\ n = 5k \end{cases}$ .... (*)

Como $m - n = 12$, reemplazaremos los valores de m y n dados en (*) : $6k - 5k = 12 \Rightarrow k = 12$ .... (**)

Sustituyendo (**) en (*), obtenemos : $m = 72$; y ; $n = 60$

Finalmente concluimos que : $m - n =$ 132 RPTA. C

2.- Un piloto observa que el número de aviones es al número de barcos como 7 es a 6 pero a la vez el timonel nota que el número de aviones es al número de barcos como 8 es a 5. Hallar la diferencia entre el número de aviones y barcos.

A) 2 B) 4 C) 1 D) 6 E) 7

Resolución.-

Sea : A = # de Aviones ; y ; B = # Barcos

Dado que el piloto observa (A-1) aviones, según el dato tendremos : $\frac{A-1}{B} = \frac{7}{6}$ ... (α)

El timonel que va en un barco, observa (B-1) barcos, luego por condición : $\frac{A}{B-1} = \frac{8}{5}$ ... (β)

Aplicando la 4ta propiedad de las P.G. :

En (α) : $\frac{A-1}{A+B-1} = \frac{7}{7+6}$

En (β) : $\frac{A}{A+B-1} = \frac{8}{8+5}$

Dividiendo miembro : $\frac{A-1}{A} = \frac{7}{8} \Rightarrow A = 8$

Reemplazando en (α) : B = 6

$\therefore$ A - B = 1 RPTA. C

3.- Dado : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Además : $a + b = 45$; $c + d = 15$ y $b + d = 16$, dar el valor del 1er término.

A) 3 ***B) 6*** ***C) 9*** ***D) 10*** ***E) 15***

Resolución.-

Aplicando la 1ra propiedad en la proporción dada, tendremos :

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} = \frac{a+b+c+d}{b+d} \qquad \dots (*)$$

A partir de los datos; sabemos que :

$a + b = 45$ ... (I) ; $c + d = 15$ ... (II) ; y ; $d + b = 16$ ... (III)

Reemplazando en (*), se tiene que : $\frac{45}{b} = \frac{15}{d} = \frac{45+15}{16} \Rightarrow \begin{cases} b = 12 \\ d = 4 \end{cases}$

Reemplazando en (I) : $a + 12 = 45$

$\therefore$ $a = 33$ RPTA. A

4.- Sabiendo que :

"a" es la media proporcional de 8 y 32

"b" es la tercera proporcional de 32 y a

"c" es la cuarta proporcional de a ; b y 6.

Hallar : (a + b + c)

A) 27 ***B) 24*** ***C) 32*** ***D) 28*** ***E) N.A***

Resolución.-

Del enunciado se tendrá que :

1) $\frac{8}{a} = \frac{a}{32} \Rightarrow a = 16$

2) $\frac{32}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow b = 8$

3) $\frac{a}{b} = \frac{6}{c} \Rightarrow c = 3$

$\therefore$ $a + b + c = 27$ RPTA. A

5.- Sabiendo que la media proporcional de 2 y 32 es a la tercera proporcional de "a" y 24 como 1 es a 2; hallar "a".

A) 18 ***B) 24*** ***C) 36*** ***D) 48*** ***E) 30***

Resolución.-

Sea "x" la media proporcional de 2 y 32 $\Rightarrow$ $x = \sqrt{2 \cdot 32}$ $\Rightarrow$ $x = 8$

Sea "y" la tercera proporcional de a y 24 $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{24} = \dfrac{24}{y}$ $\Rightarrow$ $y = \dfrac{24 \cdot 24}{a}$

Por dato del problema : $\dfrac{8}{\dfrac{24 \cdot 24}{a}} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $a = \boxed{36}$ RPTA. C

6.- En una P.G. de razón 3, la suma de los términos de la segunda razón es menor que la suma de los términos de la primera razón en 56. Determinar la diferencia de antecedentes.

A) 62 B) 54 C) 46 D) 38 E) 42

Resolución.-

Sea la proporción : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = 3$

Despejando los consecuentes : $\begin{cases} b = \dfrac{a}{3} \\ d = \dfrac{c}{3} \end{cases}$

Por dato del problema : $(a + b) - (c + d) = 56$

Reemplazando los consecuentes en el dato : $\dfrac{4}{3}a - \dfrac{4}{3}c = 56$ $\Rightarrow$ $\boxed{a - c = 42}$ RPTA. E

7.- Si las razones aritméticas de los términos de la primera y segunda razón de una proporción geométrica son 8 y 32 respectivamente. Determinar en qué relación estarían la suma y la diferencia de los consecuentes de dicha proporción.

A) 4/5 B) 5/3 C) 7/4 D) 3/2 E) 6/6

Resolución.-

Sea la proporción : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ .... (α)

Según datos del problema : $\begin{cases} a - b = 8 \\ c - d = 32 \end{cases}$

Aplicando la 3ra propiedad de las proporciones en (α) : $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{8}{b} = \dfrac{32}{d}$

Transponiendo términos tendremos : $\dfrac{d}{b} = \dfrac{32}{8}$ $\Rightarrow$ $d = 4b$ ... (β)

De acuerdo con la condición del problema, nos piden calcular : $\dfrac{b+d}{d-b}$ ... (γ)

Reemplazando (β) en (γ) : $\dfrac{5b}{3b} = \boxed{\dfrac{5}{3}}$ RPTA. B

8.- En un corral hay «n» aves entre patos y gallinas. Si el número de patos es a «n» como 5 es a 12 y la diferencia entre el número de patos y el número de gallinas es 18. ¿Cuál será la relación entre patos y gallinas, si se mueren 13 gallinas ?

A) 9/10 B) 4/5 C) 1/2 D) 3/5 E) 5/7

Resolución.-

De acuerdo con los datos, se sabe que : (# de patos) + (# de gallinas) = n ... (1)

Según condición del problema : $\dfrac{\#\text{ de patos}}{5} = \dfrac{n}{12} = k$

De donde al despejar, obtenemos que : $\left.\begin{array}{r}\#\text{ de patos} = 5k\\ n = 12k\end{array}\right\}$ ... (2)

Y reemplazando (2) en (1), concluimos que : # de gallinas = $7k$

También : (# de gallinas) - (# de patos) = 18 $\Rightarrow$ $k = 9$ $\left\{\begin{array}{l}\#\text{ de patos} = 5\cdot 9 = 45\\ \#\text{ de gallinas} = 7\cdot 9 = 63\end{array}\right.$

Si se mueren 13 gallinas : $\dfrac{\#\text{ de patos}}{\#\text{ de gallinas}} = \dfrac{45}{63-13} = \dfrac{9}{10}$ RPTA. A

9.- En una proporción geométrica continua la razón de la proporción es igual a la media proporcional y la suma de los cuatro términos de la proporción es 169. Determinar la diferencia entre los extremos.

A) 139 B) 141 C) 143 D) 145 E) 147

Resolución.-

1ro) Sea la P.G.C., de razón b : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = b$

2do) Despejando tendremos : $\left\{\begin{array}{l}b = c\,.\,b\\ a = c\,.\,b^2\end{array}\right.$; de donde : $c = 1$ ... (*)

3ro) Por dato del problema se tiene que : $a + 2b + c = 169$ ... (**)

4to) Reemplazando los valores de (*) en (**), obtenemos :

$$b^2 + 2.b + 1 = 169 \quad\Rightarrow\quad (b+1)^2 = 169 \quad\Rightarrow\quad b = 12$$

Esto significa que : $a = (1)\,(12)^2 \Rightarrow a = 144$

5to) Por lo tanto : $a - c = 143$ RPTA. C

10.- Si 7 es la cuarta diferencial de a, b y c (b < c), además 30 es la tercera diferencial de 3a y 45; hallar el máximo valor de b.

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Resolución.-

Por dato se sabe que :

1) $a - b = c - 7 \quad \Rightarrow \quad b + c = a + 7 \quad ... (I)$

2) $3a - 45 = 45 - 30 \quad \Rightarrow \quad a = 20 \quad ... (II)$

Reemplazando (II) en (I) : $b + c = 27$

$\therefore$ Como $(b < c)$ entonces : $b_{max} = 13$ RPTA. C

11.- En una proporción aritmética continua los extremos están en la relación de 3 a 5 . Si la suma de los cuadrados de los tres términos diferentes de la proporción es 200 ; hallar la media diferencial.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Resolución.-

Sean $3k$ y $5k$ los extremos y b la media diferencial de la proporción aritmética continua, luego se tendrá que :

$$3k - b = b - 5k$$
$$b = 4k \quad ... (*)$$

Además, por condición del problema se debe cumplir que :

$$(3k)^2 + (4k)^2 + (5k)^2 = 200$$
$$\Rightarrow \quad k = 2$$

Al reemplazar en (*) concluímos que la media diferencial es : $b = 8$ RPTA. C

12.- Dada la siguiente serie : $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k$ ***, calcular :***

$$E = \sqrt{\frac{A.B\,(a^5 + b^5 + c^5)\,(A + C)}{a.b\,(A^5 + B^5 + C^5)\,(a + c)}}$$

A) k B) 1/k C) k/5 D) 3k/4 E) k/9

Resolución.-

Haciendo una inspección de E, podemos reconocer en él a tres fracciones, las que obedecen a conocidas propiedades. Lo primero que haremos es reordenar la expresión de E, a continuación y aprovechando las propiedades vistas en la teoría, sustituiremos cada fracción por su equivalente en términos de la razón k. Veamos :

$$E = \sqrt{\underbrace{\frac{A\,.\,B}{a\,.\,b}}_{(1)} \cdot \underbrace{\frac{a^5 + b^5 + c^5}{A^5 + B^5 + C^5}}_{(2)} \cdot \underbrace{\frac{A + C}{a + c}}_{(3)}} \quad ... (*)$$

Para (1).- Aplicando aquí la 4ta propiedad de las R.G.E., tendremos que : $\frac{A\,.\,B}{a\,.\,b} = k^2$

Para (2).- Si aplicamos la 5ta propiedad de las R.G.E, a la serie de razones dadas, encontramos que :

$$\frac{A^5+B^5+C^5}{a^5+b^5+c^5}=k^5 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^5+b^5+c^5}{A^5+B^5+C^5}=\frac{1}{k^5}$$

Para (3).- Aplicando la 5ta propiedad de las P.G. : $\frac{A+C}{a+c}=\frac{A}{a}=k$

Ahora reemplazando en (*), obtendremos : $E=\sqrt{k^2\cdot\frac{1}{k^5}\cdot k}=\boxed{\frac{1}{k}}$ RPTA. B

13.- A partir de la serie : $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=k$, se cumple que : $\frac{AB}{ab}+2\frac{(B-C)}{(b-c)}=15$

Calcular el valor de k siendo : $k \in \mathbb{Z}^+$

A) 3 B) 1/2 C) 1/3 D) 3/4 E) 1/9

Resolución.-

Utilizando las dos primeras razones, aplicamos la 4ta propiedad de las R.G.E., obteniéndose que:

$$\frac{A\cdot B}{a\cdot b}=k^2 \quad ...(1)$$

Asimismo, para las dos últimas razones emplearemos la 5ta propiedad de las P.G.:

$$\frac{B-C}{b-c}=k \quad ...(2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en la condición dada : $k^2+2k=15 \Rightarrow k^2+2k-15=0$

Descomponiendo en factores : $(k+5)(k-3)=0 \Rightarrow k=-5 \wedge k=3$

Dado que k es un número positivo, concluímos que : $\boxed{k=3}$ RPTA. A

14.- En una reunión el número de hombres que bailan es al número de damas que no bailan como 1 a 2, además, el número de damas es al número de hombres que no bailan como 3 a 5. Determinar cuántas personas bailan si en total asistieron 72 personas.

A) 8 B) 16 C) 24 D) 48 E) 30

Resolución.-

Denotaremos con D, D_b y D_{nb} al total de damas, a las damas que bailan y a las damas que no bailan respectivamente, del mismo modo H_b y H_{nb} representan respectivamente a los hombres que bailan y que no bailan.

De los datos se sabe que : $\frac{H_b}{D_{nb}}=\frac{1}{2} \Rightarrow D_{nb}=2H_b \quad ...(*)$

Sabemos que el número total de damas (D) viene dado así : $D=D_b+D_{nb}$

De (*) y bajo el supuesto que $D_b = H_b$: $D = H_b + 2H_b = 3H_b$ ... (1)

Asimismo y por condición, se sabe que : $\dfrac{D}{H_{nb}} = \dfrac{3}{5}$ ... (**)

Reemplazando (1) en (**), y simplificando, encontramos que :

$$\frac{H_b}{H_{nb}} = \frac{1}{5} \Rightarrow H_{nb} = 5H_b \quad ... (2)$$

Reconociendo que el total de asistentes viene dado por :

$$D + H = 72 \Rightarrow D + H_b + H_{nb} = 72 \quad ... (3)$$

Finalmente reemplazamos (1) y (2) en (3) : $3H_b + H_b + 5H_{nb} = 72$

Resolviendo encontramos que : $H_b = 8$

∴ # de personas que bailan es : 16 RPTA. B

15.- Si se cumple que : $\dfrac{A}{a} = \dfrac{B}{b} = \dfrac{AB}{a+b} = k$, calcular : E = (A-1) (B-1)

A) 2 ***B) 1*** ***C) 1/2*** ***D) -1*** ***E) -2***

Resolución.-

A partir de la serie de proporciones dadas se puede aplicar la 3ra Propiedad de P.G.; veamos:

1ro) $\dfrac{A\,.\,B}{a+b} = \dfrac{A}{a} \Rightarrow \dfrac{A\,.\,B - A}{(a+b) - a} = k \Rightarrow \dfrac{A\,(B-1)}{b} = k$ ... (1)

2do) $\dfrac{A\,.\,B}{a+b} = \dfrac{B}{b} \Rightarrow \dfrac{A\,.\,B - B}{(a+b) - b} = k \Rightarrow \dfrac{B\,(A-1)}{a} = k$ ... (2)

3ro) Aplicando la 4ta Propiedad de las P.G.E., se tendrá que :

$$k\,.\,k = \frac{A}{a}\,.\,\frac{B}{b} \quad ... (3)$$

Finalmente reemplazaremos (1) y (2) en (3) :

$$\frac{\cancel{A}(B-1)}{\cancel{b}}\,.\,\frac{\cancel{B}(A-1)}{\cancel{a}} = \frac{\cancel{A}\,.\,\cancel{B}}{\cancel{a}\,.\,\cancel{b}} \Rightarrow \boxed{(A-1)\,(B-1) = 1} \quad \text{RPTA. B}$$

16.- En una tienda de artefactos había 60 televisores, además había 5 radios por cada 11 planchas, luego el dueño de la tienda compra 50 radios, 40 planchas y un cierto número de televisores ¿Cuántos televisores compró si al final el número de radios, planchas y televisores que posee el dueño son proporcionales a 5; 6 y 8 respectivamente?

A) 150 ***B) 52*** ***C) 64*** ***D) 120*** ***E) 150***

Resolución.-

De los datos, podemos reconocer que en el momento inicial la proporción de radios a planchas (5 a 11) nos permite asegurar que habían $5k$ radios y $11k$ planchas. Luego, podemos elaborar el siguiente cuadro :

	Radios	Planchas	Televisores
Stock Inicial	$5k$	$11k$	60
Compra	50	40	x
Stock Final	$50+5k$	$40+11k$	$60+x$

Según condición del problema, el Stock Final de los artefactos se debe encontrar en la siguiente proporción :

$$\frac{50+5k}{5} = \frac{40+11k}{6} = \frac{60+x}{8}$$

(1): primera y segunda razón; (2): segunda y tercera razón.

De (1) se tiene que : $(10+k)\,6 = 40+11k \Rightarrow k = 4$ ... (*)

Reemplazando (*) en (2) : $\dfrac{40+11\,(4)}{6} = \dfrac{60+x}{8} \Rightarrow x = 52$ RPTA. B

17.- Si : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c+11}{a+1} = \dfrac{b}{c}$; y además : $a+b+c = 19$; calcular : $a \times b \times c$

A) 216 B) 302 C) 54 D) 105 E) 192

Resolución.-

De acuerdo con la 2da Propiedad de las R.G.E., sabemos que si sumamos los antecedentes y los consecuentes, estas mantienen la misma proporción que las razones originales, luego :

$$\frac{a}{b} = \frac{a+(c+11)+b}{b+(a+1)+c} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\overbrace{a+b+c}^{(*)}+11}{\underbrace{a+b+c}_{(*)}+1} \quad \text{... (1)}$$

Sabemos por condición que (*) es igual a 19, luego en (1) :

$$\frac{a}{b} = \frac{19+11}{19+1} = \frac{30}{20} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \quad \text{... (2)}$$

Aplicando la 4ta Propiedad R.G.E., tendremos de (2) y de la serie de razones dadas que :

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{9}{4} \begin{cases} a = 9n \\ c = 4n \end{cases} \quad \text{... (3)}$$

Asimismo de (2) deducimos que : $b^2 = a \cdot c$ ... (4)

Y reemplazando (3) en (4) : $b = \sqrt{9n \cdot 4n} \Rightarrow b = 6n$ ... (5)

Finalmente, de (3) y (5) podemos decir que : $a + b + c = 19$

$$\Rightarrow \quad 9n + 6n + 4n = 19$$

$$\Rightarrow \quad n = 1$$

Luego al reemplazar en (3) y (4), obtendremos que : $a = 9$; $b = 6$ y $c = 4$

$$\therefore \quad \boxed{a \cdot b \cdot c = 216} \qquad \text{RPTA. A}$$

18.- En una serie de 3 razones geométricas equivalentes, la diferencia de los términos antedecente y consecuente de cada razón es 3; 4 y 5 respectivamente y la suma de los cuadrados de los antecedentes es 200. Calcular la suma de los consecuentes.

A) 14 ***B) 24*** ***C) 21*** ***D) 36*** ***E) 12***

Resolución.-

Sea la siguiente la serie dada en el problema :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \qquad \text{... (1)}$$

Por dato se sabe que : $a - b = 3$, $c - d = 4$, y , $e - f = 5$ ... (*)

Ahora, aplicando la 3ra Propiedad de las P.G. en (1), tendremos :

$$\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} = \frac{e}{e-f} = \frac{k}{k-1} \; ; \text{ y de (*) : } \frac{a}{3} = \frac{c}{4} = \frac{e}{5} = \frac{k}{k-1} \qquad \text{... (2)}$$

Utilizando la relación (2) aplicaremos la 5ta Propiedad de las R.G.E. :

$$\frac{\overbrace{a^2+c^2+e^2}}{3^2+4^2+5^2} = \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \qquad \text{... (**)}$$

Pero por datos del problema, también se sabe que el numerador de (**) es igual a 200, luego :

$$\frac{200}{50} = \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

Reemplazando (2), aplicamos la 2da Propiedad de las R.G.E :

$$\frac{a}{3} = \frac{c}{4} = \frac{e}{5} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a+c+e}{3+4+5} = 2 \quad \Rightarrow \quad a + c + e = 24 \qquad \text{... (3)}$$

Finalmente aplicamos esta misma propiedad en (1) :

$$\frac{a+c+e}{b+d+f} = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{y de (3) : } \frac{24}{b+d+f} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{b + d + f = 12} \qquad \text{RPTA. E}$$

19.- Si : $\dfrac{A}{A+B} = \dfrac{B}{B+C} = \dfrac{C}{C+D} = k$,

además : $C + D = 180$; ***y :*** $\sqrt{(A+B)(B+C)} = 20\sqrt{3}$; ***hallar k.***

A) 2/3 ***B) 1/4*** ***C) 3/4*** ***D) 1/3*** ***E)5/12***

Resolución.-

Aplicando la 4ta Propiedad de las P.G., tendremos que la serie dada se transforma en :

$$\frac{A}{(A+B)-A} = \frac{B}{(B+C)-B} = \frac{C}{(C+D)-C} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{k}{1-k} \quad \ldots (1)$$

Si ahora aplicamos en (1) la 5ta Propiedad de las P.G., tendremos :

$$\frac{A+B}{B+C} = \frac{B+C}{C+D} = \frac{k}{1-k} \quad \ldots (*)$$

De aquí deducimos que : $(B+C)^2 = (A+B)\ (C+D)$ ... (2)

De los datos sabemos que : $(A+B)(B+C) = \left(20\sqrt{3}\right)^2$

$\Rightarrow$ $(A+B)(B+C) = 120$

Asimismo por los datos se sabe que : $(C+D) = 180$

Multiplicando miembro a miembro se obtiene : $(A+B)(B+C)(C+D) = 36\,000$ ... (3)

Sustituyendo (2) en (3) : $(B+C)^2 \cdot (B+C) = (60)^3 \Rightarrow (B+C) = 60$

Finalmente, reemplazamos en (*) : $\dfrac{k}{1-k} = \dfrac{60}{180} \Rightarrow$ $\boxed{k = \dfrac{1}{4}}$ RPTA. B

20.- Si : $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{p}$; $m + n + p = 66$ ***, y además :*** $b \cdot p = 462$; $a \cdot n = 154$; ***y*** ; $c \cdot m = 231$;

hallar la diferencia entre el mayor y menor término.

A) 22 ***B) 24*** ***C) 26*** ***D) 28*** ***E) N.A***

Resolución.-

De la serie dada sabemos que :

$a \cdot n = b \cdot m$ ... (1) ; $b \cdot p = c \cdot n$ ... (2) ; $c \cdot m = a \cdot p$ ... (3)

A continuación, de los datos diremos que :

(α) $b \cdot p = 462$ $\Rightarrow$ de (2) : $c \cdot n = 462$ ... (4)

(β) $a \cdot n = 154$ $\Rightarrow$ de (1) : $b \cdot m = 154$ ... (5)

(γ) $c \cdot m = 231$ $\Rightarrow$ de (3) : $a \cdot p = 231$ ... (6)

Dividiendo (α) ÷ (5) miembro a miembro : $\dfrac{p}{m} = \dfrac{3}{1}$

Dividiendo (γ) ÷ (4) miembro a miembro : $\dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{3} = \frac{m}{1} = \frac{n}{2}$$

En esta relación aplicaremos la 2da Propiedad de las R.G.E. :

$$\frac{p}{3} = \frac{m}{1} = \frac{n}{2} = \frac{\overbrace{p+m+n}^{(*)}}{3+1+2} \qquad \dots (**)$$

Por datos también se sabe que (*) es igual a 66, luego en (**) :

$$\frac{p}{3} = \frac{m}{1} = \frac{n}{2} = 11 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p = 33 \\ m = 11 \\ n = 22 \end{cases}$$

Sustituyendo estos resultados en (4), (5) y (6), tendremos que :

$$a = 7 \,, \quad b = 14 \quad ; \text{ y } ; \quad c = 21$$

Comparando todos los valores obtenidos, encontramos que el mayor y menor son respectivamente p y a . Así su diferencia es :

$$\therefore \qquad \boxed{p - a = 26} \qquad \text{RPTA. C}$$

21.- En una serie de 4 razones geométricas contínuas equivalentes la suma de sus términos diferentes excede a la suma de los extremos en 310. ¿Calcular la diferencia de los extremos?

A) 127 ***B) 527*** ***C) 1 252*** ***D) 1 248*** ***E) 2 502***

Resolución.-

Dada la serie geométrica continua :

$$* \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = ek^4 \\ b = ek^3 \\ c = ek^2 \\ d = ek \end{cases}$$

Por condición del problema se cumple que :

$$(a + \underset{\downarrow}{b} + \underset{\downarrow}{c} + \underset{\downarrow}{d} + e) - (a + e) = 310$$

$$ek^3 + ek^2 + ek = 310$$

$$ek\,(k^2 + k + 1) = 2 \cdot 5 \cdot 31 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e = 2 \\ k = 5 \end{cases}$$

$$\therefore \qquad a - e = 2 \cdot 5^4 - 2 = \boxed{1\ 248} \qquad \text{RPTA. D}$$

22.- En una serie de razones aritméticas equivalentes, la suma de los antecedentes excede a la suma de los consecuentes en 31 se excluye una razón por cual la suma de los consecuentes disminuye en 8. ¿Cuál es el valor de la suma de los términos excluidos si el valor de la razón es un número entero?

A) 8 B) 9 C) 15 D) 16 E) 17

Resolución.-

Como son razones aritméticas equivalentes se deberá cumplir que :

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= r \\ a_2 - b_2 &= r \\ a_3 - b_3 &= r \\ &\vdots \\ a_n - b_n &= r \end{aligned}$$

$$(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n) - (b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n) = n \,.\, r$$

$\Rightarrow \quad n \,.\, r = 31$; y por tratarse de dos números enteros : $\begin{cases} n = 31 \\ r = 1 \end{cases}$

Sea $a_k - b_k = r$, la razón excluída, donde $b_k = 8$ (dato del problema)

$$\Rightarrow \quad a_k - 8 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_k = 9$$

$$\therefore \quad \boxed{a_k + b_k = 17} \qquad \text{RPTA. E}$$

23.- A los términos de una proporción geométrica le sumamos respectivamente una misma cantidad y se obtiene los números: 27 ; 11 ; 54 y 20 respectivamente. Determinar la suma de los términos de dicha proporción.

A) 98 B) 100 C) 119 D) 129 E) 204

Resolución.-

Sea n el valor adicionado a los términos, obteniéndose: 27; 11; 54 y 20 entonces la proporción es:

$$* \quad \frac{27-n}{11-n} = \frac{54-n}{20-n} \quad \Rightarrow \quad \frac{(27-n)}{(27-n)-(11-n)} = \frac{(54-n)}{(54-n)-(20-n)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{27-n}{16} = \frac{54-n}{34}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{27-n}{8} = \frac{54-n}{17} \quad \Rightarrow \quad \frac{27-n}{8} = \frac{(27-n)-(54-n)}{8-17}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{27-n}{8} = 3 \quad \Rightarrow \quad n = 3$$

Reemplazando en la proporción original : $\dfrac{24}{8} = \dfrac{51}{17}$

$$\therefore \quad \Sigma \text{ términos } : \boxed{100} \qquad \text{RPTA. B}$$

24.- La edad de un padre y la de sus dos hijos forman una proporción geométrica continua cuya razón es un número entero si la suma de dichas edades es 93. Dar como respuesta la diferencia de las edades de sus hijos.

A) 8 B) 12 C) 15 D) 21 E) 24

<u>Resolución</u>.-

Asumimos que las edades son a, b y c, entonces : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k \Rightarrow \begin{cases} b = ck \\ a = ck^2 \end{cases}$ ... (1)

De acuerdo con los datos sabemos que : $a + b + c = 93$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) : $\Rightarrow \quad c\,(k^2 + k + 1) = 3 \cdot 31 \quad \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ k = 5 \end{cases}$

Donde se pueden deducir que las edades son :

$a = 75$; $b = 15$ y $c = 3$ $\therefore$ $b - c = 12$ RPTA. B

25.- En una proporción geométrica continua la suma y la diferencia de los extremos excede al término medio común en 49 y 31 unidades respectivamente. Hallar la suma de los cuatro términos de dicha proporción.

A) 110 B) 111 C) 131 D) 120 E) 121

<u>Resolución</u>.-

Dada la P.G.C. : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ ... (*)

Ahora según las condiciones del problema, se tendrá que :

$\left.\begin{array}{l} * \ (a + c) - b = 49 \Rightarrow (a - b) + c = 49 \\ * \ (a - c) - b = 31 \Rightarrow (a - b) - c = 31 \end{array}\right\}$ Restando miembro a miembro : $2c = 18$, $c = 9$

De (*) : $b^2 = 9a \Rightarrow b = 3\sqrt{a}$

Como : $a - b = 40 \Rightarrow a - 3\sqrt{a} = 40$

$\Rightarrow \sqrt{a}\,.\left(\sqrt{a} - 3\right) = 8 \cdot 5$

Luego : $a = 64$; y ; $b = 24$

$\therefore$ $a + b + b + c = 121$ RPTA. E

26.- Si : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ***y*** $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 9 + \sqrt{c} + \sqrt{d}$;

hallar la suma de consecuentes sabiendo que su diferencia es 27 y la razón de la proporción es 4.

A) 20 B) 25 C) 30 D) 37 E) 45

Resolución.-

Se tiene : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 4b \\ c = 4d \end{cases}$

Reemplazando en el dato : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 9 + \sqrt{c} + \sqrt{d}$

$\Rightarrow \qquad \sqrt{4b} + \sqrt{b} = 9 + \sqrt{4d} + \sqrt{d}$

Reduciendo : $\sqrt{b} - \sqrt{d} = 3 \qquad ...(\alpha)$

Además por condición se sabe que : $b - d = 27$

$$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{b} + \sqrt{d}\right) . \underbrace{\left(\sqrt{b} . \sqrt{d}\right)}_{3} = 27$$

$$\sqrt{b} + \sqrt{d} = 9 \qquad ...(\beta)$$

De (α) y (β) : $b = 36$; y ; $d = 9$

$\therefore \quad b + d = 45 \qquad$ RPTA. E

27.- En una proporción geométrica continua se cumple que la diferencia de los extremos es 15/4 de la media proporcional. Si la razón es un número entero mayor que la unidad, determinar la diferencia de los antecedentes si los consecuentes suman 25.

A) 60 B) 80 C) 85 D) 90 E) 70

Resolución.-

Dada la siguiente P.G.C. : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = ck^2 \\ b = ck \end{cases}$

Por condición del problema se tiene que : $a - c = \dfrac{15}{4} b \qquad ...(I)$

$b + c = 25 \qquad ...(II)$

Sustituyendo (*) en (I) y en (II) :

$$ck^2 - c = 11\,\frac{15}{4}\,ck \quad \Rightarrow \quad k^2 - 1 = \frac{15}{4} k \qquad ...(\alpha)$$

$$ck + c = 25 \quad \Rightarrow \quad c\,(k + 1) = 25 \qquad ...(\beta)$$

De (α) : $k = 4$; en (β) : $c = 5$

$\therefore \quad a - b = 5\ 4^2 - 5 . 4 = 60 \qquad$ RPTA. A

28.- La razón de dos números es 7/3. ¿Cuál será la razón de la suma de los cuadrados a su diferencia de cuadrados?

A) 9/2 B) 49/5 C) 58/13 D) 29/20 E) 29/5

Resolución.-

1ro) Sean los números a y b ($a > b$), entonces : $\frac{a}{7} = \frac{b}{3} = k$

2do) Despejando los antecedentes, encontramos que : $\begin{cases} a = 7k \\ b = 3k \end{cases}$ ... (1)

3ro) De acuerdo con la condición, debemos calcular : $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ ... (2)

4to) Reemplazando los valores de (1) en (2) : $\frac{(7k)^2+(3k)^2}{(7k)^2-(3k)^2} = \frac{58k^2}{40k^2} = \boxed{\frac{29}{20}}$ RPTA. D

29.- En una progresión geométrica continua la diferencia entre el término mayor y menor es 5, y entre el término medio y el menor de los extremos es 2. Determinar la suma de los términos.

A) 15 B) 25 C) 30 D) 32 E) 35

Resolución.-

1ro) Sea la proporción : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k \Rightarrow \begin{cases} b = ck \\ a = ck^2 \end{cases}$; donde : $a > b > c$

2do) Según condición se cumple que : $\begin{cases} a - c = 5 & \text{.......} (\alpha) \\ b - c = 2 & \text{.......} (\beta) \end{cases}$

3ro) Reemplazando 1ro en (α) : $ck^2 - c = 5 \Rightarrow c(k+1)(k-1) = 5$ ... (*)

4to) Reemplazando 1ro en (β) : $ck - c = 2 \Rightarrow c(k-1) = 2$ ... (**)

5to) Dividiendo (*) entre (**) : $k + 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$

6to) Reemplazando en (**) : $c = 4$

Luego : $a = 9$; y ; $b = 6$

Por lo tanto: $a + b + b + d = \boxed{25}$ RPTA. B

30.- Se tiene que : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ y donde : a . b . b . c = 6 561.

Si : $3 . \sqrt{a} - 3 . \sqrt{c} = 8 . \sqrt{b}$; calcular el valor de (a + b + c)

A) 87 B) 89 C) 91 D) 93 E) 95

Resolución.-

Como en toda proporción se cumple que el producto de extremos es igual al producto de medios; entonces : $a . c = b^2$

Según los datos se sabe : $a . b . b . c = 6\,561$

Reemplazando tenemos que : $b = 9$

Y a partir de la condición : $3 . \sqrt{a} - 3 . \sqrt{c} = 8\sqrt{b}$; entonces que : $\sqrt{a} - \sqrt{c} = 8$ ... (*)

Pero se sabe que en toda P.G.C. se cumple que : $a = \dfrac{b^2}{c}$ ... (**)

Reemplazando (**) en (*) : $\dfrac{9}{\sqrt{c}} - \sqrt{c} = 8 \Rightarrow c = 1 \wedge a = 81$

Por lo tanto : $a + b + c = 91$ RPTA. C

31.- Calcular "b" , si : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$; además : $\dfrac{a^{-4} + b^{-4} + c^{-4}}{a^4 + b^4 + c^4} = 256^{-1}$

A) 2 B) 4 C) 1/2 D) 8 E) 16

<u>Resolución</u>.-

Del dato : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = k \Rightarrow \begin{cases} b = ck \\ a = ck^2 \end{cases}$ ... (α)

Reemplazando los datos de (α) en la condición dada : $\dfrac{(ck^2)^{-4} + (ck)^{-4} + c^{-4}}{(ck^2)^4 + (ck)^4 + c^4} = 256^{-1}$

Factorizando $c^4\, k^{-8}$ en el antecedente y c^4 en el consecuente : $\dfrac{c^{-4}\, k^{-8}\,(1 + k^4 + k^8)}{c^4\,(k^8 + k^4 + 1)} = 256^{-1}$

Simplificando y recordando que : $256 = 2^8$, tendremos :

$$c^{-8}\, k^{-8} = \left(2^8\right)^{-1} \Rightarrow \underbrace{ck}_{b} = 2 \quad \therefore \quad b = 2 \quad \text{RPTA. A}$$

32.- En cierta equidiferencia la suma de los cuadrados de los términos medios es 34 y la suma de los extremos es 8. Determinar la diferencia entre el mayor y el menor de los términos medios.

A) 12 B) 2 C) 8 D) 42 E) 17

<u>Resolución</u>.-

Recordando que una equidiferencia es una proporción aritmética, tendremos : $a - b = c - d$

Por dato del problema, se sabe que : $\begin{cases} b^2 + c^2 = 34 \text{ ... (1)} \\ a + d = 8 \text{ ... (2)} \end{cases}$

Considerando que en una proporción aritmética se cumple que $a + d = b + c$

A partir de la relación (2) se deduce que : $b + c = 8$ ... (3)

Si resolvemos (1) y (2), encontramos que : $\begin{cases} b = 5 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow b - c = 2$ RPTA. B

33.- Dos galgos parten en el mismo instante, uno de "A" y otro de "B" y marchan al encuentro uno del otro; si la velocidad de primero excede en 4 km/h al segundo. Determinar dichas velocidades, si la razon de los espacios recorridos por ambos galgos hasta su encuentro es de 6/5. Dar la menor de ellas.

A) 32 km/h B) 48 km/h C) 36 km/h D) 24 km/h E) 20 km/h

Resolución.-

Sean las velocidades : $\begin{cases} v_A \\ v_B \end{cases}$; donde : $v_A - v_B = 4$

Como en el MRU los espacios recorridos son proporcionales a las velocidades, entonces :

$$\frac{v_A}{e_A} = \frac{v_B}{e_B} \quad \ldots (\alpha)$$

Ademas por dato tenemos que : $\dfrac{e_A}{6} = \dfrac{e_B}{5} \quad \ldots (\beta)$

Multiplicando los datos (α) y (β) : $\dfrac{v_A}{6} = \dfrac{v_B}{5}$

Aplicando la 5ta propiedad de proporciones :

$$\frac{v_A}{6} = \frac{v_B}{5} = \frac{v_A - v_B}{6 - 5} = 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_A = 24\ km/h \\ v_B = 20\ km/h \end{cases}$$

RPTA. E

34.- En una proporción geométrica, la suma de los extremos es 21 y la suma de los medios es 19. Calcular el mayor de los términos de dicha proporción, si la suma de los cuadrados de los cuatro términos es 442.

A) 10 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

Resolución.-

Sea la proporción geométrica : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

Según propiedad de las P.G.y las condiciones del problema se tiene que :

$$\Rightarrow \begin{cases} ad = bc & \ldots (*) \\ a + d = 21 & \ldots (\alpha) \\ b + c = 19 & \ldots (\beta) \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 442 & \ldots (\theta) \end{cases}$$

Elevando al cuadrado (α) : $a^2 + d^2 + 2\,ad = 441 \quad \ldots (*)$

Elevando al cuadrado (β) : $b^2 + c^2 + 2\,bc = 361 \quad \ldots (**)$

Sumando miembro a miembro (*) y (**) :

$$\underbrace{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}_{442} + 2\,ad + 2\,bc = 802 \quad \Rightarrow \quad ad + bc = 180$$

Teniendo en cuenta a (*), concluimos que : $ad = bc = 90$ ..... (ω)

A continuación resolvemos de (α) y (ω) : $a = 15$; y ; $d = 6$

Resolviendo (β) y (ω), encontramos : $b = 10$; y ; $c = 9$

De esto, reconocemos que el término mayor es : **15** RPTA. D

35.- Si : $a : b :: c : d$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 221$; calcular : $(a + b + c + d)$

A) 45 ***B) 40*** ***C) 35*** ***D) 30*** ***E) 25***

- Resolución.-

Si k es la constante de la proporción dada, entonces : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

De donde se deduce que : $\begin{cases} a = bk \\ c = dk \end{cases}$

Reemplazando en la condición dada y factorizando, tendremos :

$$(bk)^2 + b^2 + (dk)^2 + d^2 = 221 \Rightarrow (k^2+1)(b^2+d^2) = 13 \cdot 17$$

$$\left.\begin{array}{l} k^2 + 1 = 17 \Rightarrow k = 4 \\ b^2 + d^2 = 13 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \rightarrow a = 8 \\ d = 3 \rightarrow c = 12 \end{cases} \end{array}\right\} \quad a + b + c + d = 25$$

RPTA. E

36.- En una proporción geométrica la suma de los dos primeros términos es 20 y la suma de los dos últimos términos es 25. Calcular el menor de los términos medios si la suma de los consecuentes es 27.

A) 10 ***B) 12*** ***C) 14*** ***D) 16*** ***E) 18***

Resolución.-

Sea la proporción : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Por dato : $\begin{cases} a + b = 20 & \text{....}(\alpha) \\ c + d = 25 & \text{....}(\beta) \\ b + d = 27 & \text{....}(\gamma) \end{cases}$

Sumando (α) y (β) : $a + c + \underbrace{b + d}_{27} = 45 \Rightarrow a + c = 18$

Aplicando la 5ta propiedad de proporciones : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}b \\ c = \frac{2}{3}d \end{cases}$

Reemplazando los valores de a y c en (α) y (β) :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} b = 12 \rightarrow a = 8 \\ d = 15 \rightarrow c = 10 \end{cases}$$

RPTA. A

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- La suma de tres números es 1 425; la razón entre el primero y el segundo es 11/3 y la diferencia de los mismos es 600; el tercer número es :

A) 475 B) 375 C) 215 D) 600 E) 450

2.- Del centro de un círculo se trazan 29 rayos formando ángulos centrales que son proporcionales a los 29 primeros números enteros positivos; luego el mayor ángulo mide :

A) 29° B) 30° C) 24° D) 26° E) 28°

3.- El ancho de una alfombra rectangular es a su largo como 2 es a 3. Si se le corta por los 4 costados una tira de 10 *cm*. de ancho; la superficie disminuye en 56 dm^2. ¿Cuál es el largo de la alfombra en decímetros (*dm*)?

A) 21 B) 15 C) 28 D) 12 E) 18

4.- Si una ficha naranja equivale a 3 fichas rojas y una ficha roja equivale a 6 fichas blancas, entonces 90 fichas blancas equivalen a :

A) 30 rojas D) 20 naranjas
B) 20 rojas E) 5 naranjas
C) 30 naranjas

5.- La edad de A y B son entre sí como 5 es a 4, la razón entre las edades de B y C es 3/7. Si la suma de las edades de las tres personas es 165, entonces la diferencia entre la edad del mayor y la del menor es :

A) 48 B) 31 C) 36 D) 32 E) N.A

6.- El número de niñas y niños en una fiesta infantil está en la relación de 2 a 5. Si al cabo de 2 *horas* llegan 10 parejas y 6 niños, la nueva relación sería de 4 a 7. Hallar el número de asistentes.

A) 96 B) 84 C) 110
D) 121 E) 33

7.- Hace 8 *años* la razón de las edades de 2 hermanos era 2/5 y dentro de 12 *años* la razón será 4/5. Hallar la edad del mayor de los hermanos.

A) 16 B) 15 C) 12 D) 18 E) 9

8.- Tres números son entre sí como 5; 7 y 8. Si se suman 5; 10 y "*n*" al 1^{ro}; 2^{do} y 3^{ro} respectivamente, la nueva relación es ahora de 11; 16 y 21. Hallar *n*.

A) 15 B) 10 C) 5
D) 25 E) F.D

9.- En una proporción geométrica continua la suma de los extremos es 75 y la diferencia de los mismos es 21. Hallar la media proporcional.

A) 18 B) 24 C) 32 D) 30 E) 36

10.- Los antecedentes de varias razones geométricas equivalentes son 3; 5; 6 y 8, y la suma de los dos primeros consecuentes es 40.
Hallar el producto de los otros dos consecuentes.

A) 240 B) 480 C) 960
D) 1 200 E) 1 600

11.- En una reunión se observó que por cada 3 mujeres había 7 hombres. Además se observó que el número de hombres excede al número de mujeres en 28. ¿Cuál será la relación de hombres y mujeres si se retiran 14 parejas?

A) 2:5 B) 1:3 C) 5:1 D) 2:7 E) 2:3

12.- La diferencia entre el mayor y menor término de una proporción geométrica continua es 25, el otro término es 30. Hallar la suma de los términos si los 4 son positivos?

A) 95 B) 100 C) 65 D) 125 E) 130

13.- En una proporción geométrica continua el producto de los cuatro términos es 20 736, y la suma de los antecedentes es igual al producto de los consecuentes. Hallar la suma de los términos.

A) 46 B) 73 C) 64 D) 36 E) 48

14.- En una serie de razones geométricas equivalentes :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

el producto de los antecedentes es 448, y el producto de los consecuentes es 1 512. Determinar la suma de los antecedentes sabiendo que :

$$a + b + c + d + e + f = 65$$

A) 42 B) 39 C) 26 D) 50 E) 24

15.- Se tiene tres razones geométricas continuas en las cuales la razón es mayor que 1; siendo la razón de los extremos igual a 8. ¿Cuál es la razón del primer consecuente al último?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16.- A; B y C son confeccionistas de polos. Se sabe que las confecciones de A y B están en la relación de 12 a 7, y la de B a C en la relación de 21 a 16. En un determinado día A confeccionó 20 polos más que C. ¿Cuántos polos confeccionó B en ese día?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

17.- En una proporción geométrica continua la razón entre la suma y la diferencia de los términos de la primera razón es 5/2. Hallar la media proporcional si la suma de los cuatro términos es 400.

A) 56 B) 68 C) 84 D) 32 E) 48

18.- Hallar : $a + b + c + d$, si :

$$\frac{3}{a} = \frac{a}{d} = \frac{2}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{16} = k$$

A) 24 B) 30 C) 42 D) 45 E) 60

19.- Sabiendo que "b" es la media proporcional de "a" y "c" , además $a + b + c$ es 93 y que $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \dfrac{1}{25}$, hallar : $a \cdot b$

A) 25 B) 35 C) 75 D) 45 E) 12

20.- Dada la serie de razones.

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k \text{ , se cumple que :}$$

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{A^2+B^2+C^2} = 12$$

$$\text{y} \quad \frac{A^3+B^3+C^3}{a^2+b^2+c^2} = 384$$

Determinar el valor de k.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

21.- Si: $\dfrac{ab}{15}=\dfrac{bc}{6}=\dfrac{ca}{5}=k$

donde : $a+b+c=52$; halle : $a-c$

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 26

22.- Si : $\dfrac{15}{a}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{d}{e}=k$

Además : $ab+2b\cdot e+6c=9c\cdot d$

Hallar : $R=\dfrac{12a+17e}{5a+9e}$

A) 73/50 B) 23/30 C) 61/50
D) 77/50 E) 81/27

23.- Si: $\dfrac{10+a}{10-a}=\dfrac{11+b}{11-b}=\dfrac{100+c}{100-c}=r$, $(r>1)$

y $a+b+c+1=r^2$;

entonces : $(r-1)$, es :

A) 10 B) 0 C) -13 D) 9 E) 11

24.- Si : $\dfrac{x}{q+r-p}=\dfrac{y}{r+p-q}=\dfrac{z}{p+q-r}$

halle el valor de :

$(q-r)x+(r-p)y+(p-q)z$

A) $x+y+z$ B) $p+q+r$ C) 1
D) 0 E) $(x+y+z)(p+q+r)$

25.- Si se cumple que :

$$\frac{a}{n!}=\frac{b}{(n+1)!}=\frac{c}{(n+2)!} \quad ;$$

donde : $a+b+c=1\,587$.

Además : a , b y $c\in\mathbb{N}$; hallar "c".

A) 1 518 B) 1 620 C) 1 456
D) 1 512 E) 1 548

26.- Se tiene tres cestos de manzanas, cuyo número de manzanas que contienen están en la relación de 4; 7 y 5. Se pasa "a" manzanas del 1º al 2º, de éste se saca "b" manzanas y se colocan en la 3ra cesta quedando que el número de manzanas que contiene cada una están en la relación de 5; 10 y 9. Determinar el número de manzanas que contiene la 2da cesta si $(a+b)$ es 10.

A) 30 B) 24 C) 42 D) 40 E) 36

27.- Si : $\dfrac{a^2-bc}{a-1}=\dfrac{b^2-ac}{b-1}=\dfrac{c^2-ab}{c-1}=k$;

hallar : $\sqrt{\dfrac{a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c}{a+b+c}}$

A) 18 B) 16 C) 20 D) 30 E) 1

28.- En una proporción geométrica la diferencia de los extremos es 1 y la diferencia de los medios 6. Hallar la suma del mayor extremo y menor medio.

A) 12 B) 14 C) 17 D) 19 E) 15

29.- Se tiene una proporción geométrica continua, cuya razón es un número entero positivo. Si la suma de los extremos menos la suma de los medios es 450, hallar el máximo valor que puede adoptar el primer antecedente.

A) 392 B) 1 450 C) 248 D) 345 E) N.A

30.- Dos corredores A y B parten al mismo tiempo del vértice X del triángulo equilátero XYZ, uno por el lado XY y el otro por el lado XZ. Cuando se cruzan están por el lado YZ a 10 m del vértice "Y" continúan su desplazamiento llegan a X y se vuelven y cuando se cruzan por se-gunda vez están en el punto medio del lado XZ. Hallar el perímetro del triángulo.

A) 120 B) 140 C) 170 D) 180 E) 150

16 PROPORCIONALIDAD

16.1 MAGNITUD

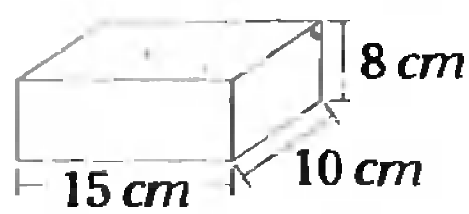
Es todo aquello que es susceptible a ser medido y/o comparado, con otra de su misma especie. Generalmente una magnitud se expresa por medio de cantidades. Una cantidad es por tanto una parte de una magnitud y está definida por un valor y una unidad de medida. A su vez, la unidad de medida es aquella cantidad elegida como patrón de comparación, variable en el tiempo y en el espacio.

El resultado de medir una magnitud provoca una cantidad.

Ejemplo 1. Peso un saco de azúcar y en la báscula señala 18 kg.

Es la cantidad obtenida por efectuar una medición.

Ejemplo 2. Sea un ladrillo :



Posee la magnitud llamada volumen

El volumen del ladrillo es 1 200 cm^3 que representa la cantidad.

16.2 PROPORCIONALIDAD DIRECTA

A. DEFINICION

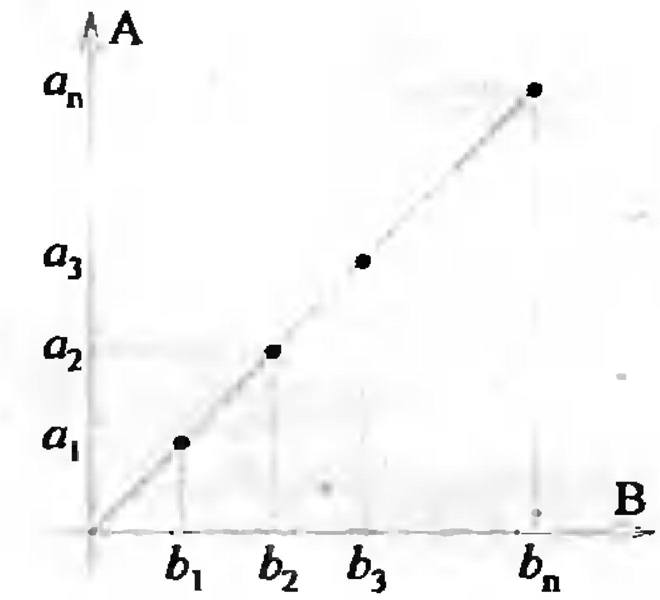
Sean A y B dos magnitudes relacionadas entre sí, de modo que para un evento determinado se conocen los valores particulares que han ido tomando dichas magnitudes. Estos valores se denotarán por los términos generales a_1 y b_1.

A	a_1	a_2	a_3	....	a_n
B	b_1	b_2	b_3	....	b_n

Se dice que las magnitudes A y B son directamente proporcionales, si los valores mostrados en el cuadro guardan entre sí la siguiente relación :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

B. GRAFICO DE UNA PROPORCIONALIDAD DIRECTA



Al trasladar los valores dados del cuadro anterior a un par de ejes coordenados en donde la ordenada sea A y la abscisa sea B, se comprueba que los puntos obtenidos se agrupan formando entre sí una línea recta. En adelante, una línea recta de similares características al que se muestra al lado, será prueba de una proporción directa entre la magnitud representada en la ordenada con la magnitud representada en la abscisa.

C. NOTACIONES

En notación de funciones se dirá que : "a es directamente proporcional a B", si : "a es función de b", lo cual se denota así :

$$a = f(b) \quad ; \text{ ó } ; \quad f(b_n) = b_n \cdot k$$

A partir de las proporciones mostradas en los dos últimos items y empleando la notación de función (f), se logra establecer que :

$$a_1 = f(b_1) \ ; \ a_2 = f(b_2) \ ; \ a_3 = f(b_3) \ ; \ \ldots\ldots\ldots \ a_n = f(b_n)$$

En general si A es directamente proporcional a B, la notación es :

$$\text{A D. P. B.} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{A}}{\text{B}} = k \ , \text{y} , \ \text{A} = k\,\text{B}$$

Ejemplos :

a) Obreros - obra

Si se aumenta el número de obreros, junto a ello se incrementará la cantidad de obra. Es decir si un obrero puede hacer $2m$ de obra en determinado tiempo, dos obreros harán $4m$, tres obreros harán $6m$ y así sucesivamente. El número de obreros (N) será directamente proporcional con la cantidad de obra (q).

$$\therefore \quad \text{N D. P. q} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{N}}{\text{q}} = k \ , \text{ ó } , \ \text{N} = k \cdot \text{q}$$

b) Eficiencia - Dificultad

La eficiencia, destreza o rendimiento que poseen los medios de producción (hombres, máquinas, etc), están en relación directa con la dificultad de la obra ha realizarse. Es decir si yo tengo una obra de mayor dificultad será necesario recurrir a medios más eficientes. Es decir si la dificultad (D) es directamente proporcional a la eficiencia (E).

$$\therefore \quad \text{D es D. P. a E} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{D}}{\text{E}} = k \ , \text{ ó } , \ \text{D} = k\,.\,\text{E}$$

Observación :

Un modo a veces efectivo de reconocer si dos magnitudes A y B son directamente proporcionales, es esta : Si B aumenta cuando A aumenta, o B disminuye cuando A disminuye, entonces es bastante probable que estas dos magnitudes sean directamente proporcionales, además sólo serán directamente proporcionales si la relación de sus respectivas cantidades presenta una constante.

16.3 PROPORCIONALIDAD INVERSA

A DEFINICION

Sean A y B dos magnitudes relacionadas entre sí, de las que para un determinado evento, conocemos el siguiente cuadro de valores :

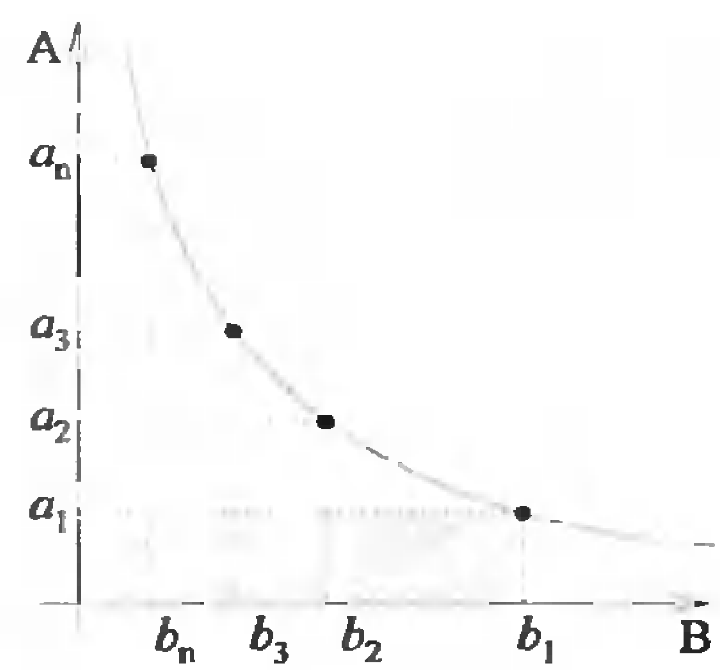
A	a_1	a_2	a_3	....	a_n
B	a_1	b_2	b_3	....	b_n

Se dice que A y B son inversamente proporcionales si los valores mostrados en el cuadro anterior guardan entre sí la siguiente relación :

$$a_1 \cdot b_1 = a_2\, b_2 = \ldots\ldots = a_n\, b_n = k$$

B GRAFICO DE UNA PROPORCIONALIDAD INVERSA

Si A y B son dos magnitudes inversamente proporcionales, entonces al trasladar sus valores a un plano cartesiano donde la ordenada sea A y la abscisa sea B, se obtendrá un conjunto de puntos que al unirlos forman una línea curva llamada Hipérbola. Si los valores del cuadro del item anterior son utilizados para este fin se obtendrá el gráfico adjunto.



Es fácil demostrar que si la abscisa se intercambia por la ordenada y viceversa, el gráfico obtenido resulta ser el mismo.

C NOTACIONES

A partir de la proporción mostrada en el item 3.1 y empleando la notación de función (f), se puede establecer que :

$a = f(b)$, de modo que si "a es inversamente proporcional a b," se verificará que :

$$a_n \cdot b_n = k \quad Þ \quad f(b_n) \cdot b_n = k$$

De este modo podemos generalizar la proporcionalidad inversa de los valores de A y B así :

$$b_1 \, . f(b_1) = b_2 \, . f\ (b_2) = b_3 \, . f\ (b_3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = b_n \, . f\ (b_n)$$

En general si A es inversamente proporcional a B, la notación es :

$$\text{A I. P. B} \quad Þ \quad \text{A B} = k \quad Ú \quad \text{A} = \frac{k}{\text{B}}$$

Observaciones :

1) La curva mostrada en el item 16.3B es un tipo especial de hipérbola llamadas Hipérbola Simétrica, la cual intenta acercarse a los ejes coordenados.

2) En una proporcionalidad inversa, los valores de las magnitudes A y B se caracterizan porque ellos son los lados de cuadriláteros rectangulares que poseen un área común. Así en el gráfico del item 3.2, el área del rectángulo de lados a_1 , y , b_1 , es el mismo que el del rectángulo a_2 , y , b_2 .

Ejemplos :

1) Trabajadores - versus - Tiempo

Es evidente que si aumenta el número de trabajadores (N) para realizar una obra determinada, el tiempo T de su ejecución disminuirá necesariamente. De este modo deducimos que N y T son dos magnitudes inversamente proporcionales, lo cual se denotara así :

$$N \text{ I.P. } T \quad ; \quad ó \quad ; \quad N \cdot T = k \quad ; \quad ó \quad ; \quad N = \frac{k}{T}$$

2) Número Dias - Número Horas Diarias

Para la realización de un determinado trabajo he calculado emplear 60 horas en total y podemos programar 6 días de trabajo a razón de 10 horas por día. Si lo quiero hacer en menos tiempo ,por ejemplo en 5 días, me vería obligado a trabajar 12 horas diarias. Nótese que si queremos menos días tenemos que trabajar más horas diarias. Entonces el número de dias (D) es inversamente proporcional al número de horas diarias (H).

Es decir : $\quad D \text{ es I.P a } H \quad ® \quad D \cdot H = k \quad ó \quad D = \dfrac{k}{H}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- *La altura "H" que alcanza un helicóptero es directamente proporcional a la longitud "L" de su hélice y a su correspondiente velocidad angular "w" pero, inversamente proporcional a su peso "P". Si k es una constante de proporcionalidad, entonces, se verifica que :*

A) $H = kL^2\ w/P$ B) $H = kP/Lw$ C) $H = k\ .\ w\ L/P$ D) $H = kP\ w/L$ E) N.A

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo con los datos del problema sabemos que :

(1) H D. P. w (2) H D. P. L (3) H I. P. P

A simple vista H es una magnitud que depende simultáneamente de otras tres magnitudes, por tanto teniendo en cuenta los tipos de proporciones diremos que la relación (1) y (2) quedarán vinculadas por un cociente y la relación (3) por un producto. Así :

$$\frac{H\ .\ P}{w\ .\ L} = k \qquad \Rightarrow \qquad H = k\ .\ w\,L/P \qquad \text{RPTA. C}$$

2.- *Si la magnitud X es inversamente proporcional con la magnitud Y, pero a su vez resulta ser directamente proporcional con la magnitud Z y con el cuadrado de la magnitud U, encontrar una expresión para X en función de Y, Z, U.*

A) $X = kYUZ$ B) $X = kY/U \cdot Z$ C) $X = kZ \cdot U^2/Y$ D) $X = kZ/Y \cdot U^2$ E) N.A.

<u>Resolución</u>.-

Segun los datos se sabe que la magnitud X depende simultáneamente de las magnitudes Y, Z y U, del siguiente modo :

X I. P. Y, X D. P. Z , X D. P. U^2

Ahora, teniendo en cuenta la solución del ejercicio anterior, podemos establecer que :

$$\frac{X\ .\ Y}{Z\ .\ U^2} = k \qquad \Rightarrow \qquad X = k\,Z \cdot U^2/Y \qquad \text{RPTA. C}$$

3.- *Si A varía proporcionalmente con $(B^2 + 4)$ y B varía proporcionalmente con $\sqrt{C}$ - 5. Además cuando A = 16; B = 2 y C = 81; calcular A cuando C = 49.*

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

<u>Resolución</u>.-

Sean x e y los valores de A y B respectivamente que corresponden al 2do juego de datos. A continuación elaboramos el siguiente cuadro :

A	B	C
16	2	81
x	y	49

De acuerdo con las condiciones del problema se tiene que :

$$A \text{ D.P. } (B^2+4) \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{B^2+4} = \text{Cte} \quad \ldots (a)$$

$$B \text{ D.P. } \left(\sqrt{C}-5\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{\sqrt{C}-5} = \text{Cte.} \quad \ldots (b)$$

Reemplazando datos convenientemente en la relación (b), tendremos :

$$\frac{2}{\sqrt{81}\ \ 5} = \frac{y}{\sqrt{49}\ \ 5} \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

Utilizando este dato y los del cuadro, reemplazaremos en (a); obteniéndose :

$$\frac{16}{2^2+4} = \frac{x}{1^2+4} \quad \Rightarrow \quad x = 10 \qquad \text{RPTA. C}$$

4.- Se tiene tres magnitudes A, B y C tales que A es D.P. a $\sqrt{B}$; A es I.P. a C^2. Cuando A = 8, B = 16, C = 6; calcular B si A = 9 y C = 4.

A) 2 ***B) 3*** ***C) 4*** ***D) 5*** ***E) 6***

Resolución.-

$$\text{Si : } \begin{cases} A \text{ D.P. } \sqrt{B} \\ A \text{ I.P. } C^2 \end{cases}, \text{ entonces : } \frac{A \times C^2}{\sqrt{B}} = k \quad \ldots (*)$$

De los datos del problema podemos elaborar el siguiente cuadro de valores :

A	B	C
8	16	6
9	x	4

Reemplazando en (a) :

$$\frac{8 \times 6^2}{\sqrt{16}} = \frac{9 \times 4^2}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \qquad \text{RPTA . C}$$

5.- La magnitud A es D.P. a B^2, e I.P. a $\sqrt[3]{C}$. Si el valor de B se duplica y el de C disminuye en sus 26/27. ¿Qué sucede con el valor de A?

A) Queda multiplicado por 12 ***B) Disminuye en 1/11 de su valor***
C) Aumenta en 1/11 de su valor ***D) Se triplica***
E) Se cuadruplica

Resolución.-

$$\text{Si : } \begin{cases} A \text{ D.P. } B^2 \\ A \text{ I.P. } \sqrt[3]{C} \end{cases}, \text{ entonces : } \frac{A \times \sqrt[3]{C}}{B^2} = k \quad \ldots (*)$$

Reemplazando los datos dados en (*), tendremos :

$$\frac{A \times \sqrt[3]{C}}{B^2} = \frac{A_x \times \sqrt[3]{C - \frac{26}{27} \times C}}{(2B)^2}$$

$$\frac{A \times \sqrt[3]{C}}{B^2} = \frac{A_x \times \sqrt[3]{\frac{C}{27}}}{4B^2} \Rightarrow \frac{A \times \sqrt[3]{C}}{B^2} = \frac{A_x \times \sqrt[3]{C}}{4B^2 \times 3}$$

$\therefore$ $\boxed{A_x = 12\,A}$ RPTA. A

6.- *Si el precio de un diamante es D.P. al cuadrado de su volumen y teniendo un diamante de S/. 36 000, se le divide en 3 partes iguales. ¿Cuánto se pierde debido al fraccionamiento?*

A) S/. 24 000 B) S/. 18 000 C) S/. 4 000 D) S/. 12 000 E) S/. 6 000

<u>Resolución</u>.-

Si consideramos que el volumen de cada una de las tres partes es igual a V, entonces el volumen de todo el diamante será $3V$. Si P es el precio de una de dichas partes, entonces por condición del problema se tendrá :

$$\frac{\text{Precio}}{(\text{Volumen})^2} = k \Rightarrow \frac{\overbrace{P}^{\text{Una parte}}}{V} = \frac{\overbrace{36\,000}^{\text{El todo}}}{(3V)^2} \Rightarrow P = 4\,000$$

Luego, las tres partes por separado tendrán un precio total de : $3\,(4\,000) = 12\,000$

Finalmente la pérdida generada por la división del diamante será :

$$36\,000 - 12\,000 = \boxed{S/.\ 24\,000}$$ RPTA. A

7.- *A es directamente proporcional a B, e inversamente proporcional a C^2. Si cuando C = 5, B = 5A ¿Cuál es el valor de B, cuando C = 2 y A = 5?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

<u>Resolución</u>.-

Según condición tenemos que :

$$\left.\begin{array}{l} A\ \text{D.P.}\ B \\ A\ \text{I.P.}\ C^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A\,.\,C^2}{B} = k \quad \ldots (*)$$

Además tenemos como datos el siguiente cuadro de valores :

A	B	C
a	$5a$	5
5	x	2

Reemplazando estos valores numéricos en (*) :

$$\frac{a \times 5^2}{5a} = \frac{5 \times 2^2}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 4} \qquad \text{RPTA. D}$$

8.- El valor de una tela de seda es directamente proporcional a su área e inversamente proporcional a su peso. Si una tela de seda de un área de 2m² con 50 g de peso cuesta S/. 100. ¿Cuánto costará un área de 3m² con 100g de peso?

