Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Prof. Miguel Walker Ureña

Dpto. Matemática Aplicada
MA-294: Cálculo para computación 2
Ciclo 2-2015

Tema 2. Integrales Impropias

`[ versión 1.0 , compilado el 21/7/2016 ]`

Contenidos

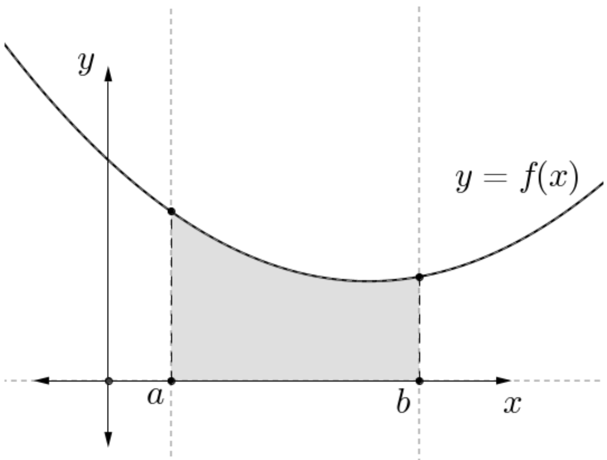
1 Integrales Impropias Elementales

1.1 Integrales Propias

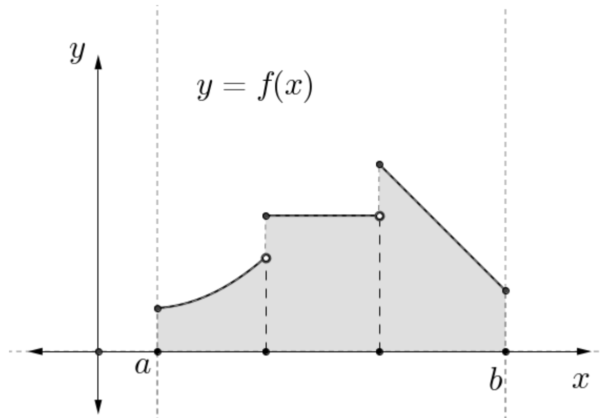
Notas 1.1 (Integral Propia)**.** Recordemos que

1. Una integral de la forma
$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$
es llamada **integral propia** si a y b son números finitos y si la función $f(x)$ está definida, es acotada y es continua o continua a trozos en el intervalo $[a,b]$.

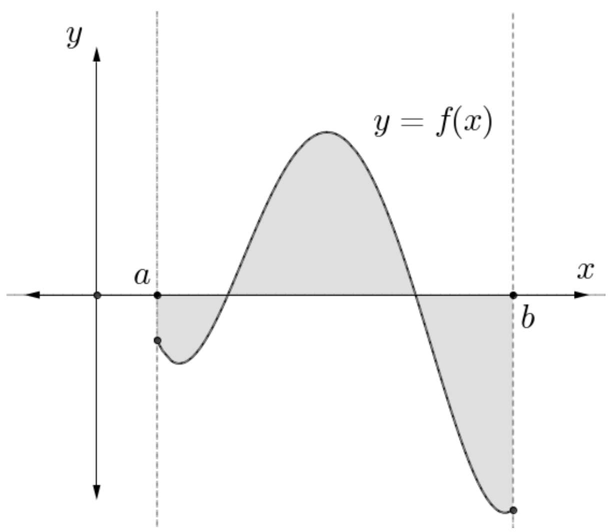
☐ Función acotada y continua:



☐ Función acotada y continua a trozos:



2. Cuando una integral I es propia, el valor numérico de I existe y es finito, interpretado geométricamente como el área entre la curva generada por f y el eje-x, siendo área negativa para los valores bajo la línea horizontal $y = 0$.



3. `[Segundo Teorema Fundamental del Cálculo]`
Si para todo $x \in [a,b]$, existe $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ y $f(x)$ continua a trozos y acotada en $[a,b]$ entonces
$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

4. `[Aditividad]` Si $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots \mathcal{I}_m$ son intervalos tales que

$$[a,b] = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \ldots \mathcal{I}_m = \bigcup_{n=1}^{m} \mathcal{I}_n$$

entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\mathcal{I}_1} f(x)\,dx + \int_{\mathcal{I}_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{\mathcal{I}_m} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{m} \int_{\mathcal{I}_n} f(x)\,dx$$

donde

$$\int_{\mathcal{I}_n} f(x)\,dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx \qquad \text{si } \mathcal{I}_n = [x_n, x_{n+1}]$$

5. La fórmula anterior se debe usar para calcular I cuando $f(x)$ es continua a trozos en $[a,b]$ de manera tal que $f(x)$ es continua y acotada dentro de los intervalos $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots \mathcal{I}_m$.

Nota 1.2 (Discontinuidad Evitable)**.**
Sea $a \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f(x)$ una función continua en el conjunto $\mathcal{D} \setminus \{a\} = \{x \in \mathcal{D} / x \neq a\}$.
Se dice que $f(x)$ posee una **Discontinuidad Evitable** en el punto $x = a$, si existe y es finito el límite

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

En tal caso, la función

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ si } x \neq a \\ L & , \text{ si } x = a \end{cases}$$

es una función continua y acotada en el conjunto $\mathcal{D}$.
En tal caso consideraremos a la integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \hat{f}(x)\,dx$$

como una integral propia, y como consecuencia el valor numérico de I existe y es finito.

Ejemplo 1.1. En la integral

$$I = \int_0^2 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

el integrando $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$, es discontinua en el punto $x = 0$, pero

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} = 0$$

existe y es finito, por lo que la discontinuidad en $x = 0$ es evitable por la derecha.
(Por la izquierda la función se indefine)
Como consecuencia podemos considerar esta integral como **propia** pues la discontinuidad es evitable y como consecuencia $f(x)$ es acotada en el intervalo de integración.
En este caso, integrando por partes

$$\begin{aligned} I &= 2\sqrt{x}\,\ln(1+x)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx \\ &= 2\sqrt{2}\,\ln(3) - 4\int_0^{\sqrt{2}} \frac{u^2}{1+u^2}\,du \quad \text{, al hacer } x = u^2 \end{aligned}$$

Como

$$\frac{u^2}{1+u^2} = \frac{1+u^2-1}{1+u^2} = 1 - \frac{1}{1+u^2}$$

entonces

$$\begin{aligned} I &= 2\sqrt{2}\,\ln(3) - 4u\Big|_0^{\sqrt{2}} + 4\arctan(u)\Big|_0^{\sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{2}\,\ln(3) - 4\sqrt{2} + 4\,\arctan\left(\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

□

Nota 1.3. En algunas ocasiones, nos encontraremos funciones $f(x)$ que no poseen primitiva elemental, pero que son continuas a trozos y acotadas en el intervalo de integración.

En estos casos podemos asegurar que el valor numérico de la integral existe y es finito.

Ejemplo 1.2. En la integral

$$I = \int_0^{1/3} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$$

el integrando $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, es discontinua en el punto $x = 0$, pero

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{-1}}{1} = 1$$

existe y es finito, por lo que la discontinuidad en $x = 0$ es evitable.

Como consecuencia el valor numérico de la integral I existe y es finito , pero la función $f(x)$ no posee primitiva elemental.

Usando la fórmula de Taylor

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8\,(1+\theta)^8} \quad , \ \theta \in V(0,x)$$

Obtenemos la aproximación $I \approx 0.309\,035\,013\,639$, con un error :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{8^2 \cdot 3^8 \cdot |1+\varphi|^8} \quad , \ \varphi \in \left[0,\, \frac{1}{3}\right] \\ &\le \frac{1}{419\,904} \\ &< 0.000\,003 \end{aligned}$$

Tenemos que $I \in \left]0.309\,032,\ 0.309\,039\right[$.

Nota: Una aproximación más precisa sería $I \approx 0.309\,033\,126\,487$. □

Nota 1.4. Aunque el integrando posea una discontinuidad evitable en el intervalo de integración, a veces es necesario el cálculo de un límite:

- Por ejemplo, si $f(x)$ es continua en $]a,b]$ y es tal que el límite $L = \lim_{x\to a^+} f(x)$ existe y es finito, entonces existe y es finita la integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z\to a^+} \int_z^b f(x)\,dx$$

Si existe $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, entonces el valor numérico de la integral es

$$I = F(b) - \lim_{z\to a^+} F(z)$$

- De la misma manera, si $f(x)$ es continua en $[a, b[$ y es tal que el límite $L = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe y es finito, entonces existe y es finita la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{z \to b^-} \int_a^z f(x)\, dx$$

Si existe $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, entonces el valor numérico de la integral es

$$I = \lim_{z \to b^-} F(z) - F(a)$$

Ejemplo 1.3. Considere la integral

$$I = \int_0^\pi \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}\, dx$$

El integrando es discontinuo en $x = 0$, pero el límite cuando $x \to 0^+$ es

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{\cos(x) - x\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2x} = \frac{\operatorname{sen}(0)}{2} = 0$$

por lo tanto la discontinuidad es evitable, y la integral tiene valor numérico finito.
Al calcular:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \frac{1}{x^2} \cdot [\, x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\,]\, dx \\
&= \frac{-1}{x} \cdot [\, x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\,] \Big|_{0^+}^{\pi} - \int_0^\pi \frac{-1}{x} \cdot [\, \cos(x) - x\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\,]\, dx \\
&= \left[-\cos(x) + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right] \Big|_{0^+}^{\pi} - \int_0^\pi \frac{-1}{x} \cdot [\, \cos(x) - x\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\,]\, dx
\end{aligned}$$

En este paso indicamos que x se evalúa desde $x = 0^+$, para hacer énfasis en la necesidad de plantear y calcular un límite.
Entonces:

$$\begin{aligned}
I &= \left[-\cos(\pi) + \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{\pi} \right] - \lim_{x \to 0^+} \left[-\cos(x) + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right] - \int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\, dx \\
&= [1 + 0] - [-1 + 1] + \cos(x) \Big|_0^{\pi} \\
&= 1 - 0 + (-1) - 1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

1.2 Integrales Impropias Básicas

Definición 1.1 (Integral Impropia)**.** La integral de una función $f(x)$ es llamada **Integral Impropia** si el intervalo de integración es infinito o si $f(x)$ tiene asíntotas verticales en el intervalo de integración o en uno de sus extremos.

