Это решение дает по формулам (7.5) алгебру Ли L^3 операторов вида (4.1), допускаемых в данном случае уравнением (7.1), базис которой таков:

$$\zeta_1 = (0, 1, 0),\ \zeta_2 = (x, 2y, 0),\ \zeta_3 = (-4xy, -4y^2, (x^2 + 2y)z) \tag{8.3}$$

9. Классификационный результат. Окончательный результат групповой классификации параболических нормальных форм (7.1) уравнения второго порядка формулируется в следующей теореме.

Т е о р е м а. *Уравнение* (7.1) *допускает какой-либо оператор* (4.1), *если и только если оно равносильно уравнению этого вида с функцией H , не зависящей от одной из координат, x или y. Расширение основной алгебры Ли возможно, только если уравнение* (7.1) *равносильно такому же уравнению с функцией $H = mx^{-2}$ (m=const); последнее при $m \neq 0$ допускает алгебру Ли L^3операторов* (**??**), *а при $m = 0$ — алгебру Ли L^5, найденную в* 6.8.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предыдущего надо доказать только первую часть утверждения. Легко проверить, пользуясь формулой подобия векторных полей 1.16, что в случае преобразования, определяемого формулами (7.2), вектор $(\xi, \vartheta, \eta, \sigma)$ переходит в вектор $(\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\sigma}, \overline{z})$ с координатами

$$\overline{\xi} = a\xi + (a\prime x + b\prime)\eta,\ \overline{\eta} = a^2\eta,\ \overline{\sigma} = \sigma + \rho_x\xi + \rho_y\eta,$$

где $\rho = \frac{a'}{4a}x^2 + \frac{b'}{2a}x + c$. В силу равенств (7.5) это влечет преобразование функций φ, ψ, χ по формулам

$$\overline{\varphi} = a^2\varphi,\ \overline{\psi} = a\psi + 4b'\varphi,\ \overline{\chi} = \chi - \frac{b'}{2a}\psi - 4c'\varphi. \qquad (9.1)$$

Пусть уравнение (7.1) допускает ненулевой оператор (4.1) с функциями φ, ψ, χ. Если $\varphi \neq 0$, то можно выбрать функции a, b, c такими, что формулы (**??**) дадут $\overline{\varphi} = \text{const} \neq 0$, $\overline{\psi} = \overline{\chi} = 0$. В этом случае определяющее уравнение (7.6) после преобразования (7.2), (7.3) примет вид $4\overline{\varphi}\partial_{\overline{y}}\overline{H}$, откуда следует, что $\overline{H}$ не зависит от $\overline{y}$. Если же $\varphi = 0$, но $\psi \neq 0$, то с помощью (**??**) можно сделать $\overline{\psi} = \text{const} \neq 0$ и $\overline{\chi} = 0$ определяющее уравнение (7.6) после преобразования (7.2), (7.3) будет $\overline{\psi}\partial\overline{x}\overline{H} = 0$, т. е. $\overline{H}$ не зависит от x. Наконец, из (7.6) следует, что если $\varphi = \psi = 0$, то оператор (4.1) нулевой. ■

С л е д с т в и е. *Если уравнение* (7.1) *два линейно независимых оператора вида* (4.1), *то оно равносильно уравнению*

$$z_{11} = z_2 + mx^{-2}z.$$

§10. Уравнения пограничного слоя

1. Описание системы уравнений. Рассматриваются известные из гидродинамики уравнения двумерного нестационарного пограничного слоя (уравнения Прандтля), описывающие движения вязкой несжимаемой жидкости вблизи непроницаемой твердой поверхности при больших числах Рейнольдса. Эта система имеет тип $E(3,3,2,3)$ и будет описываться в индивидуальных обозначениях координат, прилитых и гидродинамике. Здесь $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R^3}(t,x,y)$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{R^3}(u,v,p)$, причем t — время, x,y — пространственные координаты, u,v — координаты вектора скорости и p — давление. Оператор дифференцирования отображений $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{P}$ записывается в виде $\partial = (\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_y,\ \partial_u,\ \partial_v,\ \partial_p)$ и для частных производных используются сокращенные обозначения с соответствующими индексами, например $\partial_t u = u_t$, $\partial_x u = u_x$, $\partial_y^2 u = u_{yy}$ и т. п.

Не нарушая общности рассмотрения, можно принять, что плотность жидкости и коэффициент вязкости равны единице. При этих соглашениях исследуемая система уравнений такова:

$$\left.\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + p_x = u_{yy}, \\ p_y = 0, \\ u_x + v_y = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

Давление p играет в этой системе особую роль. В силу второго уравнения p есть функция только от (t,x). В задачах гидродинамики эта функция часто может считаться заданной. В этом случае, если функцию $p_x = \theta(t, x)$ предположить известной, то система (**??**) станет системой типа $E(3, 2, 2, 2)$ и примет вид

$$\left.\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + \theta = u_{yy}, \\ u_x + v_y = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

В отличие от системы (**??**), здесь функция θ может рассматриваться в качестве произвольного элемента, в то время как система (**??**) произвольных элементов не содержит. Поэтому для этих систем уравнений задачи группового анализа различны: для системы (**??**) это просто задача вычисления ее основной группы (основной алгебры Ли операторов), а для системы (**??**) — задача групповой классификации по отношению к произвольному элементу $\theta : (t, x) \to \theta(t, x)$. Дальнейшее изложение и посвящено решению этих задач.

2. Предварительная информация об операторе. Для координат искомого оператора здесь целесообразно применить индивидуальные обозначения, в которых координата обозначается той же буквой, что и скалярная переменная, но со звездочкой наверху.