

June 13, 2019

Condensé de la 1ère Mathématiques

Ewen Le Bihan
1eS3

Notations non vues en cours

$:=$	Égal par définition
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$	Appartient à la fois à \mathbb{A} et à \mathbb{B}
$\lceil x \rceil$	Arrondir x à l'entier supérieur. ($\lceil 5.1 \rceil = 6$)
1.5	Séparateur ,
$x \cdot y$	Multiplication \times
$\vec{v} \perp \vec{u}$	\vec{v} et \vec{u} orthogonaux

Contents

1	Polynômes du second degré $ax^2 + bx + c$	1
1.1	Δ : Trouver les racines	1
1.2	α, β : Trouver l'extremum	1
1.2.1	Maximum ou minimum ?	1
1.2.2	Calcul	1
1.3	Différentes formes	1
2	Vecteurs \vec{v}, équations cartésiennes $ax + by + c = 0$	2
2.1	Colinéarité	2
2.2	Vecteur directeur	2
2.2.1	Équation réduite $y = mx + p$	2
2.2.2	Équation cartésienne $ax + by + c = 0$	2
2.3	Décomposer un vecteur	2
2.4	Relation de Chasles	2
3	Statistiques	3
3.1	Caractéristiques	3
3.2	Transformation de valeurs selon $y = mx + p$	3
4	Probabilités	4
4.1	Notions	4
4.2	Loi de probabilité de X	4
4.3	Caractéristiques	4
4.4	Issues, événements	4
4.5	Loi binomiale \mathcal{B}	5
4.5.1	Définitions	5
4.5.2	Loi de X	5
4.5.3	Caractéristiques	5
5	Suites U_n	6
5.1	Types de suites	6
5.1.1	Fonctionnelle	6
5.1.2	Réursive	6
5.2	Suites remarquables	6
5.2.1	Arithmétiques	6
5.2.2	Géométriques	6
5.3	Sommes	6
5.3.1	Suites arithmétiques	6
5.3.2	Suites géométriques	6
5.4	Variations	6
5.4.1	Fonction associée	6
5.4.2	Méthode 2	6
5.4.3	Méthode 3	6
6	Produit Scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$	7
6.1	Calcul	7
6.2	Multiplication de segments liés	7
6.3	Identités remarquables	7
6.4	Angle aigu et obtu	7
7	Étude de fonctions	8
7.1	Fonctions de bases	8
7.2	Opérations sur fonctions	8
7.3	Dérivées	9
7.3.1	Nombre dérivé $f'(a)$	9
7.3.2	Tangente T au point a	9
7.3.3	Tangentes remarquables	9
7.3.4	Opérations sur les tangentes	9
7.3.5	Utilisations de la tangente	9

1 Polynômes du second degré $ax^2 + bx + c$

1.1 Δ : Trouver les racines

$$\Delta := b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 & x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 & x_0 = \frac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 & \emptyset \end{cases}$$

1.2 α, β : Trouver l'extremum

1.2.1 Maximum ou minimum ?

$$\begin{array}{l|l} a > 0 & \text{minimum} \\ a < 0 & \text{maximum} \end{array}$$

1.2.2 Calcul

$$\alpha := \frac{-b}{2a}$$

$$\beta := \frac{\Delta}{4a}$$

$$\text{Sommet} = (\alpha; \beta)$$

Le polynôme atteint un extremum en α de valeur β

1.3 Différentes formes

Canonique	$(x - \alpha)^2 + \beta$
Factorisée	$a(x - x_1)(x - x_2)$
	$a(x_0 - x)^2$
Développée	$ax^2 + bx + c$

2 Vecteurs \vec{v} , équations cartésiennes $ax + by + c = 0$

2.1 Colinéarité

$$\begin{aligned}\vec{v} \text{ \& } \vec{u} \text{ colinéaires} &\iff x_u y_v - y_u x_v = 0 \\ &\iff (u) \parallel (v) \\ &\iff \vec{u} = \lambda \vec{v} \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

2.2 Vecteur directeur

2.2.1 Équation réduite $y = mx + p$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

2.2.2 Équation cartésienne $ax + by + c = 0$

$$\begin{array}{l|l} \text{Vecteur directeur} & \vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \\ \text{Coefficient directeur} & m = -\frac{a}{b} \end{array}$$