Hay dos casos principales:

(a) Si $f(x)$ es continua en $[a, +\infty[$, entonces

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

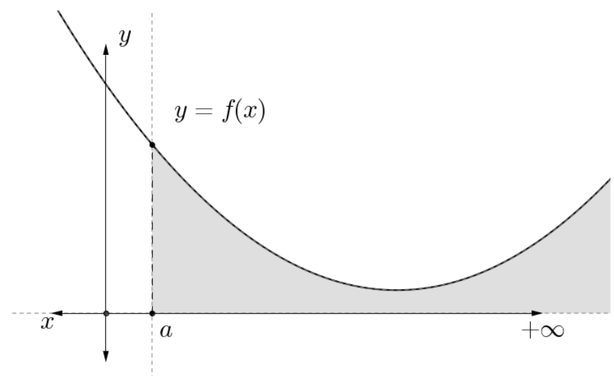
es llamada **integral impropia de primera especie**.

En tal caso

$$I = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(u)\,du$$

Además, si $F'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} I &= F(x)\Big|_a^{+\infty} \\ &= F(+\infty) - F(a) \\ &= \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a) \end{aligned}$$



(b) Si $f(x)$ es continua en $]a, b]$ y

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad (\text{ o sea que } x = a \text{ es asíntota vertical})$$

entonces

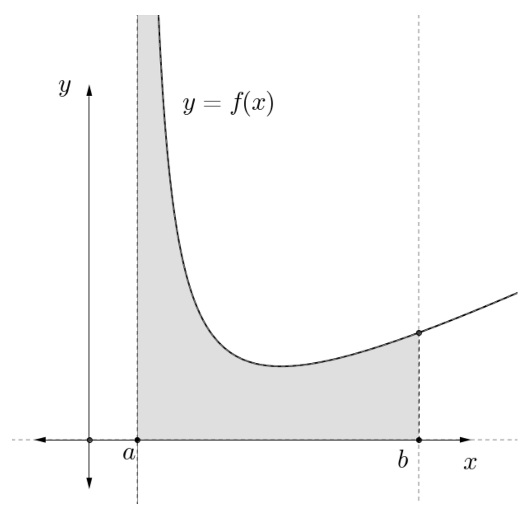
$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

es llamada **integral impropia de segunda especie**.
En tal caso

$$I = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(u)\,du$$

Además, si $F'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} I &= F(x)\Big|_{a^+}^{b} \\ &= F(b) - F(a^+) \\ &= F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x) \end{aligned}$$



Definición 1.2 (Convergencia)**.** Una integral impropia I es **convergente** si y solo si I existe y es un número finito.

En caso contrario se dice que I es **divergente**.

En caso de convergencia, I puede ser interpretado como el área de la región infinita encerrada entre f y el eje-x, similar al área en integrales propias.

Ejemplo 1.4. Sea

$$I = \int_5^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)^3}$$

Como $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^3}$ es continua en $[5, +\infty[$, I es una integral de primera especie.

Luego

$$\begin{aligned} I = \int_5^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)^3} &= \left.\frac{-1}{2(x-2)^2}\right|_5^{+\infty} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{2(x-2)^2} - \frac{-1}{2(5-2)^2} \\ &= 0 + \frac{1}{2\cdot 9} \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Tenemos que I es convergente. □

Ejemplo 1.5. Calcule

$$I = \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

Solución:

I es impropia de segunda especie, pues $x = 2$ es asíntota vertical

$$\begin{aligned} I &= \int_2^6 (x-2)^{-1/2}\, dx \\ &= \left.\frac{(x-2)^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right|_{2^+}^{6} \\ &= 2\sqrt{x-2}\Big|_{2^+}^{6} \\ &= 2\sqrt{6-2} - \lim_{x\to 2^+} 2\sqrt{x-2} \\ &= 4 - 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

luego I es convergente. □

Ejemplo 1.6. Calcule $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{x^3+2}$.

Solución:

La integral es de primera especie, pues $x^2/(x^3+2)$ es continua en $[0, +\infty[$.

Sea $u = x^3 + 2 \implies du = 3x^2\, dx$, además

$$\begin{cases} x = 0 & \implies u = 0^3 + 2 = 2 \\ x \to +\infty & \implies u = x^3 + 2 \to +\infty \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{3}\int_2^{+\infty} \frac{du}{u} &= \frac{1}{3}\ \ln(u)\Big|_2^{+\infty} \\ &= \frac{1}{3}\left[\lim_{u\to+\infty} \ln(u) - \ln(2)\right] \\ &= +\infty - \frac{\ln(2)}{3} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto I es divergente. □

Ejemplo 1.7. Calcule $I = \displaystyle\int_2^{10} \frac{dx}{x-2}$.

Solución:

I es integral impropia de segunda especie, pues hay asíntota vertical en $x = 2$.
En tal caso

$$I = \ln(x-2)\Big|_{2^+}^{10} = \ln(10-2) - \lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) = \ln(8) - \ln(0^+) = \ln(8) - (-\infty) = +\infty$$

Luego I es divergente □

Ejemplo 1.8. Calcule $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3(x)}$.

Solución:

I es impropia de primera especie, pues $1/(x\ln^3(x))$ es continua en $[\,2, +\infty[$.
Sea $u = \ln(x) \implies du = \dfrac{dx}{x}$, además

$$\begin{cases} x = 2 & \implies u = \ln(2) \\ x \to +\infty & \implies u = \ln(x) \to +\infty \end{cases}$$

luego

$$I = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{du}{u^3} = \frac{-1}{2u^2}\Big|_{\ln(2)}^{+\infty} = \lim_{u\to+\infty} \frac{-1}{2u^2} + \frac{1}{2\cdot\ln^2(2)} = 0 + \frac{1}{2\cdot\ln^2(2)} = \frac{1}{2\cdot\ln^2(2)}$$

□

Ejemplo 1.9. Analice la convergencia de la integral $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$.

Solución:

Note que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \neq \infty$$

entonces I es una integral propia en $]\,1, \pi/4\,]$ al no tener asíntotas verticales. (Ver notas 1.2 y 1.3)
Se concluye que I es convergente.

□

1.3 Algunas Variantes

Notas 1.5 (Otras integrales impropias de primera especie)**.**

1. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $]-\infty, b]$, entonces la integral

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

es una integral impropia de primera especie tal que

$$I = \lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{b} f(x)\,dx$$

I converge si y solo si el límite anterior es convergente (existe y es finito).

Además, si existe $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$

$$I = \int_{-\infty}^{b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty) = F(b) - \lim_{x \to -\infty} F(x)$$

2. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $]-\infty, +\infty[$, entonces la integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

es una integral impropia de primera especie tal que

$$I = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

para cualquier número $x_0 \in \mathbb{R}$.

I es convergente si y solo si ambas integrales son convergentes. Si una de las dos integrales es divergente entonces I es divergente.

Además, si existe $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) - \lim_{x \to -\infty} F(x)$$

En este caso I es convergente si y solo si

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) \text{ es convergente} \quad \wedge \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) \text{ es convergente}$$

Note que

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) \text{ es divergente} \quad \vee \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) \text{ es divergente} \quad \Longrightarrow \quad I \text{ es divergente}$$

Ejemplo 1.10. Calcule

$$I = \int_{-\infty}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{2 + x^2}$$

Solución:

I es impropia de primera especie porque $1/(2+x^2)$ es continua en $\left]-\infty, \sqrt{2}\,\right]$, luego

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{2+x^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan(1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\pi}{2} \\ &= \frac{3\,\pi}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.11. Calcule

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sech}^2(x)\,dx}{1+\tanh^2(x)}$$

Solución: Note que el integrando es una función continua en todo $\mathbb{R}$.

Sea $u = \tanh(x) \implies du = \operatorname{sech}^2(x)\,dx$, además

$$\begin{cases} x \to -\infty \implies u = \lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1 \\ x \to +\infty \implies u = \lim\limits_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1 \end{cases}$$

luego

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2} \\ &= \arctan(u)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \arctan(1) - \arctan(-1) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

es convergente. □

Ejemplo 1.12. Calcule

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx$$

Solución:

$$\begin{aligned} I &= e^x\Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \lim_{x\to+\infty} e^x - \lim_{x\to-\infty} e^x \\ &= e^{+\infty} - e^{-\infty} \\ &= (+\infty) - 0 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Luego I es integral impropia de primera especie divergente. □

Notas 1.6 (Otras integrales impropias de segunda especie).

1. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[\,a, b\,[$ y si

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$$

entonces la integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

es una integral impropia de segunda especie tal que

$$I = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(x)\,dx$$

I converge si y solo si el límite anterior es convergente (existe y es finito).

Además, si existe $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$

$$I = \int_a^b F'(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{b^-} = F(b^-) - F(a) = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$$

2. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $]\,a,\, b\,[$ y si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$$

entonces la integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

es una integral impropia de segunda especie tal que

$$I = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx$$

para cualquier número $x_0 \in]\,a,\, b\,[$.

I es convergente si y solo si ambas integrales son convergentes. Si una de las dos integrales es divergente entonces I es divergente.

Además, si existe $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$

$$I = \int_a^b F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{a^+}^{b^-} = F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

En este caso I es convergente si y solo si

$$\lim_{x\to b^-} F(x) \text{ es convergente} \quad \wedge \quad \lim_{x\to a^+} F(x) \text{ es convergente}$$

Note que

$$\lim_{x\to b^-} F(x) \text{ es divergente} \quad \vee \quad \lim_{x\to a^+} F(x) \text{ es divergente} \quad \Longrightarrow \quad I \text{ es divergente}$$

3. Si $f(x)$ es continua en $[a,b] \setminus \{x_1\} = [a, x_1[\, \cup \,]x_1, b]$ y si

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = \pm\infty$$

entonces

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

es una integral impropia de segunda especie tal que

$$I = \int_a^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_1}^b f(x)\, dx$$

I es convergente si y solo si ambas integrales son convergentes.

