Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Prof. Miguel Walker Ureña

Dpto. Matemática Aplicada
MA-294: Cálculo para computación 2
Ciclo 2-2015

Tema 1. Teorema de Taylor

`[ versión 0.9 , compilado el 21/7/2016 ]`

Contenidos

1 Polinomios de Taylor

1.1 Aproximaciones Polinómicas usando Taylor

Nota 1.1 (Notación)**.** Se denota $C^n(\mathcal{D})$ como el *conjunto de funciones continuas*, derivables n veces en $\mathcal{D}$ y con k-ésima derivada continua para $k = 1, 2, \ldots n$.

En tal caso si f es una función $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que existen y son continuas en $\mathcal{D}$ las funciones $f, f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}$, se escribe

$$f \in C^n(\mathcal{D})$$

Definición 1.1 (Polinomio de Taylor)**.** Sea $f \in C^n(\mathcal{D})$ y sea $a \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, entonces el **Polinomio de Taylor** asociado a f, de orden n y centrado en $a \in \mathcal{D}$ es el polinomio de grado n correspondiente a

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

O sea que

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

siendo

$$f^{(0)}(a) = f(a) \quad \wedge \quad f^{(k)}(a) = \frac{d^k f(a)}{dx^k}$$

Nota 1.2 (Polinomio de Maclaurin)**.** El polinomio de Taylor de orden n asociado a $f \in C^n(\mathcal{D})$ es llamado **Polinomio de Maclaurin** si el centro es 0, o sea que

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k \end{aligned}$$

Nota 1.3 (Aproximación Polinomial)**.** Sea f una función $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea $P(x)$ un polinomio de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n$$

decimos que P es una *aproximación polinomial* de f en $x = a$ si

$$x \approx a \implies P(x) \approx f(x)$$

es decir que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{P(x)} = 1$$

Nota 1.4. Si $P(x) = a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n$, entonces

$$\boxed{P^{(k)}(a) = k!\,a_k}$$

en efecto

$$\begin{aligned} P(a) &= a_0 + a_1\,(a-a) + a_2\,(a-a)^2 + \cdots + a_n\,(a-a)^n \\ &= a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 \\ &= a_0 + 0 + 0 + \cdots + 0 \\ &= a_0 \end{aligned}$$

de igual manera

$$P'(a) = \left[a_1 + 2a_2\,(x-a) + 3\,(x-a)^2 + \cdots + na_n\,(x-a)^{n-1}\right]\Big|_{x=a} = a_1 + 0 = a_1$$
$$P''(a) = \left[2a_2 + 3\cdot 2a_3\,(x-a) + 4\cdot 3\,(x-a)^2 + \cdots + n(n-1)a_n\,(x-a)^{n-2}\right]\Big|_{x=a} = 2a_2$$
$$\vdots$$
$$P^{(k)}(a) = \left[k!\,a_k + (k+1)!\,a_{k+1}\,(x-a) + \frac{(k+2)!}{2}\,a_{k+2}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!}\,a_n\,(x-a)^{n-k}\right]\Bigg|_{x=a}$$
$$= k!\,a_k$$

Notas 1.5. Sea $f \in C^n(\mathcal{D})$ y sea T_n su polinomio de Taylor de orden n con centro $x = a \in \mathcal{D}$.

1. $T_n(x)$ es una aproximación polinomial de f, o sea

$$x \approx a \implies T_n(x) \approx f(x)$$

2. Si $P(x) = T_n(x)$ entonces

$$\begin{array}{rcl}
P(a) = f(a) & \Longrightarrow & P \wedge f \quad \text{tienen el mismo valor en } x = a \\
P'(a) = f'(a) & \Longrightarrow & P \wedge f \quad \text{tienen el mismo crecimiento en } x = a \\
P''(a) = f''(a) & \Longrightarrow & P \wedge f \quad \text{tienen la misma concavidad en } x = a \\
P^{(3)}(a) = f^{(3)}(a) & \Longrightarrow & \begin{cases}\text{rapidez con la que cambia la concavidad} \\ \text{de } f \text{ y } P \text{ es la misma en } x = a\end{cases} \\
\vdots & & \\
P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) & \Longrightarrow & P \wedge f \quad \text{tienen gráficas “parecidas” en } x = a
\end{array}$$

3. Si la diferencia entre x y a es pequeña, el valor $f(x)$ es cercano al valor $P(x)$, y si $x \in \mathbb{Q}$ entonces $T_n(x)$ es una *aproximación racional* de $f(x)$.

Definición 1.2 (Resto y error)**.** Si $a \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ y $T_n(x)$ es el polinomio de Taylor centrado a y orden n de $f \in C^n(\mathcal{D})$, el resto de la aproximación polinomial $T_n(x)$ corresponde al valor

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - T_n(x)}$$

luego el **error de la aproximación** es

$$\boxed{\varepsilon = |R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|}$$

el cual mide la “exactitud” de la aproximación polinomial $f(x) \approx T_n(x)$.
(Mientras “más pequeño sea ε, “más buena” es la aproximación)

Ejemplo 1.1. Sea $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Calcule el polinomio de Taylor centrado en $x = 4$ de orden 3 asociado a f.

(b) Aproxime racionalmente el valor $\sqrt{3}$, usando T_3 como aproximación polinomial.

(c) Usando la calculadora, compare la aproximación con el valor real de $\sqrt{3}$ y calcule el error cometido de manera aproximada.

Solución:
(a)

$$\begin{aligned} f(4) &= \sqrt{x}\Big|_{x=4} = 2 \\ f'(4) &= \frac{1}{2\,x^{1/2}}\Bigg|_{x=4} = \frac{1}{4} \\ f''(4) &= \frac{-1}{4\,x^{3/2}}\Bigg|_{x=4} = \frac{-1}{4\cdot 2^3} = \frac{-1}{32} \\ f^{(3)}(4) &= \frac{3}{8\,x^{5/2}}\Bigg|_{x=4} = \frac{3}{8\cdot 32} = \frac{3}{256} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2}(x-4)^2 + \frac{f^{(3)}(4)}{3!}(x-4)^3 \\ &= 2 + \frac{1}{4}\cdot(x-4) + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{32}\cdot(x-4)^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{256}(x-4)^3 \\ &= 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{T_3(x) = 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512}}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= \sqrt{x}\Big|_{x=3} \\ &\approx T_3(3) \\ &\approx \left[2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512}\right]_{x=3} \\ &= 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{64} - \frac{1}{512} \\ &= \frac{1024 - 128 - 8 - 1}{512} \\ &= \frac{887}{512} \end{aligned}$$

Tenemos entonces la aproximación racional

$$\boxed{\sqrt{3} \approx \frac{887}{512}}$$

(c) *Usando la calculadora* obtenemos

$$\sqrt{3} \approx 1.732\,050\,808 \quad \wedge \quad \frac{887}{512} = 1.732\,421\,875$$

luego el error de aproximación es

$$\varepsilon \approx 0.000\,371\,067\,431\,1$$

Note que los primeros tres dígitos decimales coinciden. □

Ejemplo 1.2 (Ejercicio). *Sea $f(x) = \ln(x)$.*

(a) Calcule el polinomio de Taylor centrado en $x = 1$ de orden 5 asociado a f.

(b) Aproxime racionalmente el valor $\ln(4/3)$, usando T_5 como aproximación polinomial.

(c) Usando la calculadora, compare la aproximación con el valor real de $\ln(4/3)$ y calcule el error cometido de manera aproximada.

Respuestas:

(a) $T_5(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}$

(b) $\ln(4/3) \approx T_5(4/3) = \frac{1\,399}{4\,860} = 0.287\,860\ldots$

(c) Con ayuda de una calculadora tenemos que $\ln(4/3) = 0.287\,682\ldots$, entonces el error es

$$\varepsilon = |\ln(4/3) - T_5(4/3)| = 0.000\,178\ldots$$

□

Ejemplo 1.3. Halle el polinomio de Maclaurin de orden 4 de la función $f(x) = \cos(x)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \cos(x)\Big|_{x=0} = 1 \\
f'(0) &= -\operatorname{sen}(x)|_{x=0} = 0 \\
f''(0) &= -\cos(x)|_{x=0} = -1 \\
f^{(3)}(0) &= \operatorname{sen}(x)|_{x=0} = 0 \\
f^{(4)}(0) &= \cos(x)|_{x=0} = 1
\end{aligned}$$

luego tenemos el polinomio de Maclaurin

$$\begin{aligned}
T_4(x) &= f(a) + f'(a)\,x + \frac{f''(a)}{2}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 \\
&= 1 + 0\cdot x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{0}{6}\,x^3 + \frac{1}{4!}\,x^4 \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.4 (Ejercicio). *Halle el polinomio de Maclaurin de orden 5 de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.*

Resp. / $T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

1.2 Resto de Lagrange y Análisis de error

1.2.1 El Resto de Lagrange

Nota 1.6. Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, denotemos el conjunto $V(x_1, x_2)$ como el intervalo acotado por x_1 y x_2, es decir

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} [\,x_1, x_2\,] & , \text{ si } x_1 \leq x_2 \\ [\,x_2, x_1\,] & , \text{ si } x_1 > x_2 \end{cases}$$

Ejemplo 1.5.

$$V(5, 5.3) = [\,5, 5.3\,] \quad \wedge \quad V(1.2, 0.68) = [\,0.68, 1.2\,]$$

Teorema 1.1 (Teorema de Taylor)**.**

Si $a \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, $T_n(x)$ el polinomio de Taylor de orden n centrado a asociado a $f \in C^{n+1}(\mathcal{D})$, y si

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

*es el resto asociado (Ver **Definición 1.1**), entonces existe $\theta \in V(a, x)$ tal que*

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}}$$

*La fórmula anterior es llamada **El Resto a Lagrange**.*

La ecuación

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}\,(x-a)^k + R_n(x)$$

*es llamada **Fórmula de Taylor**, mientras que la **Fórmula de Taylor con resto de Lagrange** corresponde a*

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}\,(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1},\ \theta \in V(a, x)}$$

Definición 1.3 (Fórmula de Maclaurin)**.**

Un polinomio de Taylor centrado en cero es llamado **polinomio de Maclaurin**.

Además la ecuación

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{n!}\,x^k + R_n(x)$$

es llamada **Fórmula de Maclaurin**, mientras que la **Fórmula de Maclaurin con resto de Lagrange** corresponde a

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{n!}\,x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,x^{n+1},\ \theta \in V(0, x)}$$

Teorema 1.2. *Si $a \in \mathcal{D}$ y $T_n(x)$ es el polinomio de Taylor centrado en a y de orden n de $f \in C^{n+1}(\mathcal{D})$ entonces*

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Teorema 1.3 (Error de aproximación)**.**
Usando la notación del ***Teorema 1.1****, tenemos que el error de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ corresponde a*

$$\boxed{\varepsilon = |f(x) - T(x)| = |R_n(x)| = \left|f^{(n+1)}(\theta)\right| \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

donde $\theta \in V(a, x)$.

Ejemplo 1.6. Calcule la fórmula de Taylor de orden 3 y centro $x = 4$ de la función $f(x) = \sqrt{x}$.
Acote el error cometido al aproximar el valor de $\sqrt{3}$ con el polinomio T_3.

Solución: En el **Ejemplo 1.1** se calculó

$$T_3(x) = 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512}$$
$$\sqrt{3} \approx T_3(3) = \frac{887}{512}$$

Note que

$$f^{(4)}(x) = \left[f^{(3)}(x)\right]' = \left[\frac{3}{8\,x^{5/2}}\right]' = \frac{-15}{16\,x^{7/2}}$$

entonces existe $\theta \in V(4, x)$ tal que

$$R_3 = \frac{f^{(4)}(\theta)}{4!}\,(x-4)^4 = \frac{1}{4!} \cdot \frac{-15}{16\,\theta^{7/2}}\,(x-4)^4 = \frac{-5}{128\sqrt{\theta^7}}\,(x-4)^4$$

La fórmula de Taylor con resto de Lagrange es

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512} - \frac{5\,(x-4)^4}{128\sqrt{\theta^7}}, \quad \theta \in V(4, x)$$

El error cuando $x = 3$ corresponde a

$$\varepsilon = \left|\frac{-5}{128\sqrt{\theta^7}}\,(x-4)^4\right|_{x=3} = \frac{5 \cdot |(-1)^4|}{128\sqrt{\theta^7}} = \frac{5}{128\sqrt{\theta^7}}, \quad \theta \in [3, 4]$$

note que

$$\begin{aligned} 3 \leq \theta \leq 4 &\iff \frac{1}{3} \geq \frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{4} \\ &\iff \frac{1}{3} \geq \frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{4} \\ &\iff \frac{1}{\sqrt{3^7}} \geq \frac{1}{\sqrt{\theta^7}} \geq \frac{1}{\sqrt{4^7}} \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{1}{\sqrt{\theta^7}} \leq \frac{1}{\sqrt{3^7}} = \frac{1}{27\sqrt{3}} < \frac{1}{27}, \quad \text{pues } \sqrt{3} > 1 \iff \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

finalmente

$$\varepsilon = \frac{5}{128\sqrt{\theta^7}} < \frac{5}{128} \cdot \frac{1}{27} = \frac{5}{3456} \approx 0.001\,446\,759\,2 \quad \text{es una cota del error}$$

□

Ejemplo 1.7 (Ejercicio)**.** *Calcule la fórmula de Taylor de orden 4 y centro $x = 25$ de la función $f(x) = \sqrt{x}$.*

Aproxime $\sqrt{29}$ usando la fórmula de Taylor encontrada y acote el error cometido.

Respuesta:

$$f(x) = 5 + \frac{x-25}{10} - \frac{(x-25)^2}{1\,000} + \frac{(x-25)^3}{50\,000} - \frac{(x-25)^4}{2\,000\,000} + \frac{7\,(x-25)^5}{256\,\theta^{9/2}} \quad , \ \theta \in V(25, 29)$$

Entonces

$$\sqrt{29} = \frac{84\,143}{15\,625} + \frac{28}{\theta^{9/2}} \approx 5.385\,152$$

Luego el error de la aproximación

$$\varepsilon = \frac{28}{\theta^{9/2}} \leq \frac{28}{5^9} = 0.000\,014\ldots$$

□

Ejemplo 1.8 (Ejercicio)**.** *Use el polinomio de Taylor de orden 3 y centro 60° asociado a la función $f(x) = \cos(x)$, para aproximar $\cos(50^\circ)$ como expresión racional en términos de π y de $\sqrt{3}$.*

Acote el error de dicha aproximación.

Respuesta: Tenemos que existe $\theta \in V\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{18}\right)$ tal que

$$\cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\cos(\theta)}{24}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4$$

Por lo que (y tomando en cuenta que $50^\circ = 5\pi/18$)

$$\cos(50^\circ) \approx \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{36} - \frac{\pi^2}{1\,296} - \frac{\pi^3\sqrt{3}}{69\,984}$$

con error de aproximación

$$\varepsilon = \left|\frac{\pi^4\cos(\theta)}{2^7 \cdot 3^9}\right| = \left|\frac{\pi^4\cos(\theta)}{2\,519\,424}\right| \quad , \ \theta \in V\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{18}\right)$$

Como $|\cos(\theta)| \leq 1$,

$$\varepsilon \leq \frac{\pi^4}{2^7 \cdot 3^9} = \frac{\pi^4}{2\,519\,424} \approx 0.000\,039$$

□

1.2.2 Decimales de una aproximación

Definición 1.4 (error)**.** (Ver **Definición 1.1**)
Si $z \in \mathbb{R}$ y $z_0 \in \mathbb{R}$ es una aproximación numérica de z, llamaremos **error absoluto** o simplemente "error" de la aproximación al valor numérico

$$\boxed{\varepsilon = |z - z_0|}$$

el cual mide la "exactitud" de la aproximación numérica.
Si podemos acotar el error como $\varepsilon < \varepsilon_0$, se puede escribir que

" $z \approx z_0$ *con un error menor que* ε_0 "

Que se lee: " z *es aproximadamente* z_0 *con un error menor que* ε_0".

