Kisakoodarin käsikirja

Antti Laaksonen

4. joulukuuta 2016

Sisältö

Osa I

Perusasiat

Osa II

Verkkoalgoritmit

Luku 20

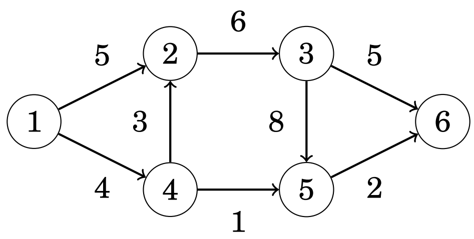
Virtauslaskenta

Virtauslaskennan keskeiset ongelmat ovat:

- ***Maksimivirtauksen etsiminen***: Kuinka paljon virtausta on mahdollista kuljettaa verkon alkusolmusta loppusolmuun kaaria pitkin?
- ***Maksimileikkauksen etsiminen***: Mikä on yhteispainoltaan pienin joukko kaaria, joiden poistaminen erottaa alkusolmun loppusolmusta?

Osoittautuu, että nämä ongelmat vastaavat toisiaan ja ne on mahdollista ratkaista samanaikaisesti toistensa avulla.

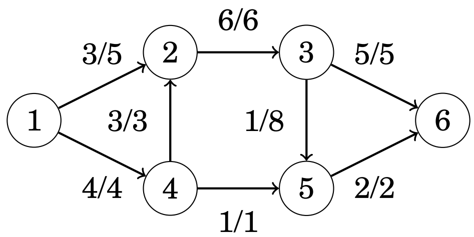
Oletamme, että annettuna on suunnattu, painotettu verkko, jossa on valittu tietty alkusolmu ja loppusolmu. Tarkastellaan esimerkkinä seuraavaa verkkoa, jossa solmu 1 on alkusolmu ja solmu 6 on loppusolmu:



Maksimivirtaus

Verkossa oleva ***virtaus*** lähtee liikkeelle alkusolmusta ja päätyy loppusolmuun. Kunkin kaaren paino on kapasiteetti, joka ilmaisee, kuinka paljon virtausta kaaren kautta voi kulkea. Kaikissa solmuissa alku- ja loppusolmua lukuun ottamatta tulevan ja lähtevän virtauksen on oltava yhtä suuri.

Maksimivirtaus on suurin mahdollinen virtaus verkossa. Esimerkkiverkossa maksimivirtauksen suuruus on 7:



Merkintä v/k kaaressa tarkoittaa, että kaaressa kulkee virtausta v ja kaaren kapasiteetti on k. Virtauksen suuruus on 7, koska alkusolmusta lähtevä virtaus on $3+4=7$ ja loppusolmuun saapuva virtaus on $5+2=7$.

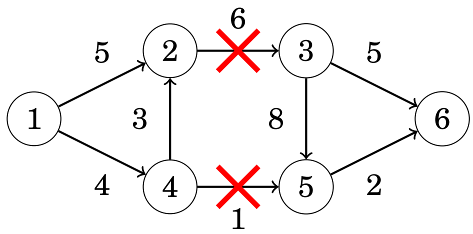
Huomaa, että jokaisessa välisolmussa tulevan ja lähtevän virtauksen määrä on sama. Esimerkiksi solmuun 2 tulee virtausta $3+3=6$ yksikköä solmuista 1 ja 4 ja siitä lähtee virtausta 6 yksikköä solmuun 3.

Virtaus 7 on verkon maksimivirtaus, koska verkon rakenteesta johtuen ei ole tapaa kuljettaa enempää virtausta verkossa.

Minimileikkaus

Leikkaus jakaa verkon solmut kahteen osaan niin, että alkusolmu ja loppusolmu ovat eri osissa. Leikkauksen paino on niiden kaarten yhteispaino, jotka kulkevat alkuosasta loppuosaan.

Minimileikkaus on leikkaus, jonka paino on pienin mahdollinen. Esimerkkiverkossa minimileikkaus on painoltaan 7:



Tässä leikkauksessa alkuosassa ovat solmut $\{1,2,4\}$ ja loppuosassa ovat solmut $\{3,5,6\}$. Alkuosasta loppuosaan kulkevat kaaret $2 \to 3$ ja $4 \to 5$, joiden yhteispaino on $6+1=7$.