Si una de las dos integrales es divergente entonces I es divergente.

4. Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ salvo en los puntos $x_1, x_2, \dots x_m \in [a,b]$ y si

$$\lim_{x \to x_i} f(x) = \pm\infty, \quad i = 1, 2, \dots m$$

entonces

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

es una integral impropia de segunda especie tal que

$$I = \sum_{n=0}^{m} \int_{\mathcal{I}_n} f(x)\, dx$$

siendo $\mathcal{I}_n =]x_n, x_{n+1}[$ y

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < x_{m+1} = b$$

I es convergente si y solo si todas las integrales $\mathcal{I}_n$ son convergentes.

Si una de las integrales $\mathcal{I}_n$ es divergente entonces I es divergente.

Ejemplo 1.13. Calcule

$$I = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$$

Solución: I es integral impropia de segunda especie con asíntota vertical $x = 4$.

$$I = -2\sqrt{4-x}\Big|_2^{4^-} = -0 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Se concluye que I es convergente. □

Ejemplo 1.14. Calcule

$$I = \int_0^5 \frac{dx}{x^2 - 7x + 12}$$

Solución: Note que

$$I=\int_0^5 \frac{dx}{(x-3)(x-4)}$$

es impropia de segunda especie, porque hay dos asíntotas verticales: $x=3$ y $x=4$
Luego

$$I=\int\left[\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}\right]\,dx=\ln\left[\frac{x-4}{x-3}\right]+C$$

$$I=\int_0^3 f+\int_3^{3.5} f+\int_{3.5}^4 f+\int_4^5 f,\quad \text{para } f(x)=\frac{1}{(x-3)(x-4)}$$

es suficiente notar que

$$\int_0^3 f=\ln\left[\frac{x-4}{x-3}\right]\Bigg|_0^{3^-}=\ln(+\infty)-\ln(4/3)=+\infty$$

Para concluir que I es divergente. $\square$

Nota 1.7 (Integrales impropias de tercera especie)**.** Una integral impropia es llamada de tercera especie, si el intervalo de integración es infinito y posee asíntotas verticales dentro o en un extremo de dicho intervalo, o sea que I es de primera y de segunda especie a la vez.

Una forma básica sería $I=\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, cuando $f:\,]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ es continua y $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x)= \pm\infty$.

Ejemplo 1.15. Calcule $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Solución: I es impropia de tercera especie, pues el intervalo es infinito y hay una asíntota vertical $x=1$.
Sea $x=\cosh(z) \implies dx=\operatorname{senh}(z)\,dz$, además

$$\begin{cases} x=1 & \implies z=0 \\ x\to+\infty & \implies z\to+\infty \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} I&=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{senh}(z)\,dz}{\cosh(z)\cdot\sqrt{\cosh^2(z)-1}} \\ &=\int_0^{+\infty}\frac{dz}{\cosh(z)} \\ &=\int_0^{+\infty}\frac{\cosh(z)\,dz}{\cosh^2(z)} \\ &=\int_0^{+\infty}\frac{\cosh(z)\,dz}{1+\operatorname{senh}^2(z)} \\ &=\arctan\left[\operatorname{senh}(z)\right]\Big|_0^{+\infty} \\ &=\arctan(+\infty)-\arctan(0) \\ &=\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$\square$

1.4 El Valor Principal de Cauchy

Definición 1.3 (Valor Principal de Cauchy)**.** Hay tres casos principales:

1. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $]-\infty, +\infty[$, para la integral de 1^{era} especie

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

el valor principal de Cauchy corresponde al límite

$$\text{V.P} = \lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} f(u)\, du$$

Si I es convergente, entonces $I = \text{V.P.}$

2. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $]\,a,\, b\,[$ y si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$$

para la integral de 2^{da} especie

$$I = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

el valor principal de Cauchy corresponde al límite

$$\text{V.P} = \lim_{h \to 0^+} \int_{a+h}^{b-h} f(u)\, du$$

Si I es convergente, entonces $I = \text{V.P.}$

3. Si $f(x)$ es continua en $[a, x_1[\, \cup\,]x_1, b]$ y si

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = \pm\infty$$

para la integral de 2° especie

$$I = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

el valor principal de Cauchy corresponde al límite

$$\text{V.P} = \lim_{h \to 0^+} \left[\int_{a}^{x_1-h} f(u)\, du + \int_{x_1+h}^{b} f(u)\, du \right]$$

En este caso, si existe $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, el valor principal es

$$\text{V.P} = F(b) - F(a) + \lim_{h \to 0^+} \left[\, F(x_1 + h) - F(x_1 - h)\, \right]$$

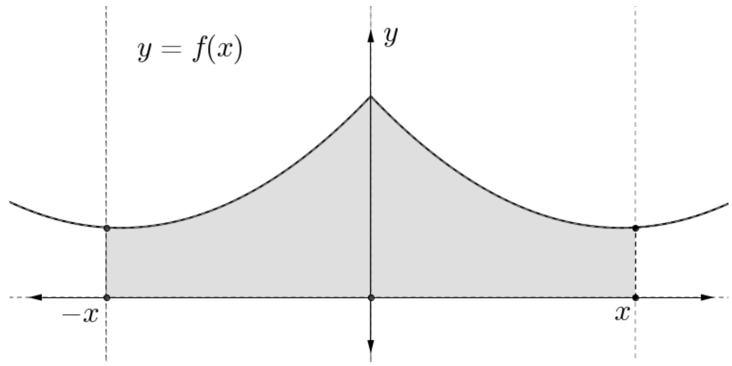
Si I es convergente, entonces $I = \text{V.P.}$

Nota 1.8. Sea I una integral impropia tiene una de las formas presentadas en la definición 1.3.
Si I es convergente, entonces $I = \text{V.P.}$
Note además que aunque el valor principal exista, es posible que I sea divergente.

Nota 1.9.

(a) Una aplicación $f(x)$ es llamada **función par** si y solo si

$$f(-x) = f(x)$$

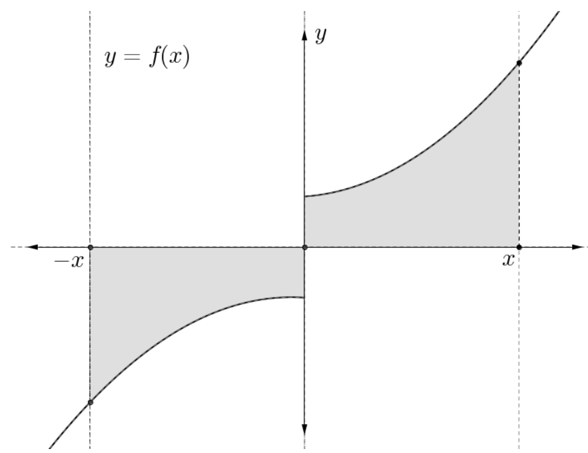


En tal caso

$$I = \int_{-x}^{x} f(u)\,du = 2\int_{0}^{x} f(u)\,du$$

(b) Una aplicación $f(x)$ es llamada **función impar** si y solo si

$$f(-x) = -f(x)$$



En tal caso

$$I = \int_{-x}^{x} f(u)\,du = 0$$

Ejemplo 1.16. Calcule

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,dx$$

Solución:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{4} - \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{4} = +\infty - (+\infty)$$

Se concluye que I es integral impropia de primera especie divergente, pues I es una suma de integrales divergentes.

Por otro lado

$$\text{V.P} = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} u^3\,du = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0$$

Tenemos un ejemplo de una integral divergente con valor principal finito. $\square$

Ejemplo 1.17. Calcule

$$I = \int_{-4}^{7} \frac{dx}{x}$$

Solución:

$x = 0$ es asíntota vertical, por lo que la integral anterior es impropia de segunda especie.

$$I = \int_{-4}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{7} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-4}^{0^-} + \ln(x)\Big|_{0^+}^{7} = -\infty + \infty$$

Por lo tanto I es divergente, al ser suma de integrales divergentes.
Por otro lado,

$$\text{V.P} = \ln|x|\Big|_{-4}^{7} = \ln(7) - \ln(4) = \ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

Tenemos que I es una integral impropia que tiene valor principal finito, pero es divergente.

Ejemplo 1.18. Calcule

$$I = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2 - 4}$$

Solución:

I tiene asíntotas verticales $x = \pm 2$, entonces

$$I = \underbrace{\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2 - 4}}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2 - 4}}_{I_2}$$

Note que

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right] dx = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

luego

$$I_1 = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Bigg|_{-2^+}^{0} = \frac{\ln(1)}{4} - \frac{\ln(+\infty)}{4} = -\infty$$

Como la integral I_1 e divergente, entonces I divergente (sin importar I_2).
Note además que

$$\text{V.P} = 2\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2 - 4} = 2\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Bigg|_{0}^{2^-} = \frac{\ln(+\infty)}{2} - \frac{\ln(1)}{2} = +\infty$$

□

Ejemplo 1.19. Calcule

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$$

Solución:

Tenemos que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \arctan(+\infty) - \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2} - \left[-\frac{\pi}{2}\right] = \pi$$

Por otro lado

$$\text{V.P} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan(x)\Big|_{0}^{+\infty} = 2 \cdot \left[\, \arctan(+\infty) - \arctan(0) \,\right] = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Lo cual verifica que $I = \text{V.P}$, para esta integral convergente. □

2 Criterios de Convergencia para Integrales Impropias

2.1 Criterios de convergencia para Integrales Impropias de 1^{era} Especie

2.1.1 Condición Necesaria

Criterio 2.1.1 (Criterio de la Condición Necesaria)**.** *Sea $f : [\,a, +\infty\,[\to \mathbb{R}$ una función continua de manera tal que existe y es finito el límite*

$$L = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

y sea

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Entonces

$$\boxed{I \text{ Convergente} \implies L = 0} \qquad (\text{ Condición Necesaria })$$

Luego se cumple que

$$\boxed{L \neq 0 \implies I \text{ es una integral de } 1^{\text{era}} \text{ especie Divergente}}$$

También es cierto que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty \implies I \text{ es Divergente}}$$

Nota 2.1. El criterio de la condición necesaria es un criterio de divergencia nada más, es decir que no determina si una integral es convergente.