Nota 1.7 (Interpretación del error)**.** Si $z \approx z_0$ con un error $\varepsilon < \varepsilon_0$, entonces

$$|z - z_0| < \varepsilon_0 \iff -\varepsilon_0 < z - z_0 < \varepsilon_0 \iff \boxed{z_0 - \varepsilon_0 < z < z_0 + \varepsilon_0}$$

Lo que nos garantiza que el valor exacto de z pertenece a un intervalo abierto tal que

$$z \in \left]z_0 - \varepsilon_0,\, z_0 + \varepsilon_0\right[$$

□

Nota 1.8 (Potencias de 10)**.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $\alpha \in [0, 9]$ tenemos que

$$\boxed{\begin{array}{rc}
 & \alpha \cdot 10^{-1} = 0.\alpha \leq 0.9 < 1 = 10^0 \\
0.1 = 10^{-1} & \alpha \cdot 10^{-2} = 0.0\alpha \leq 0.09 < 0.1 = 10^{-1} \\
0.01 = 10^{-2} & \alpha \cdot 10^{-3} = 0.00\alpha \leq 0.009 < 0.01 = 10^{-2} \\
0.001 = 10^{-3} & \alpha \cdot 10^{-4} = 0.000\alpha \leq 0.000\,9 < 0.001 = 10^{-3} \\
0.0001 = 10^{-4} & \alpha \cdot 10^{-5} = 0.000\,0\alpha \leq 0.000\,09 < 0.000\,1 = 10^{-4} \\
\vdots & \vdots \\
0.\underbrace{00\cdots0}_{n-1 \text{ ceros}}1 = 10^{-n} & \alpha \cdot 10^{-(n+1)} = 0.\underbrace{00\cdots0}_{n \text{ ceros}}\alpha \leq 0.\underbrace{00\cdots0}_{n \text{ ceros}}9 < 0.\underbrace{00\cdots0}_{n-1 \text{ ceros}}1 = 10^{-n}
\end{array}}$$

Nota 1.9. Si una aproximación z_0 del valor numérico z tiene una exactitud de al menos ℓ dígitos decimales entonces el error

$$\varepsilon = |z - z_0| < \frac{1}{10^\ell} = 0.\underbrace{00\cdots0}_{\ell-1 \text{ ceros}}1$$

Pues el error tiene la forma

$$\varepsilon = 0.\underbrace{00\cdots0}_{\ell \text{ ceros}}\alpha_1\alpha_2\cdots < 0.\underbrace{00\cdots0}_{\ell-1 \text{ ceros}}1 = \frac{1}{10^\ell}$$

Nota 1.10. Si $z \approx z_0$ con un error $\varepsilon < 10^{-\ell}$, entonces

$$\boxed{z_0 - 10^{-\ell} < z < z_0 + 10^{-\ell}}$$

En tal caso es posible (pero **NO** se nos garantiza) que el valor exacto de z tenga los primeros ℓ dígitos decimales de z_0. (Ver **Nota 1.9**)

Lo que podemos garantizar es que los primeros dígitos decimales coincidentes entre los extremos del intervalo " $z_0 \pm 10^{-\ell}$ " van a coincidir con los correspondientes primeros dígitos decimales de z.

Nota 1.11. Si queremos aproximar $z \approx z_0$ con una exactitud de al menos ℓ decimales, podemos establecer que $\varepsilon < 10^{-\ell}$ es una buena primera estimación, pues $\varepsilon < 10^{-\ell}$ es una **condición necesaria** para que una aproximación tenga ℓ dígitos decimales, pero debido a los posibles redondeos efectuados en el momento de calcular la resta " $z - z_0$ ", **NO** es una condición **suficiente**. (Ver notas 1.9 y 1.10)

Se recomienda buscar que el error sea $\varepsilon < 10^{-(\ell+1)}$, como primera estimación al buscar una aproximación con ℓ dígitos decimales, posteriormente se analiza el intervalo

$$\left]z_0 - 10^{-(\ell+1)},\, z_0 + 10^{-(\ell+1)}\right[$$

y se comparan los primeros dígitos decimales de los extremos.

Si en los extremos del intervalo no coinciden los primeros ℓ dígitos decimales, se procede a mejorar la aproximación: $\quad \varepsilon < 10^{-(\ell+2)} \quad \vee \quad \varepsilon < 10^{-(\ell+3)} \quad \vee \quad \ldots$

Diremos que la condición $\varepsilon < 10^{-(\ell+1)}$ es una **condición necesaria** pero **no suficiente** para garantizar ℓ dígitos decimales en una aproximación , en el **Ejemplo 1.9** se ilustra este hecho.

Ejemplo 1.9. El valor exacto del número irracional "pi" es $\boxed{\pi = 3.141592653589793\ldots}$.

(a) La aproximación $\pi \approx 3.1415$ tiene 4 dígitos decimales exactos y el error es

$$\varepsilon = |\pi - 3.1415| = 0.000\,092\,653\cdots < 0.0001 = 10^{-4}$$

Note también que si $\pi_0 = 3.1415$

$$\pi \in \left]\pi_0 - 10^{-4},\, \pi_0 + 10^{-4}\right[= \left]3.1414,\, 3.1416\right[$$

Dentro de este intervalo hay infinitos números como por ejemplo: 3.14142, 3.141482, ...

En los extremos de este intervalo coinciden los primeros 3 dígitos decimales, lo que garantiza tres decimales en la aproximación pero no 4.

(b) La aproximación $\pi \approx 3.1414$ tiene 3 dígitos decimales exactos y el error es

$$\varepsilon = |\pi - 3.1414| = 0.000\,192\,65\cdots < 0.001 = 10^{-3}$$

Note también que si $\pi_0 = 3.1414$

$$\pi \in \left]\pi_0 - 10^{-3},\, \pi_0 + 10^{-3}\right[= \left]3.1404,\, 3.1424\right[$$

Dentro de este intervalo hay infinitos números como por ejemplo: 3.1405, 3.1409815, ...

En los extremos de este intervalo coinciden los primeros 2 dígitos decimales, lo que garantiza dos decimales en la aproximación.

(c) La aproximación $\pi \approx 3.1416$ tiene 3 dígitos decimales exactos, pero el error

$$\varepsilon = |\pi - 3.1416| = 0.000\,007\,346\,4\cdots < 0.000\,001 = 10^{-6}$$

hace pensar que son 6 dígitos exactos, cuando en realidad son 3.

Note también que si $\pi_0 = 3.1416$

$$\pi \in \left]\pi_0 - 10^{-6},\, \pi_0 + 10^{-6}\right[= \left]3.141599,\, 3.141601\right[$$

Dentro de este intervalo hay infinitos números como por ejemplo: 3.1416, 3.141600278, ...

En los extremos de este intervalo coinciden los primeros 3 dígitos decimales, lo que garantiza tres decimales en la aproximación.

Ejemplo 1.10. ¿Cuantos dígitos decimales se pueden garantizar en la aproximación $\sqrt{3} \approx \dfrac{887}{512}$ de los ejemplos 1.1 y 1.6?

Solución: En el **Ejemplo 1.6** obtuvimos que el error

$$\varepsilon < \frac{5}{3456} \approx 0.001\,446\,759\,2 < 10^{-2}$$

Es posible que los dos primeros decimales sean exactos, para mayor precisión tomemos en cuenta que

$$\varepsilon < \frac{5}{3456} \approx 0.001\,446\,759\,2 < 0.0015$$

entonces

$$\sqrt{3} \in \left] \frac{887}{512} - 0.0015, \frac{887}{512} + 0.0015 \right[\subset \left] 1.730\,920,\, 1.733\,922 \right[$$

Por lo tanto podemos garantizar dos dígitos decimales exactos, pues en los extremos del intervalo coincide en los dos primeros dígitos decimales.

Para el intervalo anterior tome en cuenta que

$$\begin{cases} \dfrac{887}{512} - 0.0015 = 1.730\,921\cdots > 1.730\,920 & \text{es extremo inferior} \\ \dfrac{887}{512} + 0.0015 = 1.733\,921\cdots < 1.730\,922 & \text{es extremo superior} \end{cases}$$

En el ejemplo 1.1 obtuvimos una cota más precisa, pues nos ayudamos con la calculadora.

Parte de la precisión se perdió al usar que $1/\sqrt{3} < 1$.

Con la ayuda de la calculadora podemos notar que

$$\varepsilon \leq \frac{5}{128\sqrt{\theta^7}} \leq \frac{5}{128 \cdot 27\sqrt{3}} \approx 0.000\,835\,287 < 0.00084 < 10^{-3}$$

Lo cual nos lleva a concluir que $\sqrt{3} \in \left] 1.731\,580,\, 1.733\,262 \right[$, lo que otra vez garantiza dos dígitos exactos, pero es posible que sean tres.

El valor exácto de $\sqrt{3}$ es $1.732\,050\ldots$ mientras que

$$\frac{887}{512} = 1.732\,421\ldots$$

Significa en en realidad son tres los dígitos decimales que coinciden, aunque no se puede garantizar por ahora. □

Ejemplo 1.11 (Ejercicio)**.** *¿Cuantos dígitos decimales se pueden garantizar en la aproximación*

$$\sqrt{29} \approx T_5(29) = \frac{84\,143}{15\,625} \quad , \; R_5(29) = \frac{28}{\theta^{9/2}} \qquad \textit{para } \theta \in [25, 29]$$

*del **Ejercicio 1.7**?*

Resp. / Usando como cota del error al valor $0.000\,0144$ obtenemos que

$$\sqrt{29} \in \left] 5.385\,137,\, 5.385\,167 \right[$$

lo que garantiza cuatro decimales en la aproximación.

Ejemplo 1.12 (Ejercicio)**.** *Use el polinomio de orden 3 y centro 27 de la función* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *para aproximar el número* $\sqrt[3]{25}$*.*

Halle una cota del error cometido en la aproximación.

¿Cuantos decimales exactos se pueden garantizar en dicha aproximación?

Presente el intervalo de aproximación correspondiente.

Respuesta: La fórmula de Taylor correspondiente es

$$\sqrt[3]{x} = 2 + \frac{x-27}{27} - \frac{5\,(x-27)^3}{2\,187} + \frac{5\,(x-27)^3}{531\,441} - \frac{10\,(x-27)^4}{243 \cdot \theta^{11/3}} \quad , \; \theta \in V(27, x)$$

Obtendremos la aproximación $\sqrt[3]{25} = 2.924\,021\,669\ldots$ con error

$$\varepsilon = \frac{10 \cdot 2^4}{243 \cdot |\theta|^{11/3}} \quad , \; \theta \in [25, 27]$$

Luego

$$\varepsilon \leq \frac{160}{43\,046\,721} = 0.000\,000\,371\,689 \cdots < 10^{-6}$$

Es posible que hallan seis decimales exactos, pero se tiene que

$$\sqrt[3]{25} \in \; \left]2.924\,017, \; 2.924\,026\right[$$

Por los que podemos garantizar 4 decimales de exactitud.

Nota: En realidad sí son 6 los decimales exactos, pero no los podemos garantizar con la cota encontrada.

□

Ejemplo 1.13. Halle el polinomio de Maclaurin de la función $f(x) = e^x$, de grado tal que la aproximación

$$e \approx T_n(1)$$

tenga una exactitud de al menos 3 términos decimales. Calcule la aproximación racional.

Solución:

Para resolver este problema necesitamos una fórmula para el error $\varepsilon = |R_n|$ alrededor de 0, cuando $x = 1$.

Como $[e^x]' = e^x$, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = e^x$$

Luego el resto de Lagrange es

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \quad \theta \in V(0,x) = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \quad \theta \in V(0,x)$$

como $x = 1$, tenemos entonces el error

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left| \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\, 1^{n+1} \right|, \quad \theta \in [\,0, 1\,] \\ &= \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \quad \theta \in [\,0, 1\,] \end{aligned}$$

note que

$$0 \leq \theta \leq 1 \iff e^0 \leq e^{\theta} \leq e^1 = e < 3$$

entonces

$$\varepsilon = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Para garantizar 3 decimales en la aproximación de e es necesario que

$$\begin{aligned}\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10^4} &\iff 3\cdot 10^4 < (n+1)! \\ &\iff (n+1)! > 30\,000\end{aligned}$$

consideramos la siguiente tabla de valores

$n+1$	$(n+1)!$
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320

como $40\,320 > 30\,000$, entonces $n+1=8$ es suficiente

$$\therefore \quad \varepsilon < \frac{1}{10^4} \text{ cuando } n=7$$

Ahora, como para todo k, $f^{(k)}(x) = e^x \implies f^{(k)}(0) = e^0 = 1$

$$\begin{aligned}e^x &\approx f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(7)}(x)}{6!}\,x^6 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}e &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} \\ &= \frac{1440 + 360 + 120 + 30 + 6 + 1}{720} \\ &= \frac{685}{252} \\ &= 2.718\,253\,968\ldots\end{aligned}$$

Finalmente, note que

$$e \in \left]\, 2.718\,253 - 10^{-4},\, 2.718\,254 + 10^{-4} \,\right[\;=\;]\,2.718\,153,\, 2.718\,354\,[$$

Podemos garantizar que los primeros tres dígitos decimales de la aproximación

$$e \approx \frac{685}{257}$$

son exactos, pues los primeros tres términos de los extremos del intervalo generado por la aproximación son los mismos. □

Nota 1.12. Con la ayuda de la calculadora obtenemos que

$$\mathsf{e} \approx 2.718\,281\,828$$

y la aproximación anterior

$$\frac{685}{257} = 2.718\,253\,968\ldots$$

lo que significa que con esta aproximación, en realidad hay cuatro dígitos decimales exáctos.

Ejemplo 1.14 (Ejercicio)**.** *¿De que orden debe ser el polinomio de Taylor centrado en* 1 *y asociado a* $f(x) = \ln(x)$*, para que el error de la aproximación de* $\ln(4/3)$ *sea menor que* 10^{-5}*?*

Respuesta: Notando que el resto de Lagrange asociado al polinomio de Taylor de orden m es

$$R_m(x) = (-1)^m \cdot \frac{(x-1)^{m+1}}{(m+1)\,\theta^{m+1}} \quad , \ \theta \in V(1,x)$$

Para eso hay que buscar el patrón a partir de las primeras derivadas de $f(x)$.

Hay que concluir que para que $\varepsilon = |R_m(4/3)| < 10^{-5}$, es suficiente tomar $m = 8$.

Se llega a esta conclusión depués de analizar una tabla de valores a la vez que se usa que $\dfrac{1}{\theta} < 1$ y que la condición solicitada equivale a buscar m tal que $(m+1)\cdot 3^{m+1} > 100\,000$. ☐

Ejemplo 1.15 (Ejercicio)**.** *Halle el polinomio de Taylor centrado en* 36 *y asociado a* $f(x) = \sqrt{x}$*, de manera tal que la aproximación de* $\sqrt{39}$ *garantice al menos* 5 *dígitos decimales.*

Respuesta: Para $\theta \in V(36,x)$ se tiene el resto de Lagrange:

$$R_m(x) = (-1)^m \cdot \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot (2m-1)}{2^{m+1}\sqrt{\theta^{4m+1}}} \cdot \frac{(x-36)^{m+1}}{(m+1)!} \quad ,$$

Para eso hay que buscar el patrón a partir de las primeras derivadas de $f(x)$.

Si buscamos que $\varepsilon = |R_m(39)| < 10^{-5}$, es suficiente tomar orden $m = 4$.

Se llega a esta conclusión depués de analizar una tabla de valores a la vez que se usa que

$$\frac{1}{\sqrt{\theta^{2m+1}}} < \frac{1}{6^{2m+1}} \quad , \text{ pues } \theta \in [36, 39]$$

y que la condición solicitada equivale a buscar m tal que

$$\big[\ 3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot (2m-1)\ \big]\cdot 3^{m+1} < \frac{2^{m+1}\cdot 6^{2m+1}\cdot (m+1)!}{10^5}$$

El polinomio de Taylor de orden 4 es

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 6 + \frac{x-36}{2^2\cdot 3} - \frac{(x-36)^2}{2^6\cdot 3^3} + \frac{(x-36)^3}{2^9\cdot 3^5} - \frac{5\,(x-36)^4}{2^{14}\cdot 3^7} \\ &= 6 + \frac{x-36}{12} - \frac{(x-36)^2}{1\,728} + \frac{(x-36)^3}{124\,416} - \frac{5\,(x-36)^4}{35\,831\,808} \end{aligned}$$

Al analizar el intervalo de la aproximación $\sqrt{39} \approx T_4(39)$ notamos que

$$\sqrt{39} \in \big]\ 6.244\,996\,718,\ 6.244\,998\,038\ \big[$$

Se concluye que T_4 nos garantiza una aproximación con 5 dígitos decimales exáctos. ☐

Ejemplo 1.16 (Ejercicio)**.** *¿De que orden debe ser el polinomio de Taylor centrado en* 81 *y asociado a* $f(x) = \sqrt[4]{x}$*, para que la aproximación* $\sqrt[4]{85} \approx T_m(x)$ *tenga un error menor que* 10^{-9}*?*

Respuesta: Para $\theta \in V(81, x)$ se tiene el resto de Lagrange:

$$R_m(x) = (-1)^m \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4m-1)}{4^{m+1} \sqrt[4]{\theta^{4m+3}}} \cdot \frac{(x-81)^{m+1}}{(m+1)!} \quad ,$$

Para eso hay que buscar el patrón a partir de las primeras derivadas de $f(x)$.
Hay que concluir que para que $\varepsilon = |R_m(85)| < 10^{-9}$, es suficiente tomar orden $m = 5$.
Se llega a esta conclusión depués de analizar una tabla de valores a la vez que se usa que

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\theta^{4m+3}}} < \frac{1}{3^{4m+3}} \quad , \text{ pues } \theta \in [81, 85]$$

y que la condición solicitada equivale a buscar m tal que

$$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4m-1) < \frac{3^{4m+3} \cdot (m+1)!}{10^9}$$

□

1.3 Cambios de variable

Nota 1.13. Si $f(x) \in C^{(n+1)}(\mathcal{D})$ tiene fórmula de Taylor de orden n y centro $x = 0$

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + R_n(x) \quad , 0, x \in \mathcal{D}$$

entonces la fórmula de Taylor de la función $h(x) = f\big[\alpha(x-a)^s\big]$ corresponde a

$$h(x) = a_0 + a_1\, \big[\alpha(x-a)^s\big] + a_2\, \big[\alpha(x-a)^s\big]^2 + \cdots + a_n\, \big[\alpha(x-a)^s\big]^n + R_n\big[\alpha(x-a)^s\big]$$

o sea que

$$\boxed{h(x) = a_0 + a_1\alpha\, (x-a)^s + a_2\alpha^2\, (x-a)^{2s} + \cdots + a_n\alpha^n\, (x-a)^{ns} + R_n\big[\alpha(x-a)^s\big]}$$

siendo

$$\boxed{R_n\big[\alpha(x-a)^s\big] = \frac{f^{(n+1)}(\theta)\, \alpha^{n+1}\, (x-a)^{s(n+1)}}{(n+1)!}, \quad \theta \in V\big[\,0, \alpha(x-a)^s\,\big]}$$

y es una fórmula de Taylor para la función $h(x)$ de centro $x = a$ y de orden

$$m \in [\, sn,\ s(n+1) - 1\,]$$

De hecho el resto de la fórmula de Taylor para h es

$$R_{sn} = R_{sn+1} = R_{sn+2} = \cdots = R_{s(n+1)-1} = R_n\big[\alpha(x-a)^s\big]$$

el cual es distinto al resto de Lagrange.