Ei ole sattumaa, että yllä olevassa verkossa sekä maksimivirtauksen suuruus että minimileikkauksen paino on 7. Virtauslaskennan keskeinen tulos on, että verkon maksimivirtaus ja minimileikkaus ovat *aina* yhtä suuret, eli käsitteet kuvaavat saman asian kahta eri puolta.

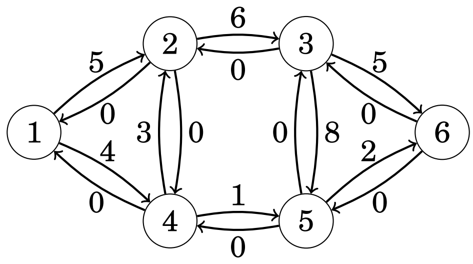
Seuraavaksi tutustumme Ford-Fulkersonin algoritmiin, jolla voi etsiä verkon maksimivirtauksen ja minimileikkauksen. Algoritmi auttaa myös ymmärtämään, *miksi* maksimivirtaus ja minimileikkaus ovat yhtä suuret.

20.1 Ford-Fulkersonin algoritmi

Ford-Fulkersonin algoritmi etsii verkon maksimivirtauksen. Algoritmin ideana on aloittaa tilanteesta, jossa virtaus on 0, ja etsiä sitten verkosta polkuja, jotka tuottavat siihen lisää virtausta. Kun mitään polkua ei enää pysty muodostamaan, maksimivirtaus on valmis.

Algoritmi käsittelee verkkoa muodossa, jossa jokaiselle kaarelle on vastakkaiseen suuntaan kulkeva pari. Kaaren paino kuvastaa, miten paljon lisää virtausta sen kautta pystyy vielä kulkemaan. Aluksi alkuperäisen verkon kaarilla on painona niiden kapasiteetti ja käänteisillä kaarilla on painona 0.

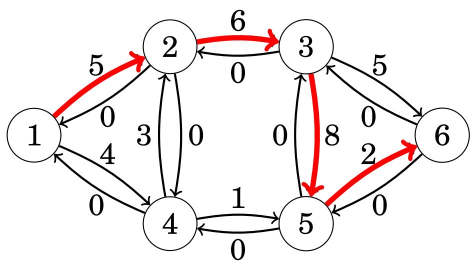
Esimerkkiverkosta syntyy seuraava verkko:



Algoritmin toiminta

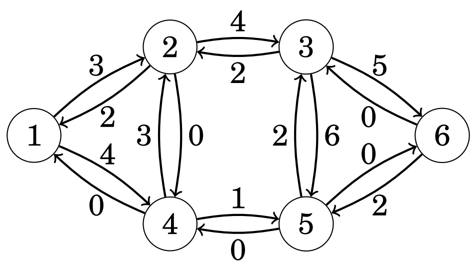
Ford-Fulkersonin algoritmi etsii verkosta joka vaiheessa polun, joka alkaa alkusolmusta, päättyy loppusolmuun ja jossa jokaisen kaaren paino on positiivinen. Jos vaihtoehtoja on useita, mikä tahansa valinta kelpaa.

Esimerkkiverkossa voimme valita vaikkapa seuraavan polun:



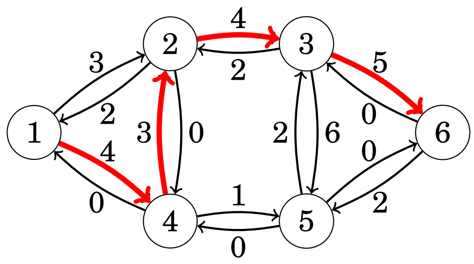
Polun valinnan jälkeen virtaus lisääntyy x yksikköä, jossa x on pienin kaaren kapasiteetti polulla. Samalla jokaisen polulla olevan kaaren kapasiteetti vähenee x:llä ja jokaisen käänteisen kaaren kapasiteetti kasvaa x:llä.