En el criterio enunciado

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq 0 \implies I \text{ es Divergente} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \implies \text{ No hay criterio} \end{cases}$$

Si el límite no existe, no se puede concluir nada. (El criterio no aplica)

Ejemplo 2.1. Determine la convergencia de

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{3x+1}{2x-1}\,dx$$

Solución: Se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{2x-1} = \frac{3}{2} \neq 0$$

entonces I es divergente por el criterio de la condición necesaria. □

Ejemplo 2.2. Determine la convergencia de

$$I = \int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

Solución:

Tenemos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 0$$

el criterio de la condición necesaria no concluye nada en este caso.

Por otro lado

$$I = 2\sqrt{x-2}\Big|_5^{+\infty} = 2 \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-2} - 2\sqrt{3} = +\infty$$

O sea que I es divergente, a pesar de cumplir la condición necesaria. □

Nota 2.2. Sea $f : \,]-\infty, b] \to [0, +\infty[$ una función continua y sea

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

Entonces

$$\begin{cases} I \text{ es Convergente} \implies \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq 0 \implies I \text{ es Divergente} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \implies \text{No hay criterio} \end{cases}$$

Ejemplo 2.3. Determine la convergencia de

$$I = \int_{-\infty}^{0} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{x} dx$$

Solución:

Tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{x} &= \exp\left[\lim_{x\to-\infty} x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)\right], \quad (e^{0\cdot\infty}) \\ &= \exp\left[\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1 - 3/x)}{1/x}\right] \\ &\overset{L.H}{=} \exp\left[\lim_{x\to-\infty} \frac{(1 - 3/x)^{-1}\cdot 3/x^2}{-1/x^2}\right] \\ &= \exp\left[\lim_{x\to-\infty} -3\cdot(1 - 3/x)^{-1}\right] \\ &= e^{-3} \neq 0 \end{aligned}$$

entonces I es divergente por el criterio de la condición necesaria. $\square$

2.1.2 p-Integrales de Primera especie

Criterio 2.1.2 (p-integrales de 1^{era} especie)**.** *Una integral impropia de la forma*

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

es llamada p-integral de primera especie siempre que $a > 0$.
En tal caso

$$\boxed{I \text{ Convergente} \iff p > 1}$$

Note que

$$I \text{ Divergente} \iff p \leq 1$$

Nota 2.3. Una integral impropia de la forma

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{(x - x_0)^p}$$

también es llamada p-integral de primera especie siempre que $a > x_0 \iff x_0 \notin \left[a, +\infty\right[$.
De igual manera se tiene que

$$I \text{ Convergente} \iff p > 1 \qquad \wedge \qquad I \text{ Divergente} \iff p \leq 1$$

Nota 2.4.

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ \infty & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Nota 2.5. Sea

$$I = \int \frac{dx}{(x - x_0)^p} = \begin{cases} \ln|x - x_0| + C, & \text{si } p = 1 \\ \dfrac{(x - x_0)^{1-p}}{1 - p} + C, & \text{si } p \neq 1 \end{cases}$$

luego, si $x_0 < a$

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{(x - x_0)^p} = \begin{cases} \ln(+\infty) - \ln(a - x_0), & \text{si } p = 1 \\ \dfrac{0^+}{1 - p} - \dfrac{(a - x_0)^{1-p}}{1 - p}, & \text{si } p > 1 \\ \dfrac{+\infty}{1 - p} - \dfrac{(a - x_0)^{1-p}}{1 - p}, & \text{si } p < 1 \end{cases}$$

entonces

$$I = \begin{cases} -\dfrac{(a - x_0)^{1-p}}{1 - p}, & \text{si } p > 1 \\ +\infty \quad , & \text{si } p \leq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2.4.

$$I = \int_5^{+\infty} \frac{dx}{(x - 3)^4}$$

es una p-integral convergente porque $p = 4 > 1$.

Ejemplo 2.5.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$$

es una p-integral divergente porque $p = 1/3 < 1$.

Nota 2.6. Una integral impropia de la forma

$$I = \int_{-\infty}^{b} \frac{dx}{(x - x_0)^p}$$

es llamada p-integral de primera especie siempre que $b < x_0 \iff x_0 \notin \,]-\infty, b]$.
En tal caso

$$\boxed{I \text{ Convergente} \iff p > 1}$$

Ejemplo 2.6.

$$I = \int_{-\infty}^{-4} \frac{dx}{x+3}$$

es una p-integral divergente porque $p = 1$.

2.1.3 Comparación Directa

Nota 2.7. Sea $f : [\,a, +\infty[\to [\,0, +\infty[$ función continua tal que existe y es finito el límite

$$I = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(u)\,du$$

note entonces que

$$\begin{aligned} I = \int_a^z f + \int_z^{+\infty} f \implies & \lim_{z\to+\infty} I = \lim_{z\to+\infty} \int_a^z f + \lim_{z\to+\infty} \int_z^{+\infty} f \\ \implies & I = I + \lim_{z\to+\infty} \int_z^{+\infty} f \\ \implies & \lim_{z\to+\infty} \int_z^{+\infty} f = 0 \end{aligned}$$

Teorema 2.1 (Criterio de Cauchy)**.** *Sea $f : [\,a, +\infty[\to [\,0, +\infty[$ función continua, entonces*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergente } \iff \lim_{z\to+\infty} \int_z^{+\infty} f(x)\,dx = 0$$

Teorema 2.2. *Sea $\varphi(x)$ una función positiva y monótona creciente en $[\,a, +\infty[\,\subset \mathbb{R}$, entonces*

$$\exists M > 0 \text{ tal que } \forall x \geq a,\ \varphi(x) < M \iff \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) \text{ existe y es finito}$$

Teorema 2.3 (Criterio de Weierstrass)**.** *Sea $f : [\,a, +\infty[\to [\,0, +\infty[$ función continua, entonces*

$$\exists M > 0 \text{ tal que } \forall x \geq a,\ \int_a^x f(u)\,du < M \iff I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergente}$$

Nota 2.8. Si para todo $x \in [\,a,\, b\,]$

$$f(x) < g(x) \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Nota 2.9. Si para todo $x \in [\,a,\, +\infty[$

$$f(x) < g(x) \implies \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

Criterio 2.1.3 (Criterio de Comparación Directa)**.** *Sean $f, g : [\,a, +\infty\,[\to [\,0, +\infty\,[$ funciones continuas, entonces*

(a) $$f(x) \leq g(x) \quad \wedge \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ Convergente} \implies \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ Convergente}$$

(b) $$f(x) \geq g(x) \quad \wedge \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ Divergente} \implies \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ Divergente}$$

En cualquier otro caso no hay criterio.

Nota 2.10. En el criterio 2.1.3 de comparación directa también se escribe

(a) $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \quad \wedge \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ Convergente} \implies \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ Convergente}$$

(b) $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \geq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \quad \wedge \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ Divergente} \implies \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ Divergente}$$

Ejemplo 2.7. Como $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

La última es una p-integral convergente ($p = 2 > 1$) , entonces I converge por comparación directa.

Nota 2.11. Algunas desigualdades:

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ a \leq b \iff a + x \leq b + x$
2. $\forall x > 0,\ a \leq b \implies ax \leq bx$
3. $\forall x > 0,\ a + x > a \quad \wedge \quad a - x < a$
4. $a \leq b \iff \dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$, siempre que $a, b \neq 0$
5. $\forall x > 0, \quad \dfrac{1}{a+x} < \dfrac{1}{a} \quad \wedge \quad \dfrac{1}{a-x} > \dfrac{1}{a}$
6. $f(x) \nearrow \quad \wedge \quad a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$
7. $f(x) \searrow \quad \wedge \quad a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$
8. $\forall u \in \mathbb{R},\ \ln(u) < u \iff \dfrac{1}{\ln(u)} > \dfrac{1}{u}$

Ejemplo 2.8. Determine la convergencia de la integral

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 4}$$

Solución:

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 4} \leq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3}, \quad \text{que es una } p\text{-integral convergente, porque } p = 3 > 1,$$

entonces I es convergente por comparación directa. □

Ejemplo 2.9. Determine la convergencia de la integral

$$I = \int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$$

Solución:

$$I = \int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - 4}} \geq \int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^{2/3}}$$

que es una p-integral divergente porque $p = 2/3 < 1$, entonces I es divergente por comparación directa.

□

Ejemplo 2.10. Determine la convergencia de la integral

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x + 2)}$$

Solución:

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x+2)} \geq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x+2}$$

que es una p-integral divergente, entonces I es divergente por comparación directa. □

Ejemplo 2.11. Determine la convergencia de la integral

$$I = \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - 1}$$

Solución:

$$I = \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^3-1} \geq \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^3}, \quad \text{que es una } p\text{-integral convergente, porque } p = 3 > 1,$$

pero en este caso no hay criterio. □

Notas 2.12. Considere dos funciones $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Se dice que $f(x)$ y $g(x)$ son **equivalentes** cuando $x \to +\infty$ si y solo si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

   se denota

$$f(x) \cong g(x) \quad \text{cuando } x \to +\infty$$

2. Si existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \neq 0$$

   se escribe

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{cuando } x \to +\infty$$

   lo cual se puede leer como que "$f(x)$ y $g(x)$ son similares cuando $x \to +\infty$".