A) S/. 25 ***B) S/. 50*** ***C) S/. 75*** ***D) S/. 45*** ***E) S/. 60***

Resolución.-

Sean V, A y P el valor de la seda, su área y su peso respectivamente. Luego por condición del problema se sabe que :

$$\begin{array}{l} \text{V D.P. A} \\ \text{V I.P. P} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{V \times P}{A} = k \qquad \text{... (*)}$$

Asimismo podemos elaborar el siguiente cuadro de datos :

V	A	P
100	2	50
x	3	100

Reemplazando estos datos en (*) :

$$\frac{100 \times 50}{2} = \frac{x \times 100}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = S/.\ 75} \qquad \text{RPTA. C}$$

9.- A es D.P. a la diferencia de B y C. B es proporcional a D, C es proporcional a D². Si D = 2 cuando A = 48 y D = 5 cuando A = 30 ¿Para cuántos valores de D, A se hace cero?

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) A no se hace cero***

Resolución.-

De acuerdo con las condiciones del problema, se tiene que :

1ro) $A = k_2\,(B - C)$ ... (a)

2do) $B = k_3\,D$ ... (b)

3ro) $C = k_4\,D^2$ ... (q)

Reemplazando (b) y (q) en (a) :

$$A = k_2\,(k_3 D - k_4 D^2) \quad \Rightarrow \quad A = \underbrace{k_2 k_3}_{k} D - \underbrace{k_2 k_4}_{k_1} D^2$$

Observación : Recuerda que el producto de constantes, nos da otra constante.

$$Þ \quad A = kD - k_1 D^2 \quad ... (*)$$

Reemplazando los datos numéricos en (*); podremos establecer los valores de k y k_1, veamos:

$$\begin{cases} 48 = 2k - 4k_1 \\ 30 = 5k - 25k_1 \end{cases} \quad Þ \quad k = 36 \ , \text{y} \ , \ k_1 = 6$$

A continuación reemplazamos estos valores en (*) :

$$A = 36D - 6D^2 \quad Þ \quad A = 6D\,(6 - D)$$

Finalmente por condición se tiene que :

$$A = 0 \quad Þ \quad D = 0 \ , \text{ú} \ , \ D = 6$$ RPTA. B

10.- A varía en forma directamente proporcional a B y C; C varía directamente proporcional a F^3. Cuando A es 160, B es 5 y F es 2. Si B es 8 y F es 5. ¿Cuánto sería A?

A) 1 200 B) 1 500 C) 2 000 D) 4 000 E) 4 500

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en encontrar una dependencia directa entre las magnitudes A, B y F, respetándose para ello la dependencia que estos guardan con la magnitud C. De acuerdo con los datos, se sabe que :

1) A depende directamente de dos magnitudes B y C, de modo que :

$$\frac{A}{B \times C} = k_1 \quad ... (I)$$

2) C depende directamente del cubo de la magnitud F, luego :

$$\frac{C}{F^3} = k_2 \quad Þ \quad C = F^3 . k_2 \quad ... (II)$$

Sustituyendo (II) en (I), tendremos :

$$\frac{A}{B \times \left(F^3 \times k_2\right)} = k_1 \quad Þ \quad \frac{A}{B \times F^3} = \overbrace{k_1 \times k_2}^{k} \quad ... (*)$$

Obsérvese que k es una nueva constante de proporcionalidad directa entre A y las magnitudes B y F^3. A continuación reemplazaremos en (*), los juegos de valores dados en el problema, obteniéndose :

$$\frac{160}{5 \times 2^3} = \frac{x}{8 \times 5^3} \qquad \therefore \quad \text{A sería : } x = 4\,000$$ RPTA. D

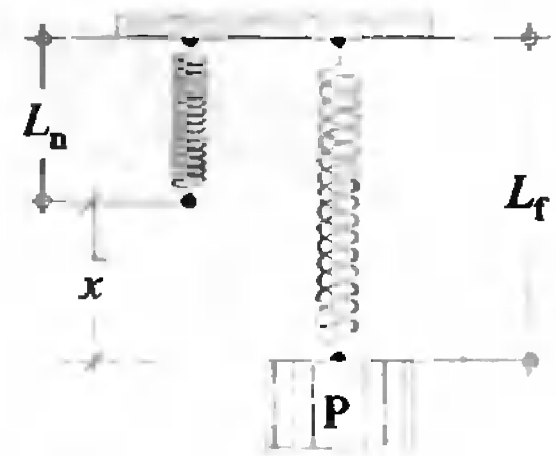
11.- La longitud de un resorte es 8 cm. Si soporta un peso de 50 g su longitud es 10 cm. ¿Cuál será su longitud si soporta un peso que es 3 veces que el anterior, si su elongación es directamente proporcional al peso que soporta?

A) 12 B) 20 C) 14 D) 30 E) 18

Resolución.-

En primer lugar debemos reconocer que la longitud natural de un resorte es la que éste tiene sin experimentar ninguna deformación . Asimismo, debemos saber que el término *elongación* se refiere a la deformación longitudinal que experimenta el resorte, a quien denotaremos por x. Para determinar x se podrá recurrir a la siguiente relación :

$$x = L_f - L_n \text{, donde : } \begin{cases} L_n : \text{ longitud natural} \\ L_f : \text{ longitud final} \end{cases}$$



De acuerdo con la condición del problema, se sabe que :

$$\frac{\text{Elongación}}{\text{Peso}} = k \text{.......} (*)$$

Luego, sustituyendo los datos dados en (*), tendremos :

$$\frac{10-8}{50} = \frac{x-8}{150} \quad \backslash \quad \boxed{x = 14} \quad \text{RPTA. C}$$

12.- *A determinada hora de un día soleado, la longitud de la sombra de una varilla vertical es D.P. a su longitud. Un basquetbolista que mide 2,2 metros proyecta una sombra de 1,21 metros. ¿Cuántos centímetros medirá un enano de un circo que proyecta una sombra de 65 cm de longitud, a la misma hora y en el mismo lugar?*

A) 100 cm ***B) 110 cm*** ***C) 120 cm*** ***D) 130 cm*** ***E) 140 cm***

Resolución.-

Sean A y B la longitud de la persona y de su sombra respectivamente, luego podemos elaborar el siguiente cuadro de valores :

	A	B
Basquetman	2,2	1,21
Enano	x	66

Por dato del problema : A D.P. B Þ $\frac{A}{B} = k$ ... (*)

Reemplazando los valores correspondientes en (*), tendremos :

$$\frac{2{,}2}{1{,}21} = \frac{x}{66} \quad Þ \quad \boxed{x = 120\ cm} \quad \text{RPTA. C}$$

13.- *El costo de un terreno es I.P. al cuadrado de la distancia de Lima al terreno y D.P. a su área, un cierto terreno cuesta S/. 5 000 y otro terreno de doble área y situado a una distancia de Lima cuádruple de la anterior. ¿Cuál será su valor?*

A) S/. 625 ***B) S/. 650*** ***C) S/. 675*** ***D) S/. 700*** ***E) S/. 725***

Resolución.-

Sean C, D y A el costo, la distancia respecto a Lima y el área respectivamente del terreno. Luego por condición del problema se establece que :

$$\left.\begin{array}{l} C \ \text{ I.P. } \ D^2 \\ C \ \text{ D.P. } \ A \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{C \cdot D^2}{A} = k \quad \ldots (*)$$

Además tenemos los siguientes valores :

C	D	A
5 000	d	a
x	$4d$	$2a$

Reemplazando en (*) los valores dados :

$$\frac{5\,000 \cdot d^2}{a} = \frac{x \cdot (4d)^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = S/.\ 625 \qquad \text{RPTA. A}$$

14.- La rapidez del sonido en el aire es D.P. a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. Además si a 16 °C la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s. ¿Cuál será la rapidez del sonido cuando la temperatura sea de 88 °C?

A) 380 m/s B) 375 m/s C) 360 m/s D) 372 m/s E) 364 m/s

Resolución.-

En primer lugar debemos recordar que la temperatura absoluta en Kelvin (K) viene dada así :

$$K = C + 273$$

Luego las temperaturas dadas en la escala centígrada corresponden a :

$$K_1 = 16 + 273 = 289 \text{ K} \ , \ y \ , \ \upsilon_1 = 340 \ m/s$$

$$K_2 = 88 + 273 = 361 \text{ K} \ , \ y \ , \ \upsilon_2 = x$$

Asimismo, por condición del problema se sabe que la rapidez υ del sonido y la temperatura K en Kelvin, se relacionan así :

$$\upsilon \text{ D.P. } \sqrt{K} \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon}{\sqrt{K}} = \text{Cte.} \quad \ldots (*)$$

Reemplazando los valores correspondientes para υ y K en (*), tendremos :

$$\frac{240}{\sqrt{289}} = \frac{x}{\sqrt{361}} \quad \Rightarrow \quad x = 380 \ m/s \qquad \text{RPTA. A}$$

15.- De 2 kg de sal que se introdujeron en un recipiente con agua, en los dos primeros minutos se han disuelto 800g. ¿Cuántos gramos quedaran después de dos minutos más, si la cantidad de sal que no se disuelve es I.P. al cuadrado del tiempo en minutos?

A) 500 B) 400 C) 300 D) 150 E) 0

<u>Resolución</u>.-

Sean C, D y T la cantidad de sal que no se disuelve, la cantidad de sal disuelta y el tiempo en minutos, respectivamente. Luego por condición del problema se sabe que :

$$C \text{ I.P. } T^2 \quad \Rightarrow \quad C \cdot T^2 = \text{Cte.} \quad \dots \text{(a)}$$

T	D	C
2	800	1 200
4		x

Reemplazando en (a) : $12\,000 \cdot 2^2 = x \cdot 4^2 \quad \Rightarrow \quad x = 300$ RPTA. C

16.- Si el precio de un diamante es D.P. al cuadrado de su volumen y teniendo un diamante de S/. 36 000, se le divide en 3 partes iguales. ¿Cuánto se pierde debido al fraccionamiento?

A) S/. 24 000 B) S/. 18 000 C) S/. 4 000 D) S/. 12 000 E) S/. 6 000

<u>Resolución</u>.-

Por dato tenemos que : $\text{Precio} = k\,(\text{volumen})^2$

Consideremos que el volumen del diamante inicial es : 3V

Por dato tenemos que : $36\,000 = k\,(3V)^2 \quad \Rightarrow \quad 4\,000 = kV^2$

Como se ha dividido en tres partes iguales, entonces cada parte tiene un volumen igual a V.

Por lo tanto cada parte tiene un valor de : $\text{Precio} = k\,(V)^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Precio} = 4\,000$

Luego el precio total es de : $4\,000 + 4\,000 + 4\,000 =$ S/. 12 000

Se observa que ha habido una pérdida de : $36\,000 - 12\,000 =$ S/. 24 000 RPTA. A

17.- El alargamiento que sufre una barra es proporcional a su longitud y a la fuerza que se le aplica e inversamente proporcional a su sección y rigidez. Si a una barra de acero de 100 cm de largo y 500 mm² de sección se le aplica 2 500 N sufre un alargamiento de 1 mm; hallar qué alargamiento ocasionó 800 N aplicados a una barra de aluminio de 75 cm de largo y 16 mm² de sección sabiendo que la rigidez del aluminio es la mitad que la del acero.

A) 0,25 mm B) 0,50 mm C) 1,00 mm D) 1,50 mm E) 2,00 mm

<u>Resolucion</u>.-

Del enunciado : $$\frac{(\text{Alargamiento})\,(\text{Sección})\,(\text{Rigidé z})}{(\text{Longitud})\,(\text{Fuerza})} = k$$

Sustituyendo los valores : $$\overbrace{\frac{(1)(50)(20)}{(100)(2500)}}^{\text{Acero}} = \overbrace{\frac{A(16)(1)}{(75)(800)}}^{\text{Aluminio}}$$

$\therefore$ El alargamiento es : $A = 3/2 =$ 1,5 *mm* RPTA. D

18.- En cierto proceso de producción se descubrió que éste era D.P. al número de máquinas e I.P. a la raíz cuadrada de la antigüedad de ellas. Inicialmente habían 15 máquinas con 9 años de uso y luego se consiguen 8 máquinas más con 4 años de uso cada una. Determinar la relación entre la producción actual y la anterior.

A) 5 a 4 ***B) 4 a 5*** ***C) 9 a 1*** ***D) 9 a 5*** ***E) 9 a 4***

Resolución.-

Sean P, M y A la producción, número de máquinas y antigüedad en años respectivamente, luego, por condición del problema debe cumplirse que :

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ D.P. } M \\ P \text{ I.P. } \sqrt{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{P \times \sqrt{A}}{M} = k \quad \ldots (*)$$

Consideramos necesario indicar que las producciones P_1 y P_2 son las que corresponden a cada grupo de máquinas por separado, luego al sustituir los datos en (*), tendremos :

$$\frac{P_1\sqrt{9}}{15} = \frac{P_2\sqrt{4}}{8} \Rightarrow \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{4} \quad \ldots (**)$$

Reconociendo que la producción actual viene dada por la suma de P_1 con P_2, aplicamos la propiedad de proporciones en (**) :

$\therefore$ Nos piden : $\dfrac{P_1}{P_1+P_2} = \dfrac{5}{5+4} = \boxed{\dfrac{5}{9}}$ RPTA. D

19.- Un estudiante dice : "El área es directamente proporcional al radio, porque al aumentar éste, el área aumenta". Si luego le dieron la siguiente tabla y le pidieron "m", hallar la diferencia entre el valor calculado por dicho estudiante y lo calculado por Ud.

A) 20 ***D) 15***

B) 10 ***E) 30***

C) 25

Radio	***5***	***m***
Area	***25***	***100***

Resolución.-

1.- Cálculo hecho por el estudiante.- Según él, se debe verificar que :

$$\frac{A}{R} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{5} = \frac{100}{m} \quad \Rightarrow \quad m = 20$$

2.- Cálculo hecho por nosotros.- Sabemos que entre el área y el radio existe la siguiente proporción.

$$\frac{A}{R^2} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{5^2} = \frac{100}{m^2} \quad \Rightarrow \quad m = 10$$

$\therefore$ La diferencia pedida es : $20 - 10 = \boxed{10}$ RPTA. B

20.- Si se cumple que N es inversamente proporcional a M^x, calcular (n + m + x), si además conocemos el siguiente cuadro de valores :

A) 12
B) 10
C) 8
D) 6
E) 4

N	**10**	**5/4**	**$20\sqrt{2}$**	**80**	**10/27**
M	**2**	**4**	**$\sqrt{2}$**	**n**	**m**

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo con el enunciado se sabe que : $\quad N \text{ I.P. } M^x \quad \Rightarrow \quad N \cdot M^x = k \quad ... (*)$

Reemplazando las dos primeras parejas de valores de la tabla en (*) :

$$10 \cdot 2^x = \frac{5}{4} \cdot 4^x \quad \Rightarrow \quad 8 \cdot 2^x = 4^x \quad \Rightarrow \quad 2^3 \cdot 2^x = 2^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad 2^{x+3} = 2^{2x} \quad \Rightarrow \quad x + 3 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Utilizando ahora la 3ra pareja de valores, en (*), y el valor de x encontrado, tendremos :

$$20\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right)^3 = 80 \cdot n^3 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4 \cdot n^3 \quad \Rightarrow \quad n = 1$$

Finalmente utilizamos las dos últimas parejas de valores en (*), obteniéndose :

$$80 \cdot n^x = \frac{10}{27} \cdot m^x \quad \Rightarrow \quad 8 \cdot 1^3 = \frac{m^3}{27} \quad \Rightarrow \quad m^3 = (2 \cdot 3)^3 \quad \Rightarrow \quad m = 6$$

$$\therefore \quad \boxed{m + n + x = 10} \qquad \text{RPTA. B}$$

21.- Si A es directamente proporcional a B^2 cuando C permanece constante. C es directamente proporcional a B^2 cuando A permanece constante; y además se conoce el siguiente cuadro de valores :

A) 1/6
B) 1/5
C) 1/4
D) 3/4
E) 1/2

A	**180**	**$2x^2$**
B	**6**	**y**
C	**2**	**20**

Hallar : (x/y)

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo con los datos del problema se puede establecer que :

a) $A \text{ D.P. } B^2 \quad , \quad ó \quad , \quad B^2 \text{ D.P. } A \quad \Rightarrow \quad \dfrac{B^2}{A} = k_1 \quad ... (*)$

b) $C \text{ D.P. } B^2 \quad , \quad ó \quad , \quad B^2 \text{ D.P. } C \quad \Rightarrow \quad \dfrac{B^2}{C} = k_2 \quad ... (**)$

De (*) y (**) se tiene que : $\dfrac{B^2}{A \times C} = k \quad ... (***)$

Reemplazando los valores de la tabla en la relación (***), tendremos :

$$\frac{y^2}{(2x^2)(20)} = \frac{6^2}{180\times 2} \Rightarrow \frac{y}{x} = 2 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{x}{y} = \frac{1}{2}}$$ RPTA. E

22.- ***Un grupo de alumnos acuerdan hacer un viaje pagando cada uno el transporte en partes iguales, cuyo costo total es S/. 150. A último momento deciden viajar otros 5 reduciendo el pago en S/. 1,50. ¿Cuántos alumnos viajan realmente y cuánto paga cada uno?***

A) 20 ; S/. 7.50 B) 30 ; S/. 5.00 C) 25, S/. 6 D) 10 ; S/. 15 E) 10; S/. 15

Resolución.-

Del enunciado reconocemos que el número N de pasajeros aumenta y el costo C del pasaje disminuye. Asimismo observamos que el costo total es S/. 150 y permanece constante; todo esto nos induce a afirmar que N y C son inversamente proporcionales.

N	n	$n+5$
C	$\frac{150}{n}$	$\frac{150}{n} - 1,5$

De acuerdo con lo expuesto en el item 2.3, sabemos que los valores de estas magnitudes deben cumplir con la siguiente relación :

$$\mathrm{N}\cdot\mathrm{C} = k \Rightarrow n\cdot\frac{150}{n} = (n+5)\cdot\left(\frac{150}{n} - 1,5\right) \Rightarrow n = 25$$

Por consiguiente viajan y pagan respectivamente : $\boxed{25 \ ; \ \text{S/. } 6}$ RPTA. C

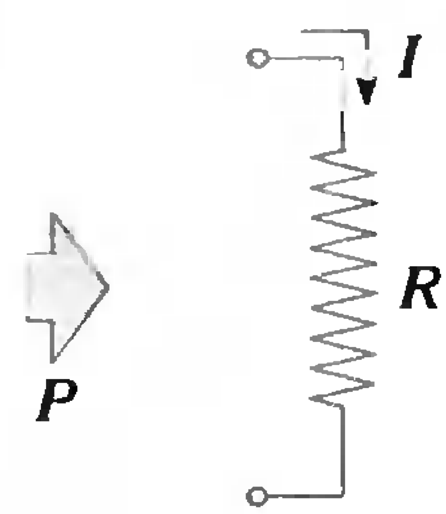
23.- ***Si una plancha eléctrica consume una potencia que es directamente proporcional con su resistencia y con el cuadrado de la intensidad de la corriente que lo circula. ¿Qué pasará con su potencia si su corriente se duplica y su resistencia se hace 4 veces menor?***

A) Sigue igual B) Aumentó 50% C) Disminuye 50%
D) Disminuye 20% E) Aumenta 20%

Resolución.-

Sean : R = resistencia eléctrica; I = intensidad de corriente, y , P = potencia; de acuerdo con los datos, se sabe que :

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{P \ D.P. \ R} \\ \mathrm{P \ D.P. \ I^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}\times\mathrm{I}^2} = k \quad \ldots (*)$$



Según el problema ocurre que la resistencia pasa de : R a R / 4; y la intensidad de corriente de: I a 2I; por lo tanto al reemplazar datos en (*), tendremos :

$$\frac{\mathrm{P_i}}{\mathrm{R}\times\mathrm{I}^2} = \frac{\mathrm{P_f}}{\left(\frac{\mathrm{R}}{4}\right)\times(4\,\mathrm{I})^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{P_i}}{\mathrm{R}\times\mathrm{I}^2} = \frac{\mathrm{P_f}}{\frac{\mathrm{R}}{4}\times 4\,\mathrm{I}^2} \Rightarrow \mathrm{P_i} = \mathrm{P_f}$$

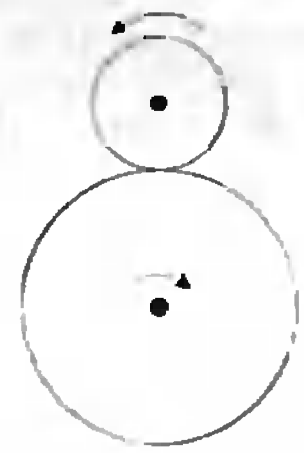
Este último resultado nos indica que la potencia sigue igual. RPTA. A

24.- Una rueda A de 20 dientes engrana con otro B y ésta a su vez engrana con C de 30 dientes el cual mediante un eje esta unido con D de 15 dientes que está engranado con E, el que a su vez engrana con una rueda F de 10 dientes. Determinar la diferencia de vueltas entre A y F.

A) 0 ***B) 5*** ***C) 20*** ***D) 25*** ***E) No existe***

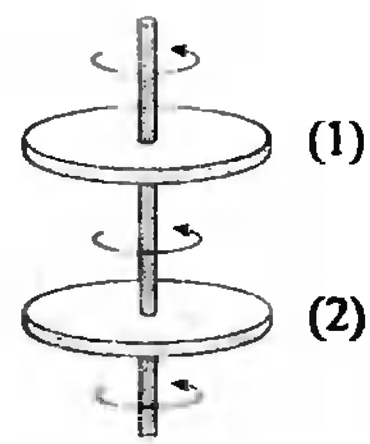
Resolución.-

Cuando dos ruedas dentadas se encuentran en contacto, puede observarse que la de mayor número N de dientes experimenta un menor número V de vueltas. Con la de menor número de dientes, que a su vez es la más pequeña, ocurre exactamente lo contrario; luego existe entre N y V una proporción inversa, tal que :



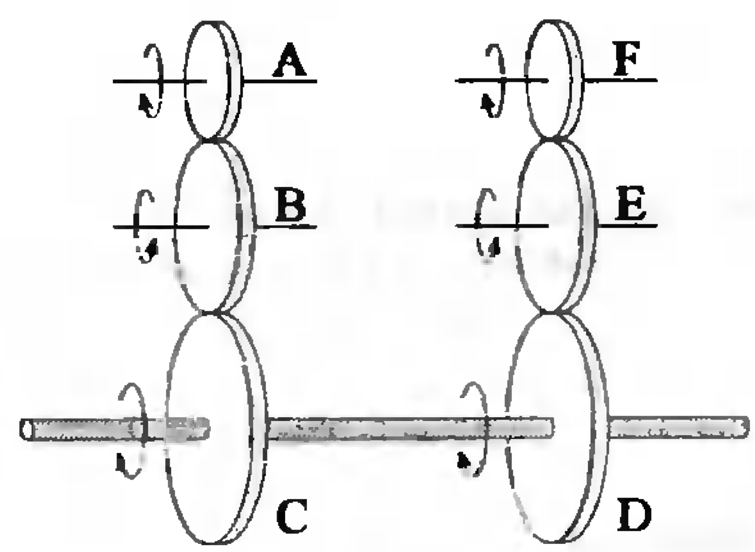
$$N \cdot V = k$$

Ahora, cuando dos ruedas están unidas por un eje, entonces éste se encarga de transmitir a las ruedas, el mismo número de vueltas, tal como se indica en el gráfico adjunto, donde :



$$V_1 = V_2$$

En nuestro problema, se cumplirá que :



1) Para A y C : $N_A \cdot V_A = N_C \cdot V_C$

$\Rightarrow \quad 20\,V_A = 30\,V_C \quad .... (1)$

2) Para C y D : $V_C = V_D \quad .... (2)$

3) Para D y F : $N_D \cdot V_D = N_F \cdot V_F$

$\Rightarrow \quad 15\,V_D = 10\,V_F \quad .... (3)$

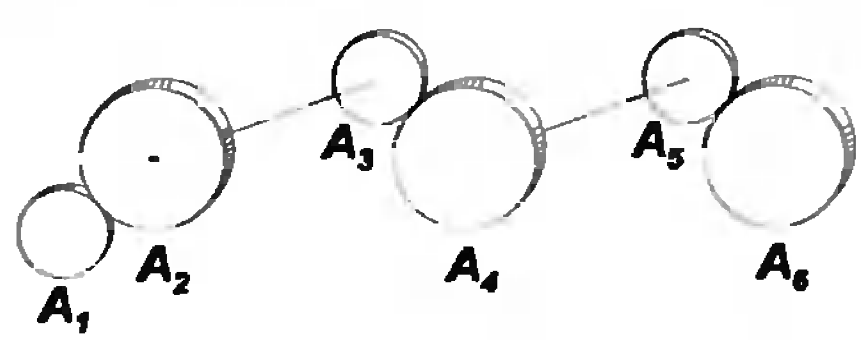
Multiplicando (1) por (3) miembro a miembro :

$$300 \cdot V_A \cdot V_D = 300 \cdot V_C \cdot V_F \quad ... (*)$$

Pero de (2) en (*), obtendremos que : $V_A = V_F$

Esto significa que : $\boxed{V_A - V_F = 0}$ RPTA. A

25.- Se tiene el siguiente sistema :



Donde se cumple que :

Número de dientes A_n ***= Números de dientes*** $A_{n-1} + n - 1$ ***, para*** $n > 1$***.***

Determinar cuántas vueltas da la última rueda si A_1 ***tiene 3 dientes y da 36 vueltas.***

A) 6 B) 12 C) 13 D) 18 E) 32

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo con la condición dada para el número de dientes, se tendrá :

# de dientes :	A_1 ;	A_2 ;	A_3 ;	A_4 ;	A_5 y	A_6
Será :	3 ;	4 ;	6 ;	9 ;	13 ;	18

+1 +2 +3 +4 +5

De los datos se sabe que : $V_1 = 36$, y teniendo en cuenta el tipo de conexión, se obtendrá :

$$3 \cdot 36 = 4 \cdot V_2 \quad Þ \quad V_2 = 27 = V_3$$

$$6 \cdot 27 = 9 \cdot V_4 \quad Þ \quad V_4 = 18 = V_5$$

$$18 \cdot 13 = 18 \cdot V_6 \quad Þ \quad V_6 = 13$$

Þ La última da : $\boxed{V_6 = 13 \text{ vueltas}}$ RPTA.C

26.- Dos mendigos piden limosna en forma I.P. al cuadrado de su edad y en forma directa a su apetito. Hoy poseen un apetito de 16 a 20; además sus edades son 8 y 10 años respectivamente y si luego de 2 años su relación de apetitos se invierte; hallar la relación de sus razones geométricas de sus limosnas ahora y dentro de 2 años.

A) 5/4 B) 9/5 C) 25/36 D) 9/4 È) 9/20

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo con el problema se sabe que las limosnas L, las edades E y los apetitos A, guardan entre si la siguiente relación :

$$\frac{L \times E^2}{A} = k \qquad \dots (*)$$

1ro) Relación actual.- Sean L_1 y L_2 las limosnas de los mendigos (1) y (2) respectiva-mente, entonces al reemplazar datos en (*), tendremos :

$$\overbrace{\frac{L_1 \times 8^2}{16}}^{\text{Mendigo(1)}} = \overbrace{\frac{L_2 \times 10^2}{20}}^{\text{Mendigo(2)}} \quad Þ \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{5}{4} \qquad \dots (a)$$

2do) Relación dentro de 2 años.- Se sabe que las nuevas edades son 10 y 12; así como la relación de apetitos crecerán invertidos.

$$\frac{L'_1 \times 10^2}{20} = \frac{L'_2 \times 12^2}{16} \quad Þ \quad \frac{L'_1}{L'_2} = \frac{9}{5} \qquad \dots (b)$$

Finalmente lo solicitado se obtiene dividiendo (a) ÷ (b) :

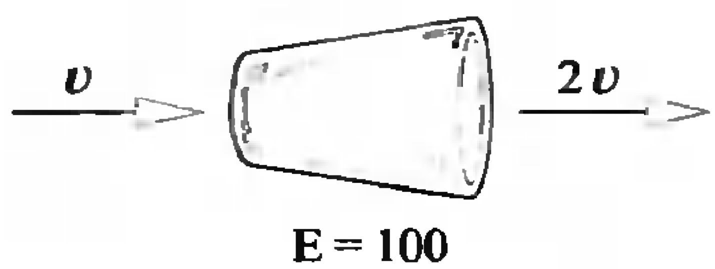
$$\frac{5/4}{9/5} = \frac{25}{36} \qquad \text{RPTA. C}$$

27.- La turbina de un avión produce una diferencia de energía de 100 kJ, el cual es ge-nerado por el aire que entra a cierta velocidad y sale con el doble de velocidad. ¿Cuál será la diferencia de energía producida por dos turbinas colocadas de modo que el aire que sale de la primera entre a la segunda, sabiendo además que la energía es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad con que entra el aire?

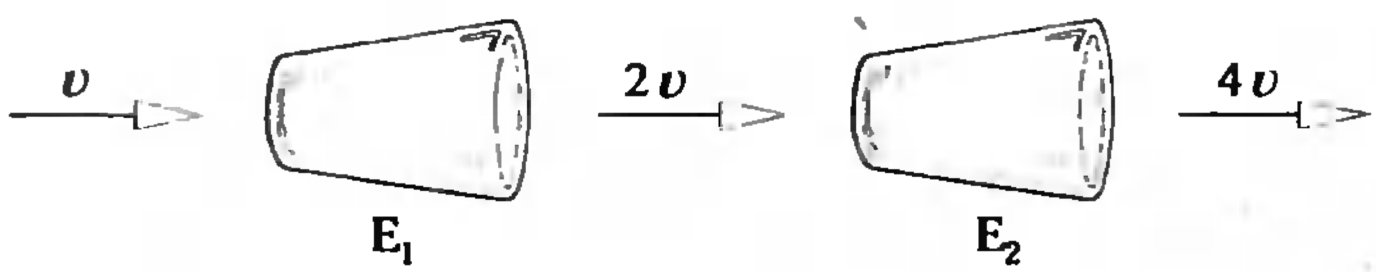
A) 600 kJ ***B) 300 kJ*** ***C) 400 kJ*** ***D) 500 kJ*** ***E) 700 kJ***

Resolución.-

1^er^ caso :



2^do^ caso :



A partir de este sistema y de los datos dados, tendremos : $\dfrac{100}{v^2} = \dfrac{E_1}{v^2} = \dfrac{E_2}{(2v)^2}$

De donde : $E_1 = 100$ y $E_2 = 400$

∴ La diferencia de energía por dos turbinas es : $500\ kJ$ RPTA. D

28.- La magnitud A es igual a la suma de dos cantidades, de las cuales una varía directamente con B y la otra inversamente con B^2. Si A es 19 cuando B es 2 ó 3; calcular A cuando B es 6.

A) 27 ***B) 23*** ***C) 33*** ***D) 29*** ***E) 31***

Resolución.-

Sean "X" é "Y" las dos cantidades de las que depende A, luego :

$$A = X + Y \qquad \text{... (1)}$$

Según condición del problema :

$$\begin{cases} X \text{ D.P. } B & \Rightarrow \quad X = Bk_1 \\ Y \text{ I.P. } B^2 & \Rightarrow \quad Y = \dfrac{k_2}{B^2} \end{cases} \qquad \text{... (*)}$$

Reemplazando (*) en (1) :

$$A = B\,k_1 + \frac{k_2}{B^2} \qquad \text{... (2)}$$

Asimismo se sabe que : A = 19, cuando B = 2 , ó , A = 19, cuando B = 3

Reemplazando estos datos en (2) : $19 = 2\,k_1 + \dfrac{k_2}{4}$ ... (I)

$19 = 3\,k_1 + \dfrac{k_2}{9}$ ... (II)

Operando así 9 · (II) - 4 · (I); tendremos : $k_1 = 5$, y , $k_2 = 36$

Reemplazando en (2), obtendremos : $A = 5\,B + \dfrac{36}{B^2}$

Finalmente, para B = 6, se obtendrá : $A = 5 \cdot 6 + \dfrac{36}{B^2}$ Þ $A = 31$ RPTA. E

29.- Si A es directamente proporcional a C^2 (cuando B = Cte) y B^2 es inversamente proporcional a A^3 (cuando C = Cte); determinar el valor A cuando C = 2 y B = 8, si cuando C = 1 y B = 27 el valor de A es la mitad del valor de D que es una magnitud inversamente proporcional a $\sqrt[3]{B}$ con constante de proporcionalidad igual a 5.

A) 15/2 ***B) 2/15*** ***C) 1/3*** ***D) 3*** ***E)2***

Resolución.-

Tenemos : * A D.P. C^2

* B^2 D.P. $\dfrac{1}{A^3}$ Þ A D.P. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{B^2}}$

La fórmula será : $\dfrac{A\sqrt[3]{B^2}}{C^2} = k$ ... (*)

Los juegos de valores son :

1ro) $A = x$, $B = 8$, $C = 2$

2do) $A = \dfrac{D}{2}$, $B = 27$, $C = 1$

Además : D I.P. $\sqrt[3]{B}$ Þ $D \cdot \sqrt[3]{B} = k$

Luego reemplazando los datos del 2do caso, tendremos : $D\,\sqrt[3]{27} = 5$ Þ $D = \dfrac{5}{3}$

Reemplazando los juegos de valores en la fórmula (*) : $\dfrac{x \cdot \sqrt[3]{8^2}}{2^2} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right) \cdot \sqrt[3]{27^2}}{1^2}$

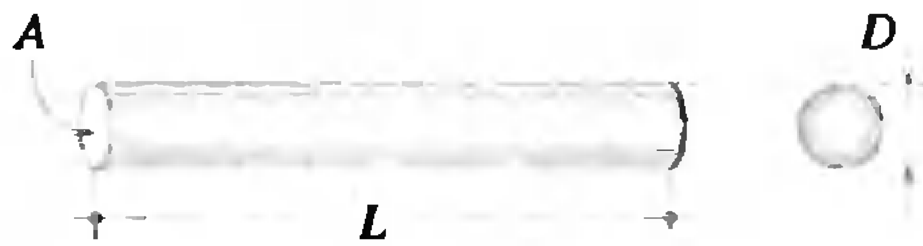
El valor de A es : $x = \dfrac{15}{2}$ RPTA. A

30.- *El valor de la resistencia eléctrica de un alambre es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su área transversal. ¿Cuál será la longitud de un alambre de 2 cm de diámetro, si se sabe que con el mismo material se obtiene un alambre de igual resistencia con 40 cm de longitud y con un diámetro de 4 cm?*

A) 8 cm B) 10 cm C) 12 cm D) 14 cm E) 16 cm

Resolución.-

Sean R, L y A el valor de la resistencia, longitud y área respectivamente del alambre. Como se recordará, el área del círculo de la sección recta viene dado así :



$A = p\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{p}{4}\,D^2$, donde D es el diámetro.

Por dato : $\left.\begin{matrix} R \text{ D.P. } L \\ R \text{ I.P. } A \end{matrix}\right\}$ Þ $\frac{RA}{L} = k$ ... (1)

Reemplazando el valor de "A" en (1), y como p y 4 son constantes, no se afectará la ecuación proporcional :

$$\backslash \qquad \frac{RD^2}{L} = k' \qquad ... (2)$$

Teniendo en cuenta los datos del problema, elaboramos el siguiente cuadro de datos :

R →	r	r
D →	2	4
L →	x	40

R	D	L
r	2	x
r	4	40

Reemplazando estos datos en (2), tendremos :

$$\frac{r \times 2^2}{x} = \frac{r \times 4^2}{40} \quad Þ \quad x = 10\ cm \qquad \text{RPTA. B}$$

31.- *El costo (C) de un artículo es igual a la suma de gastos (G) en materias primas y salarios (S). El gasto en materias primas es I.P. a la cantidad de maquinarias (Q) que se tiene y el salario es D.P. al número de horas (H) trabajadas por días. Si Q = 2 y H = 6, entonces C = 12 y si Q = 4, H = 9, entonces C = 16. ¿Cuántas horas se debe trabajar para que C = 23 si Q = 6?*

A) 13,0 B) 13,2 C) 13,4 D) 13,6 E) 13,8

Resolución.-

Por dato tenemos que : $C = G + D$ ... (I)

Asimismo se sabe que : $\left.\begin{aligned} G &= \dfrac{k}{Q} \\ S &= k_1 H \end{aligned}\right\}$ ... (II)

Reemplazando en (II) en (I) : $C = \dfrac{k}{Q} + k_1 H$ ... (a)

Reemplazando los valores numéricos conocidos :

$$12 = \frac{k}{2} + 6\,k_1 \qquad \text{... (b)}$$

$$16 = \frac{k}{4} + 9\,k_1 \qquad \text{... (c)}$$

Procediendo así : (c) · 4 - (b) · 2 ; encontramos : $k_1 = \dfrac{5}{3}$, y , $k = 4$ ... (*)

$$\left\{\begin{aligned} k_1 &= \frac{5}{3} \\ k &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad \text{... (p)}$$

Reemplazando (*) en (a) : $C = \dfrac{4}{Q} + \dfrac{5}{3}\,H$

Y para $C = 23$; y ; $Q = 6$: $23 = \dfrac{4}{6} + \dfrac{5}{3}\,H \Rightarrow \dfrac{67}{3} = \dfrac{5}{3}\,H$

$\therefore$ $H = 13{,}4$ RPTA. C

32.- Para las magnitudes M y N se tiene que en el intervalo $\langle O ; a]$ presentan proporcionalidad inversa y en el intervalo $[a ; u\rangle$ proporcionalidad directa. Sabiendo que P = (2;7), determinar las coordenadas del punto Q.

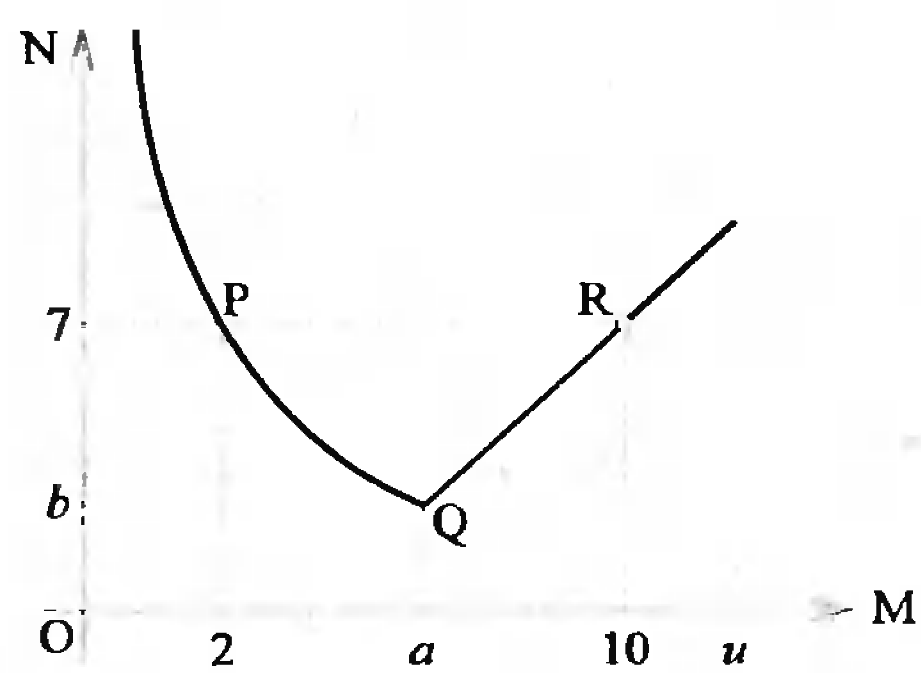
A) $(2;7\sqrt{5}/5)$

B) $(2\sqrt{5}\,;\,7\sqrt{5}/5)$

C) $(\sqrt{5}\,;\,\sqrt{5}/5)$

D) $(2\sqrt{5}\,;\,7)$

E) $(\sqrt{5}\,;\,1/7)$



<u>Resolución</u>.-

En el intervalo $\langle O ; a]$, la curva es una hipérbola, luego las magnitudes N y M verifican la siguiente relación :

$$N \cdot M = k$$

Usando las coordenadas de Q y P tendremos : $b \cdot a = 2 \cdot 7$ ... (a)

Y en el intervalo $[a\,;u\rangle$, la línea es una recta, luego las magnitudes N y M verifican la siguiente relación :

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = k$$

Si usamos las coordenadas de Q y R, se tendrá : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{10}{7}$ ... (b)

Multiplicando miembro a miembro (a) y (b), obtenemos :

$$a^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{5}$$

Sustituyendo en (a), y racionalizando :

$$2\sqrt{5}\ b = 14 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

Finalmente las coordenadas del punto Q son : $\left(2\sqrt{5}\ ;\ \dfrac{7\sqrt{5}}{5}\right)$ RPTA. B

33.- En la gráfica, hallar el valor de (x + y) :

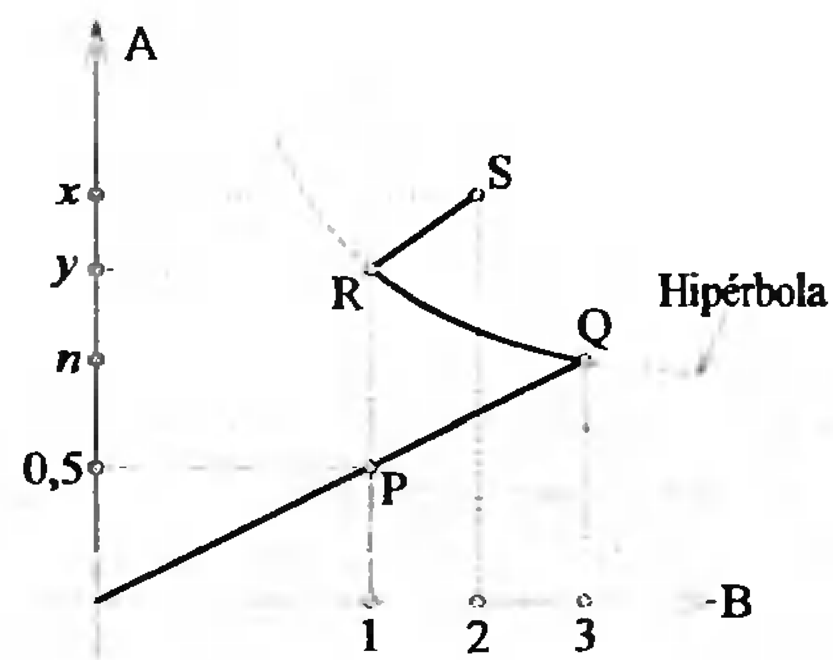
A) 8

B) 10,5

C) 7,5

D) 13,5

E) 9,5



<u>Resolución</u>.-

Es necesario tener en cuenta que cada línea recta representa una proporción directa, y la línea hiperbólica representa una proporción inversa. De este modo reconocemos que :

1ro) PQ.- Es una proporción directa, luego : $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = k \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\dfrac{0{,}5}{1}}^{P} = \overbrace{\dfrac{n}{3}}^{Q} \quad \Rightarrow \quad n = 1{,}5$ ... (1)

2do) RQ.- Es una proporción inversa, luego : $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = k \quad \Rightarrow \quad \overbrace{y \cdot 1}^{R} = \overbrace{n \cdot 1}^{Q}$ ... (*)

Reemplazando (1) en (*) : $y = (1{,}5)\,3 \quad \Rightarrow \quad y = 4{,}5$ ... (2)

3ro) RS.- Es una proporción directa, luego : $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = k \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\dfrac{x}{2}}^{S} = \overbrace{\dfrac{y}{1}}^{R}$ ... (**)

Reemplazando (2) en (**) : $\frac{x}{2} = 4,5 \Rightarrow x = 9$ ... (3)

Finalmente de (2) y (3) : $\boxed{x + y = 13,5}$ RPTA. D

34.- En la gráfica se presenta a un grupo de magnitudes proporcionales con valores a ; b y c enteros. Hallar: "c . b"

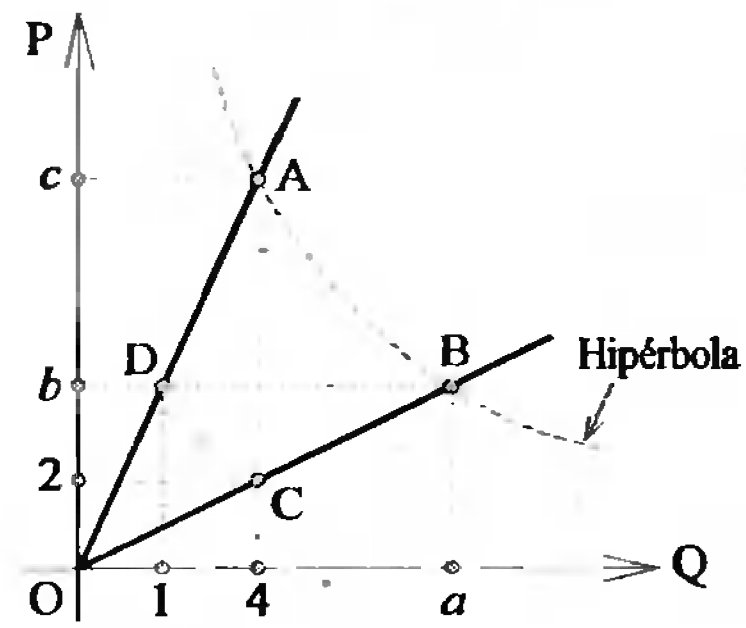
A) 4

B) 6

C) 8

D) 10

E) 24



Resolución.-

Procediendo del mismo modo que en los problemas anteriores, analizaremos por tramos :

1ro) OB.- Proporción directa, luego :

$$\frac{P}{Q} = k \Rightarrow \overbrace{\frac{a}{b}}^{B} = \overbrace{\frac{2}{4}}^{C} = k \Rightarrow \begin{cases} b = 1k \\ a = 2k \end{cases} \quad ... (1)$$

2do) OA.- Proporción directa, luego : $\frac{P}{Q} = k' \Rightarrow \overbrace{\frac{c}{4}}^{A} = \overbrace{\frac{b}{1}}^{D}$ ... (*)

De (1) en (*) : $c = 4k$ ... (2)

3ro) AB.- Proporción inversa, luego : $PQ = k'' \Rightarrow \overbrace{c \times 4}^{A} = \overbrace{b \times a}^{B}$ ... (3)

Reemplazando (1) y (2) en (3) : $4k \cdot 4 = k \cdot 2k \Rightarrow k = 8$

Finalmente en (1) y (2) : $b = 8$, y , $c = 32$

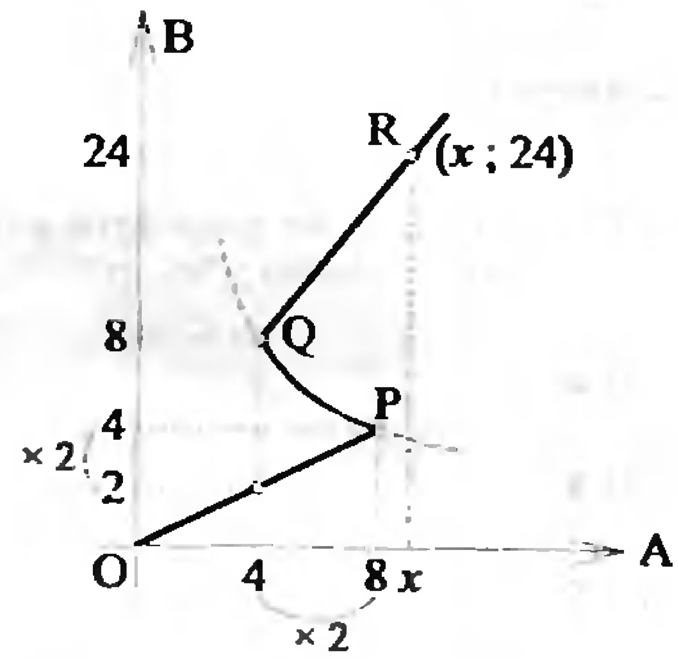
$\Rightarrow \boxed{c \cdot b = 24}$ RPTA. E

35.- Las magnitudes A y B son directamente proporcionales para todos los valores de A, excepto cuando B está entre 4 y 8 donde son inversamente proporcionales. Hallar el valor de A cuando B es 24, si cuando A es 4, B es 2 y las magnitudes son continuas.

A) 4 ***B) 8*** ***C) 12*** ***D) 16*** ***E) 24***

Resolución.-

Graficando convenientemente, vemos que :



El punto P es : (8 ; 4) y, Q es : (4 ; 8)

Luego : $\frac{\cancel{24}}{x} = \frac{8}{4}$

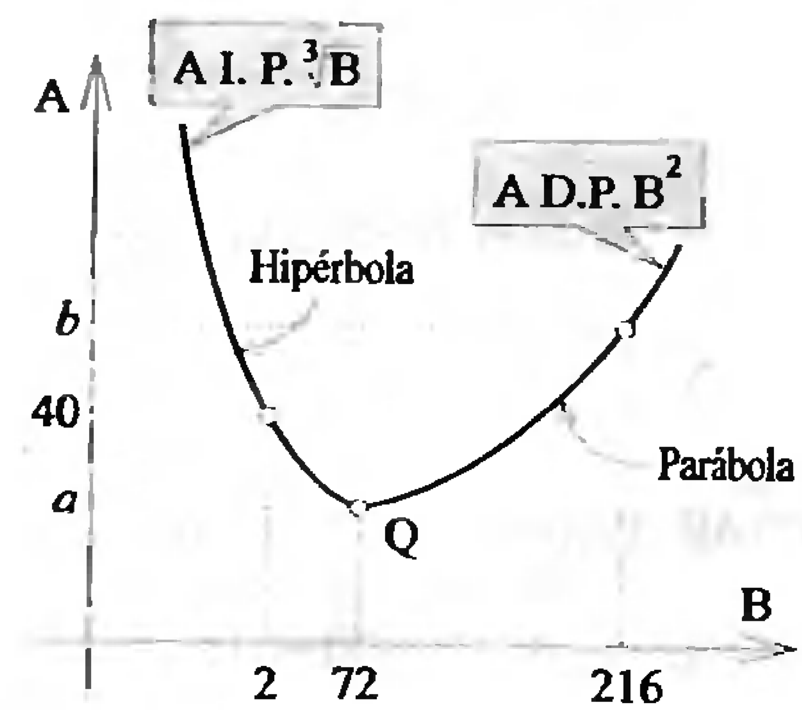
\ Cuando B es 24, A es : $x = 12$ RPTA. C

36.- ***En un fenómeno donde intervienen las magnitudes A y B se ha descubierto que cuando B ³ 72 se cumple que A es directamente proporcional a B², pero cuando B £ 72, A es inversamente proporcional a $\sqrt[3]{B}$ (B = 72 es un punto de enlace o continuidad). Si cuando B es 9, A es 40. Hallar A cuando B = 216.***

A) 20 ***B) 180*** ***C) 70*** ***D) 60*** ***E) 50***

Resolución.-

Graficando :



1°) A IP $\sqrt[3]{B}$: $a \cdot \sqrt[3]{72} = 40 \cdot \sqrt[3]{9}$

Þ $a = 20$

2°) A D.P. B² : $\frac{20}{72^2} = \frac{b}{216^2}$

\ $b = 180$ RPTA. B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Hallar $P_1 - P_2$ del gráfico:

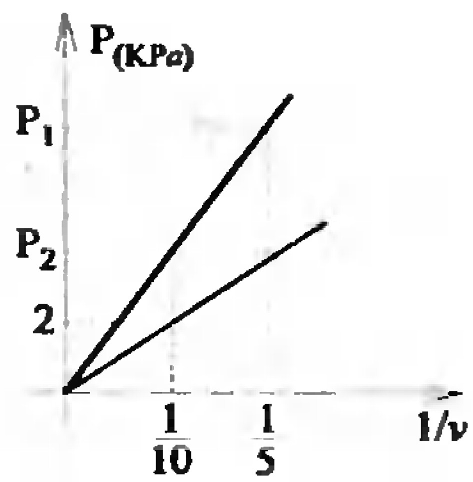
A) 1

B) 2

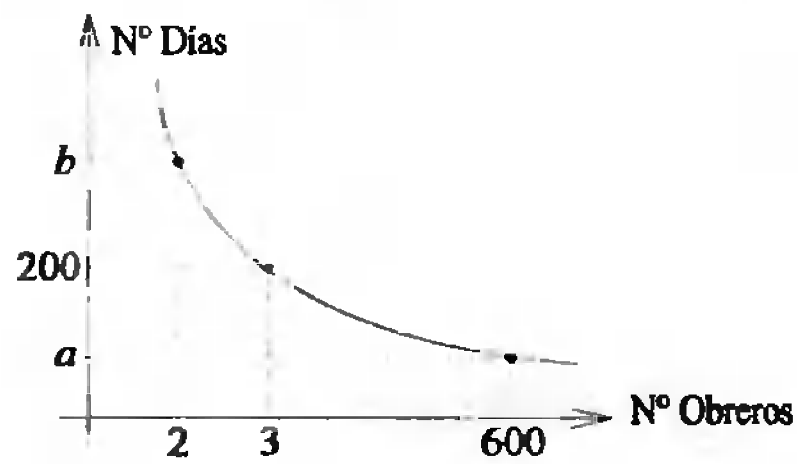
C) 3

D) 4

E) 5



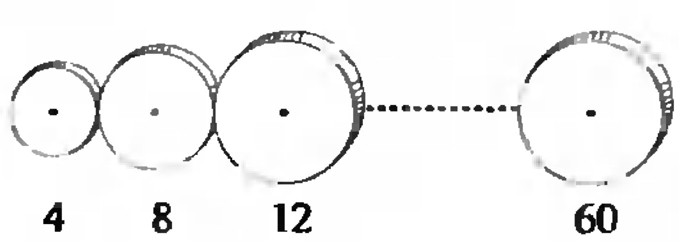
2.- Del siguiente gráfico:



¿Cuál es el valor de $(a + b)$?

A) 201 B) 300 C) 301 D) 400 E) 602

3.- La figura muestra los engranajes A_1, A_2, A_3; ......; A_n de 4; 8; 12; ....; 60 dientes respectivamente "A_1" da 32 vueltas por minuto ¿Cuántas revoluciones dará "A_n" en 15 *minutos*?



A) 18 *vueltas*

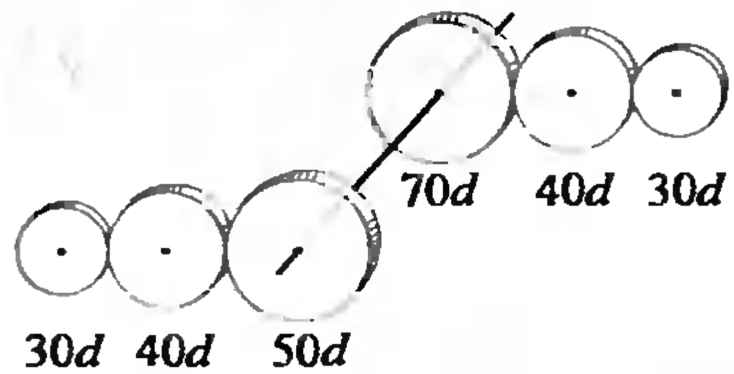
B) 24 *vueltas*

C) 45 *vueltas*

D) 30 *vueltas*

E) 32 *vueltas*

4.- Si el sistema de engranajes:



Funciona 1 minuto ¿En qué relación estará el número de vueltas de "A" a "F"?

A) 5/7 B) 4/7 C) 4/3 D) 3/5 E) 7/4

5.- Si la magnitud A es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de B. ¿Qué variación experimenta cuando el valor de B disminuye en un 75%?

A) 40% B) 50% C) 60%

D) 70% E) 75%

6.- El área total de un sólido geométrico es D.P a su apotema y el perímetro de la base. Si el área es 600 m^2 cuando el apotema es $5m$ y el perímetro de la base es $12m$. Hallar el área cuando el apotema $0{,}5m$ y el perímetro de la base $12m$?

A) 30 m^2 B) 40 m^2 C) 50 m^2

D) 70 m^2 E) 100 m^2

7.- "R" varía directamente con "S" e inversamente con "T". Cuando R = 4/3 y T 9/14; S = 3/7.
Hallar "S" cuando $R = \sqrt{48}$ y $T = \sqrt{75}$?

A) 10 B) 16 C) 20 D) 42 E) 30

8.- Se sabe que un cuerpo que cae libremente recorre una distancia que es proporcional al cuadrado de su tiempo una piedra recorre 9,80*m* en 1,4 *segundos*. Determinar la profundidad del pozo si se sabe que al soltar la piedra llega hasta el fondo en 2 *segundos*.

A) 25 m B) 20 m C) 24 m

D) 18 m E) 16 m

9.- Consideremos al amor como una longitud medible que es I.P. a la distancia que separa a una pareja, si Alberto y Rosa están distanciados 140 m uno del otro. ¿Cuántos *metros* en total deben avanzar simultáneamente, para que el amor que se sienten en ese momento sea 40% más de lo que sienten inicialmente.

A) 100 m B) 40 m C) 60 m

D) 80 m E) N.A

10.- Dos engranajes de 8 y 15 dientes están concatenados, cuando funcionan 15 minutos uno a dado 70 vueltas más que el otro. ¿Cuál es la velocidad del engranaje pequeño en R.P.M?

A) 35 R.P.M D) 37,5 R.P.M

B) 30 R.P.M E) 40 R.P.M

C) 36,5 R.P.M

11.- Si el tiempo que se demora un móvil para ir de una ciudad a otra es D.P. al # de túneles que atravieza en el camino y al # de carros que se cruza é I.P al año de experiencia del chofer y a la velocidad del carro. Qué tiempo se demora para ir de una ciudad "A" a "C" un chofer de 6 *años* de experiencia conducido a una velocidad promedio de 130 km/h Si atravesó 57 túneles y se cruzó con 91 carros. Si para ir de la ciudad "A" a "B" un chofer de 12 *años* de experiencia se demora 6 *horas* conduciendo a una velocidad de 2/3 del anterior si atravesó 42 túneles y se cruzó con 114 carros.

A) 5 *horas* B) $6,\hat{7}$ *horas* C) $7,\hat{3}$ *horas*

D) $8,\hat{6}$ *horas* E) 10 *horas*

12.- Una rueda "A"de 50 dientes engrana con otra "B" de 40 dientes, fija al eje de "B" hay una rueda "C" de 15 dientes que engrana con una rueda "D" de 25 dientes, si la rueda "A" da 120 R.P.M ¿Cuánto demora la rueda "D" en dar 9 900 revoluciones?

A) 75 B) 80 C) 85 D) 90 E) 110

13.- Un trabajador demora 5 *horas* y 320 *minutos* para construir una pared cuando ya ha construido los 3/5 de dicha pared se lesiona y su rendimiento disminuye en 1/3. ¿Cuánto tiempo tardará para hacer toda la pared?

A) 3 h 12 min D) 4 h 24 min

B) 3 h 20 min E) 6 h 24 min

C) 4 h 12 min

14.- Indicar si las propociones son verdaderas (V) o falsas (F).

- La gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales es una recta.

- Si una magnitud disminuye y la otra aumenta se dice que son magnitudes inversamente proporcionales.

- Si el cociente entre los valores correspondientes de 2 magnitudes es constante. Se dice que son directamente proporcionales?

A)FVV B)VVV C)VFV

D)FFV E)VFF

15.- Se tiene el siguiente cuadro de valores de las magnitudes A y B. Calcular n.

A	2	16	54	128	250
B	60	30	20	15	n

A) 13 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

16.- El gráfico muestra la variación de la fuerza (F) que se debe aplicar para producir un estiramiento (x) de un resorte. Determinar el trabajo realizado para estirar el resorte 16 *cm* en *joules*, si sabemos que este es directamente proporcional a la fuerza y al estiramiento con su respectiva constante 1/2.

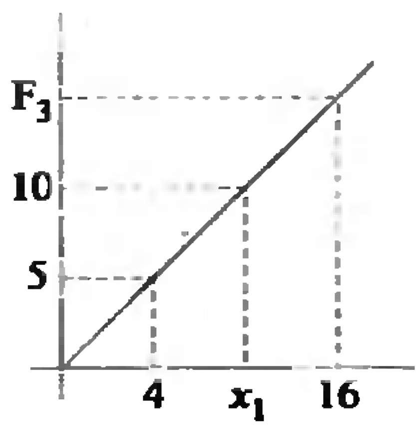
A) 16

B) 32

C) 1,6

D) 160

E) 320



17.- Se sabe que A es D.P a B^2 (cuando C es constante y C es I.P a $1/\sqrt{A}$ cuando B es constante). Cuando A = 36 y B = 2 y C = 3. Hallar A cuando B = 1/3 y C = 1/2.

A) 36 B) 6 C) 8 D) 1/36 E) 1/72

18.- Se tienen 3 ruedas dentadas conectadas entre si: A con 20 dientes, B con 13 dientes y C con 15 dientes. Si B gira con una velocidad de 60 R.P.M. ¿Cuántas veces durante 1/2 *horas* su puntos de contacto iniciales se tocan simultáneamente?

A) 30 B) 15 C) 25 D) 31 E) 40

19.- En un fenómeno físico se ha descubierto que las magnitudes A y B son inversamente proporcionales, cuando C y D son constantes que A es D.P a la $\sqrt{C}$ cuando B y D son constantes y que A es I.P al cuadrado de D cuando B y C son constantes. ¿Qué variación en porcentaje el valor de A cuando B disminuye en un 20%, C aumenta en un 44% y D aumenta en 80%?

A) 5,6% B) 2,8% C) 4,5%

D) 20,1% E) 30,5%

20.- El diámetro de un eje es D.P a la raíz cúbica de la potencia P a transmitir e I.P a la raíz cuadrada de la longitud. Un eje de diámetro de 4 *cm* y una longitud de 90 *cm* transmite un octavo de su potencia a un segundo eje de 10 *cm* de longitud ¿Cuál es el diámetro de éste eje?

A) 6 *cm* B) 7 *cm* C) 8 *cm*

D) 9 *cm* E) 10 *cm*

21.- La energia potencial de un satélite es D.P a su masa y a la masa de la tierra es I.P al radio de su órbita circular. ¿Cuál es la masa de un satélite que después de reparado aumentó en 10 *kg* sabiendo que el radio de su órbita disminuyó el 20% y que la razón entre las energías potenciales antes y después de la reparación es 0,64.

A) 30 *kg* B) 35 *kg* C) 40 *kg*

D) 45 *kg* E) 50 *kg*

22.- El sueldo de un empleado es D.P a su edad hasta 32 *años* hasta los 40 *años* es I.P a su edad en adelante su sueldo será del 5% menos por un año. Cuál será el sueldo del empleado de 42 *años* si de 26 años gana *S/*. 390.

A) 326,56 B) 346,56 C) 347,56

D) 376,56 E) 382,56

23.- Aceptando que la alegría de una fiesta juvenil es proporcional al número de muchachas e inversamente proporcional al número de madres que acompañan a sus hijos, como a la parte que del total de jóvenes representa el exceso de mucha-chos sobres muchachas. ¿Qué sucede con la alegría de una fiesta 15 muchachos y 12 jovencitas (De los cuales solo 2 no están acompañadas por sus respectivas madres). Cuando 3 venerables señoras son vencidas por el sueño e igual número de parejas sale a refrescarse al jardín?