2.3 Décomposer un vecteur

$$(\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}) \quad \vec{w} = \lambda \vec{v} + \lambda' \vec{u}$$

2.4 Relation de Chasles

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

3 Statistiques

3.1 Caractéristiques

Nom	Type	Formule
Effectif total	/	$N := \sum_{i=0}^p n_i$
Moyenne	Centrale	$\bar{x} := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^p n_i x_i$
Médiane	Centrale	$Me := \begin{cases} N \text{ pair} & \frac{1}{2} (x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N+1}{2}}) \\ N \text{ impair} & x_{\lceil \frac{N}{2} \rceil} \end{cases}$
Mode	Centrale	$Mo :=$ Valeur ou classe qui a l'effectif le plus grand
Premier Quartil	Non-centrale	$Q_1 := x_{\lceil \frac{N}{4} \rceil}$
Troisième Quartil	Non-centrale	$Q_3 := x_{\lceil \frac{3}{4} N \rceil}$
Étendue	Dispersion	$e := x_{max} - x_{min}$
Écart inter-quartil	Dispersion	$Q_3 - Q_1$
Variance	Dispersion	$V := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^p (n_i x_i^2) - \bar{x}$
Écart type	Dispersion	$\sigma := \sqrt{V}$

3.2 Transformation de valeurs selon $y = mx + p$

$$\bar{y} = m\bar{x} + p$$

$$V_y = m^2 V_x$$

$$\sigma_y = |m| \sigma_x$$

4 Probabilités

4.1 Notions

Nom	Symbole	Description
Univers	Ω	Ensemble des issues possibles
Variable aléatoire	X	Fonction qui renvoie un nombre aléatoire dans Ω

4.2 Loi de probabilité de X

Exemple:

- $\Omega = \{0; 1; 2\}$
- $p(X = 0) = p(X = 2) = \frac{1}{4}$
- $p(X = 1) = \frac{1}{2}$

k	0	1	2
$p(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

4.3 Caractéristiques

Nom	Description	Formule
Espérance	Résultat moyen espéré	$E(X) := \sum_{i=1}^n p_i x_i$
Variance		$V(X) := \sum_{i=1}^n (p_i x_i) - E(X)^2$
Écart type		$\sigma(X) := \sqrt{V(X)}$

4.4 Issues, événements

Exemple:

x_i	A	B
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Calcul de l'issue AB ($A \rightarrow B$):

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B)$$

Calcul de l'événement Θ « au moins une fois A »:

$$p(\Theta) = p(AB) + p(BA) + p(AA)$$

Calcul de l'événement contraire $\bar{\Theta}$:

$$p(\bar{\Theta}) = 1 - p(\Theta)$$

4.5 Loi binomiale \mathcal{B}

4.5.1 Définitions

Épreuve de Bernoulli	
Événement « succès »	S
Événement « échec »	\bar{S}
Probabilité de succès	$p := p(S)$
Probabilité d'échec	$q := p(\bar{S})$ $= 1 - p$
Schéma de Bernoulli	$\mathcal{B}(n; p)$
Nombre de répétitions	n
Nombre de succès	k
Univers	$\Omega = [0; n] \cap \mathbb{N}$

4.5.2 Loi de X

Si $X \sim \mathcal{B}(n; p)$

k	0	2	3	\dots	n
$p(X = k)$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$				

4.5.3 Caractéristiques

$$\forall k \in [0; n] \cap \mathbb{N}$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq$$

5 Suites U_n

5.1 Types de suites

5.1.1 Fonctionnelle

$$U_n = 2n$$

5.1.2 Récursive

$$\begin{cases} U_{n+1} &= U_0 + U_n \\ U_0 &= 5 \end{cases}$$

5.2 Suites remarquables

5.2.1 Arithmétiques

$$\begin{cases} U_{n+1} &= U_n + r \\ U_0 &= k \end{cases}$$
$$U_n = U_0 + r \cdot n$$

5.2.2 Géométriques

$$\begin{cases} U_{n+1} &= U_n \cdot q \\ U_0 &= k \end{cases}$$
$$U_n = U_0 \cdot q^n$$