3. Se dice que $f(x)$ es "más rápido" que $g(x)$ o que $g(x)$ es "más lento" que $f(x)$ si y solo si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

   se denota

$$f(x) \gg g(x) \quad \text{cuando } x \to +\infty$$

   o lo que es lo mismo

$$g(x) \ll f(x) \quad \text{cuando } x \to +\infty$$

Notas 2.13. Considere dos funciones $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

1. Si $f(x) \cong g(x) \;\vee\; f(x) \sim g(x)$ cuando $x \to +\infty$, entonces

$$\exists\, N_1, N_2 > 0 \text{ tales que } N_1 \cdot g(x) \leq f(x) \leq N_2 \cdot g(x)$$

2. Si $f(x) \ll g(x)$ cuando $x \to +\infty$, entonces

$$\exists\, N > 0 \text{ tal que } f(x) \leq N \cdot g(x)$$

3. Si $f(x) \gg g(x)$ cuando $x \to +\infty$, entonces

$$\exists\, N > 0 \text{ tal que } f(x) \geq N \cdot g(x)$$

Ejemplo 2.12. Determine la convergencia de la integral

$$I = \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - 1}$$

Solución: Note que

$$\frac{1}{x^3 - 1} \cong \frac{1}{x^3}$$

entonces existe $N > 0$ tal que

$$\frac{1}{x^3 - 1} \leq \frac{N}{x^3}$$

N puede ser 2

$$\frac{1}{x^3 - 1} \leq \frac{2}{x^3} \iff x^3 \leq 2x^3 - 2 \iff 2 \leq x^3$$

lo cual es verdadero pues $x \geq 4 \iff x^3 \geq 64$

$$I = \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - 1} \leq 2 \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^3}, \quad \text{que es una } p\text{-integral convergente, porque } p = 3 > 1,$$

se concluye que I converge por Comparación Directa. $\square$

Nota 2.14. Sean $f, g :]-\infty, b] \to [0, +\infty[$ funciones continuas, entonces

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx$ Convergente $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ Convergente

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \geq \int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx$ Divergente $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ Divergente

En cualquier otro caso no hay criterio.

Nota 2.15. Si para todo $x \in]-\infty, b]$

$$0 \leq f(x) < g(x) \implies \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{-\infty}^{b} g(x)\,x$$

2.1.4 Criterio del límite

Criterio 2.1.4 (Criterio del Límite)**.** *Sean* $f, g : [\,a, +\infty\,[\to [\,0, +\infty\,[$ *funciones continuas, tales que*

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(a) $L \neq 0 \implies \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \wedge \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *tienen el mismo comportamiento*

(Ambas convergen o ambas divergen).

Se denota $\displaystyle\int_a^{+\infty} f \sim \int_a^{+\infty} g$.

(b) $L = 0 \quad \wedge \quad \displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *Convergente* $\implies \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *Convergente*

(c) $L = +\infty \quad \wedge \quad \displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *Divergente* $\implies \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *Divergente*

En cualquier otro caso no hay criterio.

Ejemplo 2.13. Determine la convergencia de la integral

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 4}$$

Solución: Sean $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 4}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3 + 4} = 1 \neq 0$$

Como

$$I = \int_1^{+\infty} g = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \quad \text{es } p\text{-integral convergente pues } p = 3 > 1,$$

entonces por el criterio del límite

$$I = \int_1^{+\infty} f \quad \text{es convergente.}$$

$\square$

Nota 2.16. Si cuando $x \to +\infty$

$$f(x) \ll g(x) \implies \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) \sim g(x)$$

siempre que $\beta \neq 0$, pues

$$\frac{\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)}{g(x)} = \alpha \cdot \frac{f(x)}{g(x)} + \beta \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 + \beta = \beta \neq 0$$

Nota 2.17.

$$\boxed{p_1 < p_2 \implies x^{p_1} \ll x^{p_2} \quad \text{cuando } x \to +\infty}$$

Nota 2.18. Sea $g : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ función continua tal que

$$f(x) = \frac{P(x) \cdot h(x)}{Q(x)}$$

donde P, Q son expresiones radicales con grados

$$\text{Grado}[P(x)] = p_1 \quad \wedge \quad \text{Grado}[Q(x)] = p_2$$

mientras que $h(x)$ es una expresión no radical (log, sen, arctan, …).
Se sugiere tomar

$$g(x) = \frac{x^{p_1}}{x^{p_2}} = \frac{1}{x^{p_2 - p_1}}$$

Al analizar el límite se obtiene

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x) \cdot h(x)}{Q(x)} \cdot \frac{1}{g(x)} = \alpha \cdot \lim_{x \to +\infty} h(x)$$

donde

$$\alpha = \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)/Q(x)}{g(x)} \neq 0, \qquad \text{pues } \frac{P(x)}{Q(x)} \sim g(x)$$

Ejemplo 2.14. Analice la integral

$$I = \int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{\sqrt[3]{x^4 + x^2 - 1} + \sqrt{7x^3 - x^2}}{\sqrt{x} + 5x^5 - 2}}_{f(x)} \, dx$$

Solución: Note que

$$\frac{4}{3} < \frac{3}{2} \iff 8 < 9$$

escogemos entonces

$$g(x) = \frac{x^{3/2}}{x^5} \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{7}}{5} \neq 0$$

tenemos que

$$\int_1^{+\infty} g = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5-3/2}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{7/2}} \qquad \text{es } p\text{-integral convergente, porque } p = 7/2 > 1,$$

luego I converge por el criterio del límite. □

Ejemplo 2.15. Analice la integral

$$I = \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2+1)\ln(x)} \, dx = \int_3^{+\infty} f$$

Solución:
Sea

$$g(x) = \frac{x^{1/2}}{x^2} \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2+1)\ln(x)} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

tenemos que

$$\int_1^{+\infty} g = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2-1/2}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \qquad \text{es } p\text{-integral convergente, porque } p = 3/2 > 1,$$

luego I converge por el criterio del límite. □

Nota 2.19. Sea $f : [\, a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua y sea $M > a$, entonces

$$\int_a^{+\infty} f \sim \int_M^{+\infty} f$$

es decir que ambas convergen o ambas divergen.

Esto se justifica notando que

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{M} f + \int_M^{+\infty} f$$

Nota 2.20. Para los criterios de la condición necesaria, comparación directa y del límite, podemos verificar las hipótesis bajo la condición de que $x \geq M$ para algún M.

Es decir

$$\text{cambiar "}f(x) \geq 0\text{" por "}\exists M > 0 \text{ tal que } x > M \implies f(x) \geq 0\text{"}$$

$$\text{cambiar "}f(x) \leq g(x)\text{" por "}\exists M > 0 \text{ tal que } x > M \implies f(x) \leq g(x)\text{"}$$

y así sucesivamente.

Ejemplo 2.16. Analice

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(x-2)(x-5)}{(x^3+4)\sqrt{x+1}}\, dx$$

Solución: La función

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{(x^3+4)\sqrt{2x+1}}$$

no es positiva en $[\,0, +\infty[$, pero $x > 5 \implies f(x) > 0$,

así podemos analizar

$$I \sim J = \int_6^{+\infty} f(x)\, dx$$

Sea

$$g(x) = \frac{x^2}{x^3 \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

entonces

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \\ \displaystyle\int_6^{+\infty} g = \int_6^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \quad \text{que es } p\text{-integral convergente, dado que } p = 3/2 > 1 \end{cases}$$

Se concluye que J es convergente por el criterio del límite, luego I también es convergente. □

Nota 2.21. Sean $f, g : \,]-\infty, b\,] \to [\,0, +\infty\,[$ funciones continuas, tales que

$$L = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(a) $L \neq 0 \implies \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx \;\wedge\; \int_{-\infty}^{b} g(x)\, dx$ tienen el mismo comportamiento

(Ambas convergen o ambas divergen).

(b) $L = 0 \;\wedge\; \displaystyle\int_{-\infty}^{b} g(x)\, dx$ Convergente $\implies \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ Convergente

(c) $L = +\infty \;\wedge\; \displaystyle\int_{-\infty}^{b} g(x)\, dx$ Divergente $\implies \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ Divergente

En cualquier otro caso no hay criterio.

Nota 2.22 (Integral de función exponencial)**.** La integral impropia de primera especie

$$\boxed{\int_a^{+\infty} r^x\, dx \text{ es convergente } \iff 0 < r < 1}$$

De hecho, si $0 < r \neq 1$

$$I = \left.\frac{r^x}{\ln(r)}\right|_a^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{0 - r^a}{\ln(r)} & \text{, si } 0 < r < 1 \\ \dfrac{+\infty - r^a}{\ln(r)} & \text{, si } r > 1 \end{cases}$$

Además si

$$r = 0 \implies I = 0 \quad \wedge \quad r = 1 \implies I = \int_a^{+\infty} dx = +\infty$$

O sea que si $0 \leq r < 1 \implies I$ es convergente.
Si $r < 0$, la aplicación r^x es discontinua en todos los intervalos, por lo que r^x no es integrable.

Nota 2.23. Si $0 < r_1 < r_2$, entonces $r_1^x \ll r_2^x$ cuando $x \to +\infty$.
En tal caso

$$r_1^x + r_2^x \cong r_2^x$$

Ejemplo 2.17. Analice la integral

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{5 \cdot 2^x + 8 \cdot 3^x}{7 \cdot 5^x + 2^{2x}}\, dx$$

Solución:
Note que $2^x \ll 3^x$ y $2^{2x} = 4^x \ll 5^x$, sean entonces

$$f(x) = \frac{5 \cdot 2^x + 8 \cdot 3^x}{7 \cdot 5^x + 2^{2x}} \quad \wedge \quad g(x) = \frac{3^x}{5^x} = \left(\frac{3}{5}\right)^x$$

entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{8}{7} \neq 0 \implies I \sim \int_0^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x dx$$

La última integral es convergente pues $0 < 3/5 < 1$, luego I converge por el criterio del límite. $\square$

2.1.5 Convergencia Absoluta

Criterio 2.1.5 (Convergencia Absoluta)**.** *Sea $f : [\,a, +\infty\,[\to \mathbb{R}$ función continua y sean*

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \wedge \quad A = \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

Si A es una integral impropia Convergente, entonces I es Convergente.
*En tal caso se dice que I **converge absolutamente**.*

Definición 2.1 (Convergencia Condicional)**.** Sea $f : [\,a, +\infty\,[\to \mathbb{R}$ función continua y sean

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \wedge \quad A = \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

Si I es Convergente y A es Divergente, entonces se dice que I **converge condicionalmente**.