A) baja 1/6 D) sube 5/6

B) sube 1/4 E) se duplica

C) baja 5/6

24.- Se sabe que para fabricar un cierto objeto el costo del material es proporcional al número de obreros y al cuadrado del tiempo que se necesita para manufacturarlo. Si el costo del material aumentó en 1/5, el número de obreros disminuye hasta tener 27 y el tiempo aumenta en 1/3. Calcular cuántos obreros se decidieron.

A) 8 B) 18 C) 40 D) 36 E) 13

25.- En las últimas elecciones hubieron un total 2 117 personas que querían sacar duplicado la libreta electoral se obtuvo que la cantidad de personas que atendían diariamente era I.P. al número de días que faltaban para el plazo establecido a excepción del último día que atendieron 500 personas. ¿Cuántas personas se antendió el cuarto día si el registro electoral atendió solo una semana para dar el duplicado de la libreta electoral?

A) 165 B) 198 C) 220 D) 432 E) 550

26.- El número de oscilaciones de un péndulo es D.P. a la masa del cuerpo y al cuadrado de su energía cinética e I.P. a la longitud de la cuerda. ¿Cuál es la masa de un cuerpo si al aumentarle 20 *g* y disminuir en 20% la longitud de la cuerda y la razón del número de oscilaciones de antes es a la de después como 12 es a 7 y la relación de la nueva energía es a la anterior es de 0,6?

A) 54 *g* B) 60 *g* C) 64,5 *g*
D) 67,5 *g* E) 70,5 *g*

27.- En una agencia de turismo se ha notado que el número de turistas que viajan a un determinada lugar varía en D.P. a la capacidad de cada ómnibus al número de horas que trabajó de estos a la velocidad que utilizan al número de omnibuses que se utilizan e I.P. a la distancia que deben recorrer. Se sabe que el 1er ómnibus de 20 pasajes pueda llevar 480 pasajeros en 80 *horas* de trabajo recorriendo 60 *km/h* cuando va hacia el lugar ubicado a 200 *km* de la agencia se ha edificado un hotel a 360 *km* de la agencia con capacidad de 5 000 huéspedes. ¿Cuántos omnibuses con capacidad de 30 pasajeros serán necesarios para que en 60 *horas* de trabajo usando una velocidad de 20 *km/h* pueda cubrir el 90% de dicha capacidad del hotel?

A) 50 B) 45 C) 54 D) 60 E) 15

28.- Se acordó refaccionar la pista de cierta avenida en 60 *días* empleando 20 obreros que debían trabajar 10 *h/d*. Después de 16 *días* de trabajo se les comunicó que debían terminar en 24 *días* antes y así los hicieron. ¿Cuántos obreros más se contrató considerando que la jornada diaria se incrementó en una hora y que gracias a un incentivo económico se consiguió que cada obrero aumente su rendimiento en un 25%.

A) 23 B) 17 C) 12 D) 20 E) 19

29.- Juan contrata $(2n)$ para construir su casa y a partir del segundo día despide 2 obreros cada día por suerte se terminó la obra un día jueves, porque seguía con esa actitud el viernes se quedaba sin obreros. Hallar que día de la semana empezaron a despedir los obreros sabiendo que si hubiesen trabado "n" obreros sin despido alguno, terminarían la obra en 20 *días*.

A) lunes B) martes C) miércoles
D) jueves E) viernes

30.- Si (n^2+m^2) es proporcional con (n^2-m^2) cuando p es constante; además (m^2+p^2) es proporcional con (m^2-p^2) cuando n es constante. Calcular «n» cuando $p = 4$, si se sabe que cuando $n = 8$, $p = 16$.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

17 REPARTO PROPORCIONAL

Es la distribución de una cantidad en otras varias, usando criterios que pueden ser : Directamente Proporcional (D.P.) y/o Inversamente Proporcional (I.P.)

17.1 REPARTO PROPORCIONAL SIMPLE

Este primer caso de reparto ocurre cuando se usa un sólo criterio : D.P. o I.P.

Ejercicio Ilustrativo : Descomponer un número N en tres partes A, B y C, que sean Directamente Proporcionales (D.P.) a los números i_1, i_2 , e , i_3.

Resolucion.-

Aplicando conceptos de proporcionalidad : $\frac{A}{i_1} = \frac{B}{i_2} = \frac{C}{i_3} = k$

Donde por proporciones sabemos :

$$\frac{A + B + C}{i_1 + i_2 + i_3} = k \Rightarrow \boxed{\frac{N}{i_1 + i_2 + i_3}}$$

En donde además : $A = i_1 \cdot k$

$B = i_2 \cdot k$

$C = i_3 \cdot k$

PROPIEDAD.-

"Si a los índices de un reparto se les multiplica o divide por un mismo número, el reparto no se altera".

Esta propiedad nos evitará operar con números muy grandes o muy pequeños.

Ejercicio Ilustrativo : Repartir un premio de S/. 5 890 entre A, B y C en forma D.P. a lo que aportaron para comprar un boleto de una rifa, siendo sus aportes: S/. 35 ; S/. 21 y S/.14 respectivamente.

Resolución.-

Sea N = 5 890 la cantidad a repartir, tendremos : $\frac{A}{35} = \frac{B}{21} = \frac{C}{14}$

Dividiendo por 7 los índices o consecuentes : $\frac{A}{5} = \frac{B}{3} = \frac{C}{2} = k$

Como : $k = \dfrac{\textit{Cantidad a repartir}}{\textit{Suma de indices}}$ $\Rightarrow$ $k = \dfrac{5890}{10} = 589$

A = 5 × 589 = 2 945 B = 3 × 589 = 1 767 C = 2 × 589 = 5 890

17.2 REPARTO PROPORCIONAL SIMPLE INVERSO

Este segundo caso de reparto ocurre cuando el criterio a utilizarse es inversamente proporcional I.P.

Ejercicio Ilustrativo : Repartir la suma de $ 24 800 entre las personas A, B y C en forma Inversamente Proporcional (I.P.) al número de sus inasistencias a su trabajo que son : 5 ; 3 y 2 respectivamente.

Resolución.-

Para resolver un reparto inverso, lo llevamos a reparto directo usando la inversión de los indices, es decir :

D.P. a: $\dfrac{1}{5}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{2}$

Luego para trabajar solo con enteros, homogenizamos los denominadores.

D.P. a: $\dfrac{6}{\cancel{30}}\ ;\ \dfrac{10}{\cancel{30}}\ ;\ \dfrac{15}{\cancel{30}}$

Apoyados en la Propiedad referida a los índices , trabajaremos el reparto empleando únicamente con los numeradores :

D.P. a: 6 ; 10 ; 15

$\therefore$ A = 6 × 800 = 4 800 , B = 10 × 800 = 8 000 $\wedge$ C = 15 × 800 = 12 000

17.3 REPARTO PROPORCIONAL COMPUESTO

Este tercer caso ocurre cuando se usan dos o más criterios de repartición que pueden ser D.P. y/o I.P.

Ejercicio Ilustrativo : Un empresario reparte S/. 1 290 de gratificación para sus tres empleados en forma Directamente Proporcional (D.P.) a los años de servicio y su rendimiento. Siendo los años 15; 12 y 10 y sus respectivos rendimientos: 80% , 90% y 70%, e Inversamente Proporcional (I.P.) a las tardanzas que acumularon (en *minutos*), las mismas que son 40; 30 y 35 respectivamente.

Resolución.-

Crit. \ Empl.	A	B	C	
D.P.	15	12	10	Años de servicio
D.P.	8	9	7	Rendimiento : se ha dividido por÷ 10
D.P.	1/8	1/6	1/7	Tardanzas : se ha dividido por 5 y luego invertido

⇨ D.P. : $\left(15 \cdot 8 \cdot \frac{1}{8}\right)$; $\left(12 \cdot 9 \cdot \frac{1}{6}\right)$; $\left(10 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7}\right)$

D.P. : 15 ; 18 ; 10 $\Rightarrow$ $k = \dfrac{1\,290}{43} = 30$

⇨ $A = 15 \times 30 = 450$, $B = 18 \times 30 = 540$ $\wedge$ $C = 10 \times 30 = 300$

17.4 REGLA DE COMPAÑIA

Es el reparto de las ganancias o pérdidas de una sociedad o compañía, directamente proporcional (D.P.) a los capitales impuestos por cada socio y a los tiempos que estos permanecen en dicha compañía.

Ejercicio Ilustrativo : A inicia las operaciones de una empresa con S/. 2 000, luego de tres meses se asocia B con S/. 3 000, y dos meses después ingresa C con S/. 4 000. Si al cabo de 15 meses la empresa arroja una utilidad de S/. 2 120. ¿Cuánto corresponde a cada uno ?

Resolución.-

Crit. \ Socio	A	B	C	
D.P.	2 000	3 000	4 000	(capital) ÷ 1 000
D.P.	15	12	10	(tiempo)

×

D.P. a : 30 ; 36 ; 40 , todo dividido por 2

D.P. a : 15 ; 18 ; 20

⇨ $k = \dfrac{2\,120}{53} = 40$

$\therefore$ $A = 15 \times 40 = S/.\ 600$

$B = 18 \times 40 = S/.720$

$C = 20 \times 40 = S/.\ 800$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- El producto de la suma de la mayor y menor de las partes por la parte intermedia que resulta de repartir un número directamente proporcional a 3; 5 y 7 es 45 000. Hallar dicho número.

A) 300 B) 350 C) 400 D) 450 E) 500

<u>Resolución</u>.-

Como el reparto es directo entonces las partes son proporcionales a los índices por lo cual las partes serán :

$$\left.\begin{array}{l} 1^{ro}: 3k \\ 2^{do}: 5k \\ 3^{ro}: 7k \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{Total, : } 3k \text{ ; } 5k \text{ ; } 7k = 15k \text{ .... } (\alpha)$$

Por dato : $(3k + 7k)(5k) = 45\,000 \quad \Rightarrow \quad k = 30$ ... (Constante de Reparto)

$\therefore$ El número es : $15k = 15(30) = \boxed{450}$ RPTA. D

2.- Cuatro socios forman un negocio aportando S/. 5 600 ; S/. 4 200 ; S/. 8 000 y S/. 2 200. El negocio fracasa y lo que pierden los dos primeros es S/. 80 menos que lo que pierden los dos últimos. ¿Cuánto pierde el primero?

A) S/. 1 120 B) S/. 840 C) S/. 1 600 D) S/. 440 E) S/. 1 680

<u>Resolución</u>.-

1^{ro} : La pérdida de cada socio es D.P a sus aportaciones.

$$\text{Pérdida}\left\{\begin{array}{l} \underline{\text{D.P.}} \\ \left.\begin{array}{l} 5\,600 = 28k \\ 4\,200 = 21k \end{array}\right\rangle 49k \\ \left.\begin{array}{l} 8\,000 = 40k \\ 2\,200 = 11k \end{array}\right\rangle 51k \end{array}\right.$$

* Siendo la constante de reparto : $k = \dfrac{\text{Pérdida}}{100}$

* Por dato : $49k = 51k - 80$

$k = 40$

Luego: $P_3 = 40 \times 40 \rightarrow P_3 = \boxed{S/.\ 1\,600}$ RPTA. C

3.- Dos familias alquilan una casa común. Como hay un solo medidor de energía eléctrica pagan los gastos de iluminación de acuerdo al número de lámparas que cada familia usa : 8 y 12 respectivamente. A principio de mes el medidor señala 3 769 kW-h y a fin de mes registra 4 069 kW-h; si la tarifa es de S/. 0,125 el kW-h. ¿Cuánto paga cada familia ese mes?

A) S/. 2 y S/. 3 B) S/. 3 y 4,50 C) S/. 2 y 2,5 D) S/. 15 y 2,25 E) S/. 2,3 y 1,8

Resolución.-

En primer lugar debemos reconocer que el consumo de energía está dado por la diferencia de las lecturas de principio y de final de mes :

$$4{,}069 \ - \ 3\,769 \ = \ 300 \, kW\text{-}h$$

El costo de este consumo vendrá dado así :

$$300 \, kW\text{-}h \ . \ \frac{S/.0{,}125}{kW - h} = S/. \, 37{,}5$$

A continuación procederemos al reparto directo de este costo :

Cantidad a repartir : 37,5 D.P. a 8 y 12 (dividido por 4)

D.P. a 2 y 3

$\Rightarrow \quad k = \dfrac{37{,}5}{5} = 7{,}5$

$\therefore \quad 1^{ra}$ familia $= 2 \times 7{,}5 = 15$

2^{da} familia $= 3 \times 7{,}5 = 22{,}5$

$\therefore$ Las cantidades a pagar serán : $S/. \, 15$ y $S/. \, 22{,}5$ RPTA. D

4.- Un padre reparte S/. 8,91 entre sus tres hijos en forma D.P. a los promedios de notas que obtuvieron y que fueron 15,3 ; 14,4 y 12,6 e I.P. a las faltas que tuvieron durante el año que fueron 3; 2 y 3 respectivamente. ¿Cuál es la diferencia de lo que recibieron el segundo y el tercero?

A) S/. 1,62 ***B) S/. 17*** ***C) S/. 16,98*** ***D) S/. 15*** ***E) S/. 18***

Resolución.-

Efectuando el reparto

	D.P.	I.P.	D.P.		D.P. Cancelando el factor 0,3		
	15,3	3	1/3		$\frac{15{,}3}{3} = 5{,}1$	$\rightarrow$	17
S/. 8,91 $\rightarrow$	14,4	2	1/2	$\Rightarrow$	$\frac{14{,}4}{2} = 7{,}2$	$\rightarrow$	24
	12,6	3	1/3		$\frac{12{,}6}{3} = 4{,}2$	$\rightarrow$	14

$$k_r = \frac{8{,}91}{55} = \frac{81}{500}$$

$\therefore$ Dif. 2^{do} y 3^{ro} : $(24 - 14) \, \dfrac{81}{500} = \boxed{1{,}62}$ RPTA. A

5.- Un señor inicia una empresa con un capital de S/. 60 000, para conseguir más capital se asocia con tres personas en distintas fechas que aportaron S/. 48 000 ; S/. 75 000 y S/. 50 000. Después de 1 año y 8 meses se separan y cada uno recibe la misma parte de las utilidades. ¿Cuántos meses estuvo en la empresa el socio que aportó mayor capital?

A) 20 meses B) 16 meses C) 15 meses D) 14 meses E) 4 meses

Resolución.-

Efectuando el reparto :

$$\begin{cases} 60\times 20 \\ 48\times a \\ 75\times b & \text{El de mayor capital} \\ 50\times c \end{cases}$$

Como reciben la misma utilidad, entonces todos los índices son iguales. Por ello :

$$75\times b = 60\times 20$$

$\therefore$ El tiempo es : $b = 16\ meses$ RPTA. B

6.- Dividir 3 600 en tres partes de modo que la segunda sea triple de la primera y la tercera la mitad de la suma de las dos primeras partes. Dar como respuesta las dos mayores partes.

A) 1 600 B) 1 800 C) 2 000 D) 2 200 E) 2 400

Resolución.-

Sean las partes : a, b y c

Donde : $a + b + c = 3\,600$ .... (*)

Por dato tenemos : $b = 3a$ .... (α)

Y además : $c = \dfrac{a+b}{2}$ .... (**)

Reemplazando (α) en (**) : $c = 2a$ .... (β)

Reemplazando (α) y (β) en (*) : $a + 3a + 2a = 3\,600$ $\Rightarrow$ $a = 600$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 1\,800 \\ c = 1\,200 \end{cases}$$ RPTA. B

7.- Dos ganaderos arriendan un pastizal por S/. 6 546. El primero introduce 150 reses durante 180 días, dejándolas en él 10 horas diarias. El segundo introduce 80 reses durante 260 días dejándolas 8 horas diarias. ¿Qué suma debe pagar el segundo ganadero?

A) S/. 2 490 B) S/. 2 492 C) S/. 2 494 D) S/. 2 496 E) S/. 2 498

Resolución.-

Resulta evidente que el importe del pago deberá ser D.P. al número de reses y D.P. al número de *días* y también al número de *horas* diarias.

	D.P.	D.P.	D.P.		D.P.
S/. 6 546 →	150	180	10	⇒	$150 \times 180 \times 10 = 675$
	80	260	8		$\underbrace{80 \times 260 \times 8}_{\text{cancelando el factor 400}} = 416$

$k = \dfrac{6\,546}{675+416} = 6 \quad \Rightarrow \quad 2^{do} : 416 \times 6 =$ S/. 2 496 RPTA. D

8.- Descomponer 70 en tres partes cuyos cuadrados sean directamente proporcionales a 0,2; 0,5; 0,4 e inversamente proporcional a 3; 1,2 y 8/3. Dar la mayor parte.

A) 35 B) 36 C) 37 D) 38 E) 39

Resolución.-

Expresando cada decimal por una fracción :

	A^2	B^2	C^2	
D.P.	2	5	4	× 10
D.P.	1/3	5/6	3/8	

D.P. a : $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{25}{6}$; $\dfrac{3}{2}$ Homogenizando y simplificando : Común Denominador = 6

D.P. a : 4 ; 25 y 9 (Sacando raíz cuadrada)

$\therefore \quad \dfrac{A}{2} = \dfrac{B}{5} = \dfrac{C}{3} \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{70}{10} = 7$

Mayor parte : B = 35 RPTA. A

9.- Un muchacho que vive en el último piso de una casa, en una de sus salidas baja los escalones de 2 en 2 y lo sube de 3 en 3. Si en total dió 100 pasos. ¿Cuántos peldaños tiene la escalera?

A) 90 B) 120 C) 150 D) 180 E) 210

Resolución.-

1^{ro}) El número de pasos es inversamente proporcional al número de peldaños tanto en la subida como en la bajada.

2^{ro}) Plantearemos el reparto inverso para calcular el número de pasos que da al bajar o al subir.

3^{ro}) 100 $\rightarrow$ I.P. D.P. M.C.M (2,3)

	I.P.	D.P.		
bajada :	2	1/2 .	6	= 3
subida :	3	1/3 .	6	= 2

Constante de reparto : $k = \frac{100}{3+2} = 20$

Luego el número de pasos que da en la bajada : $3 \cdot 20 = 60$

Pero en cada paso avanza dos peldaños.

Entonces número de peldaños : $60 \cdot 2 =$ **120** RPTA. B

10.- Las edades de 7 hermanos son números consecutivos. Si se reparte una suma de soles proporcionalmente a sus edades, el menor recibiría la mitad del mayor y el tercero S/. 80 000. ¿Cuánto recibirá el quinto?

A) S/. 64 000 B) S/. 72 000 C) S/. 80 000 D) S/. 100 000 E) S/. 96 000

Resolución.-

1^{ro} : Sean las edades de mayor a menor :

$$n \;;\; n-1 \;;\; n-2 \;;\; n-3 \;;\; n-4 \;;\; n-5 \;;\; n-6$$

2^{do} : Asimismo sea N la cantidad a repartir.

3^{ro} : N $\rightarrow$ D.P.

n
$n - 1$
$n - 2$
$n - 3$
$n - 4$
$n - 5$
$n - 6$
$7n - 21$

(*) Constante de reparto : $k = \frac{N}{7n-21}$

(*) Lo del menor : $(n - 6)k$

(*) Lo del mayor : nk

(*) Por dato : $(n - 6)k = \frac{1}{2}\, nk$

$\Rightarrow \quad n = 12$

(*) Lo del tercero : $(n - 2)k = 80\,000$

$\therefore \quad k = 8\,000$

(*) Lo del quinto : $(n - 4) \cdot k = (12 - 4) \cdot 8\,000 =$ **64 000** RPTA. A

11.- Una herencia se reparte en forma Inversamente Proporcional a las edades de 3 hermanos. Se sabe que los montos hubiesen sido de S/. 49 500 ; S/. 33 000 y S/. 16 500 si el reparto hubiera sido Directamente Proporcional a las edades. ¿Cuánto tendrán el 2^{do} y el 3^{ro} juntos?

A) S/. 90 000 B) S/. 81 000 C) S/. 120 000 D) S/. 63 000 E) S/. 45 000

Resolución.-

Sabemos que el reparto fue : $a.k = 49\,500$; $bk = 33\,000$; $ck = 16\,500$

$\therefore \quad k = \text{MCD}(49\,500; 33\,000; 16\,500) = 16\,500$

$\therefore \quad a = 3$, $b = 2$ y $c = 1$

Para que el reparto inverso a realizar sea D.P. invertimos a : a, b y c :

D.P. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ $= 1$; común denominador $= 6$

⇨ D.P. : 2 ; 3 y 6 $\quad \therefore \quad k = \dfrac{49\,500 + 33\,000 + 16\,500}{2 + 3 + 6} = \dfrac{99\,000}{11} = 9\,000$

1^{ro} y 2^{do} $= 9(9\,000) =$ **81 000** RPTA. B

12.- Se repartió cierta cantidad entre tres individuos A, B y C. Al inicio, A recibió 5/9 del total, B recibió la quinta parte de A y el resto se dividió entre los tres en partes iguales. Después del reparto se asociaron para explotar un negocio y en 2 años obtuvieron un beneficio de S/. 540 000. ¿Cuál es el beneficio de C?

A) S/. 60 000 B) S/. 120 000 C) S/. 360 000 D) S/. 80 000 E) S/. 30 000

Resolución.-

Dado que el reparto se hace por novenos, o, múltiplos de 3, asumiremos que la cantidad a repartir es : $9k$. De este modo se tendrá que al inicio los individuos recibieron :

$$A : \frac{5}{9}(9k) = 5k$$

$$B : \frac{1}{5}(5k) = k$$

El resto sería : $9k - (6k) = 3k$

A continuación $3k$, se divide en partes iguales, por lo cual cada uno recibe :

Finalmente : $A = 5k + k = 6k$; $B = k + k = 2k$, y , $C = 1k$

$\Rightarrow \quad 6k + 2k + k = 540\,000 \quad \Rightarrow \quad k = 60\,000$

$\therefore$ **C = S/. 60 000** RPTA. A

13.- Un padre reparte entre sus hijos una cantidad de dinero D.P. a sus edades que son 5 ; 25 y 40 años. El 2^{do} hijo piensa que le hubiera convenido que la repartición se hiciera 15 años antes. Si esto hubiese ocurrido, ¿Qué fracción del dinero hubiera recibido de más o de menos?

A) 1/14 más B) 1/14 menos C) 1/7 más D) 1/7 menos E) 1/8 más

Resolución.-

Sea D el dinero repartido ; luego :

D.P. a : 5 ; 25 y 40 $(\div 5)$ ⇨ D.P. a : 1 ; 5 y 8 ⇨ 2^{do} recibirá 5D/14

Hace 15 años :

1^{ro}	2^{do}	3^{ro}				
0	10	25	$(\div 5)$	⇨ D.P. a : 2 y 5	⇨	2^{do} recibirá 2D/7

Homogenizando : $\frac{5D}{14}$ y $\frac{4D}{14}$

Finalmente recibiría : 1/14 menos RPTA B

14.- Un padre dividió su fortuna entre sus tres hijos proporcionalmente a los números 7 ; 5 y 3 pero no pareciéndoles justo el reparto lo hace proporcionalmente a los números 9; 8 y 7; por tal motivo uno de los hijos tiene así S/. 6 600 más que antes. ¿A cuánto asciende la fortuna?

A) S/. 88 000 B) S/. 66 000 C) S/. 65 000 D) S/. 72 000 E) S/. 77 000

Resolución.-

La cantidad a repartir es : $(7+5+3)\,k = 15\,k$, ó , $(9+8+7)\,q = 24\,q$

1^{er} reparto : $1^{ro} = 7\,k$, $2^{do} = 5\,k$, $3^{ro} = 3\,k$

2^{do} reparto : $1^{ro} = 9\,q$, $2^{do} = 8\,q$, $3^{ro} = 7\,q$

Pero dado que : $15\,k = 24\,q \Rightarrow 5\,k = 8\,q \Rightarrow k = \frac{8}{5}\,q$ ... (*)

Asi, el que recibe más es el tercero : $7\,q - 3\,k = 6\,600$ ... (**)

Reemplazando (*) en (**) : $7\,q - 3\left(\frac{8}{5}q\right) = 6\,600$

$$7q - \frac{24}{5}\,q = 6\,600$$

$$\cancel{11}\,q = \overset{600}{\cancel{6\,600}} \times 5$$

$$\Rightarrow \quad q = 3\,000$$

$\therefore$ Cantidad = 24 (3 000) = S/. 72 000 RPTA. D

15.- Dos hermanos se reparten una herencia de la siguiente manera, la quinta parte D.P. a 2 y 3, los 2/5 del resto I.P. a 5 y 3 y el resto D.P. a 5 y 7. Si al 1ro de los hermanos le tocó en total S/. 14 000, hallar la herencia.

A) 27 500 B) 5 47 000 C) 53 000 D) 42 500 E) 35 000

Resolución.-

Sea *H* la herencia a repartir, y dado que ella debe repartirse en quintos, elegiremos un valor apropiado : $H = 100\,k$. A continuación presentaremos la resolución del reparto en un diagrama tipo árbol, veamos :

$$
H = 100k \left\{
\begin{array}{l}
\frac{1}{5}(100k) = 20k \rightarrow \text{D.P.}\begin{cases}2\\3\end{cases} \Rightarrow k_1 = \frac{20k}{5} \rightarrow \begin{cases}1^{ro}: 2\left(\frac{20k}{5}\right)\\ \end{cases}\\[2ex]
\frac{2}{5}(80k) = 32k \rightarrow \text{D.P.}\begin{cases}5\\3\end{cases} \Rightarrow \text{D.P.}\begin{cases}\frac{1}{5}\cdot 15 = 3\\ \frac{1}{3}\cdot 15 = 5\end{cases} \Rightarrow k_1 = \frac{32k}{8}\\
\qquad \rightarrow \begin{cases}1^{ro}: 3\left(\frac{32k}{8}\right)\\ \end{cases}\\[2ex]
100k - (52k) = 48k \rightarrow \text{D.P.}\begin{cases}5\\7\end{cases} \Rightarrow k_1 = \frac{48k}{12} \rightarrow \begin{cases}1^{ro}: 5\left(\frac{48k}{12}\right)\\ \end{cases}
\end{array}
\right.
$$

De este diagrama, podemos reconocer que el 1^{ro} recibió en total :

$$2\left(\frac{20k}{5}\right) + 3\left(\frac{32k}{8}\right) + 5\left(\frac{48k}{12}\right) = 14\,000 \quad \Rightarrow \quad k = 350$$

$$\therefore \quad H = 100\,(350) \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = 35\,000} \qquad \text{RPTA. E}$$

16.- Se reparte una herencia en forma proporcional a las edades de tres hermanos el mayor de los hermanos decide repartir el 50% de su parte entre los otros dos directamente proporcional a 1 y 2 luego de realizado el reparto se observa que los tres tienen una misma suma. ¿Cuál es la edad del mayor, si la suma de las edades es 63 años?

A) 21 ***B) 48*** ***C) 36*** ***D) 42*** ***E) 46***

Resolución.-

1^{ro}) Sea lo que inicialmente al mayor le tocó : N.

2^{do}) El mayor reparte 50% de su parte a sus otros dos hermanos.

3^{ro}) El mayor se queda : 50 % N = $\frac{N}{2}$

4^{to}) Luego el resto se reparte proporcionalmente a 1 y 2 :

D.P.

$$\frac{N}{2}\begin{cases}1 \rightarrow 1\left(\frac{N}{6}\right)\\[1ex] 2 \rightarrow 2\left(\frac{N}{6}\right)\end{cases}$$

Como los 3 tienen partes iguales entonces inicialmente c/u. tenía :

$$\frac{N}{2} - \frac{N}{6} = \frac{N}{3} \quad , \text{ y } , \quad \frac{N}{2} - \frac{2N}{6} = \frac{N}{6}$$

Las edades son proporcionales a sus partes iniciales N ; $\frac{N}{3}$ y $\frac{N}{6}$

$$\underline{\text{D.P.}}$$

$$63 \begin{cases} N \times 6 = 6 \\ \frac{N}{3} \times 6 = 2 \\ \frac{N}{6} \times 6 = 1 \end{cases} \qquad \therefore \qquad k = \frac{63}{6+2+1} = \frac{63}{9}$$

$\therefore$ La edad mayor es : $6 \times \frac{63}{9} = 42$ RPTA. D

17.- Si se reparte S/. 270 000 proporcionalmente a las edades de "A", "B" y C a "A" le toca la quinta parte de "B" y a "C" 4/5 de "B". Sabiendo que "B" tiene 10 años. Hallar cuánto le tocaría a B si el reparto se hace 4 años más tarde de I.P. a las edades.

A) S/. 20 000 B) S/. 30 000 C) S/. 60 000 D) S/. 120 000 E) S/. 180 000

<u>Resolución</u>.-

Sean las edades : $\begin{cases} A : a \\ B : 10(\text{dato}) \\ C : c \end{cases}$

1^er^ reparto :

$$2\,700 \rightarrow \underline{\text{D.P.}}$$

$$\begin{array}{lcl} A : a & \rightarrow & a\,k \\ B : 10 & \rightarrow & 10\,k \\ C : c & \rightarrow & c\,k \end{array}$$

Donde : $k = \dfrac{270\,000}{a + 10 + c}$

Se cumple :

(*) $ak = \frac{1}{5} \times 10k \quad \Rightarrow \quad a = 2$

(*) $ck = \frac{4}{5} \times 10k \quad \Rightarrow \quad c = 8$

2^{do} reparto : (4 años más tarde)

A , B y C tienen 6 , 14 y 12 respectivamente

$$\begin{array}{lcccl} & \underline{\text{I.P.}} & \underline{\text{D.P.}} & \text{M.C.M. }(6, 14, 12) & \\ \text{S/. } 270\ 000 \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} 6 \\ 14 \\ 12 \end{array} & \begin{array}{c} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{14} \\ \frac{1}{12} \end{array} & \begin{array}{c} \times\ 84 \\ \times\ 84 \\ \times\ 84 \end{array} & \begin{array}{l} = 14 \\ = \ \ 6 \\ = \ \ \underline{7} \\ \quad\ \ 27 \end{array} \end{array}$$

$$k_r = \frac{270\ 000}{27} = 10\ 000$$

$\therefore$ A "B" le tocó : 60 000 RPTA. C

18.- Tres personas aportando c/u. S/. 20 000 ; S/. 30 000 y S/.15 000 han formado un negocio sobre casacas donde el costo de c/u. es S/. 100 y la venta de las mismas es S/. 150 c/u. Si al cabo de un año se obtuvo una ganancia de S/. 42 000 y 100 casacas. Determinar cuánto de dinero se llevó A si prefirió llevarse las casacas?

A) S/. 14 000 B) S/. 6 000 C) S/. 2 000 D) S/. 8 000 E) S/. 9 000

Resolución.-

La ganancia total es : 42 000 + 100 (100) = S/. 52 000

(*) La ganancia se reparte proporcionalmente a los aportes.

Luego :

$$\text{S/. } 52\ 000 \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{D.P.}} \\ 20\ 000 = 4 \\ 30\ 000 = 6 \\ 15\ 000 = \underline{3} \\ \qquad\qquad\ 13 \end{array} \right.$$

$$kr = \frac{52\ 000}{13} = 4\ 000$$

A se llevó 4 (4 000) = 16 000

Como se llevó las 100 casacas que equivalen a S/. 10 000

$\therefore$ El efectivo que se llevó es : S/. 6 000 RPTA. B

19.- Dos socios A y B forman un negocio por un año: al iniciar el negocio A y B aportan S/. 19 236 y S/. 13 930 respectivamente. Al final del quinto mes B predice que la utilidad al finalizar el negocio será muy apreciable razón por lo que decide aportar más. ¿Cuánto más tiene que aportar B a partir del sexto mes para obtener la misma utilidad de A?

A) S/. 9 108 B) S/. 10 140 C) S/. 9 084 D) S/. 9 070 E) S/. 9 096

Resolución.-

Sea C el capital extra de B : $\begin{cases} A)\ 19\,236 \times 12 \\ B)\ 13\,930 \times 12 + C.7 \end{cases}$

Como las ganancias de A y B son iguales, entonces los aportes son los mismos.

$$7 \times C + 13\,930 \times 12 = 19\,236 \times 12$$

$$7 \times C = 5\,306 \times 12$$

$\therefore$ $\boxed{C = S/.\ 9\,096}$ RPTA. E

20.- *Tres personas al formar una compañía aportan S/. 180 000 ; S/. 200 000 y S/. 240 000 permaneciendo 9 meses y un año los que aportaron estas dos últimas sumas respectivamente. ¿Qué tiempo permaneció la otra persona si la utilidad producida en la empresa fue S/. 3 640 000 y la diferencia de lo recibido por la primera y la última persona fue S/. 1 820 000 (dar como respuesta la menor solución).*

A) 3 meses ***B) 5 meses*** ***C) 2 meses*** ***D) 3 años*** ***E) 4 años***

Resolución.-

$$S/.\ 3\,640\,000 \begin{cases} 1)\ 180\,000 \times t \rightarrow tk \\ 2)\ 200\,000 \times 9 \rightarrow 10k \\ 3)\ 240\,000 \times 16 \rightarrow 16k \end{cases} \qquad \begin{cases} (*)\ tk + 10k + 16k = 3\,640\,000 \\ \qquad 26k + tk = 3\,640\,000 \quad .... (\alpha) \\ (*) \qquad 16k - tk = 1\,820\,000 \quad .... (\beta) \end{cases}$$

Donde : $k = \dfrac{3\,640\,000}{t + 10 + 16}$

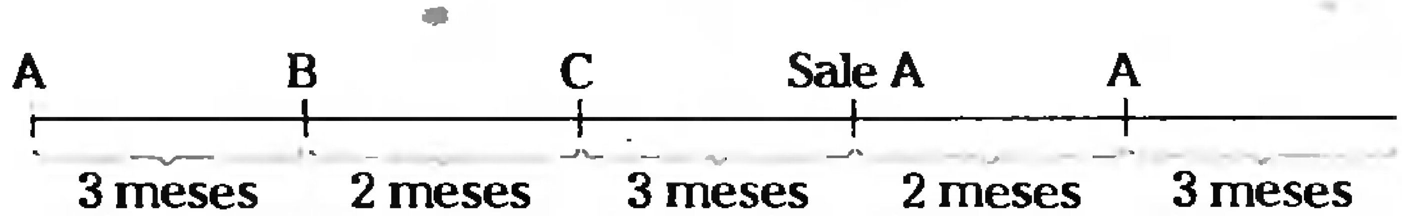
Luego : $\dfrac{3\,640\,000}{1\,820\,000} = \dfrac{26 + t}{16 - t} = 2$

$\therefore$ $\boxed{t = 2\ meses}$ RPTA. C

21.- *Una persona A forma una compañía con S/. 7 500, luego de tres meses una persona B ingresa a la compañía con S/. 10 000, luego de dos meses otra persona C ingresa a la compañía aportando S/.10 000; luego de tres meses de haber ingresado C se retira A quien reingresa a los dos meses aportando ahora S/.12 500. Si a los 13 meses de formada la compañía había producido S/. 99 900 de utilidad. ¿Qué utilidad correspondió a la persona A?*

A) S/. 35 100 ***B) S/. 37 500*** ***C) S/. 36 000*** ***D) S/. 40 000*** ***E) S/. 40 500***

Resolución.-



$$S/.\ 99\ 900 \left\{ \begin{array}{lrcrcr} & & & & & \underline{\text{D.P.}} \\ A: & 7\ 500 \times 8 + 12\ 500 \times 3 & = & 97\ 500 & = & 39 \\ B: & 10\ 000 \times 10 & = & 100\ 000 & = & 40 \\ C: & 10\ 000 \times 8 & = & 80\ 000 & = & \underline{32} \\ & & & & & 111 \end{array} \right.$$

$\therefore$ La utilidad de A es : $39 \times \dfrac{99\ 900}{111} = \boxed{35\ 100}$ RPTA. A

22.- Juan inició un negocio, 6 meses después se asoció con Pedro quien aportó 3/5 del capital de Juan; 2 meses más tarde se les unió José que aportó los 7/8 de lo que Juan y Pedro habían puesto en el negocio. Si después de 1 año de empezado el negocio se obtuvo una ganancia de S/. 689 000.
¿Cuál es la utilidad que le correspondería a Pedro?

A) S/. 33 000 B) S/. 117 000 C) S/. 32 500 D) S/. 30 000 E) S/. 34 500

<u>Resolución</u>.-

Sea "5c" el capital aportado por Juan , se tendrán los siguientes datos :

Juan $(5c)$ Pedro $(3c)$ José : $\dfrac{7}{8}(5c + 3c) = 7c$

Repartiendo la ganancia :

$$S/.\ 689\ 000 \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{D.P.}} \\ 5c \times 12 = 30 \\ 3c \times 6 = 9 \\ 7c \times 4 = \underline{14} \\ \qquad\quad 53 \end{array} \right.$$

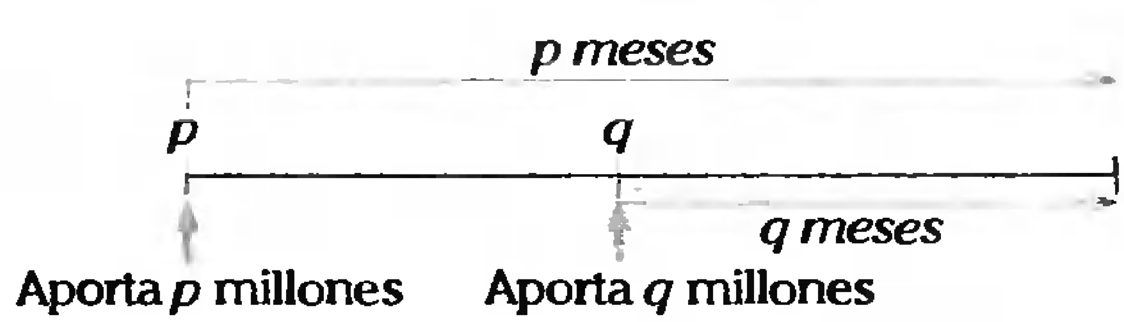
$\therefore$ La utilidad de Pedro es : $9 \times \dfrac{689\ 000}{53} = \boxed{S/.\ 117\ 000}$ RPTA. B

23.- Dos socios A y B inician un negocio para p meses aportando p millones c/u ; pero q meses antes de finalizar, A aportó q millones más, y B retiró q millones. Si la utilidad total es 16 veces la diferencia de las utilidades que reciben los socios; hallar P/q.

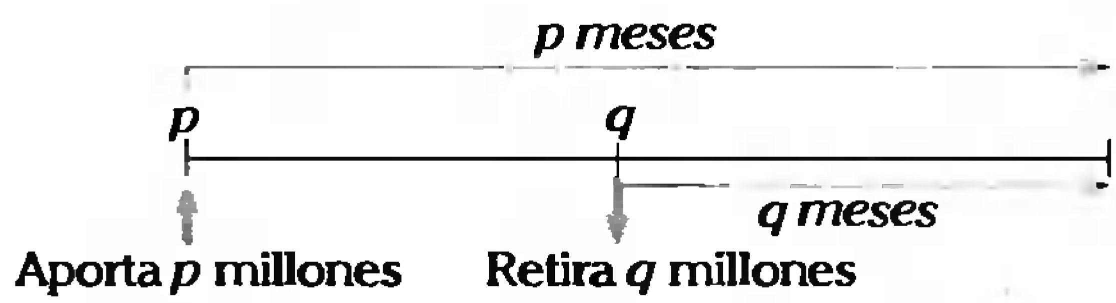
A) 1/4 B) 3 C) 2 D) 4 E) 1/5

<u>Resolución</u>.-

Para A :



Para B :



Utilidad (G) : $\begin{cases} A: \quad p \,.\, p + q \,.\, q = p^2 + q^2 \\ B: p(p-q)+(p-q)q = p^2+q^2 \end{cases}$

$$k = \frac{G}{2p^2} \quad \Rightarrow \quad G = k \,.\, 2p^2 \quad ...(\alpha)$$

Además del dato : $\dfrac{2p^2k}{(p^2+q^2)k-(p^2+q^2)k^2} = \dfrac{16}{1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{p^2}{q^2} = \dfrac{16}{1}$

$$\therefore \quad \frac{p}{q} = \boxed{\frac{4}{1}} \qquad \text{RPTA. D}$$

24.- *El gerente de una fábrica reparte S/. 121 000 entre sus tres empleados, tomando en cuenta sus años de servicio y las inasistencias en ese lapso. Si los empleados tuvieron 10; 5 y 3 años de servicio 9 ; 4 y 3 inasistencias respectivamente; hallar la mayor diferencia de soles recibidos entre dos empleados si se sabe que dichas inasistencias perjudican a cada uno.*

A) 9 000 B) 18 000 C) 12 000 D) 15 000 E) 20 000

Resolución.-

Según el enunciado :

	D.P.	I.P.	⇒ D.P.
121 000	10	9	$\frac{10}{9} \times 36 = 40$
	5	4	$\frac{5}{4} \times 36 = 45$
	3	3	$\frac{3}{3} \times 36 = 36$
			121

$$k = \frac{121\,000}{121} = 1\,000$$

Observamos que la mayor diferencia se establece entre las partes que tienen como índice a 45 y 36.

$\therefore$ Mayor diferencia es : $(45 - 36) \times 1\,000 = \boxed{9\,000}$ RPTA. A

25.- *Un maestro de escuela quiere distribuir S/. 46 920 entre sus cuatro alumnos en razón directa al número de asistencias a la escuela. Sobre 200 días de clase, el primero tuvo 2 ausencias, el segundo 4, el tercero 5 y el cuarto 7. ¿Cuánto recibirá cada uno? Dar como respuesta la parte mayor.*

A) S/. 10 200 B) S/. 10 860 C) S/. 11 580 D) S/. 11 920 E) S/. 12 460

Resolución.-

1) El número de *días* que han asistido los alumnos son :

1ro :	198 *días*	3ro :	195 *días*
2do :	196 *días*	4to :	193 *días*

2) S/. 46 920 $\rightarrow$ D.P.

198

196

195

193

3) Recordando que la constante de reparto (k) es la cantidad a repartir dividida por la suma de los índices, tendremos :

$$\therefore \qquad k = \frac{46\ 920}{198+196+195+193} \quad \Rightarrow \quad k = 60$$

4) A continuación cada parte se obtiene multiplicando el índice respectivo por la constante del reparto; entonces :

1ro: $198 \times 60 =$ S/. 11 880

2do: $196 \times 60 =$ S/. 11 760

3ro: $195 \times 60 =$ S/. 11 700

4to: $193 \times 60 =$ S/. 11 580 RPTA. C

26.- Benito va a repartir su propina que asciende a S/. 11 000 entre sus tres sobrinos, en forma I.P. a $12^{-1/2}$; $48^{-1/2}$; y $75^{-1/2}$. Se desea saber cuanto le toca a cada uno. Dar como respuesta la mayor de las partes.

A) S/. 2 000 B) S/. 3 000 C) S/. 4 000 D) S/. 5 000 E) S/. 6 000

Resolución.-

Recordando que cuando los índices son I.P. debemos invertir los índices para convertirlos a la forma D.P. , tendremos :

S/. 11 00 $\rightarrow$

I.P.	D.P.		
$12^{1/2}$	$12^{1/2} = 2\sqrt{3}$	$\rightarrow$	2
$48^{-1/2}$	$48^{1/2} = 4\sqrt{3}$	$\rightarrow$	4
$75^{1/2}$	$75^{1/2} = 5\sqrt{3}$	$\rightarrow$	5

Utilizando la propiedad de simplificación de los índices, tendremos :

$$k = \frac{11\ 000}{2+4+5} = 1\ 000$$

Luego : Parte Mayor : $5 \times 1\ 000 =$ S/. 5 000 RPTA. D

27.- Un padre tiene tres hijos de 6, 7 y 9 años de edad que cursan el 2°, 3°, y 5° año de educación Primaria. Decide repartir una cierta cantidad de caramelos entre sus tres hijos en forma proporcional al grado de estudios e I.P. a su edad. Si el menor de los hermanos recibe 98 caramelos menos que el mayor. ¿Cuántos caramelos repartió?

A) 541 B) 551 C) 561 D) 571 E) 581

Resolución.-

Sea N el número de caramelos :

		(D.P.)	(I.P.)				
N	→	GRADO	EDAD	D.P.	⇒	D.P.	M.C.M. (7; 9; 3)
		2	6	$\frac{1}{6}$		$2.\frac{1}{6}$	63 = 21
		3	7	$\frac{1}{7}$		$3.\frac{1}{7}$	63 = 27
		5	9	$\frac{1}{9}$		$5.\frac{1}{9}$	63 = 35

Observación : Recuerde que si a los índices se les multiplica por un mismo número; las cantidades repartidas no varían.

$$k = \frac{N}{21+27+35} = \frac{N}{83} \Rightarrow N = 83k \quad ..... (\alpha)$$

La parte del mayor : $35k$

La parte del menor : $21k$

Por dato : $21k = 35k - 98 \Rightarrow k = 7$ ..... (β)

Finalmente de (β) en (α) : $N = 83 . 7 =$ 581 RPTA. E

28.- Se han comprado 80 metros cúbicos de madera de dos especies A y B. El volumen de la segunda pesa 8 veces más que la primera. Deducir el número de metros cúbicos que se han comprado de cada especie, sabiendo que un metro cúbico de la primera pesa 810 kg y que un metro cúbico de la segunda pesa 720 kg. Dar como respuesta la cantidad de metros cúbicos de la segunda.

A) 70 B) 72 C) 74 D) 76 E) 78

Resolución.-

Sean los volúmenes : $\begin{cases} V_2 = x\,m^3 \\ V_1 = (80-x)m^3 \end{cases}$

Por lo tanto los pesos son : $P_1 = 810\,(80 - x)\,kg$

$P_2 = 720x\,kg$

Luego : $720\,x = 8 \,.\, 810\,(80 - x) \quad \Rightarrow \quad x = 9\,(80 - x)$

$\therefore \quad x = 72\ m^3$ RPTA. B

29.- Se reparte una cantidad «S» de la siguiente manera :

	D.P.	I.P.
A	15	5
B	13	39
C	17	85

Además, la parte que le toca a «A» más 1 800 es a la parte de «B» más la de «C» como 6 es a 1. Determinar «S».

A) 32 000 B) 31 900 C) 31 800 D) 31 700 E) 31 600

Resolución.-

S →		D.P.	I.P.	D.P.	⇒	D.P.
	A :	15	5	1/5		15 . 1/5 . 15 = 45
	B :	15	39	1/39		13 . 1/39 . 15 = 5
	C :	17	85	1/85		17 . 1/85 . 15 = 3

Observación.- Hemos empleado el mismo criterio del problema Nº 27.

$$k = \frac{S}{45+5+3} = \frac{S}{53} \Rightarrow S = 53 \qquad ..... (\alpha)$$

Por dato : $\dfrac{45k+1\,800}{5k+3k} = \dfrac{6}{1} \Rightarrow 45k + 1\,800 = 48k$

$\therefore \quad k = 600$

Finalmente (β) en (α) : $S = 53 \,.\, 600 =$ 31 800 RPTA. C

30.- José y los mellizos: Luis y Pedro; cooperan en una obra benéfica en forma D.P. a sus edades, entre los tres donan S/. 2 310 y deciden contribuir con S/.1 200 más, ahora en forma I.P. a sus edades, está segunda vez a Luis le tocó cooperar con S/. 250 en total. ¿Cuánto puso José?

A) S/. 950 B) S/. 1 000 C) S/. 1 050 D) S/. 2 000 E) 2 050

Resolución.-

1ro) Sean las edades : $\begin{cases} \text{Luis} : a \text{ años} \\ \text{Pedro} : a \text{ años} \\ \text{José} : b \text{ años} \end{cases}$

2do) En e l segundo reparto : $\begin{cases} \text{Luis} : S/.\ 250 \\ \text{Pedro} : S/.\ 250 \\ \text{José} : S/.\ 700 \end{cases}$

3ro) Se observa que las contribuciones de Luis, Pedro y José; son proporcionales a : 5; 5 y 14.

4to) Pero como el reparto es I.P. a las edades :

$$\begin{cases}(a;a;b)\ \text{I. P. } (5;5;14): & \text{Propiedad transitiva}\\ (a;a;b)\ \text{D.P. } (14;14;5)\end{cases}$$

5to) Del primer reparto : S/. 2 310 → D.P.

$$\left.\begin{array}{lcr}\text{Luis} & : & 14\\ \text{Pedro} & : & 14\\ \text{José} & : & 5\end{array}\right\}$$

$$k = \frac{2\,310}{5+14+14} = 70$$

La parte de José : $5 \times 70 =$ S/. 350

$\therefore$ Total José : S/. 700 + S/. 350 = S/. 1 050 RPTA. C

31.- Se reparte un aguinaldo de S/. 3 800 entre tres obreros; dos de ellos discuten si hacerlo en forma directa o inversamente proporcional a sus salarios, siendo estos S/. 24 y S/. 54 respectivamente. Al ser preguntado el tercero porqué no interviene en la discusión, éste respondió: «igualito es». ¿Cuánto de aguinaldo le toca al tercero?

A) S/. 1 200 B) S/. 1 500 C) S/. 1 800 D) S/. 1 260 E) S/. 1 545

<u>Resolución</u>.-

1ro) Sea el salario del tercero : S/. a

2do) Si el reparto es Directo ,se tendrá :

S/. 3 800 → D.P.

$$\left.\begin{array}{c}24\\ 54\\ a\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3\,800}{78+a}$$

La parte del tercero sería : $a \cdot \dfrac{3\,800}{78+a}$ ..... (α)

3ro) Si el reparto es Inverso :

3 800 → I.P. D.P. M.C.M. (24; 54; a)

$$\left.\begin{array}{cccl}24 & \frac{1}{24} & . & 216\,a = 9\,a\\ 54 & \frac{1}{54} & . & 216\,a = 4\,a\\ a & \frac{1}{a} & . & 216\,a = 216\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{3\,800}{13a+216}$$

La parte del tercero :

$216 \cdot \dfrac{3\,800}{13a+216}$ ..... (β)

4to) Como al tercero le da lo mismo que el reparto sea directo o inverso , diremos que :

$$(\alpha) = (\beta) \quad \Rightarrow \quad \frac{3\ 800\ .\ a}{78+a} = \frac{3\ 800\ .\ 216}{13a+216} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{78+a-a} = \frac{216}{13a+216-216}$$

$$\frac{a}{78} = \frac{216}{13a} \quad \Rightarrow \quad 13a\ .\ a = 78\ .\ 216 \quad \Rightarrow \quad a = 36$$

En (α) : $\dfrac{3\ 800\ .\ 36}{78+36} = S/.\ 1\ 200$ RPTA. A

32.- Un cierto número se divide en partes proporcionales a tres números consecutivos crecientes y a la vez I.P. a los mismos números, pero en orden decreciente. Si la cantidad obtenida es los 9/19 del número. ¿Cuál es la suma de estos tres números ?

A) 9 ***B) 12*** ***C) 15*** ***D) 18*** ***E) 21***

<u>Resolución</u>.-

1ro) Sea N la cantidad a repartir.

2do) Sean además : $(n - 1)$; $n \wedge (n + 1)$ los tres numeros buscados

3ro) N $\rightarrow$

<u>D.P.</u>	<u>I.P.</u>	<u>D.P.</u>	$\Rightarrow$ <u>D.P.</u>
$n - 1$	$n + 1$	$1/(n+1)$	$\frac{n-1}{n+1} . (n^2 - 1) = n^2 - 2n + 1$
n	n	$1/n$	$1 . (n^2 - 1) = n^2 - 1$
$n + 1$	$n - 1$	$1/(n-1)$	$\frac{n+1}{n-1} . (n^2 - 1) = n^2 + 2n + 1$

Por consiguiente se tendrá que : $k = \dfrac{N}{3n^2+1}$

Y por dato del problema :

$$(n^2 + 2n + 1) . \frac{N}{3n^2+1} = \frac{9}{19} N \quad \Rightarrow \quad 19(n^2 + 2n + 1) = 9(3n^2 + 1)$$

$$19n^2 + 38n + 19 = 27n^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{8n^2 - 38n - 10}_{(n-5)(8n+2)} = 0$$

Como n es entero, entonces : $n = 5$

Por lo tanto, los números son : 4 ; 5 ; y 6

$$\Rightarrow \Sigma = 4 + 5 + 6 = 15$$ RPTA. C

33.- Se reparte 192 en partes proporcionales a «n» y «n + 4» resultando 5 y 7 respectivamente. Dar como respuesta el valor de n y la mayor de las partes.

A) 5;80 ***B) 12;100*** ***C) 4;120*** ***D) 10;112*** ***E) 8;208***

Resolución.-

Por dato : $(n\,;n+4)$ D.P. $(4 \text{ y } 7)$

Por lo tanto : $\dfrac{n}{4} = \dfrac{n+4}{7}$

Aplicando propiedad Nº 5 de Proporciones : $\dfrac{n}{5} = \dfrac{n+4}{7} = \dfrac{n+4-n}{7-5} = 2 \Rightarrow n = 10$

$$192 \rightarrow \text{D.P.} \left.\begin{matrix} \\ 5 \\ 7 \end{matrix}\right\}$$

$k = \dfrac{192}{5+7} = 16$

La parte mayor será : $7 \,.\, 16 =$ 112 RPTA. D

34.- Las edades de cuatro personas son números enteros consecutivos y se debe repartir una suma de dinero proporcionalmente a sus edades. Si el reparto se hiciera hoy, el primero recibiría un 20% más que el cuarto, pero si se efectuara dentro de 2 años el primero recibiría S/. 45 000 más que el cuarto. Calcular cuánto le tocará al tercero dentro de 2 años.

A) S/. 300 000 B) S/. 270 000 C) S/. 285 000 D) S/. 255 000 E) 240 000

Resolución.-

Sean las edades : $n \;;\; n+1 \;;\; n+2 \text{ y } n+3$

Sea N la suma de dinero :

1ro) Si el reparto se hace hoy :

$$\text{N} \rightarrow \underline{\text{D.P.}} \left.\begin{matrix} n \\ n+1 \\ n+2 \\ n+3 \end{matrix}\right\}$$

La constante de reparto sería : $k_1 = \dfrac{n}{4n+6}$

El 1ro recibe : $(n+3)k_1$

El 4to recibe : $n\,k_1$

Por dato : $(n+3)\,k_1 = n\,k + 20\%\,n\,k_1$

$(n+3)\cancel{k_1} = \dfrac{120}{100}\,.\,n\cancel{k_1} \Rightarrow n = 15$

$\therefore$ Las edades actuales son : 15; 16; 17 y 18

2do) Dentro de 2 años :

$$\text{N} \rightarrow \underline{\text{D.P.}} \left.\begin{matrix} 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{matrix}\right\}$$

La constante de reparto sería : $k_2 = \dfrac{n}{74}$

El primero recibirá : $20\,k_2$

El cuarto recibirá : $17\,k_2$

El tercero recibirá : $18\,k_2$ .... (*)

Por dato : $20\,k_2 = 17\,k_2 + 45\,000$

$\Rightarrow 3\,k_2 = 45\,000 \Rightarrow k_2\; 15\,000$

En (*) : $18 \times 15\,000 =$ S/. 270 000 RPTA. B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Al repartir *S/.* 480,00 en 2 partes D.P., a 4 y 6 e I.P., a 2 y 3 se obtuvieron las partes:

A) 210; 270 D) 200; 280

B) 230; 250 E) 240; 240

C) 260; 220

2.- Al repartir 3 600 en partes que sean I.P., a 2, 3, 5 y 6. ¿Cuál es la diferencia entre la mayor y la menor de las partes?

A) 1 000 B) 1 500 C) 2 000

D) 3 000 E) 3 500

3.- Al repartir una cierta suma D.P, a 3; 5/3 y 7 e I.P., a 1/2; 4 y 6/4 se observó que la mayor parte excede a la menor en *S/.* 6 700. Indicar a cuántos asciende la suma repartida.

A) 14 300 B) 15 500 C) 14 400

D) 13 300 E) 12 200

4.- Se divide un cierto número D.P. a los números 3; 4; 7 e inversamente proporcionales a 1,5 ; 2,25 y 3. Indicar la diferencia de la mayor respecto a la menor, si la parte intermedia es 4 320 menos que el total.

A) 750 B) 900 C) 1 200

D) 600 E) 300

5.- El producto de la suma de la mayor y menor de las partes por la parte intermedia que resulta de repartir un número D.P, a 3; 5 y 7 es 45 000. Hallar el número.

A) 300 B) 350 C) 400 D) 450 E) 500

6.- Dos personas se asocian aportando cada uno *S/.* 200 000,00; 4 *meses* después aceptaron un tercero con *S/.* 400 000,00 de capital. A los 9 *meses* de iniciada el negocio se liquidó encontrándose una ganancia de *S/.* 840 000,00. Decir cuánto le correspondió al tercero.

A) 300 000 B) 200 000 C) 250 000

D) 210 000 E) 320 000

7.- La suma de tres números es 387 y son directamente proporcionales a 0,666....; 0,166666..... y 0,222.... e inversamente proporcionales a las raíces cuadradas de 208; 468 y 325. Hallar la suma de las cifras del menor.

A) 4 B) 7 C) 9 D) 10 E) 12

8.- Un industrial empezó un negocio, a los 5 *meses* admitió un socio y a los 8 *meses* después, entró un tercer socio, los 3 contribuyeron en cantidades iguales y el negocio duró 2 *años* obteniéndose una ganancia de 822 285. ¿Cuánto le corresponde al primer socio?

A) 365 460 B) 356 460 C) 460 356

D) 56 460 E) 65 460

9.- Luis reparte una cantidad N en partes inversamente proporcionales a 2/3; 3/4 y 5/6 pero Carlos lo hace directamente proporcional a dichos índices por lo cual una de las partes obtenidas por Carlos fue *S/.* 2 470 menos que la correcta. ¿Hallar N?

A) *S/.* 32 670 D) *S/.* 24 200

B) *S/.* 24 700 E) *S/.* 32 000

C) *S/.* 12 100

10.- Tres socios han ganado en un negocio 2 400 000. El primero contribuyó con 25 000; el segundo con 40 000 durante 6 *meses* y, el tercero con 20 000 durante 8 *meses*. Si el primero obtuvo una ganancia de 600 000. Calcular el tiempo que estuvo impuesto su capital del primero.

A) 6 *meses* y 10 *días*

B) 4 *meses*

C) 5 *meses* y 10 *días*

D) 7 *meses*

E) 4 *meses* y 20 *días*

11.- Se repartió cierta cantidad entre 3 individuos A; B y C. A recibió 5/9 del total. B recibió la quinta parte de A y el resto se dividió entre los 3 por iguales. Después del reparto se asociaron para explotar un negocio y en 2 *años* obtuvieron un beneficios de 540 000.
¿Cuál es el beneficio de C?

A) 60 000 B) 120 000 C) 360 000
D) 80 000 E) 30 000

12.- Un padre reparte entre sus hijos una cantidad de dinero D.P., a sus edades que son 5, 25 y 40. El segundo hijo piensa que la repartición le hubiera convenido 15 *años* antes. ¿Qué fracción del dinero hubiera recibido de más o de menos?

A) 1/14 más D) 1/7 menos
B) 1/14 menos E) 1/8 más
C) 1/7 más

13.- Repartir 3 234 en 4 partes cuyos cuadrados sean directamente proporcionales a 28 ; 63 ; 112 y 175.

A) 463 ; 969 ; 492 y 5 515
B) 315 ; 248 ; 854 y 6 930
C) 462 ; 693 ; 924 y 1 155
D) 1 125 ; 924 ; 462 y 115
E) 1 025 ; 925 ; 462 y 115

14.- Se reparte 3 645 D.P., a todos los múltiplos de 2, de 2 cifras.
¿Cuánto le corresponde a 70?

A) 500 B) 201 C) 501
D) 105 E) 210

15.- Un agricultor desea sembrar en terrenos de forma cuadrada de 3; 7 y 8 *km*. de lado. Para ello manda preparar el terreno pagando un total de S/. 21 960. ¿Cuánto abonó por el segundo?

A) 8 450 B) 5 480 C) 8 540
D) 4 850 E) 8 820

16.- Tres obreros se reparten una gratificación en partes proporcionales a sus *años* de servicio que son 7, 9 y 14 *años*; no pareciéndoles justo el reparto, después de efectuado, acuerdan que fuera por partes iguales, y para ello entrega el tercero 1 600 *soles* al segundo y éste cierta cantidad al primero. ¿Cuál fue el importe de la gratificación?

A) 12 000 B) 10 000 C) 11 000
D) 21 000 E) N.A.

17.- Tres operarios A, B y C cobraron por una obra 10 656 000. A trabajó 5 *días*, B 6 *días* y C 8 *días*. Cuando estos operarios trabajan a jornal ganan 28 000, 24 000 y 20 000 *soles* diarios respectivamente. ¿Cuánto ganó B?

A) 1 260 000 D) 1 240 000

B) 1 296 000 E) Faltan datos

C) 1 440 000

18.- Un padre tiene 3 hijos de 6, 7 y 9 años de edad que cursan el segundo, el tercero y quinto de educación inicial. Decide repartir una cierta cantidad de caramelos entre sus 3 hijos en forma proporcional al grado de estudios e I.P., a su edad. Si el menor de los hermanos recibe 98 caramelos menos que el mayor. ¿Cuántos caramelos se repartió?

A) 300 B) 456 C) 328

D) 581 E) 631

19.- Dos agricultores A y B tienen respectivamente 9 y 5 hectáreas de terreno que desean sembrar, cuando ya habían sembrado 2/7 de su propiedad, contratan un peón, a partir de entonces los agricultores y el peón trabajan en partes iguales. ¿Cuanto debe aportar cada agricultor para pagar al peón? Si en total deben pagarle 140 *soles*.

A) 130; 10 B) 90; 50 C) 130; 20

D) 135; 5 E) 110; 30

20.- Los capitales impuestos por 3 individuos para la explotación de una industria, están en la misma relación que los números 2; 3 y 7 y los tiempos de imposición en la misma relación que los números 1/5; 1/8 y 1/6 las ganancias fueron S/. 262 125 ¿Cuando correspondió a cada uno. dar el mayor de ellos?

A) S/. 54 000 D) S/. 157 500

B) S/. 50 625 E) S/. 167 500

C) S/. 127 600

21.- Dos hermanos se reparten una herencia de la siguiente manera: La quinta parte D.P, a 2 y 3, 2/5 del resto I.P. a 5 y 3 y el resto D.P a 5 y 7, si a uno de los hermanos le tocó en total *S/.* 14 000.
Hallar la herencia.

A) 27 500 B) 47 500 C) 53 000

D) 42 500 E) 35 000

22.- Un padre dividió su fortuna entre sus tres hijos proporcionalmente a los números 7; 5 y 3 pero no pareciéndoles justo lo hace proporcionalmente a 9; 8 y 7 por tal motivo uno de los hijos tiene *S/.* 6 600 más que antes. ¿A cuánto asciende la fortuna?

A) S/. 88 000 D) S/. 72 000

B) S/. 66 000 E) S/. 77 000

C) S/. 65 000

23.- Un matemático cuando viajó al más allá deja a su esposa embarazada la suma de *S/.* 22 770 y en la herencia estipulaba si nacía varón a la madre le tocaba 5/6 de su hijo y si nacía niña a la madre le correspondía 6/7 de su hija; si cuando dio a luz nacieron quintillisos 3 niñas y 2 niños. ¿Cuánto le correspondió a cada niño?

A) 3 030 B) 3 850 C) 3 000

D) 3 960 E) 3 300

24.- Tres hermanos, cuyas edades forman una proporción geométrica contínua cuya razón es un número entero, se reparten una suma de dinero en forma proporcional a sus edades. Si lo hacen dentro de 4 *años*, cuando la edad del mayor sea el triple de la del menor, entonces el mediano recibe *S/.* 200 más. ¿Cuál era la suma de dinero?