Nota 1.14. Fórmula de Taylor de la función exponencial:
Como $\big[e^x\big]^{(k)} = e^x$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta\, x^{n+1}}{(n+1)!} \quad , \ \theta \in V(0, x)}$$

Igualmente

$$\boxed{e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n\, x^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}\, e^{-\theta}\, x^{n+1}}{(n+1)!} \quad , \ \theta \in V(0, x)}$$

Ejemplo 1.17. Calcule una fórmula de Taylor de orden 12 centrada en $x = 0$ de la función

$$f(x) = e^{5x^3}$$

Solución:
Como

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3!} + \cdots + \frac{w^n}{n!} + \frac{e^\theta\, w^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \theta \in V(0, w)$$

entonces

$$e^{5x^3} = 1 + 5x^3 + \frac{\big[5x^3\big]^2}{2} + \frac{\big[5x^3\big]^3}{3!} + \cdots + \frac{\big[5x^3\big]^n}{n!} + \frac{e^\theta\, \big[5x^3\big]^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \theta \in V(0, 5x^3)$$

el orden de la fórmula anterior es $3n$ y $3n = 12 \implies n = 4$

concluimos que

$$e^{5x^3} = 1 + 5x^3 + \frac{\left[5x^3\right]^2}{2} + \frac{\left[5x^3\right]^3}{3!} + \frac{\left[5x^3\right]^4}{4!} + \frac{e^{\theta}\left[5x^3\right]^5}{5!}, \quad \theta \in V(0, 5x^3)$$

$$\therefore \quad e^{5x^3} = 1 + 5x^3 + \frac{5^2\,x^6}{2} + \frac{5^3\,x^9}{3!} + \frac{5^4\,x^{12}}{4!} + \frac{e^{\theta}\cdot 5^5\,x^{15}}{5!}, \quad \theta \in V(0, 5x^3)$$

que de hecho es una fórmula de Taylor de orden 14.
El resto de la fórmula de Taylor anterior es

$$R_{12} = R_{13} = R_{14} = \frac{e^{\theta}\cdot 5^5\,x^{15}}{5!}, \quad \theta \in V(0, 5x^3)$$

$\square$

Ejemplo 1.18. Calcule una fórmula de Taylor de orden 4 centrada en $x = 3$ de la función

$$f(x) = e^{-2x}$$

Solución:
Como el centro solicitado es $x = 3$ sea $\boxed{w = x - 3}$, entonces

$$x = w + 3 \implies f(x) = e^{-2(w+3)} = e^{-6}\,e^{-2w}$$

Como

$$e^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{e^{\theta}\,u^5}{5!}, \quad \theta \in V(0, u)$$

entonces

$$\begin{aligned} e^{-2w} &= 1 - 2w + \frac{(-2w)^2}{2} + \frac{(-2w)^3}{3!} + \frac{(-2w)^4}{4!} + \frac{e^{\theta}\,(-2w)^5}{5!}, \quad \theta \in V(0, -2w) \\ &= 1 - 2w + \frac{4\,w^2}{2} - \frac{8\,w^3}{6} + \frac{16\,w^4}{24} - \frac{e^{\theta}\,32\,w^5}{120}, \quad \theta \in V(0, -2w) \\ &= 1 - 2w + 2\,w^2 - \frac{4\,w^3}{3} + \frac{2\,w^4}{3} - \frac{4\,e^{\theta}\,w^5}{15}, \quad \theta \in V(0, -2w) \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos la fórmula de Taylor solicitada:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-6}\,e^{-2w} \\ &= e^{-6}\left[1 - 2w + 2\,w^2 - \frac{4\,w^3}{3} + \frac{2\,w^4}{3} - \frac{4\,e^{\theta}\,w^5}{15}\right]_{w=x-3}, \quad \theta \in V(0, -2w) \\ &= \frac{1}{e^6} - \frac{2\,(x-3)}{e^6} + \frac{2\,(x-3)^2}{e^6} - \frac{4\,(x-3)^3}{3\,e^6} + \frac{2\,(x-3)^4}{3\,e^6} - \frac{4\,e^{\theta}\,(x-3)^5}{15\,e^6} \end{aligned}$$

donde $\theta \in V(0, -2(x-3))$ $\square$

Nota 1.15. Para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2k$ o $m = 2k + 1$, luego

$$\left[\operatorname{sen}(x)\right]^{(m)} = \begin{cases} (-1)^k \operatorname{sen}(x) & , \text{ si } m = 2k \\ (-1)^k \cos(x) & , \text{ si } m = 2k+1 \end{cases} \quad \wedge \quad \left[\cos(x)\right]^{(m)} = \begin{cases} (-1)^k \cos(x) & , \text{ si } m = 2k \\ (-1)^{k+1} \operatorname{sen}(x) & , \text{ si } m = 2k+1 \end{cases}$$

Nota 1.16. Para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2k$ o $m = 2k+1$, luego

$$\big[\operatorname{sen}(x)\big]^{(m)}_{x=0} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } m = 2k \\ (-1)^k & , \text{ si } m = 2k+1 \end{cases} \quad \wedge \quad \big[\cos(x)\big]^{(m)}_{x=0} = \begin{cases} (-1)^k & , \text{ si } m = 2k \\ 0 & , \text{ si } m = 2k+1 \end{cases}$$

Nota 1.17. Fórmulas de Taylor para funciones trigonométricas

$$\boxed{\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}}$$

donde

$$R_{2n+1} = R_{2n+2} = \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta)}{(2n+3)!}\, x^{2n+3}$$

También

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}}$$

donde

$$R_{2n} = R_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta)}{(2n+2)!}\, x^{2n+2}$$

Ejemplo 1.19. Considere la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

(a) Halle la fórmula de Taylor con resto de Lagrange centrado en $x = 30°$ de orden 3 de la función $f(x)$.

(b) Usando la fórmula de Taylor obtenida en la parte (a), usando las aproximaciones

$$\sqrt{3} \approx 1.732 \quad \wedge \quad \pi = 3.142$$

aproxime $\operatorname{sen}(25°)$. Acote el error cometido en tal aproximación.

Solución:

Note que $30° = \pi/6$

(a) Sea $w = x - \pi/6 \iff x = w + \pi/6$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}(w + \pi/6) \\ &= \operatorname{sen}(w)\cdot\cos(\pi/6) + \cos(w)\cdot\operatorname{sen}(\pi/6) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(w) + \frac{1}{2}\cos(w)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x) &\approx \frac{\sqrt{3}}{2}\left[w - \frac{w^3}{6}\right] + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{w^2}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, w - \frac{1}{4}\, w^2 - \frac{\sqrt{3}}{12} w^3\end{aligned}$$

luego el polinomio de Taylor de $f(x)$ de orden 3 y de centro $x = \pi/6$ es

$$T_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$$

Note que

$$\big[\operatorname{sen}(x)\big]^{(4)} = (-1)^2\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x)$$

entonces existe $\theta \in V(\pi/6, x)$

$$R_3 = \frac{f^{(4)}(\theta)}{4!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{24}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4$$

La fórmula de Taylor con resto de Lagrange corresponde

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{24}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4$$

donde $\theta \in V(\pi/6, x)$

(b) Note que

$$25^\circ = \frac{25\pi}{180} = \frac{5\pi}{36}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(25^\circ) &= \operatorname{sen}(x)\Big|_{x=5\pi/36} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{5\pi}{36} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{5\pi}{36} - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{5\pi}{36} - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{24}\left(\frac{5\pi}{36} - \frac{\pi}{6}\right)^4 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-\pi}{36}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{-\pi}{36}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{-\pi}{36}\right)^3 + \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{24}\left(\frac{-\pi}{36}\right)^4 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{72} - \frac{\pi^2}{4 \cdot 36^2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \pi^3}{12 \cdot 36^3} + \frac{\pi^4 \operatorname{sen}(\theta)}{24 \cdot 36^4} \\
&\approx 0.422\,617\,09
\end{aligned}$$

el error

$$\varepsilon = \left|\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{24}\left(\frac{-\pi}{36}\right)^4\right| = \frac{|\operatorname{sen}(\theta)| \cdot \pi^4}{24 \cdot 36^4} \leq \frac{\pi^4}{24 \cdot 36^4} < \frac{4^4}{24 \cdot 36^4} \approx 0.000\,006\,35 < \frac{1}{10^5}$$

$\square$

Nota 1.18. Con ayuda de la calculadora obtenemos que

$$\operatorname{sen}(25^\circ) \approx 0.422\,618\,261\,7$$

Nota 1.19. Fórmulas de Taylor para funciones hiperbólicas

Como para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\Big[\operatorname{senh}(x)\Big]^{(m)} = \begin{cases} \operatorname{senh}(x) & , \text{ si } m = 2k \\ \cosh(x) & , \text{ si } m = 2k+1 \end{cases} \quad \wedge \quad \Big[\cosh(x)\Big]^{(m)} = \begin{cases} \cosh(x) & , \text{ si } m = 2k \\ \operatorname{senh}(x) & , \text{ si } m = 2k+1 \end{cases}$$

entonces

$$\boxed{\operatorname{senh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}}$$

donde

$$R_{2n+1} = R_{2n+2} = \frac{\cosh(\theta)}{(2n+3)!}\,x^{2n+3}$$

También

$$\boxed{\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}}$$

donde

$$R_{2n} = R_{2n+1} = \frac{\cosh(\theta)}{(2n+2)!}\,x^{2n+2}$$

1.4 Derivadas e Integrales

Teorema 1.4. *Si $f(x) \in C^{(n)}(\mathcal{D})$ tiene fórmula de Taylor de orden n y centro $x = a$*

$$f(x) = a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n + R_n(x)$$

para $a, x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, entonces

(a) Como para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\left[\,(x-a)^k\,\right]' = k\,(x-a)^{k-1}$$

entonces la fórmula de Taylor de la función $f'(x)$ corresponde a

$$\boxed{f'(x) = a_1 + 2a_2\,(x-a) + 3a_3\,(x-a)^2 + \cdots + na_n\,(x-a)^{n-1} + R_n'(x)}$$

o sea, una fórmula de Taylor centrada en $x = a$ de orden $n-1$ y resto $R_n'(x)$.
Además si $f(x) \in C^{(n+1)}(\mathcal{D})$ tiene resto de Lagrange

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} \quad , \ \theta \in V(a,x)$$

entonces si $f(x) \in C^{(n+2)}(\mathcal{D})$ por regla del producto

$$R_n'(x) = f^{(n+1)}(\theta)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!} + \left[f^{(n+1)}(\theta)\right]'\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad , \ \theta \in V(a,x)$$

Pero también existe $\phi \in V(a,x)$ tal que

$$R_n'(x) = \left[\,f'(x)\,\right]^{(n)}\Big|_{x=\phi}\cdot\frac{(x-a)^n}{n!} \implies \boxed{R_n'(x) = f^{(n+1)}(\phi)\cdot\frac{(x-1)^n}{n!}}$$

que corresponde al resto de Lagrange de la función $f'(x)$.

(b) Como para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\int_a^x (u-a)^k\,du = \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$$

entonces la fórmula de Taylor de la función

$$I(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

corresponde a

$$\boxed{I(x) = a_0\,(x-a) + a_1\,\frac{(x-a)^2}{2} + a_2\,\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots + a_n\,\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \int_a^x R_n(u)\,du}$$

o sea, una fórmula de Taylor centrada en $x = a$ de orden $n+1$ y resto $\displaystyle\int_a^x R_n(u)\,du$.

Además si $f(x) \in C^{(n+1)}(\mathcal{D})$ tiene resto de Lagrange

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} \quad , \ \theta \in V(a,x)$$

existe $\phi \in V(0,x)$ tal que

$$\int_a^x R_n(u)\,du = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,(u-a)^{n+1}\,du$$
$$= f^{(n+1)}(\phi)\cdot \int_a^x \frac{(u-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,du\ , \quad (\ \textit{Ver } \textbf{\textit{Nota 1.20}}\ )$$

$$\therefore\ \boxed{\int_a^x R_n(u)\,du = f^{(n+1)}(\phi)\cdot \frac{(x-a)^{n+2}}{(n+2)!}}$$

que coincide con el resto de Lagrange de la función $I(x)$.

Ejemplo 1.20.

(a) Calcule la fórmula de Taylor con resto de Lagrange centrada en $x=0$ y orden 4 de la función

$$f(x) = (1+x)^{-1}$$

(b) Integre la fórmula obtenida en la parte (a) para obtener una fórmula de Taylor de la función

$$g(x) = \ln(1+x)$$

(c) Derive la fórmula obtenida en la parte (a) para obtener una fórmula de Taylor de la función

$$g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Solución:

(a)

$$f(0) = (1+x)^{-1}\Big|_{x=0} = 1 \qquad f^{(3)}(0) = -6\,(1+x)^{-4}\Big|_{x=0} = -6$$
$$f'(0) = -(1+x)^{-2}\Big|_{x=0} = -1 \qquad f^{(4)}(0) = 24\,(1+x)^{-5}\Big|_{x=0} = -24$$
$$f''(0) = 2\,(1+x)^{-3}\Big|_{x=0} = 2 \qquad f^{(5)}(x) = -120\,(1+x)^{-6}$$

entonces, para algún $\theta \in V(0,x)$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 + \frac{f^{(5)}(\theta)}{5!}\,x^5$$
$$= 1 - x + \frac{2}{2}\,x^2 + \frac{-6}{3!}\,x^3 + \frac{24}{4!}\,x^4 + \frac{-120\,(1+\theta)^{-6}}{5!}\,x^5$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - (1+\theta)^{-6}\,x^5$$

Así obtenemos la fórmula de Taylor con resto de Lagrange

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{(1+\theta)^6}\ ,\ \theta \in V(0,x)}$$

(b) Como

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - (1+\theta)^{-6}\, x^5, \quad \theta \in V(0,x)$$

es una fórmula con resto de Lagrange, entonces

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \int_0^x (1+u)^{-1}\, du \\
&= \int_0^x \Big[1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - (1+\theta)^{-6}\, u^5 \Big]\, du, \quad \theta \in V(0,u) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \int_0^x \frac{u^5}{(1+\theta)^6}\, du, \quad \theta \in V(0,u) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6\,(1+\phi)^6}\ , \quad \phi \in V(0,x)
\end{aligned}$$

(c) Como

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - (1+\theta)^{-6}\, x^5, \quad \theta \in V(0,x)$$

es una fórmula con resto de Lagrange, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{(1+x)^2} &= \big[1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - (1+\theta)^{-6}\, x^5\big]', \quad \theta \in V(0,x) \\
&= 0 - 1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - \big[\,(1+\theta)^{-6}\, x^5\,\big]', \quad \theta \in V(0,x) \\
&= -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - (1+\phi)^{-6}\, 5\, x^4\,\big]', \quad \phi \in V(0,x)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \frac{5\, x^4}{(1+\phi)^6}, \quad \phi \in V(0,x)$$

□

Nota 1.20. Si $f(x) \in C^{(n+1)}(\mathcal{D})$ tiene fórmula de Taylor de orden n y centro $x = a$