Ejemplo 2.18. Analice

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$$

Solución:
Note que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos(x)}{\sqrt{x^3+1}} \right| dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{|\cos(x)|}{\sqrt{x^3+1}}\,dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx \\ &\sim \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx \\ &\leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx, \quad \text{que es } p\text{-integral convergente}(p = 3/2 > 1), \end{aligned}$$

entonces A es convergente por comparación directa.
Luego se sigue que I converge absolutamente. □

Nota 2.24. Sea $f : \,]-\infty, b\,] \to \mathbb{R}$ función continua y sean

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \quad \wedge \quad A = \int_{-\infty}^{b} |f(x)|\,dx$$

(a) Si A es convergente, entonces I converge absolutamente.

(b) Si I es convergente y A es divergente, entonces I converge condicionalmente.

2.1.6 Criterio de Dirichlet

Criterio 2.1.6 (Criterio de Dirichlet)**.** *Sean* $f, g : [\, a, +\infty\, [\to \mathbb{R}$ *funciones continuas tales que*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \quad \wedge \quad g(x) \ \ \textit{es monótona} \quad [\ g \searrow \quad \textit{ó} \quad g \nearrow\ ]$$

y si para todo $x \in [\, a, +\infty\, [$ *, existe* $M > 0$ *que es finito e independiente de* x *y tal que*

$$\left| \int_a^x f(u)\, du \right| < M$$

entonces

$$I = \int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)\, dx$$

es Convergente.

Nota 2.25 (Desigualdad triangular)**.** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a \pm b| \leq |a| + |b| \quad \wedge \quad |a| - |b| \leq |a \pm b|$$

Ejemplo 2.19. Analice

$$I = \int_{\pi/4}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{x+1}}\, dx$$

Solución: Sea $f(x) = \cos(x)$ y sea $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, entonces

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} = 0$

además $g \searrow$, pues para todo $x \geq \pi/4$

$$g'(x) = \frac{-1}{3(x+1)^{1/3+1}} = \frac{-1}{3(x+1)^{4/3}} < 0$$

también podemos justificar diciendo que

$$\frac{1}{x+1} \searrow \quad \wedge \quad \sqrt[3]{x} \nearrow \quad \Longrightarrow \quad g(x) \searrow$$

(b)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\pi/4}^x f(u)\, du \right| &= \left| \int_{\pi/4}^x \cos(u)\, du \right| \\ &= |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(\pi/4)| \\ &\leq |\operatorname{sen}(x)| + |\operatorname{sen}(\pi/4)| \\ &\leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = M \end{aligned}$$

Por (a) y (b) se concluye que I converge por el criterio de Dirichlet. □

Nota 2.26. Sean $f, g :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0 \quad \wedge \quad g(x) \text{ es monótona } \quad [\, g \searrow \quad \text{ó} \quad g \nearrow \,]$$

y si para todo $x \in]-\infty, b]$, existe $M > 0$ que es finito e independiente de x y tal que

$$\left| \int_x^b f(u)\, du \right| < M$$

entonces

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x) \cdot g(x)\, dx$$

es Convergente por el criterio de Dirichlet.

Nota 2.27. Considere una integral impropia de segunda especie

$$I = \int_0^b f(x)\, dx$$

tal que $f :]0, b] \to \mathbb{R}$ continua y $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \infty$, entonces I se convierte en una integral impropia de primera especie si hacemos

$$u = \frac{1}{x} \implies dx = -\frac{du}{u^2}$$

quedando

$$I = \int_{1/a}^{+\infty} f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2}$$

Ejemplo 2.20. Analice

$$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(1/x^2)}{x^2}\, dx$$

Solución:

Haciendo $u = 1/x$ obtenemos

$$dx = \frac{-du}{u^2} \quad \wedge \begin{cases} x = 0^+ \iff u = +\infty \\ x = 1 \iff u = 1 \end{cases}$$

luego

$$I = \int_{+\infty}^{1} \frac{\operatorname{sen}(u^2)}{1/u^2} \cdot \frac{-du}{u^2} = \int_1^{+\infty} \operatorname{sen}(u^2)\, du$$

Sea $w = u^2 \iff u = \sqrt{w} \implies du = \dfrac{dw}{2\sqrt{w}}$

luego

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(w)}{2\sqrt{w}}\, dw, \qquad \text{que es impropia de 1era especie.}$$

Note que

$$\frac{1}{\sqrt{w}} \xrightarrow[w \to +\infty]{} 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{\sqrt{w}} \searrow \quad \wedge \quad \left| \int_1^w \operatorname{sen}(z)\, dz \right| = |-\cos(w) + \cos(1)| \leq 2$$

entonces I es convergente por el criterio de Dirichlet. □

2.2 Criterios de convergencia para Integrales Impropias de 2^{da} Especie

2.2.1 p-Integrales de segunda especie

Criterio 2.2.1 (p-integrales de 2^{da} especie)**.** *Una integral impropia de la forma*

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$$

es llamada p-integral de segunda especie (impropia si $p > 0$) .
En tal caso

$$\boxed{I \text{ Convergente} \iff p < 1}$$

Note que

$$I \text{ Divergente} \iff p \geq 1$$

Nota 2.28.

$$\lim_{x\to 0} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ \infty & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Nota 2.29. Tenemos que

$$\int \frac{dx}{(x-a)^p} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & \text{si } p = 1 \\ \dfrac{(x-a)^{1-p}}{1-p} + C, & \text{si } p \neq 1 \end{cases}$$

entonces

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \begin{cases} \ln(b-a) - \ln(0^+), & \text{si } p = 1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \dfrac{0^+}{1-p}, & \text{si } p < 1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \dfrac{+\infty}{1-p}, & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

luego

$$I = \begin{cases} -\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & \text{si } p < 1 \\ +\infty \quad , & \text{si } p \leq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2.21.

$$I = \int_5^8 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-5}}$$

es una p-integral de segunda especie convergente pues $p = 1/4 < 1$.

Nota 2.30. Una integral impropia de la forma

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$$

es llamada p-integral de segunda especie
En tal caso

$$\boxed{I \text{ Convergente} \iff p < 1}$$

Ejemplo 2.22.

$$I = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}$$

es una p-integral de segunda especie divergente pues $p = 5/2 > 1$.

Ejemplo 2.23. Analice

$$I = \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[5]{2+x}}$$

Solución: Note que I es una integral de tercera especie, con asíntota vertical en $x = -2$.

$$I = \underbrace{\int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{\sqrt[5]{2+x}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[5]{2+x}}}_{I_2}$$

I_2 es una p-integral de 2da especie, pero I_1 es una p-integral de primera especie divergente, entonces I es divergente. $\square$

2.2.2 Comparación Directa

Nota 2.31. Si para todo $x \in [\,a,\, b\,]$

$$f(x) < g(x) \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Criterio 2.2.2 (Criterio de Comparación Directa)**.** *Sean $f, g : \,]a, b\,] \to [\,0, +\infty\,[$ funciones continuas, cumplen que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$$

entonces

(a) $\quad f(x) \leq g(x) \quad \wedge \quad \int_a^b g(x)\,dx$ *Convergente* $\implies \int_a^b f(x)\,dx$ *Convergente*

(b) $\quad f(x) \geq g(x) \quad \wedge \quad \int_a^b g(x)\,dx$ *Divergente* $\implies \int_a^b f(x)\,dx$ *Divergente*

En cualquier otro caso no hay criterio.

Nota 2.32. En el Criterio 2.2.2 de comparación directa también se escribe

(a) $\quad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \quad \wedge \quad \int_a^b g(x)\,dx$ Convergente $\implies \int_a^b f(x)\,dx$ Convergente

(b) $\quad \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx \quad \wedge \quad \int_a^b g(x)\,dx$ Divergente $\implies \int_a^b f(x)\,dx$ Divergente

Nota 2.33. Si para todo $x \in [\,a,\, b\,]$

$$f(x) < g(x) \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Ejemplo 2.24.

$$I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)(x+4)}} \leq \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)\cdot 4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$$

Pues $x + 4 > 4$ y como la última es una p-integral de segunda especie convergente ($p = 1/3 < 1$), entonces I converge por comparación directa.

Ejemplo 2.25. Analice la convergencia de

$$I = \int_7^{10} \frac{x^2 + 8}{\sqrt[5]{(x-7)^6(15-x)}}\,dx$$

Solución:

Note que $\forall x \in \,]7,\, 10],\;\; x^2 + 8 > 8 \;\wedge\; 0 < 15 - x < 15 \iff \dfrac{1}{15 - x} > \dfrac{1}{15}$, entonces

$$I \geq \frac{8}{\sqrt[5]{15}} \int_7^{10} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-7)^6}}$$

La última es una p-integral de segunda especie divergente ($p = 6/5 > 1$), entonces I diverge por comparación directa. $\square$

Ejemplo 2.26. Analice la convergencia de

$$I = \int_1^8 \frac{dx}{(x-1)^2(x+5)}$$

Solución:

Note que $\forall x \in\,]1,8\,],\ x+5>5 \iff \dfrac{1}{x+5} < \dfrac{1}{5}$, entonces

$$I \leq \frac{1}{5}\int_1^8 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

La última es una p-integral de segunda especie divergente ($p=2>1$), pero en este caso NO hay criterio. □

Nota 2.34.

Considere dos funciones $f,g : \,]a,b\,] \to [\,0,+\infty[$ continuas tales que $f,g \to +\infty$ cuando $x \to a^+$.

1. Se dice que $f(x)$ y $g(x)$ son **equivalentes** cuando $x \to a^+$ si y solo si

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

se denota

$$f(x) \cong g(x) \quad \text{cuando } x \to a^+$$

2. Si existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \neq 0$$

se escribe

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{cuando } x \to a^+$$

lo cual se puede leer como que "$f(x)$ y $g(x)$ son similares cuando $x \to a^+$".

3. Se dice que $f(x)$ es "más rápido" que $g(x)$ o que $g(x)$ es "más lento" que $f(x)$ cuando $\to a^+$ si y solo si

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \iff \lim_{x\to a^+} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

se denota

$$f(x) \gg g(x) \quad \text{cuando } x \to a^+$$

o lo que es lo mismo

$$g(x) \ll f(x) \quad \text{cuando } x \to a^+$$

Nota 2.35.

Considere dos funciones $f,g : \,]a,b] \to [0,+\infty[$ continuas tales que $f,g \to +\infty$ cuando $x \to a^+$.