A) 42 000 B) 23 400 C) 23 800

D) 23 200 E) 23 500

25.- Diariamente se reparten *S/.* 33 000 entre dos obreros A y B en forma D.P a su rendimiento. Un día A recibe *S/.* 17 600 y B el resto; al otro día A disminuye su rendimiento en 25% y B aumenta un 20%. Hallar la diferencia que recibieron A y B en ese nuevo reparto.

A) 3 400 B) 5 500 C) 8 000

D) 4 500 E) 6 400

26.- Se repartió una cantidad N en tres partes A; B y C ; D.P a 15; 13 y 17; I.P.. a 5; 39; 85. Además la parte que le tocó a B más 2 400 es a la parte de A más la de C como 1 es a 6. Hallar la diferencia entre las partes de A y C.

A) 33 600 B) 43 200 C) 5 200

D) 42 400 E) 40 000

27.- Se forma una sociedad con tres socios cuyos capitales son 3 000, 5 000 y 4 000 dólares respectivamente. Si a los 2 *meses* de iniciado el negocio, el primero se retiró y 2 *meses* más tarde el segundo duplica su capital. ¿Cuanto habrá ganado el tercero si al finalizar la sociedad que duro un *año* se obtuvo la utilidad de 15 400 dólares?

A) 4 600 B) 4 800 C) 5 400

D) 3 600 E) 3 800

28.- Cuatro personas inician una empresa por un lapso de 2 *años* aportando para ello cantidades iguales, luego de un *año* dos de ellos aumentan su capital en su mitad y los otros 2 retiran la mitad del suyo. ¿Cuál fue la utilidad total obtenida, si uno de los que retiran la mitad de su capital recibe 9 000 de beneficio?

A) 40 000 B) 42 000 C) 46 000

D) 48 000 E) 52 000

29.- Tres personas se asociaron para formar un negocio, el capital aportado por cada uno mensual es el 20% de su sueldo; siendo estos proporcionales a 4; 7 y 15. Si luego de *n años* se reparten las ganancias correspondiéndole a uno ellos *S/.* 30 000 más que a otro y menos que el tercero. Hallar los beneficios de la empresa.

A) 260 000 D) 420 000

B) 240 000 E) falta el valor de "*n*"

C) 250 000

30.- Si A tiene *a años*, B tiene *b años* C, tiene *c años* y D tiene *d años*.

Una cantidad de *soles* se reparte I.P. a las edades de A; B y C y D.

Si : $r = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$

(r = razón de proporcionalidad) y

(S/ar) = 120 000; (S/br) = 90 000.

(S/cr) = 720 000; (S/dr) = 45 000.

¿Cuánto excede la parte de A a la parte C?

A) 60 000 B) 45 000 C) 610 000

D) 75 000 E) 49 000

18 REGLA DE TRES

18.1 REGLA DE TRES SIMPLE

La regla de tres simple, es el procedimiento de cálculo que permite hallar un cuarto valor, cuando se conocen tres valores correspondientes a dos magnitudes.

La regla de tres simple, puede ser directa o inversa, según que las magnitudes sean directa o inversamente proporcionales respectivamente.

A. REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \text{D.P.} & \underline{B} \\ a & & b \\ c & & x \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{x}{c} \qquad x = \frac{b.c}{a}$$

Ejemplo : Si un carpintero hace 35 carpetas en una semana. ¿Cuántas carpetas realizará en 12 *días*?

<u>Resolución</u> :

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\text{Obra}} & \underline{\text{Tiempo}} & & & \\ 35 & 7 & \Rightarrow & x = & \dfrac{35 \cdot 12}{7} \\ x & 12 & \therefore & x = & 60 \text{ carpetas} \end{array}$$

B. REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \text{I.P} & \underline{B} \\ a & \longleftrightarrow & b \\ c & \longleftrightarrow & x \end{array} \quad \Rightarrow \quad cx = ab \qquad x = \frac{ab}{c}$$

Ejemplo : Si una cuadrilla de 10 obreros hacen una obra en 12 *días* ¿Con cuántos obreros se hará la misma obra pero en 15 *días*?

Resolución :

Obreros	Tiempo
10	12
x	15

$$\Rightarrow \quad x = \frac{10 \cdot 12}{15}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 8 \text{ días}}$$

18.2 REGLA DE TRES COMPUESTA

La regla de tres compuesta, es el procedimiento de cálculo que permite hallar un valor, cuando se conocen un conjunto de valores correspondientes a varias magnitudes.

PROCEDIMIENTO.-

1.- Se disponen los datos de manera que los valores pertenecientes a una misma magnitud se ubiquen en una misma columna y es adecuado que estén con las mismas unidades de medidas.

2.- La magnitud en el cual se ubica la incógnita se compara con los demás, verificando si son directas (D) o inversas (I)

3.- El valor desconocido se obtiene aplicando la R. S. Directa. o la R. S. Inversa considerando la magnitud principal y las demás.

Ejemplo :

Qué rendimiento deben tener 6 obreros que en 20 *días* trabajando 9 *h/d* han hecho 30 m^3 de una obra cuya dificultad es como 3, si para hacer 20 m^3 de la misma obra de 5 como dificultad se emplearon 8 obreros de 60 % de rendimiento durante 15 *días* de 8 *h/d*.

	# Obreros	Rendimiento	*# Días*	*# h/d*	Volumen	Dificultad
Supuesta	8	60%	15	8	20	5
Pregunta	6	x%	20	9	30	3
	(I)		(I)	(I)	(D)	(D)

Despeje : $x\% = 60\% \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{30}{20} \cdot \frac{3}{5} = 48\%$ e/u

Observación :

Al colocar la pregunta en la segunda fila podemos notar que cuando es Inversa. Una vez ubicada las magnitudes y sus respectivos valores en la forma indicada, el valor de "x" se puede calcular, en la forma práctica, multiplicando el valor conocido de la magnitud de comparación por los cocientes de dividir, en el orden dispuesto, los pares de valores de las magnitudes que son inversamente proporcionales y en orden invertido los pares de valores que son directamente proporcionales.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Para recorrer 44 km en 2 horas; una persona dió 60 000 pasos, si sus pasos son de igual longitud. ¿Cuántos pasos dará para recorrer 33 km en 3 h?

A) 44 000 pasos ***B) 45 000 pasos*** ***C) 44 000 pasos***

D) 33 000 pasos ***E) 30 pasos***

Resolución.-

Observamos que el # de pasos es proporcional a la distancia independiente del tiempo:

# Pasos	Distancia
60 000	44
x	33
	D.P

$$\therefore \quad \text{\# de pasos}: \ x = \frac{60\,000 \cdot 33}{44} = 45\,000 \qquad \text{RPTA. B}$$

2.- Para pintar un cubo de 10 cm de arista se gastó 12 soles. ¿Cuánto se gastará para pintar otro cubo de 15 cm de arista?

A) 22 ***B) 20*** ***C) 11*** ***D) 27*** ***E) 10***

Resolución.-

Como se van ha pintar las caras del cubo entonces el costo va ha ser directamente proporcional al área.

Aplicando R.T.S. Directa.

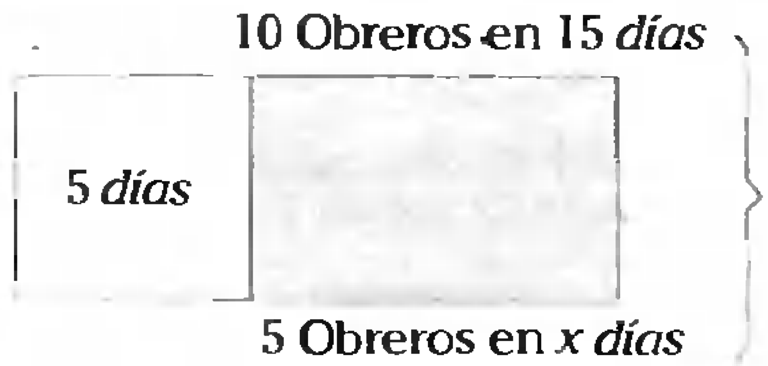
Costo	Area
12	$6 \cdot 10^2$
Costo	$6 \cdot 15^2$
	D.P

$$\Rightarrow \quad \text{Costo} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 15^2}{6 \cdot 10^2} = 27 \text{ soles} \qquad \text{RPTA. D}$$

3.- Ocho obreros pueden hacer una obra en 20 días, después de 5 días de trabajo se retiran 3 obreros. ¿Con cuántos días de atraso terminó la obra?

A) 24 días ***B) 29 días*** ***C) 10 días*** ***D) 11 días*** ***E) 9 días***

Resolución.-



La misma cantidad de obra para los dos grupos

Lo que falta : Lo hacen :

	Obreros	Tiempo
Antes :	8	15
Ahora :	5	x
	I.P	

$\therefore \quad x = \frac{15.8}{5}\,1 = 24$ *días*

$\therefore$ Retraso = 24 - 15 = 9 *días* RPTA. D

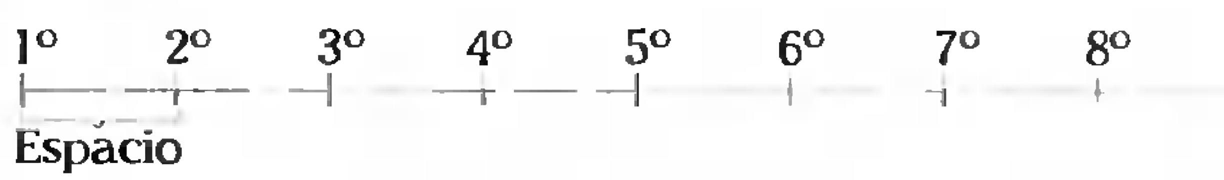
4.- Un reloj que da las horas por campanadas demora 6 segundos en dar las 4. ¿Cuánto demorará en dar las 8?

A) 15 s B) 16 s C) 14 s D) 10 s E) 12 s

Resolución.-

El tiempo no mide las campanadas sino los espacios entre campanada y campanada.

Obs.



Luego :	Tiempo	Espacios (Intervalos)
4 campanadas	6	3
8 campanadas	t	7
		D.P

$\therefore$ El tiempo es 14 *s* RPTA. C

5.- Un reloj que marcaba las 0 horas se adelanta 6 minutos en cada hora. ¿Dentro de qué tiempo marcará la hora exacta?.

A) 3 días B) 4 días C) 5 días D) 6 días E) 7 días

Resolución.-

Para que el reloj vuelva a marcar la hora correcta debe retrasarse 12 *horas* < > 720 *min*.

Tiempo	Retraso
1	6' *minutos*
t	720' *minutos*
	D.P

$\therefore \quad t = \dfrac{1 \cdot 720}{6} = 120\,h \quad <> \quad 5\ días$ RPTA. C

6.- Una cuadrilla de 40 obreros se compromete a construir en 24 días cierta obra. Al cabo de 18 días ha hecho 5/11 de la obra. ¿Cuántos obreros tendrán que reforzar la cuadrilla para terminar la obra en el tiempo fijado?

A) 12 B) 18 C) 24 D) 20 E) 104

Resolución.-

1º) Sea "x" el número de obreros que refuerza la cuadrilla.

2º) Como se ha hecho $\dfrac{5}{11}$ obra ; falta para terminarla $\dfrac{6}{11}$.

3º) Se observa que a mayor número de obreros, mayor cantidad de obra y menor número de *días*.

Obreros	Días	Obra
40	18	5/11
40 + x	6	6/11

IP

DP

$$40 + x = 40 \cdot \frac{18}{6} \cdot \frac{6}{5} = 144$$

$\therefore \quad x = 104$ RPTA. E

7.- La cantidad de granos de maíz que entran en un balón esférico de 3 dm de diámetro es 120. ¿Cuántos granos entrarán en un balón de 6 dm de diámetro?

A) 480 B) 600 C) 960 D) 1 440 E) N.A.

Resolución.-

1º) La cantidad de granos y el volumen de la esfera son proporcionales.

2º) <u>Volumen</u> D.P <u>Granos</u>

$\frac{4}{3}.\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3 \longrightarrow 120$

$\frac{4}{3}.\pi\left(\frac{6}{2}\right)^3 \longrightarrow x$

$x = \frac{6^3}{3^3} \cdot 120 = \boxed{960}$ RPTA. C

8.- Despepitando 8 250 kg de ciruelas se ha obtenido 6 750 kg de pulpa. ¿Cuál sería el importe que se tendría que gastar para obtener 9 kg de pulpa, si las ciruelas se compran a razón de S/. 0.81 el kg.?

A) S/. 91,81 B) S/. 8,91 C) S/. 8,80 D) S/. 72,90 E) S/. 7,29

<u>Resolución</u>.-

Sea W el peso de ciruela necesario para obtener 9 kg de pulpa

El enunciado tenemos:

W total	W pulpa
8 250	6 750
W	9
	D.P

$\Rightarrow W = \frac{8\ 250 \cdot 9}{6\ 750} = 11\ kg$

$\therefore$ P compra = 11 · 0,81 = $\boxed{S/.\ 8{,}91}$ RPTA. B

9.- Quince obreros han hecho la mitad de una obra en 20 días. En ese momento abandonan el trabajo cinco obreros. ¿Cuántos días tardarán en terminar el trabajo los obreros que quedan?

A) 24 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

<u>Resolución</u>.-

1º)

15 Obreros	10 Obreros
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
20 *días*	*t días*

2º) | Obreros | I.P | Días |
|---|---|---|
| 15 | → | 20 |
| 10 | → | t |

$\therefore\ t = 20 \cdot \frac{15}{10} = \boxed{30}$ RPTA. D

10.- Quince albañiles trabajando 12 h.d, durante 16 días, pueden hacer una zanja de 4m de largo, 2m de ancho y 1,5m de profundidad. Si 20 albañiles trabajando "x" horas diarias, durante 18 días, pueden hacer una zanja de 3m de largo 1,5 de ancho y 2m de profundidad. Calcular "x".

A) 4 ***B) 6*** ***C) 8*** ***D) 10*** ***E) 12***

Resolución.-

Albañiles	Días	H.D.	Volumen
15	16	12	$4 \cdot 2 \cdot 1,5$
20	18	x	$3 \cdot 1,5 \cdot 2$

IP DP

IP

$x = 12 \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{3 \cdot 1,5 \cdot 2}{4 \cdot 2 \cdot 1,5} \Rightarrow \boxed{x = 6}$ RPTA. B

11.- Se sabe que 15 hombres y 10 mujeres pueden cosechar 20 hectáreas de trigo en 40 días, después de 10 días de trabajo se retiran 5 hombres y 5 mujeres. Determinar con cuántos días de retraso se termina la cosecha si el trabajo que realiza un hombre equivale al de 2 mujeres.

A) 18 días ***B) 15 días*** ***C) 12 días*** ***D) 10 días*** ***E) 9 días***

Resolución.-

Del enunciado:

Eficiencia de la mujer : 1

Eficiencia del hombre : 2

$\underbrace{\text{Se hizo}}_{10\ días}$ falta

La eficiencia del grupo es el número de trabajadores por la eficiencia de cada uno.

Planteando para la obra que falta:

	Eficiente	Tiempo	
$15\,h$ y $10\,m$:	40	30	{Con los trabajadores iniciales}
$10\,h$ y $5\,m$:	25	t	{Con los trabajadores quedan}
	I.P		

$$\Rightarrow \qquad t = \frac{30 \cdot 40}{25} = 48\ días$$

$\therefore$ Retraso : 48 - 30 = 18 *días* RPTA. A

12.- *Veinte tejedoras pueden tejer 120 chompas en 15 días trabajando 8h/d y 8 tejedoras pueden destejer 100 chompas en 6 días trabajando 5 h/d con un rendimiento de 80 %. Determinar con qué rendimiento deben trabajar 5 tejedoras en 10 días trabajando 4 h/d para destejer las chompas que harían 10 tejedoras en 20 días trabajando 6 h/d.*

A) 20 % ***B) 50 %*** ***C) 120 %*** ***D) 80 %*** ***E) N.A***

Resolución.-

1ra regla de tres : Para las que tejen:

Obreras	Obra	Tiempo
20	120	$15 \cdot 8$
10	x	$20 \cdot 6$
D.P		D.P

Obs: El número de horas trabajadas es el número de días por las horas diarias.

$$\Rightarrow \qquad x = 120 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{26 \cdot 6}{15 \cdot 8} = 60$$

Luego : Para las que destejen:

Obreras	Obra	Tiempo	Rend
8	100	$6 \cdot 5$	80%
5	60	$10 \cdot 4$	r
I.P	D.P	I.P	

$$\therefore \qquad r = 80\ \% \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{6 \cdot 5}{10 \cdot 4} = 57{,}6\%$$

RPTA. E

13.- *Si en 120 kg de aceite comestible hay 5 kg de aceite puro de pescado y el resto de aceite de soya. ¿Cuánto de aceite de soya hay que agregar a esos 120 kg para que en cada 5kg de la mezcla haya solo 1/8 kg de aceite de pescado?*

A) 20 kg ***B) 35 kg*** ***C) 40 kg*** ***D) 45 kg*** ***E) 80 kg***

Resolución.-

Al agregar a los 120 *kg* de mezcla; *x kg* de aceite de soya, el aceite de pescado no varía. Entonces:

Mezcla	Aceite de pescado	Obs :
$120 + x$	5	A más mezcla se tiene más aceite de pescado.
5	$\frac{1}{8}$	
	D.P.	

$$\Rightarrow \quad (120 + x)\,\frac{1}{8} = 5 \cdot 5$$

$\therefore$ $x = 80\ kg$ RPTA. E

14.- Si 20 hombres pueden tumbar cierto número de muros o hacer 20 obras en 20 días y 12 hombres pueden tumbar 12 muros o hacer cierto número de obras en 12 días. ¿Cuántas obras pueden hacer 10 hombres que tumban 15 muros?

A) 15 obras B) 4 obras C) 6 obras D) 9 obras E) 12 obras

Resolución.-

Obreros	Obras	Tiempo
20	20	20
12	x	12
D.P		D.P

$$\Rightarrow \quad x = 20 \cdot \frac{12}{20} \cdot \frac{12}{20} = \frac{36}{5} \text{ obras}$$

Pero : $\frac{36}{5}$ obras $<>$ 12 muros

3 obras $<>$ 5 muros

$\therefore$ $15 \text{ muros } \frac{3 \text{ obras}}{5 \text{ muros}} = 9 \text{ obras}$ RPTA. D

15.- A y B hacen un trabajo normalmente en 18 y 24 días respectivamente. El primero aumenta su rendimiento en 20% y el segundo en 50%. Si trabajan juntos, ¿en cuántos días harían el trabajo (aproximadamente)?

A) 5 días B) 6 días C) 7 días D) 8 días E) 9 días

Resolución.-

$$\text{Sea :} \begin{cases} \text{Rendimiento de A} : r_A \\ \text{Rendimiento de B} : r_B \end{cases}$$

Como el rendimiento es inversamente proporcional al tiempo, entonces :

$r_A \cdot 18 = r_B \cdot 24 \quad \left\{ \frac{r_A}{r_B} = \frac{4}{3} \right.$

El primero (A) : $4 + 20\,\%\,(4) = 4{,}8$

El segundo (B) : $3 + 50\%\,(3) = 4{,}5$

	Rend.	Tiempo
Para A :	4	18
A y B :	9,3	t
	I.P	

$\therefore \quad t = \frac{18 \cdot 4}{9{,}3} = \frac{720}{93} = \quad 7{,}74 <> 8$ aprox. RPTA. D

16.- Para pintar una casa, 1ro se pasa la primera mano, luego el acabado. Hugo y Carlos se disponen a pintar una casa a las 6:00 a.m. Carlos el encargado del acabado espera que Hugo pinte durante 3 horas aduciendo que él lo hace en 2 horas lo que hasta ese momento Carlos ha hecho. Si terminaron simultáneamente el trabajo a qué hora fue.

A) 1 p.m B) 2 p.m C) 3 p.m D) 4 p.m E) 5 p.m

Resolución.-

Se tiene : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Rendimiento de Hugo : } r_H \\ \text{Rendimiento de Carlos : } r_C \end{array} \right.$

Por el Prob. anterior : $r_H.3 = r_C.2 \left\{ \begin{array}{l} r_H = 2 \\ r_C = 3 \end{array} \right.$

Sea t el tiempo de Hugo.

	Rendimiento	Tiempo
Hugo :	2	t
Carlos :	3	$t - 3$
	I.P	

$\Rightarrow \quad 3(t - 3) = 2t \quad \Rightarrow \quad t = 9\ horas$

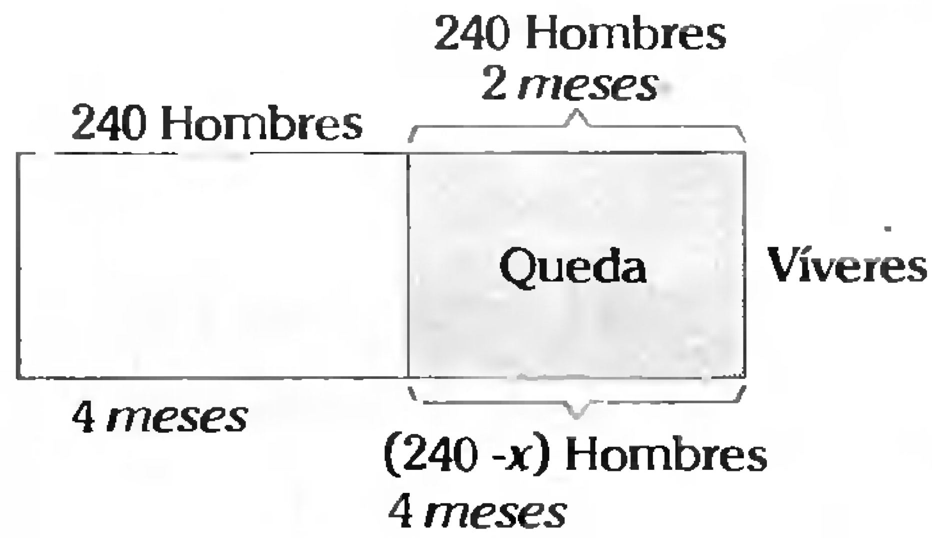
$\therefore \quad 6 + 9 = 15\ horas <> \quad 3\ p.m$ RPTA. C

17.- Colón y sus 239 hombres al salir del puerto de Palos tenían víveres para 6 meses. Si al llegar al nuevo continente ya habían transcurrido 4 meses. Cuántos hombres se quedaron en América sabiendo que el tiempo de regreso sería también 4 meses y la cantidad de ración la misma.

A) 20 B) 25 C) 32 D) 160 E) 120

Resolución.-

La tripulación es : Colón y sus 239 hombres o sea 240 hombres.
Después de 4 meses para volver :



# Hombres	Tiempo
240	2
240 - x	4
	I.P

$$\Rightarrow \; 240 - x = \frac{240\cdot 2}{4} = 120 \quad \therefore \quad \boxed{x = 120 \text{ hombres}}$$ RPTA. E

18.- 6 obreros han tardado 12 días para cavar la mitad de una zanja. ¿Cuánto tiempo demorarán si se aumenta 2 obreros 50% más eficientes para cavar la otra mitad de zanja?

A) 8 días B) 10 días C) 12 días D) 18 días E) 16 días

Resolución.-

Sea la eficiencia inicial de c/o. : 100%

La eficiencia se multiplica al número de obreros, para obtener la eficiencia total.

Eficiencia	Tiempo	Obra
6 · 100%	12	1/2
6 ·100% + 2 · 150%	t	1/2
IP		

$$t = \frac{6\cdot 100\%\cdot 12}{600\% + 300\%} = \boxed{8 \textit{ días}}$$ RPTA. A

19.- 14 obreros deben construir una vía férrea en 18 días, pero al cabo de 4 días se incorporan 6 obreros con un rendimiento de 50% de los anteriores. Si se quiere terminar la obra en 3 días antes de lo fijado, ¿a los cuántos días de haber ingresado los 6 obreros deben elevar su rendimiento al 100% para terminar la obra?.

A) 3 días B) 4 días C) 6 días D) 8 días E) 16 días

Resolución.-

Sea el rendimiento de c/o. : 100

Se sabe que :

Obra D.P. (# Obreros) (Rend.) (Tiempo)

$$\Rightarrow \; \frac{\text{obra}}{(\#\text{ hombres})\;(\text{rend.})\;(\text{tiempo})} = k \quad \Rightarrow \quad \text{Obra} = k\,(\#\text{ Hombres}).\,(\text{Rend}).\,(\text{Tiempo})$$

De donde obra = Σ partes

Luego :

$14 \cdot 100\% \cdot 18 = 14 \cdot 100\% \cdot 4 + (14 \cdot 100\% + 6 \cdot 50\%) \cdot t + 20 \cdot 100\% (11 - t)$

De donde la CTE K se anula por estar en ambos lados de la igualdad.

$25\,200 = 5\,600 + 1\,700\,t + 22\,000 - 2\,000\,t$

$300\,t = 2\,400 \quad \Rightarrow \quad t = 8$ *días* RPTA. D

20.- Una señora puede limpiar su casa en x minutos su empleada podría hacerlo en y minutos (y < x) trabajando las dos juntas, en qué tiempo harían la limpieza.

A) (x + y)/2

B) en un tiempo menor

C) en un tiempo menor que x mayor que y

D) en un tiempo mayor que y/2 menor que x/2

E) 2xy/(x + y)

Resolución.-

Si : $r_s \rightarrow$ rendimiento de la señora

$r_e \rightarrow$ rendimiento de la empleada

$$r_s \cdot x = r_e \cdot y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_s : y \\ r_e : x \end{cases}$$

Por regla de tres simple inversa :

	Rendimiento	Tiempo
La señora :	y	x
Las dos :	$x + y$	t

I.P

$$\Rightarrow \quad t = \frac{xy}{x+y} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}\left(\frac{2xy}{x+y}\right)$$

Sabemos : $y < \dfrac{2xy}{x+y} < x$ $\begin{cases} \text{Por propiedades de promedios} \\ \text{ver capítulo 8} \end{cases}$

$$\therefore \quad \frac{y}{2} < t < \frac{x}{2}$$ RPTA. E

21.- 8 granjeros para arar un terreno de 112,50 m² lo terminarían en 12 días pero luego de iniciado la obra se les comunica que aparte de lo anterior tienen que arar otro terreno de 4,5 por 12,5 metros por lo cual contratan 4 granjeros más acabando la obra a 15 días de iniciado. ¿Cuántos días trabajó el 2do grupo?

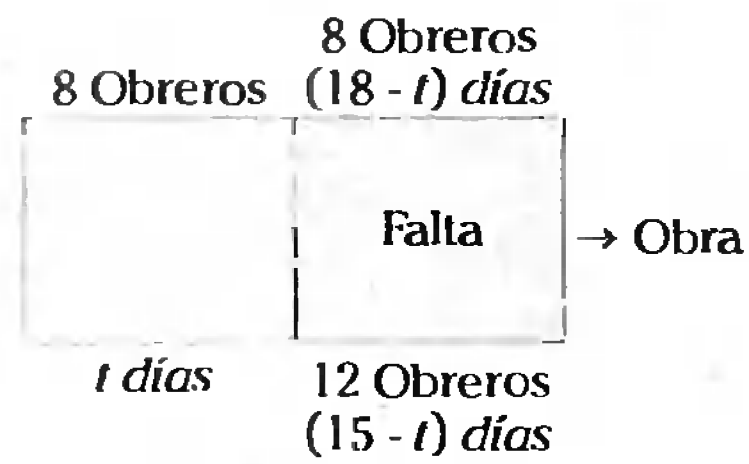
A) 3 días B) 4 días C) 9 días D) 6 días E) 8 días

<u>Resolución</u>.-

Como la obra que se incrementa es la mitad del anterior entonces se realizará en $\frac{1}{2}$ (12) = 6 *días*, y todo en 18 *días*.

Supongamos que ya trabajaron "*t*" *días*

Luego :	Obreros	Tiempo
Si continúan normal :	8	18 - *t*
Al agregar 4 obreros :	12	15 - *t*
	I.P	



$\Rightarrow$ $12\,(15 - t) = 8\,(18 - t)$ $\Rightarrow$ $t = 9$ *días*

$\therefore$ El 2do grupo trabajó : 15 - 9 = 6 *días* RPTA. D

22.- 18 obreros pueden hacer cierta obra en 20 días al cabo de 8 días de labor se retiran 8 obreros y después de 6 días se contratan «a» obreros más.
Hallar «a» sabiendo que los obreros contratados son el doble de hábiles de los que se retiran y que la jornada diaria no se altera?

A) 15 B) 6 C) 7 D) 8 E) 12

<u>Resolución</u>.-

La obra que dejan de hacer los obreros en 12 *días* lo hacen los "*a*" obreros contratados en 6 *días:*

	Obreros	Habilidad	Tiempo
1°	8	1	12
2°	*a*	2	6
		I.P	I.P

$a = 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{12}{16}$ $\Rightarrow$ $a = 8$ RPTA. D

23.- Un grupo de 36 obreros han construido en 20 días los 4/9 de una obra, un segundo grupo de 24 obreros han hecho 35 días 1/3 de la misma obra y un tercer grupo de 30 obreros terminan el resto de la obra en 18 días. Si para realizar otra obra doble que la anterior en 60 días se ha contratado 25 obreros del primer grupo, 14 obreros del segundo grupo y cierto número de obreros del tercero. ¿Qué grupo es más eficiente y cuántos se contratan del tercer grupo?

A) 1° ; 20 B) 1° ; 30 C) 2° ; 30 D) 3° ; 30 E) 3° ; 20

Resolución.-

Se sabe : $\dfrac{\text{Obra}}{\#\ \text{obreros} \cdot \text{tiempo} \cdot \text{rendimiento}} = k$

$$\frac{4/9}{36\cdot 20\, r_1} = \frac{3/9}{24\cdot 35\, r_2} = \overbrace{\frac{2/9}{30\cdot 18\, r_3} = \frac{2}{(25\, r_1 + 14\, r_2 + x\, r_3)\cdot 60}}^{(II)}$$

Multiplicando por 756

De (I) : $\dfrac{1}{18 r_1} = \dfrac{1}{28 r_2} = \dfrac{1}{27 r_3} \Rightarrow \dfrac{42}{r_1} = \dfrac{27}{r_2} = \dfrac{28}{r_3} \Rightarrow$ $r_1 <> 42$; $r_2 <> 27$; $r_3 <> 28$

Reemplazando en (II) : $x = 30$

$\therefore$ 1er ; 30 RPTA. B

24.- Tres prados tienen la misma área pero en c/u el grado de crecimiento del pasto es el doble del anterior. El pasto del 1er prado puede ser comido por 72 vacas en 36 días y el 2do puede ser comido por 48 vacas en 90 días ¿Cuántas vacas se comerán todo el pasto del 3ro en 60 días?

A) 71 B) 72 C) 81 D) 78 E) 84

Resolución.-

Sea n el # número de vacas que se encarga de comer el crecimiento de pasto del 1er prado; en consecuencia del 2do y 3er prado será $2n$ y $3n$ respectivamente. Aplicando R.3 para el prado inicial.

# vacas	Tiempo
$72 - n$	36 (I)
(II) $48 - 2n$	90 (I)
(II) $x - 3n$	60
	I.P

De (I) : $(72 - n)\cdot 36 = (48 - 2n)\cdot 90 \Rightarrow n = 12$

En (II) : $(x - 36)\cdot 60 = (48 - 24)\cdot 90$

$\therefore$ # vacas es : $x = 72$ RPTA. B

25.- Un obrero demora 8 horas por construir un cubo compacto de 5 dm de arista. Después de 108 horas de trabajo. ¿Qué parte del cubo de 15 dm de arista se habrá construido?

A) 1/2 B) 1 C) 3/4 D) 1/4 E) N.A.

Resolución.-

1º) Si un cubo de 5 *dm.* de arista demora 8 *horas*; calculemos el tiempo que demora un cubo de arista de 15 *dm.* de arista.

2º) Horas D.P Volumen

$$8 \longrightarrow 5^3$$

$$t \longrightarrow 15^3$$

$\therefore \quad t = \dfrac{15^3}{5^3} \cdot 8 = 216 \textit{ horas}$

3º) Si todo el cubo demora 216 *horas*, entonces en 108 se hace la mitad. RPTA. A

26.- Un grupo de 15 máquinas pueden completar un trabajo en 24 días. ¿Cuántas máquinas adicionales, cuya eficiencia es el 60% de los anteriores se necesitan si el trabajo aumenta en un 80%, pero se sigue teniendo 24 días para completarlo?

A) 20 B) 5 C) 40 D) 25 E) N.A.

Resolución.-

1º) Calculemos el incremento de las maquinarias con la misma eficiencia del 1er grupo

2º) Máquinas D.P Obra

$$15 \longrightarrow 100\%$$

$$15 + \text{Increm.} \longrightarrow 180\%$$

$\therefore \quad 15 + \text{Increm.} = \dfrac{15 \cdot 180\%}{100\%} = 27$

$\Rightarrow$ Increm. = 12

3º) Si la eficiencia del 1º grupo es 100%

Máquinas	D.P	Eficiencia
15		100%
x		60%

Obs : A mayor eficiencia se requiere menos máquinas.

$x = \dfrac{15 \cdot 100\%}{60\%} = 25$ RPTA. D

27.- Si 40 kg de agua salada contiene 3 1/2 kg de sal. ¿Qué cantidad de agua debe dejarse evaporar para que 18 kg de la nueva mezcla contenga 3 kg de sal?

A) 18 kg B) 19 kg C) 20 kg D) 21 kg E) N.A.

Resolución.-

1º) Sea v la cantidad de agua que se debe dejar evaporar.

2º) Solo se evapora agua; la cantidad de sal no sufre variación.

3º) A más mezcla se tiene más sal.

4º) <u>Mezcla</u> D.P <u>Sal</u>

$$40 - v \longrightarrow 3\tfrac{1}{2}$$

$$18 \longrightarrow 3$$

$$40 - v = \frac{18 \cdot 3\frac{1}{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad 40 - v = 21$$

$\therefore$ $v = 19\ kg$ RPTA. B

28.- Se contrató a un grupo de obreros para que una obra sea terminada en 21 días, con 25 obreros trabajando 8 h.d; luego de 6 días de trabajo se acordó que la obra quede terminada 5 días antes del plazo establecido. ¿Cuántos obreros más se tuvieron que contratar; sabiendo que se incrementó en 2h el trabajo diario?

A) 8 ***B) 5*** ***C) 12*** ***D) 30*** ***E) 15***

<u>Resolución</u>.-

1º) Si la obra dura 21 *días*, por lo tanto en un *día* se hace 1/21 de la obra.

2º) En 6 *días* se hace : $6 \cdot \left(\frac{1}{21}\right) = \frac{2}{7}$ de la obra.

3º) Falta para concluir la obra : $\frac{5}{7}$.

4º) Sean : "x" los obreros que se contratan.

25 Obreros	$(25+x)$ Obreros
$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$
6 *días* 8 H.D.	10 *días* 10 H.D.

<u>Obreros</u>	<u>Días</u>	<u>H.D.</u>	<u>Obra</u>
25	6	8	2/7
$25 + x$	10	10	5/7

IP

IP

DP

$$25 + x = 25 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad 25 + x = 30 \quad \therefore \quad x = 5$$

RPTA. B

29.- 16 obreros pueden hacer un canal de 40m de largo, 10m de ancho y 4m de profundidad, en 5 días trabajando 10 h.d. Calcular la longitud que tendrá otro canal de 8m de ancho y 3m de profundidad que ha sido construido por 12 obreros que laboran durante 40 días a 8 h.d con un esfuerzo 25% mayor, con una actividad 50% mayor; que los primeros, respectivamente, y en un terreno cuya resistencia es el doble del primero.

A) 300m B) 150m C) 200m D) 100m E) 140m

Resolución.-

Sea la longitud : L.

Obreros	Días	H.D.	Esf.	Act.	Resis.	Volumen
16	5	10	100%	100%	1	$40 \cdot 10 \cdot 4$
12	40	8	125%	150%	2	$1 \cdot 8 \cdot 3$

IP

DP

DP

DP

DP

DP

$$L \cdot 24 = 1\,600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{150\%}{100\%} \cdot \frac{125\%}{100\%} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{40}{5} \cdot \frac{12}{16}$$

$L \cdot 24 \cdot 7\,200 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = 300m}$ RPTA. A

30.- 8 costureras trabajando con un rendimiento del 60% c/u, han hecho en 20 días de 8 h.d, 200 pantalones para niños con triple costura. ¿Cuántas costureras de 80% de rendimiento c/u, harán en 24 días de 10 h.d, 450 pantalones para adulto con doble costura?. Si además se sabe que a igual número de costuras los pantalones para adultos ofrecen una dificultad que es 1/3 más que la que ofrecen los pantalones para niños.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Resolución.-

1º) Como la relación de dificultad depende de igual número de costuras, lo primero es hallar los datos con igual número de costura.

2º) Para Adultos

En 24 *días*, 450 pantalones de doble costura.

∴ En 24 *días* se obtiene 900 costuras.

3º) Para Niños

En 20 *días*, 200 pantalones de triple costura.

∴ En 20 *días* se obtiene : $200 \cdot 3 = 600$ costuras.

4º) El número de costuras para ambos grupos es : M.C.M. (900 ; 600) = 1 800.

5º) Adultos : 900 cost. $\rightarrow$ 24 *días*

1 800 cost. $\rightarrow$ 48 *días*

6º) Niños : 600 cost. $\rightarrow$ 20 *días*

1 800 cost. $\rightarrow$ 60 *días*

7º)

Cost.	Rend.	Días	H.D.	Dificultad
8	60%	60	8	1
x	80%	48	10	4/3

$x = 8 \cdot \frac{60}{80} \cdot \frac{60}{48} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{3}$ $\therefore$ $x = 8$ RPTA. C

31.- Un ingeniero puede construir un tramo de autopista en 3 días con cierta cantidad de máquinas; pero emplearía un día menos si le dieran 6 máquinas más. ¿En cuántos días podrá ejecutar el mismo tramo con una sola máquina?

A) 36 B) 42 C) 48 D) 30 E) N.A.

Resolución.-

1º) Sea n el número de máquinas.

2º) El número de máquinas es I.P. al número de *días*

3º)

Máquinas	I.P	Días	
n		3	.... (α)
$n + 6$		2	.... (β)
1		t	.... (θ)

De (α) y (β) : $n + 6 = n \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow n = 12$

De (β) y (θ) : $t = 2 \cdot \frac{(12+6)}{1} =$ 36 *días* RPTA. A

32.- 15 obreros pueden terminar una obra trabajando 8 horas diarias en 26 días, al cabo de 10 días se despiden 5 obreros, pasados 6 días se contratan nuevos obreros. ¿Cuántos obreros se tendrá que contratar para terminar la obra en el tiempo fijado?

A) 2 B) 6 C) 10 D) 8 E) N.A.

Resolución.-

1º) La cantidad de obra que dejan de hacer los 5 obreros despedidos, en (26 - 10) = 16 *días*; lo hacen los obreros que se contratan en 10 *días* de trabajo.

2º)

Obreros	I.P	Días
5		16
x		10

Donde x es el número de obreros contratados.

$\therefore \quad x = 5 \cdot \dfrac{16}{10} = \boxed{8}$ RPTA. D

33.- Doce albañiles y catorce peones se comprometen en hacer una obra en 30 días. Al cabo del quinto día se despiden a cuatro albañiles y ocho peones debido a que se les dió 20 días más de plazo para concluir la obra. Hállese la relación de las eficiencias (Albañil/Peón).

A) 2/3 B) 3/2 C) 3/4 D) 4/3 E) N.A.

Resolución.-

1º) Sean : $\begin{cases} \text{Efic. de c/a} : x \\ \text{Efic. de c/p} : y \end{cases}$

2º) Si la obra dura 30 *días*, en un *día* se hace 1/30 de obra.

3º) En 5 *días* se hizo : $5\left(\dfrac{1}{30}\right) = \dfrac{1}{6}$

4º) Quedan por hacer : $1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

Eficiencias	Días	Obra
$12x + 14y$	5	1/6
$8x + 6y$	45	5/6

IP

DP

$$8x + 6y = (12x + 14y) \cdot \frac{5}{45} \cdot \frac{5}{1}$$

$$360x + 270y = 300x + 350y$$

$$60x = 80y \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{80}{60} = \boxed{\frac{4}{3}}$$ RPTA. D

34.- Una bolichera a la deriva dispone de agua para 13 días, lo que proporcionaba un litro por día a cada hombre de la tripulación. Después de 5 días se vertió un poco de agua y al mismo tiempo murió un tripulante. El agua duró entonces justamente el tiempo que se esperaba. ¿Qué cantidad se vertió?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 14

Resolución.-

1º) El tripulante que murió, deja de consumir al *día* un *litro* .

∴ En 8 *días* dejó de consumir 8 *litros*.

2º) Al final debió sobrar 8 *litros*, por lo tanto la cantidad de agua que se vertió fue de 8 *litros*.

RPTA. B

35.- Se contratan a 5 costureras que hacen 12 vestidos en 15 días. Se pretende tener 60 vestidos en 25 días. ¿Cuántas costureras doblemente rápidas se deberán contratar además de las ya contratadas?

A) 4 ***B) 5*** ***C) 6*** ***D) 8*** ***E) 10***

Resolución.-

1º) Sea x el número de costureras que se contratan, pero que trabajan con la misma rapidez que las del grupo inicial.

2º)

Costur.	Días	Vestidos
5	15	12
$5 + x$	25	60

IP

DP

$$5 + x = 5 \cdot \frac{15}{25} \cdot \frac{60}{11} = 15 \quad \Rightarrow x = 10$$

3º) Pero como 2 costureras del grupo inicial equivale a una costurera del segundo grupo.

⇒ 10 del grupo inicial equivale a 5 del segundo grupo.

RPTA. B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Se sabe que "$n^2 - 1$" conejos pueden comer "$n - 1$" zanahorias en n *días*. ¿Cuántas zanahorias se necesitarían para alimentar a "$n + 1$" conejos durante "$4n$" *días*?

A) $4n - 1$ B) 4 C) $(n - 1)/4$
D) $n + 1$ E) $(n + 1)/4$

2.- Para pintar un cubo de 20 *cm* de lado se gastó *S/.* 130 000. ¿Cuál será el gasto para pintar un cubo de 40 *cm* de lado?

A) *S/.* 150 000 D) *S/.* 620 000
B) *S/.* 100 000 E) *S/.* 520 000
C) *S/.* 104 000

3.- Si una esfera cuyo diámetro es 12 *cm*. pesa 270 gramos. ¿Cuál será el peso de otra esfera del mismo material cuyo diámetro es 16 *cm*?

A) 640 B) 320 C) 450
D) 360 E) 500

4.- Si "a" obreros pueden terminar una obra en 20 *días* pero con 4 obreros adicionales pueden terminar con la misma obra en 16 *días*. Hallar "a"

A) 16 B) 14 C) 18 D) 15 E) 17

5.- Con 6 hombres ó 15 mujeres se puede construir una obra en 24 *días*. ¿Cuántas mujeres habrá que agregar a 4 hombres para construir dicha obra en 18 *días*?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

6.- Juan es el doble de rápido que Ernesto, si juntos pueden hacer una obra en 8 *días*. ¿En cuántos *días* hará la misma obra Juan, si trabaja solo?

A) 4 B) 12 C) 8/3 D) 24 E) 16/3

7.- Un obrero a las 2 *p.m* ha hecho la cuarta parte de una obra y a las 4 *p.m*, había hecho ya los 2/3 de la obra. ¿A qué hora terminará dicha obra?

A) 5 *p. m* D) 5 : 36 *min*
B) 5 : 12 *p . m* E) 6*h*
C) 5 : 24 *min*

8.- ¿Cuánto costará pintar la superficie de una pelota de 0,02 *metros* de radio sabiendo que para pintar otra de 0,08 *metros* de diámetro se gastó 60 *soles*?

A) 60 B) 30 C) 120 D) 240 E) 15

9.- Si un grupo de x obreros pueden hacer una obra en 21 *días*. Si los 2/3 del grupo aumenta su rendimiento en 25%.
¿Qué tiempo emplearan en hacer la obra?

A) 17 B) 18 C) 16 D) 19 E) 15

10.- Un grupo de hombres tienen víveres para un viaje de varios *días*. Hallar dicho número de hombres sabiendo que si la tripulación aumenta en 6 hombres la duración del viaje se reduce a los 2/3 de la duración inicial.

A) 9 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

11.- Un pozo de 4 *m* de diámetro y 15 *m* de profundidad fue hecho por 12 hombres en 20 *días* si se quiere aumentar en 1*m* el radio del pozo y el trabajo sera hecho por 10 hombres. ¿Qué tiempo demorará?

A) 20 *días* B) 24 *días* C) 30 *días*
D) 32 *días* E) 54 *días*

12.- Una guarnición de 1 200 soldados tiene víveres para 40 *días* al terminar el día 13 mueren 300 soldados.
¿Para cuántas *días* más de lo previsto alcanzarán los víveres?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

13.- Una obra debía terminarse en 30 *días* empleando 20 obreros trabajando 8 horas diarias. Después de 12 *días* de trabajo se pidió que la obra quedase terminada 6 *días* antes de aquel plazo y así se hizo. ¿Cuántos obreros se aumen- taron teniendo presente que se aumentó tambien en 2 *horas* el trabajo diario?

A) 4 B) 24 C) 44 D) 20 E) 12

14.- 20 Obreros se comprometen en terminar una obra en 28 *días*, pero después de haber hecho la mitad de la obra 10 de los obreros bajaron su rendimiento en 1/4 debido a las pésimas condiciones de trabajo. Debido a ello ¿Cuántos *días* se empleó en hacer la obra?

A) 29 B) 30 C) 31 D) 32 E) N.A

15.- Ocho obreros, trabajando 40 *días* a razón de 10 *horas* al día debían completar una obra. Seis *días* después de empezada la obra, el capatáz recibe la orden de trabajar dos *horas* al día menos debiendo completar la obra 14 *días* antes del plazo fijado. ¿Cuántos obreros se tuvo que contratar?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 15

16.- Si una cisterna suministra 320 *litros* de agua diariamente a c/u de las 30 familias que habitan un edificio quedando vacío el depósito a los 100 *días*. Por arreglos en las tuberías debe hacerse durar el agua de la cisterna 20 *días* más y además se alojarán en el edificio 10 familias más.
¿En cuánto debe reducirse el suministro diario de cada familia para atender esa eventualidad?

A) 90 B) 100 C) 120 D) 130 E) 150

17.- 12 obreros pueden hacer una obra en 28 *días*, trabajando juntos durante 8 *días* al término de las cuales se retiran 3 obreros continuando el resto durante 16 *días*. ¿Qué parte de la obra falta por hacer?

A) 3/7 B) 4/7 C) 1/7 D) 2/7 E) 5/7

18.- Un jardinero comienza a cortar el césped a las 10:00 *a.m* , cuando son las 11:20 *a.m* ha realizado los 4/5 partes del trabajo. ¿A qué hora termina de cortar el césped si sigue trabajando con la misma velocidad?

A) 11:36 *a.m* D) 12:00 *a.m*

B) 11:40 *a.m* E) 12:40 *a.m*

C) 11:52 *a.m*

19.- El modelo A de impresora es 3 veces más rápido que el modelo B que a su veces es 4 veces más rápido que el modelo C. ¿Cuánto tardará el modelo C en imprimir unos listados que el A imprime a 9 *min* 15 *s*?

A) 1 *h* 9' 45" D) 1 *h* 51' 45"

B) 2 *h* 09' E) 1 *h* 9' 45"

C) 1 *h* 08' 45"

20.- La volante de una máquina gira 400 vueltas en 15 *min* produciendo 324 *metros* de alambre en 1 *h* 30 *min*.
¿Qué tiempo empleará otra máquina del mismo rendimiento que la anterior si su volante da 600 vueltas en 18 *min* y produce 378 *m* de alambre?

A) 1*h* 20 *min* D) 1*h* 26 *min*

B) 1 *h* 22 *min* E) 1*h* 25 *min*

C) 1 *h* 24 *min*

21.- Dos cuadrillas de 34 obreros cada uno hacen un tramo de carreteras en partes iguales y luego de 72 *días* de comenzado la obra se observa que mientras a los primeros les falta 3/5 de la obra los otros han hecho 4/5. Si se quiere que el primer tramo de la carretera quede terminado en 140 *días*.
¿Cuántos obreros del segundo grupo deben pasar al primero?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

22.- Para determinar el volumen de agua de un estanque, le agregamos un volumen "V" de agua mezclada con "C" gramos de un colorante. Cuando el colorante esta bien disuelto en el volumen total, se recoge un volumen "V" de agua que contiene "*d*" *gramos* del colorante.
El volumen de agua en el estanque es:

A) $dv/(c-d)$

B) $(c+d)v/d$

C) $dv/(c+d)$

D) $(c+d)v/(c-d)$

E) $\dfrac{v(c-d)}{d}$

23.- Un grupo de 10 hombres con cierta cantidad de señoritas pueden realizar 3/4 de un trabajo en 75 *días*; si se aumenta 50 hombres y la misma cantidad de mujeres terminarían el trabajo en 5 *días*.
¿El grupo de mujeres, a cuántos hombres es equivalente?

A) 10/3 hombres

B) 3/10 hombres

C) 13/10 hombres

D) 13 hombres

E) 10 hombres

24.- 42 artesanos se comprometen a realizar un manto tipo Paracas en 24 *días* al cabo de 9 *días* solo han hecho 3/11 del manto. Si el jefe de los artesanos lo refuerza con 60 artesanos más que trabajan con 50% de rendimiento que los anteriores. ¿Podrían terminar la obra en el plazo fijado. Si no es posible, cuántos *días* más necesitan?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

25.- Si 10 mecanógrafos pueden tipear 500 hojas (todas las hojas de igual formato) en 5 *días* al cabo de 4 *días* han hecho 1/5 del total de hojas por lo tanto se contratan a 27 mecanógrafos que trabajan el doble que las anteriores Entonces la obra se terminó en:

A) un *día* después

B) dos *días* después

C) el *día* fijado

D) un *día* antes

E) tres *días* después

26.- Cierto volumen de arena puede ser transportado por 60 carros en 10 *días* o por 81 carretillas en 15 *días*.
¿Cuántos *días* se emplearán para transportar dicho volumen empleando todos los vehículos mencionados anteriormente?

A) 3 B) 4 C) 5,5 D) 6 E) 7

27.- Adrián es un comerciante de licores por lo cual viaja a diversos lugares. En una ocasión viaja a Iquitos y se aloja en un hostal prometiendo pagar S/. 200 por hospedaje si vende todo el licor por S/. 1 000 y S/. 350 si lo vende todo por S/. 2 000. Al final vendió todo por S/. 1 400.
¿Cuánto debe pagar de acuerdo a los tratos dichos?

A) 235 B) 268 C) 255

D) 260 E) 265

28.- Un grupo de obreros tienen proyectado terminar una obra en cierto número de *días* pero faltando 20 *días* para terminar la obra 12 de los obreros se retiran y no son reemplazados hasta después de 8 *días* por obreros cuya eficiencia es 20% menos. Luego de 2 *días* más se contratan un grupo que son 20% más eficientes que los recién contratados y logran cumplir con el plazo fijado. Si al iniciar la obra el jornal de cada obrero es *S/.* 25,00 ¿Qué cantidad de dinero de más se pago el último *día* de la obra?

A) *S/.* 325 D) *S/.* 250

B) *S/.* 552 E) *S/.* 240

C) *S/.* 138

29.- Se construye una obra con 4 máquinas que trabajan 10 *h/d* debiendo culminarla en 30 *días*. Al final del sexto día una de ellas se malogra durante "*x*" *días*.
Hallar el valor de "*x*" si desde el sétimo *día* las otras tres máquinas trabajan 12 *h/d* y cuando se repara la malograda esta solo puede trabajar 8 *h/d* sabiendo que se debe terminar en el plazo estipulado.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

30.- Tres sastres A, B y C confeccionan ternos. A hace 4 ternos en 2 *días*, B hace 5 ternos en 3 *días* y C hace 6 ternos en 4 *días*. Hacen un contrato para entregar 25 ternos, para lo cual trabajan inicialmente A y B, pero después de empezado los trabajos C reemplaza a B.
¿Cuántos *días* trabajan A y B si todos trabajan un número exacto de *días*?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

31.- Una guarnición de 2 250 hombres tiene provisiones para 70 *días*. Al terminar el día 29 salen 200 hombres. ¿Cuánto tiempo podrán durar las provisiones que quedan al resto de la guarnición?

A) 45 *días* B) 40 *días* C) 35 *días*

D) 43 *días* E) 38 *días*

32.- Un depósito tiene 5 conductos de desagüe de igual diámetro. Abiertos 3 de ellos se vacía el depósito en 5 *horas* y 20 *minutos*; abiertos los 5 en cuánto tiempo se vaciará

A) 1 *h* y 11 *min* D) 5 *h* y 15 *min*

B) 2 *h* y 12 *min* E) 2 *h* y 10 *min*

C) 3 *h* y 12 *min*

33.- Un tendero hurta en el peso, empleando una balanza de brazos desiguales, que miden 22 *cm* y 20 *cm*. Una mujer compra 4.4 *kg* de azúcar y el tendero pone las pesas sobre el platillo correspondiente al brazo menor de la balanza. La mujer compra otras 4.4 *kg* del mismo género y obliga al comerciante a poner las pesas en el otro platillo. En los 8.8 *kg*, cuánto dio de más o de menos el tendero.
Téngase presente al resolver este problema, que cuando una balanza está en equilibrio, los pesos que gravitan sobre los platillos son inversamente proporcionales a los brazos correspondientes de la balanza.

A) 40 *gramos* menos

B) 40 *gramos* más

C) 50 *gramos* más

D) 45 *gramos* menos

E) 65 *gramos* de menos

34.- Un caballo amarrado con una cuerda de 7,50 *m* de largo emplea 3 *días* para comer la hierba que está a su alcance. Si la cuerda tuviera 10,50 *m* de longitud, durante cuántos días más podría comer.

A) 4,8 *días* B) 9,8 *días* C) 6 *días*

D) 2,4 *días* E) 3,6 *días*

19

REGLA DE PORCENTAJE

19.1 TANTO POR CUANTO

El a por b de una cantidad N, es otra cantidad de la misma especie, tal que sea a la primera como a es b.

$$\frac{x}{N} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{b}(N)$$

Ejemplos :

1 por 10 significa 1 por cada 10 el cual es : $\frac{1}{10}$

3 por 7 significa 3 por cada 7 el cual es: $\frac{3}{7}$

Luego si aplicamos el tanto por cuanto a una cantidad sería.

$$a \text{ por } b \text{ de } N = \frac{a}{b}(N)$$

19.2 TANTO POR CIENTO

Es una o varias centésimas partes de una unidad cualquiera.

FORMA GENERAL:

$$x\%\ N = P$$

Donde :

x = Tanto por Ciento
N = Unidad Refencial
P = Porcentaje

Ejemplos :

1. El 50 % de S/. 40 es : $\frac{50}{100} \times 40 = 20$

2. El 20 % de 15m es : $\frac{20}{100} \times 15 = 3$

NOTA :

Por ser el tanto porciento un fracción, sus propiedades serán las mismas de las fracciones.

Observaciones :

Siempre cumplen que :

1. $N = 100\,\%\,N$

2. $a\,\%\,N \pm b\,\%\,N = (a \pm b)\,\%\,N$

3. a % del b % del c % de N es : $\dfrac{a}{100} \times \dfrac{b}{100} \times \dfrac{c}{100}\,N$

4. a % del b % de N es : $\dfrac{a \times b}{100}\,\%\,N$

Ejemplo : 20 % del 40% de N

es : $\dfrac{20 \times 40}{100}\,\%\,N = 8\,\%\,N$

19.3 APLICACION MERCANTIL

Para las transacciones comerciales los términos que se utilizan son los siguientes :

P_V ← Precio de venta P_C ← Precio de costo

G ← Ganancia   P ← Pérdida

G_B ← Ganancia bruta G_N ← Ganancia neta

$P_L = P_F = P_M$ ← Precio de lista, Precio fijado; Precio marcado.

3.1) Si en la transacción comercial hay ganancia.

$$P_V = P_C + \text{Ganancia} \rightarrow P_V = P_C + G_B$$

3.2) Pero si en la transacción comercial se originan gastos entonces será necesario considerar la siguiente relación:

$$G_B = G_N + \text{Gastos Adicionales}$$

3.3) Si en la transacción comercial se origina pérdida.

$$P_V = P_C - \text{Pérdida}$$

Observaciones :

1. Todo % de Ganancia o Pérdida que no refiera unidad se sobreentiende que es sobre el costo.
2. Todo descuento se hace sobre el precio de oferta o precio de lista, a no ser que el problema refiera otra unidad.

Ejemplo : Se vende artefacto en \$ 660, ganando el 20% ¿Cuál es la ganancia?

<u>Resolución</u>.- Sabemos que cuando hay ganancia la venta se compone de :

$$PV = PC + G$$

Por lo tanto :

$$660 = PC + 20\,\%\,PC$$

$$\overset{55}{\cancel{660}} = \frac{12\cancel{0}}{10\cancel{0}}\,PC$$

$\Rightarrow$ Precio Costo = 550

Por lo tanto la ganancia : $G = 660 - 550 =$ S/. 110

19.4 DESCUENTO SUCESIVO

Si tenemos dos descuentos sucesivos del a% más el b% se verifica que el descuento único (DU) equivalente será :

$$DU = \left[a + b - \frac{a.b}{100}\right]\%$$

APLICACIÓN :

El descontar sucesivamente el 20% más el 25% equivale a:

$$DU = \left[20 + 25 - \frac{20.25}{100}\right]\% = 40\%$$

Determinar el descuento único al descuento sucesivo del 20% más el 45% más el 25%

$$\underbrace{\underbrace{20\% \quad 45\%}_{DU_1} \quad 25\%}_{DU}$$

De donde

$$DU_1 = \left[20 + 45 - \frac{20.45}{100}\right]\% = 56\%$$

$$DU_1 = \left[56 + 25 - \frac{56.25}{100}\right]\% = 67\%$$

19.5 AUMENTO SUCESIVO

Para dos aumentos sucesivos del a% más el b% el aumento único (AU) equivalente es:

$$A.U = \left[a + b + \frac{a.b}{100}\right]\%$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- *Tenía 40 cuadernos. A mi amigo Jean Pierre le dí el 20%, a mi primo Pedro el 30% y a mi hermana Julia el 40%. ¿Cuántos cuadernos me quedan?*

A) 6 B) 4 C) 10 D) 8 E) 12

Resolución.-

De los 40 cuadernos se reparten 20%; 30% y 40%, que hace un total de 90%.

Lo que está quedando es : $(100 - 90)\% = 10\%$

$\therefore \quad 10\% \cdot 40 = \dfrac{10}{100} \cdot 40 = \boxed{4 \text{ cuadernos}}$ RPTA. B

2.- *Una señora lleva 2 000 huevos al mercado y encuentra que el 10% estaba malogrado y solo pudo vender el 60% de los buenos. ¿Cuántos quedaron sin vender?*

A) 360 B) 920 C) 540 D) 630 E) 720

Resolución.-

Tenemos en éste problema una aplicación a las operaciones y propiedades contempladas en la teoría.

1°) De los 2 000 huevos que lleva tenemos que : $\begin{cases} \text{Malogrados} : 10\% \cdot 2\,000 = 200 \\ \text{Para la venta}: 2\,000 - 200 = 1\,800 \end{cases}$

2°) De los 1 800 huevos que tiene para vender : $\begin{cases} \text{Vende} : 60\% \cdot 1\,800 = 1\,080 \\ \text{Quedan}: 2000 - 1\,080 = 920 \end{cases}$

$\therefore \quad \boxed{920}$ RPTA. B

3.- *En una reunión hay 100 personas de los cuales el 70% son mujeres. ¿Cuántas parejas deben llegar a la reunión para que el número de varones sea el 60% de las mujeres?*

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

Resolución.-

De las 100 personas tenemos que : $\begin{cases} \text{Mujeres} : 70\% \cdot 100 = 70 \\ \text{Varones} : 100 - 70 = 30 \end{cases}$

Sea el número de parejas que llegan "x" : $\begin{cases} \text{Mujeres} : x \\ \text{Varones} : x \end{cases}$

El número de personas de cada sexo es ahora : $\begin{cases} \text{Mujeres} : 70 + x \\ \text{Varones} : 30 + x \end{cases}$

Por dato sabemos que : $30 + x = 60\% \cdot (70 + x)$

Aplicando la propiedad distributiva : $30 + x = 60\% \cdot 70 + 60\% \cdot x$

Reduciendo términos semejantes : $40\% \,.\, x = 12$

Operando tenemos que : $\frac{40}{100}x = 12 \Rightarrow \boxed{x = 30}$ RPTA. C

4.- Un librero ha entregado a un colegio 156 ejemplares, por lo que ha cobrado S/. 421,20; a regalado un ejemplar por cada docena y además ha hecho un descuento del 10% sobre el importe total de la factura. ¿Cuánto costaba cada libro originalmente?.

A) S/. 3,25 B) S/. 3,00 C) S/. 2,70 D) S/. 3,50 E) S/. 4,00

Resolución -

Como por cada docena se llevó 13 ejemplares entonces :

El número de docenas vendidas es : $\frac{156}{13} = 12$ docenas

La venta de cada docena es : $\frac{421{,}2}{12} = S/. \ 35{,}1$

Pero a habido una rebaja del 10%, por lo tanto : $P_C - 10\% \, P_C = 35{,}1$

Operando tenemos que : $\frac{90}{100} P_C = 35{,}1$

Despejando obtenemos : $P_C = S/. \ 39{,}00$

Como nos piden el precio unitario : $\frac{39}{12} = \boxed{S/. \ 3{,}25}$ RPTA. A

5.- Lo que el dinero de A excede al de B equivale al 20% del dinero de C y el exceso de B a C equivale al 10% del dinero de A. Si A tiene S/. 200, ¿Cuánto tiene B?

A) S/. 190 B) S/. 180 C) S/. 170 D) S/. 160 E) S/. 150

Resolución.-

Para el presente problema debemos recordar que : N <> 100% N

Lo que tiene cada uno : $\begin{cases} A : S/. \ 200 \\ B : S/. \ x \\ C : S/. \ y \end{cases}$

Lo que B excede a C es : $x - y = 10\% \cdot 200$

Operando y despejando x : $x = y + 20 \quad \ldots (\alpha)$

Por dato A excede a B en : $200 - x = 20\% y \quad \ldots (\beta)$

Reemplazando (α) en (β) : $200 - (y + 20) = 20\%y$

Operando y reduciendo términos semejantes : $180 = 120\%y$

Despejando el valor de y : $y = S/.\ 150$

Reemplazando en (α) : $x = 150 + 20 \Rightarrow x = S/.\ 170$ RPTA. C

6.- De un conjunto de 400 personas, el 75% son varones y el resto mujeres. Sabiendo que el 80% de los varones y el 15% de las mujeres fuman. ¿Cuántas personas no fuman de dicho conjunto de personas?

A) 130 B) 135 C) 140 D) 145 E) 150

Resolución.-

400 personas : $\begin{cases} \text{Hombres}: 75\% \cdot 400 = 300 \\ \text{Mujeres}: 400 - 300 = 100 \end{cases}$

De los 300 hombres : $\begin{cases} \text{Fuman}: 80\% \cdot 300 = 240 \\ \text{No fuman}: 300 - 240 = 60 \end{cases}$

De las 100 mujeres : $\begin{cases} \text{Fuman}: 15\% \cdot 100 = 15 \\ \text{No fuman}: 100 - 15 = 85 \end{cases}$

Número de personas que no fuman : $60 + 85 = 145$ RPTA. D

7.- ¿A cuánto equivale los descuentos sucesivos de 20%, 20% y 20% de una misma cantidad?

