Universidad Rafael Landívar
Facultad de Ingeniería
Ingeniería en Informática y Sistemas
Matemática Discreta II
Ing. David Wong

Proyecto de aplicación

Lester García 1003115
Yoshimi Mishima 2032014
Yazmine Sierra 1174916
José Valladares 1023815

Guatemala, 2 de diciembre del 2016

Introducción

Nos proponemos ahora introducir los conceptos básicos de la Teoría de Grafos y algunos de sus resultados más importantes en grafos finitos, es decir, aquellos con una cantidad finita de vértices dentro de la matemática. Matemática discreta se define como una de las áreas de la matemática que se encarga del estudio de los conjuntos discretos, esta es fundamental para la computación ya que estos conjuntos antes mencionados sirven para las funciones a utilizar dentro de estos.

En este proyecto se podrá observar una pequeña demostración acerca los grafos isomorfos, los cuales al ser verdaderas las propiedades para que se cumpla esta condición, se obtendrá una función.

Los grafos son una herramienta que permiten modelizar relaciones de esta naturaleza, de modo que se puedan resolver problemas asociados a esas circunstancias, frecuentemente de forma menos costosa que utilizando otras técnicas como la programación lineal.

Una buena comprensión de la teoría de grafos pasa por dominar la nomenclatura y conceptos asociados a estas representaciones de relaciones entre elementos, así como sus diversas formas de representación tanto gráfica como escrita y codificada.

Marco teórico

La Teoría de Grafos juega un papel importante en la fundamentación matemática de las Ciencias de la Computación. Los grafos constituyen una herramienta básica para modelar fenómenos discretos y son fundamentales para la comprensión de las estructuras de datos y el análisis de algoritmos. En matemáticas y ciencias de la computación, la teoría de grafos estudia las propiedades de los grafos, que son colecciones de objetos llamados vértices (o nodos) conectados por líneas llamadas aristas (o arcos) que pueden tener orientación (dirección asignada). Comúnmente, un grafo está diseñado por una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).

El trabajo de Leonhard Euler, en 1736, sobre el problema de los puentes de Königsberg es considerado como uno de los primeros resultados de la teoría de grafos. También se considera uno de los primeros resultados topológicos en geometría (que no depende de ninguna medida). Este ejemplo ilustra la profunda relación entre la teoría de grafos y la topología.

En 1845 Gustav Kirchhoff publicó sus leyes de los circuitos para calcular el voltaje y la corriente en los circuitos eléctricos. En 1852 Francis Guthrie planteó el problema de los cuatro colores que plantea si es posible, utilizando solamente cuatro colores, colorear cualquier mapa de países de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color. Este problema, que no fue resuelto hasta un siglo después por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, puede ser considerado como el nacimiento de la teoría de grafos. Al tratar de resolverlo, los matemáticos definieron términos y conceptos teóricos fundamentales de los grafos.

Grafos

Es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto. Son objeto de estudio de la teoría de grafos.

Los grafos permiten estudiar las interrelaciones entre unidades que interactúan unas con otras. Por ejemplo, una red de computadoras puede representarse y estudiarse mediante un grafo, en el cual los vértices representan terminales y las aristas representan conexiones (las cuales, a su vez, pueden ser cables o conexiones inalámbricas).

Se tiene entonces que un grafo es conexo si el conjunto cociente por la relación que acabamos de definir tiene un solo elemento.

A partir de esta relación, podemos considerar, para cada clase de equivalencia, el sub-grafo (completo) determinado por los vértices de dicha clase de equivalencia. Cada uno de estos grafos es lo que se denomina una componente conexa de G.

Caracterización de Grafos

Grafos Simples:

Un grafo es simple si a lo más sólo 1 arista une dos vértices cualesquiera. Esto es equivalente a decir que una arista cualquiera es el único que une dos vértices específicos. Un grafo que no es simple se denomina complejo.

Grafos Conexos:

Un grafo es conexo si todos sus vértices están conectados por un camino; es decir, si para cualquier par de vértices (a, b), existe al menos un camino posible desde a hacia b. Es posible determinar si un grafo es fuertemente conexo coleccionando la información de los grados de sus vértices al tiempo que se acumulan las diferentes rutas que salen de un vértice o llegan a él. En términos matemáticos la propiedad de un grafo de ser fuertemente conexo permite establecer en base a él una relación de equivalencia para sus vértices, la cual lleva a una partición de éstos en "componentes fuertemente conexos", es decir, porciones del grafo, que son fuertemente conexas cuando se consideran como grafos aislados. Esta propiedad es importante para muchas demostraciones en teoría de grafos.