Yllä valitussa polussa kaarten kapasiteetit ovat 5, 6, 8 ja 2. Pienin kapasiteetti on 2, joten virtaus kasvaa 2:lla ja verkko muuttuu seuraavasti:



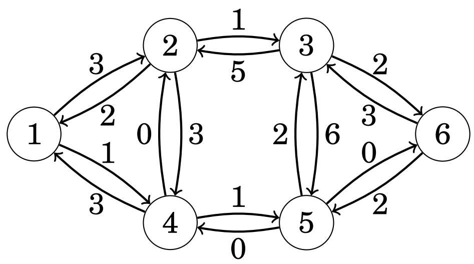
Muutoksessa on ideana, että virtauksen lisääminen vähentää polkuun kuuluvien kaarten kykyä välittää virtausta. Toisaalta virtausta on mahdollista peruuttaa myöhemmin käyttämällä käänteisiä kaaria, jos osoittautuu, että virtausta on järkevää reitittää verkossa toisella tavalla.

Algoritmi kasvattaa virtausta niin kauan, kuin verkossa on olemassa polku alkusolmusta loppusolmuun positiivisia kaaria pitkin. Tässä tapauksessa voimme valita seuraavan polun vaikkapa näin:

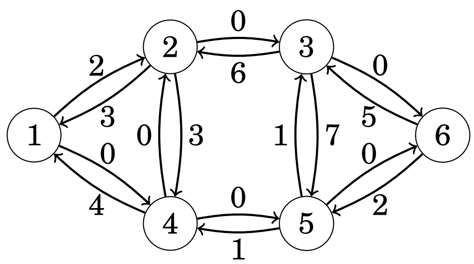


Tämän polun pienin kapasiteetti on 3, joten polku kasvattaa virtausta 3:lla ja kokonaisvirtaus polun käsittelyn jälkeen on 5.

Nyt verkko muuttuu seuraavasti:



Maksimivirtaus tulee valmiiksi lisäämällä virtausta vielä polkujen $1 \to 2 \to 3 \to 6$ ja $1 \to 4 \to 5 \to 3 \to 6$ avulla. Molemmat polut tuottavat 1 yksikön lisää virtausta, ja lopullinen verkko on seuraava:



Nyt virtausta ei pysty enää kasvattamaan, koska verkossa ei ole mitään polkua alkusolmusta loppusolmuun, jossa jokaisen kaaren paino olisi positiivinen. Niinpä algoritmi pysähtyy ja verkon maksimivirtaus on 7.

Polun valinta

Ford-Fulkersonin algoritmi ei ota kantaa siihen, millä tavoin virtausta kasvattava polku valitaan verkossa. Valintatavasta riippumatta algoritmi pysähtyy ja tuottaa maksimivirtauksen ennemmin tai myöhemmin, mutta polun valinnalla on vaikutusta algoritmin tehokkuuteen.

Yksinkertainen tapa on valita virtausta kasvattava polku syvyyshaulla. Tämä toimii usein hyvin, mutta pahin tapaus on, että jokainen polku kasvattaa virtausta vain 1:llä ja algoritmi toimii hitaasti. Seuraavaksi käymme läpi kaksi tapaa polun valintaan, jotka estävät tämän ilmiön.

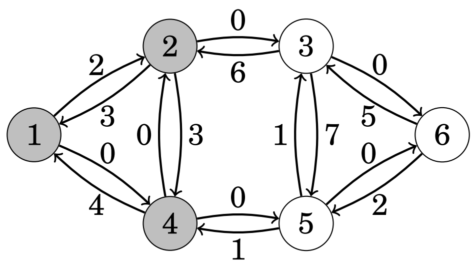
Edmonds-Karpin algoritmi on Ford-Fulkersonin algoritmin toteutus, jossa virtausta kasvattava polku valitaan aina niin, että siinä on mahdollisimman vähän kaaria. Tämä onnistuu etsimällä polku syvyyshaun sijasta leveyshaulla. Osoittautuu, että tämä varmistaa virtauksen kasvamisen nopeasti ja maksimivirtauksen etsiminen vie aikaa $O(m^2n)$.

Skaalaava algoritmi asettaa minimiarvon, joka on ensin alkusolmusta lähtevien kaarten kapasiteettien summa c. Joka vaiheessa verkosta etsitään syvyyshaulla polku, jonka jokaisen kaaren kapasiteetti on vähintään minimiarvo. Aina jos kelvollista polkua ei löydy, minimiarvo jaetaan 2:lla, kunnes lopuksi minimiarvo on 1. Algoritmin aikavaativuus on $O(m^2 \log c)$.

Käytännössä skaalaava algoritmi on mukavampi koodattava, koska siinä riittää etsiä polku syvyyshaulla. Molemmat algoritmit ovat yleensä aina riittävän nopeita ohjelmointikisoissa esiintyviin tehtäviin.