A) 60% B) 52% C) 50% D) 48,8% E) 44%

Resolución.-

Se tiene 3 descuentos : $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 20\% \\ 20\% \end{array}\right\} DU_1 \\ 20\% \end{array}\right\} DU$

1°) Calculemos DU_1 para 20% y 20% : $DU_1 = \left(20 + 20 - \frac{20 \cdot 20}{100}\right)\% = 36\%$

2°) Calculemos DU para 36% y 20% : $DU = \left(36 + 20 - \frac{36 \cdot 20}{100}\right)\% = 48,8\%$ RPTA. D

8.- Cada dos años aumenta el alquiler de una casa en 10%. Si al comienzo del quinto año debe pagarse S/. 3 630. ¿Cuál fue el alquiler inicial?

A) S/. 2 800 B) S/. 2 900 C) S/. 3 000 D) S/. 3 100 E) S/. 3 200

Resolución.-

En los 4 años transcurridos ha habido dos aumentos sucesivos del 10% más 10%.

Aplicando aumentos sucesivos, para calcular el aumento único.

$$AU = \left(10 + 10 + \frac{10 \cdot 10}{100}\right)\% \quad \Rightarrow \quad AU = 21\%$$

Si el alquiler inicial es : 100%

Al comenzar el quinto año debe pagar : 100% + 21% · 100% = 121%

Aplicando Regla de Tres :
$$\begin{cases} 121\% & \rightarrow & 3\,630 \\ 100\% & \rightarrow & \text{Alquiler inicial} \end{cases}$$

Operando : $\text{Alquiler inicial} = \dfrac{100\% \cdot 3630}{121\%} = S/.\ 3\,000$ RPTA. C

9.- A un número se hace tres descuentos sucesivos del 20%, 25% y 20% al número que resulta se le hace 3 incrementos sucesivos de 20%, 25% y 20% resultando un número que se diferencia del original en 408 unidades. Determinar la suma de cifras del número original.

A) 3 ***B) 4*** ***C) 5*** ***D) 6*** ***E) 7***

Resolución.-

Lo primero que debemos determinar son los equivalentes a los descuentos sucesivos y aumentos sucesivos que nos plantea el problema.

1º) Calculando el descuento equivalente a : $\underbrace{20\%\ ;\ 25\%}_{DU_1}$ y 20%

Cálculo de DU_1 : $DU_1 = \left(20 + 25 - \dfrac{20 \cdot 25}{100}\right)\% = 40\%$

Cálculo del descuento único (DU) : $DU = \left(40 + 20 - \dfrac{40 \cdot 20}{100}\right)\% = 52\%$

2º) Calculando el aumento equivalente a : $\underbrace{20\%\ ;\ 25\%}_{AU_1}$ y 20%

Cálculo de AU_1 : $AU_1 = \left(20 + 25 + \dfrac{20 \cdot 25}{100}\right)\% = 50\%$

Cálculo del aumento único (AU) : $AU = \left(50 + 20 + \dfrac{50 \cdot 20}{100}\right)\% = 80\%$

Sea el número original : "N".

Primero al número se le descuenta su 52% : $N - 52\%N = 48\%N$

En segundo lugar al resultado se le aumenta su 80% : $48\%N + \underbrace{80\% \cdot 48\%N}_{38,4\%}$

Reduciendo términos semejantes : $86,4\%N$

Con respecto al número original a habido una disminución de : $N - 86,4\%N = 13,6\%N$

Por dato del problema tenemos que : $13,6\%N = 408$

Despejando "N" : $N = 3\,000$

Como nos piden la suma de las cifras de N : Σ cifras $= 3$ RPTA. A

10.- En un supermercado para determinar el precio de lista de los artículos multiplican los precios de compra por un factor K de tal manera que pueden descontar sucesivamente el 20% más el 20% y aún ganar el 80% del costo. Hallar K.

A) 0,75 B) 0,95 C) 0,35 D) 0,30 E) 45/16

<u>Resolución</u>.-

Debemos recordar que : $\begin{cases} P_V = P_C + \text{Ganancia} & ...(\alpha) \\ P_V = P_{Lista} - \text{Descuento} & ...(\beta) \end{cases}$

Del problema anterior sabemos que dos descuentos sucesivos del 20% y 20% equivalen a un único descuento del 36%.

Si asumimos que el precio de costo es : S/. 100

Entonces el precio de lista es : S/. (100K)

Reemplazando en (α) : $P_V = 100 + 80\% \cdot 100 \Rightarrow P_V = 180$ ... (I)

Reemplazando en (β) : $P_V = 100K - 36\% \cdot 100K \Rightarrow P_V = 64K$ ... (II)

Igualando (I) y (II) : $180 = 64K \Rightarrow K = \dfrac{180}{64} = \boxed{\dfrac{45}{16}}$ RPTA. E

11.- Se fija el precio de venta de cierto artículo en S/. 200 más que su precio de compra, pero al venderlo con un descuento del 20% se perdió S/. 1 en la venta. ¿Cuál fue finalmente el precio de venta del artículo?

A) S/. 880 B) S/. 1 200 C) S/. 1 400 D) S/. 1 500 E) S/. 804

<u>Resolución</u>.-

Debemos recordar que : $\begin{cases} P_V = P_C + \text{Ganancia} & ...(\alpha) \\ P_V = P_{Lista} - \text{Descuento} & ...(\beta) \\ P_V = P_C - \text{Pérdida} & ...(\theta) \end{cases}$

Por dato del problema : $P_{Lista} = P_{Fijado} = (P_C + 200)$

Reemplazando en (β) : $P_V = (P_C + 200) - 20\% \cdot (P_C + 200)$

Operando y reduciendo términos semejantes : $P_V = 80\% P_C + 160$ ... (I)

Reemplazando en (θ) : $P_V = P_C - 1$ ... (II)

Igualando (I) y (II) : $80\% P_c + 160 = P_C - 1$

Operando y reduciendo términos semejantes : $20\% P_C = 161 \Rightarrow \frac{20}{100} \cdot P_C = 161$

Por lo tanto : $P_C = S/. 805$

Reemplazando en (II) : $P_V = 805 - 1 =$ S/. 804 RPTA. E

12.- Un comerciante compra 500 casacas a S/. 20 cada uno y lo vende con un beneficio del 40%, de los cuales los gastos por movilidad y viáticos representan el 25% del beneficio neto. ¿Determinar a cuánto asciende el beneficio neto?

A) S/. 4 000 B) S/. 2 500 C) S/. 3 800 D) S/. 3 500 E) S/. 3 200

Resolución.-

Para el problema aplicaremos : $\begin{cases} P_V = P_C + G_{Bruta} \\ G_{Bruta} = G_{Neta} + \text{Gastos Adicionales} \end{cases}$

1°) Calculando el precio de costo : $P_C = 500 \cdot S/. 20 = S/. 10\,000$

2°) Calculando la ganancia bruta : $G_B = 40\% \cdot 10\,000 = S/. 4\,000$

3°) Calculando la ganancia neta : $4\,000 = G_{Neta} + 25\% \, G_{Neta}$

4°) Reduciendo términos semejantes y operando : $4\,000 = \frac{125}{100} G_{Neta}$

$\Rightarrow G_{Neta} =$ S/. 3 200 RPTA. E

13.- Rocío tiene un artículo que vale S/. 1 000 y se la vende a Liz con una ganancia del 10%. Liz la revende a Rocío con una pérdida del 10% de modo que:

A) Rocío gana S/. 110 B) Liz pierde S/. 110 C) Rocío gana S/. 120
D) Liz pierde S/. 120 E) Hay dos soluciones

Resolución.-

Debemos recordar que : $\begin{cases} P_V = P_C + \text{Ganancia} & ...(\alpha) \\ P_V = P_C - \text{Pérdida} & ...(\beta) \end{cases}$

Para Rocío : $\begin{cases} P_C = S/. 1\,000 \\ G = 10\% \cdot 1\,000 = S/. 100 \\ P_V = 1\,000 + 100 = S/. 1\,100 \end{cases}$

Para Liz : $\begin{cases} P_C = S/.\ 1100 \\ P\ = 10\% \cdot 1100 = S/.110 \\ P_V = 1100 - 110 = S/.990 \end{cases}$

En la operación Liz pierde : 1 100 - 990 = $\boxed{S/.\ 110}$ RPTA. B

14.- Una persona pregunta en una tienda qué descuento le pueden hacer sobre el precio de un repuesto, y le responden que el 20%, va a otra tienda y compra el mismo repuesto con un descuento del 25% ahorrándose así S/. 35. ¿Cuánto costaba el repuesto?

A) S/. 640 B) S/. 810 C) S/. 500 D) S/. 700 E) S/. 1 050

Resolución.-

1º) En la primera tienda le descuentan : 20%

2º) En la segunda tienda le descuentan : 25%

3º) Comprar en la 2da tienda a la persona le significa un ahorro de : 25% - 20% = 5%

4º) Si el 5% representa a S/. 35, entonces el costo (que está representado por el 100%) es :

$$P_C = 20 \cdot (S/.35) = \boxed{S/.\ 700}$$ RPTA. D

15.- Dos comerciantes han comprado mercancías por el valor de 720 000 UM cada uno. Al venderlos el primero obtiene un beneficio del 20% sobre el precio de venta y el segundo gana 60 000 más que el primero. Calcular que porcentaje del precio de venta resultó la ganancia del segundo comerciante.

A) 18% B) 20% C) 24% D) 36% E) 25%

Resolución.-

Lo primordial es calcular el precio de venta para el primer comerciante, ya que la ganancia está en términos de ella, con la cual podríamos determinar la ganancia del segundo comerciante.

Para el primer comerciante : $\begin{cases} P_C = 720\ 000 \\ G\ = 20\%\ .\ P_V \\ P_V = P_C + G \end{cases}$

Reemplazando : $P_V = 720\ 000 + 20\%\ .\ P_V$

Reduciendo términos semejantes y operando : $\frac{80}{100}\ P_V = 720\ 000$

Entonces : $\begin{cases} P_V = 900\ 000 \\ G\ = 20\% \cdot 900\ 000 = 180\ 000 \end{cases}$

Para el segundo : $\begin{cases} P_C = 720\,000 \\ G\ = 180\,000 + 60\,000 = 240\,000 \\ P_V = 960\,000 \end{cases}$

Se observa que la ganancia del segundo es la cuarta parte de su precio de venta.

Por lo tanto : $G = \frac{1}{4} \,.\, P_V <> 25\% \,.\, P_V$

$\therefore$ 25% RPTA. E

16.- Si a un número x se le suma su 80%, luego el resultado se le resta el 25% y por último al nuevo resultado se le suma su 40% el resultado final con respecto al resultado inicial aumentó en :

A) 40% ***B) 50%*** ***C) 60%*** ***D) 70%*** ***E) 89%***

Resolución.-

Aplicando la falsa suposición : Sea dicho número : 100%

1º) Aumentando el 80% de su valor : $100\% + 80\% \cdot 100\% = 100\% + 80\% = 180\%$

2º) Restando el 25% del resultado : $180\% - 25\% \cdot 180\% = 180\% - 45\% = 135\%$

3º) Aumentando el 40% del resultado : $135\% + 40\% \cdot 135\% = 135\% + 54\% = 189\%$

4º) Por lo tanto el aumento es de : $189\% - 100\% =$ 89% RPTA. E

17.- El 32% del 25% de N, es el 50% del 16 por 50 del 15 por 20 de M. Si el 12,5% de N es a% del 14 por 35 de M. Hallar "a".

A) 8,8 ***B) 25*** ***C) 8,50*** ***D) 46,875*** ***E) 93,75***

Resolución.-

En el presente problema tenemos una aplicación directa a las propiedades que hemos estudiado en la teoría.

Según dato :

Primer dato : $32\% \cdot 25\% \cdot N = 50\% \cdot \frac{16}{50} \cdot \frac{15}{20} \cdot M$

Operando : $\frac{32}{100} \cdot \frac{25}{100} \cdot N = \frac{50}{100} \cdot \frac{16}{50} \cdot \frac{15}{20} \cdot M$

Simplificando y transponiendo términos : $\frac{N}{M} = \frac{3}{2}$ ... (α)

Segundo dato : $12{,}5\% \,.\, N = a\% \cdot \frac{14}{35} \cdot M$

Operando : $\frac{12,5}{100} \cdot N = \frac{a}{100} \cdot \frac{14}{35} \cdot M$

Simplificando y transponiendo términos : $\frac{125}{4} \cdot \frac{N}{M} = a$ ... (β)

Reemplazando (α) en (β) : $\frac{125}{4} \cdot \frac{3}{2} = a \Rightarrow$ $a = 46,875$ RPTA. D

18.- Se tiene tres recipientes «A»; «B» y «C» cuyas capacidades son entre sí como 1, 2 y 3. Contienen vino, el primero 45% de su capacidad, el segundo el 30% y el tercero el 20%; se completan las capacidades con agua y luego se vierten las mezclas a un cierto recipiente «D». Determinar el porcentaje de vino que contiene la mezcla en D.

A) 22,25% ***B) 25%*** ***C) 27,5%*** ***D) 32,5%*** ***E) 35%***

<u>Resolución</u>.-

Como el porcentaje es un razón geométrica, a los volúmenes se le pueden dar valores apropiados, sin que la relación que se establezcan se altere.

Sean pues los volúmenes de los recipientes : 100; 200 y 300 *litros*.

Por lo tanto el volumen final del recipiente "D" es de 600 *litros*.

Calculando los volúmenes de vino que hay en cada recipiente :

Recipiente "A" : $45\% \cdot 100 = 45$ *litros* de vino

Recipiente "B" : $30\% \cdot 200 = 60$ *litros* de vino

Recipiente "C" : $20\% \cdot 300 = 60$ *litros* de vino

Volumen total de vino : $45 + 60 + 60 = 165$ *litros*

$\therefore$ Porcentaje de vino es : $\frac{165}{600} \cdot 100\% =$ 27,5% RPTA. C

19.- Si "W" aumenta en un 20%. ¿En cuánto aumentará "W^3"?

A) 20% ***B) 60%*** ***C) 80%*** ***D) 72,8%*** ***E) 64,8%***

<u>Resolución</u>.-

Para el presente problema debemos recordar que : $N <> 100\% \cdot N$

1º) W aumenta en su 20% : $W + 20\%W = 120W <> 1,2W$

2º) Elevando al cubo dicho resultado : $(1,2W)^3 = 1,728W^3$

3º) Por lo tanto el incremento es de : $1,728W^3 - W^3 = 0,728W^3 <>$ $72,8\%W^3$ RPTA. D

20.- Para fijar el precio de un artículo, un comerciante aumenta el costo en un 60%, pero al venderlo rebaja el 30% del precio fijado. ¿Qué porcentaje del costo resultó ganando?

A) 20% ***B) 10%*** ***C) 25%*** ***D) 30%*** ***E) 12%***

Resolución.-

Debemos recordar que : $P_V = P_{Fijado} - \text{Descuento} \quad ...(\alpha)$

Sea el precio de costo igual a : $P_C = 100\%$

Por lo tanto el precio fijado es : $P_{Fijado} = 100\% + 60\% = 160\%$

Calculando el Descuento : $\text{Descuento} = 30\% \cdot (160\%) = 48\%$

Reemplazando en (α) : $P_V = 160\% - 48\% = 112\%$

Calculando la ganancia : $G = 112\% - 100\% = 12\%$

$\therefore$ 12% RPTA. E

21.- Si gc es el porcentaje de ganancia con respecto al costo y gv es la misma ganancia pero en porcentaje del precio de venta. Determinar el valor de 1/gv - 1/gc.

A) 0,1 B) 0,01 C) 0,05 D) 0,02 E) 0,06

Resolución.-

Debemos recordar que : $P_V = P_C + G$

Del primer dato : $G = \frac{gc}{100} \cdot P_C \rightarrow P_C = \frac{100G}{gc} \quad ... (\alpha)$

Del segundo dato : $G = \frac{gv}{100} \cdot P_V \rightarrow P_V = \frac{100G}{gv} \quad ... (\beta)$

Restando: $(\beta) - (\alpha)$: $\underbrace{P_V - P_C}_{G} = \frac{100G}{gv} - \frac{100G}{gc}$

Factorizando tenemos que : $G = 100G\left(\frac{1}{gv} - \frac{1}{gc}\right)$

Simplificando G y dividiendo entre 100 : $\frac{1}{gv} - \frac{1}{gc} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ RPTA. B

22.- Si un comerciante dice que gana el 40% del costo de los artículos que vende. ¿Qué porcentaje del precio de venta está ganando?

A) 25 B) 60 C) 28(3/8) D) 28(4/7) E) 30

Resolución.-

Sabemos por el problema anterior que : $\frac{1}{gv} - \frac{1}{gc} = \frac{1}{100}$

Por dato sabemos que : $gc = 40$

Reemplazando : $\frac{1}{gv} - \frac{1}{40} = \frac{1}{100}$

Operando : $\frac{1}{gv} = \frac{1}{100} + \frac{1}{40} \Rightarrow gv = \frac{200}{7} = 28\frac{4}{7}\%$ RPTA. D

23.- Un comerciante compra 2 televisores en S/. 1 820 cada uno. luego los vendió. Si el primero lo vendió ganando el 30% del precio de venta y el segundo lo vendió perdiendo el 30% del precio de venta ¿Cuánto perdió o ganó en la transacción?

A) Ganó 360 ***B) Perdió 360*** ***C) Gana 400***

D) Perdió 400 ***E) No gana ni pierde***

Resolución.-

Debemos recordar que : $\begin{cases} P_V = P_C + \text{Ganancia} & ...(\alpha) \\ P_V = P_C - \text{Pé rdida} & ...(\beta) \end{cases}$

Por dato sabemos que : P_C = S/. 1 820 por cada televisor

1°) Para el primer televisor se gana

Reemplazando los datos en (α) : $P_{V1} = 1\ 820 + 30\%\ P_{V1}$

Transponiendo términos y operando : $70\%\ P_{V1} = 1\ 820$

Despejando tenemos que : P_{V1} = S/. 2 600

2°) Para el segundo televisor se pierde

Reemplazando en (β) : $P_{V2} = 1\ 820 - 30\%\ P_{V2}$

Transponiendo términos y operando : $130\%\ P_{V2} = 1\ 820$

Despejando tenemos que : P_{V2} = S/. 1 400

3°) De las dos operaciones tenemos : $\begin{cases} \text{Precio de costo total} = 1\,820 + 1\,820 = S/.\ 3\,640 \\ \text{Precio de venta total} = 2\,600 + 1\,400 = S/.\ 4\,000 \end{cases}$

4°) Se observa que de las dos operaciones a habido una ganancia de :

G = 4 000 - 3 640 = S/. 360 RPTA. A

24.- Un mayorista vende un producto ganando el 20% del precio de fábrica. Un distribuidor reparte estos productos a las tiendas de comercio ganando una comisión del 15% del precio al por mayor. La tienda remata el artículo haciendo un descuento del 10% del precio de compra del distribuidor. ¿En qué porcentaje se eleva el precio de fábrica del producto?

A) 24% ***B) 25%*** ***C) 26%*** ***D) 27%*** ***E) 28%***

Resolución.-

Debemos recordar que : $\begin{cases} P_V = P_C + \text{Ganancia} & ...(\alpha) \\ P_V = P_{\text{Lista}} - \text{Descuento} & ...(\beta) \end{cases}$

Sea el precio de fábrica : 100%

Mayorista : $\begin{cases} P_C = 100\% \\ G \ = 20\% \cdot 100\% = 20\% \\ P_V = 100\% + 20\% = 120\% \end{cases}$

Distribuidor : $\begin{cases} P_C = 120\% \\ G \ = 15\% \cdot 120\% = 18\% \\ P_V = 120\% + 18\% = 138\% \end{cases}$

Tienda : $\begin{cases} P_C = 138\% \\ \text{Descuento} = 10\% \cdot 120\% = 12\% \\ P_V = 138\% - 12\% = 126\% \end{cases}$

Luego el incremento ha sido : 126% - 100% = 26% RPTA. C

25.- Jaimito vende pescado ganando el 30% del costo entre las 5:00 y las 8:00; el 10% entre las 8:00 y 10:00 y perdiendo el 15% a partir de ese lapso. Si en un día ganó el 5% de lo invertido y sabiendo que vendió el 40% antes de las 8:00. ¿Qué porcentaje de lo comprado, lo vendió con pérdida?

A) 60% B) 52% C) 7,5% D) 8% E) 4%

<u>Resolución</u>.-

Si el costo total de la mercadería es: *S/.* 100

La ganancia al finalizar el día es de: 5% de *S/.* 100 = *S/.* 5

Entre las 5:00 y 8:00 vende el 40% de la mercadería : $\begin{cases} \text{Costo} : 40\% \cdot 100 = 40 \\ \text{Gana} : 30\% \cdot 40\% = 12 \end{cases}$

Entre las 8:00 y 10:00 vende el x% de la mercadería : $\begin{cases} \text{Costo} : x\% \cdot 100 = x \\ \text{Gana} : 10\% x \end{cases}$

A partir de las 10:00 vende el $(60 - x)$% de la mercadería : $\begin{cases} \text{Costo} \ : (60 - x)\% \cdot 100 = 60 - x \\ \text{Pierde} : 15\% \cdot (60 - x) \end{cases}$

Como la ganancia al final es de *S/.* 5 : $12 + 10\%x - 15\%(60 - x) = 5$

Operando y reduciendo términos semejantes : $25\%x = 2$

Despejando el valor de x : $x = 8$

El porcentaje que vende con pérdida es : $(60 - 8)\% =$ 52% RPTA. B

26.- El lechero compra originalmente 1 000 litros de leche del establo a S/. 0,40 cada litro y quiso ganar con ellos el 15% de su inversión; para esto lo vendió al dulcero el 1 por 8 del total, ganando el 12,5% por cada litro y al heladero los 4 por 7 del resto, con una ganancia del 25%. ¿A cómo debe venderle el litro de leche al dueño del restaurante, para que gane lo que se propuso?

A) S/. 0,38 B) S/. 0,39 C) S/. 0,40 D) S/. 0,41 E) S/. 0,42

Resolución.-

El costo total es : $1000 \cdot 0{,}40 = S/.\ 400$

Y su ganancia debe ser : $15\% \cdot 400 = S/.\ 60$

Al dulcero : $\begin{cases} \text{Costo} : \frac{1}{8} \cdot 400 = S/.\ 50 \\ \text{Gana} : 12{,}5\% \cdot 50 = S/.\ 6{,}25 \end{cases}$

Al heladero : $\begin{cases} \text{Costo} : \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot 400 = S/.\ 200 \\ \text{Gana} : 25\% \cdot 200 = S/.\ 50 \end{cases}$

En el restaurante : $\begin{cases} \text{Costo} : 400 - 50 - 200 = S/.\ 150 \\ \text{Gana} : 60 - 6{,}25 - 50 = S/.\ 3{,}75 \end{cases}$

De los 1 000 *litros* se despachó : $\begin{cases} \text{Dulcero} : \frac{1}{8} \cdot 1000 = 125 \textit{ litros} \\ \text{Heladero} : \frac{4}{7} \cdot 875 = 500 \textit{ litros} \\ \text{Restaurante} : 1000 - 125 - 500 = 375 \textit{ litros} \end{cases}$

Entonces la ganancia por *litro* : $\frac{3{,}75}{375} = S/.0{,}01$

Por lo tanto el precio de venta : $P_V = 0{,}40 + 0{,}01 = S/.\ 0{,}41$ RPTA. D

27.- En La Molina cada propietario pagaba de contribución el 12,5% del alquiler que le producían sus fincas, se aumentaron las contribuciones lo cual ahora tienen que pagar el 20% de lo que producen sus fincas. ¿En qué tanto por ciento deben aumentar los alquileres para obtener una renta doble que el anterior, libre de contribuciones?

A) 118,75% B) 18,75% C) 52,25% D) 112,75% E) 115%

Resolución.-

Sea el alquiler de las fincas inicialmente igual a: 100%.

1°) Del alquiler : $\begin{cases} \text{Impuesto} : 12{,}5\% \cdot 100\% = 12{,}5\% \\ \text{La renta} : 100\% - 12{,}5\% = 87{,}5\% \end{cases}$

2°) Del nuevo alquiler : { La renta : 2 . 87,5 % = 175%

3°) Como ahora se paga el 20% de contribuciones, entonces la renta representa el 80% del nuevo alquiler.

4°) Por lo tanto : 80% (Nuevo alquiler) = 175%

5°) Operando : Nuevo alquiler = 2,1875 <> 218,75%

6°) Por lo tanto el alquiler aumentó en : 218,75% - 100% = 118,75% RPTA. A

28.- Mucha (El popular Chicho) ha comprado 5 libros pagando por ellos S/. 60. Si decide venderlos cada uno ganando en el primero el 5% de su costo; en el segundo el 20% del precio de venta, en el tercero el 15% de su costo; en el cuarto el 25% de su precio de venta y en el quinto el 25% de su costo. Determinar a cuánto asciende su ganancia total. Si el costo de cada libro es el mismo.

A) S/. 12,20   B) S/. 12,25   C) S/. 12,30   D) S/. 12,40   E) S/. 12,35

Resolución.-

Debemos recordar que : $P_V = P_C + G$

Calculando el precio de costo de cada libro : $\frac{60}{5} = S/.\ 12$

En el primer libro : $G_1 = 5\% \cdot 12 = S/.\ 0{,}60$

En el segundo libro : $\begin{cases} P_{V2} = 12 + 20\% P_{V2} \xrightarrow{\text{operando}} P_{V2} = S/.\ 15 \\ G_2 = 20\% \cdot 15 = S/.\ 3 \end{cases}$

En el tercer libro : $G_3 = 15\% \cdot 12 = S/.\ 1{,}8$

En el cuarto libro : $\begin{cases} P_{V4} = 12 + 25\% P_{V4} \xrightarrow{\text{operando}} P_{V4} = S/.\ 16 \\ G_4 = 25\% \cdot 16 = S/.\ 4 \end{cases}$

En el quinto libro : $G_5 = 25\% \cdot 12 = S/.\ 3$

La ganancia total es de : $0{,}6 + 3 + 1{,}8 + 4 + 3 =$ S/. 12,40   RPTA. D

29.- El costo de un artículo es S/. C y se desea vender en S/. V, para obtener una ganancia de S/. G. Calcular la relación C/G sabiendo que al vender el artículo se hace dos descuentos sucesivos del 12,5% y del 20% y todavía se gana el 10% del 40% del precio de costo.

A) 35/17   B) 25/12   C) 41/20   D) 39/19   E) 83/41

Resolución.-

Por teoría sabemos que : $\begin{cases} DU = \left(a + b - \frac{a.b}{100}\right)\% & ...(\alpha) \\ P_V = P_C + \text{Ganancia} & ...(\beta) \\ P_V = P_{Lista} - \text{Descuento} & ...(\theta) \end{cases}$

1°) Calculemos el DU para 12,5% y 20% : $DU = \left(12{,}5 + 20 - \frac{12{,}5 \cdot 20}{100}\right)\% = 30\%$

2°) Por dato sabemos que V es el precio de lista por lo tanto en : $V = C + G$ ...(I)

3°) Al momento de venderlo se descuenta el 30% por lo tanto en (θ) : $P_V = V - 30\%V$

Reduciendo términos semejantes : $P_V = 70\%V$ ...(II)

4º) Pero tambien en dicha venta se gana :
G=10% · 40% . C : $P_V = C + 10\% \cdot 40\% . C$

Operando y reduciendo términos semejantes : $P_V = 104\%C$ ... (III)

5º) Igualando (II) y (III) : $70\%V = 104\%C$

6º) Cancelando 2% : $35V = 52C$ ... (IV)

7º) Reemplazando (I) en (IV) : $35(C+G) = 52C$

8º) Operando y transponiendo términos : $35G = 17C$

9º) Despejando convenientemente tenemos que : $\dfrac{C}{G} = \dfrac{35}{17}$ RPTA. A

30.- Una persona compra un cuadro y lo revende después ganando el 8%, pero si lo hubiera comprado un 5% más barato y lo hubiera vendido por S/. 6 más, la ganancia habría sido del 15%. ¿Cuál es el precio de compra?

A) 300 B) 350 C) 480 D) 450 E) 500

Resolución.-

1º) Sea el precio de costo inicial : P_C

2º) En la reventa se gana el 8% : $P_V = P_C + 8\%P_C \Rightarrow P_V = 108\%P_C$ ... (α)

3º) Ademas por dato tenemos que si : $\begin{cases} \text{Precio de costo} : P_C - 5\%P_C = 95\%P_C \\ \text{Precio de venta} : P_V + 6 \\ \text{Ganancia} : G = 15\% \cdot 95\%P_C = 14{,}25\%P_C \end{cases}$

4º) Tendriamos : $P_V + 6 = 95\%P_C + 14{,}25\%P_C$

Operando : $P_V + 6 = 109{,}25\%P_C$ ... (β)

5º) Reemplazando (α) en (β) : $108\%P_C + 6 = 109{,}25\%P_C \Rightarrow 6 = 1{,}25\%P_C$

Operando tenemos que : $6 = \dfrac{1{,}25}{100}P_C \xrightarrow{\text{despejando}} P_C = 480$

RPTA. C

31.- En la venta de un artículo que costó S/. 21 600 se ha incurrido en gastos adi-cionales por un total de S/. 1 728. ¿Qué precio se fijó para la venta, sabiendo que al venderlo se hace 2 descuentos sucesivos de 10% y 20%, y todavía se obtiene un beneficio neto igual al 80% del beneficio bruto?

A) 25 600 B) 30 500 C) 27 000 D) 28 000 E) 42 000

Resolución.-

Por teoria sabemos que : $\begin{cases} DU = \left(a+b-\dfrac{a.b}{100}\right)\% \\ P_V = P_C + G_{Bruta} \\ G_{Bruta} = G_{Neta} + \text{Gastosadicionales} \\ P_V = P_{Lista} - \text{Descuento} \end{cases}$

1°) Calculemos el DU para 10% y 20% : $DU = \left(10+20-\dfrac{10\cdot 20}{100}\right)\% = 28\%$

2°) Por dato tenemos que : $\begin{cases} G_{Neta} = 80\%\, G_{Bruta} \\ \text{Gastosadicionales} = 1728 \end{cases}$

Reemplazando : $G_{Bruta} = 80\%G_{Bruta} + 1\,728 \xrightarrow{\text{operando}} G_{Bruta} = 8\,640$

3°) Determinando el precio de venta :

$$P_V = 21\,600 + 8\,640 \quad \Rightarrow \quad P_V = 30\,240 \qquad ...(\alpha)$$

4°) Además al momento de la venta hay un descuento del 28%, luego :

$$P_V = P_{Lista} - 28\%P_{Lista} \quad \Rightarrow \quad P_V = 72\%P_{Lista} \qquad ...(\beta)$$

5°) Igualando (α) y (β) :

$$30\,240 = \frac{72}{100}P_{Lista} \quad \Rightarrow \quad P_{Lista} = 42\,000 = P_{Fijado}$$

$\therefore$ 42 000 RPTA. E

32.- Un hombre posee el 32,4% de las acciones de una compañía. Si vende el 75% de sus acciones, ganando el 26,1% y en el resto pierde el 21,7%. ¿A cuánto asciende el importe de las acciones de dicha compañía, si dicho accionista después de vender sus acciones obtuvo un beneficio de S/. 366 768?

A) S/. 8 000 000 ***B) S/. 1 450 000*** ***C) S/. 2 400 000***

D) S/. 1 800 000 ***E) S/. 1 200 000***

Resolución.-

Sea la cantidad de acciones que tiene el hombre : 100%

Primero vende el 75% de sus acciones : $\begin{cases} \text{Costo} : 75\% \\ \text{Gana} : 26{,}1\% \cdot 75\% = 19{,}575\% \end{cases}$

En la segunda vende el 25% restante : $\begin{cases} \text{Costo} : 25\% \\ \text{Pierde} : 21{,}7\% \cdot 25\% = 5{,}425\% \end{cases}$

Las dos ventas da un beneficio neto de : $19{,}575\% - 5{,}425\% = 14{,}15\%$

Pero por dato sabemos que : $14{,}15\% <> S/.\ 366\ 768$

Por lo tanto el 100% equivale a : $\dfrac{100\%}{14{,}15\%} \cdot 366\ 768 = S/.\ 2\ 592\ 000$

Pero sabemos que las acciones del hombre es 32,4% del total.

Por lo tanto tenemos la siguiente relación : $\dfrac{32{,}4}{100} \,.\, \text{Total} = 2\ 592\ 000$

Despejando tenemos que : $\text{Total} = \dfrac{100}{32{,}4} \cdot 2\ 592\ 000 = \quad 8\ 000\ 000$ RPTA. A

33.- Si el precio de un objeto se le recarga el 20%, resulta igual al precio de otro, descontando en un 30%. Si el primero cuesta S/. 17 500. ¿Cuál es el precio del segundo?

A) S/. 20 000 B) S/. 24 000 C) S/. 25 000 D) S/. 28 000 E) S/. 30 000

<u>Resolución</u>.-

Tenemos como dato : $\begin{cases} \text{Precio del primero : } S/.\ 175\ 000 \\ \text{Precio del segundo: } S/.\ P \end{cases}$

Planteando la ecuación del problema : $17\ 500 + 20\% \cdot 175\ 000 = P - 30\%P$

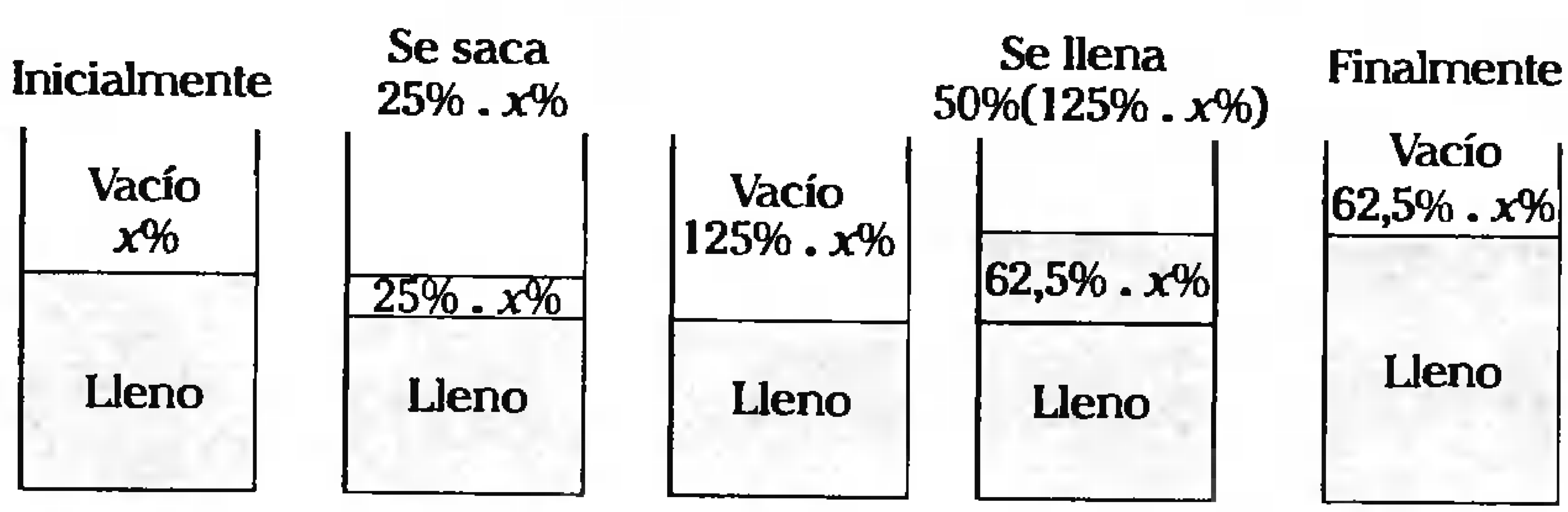
Operando tenemos que : $120\% \cdot 175\ 000 = 70\%P$

Simplificando : $P = S/.\ 30\ 000$ RPTA. E

34.- Para llenar un recipiente le faltaba "x%", luego se saca el 25% de lo que faltaba para llenar y después le agregamos el 50% de lo que falta para llenar; notándose que se llenó hasta el 75%. Determinar "x".

A) 25 B) 40 C) 30 D) 50 E) 35

<u>Resolución</u>.-



Por dato del problema sabemos que falta 25% para llenar el recipiente.

Del gráfico observamos que lo que falta para llenar el recipiente es $62,5\% \,.\, x\%$

Por lo tanto : $$62,5\% \,.\, x\% = 25\%$$

Operando tenemos que : $$\frac{62,5}{100} \cdot \frac{x}{100} = \frac{25}{100}$$

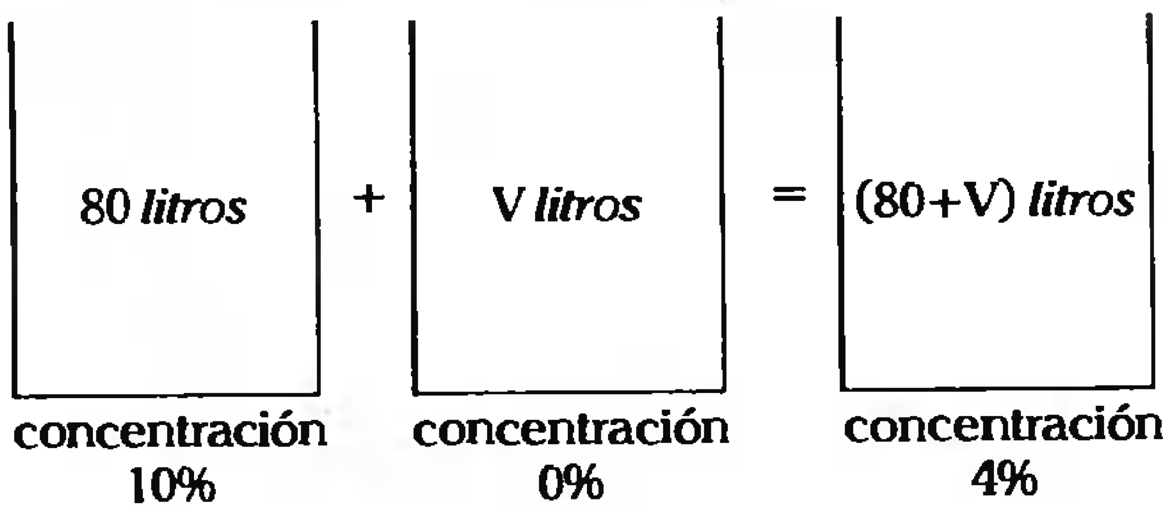
Simplificando y transponiendo términos : $\boxed{x = 40}$ RPTA. B

35.- El 10% del agua de mar es sal. ¿Cuántos litros de agua dulce se debe añadir a 80 litros de agua de mar para que la concentración de la sal sea del 4%?

A) 80 litros B) 90 litros C) 100 litros D) 110 litros E) 120 litros

<u>Resolución</u>.-

Sea "V" el volumen de agua dulce :



Del gráfico sacamos : $$10\% \cdot 80 + 0\% \,.\, V = 4\% \cdot (80 + V)$$

Aplicando la propiedad distributiva : $$10\% \cdot 80 + 0\% \,.\, V = 4\% \cdot 80 + 4\% \,.\, V$$

Reduciendo términos semejantes : $$6\% \cdot 80 = 4\% \,.\, V$$

Cancelando 4% : $\boxed{V = 120 \text{ } litros}$ RPTA. E

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- ¿De qué número es 513, el 43% menos?

A) 800 B) 905 C) 900

D) 910 E) 920

2.- El 50% de A es el 30% de B ¿Qué tanto por ciento de "5A + 7B" es "A + B"

A) 18% B) 36% C) 30%

D) 16% E) 20%

3.- Si Juan gastara el 30% de dinero que tiene y ganase el 28% de lo que le quedaría perdería S/. 156. ¿Cuánto tiene?

A) 1 400 B) 1 500 C) 1 600

D) 1 700 E) 1 800

4.- Un comerciante compra al contado un artículo con un descuento del 30% del precio de lista. ¿Qué porcentaje del precio de lista representa el precio de venta del comerciante si el debe ganar 20% del precio de compra?

A) 84 % B) 90 % C) 94 %

D) 80 % E) 70 %

5.- Si x se incrementa en 15%. ¿En qué porcentaje se incrementa x^2?

A) 32,25% B) 33,25% C) 34,25%

D) 35,25% E) 41,25%

6.- Un tejido se encoge al lavarse en 2 por 15 de su longitud y 5% de su ancho. Después de lavarse. ¿Qué porcentaje del área original es el área que ha quedado?

A) 72 2/3% D) 86 2/3%

B) 90 1/3% E) 82 1/3%

C) 69 1/3%

7.- Si Antonio compra un artículo a P *soles* y la vende a R *soles* ganado 25% sobre el precio de venta. Entonces el porcentaje de ganancia sobre el precio de compra es:

A) 25% B) 20% C) 30%

D) 22,5% E) 33 1/3%

8.- En una granja el 20% son patos, el 45% gallinas, y el 35% pavos. Si el número de gallinas fuera el doble ¿Qué porcentaje del total serían pavos?

A) 33% B) 32,4% C) 32,7%

D) 34% E) 24,13%

9.- Roberto y David forman una compañía del cual el primero tiene 90% de las acciones de dicha compañía. Si esta produce 136 000 *soles* en 1 996 y el contador de la compañía encuentra que el 15% de esta ganancia equivale al importe de las acciones de David. El capital de la firma es :

A) 20 400 D) 13 600

B) 103 200 E) 204 000

C) 200 000

10.- Si apuesto en un juego y pierdo 20% y en seguida pierdo 40% de lo que me quedaba entonces. de lo que tenía inicialmente tendré ahora.

A) 15% de 60% menos

B) 30% menos de 90% más

C) 20% más de 60% menos

D) 80% más de 60% menos

E) 20% menos de 90% más

11.- En 1 996 el precio de un bien fue el 20% más que en 1 995, el 50% más que 1 994 y el 100% más que 1 993. Si en el año 1 993 el bien costaba S/. 1 500 Cuánto costará en 1 997?

A) *S/.* 1 600 B) *S/.* 1 700 C) *S/.* 2 800

D) *S/.* 3 500 E) *S/.* 2 100

12.- Una motocicleta y un televisor se vendieron por *S/.* 1 200 cada uno, la motocicleta se vendió con un 20% menos del costo y del televisor con una ganancia del 20% del costo la transacción total dió por resultado.

A) Ni pérdida ni ganancia

B) Una pérdida de *S/.* 100

C) Una ganancia de *S/.* 100

D) Una ganancia de *S/.* 200

E) Una ganancia de *S/.* 250

13.- Un profesor de aritmética va ha una librería y compra un libro de *S/.* 240, un escalímetro en *S/.* 320 y una regla T en *S/.* 100 Por el libro obtiene un descuento del 15% y en los otros objetos el empleado le dice que le rebaje el 0,1 por cada *sol*. ¿Cuál fue el promedio de descuento que le hicieron al profesor?

A) 11,57% B) 12,57% C) 17,5%

D) 11,75% E) N.A.

14.- "Ofertas S.A" anuncia su rebaja increíble 30% de descuento en el precio de lista de cualquier objeto.
¿Cuánto será el precio de lista de un objeto que vale *S/.* 2 000 si la empresa recibe un beneficio del 40% del costo al venderlo haciéndole una rebaja anunciada?

A) 4 000 B) 4 600 C) 4 710

D) 4 715 E) 4 720

15.- Una persona "A" da a vender a otro "B" una cinta de acero, esta a su vez se le da otra "C"; toma el 10% y entrega el resto a "B", "B" toma el 5% de lo que recibe y le entrega al primero *S/.* 3 933.
¿En cuánto se vendió la cinta?

A) 4 700 B) 4 600 C) 4 710

D) 4 715 E) 4 720

16.- Al vender un objeto en *S/.* 2 530 ganó el 15% del 10% del 80% del costo. ¿A cuánto debe vender el objeto para ganar 20% del 25% del 60% del costo?

A) 2 575 B) 2 576 C) 2 577

D) 2 578 E) 2 579

17.- Una piedra pomez es introducida en agua; al sacarla se nota que el peso aumento en 36%. Si se saca la mitad del agua. ¿En qué porcentaje disminuirá el peso de la piedra pomez?

A) 14% B) 15% C) 13,5%

D) 13,2% E) 14,2%

18.- Una persona compra 20 objetos "A" y los vendió ganando el 40%; con el importe de la venta compra 60 objetos "B" y los vendió ganando 15%; con el importe de esa venta compra 828 objetos "C" al precio de *S/.* 9 800 la docena. ¿Cuánto costaron los objetos "A"?

A) 22 000 B) 21 000 C) 22 100

D) 22 200 E) 22 220

19.- Un sastre compra un cierto número de ternos a *S/.*240 el par. si los vende con una ganancia neta *S/.* 85 000 y los gastos ascendieron al 15% de la ganancia bruta. ¿Cuántos ternos compró si en total recibió 700 mil *soles*?

A) 4 000 B) 2 500 C) 6 000

D) 1 250 E) 5 000

20.- Aumentar $x\%$ y luego rebajar $y\%$. El precio de un artículo equivale a no variarlo. A cuanto equivale en aumento porcentual aumentarlo $x\%$ y luego $y\%$ si se sabe que "x" e "y" son números enteros no consecutivos.

A) 50% B) 25% C) 69%

D) 92% E) 68%

21.- Juan desea ir de una ciudad "A" a otra "B" distante a 120 *km*. Cuando había recorrido el 50% de lo que faltaba recorrer, observa que hace N *km* había recorrido la misma distancia que le faltaría recorrer, después de recorrer el 175% de las que ha recorrido realmente. Hallar N.

A) 35 B) 50 C) 60 D) 40 E) 30

22.- El costo de un artículo producido en los EE. UU. ha aumentado en un 20% y el precio del *dólar* se ha incrementado en un 25%. Si antes de los incrementos un comerciante importaba 600 artículos, ahora con la misma cantidad de dinero ¿Cuántos artículos importa?

A) 300 B) 200 C) 250 D) 350 E) 400

23.- Un jugador apostó todo el dinero que tenía ganado el 10% esta nueva cantidad lo apostó perdiendo el 80%, si la cuarta parte de lo que queda lo apostó ganando su 15%. Calcular cuánto dinero tenía al inicio sabiendo que si deposita el dinero con el cual se retira, a una tasa del 7% anual al cabo de 9 *meses* obtendría un interés de *S/.* 5 948,25.

A) 5 000 B) 10 000 C) 2 500

D) 40 000 E) N.A.

24.- Una vendedora compra una cantidad de huevos, va al mercado y comienza a venderlos. cuando ha vendido el 40% de los huevos ganando el 30% descubre que el 31% de los huevos que compra se han roto. En qué porcentaje deberá aumentar el precio original de los restantes para tener una ganancia del 10% del precio de costo.

A) 50% B) 100% C) 80%

D) 120% E) 350%

25.- Si en el "CEREZO" sirven la jarra de sangría con 80% de vino y el resto gaseosa, debido a la demanda el dueño del bar desea reducir la cantidad del vino y pensaba "puedo reducir el vino por jarra en un 5% o agregar en cada jarra un 10% de gaseosa", al final el dueño implementa las dos medidas ahorrando de esa manera 17 *mililitros* por jarra. ¿Qué cantidad de vino se servía inicialmente por jarra?

A) 0,60 *l* B) 0,81 *l* C) 0,88 *l*

D) 0,50 *l* E) 0,85 *l*

26.- Si a una cantidad C se le aumenta su 20%, a la cantidad obtenida se le aumenta nuevamente en 20% y así sucesivamente k veces obteniéndose en total al final 216/125 de "C". Hallar k.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

27.- El x por 80 más, del x por 90 menos de N es igual "N". ¿Cuánto por ciento menos de N es el x% menos su x% más?

A) 10% B) 1% C) 2% D) 5% E) 11%

28.- Un comerciante compra arroz y lo vendió perdiendo 50% y con el dinero compra azúcar y lo vendió ganando b%, luego con ese dinero compró frijoles que los vendió perdiendo el 50% por último gasta todo en arroz y lo vende ganando el b%. ¿Hallar "b" si la última ganancia es igual a 72% de la primera pérdida?

A) 40 B) 45 C) 50 D) 80 E) 75

29.- Determinar cuántas personas han entrado a un cine en total, sabiendo que ha mitad de función han entrado "h" personas pagando a% menos que el precio de la entrada, con lo que en la recaudación se ha visto que se ha perdido el b% del precio de la entrada de cada persona.

A) $(a - b)h/b$ B) $\frac{ah}{b}$ C) $(a + b)h/b$

D) $(ah + b)/b$ E) $(ah - b)/b$

30.- El sueldo de un empleado se aumenta bimestralmente en 20% con respecto al *mes* anterior pero el prefiere que le aumenten semestralmente el 82,8% ya que se beneficia con *S/.* 440 más. Si el 25% de dicho aumento semestral lo reparte proporcionalmente a las edades de sus hijos que son 6, 7 y 9 *años* respectivamente. ¿Cuánto le corresponde al menor?

A) 450 B) 350 C) 300

D) 250 E) 400

20

REGLA DE INTERES

20.1 INTERES O RENTA

Es la ganancia que produce un capital al ser prestado durante un cierto tiempo y bajo un porcentaje previamente acordada (Tasa).

20.2 ELEMENTOS DE LA REGLA DE INTERES

- Capital : C
- Tasa : r (% anual de interés)$\Rightarrow$ i = En Matemática Financiera
- Tiempo : t
- Interés : I
- Monto : M = C + I

20.3 CLASES

20.3A INTERES SIMPLE

Sea : C = S/. 10 000 r = 20% anual

C=S/. 10 000 C=S/. 10 000 C=S/. 10 000 C=S/. 10 000

S/. 2 000 S/. 2 000 S/. 2 000

I_1 = S/. 2 000 ; I_2 = S/. 4 000 ; I_3 = S/. 6 000

Observaciones :

- El interés no se capitaliza (es decir el interés no se suma al capital).
- La ganancia o interés por unidad de tiempo es consonante.
- El interés es D.P al tiempo, a la tasa y al capital.

Fórmulas para calcular el Interés Simple.

Para las siguientes fórmulas "r" es el porcentaje anual de interés.

$$\left.\begin{array}{l} I = \dfrac{C \cdot r \cdot t_{\text{años}}}{100} \\[2ex] I = \dfrac{C \cdot r \cdot t_{\text{días}}}{36\,000} \end{array}\right\} \text{(Año Comercial)}$$

$$\left.\begin{array}{l} I = \dfrac{C \cdot r \cdot t_{\text{meses}}}{1\,200} \\[2ex] I = \dfrac{C \cdot r \cdot t_{\text{días}}}{36\,500} \end{array}\right\} \text{(Año Común)}$$

Tasas Equivalentes :

$$\left.\begin{array}{l}
* \ 10\% \text{ mensual} < > 120\% \text{ anual (1 año = 12 meses)} \\
* \ 4\% \text{ bimestral} < > 24\% \text{ anual (1 año = 6 bimestres)} \\
* \ 8\% \text{ trimestral} < > 32\% \text{ anual (1 año = 4 trimestres)} \\
* \ 13\% \text{ semestral} < > 26\% \text{ anual (1 año = 2 semestres)}
\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Usualmente se trabaja con} \\ \text{tasas siempre anuales}\end{array}$$

20.3B INTERES COMPUESTO

Sea: $C = 10\,000$ $r = 20\%$ anual

a) Capitalización Anual

$C=10\,000$ $C_1=12\,000$ $C_2=14\,400$ $C_3=17\,280$

|———|———|———|

2 000 2 400 2 880

b) Capitalización Semestral

Si la tasa es 20% anual será equivalente a 10% semestral.

$C=10\,000$ $C_1=11\,000$ $C_2=12\,100$ C_3

|———|———|———|

1 000 1 100 1 210

Fórmula para calcular el Interés Capitalizable (Interés Compuesto).

$$M = C\,(1 + i)^n$$

Donde : M $\leftarrow$ es monto
C $\leftarrow$ capital inicial
n $\leftarrow$ # de períodos
i $\leftarrow$ tanto por 1 en el período del capital

Ejemplo :

Sea : C = 10 000 ; tasa : 20% anual ; $t = 3$ *años*

a) Capitalización Anual ($n = 3$)

20% anual < > 0,20 (tanto por 1)

$$\therefore \qquad M = 10\,000\,(1 + 0{,}20)^3 = 17\,280$$

b) Capitalización Semestral ($n = 6$)

20% anual < > 10% semestral < > 0,1 (tanto por 1)

$$\therefore \qquad M = 10\,000\,(1 + 0{,}10)^6 = 17\,715$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Hallar el interés cuatrimensual que produce 1 200 soles a 2,1% semanal.

A) 224,00 B) 194,40 C) 432,00 D) 326,00 E) 323,20

Resolución.-

En las aplicaciones de fórmulas, para el cálculo del interés, debemos tener presente que la tasa debe ser anual.

Tenemos por dato : $C = S/.\ 1\,200$, y , $t = 4$ meses

Convirtiendo la tasa semanal dada a una tasa anual, tendremos :

Tasa = 2,1 % semanal <> 0,3% diario

<> 108% anual

De este modo al aplicar la fórmula correspodiente, tendremos :

$$I = \frac{1\,200 \cdot 4 \cdot 108}{1\,200} = S/.\ 432,\ 00$$ RPTA. C

2.- Durante cuántos días se prestó un capital de S/. 56 000, al 15% trimestral para que produzca un monto de S/. 57 680.

A) 20 días B) 15 días C) 12 días D) 18 días E) más de 20 días

Resolución.-

Debemos recordar que : $\begin{cases} I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{36\,000}\ (t \to \textit{días}) \quad .... (\alpha) \\ M = C + I \end{cases}$

Despejando el interés : $I = M - C$

Tenemos por dato : $\begin{cases} C = 56\,000 \\ r\% = 15\% \text{ trimestral} <> 60\% \text{ anual} \\ M = 57\,680 \\ t = ?\ (\textit{días}) \end{cases}$

Determinando el interés en (β) : $I = 56\,780 - 6\,000 \Rightarrow I = 1\,680$

Reemplazando en (α) : $1\,680 = \dfrac{56\,000 \cdot 60 \cdot t}{56\,000}$

Simplificando y transponiendo términos : $t = 18$ *días* RPTA. D

3.- ¿A qué tasa anual se ha prestado un capital, para que en 45 días produzca un interés que es igual al 6% del capital prestado?

A) 60% ***B) 4%*** ***C) 12%*** ***D) 40%*** ***E) 48%***

Resolución.-

Sea el capital "C"

Sabemos que : $I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{36\ 000}$ $\cdots (\alpha)$

Por dato tenemos : $\begin{cases} C \\ t \ \ = 15 \ \textit{días} \\ r\% = \ ? \\ I \ \ = 6\% \cdot C \end{cases}$

Reemplazando en (α) : $6\% \ . \ C = \dfrac{C \cdot r \cdot 45}{36\ 000}$

Simplificando reduciendo términos : $r = 48$

Por lo tanto la tasa de interés anual es : $r\ \% = 48\%$ RPTA. E

4.- ¿En cuánto se convierte un capital de S/. 8 800, colocados en un banco durante 250 días; si la tasa de interés del banco es 6% cada 80 días?

A) S/. 14 400 ***B) S/. 9 500*** ***C) S/. 10 000*** ***D) S/. 10 450*** ***E) S/. 12 000***

Resolución.-

En el problema nos piden determinar el valor del Monto : $M = C + I$

Por dato sabemos que cada 80 *días* se gana un interés de : 6% de 8800 = *S/.* 528

Además se observa que a mayor tiempo que se impone un capital, se gana mayor interés, por lo tanto podemos concluir que el Interés es directamente proporcional al Tiempo, por lo cual podemos desarrollar el problema mediante una regla de tres simple.

Interés	D.P.	Tiempo
528	$\rightarrow$	80
I	$\rightarrow$	250

Operando : $I = \dfrac{250 \cdot 528}{28} = S/.\ 1\ 650$

Calculando el monto : $M = 8\ 800 + 1\ 650 \Rightarrow M = 10\ 450$ RPTA. D

5.- Se impuso un capital por dos años y el monto fue 6000, si se hubiera impuesto por 3 años más, el monto hubiera sido 9000. ¿Cuál fue la tasa de interés?

A) 10% ***B) 15%*** ***C) 20%*** ***D) 25%*** ***E) 30%***

Resolución.-

Debemos recordar que en el problema anterior observamos que el Interés y el Tiempo son dos magnitudes directamente proporcionales.

Si el capital es "C" y el interés anual "I" entonces el interés en : $\begin{cases} 2 \text{ años} : 2I \\ 2 \text{ años} : 2I \end{cases}$

Según datos tenemos que : $\begin{cases} C + 2I = 6\,000 \quad ..... \text{(I)} \\ C + 5I = 9\,000 \quad ..... \text{(II)} \end{cases}$

Restando (II) y (I) : $3I = 3\,000 \xrightarrow{\text{Sacando tercia}} I = S/.\ 1\,000$

Reemplazando en (I) y despejando : $C = S/.\ 4\,000$

Pero el interés es un porcentaje del Capital : $1\,000 = r\,\%\ .\ 4\,000$

Despejando tenemos que : $r\,\%\ \frac{1}{4}$ < > 25 anual RPTA. D

6.- Dos capitales de S/. 3 000 y S/. 2 000, son impuestos durante el mismo tiempo al 60% y 30%. Determinar este tiempo, si se sabe que al término de este, los montos son iguales.

A) 6 meses B) 9 años C) 40 meses D) 6 años E) 9 meses

Resolución.-

Como en un mismo tiempo "t" los montos deben ser iguales, entonces el menor de los capitales se debe imponer al 60% y al mayor de los capitales al 30%.

Sabemos además que : $M = C + I$

Calculando los montos : $\begin{cases} M_1 = 3\,000 + \dfrac{3\,000 \cdot 30 \cdot t}{1200} = 3\,000 + 75t \quad ..... (\alpha) \\ M_2 = 2\,000 + \dfrac{2\,000 \cdot 60 \cdot t}{1200} = 2\,000 + 100t \quad ..... (\beta) \end{cases}$

Igualando (α) y (β) : $3\,000 + 75t = 2\,000 + 100\,t$

Reduciendo términos semejantes : $1\,000 = 25t$

Cancelando el factor 25 : $t = 40$ *meses* RPTA. C

7.- Si la suma de un millón de soles se divide en 2 partes, de modo que al ser impuesta una de las partes al 7% y la otra al 9% anual producen igual interés. ¿Cuál es una de las partes?

A) S/. 900 000 B) S/. 77 777 C) S/. 562 500 D) S/. 800 000 E) S/. 630 000

Resolución.-

Sean los capitales : C_1 y C_2 y "t" el tiempo en *meses* en la cual los intereses son iguales.

Según el enunciado : $C_1 + C_2 = 1\,000\,000$ ... (I)

Determinando los intereses : $\begin{cases} I_1 = \dfrac{C_1 \cdot 7 \cdot t}{1200} \\ I_2 = \dfrac{C_2 \cdot 9 \cdot t}{1200} \end{cases}$

Igualando los intereses : $\dfrac{C_1 \cdot 7 \cdot t}{1\,200} = \dfrac{C_2 \cdot 9 \cdot t}{1\,200}$

Simplificando y transponiendo términos : $\dfrac{C_1}{9} = \dfrac{C_2}{7}$

Aplicando propiedades de proporciones : $\dfrac{C_1}{9} = \dfrac{C_2}{7} = \dfrac{C_1 + C_1}{9+7}$ ... (II)

Reemplazando (I) en (II) : $\dfrac{C_1}{9} = \dfrac{C_2}{7} = \dfrac{1\,000\,000}{16} = 62\,500$

Por lo tanto : $\begin{cases} C_1 = 9 \cdot 62\,500 = 562\,500 \\ C_2 = 7 \cdot 62\,500 = 437\,500 \end{cases}$ RPTA. C

8.- La tercera parte de un capital se impone al 80% anual y el resto al 30% anual, si el interés producido en 5 meses por todo el capital fue S/. 3 850.
¿Cuál era el capital?

A) S/. 25 200 B) S/. 20 000 C) S/. 19 600 D) S/. 19 800 E) S/. 25 000

Resolución.-

Sea el capital que se pide calcular : "C".

El capital se divide en dos partes : $\begin{cases} \dfrac{C}{3} \\ \dfrac{2}{3}C \end{cases}$

Por dato tenemos que : $\begin{cases} \text{La primera : } \begin{cases} \dfrac{C}{3} \\ 80\% \\ 5\ \textit{meses} \end{cases} \\ \text{La segunda : } \begin{cases} \dfrac{C}{3}C \\ 30\% \\ 5\ \textit{meses} \end{cases} \end{cases}$

Calculando los intereses : $\begin{cases} I_1 \quad \dfrac{\frac{C}{3}\cdot 80\cdot 5}{1200} = \dfrac{4C}{36} \\ I_2 \quad \dfrac{\frac{2}{3}C\cdot 30\cdot 5}{1200} = \dfrac{3C}{36} \end{cases}$

Por dato tenemos que : $I_1 + I_2 = 3\,850$

Reemplazando : $\dfrac{4C}{36} + \dfrac{3C}{36} = 3\,850 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{7C}{36} = 3\,850$

Despejando : $C =$ S/. 19 800 RPTA. D

9.- La quinta parte de un capital se presta al 60% anual y el resto al 50% anual, al cabo de 15 meses produce un monto de 79 200 soles. Hallar el capital.

A) S/. 36 000 B) S/. 40 000 C) S/. 45 000 D) S/. 48 000 E) S/. 54 000

Resolución.-

Sea el capital pedido : "5C".

Recordemos que : $M = C + I$

Determinando el monto de cada parte : $\begin{cases} M_1 = C + \dfrac{C\cdot 60\cdot 15}{1\,200} \Rightarrow M_1 = 1{,}75C \\ M_2 = 4C + \dfrac{4C\cdot 50\cdot 15}{1\,200} \Rightarrow M_2 = 6{,}50C \end{cases}$

Por dato tenemos que : $M_{Total} = M_1 + M_2 = 79\,200$

Reemplazando y operando : $1{,}75C + 6{,}50C = 79\,200 \quad \Rightarrow \quad 8{,}25C = 79\,200$

Despejando : $C =$ S/. 9 600

Luego el capital pedido es : $5C = 5\,.\,9\,600 =$ S/. 48 000 RPTA. D

10.- Si un capital se duplicase y la tasa de interés se triplicase, el interés en el mismo tiempo seria 20 000 mayor. ¿Cuál era el interés primitivo?

A) 2 000 B) 4 000 C) 5 000 D) 8 000 E) 7 500

Resolución.-

Debemos recordar que : $\begin{cases} \text{Interés D.P. Capital} \\ \text{Interés D.P. Tasa} \end{cases}$

Sea el interés primitivo que se pide : I

Aplicando la regla de tres compuesta :

Capital	Tasa	Interés
C	r %	I
2C	$(3r)$%	I_{Nuevo}

Desarrollando tenemos que : $I_{Nuevo} = I \cdot \frac{2C}{C} \cdot \frac{(3r)\%}{r\%}$

Simplificando : $I_{Nuevo} = 6I$

Pero por dato tenemos que : $6I - I = 20\,000$

Por lo tanto el interés primitivo es : $I = 4\,000$ RPTA. B

11.- Se prestó un capital al 21% trianual, si se hubiera impuesto 2 años más, a la misma tasa, el interés hubiera sido el 125% del anterior. ¿Cuál fue el tiempo de imposición?

A) 6 años ***B) 7 años*** ***C) 8 años*** ***D) 9 años*** ***E) 10 años***

Resolución.-

Del problema número 4 sabemos que el Interés y el Tiempo son dos magnitudes directamente proporcionales.

Sea el tiempo pedido : "t" en años.