5.3 Sommes

5.3.1 Suites arithmétiques

$$\sum_{\mu=i}^j U_\mu = \frac{U_i + U_j}{2} \cdot (j - i + 1)$$

5.3.2 Suites géométriques

$$\sum_{\mu=i}^j U_\mu = U_i \cdot \frac{1 - q^{j-i+1}}{1 - q}$$

5.4 Variations

5.4.1 Fonction associée

$$(\forall n \in \mathbb{N}) f : n \mapsto U_n$$
$$\text{Si } f \nearrow / \searrow \implies U_n \nearrow / \searrow$$

5.4.2 Méthode 2

$$U_{n+1} - U_n \leq 0 \iff U_n \searrow / \nearrow$$

5.4.3 Méthode 3

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 \iff U_n \nearrow / \searrow$$

6 Produit Scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Note: pour éviter les confusions, la multiplication normale est notée \times dans ce chapitre.

6.1 Calcul

$\vec{\mu}, \vec{\kappa}$ projetés orthogonaux de \vec{u} et \vec{v}

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &\iff \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\ &\iff x_u \times x_v + y_u \times y_v^* \\ &\iff \vec{u} \perp \vec{v} \\ &\iff \vec{\mu} \cdot \vec{\kappa} \\ &\iff \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)^{**}\end{aligned}$$

* Seulement dans un repère orthonormé

** Si \vec{u} et \vec{v} sont vecteurs directeurs des segments formant un triangle:

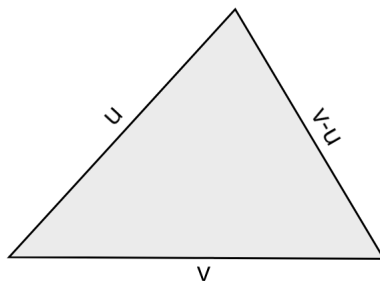


Figure 1

6.2 Multiplication de segments liés

Si A, H, B alignés dans cet ordre

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

Sinon, si H, A, B alignés dans cet ordre

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

6.3 Identités remarquables

$$\begin{aligned}\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{v} \cdot \vec{u} + \|\vec{v}\|^2 \\ (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

6.4 Angle aigu et obtu

$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \iff (\vec{u}; \vec{v}) \text{ aigu}$$

Et inversement

7 Étude de fonctions

7.1 Fonctions de bases

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	\nearrow	0	\nearrow
x^2	\searrow	0	\nearrow
$1/x$	\searrow	\parallel	\searrow
\sqrt{x}	$////$	0	\nearrow
$ x $	\searrow	0	\nearrow

7.2 Opérations sur fonctions

\Leftarrow : Changement de variation

\Rightarrow : Même variation

$$\forall k \in \mathbb{R}, \forall \lambda_+ \in \mathbb{R}^+, \forall \lambda_- \in \mathbb{R}^-$$

u	$-\infty$	0	$+\infty$
$u + k$	\Rightarrow	k	\Rightarrow
$u \cdot \lambda_+$	\Rightarrow	0	\Rightarrow
$u \cdot \lambda_-$	\Leftarrow	0	\Leftarrow
\sqrt{u}	$////$	0	\nearrow
$1/u$	\searrow	\parallel	\searrow

7.3 Dérivées

7.3.1 Nombre dérivé $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

7.3.2 Tangente T au point a

$$T : y = \underbrace{f'(a)}_{\text{coef dir}} (x - a) + f(a)$$

7.3.3 Tangentes remarquables

	$f(x)$	$f'(x)$
	constante	0
$\forall n \in \mathbb{N}$	x^n	nx^{n-1}
	\sqrt{x}	$1/2 \sqrt{x}$
	$1/x$	$-1/x^2$

7.3.4 Opérations sur les tangentes

$(u+v)'$ et $(ku)'$ fonctionne normalement.

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = -\frac{v'u - u'v}{v^2}$$

7.3.5 Utilisations de la tangente

Sens de variation de f

Si f dérivable sur $[I; J]$

x	I	J
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	\nearrow	\searrow

Extrema (et pas «*extremums*» bordel de merde)

Trouver le(s) x pour $f'(x) = 0$