1. Si $f(x) \cong g(x) \ \vee \ f(x) \sim g(x)$ cuando $x \to a^+$, entonces

$$\exists\, N_1, N_2 > 0 \text{ tales que } \forall x \in]a,b\,],\ N_1 \cdot g(x) \leq f(x) \leq N_2 \cdot g(x)$$

2. Si $f(x) \ll g(x)$ cuando $x \to a^+$, entonces

$$\exists\, N > 0 \text{ tal que } \forall x \in]a,b\,],\ f(x) \leq N \cdot g(x)$$

3. Si $f(x) \gg g(x)$ cuando $x \to a^+$, entonces

$$\exists\, N > 0 \text{ tal que } \forall x \in]a, b],\ f(x) \geq N \cdot g(x)$$

Ejemplo 2.27. Analice la convergencia de

$$I = \int_1^8 \frac{dx}{(x-1)^2(x+5)}$$

Solución:

Note que, cuando $x \to 1^+$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+5)} \sim \frac{1}{(x-1)^2}$$

pues

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{(x-1)^2(x+5)}}{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6} \neq 0$$

luego existe N tal que $\forall x \in\,]1, 8\,]$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+5)} \geq N \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

de hecho $N = 1/13$ pues

$$\begin{aligned} 1 < x \leq 8 &\iff 6 < x + 5 \leq 13 \\ &\iff \frac{1}{6} > \frac{1}{x+5} \geq \frac{1}{13} \\ &\iff \frac{1}{6(x-1)^2} > \frac{1}{(x-1)^2(x+5)} \geq \frac{1}{13(x-1)^2} \end{aligned}$$

Se concluye que

$$I \geq \frac{1}{13} \int_1^8 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

La última es una p-integral de segunda especie divergente, entonces I es divergente por el criterio de comparación directa. $\square$

Nota 2.36. Sean $f, g : [\,a, b\,[\to [\,0, +\infty\,[$ funciones continuas, cumplen que

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$$

entonces

(a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \quad \wedge \quad \int_a^b g(x)\,dx$ Convergente $\implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ Convergente

(b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx \quad \wedge \quad \int_a^b g(x)\,dx$ Divergente $\implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ Divergente

En cualquier otro caso no hay criterio.

2.2.3 Criterio del límite

Criterio 2.2.3 (Criterio del Límite)**.** *Sean $f, g :]a, b] \to [0, +\infty[$ funciones continuas, tales que cumplen que*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$$

entonces si

$$L = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(a) $L \neq 0 \implies \int_a^b f(x)\,dx \quad \wedge \quad \int_a^b g(x)\,dx$ *tienen el mismo comportamiento*

$=$ (*Ambas convergen o ambas divergen*).

(b) $L = 0 \quad \wedge \quad \int_a^b g(x)\,dx$ *Convergente* $\implies \int_a^b f(x)\,dx$ *Convergente*

(c) $L = +\infty \quad \wedge \quad \int_a^b g(x)\,dx$ *Divergente* $\implies \int_a^b f(x)\,dx$ *Divergente*

En cualquier otro caso no hay criterio.

Ejemplo 2.28. Analice la convergencia de

$$I = \int_1^8 \frac{dx}{(x-1)^2(x+5)}$$

Solución:
Sean

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+5)} \quad \wedge \quad g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6} \neq 0$$

Como

$$\int_1^8 g = \int_1^8 \frac{dx}{(x-1)^2} \qquad \text{es } p\text{-integral de 2da especie divergente}$$

se concluye que I es divergente por el criterio del límite. □

Nota 2.37. Sea $f :]a, b] \to [0, +\infty[$ continua tal que $f(x) \to +\infty$ si $x \to a^+$, y sea

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Si $f(x)$ se puede expresar de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-a)^p} \cdot h(x)$$

donde $\lim_{x \to a^+} p(x) \neq 0$ es finito y $h(x) = 1$ ó $h(x)$ es expresión no factorizable tal que

$$\lim_{x \to a^+} h(x) = 0 \quad \vee \quad \lim_{x \to a^+} h(x) = \infty$$

Se recomienda hacer

$$g(x) = \frac{1}{(x-a)^p} \qquad \text{para comparar con una } p\text{-integral}$$

en caso de que no haya criterio, hacer

$$g(x) = \frac{h(x)}{(x-a)^p}$$

para analizar con más detalle la integral $\displaystyle\int_a^b g$.

Ejemplo 2.29. Analice la integral

$$I = \int_2^{5/2} \frac{\ln(3-x)\sqrt{2x}}{(x+2)^3\sqrt[4]{x^4-16}}\,dx$$

Solución:

Tomando $I = \displaystyle\int_2^{5/2} f$, note que

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)\sqrt{2x}}{(x+2)^3\sqrt[4]{(x-2)(x+2)(x^2+4)}}$$

entonces

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{1}{(x-2)^{1/4}} \implies \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 2^+}\frac{\ln(3-x)\sqrt{2x}}{(x+2)^3\sqrt[4]{(x+2)(x^2+4)}} \\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{\ln(3-x)\cdot 2}{4^3\sqrt[4]{4\cdot 16}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como

$$\int_2^{5/2} g = \int_2^{5/2}\frac{dx}{(x-2)^{1/4}}$$

es una p-integral de segunda especie convergente, entonces I converge por el criterio del límite. □

Ejemplo 2.30. Determine la convergencia de la siguiente integral impropia

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{2x}+3x^2-1}{x^3\sqrt{x^2+5x-14}}\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)dx$$

Solución:

Como $x^2+5x-14 = (x-2)(x+7)$, nos damos cuenta de que hay una asíntota vertical en $x=2$, luego I es una integral de tercera especie.

Tenemos que

$$I = \underbrace{\int_2^{3} \frac{\sqrt{2x}+3x^2-1}{x^3\sqrt{(x-2)(x+7)}}\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{2x}+3x^2-1}{x^3\sqrt{x^2+5x-14}}\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)dx}_{I_2}$$

Tomando

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x}+3x^2-1}{x^3\sqrt{(x-2)(x+7)}}\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$$

Analizamos I_1 como integral impropia de segunda especie:

Sea

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}} \implies \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x}+3x^2-1}{x^3\sqrt{x+7}}\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{4}+12-1}{8\sqrt{9}}\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)$$

$$=\frac{13}{24}\cdot\frac{\pi}{4}\neq 0$$

$$\therefore \quad I_1=\int_2^{+\infty} f\sim\int_2^{+\infty} g=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

La última es una p-integral de 2^{da} especie convergente ($p=1/2<1$), luego I_1 es convergente por el criterio del límite.

En el caso de I_2 que es integral impropia de primera especie:

Sea

$$g(x)=\frac{x^2}{x^3\cdot\sqrt{x^2}}=\frac{1}{x^2} \implies \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}3\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)=0$$

Como

$$\int_2^{+\infty} g=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\qquad \text{que es } p\text{-integral de } 1^{\text{era}} \text{ especie convergente } (p=2>1).$$

Se concluye que I_2 es convergente por el criterio del límite.

Finalmente concluimos que $I=I_1+I_2$ es convergente, por ser suma de integrales convergentes. □

Nota 2.38. Sean $f,g:\ [a,b[\,\to[\,0,+\infty[$ funciones continuas, tales que

$$\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty \quad\wedge\quad \lim_{x\to b^-} g(x)=\infty$$

entonces si

$$L=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}$$

(a) $L\neq 0 \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \quad\wedge\quad \int_a^b g(x)\,dx$ tienen el mismo comportamiento (Ambas convergen o ambas divergen).

(b) $L=0 \quad\wedge\quad \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ Convergente $\implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ Convergente

(c) $L=+\infty \quad\wedge\quad \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ Divergente $\implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ Divergente

En cualquier otro caso no hay criterio.

2.2.4 Convergencia Absoluta

Criterio 2.2.4 (Convergencia Absoluta)**.** *Sea $f :]\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ función continua es tal que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

y sean

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \quad \wedge \quad A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Si A es una integral Convergente, entonces I es Convergente.
En tal caso se dice que I ***converge absolutamente****.*

Definición 2.2 (Convergencia Condicional)**.** Sea $f :]\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ función continua es tal que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

y sean

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \quad \wedge \quad A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Si I es Convergente y A es Divergente, entonces se dice que I **converge condicionalmente**.

Nota 2.39. Sea $f : [\,a, b\,[\to \mathbb{R}$ función continua es tal que

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$$

y sean

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \quad \wedge \quad A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(a) Si A convergente, entonces I converge absolutamente.

(b) Si I convergente y A divergente, entonces I converge condicionalmente.

Ejemplo 2.31. Analice la convergencia

$$I = \int_1^3 \frac{x}{\sqrt[5]{9-x^2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}}\right)\,dx$$

Solución:
I es integral impropia de una función no positiva con asíntota vertical $x = 3$.
Sea

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 \left|\frac{x}{\sqrt[5]{9-x^2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}}\right)\right|\,dx \\ &= \int_1^3 \frac{x}{\sqrt[5]{(3-x)(3+x)}} \cdot \left|\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}}\right)\right|\,dx \\ &\le \int_1^3 \frac{x}{\sqrt[5]{(3-x)(3+x)}}\,dx = J \end{aligned}$$

Sean

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[5]{(3-x)(3+x)}} \quad \wedge \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{3-x}}$$

entonces

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x}{\sqrt[5]{3+x}} = \frac{3}{\sqrt[5]{6}} \neq 0.$$

Luego, por el criterio del límite

$$J = \int_1^3 f \sim \int_1^3 g = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-x}}.$$

La última es una p-integral impropia de 2^{da} especie convergente ($p = 1/5 < 1$).
Como J es convergente, entonces A converge por el criterio de comparación directa.
Finalmente, I es convergente absolutamente. $\square$

3 Análisis de integrales impropias usando desarrollos limitados

Definición 3.1 (Desarrollos generalizados)**.** Si tenemos el desarrollo limitado de $f(x)$ cuando $x \to 0$:

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathcal{O}(x^n)$$

entonces el desarrollo

$$f\big[g(x)\big] = a_0 + a_1\, g(x) + a_2\, \big[g(x)\big]^2 + \cdots + a_n \big[g(x)\big]^n + \mathcal{O}\Big[\big[g(x)\big]^n\Big]$$

es llamado **Desarrollo Generalizado** de la función "$f\big[g(x)\big]$" cuando $x \to a$, siempre que

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0$$

Lo mismo se dice si cambiamos $x \to a$ por

$$x \to a^+ \quad \vee \quad x \to a^- \quad \vee \quad x \to +\infty \quad \vee \quad x \to -\infty$$

Ejemplo 3.1. Como $x \to 0 \implies \sqrt{x} \to 0$ entonces

$$\begin{aligned} \ln\Big[1 + \sqrt{x}\Big] &= \left[u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \mathcal{O}(u^2)\right]_{u=\sqrt{x}} \\ &= x^{1/2} - \frac{x}{2} + \frac{x^{3/2}}{3} + \mathcal{O}(x^{3/2}) \end{aligned}$$

es un desarrollo generalizado cuando $x \to 0$.