Aplicando la regla de tres compuesta :

Interés	D.P.	Tiempo
I	$\rightarrow$	t
125% I	$\rightarrow$	$t + 2$

Desarrollando : $t + 2 = \frac{125\%\ I}{100\%\ I} \cdot t$

Cancelando 25% I : $t + 2 = \frac{5}{4} \cdot t \xrightarrow{\text{Reduciendo términos}} \frac{t}{4} = 2$

Despejando : $t = 8$ *años* RPTA. C

12.- El interés obtenido por un capital es equivalente a los 7/31 del monto. ¿Que interés se obtiene si se presta S/. 40 000 en un tiempo triple del anterior y a la misma tasa?

A) S/. 34 000 ***B) S/. 36 000*** ***C) S/. 370 000*** ***D) S/. 35 000*** ***E) S/. 38 000***

Resolución.-

Recordemos que : $\begin{cases} \text{Capital D.P. Interés} \\ \text{Tiempo D.P. Interés} \end{cases}$

También sabemos que : $M = C + I$

Por dato tenemos lo siguiente : $I_1 = \frac{7}{31} \cdot (C + I_1) \Rightarrow I_1 = \frac{7}{24} C$

Aplicando la regla de tres :

Capital	Tiempo	Interés
C	t	$\frac{7}{24} . C$
40 000	$3t$	I

Desarrollando la regla de tres : $I = \frac{7}{24} C . \frac{40\ 000}{C} . \frac{3t}{t}$

Simplificando tenemos que el interés es : $I =$ S/. 35 000 RPTA. D

13.- Suponiendo que el año tiene 10 meses de 20 días cada uno; ¿Qué interés simple ganará un capital de 1 000 000 soles?, colocados al 5% mensual durante 3 meses 15 días.

A) S/. 327 500 B) S/. 564 790 C) S/. 175 000 D) S/. 187 500 E) S/. 375 000

Resolución.-

Como 20 *días* equivale a un mes, por lo tanto 15 *días* equivale a $\frac{15}{20}$ *meses* = 0,75 *meses*.

De donde tenemos que 3 *meses* 15 *días* equivale a 3,75 *meses*.

Por dato tenemos que al mes se gana el 5% de 1 000 000, es decir : S/. 50 000.

Por lo tanto en 3,75 *meses* se gana : 3,75 (50 000) = S/. 187 500 RPTA. D

14.- Si S/. 18 000 se coloca al 4% durante un cierto tiempo, al cabo del cuál se retira el capital e interés y se coloca todo al 5% durante un tiempo superior en medio año al anterior. Sabiendo que la nueva colocación produce un interés de S/. 2 970. Hallar el tiempo de la primera colocación.

A) 11 meses B) 22 meses C) 15 meses D) 28 meses E) 30 meses

Resolución.-

Sea el tiempo pedido en meses "t".

Para la primera colocación : $\begin{cases} I = \dfrac{18\ 000 . 4 . t}{1\ 200} \Rightarrow I = 60t \\ \therefore M = 18\ 000 + 60t \end{cases}$

El nuevo capital es : $(18\ 000 + 60\,t)$

Calculando el interés que produce : $2\ 970 = \dfrac{(18\ 000 + 60\,t) . 5 . (t+6)}{1\ 200}$

Cancelando 300 en la fracción : $2\ 970 = \dfrac{(300+t)\,(t+6)}{4}$

Operando convenientemente : $2\ 970 . 4 = (300 + t)\,(t + 6) = 330 . 36$

Por analogías : $300 + t = 330 \Rightarrow t = 30$ *meses* RPTA. E

15.- Un industrial ha pedido un préstamo al banco con interés simple por 6 meses, al cabo de los cuales debe pagar S/. 14 724; como no puede saldar la deuda, solicita una prorroga y 3 meses después abona S/. 14 886. ¿Qué porcentaje anual de interés le cobró el banco?

A) 20% B) 45% C) 4,5% D) 13,5% E) 9%

Resolución.-

Si por tres meses más le cobró : $14\,886 - 14\,724 = S/.\ 162$ de interés

Entonces por 6 meses el interés será de : $162 \cdot 2 = S/.\ 324$

Por lo tanto el capital inicial es de : $14\,724 - 324 = S/.\ 14\,400$

Aplicando la fórmula de interés : $324 = \dfrac{14\,400 \cdot 6 \cdot r}{1\,200}$

Simplificando : $r\,\% = 4,5\,\%$ RPTA. C

16.- Se tiene dos capitales, el segundo es el doble del primero; el primero produce un monto de S/. 22 500 en 12 años 6 meses y el segundo un monto de S/. 40 000 en 10 años. Los dos a la misma tasa de interés. Calcular dicha tasa anual.

A) 12% B) 20% C) 10% D) 15% E) 18%

Resolución.-

Sean los capitales : $\begin{cases} \text{Primero} : C \\ \text{Segundo} : 2C \end{cases}$

Su en un año el capital C produce un interés igual a I, entonces 2C produce 2I de interés.

Observación : Si en un año el interés es I, entonces en t años será : $t \cdot I$

Por datos tenemos :

$$\begin{cases} \text{Para el primero} : \quad C + 12,5\,I = 22\,500 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha) \\ \text{Para el segundo} : \ 2C + 10\,.(2\,I) = 40\,000 \xrightarrow{\div 2} C + 10\,I = 20\,000 \ldots\ldots (\beta) \end{cases}$$

Restando $(\alpha) - (\beta)$: $2,5\,I = 2\,500$

Dividiendo entre 2,5 : $I = 1\,000$

Reemplazando en (α) : $C = 10\,000$

Calculando la tasa : $r\,\% = \dfrac{1\,000}{10\,000} \cdot 100\% \Rightarrow r\,\% = 10\%$ RPTA. C

17.- La diferencia de dos capitales es S/. 1 500, si se impone una al 8% y el otro al 4% anual, al cabo de 18 meses los montos son iguales. ¿Cuál es el capital mayor?

A) S/. 28 000 B) S/. 26 500 C) S/. 245 000 D) S/. 27 500 E) S/. 29 000

Resolución.-

Si recordamos el problema 6, vimos que si los montos son iguales, el mayor capital está colocado a una menor tasa y el menor capital a la mayor tasa.

Sean los capitales : C_1 y C_2 , donde : $C_1 > C_2$

Por dato tenemos que : $C_1 - C_2 = 1\,500$ ... (α)

Calculando los montos :
$$\begin{cases} M_1 = C_1 + \dfrac{C_1 . 4 . 18}{1200} = \dfrac{1272}{1200} C_1 \\ M_2 = C_2 + \dfrac{C_2 . 8 . 18}{1200} = \dfrac{1344}{1200} C_2 \end{cases}$$

Igualando los montos : $\dfrac{1\,272}{1\,200} C_1 = \dfrac{1\,344}{1\,200} C_2$

Simplificando y transponiendo términos : $\dfrac{C_1}{56} = \dfrac{C_2}{53}$

Aplicando propiedades de proporciones : $\dfrac{C_1}{56} = \dfrac{C_2}{53} = \dfrac{C_1 - C_2}{56 - 53}$ .... (β)

Reemplazando (α) en (β) : $\dfrac{C_1}{56} = \dfrac{1\,500}{3}$

Despejando : $C_1 = 56 . \dfrac{1\,500}{3} =$ S/. 28 000 RPTA. A

18.- Una persona al recibir su liquidación opta por depositarlo en tres instituciones financieras; los 4/9 en un banco; los dos quintos del resto en una mutual y el restante en una caja municipal; de modo que después de 5 años producen montos iguales. Si las tasas anuales que le paga el banco y la mutual suman 27,5%. ¿Qué porcentaje anual le paga la caja municipal?

A) 10% ***B) 25%*** ***C) 18,4%*** ***D) 22,5%*** ***E) 19,5%***

Resolución.-

Si asumimos que el capital es 9C :
$$\begin{cases} \text{Banco} : \dfrac{4}{9} . (9C) = 4C \\ \text{Mutual} : \dfrac{2}{5} . (9C - 4C) = 2C \\ \text{Caja M.} : 3C \end{cases}$$

Pasados 5 años los montos son :
$$\begin{cases} M_1 : 4C + \dfrac{4C . r_1 . 5}{100} \\ M_2 : 2C + \dfrac{2C . r_2 . 5}{100} \\ M_3 : 3C + \dfrac{3C . r_3 . 5}{100} \end{cases}$$

Por dato sabemos que : $r_1 + r_2 = 27{,}5$

Ademas sabemos que : $M_1 = M_2$

Reemplazando : $4C + \dfrac{4C \cdot r_1 \cdot 5}{100} = 2C + \dfrac{2C \cdot r_2 \cdot 5}{100}$

Multiplicando por $\dfrac{100}{C}$ y factorizando : $20 \cdot (20 + r_1) = 10 \cdot (20 + r_2)$

Despejando convenientemente :

$$\frac{(20+r_1)}{(20+r_2)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{(20+r_1)}{(20+r_1)+(20+r_2)} = \frac{1}{1+2}$$

Reemplazando el valor de $r_1 + r_2 = 27{,}5$: $\begin{cases} r_1 = 2{,}5 \\ r_2 = 25 \end{cases}$

Además : $M_2 = M_3$

Reemplazando : $2C + \dfrac{2C \cdot 25 \cdot 5}{100} = 3C + \dfrac{3C \cdot r_3 \cdot 5}{100}$

Simplificando y transponiendo términos : $r_3\% = 10\%$ RPTA. A

19.- Se deposita en la caja municipal de Lima S/. 150 el 1 de Marzo; S/. 80 el 10 de Julio y S/. 100 el 10 de Agosto. Se retira el 1 de Octubre S/. 50 del capital total. ¿Cuál será mi capital el 1 de Enero siguiente, si la tasa es de 8% anual? (Depósitos restantes e interés)

A) 284,30 B) 310,20 C) 311,51 D) 345,13 E) 295,4

<u>Resolución</u>.-

Hasta el 1 de Octubre : $\begin{cases} t_1 = 214 \text{ días} \\ t_2 = 83 \text{ días} \\ t_3 = 52 \text{ días} \end{cases}$

Cálculo del interés : $I = \dfrac{150 \cdot 214 \cdot 8}{36\ 000} + \dfrac{80 \cdot 83 \cdot 8}{36\ 000} + \dfrac{100 \cdot 52 \cdot 8}{36\ 000}$

Reduciendo : $I = \dfrac{2\ 197}{225}$

Del 1 de Octubre al 1 de Enero : $\begin{cases} C = 330 - 50 = 280 \\ t = 92 \\ r\% = 8\% \\ I_1 = \dfrac{280 \cdot 92 \cdot 8}{36\ 000} = \dfrac{1\ 288}{225} \end{cases}$

Capital final : $280 + \dfrac{2\ 197}{225} + \dfrac{1\ 288}{225} = S/.\ 295{,}40$ RPTA. E

20.- Un capital es impuesto al 20% anual y al final del primer año se sacan los intereses y una parte del capital igual a los intereses; al final del segundo año se sacan los intereses y una parte del capital igual a los intereses y así sucesivamente. Si al empezar el cuarto año se nota que el capital inicial a disminuido en S/. 2 440. ¿Cuál es el capital inicial?

A) S/. 4 000 B) S/. 5 000 C) S/. 10 000 D) S/. 7 500 E) S/. 6 400

<u>Resolución</u>.-

Si el capital inicial es : C < > 100% C

Recordemos que : I = % C

C_1 = S/.150 C_2 = S/.80 C_3 = S/.100

1 Marzo 10 Julio 10 Agosto 10 Octubre

t_1 t_2 t_3

Para el primer año : $\begin{cases} C \\ r\% = 20\% \\ t = 1 \text{ año} \\ I = 20\% C \\ \therefore \text{ delcapitalqueda: } 80\% C \end{cases}$

Para el segundo año : $\begin{cases} 80\% C \\ r\% = 20\% \\ t = 1 \text{año} \\ I = 20\%.(80\% C) \\ \therefore \text{ delcapitalqueda: } 80\%(80\% C) \end{cases}$

Operando analogamente :

Al empezar el cuarto año se tiene : 80% [80% (80% C)] = 51,2% C

El capital ha disminuido en : 100% C - 51,2% C = 48,8 C

Por dato tenemos que : 48,8% C = 2 440

Operando : C = S/. 5 000 RPTA. B

21.- La diferencia de dos capitales es de S/. 4 000; ellos son colocados a la misma tasa, uno durante 9 meses, el otro durante 7 meses. El interés del menor capital sobrepasa de S/. 176 al interés del mayor, y la suma de esos intereses es de S/. 2 416. Hallar la tasa de imposición y el valor de la suma de los dos capitales.

A) 5,80% ; S/. 86 000 B) 4,00% ; S/. 72 000 C) 6,80% ; S/. 70 000

D) 4,80% ; S/. 76 000 ***E) 8,80% ; S/. 74 000***

Resolución.-

La suma y la diferencia de los intereses siendo conocidos, se tiene :

Interés del primer capital : $\dfrac{2\,416+176}{2} = S/.\ 1\,296$

Interés del segundo capital : $2\,416 - 1\,296 = S/.\ 1\,120$

Si los capitales hubieran sido colocados durante 1 *año*, ellos habrían reportado :

El primero : $\dfrac{1\,296 \cdot 12}{9} = S/.\ 1\,728$

El segundo : $\dfrac{1\,120 \cdot 12}{7} = S/.\ 1\,920$

El segundo capital que sobrepasa al primero de 4 000 *soles* reportaría anualmente :

1 920 - 1 728 = 192 *soles* más que el primero.

La tasa de imposición es luego de : $\dfrac{192 \cdot 100}{4\,000} = 4{,}80\ \%$

Monto del primer capital : $100 \cdot \dfrac{1\,728}{4 \cdot 8} = S/.\ 36\,000$

Monto del segundo capital : $36\,000 + 4\,000 = S/.\ 40\,000$

Finalmente la suma de los capitales será : S/. 76 000 RPTA. D

22.- Dos sumas, la una de 12 000 soles y la otra 12 800 soles colocadas durante el mismo tiempo : La primera al 6 %, la segunda al 5%, han adquirido alrededor de este tiempo el mismo valor, por la adición del interés simple al capital. ¿Cuál ha sido el tiempo de la imposición?

A) 5 años ***B) 10 años*** ***C) 15 años*** ***D) 20 años*** ***E) 25 años***

Resolución.-

Diferencia de las sumas : 12 800 - 12 000 = 800 *soles*

Las sumas aumentadas de sus intereses simples se vuelven iguales si el interés de la primera sobrepasa de 800 soles al interés de la segunda.

Ahora bien, en 1 año, el interés de la primera sobrepasa al de la segunda de :

(6 . 120) - (5 . 128) = 720 - 640 = 80 *soles*

Duración de la imposición: $1\text{ año} \cdot \dfrac{800}{80} = 10$ *años* RPTA. B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- El interés de un capital al 12% es el 60% de dicho capital. Hallar el tiempo.

A) 2 *años* B) 3 *años* C) 4 *años*
D) 5 *años* E) 6 *años*

2.- Que interes producirá un capital de S/. 5 200 prestado al 21% anual en 7 *años* y 5 *meses*.

A) 6 410 B) 8 099 C) 6 414
D) 8 090 E) 8 089

3.- A qué tanto por ciento habrá estado prestado un capital de S/. 120 para haberse convertido en S/.144 en 20 *meses*.

A) 10% B) 12% C) 14%
D) 16% E) 20%

4.- Un capital impuesto durante un año al 3% produce S/. 21 más que otro impuesto 9 *meses* al 4% .¿Cuál es la diferencia de dichos capitales?

A) 800 B) 750 C) 900
D) 700 E) 1 000

5.- Se presto un capital por un año y el monto fue S/. 5 500. Si se hubiera prestado por 2 *años* sería S/. 6 000. ¿Cuál sería el monto en 4 *años*?

A) S/. 12 000 D) S/. 7 000
B) S/. 9 000 E) 6 500
C) S/. 8 000

6.- Una tasa del 6% quincenal de interés simple es equivalente a :

A) 0,3 diario D) 140% anual
B) 0,02 % diario E) 10% cada 25 *días*
C) 1% cada 3 *días*

7.- A qué porcentaje debe ser colocado un capital para que en 3 *años* 4 *meses* produzca un interés equivalente a los 2/5 del monto.

A) 20% B) 21 % C) 22,5%
D) 7,5% E) 15%

8.- Una persona ahorra su dinero cobrando un interés diario a D.P al número de días transcurrido. Si cuando lo retiró su dinero lo había triplicado y en el último día había ganado el 1/16 del capital original. Hallar el número de días que depositó su capital.

A) 64 B) 63 C) 2 016
D) 1 113 E) 1 013

9.- Si en tres meses de ahorrar en un banco donde pagan de interés simple, la ganancia es 20% del monto. ¿Cuál es la tasa mensual que esta ganando?

A) 6% B) 8% C) 8,33%
D) 6,6% E) 7%

10.- Un capital se divide en tres partes iguales que imponen al 28% , 34 y 38% anual respectivamente. ¿Al cabo de cuánto tiempo se habrá triplicado el capital?

A) 3 *años* B) 4 *años* C) 5 *años*
D) 6 *años* E) 8 *años*

11.- ¿Qué capital es aquel que impuesto al 4% anual en 5 *meses* produce S/. 1 100 menos que si se impusiera al 4% mensual en el mismo tiempo?

A) 6 000 B) 6 000 C) 7 000
D) 8 000 E) 9 000

12.- Se impone S/. 4 800 al 9% anual durante un año y medio. ¿Qué capital seria necesario aumentar para que durante un año y 8 *meses* al 6% el interés se duplique?

A) 8 106 B) 8 610 C) 8 160

D) 6 108 E) 6 801

13.- Los 5/7 de un capital colocado al 3%, produce anualmente 560 soles más que el resto colocado al 4%. ¿Cuál es el capital?

A) 28 000 B) 63 000 C) 40 000

D) 56 000 E) 64 000

14.- Se impone un capital al 6% durante 4 *años* y 3 *meses*, después se retira el capital mas los intereses y se impone todo el 8%. ¿Cuál era el capital inicial si ahora se recibe como renta anual 180.72?

A) 2 000 B) 2 500 C) 8 000

D) 1 000 E) 1 800

15.- Si S/. 167 280 es el capital de dos personas; la primera impone su dinero al 4% durante 3 *meses* y recibe un interés doble del que tendría la segunda imponiendo el suyo al 5% durante 7 *meses*. Indique el capital menor.

A) 36 480 B) 24 480 C) 40 480

D) 32 450 E) 28 700

16.- El 30% de un capital se impone al 3% anual; el 25% al 4% anual y un 35% al 6% anual. ¿A qué porcentaje se deberá imponer el resto para obtener en un año un monto igual al 105% del capital?

A) 12% B) 10% C) 14%

D) 8% E) 6%

17.- Si el *m*% de un capital se impone al 24% anual, en 5 *meses* produce un monto igual al interés que produce el 27,27% del resto del capital en 15 *meses* al 44% anual. Hallar "*m*".

A) 10 B) 12 C) 30 D) 40 E) 45

18.- Una persona tenía impuesto un capital al 45% y no siendo suficiente los intereses para cubrir sus gastos impuso su capital en una industria que le da el 60%, de esta manera a podido incrementar sus gastos diarios en S/. 90. ¿Cuál es su capital?

A) S/. 210 600 D) S/. 216 000

B) S/. 116 000 E) S/. 260 010

C) S/. 116 000

19.- Dos capitales están en relación de 5/8 a 3/7. Si el primero se impone al 40% y el segundo al 30% al cabo de 8 *meses* el monto sería S/. 83 372. Hallar la suma de los capitales originales.

A) S/. 44 810 D) S/. 44 840

B) S/. 44 800 E) S/. 24 840

C) S/. 67 260

20.- Cecilia deposita dinero en el banco en las siguientes condiciones, por cada S/.100 le darán S/.18 de intereses adicionales; por cada S/.10 le darán S/.3 de interés adicionales y por cada S/.1 le darán S/.0,5 de intereses, todos los intereses por un año. Si Cecilia logra depositar S/. 352. ¿Cuánto recibirá de interés en un año?

A) S/.60 B) S/.54 C) S/.176

D) S/.70 E) S/.90

21.- Pedro contrae una deuda de S/. 5 000 para pagarlo dentro de 6 *meses* al 8% anual, pero una vez transcurrido los 3 *meses* debe adelantar S/. 3 000 para disminuir la carga final del plazo. Hallar la cantidad necesaria para cancelar la deuda final del plazo?

A) S/. 2 000 B) S/. 2 400 C) S/. 2 140

D) S/. 2 600 E) S/. 2 640

22.- Una empresa obtiene un préstamo bancario de S/.2 000 por un periodo de 3 *meses* y con interés anual del 5%. El banco cobra los intereses al instante de entregar el dinero. Determine la tasa real de interés al tener que devolver al final del plazo, la cantidad originalmente prestada.

A) 5% B) 5,06% C) 3%

D) 19,75% E) 1,6%

23.- Un capital de S/.73 se impuso al 40% anual de interés simple durante 5 *meses* consecutivos del mismo año. Cuál fue el primero de estos 5 *meses*, si se se sabe que si hubiera considerado el año común los intereses disminuyen en $0,1\widehat{6}$ *soles*.

A) Enero B) Febrero C) Marzo
D) Mayo E) Agosto

24.- Cierta mutual paga 4% mensual por los primeros S/. 1 000, 15% trimestral por lo que exceda hasta S/.2 800, 35% se-mestral por lo que excede hasta S/.9 000 y el 80% anual por cualquier suma que exceda el tope de S/.9 000. Con qué capital ganará en 1 1/2 *años* 7 170 *soles*.

A) 2 431 B) 3 140 C) 5 975
D) 6 020 E) 9 210

25.- Un capital produce un $m\%$ del monto en t *años*. ¿Qué porcentaje del monto producirá en $(100 - m)$ *años*.

A) $\left(\dfrac{100m}{m+t}\right)\%$ D) $\left(\dfrac{100+m}{m+t}\right)\%$

B) $\left(\dfrac{100m}{m-t}\right)\%$ E) $\left(\dfrac{100t}{m}\right)\%$

C) $\left(\dfrac{100t}{m+t}\right)\%$

26.- Una persona coloca hoy una suma de S/. 35 280 al 3% pero se sabe que 365 *días* antes ella, había colocado una suma de S/. 21 600 a la tasa de 3,5%. ¿En cuántos *días* estas sumas habrán producido intereses iguales?

A) 180 B) 120 C) 912,5 D) 60 E) 80

27.- Se tiene un capital C del cual $1/n$ se impone al 1% los $2/n$ al 2%, los $3/n$ al 3% y así sucesivamente. Si luego de un año produce un interés del 59% del capital. ¿Calcular en cuántas partes se dividió el capital?

A) 4 515 B) 7 432 C) 3 916
D) 9 136 E) 3 274

28.- En los bancos de cierta ciudad solo se paga interés simple. Una persona deposita su capital en un banco A, al 7,5% quincenal, cuando lleva ganando el triple de su dinero, retira solo la mitad del monto y lo deposita en el banco B, durante 5 *meses* producto de estas dos operaciones tiene un monto que es 6 veces el capital inicial. ¿Cuál es la tasa mensual que paga B?

A) 1,25% B) 15% C) 20%
D) 25% E) 5%

29.- Colocando cierto capital al 6% durante 40 *meses* se ha convertido en S/. 72 360. Si dicho capital se han de repartir entre tres personas en razón inversa de su edades que son 8, 16 y 17 *años* respectivamente, con lo que le toca el menor compra 90 Litros de vino, que resulta de mezclar vinos de dos clases, la primera de S/. 240 el litro y la segunda a S/. 420 el litro. ¿Cuántos litros de cada clase compró?

A) 20 y 10 D) 60 y 70
B) 40 y 50 E) 55 y 65
C) 50 y 60

30.- Una persona posee 45 000 dólares, una parte lo coloca al 36% anual y la otra lo coloca al 35% anual. Si los porcentajes a que están impuestos ambas partes se permutaran al término de un año se produciría 50 dólares más de intereses. Hallar la diferencia entre las dos partes en que se divide el capital de 45 000 dólares.

A) $ 1 000 B) $ 3 000 C) $ 5 000
D) $ 6 000 E) $ 7 000

21 REGLA DE DESCUENTO

21.1 DESCUENTO

Es la rebaja que sufre el valor nominal de un efecto de comercio cuando se cobra o se vende antes de la fecha de vencimiento.

El descuento comercial, es el dinero que ganan los bancos u otras instituciones de crédito al comprar letras de cambios o pagarés antes de su vencimiento, aplicando un interés simple a los valores de dichos documentos.

ELEMENTOS

1.- Valor nominal	:	Vn
2.- Tasa de descuento	:	r (% anual)
3.- Tiempo de descuento	:	t (lo que falta para el vencimiento)
4.- Descuento	:	D
5.- Valor actual o efectivo	:	Va = Vn - D

CLASES DE DESCUENTO

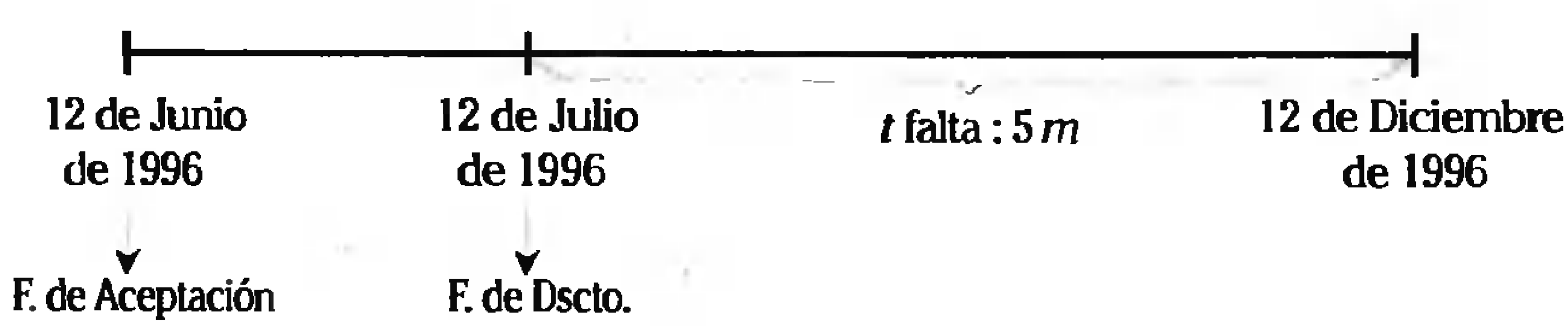
1.- Descuento Comercial (Externo o Abusivo)

Equivale al interés que ganaría el valor nominal en el tiempo de descuento.

Fórmula : Si la tasa de descuento es : r % anual

$$\boxed{D_C = \frac{V_n \cdot r \cdot t_{\text{meses}}}{1\,200}}$$

Ejemplo : ¿Cuánto se recibió por una letra de *S/*. 84 000 que fue aceptada el 12 de Junio de 1 996 y que vencía el 12 de Diciembre de 1 996; si se descontó al 40% anual el 12 de Julio de 1996?



$$D_C = \frac{84\ 000.40.5}{1\ 200} = 14\ 000$$

Se recibirá : $Va = Vn - Dc = 84\ 000 - 14\ 000 = S/.\ 70\ 000$

Ojo.- El descuento se hace con el tiempo que falta para el vencimiento.

2.- Descuento Racional (Interno o Matemático)

Equivale simple que ganaría el valor actual de la letra en el momento del descuento.

$$D_R = \frac{V_a \cdot r \cdot t_{meses}}{1\ 200}$$

Pero :

$$V_a = V_n - D_R$$

$$D_R = \frac{V_n \cdot r \cdot t_{(meses)}}{1\ 200 + r \cdot t_{(meses)}}$$

Ejemplo : ¿Cuánto se recibirá por la letra de S/. 84 000 descontada el 40% anual 5 *meses* antes de su vencimiento si el descuento es racional.

$$D_R = \frac{84\ 000 \cdot 40 \cdot 5}{1\ 200 + 40 \cdot 5} \qquad V_A = 84\ 000 - 12\ 000$$

$$D_R = \frac{84\ 000 \cdot 200}{1\ 400} = 12\ 000 \qquad V_A = S/.\ 72\ 000$$

Para los problemas :

En días cuando dan fechas

$$D_C = \frac{Vn.r.t_{días}}{36\ 000} \qquad D_R = \frac{Vn.r.t_{días}}{36\ 000 + r.t_{días}}$$

Siempre : $D_C > D_R$

$$Vn = \frac{D_C \cdot D_R}{D_C - D_R}$$

Problema.- Por una letra descontada al 40% anual 8 *meses* antes de su vencimiento, se recibió S/. 25 080. ¿Cuál era el V*n*?

<u>Resolución</u>.-

$$D_C = \frac{Vn \cdot 4 \cdot 8}{1\ 200} = \frac{4}{15}(Vn)$$

$$Va = Vn - Dc \quad \Rightarrow \quad 25\ 080 = Vn - \frac{4}{15}(Vn) \quad \Rightarrow \quad Vn = 34\ 200$$

LETRAS O PAGOS EQUIVALENTES

Dos letras son equivalentes en una fecha cuando descontadas en dicha fecha tienen igual valor actual (o sea que se recibe lo mismo por los dos).

Si dos letras son equivalentes pueden intercambiarse sin beneficio ni perjuicio para las partes.

$$\begin{Bmatrix} V_n . A \\ t_A \end{Bmatrix} \quad < \; > \quad \begin{Bmatrix} V_n . B \\ t_B \end{Bmatrix}$$

Para ver cual letra vale más, deberé comprobar los valores actuales.

Para que dos letras sean equivalentes debe cumplirse el :

$$\boxed{V_{act*} . A = V_{act*} . B}$$

Problema.- Se tienen dos letras : La 1ra pagadera dentro de 5 *meses* y que descontará al 40% anual y la 2da cuyo valor nominal es el doble de la primera pagadera dentro de 8 *meses*. ¿A qué tasa se descontó esta última letra si resultaron letras equivalentes?

<u>Resolución</u>.-

Trabajando con la 1ra letra

Supongamos que $Vn_1 = 6$

$$D_{C1} = \frac{6 \cdot 40 \cdot 5}{1\,200} = 1$$

$$\Rightarrow \; Va_1 = 5$$

Trabajando con la 2da letra

Por dato :

$$Vn_2 = 12 \;\; y \;\; Va_2 = 5 \;\Rightarrow\; D_{C2} = 7$$

$$D_{C2} = 7 = \frac{12 \, . \, r \, . \, 8}{1\,200} \quad \Rightarrow \quad r = 87,5$$

TIEMPO DE VENCIMIENTO

Es un proceso comercial que consiste en reemplazar varias letras por una sola, en la cual se cumple que su valor nominal es la suma de los valores nominales de las letras a reemplazar.

El objetivo es calcular el vencimiento de la letra reemplazante, teniendo como datos los valores nominales y sus respectivos tiempos de vencimiento.

$$\boxed{t = \frac{\Sigma\, Vn \, . \, t}{\Sigma\, Vn}} \qquad .... (\alpha)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Se tiene una letra cuyo valor nominal se desea hallar sabiendo que descontada comercialmente, 4 meses antes de su vencimiento al 9% trimestral se recibió por ella S/. 66 000. Hallar dicho valor nominal.

A) S/. 80 000 B) S/. 72 000 C) S/. 90 000 E) S/. 84 000 D) S/. 75 000

Resolución.-

Sabemos que :
$$\begin{cases} D = V_N - V_A \Rightarrow V_A = V_N - D \quad \ldots(\alpha) \\ D = \dfrac{V_N \cdot 36 \cdot 4}{1\,200} \quad (t \rightarrow \text{meses}) \end{cases}$$

Por dato tenemos que :
$$\begin{cases} V_A = S/.\ 66\,000 \\ t = 4 \text{ meses} \\ r\,\% = 9\% \text{ trimestral} < > 36\% \text{ anual} \end{cases}$$

Reemplazando en (α) : $66\,000 = V_N - \dfrac{V_N \cdot 36 \cdot 4}{1\,200}$

Reduciendo y operando : $66\,000 = \dfrac{22}{25} \cdot V_N$

Despejando : $V_N = S/.\ 75\,000$ RPTA. E

2.- Por una letra de S/. 350 se ha obtenido S/. 315 de valor actual. Si dicha letra vencía en 6 meses; hallar el porcentaje anual a la que ha sido descontada.

A) 2% B) 20% C) 12% D) 15% E) 18%

Resolución.-

Por dato tenemos :
$$\begin{cases} V = 350 \\ V_A = 315 \\ t = 6 \text{ meses} \\ r\,\% = ? \end{cases}$$

Además el descuento es : $D = V_N - V_A$

Calculando el descuento : $D = 350 - 315 \Rightarrow D = 35$

Aplicando fórmula del descuento : $35 = \dfrac{350 \cdot r \cdot 6}{1\,200}$

Despejando la tasa : $r\,\% = 20\%$ RPTA. B

3.- El valor actual de una letra es el 50% de su valor nominal, si la tasa es el 10% anual. Hallar el tiempo de descuento en años .

A) 3 años ***B) 4 años*** ***C) 5 años*** ***D) 6 años*** ***E) 7 años***

Resolución.-

Sabemos que : $\begin{cases} D = V_N - V_A \\ D_C = \dfrac{V_N \cdot 10 \cdot t}{100} \quad (t \rightarrow \text{años}) \end{cases}$

Por dato tenemos : $\begin{cases} V_A = 50\% \, V_N \\ r\% = 10\% \text{ anual} \\ t = ?\ (\text{años}) \end{cases}$

Calculando el descuento : $D = V_N - 50\% \, V_N \Rightarrow D = 50\% \, V_N$

Aplicando la fórmula de descuento : $\dfrac{50}{100} V_N = \dfrac{V_N \cdot 10 \cdot t}{100}$

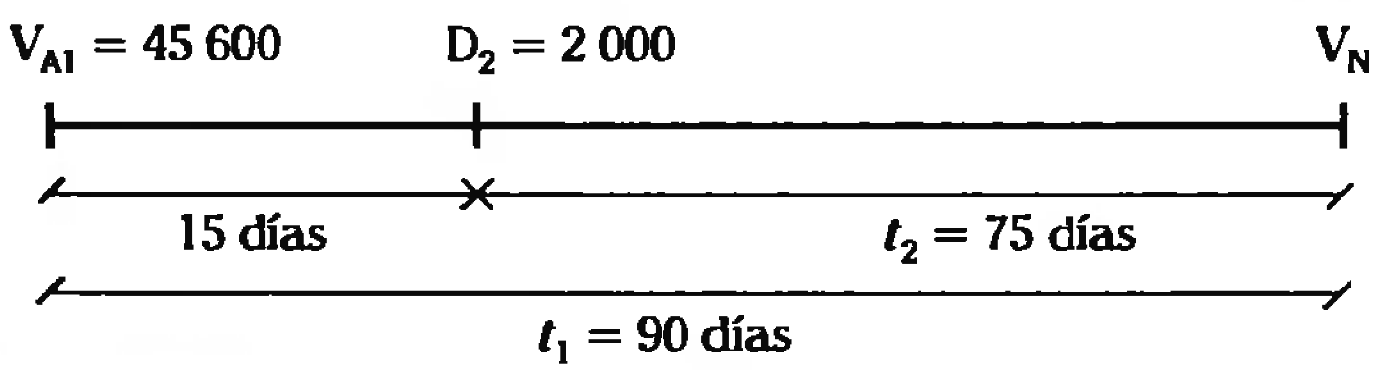
Cancelando y despejando : $t = 5 \text{ años}$ RPTA. C

4.- Faltan tres meses para que venza una letra y su valor actual es de S/. 45 600. Dentro de 15 días el descuento valdrá S/. 2 000. ¿Cuál es el valor nominal de la letra?

A) S/. 48 000 ***B) S/. 48 100*** ***C) S/. 48 200*** ***D) S/. 48 300*** ***E) S/. 48 400***

Resolución.-

$D_1 = ?$



1° El Descuento es D.P. al Tiempo

2° Por lo tanto :

Descuento	D.P.	Tiempo
2 000	→	75
D_1	→	90

3° Operando : $D_1 = 2\,000 \cdot \dfrac{90}{75} \Rightarrow D_1 = 2\,400$

4° Pero : $D = V_N - V_A \Rightarrow V_N = 45\,600 + 2\,400$

$\Rightarrow V_N = S/.\ 48\,000$ RPTA. A

5.- Si una letra se cancela dos meses antes, se le descuenta 1,5% si se paga 3 meses antes S/. 450. ¿Cuál es su valor nominal?

A) S/. 15 000 B) S/. 16 000 C) S/. 17 000 D) S/. 18 000 E) S/. 20 000

Resolución.-

Cuando el V_N y la tasa es la misma, el descuento es proporcional al tiempo.

Aplicando la Regla de Tres :

Tiempo	D. P.	Descuento
3	$\rightarrow$	450
2	$\rightarrow$	1,5 % V_N

Desarrollando la Regla de Tres : $1{,}5\,\%\ V_N = 450 \cdot \frac{2}{3}$

Despejando : $V_N = S/.\ 20\ 000$ RPTA. E

6.- Se ha negociado un pagaré de S/. 60 000 obteniéndose S/. 58 000 de valor actual. Si el pagaré vencía dentro de 4 meses. ¿Cuál es el porcentaje anual que se ha descontado comercialmente?

A) 5% B) 12% C) 8% D) 16% E) 10%

Resolución.-

Datos : $\begin{cases} V_N = 60\ 000 \\ V_A = 58\ 000 \\ t = 4 \text{ meses} \\ r\,\% = ? \end{cases}$

Sabemos que : $\begin{cases} D_C = V_N - V_A \\ D_C = \dfrac{V_N \cdot r \cdot t}{1\ 200} \end{cases}$

Reemplazando : $60\ 000 - 58\ 000 = \dfrac{60\ 000 \cdot r \cdot 4}{1\ 200}$

Despejando : $r\,\% = 10\ \%$ RPTA. E

7.- Un pagaré de S/. 12 000 se ha descontado comercialmente al 9%, obteniéndose S/. 11 865 de valor actual. ¿Dentro de cuánto tiempo vencía el pagaré?

A) 40 días B) 42 días C) 45 días D) 48 días E) 64 días

Resolución.-

Recuerde que : $\begin{cases} V_A = V_N - D \\ D_C = \dfrac{V_N \cdot r \cdot t}{36\ 000} \end{cases}$

Por datos tenemos que : $\begin{cases} V_N = 12\,000 \\ V_A = 11\,865 \\ r\% = 9\% \\ t = ?\ \text{días} \end{cases}$

Reemplazando los datos : $12\,000 - 11\,865 = \dfrac{12\,000 \cdot 9 \cdot t}{36\,000}$

Despejando : $\boxed{t = 45\ \text{días}}$ RPTA. C

8.- El valor actual comercial de una letra es S/. 3 000 y el descuento comercial es el 4% del valor nominal. ¿Cuál es el valor nominal de la letra?

A) S/. 4 560 B) S/. 4 231 C) S/. 4 120 D) S/. 3 125 E) S/. 3 050

Resolución.-

Por datos tenemos que : $\begin{cases} V_{AC} = 3\,000 \\ D_C = 4\% V_N \end{cases}$

Pero sabemos que : $V_{AC} = V_N - D_C$

Reemplazando : $3\,000 = V_N - 4\% V_N \Rightarrow 3\,000 = 96\% V_N$

Despejando : $\boxed{V_N = S/.\ 3\,125}$ RPTA. D

9.- Los valores nominales de tres letras son proporcionales a 2; 3 y 5. La primera vence a los 20 días; la segunda a los 30 días y la tercera a los 40 días. Se descuenta comercialmente al 6% y resulta para valor efecto de la última letra S/. 7 450; hallar la suma de los valores efectivos de las otras dos.

A) S/. 7 450 B) S/. 7 467,5 C) S/. 7 520 D) S/. 7 015 E) S/. 7 400

Resolución.-

Por dato tenemos que :

$1^{ra}: \begin{cases} V_{N1} = 2k \\ t = 20\,días \\ r\% = 6\% \end{cases}$ $2^{da}: \begin{cases} V_{N2} = 3k \\ t = 30\,días \\ r\% = 6\% \end{cases}$ $3^{ra}: \begin{cases} V_{N3} = 5k \\ t = 40\,días \\ r\% = 6\% \end{cases}$

Además sabemos : $V_{AC} = \dfrac{V_N\,(36\,000 - r \cdot t)}{36\,000}$

Para la tercera letra (V_{A3} = S/. 7 450) : $7\,450 = \dfrac{5k\,(36\,000 - 6 \cdot 40)}{36\,000}$

Operando : $k = 1\,500$

Nos piden calcular : $V_{AT} = V_{A1} + V_{A2}$

$$\Rightarrow \qquad V_{AT} = \frac{2k \cdot (36\,000 - 6 \cdot 20)}{36\,000} + \frac{3k \cdot (36\,000 - 6 \cdot 30)}{36\,000}$$

Reduciendo : $V_{AT} = \frac{2\,987}{600} \cdot k = \frac{2\,987}{600} \cdot 1\,500 = \boxed{S/.\ 7\,467{,}50}$ RPTA.B

10.- Para pagar una deuda se firmó dos letras una de S/. 20 000 a 6 meses y la otra a S/. 30 000 a 8 meses. Hallar el valor al contado de la deuda, si la tasa de descuento es de 36%.

A) S/. 43 000 B) S/. 39 200 C) S/. 42 750 D) S/. 38 830 E) S/. 35 500

Resolución.-

Por dato tenemos :

Para la primera : $\begin{cases} V_{N1} = 20\,000 \\ t = 6 \text{ meses} \\ r\% = 36\% \end{cases}$

Para la segunda : $\begin{cases} V_{N2} = 30\,000 \\ t = 8 \text{ meses} \\ r\% = 36\% \end{cases}$

Además sabemos que : $D_C = \frac{V_N \cdot r \cdot t}{1\,200}$

Nos piden el valor al contado : $V_{contado} = V_{A1} + V_{A2}$

Pero : $V_{contado} = (V_{N1} - D_{C1}) + (V_{N2} - D_{C2})$

Agrupando convenientemente : $V_{contado} = (V_{N1} + V_{N2}) - (D_{C1} + D_{C2})$

Reemplazando : $V_{contado} = 50\,000 - \left(\frac{20000 \cdot 6 \cdot 36}{1200} + \frac{30000 \cdot 8 \cdot 36}{1200}\right)$

Por lo tanto : $V_{contado} = \boxed{S/.\ 39\,200}$ RPTA. B

11.- Si una letra es de S/. 36 000 se hubiera negociado 7 días antes, su valor hubiera sido S/. 840 menos ¿Cuánto se recibió por ella?, si se negoció 15 días antes de su vencimiento?

A) S/. 35 200 B) S/. 34 000 C) S/. 34 200 D) S/. 31 400 E) S/. 35 000

Resolución.-

Como el valor nominal y la tasa es la misma, entonces el descuento es proporcional al número de días.

Aplicando la R.T.S. Directa :

Descuento		Tiempo
840	→	7
D	→	15

Operando : $D = 840 \cdot \frac{15}{7} \Rightarrow D = 1\,800$

Pero : $V_A = V_N - D$

Entonces, se recibió : $V_A = 36\,000 - 1\,800 =$ **S/. 34 200** RPTA. C

12.- Un banco descuenta una letra de S/. 780 al 6% anual, faltando 6 meses para su vencimiento, si además del descuento el banco cobra 0,1% de comisión y 0,125% por gastos. ¿Cuál es el tanto por ciento real del descuento?

A) 6,225% B) 6,5% C) 6,75% D) 6,89% E) 6,45%

Resolución.-

Si por un año el banco descuenta el 6 %, por lo tanto en 6 meses el banco descontará 3 %.

Además el banco hace un descuento del (0,1 % + 0,125 %) = 0,225 %, por gasto y comisión.

Por lo tanto el descuento total es de : 3,225 % (780) = 25,155

Calculando la tasa real : $\frac{780 \cdot r \cdot 6}{1200} = 25{,}155$

Despejando : **$r\,\% = 6{,}45\,\%$** RPTA. E

13.- La diferencia de los valores nominales de dos letras equivalentes es S/. 80 y la suma de sus descuentos que sufren estas dos letras es S/. 800. Hallar el mayor de estos dos descuentos?

A) 440 B) 400 C) 480 D) 360 E) 420

Resolución.-

Tenemos como datos : $\begin{cases} V_{N1} - V_{N2} = 80 & \ldots.\ (1) \\ D_{C1} + D_{C2} = 800 & \ldots.\ (2) \end{cases}$

Como las letras son equivalentes, entonces : $V_{A1} = V_{A2}$

Además sabemos que : $D = V_N - V_A \Rightarrow V_A = V_N - D$

Operando : $V_{N1} - D_{C1} = V_{N2} - D_{C2}$

Transponiendo términos : $V_{N1} - V_{N2} = D_{C1} - D_{C2}$

Por lo tanto : $D_{C1} - D_{C2} = 803 \quad \ldots.\ (3)$

Resolviendo el sistema de Ec (2) y (3) : $D_{C1} = \frac{800 + 80}{2} =$ **440**

$D_{C2} = \frac{800 - 80}{2} = 360$ RPTA. A

14.- Si el valor actual racional es 112,5% del valor actual comercial. Determinar el valor nominal si el Descuento Comercial excede al Descuento Racional en S/. 80.

A) S/. 960 B) S/. 1 040 C) S/. 1 080 D) S/. 920 E) S/. 960

<u>Resolución</u>.-

Sabemos que : $\begin{cases} D_C = V_N - V_{AC} \\ D_R = V_N - V_{AR} \end{cases}$

Restando miembro a miembro : $D_C - D_R = V_{AR} - V_{AC}$

Por datos tenemos que : $\begin{cases} D_C - D_R = 80 \Rightarrow V_{AR} - V_{AC} = 80 \quad .... (1) \\ V_{AR} = 112{,}5\,\%\,V_{AC} \quad .... (2) \end{cases}$

De (2), tenemos : $V_{AR} = \dfrac{112{,}5}{100} V_{AC} \Rightarrow \dfrac{V_{AR}}{9} = \dfrac{V_{AC}}{8}$

Aplicando propiedades de proporciones :

$$\frac{V_{AR}}{9} = \frac{V_{AC}}{8} = \frac{V_{AR} - V_{AC}}{9 - 8} = \frac{80}{1} = 80$$

Despejando : $\begin{cases} V_{AR} = 720 \\ V_{AC} = 640 \end{cases}$

Además sabemos : $V_N = \dfrac{D_C \cdot D_R}{D_C - D_R}$

Reemplazando : $V_N = \dfrac{(V_N - 640) \cdot (V_N - 720)}{80}$

Operando : $80V_N = V_N^2 - 1360V_N + 460800$

Reduciendo términos semejantes : $V_N^2 - 1440V_N + 460800 = 0$

Factorizando : $(V_N - 960) \cdot (V_N - 480) = 0$

Por lo tanto : $\begin{cases} V_N = 480 \text{ (absurdo)} \\ V_N = 960 \end{cases}$ RPTA. E

15.- Si el descuento comercial y el descuento racional de un documento son como 9 es a 7. ¿Qué parte del valor nominal es su descuento comercial?

A) 2/9 B) 2/7 C) 7/16 D) 9/16 E) 1/7

<u>Resolución</u>.-

Si : $\dfrac{D_C}{D_R} = \dfrac{9}{7} \Rightarrow \begin{cases} D_C = 9k \\ D_R = 7k \end{cases}$

Como sabemos : $V_N = \dfrac{D_C \cdot D_R}{D_C - D_R}$

Reemplazando los datos : $V_N = \dfrac{9k \cdot 7k}{9k - 7k} \Rightarrow V_N = \dfrac{63}{2}k$

Piden : $\dfrac{D_C}{V_N} = \dfrac{9k}{\frac{63}{2}k} = \boxed{\dfrac{2}{7}}$ RPTA. B

16.- Una letra que se debe pagar dentro de 8 meses y que es descontada al 10% ha sido reemplazada por otra letra de cuyo tiempo de vencimiento se desea determinar, que es descontada al 8% y que tiene un valor nominal que es los 5/3 de la primera letra.

A) 60 meses   B) 66 meses   C) 40 meses   D) 65 meses   E) más de 66 meses

<u>Resolución</u>.-

Sabemos que : $D_C = V_N - V_{AC} \Rightarrow V_{AC} = V_N - D_C$

Pero : $V_{AC} = V_N - \dfrac{V_N \cdot r \cdot t}{1\,200} \Rightarrow V_{AC} =$

Sean los valores nominales, V_{N1} y V_{N2} donde :

$$V_{N2} = \frac{3}{5} V_{N1} \Rightarrow \begin{cases} V_{N1} = 3k \\ V_{N2} = 5k \end{cases}$$

Por dato tenemos que :

$$1^{ra} \text{ letra : } \begin{cases} V_{N1} = 3k \\ t = 8 \text{ meses} \\ r\% = 10\% \end{cases}$$

$$2^{da} \text{ letra : } \begin{cases} V_{N2} = 5k \\ t = ? \\ r\% = 8\% \end{cases}$$

Como son letras equivalentes : $V_{A1} = V_{A2}$

Reemplazando : $\dfrac{3k\,(1\,200 - 10 \cdot 8)}{1\,200} = \dfrac{5k\,(1\,200 - 8 \cdot t)}{1\,200}$

Cancelando y operando : $3\,360 = 6\,000 - 40 \cdot t \Rightarrow 40 \cdot t = 2\,640$

Despejando : $\boxed{t = 66 \text{ meses}}$ RPTA. B

17.- Si la diferencia de los valores actuales que se obtuvieron por una letra descontada al 15% anual durante 8 meses es S/. 350. Determinar el valor nominal de esa letra considerada.

A) 72 000   B) 38 500   C) 35 000   D) 36 000   E) 72 000

<u>Resolución</u>.-

Del problema 9 deducimos que : $D_C - D_R = V_{AR} - V_{AC}$

Por datos tenemos que : $\begin{cases} V_{AR} - V_{AC} = 350 = D_C - D_R & ....(\alpha) \\ r\% = 15\% \\ t = 8 \text{ meses} \end{cases}$

Además : $\begin{cases} D_C - D_{AC} = \dfrac{D_R \cdot r \cdot t}{1\,200} & ....(\alpha) \\ V_N = \dfrac{D_C \cdot D_R}{D_C - D_R} & ....(\beta) \end{cases}$

Reemplazando (α) y los datos en (β) : $350 = \dfrac{D_R \cdot 15 \cdot 18}{1\,200} \Rightarrow D_R = 3\,500$

Reemplazando en (α) : $D_C = 3\,850$

Reemplazando valores y calculado en (θ) : $V_N = \dfrac{3\,850 \cdot 3\,500}{350} \Rightarrow V_N = 38\,500$ RPTA. B

18.- El 5 de Junio de 1996 se firma una letra de S/. 22 500 con fecha de vencimiento 6 de Setiembre de 1 996, si se desea descontar dicha letra el 20 de Julio de 1996. ¿Cuánto se recibirá por dicha letra? (considerar la tasa de descuento 11% semestral).

A) S/. 21 000 B) S/. 21 840 C) S/. 22 200 D) S/. 22 500 E) S/. 22 800

<u>Resolución</u>.-

Calculemos el tiempo que hay desde el 20 de Julio al 6 de Setiembre :

$$t = 11 + 31 + 6 = 48$$

Del problema 16 sabemos que : $V_{AC} = \dfrac{V_N\,(1\,200 - r \cdot t)}{1\,200}$

Por datos tenemos : $\begin{cases} V_N = 22\,500 \\ r\,\% = 11\% \textit{ semestral} <> 22\% \textit{ anual} \\ t = 48 \textit{ días} \end{cases}$

Reemplazando : $V_{AC} = \dfrac{22\,500\,(36\,000 - 22 \cdot 48)}{36\,000} = 21\,840$

Por lo tanto se recibe : $V_{AC} = S/.\ 21\,840$ RPTA. B

19.- Se tienen cuatro letras, las cuales son 5 000, 2 000, 1 000 y 8 000 soles y faltan para sus vencimientos 1; 9 y 4 meses respectivamente; si se quiere pagar todo en una sola letra. ¿Cuánto faltaría para el vencimiento de dicha letra?

A) 1 mes B) 2 meses C) 3 meses D) 4 meses E) 5 meses

Resolución.-

El presente problema es una aplicación a vencimiento medio

Debemos recordar que : $t = \dfrac{\Sigma (V_N \cdot t)}{\Sigma V_N}$

Reemplazando los datos : $t = \dfrac{5\,000 \cdot 1 + 2\,000 \cdot 1 + 1\,000 \cdot 9 + 8\,000 \cdot 4}{5\,000 + 2\,000 + 1\,000 + 8000}$

Operando : $t = \dfrac{48\,000}{16\,000} = 3 \text{ meses}$ RPTA. C

20.- Al comprar una lavadora se paga S/. 100 de cuota inicial y cuatro letras trimestrales de S/. 80 cada una. ¿Cuál será el precio al contado del artefacto, si la tasa empleada es 6%? (descuento comercial).

A) S/. 320 B) S/. 420 C) S/. 408 D) S/. 508 E) S/. 350

Resolución.-

Recordemos que : $P_{Contado} = \text{Cuota inicial} + \Sigma V \text{ Actuales}$

Además : $\begin{cases} V_A = V_N - D \Rightarrow \Sigma V_A = \Sigma V_N - \Sigma D \quad ....(\alpha) \\ D \text{ D.P. } T \end{cases}$

Si : $D_{C1} = \dfrac{800 \cdot 6 \cdot 3}{1\,200} = \dfrac{12}{10}$

Entonces : $\begin{cases} D_{C2} = 2 \cdot \dfrac{12}{10} \\ D_{C3} = 3 \cdot \dfrac{12}{10} \\ D_{C4} = 4 \cdot \dfrac{12}{10} \end{cases}$

Por lo tanto : $\Sigma D = \dfrac{12}{10} + \dfrac{24}{10} + \dfrac{36}{10} + \dfrac{48}{10} = 12$

Reemplazando en (α) : $\Sigma V_A = 4 \cdot 80 - 12 = 308$

Por lo tanto : $P_{Contado} = 100 + 308 = S/.\ 408$ RPTA. C

21.- Una persona debe a otro S/. 17 480 pagaderos en un año y conviene en saldar la deuda, efectuando cuatro pagos iguales de tres en tres meses. Calcular la cantidad entregada en cada pago considerando una tasa de 2% trimestral.

A) S/. 4 232 B) S/. 4 332 C) S/. 4 600 D) S/. 4 233 E) S/. 4 333

Resolución.-

Por dato tenemos que : $\begin{cases} \Sigma V_{Actuales} = S/.17\,480 \\ r\,\% = 2\%\text{ trimestral } <> 8\%\text{ anual} \\ D \text{ D.P. } T \end{cases}$

Si : $D_{C1} = \dfrac{V_N \cdot 8 \cdot 3}{1\,200} = \dfrac{V_N}{50}$

Entonces : $D_{C2} = \dfrac{2 \cdot V_N}{50}$

$D_{C3} = \dfrac{3 \cdot V_N}{50}$

$D_{C4} = \dfrac{4 \cdot V_N}{50}$

Además : $\Sigma V_A = \Sigma V_N - \Sigma D$

Reemplazando : $17\,480 = 4 \cdot V_N - \left(\dfrac{N_V}{50} + \dfrac{2 \cdot V_N}{50} + \dfrac{3 \cdot V_N}{50} + \dfrac{4 \cdot V_N}{50}\right)$

Reduciendo términos semejantes :

$17\,480 = \dfrac{19}{5} \cdot V_N \Rightarrow V_N = S/.\ 4\,600$ RPTA. C

22.- El descuento comercial y racional de una misma letra son proporcionales a dos números consecutivos y los valores actuales respectivos son proporcionales a los números 126 y 128. ¿Cuál será la diferencia de los descuentos?, si el valor nominal es S/. 14 400?

A) S/. 100 B) S/. 200 C) S/. 250 D) S/. 150 E) S/. 260

Resolución.-

Por teoría sabemos : $D_R < D_C$

$V_A = V_N - D$

$V_N = \dfrac{D_C \cdot D_R}{D_C - D_R}$

Por dato tenemos : $\dfrac{D_C}{D_R} = \dfrac{n+1}{n}$ .... (α)

$\dfrac{V_{AC}}{V_{AR}} = \dfrac{126}{128}$ ... (β)

$V_N = 14\,400$

De (α) : $\begin{cases} D_C = (n+1)\,k \\ D_R = nk \end{cases}$

Calculando el valor nominal : $V_N = n\,(n+1)\,k$ ... (θ)

Reemplazando en (β) : $\dfrac{n\,(n+1)\;k - (n+1)\;k}{n\,(n+1)\;k - nk} = \dfrac{126}{128}$

Cancelando k y operando : $n = 8$

En (θ) : $14\,400 = 8 \,.\, 9 \,.\, k \;\Rightarrow\; k = 200$

Por lo tanto : $\begin{cases} D_C = 9 \cdot 200 = 1\,800 \\ D_R = 8 \cdot 100 = 1\,600 \end{cases}$

Luego : $D_C - D_R =$ S/. 200 RPTA. E

23.- Se tiene dos letras la primera pagadera dentro de 5 meses y que se descontará al 40% y la segunda cuyo valor nominal es el doble de la primera y pagadera dentro de 8 meses. ¿A qué tasa descontará la última letra?, si resultan letras equivalentes?

A) 42% ***B) 50%*** ***C) 72,5%*** ***D) 87,5%*** ***E) 62,5%***

Resolución.-

Como son letras equivalentes : $V_{A1} = V_{A2}$

Donde : $V_{AC} = \dfrac{V_N\,(1\,200 - r \,.\, t)}{1\,200}$

Por dato tenemos :

La 1^ra^ letra : $\begin{cases} V_N = k \\ t = 5 \text{ meses} \\ r\% = 4\% \end{cases}$

La 2^da^ letra : $\begin{cases} V_N = 2k \\ t = 8 \text{ meses} \\ r\% = ? \end{cases}$

Reemplazando : $\dfrac{k\,(1\,200 - 40 \,.\, 5)}{1\,200} = \dfrac{2k\,(1\,200 - r \,.\, 8)}{1\,200}$

Simplificando y operando : $r\,\% = 87{,}5\,\%$ RPTA. D

24.- La suma de los valores nominales de dos letras es S/. 16 800. Si se descuentan al 8% anual la primera por dos meses y la segunda por cinco meses, se recibe S/. 16 560 por ambas. Determinar el valor nominal de cada letra, indicar el menor.

A) S/. 12 000 ***B) S/. 7 200*** ***C) S/. 5 300*** ***D) S/. 5 000*** ***E) S/. 4 800***

Resolución.-

Dato : $\begin{cases} V_{N1}+V_{N2} = S/.16\ 800 & \text{.... }(\alpha) \\ D_{C1}+D_{C2} = 16\ 800 - 16\ 580 = S/.240 & \text{.... }(\beta) \end{cases}$

De (β) : $$\frac{V_{N1}\ .\ 6\ .\ 2}{1\ 200} + \frac{V_{N2}\ .\ 6\ .\ 5}{1\ 200} = 240$$

Agrupando convenientemente :

$$\frac{(V_{N1}+V_{N2})\ .\ 6\ .\ 2}{1\ 200} + \frac{V_{N2}\ .\ 6\ .\ 3}{1\ 200} = 240 \quad \text{.... }(\theta)$$

Reemplazando (α) en (θ) :

$$\frac{16\ 800\cdot 6\cdot 2}{1\ 200} + \frac{V_{N2}\ .\ 6\ .\ 3}{1\ 200} = 240$$

Luego : $V_{N2} = S/.\ 4\ 800$

$V_{N1} = S/.\ 12\ 000$ RPTA. E

25.- Determinar el valor nominal de una letra sabiendo que el descuento racional es el 85% del descuento comercial y que el valor nominal excede al descuento comercial en S/. 2 100.

A) S/. 2 000 B) S/. 3 250 C) S/. 2 550 D) S/. 2 680 E) S/. 2740

Resolución.-

Por dato del problema : $D_R = \frac{85}{100}\ .\ D_C$

Si asumimos que : $D_C = 20k \Rightarrow D_R = 17k$

Por el problema anterior : $V_N = \frac{20k\ .\ 17k}{20k - 17k} = \frac{340}{3}k$

Por dato del problema : $V_N - D_C = 2\ 100$

Reemplazando los valores : $\frac{340}{3}k - 20k = 2\ 100 \Rightarrow k = 22{,}5$

Por lo tanto : $V_N = \frac{340}{3}\ .\ 22{,}5 \Rightarrow V_N = S/.\ 2\ 550$ RPTA. C

26.- Si el descuento comercial de una letra representa el 20% del valor nominal. ¿Cuánto se recibirá por dicho documento, si el descuento fuese racional?

A) $83{,}\overline{3}\%\ V_N$ B) $85{,}3\%\ V_N$ C) $82{,}3\%\ V_N$ D) $80{,}3\%\ V_N$ E) $72{,}8\%\ V_N$

Resolución.-

Por dato del problema tenemos que : $D_C = 20\ \%\ V_N$

Nos piden calcular : $V_{AR} = V_N - D_R \quad \dots (\alpha)$

Pero sabemos que : $V_N = \dfrac{D_C \cdot D_R}{D_C - D_R}$

Reemplazando los valores : $V_N = \dfrac{20\ \%\ V_N \cdot D_R}{20\ \%\ V_N - D_R}$

Operando tenemos que : $D_R = 16,\bar{6}\ \%\ V_N \quad \dots (\beta)$

Reemplazando (β) en (α) : $V_{AR} = V_N - 16,\bar{6}\ \%\ V_N$

Reduciendo términos semejantes : $V_{AR} = 83,\bar{3}\ \%\ V_N$ RPTA. A

27.- Se ha hecho descontar un pagaré de S/. 18 000 al 5% a los 108 días. Si el banco retiene, además 0,1% de comisión sobre el valor nominal y 1/4% de cambio de plaza. ¿Cuánto devolverá?

A) S/. 17 667 B) S/. 18 690 C) S/. 16 250 D) S/. 16 900 E) S/. 15 960

Resolución.-

Por dato tenemos : $\begin{cases} V_N = 18\ 000 \\ r\ \% = 5\ \% \\ 108 \text{ días} \end{cases}$

Calculando el descuento : $D_C = \dfrac{18\ 000 \cdot 5 \cdot 108}{36\ 000} \Rightarrow D_C = 270$

Además el banco retiene : $(0,1 + 0,25)\%\ .\ 18\ 000 = 63$

Por lo tanto : $D_{Total} = S/.\ 270 + S/.\ 63 = S/.\ 333$

Entonces lo que el banco devuelve es :

$V_A = 18\ 000 - 333 = S/.\ 17\ 667$ RPTA. A

28.- Después de haberse comprometido a pagar una deuda de S/. 75 000 en dos partes equitativas; la primera parte a los 90 días y la otra a los 60 días después del primer pago; un comerciante se decidió a cancelar la misma deuda con un descuento del 6%. ¿Cuánto tuvo que pagar al contado?

A) S/. 74 500 B) S/. 74 000 C) S/. 73 500 D) S/. 73 000 E) S/. 72 500

Resolución.-

Para la primera letra : $\begin{cases} V_N = 37\,500 \\ t = 90 \text{ días} <> 3 \text{ meses} \\ r\% = 6\,\% \\ D_{C1} = \dfrac{37\,500 \cdot 6 \cdot 3}{1200} = S/.\,562{,}5 \end{cases}$

Para la segunda letra : $\begin{cases} V_N = 37\,500 \\ t = (90+60) \text{ días} <> 5 \text{ meses} \\ r\% = 6\,\% \\ D_{C2} = \dfrac{37\,500 \cdot 6 \cdot 5}{1200} = S/.\,937{,}5 \end{cases}$

Por lo tanto : $D_{Total} = D_{C1} + D_{C2} = S/.\ 1\,500$

Lo que pagó al contado : $S/.\ 75\,000 - S/.\ 1\,500 = S/.\ 73\,500$ RPTA. C

29.- El valor nominal de una letra es 4/5 del valor nominal de otra. Se ha descontado comercialmente al 4%, la primera por un mes y 16 días; la segunda por tres meses, el descuento de ésta fue de S/. 45. ¿Cuál fue el descuento de la primera?