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

donde para $a, x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ tenemos el polinomio de Taylor

$$T_n(x) = a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n\ , \quad a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

y el resto de Lagrange

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\theta) \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\ , \quad \theta \in V(a,x)$$

Entonces para todo $\alpha,\ \beta \in \mathcal{D}$ tal que $\alpha \leq a \leq \beta$ se cumple que

$$\int_\alpha^\beta f(u)\, du = \int_\alpha^\beta T_n(u)\, du + \int_\alpha^\beta R_n(u)\, du$$

luego existen $\xi_1,\ \xi_2 \in \big[\alpha, \beta\big]$ tales que

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta R_n(u)\, du &= \int_\alpha^\beta f^{(n+1)}(\theta) \cdot \frac{(u-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, du\ , \quad \theta \in V(a,u) \subseteq \big[\,\alpha,\ \beta\,\big] \\
&= f^{(n+1)}\big[\,\theta(\xi_1)\,\big] \cdot \int_\alpha^a \frac{(u-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, du + f^{(n+1)}\big[\,\theta(\xi_2)\,\big] \cdot \int_a^\beta \frac{(u-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, du
\end{aligned}$$

Así existen $\phi_1 \in \big[\alpha, a\big]$ y $\phi_2 \in \big[a, \beta\big]$ tales que

$$\int_{\alpha}^{\beta} R_n(u)\, du = f^{(n+1)}(\phi_1) \cdot \int_{\alpha}^{a} \frac{(u-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, du + f^{(n+1)}(\phi_2) \cdot \int_{a}^{\beta} \frac{(u-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, du$$

Además existe $\phi \in [\alpha, \beta]$ tal que

$$\boxed{\left| \int_{\alpha}^{\beta} R_n(u)\, du \right| \;\leq\; \left| \left. \frac{(x-a)^{n+2}}{(n+2)!} \right|_{x=\alpha}^{x=\beta} \right| \cdot \left| f^{(n+1)}(\phi) \right|}$$

Nota 1.21. Si $f(x) \in C^{(n+1)}(\mathcal{D})$ tiene fórmula de Maclaurin de orden n

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

donde para $0, x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ tenemos el polinomio de Maclaurin

$$T_n(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n \ , \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

y el resto de Lagrange

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\theta) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \ , \quad \theta \in V(0, x)$$

Entonces para todo α, $\beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \leq 0 \leq \beta$ y tales que

$$\mathcal{V} = V(\alpha^s, \beta^s) \cup V(0, \beta^s) \cup V(0, \alpha^s)$$

se cumple que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(u^s\big)\, du = \int_{\alpha}^{\beta} T_n\big(u^s\big)\, du + \int_{\alpha}^{\beta} R_n\big(u^s\big)\, du$$

luego existe $\phi \in \mathcal{V}$ tal que

$$\boxed{\left| \int_{\alpha}^{\beta} R_n(u)\, du \right| \;\leq\; \left| \left. \frac{u^{sn+s+1}}{(n+1)! \cdot (sn+s+1)} \right|_{u=\alpha}^{u=\beta} \right| \cdot \left| f^{(n+1)}(\phi) \right|}$$

Nota 1.22. Si $f(x) \in C^{(n+1)}(\mathcal{D})$ tiene fórmula de Taylor de orden n y centro $x = 0$

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + R_n(x) \ , 0, x \in \mathcal{D}$$

entonces si $\alpha(x-a)^s \in \mathcal{D}$, tenemos la fórmula de Taylor

$$f\big[\alpha(x-a)^s\big] = a_0 + a_1\alpha\,(x-a)^s + a_2\alpha^2\,(x-a)^{2s} + \cdots + a_n\alpha^n\,(x-a)^{ns} + R_n\big[\alpha(x-a)^s\big]$$

siendo

$$R_n\big[\alpha(x-a)^s\big] = \frac{f^{(n+1)}(\theta)\,\alpha^{n+1}\,(x-a)^{s(n+1)}}{(n+1)!}, \quad \theta \in V\big[\,0, \alpha(x-a)^s\,\big]$$

Además existe $\phi \in \big[\,0, \alpha(x-a)^s\,\big]$ tal que

$$\boxed{\int_{a}^{x} f\big[\alpha(u-a)^s\big]\, du = \int_{a}^{x} T_n\big[\alpha(u-a)^s\big]\, du + f^{(n+1)}(\phi) \cdot \int_{a}^{x} \frac{\alpha^{n+1}\,(x-a)^{s(n+1)}}{(n+1)!}\, du}$$

Que es una fórmula de Taylor con resto para la función $\displaystyle\int_{a}^{x} f\big[\alpha(u-a)^s\big]\, du$.

Ejemplo 1.21. Use la fórmula de Taylor con resto de Lagrange de orden 5 y de centro $x = 0$ de la función $f(x) = \cos(x)$ para aproximar la integral

$$I = \int_0^1 \cos(u^2)\, du$$

Acote el error cometido en la aproximación de la integral.

Solución: Note que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\cos(\theta)\, x^6}{6!} \ , \quad \theta \in V(0, x)$$

entonces

$$\cos(u^2) = 1 - \frac{u^4}{2} + \frac{u^8}{4!} - \frac{\cos(\theta)\, u^{12}}{6!} \ , \quad \theta \in V(0, u^2)$$

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \cos(u^2)\, du &= \int_0^1 \left[1 - \frac{u^4}{2} + \frac{u^8}{4!} - \frac{\cos(\theta)\, u^{12}}{6!}\right] du \ , \quad \theta \in V(0, u^2) \\ &= \left[u - \frac{u^5}{10} + \frac{u^9}{24 \cdot 9} - \frac{\cos(\phi)\, u^{13}}{6! \cdot 13}\right]\Bigg|_0^1 \ , \quad \phi \in [\,0, 1^2\,] = [0, 1] \\ &= 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{216} - \frac{\cos(\phi)}{9360} \ , \quad \phi \in [0, 1] \end{aligned}$$

Entonces

$$I \approx 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{216} = \frac{977}{1080} \approx 0.90463$$

con error

$$\varepsilon = \left|\frac{\cos(\phi)}{9360}\right| \leq \frac{1}{9360} \approx 0.0001068$$

□

Nota 1.23. Con ayuda del software `wxMaxima` podemos obtener una aproximación más precisa de la integral del ejemplo anterior

```
(%i1)  quad_qags( cos(x^2), x, 0, 1);
(%o1)  [0.904 524 237 900 27, 1.004 223 635 248 404 9 * 10^-14, 0, 21, 0]
```

Lo que significa que

$$\int_0^1 \cos(x^2)\, dx \approx 0.904\,524\,237\,900\,27$$

con un error acotado por $1.005 \cdot 10^{-14}$.

Ejemplo 1.22 (Ejercicio)**.**

(a) Calcule una fórmula de Taylor con resto centrada en $x = 0$ y de orden 8 de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

(b) Integre la fórmula obtenida en la parte (a) para obtener una fórmula de Taylor de la función

$$g(x) = \arctan(x)$$

(c) Use la fórmula encontrada para aproximar $\arctan(0.25)$ *y escriba el intervalo de la aproximación.*

Respuestas:

(a) $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dfrac{x^{10}}{(1+\theta)^6}\ , \quad \theta \in V\big(0, x^2\big) = \big[\,0, x^2\,\big]$

(b) $\arctan(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{du}{1+u^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11\cdot(1+\phi)^6}\ , \quad \phi \in \big[\,0, x^2\,\big]$

(c) Obtenemos la aproximación $I \approx 0.244\,978\,683$ con error

$$\varepsilon = \frac{1}{2^{22}\cdot 11\cdot |1+\phi|^6} \leq \frac{1}{2^{22}\cdot 11} < 0.000\,000\,022$$

además $\arctan(0.25) \in \ \big]0.244\,978\,662,\ 0.244\,978\,706\big[\ .$

$\square$

Ejemplo 1.23 (Ejercicio)**.**

(a) Calcule la fórmula de Taylor con resto de Lagrange, centrada en $x=0$ y de orden 3 de la función

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u}}$$

(b) Calcule una fórmula de Taylor con resto centrada en $x=0$ y de orden 3 de la función

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

(c) Tomando en cuenta que

$$\operatorname{arcsen}(x) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

halle una fórmula de Taylor de la función $h(x) = \operatorname{arcsen}(x)$.

(d) Use la fórmula encontrada para aproximar $\operatorname{arcsen}(0.32)$ y escriba el intervalo de la aproximación.

Respuestas:

(a) $f(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \dfrac{u}{2} + \dfrac{3\,u^2}{8} - \dfrac{5\,u^3}{16} + \dfrac{35\,u^4}{128\,(1+\theta)^{9/2}}\ , \quad \theta \in V\big(0, u\big)$

(b) Si sustituimos $u = -z^2$ en $f(u)$ obtendremos

$$g(z)\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{3\,z^4}{8} + \frac{5\,z^6}{16} + \frac{35\,z^8}{128\,(1+\theta)^{9/2}}\ , \quad \theta \in \big[-z^2, 0\,\big]$$

(c) Integrando $g(z)$ obtenemos que

$$\operatorname{arcsen}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} + \frac{5\,x^7}{112} + \frac{35\,x^9}{1\,152\cdot(1+\phi)^{9/2}}\ , \quad \phi \in \big[-z^2, 0\,\big]$$

(d) $\operatorname{arcsen}(0.32) \approx 0.325\,728\,330$, además

$$\operatorname{arcsen}(0.32) \in \big]0.325\,726\,592,\ 0.325\,730\,069\big[$$

$\square$

Ejemplo 1.24 (Ejercicio)**.** *Halle una fórmula de Maclaurin con resto y de orden* 5 *asociada a la función*

$$f(x) = \arccos(2x)$$

Use la fórmula encontrada para aproximar $\arccos(0.52)$ *y escriba el intervalo de la aproximación.*

Respuesta:

$$\arccos(2x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{2x} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2} - 2x - \frac{4\,x^3}{3} - \frac{12\,x^5}{5} - \frac{40\,x^7}{7\cdot(1+\phi)^{7/2}} \;, \quad \phi \in \left[\, -z^2, 0\,\right]$$

Luego, notando que $2x = 0.52 \implies x = 0.26$ tenemos que $\arccos(0.52) \approx 1.024\,510$ y

$$\arccos(0.52) \in \left]1.023\,923,\ 1.025\,097\right[$$

□

Ejemplo 1.25 (Ejercicio)**.** *Use una fórmula de Taylor con resto, de orden* 8 *y de centro* $x = 0$ *de la función* $f(x) = e^{x^3}$ *para aproximar la integral*

$$I = \int_0^{0.6} e^{x^3}\,dx$$

Acote el error cometido en la aproximación de la integral y escriba el intervalo de la aproximación.

Respuesta: Tomando la fórmula

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{e^{\theta}\,x^9}{6} \quad , \ \theta \in V(0, x^3)$$

obtenemos la aproximación $I \approx 0.634\,399\,543$ con error

$$\varepsilon = \frac{e^{\theta}\cdot(0.6)^{10}}{60} \le \frac{e^{(0.6)^3}\cdot(0.6)^{10}}{60} < 0.000\,125$$

además $I \in \ \left]0.634\,274,\ 0.634\,525\right[$. □

Nota 1.24. Con ayuda del software `wxMaxima` podemos obtener una aproximación más precisa de la integral del ejemplo anterior

```
(%i2)  quad_qags(%e^(x^3), x, 0.6);
(%o2)  [0.634 504 657 445 8, 7.044 416 799 282 252 5 * 10^-15, 21, 0]
```

Lo que significa que

$$\int_0^{0.6} e^{x^3}\,dx \approx 0.634\,504\,657\,445\,8$$

con un error acotado por $7.045\cdot 10^{-15}$.

1.5 Polinomios de uso Frecuente

A continuación una lista de Fórmulas de Taylor de uso frecuente

1. Exponenciales

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta\, x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad , \quad \theta \in V(0,x)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n\, x^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}\, e^{-\theta}\, x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad , \quad \theta \in V(0,x)$$

2. Trigonométricas

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta)}{(2n+3)!}\, x^{2n+3} \qquad , \quad \theta \in V(0,x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta)}{(2n+2)!}\, x^{2n+2} \qquad , \quad \theta \in V(0,x)$$

3. Hiperbólicas

$$\operatorname{senh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\cosh(\theta)}{(2n+3)!}\, x^{2n+3} \qquad , \quad \theta \in V(0,x)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cosh(\theta)}{(2n+2)!}\, x^{2n+2} \qquad , \quad \theta \in V(0,x)$$

4. Geométricas

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{(1-\theta)^{n+2}} \qquad , \quad \theta \in V(0,x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}}{(1+\theta)^{n+2}} \qquad , \quad \theta \in V(0,x)$$

5. Logaritmos

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n} + \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}} \qquad , \quad \theta \in V(0,x)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\theta)^{n+1}} \qquad , \quad \theta \in V(0,x)$$

6. Tangentes inversas

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}\, x^{2n+3}}{(2n+3)(1-\theta)^{n+2}} \qquad , \quad \theta \in V(0,x^2)$$

$$\operatorname{arctanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(1+\theta)^{n+2}} \qquad , \quad \theta \in V(0,x^2)$$

7. Binomial

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \alpha(\alpha-1)\,\frac{x^2}{2} \\ &+ \alpha(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,\frac{x^3}{3!} \\ &\vdots \\ &+ \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\,\frac{x^n}{n!} \\ &+ \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!\,(1+\theta)^{n+1-\alpha}}\ , \quad \theta\in V(0,x)\end{aligned}$$

Nota 1.25. Se denota el binomial

$$\binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\,\frac{1}{n!}$$

entonces

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta)^{\alpha-n-1}\,x^{n+1}, \quad \theta\in V(0,x)$$

1.5.1 Ejemplos y ejercicios

Ejemplo 1.26. Las siguientes son fórmula de Mclaurin de orden 4 con resto de Lagrange de uso frecuente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{(1+\theta)^6}\ ,\ \theta\in V(0,x)\\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5\,(1+\theta)^5}\ ,\ \theta\in V(0,x)\\ \operatorname{senh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{\cosh(\theta)\,x^5}{5!}\ ,\ \theta\in V(0,x)\\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{\cosh(\theta)\,x^5}{120}\ ,\ \theta\in V(0,x)\\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\cos(\theta)\,x^6}{6!}\ ,\ \theta\in V(0,x)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\cos(\theta)\,x^6}{720}\ ,\ \theta\in V(0,x)\end{aligned}$$

aunque también $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\operatorname{sen}(\theta)\,x^5}{120}\ ,\ \theta\in V(0,x)$.
Tome en cuenta que θ es diferente en cada una de las ecuaciones anteriores.

Ejemplo 1.27. Como aplicación de la fórmula binomial:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{x^2}{2} \\ &+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{x^3}{3!} \\ &+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\frac{x^4}{4!} \\ &+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\left(\frac{1}{3}-4\right)\frac{x^5}{5!\,(1+\theta)^{5-1/3}}\ , \quad \theta\in V(0,x)\end{aligned}$$

luego resulta que

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5\,x^3}{81} - \frac{10\,x^4}{243} + \frac{22\,x^5}{729\,\sqrt[3]{(1+\theta)^{14}}}\ , \quad \theta \in V(0,x)$$

También

$$\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{5\,x^3}{81} - \frac{10\,x^4}{243} - \frac{22\,x^5}{729\,\sqrt[3]{(1-\phi)^{14}}}\ , \quad \phi \in V(0,x)$$

Ejemplo 1.28. En el caso de la funciones $\arctan(x)$ y $\operatorname{arctanh}(x)$, tenemos fórmulas de Mclaurin de uso frecuente con restos que provienen del resto de Lagrange.

Las siguientes fórmulas de Taylor son de orden 7 y 8 a la vez:

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9\,(1+\theta)^5}\ ,\ \theta \in V(0,x^2) \\ \operatorname{arctanh}(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9\,(1-\phi)^5}\ ,\ \phi \in V(0,x^2) \end{aligned}$$

Tome en cuenta que $9 = 2\cdot 5 - 1$ o que $(9+1)/2 = 5$.

De la misma manera, considerando que $(13+1)/2 = 7$ tenemos que $\arctan(x)$ tiene polinomio de Maclaurin de orden 12:

$$T_{12}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}$$

con resto $R_{12} = \dfrac{x^{13}}{13\,(1+\zeta)^7}\ ,\ \zeta \in V(0,x^2)$.

Ejemplo 1.29 (Ejercicio)**.** *Escriba una fórmula de Maclaurin con resto de $f(x)$ en el orden indicado:*

(a) $f(x) = e^{-x}$ *de orden* 5.

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ *de orden* 8.

(c) $f(x) = \cosh(x)$ *de orden* 6.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *de orden* 3.

(e) $f(x) = \ln(1-x)$ *de orden* 5.

(f) $f(x) = \operatorname{arctanh}(x)$ *de orden* 5.