Ejemplo 3.2. Como $x \to +\infty \implies 1/x \to 0$ entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left[\frac{1}{x}\right] &= \left[u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + \mathcal{O}(u^6)\right]_{u=1/x} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{120\, x^5} + \mathcal{O}\left[\frac{1}{x^6}\right] \end{aligned}$$

es un desarrollo generalizado cuando $x \to +\infty$

Nota 3.1. Sean $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ funciones tales que

$$p(u) = q(u) + \mathcal{O}\big[q(u)\big], \quad \text{cuando } u \to 0$$

entonces $p(u) \sim q(u)$ cuando $u \to 0$.
Lo mismo se dice si $u \to 0^+$ ó $u \to 0^-$.
Luego, si $f(u) \geq 0$ continua en $]0, b]$ y $f(u) \xrightarrow[u\to 0^+]{} \infty$ entonces

$$f(u) = g(u) \cdot p(u) \implies \int_0^b f = \int_0^b g(u) \cdot p(u)\, du \sim \int_0^b g(u) \cdot q(u)\, du$$

Igualmente,

$$f(u) = \frac{g(u)}{p(u)} \implies \int_0^b f = \int_0^b \frac{g(u)}{p(u)}\, du \sim \int_0^b \frac{g(u)}{q(u)}\, du$$

Nota 3.2. Sea $p(x) = (x-a)^\alpha + \mathcal{O}\big[(x-a)^\alpha\big]$, cuando $x \to a$, o simplemente que $p(x) \sim (x-a)^\alpha$.
Si $f : \,]0,b] \to [\,0,+\infty[$ continua, entonces

$$f(x) = g(x)\cdot p(x) \implies \int_a^b f = \int_a^b g(x)\cdot p(x)\,dx \sim \int_a^b g(x)\cdot (x-a)^\alpha\,dx$$

Igualmente

$$f(x) = \frac{g(x)}{p(x)} \implies \int_a^b f = \int_a^b \frac{f(x)}{p(x)}\,dx \sim \int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^\alpha}\,dx$$

Ejemplo 3.3. Analice la integral

$$I = \int_4^6 \frac{\ln(3) - \ln(7-x)}{(x-4)^{3/2}}\,dx$$

Solución:
Recordemos que $\ln(1-u) = -u + \mathcal{O}(u)$ cuando $u \to 0$, luego

$$\begin{aligned}
\ln(7-x) &= \ln[3-(x-4)] \\
&= \ln(3) + \ln\left[1 - \frac{x-4}{3}\right] \\
&= \ln(3) - \frac{x-4}{3} + \mathcal{O}\left[\frac{x-4}{3}\right], \qquad \text{cuando } x \to 4^+
\end{aligned}$$

luego

$$I \sim \int_4^6 \frac{x-4}{3}\cdot\frac{1}{(x-4)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int_4^6 \frac{1}{(x-4)^{1/2}}\,dx$$

como la última es una p-integral de 2^{da} especie convergente ($p = 1/2 < 1$), entonces I es convergente.
$\square$

Nota 3.3. Sea $p(x) = x^\alpha + \mathcal{O}\big[x^\alpha\big]$, cuando $x^\alpha \to 0$, o si simplemente $p(x) \sim x^\alpha$

(a) Si $x^\alpha \to 0 \iff x \to 0$ (o sea que $\alpha > 0$) y $f : \,]0,b] \to [\,0,+\infty[$ continua, entonces

$$f(x) = g(x)\cdot p(x) \implies \int_0^b f = \int_0^b g(x)\cdot p(x)\,dx \sim \int_0^b g(x)\cdot x^\alpha\,dx$$

Igualmente

$$f(x) = \frac{g(x)}{p(x)} \implies \int_0^b f = \int_0^b \frac{f(x)}{p(x)}\,dx \sim \int_0^b \frac{g(x)}{x^\alpha}\,dx$$

(b) Si $x^\alpha \to 0 \iff x \to +\infty$ (o sea que $\alpha < 0$) y $f : \,[a,+\infty[\, \to [\,0,+\infty[$ continua, entonces

$$f(x) = g(x)\cdot p(x) \implies \int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} g(x)\cdot p(x)\,dx \sim \int_a^{+\infty} g(x)\cdot x^\alpha\,dx$$

Igualmente

$$f(x) = \frac{g(x)}{p(x)} \implies \int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{p(x)}\,dx \sim \int_a^{+\infty} \frac{g(x)}{x^\alpha}\,dx$$

Ejemplo 3.4. Analice la convergencia de la integral

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}\,\operatorname{sen}\left[\sqrt[5]{x^2}\right]}$$

Solución:

Recordemos que $\operatorname{sen}(u) = u + \mathcal{O}(u)$, entonces

$$\operatorname{sen}\left[\sqrt[5]{x^2}\right] = \sqrt[5]{x^2} + \mathcal{O}\left[\sqrt[5]{x^2}\right], \qquad \text{cuando } x \to 0^+$$

luego

$$I \sim \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{x}$$

La última es una p-integral de 2^{da} especie divergente ($p = 1$), entonces I es divergente. □

Ejemplo 3.5. Analice la convergencia de la integral

$$I = \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{2x} + 3x^2 - 1}{x^3\sqrt{x^2 + 5x - 14}} \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

Solución:

Note que $x \to +\infty \iff u = 1/\sqrt{x} \to 0^+$

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = [u + \mathcal{O}(u)]\Big|_{u=1/\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Luego

$$I \sim \int_3^{+\infty} \frac{x^2}{x^3 \cdot \sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^{2+1/2}} = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/2}}$$

que es una p-integral impropia de 1^{era} especie convergente, luego I es convergente. □

Ejemplo 3.6. Analice la convergencia de la integral

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\cos(x)}$$

Solución: I es una integra impropia de 2^{da} especie pues tiene asíntota vertical en $x = \pi/2$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \cos\left[\frac{\pi}{2}\right] \cdot \cos\left[\, x - \frac{\pi}{2}\,\right] - \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}\right] \cdot \operatorname{sen}\left[\, x - \frac{\pi}{2}\,\right] \\
&= -\operatorname{sen}\left[\, x - \frac{\pi}{2}\,\right] \\
&= -(x - \pi/2) + \mathcal{O}(x - \pi/2)
\end{aligned}$$

pues $\operatorname{sen}(u) = u + \mathcal{O}(u)$, luego

$$I = -\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{-\cos(x)} \sim -\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{x - \pi/2}$$

que es una p-integral de 2^{da} especie divergente, pues $p = 1$.

Se concluye que I es divergente. □

Ejemplo 3.7. Analice la convergencia de la integral

$$I = \int_{-\infty}^{-5} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-x^3} dx$$

Solución: Tenemos que $1/x \to 0$ cuando $x \to -\infty$, luego

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-x^3} &= \exp\left[-x^3 \cdot \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right] \\ &= \exp\left[-x^3 \cdot \left(2/x - \frac{1}{2}\cdot(2/x)^2 + \frac{1}{3}\cdot(2/x)^3 + \mathcal{O}\big[\,(2/x)^3\,\big]\right)\right] \\ &= \exp\left[-2x^2 + 2x - \frac{8}{3} + \mathcal{O}(1)\right]\end{aligned}$$

entonces

$$I \sim \int_{-\infty}^{-5} \exp\left[-2x^2 + 2x - \frac{8}{3}\right] dx = e^{-8/3} \cdot \int_{-\infty}^{-5} e^{-2x^2} \cdot e^{2x}\, dx$$

Note que $e^{-2x^2} \cdot e^{2x} \ll \dfrac{1}{x^2}$ cuando $x \to -\infty$, pues

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x^2}\cdot e^{2x}}{1/x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \cdot e^{2x} = 0 \cdot 0 = 0$$

Por comparación al límite

$$\int_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{x^2} \text{ es } p\text{-integral de } 1^{\text{era}} \text{ especie convergente } \Longrightarrow \int_{-\infty}^{-5} e^{-2x^2} \cdot e^{2x}\, dx \text{ es convergente}$$

Luego I es convergente. $\square$

Nota 3.4. Del ejercicio anterior note que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-x^3}}{\exp\left[-2x^2+2x-\frac{8}{3}\right]} = 1$$

Referencias

[1] Pisa Volio E., *Introducción al Análisis real en una variable*, Editorial de la Universidad de Costa Rica, Costa Rica, 2003

[2] Poltronieri J., *Cálculo 2*, Serie: Cabécar, Costa Rica, 1998

[3] Duarte A. & Cambronero S., *Complementos de Cálculo*, 2011

[4] Spivak M., *Cálculo Infinitesimal*, Editorial Reverté, 1988

[5] Demidovich B., *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*, Editorial Mir, Moscú, URSS, 1973

[6] Piskunov N., *Cálculo diferencial e integral. tomo II*, Editorial Mir, Moscú, 1978

[7] Larson R., Hostetler, *Cálculo y Geometría Analítica*, Editorial McGraw-Hill, México, 1989

[8] Edwards C.H & Penney D. E., *Cálculo con Geometría Analítica*, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1996

[9] Spiegel M. R., *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*, Editorial McGraw-Hill, México, 1970

[10] Widder D., *Advanced Calculus*, Dover Publications, Inc., New York, USA, 1989