A) S/. 18,00 B) S/. 18,20 C) S/. 18,40 D) S/. 18,60 E) S/. 18,80

Resolución.-

Por dato : $V_{N1} = \dfrac{4}{5} V_{N2} \Rightarrow \begin{cases} V_{N2} = 5k \\ V_{N1} = 4k \end{cases}$

Para la segunda letra : $\begin{cases} V_{N2} = 5k \\ r\,\% = 4\,\% \\ t = 3 \text{ meses} \\ D = S/.\ 45 \end{cases}$

Operando : $45 = \dfrac{5k \,.\, 4 \,.\, 3}{1\,200} \Rightarrow k = 900$

Para la primera letra : $\begin{cases} V_{N1} = 4k = 4 \cdot 900 = 3\,600 \\ r\,\% = 4\,\% \\ t = 46 \text{días} \end{cases}$

Calculando el descuento : $D_1 = \dfrac{36\,000 \cdot 4 \cdot 46}{36\,000} = S/.\ 18{,}40$ RPTA. C

30.- Se tiene una letra de S/. 1990 pagadera dentro de 90 días al 6%; si dicha letra se cambia por otra de S/. 1970 y empleando una tasa para el descuento del 6%. Averiguar cuál es el vencimiento de la segunda letra.

A) 1 mes ***B) 2 mes*** ***C) 3 mes*** ***D) 4 mes*** ***E) 40 días***

Resolución.-

Para cambio de letras, debemos recordar que la suma de los valores actuales de las letras a reemplazar, debe ser igual a la suma de los valores actuales de las letras que reemplazan.

Además : $$V_{AC} = \frac{V_N\,(1\,200 - r\,.\,t)}{1\,200}$$

Para la primera letra : $$\begin{cases} V_N = 1990 \\ t = 90\ \textit{días} <> 3\ \textit{meses} \\ r\% = 6\,\% \\ V_{AC} = \dfrac{1990\,(1200 - 3 \cdot 6)}{1200} \end{cases}$$

Para la segunda letra : $$\begin{cases} V_N = 1970 \\ t = ?\ \text{meses} \\ r\,\% = 6\,\% \\ V_{AC} = \dfrac{1970\,(1\,200 - t \cdot 6)}{1\,200} \end{cases}$$

Igualando los V_A : $$\frac{1900\,(1\,200 - 3 \cdot 6)}{1\,200} = \frac{1970\,(1\,200 - t \cdot 6)}{1\,200}$$

Operando y simplificando : $t = 1\ \textit{mes}$ RPTA. A

31.- Se tiene tres pagarés: uno de S/. 2 000 que vencía el 2 de diciembre del año pasado, otro de S/. 3 000 que venció el 1 de febrero y el otro de S/. 4 000 pagaderos el 4 de febrero (estas últimas se cumplen este año). Se reemplazó estos tres pagarés por uno solo. ¿Cuál será el día de vencimiento?

A) 19 de Enero ***B) 3 de Enero*** ***C) 15 de Enero***

D) 11 de Enero ***E) 12 de Enero***

Resolución.-

1° Para calcular problemas de vencimiento medio, hay que tener como datos los valores nominales y sus respectivos tiempos de vencimiento.

2° Recordar que el tiempo se calcula mediante : $$t = \frac{\Sigma(V_N\,.\,t)}{\Sigma\,V_N}$$

3° Tomando como referencia el 2 de Diciembre del año pasado tendremos :

1ra Letra : $$\begin{cases} V_{N1} = S/.\,2\,000 \\ t_1 = 0\ \textit{días} \end{cases}$$

2da Letra : $$\begin{cases} V_{N2} = S/.\,3\,000 \\ t_2 = 61\,\textit{días} \end{cases}$$

3ra Letra : $\begin{cases} V_{N3} = S/.\,4\,000 \\ t_3 = 64\ días \end{cases}$

4° Por lo tanto : $t = \dfrac{2\,000 \cdot 0 + 3\,000 \cdot 61 + 4\,000 \cdot 64}{2\,000 + 3\,000 + 4\,000} \cong 48$ días

5° De los 48 días, 29 días corresponde al mes de diciembre, por lo tanto los 19 días restantes corresponde al mes de enero.

6° La fecha de vencimiento será el 19 de enero del siguiente año. RPTA. A

32.- Una letra de S/. 420 se presenta al descuento y se obtiene por ella S/. 390; si el descuento fuese racional. ¿Cuánto se recibirá?

A) S/. 400 B) S/. 398 C) S/. 396 D) S/. 394 E) S/. 392

<u>Resolución</u>.-

Nos piden calcular : $V_{AR} = V_N - D_R$ .... (I)

Se tiene : $\begin{cases} V_N = 420 \\ V_{AC} = 390 \\ \therefore D_C = 420 - 390 = 30 \end{cases}$

Sabemos que : $V_N = \dfrac{D_C \cdot D_R}{D_C - D_R}$

Despejando el Descuento racional : $D_R = \dfrac{V_N \cdot D_C}{V_N + D_C}$

Reemplazando los valores conocidos : $D_R = \dfrac{420 \cdot 30}{420 + 30} = 28$

Reemplazando en (I) : $V_{AR} = 420 - 28 =$ S/. 392 RPTA. E

33.- La suma de los valores nominales de dos letras es igual a S., 64 000 y se ha recibido por ellas S/. 62 150, descontadas al 5%, el primero por 6 meses y el segundo por 8 meses. ¿Cuál es el valor nominal de cada letra?. Dar como respuesta la diferencia de ellas.

A) S/. 7 000 B) S/. 6 000 C) S/. 5 000 D) S/. 4 000 E) S/. 3 000

<u>Resolución</u>.-

1° Sean los valores nominales : V_{N1} y V_{N2}

2° Sean los valores actuales : V_{A1} y V_{A2}

3° Por dato del problema tenemos : $\begin{cases} V_{N1} + V_{N2} = 64\,000 & .... (\alpha) \\ V_{A1} + V_{A2} = 62\,150 & .... (\beta) \end{cases}$

4° Si restamos (α) - (β) : $D_{C1} + D_{C2} = 1\,850$

5º Reemplazando : $\dfrac{V_{N1}\,.\,6\,.\,5}{1\,200} + \underbrace{\dfrac{V_{N2}\,.\,8\,.\,5}{1\,200}}_{\frac{V_{N2}\,.\,6\,.\,5}{1\,200} + \frac{V_{N2}\,.\,2\,.\,5}{1\,200}} = 1\,850$

6º Agrupando y factorizando : $\dfrac{6\cdot 5}{1\,200}\cdot\underbrace{\left(V_{N1}+V_{N2}\right)}_{64\,000} + \dfrac{V_{N2}\,.\,2\,.\,5}{1\,200} = 1\,850$

7º Despejando tenemos que : $\begin{cases} V_{N2} = S/.\ 30\,000 \\ V_{N1} = S/.\ 34\,000 \end{cases}$

8º La diferencia de los valores nominales : $V_{N1} - V_{N2} = S/.\ 4\,000$

RPTA. D

34.- A cambio de una letra que vencía dentro de tres meses un acreedor recibió otra letra por S/. 2 370, pagadera a los cinco meses. ¿Cuál era el valor nominal de la primera? Tasa de descuento 5%.

A) S/. 2 450 B) S/. 2 400 C) S/. 2 350 D) S/. 2 300 E) S/. 2 250

<u>Resolución</u>.-

1º Recuerde que en cambios de letras los valores actuales son iguales.

2º Recuerde además que : $V_{AC} = \dfrac{V_N\,(1\,200 - r\,.\,t)}{1\,200}$

3º Los datos del problema son :

1ª letra : $\begin{cases} V_N = ? \\ t = 3 \text{ meses} \\ r\% = 5\% \end{cases}$

2da letra : $\begin{cases} V_{N2} = 2\,370 \\ t = 5 \text{ meses} \\ r\% = 5\% \end{cases}$

4º Reemplazando los valores : $\dfrac{V_N\,(1\,200 - 5\cdot 3)}{1\,200} = \boxed{\dfrac{2\,370\,(1\,200 - 5\cdot 5)}{1\,200}}$

5º Operando tenemos que : $V_N = S/.\ 2\,350$ RPTA. C

35.- Se tiene tres letras de S/. 2 410; S/. 2 420 y S/. 2 430, pagaderas en 30, 60 y 90 días respectivamente. Indicar el valor nominal de una letra que reemplaza a las tres anteriores y que sea pagadera a 40 días. Descuento racional al 5%.

A) S/. 7 240 B) S/. 2 740 C) S/. 2 730 D) S/. 2 720 E) S/. 2 710

<u>Resolución</u>.-

1º Recuerde que : $D_R = V_N - V_{AR} \Rightarrow V_{AR} = V_N - D_R$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- El valor actual comercial de una letra es *S/.* 5 700, y el descuento comercial es el 5% del valor nominal. ¿Cuál es el valor nominal de la letra?

A) *S/.* 33 000 D) *S/.* 6 250

B) *S/.* 6 000 E) *S/.* 6 300

C) *S/.* 5 900

2.- Si : DC = 210 ; y ; DR = 200

¿Cuál es el valor nominal de la letra?

A) *S/.* 5 800 D) *S/.* 4 200

B) *S/.* 410 E) *S/.* 2 100

C) *S/.* 1 800

3.- Una letra de *S/.* 36 500 girada el 3 de Julio vence el 2 de Agosto. ¿Qué descuento sufrirá el 24 de Julio al 5% anual?

A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

4.- Calcular el valor nominal de un pagaré por el cual recibe *S/.* 5 174, descontada al 6% por 30 *días*.

A) *S/.* 5 100 D) *S/.* 5 190

B) *S/.* 5 180 E) *S/.* 5 250

C) *S/.* 5 200

5.- Por una letra de *S/.* 9 000 se ha pagado *S/.* 8 635, sabiendo que faltaban 73 *días* para su vencimiento. Calcular la tasa del descuento.

A) 20% B) 30% C) 40%

D) 25% E) 35%

6.- El valor nominal de una letra es 8 veces al descuento racional. ¿Cuántas veces el descuento comercial es el valor nominal?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 7 E) 5

7.- El tipo de descuento en un banco es 144% anual. ¿Qué % del valor nominal de una letra se recibirá descontándola 75 *días* antes de su vencimiento.

A) 72% B) 70% C) 75%

D) 80% E) 76%

8.- Por un artefacto, cuyo precio de contado es *S/.* 380 se paga *S/.* 110 de inicial, y se firma una letra pagadera dentro de un mes. ¿Cuál es el valor nominal de dicha letra? (Tasa 10% mensual)

A) S/. 320 B) S/. 280 C) S/. 290

D) S/. 270 E) S/. 300

9.- Si el descuento comercial de una letra es 2 000 y su descuento racional es 1 200. ¿Cuál es el valor nominal de la letra?

A) 2 400 B) 4 800 C) 3 000

D) 5 400 E) 2 380

10.- Una persona debe pagar una letra de 5 000 *soles* el 6 de Abril; paga el 29 de Marzo 4 990 *soles*. ¿Cuál fue la tasa descontable?

A) 10% B) 10,4% C) 15%

D) 9% E) 20%

11.- La diferencia entre el descuento comercial y racional de una letra de 270 *dólares* es de 3 *dólares*. ¿Cuál es el descuento racional?

A) 18 B) 24 C) 28 D) 27 E) 30

12.- Se descontó una letra el 10-10-96 y recibió 75% de su valor nominal, si se descontaba el 20-10-96 se recibía el 80% de su valor nominal. ¿Cuál es la fecha de vencimiento?

A) 28-11-96 D) 21-12-96

B) 27-11-96 E) 30-11-96

C) 29-11-96

13.- ¿Cuál era el tiempo de vencimiento para que una letra descontada comercialmente al 4% trimestral se reciba los 5/6 de su valor nominal?

A) 365 *días* D) 375 *días*

B) 390 *días* E) 380 *días*

C) 360 *días*

14.- Cuántos soles más vale una letra de S/. 8 000 que vence dentro de un mes, comparado con una letra de S/. 9 000 que vence dentro de dos meses; si ambas se descontaron al 10% mensual.

A) 360 B) 720 C) 900

D) F.D E) Son iguales

15.- La diferencia entre el descuento racional y comercial de una letra descontada por 200 *días* al 6% es 98. ¿Cuál es el valor efectivo comercial?

A) 87 102 B) 87 200 C) 88 102

D) 87 100 E) 88 201

16.- El valor actual racional de una letra es S/. 16 000 y la suma de los descuentos es a la diferencia de los mismos como 162 es a 2. Dar como respuesta el valor nominal de dicha letra.

A) 3 280 B) 5 420 C) 16 400

D) 1 640 E) 14 600

17.- Los valores nominales de 2 letras son como 3 es a 5; la primera vence a los 30 *días* y la segunda a las 40 *días*, se descuentan al 12% y resulta como valor efectivo de la última letra S/. 4 440. Hallar el valor efectivo de la primera letra.

A) 2 763 B) 2 673 C) 2 473

D) 6 573 E) 7 573

18.- Una letra es vendida 15 *días* antes de su vencimiento en S/. 50 000. Calcular el valor nominal de la letra, si el banco le descontó al 8%.

A) 49835,6 D) 49833,3

B) 50164,4 E) 50167,2

C) 50160,5

19.- Si la media armónica del valor nominal y el descuento comercial de una letra es S/. 316. ¿Cuál es el descuento racional de la misma letra?

A) S/. 6732 B) S/. 316 C) S/. 158

D) S/. 79 E) S/. 310

20.- Una letra de 15 000 vencía dentro de 6 *meses* al 8% quiere ser cambiada por otra letra que debe vencer dentro de 1 año 3 *meses* al 8%. ¿Cuál debe ser el valor de esta letra?

A) S/. 14 000 D) S/. 16 000

B) S/. 14 000 E) S/. 16 500

C) S/. 17 000

21.- Faltan 75 *días* para el vencimiento de una letra, y se sabe que los descuentos comercial y racional estarían en la relación de 4 a 3. ¿Cuántos días habrán que esperar para que los descuentos mencionados guarden la relación de 6 a 5?

A) 45 B) 30 C) 50 D) 25 E) 35

22.- Se tiene 2 letras, donde la segunda es 40% más que la primera. Ambas descontadas racionalmente al 15%; la primera por *t meses* y la segunda por 60 *t días*. Determinar *t*, si por la segunda se recibe S/. 11 480 y por la primera recibe S/. 8 400.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

23.- Un señor deposita un capital "C" a interés simple y al mismo tiempo firma una letra por un valor nominal igual al triple del capital; al cabo de cuántos meses exactos podrá pagar la letra con el monto del ahorro, sabiendo que la tasa de descuento y de interés es el mismo entero "*r*" y menor que 150.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

24.- Una letra fue aceptada el 3 de Enero de 1 996 y vence a los 8 *meses*, después de 3 *meses* se descuenta en el banco al 52% anual donde además cobran el 2% de gastos y 1% por cambio de plaza.
Si se recibió *S/.* 28 476 cuál era el valor nominal de la letra.

A) 37 800 B) 36 000 C) 32 000
D) 34 200 E) 37 600

25.- Calcular el valor actual racional de una letra que vence dentro de 10 *días* que ha sido descontada al 40% si la diferencia entre los descuentos es *S/.* 2,94.

A) 27 814 B) 26 731 C) 24 325
D) 21 814 E) 2 384

26.- El pagaré de 900 *soles* con fecha de vencimiento 30 de Julio fue descontado 10 de abril al 6% anual, sin embargo el documento no llego al banco el día previsto, razón por la cual solo se le retuvo al comerciante un descuento de 15,20 *soles*.
¿Qué día se formalizó la operación realmente?

A) 12 Abril B) 15 Abril C) 16 Abril
D) 14 Abril E) 18 Abril

27.- Dos letras cuya fecha de vencimiento es la misma con descuento al mismo tiempo y con la misma tasa de descuento del 7%, si una ellas fue firmada por *S/.* 8 200 más y su descuento es *S/.* 868 más que el de la otra. Hallar el tiempo de descuento.

A) 1 *año* 6 *meses* D) 2 *años*
B) 2 *años* 6 *meses* E) 2 *años* 6 *meses*
C) 3 *años*

28.- El descuento comercial y racional de una misma letra son proporcionales a dos números consecutivos y a los valores actuales 126 y 128 respectivamente.
¿Cuál será la diferencia de los descuentos si el valor nominal es *S/.* 14 400 *soles*?

A) *S/.* 100 B) *S/.* 200 C) *S/.* 250
D) *S/.* 150 E) *S/.* 260

29.- Un comerciante se comprometió a pagar una letra de *S/.* 7 500 en dos partes iguales, mitad a los 90 *días* y la otra mitad a los 60 *días* después del primer pago; el comerciante decide cancelar la otra mitad para lo cual le harán un descuento comercial del 24%.
¿Cuánto es la suma total que canceló la deuda?

A) S/. 7 675 B) S/. 7 475 C) S/. 7 450
D) S/. 3 675 E) S/. 7 425

30.- Una persona hace descontar comercialmente dos letras recibiendo *S/.* 21 130 por la primera letra y *S/.* 3 223 por la segunda cuyo vencimiento es posterior en 2 *meses* al de la primera.
Hallar el valor nominal de la segunda letra, si la suma de los valores nominales es de *S/.* 7 500 y el descuento se realiza al 4%.

A) 4 200 B) 4 300 C) 3 000
D) 3 200 E) 3 300

22 PROMEDIOS

22.1 PROMEDIO O VALOR MEDIO

Es una cantidad representativa de un conjunto de datos extraídos de una población. Se dice que el promedio es una medida de tendencia central.

Sean los datos : a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; ..... ; a_n

Y su relación de orden : $a_1 > a_2 > a_3 > ..... > a_n > 0$

La característica principal del promedio es :

$$a_1 > \text{Promedio} > a_n$$

Es por ello su concepto de tendencia central

22.2 CLASES

2.1.- PROMEDIO ARITMÉTICO O MEDIA ARITMETICA (M.A)

$$\text{M.A} = \frac{\text{Suma de datos}}{\text{Cantidad de datos}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

2.2.- PROMEDIO GEOMÉTRICO O MEDIA GEOMÉTRICA (M.G)

$$\text{M.G} = \sqrt[\substack{\text{cantidad}\\ \text{de datos}}]{\text{Producto de datos}} = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \; ..... \; a_n}$$

2.3.- PROMEDIO ARMÓNICO O MEDIA ARMÓNICA (M.H)

$$\text{M.H} = \frac{\text{Cantidad de datos}}{\text{Suma de las Inversas de los datos}} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

Ejercicios :

1.- Determinar el valor de la M.A, MG, MH de 30; 60 y 120, luego dar su relación de orden.

$$M.A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} = 70$$

$$M.G = \sqrt[3]{30 \times 60 \times 120} = 60$$

$$MH = \frac{3}{\frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{120}} = 51\ \frac{3}{7}$$

$$\therefore \quad MH < MG < MG$$

2.- Indicar la MA, MG, MH de los números a, b ($a > b > 0$)

$$MA = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad MG = \sqrt{ab} \quad ; \quad MH = \frac{2ab}{a+b}$$

22.3 PROPIEDADES

A. Para números NO negativos se cumple :

$$\boxed{MH \leq MG \leq MA}$$

B. Solo para dos números a y b ($a > b > 0$)

$$\boxed{MG^2 = MA \times MH}$$

C. El error que se comete al tomar la M.A. en vez de la M.G. es :

$$\boxed{MA - MG = \frac{(a-b)^2}{4(MA+MG)}}$$

22.4 PROMEDIO ARITMETICO PONDERADO

Si nos dan n precios a_1 ; a_2 ; a_3 y sus pesos o frecuencias f_1 ; f_2 ; f_3 .... f_n podemos distribuirlo en la tabla de la siguiente forma :

FRECUENCIA	PRECIO	TOTAL
f_1	a_1	$f_1 \cdot a_1$
f_2	a_2	$f_2 \cdot a_2$
f_3	a_3	$f_3 \cdot a_3$
.	.	. .
.	.	. .
.	.	. .
f_n	a_n	$f_n \cdot a_n$

Entonces el promedio ponderado :

$$P.P = \frac{f_1.a_1 + f_2.a_2 + f_3.a_3 + ... + f_n.a_n}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n}$$

Ejemplo :

Determinar la nota promedio de un alumno si al dar 3 exámenes obtuvo 12, 13 y 9 siendo los pesos respectivos de cada examen 1, 2, 3.

Pesos	Notas	Total
1	13	13
2	13	26
3	9	27
6	$Np = \frac{66}{6}$	66

$\therefore$ Nota Promedio $= \frac{66}{6} = 11$

A. PROPIEDAD DE PROMEDIO PONDERADO.

a) El promedio ponderado no depende de los "pesos" de las frecuencias si no de la proporción en que se encuentran.

b) A los precios o valores que se ubiquen en la segunda columna se les suma o resta una misma cantidad, el promedio ponderado aumenta o disminuye en la misma cantidad.

Ejemplo (1) :

Calcular el promedio Aritmético ponderado sí:

Pesos		Precios		Total
4	220	378^{-365}	13	52
5	350	365	0	0
1	70	380	15	15
10		PP		67

Ejemplo (2) :

$\therefore \quad P.P = \frac{67}{10} + 365 = 371,7$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- El promedio de 8 números es 40 y el promedio de otros 12 números es 30. Calcular el promedio de los 20 números :

A) 40 ***B) 32*** ***C) 34*** ***D) 38*** ***E) 45***

Resolución.-

El promedio más común es el aritmético, por lo tanto se suele llamar tan solo promedio.

Dándoles las formas respectivas : $\dfrac{a_1+a_2+a_3+.....+a_8}{8}=40$

$\Rightarrow \quad \dfrac{b_1+b_2+b_3+.....+b_{12}}{12}=30$

Despejando las sumatorias de (I) Y (II) : $a_1+...+a_8=320$

$\Rightarrow \quad a_1+...+a_{12}=360$

Como nos piden el promedio de los 20 números, pues será la suma de los 20, entre 20; es decir:

$$\frac{320\ +\ 360}{20}=\frac{680}{20}=34 \qquad \text{RPTA. C}$$

2.- El producto de los tres promedios de dos números es 512. Si uno de los tres promedios es 6,4. Determinar la raíz cuadrada de la media aritmética de los mayores promedios.

A) 3 ***B) 4,2*** ***C) 5,9*** ***D) 6*** ***E) 9***

Resolución.-

Recordemos que para dos números se cumple : $MA\ .\ MH=MG^2$ .... (I)

Por datos sabemos : $MA\ .\ MH\ .\ MG=512$ .... (II)

Reemplazando (I) en (II) : $MG^2\ .\ MG=512 \Rightarrow MG=8$

Además : $MH \leq MG \Rightarrow MH=6{,}4$

Al reemplazar en (I) : $MA=10$

Luego : $\sqrt{\dfrac{MA+MG}{2}}=\sqrt{\dfrac{10+8}{2}}=3$ RPTA. A

3.- La media geométrica de dos números es el triple del menor y la media aritmética es inferior a 36 unidades que el mayor. Hallar la media armónica de los números?

A) 14,4 ***B) 38,4*** ***C) 16,2*** ***D) 10,8*** ***E) 21,6***

<u>Resolución</u>.-

Sean A y B los números (A > B).

Por dato tenemos : $\begin{cases} \sqrt{AB} = 3B & \Rightarrow \quad A = 9B \quad \ldots.(\alpha) \\ \dfrac{A+B}{2} = A - 36 & \Rightarrow \quad B = A - 72 \quad \ldots.(\beta) \end{cases}$

Reemplazando (α) en (β) : $B = 9\,B - 72 \quad \Rightarrow \quad B = 9$

En (α) : $A = 81$

Por lo tanto : $MH = \dfrac{2 \cdot 81 \cdot 9}{81 + 9} = 16{,}2$ RPTA. C

4.- Se tiene cinco números naturales y ninguno es menor que 54, si la media geométrica de los cinco números es 108. Hallar el máximo valor que puede tomar uno de ellos; dar como respuesta la media aritmética de los cinco números.

A) 164,5 B) 388,8 C) 194,4 D) 54 E) 108

<u>Resolución</u>.-

Para que uno de ellos (A) sea máximo, los demás deben ser lo menor posible, es decir 54.

Por lo tanto : $\sqrt[5]{54\,.\,54\,.\,54\,.\,54\,.\,A} = 108 \quad \Rightarrow \quad A = 1\,728$

Luego : $MA = \dfrac{4 \quad 54 + 1728}{5} = 388{,}8$ RPTA. B

5.- En un salón la suma de las edades de todos los alumnos es 900 años y la edad promedio es de 18 años. Si cada alumno tuviera 3 años más y cada alumna tuviera 2 años menos, la edad promedio aumentaría en 1 año. ¿En qué proporción están el número de hombres y el número mujeres de dicho salón?.

A) 2/3 B) 7/2 C) 5/2 D) 9/2 E) 1/2

<u>Resolución</u>.-

Sea : $\begin{cases} H = \text{número de hombres} \\ M = \text{número de mujeres} \end{cases}$

θ $\dfrac{900}{H+M} = 18 \xrightarrow{\textit{Despejando}} H + M = 50 \quad \ldots\,(\alpha)$

θ $\dfrac{900+3H-2M}{50} = 19 \xrightarrow{\textit{Operando}} 3H - 2M = 50 \quad \ldots\,(\beta)$

Igualando (α) y (β) : $H + M = 3\,H - 2\,M \quad \Rightarrow \quad 3\,M = 2H$

Por lo tanto : $\dfrac{H}{M} = \dfrac{2}{3}$ RPTA. A

6.- *El promedio de las edades del 40% de los asistentes a una reunión es 40 años, el promedio del 25% del resto es 28 años. ¿Cuál debe ser el promedio del nuevo resto, si todos los asistentes en promedio tienen 31 años?*

A) 12 ***B) 18*** ***C) 24*** ***D) 40*** ***E) 10***

Resolucion.-

Sea 100 el número de alumnos.

De los cuales : $100 \Rightarrow \begin{cases} 40\% \,.\, 100 = 40 \\ 25\% \,.\, (100-40) = 15 \\ 100 - (40+15) = 45 \end{cases}$

Luego : $\begin{cases} \dfrac{S_{100}}{100} = 31 \Rightarrow S_{100} = 3\,100 \\ \dfrac{S_{40}}{40} = 40 \Rightarrow S_{40} = 1\,600 \\ \dfrac{S_{15}}{15} = 28 \Rightarrow S_{15} = 420 \end{cases}$

El promedio de los 45 restantes : $\dfrac{3\,100-(1\,600+420)}{45} =$ 24 *años* RPTA. C

7.- *El promedio de las notas de una prueba rendida por 60 alumnos fue 104, los primeros 12 obtuvieron un promedio de 160 y los últimos 20 sacaron 62. ¿Calcular el promedio de los alumnos restantes?*

A) 130 ***B) 50*** ***C) 90*** ***D) 110*** ***E) 150***

Resolución.-

Datos :

* $\dfrac{\Sigma_{(60)}}{60} = 104 \Rightarrow \Sigma_{(60)} = 6\,240$

* $\dfrac{\Sigma_{(12)}}{12} = 160 \Rightarrow \Sigma_{(12)} = 1\,920$

* $\dfrac{\Sigma_{(20)}}{20} = 62 \Rightarrow \Sigma_{(20)} = 1\,240$

Los restantes números suman : $\Sigma_{(28)} = 6\,240 - (1\,920 + 1\,240)$

$\Sigma_{(28)} = 3\,080$

$\therefore$ Promedio $= \dfrac{3\,080}{28} =$ 110 RPTA. D

8.- Si a, b y c son tres números positivos sobre el valor de :

$$E = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad ; \quad \textit{lo verdadero es :}$$

A) Siempre es superior a 4 ***B) Puede ser inferior a 3*** ***C) 0 < E < 2***

D) Nunca es inferior a 3 ***E) 0 < E < 1***

Resolución.-

Por propiedad A : $\quad$ M.G. $\leq$ M.A.

Entonces : $\quad \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} \leq \dfrac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3}$

Operando : $\quad 3 \leq E \qquad$ RPTA. D

9.- La diferencia de dos números es 7 y la suma de su media geométrica y su media aritmética es 24,5. Determinar el error que se comete al tomar la M.G como M.A.

A) 0,5 ***B) 0,6*** ***C) 0, 3*** ***D) 1/7*** ***E) 1***

Resolución.-

Sean los números : $\quad a > b > 0$

Por datos tenemos : $\quad \begin{cases} MA + MG = 24{,}5 \\ a - b = 7 \end{cases}$

Por propiedad C : $\quad$ Error $=$ MA - MG $= \dfrac{(a-b)^2}{4\,(MA+MG)}$

Reemplazando : $\quad$ Error $= \dfrac{7^2}{4 \cdot 24{,}5} = 0{,}5 \qquad$ RPTA. A

10.- En 1 990 la población de una ciudad fue 80 000 habitantes y en 1 996 la población de dicha ciudad fue 180 000 habitantes, estimar la población de dicha cuidad en 1 993, si se considera una tasa anual de crecimiento constante.

A) 100 000 ***B) 110 000*** ***C) 130 000*** ***D) 120 000*** ***E) 150 000***

Resolución.-

Tomemos como ejemplo una población inicial de 100, y una tasa de crecimiento del 10% anual.

Por lo tanto :

$$\overset{\text{1 año}}{\underbrace{100 \longrightarrow 110}_{A = 10\% \times 100 = 10}} \;\; \overset{\text{1 año}}{\underbrace{110 \longrightarrow 121}_{A = 10\% \times 110 = 11}}$$

En el ejemplo se observa que se forma una progresión geométrica cuyo valor central será la M.G., la cual es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos, comprobando en el ejemplo :

$$110 = \sqrt{100 \cdot 121}$$

En el problema :

$$\begin{array}{ccccc} 1\,990 & & 1\,993 & & 1\,996 \\ 80\,000 & & x & & 180\,000 \\ & \underbrace{\hspace{6em}}_{3 \text{ años}} & & \underbrace{\hspace{6em}}_{3 \text{ años}} & \end{array}$$

Por lo tanto : $x = \sqrt{80\,000 \cdot 180\,000} = 120\,000$ habitantes RPTA. D

11.- Hallar la media armónica de los números de la siguiente sucesión :

8, 24, 48, 80; ... , 360

A) 9/40 ***B) 40/3*** ***C) 60/7*** ***D) 40*** ***E) 90***

<u>Resolución</u>.-

Dando una forma adecuada a los números de la secuencia :

$$\underbrace{4\,(1 \cdot 2);\ 4\,(2 \cdot 3);\ 4\,(3 \cdot 4);\ .....;\ 4\,(9 \cdot 10)}_{9 \text{ números}}$$

Calculando la M.H. : $MH = \dfrac{9}{\dfrac{1}{4\,(1 \cdot 2)} + \dfrac{1}{4\,(2 \cdot 3)} + \dfrac{1}{4\,(3 \cdot 4)} + ... + \dfrac{1}{4\,(9 \cdot 10)}}$

Factorizando : $MH = \dfrac{9}{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + ... + \dfrac{1}{9 \cdot 10}\right)}$

Observemos que : $\dfrac{1}{a\,.\,(a+1)} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+1}$

Por lo tanto : $MH = \dfrac{9}{\dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{10}\right)}$

Simplificando : $MH = \dfrac{9}{\dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{10}\right)} = 40$ RPTA. D

12.- Un automovilista recorre la primera vuelta de un círculo a 50 km/h, la segunda vuelta a 100 km/h; la tercera a 150 km/h y la cuarta a 200 km/h. ¿Cuál fue la velocidad promedio del automovilista en sus 4 vueltas?

A) 100 km/h ***B) 96 km/h*** ***C) 150 km/h*** ***D) 80 km/h*** ***E) 120 km/h***

Resolución.-

Asumimos como "e" la longitud del círculo :

Además : $$V_{Promedio} = \frac{\text{Espacio Total}}{\text{Tiempo Total}}$$

Luego : $$V_{Promedio} = \frac{4e}{\frac{e}{50}+\frac{e}{100}+\frac{e}{150}+\frac{e}{200}}$$

Operando : $V_{Promedio} = \boxed{96\ km/h}$ RPTA. B

13.- Un automovilista recorrió 80 km usando igualmente las 5 llantas que tenía (4 en el auto y la de repuesto). ¿Cuántos kilómetros recorrió cada llanta?

A) 16 km B) 80 km C) 64 km D) 32 km E) 50 km

Resolución.-

Cuando el auto recorre 80 km cada una de las cuatro llantas recorre 80 km. Siendo el recorrido total de llantas : $4 \times 80 = 320\ km$ y como se usaron 5 llantas igualmente.

Entonces cada una recorrió : $\frac{320\ km}{5} = \boxed{64\ km}$ RPTA. C

14.- El promedio aritmético de las longitudes de 5 cintas métricas graduadas en centimetros es 76 cm; si ninguna tiene más de 85 cm. ¿Cuál es la mínima longitud que puede tener una ellas?

A) 25 cm B) 30 cm C) 40 cm D) 45 cm E) 50 cm

Resolución.-

Como se quiere que una de ellas tenga una mínima longitud (x), entonces las demás deben tener una longitud máxima es decir 85 cm.

Por lo tanto : $$\frac{85+85+85+85+x}{5} = 76$$

Luego la mínima longitud es : $\boxed{x = 40\ cm}$ RPTA. C

15.- En una reunión a lo que asisten 90 personas, la edad promedio es 18 años, pero si cada hombre tuviera 4 años menos y cada mujer tuviera 2 años más; la nueva edad promedio sería 16 años. ¿Cuál es la relación entre el número de hombres y el de mujeres?

A) 2 B) 3 C) 1/2 D) 1/3 E) 4

Resolución.-

Sean : $\begin{cases} \text{Número de hombres : H} \\ \text{Número de mujeres : M} \end{cases}$

Por dato : $\begin{cases} H + M = 90 & \ldots.(\alpha) \\ \dfrac{S_{Edades}}{90} = 18 \;\rightarrow\; S_{Edades} = 1620 \end{cases}$

Si cada hombre tiene 4 *años* menos, entonces la suma disminuye en 4 H.

Si cada mujer tiene 2 *años* más entonces la suma aumenta en 2 M.

Por lo tanto el nuevo promedio : $\dfrac{1620 - 4H + 2M}{90} = 16$

Operando : $4H - 2M = 180$

Simplificando : $2H - M = 90$

Sumando (α) y (β) : $H = 180 \Rightarrow H = 60$

En (α) : $M = 30$

Por lo tanto : $\dfrac{H}{M} = \dfrac{60}{30} = 2$ RPTA. A

16.- La media aritmética de 37 números consecutivos es 50. Si de los 37 números tomamos dos números equidistantes se observa que la razón aritmética es 28. Hallar la media geométrica de dichos números?

A) 54 ***B) 60*** ***C) 72*** ***D) 48*** ***E) 112***

Resolución.-

Como los números están en P.A. de razón 1, su M.A. será el término central.

$$\underbrace{\ldots\ldots, (50-x), \ldots\ldots 49}_{18\text{ números}},\ 50,\ \underbrace{51, \ldots\ldots (50+x), \ldots\ldots}_{18\text{ números}}$$

Donde $(50 - x)$ y $(50 + x)$ son los términos equidistantes que se toma.

Por dato : $(50 + x) - (50 - x) = 28 \Rightarrow x = 14$

Piden : $MG = \sqrt{(50+x)\cdot(50-x)} = \sqrt{64 \cdot 36} = 48$ RPTA. D

17.- Un químico busca en un mercado un recipiente paralelepípedo (de aristas perpendiculares entre si) y nota que las aristas que coinciden en un mismo vértice siempre suman 18 cm y por lo tanto compra el recipiente de mayor volumen. ¿Cuál es dicho volumen?

A) 224 cm³ ***B) 240 cm³*** ***C) 220 cm³*** ***D) 200 cm³*** ***E) 216 cm³***

Resolución.-

Sean las dimensiones : $\begin{cases} \text{Largo} : a \\ \text{Ancho} : b \\ \text{Altura} : c \end{cases}$

Por dato : $a + b + c = 18$

Nos piden calcular : $V_{max} = a \cdot b \cdot c$

Por la propiedad A : $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \leq \dfrac{a+b+c}{3}$

Reemplazando : $\sqrt[3]{V_{max}} \leq \dfrac{18}{3} \Rightarrow \boxed{V_{máx} = 216\ cm^3}$ RPTA. E

18.- Se tienen tres números a, b, y c tales que : ***M.H.(a, b) = 4,8***
M.H. (a, c) = 2,$\hat{6}$
M.H. (b, c) = 3

Calcular la M.H. de a, 2b y 3c.

A) 5 ***B) 6*** ***C) 7*** ***D) 8*** ***E) 9***

<u>Resolución</u>.-

De los datos : $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \dfrac{48}{10} \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} = \dfrac{5}{12} \\ \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} = \dfrac{8}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = 3 \Rightarrow \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\}$ .... (α)

De (α) al sumar miembro a miembro : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{11}{12}$ .... (β)

De (α) en (β) : $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{a} = \dfrac{3}{12} \\ \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{12} \\ \dfrac{1}{c} = \dfrac{6}{12} \end{array}\right.$

Por lo tanto : $MH = \dfrac{3}{\frac{3}{12}+\frac{2}{24}+\frac{6}{36}} = \dfrac{3}{\frac{6}{12}} = \boxed{6}$ RPTA. B

19.- Se tiene 80 números. A es la media aritmética de los 30 primeros y B es la media aritmética de los restantes, si M.G. y M.H. de A y B son 10$\sqrt{2}$ y 13 1/3. ¿Cuál es el menor valor posible de la M.A. de los 80 números?

A) 15,5 ***B) 13,75*** ***C) 16,25*** ***D) 12*** ***E) 19***

Resolución.-

Datos del problema : $\begin{cases} MG = 10\sqrt{2} \\ MH = 13\,\frac{1}{3} \end{cases}$

Sabemos que : $MG^2 = MA\ .\ MH \quad \Rightarrow \quad MA = \dfrac{MG^2}{MH}$

Reemplazando : $MA = \dfrac{\left(10\sqrt{2}\right)^2}{\frac{40}{3}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} MA\ = 15 = \frac{A+B}{2} & \Rightarrow\ A+B = 30 \\ MG^2 = 200 & \Rightarrow\ A\ .\ B = 200 \end{cases}$

Del sistema de ecuaciones : $\begin{cases} A = 20 \\ B = 10 \end{cases}$

Pero : $\begin{cases} A = \dfrac{S_{(30)}}{30} = 20 \ \Rightarrow\ S_{(30)} = 600 \\ B = \dfrac{S_{(50)}}{50} = 10 \ \Rightarrow\ S_{(50)} = 500 \end{cases}$

Por lo tanto : $MA = \dfrac{600+500}{80} = \boxed{13,\ 75}$ RPTA. B

20.- El promedio de las edades actualmente de 3 personas es mayor que 23 años dentro de 5 años el 50% de la edad de B será mayor que las edades actuales de A y C. Si la edad de B es menor que la edad de C y la de este es menor de 35 años. ¿Cuántos años tiene A?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Resolución.-

Sean a, b y c las edades de las personas A, B y C, respectivamente.

Por dato tenemos : $\begin{cases} \pi\dfrac{a+b+c}{3} = 23 \ \Rightarrow\ a+b+c = 69 \ ....(\alpha) \\ \pi a\ <\ 50\%\ (b+5) \quad ....(I) \\ \pi c\ <\ 50\%\ (b+5) \quad ....(II) \\ \pi b < \ c\ <\ 35 \quad ....(III) \end{cases}$

Sumando (I) y (II) : $a + c\ <\ b + 5$

Sumando a ambos miembros "b" : $a + b + c\ <\ 2b + 5 \ \Rightarrow\ 69\ <\ 2b + 5$

Despejando : $32\ <\ b$ .... (IV)

De (III) y (IV) tenemos que : $32\ <\ b\ <\ c\ <\ 35 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = 33 \\ c = 34 \end{cases}$

En (α) : $\boxed{a = 2}$ RPTA. A

21.- Los promedios aritméticos, geométricos y el menor de los números forman una progresión aritmética. ¿Cuál es la media armónica de los números, si su diferencia es 64?

A) 14,4 ***B) 15*** ***C) 17*** ***D) 18*** ***E) 19,2***

Resolución.-

Sean los números A y B (A >B).

Por dato : $\begin{cases} \dfrac{A+B}{2}\ ;\ \sqrt{AB}\ ;\ B : \text{forman una P.A.} \\ A-B=64 \qquad\qquad \ldots (\alpha) \end{cases}$

De la P.A. : $\dfrac{A+B}{2} - \sqrt{AB} = \sqrt{AB} - B$

Operando : $\dfrac{\sqrt{A}^2+\sqrt{B}^2-2\sqrt{AB}}{2} = \sqrt{AB} - \sqrt{B}^2$

Factorizando : $\dfrac{\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)^2}{2} = \sqrt{B}\ \left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)$

Simplificando : $\dfrac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2} = \sqrt{B}$ K $\sqrt{A} = 3\sqrt{B} \quad \Rightarrow \quad A = 9B \ \ldots (\beta)$

Reemplazando (β) en (α) : $\begin{cases} B = 8 \\ A = 72 \end{cases}$

Por lo tanto : $MH = \dfrac{2 \cdot 8 \cdot 72}{8+72} \quad \Rightarrow \quad \boxed{MH = 14{,}4}$ RPTA. A

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Determinar la M.G. de todos los nume-rales de dos cifras.

A) $11\sqrt[9]{9!}$ B) $10\sqrt[9]{9!}$ C) $11\sqrt[10]{72}$

D) $10\sqrt[9]{10!}$ E) 55

2.- La M.A. de 15 números es 120; si le agregamos 5 nuevos números a los números anteriores a la M.A. aumenta en 80. ¿Cuál es la suma de los nuevos números?

A) 2 000 B) 2 200 C) 3 000

D) 3 420 E) 3 440

3.- Si : M.G. $(a, b) = 6$; M.G $(b,c) = 4\sqrt{3}$ y M.G. $(a,c) = 6\sqrt{3}$

Calcular la M.H. (a, b, c)

A) 6,75 B) 7 C) 7,25

D) 7,50 E) 7,75

4.- Sabiendo que la M.A., M.G. y M.H. de dos números resultan ser enteros positivos. Además se cumple:

* $M.A = M.H^2$ * $\sqrt[6]{M.G} = \sqrt[M.H]{M.H}$

Hallar la media geométrica de la M.A; M.G y M.H.

A) 8 B) 64 C) 125 D) 36 E) $\sqrt[3]{28}$

5.- Sabiendo que la M.G. $(a, b) = 3$ M.H. (a, b). Determinar la suma de todas las razones diferentes de la unidad que se pueden formar con dicho par de números.

A) 30 B) 32 C) 34 D) 36 E) 42

6.- Si la M.A. de 37 números consecutivos es 60. Calcular la M.A. de los 13 siguientes números consecutivos.

A) 82 B) 83 C) 84 D) 85 E) 86

7.- Hallar la M.G. de dos números, sabiendo que el mayor de los números excede en 221 a dicha media geométrica.

A) 60 B) 78 C) 68 D) 34 E) 52

8.- Si la M.H. (a, b); M.H. (a, c); M.H. (b, c) y M.H. (a, b, c) son respectivamente 4, 6, 12 y 6. Determinar la M.G. de a; b y c.

A) 0 B) 8 C) 7,2 D) 34 E) absurdo

9.- Sabiendo que :

* $\dfrac{a_1-1}{1} = \dfrac{a_2-2}{2} = \dfrac{a_3-3}{3} = \ldots = \dfrac{a_{10}-10}{10} = k$

* $M.A = (a_1 ; a_2 ; a_3 ; \ldots ; a_{10}) = 11$

Hallar : $E = a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 \cdot a_7 \cdot a_9$

A) 40 250 B) 23 312 C) 30 240

D) 20 320 E) 29 620

10.- Indicar verdadero o falso.

I. Si se conoce que la M.H. de 3 enteros consecutivos entonces se puede hallar dichos números.

II. La M.G. de 3 enteros positivos y consecutivo puede ser entero.

III. La M.A. de 3 enteros consecutivos siempre es entero.

A) VVV B) FFF C) VFV D) VFF E) FFV

11.- las edades de 4 hermanos forman una serie de razones geométricas contínuas, cuyo valor de la razón es un número entero. Determinar la M.A. de dichas edades si su M.G. es $6\sqrt[4]{4}$

A) $\frac{45}{4}$ B) $\frac{31}{4}$ C) $\frac{27}{2}$

D) $\frac{15}{2}$ E) $\frac{47}{4}$

12.- El producto de dos números es 600 y la diferencia entre la M.A. y la M.H. es 1. Hallar el mayor de dichos números.

A) 40 B) 80 C) 90

D) 30 E) 120

13.- Se tienen 3 números a; b y c tales que :

* MH $(a; b) = 4,8$

* MH $(a; c) = 2,\hat{6}$

* MH $(b; c) = 3$

Calcular la M.H. de a; $2b$; $3c$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14.- Hallar la media armónica de los siguientes números :

24; 48; 80; 120; 168; .... ; 360

A) 80 B) 72 C) 90 D) 84 E) 36

15.- El error de tomar la M.A. en vez de la M.G. es 8 además, la razón artimética de dichos números es 32. Calcular la media armónica.

A) 40 B) 42 C) 4,5 D) 4,8 E) 5,2

16.- Si la media armónica y la media aritmética de dos números a y b se diferencian en 4 unidades.

Hallar : $E = \left[\dfrac{ab \times \sqrt{2}}{MA.MH}\right]^{MH-MA}$

A) $\sqrt{2}$ B) 1/2 C) 1/4

D) 1/3 E) 3

17.- En un salón de clase de 20 alumnos, la nota promedio en matemáticas es 14; en el mismo curso la nota promedio para otra aula de 30 alumnos es 11 ¿Cuál será la nota promedio si se junta a los 50 alumnos?

A) 12 B) 12,5 C) $1\dot{3}$ D) 13,5 E) 14

18.- Se tiene cinco números naturales y ninguno es menor que 54. Si la media geométrica de los cinco números es 108; hallar el máximo valor que puede tomar uno ellos. Dar como respuesta la media aritmética de los cinco números.

A) 164,5 B) 388,8 C) 194,4

D) 54 E) 108

19.- Se tienen 80 números. A es la media aritmética de los 30 primeros y B es la media aritmética de los restantes; si la M.G. y M.H. de A y B son $10\sqrt{2}$ y $13\frac{1}{3}$.

¿Cuál es el menor valor posible de la M.A. de los 80 números?

A) $15\frac{1}{2}$ B) 12 C) $13\frac{3}{4}$

D) $16\frac{1}{4}$ E) 19

20.- El cuadrado de la M.A. de dos números, excede a 1 al cuadrado de la M.G; hallar el valor de dichos números, si su MH es 4,8. Dar como respuesta al mayor.

A) 4 B) 8 C) 10 D) 6 E) 5

21.- El promedio de las edades actuales de 3 personas es mayor que 23 *años*. Dentro de 5 *años*, el 50% de la edad de B será mayor, que el promedio de las edades actuales de A y C. Si la edad de B es menor que la edad de C y la de este es menor que 35 *años*. ¿Cuántos años tiene A?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

22.- La edad promedio de un grupo de personas dentro de y años aumenta en 8 *años* respecto a la edad promedio que tendrán hace x años, si dentro de x años la edad promedio será 36 *años*. ¿Cuál será la edad promedio hace y años?

A) 28 B) 24 C) 22 D) 20 E) 18

23.- Si: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{3}{7}$

Además : $\text{MA}\ (b,f) = \text{MG}\ (d,h) = 8$

$\text{MA}\ (a;c;e) = 3\text{MA}\ (b,d,f)$

Hallar la $\overline{\text{MA}}\ (h)$.

A) $13\frac{5}{7}$ B) $13\frac{6}{7}$ C) $13\frac{4}{7}$

D) $13\frac{3}{7}$ E) N.A.

24.- Se tienen 20 números entre los cuales no existen 2 números que tengan igual cantidad de cifras y ninguno tiene más de 20 cifras. Hallar la suma entre la M.A. de sus complementos aritméticos.

A) $\underbrace{2323.....23}_{20\text{ cifras}}$ D) $\underbrace{666.....6}_{20\text{ cifras}},6$

B) $\underbrace{555.....55}_{19\text{ cifras}},5$ E) Faltan datos

C) $\underbrace{555.....5}_{20\text{ cifras}},5$

25.- Cuál será la nota de un alumno en Taller I si su promedio es 11, además se sabe que:

CURSO	NUMERO DE CREDITOS	NOTA
Circuitos I	5	10,8
Análisis II	4	9,3
Matemáticas III	4	10,1
Taller I	3	n

A) 13 B) 13,5 C) 14,2 D) 14,4 E) 14,8

26.- Un móvil se mueve de la siguiente manera; durante 1 *minuto* a 10 *m/min*, luego 2 *minutos* a 20 *m/min*; y así sucesivamente, si la velocidad promedio del recorrido es 70 *m/min*. Hallar n.

A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 4

27.- La edad promedio de 6 miembros de familia, hace 5 *años* era 41 *años*, hoy un día después que murió el abuelo, la edad promedio a disminuido en 2 *años*, 9 *meses* 18 *días* ¿De cuántos años de edad murió el abuelo?.

A) 80 B) 79 C) 85 D) 86 E) 83

28.- Un libro esta divido en cuatro capítulos de igual cantidad de páginas. Manuel cuenta la cantidad de hojas que tiene el libro en forma interrumpida, el primer capítulo a razón de 4 hojas por segundo, el segundo a razón de 4 hojas por segundo, el tercero a razón de 6 hojas por segundo y el cuarto a razón de 12 hojas por segundo. Determinar la velocidad promedio con que se contó el número de páginas del libro.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

29.- Hallar la M.A. de todos los números de la forma $\overline{abcba}$ tal que a; b y c sean impares y diferentes entre si .

A) 55 555 B) 555 555 C) 35 353

D) 12 727 E) 18 181

23 MEZCLA

23.1 MEZCLA

Es la unión de dos o más componentes o ingredientes, donde cada uno de ellos conserva su propia naturaleza.

A. PRECIO MEDIO O PRECIO DE COSTO DE UNA MEZCLA

Es el precio Promedio (ponderado) por unidad de mezcla resultante.

El precio medio, es el precio costo, es decir no considera ganancias o pérdidas.

FORMA GENERAL :

INGREDIENTE	PRECIO POR UNA UNIDAD DE MEZCLA	CANTIDAD (g, kg, l, etc)	COSTO CON INGREDIENTE
Ingrediente 1	P_1	C_1	$P_1 C_1$
Ingrediente 2	P_2	C_2	$P_2 C_2$
Ingrediente 3	P_3	C_3	$P_3 C_3$
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
Ingrediente n	P_n	C_n	$P_n C_n$

$\therefore$ Precio Medio : $$\overline{P} = \frac{P_1C_1 + P_2C_2 + P_nC_n}{C_1 + C_2 + C_n}$$

Ejemplo : Hallar el precio medio de la mezcla de los siguientes ingredientes :

360 *kg* de café de S/. 5 400 el *kg* , 450 *kg* de café de S/. 5 600 el *kg*

720 *kg* de café de S/. 4 800 el *kg* , 270 *kg* de café de S/. 5 000 el *kg*

Forma práctica .- Cuando se trabaja con números grandes es preferible utilizar el siguiente método

	Cancelando el factor (a)	Precios unitarios (b)	Restando a todos 5 000	Productos (a) . (b)
$\cancel{360}$ *kg*	4	5 400	400	1 600
$\cancel{720}$ *kg*	8	4 800	-200	-1 600
$\cancel{450}$ *kg*	5	5 600	600	3 000
$\cancel{270}$ *kg*	3	5 000	0	0
	$\Sigma = 20$	P_{medio}		$\Sigma = 3\ 000$

$$\text{Incremento}: \quad \frac{3\ 000}{20} = 150$$

$P_{\text{medio}} = 150 + 5\ 000 =$ S/. 5 150 el *kg* de mezcla.

B. REGLA DEL ASPA PARA HALLAR LA RELACIÓN DE MEZCLA

En qué relación es necesario mezclar arroz de \$/.1,80 el *kg* y arroz de \$/.1,70 el *kg*, para obtener un arroz cuyo precio medio sea \$/.1,76.

Resolución :

Pesos	Precios Unitarios	Total
x *kg*	\$/. 1,80	$1{,}80\,x$
y *kg*	\$/. 1,70	$1{,}70\,y$
	$P_m = 1{,}76$	

$$P_m = 1{,}76 = \frac{1{,}80x + 1{,}70y}{x + y} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3} = \frac{y}{2}$$

Fórmula Práctica :

$$\begin{array}{lccccc} x\,kg & 1{,}80 & & \overbrace{\cancel{0{,}06}}^{1{,}76-1{,}70} & \rightarrow & 3 \\ & & 1{,}76 & & & \\ y\,kg & 1{,}70 & & \underbrace{\cancel{0{,}04}}_{1{,}80-1{,}76} & \rightarrow & 2 \end{array}$$

23.2 MEZCLAS ALCOHOLICAS

Son mezclas de alcohol puro y agua destilada.

A. GRADO DE UNA MEZCLA ALCOHOLICA. (PORCENTAJE DE PUREZA)

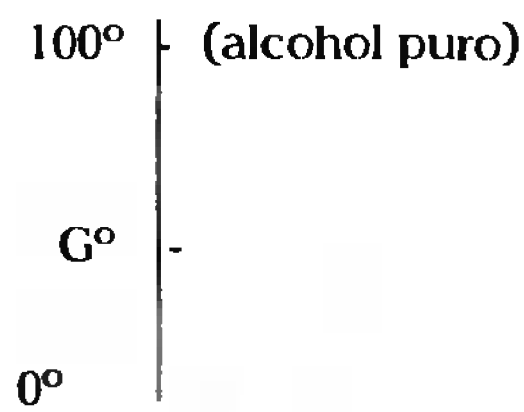
Es la relación expresada en porcentaje (%) que existe entre el volumen de alcohol puro y el volumen de la mezcla.

$$\boxed{\text{Grado} = \frac{V_{\text{alcohol}}}{V_{\text{Total}}} \cdot 100\%}$$

Ejemplo.- Se mezclan 18,5 cm^3 de alcohol y 6,5 cm^3 de agua destilada ¿Cuál es el grado de la mezcla alcohólica?.

$$\text{Grado} = \left(\frac{18,5}{18,5+6,5}\right) \cdot 100 = 74^\circ \quad <> \quad 74\,\%\ \text{de pureza}$$

$$\text{Significa que :} \begin{cases} V_{\text{alcohol}} = 74\%\ \text{del}\ V_{\text{total}} \\ V_{\text{agua}} = 26\%\ \text{del}\ V_{\text{total}} \end{cases}$$



$$\boxed{0^\circ \leq G \leq 100^\circ}$$

Nota : Los problemas de mezclas alcohólicas se resuelven usando los mismos procedimientos del item anterior, considerando ahora a los grados como a los precios.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS :

Ejemplo 1 : Se mezclan 280 l de alcohol de 85° con 210 l_r de alcohol de 60° pero luego se agregan 350 l del alcohol puro y 560 l de H_2O. ¿Cuál será el grado de la mezcla resultante?

Componentes	(a)Cancelando el factor 70	(b)Grados	Multiplicando : (a) . (b)
280 l	4	85°	340
210 l	3	60°	180
350 l	5	100°	500
560 l	8	0°	0
	$\Sigma = 20$	G_m	$\Sigma = 1020$

$$G_m = \frac{1\,020}{20} = 51^\circ$$

Ejemplo 2 : A 4 *litros* de alcohol de 81° se le agrega 1 *litro* de alcohol puro y cierta cantidad de H_2O. Si se obtuvo alcohol de 53°. ¿Qué cantidad de H_2O contiene el alcohol final?.

Componentes	Grados	Productos
4	81°	324
1	100°	100
x	0°	0
$\Sigma = 5+x$	53°	$\Sigma = 424$

$$\Rightarrow \qquad 53 = \frac{324+100+0}{5+x} \qquad \Rightarrow \qquad x = 3$$

De acuerdo con este resultado concluímos que la mezcla final de alcohol contiene 47% de H_2O, los mismos que equivalen a : 3,76 *litros.*

Ejemplo 3 : Cuántos *litros* de alcohol puro se le debe agregar a 24 *litros* de alcohol de 65° para obtener alcohol de 85°.

$$\begin{array}{cccccl} x & 100^\circ & & \cancel{20} & \rightarrow & 4\times 8 = 32 \\ & & 85^\circ & & & \\ \boxed{24} & 65^\circ & & \cancel{15} & \rightarrow & 3\times 8 = \boxed{24} \end{array} \qquad \therefore \quad x = 32$$

23.3 REGLA DE ALEACION

23.3A ALEACIÓN

Es una mezcla homogénea de metales, obtenida por medio de un proceso de FUSIÓN (Fundición). En aritmética se trabaja a nivel de joyería :

$$\text{Componentes : } \begin{cases} \text{Metales finos : Oro; Plata; Platino; ...} \\ \text{Metal de liga : Cobre; Nique; Zinc; ...} \end{cases}$$

LEY DE UNA ALEACIÓN

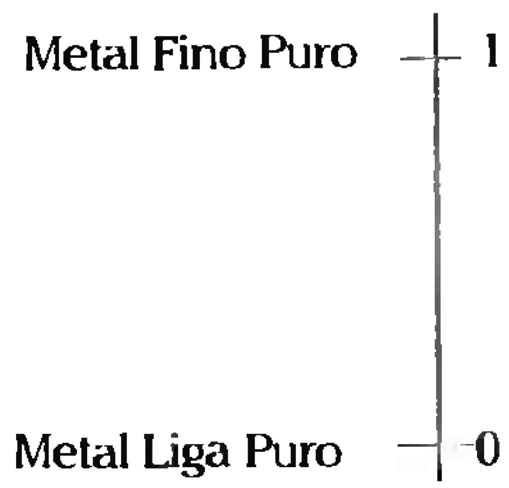
Es la relación que existe entre el peso del metal fino y el peso total de la aleación.

Ejemplo : Si se funde 14,6 *g* de plata con 10,4 *g* de cobre la ley de la aleación será :

$$\text{Ley} = \frac{14{,}6}{14{,}6+10{,}4} = \frac{14{,}6}{25} = 0{,}584 \text{ (584 milésimas)}$$

$$\text{Significa : } \begin{cases} \text{Plata pura} = \dfrac{584}{1000} \text{ de } P_{\text{total}} \\ \text{Cobre} = \dfrac{416}{1000} \text{ de } P_{\text{total}} \end{cases}$$

Escala de la Ley :



$$\boxed{Ley = \frac{P_{Fino}}{P_{Total}}}$$

$$0 \leq Ley \leq 1$$

23.3B NUMERO DE KILATES DE UNA ALEACION DE ORO

El número de *kilates* de una aleación de oro, indica cuántas partes de la aleación (dividida en 24 partes iguales) son de oro puro.

Ejemplo :

$$\text{Oro de 18 } \textit{kilates} : \left\{ \begin{array}{lrl} \text{Oro puro :} & 18 & \searrow 3 \\ \text{Cobre} \quad : & 6 & \searrow 1 \\ \hline & 24 & \quad 4 \end{array} \right.$$

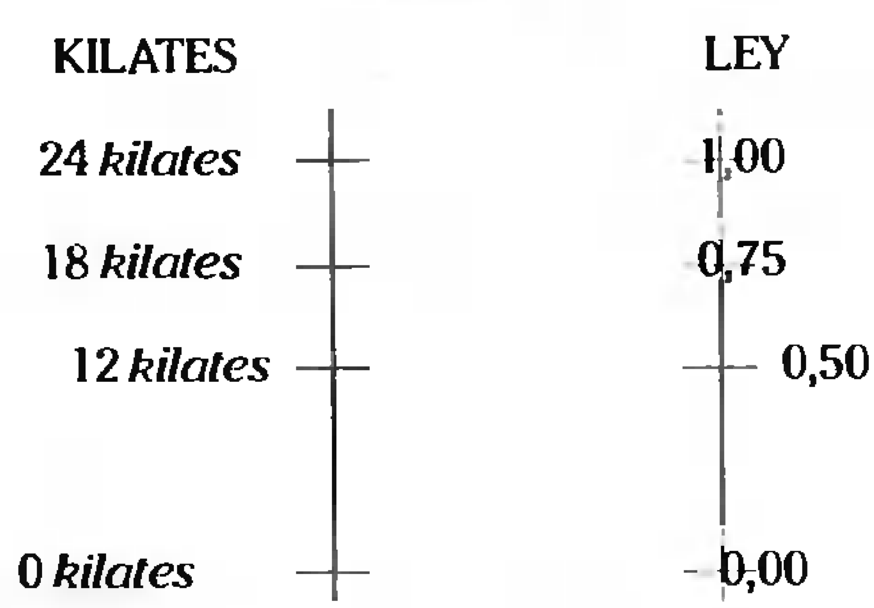
$$\text{Ley} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Ejemplo :

$$\text{Oro de 15 } \textit{kilates} : \left\{ \begin{array}{lrl} \text{Oro puro :} & 15 & \searrow 5 \\ \text{Cobre} \quad : & 3 & \searrow 1 \\ \hline & 18 & \quad 6 \end{array} \right.$$

$$\text{Ley} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

Escala del # de *kilates*



$$\boxed{\text{Ley} = \frac{\text{N}^{\text{ro}}\ \textit{kilates}}{24}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Se mezclan 4 ingredientes cuyos precios unitarios son $\overline{3X}$; $\overline{2X}$; $\overline{1X}$ y X soles; en cantidades proporcionales a 8; 4,2 y 3 respectivamente resultando 28 soles el precio de la mezcla. ¿Cuál sería el precio medio de la mezcla si se hubiera considerado los ingredientes de mayor y menor calidad?

A) S/. 21,24 B) S/. $29,\widehat{81}$ C) S/. 12,56 D) S/. 14,14 E) S/. 33,3

<u>Resolución</u>.-

Planteando :

Pesos	Precios	Producto
8	$\overline{3x}$ - x	240
4	$\overline{2x}$ - x	80
2	$\overline{1x}$ - x	20
3	x - x	0
17	28 - x = ?	340

$$\Rightarrow \quad 28 - x = \frac{340}{17} \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

Determinando el P_m del mayor y menor ingrediente.

$$\therefore \quad P_m = \frac{8\times 38 + 3\times 8}{11} = \boxed{29,\widehat{81}} \qquad \text{RPTA. B}$$

2.- Se tiene 2 tipos de vino de S/. 325 y S/. 65 el litro, se obtiene una mezcla de ambos 273 litros que luego se vende a S/. 222 el litro. Si en esta venta se está ganando el 20%. ¿Cuántos litros de mala calidad entra en la mezcla?

A) 124 l B) 147 l C) 156 l D) 132 l E) 158 l

<u>Resolución</u>.-

Por aplicación mercantil : $Pc + 20\%\,Pc = 222 \Rightarrow Pc = S/.\ 185$

Aplicando la regla de mezcla inversa:

$$\therefore \quad V_2 = 7 \times 21 = \boxed{147 \textit{ litros}} \qquad \text{RPTA. B}$$

3.- A 4 litros de alcohol 81º se le agrega 1 litro de alcohol puro y cierta cantidad de agua .Si se obtuvo alcohol de 53º ¿Qué cantidad de agua tiene el alcohol final?