Grafos Completos:

Un grafo simple es completo si existen aristas uniendo todos los pares posibles de vértices. Es decir, todo par de vértices (a, b) debe tener una arista e que los une.

El conjunto de los grafos completos es denominado usualmente, siendo el grafo completo de n vértices. Un Kn, es decir, grafo completo de n vértices tiene exactamente aristas. La representación gráfica de los Kn como los vértices de un polígono regular da cuenta de su peculiar estructura.

Grafos Bipartitos:

Un grafo G es bipartito si puede expresarse como G = {V1 + V2, A} (es decir, la unión de dos grupos de vértices), bajo las siguientes condiciones:

• V1 y V2 son distintos y tienen más de un elemento cada uno.

• Una arista en A une un vértice de V1 con uno de V2.

• No existen aristas uniendo dos elementos de V1; análogamente para V2.

Bajo estas condiciones, el grafo se considera bipartito, y puede describirse informalmente como el grafo que une o relaciona dos conjuntos de elementos diferentes, como aquellos resultantes de los ejercicios y puzzles en los que debe unirse un elemento de la columna A con un elemento de la columna B.

Grafos Isomorfos:

Se puede decir que dos grafos son isomorfos si existe una correspondencia uno a uno entre los vértices de los grafos tal que para todo par de vértices que son adyacentes en un grafo si y sólo si el correspondiente par de vértices son adyacentes en el otro grafo. Al diseñar una red de ordenadores y los enlaces entre ellos podemos representarlo en un dibujo, donde los puntos hacen alusión a los ordenadores y unas líneas que los unen representando los nexos entre ellos.

La gran cantidad de aplicaciones de los grafos en Matemáticas y otras disciplinas, es la causa por la que la Teoría de Grafos es una de las partes de las Matemáticas que más se ha desarrollado en las últimas décadas. Los problemas clásicos como el de los siete puentes de Königsberg o el de la coloración de un mapa, y otros problemas de redes de comunicación, de emparejamiento, vigilancia o diseño de circuitos integrados son sólo otros ejemplos de aplicación de los grafos.

Conviene hacer notar que las definiciones que se dan en diferentes textos pueden no coincidir, razón por la que es posible que las definiciones dadas a continuación puedan diferir de las que se puedan encontrar en otras fuentes.

Dos grafos tendrán la misma “forma matemática” cuando la única diferencia entre ambos, en cuanto a su estructura, sea la representación gráfica de sus vértices y aristas. Cuando las conexiones entre vértices tengan las mismas aristas, se dice que son homorfos.

Un grafo puede existir en diferentes formas que tienen el mismo número de vértices, aristas, y también la misma conectividad borde. Tales gráficos se denominan gráficos isomorfos. Tenga en cuenta que etiquetar los gráficos en este capítulo principalmente con el propósito de referirse a ellos y reconocer a unos de otros.

Definición 1. Un grafo es un par G = (V, A) siendo V un conjunto no vacío, a cuyos elementos llamaremos vértices, y A es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos, a los que llamaremos aristas.

Definición 2. Se dice que dos vértices de un grafo a y b son adyacentes si {a, b} ∈ A, es decir, están unidos por una arista. En ese caso, decimos que a y b son los extremos de la arista {a, b}

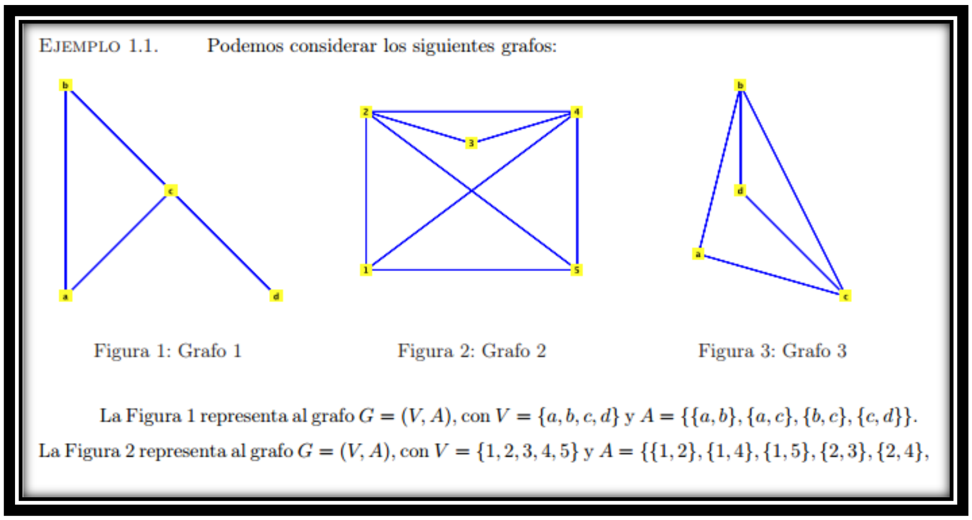

EJEMPLO 1.1. Podemos considerar los siguientes grafos:

Figura 1: Grafo 1 Figura 2: Grafo 2 Figura 3: Grafo 3

La Figura 1 representa al grafo $G = (V, A)$, con $V = \{a, b, c, d\}$ y $A = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$. La Figura 2 representa al grafo $G = (V, A)$, con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$

Como se indicó en los grafos de las figuras 1 y 3, que repetimos a continuación, representan el mismo grafo. Es posible trasladar los vértices de uno de ellos hasta hacerlos coincidir con los del otro, sin crear nuevas aristas y deformando unas en otras. Para que esto pueda ocurrir el no de vértices, y aristas, de cada grafo debe ser el mismo y el hecho de deformar sin ruptura las aristas indica que se conserva la adyacencia entre vértices.

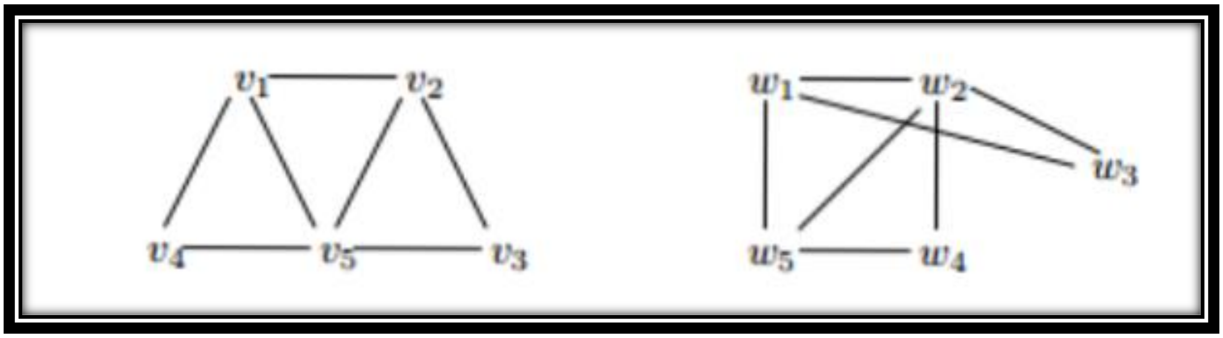
Un isomorfismo entre dos grafos G1 = (V1, A1) y G2 = (V2, A2) es una aplicación biyectiva entre los conjuntos de vértices que preserva la adyacencia. Es decir, es una aplicación biyectiva f: V1 → V2 para la que se verifica que {a, b} es una arista de G1 si y solo si {f(a), f(b)} es una arista de G2.

- Dos grafos son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos.

Primer teorema de la Teoría de Grafos:

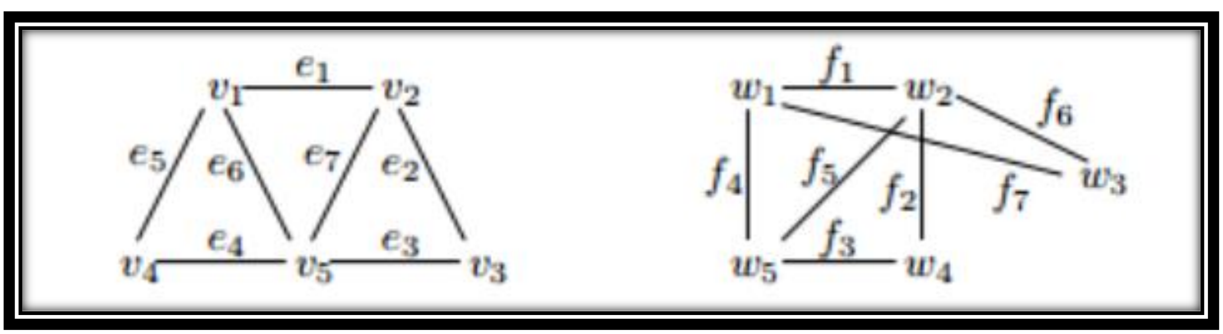
Teorema 4.1 (Primer teorema de la teoría de Grafos). Si G = (V, A) es un grafo, con V = {v1, v2, ..., vn} el conjunto de sus vértices. Denotemos por Card(A) el número de aristas de G. Entonces: gr(v1) + gr(v2) + ... + gr(vn) = 2 · Card(A). Por lo que existe un número par de vértices de grado impar.