(g) $f(x) = \sqrt{(1+x)^7}$ *de orden* 4.

(h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{1-x}}$ *de orden* 3.

Respuestas:

(a) $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720\,e^{\theta}}\quad ,\ \theta \in V(0,x)$

(b) $\operatorname{sen}(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5\,040} + \dfrac{\cos(\theta)\,x^9}{362\,880}\quad ,\ \theta \in V(0,x)$

(c) $\cosh(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{\cosh(\theta)\,x^8}{40\,320}\quad ,\ \theta \in V(0,x)$

También se puede tomar:

$\cosh(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{\operatorname{senh}(\phi)\,x^7}{5\,040}\quad ,\ \phi \in V(0,x)$

(d) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dfrac{x^4}{(1-\theta)^5}\quad ,\ \theta \in V(0,x)$

(e) $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6\,(1-\theta)^6}\quad ,\ \theta \in V(0,x)$

(f) $\operatorname{arctanh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7\,(1-\theta)^4} \quad , \ \theta \in \big[-x^2, 0\big]$

(g) $\sqrt{(1+x)^7} = 1 + \dfrac{7x}{2} + \dfrac{35\,x^2}{8} + \dfrac{35\,x^3}{16} + \dfrac{35\,x^4}{128} - \dfrac{7\,x^5}{256\,\sqrt{(1+\theta)^3}} \quad , \ \theta \in V(0,x)$

(h) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-x}} = 1 + \dfrac{x}{5} + \dfrac{3\,x^2}{25} + \dfrac{11\,x^3}{125} + \dfrac{44\,x^4}{625\,\sqrt[5]{(1-\theta)^{21}}} \quad , \ \theta \in V(0,x)$

□

Ejemplo 1.30. Calcule una fórmula de Taylor de orden 5 y de centro $x = 2$ de la función

$$f(x) = \frac{x-2}{5-x}$$

Solución:

Sea $w = x - 2$, entonces $x = w + 2$ y

$$f(x) = \frac{w}{5-(w+2)} = \frac{w}{3-w} = \frac{w}{3}\,\frac{1}{1-w/3}$$

Como

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \frac{u^{n+1}}{(1-\theta)^{n+2}}, \quad \theta \in V(0,u)$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{w}{3}\,\frac{1}{1-w/3} \\ &= \frac{w}{3}\left[1 + \frac{w}{3} + \left(\frac{w}{3}\right)^2 + \left(\frac{w}{3}\right)^3 + \left(\frac{w}{3}\right)^4 + \frac{1}{(1-\theta)^6}\left(\frac{w}{3}\right)^5\right], \quad \theta \in V(0,w/3) \\ &= \frac{w}{3} + \frac{w^2}{3^2} + \frac{w^3}{3^3} + \frac{w^4}{3^4} + \frac{w^5}{3^5} + \frac{1}{(1-\theta)^6}\,\frac{w^6}{3^6}, \quad \theta \in V(0,w/3) \end{aligned}$$

Se concluye que

$$f(x) = \frac{x-2}{3} + \frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(x-2)^3}{3^3} + \frac{(x-2)^4}{3^4} + \frac{(x-2)^5}{3^5} + \frac{1}{(1-\theta)^6}\cdot\frac{(x-2)^6}{3^6}$$

donde $\theta \in V\left[0, \dfrac{x-2}{3}\right]$ □

Ejemplo 1.31 (Ejercicio)**.** *Considere la función $f(x) = \cos(3x)$.*

(a) Halle una fórmula de Maclaurin con resto, de orden 6 asociada a la función $f(x)$.

(b) Halle la fórmula de Taylor con resto de Lagrange centrada en $x = 15°$ y de orden 4 asociada a la función $f(x)$.

Respuestas:

(a) $\cos(3x) = 1 - \dfrac{9\,x^2}{2} + \dfrac{27\,x^4}{8} - \dfrac{81\,x^6}{80} + \dfrac{729\,\cos(\theta)\,x^8}{4\,480} \quad , \ \theta \in V(0,3x)$

También se pueden tomar como el resto de la fórmula las expresiones:

$$R_6(x) = \frac{729\,\cos(3\phi)\,x^8}{4\,480} = \frac{243\,\operatorname{sen}(3\zeta)\,x^7}{560} = \frac{243\,\operatorname{sen}(\xi)\,x^7}{560}$$

donde ϕ, $\zeta \in V(0,x)$ y $\xi \in V(0,3x)$.

(b)

$$\cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - \frac{9\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{12}\right)^2 + \frac{9\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{12}\right)^3 + \frac{27\sqrt{2}}{16}\left(x - \frac{\pi}{12}\right)^4 - \frac{81\,\mathrm{sen}(3\theta)}{40}\left(x - \frac{\pi}{12}\right)^5$$

donde $\theta \in V\left(\frac{\pi}{12}, x\right)$

$\square$

Ejemplo 1.32. Use el polinomio de orden 12 y centro 0 de la función $f(x) = \arctan(x^2)$ para aproximar el valor numérico de la integral

$$I = \int_0^{1/2} \arctan(x^2)\, dx$$

Halle una cota del error cometido en la aproximación. ¿Cuantos decimales exactos se pueden garantizar en dicha aproximación?

Presente el intervalo de aproximación correspondiente.

Solución: Tomando en cuenta que $2 \cdot 6 = 12$, empezamos con la fórmula de Taylor:

$$\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7\,(1+\theta)^4}\ ,\ \theta \in V(0, u^2)$$

entonces

$$\arctan(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{14}}{7\,(1+\theta)^4}\ ,\ \theta \in V(0, x^4)$$

luego

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/2} \arctan(x^2)\, dx \\ &= \int_0^{1/2} \left[x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{14}}{7\,(1+\theta)^4} \right] dx\ ,\ \theta \in V(0, x^4) \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{21} + \frac{x^{11}}{55} - \frac{x^{15}}{105\,(1+\phi)^4} \right]_0^{1/2}\ ,\ \phi \in V\left[0, (1/2)^4\right] \\ &= \frac{32\,567}{788\,480} + \frac{1}{3\,440\,640} \cdot \frac{1}{(1+\phi)^4}\ ,\ \phi \in \left[0, \frac{1}{16}\right] \end{aligned}$$

Tenemos entonces la aproximación

$$I \approx \frac{32\,567}{788\,480} = 0.041\,303\,520\ldots$$

con error

$$\epsilon = \frac{1}{3\,440\,640} \cdot \frac{1}{|1+\phi|^4}$$

Como $\phi \in \left[0, \frac{1}{16}\right]$, entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq \phi \leq \frac{1}{16} &\iff 1 \leq 1 + \varphi \leq \frac{17}{16} \\ &\iff 1 \geq \frac{1}{1+\varphi} \geq \frac{16}{17} \end{aligned}$$

al final
$$\epsilon = \frac{1}{3\,440\,640} \cdot \frac{1}{|1+\phi|^4} \leq \frac{1}{3\,440\,640} = 0.000\,000\,290\cdots < 10^{-6}$$
Es posible que hallan seis decimales exactos.
Tenemos que
$$\frac{32\,567}{788\,480} - \frac{1}{3\,440\,640} = 0.041\,303\,230\ldots$$
$$\frac{32\,567}{788\,480} + \frac{1}{3\,440\,640} = 0.041\,303\,811\ldots$$
Por lo que
$$I \in \ ]\,0.041\,303\,230,\ 0.041\,303\,812\,[$$
garantizándonos los seis primeros decimales de la aproximación. ☐

Nota 1.26. El valor numérico de la integral del **Ejercicio 1.32** de la página 31 se puede calcular de manera exácta, pero el cálculo de la integral de $\arctan(x^2)$ es muy tedioso.

Considerando la integral indefinida
$$\int \arctan(x^2)\,dx = x\arctan(x^2) + \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arctan\left(\sqrt{2}\,x+1\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arctan\left(\sqrt{2}\,x-1\right)$$
se tiene el valor numérico
$$\int_0^{1/2} \arctan(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\ln\left(\frac{5\sqrt{2}+4}{5\sqrt{2}-4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$$
Que es aproximadamente 0.041 303 240 757 625.

Nota 1.27. (Ver fórmula Binomial, 1.5 → 7 en página 28)

(a) Para todo $k > 0$, se cumple que
$$(k+x)^\alpha = k^\alpha \cdot \left(1+\frac{x}{k}\right)^\alpha$$
luego se puede obtener una fórmula de Taylor usando el desarrollo de $(1+u)^\alpha$ mediante la sustitución $u = x/k$.

(b) Si buscamos aproximar el valor numérico de $\sqrt[n]{N}$, se recomienda hacer
$$\sqrt[n]{a^n + (N-a^n)} = a\cdot\sqrt[n]{1+\frac{N-a^n}{a^n}}$$
siendo el número a^n cercano de N, luego usamos el desarrollo de la función $\sqrt[n]{1+u} = (1+u)^{1/n}$ mediante la sustitución
$$u = \frac{N-a^n}{a^n} \approx 0$$

Ejemplo 1.33. Si queremos aproximar $\sqrt{53}$ es conveniente desarrollar:

$$\begin{aligned}\sqrt{53} &= \sqrt{49+4} \\ &= 7\sqrt{1+\frac{4}{49}} \\ &= 7\cdot\Bigg[\,1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{x^3}{3!} \\ &\qquad +\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^4}{4!\cdot(1+\theta)^{7/2}}\,\Bigg]_{x=4/49}\end{aligned}$$

donde $\theta\in\big[0,4/49\big]$. (Ver fórmula Binomial, 1.5 → 7 en página 28)
De esta manera tenemos la aproximación:

$$\sqrt{53}\approx 7+\frac{2}{7}-\frac{2}{7^3}+\frac{4}{7^5}\approx 7.280\,121$$

con un error

$$\varepsilon=\frac{10}{7^7\cdot|1+\theta|^{7/2}}\quad,\ \theta\in\left[0,\frac{4}{49}\right]$$

De lo cual se sigue que $\varepsilon\le\dfrac{10}{7^7}<0.000\,013$, lo que garantiza:

$$\sqrt{53}\in\ \big]\,7.280\,108,\ 7.280\,134\,\big[$$

Ejemplo 1.34 (Ejercicio)**.** *Halle una fórmula de Maclaurin de orden* 6 *de la función* $f(x)=\dfrac{x^2}{(3+x)^5}$.

Respuesta: Usando la fórmula binomial (1.5 → 7 en página 28) para $\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^{-5}$ obtendremos

$$\frac{x^2}{(3+x)^5}=\frac{x^2}{3^5}-\frac{5\,x^3}{3^6}+\frac{5\,x^4}{3^6}-\frac{35\,x^5}{3^8}+\frac{70\,x^6}{3^9}-\frac{14\,x^7}{3^8\,(1+\theta)^{10}}\quad,\ \theta\in V\left(0,\ \frac{x}{3}\right)$$

□

Ejemplo 1.35 (Ejercicio)**.** *Considera la función* $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

(a) Escriba una fórmula de Taylor con resto, de orden 4 *y centrada en* 125 *de la función* $f(x)$.

(b) Use la fórmula de Taylor $f(x)$ *obtenida para aproximar el valor numérico de* $\sqrt[3]{151}$.
Acote el error cometido y escriba el intervalo de dicha aproximación.

Respuestas:

(a) Tomando en cuenta que $\sqrt[3]{x}=5\sqrt{1+\dfrac{x-125}{125}}$.

Obtendremos que (Ver Fórmula Binomial 1.5 → 7 en página 28)

$$\sqrt[3]{x}=5+\frac{x-125}{3\cdot 5^2}-\frac{(x-125)^2}{3^2\cdot 5^5}+\frac{(x-125)^3}{3^4\cdot 5^7}-\frac{2\,(x-125)^4}{3^5\cdot 5^{10}}+\frac{22\,(x-125)^5}{3^6\cdot 5^{14}\cdot(1+\theta)^{14/3}}$$

donde $\theta\in V\left(0,\ \dfrac{x-125}{125}\right)$.

(b) $\sqrt[3]{151} \approx 5 + \dfrac{26}{3\cdot 5^2} - \dfrac{26^2}{3^2\cdot 5^5} + \dfrac{26^3}{3^4\cdot 5^7} - \dfrac{2\cdot 26^4}{3^5\cdot 5^{10}} \approx 5.325\,023\,414\,465\,844$

donde para $\theta \in \left[0,\, \dfrac{26}{5^5}\right]$ el error es

$$R_4 = \frac{22\cdot 26^5}{3^6\cdot 5^{14}\cdot |1+\theta|^{14/3}} \le \frac{22\cdot 26^5}{3^6\cdot 5^{14}} < 0.000\,059$$

con esta aproximación garantizamos que

$$\sqrt[3]{151} \in \left]\, 5.324\,964,\; 5.325\,083 \,\right[$$

□

Ejemplo 1.36 (Ejercicio)**.** *Considera la función* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8+x^5}}$.

(a) Escriba una fórmula Maclaurin con resto y de orden 12 de la función $f(x)$.

(b) Use la fórmula de Taylor $f(x)$ obtenida para aproximar el valor numérico de

$$I = \int_0^{0.42} \frac{x}{\sqrt[3]{8+x^5}}\, dx$$

Acote el error cometido y escriba el intervalo de dicha aproximación.

Respuestas:

(a) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{8+x^5}} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^6}{3\cdot 2^4} + \dfrac{x^{11}}{3^2\cdot 2^6} - \dfrac{7\,x^{16}}{3^4\cdot 2^9\cdot (1+\theta)^{10/3}} \quad , \ \theta \in V\left(0,\, \dfrac{x^5}{8}\right)$

(b) $\displaystyle\int_0^{0.42} \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^5}}\, dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^7}{7\cdot 3\cdot 2^4} + \frac{x^{12}}{3^3\cdot 2^8} - + \frac{7\,x^{17}}{17\cdot 3^4\cdot 2^9\cdot (1+\phi)^{10/3}} \right] \Bigg|_{x=0}^{x=0.42}$

donde $\phi \in V\left[0,\, \frac{(0.42)^5}{8}\right]$, de lo que se sigue la aproximación

$$\int_0^{0.42} \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^5}}\, dx \approx 0.044\,093\,143\,069\,328$$

con un error $\varepsilon < 3.91\cdot 10^{-12}$, por lo que

$$0.044\,093\,143\,065 < \int_0^{0.42} \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^5}}\, dx < 0.044\,093\,143\,074$$

□

Nota 1.28. Con ayuda del software wxMaxima podemos obtener una aproximación más precisa de la integral del ejemplo anterior

```
(%i3) x/(8+x^5)^(1/3);
      quad_qags(%, x, 0.42);
```

(%o3) $\dfrac{x}{(8+x^5)^{1/3}}$

(%o4) $[\, 0.044\,093\,143\,065\,423,\; 4.895\,322\,265\,932\,413\,5 * 10^{-16},\; 21,\; 0\,]$

Lo que significa que

$$\int_0^{0.42} \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^5}}\, dx \approx 0.044\,093\,143\,065\,423$$

con un error acotado por $4.9 \cdot 10^{-16}$.

Nota 1.29. (Ver fórmula Logarítmo, 1.5 → 5 en página 27)

(a) Si buscamos aproximar el valor numérico de $\ln(N)$, se recomienda hacer

$$\ln(N) = \ln\big[\, 1 + (N-1) \,\big] \quad \vee \quad \ln(N) = -\ln\left(\frac{1}{N}\right) = -\ln\left[1 + \left(\frac{1}{N} - 1\right)\right]$$

luego usamos el desarrollo de la función $\ln(1+u)$ usando

$$u = N - 1 \quad \vee \quad u = \frac{1}{N} - 1$$

tomando en cuenta que la aproximación "es buena" cuando $u \approx 0$.

(b) Si los valores numéricos "$N-1$" y "$\dfrac{1}{N} - 1$" no son cercanos a cero, la aproximación obtenida del punto anterior "no es buena".

En tal caso se recomienda buscar $k \in \mathbb{N}$ tal que e^k sea cercano al valor numérico N, luego hacer:

$$\begin{aligned} \ln(N) &= \ln\big[\, e^k + \big(N - e^k \big) \,\big] \\ &= \ln\left[e^k \cdot \left(1 + \frac{N - e^k}{e^k} \right) \right] \\ &= \ln\big(e^k \big) + \ln\left(1 + \frac{N - e^k}{e^k} \right) \\ &= k + \ln\left(1 + \frac{N - e^k}{e^k} \right) \end{aligned}$$

luego usamos el desarrollo de la función $\ln(1+u)$ usando $u = \dfrac{N - e^k}{e^k} \approx 0$.