Minimileikkaus

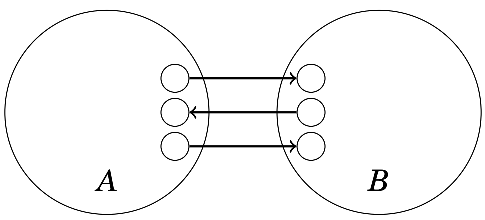
Osoittautuu, että kun Ford-Fulkersonin algoritmi on saanut valmiiksi maksimivirtauksen, se on tuottanut samalla minimileikkauksen. Olkoon A niiden solmujen joukko, joihin verkossa pääsee alkusolmusta positiivisia kaaria pitkin. Esimerkkiverkossa A sisältää solmut 1, 2 ja 4:



Nyt minimileikkauksen muodostavat ne alkuperäisen verkon kaaret, jotka kulkevat joukosta A joukon A ulkopuolelle ja joiden kapasiteetti on täysin käytetty maksimivirtauksessa. Tässä verkossa kyseiset kaaret ovat $2 \to 3$ ja $4 \to 5$, jotka tuottavat minimileikkauksen $6 + 1 = 7$.

Miksi sitten algoritmin tuottama virtaus ja leikkaus ovat varmasti maksimivirtaus ja minimileikkaus? Syynä tähän on, että virtauksen suuruus on *aina* enintään yhtä suuri kuin leikkauksen paino. Niinpä kun virtaus ja leikkaus ovat yhtä suuret, ne ovat varmasti maksimivirtaus ja minimileikkaus.

Tarkastellaan mitä tahansa verkon leikkausta, jossa alkusolmu kuuluu osaan A, loppusolmu kuuluu osaan B ja osien välillä kulkee kaaria:



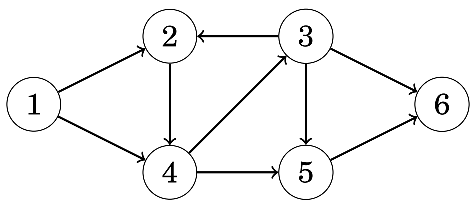
Leikkauksen paino on niiden kaarten painojen summa, jotka kulkevat osasta A osaan B. Tämä on yläraja sille, kuinka suuri verkossa oleva virtaus voi olla, koska virtauksen täytyy edetä osasta A osaan B. Niinpä maksimivirtaus on pienempi tai yhtä suuri kuin mikä tahansa verkon leikkaus.

Toisaalta Ford-Fulkersonin algoritmi tuottaa virtauksen, joka on tarkalleen yhtä suuri kuin verkossa oleva leikkaus. Niinpä tämän virtauksen on oltava maksimivirtaus ja vastaavasti leikkauksen on oltava minimileikkaus.

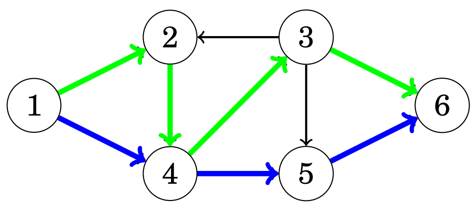
20.2 Rinnakkaiset polut

Ensimmäisenä virtauslaskennan sovelluksena tarkastelemme tehtävää, jossa tavoitteena on muodostaa mahdollisimman monta rinnakkaista polkua verkon alkusolmusta loppusolmuun. Vaatimuksena on, että jokainen verkon kaari esiintyy enintään yhdellä polulla.

Esimerkiksi verkossa

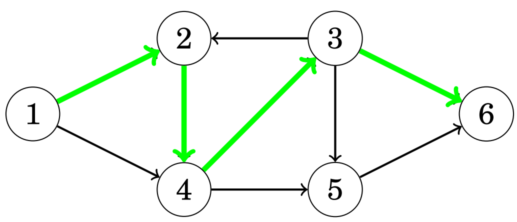


pystyy muodostamaan kaksi rinnakkaista polkua solmusta 1 solmuun 6. Tämä toteutuu valitsemalla polut $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 6$ ja $1 \to 4 \to 5 \to 6$:



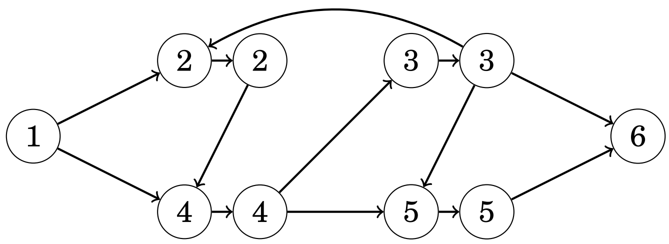
Osoittautuu, että suurin rinnakkaisten polkujen määrä on yhtä suuri kuin maksimivirtaus verkossa, jossa jokaisen kaaren kapasiteetti on 1. Kun maksimivirtaus on muodostettu, rinnakkaiset polut voi löytää ahneesti etsimällä alkusolmusta loppusolmuun kulkevia polkuja.

Tarkastellaan sitten tehtävän muunnelmaa, jossa jokainen solmu (alku- ja loppusolmuja lukuun ottamatta) saa esiintyä enintään yhdellä polulla. Tämän rajoituksen seurauksena äskeisessä verkossa voi muodostaa vain yhden polun, koska solmu 4 ei voi esiintyä monella polulla:

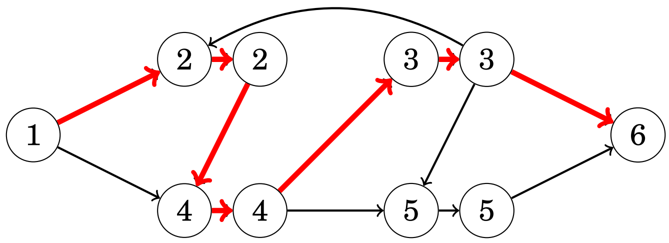


Tavallinen keino rajoittaa solmun kautta kulkevaa virtausta on jakaa solmu tulosolmuksi ja lähtösolmuksi. Kaikki solmuun tulevat kaaret saapuvat tulosolmuun ja kaikki solmusta lähtevät kaaret poistuvat lähtösolmusta. Lisäksi tulosolmusta lähtösolmuun on kaari, jossa on haluttu kapasiteetti.

Tässä tapauksessa verkosta tulee seuraava:



Tämän verkon maksimivirtaus on:



Tämä tarkoittaa, että verkossa on mahdollista muodostaa vain yksi polku alkusolmusta lähtösolmuun, kun sama solmu ei saa esiintyä monessa polussa.

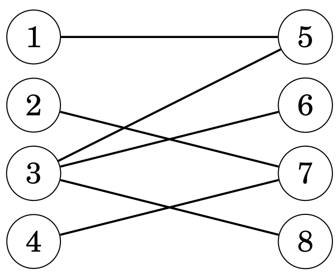
20.3 Maksimiparitus

Verkossa oleva ***paritus*** on kokoelma kaaria, jotka on valittu niin, että jokainen verkon solmu esiintyy enintään yhden paritukseen kuuluvan kaaren päätesolmuna. ***Maksimiparitus*** on puolestaan paritus, jossa parien määrä on mahdollisimman suuri.

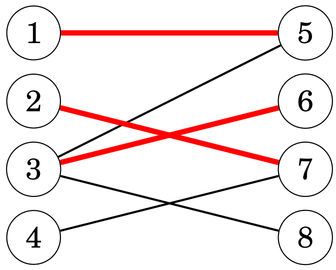
Maksimiparituksen etsimiseen yleisessä verkossa on olemassa polynominen algoritmi, mutta se on hyvin monimutkainen. Tässä luvussa keskitymmekin tilanteeseen, jossa verkko on kaksijakoinen. Tällöin maksimiparituksen pystyy etsimään helposti virtauslaskennan avulla.

Maksimiparituksen etsiminen

Kaksijakoinen verkko voidaan esittää aina niin, että kukin verkon solmu on vasemmalla tai oikealle puolella ja kaikki verkon kaaret kulkevat puolten välillä. Tarkastellaan esimerkkinä seuraavaa verkkoa:

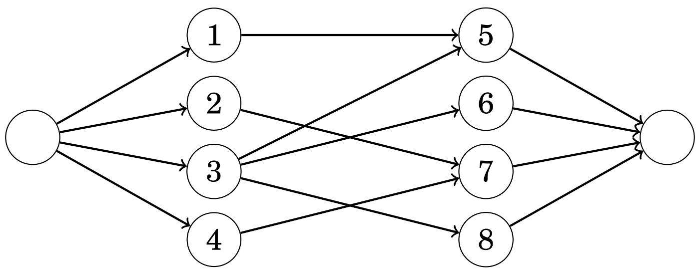


Tässä verkossa maksimiparituksen koko on 3:



Kaksijakoisen verkon maksimiparitus vastaa aina maksimivirtausta verkossa, johon on lisätty alkusolmu ja loppusolmu. Alkusolmusta on kaari jokaiseen vasemman puolen solmuun, ja vastaavasti loppusolmuun on kaari jokaisesta oikean puolen solmusta. Jokaisen kaaren kapasiteettina on 1.

Esimerkissä tuloksena on seuraava verkko:



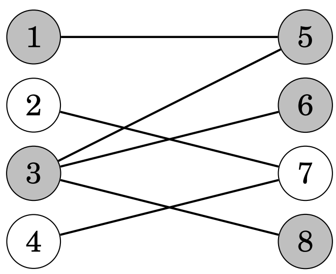
Tämän verkon maksimivirtaus on yhtä suuri kuin alkuperäisen verkon maksimiparitus, koska virtaus muodostuu joukosta polkuja alkusolmusta loppusolmuun ja jokainen polku ottaa mukaan uuden kaaren paritukseen. Tässä tapauksessa maksimivirtaus on 3, joten maksimiparitus on myös 3.

Hallin lause

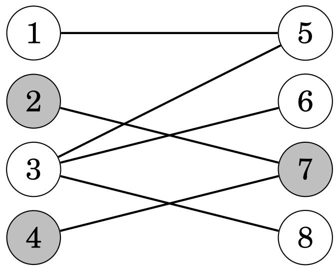
Hallin lause antaa ehdon, milloin kaksijakoiseen verkkoon voidaan muodostaa paritus, joka sisältää kaikki toisen puolen solmut. Jos kummallakin puolella on yhtä monta solmua, Hallin lause kertoo, voidaanko muodostaa ***täydellinen paritus***, jossa kaikki solmut paritetaan keskenään.

Oletetaan, että haluamme muodostaa parituksen, johon kuuluvat kaikki vasemman puolen solmut. Olkoon X jokin joukko vasemman puolen solmuja ja joukko $f(X)$ ne oikean puolen solmut, jotka ovat yhteydessä joukon X solmuihin. Hallin lauseen mukaan paritus on mahdollinen tarkalleen silloin, kun mille tahansa joukolle X pätee $|X| \le |f(X)|$.

Tarkastellaan Hallin lauseen merkitystä esimerkkiverkossa. Valitaan ensin $X = \{1,3\}$, jolloin $f(X) = \{5,6,8\}$:



Tämä täyttää Hallin lauseen ehdon, koska $|X| = 2$ ja $|f(X)| = 3$. Valitaan sitten $X = \{2,4\}$, jolloin $f(X) = \{7\}$:



Tässä tapauksessa $|X| = 2$ ja $|f(X)| = 1$, joten Hallin lauseen ehto ei pidä paikkaansa. Tämä tarkoittaa, että ei ole mahdollista muodostaa paritusta, jossa ovat mukana kaikki vasemman puolen solmut (eli täydellistä paritusta). Tämä on odotettu tulos, koska verkon maksimiparitus on 3 eikä 4.

Jos Hallin lauseen ehto ei päde, osajoukko X kertoo syyn sille, miksi paritusta ei voi muodostaa. Koska X sisältää enemmän solmuja kuin $f(X)$, kaikille X:n solmuille ei riitä paria oikealta. Esimerkiksi yllä molemmat solmut 2 ja 4 tulisi yhdistää solmuun 7, mutta tämä ei ole mahdollista.

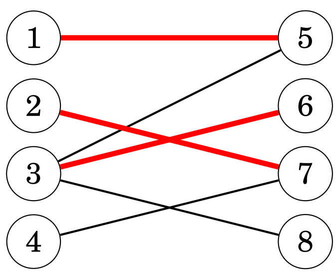
Kőnigin lause

Kőnigin lause tuo yhteyden maksimiparituksen ja solmupeitteen välille. ***Solmupeite*** on sellainen joukko verkon solmuja, että jokaisen verkon kaaresta ainakin toinen kaaren päätesolmuista kuuluu joukkoon. ***Riippumaton joukko*** on taas joukko verkon solmuja, jossa minkään solmuparin välillä ei ole kaarta.