Entonces, al sumar t números impares obtenemos un número par, lo cual es posible sólo si el número de sumandos es par. En conclusión, t es par.



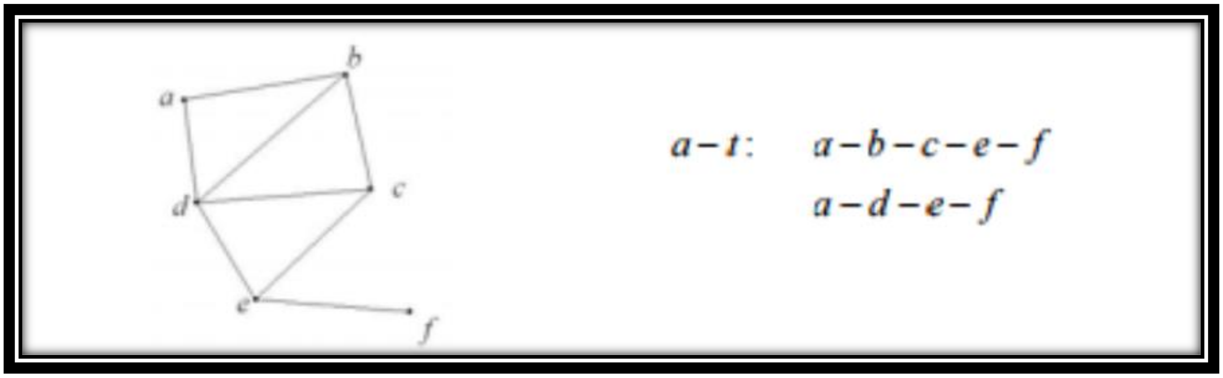
En una primera observación apreciamos dos grafos diferentes. Sin embargo, si profundizamos algo más encontramos muchas semejanzas entre ellos. Por ejemplo, ambos tienen igual número de vértices e igual número de lados. Existe un vértice en cada uno de ellos (v5 en el primero y w2 en el segundo) que está unidos al resto de vértices.

Siguiendo en esta línea, vemos que podemos renombrar los vértices del segundo grafo w1 7→ v 0 1, w2 7→ v 0 5, w3 7→ v 0 4, w4 7→ v 0 3 y w5 7→ v 0 2, y tenemos que por cada lado que une dos vértices vi y vj en el primer grafo tenemos un lado que une los vértices v 0 i y v 0 j en el segundo.



Entonces, lo que tenemos son dos biyecciones hV : VG → VG0 y hE : EG → EG0 , que en este caso serían: hV hE v1 7→ w1 e1 7→ f4 v2 7→ w5 e2 7→ f3 v3 7→ w4 e3 7→ f2 v4 7→ w3 e4 7→ f6 v5 7→ w2 e5 7→ f7 e6 7→ f1 e7 7→ f5 verificando que si γG(e) = {u, v} entonces γG0 (hE(e)) = {hV (u), hV (v)}. Nótese que, en este caso, la aplicación hV determina totalmente a la aplicación hE.

Camino:



Camino cerrado:

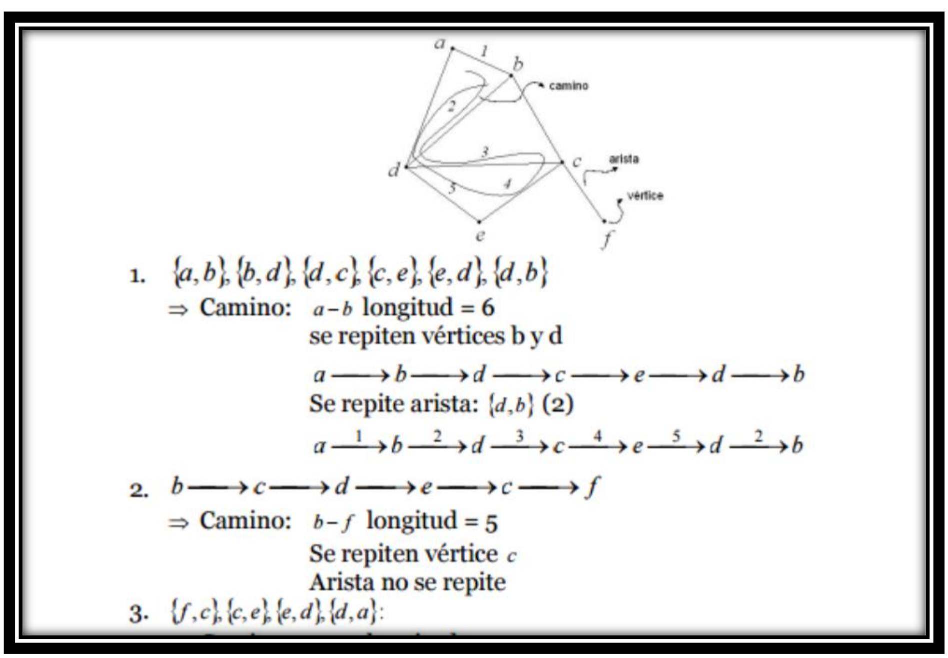
Cualquier camino x - y donde x = y; esto es, inicia y termina en el mismo nodo