De ser necesario tomar en cuenta que

$$\boxed{e \approx 2.718\,281\,828\,459\,045}$$

o también que: $\boxed{2.7 < e < 2.8}$

Ejemplo 1.37 (Ejercicio)**.** *Aproxime* $\ln(1.25)$*, usando un polinomio de Maclaurin de orden* 5*. Acote el error y escriba el intervalo de dicha aproximación.*

Respuesta: Tomando en cuenta que "$\ln(1.25) = \ln(1+0.25)$", se tiene que

$$\ln(1.25) \approx \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_{x=0.25} = \frac{857}{3\,840} \approx 0.223\,177\,083$$

con error

$$\varepsilon = \frac{1}{24\,576 \cdot |1+\theta|^6} < 0.000\,041 \quad , \text{ tomando en cuenta que } \theta \in \big[\, 0,\, 0.25 \,\big]$$

Al final

$$\ln(1.25) \in \ \big]0.223\,136,\ 0.223\,218\big[$$

$\square$

Ejemplo 1.38 (Ejercicio)**.** *Aproxime* ln(17)*, usando un polinomio de Maclaurin de orden* 3*, Acote el error y escriba el intervalo de dicha aproximación.*

Respuesta: Notando que $e \approx 2.7$, $e^2 \approx 7.4$ y $e^3 \approx 20$ y tomando en cuenta que

$$\ln(17) = 3 + \ln\left(1 - \frac{e^3 - 17}{e^3}\right)$$

se tiene que

$$\ln(17) \approx \left[\, 3 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \,\right]_{x = \frac{e^3-17}{e^3}} \approx 2.833\,372\,207$$

con error

$$\varepsilon = \frac{\left(e^3 - 17\right)^4}{4\,e^{12} \cdot |1-\theta|^4} < 0.000\,272 \quad , \text{ tomando en cuenta que } \theta \in \left[0,\, \frac{e^3 - 17}{e^3}\right]$$

Al final

$$\ln(17) \in \ \left]2.833\,100,\ 2.833\,644\right[$$

$\square$

2 Desarrollos Limitados

2.1 La o pequeña de Landau

Definición 2.1 ($\mathcal{O}$ de Landau)**.** Sean f y g funciones definidas $I \subseteq \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$.
Se dice que $f(x)$ es "despreciable" frente a $g(x)$ cuando $x \to a$ si y solo si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Se denota

$$\boxed{f(x) = \mathcal{O}\big[\, g(x) \,\big], \text{ cuando } x \to a}$$

Lo cual se lee

"$f(x)$ es **o pequeña de Landau** de $g(x)$ cuando x tiende a a"

Si no se indica lo contrario $a = 0$, es decir

$$f(x) = \mathcal{O}\big[\, g(x) \,\big] \iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Ejemplo 2.1. Verifique que

$$(x-1)^3 = \mathcal{O}\left(\sqrt{x-1}\right) \qquad \text{cuando } x \to 1^+$$

Solución:
Tenemos que

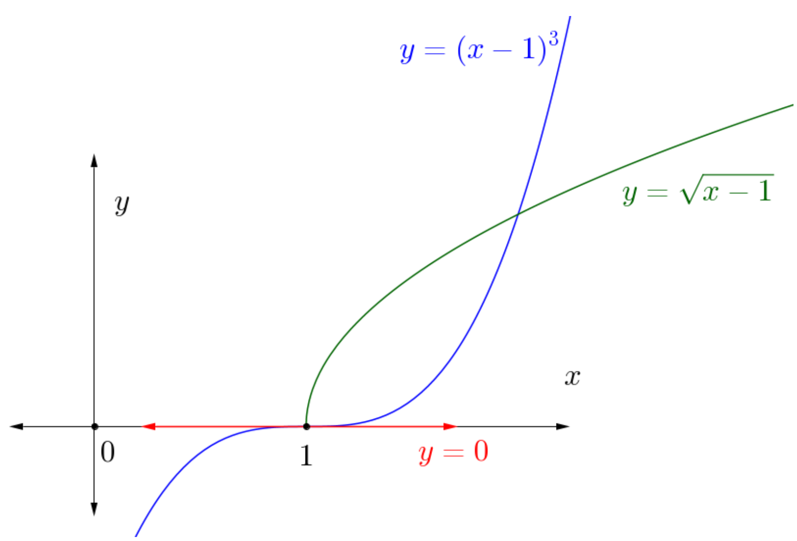
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} (x-1)^{5/2} = 0$$

entonces

$$(x-1)^3 = \mathcal{O}\left(\sqrt{x-1}\right) \qquad \text{cuando } x \to 1^+$$

$\square$

Nota 2.1. Decir que $f(x) = \mathcal{O}\big[\, g(x) \,\big]$, cuando $x \to a$ significa también que la gráfica de f "es más parecida" a la gráfica "$y = 0$" que g en un intervalo pequeño alrededor de a.
A continuación las gráficas del ejemplo anterior



Teorema 2.1 (Propiedades de la o pequeña de Landau).

1. $f(x) = \mathcal{O}(1) \iff \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

2. $\mathcal{O}\big[f(x)\big] = f(x)\cdot\mathcal{O}(1)$

3. $\mathcal{O}\big[f(x)\big]\cdot\mathcal{O}\big[g(x)\big] = \mathcal{O}\big[f(x)\cdot g(x)\big]$
   $\mathcal{O}(x^n)\cdot\mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^{n+m})$
   $x^n\cdot\mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^{n+m})$

4. $\Big[\mathcal{O}\big[f(x)\big]\Big]^m = \mathcal{O}\Big[\big[f(x)\big]^m\Big]$
   $\big[\mathcal{O}(x^n)\big]^m = \mathcal{O}(x^{nm})$

5. $\mathcal{O}\big[f(x)\big] + \mathcal{O}\big[g(x)\big] = \mathcal{O}\big[f(x)+g(x)\big]$

6. $\forall\alpha\neq 0,\ \alpha\cdot\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$
   $\forall\alpha\neq 0,\ \alpha\cdot x^{n+1} = \mathcal{O}(x^n)$
   $\forall\alpha\neq 0,\ \alpha\cdot x^{n+\epsilon} = \mathcal{O}(x^n),$ *donde* $\epsilon > 0$

7. $n\le m \implies \mathcal{O}(x^n)+\mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$
   $n\le m \implies \mathcal{O}(\alpha_1\,x^n+\alpha_2\,x^m) = \mathcal{O}(x^n)$

8. *Si* $n\le m$

$$\alpha_n\,x^n+\alpha_{n+1}\,x^{n+1}+\alpha_{n+2}\,x^{n+2}+\cdots+\alpha_m\,x^m+\mathcal{O}(x^n) = \alpha_n\,x^n+\mathcal{O}(x^n)$$

$$\boxed{\alpha_0+\alpha_1\,x+\alpha_2\,x^2+\cdots+\alpha_m\,x^m+\mathcal{O}(x^n) = \alpha_0+\alpha_1\,x+\alpha_2\,x^2+\cdots+\alpha_n\,x^n+\mathcal{O}(x^n)}$$

9. *Si* $q\ge 0$

$$\mathcal{O}(x^n)\cdot\big[\alpha_m\,x^m+\alpha_{m+1}\,x^{m+1}+\cdots+\alpha_{m+q}\,x^{m+q}\big] = \mathcal{O}(x^{n+m})$$

Ejemplo 2.2. Pruebe que

$$\mathcal{O}\big[f(x)\big]\cdot\mathcal{O}\big[g(x)\big] = \mathcal{O}\big[f(x)\cdot g(x)\big]$$

Solución:

$$\begin{aligned}
u(x) = \mathcal{O}\big[f(x)\big]\ \wedge\ w(x) = \mathcal{O}\big[g(x)\big] &\implies \lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{f(x)} = 0\ \wedge\ \lim_{x\to 0}\frac{w(x)}{g(x)} = 0\\
&\implies \lim_{x\to 0}\frac{u(x)\cdot w(x)}{f(x)\cdot g(x)} = 0\\
&\implies u(x)\cdot w(x) = \mathcal{O}\big[f(x)\cdot g(x)\big]
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathcal{O}\big[f(x)\big]\cdot\mathcal{O}\big[g(x)\big] = u(x)\cdot w(x) = \mathcal{O}\big[f(x)\cdot g(x)\big]$$

$\square$

Ejemplo 2.3.

$$\mathcal{O}(x)-\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(x)$$

Ejemplo 2.4.

$$\frac{12\,x^4-3\,x^5+\mathcal{O}(x^5)}{2x^2} = 6\,x^2-\frac{3\,x^3}{2}+\mathcal{O}(x^3)$$

Ejemplo 2.5.

$$3 - 2\,\mathcal{O}(x^3) + 4x - x^2 + 3x^5 + 6\,\mathcal{O}(x^3) + 7x^2 + 2x^3 - x^5 + \mathcal{O}(x^5) = 3 + 4x + 6x^2 + 2x^3 + \mathcal{O}(x^3)$$

Ejemplo 2.6.

$$\begin{aligned}
&\left[x^2 - 3x^3 + \mathcal{O}(x^3)\right] \cdot \left[2x^3 - x^4 + 2x^5 + \mathcal{O}(x^7)\right] \\
&\quad = x^2 \cdot \left[2x^3 - x^4 + 2x^5 + \mathcal{O}(x^7)\right] - 3x^3 \cdot \left[2x^3 - x^4 + 2x^5 + \mathcal{O}(x^7)\right] + \mathcal{O}(x^3) \cdot \left[2x^3 - x^4 + 2x^5 + \mathcal{O}(x^7)\right] \\
&\quad = 2x^5 - x^6 + 2x^7 + \mathcal{O}(x^9) - 6x^6 + 3x^7 - 6x^8 + \mathcal{O}(x^{10}) + \mathcal{O}(x^6) \\
&\quad = 2x^5 - 7x^6 + \mathcal{O}(x^6)
\end{aligned}$$

2.2 Desarrollos limitados

2.2.1 Resto de Young

Definición 2.2 (Desarrollo Limitado)**.** Se dice que una función f definida en $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite un **desarrollo limitado** de orden n alrededor de $a \in \mathcal{D}$ si y solo si existen a_0, a_1, $\ldots a_n$ tales que

$$f(x) = a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + a_3\,(x-a)^3 + \cdots + a_n\,(x-a)^n + \mathcal{O}\big[\,(x-a)^n\,\big]$$

cuando $x \to a$.

Nota 2.2. El desarrollo limitado es único cuando existe.

Teorema 2.2 (Fórmula de Taylor con resto de Young)**.** *Sea $f \in C(\mathcal{D})$ definida en $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathcal{D}$, entonces cuando $x \to a$*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathcal{O}\big[(x-a)^n\big]$$

*La ecuación anterior es llamada **Fórmula de Taylor con resto de Young**, y también corresponde al desarrollo limitado de orden n y centro $x = a$ de la función $f(x)$.*

Es decir, en la definición 2.2

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Nota 2.3. Si una función $f(x)$ con desarrollo limitado centrado en a y de orden n, es posible que no tenga fórmula de Taylor de centro a y orden n.

Por ejemplo, si para algún $k \leq n$, $f^{(k)}(x)$ es discontinua en a, entonces $f(x)$ no tiene desarrollo de Taylor.

Ejemplo 2.7. Tenemos la fórmula de Taylor con resto de Lagrange centrada en 0:

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{24}\,x^4 \quad , \ \theta \in V(0,x)$$

Por otro lado la función $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ es discontinua en 0 por lo que no tiene fórmula de Taylor, pero sí tiene desarrollo limitado de orden 2:

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^2)$$

pues el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 1 + \dfrac{x^2}{6}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{6\operatorname{sen}(x) - 6x + x^3}{6x^3}\right] \quad , \text{ es forma } \frac{0}{0} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\left[\frac{6\cos(x) - 6 + 3x^2}{18x^2}\right] \quad , \text{ es forma } \frac{0}{0} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\left[\frac{-6\operatorname{sen}(x) + 6x}{36x}\right] \\
&= \frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\left[-\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + 1\right] \\
&= \frac{1}{6}\cdot[-1+1] = 0
\end{aligned}$$

Teorema 2.3. *Si una función f definida en $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite el* **desarrollo limitado**

$$f(x) = a_k\,(x-a)^k + a_{k+1}\,(x-a)^{k+1} + \cdots + a_n\,(x-a)^n + \mathcal{O}\big[\,(x-a)^n\,\big]$$

cuando $x \to a$ y siendo $a_k \neq 0$, entonces para todo $\ell \leq k$:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{\ell}} = a_k\,(x-a)^{k-\ell} + a_{k+1}\,(x-a)^{k-\ell+1} + \cdots + a_n\,(x-a)^{n-\ell} + \mathcal{O}\big[\,(x-a)^{n-\ell}\,\big]$$

Teorema 2.4. *Si $f(x)$ tiene desarrollo limitado de orden n y centro $x = 0$*

$$f(x) = a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n + \mathcal{O}\big[(x-a)^n\big]$$

entonces

(a) El desarrollo limitado de la derivada corresponde a

$$\boxed{f'(x) = a_1 + 2a_2\,(x-a) + 3a_3\,(x-a)^2 + \cdots + na_n\,(x-a)^{n-1} + \mathcal{O}\big[(x-a)^{n-1}\big]}$$

(b) El desarrollo limitado de la integral corresponde a

$$\boxed{\int_a^x f(u)\,du = a_0\,(x-a) + a_1\,\frac{(x-a)^2}{2} + a_2\,\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots + a_n\,\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{O}\big[(x-a)^{n+1}\big]}$$

2.2.2 Desarrollos limitados de uso Frecuente

A continuación una lista de Desarrollos Limitados de uso frecuente

1. Exponenciales

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^n)$$
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n\, x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^n)$$

2. Trigonométricas

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

3. Hiperbólicas

$$\operatorname{senh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$$
$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

4. Geométricas

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathcal{O}(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathcal{O}(x^n)$$

5. Logaritmos

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n} + \mathcal{O}(x^n)$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^n)$$

6. Tangentes inversas

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$$
$$\operatorname{arctanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$$

7. Binomial

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x &+ \alpha(\alpha-1)\,\frac{x^2}{2} \\ &+ \alpha(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,\frac{x^3}{3!} \\ &\;\;\vdots \\ &+ \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\,\frac{x^n}{n!} \\ &+ \mathcal{O}(x^n)\end{aligned}$$

2.2.3 Ejemplos y ejercicios

Ejemplo 2.8. (Ver **Ejemplo 1.26**)
Las siguientes son desarrollos limitados de orden 4 de uso frecuente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^4) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^4) \\
\operatorname{senh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4) = x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^4)
\end{aligned}$$

aunque también

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)$$

que es un desarrollo de orden 5.

Ejemplo 2.9. (Ver **Ejemplo 1.27**)
Como aplicación de la fórmula binomial:

$$\sqrt[7]{1-x} = 1 - \frac{x}{7} - \frac{3\,x^2}{49} - \frac{13\,x^3}{343} - \frac{65\,x^4}{2\,401} + \mathcal{O}(x^4)$$

También

$$\sqrt[7]{1+x} = 1 + \frac{x}{7} - \frac{3\,x^2}{49} + \frac{13\,x^3}{343} - \frac{65\,x^4}{2\,401} + \mathcal{O}(x^4)$$

Ejemplo 2.10. (Ver **Ejemplo 1.28**)
Los siguientes son desarrollos limitados de orden 8:

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^8) \\
\operatorname{arctanh}(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^8)
\end{aligned}$$

También tenemos el siguiente desarrollo limitado de orden 11:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \mathcal{O}(x^{11})$$

Ejemplo 2.11 (Ejercicio)**.** *Escriba el desarrollo de Maclaurin de orden* 5 *de la función* $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$.

Resp. / $f(x) = 1 - 3\,x + 6\,x^2 - 10\,x^3 + 15\,x^4 - 21\,x^5 + \mathcal{O}(x^5)$

Ejemplo 2.12 (Ejercicio)**.** *Escriba el desarrollo de Maclaurin de orden* 5 *de la función* $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{(1+x)^3}}$.

Resp. / $f(x) = x^2 - \dfrac{3\,x^3}{4} + \dfrac{21\,x^4}{32} - \dfrac{77\,x^5}{128} + \mathcal{O}(x^5)$

Teorema 2.5. *Dado $n \in \mathbb{N}$, si tenemos desarrollos limitados*

$$g(x) = P(x) + \mathcal{O}(x^n) \quad \wedge \quad h(x) = Q(x) + \mathcal{O}(x^n)$$

siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de grado $\leq n$, entonces se cumple que

$$g(x) \cdot h(x) = P(x) \cdot Q(x) + \mathcal{O}(x^n)$$

También tenemos que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\big[\, P(x) + \mathcal{O}(x^n) \,\big]^m = \big[\, P(x) \,\big]^m + \mathcal{O}(x^n)$$

Ejemplo 2.13. Calcule el desarrollo limitado de orden 3 de la función $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen}(x)$.