A) 3,76 l B) 4 l C) 4,3 l D) 4,50 l E) 4,20 l

Resolución.-

Considerando la pureza del alcohol puro 100° y la del agua 0°, por regla de mezcla inversa se tiene:

Volumen	Pureza	Producto
4	81°	324
1	100°	100
x	0	0
$5+x$	$g_m = 53°$	424

$$\Rightarrow \quad \frac{424}{5+x} = 53 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

De donde : $V_{OH} = 53\%\ V_{total}$

$V_{H_2O} = 47\%\ V_{total}$

$\therefore \quad V_{final}$ de H_2O = $47\%\ (8) = 3{,}76\ l$ RPTA. A

4.- Se tiene 2 tipos de vino, en el 1ro el contenido de vino es al de agua como 2 a 3, en el 2do como 1 a 4; se desea obtener 60 litros en el cual de vino y agua haya como 7 a 13. ¿Cuántos litros del 1ro se debe tomar?.

A) 15 ***B) 45*** ***C) 42*** ***D) 40*** ***E) 35***

Resolución.-

1ra mezcla : Vino: 2; Agua: 3; $g_1 = \frac{2}{5} = 40\%$

2ra mezcla : Vino: 1; Agua: 4; $g_2 = \frac{1}{5} = 20\%$

Sean x e y los valores que toman de la primera y la segunda.

En la mezcla final : Vino : 7 ; Agua : 13 $\Rightarrow \quad g_m = \frac{7}{20} = 35\%$

Por la regla del aspa : $x = 15(3) =$ 45 *litros* RPTA. B

5.- ¿Cuántos litros de alcohol puro se debe agregar a 28 litros de alcohol de 65º para obtener alcohol de 80º?

A) 12 ***B) 16*** ***C) 7*** ***D) 21*** ***E) 4***

<u>Resolución</u>.-

Llamemos x al número de litros de alcohol (puro 100°), luego por regla de mezcla inversa :

$$\begin{array}{ccccc} x : 100 & \searrow & & \nearrow & 15 \;\; 3 \\ & & 80 & & \\ 28 : 65 & \nearrow & & \searrow & 20 \;\; 4 \end{array}$$

Luego : $\dfrac{x}{3} = \dfrac{28}{4}$

$\therefore$ $\boxed{x = 21 \text{ litros}}$ RPTA. D

6.- ¿En qué relación se deben mezclar dos sustancias cuyas densidades son 1,8 y 1,2 para obtener una sustancia de 1,6 de densidad?

A) 3 a 1 ***B) 3 a 2*** ***C) 2 a 1*** ***D) 3 a 5*** ***E) 4 a3***

<u>Resolución</u>.-

Densidad : $\dfrac{W_1}{W_2} = \dfrac{2 \times 1{,}8}{1 \times 1{,}2} = \boxed{\dfrac{3}{1}}$ RPTA. A

7.- ¿Qué cantidad de arroz de 6 soles el kg debe mezclarse con arroz de 10 soles el kg para obtener 120 kg de mezcla de manera que vendidos a 7 soles el kg no produzca ni pérdida ni ganancia.

A) 100 y 20 ***B) 80 y 40*** ***C) 70 y 50*** ***D) 90 y 30*** ***E) 60 y 60***

<u>Resolución</u>.-

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Peso} & & \text{Precio} & & & & \\ W_1 : & & 6 & \searrow & & \nearrow & 3 \\ & & & & 7 & & \\ \dfrac{W_2}{120} : & & 10 & \nearrow & & \searrow & \dfrac{1}{4} \end{array}$$

$$\frac{W_1}{3} = \frac{W_2}{1} = \frac{120}{4}$$

$\therefore$ $W_1 = 90$ *gramos* ; $W_2 = \boxed{30 \text{ gramos}}$ RPTA. D

8.- Se mezclan 3 litros de ácido de 30% con 9 litros al 70% y al resultado se le agrega un diluyente hasta obtener una concentración al 50% . ¿Cuántos litros del diluyente se empleó?

A) 2 l ***B) 2,1 l*** ***C) 3 l*** ***D) 2,4 l*** ***E) 3,4 l***

<u>Resolución</u>.-

Debemos considerar la concentración del diluyente al 0%

Volumen	Concentración	
3	30 %	90 %
9	70 %	630 %
V	0 %	0 %
$12+v$	$g = 50\,\%$	720 %

$$\Rightarrow \quad \frac{720\%}{12+v} = 50\,\%$$

$\therefore$ Volumen del diluyente será : $\boxed{v = 2{,}4\ l}$ RPTA. D

9.- Se tienen dos calidades de vinos de precios S/. a y S/. b. Si para obtener como precio medio la media armónica de los precios se debe mezclarlos como 9 a 4, para que el precio medio sea M.G. se debe mezclar como:

A) 4 á 9 B) 9 á 4 C) 9 á 13 D) 5 á 13 E) 3 á 2

<u>Resolución</u>.-

En la primera mezcla, entonces : $\dfrac{9}{4} = \dfrac{b}{a}$

Haciendo : $\begin{cases} b = 9 \\ a = 4 \end{cases}$

En la segunda mezcla :

$$\begin{array}{ccccc} V_1 : 4 & \searrow & & \nearrow & 3 \\ & & \sqrt{4\times 9} & & \\ V_2 : 9 & \nearrow & & \searrow & 2 \end{array}$$

$\therefore$ Se debe mezclar como : $\boxed{3 \text{ a } 2}$ RPTA. E

10.- Se mezclan ingredientes de S/. 10 y S/. 20 en la proporción de x a y. Si se mezclaran en proporción de y a x el precio unitario resultante sería 50% mayor. Hallar x/y.

A) 4 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

<u>Resolución</u>.-

1^{ra} mezcla :

$$\begin{array}{ccccc} x : 10 & \searrow & & \nearrow & 20 - \text{Pm} \\ & & \text{Pm} & & \\ y : 20 & \nearrow & & \searrow & \text{Pm} - 10 \\ x + y & & & & 10 \end{array} \qquad \ldots (1)$$

2^{da} mezcla :

$$\begin{array}{ccccc} y: 10 & & & & 20 - 1,5\,Pm \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 1,5\,Pm & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ x: 20 & & & & 1,5\,Pm - 10 \quad \ldots (2) \\ x + y & & & 10 & \end{array}$$

De (1) y (2) como el total es $(x + y)$ es como 10, entonces :

$$20 - Pm = 1,5\,Pm - 10 \quad \Rightarrow \quad Pm = 12$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{20-12}{12-10} = \boxed{\frac{4}{1}} \qquad \text{RPTA. A}$$

11.- Calcular el peso de un litro de mezcla conteniendo 70% de agua y 30% de alcohol, sabiendo que un litro de agua pesa un kilogramo y un litro de mezcla de 75% de alcohol y 25% de agua pesa 960 gramos.

A) 988 g ***B) 940 g*** ***C) 984 g*** ***D) 1 000 g*** ***E) 1007,5 g***

Resolución.-

$$\text{Sabemos :} \quad 1 \text{ litro} \begin{cases} \text{Agua} = 25\%(1) = 0,25\,l < \; > 250 \\ \text{Alcohol} = 75\%(1) = 0,75\,l < \; > 710 \end{cases}$$

$$\overline{960\ g}$$

$$\text{Nos piden :} \quad 1 \text{ litro} \begin{cases} \text{Agua} = 70\%(1) = 0,70\,l < \; > 700g \\ \text{Alcohol} = 30\%(1) = 0,30\,l < \; > V_{OH} \end{cases}$$

Como : $0,75$ ——— 250

$0,30$ ——— $V_{OH} \quad \Rightarrow \quad V_{OH} = 284\ g$

$$\therefore \quad + \text{Agua} = 700\ g + 284 = 984\ g \qquad \text{RPTA. C}$$

12.- Un joyero posee dos barras de plata cuyas leyes son de 0,400 y 0,900 siendo sus pesos de 20 y 50 gramos respectivamente. Si con la intención de ganarse alguito funde las barras con otra de cobre cuyo peso es de 30 gramos haciendo pasar está última como plata pura obteniendo de esta manera 12 soles más; hallar el precio de la aleación considerando que es D.P. a la ley.

A) S/. 33,2 ***B) S/. 21,2*** ***C) S/. 24*** ***D) S/. 25,1*** ***E) S/. 30***

Resolución.-

Haciendo pasar el cobre como oro : $\quad \text{Ley} = \dfrac{P_1C_1 + P_2C_2 + P_nC_n}{C_1 + C_2 + C_n} = 0,83$

Pero realmente : $\text{Ley} = \dfrac{0{,}400 \times 20 + 0{,}900 \times 50 + 0 \times 30}{20 + 30 + 50} = 0{,}53$

Según el enunciado Precio a Ley : $\dfrac{P_1}{0{,}83} = \dfrac{P_2}{0{,}53} = \dfrac{P_1 - P_2}{0{,}30}$

$\therefore \quad P_1 = 0{,}83 \times \dfrac{12}{0{,}30} = \boxed{S/.\ 33{,}2}$ RPTA. A

13.- Al fundir 20 g de oro de 18 K y 20 g de oro de 800 milésimas, 30 g al 60% de oro y 30 g de cobre. ¿De cuántos kilates es la nueva aleación?

A) 16 K B) 15,1 K C) 11,2 K D) 11,76 K E) 18 K

<u>Resolución</u>.-

Se sabe que : 800 milésimas < > $800 \times \dfrac{24}{1\,000} = 19{,}2\,K$

60% < > 600 mil < > $600 \times \dfrac{24}{1\,000} = 14{,}4\,K$

Peso	# Kilates	Producto
20	18	360
20	19,2	384
30	14,4	432
30	0	0
100	?	1 176

$\therefore$ La aleación es de $\dfrac{1\,176}{100} = \boxed{11{,}76 \text{ kilates}}$ RPTA. D

14.- Se tiene 3 lingotes de oro de 16 K; 18 K y 21 K resultando una aleación de 20 K. Si por cada 2 g del 1ro hay 3 g del 2do. ¿Cuántos gramos del 3ro habrá en una aleación de 570 gramos?

A) 140 g B) 280 g C) 420 g D) 490 g E) 350 g

<u>Resolución</u>.-

Asumiremos que del 1ro hay 2 gramos del 2do hay 3 gramos y del 3ro hay n gramos, luego:

Pesos	# kilates	Producto
2	16 - 21 = -5	-10
3	18 - 21 = -3	- 9
n	21 - 21 = 0	- 0
5 + n	20 - 21 = -1	-19

$\Rightarrow \quad \dfrac{-19}{5+n} = -1$

$\Rightarrow \quad n = 14$

El peso total es como: 19 < > 570 gr $\wedge$ 14 < > W_3

$\therefore \quad W_3 = 14(30) = \boxed{420 \textit{ gramos}}$ RPTA. C

15.- Un joyero tiene dos lingotes de oro y cobre, el 1^{ro} contiene 270 g de oro y 30 g de cobre y el 2^{do} contiene 200 gramos de oro y 50 gramos de cobre. ¿Cuántos gramos de cada uno se debe fundir para fabricar una sortija de 21 K, que pese 12 gramos?

A) 9 y 3 B) 4 y 8 C) 5 y 7 D) 6,2 y 2,8 E) 8 y 1

Resolución.-

Del enunciado :

* Del 1er lingote : $W_{A_u} = 270\,g$; $W_{C_u} = 30\,g \Rightarrow L_1 = \dfrac{270}{300} = 0{,}900$

* Del 2do Lingote : $W_{A_u} = 200\,g$; $W_{A_u} = 50\,g \Rightarrow L_2 = \dfrac{200}{250} = 0{,}800$

Determinando la ley de la sortija : Ley sortija $= L_m = \dfrac{21}{24} = 0{,}875$

Por regla de mezcla inversa : $a = 9\ gramos$ y $b = 3\ gramos$ RPTA. A

16.- Al fundir oro y cobre hay una merma de 25% en cada metal. ¿Cuántos gramos de oro se debe utilizar si se quiere 64 gramos de 18 kilates?

A) 48 B) 50 C) 75 D) 64 E) 16

Resolución.-

Sean W y W' el peso del oro antes y después de la merma; luego :

$$\text{Oro} = \frac{3}{4}(64) = 48\,g$$

$$\Rightarrow \quad \frac{80}{100}\ \text{Oro inicial} = 48$$

Determinar la ley de aleación : $\text{Ley} = \dfrac{18}{24} \Rightarrow \dfrac{W}{W_{Total}} = \dfrac{3}{4}$

Como : $W_{Total} = 64$ y $W = 48\,g$

Supongamos que el peso antes de la merma sea 100 gramos, menos 25 gramos (20%) resultaria 75 gramos. Entonces :

$$\frac{W'}{48} = \frac{100}{75} \Rightarrow W' = 64\ gramos$$

$\therefore$ Se debe utilizar : $W' = 64\ gramos$ RPTA. D

17.- Se tienen dos barras de oro : En la 1^{ra} el 80% es oro puro y en la 2^{da} cuyo peso es el doble de la 1^{ra} el 75% es oro puro ¿Cuál es la ley que resulta de la fusión?.

A) 70,1% B) $76,\overline{6}$ % C) 65% D) 80% E) 84%

Resolución.-

Por regla de mezcla directa, se tendrá :

Peso	Ley	
1	80%	80%
2	75%	150%
3	L_m	230%

$$\therefore \qquad L_m = \frac{230\%}{3} = \boxed{76,\overline{6}\,\%} \qquad \text{RPTA. B}$$

18.- A 18 gramos de oro de 17 K se eleva su ley hasta 21 K agregando oro puro. ¿Qué peso de cobre será necesario alear con este nuevo lingote para volverlo a su ley original?

A) 5,55 ***B) 6,6*** ***C) 7,77*** ***D) 8,88*** ***E) 9,8***

Resolución.-

Por regla de mezcla inversa, se tendrá :

$$\begin{array}{ccccc} 18:17 & \searrow & & \nearrow & 3 \\ & & 21 & & \\ W_{Au}\ :24 & \nearrow & & \searrow & 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{W_{Au}}{4} = \frac{18}{3} \qquad \Rightarrow \qquad W_{Au} = 24\,gramos$$

Siendo : WTotal $= 18 + 24 = 42$ gramos

$$\begin{array}{ccccc} 42:21 & \searrow & & \nearrow & 17 \\ & & 17 & & \\ W_{Cu}:0 & \nearrow & & \searrow & 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{W_{Cu}}{4} = \frac{42}{17}$$

$$\therefore \qquad \boxed{W_{Cu} = 9{,}8\,gramos \text{ (Aprox.)}} \qquad \text{RPTA. E}$$

19.- Se funden 3 lingotes de oro de 12K; 15K y 16 K y se logra una aleación de 14,7 K; si el peso del lingote de 12 K es 25% del peso total y el peso del oro de 15 K es 30 gramos. ¿Cuál es el peso del lingote de 16 K?

A) 30 gramos ***B) 32 gramos*** ***C) 40 gramos***

D) 42 gramos ***E) 45 gramos***

Resolución.-

Pesos	# Kilates	Producto
n	12	$12n$
30	15	450
$3n - 30$	16	$48n - 480$
$4n$	14,7	$60n - 30$

$$\Rightarrow \quad \frac{60n-30}{4n} = 14{,}7 \quad \Rightarrow \quad n = 25$$

$$\therefore \quad 3n - 30 = \text{45 gramos} \qquad \text{RPTA. E}$$

20.- Se funden "m" gramos de una aleación de oro de ley "L" con "n" gramos de cobre puro en la proporción de 6 a 1. ¿En qué porcentaje disminuye la ley de la aleación?

A) 13,5% B) 0,85% C) 9% D) 10% E) 14,28%

Resolución.-

Considerando la ley del cobre igual a cero (0), se tendrá por regla mezcla directa :

Pesos	Ley	
6	L	6L
1	0	0
7	L_m	6L

$$L_m = \frac{6L}{7}$$

$$\therefore \quad \text{Disminuye en : } \left(L - \frac{6L}{7}\right) = \frac{L}{7} = 14{,}28\%\ L \qquad \text{RPTA. E}$$

21.- Se mezcla el vino de tres barriles cuyos contenidos son entre sí, como 4; 5; 6. Vendiendo la mezcla obtenida en 375,20 soles, se obtiene un beneficio medio de 5,36 soles por litro. Sabiendo que este beneficio es el 12% del precio de compra, se pide calcular el contenido de cada barril.

Resolución.-

El precio de venta 375,20 *soles* representa $:1 + \frac{12}{100} = \frac{112}{100}$ del precio de compra.

Este último es luego, en soles : $\frac{375{,}20 \times 100}{112}$

El beneficio valiendo el 12% del precio de compra, es por lo tanto, en soles : $\frac{375{,}20 \times 12}{112}$

Este último número dividido por el número total de litros debe dar 5,36, el número de litros es por consiguiente :

$$\frac{375{,}20 \times 12}{112 \times 5{,}36} = 7{,}5\, l$$

Queda a repartir 7,5 *litros*, en partes proporcionales a 4; 5; 6, lo que da :

$$\frac{7{,}5 \times 4}{15} = 2 \qquad \frac{7{,}5 \times 5}{15} = 2{,}5 \qquad \frac{7{,}5 \times 6}{15} = 3$$

Luego los números de litros contenidos en las barriles son respectivamente :

2 *litros* ; 2,5 *litros* ; 3 *litros*.

22.- Un vaso A contiene 8 litros de vino puro y 7 litros de agua. Un segundo vaso B contiene una mezcla de 11 litros de vino y 9 litros de agua. Se saca 7 litros de cada vaso, y se vacía en el vaso B los 7 litros sacados de A, y en el vaso A los 7 litros sacados de B. Calcular la cantidad de vino y de agua que se halla entonces en cada uno de los dos vasos.

Resolución.-

En cada litro de mezcla en el vaso A existen 8/15 de vino y en cada litro de mezcla del vaso B hay 11/20 de vino.

Por consiguiente, sacando 7 *litros* de mezcla del vaso A, se toma : $\frac{8}{15} \times 7 = \frac{56}{15}$ de *litro* de vino

Y además : $\frac{7}{15} \times 7 = \frac{49}{15}$ de *litro* de agua.

Sacando 7 *litros* de mezcla del vaso B, se toma : $\frac{11}{20} \times 7 = \frac{77}{20}$ de *litro* de vino

Y además : $\frac{9}{20} \times 7 = \frac{63}{20}$ de *litro* de agua.

Luego, según el cambio, el vaso A contendrá :

1ro. Una cantidad de vino igual a : $8 - \frac{56}{15} + \frac{77}{20} = \frac{487}{60}$ = 8 *litros* de 7/60

2do. Una cantidad de agua igual a : $7 - \frac{49}{15} + \frac{63}{20} = \frac{413}{60}$ = 6 *litros* de 53/60

Asimismo, el vaso B contendrá :

1ro. Una cantidad de vino igual a : $11 - \frac{77}{20} + \frac{56}{15} = \frac{653}{60}$ = 10 *litros* de 53/60

2do. Una cantidad de agua igual a : $9 - \frac{63}{20} + \frac{49}{15} = \frac{547}{60}$ = 9 *litros* de 7/60

23.- Se han mezclado 22 litros de vino de S/. 30 el litro con 78 litros de S/. 25 el litro y para que la mezcla resulte de S/. 20 el litro, indicar la cantidad de agua que se debe agregar.

Resolución.-

Costo del vino : $22 \times 30 + 78 \times 25 = 2610$ soles.

Litros que ha de tener la mezcla : $\dfrac{2610}{20} = 130{,}5$

Litros de agua que contiene la mezcla : $130{,}5 - 100 =$ $\boxed{30{,}5 \textit{ litros}}$

24.- Un litro de mezcla formado de 75% de alcohol y 25% de agua pesa 960 gramos. Sabiendo que el litro de agua pesa 1 kilogramo, se pide calcular el peso de 1 litro de mezcla conteniendo 48% de alcohol y 52% de agua. No considerar la contracción de la mezcla.

Resolución.-

En 1 *litro* de la primera mezcla, hay 250 *centímetros cúbicos* de agua y 750 *centímetros cúbicos* de alcohol.

Los 250 cm^3 de agua pesan 250 *gramos*, luego los 750 cm^3 de alcohol pesan :

$$960 - 250 = 710 \textit{ gramos}$$

De este modo un *centímetro cúbico* pesará : 710/750 *gramos*

En la mezcla al 48% de alcohol, el peso de alcohol será el de 480 cm^3 , ó :

$$\frac{710 \times 480}{750} = 454{,}4 \textit{ gramos}$$

Luego 52% de agua ocupará 520 cm^3 y su peso será de 520 *gramos*. Finalmente el peso del *litro* de mezcla resulta ser :

$$454.4 + 520 = \boxed{974{,}4 \textit{ gramos.}}$$

25.- Se tiene dos pipas de vino de precios diferentes, conteniendo la primera 220 litros y la segunda 180 litros. Se saca de cada pipa la misma cantidad de vino que se pone en la otra. ¿Cuál debe ser esta cantidad para que después de esta operación el precio del litro sea el mismo para cada pipa?

Resolución.-

Como una pipa contiene 220 *litros* y la otra180 *litros*, entonces para que el precio del litro sea el mismo en las dos pipas,cada una deberá contener de las dos calidades de vino en la relación de 220 a 180, ó, de 11 a 9.

Luego la primera pipa deberá contener : $\dfrac{11}{20} \times 220$ del vino que se hallaba primitivamente y asimismo : $\dfrac{9}{20} \times 220$ del otro

Es decir que se tendrá que poner de la otra pipa : $\dfrac{9}{20} \times 220 = 99$ *litros*.

La segunda tendrá $\frac{9}{20} \times 180 = 81$ *litros* del vino que se hallaba primitivamente .

Asimismo : $\frac{11}{20} \times 180 = 99$ *litros* tomados de la otra.

En conclusión la cantidad de vino pedida es : 99 *litros.*

26.- Un tonel ha sido llenado hasta los 2/3 de su capacidad por vino de S/. 0.30 el litro, después hasta los 3/4 por vino de a S/. 0.35. Se extrae 25 litros de esta mezcla y se le reemplaza por 40 litros de vino de S/. 0.38. El tonel se encuentra entonces llenado hasta los 19/20 de su capacidad. Se le termina de llenar con alcohol de S/. 2 el litro, que pierde 1/20 de su volumen en su mezcla con el vino. ¿Cuál es la capacidad del tonel y a cuánto se deberá vender el litro de mezcla si se quiere ganar 18% sobre el precio de venta?.

Resolución.-

Si se sacan 25 *litros* de mezcla para poner 40 *litros*, la cantidad de líquido que contiene el tonel aumenta en : 40 - 25 = 15 *litros*.

Ahora bien, el tonel, que fué llenado a los 3/4, ó a los 15/20 de su capacidad, es ahora llenado a los 19/20; luego 15 *litros* representan 4/20 ó 1/5 del contenido del tonel, que por lo tanto es de 75*litros*. Al principio se había vaciado en el tonel 50 litros a S/. 30 costando S/.1 500.

Los 3/4 de 75 *litros* son 56,25 *litros*; luego se ha añadido 6,25 *litros* de a S/.35, valiendo S/.218,75 . El líquido contenido en el tonel vale entonces S/. 1 718,75, o sea 1718,75 / 56,25 el litro. Luego los 25 *litros* que se sacan valen :

$$\frac{1\,718{,}75}{56{,}25} \times \frac{100}{4} = 764 \text{ soles} ;$$

La cantidad que queda vale S/.955. Los 40 *litros* a S.38 cuestan S/.1 520. El vacío que debe llenarse por alcohol es 1/20 del tonel, o sea 3,75 *litros*.

La contracción sufrida por la mezcla hace que sea necesario vaciar 20 *litros* de alcohol para que el volumen de la mezcla aumente en 19 *litros*. Luego se hallará el volumen de alcohol a vaciar por una regla de tres simple :

$$20 \text{ litros para } 19 \ , \ \frac{20}{19} \text{ litros para } 1 \ , \ \frac{20}{19} \times 3{,}75 \text{ para } 3{,}75 ;$$

Asi se hallan 3,9474 *litros*, valiendo S/.789. El precio de costo del líquido contenido en el tonel es luego :

$$955 + 1520 + 789 = 3\,264 \text{ soles}$$

El precio de venta debe ser 100/82 del precio de costo, puesto que el beneficio debe ser 18/100 del precio de venta.

Luego es necesario vender los 75 litros en : $\frac{100 \times 3264}{82} = 3\,992{,}7$ *soles*, lo que hace que cada litro cueste :

$$\frac{3992{,}7}{75} = 53{,}4 \text{ soles}$$

27.- Se mezclan dos clases de café : una de 40 kg, y la otra de 20 kg, costando a 10,50 y a 9 soles el kg respectivamente. ¿A cómo debe venderse el kg de café tostado de esa mezcla para ganar el 20%?. El café, al ser tostado, pierde 1/5 de su peso.

Resolución.-

El costo de la mezcla es : $40 \times 10.5 + 20 \times 9 = 600$ soles

Se ha de vender la mezcla en : $600 \times 1.2 = 720$ soles.

Los 60 kilogramos de café se reducen, al ser tostado a : 48 *kg*

Habrá que vender el kilogramo en : $\dfrac{720}{48} = \boxed{15 \text{ soles.}}$

28.- Se tiene 540 litros de alcohol a 90º; se le mezcla con 810 litros de un alcohol de 72º. Se pide :

1ro. Hallar el grado de la mezcla en alcohol ;

2do. ¿Qué cantidad de agua se deberá adicionar para obtener una mezcla de 60º?.

Resolución.-

Volumen de la mezcla : $540 + 810 = 1\,350$ *litros*.

Contenido en alcohol : $(540 \times 0,9) + (810 \times 0,72) = 1\,069,2$ *litros*.

1ro. Grado de la mezcla : $\dfrac{1069,2 \times 100}{1350} = 79,2^{\circ}$.

Proporción de la mezcla :

$$\begin{array}{ccccl} 79,2^{\circ} & & & & 60 \quad \ldots 25 \text{ litros a } 79,2^{\circ} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 60 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 0 & & & & 19,2 \quad \ldots 8 \text{ litros de agua} \end{array}$$

2do. Se deberá adicionar : $1\,350 \times 8/52 = \boxed{432 \text{ litros de agua.}}$

29.- ¿En qué relación es necesario mezclar dos calidades de harina valiendo una 87 soles, y la otra 83,50 soles el saco de 100 kg, para obtener pan a S/. 0,88 el kilogramo? Se sabe que 100 kilogramos de esta mezcla de harina da 125 kilogramos de pan y que para una horneada de 100 kg. de pan los gastos de mano de obra y de cocción se elevan a 20 soles.

Resolución.-

El costo del pan debe ser : S/.0,88 el *kg* por los 100 *kg*, es decir S./88 ; deduciendo los S/. 20 de gastos de cocción y de mano de obra, quedan S/.68 para la compra de harina necesaria; asimismo el peso de la harina necesaria es los : 100 / 125 = 4/5 o los 8/10 del peso del pan, o sea 80 *kg* para 100 *kg* de pan.

Luego es necesario hacer una mezcla de harinas que cueste S/.68 los 80 *kg*. Si solo se tomara de la harina a S/. 0,87 el *kg*, el precio de 80 *kg* sería de : $80 \times 0,87 =$ S/. 69,60, o sea 1,60 soles más que el precio deseado.

Cuando se reemplaza 1 *kg* de harina de a S/. 0,87 por 1 *kg* de harina a S/.0,835, el precio de la mezcla disminuye en S/.0,035 ; siendo el cociente de S/.1,60 por S/.0,035 igual a 320 por 7.

El número de kilogramos de harina de a S/.83.50 el saco siendo $\frac{320}{7}$, el número de kilogramos de harina costando 87 soles el saco es : $80 - \frac{320}{7} = \frac{240}{7}$.

Luego la relación de estos pesos es : $\frac{320}{240} = \frac{4}{3}$.

De este modo es necesario : 4 *kg*. de la harina menos cara por 3 *kg* de la otra.

30.- Dos sustancias tienen sus densidades representadas por 4/7 y 11/12 ¿Cuántos kg de cada calidad es necesario tomar para obtener 116 kg de una mezcla cuya densidad es 5/6?

Resolución.-

Sean x e y las masas buscadas y asimismo recordemos que : $D = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{D}$.

Luego los volúmenes serán : $\frac{x}{4/7}$ e $\frac{y}{11/12}$

A continuación se tendrá : $\frac{x}{4/7} + \frac{y}{11/12} = \frac{x+y}{5/6}$

De donde se deduce que : $\frac{x}{y} = \frac{24}{121}$

Luego las masas correspondientes a 4/7 será : $116 \times \frac{24}{125} = 19{,}2$ *kg*.

Y la masa correspondiente a 11/12 será : $116 \times \frac{121}{145} = 96{,}8$ *kg*.

31.- Un comerciante tiene coñac de a S/.0,70, S/.0,80, S/.0,90 y S/.1,10 el litro. El quiere formar una mezcla que pueda vender a S/.1 el litro y ganar S/.0,14 por litro, ¿Cuánto tomará de cada calidad para 1 litro de mezcla?

Resolución.-

Si el comerciante quiere vender a 1 sol el litro y ganar S/. 0,14 por litro, su costo o precio medio del litro debe ser : S/.1 - S/.0,14 = S/. 0,86.

$$\left.\begin{matrix} 0{,}70 \rightarrow +0{,}16 \\ 0{,}80 \rightarrow +0{,}06 \end{matrix}\right\} 0{,}22 \times 2 = 0{,}44$$

S/. 0,86

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}90 \rightarrow -0{,}04 \\ 1{,}10 \rightarrow -0{,}24 \end{array}\right\} 0{,}28 \times 2 = 0{,}56$$

Total : 1,00 *litro*

Para 1 litro de mezcla debe tomarse : 0,22 *litros* de a S/. 0,90
0,22 *litros* de a S/. 1,10
0,28 *litros* de a S/. 0,70
0,28 *litros* de a S/. 0,80

32.- Se funden dos lingotes,de plata y de cobre, el primero con una ley de 0,905 y pesando 10 kg; el segundo con una ley de 0,895 y pesando 4 kg. ¿Cuál es la ley de aleación asi obtenida? ¿Qué volumen ocupa? Datos : Densidad de la plata = 10,47 kg/dm^3; densidad del cobre = 8,85 kg/dm^3.

Resolución.-

La ley pedida es el cociente del peso de la plata contenida en la aleación obtenida por el peso total de esta aleación. Ahora bien, el peso de la plata es, en kilogramos :

$$10 \times 0{,}905 + 4 \times 0{,}895 = 12{,}630\,kg.$$

El peso del lingote siendo de 14 kg, la ley es : $\dfrac{12{,}63}{14} = 0{,}902 + \dfrac{1}{7}$

O sea 0,902 con menos de 1/1000 de aproximación por defecto.

El lingote obtenido contiene 12,63 kg de plata y : 14 kg - 12,63 kg = 1,37 kg de cobre.

Ahora bien si un decímetro cúbico de plata pesa 10,47 kg, el volumen de 12,63 kg será :

$$\frac{12{,}63}{10{,}47} = 1{,}206\ dm^3.$$

Como un dm^3 de cobre pesa 8,85 kg, el volumen de 1,37 kg será:

$$\frac{1{,}37}{8{,}85} = 0{,}155\ dm^3$$

porque los volúmenes de cantidades de un mismo metal son proporcionales a sus pesos.

Finalmente el volumen del lingote es : $1{,}206 + 0{,}155 = \boxed{1{,}361\ dm^3}$.

33.- Se desea obtener 1,088 kg, de una aleación cuya densidad sea igual a 16, fundiendo, sin contracción ni dilatación, un lingote de oro puro y un lingote de plata pura. Hallar el volumen del lingote de aleación y el peso de cada uno de los dos lingotes de metal fino, sabiendo, que la densidad del oro es 19 y la de la plata es 10,5 .

Resolución.-

Siendo la densidad del lingote igual a 16, un gramo de este lingote ocupará un volumen de 1/16 de cm^3. Luego el peso del lingote de 1 088 *gramos*, tendrá un volumen de : $\frac{1088}{16} = 68\ cm^3$.

Si estos 68 cm^3 fueran de oro ,el peso del lingote sería de : $68 \times 19 = 1\ 292\ g$.

El exceso sobre el peso dado sería de : $1292 - 1088 = 204\ g$.

Si se reemplaza 1 cm^3 de oro que pesa 19 *gramos* por 1 cm^3 de plata que pesa 10,5 *gramos*, el peso disminuye de $19 - 10{,}5 = 8{,}5$ *gramos*.

Luego tantas veces como 204 contenga a 8,5, tantos centímetros cúbicos de oro deberán ser reemplazados por un volumen igual de plata.

Esto es : $\frac{204}{8{,}5} = 24$

Luego el lingote deberá tener 24 cm^3 de plata, o sea un peso de :

$$10{,}5 \times 24 = 252 \text{ gramos de plata}$$

Y : $68\ cm^3 - 24\ cm^3 = 44\ cm^3$ de oro, o sea un peso de :

$$19 \times 44 = 836 \text{ gramos de oro}$$

34.- Se tiene una aleación de plata y de cobre, en la cual el peso de la plata sobrepasa en 1,773 kg el peso del cobre. Se aumenta a la aleación un peso de plata igual a 1/3 del peso de la plata que ya contenía, y se obtiene una aleación con una ley de 0,835. Se pide hallar : 1ro La ley de la primera aleación; 2do El peso de esta aleación ; 3ro El peso de la plata contenida en la segunda aleación.

Resolución.-

La segunda aleación contiene 835 g de plata por 165 g de cobre; la primera, para el mismo peso de cobre solo contiene los 3/4 de 835 g de plata, o sea 626,25 g. Luego la ley de esta aleación sería :

$$\frac{626{,}25}{626{,}25+165} = \frac{626{,}25}{791{,}25} = \frac{167}{211} = 0{,}79147 \dots ;$$

Con un diez milésimo de aproximación, se puede tomar 791,5 milésimos 1 000 *gramos* de esta aleación conteniendo 791,47 *gramos* de plata y 208,53 *gramos* de cobre, o sea un exceso de plata de 582,94 *gramos*. Para que el exceso del peso de la plata sea de 1 773 *gramos*, es necesario que el peso del lingote sea de :

$$\frac{10000 \times 1773}{582{,}94} = 3\ 041{,}48 \text{ gramos (por exceso)}$$

Siendo conocida su ley, este lingote contendrá :

$$3\ 041{,}48 \times 0{,}20853 = 634{,}24 \text{ gramos de cobre}$$

$$3\ 041{,}48 \times 0{,}79147 = 2\ 407{,}24 \text{ gramos de plata y}$$

Observación : Estos números tienen una suma que es exactamente 3 041,48 y una diferencia de 1 773. Asimismo el peso de la plata contenida en la segunda aleación es 4/3 de 2 407,24, lo que da 3 209,65 *gramos*.

35.- Se tiene dos lingotes de oro, uno de ley 0,950, el otro de 0,800. Se les funde, aumentando 2 kg de oro puro. El lingote obtenido tiene una ley de 0,906 y pesa 25 kilogramos. ¿Cuál es el peso de cada uno de los dos primeros lingotes?

Resolución.-

Los dos lingotes que se han fundido pesan en total : 25 *kg* -2 *kg* = 23 *kg*. Asimismo ellos contienen 25 × 0,906 - 2 = 20 ,650 *kg* de oro ; luego la aleación obtenida, sin considerar la adición del oro puro, tendría la ley : 20,650 /23.

Ahora debemos conducir el problema a hallar cuál debe ser la proporción de las aleaciones a las leyes respectivas $t = 0{,}950$ y $t' = 0{,}800$ para que, fundida, de un metal con ley :

$$T = \frac{20{,}650}{23}$$

Se sabe que esta relación es la de las diferencias entre la ley final y las leyes de los componentes:

$$\frac{p}{p'} = \frac{t' - T}{T - t'}$$

O bien :
$$\frac{p}{p'} = \frac{0{,}950 - \dfrac{20{,}650}{23}}{\dfrac{20{,}650}{23} - 0{,}800} = \frac{21{,}850 - 20{,}650}{20{,}650 - 18{,}400} = \frac{120}{225} = \frac{8}{15}$$

Ahora bien, si se reparte 23 en la relación de 8 a 15, las dos partes son precisamente 8 y 15. Esto quiere decir que hay:

15 *kg*. de aleación de 0,950 y 8 *kg*. de aleación de 0,800.

36.- Tres lingotes, el primero con ley de 0,640, el segundo con ley de 0,760 y el tercero con ley de 0,850, tienen pesos iguales. Ellos han sido afinados: Al primero se le quita 1/6 de su cobre; al segundo 1/8, y al tercero se le quita 1/10. Después de la afinacion se funden los tres lingotes. ¿Cuál será la ley de aleación asi obtenida?

Resolución.-

Supongamos que el peso común de los lingotes sea de 1 000 *gramos* :

El primero siendo de ley 0,640 contendrá 360 *gramos* de cobre ;

El segundo siendo de ley 0,760 contendrá 240 *gramos* de cobre ;

El tercero siendo de ley 0,850 contendrá 150 *gramos* de cobre .

En la afinación de los tres lingotes se habrán sacado :

$$\frac{1}{6} \times 360 + \frac{1}{8} \times 240 + \frac{1}{10} \times 150 = 60 + 30 + 15 = 105 \textit{ gramos}.$$

Luego el peso del lingote final sería : 3 000 - 105 = 2 895 *gramos*, y el peso del metal fino :

$$640 + 760 + 850 = 2\,250 \textit{ gramos}.$$

Por consiguiente, la ley de la aleación será :

$$\frac{2250}{2895} = \frac{150}{193} = \boxed{0{,}7772 \text{ aprox.}}$$

37.- Se tiene un lingote de plata de ley 0,850; se le adiciona 2,70 kg de plata pura y se obtiene un lingote de ley 0,915. ¿Cuál fue el peso del primer lingote?

Resolución.-

De un modo general cuando se ligan pesos P_1 y P_2 de aleaciones con leyes t_1 y t_2 respectivamente para formar un peso $P_1 + P_2$ de aleación, de ley T, y teniendo en cuenta que el peso de metal precioso es el mismo en el compuesto que en los componentes, se tiene :

$$P_1 t_1 + P_2 t_2 = (P_1 + P_2)\, T,$$

$$P_1 (T - t_1) = P_2 (t_2 - T)$$

Suponiendo por ejemplo que : $t_1 < t_2$,

Tendremos : $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{T - t_1}{t_2 - T}$;

Luego los pesos de las aleaciones están en razón inversa de las diferencias de leyes. En el problema propuesto ésta observación da, considerando la plata como una aleación de ley 1 y tomando el gramo como unidad de peso :

$$\frac{2700}{x} = \frac{0{,}915 - 0{,}850}{1 - 0{,}915} = \frac{65}{85}$$

O : $x = \dfrac{2700 \times 85}{65} = 3530.7692307 \ldots..$

El peso del primer lingote es de : $\boxed{3{,}531 \ kg \text{ aprox.}}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL I

1.- A cómo sale el *litro* de una mezcla de 10 *litros* de vino S/. 0,84 con 8 *litros* S/. 0,90 y 12 *litros* de S/. 1,20.

A) S/. 1,10 B) S/. 1,20 C) S/. 1,15
D) S/. 1,00 E) S/. 1,12

2.- Se mezcla 30 *kg* de arroz de S/. 1 200 con 40 *kg* de arroz de S/. 1 480 el *kilo*. ¿A cómo hay que vender un *kilo* de mezcla para ganar un 10% del costo?

A) S/. 1 350 B) S/. 1 750 C) S/. 1 620
D) S/. 1 496 E) S/. 1 500

3.- Se tiene dos *litros* de solución agua y alcohol al 20% si le agrega un *litro* de alcohol. ¿Cuál es el % de alcohol de la nueva mezcla?

A) 27,5 % B) 25 % C) 25,2 %
D) 25,7 % E) $46,\hat{6}$ %

4.- Para obtener vino de S/. 0,80 el *litro*. ¿En qué proporción directa serán necesarias mezclar vinos de S/. 0,90 y S/. 0,50 el *litro*?

A) 3:2 B) 3:1 C) 2:3 D) 3:1 E) 2:1

5.- Los pesos y leyes de 4 lingotes son proporcionales a 1; 2; 3; y 4. Si al mezclar los 4 se obtiene una aleación de 480 milésimos. Hallar la ley del segundo.

A) 160 milésimos D) 140 milésimos
B) 320 milésimos E) 800 milésimos
C) 480 milésimos

6.- Se tiene dos lingotes de plata y cobre de leyes 0,750 y 0,850, el primero pesa 60 *kg* y el segundo tiene 51 *kg* de plata. Hallar la ley del lingote resultante de la fusión de ambos.

A) 0,79 B) 0,78 C) 0,82 D) 0,80 E) 0,81

7.- Deseamos obtener 100 *litros* de alcohol de 74° mezclando 30 *litros* de alcohol de 80° con cantidades convenientes de alcohol puro y agua. ¿Qué cantidades de estos últimos ingredientes necesitamos?

A) 20 y 50 B) 23 y 27 C) 27 y 23
D) 30 y 40 E) 50 y 20

8.- Con licores de la misma clase pero a S/.80 y S/.60 el litro se desea formar una mezcla de 120 *litros* cuyo precio medio sea S/.65 el litro. ¿Cuántos litros de cada precio deben mezclarse?

A) 80 L y 40 L D) 50 L y 70 L
B) 75 L y 35 L E) 65 L y 55 L
C) 90 L y 30 L

9.- Se funden *n* kilogramos de una aleación de oro de ley "L" con *x kilogramos* de cobre puro en la proporción de 6 a 1. ¿En qué porcentaje disminuye la ley de la aleación de oro?

A) 14,28% B) 16,6% C) 25%
D) 32% E) 83,3%

10.- Cuánto carbón de Yanacancha (humedad 10%) y de la Calgada (4% de humedad) hay que tomar para obtener 1 tonelada de carbón cuya humedad sea 6%?

A) 333,3 *kg* B) 302,4 *kg* C) 205,8 *kg*
D) 666,6 *kg* E) 697,6 *kg*

NIVEL II

11.- Se tiene una aleación de oro de 20 *kg* que cuesta S/. 6 200 000 sabiendo que un gramo de oro vale 6 veces lo que cuesta un gramo de cobre. ¿Cuál será el precio de la aleación del mismo peso que la anterior pero que sea 18*k*?

A) S/. 5 800 000   D) S/. 6 800 000
B) S/. 5 700 000   E) S/. 5 850 000
C) S/. 5 950 000

12.- Se tiene 3 barras de plata de ley 0,12; 0,15 y 0,20. ¿En qué proporción deben fundirse para obtener una ley de 0,16 si la proporción del 1ra al 2da es 2 a 5?

A) 8;20 y 6   B) 6,15 y 2   C) 7,4 y 21
D) 8,20 y 13   E) 4,10 y 13

13.- Hallar aproximadamente la ley de una aleación de Au y Cu de densidad 14 sabiendo que la densidad de Au es 19 y la del Cu es 9.

A) 0,57   B) 0,62   C) 0,67
D) 0,72   E) 0,77

14.- La mezcladora de la harina es alimentada por dos ductos, el 1er ducto alimenta harina de S/. 0,50 el *kg* a razón de 10 *kg* cada 5 *min* y el 2do ducto alimenta a 9 *kg* de S/. 0,70 el *kg* cada 3 *min*. ¿En cuánto debe venderse el *kg* de la mezcla para ganar el 10%.

A) S/. 0,62   B) S/. 0,682   C) S/. 0,690
D) S/. 682   E) S/. 0,77

15.- El latón se compone de 33 partes de zinc y 67 de cobre en 850 *kg* de latón. ¿Qué diferencia hay entre los pesos de cobre y zinc?

A) 240 *kg*   B) 169 *kg*   C) 289 *kg*
D) 340 *kg*   E) 310 *kg*

16.- Un distribuidor de ferretería planea vender paquetes de 0,6 *kg* de tornillos mezclados con dos tamaños, chicos y grandes. Se sabe que un *kg* de cada uno de los tornillos cuesta respectivamente S/.2 y S/.1,5. Si se quiere llegar a paquetes que tengan un costo S/.1,00. ¿Qué cantidad de tornillos grandes contendrá cada paquete?

A) 7/20 *kg*   B) 2/5 *kg*   C) 9/40 *kg*
D) 1/4 *kg*   E) 1/3 *kg*

17.- Se tiene vino de S/. 8, S/. 12 y S/. 10 el litro del primero se tiene 4 L. ¿Cuántos litros del tercero se debe tomar para obtener una mezcla que cuesta S/.51,00 cada 5 L sabiendo que la cantidad del 2do y 3ro están en la proporción de 5 a 1?

A) 1L   B) 2L   C) 3L   D) 4L   E) 5L

18.- Un comerciante mezcla dos clases de té, una le cuesta a S/. 2,81 y la otra a S/.2,45 el *kg*, vende 60 *kg* de ésta mezcla en S/.174,72 y gana el 12% del precio de compra. ¿Qué cantidad de té entró de la 1ra clase en los 60 *kg*?

A) 25 *kg*   B) 35 *kg*   C) 20 *kg*
D) 40 *kg*   E) 30 *kg*

19.- Se tiene 3 barras de plata cuyas leyes son 600, 800, 900 milésimos. ¿Qué peso de plata pura interviene en la 1ra barra? Si al fundirlo la ley obtenida es de 0,7 y el peso de aleación de 3 *kg*, se sabe que el peso de la 2da barra es el doble de la 3ra.

A) 1,029 *kg*   B) 1,29 *kg*   C) 2,1 *kg*
D) 0,89 *kg*   E) 1,19 *kg*

20.- Se han mezclado 60 *kg* de una mercancía de S/. 5,00 el *kg*, con otra cuyo peso representa al 25% del peso total y se ha obtenido para precio medio del *kg* S/. 4,75. ¿Cuál es el precio del *kg* de la segunda mercancía?

A) 3   B) 4   C) 5   D) 6   E) 7

NIVEL III

21.- Un vaso A contiene 8L de vino puro y 8L de agua, un segundo vaso B contiene 11L de vino puro y 9L de agua. Si se saca 7L de cada vaso se vacia del uno al otro. Calcular la razón geométrica de la cantidad de vino a la candidad de agua en el vaso B. Dar como respuesta la suma de cifras del denominador.

A) 8   B) 2   C) 16   D) 14   E) 18

22.- En un tonel de vino de S/.30 el litro encontrándose con 5/8 de volumen desocupado, luego se agrega 1/7 del volumen total con alcohol de S/.40. Se retira 1/56 del volumen de mezcla, se agregra luego alcohol 90° hasta cubrir los 3/4 del volumen. 1 botella de alcohol cuesta S/.15 y contiene 3/4 del litro. ¿Cuál es el precio de la mezcla final si se cubrió el recipiente con vino de S/.50 el L. Tal que 2/7 de su volumen en la mezcla (el tonel quedó cubierto totalmente).

A) 40 B) 48 C) 80 D) 68 E) N.A

23.- Se tiene 2 soldaduras de zinc y cobre, una contiene 48 partes de zinc y 52 de cobre y la otra 75 de zinc y 25 de cobre. Si se desea tener una mezcla de 1 275 *g* de soldadura que contenga 57 partes de zinc y 43 de cobre. ¿Qué peso en *kilos* se debe tomar de las dos primeras soldaduras?

A) 39*g* B) 50*g* C) 80*g* D) 45*g* E) N.A

24.- Hallar el peso de una aleación de oro de ley 0,920 sabiendo que si se añaden 250 *g* de oro de ley 0,880 y luego de la aleación obtenida se quita 100 *g* y en vez de ello se agrega 360 *g* de oro de ley 0,840 obteniéndose una aleación de ley de 0,890.

A) 650 *g* B) 700 *g* C) 750 *g*
D) 800 *g* E) 480 *g*

25.- Se tiene 2 aleaciones de oro; 30 *g* de 12 kilates y 24 *g* de 21 kilates. Si se funden con *n* gramos de oro puro la primera y con *n* gramos de cobre la segunda resulta que ambas nuevas aleaciones tienen la misma pureza de oro. ¿Cuánto vale "*n*"?. Dar la respuesta aproximada.

A) 15 *g* B) 17 *g* C) 18,5 *g*
D) 20,4 *g* E) 21,8 *g*

26.- Se tiene 3 mezclas compuestas de 3 elementos A, B y C la primera consta solo de los elementos A y B, en proporción de peso a 3:5 la segunda mezcla solo contiene elementos B y C en proporción de peso de 1:2, en la tercera mezcla entran solo los elementos A y C en la proporción de peso 2:3. ¿En qué proporción se han de tomar estas mezclas para que la mezcla obtenida contenga los ingredientes A, B y C en proporción de peso 3:5:2?

A) 16:3:7 B) 20:6:3 C) 17:2:5
D) 21:3:6 E) 15:12:11

27.- Determinar cuántos *litros* de vino de S/.5 el litro se tiene sabiendo que si se le añade 40 *litros* de S/.4 el litro y luego de la mezcla resultante se extrae 20 *litros* que reemplaza por 20 *litros* de vino de 3,6 el litro se obtiene una nueva mezcla de S/. 4,4 el litro.

A) 40 B) 48 C) 60 D) 68 E) 80

28.- La ley de 3 lingotes de plata son 0,9; 0,8 y 0,72 si se fundieran el 1ro y el 2do se obtendría un lingote de 0,84 de ley y se fundiera el 2do y el 3ro se obtendría 0,77 de la ley. Determinar el peso del segundo lingote si se sabe que la suma de los tres lingotes es 102 *kg*.

A) 30 *kg* B) 36 *kg* C) 45 *kg*
D) 28 *kg* E) 50 *kg*

29.- Se mezclan 20 *gramos* de aleación en la que la plata representa el 20% del total, con 10 *gramos* de una aleación en la cual su liga a su ley como 3 es a 2. Calcular el precio por gramo de la aleación si el gramo de plata pura cuesta 6 dólares y el gramo de la aleación cuya ley es 0,5 cuesta 4 dólares.

A) 6,8 B) 3,2 C) 3,6 D) 1,6 E) 3,28

30.- Se obtiene 420 L de vino mezclando, vino de S/. 2,40; S/. 2,80 y S/. 3,00 el HL y cierta candidad de agua que ingresa a un litro por cada 20 litros de vino, que se pone del cual hay un litro S/. 2,40 por cada 3 *litros* de S/. 2,80. Si desea obtener una ganancia total de S/. 126 vendiendo la mezcla a S/. 2,9 el litro. ¿Cuántos litros se mezclaron de vino a S/. 3,0 el litro?

A) 30 B) 40 C) 60 D) 70 E) 90

CLAVES DE RESPUESTAS

CAPITULO 1: LOGICA MATEMATICA

01.- C **02.-** B **03.-** E **04.-** B **05.-** C **06.-** E **07.-** C **08.-** D **09.-** C **10.-** E **11.-** D **12.-** B **13.-** A **14.-** C **15.-** A **16.-** E **17.-** A **18.-** A **19.-** A **20.-** A **21.-** E **22.-** B **23.-** B **24.-** D **25.-** D **26.-** E **27.-** D **28.-** B **29.-** A **30.-** C **31.-** C **32.-** C **33.-** A **34.-** C **35.-** C **36.-** C

CAPITULO 2: TEORIA DE CONJUNTOS

01.- D **02.-** B **03.-** A **04.-** D **05.-** A **06.-** C **07.-** D **08.-** C **09.-** B **10.-** C **11.-** D **12.-** C **13.-** **14.-** B **15.-** A **16.-** D **17.-** E **18.-** C **19.-** C **20.-** A **21.-** D **22.-** C **23.-** B **24.-** D **25.-** B **26.-** E **27.-** A **28.-** D **29.-** C **30.-** B **31.-** B **32.-** D **33.-** B **34.-** D **35.-** C

CAPITULO 3: SISTEMA DE NUMERACION

01.- B **02.-** C **03.-** B **04.-** B **05.-** E **06.-** D **07.-** **08.-** D **09.-** B **10.-** C **11.-** E **12.-** C **13.-** C **14.-** D **15.-** E **16.-** E **17.-** E **18.-** C **19.-** D **20.-** A **21.-** E **22.-** C **23.-** A **24.-** A **25.-** D **26.-** C **27.-** C **28.-** C **29.-** B **30.-** D **31.-** C **32.-** B **33.-** C **34.-** B **35.-** C

CAPITULO 4: CONTEO DE NUMEROS

01.- C **02.-** A **03.-** E **04.-** C **05.-** A **06.-** D **07.-** C **08.-** C **09.-** C **10.-** E **11.-** C **12.-** E **13.-** D **14.-** C **15.-** C **16.-** C **17.-** D **18.-** C **19.-** B **20.-** D **21.-** E **22.-** D **23.-** A **24.-** E **25.-** B **26.-** D **27.-** D **28.-** A **29.-** B **30.-** D **31.-** C **32.-** A **33.-** C **34.-** B **35.-** D

CAPITULO 5: CUATRO OPERACIONES

01.- C **02.-** D **03.-** B **04.-** E **05.-** C **06.-** A **07.-** C **08.-** D **09.-** C **10.-** D **11.-** D **12.-** E **13.-** D **14.-** C **15.-** D **16.-** D **17.-** B **18.-** B **19.-** D **20.-** E **21.-** B **22.-** E **23.-** E **24.-** A **25.-** E **26.-** A **27.-** C **28.-** E **29.-** B **30.-** D **31.-** B **32.-** C **33.-** C **34.-** C **35.-** E **36.-** A **37.-** B **38.-** C **39.-** B **40.-** A **41.-** E **42.-** A **43.-** A **44.-** B **45.-** D **46.-** E **47.-** B **48.-** D **49.-** B **50.-** B **51.-** A **52.-** C **53.-** E **54.-** D **55.-** B **56.-** A **57.-** C **58.-** C **59.-** A **60.-** A **61.-** C **62.-** E **63.-** B **64.-** D **65.-** C

CAPITULO 6: TEORIA DE LA DIVISIBILIDAD

01.- B **02.-** B **03.-** D **04.-** C **05.-** B **06.-** C **07.-** A **08.-** C **09.-** D **10.-** D **11.-** A **12.-** E **13.-** B **14.-** D **15.-** C **16.-** C **17.-** B **18.-** C **19.-** C **20.-** D **21.-** D **22.-** A **23.-** D **24.-** B **25.-** D **26.-** A **27.-** E **28.-** D **29.-** A **30.-** E **31.-** C **32.-** C **33.-** B **34.-** B **35.-** C **36.-** E **37.-** C **38.-** C **39.-** A **40.-** C

CAPITULO 7: TEORIA DE LOS NUMEROS PRIMOS

01.- C **02.-** C **03.-** D **04.-** B **05.-** D **06.-** D **07.-** E **08.-** D **09.-** C **10.-** C **11.-** C **12.-** C **13.-** D **14.-** C **15.-** E **16.-** B **17.-** B **18.-** A **19.-** E **20.-** D **21.-** C **22.-** C **23.-** A **24.-** C **25.-** A **26.-** C **27.-** B **28.-** C **29.-** D **30.-** B **31.-** A **32.-** B **33.-** C **34.-** **35.-** C **36.-** B **37.-** D **38.-** C **39.-** C **40.-** B

CAPITULO 8: M.C.D. - M.C.M.

01.- B **02.-** D **03.-** A **04.-** D **05.-** B **06.-** C **07.-** C **08.-** B **09.-** D **10.-** A **11.-** B **12.-** B **13.-** A **14.-** C **15.-** D **16.-** E **17.-** B **18.-** D **19.-** C **20.-** E **21.-** B **22.-** D **23.-** E **24.-** C **25.-** B **26.-** D **27.-** A **28.-** D **29.-** B **30.-** C **31.-** C **32.-** B **33.-** D **34.-** A **35.-** B **36.-** C **37.-** A **38.-** C **39.-** D **40.-** E

CAPITULO 9: FRACCIONES

01.- D **02.-** C **03.-** C **04.-** D **05.-** D **06.-** A **07.-** D **08.-** C **09.-** D **10.-** B **11.-** C **12.-** A **13.-** C **14.-** B **15.-** B **16.-** A **17.-** A **18.-** E **19.-** E **20.-** C **21.-** A **22.-** E **23.-** E **24.-** B **25.-** D **26.-** A **27.-** E **28.-** B **29.-** D **30.-** B **31.-** B **32.-** C **33.-** A **34.-** C **35.-** E **36.-** E **37.-** C **38.-** B **39.-** A **40.-** E

CAPITULO 10: POTENCIACION

01.- C **02.-** C **03.-** D **04.-** C **05.-** C **06.-** B **07.-** B **08.-** E **09.-** C **10.-** D **11.-** A **12.-** B **13.-** A **14.-** D **15.-** A **16.-** B **17.-** E **18.-** A **19.-** C **20.-** A **21.-** D **22.-** D **23.-** E **24.-** B **25.-** D **26.-** C **27.-** D **28.-** C **29.-** B **30.-** C

CAPITULO 11: RADICACION

01.- C 02.- A 03.- D 04.- C 05.- D 06.- E 07.- A 08.- B 09.- B 10.- A 11.- B 12.- A 13.- A 14.- A 15.- B 16.- B 17.- D 18.- B 19.- B 20.- B 21.- A 22.- B 23.- 24.- A

CAPITULO 12: LONGITUD Y TIEMPO

01.- A 02.- A 03.- E 04.- B 05.- C 06.- D 07.- A 08.- C 09.- C 10.- B 11.- E 12.- D 13.- D 14.- E 15.- E 16.- 17.- 18.- 19.- 20.- 21.- 22.- 23.- 24.- 25.- 26.- 27.- 28.- 29.- 30.-

CAPITULO 13: RELACIONES Y FUNCIONES

01.- C 02.- D 03.- D 04.- C 05.- B 06.- A 07.- C 08.- B 09.- E 10.- A 11.- C 12.- A 13.- E 14.- C 15.- B 16.- C 17.- A 18.- A 19.- E 20.- A 21.- A 22.- D 23.- E 24.- B 25.- E 26.- E 27.- E 28.- D 29.- A 30.- C

CAPITULO 14: ESTATICA

01.- 02.- A 03.- E 04.- C 05.- A 06.- D 07.- D 08.- D 09.- A 10.- D 11.- C 12.- B 13.- C 14.- E 15.- C 16.- B 17.- E 18.- B 19.- B 20.- A 21.- D 22.- D 23.- A 24.- D 25.- B 26.- C 27.- A 28.- C 29.- B 30.- 31.- D 32.- D 33.- E 34.- D 35.- A 36.- B 37.- A 38.- E 39.- C 40.- C

CAPITULO 15: RAZONES Y PROPORCIONES

01.- B 02.- C 03.- E 04.- E 05.- A 06.- E 07.- D 08.- D 09.- E 10.- D 11.- C 12.- D 13.- C 14.- C 15.- D 16.- B 17.- C 18.- B 19.- D 20.- A 21.- D 22.- 23.- D 24.- D 25.- 26.- D 27.- E 28.- 29.- E 30.- A

CAPITULO 16: PROPORCIONALIDAD

01.- D 02.- C 03.- E 04.- A 05.- B 06.- 07.- E 08.- B 09.- B 10.- 11.- D 12.- D 13.- 14.- B 15.- 16.- C 17.- D 18.- 19.- 20.- A 21.- C 22.- B 23.- 24.- C 25.- C 26.- D 27.- B 28.- C 29.- B 30.- B

CAPITULO 17: REPARTO PROPORCIONAL

01.- E 02.- A 03.- D 04.- 05.- D 06.- A 07.- C 08.- A 09.- A 10.- C 11.- A 12.- B 13.- C 14.- D 15.- E 16.- A 17.- 18.- D 19.- A 20.- D 21.- E 22.- D 23.- D 24.- C 25.- B 26.- A 27.- 28.- D 29.- A 30.-

CAPITULO 18: REGLA DE TRES

01.- B 02.- E 03.- A 04.- A 05.- D 06.- 07.- D 08.- E 09.- B 10.- C 11.- C 12.- B 13.- A 14.- B 15.- C 16.- C 17.- D 18.- 19.- 20.- C 21.- E 22.- E 23.- A 24.- A 25.- 26.- D 27.- 28.- 29.- C 30.-

CAPITULO 19: REGLA DE PORCENTAJE

01.- C 02.- D 03.- B 04.- A 05.- A 06.- E 07.- E 08.- E 09.- E 10.- 11.- D 12.- B 13.- 14.- A 15.- B 16.- A 17.- D 18.- 19.- E 20.- 21.- 22.- E 23.- 24.- 25.- 26.- D 27.- B 28.- D 29.- B 30.-

CAPITULO 20: REGLA DE INTERES

01.- D 02.- B 03.- 04.- D 05.- D 06.- 07.- A 08.- B 09.- 10.- D 11.- B 12.- C 13.- D 14.- E 15.- B 16.- B 17.- B 18.- D 19.- 20.- D 21.- 22.- 23.- 24.- 25.- B 26.- C 27.- C 28.- E 29.- B 30.- C

CAPITULO 21: REGLA DE DESCUENTO

01.- B 02.- D 03.- B 04.- C 05.- A 06.- D 07.- B 08.- E 09.- C 10.- D 11.- D 12.- C 13.- D 14.- E 15.- C 16.- C 17.- B 18.- E 19.- C 20.- D 21.- A 22.- B 23.- 24.- 25.- 26.- 27.- A 28.- 29.- 30.-

CAPITULO 22: PROMEDIOS

01.- 02.- B 03.- A 04.- A 05.- 06.- D 07.- C 08.- E 09.- C 10.- C 11.- A 12.- 13.- E 14.- A 15.- 16.- C 17.- 18.- B 19.- 20.- 21.- B 22.- A 23.- 24.- 25.- E 26.- 27.- 28.- 29.-

CAPITULO 23: MEZCLA

01.- 02.- D 03.- E 04.- 05.- C 06.- D 07.- 08.- C 09.- A 10.- A 11.- 12.- 13.- C 14.- B 15.- C 16.- 17.- 18.- A 19.- B 20.- B 21.- C 22.- 23.- 24.- 25.- 26.- 27.- 28.- C 29.- 30.-

BIBLIOGRAFIA

01- **Journal de Mathématiques Elementaires**
H. Vuibert
Paris-Francia

02- **Matemática 1 000 Problemas**
Marcos Medina
Consorcio Capricornio

03- **Matemática 1-Bachillerato Español**
Adolfo Negro
Editorial Alhambra

04- **Examples in Mathematics for GCSE**
Ewart Smith
Stanley Thornes (Publishers) Lda. EEUU

05- **Mathematics Lverls 3,4, ... 10**
Jean Holderness
Published by Causeway Press Ltd. EEUU

06- **Matematica Segundo Grau Volume 1**
Víctor Sctani
Editora Atica S.A Sao Paulo Brasil

07- **The contest Problem**
Charles T. Salkind
Matematical Association of America

08- **International Baccalaureate (IB) Mathematical Methods**
EEUU Exámenes del IB, del año 1 990 al año 1998

09- **Aventuras Matemáticas**
Miguel de Guzmán
Editorial Labor S.A Barcelona - España

10- **Ruedas, vida y otras diversiones Matemáticas**
Martin Gardner
Editorial Labor S.A Barcelona - España

11- **Inspiración !Ajá¡**
Martin Gardner
Editorial Labor S.A Barcelona - España

12- **Explorando la Matemática**
D.A Johnson, W.H. Glenn
Tomos I , II , III , y IV.
Mc.Graw-Hill México

13- **Desafíe a su inteligencia**
M. Meirovist, P.I. Jacobs
Ed. Martínez Roca, Barcelona España

14- **Olimpiadas de Matemáticas (Perú-Colombia-Argentina-Paraguay-...)**
Ultimos 5 años

15- **Primos o algunos dislantes sobre números**
S. Thid de Pol
Editorial Alhambra, Madrit España

16- **Problemas de Ingenio**
C. Frabetti
Editorial Bruguera, Barcelona-España.

17- **Exámenes de admisión a la Universidad de Ingenieria (UNI)**
Ultimos 10 años

18- **Exámenes de admisión a la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUC)**
Ultimos 10 años

19- **Prácticas Calificadas, Exámenes Parciales y Exámenes Finales del Centro Preuniversitario de la Universidad del pacífico (UP)**
Del año 1 990 al año 1 997

20- **Exámenes de admisión a diferentes Universidades del Perú**
Ultimos 5 años