a-a a-b-d-a

a-b-c-d-a

Camino abierto;

Cuando x ≠ y, inicia y termina en vértices diferentes.



1. $\{a,b\},\{b,d\},\{d,c\},\{c,e\},\{e,d\},\{d,b\}$
   ⇒ Camino: $a-b$ longitud = 6
   se repiten vértices b y d
   $a \longrightarrow b \longrightarrow d \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow d \longrightarrow b$
   Se repite arista: $\{d,b\}$ (2)
   $a \xrightarrow{1} b \xrightarrow{2} d \xrightarrow{3} c \xrightarrow{4} e \xrightarrow{5} d \xrightarrow{2} b$
2. $b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow c \longrightarrow f$
   ⇒ Camino: $b-f$ longitud = 5
   Se repiten vértice c
   Arista no se repite
3. $\{f,c\},\{c,e\},\{e,d\},\{d,a\}$:

$\Rightarrow$ Camino: $f-a$ longitud = 4

No repite vértice

No repite arista

* Como no es dirigido

Camino $a-b$ también camino $b-a$

Camino $b-f$ también camino $f-b$

Camino $f-a$ también camino $a-f$

4. $\{b,c\},\{c,d\},\{d,c\}$

Camino: $b-b$ cerrado: $x-x$ $b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow b$

Camino: repite arista $x-y$ repite vértices

Camino cerrado: repite a y v: $x-x$

<u>Recorrido: no repite arista</u>: $(b-d)$

$b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow c$

$f-a: f \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow d \longrightarrow a$

<u>Recorrido cerrado:</u> b-b: x-x

Circuito = recorrido cerrado (no repite aristas y llega al mismo vértice)

Ejemplo: {a, b}, {b, c}, {c, e}, {e, d}, {d, a}

$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow a$: camino a –a

recorrido a- a

cerrado a – a

longitud = 5

Camino simple: no repite vértice: no se repite vértice

$f-a: f \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow d \longrightarrow a$

$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow e : a-e$

Camino simple cerrado: no repite vértices y lleva al mismo lado. $x-x$

Información general acerca de los tipos de grafos:

	Repite Vértices	Repite Aristas	Abierto	Cerrado
Camino	Si	Si	X	
Camino cerrado	Si	Si		X
Recorrido	Si	No	X	
Circuito	Si	No		X
Camino simple	No	No	X	
Ciclo	No	No		X

Conclusiones

- Los grafos son utilizados en redes de computadoras, ya que la lógica utilizada es similar a una escritura a mano de cualquier tipo de grafo.

- Se puede concluir en general, no es fácil determinar cuándo dos grafos son isomorfos o no lo son. Notoriamente, si dos grafos son isomorfos deben tener igual número de vértices e igual número de lados.

- Dos grafos isomorfos pueden ser verificables por medio de algún proceso manual o codificado siempre y cuando cumplan con las propiedades de dos grafos isomorfos.

Recomendaciones

- Se recomienda no empezar con la realización de los trabajos o tareas a última hora debido al tiempo y el contenido extenso y de difícil compresión como lo fue en ese pequeño proyecto de aplicación de grafos.

- Es necesario tener conocimientos previos y manejo parcial o total de los temas relacionados con las matemáticas discreta y las ciencias de la computación, en especial el tema de grafos.

Referencias

1) Jesús García Miranda. Introducción a la teoría de los grafos, de Universidad de Granada Sitio web: http://www.ugr.es/~jesusgm/Curso%202005-2006/Matematica%20Discreta/Grafos.pdf

2) Campus Cuernavaca. (2008). Teoría de Grafos, de Tecnológico de Monterrey Sitio web: http://campus.cva.itesm.mx/nazira/Tc1003/PDF/TODO/0701_Tc1003_TODO_Grafos.pdf