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)\right] \cdot \left[x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)\right] \\ &= \left[x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6}\right] - \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{12} + \frac{x^6}{36}\right] + \mathcal{O}(x^3) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.14 (Ejercicio)**.** *Calcule el desarrollo limitado de orden 5 de la función $f(x) = \cos(x) \cdot \ln(1-x)$.*

Resp. / $f(x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3\,x^5}{40} + \mathcal{O}(x^5)$

Nota 2.4. Para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

Ejemplo 2.15 (Ejercicio)**.** *Calcule el desarrollo limitado de orden 8 de la función $f(x) = \arctan^2(x)$.*

Resp. / $f(x) = x^2 - \dfrac{2\,x^4}{3} + \dfrac{23\,x^6}{45} - \dfrac{44\,x^8}{105} + \mathcal{O}(x^8)$

Ejemplo 2.16 (Ejercicio)**.** *Calcule el desarrollo limitado de orden 6 de la función $f(x) = \cos^3(x)$.*

Resp. / $f(x) = 1 - \dfrac{3\,x^2}{2} + \dfrac{7\,x^4}{8} - \dfrac{61\,x^6}{240} + \mathcal{O}(x^6)$

Teorema 2.6. *Si $f(x)$ tiene desarrollo limitado de orden n y centro $x = 0$*

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + \mathcal{O}(x^n)$$

entonces

$$f\big[\alpha\,(x-a)^s\big] = a_0 + \alpha\, a_1\,(x-a)^s + \alpha^2\, a_2\,(x-a)^{2s} + \cdots + \alpha^n\, a_n\,(x-a)^{ns} + \mathcal{O}\big[(x-a)^{ns}\big]$$

es un desarrollo limitado de orden "$n \cdot s$" y de centro "$x = a$" de la función

$$g(x) = f\big[\alpha\,(x-a)^s\big]$$

Ejemplo 2.17. Halle el desarrollo limitado de orden 10 de la función $f(x) = \cos\big(3x^2\big)$.

Solución:

Como

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4!} + \mathcal{O}(u^5) \quad \wedge \quad \mathcal{O}\big[(3x^2)^5\big] = \mathcal{O}(x^{10})$$

entonces

$$\begin{aligned}
\cos\left(3x^2\right) &= \left[1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4!} + \mathcal{O}(u^5)\right]_{u=3x^2} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left[3x^2\right]^2 + \frac{1}{24}\left[3x^2\right]^4 + \mathcal{O}(x^{10}) \\
&= 1 - \frac{9}{2}\,x^4 + \frac{81}{24}\,x^8 + \mathcal{O}(x^{10}) = 1 - \frac{9}{2}\,x^4 + \frac{27}{8}\,x^8 + \mathcal{O}(x^{10})
\end{aligned}$$

□

Nota 2.5. Si $f(x)$ tiene desarrollo limitado de orden n y centro $x = 0$

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n + \mathcal{O}(x^n)$$

y si existe el límite

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0$$

entonces

$$f\big[g(x)\big] = a_0 + a_1\,g(x) + a_2\,\big[g(x)\big]^2 + \cdots + a_n\,\big[g(x)\big]^n + \mathcal{O}\Big[\big[g(x)\big]^n\Big]$$

cuando $x \to a$.

Si queremos el desarrollo limitado de orden n y centro $x = a$ de la función

$$h(x) = f\big[g(x)\big]$$

entonces sustituir $g(x)$ por su desarrollo limitado de orden n y centro $x = a$.

Ejemplo 2.18. Considere la función

$$f(x) = \frac{1}{3 - 2x^2}$$

(a) Halle el desarrollo limitado de orden 8 y centro $x = 0$ de $f(x)$.

(b) Halle el desarrollo limitado de orden 5 y centro $x = 1$ de $f(x)$.

Solución:

(a) Note que

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \mathcal{O}(u^4) \quad \wedge \quad \mathcal{O}\big[(2x^2/3)^4\big] = \mathcal{O}(x^8)$$

luego

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{3 - 2x^2} &= \frac{1}{3}\,\frac{1}{1 - 2x^2/3} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\big[1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \mathcal{O}(u^4)\big]_{u=2x^2/3} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left[1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^4}{9} + \frac{8x^6}{27} + \frac{16x^8}{81} + \mathcal{O}(x^8)\right] \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2x^2}{9} + \frac{4x^4}{27} + \frac{8x^6}{81} + \frac{16x^8}{243} + \mathcal{O}(x^8)
\end{aligned}$$

La fórmula de Maclaurin de orden 8 es

$$\frac{1}{3-2x^2} = \frac{1}{3} + \frac{2x^2}{9} + \frac{4x^4}{27} + \frac{8x^6}{81} + \frac{16x^8}{243} + \mathcal{O}(x^8)$$

(b) Sea $w = x-1 \implies x = 1+w$

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{3-2x^2} = \frac{1}{3-2(1+w)^2} &= \frac{1}{3-2(1+2w+w^2)} \\ &= \frac{1}{1-4w-2w^2} \end{aligned}$$

Sea $u = 4w + 2w^2 = 2(2w+w^2) \to 0$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-u} \\ &= 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + \mathcal{O}(u^5) \\ &= 1 + 4w + 2w^2 + 4\,(2w+w^2)^2 + 8\,(2w+w^2)^3 \\ &\qquad + 16\,(2w+w^2)^4 + 32\,(2w+w^2)^5 + \mathcal{O}\big[32\,(2w+w^2)^5\big] \\ &= 1 + 4w + 2w^2 + 4\,(4w^2+4w^3+w^4) + 8\,(8w^3+12w^4+6w^5+w^6) \\ &\qquad + 16\,\big[16w^4 + 4\cdot 8w^5 + \mathcal{O}(w^5)\big] + 32\,\big[32w^5 + \mathcal{O}(w^5)\big] + \mathcal{O}(w^5) \\ &= 1 + 4w + (2+16)\,w^2 + (16+64)\,w^3 + (4+96+256)\,w^4 \\ &\qquad + (48+512+1024)\,w^5 + \mathcal{O}(w^5) \\ &= 1 + 4w + 18\,w^2 + 80\,w^3 + 356\,w^4 + 1584\,w^5 + \mathcal{O}(w^5) \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\frac{1}{3-2x} = 1 + 4\,(x-1) + 18\,(x-1)^2 + 80\,(x-1)^3 + 356\,(x-1)^4 + 1584\,(x-1)^5 + \mathcal{O}\big[(x-1)^5\big]$$

es la fórmula de Taylor de orden 5 centrada en 1. □

Nota 2.6. El software `wxMaxima` nos proporciona el comando `taylor(`$f(x)$`,`x`,`a`,`n`)` para cálculo del polinomio de Taylor de orden n y de centro a de $f(x)$

```
(%i4)   taylor( 1/(3-2*x^2) , x , 1 , 5 );
(%o5)   /T/
```
$$1 + 4\,(x-1) + 18\,(x-1)^2 + 80\,(x-1)^3 + 356\,(x-1)^4 + 1584\,(x-1)^5 + \ldots$$

Ejemplo 2.19 (Ejercicio)**.** *Considere la función* $f(x) = \dfrac{x}{2+3x}$.

(a) Halle una fórmula de Maclaurin con resto, de orden 4 asociada a la función $f(x)$.

(b) Halle el desarrollo limitado, centrado en $x = -3$ *y de orden 4 asociada a la función* $f(x)$.

Respuestas:

(a) $\dfrac{x}{2+3x} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3\,x^2}{4} + \dfrac{9\,x^3}{8} - \dfrac{27\,x^4}{16} - \dfrac{81\,x^5}{32\,(1+\theta)^5}$, $\theta \in V\left(0, \dfrac{3x}{2}\right)$

(b) $\dfrac{x}{2+3x} = \dfrac{3}{7} + \dfrac{2\,(x+3)}{49} + \dfrac{6\,(x+3)^2}{343} + \dfrac{18\,(x+3)^3}{2\,401} + \dfrac{54\,(x+3)^4}{16\,807} - \mathcal{O}\big[\,(x+3)^4\,\big]$

□

Ejemplo 2.20 (Ejercicio)**.** *Considere la función* $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$.

(a) Halle una fórmula de Maclaurin con resto, de orden 4 asociada a la función $f(x)$.

(b) Halle el desarrollo limitado, centrado en $x=-3$ y de orden 4 asociada a la función $f(x)$.

Respuestas:

(a) $$\frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{256\,(1-\theta)^4} \quad , \ \theta \in V\left(0, \frac{x^2}{4}\right)$$

(b) Al hacer $w = x-3$ obtenemos

$$f(x) = \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{1+w/5} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+w}$$

luego

$$\frac{1}{4-x^2} = -\frac{1}{5} + \frac{6\,(x-3)}{25} - \frac{31\,(x-3)^2}{125} + \frac{156\,(x-3)^3}{625} - \frac{781\,(x-3)^4}{3\,125} - \mathcal{O}\big[\,(x-3)^4\,\big]$$

□

Ejemplo 2.21. Halle el desarrollo limitado de orden 5 de la función $f(x) = \ln\big[\,\cos(x)\,\big]$.
(Ver **Ejercicio 2.39** en página 52)

Solución: Recordemos que

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + \mathcal{O}(u^5)$$

luego note que

$$\ln\big[\,\cos(x)\,\big] = \ln\big[\,1+\cos(x)-1\,\big]$$

sea $u = \big[\cos(x)-1\big] \to 0$ cuando $x \to 0$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+u) \\ &= \Big[u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + \mathcal{O}(u^5)\Big]_{u=\cos(x)-1} \\ &= \cos(x) - 1 - \frac{\big[\cos(x)-1\big]^2}{2} + \frac{\big[\cos(x)-1\big]^3}{3} \\ &\qquad - \frac{\big[\cos(x)-1\big]^4}{4} + \frac{\big[\cos(x)-1\big]^5}{5} + \mathcal{O}\Big[\big[\cos(x)-1\big]^5\Big] \end{aligned}$$

tenemos que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5) \iff \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\begin{aligned} \big[\cos(x)-1\big]^2 &= \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)\right]^2 \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \frac{x^8}{24^2} + \mathcal{O}(x^7) = \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned}$$

$$\left[\cos(x)-1\right]^3 = \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right]^3$$
$$= -\frac{x^6}{8}+\mathcal{O}(x^6) = \mathcal{O}(x^5)$$

$$\left[\cos(x)-1\right]^4 = \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right]^4$$
$$= \frac{x^8}{16}+\mathcal{O}(x^8) = \mathcal{O}(x^5)$$

$$\left[\cos(x)-1\right]^5 = \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right]^5$$
$$= -\frac{x^{10}}{32}+\mathcal{O}(x^{10}) = \mathcal{O}(x^5)$$

$$\therefore \quad f(x) = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)-\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}+\mathcal{O}(x^5)\right]+\mathcal{O}(x^5)$$
$$= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\mathcal{O}(x^5)$$

□

Ejemplo 2.22 (Ejercicio)**.** *Halle el desarrollo limitado de orden* 5 *de la función* $f(x)=\operatorname{sen}\left(e^x-1\right)$.

Resp. / $f(x) = x+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^4}{24}-\frac{23\,x^5}{120}+\mathcal{O}(x^5)$

Ejemplo 2.23 (Ejercicio)**.** *Calcule el desarrollo limitado de orden* 12 *centrado en* 0 *de la función:*

$$f(x) = \operatorname{sen}\left[\,\cos(2x^2)-1\,\right]$$

Resp. / $f(x) = -2x^4+\frac{2x^8}{3}+\frac{56\,x^{12}}{45}+\mathcal{O}(x^{12})$

Ejemplo 2.24. Halle el desarrollo limitado de orden 5 de la función $f(x)=\tan(x)$

Solución:

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$
$$= \frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathcal{O}(x^5)}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)}$$

recordemos que

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+\mathcal{O}(u^5)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)} &= \frac{1}{1-\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right]} \\
&= 1+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right]+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right]^2 \\
&\qquad +\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right]^3 \\
&\qquad +\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right]^4 \\
&\qquad +\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right]^5+\mathcal{O}(x^{10}) \\
&= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)+\frac{x^4}{4} \\
&= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)
\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{1}{\cos(x)}=\sec(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\
&= \left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathcal{O}(x^5)\right]\cdot\left[1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right] \\
&= x\cdot\left[1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right]-\frac{x^3}{6}\cdot\left[1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right] \\
&\qquad +\frac{x^5}{120}\cdot\left[1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right] \\
&\qquad +\mathcal{O}(x^5)\cdot\left[1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\mathcal{O}(x^5)\right] \\
&= x+\frac{x^3}{2}+\frac{5x^5}{24}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{12}+\frac{x^5}{120}+\mathcal{O}(x^5) \\
&= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\mathcal{O}(x^5)
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.25 (Ejercicio)**.** *Halle el desarrollo limitado de orden* 6 *de la función* $f(x)=x\cot(x)$.

Resp. / $f(x)=1-\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x^4}{45}-\dfrac{2\,x^6}{945}+\mathcal{O}(x^6)$

Ejemplo 2.26 (Ejercicio)**.** *Halle el desarrollo limitado de orden* 4 *de la función* $f(x)=\ln(1+x)\cdot\sec(x)$.

Resp. / $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x^3}{6}-\dfrac{x^4}{2}+\mathcal{O}(x^4)$

Ejemplo 2.27 (Ejercicio)**.** *Halle el desarrollo limitado de orden 7 de la función* $f(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{1+\ln(1+x^3)}$.

Resp. / $\quad f(x) = 1 - x^2 - x^3 + \dfrac{x^4}{3} + x^5 + \dfrac{131\,x^6}{90} - \dfrac{x^7}{3} + \mathcal{O}(x^7)$

Ejemplo 2.28. Halle el desarrollo limitado de orden 5 de la función $f(x) = \cos(x)$ centrado en $x = \pi/4$.

Solución: Sea $w = x - \pi/4 \implies x = \pi/4 + w$, luego

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos(\pi/4 + w)\\
&= \cos(\pi/4)\,\cos(w) - \operatorname{sen}(\pi/4)\,\operatorname{sen}(w)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{w^2}{2} + \frac{w^4}{24} + \mathcal{O}(w^5)\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[w - \frac{w^3}{6} + \frac{w^5}{120} + \mathcal{O}(w^5)\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + w - \frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{6} + \frac{w^4}{24} + \frac{w^5}{120} + \mathcal{O}(w^5)\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x-\pi/4}{\sqrt{2}} - \frac{(x-\pi/4)^2}{2\sqrt{2}} - \frac{(x-\pi/4)^3}{6\sqrt{2}} + \frac{(x-\pi/4)^4}{24\sqrt{2}} + \frac{(x-\pi/4)^5}{120\sqrt{2}} + \mathcal{O}\big[(x-\pi/4)^5\big]
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.29. Calcule el desarrollo limitado de orden 3 centrado en 2 de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1+\ln(x-1)}$$

Solución: Sea $w = x - 3 \iff x = 2 + w$, entonces

$$\ln(x-1) = \ln(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + \mathcal{O}(w^3)$$

también

$$\frac{1}{1+\ln(x-1)} = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \mathcal{O}(u^3)$$

donde

$$\begin{cases}
u = w - \dfrac{w^2}{2} + \dfrac{w^3}{3} + \mathcal{O}(w^3) \to 0 \quad , \text{ si } x \to 0\\
u^2 = \left[w - \dfrac{w^2}{2} + \dfrac{w^3}{3} + \mathcal{O}(w^3)\right]^2 = w^2 - w^3 + \mathcal{O}(w^3)\\
u^3 = u \cdot u^2 = \left[w - \dfrac{w^2}{2} + \dfrac{w^3}{3} + \mathcal{O}(w^3)\right] \cdot \big[\,w^2 - w^3 + \mathcal{O}(w^3)\,\big] = w^3 + \mathcal{O}(w^3)
\end{cases}$$

se concluye que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\ln(x-1)} &= 1 - \left[w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + \mathcal{O}(w^3)\right] + \big[\,w^2 - w^3 + \mathcal{O}(w^3)\,\big] - \big[\,w^3 + \mathcal{O}(w^3)\,\big]\\
&= 1 - w + \frac{3\,w^2}{2} - \frac{7\,w^3}{3} + \mathcal{O}(w^3)
\end{aligned}$$

Se concluye que

$$\frac{1}{1+\ln(x-1)} = 1 - (x-2) + \frac{3\,(x-2)^2}{2} - \frac{7\,(x-2)^3}{3} + \mathcal{O}\big[\,(x-2)^3\,\big]$$

□

Ejemplo 2.30 (Ejercicio)**.** *Halle el desarrollo limitado de orden* 6 *y centro* $\pi/6$ *de la función* $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$.

Respuesta:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 + \frac{2}{15}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5 - \frac{2\sqrt{3}}{45}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^6 + \mathcal{O}\left[\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^6\right]$$

□

Ejemplo 2.31 (Ejercicio)**.** *Calcule el desarrollo limitado de orden* 3 *y centro* 2 *de la función* $f(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{3}\right)$.