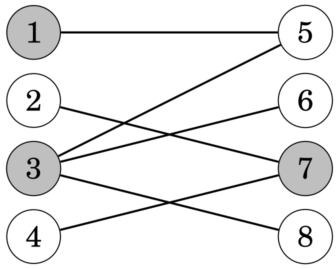
Jokaista verkon solmupeitettä vastaa riippumaton joukko, joka muodostuu niistä solmuista, jotka eivät kuulu solmupeitteeseen. Niinpä jos verkossa on solmupeite, jossa on x solmua, niin siinä on myös riippumaton joukko, jossa on $n-x$ solmua. Vastaava riippuvuus pätee myös toiseen suuntaan.

Yleisessä verkossa pienimmän solmupeitteen ja suurimman riippumattoman joukon etsiminen ovat NP-vaikeita ongelmia. Kuitenkin kaksijakoisessa verkossa ongelmat ratkeavat tehokkaasti, koska Kőnigin lauseen nojalla pienin solmupeite on yhtä suurin kuin maksimiparitus.

Esimerkiksi seuraavan verkon maksimiparituksen koko on 3:

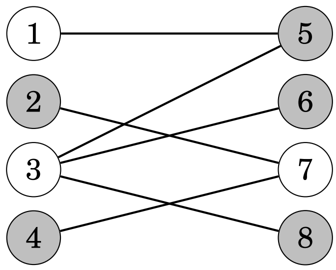


Niinpä myös pienimmän solmupeitteen koko on 3. Solmupeite voidaan muodostaa valitsemalla siihen solmut $\{1,3,7\}$:



Pienin solmupeite muodostuu aina niin, että jokaisesta maksimiparituksen kaaresta toinen kaaren päätesolmuista kuuluu peitteeseen.

Pienimmästä solmupeitteestä saadaan suurin riippumaton joukko valitsemalla kaikki solmut, jotka eivät kuulu peitteeseen. Esimerkiksi yllä olevassa verkossa suurin riippumaton joukko on seuraava:



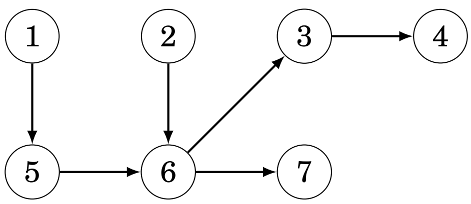
20.4 Polkupeitteet

Polkupeite on joukko verkon polkuja, joka on muodostettu niin, että jokainen verkon solmu kuuluu ainakin yhteen polkuun. Seuraavaksi näemme, miten virtauslaskennan avulla voi etsiä pienimmän polkupeitteen suunnatussa, syklittömässä verkossa.

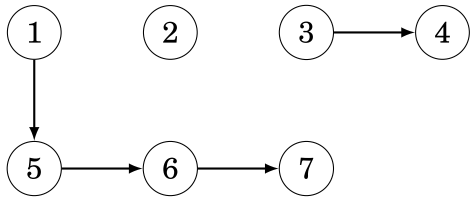
Polkupeitteestä on kaksi muunnelmaa: ***Solmuerillinen peite*** on polkupeite, jossa jokainen verkon solmu esiintyy tasan yhdessä polussa. ***Yleinen peite*** taas on polkupeite, jossa sama solmu voi esiintyä useammassa polussa. Kummassakin tapauksessa pienin polkupeite löytyy samanlaisella idealla.

Solmuerillinen peite

Tarkastellaan esimerkkinä seuraavaa verkkoa:



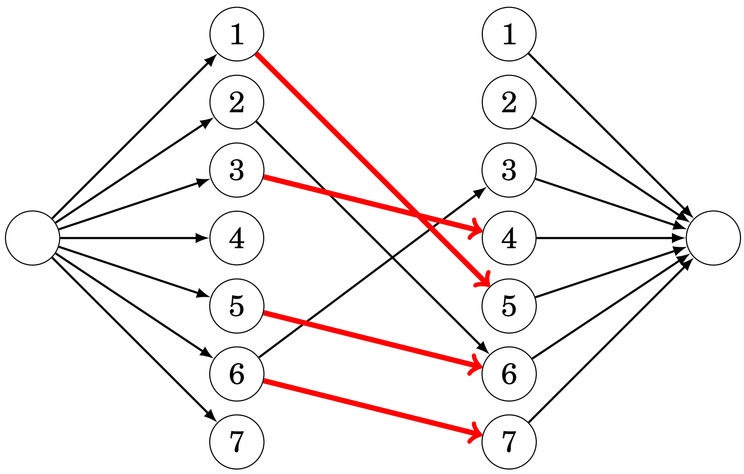
Tässä tapauksessa pienin solmuerillinen polkupeite muodostuu kolmesta polusta. Voimme valita polut esimerkiksi seuraavasti:



Huomaa, että yksi poluista sisältää vain solmun 2, eli on sallittua, että polussa ei ole kaaria.

Polkupeitteen etsiminen voidaan tulkita paritusongelmana verkossa, jossa jokaista alkuperäisen verkon solmua vastaa kaksi solmua: vasen ja oikea solmu. Vasemmasta solmusta oikeaan solmuun on kaari, jos tällainen kaari esiintyy alkuperäisessä verkossa. Ideana on, että paritus määrittää, mitkä solmut ovat yhteydessä toisiinsa poluissa.

Esimerkkiverkossa tilanne on seuraava:

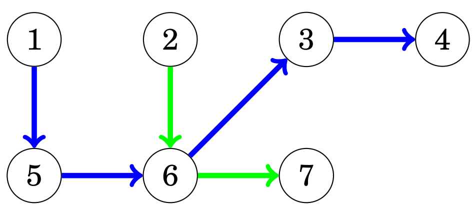


Tässä tapauksessa maksimiparitukseen kuuluu neljä kaarta, jotka vastaavat alkuperäisen verkon kaaria $1 \to 5$, $3 \to 4$, $5 \to 6$ ja $6 \to 7$. Niinpä pienin solmuerillinen polkupeite syntyy muodostamalla polut kyseisten kaarten avulla.

Pienimmän polkupeitteen koko on $n-c$, jossa n on verkon solmujen määrä ja c on maksimiparituksen kaarten määrä. Esimerkiksi yllä olevassa verkossa pienimmän polkupeitteen koko on $7-4=3$.

Yleinen peite

Yleisessä polkupeitteessä sama solmu voi kuulua moneen polkuun, minkä ansiosta tarvittava polkujen määrä saattaa olla pienempi. Esimerkkiverkossa pienin yleinen polkupeite muodostuu kahdesta polusta seuraavasti:



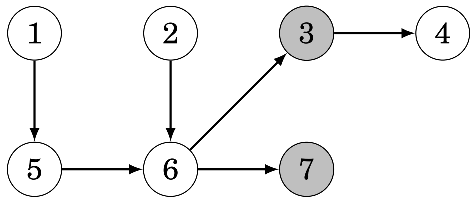
Tässä verkossä yleisessä polkupeitteessä on 2 polkua, kun taas solmuerillisessä polkupeitteessä on 3 polkua. Erona on, että yleisessä polkupeitteessä solmua 6 käytetään kahdessa polussa.

Yleisen polkupeitteen voi löytää lähes samalla tavalla kuin solmuerillisen polkupeitteen. Riittää täydentää maksimiparituksen verkkoa niin, että siinä on kaari $a \to b$ aina silloin, kun alkuperäisessä verkossa solmusta a pääsee solmuun b (mahdollisesti usean kaaren kautta).

Dilworthin lause

Dilworthin lauseen mukaan suunnatun, syklittömän verkon pienin yleinen polkupeite on yhtä suuri kuin suurin mahdollinen kokoelma solmuja, jossa minkään kahden solmun välillä ei ole polkua.

Esimerkiksi äskeisessä verkossa pienin yleinen polkupeite sisältää kaksi polkua. Niinpä verkosta voidaan valita enintään kaksi solmua niin, että minkään solmujen välillä ei ole polkua. Vaihtoehtoja valintaan on monia: voimme valita esimerkiksi solmut 3 ja 7:



Verkossa ei ole polkua solmusta 3 solmuun 7 eikä polkua solmusta 7 solmuun 3, joten valinta on kelvollinen. Toisaalta jos verkosta valitaan mitkä tahansa kolme solmua, jostain solmusta toiseen on polku.

Osa III

Lisäaiheita

Hakemisto