Respuesta: $f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}\,(x-2)}{6} + \frac{\pi^2\,(x-2)^2}{36} + \frac{\pi^3\sqrt{3}\,(x-2)^3}{324} + \mathcal{O}\left[(x-2)^3\right]$ □

Nota 2.7. Para todo $a > 0$ se cumple la igualdad

$$\ln(a+u) = \ln(a) + \ln\left(1 + \frac{u}{a}\right)$$

Ejemplo 2.32 (Ejercicio)**.** *Determine el desarrollo limitado de orden* 4 *y centro* 6 *de la función* $f(x) = \ln(1+x)$.

Respuesta:

$$f(x) = \ln(7) + \frac{x-6}{7} - \frac{(x-6)^2}{98} + \frac{(x-6)^3}{1\,029} - \frac{(x-6)^4}{9\,604} + \mathcal{O}\left[(x-6)^4\right]$$

□

Ejemplo 2.33 (Ejercicio)**.** *Halle el desarrollo limitado de orden* 5 *y centro* 3 *de la función* $f(x) = \ln(x)$.

Respuesta:

$$f(x) = \ln(3) + \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{2\cdot 3^2} + \frac{(x-3)^3}{3^4} - \frac{(x-3)^4}{4\cdot 3^4} + \frac{(x-3)^5}{5\cdot 3^5} + \mathcal{O}\left[(x-3)^5\right]$$

□

Ejemplo 2.34 (Ejercicio)**.** *Calcule el desarrollo limitado de orden* 4 *y centro* -2 *de la función* $f(x) = e^{3x}$.

Respuesta:

$$f(x) = \frac{1}{e^6} + \frac{3\,(x+2)}{e^6} + \frac{9\,(x+2)^2}{2\,e^6} + \frac{9\,(x+2)^3}{2\,e^6} + \frac{27\,(x+2)^4}{8\,e^6} + \mathcal{O}\left[\,(x+2)^4\,\right]$$

□

Ejemplo 2.35 (Ejercicio)**.** *Considerando la función* $f(x) = 5^x$.

(a) Halle el desarrollo limitado de orden 3 *y centro* 0 *de la función* $f(x)$.

(b) Halle el desarrollo limitado de orden 3 *y centro* 2 *de la función* $f(x)$.

Respuesta:

(a) $f(x) = 1 + \ln(5)\,x + \frac{\ln^2(5)}{2}\,x^2 + \frac{\ln^3(5)}{6}\,x^3 + \mathcal{O}(x^3)$

(b) $f(x) = 25 + 25\,\ln(5)\,(x-2) + \dfrac{25\,\ln^2(5)}{2}\,(x-2)^2 + \dfrac{25\,\ln^3(5)}{6}\,(x-2)^3 + \mathcal{O}\big[\,(x-2)^3\,\big]$

$\square$

Ejemplo 2.36 (Ejercicio)**.** *Determine el desarrollo limitado de orden 3 y centro 7 de la función* $f(x) = \sqrt[5]{x-4}$.

(Ver ***Nota 1.27*** *)*

Respuesta:

$$f(x) = \sqrt[5]{3} + \frac{\sqrt[5]{3}}{15}\,(x-7) + \frac{2\,\sqrt[5]{3}}{225}\,(x-7)^2 + \frac{2\,\sqrt[5]{3}}{1\,125}\,(x-7)^3 + \mathcal{O}\big[\,(x-7)^3\,\big]$$

$\square$

Nota 2.8. Para todo $z \in \mathbb{R}$ es cumple que

$$\operatorname{sen}^2(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos(2z) \quad \wedge \quad \cos^2(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos(2z)$$

Ejemplo 2.37 (Ejercicio)**.** *Considere la función* $f(x) = \cos^2(3x)$.

(a) Calcule el desarrollo de Maclaurin de orden 6 asociado a $f(x)$.

(b) Calcule el desarrollo limitado de orden 6 y centro $\pi/12$ *asociado a la función* $f(x)$.

(c) Calcule el desarrollo limitado de orden 4 y centro $\pi/18$ *asociado a la función* $f(x)$.

Respuestas:

(a) $f(x) = 1 - 9\,x^2 + 27\,x^4 - \dfrac{162\,x^6}{5} + \mathcal{O}(x^6)$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{2} - 3\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right) + 18\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right)^3 - \dfrac{162}{5}\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right)^5 + \mathcal{O}\left[\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right)^6\right]$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{18}\right) - \dfrac{9}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{18}\right)^2 + 9\sqrt{3}\left(x - \dfrac{\pi}{18}\right)^3 + \dfrac{27}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{18}\right)^4 + \mathcal{O}\left[\left(x - \dfrac{\pi}{18}\right)^4\right]$

$\square$

Ejemplo 2.38 (Ejercicio)**.** *Halle el desarrollo de Maclaurin de orden 7 de la función* $f(x) = \big[\,\cos(x)\,\big]^{\operatorname{sen}(x)}$.

Resp. / $f(x) = 1 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^6}{8} - \dfrac{x^7}{80} + \mathcal{O}(x^7)$ $\square$

Ejemplo 2.39 (Ejercicio)**.** *Calcule el desarrollo de Maclaurin de orden 8 asociado a* $f(x) = \ln\big[\,\cos(x)\,\big]$.

(Ver **Ejemplo 2.21** *en página 47)*

Resp. / $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} - \dfrac{17\,x^8}{2\,520} + \mathcal{O}(x^8)$

2.3 Cálculo de límites

Nota 2.9. Considere un límite de la forma

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tal que $f(x)$, $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$.

Si $f(x)$ y $g(x)$ admiten desarrollos limitados centrados en a, de orden n con coeficientes generales a_k y b_k respectivamente, entonces

$$L = \lim_{x \to a} \frac{a_0 + a_1 (x-a) + \cdots + a_n (x-a)^n + \mathcal{O}\big[(x-a)^n\big]}{b_0 + b_1 (x-a) + \cdots + b_n (x-a)^n + \mathcal{O}\big[(x-a)^n\big]}$$

Note que

$$\mathcal{O}\big[(x-a)^n\big] \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Si $a_0 \neq 0 \ \vee \ b_0 \neq 0$, entonces $L = a_0/b_0$.

Ejemplo 2.40.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4) \right] = \lim_{x \to 0} \left[1 - \frac{x^2}{5} + \mathcal{O}(x^3) \right] = 1 - 0 + 0 = 1$$

Ejemplo 2.41.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} (1+2x)^{3/x} &= \lim_{x \to 0} \exp\left[\frac{3}{x} \ln(1+2x) \right] \\ &= \lim_{x \to 0} \exp\left[\frac{3}{x} \left(2x + \mathcal{O}(x)\right) \right] \\ &= \lim_{x \to 0} \exp\left[6 + \mathcal{O}(1) \right] \\ &= \exp(6+0) = e^6 \end{aligned}$$

Nota 2.10. Podemos verificar el resultado anterior usando el software `wxMaxima`:

```
(%i5)  limit( (1+2*x)^(3/x), x, 0 );
(%o6)  %e^6
```

Nota 2.11. El orden de los desarrollos limitados se escoge de manera tal que el límite no se reduzca a una forma indeterminada, en caso contrario es necesario usar desarrollos limitados de un orden mayor.

Nota 2.12. Si $\alpha, \beta \neq 0$, cuando $x \to 0$

(a) $\dfrac{\alpha + \mathcal{O}(1)}{\beta + \mathcal{O}(1)} \to \dfrac{\alpha}{\beta}$

(b) $\dfrac{\mathcal{O}(1)}{\beta + \mathcal{O}(1)} \to 0$

(c) $\dfrac{\alpha + \mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)} \to \infty$

(d) $\dfrac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)} \to \dfrac{0}{0}$ es forma indeterminada.

Ejemplo 2.42. Usando desarrollos limitados, calcule

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt{4+3x}}{\sqrt[7]{1-2x^2} - \sqrt[5]{1+4x}}$$

Solución: $L = 0/0$ es una forma indeterminada.

Recordemos que

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha\, x + \mathcal{O}(x)$$

entonces

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8}\left(1-\dfrac{x}{8}\right)^{1/3} - \sqrt{4}\left(1+\dfrac{3x}{4}\right)^{1/2}}{(1-2x^2)^{1/7} - (1+4x)^{1/5}} \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x}{8} + \mathcal{O}(x) - \left[1 + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3x}{4} + \mathcal{O}(x)\right]}{1 - \dfrac{1}{7}\cdot 2x^2 + \mathcal{O}(x^2) - \left[1 + \dfrac{1}{5}\cdot 4x + \mathcal{O}(x)\right]} \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{\left(-\dfrac{1}{24} - \dfrac{3}{8}\right) x + \mathcal{O}(x)}{-\dfrac{4}{5}\cdot x + \mathcal{O}(x)} \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-5x}{12} + \mathcal{O}(x)}{-\dfrac{4x}{5} + \mathcal{O}(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{25 + \mathcal{O}(1)}{24 + \mathcal{O}(1)} \\
&= \frac{25}{24}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 2.43. Usando desarrollos limitados, calcule

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan(x)} - 1 - x}{\ln(1-3x^2)}$$

Solución: $L = 0/0$ es una forma indeterminada.

Tenemos que

$$\arctan(x) = x + \mathcal{O}(x^2) \to 0$$

luego

$$\begin{aligned}
e^{\arctan(x)} &= 1 + \big[\arctan(x)\big] + \frac{1}{2}\big[\arctan(x)\big]^2 + \mathcal{O}\Big[\big[\arctan(x)\big]^2\Big] \\
&= 1 + \big[x + \mathcal{O}(x^2)\big] + \frac{1}{2}\big[x + \mathcal{O}(x^2)\big]^2 + \mathcal{O}\Big[\big[x + \mathcal{O}(x^2)\big]^2\Big] \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)
\end{aligned}$$

también

$$\ln(1-3x^2) = [u + \mathcal{O}(u)]_{u=-3x^2} = -3x^2 + \mathcal{O}(x^2)$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad L &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan(x)} - 1 - x}{\ln(1-3x^2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2) - 1 - x}{-3x^2 + \mathcal{O}(x^2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)}{-3x^2 + \mathcal{O}(x^2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \mathcal{O}(1)}{-3 + \mathcal{O}(1)} \\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.44 (Ejercicio)**.** *Usando desarrollos limitados, calcule*

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5\,x^2) - x\,\mathrm{sen}(x)}{\cos(6x) - 1}$$

Resp. / $L = -\dfrac{2}{9}$

Nota 2.13 (Cambio de Variable)**.**

(a) $x \to a \iff w = x - a \to 0$, entonces

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{w\to 0} f(a+w)}$$

(b) $x \to \infty \iff w = 1/x \to 0$, entonces

$$\boxed{\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{w\to 0} f(1/w)}$$

Ejemplo 2.45. Usando desarrollos limitados calcule

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{sen}^2(\pi x)}{x - 1 - \ln(x)}$$

Solución:

Sea $w = x - 1 \iff x = 1 + w$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{x-1-\ln(x)} &= \lim_{w\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi+\pi w)}{w-\ln(1+w)}\\
&= \lim_{w\to 0}\frac{[\operatorname{sen}(\pi)\cos(\pi w)+\cos(\pi)\operatorname{sen}(\pi w)]^2}{w-\ln(1+w)}\\
&= \lim_{w\to 0}\frac{[0-\operatorname{sen}(\pi w)]^2}{w-\ln(1+w)}\\
&= \lim_{w\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi w)}{w-\ln(1+w)}\\
&= \lim_{w\to 0}\frac{\left[\pi w+\mathcal{O}(w^2)\right]^2}{w-\left[w-w^2/2+\mathcal{O}(w^2)\right]}\\
&= \lim_{w\to 0}\frac{\pi^2 w^2+\mathcal{O}(w^2)}{w^2/2+\mathcal{O}(w^2)}\\
&= \lim_{w\to 0}\frac{\pi^2+\mathcal{O}(1)}{1/2+\mathcal{O}(1)}\\
&= 2\pi^2
\end{aligned}
$$

□

Nota 2.14. Podemos verificar el resultado anterior usando el software `wxMaxima`:

```
(%i6)   limit( sin(%pi*x)^2/( x-1-log(x) ), x, 1 );
(%o7)   2π^2
```

Ejemplo 2.46. Use desarrollos limitados para calcular el siguiente límite

$$
L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\ln(1+x)-\sqrt{x}\cdot\ln(x)}{\sqrt{1+4x}-2\sqrt{x}}
$$

Solución:

Sea $w=1/x$, entonces

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{w\to 0^+}\frac{\sqrt{1/w}\cdot\ln(1+1/w)-\sqrt{1/w}\cdot\ln(1/w)}{\sqrt{1+4/w}-2\sqrt{1/w}}\\
&= \lim_{w\to 0^+}\frac{\ln(1+1/w)+\ln(w)}{\sqrt{w}\cdot\left[\sqrt{1+4/w}-2\sqrt{1/w}\right]}\\
&= \lim_{w\to 0^+}\frac{\ln\left[(1+1/w)\cdot w\right]}{\sqrt{w+4}-2\sqrt{1}}\\
&= \lim_{w\to 0^+}\frac{\ln(1+w)}{2\sqrt{1+w/4}-2}\\
&= \lim_{w\to 0^+}\frac{w+\mathcal{O}(w)}{2\left[1+1/2\cdot w/4+\mathcal{O}(w)\right]-2}\\
&= \lim_{w\to 0^+}\frac{w+\mathcal{O}(w)}{w/4+\mathcal{O}(w)}\\
&= 4
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.47. Use desarrollos limitados para calcular el siguiente límite

$$L = \lim_{x \to 3} \frac{x - 1 - 2\sqrt{x-2}}{\ln(x-2) - x + 3}$$

Solución: Haciendo $w = x - 3 \iff x = 3 + w$:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x \to 3} \frac{x - 1 - 2\sqrt{x-2}}{\ln(x-2) - x + 3} \\
&= \lim_{w \to 0} \frac{2 + w - 2\sqrt{1+w}}{\ln(1+w) - w} \\
&= \lim_{w \to 0} \frac{2 + w - 2\left[1 + \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) w^2/2 + \mathcal{O}(w^2)\right]}{w - w^2/2 + \mathcal{O}(w^2) - w} \\
&= \lim_{w \to 0} \frac{w^2/4 + \mathcal{O}(w^2)}{-w^2/2 + \mathcal{O}(w^2)} \\
&= \lim_{w \to 0} \frac{1/4 + \mathcal{O}(1)}{-1/2 + \mathcal{O}(1)} \\
&= \frac{3/4 + 0}{-1/2 + 0} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.48. Use desarrollos limitados para calcular el siguiente límite

$$L = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x-1}{x} \right]^{x^2}$$

Solución: Haciendo $w = 1/x \iff x = 1/w$:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x-1}{x} \right]^{x^2} \\
&= \lim_{w \to 0} (\ \ln(1+w) + 1 - w\ )^{1/w^2} \\
&= \lim_{w \to 0} \left(\ w - \frac{w^2}{2} + \mathcal{O}(w^2) + 1 - w\ \right)^{1/w^2} \\
&= \lim_{w \to 0} \left(\ 1 - \frac{w^2}{2} + \mathcal{O}(w^2)\ \right)^{1/w^2} \\
&= \exp\left[\ \lim_{w \to 0}\ \frac{1}{w^2} \cdot \ln\left(\ 1 - \frac{w^2}{2} + \mathcal{O}(w^2)\ \right)\ \right] \\
&= \exp\left[\ \lim_{w \to 0}\ \frac{1}{w^2} \cdot \left(\ -\frac{w^2}{2} + \mathcal{O}(w^2)\ \right)\ \right] \\
&= \exp\left[\ \lim_{w \to 0}\ \left(\ -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(1)\ \right)\ \right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\right] \\
&= e^{-1/2}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.49 (Ejercicio)**.** *Usando desarrollos limitados, calcule*

$$L = \lim_{x \to 2} \left[\ \ln(x-1) - x + 3 \ \right]^{(x-2)^{-2}}$$

Resp. / $\quad L = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Referencias

[1] Pisa Volio E., *Introducción al Análisis real en una variable*, Editorial de la Universidad de Costa Rica, Costa Rica, 2003

[2] Poltronieri J., *Cálculo 2*, Serie: Cabécar, Costa Rica, 1998

[3] Duarte A. & Cambronero S., *Complementos de Cálculo*, 2011

[4] Spivak M., *Cálculo Infinitesimal*, Editorial Reverté, 1988

[5] Demidovich B., *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*, Editorial Mir, Moscú, URSS, 1973

[6] Piskunov N., *Cálculo diferencial e integral. tomo II*, Editorial Mir, Moscú, 1978

[7] Doneddu A., *Análisis y Geometría Diferencial*, Editorial Aguilar, Espaã, 1979

[8] Larson R., Hostetler, *Cálculo y Geometría Analítica*, Editorial McGraw-Hill, México, 1989

[9] Edwards C.H & Penney D. E., *Cálculo con Geometría Analítica*, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1996

[10] Spiegel M. R., *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*, Editorial McGraw-Hill, México, 1970