Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Prof. Miguel Walker Ureña

Dpto. Matemática Aplicada
MA-294: Cálculo para computación 2
Ciclo 2-2015

Tema 4. Series Numéricas

[versión 0.6' , compilado el 12/10/2015]

Contenidos

1 Introducción a las series numéricas

Definición 1.1 (Serie Numérica)**.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real, entonces la **Serie Numérica** de término general "a_n" corresponde al límite

$$S = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n$$

lo cual se suele denotar como

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

También es una serie numérica

$$\boxed{\sum_{n=k}^{+\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=k}^{m} a_n}$$

Además, la **suma parcial de la serie** numérica S es la sucesión de sumatorias

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$$

que corresponde a la suma de los términos a_n hasta el índice $n = m$.
En tal caso el **resto** o "cola" de la serie numérica S es

$$\boxed{R_m = S - S_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n}$$

que corresponde a la diferencia entre el límite S y la suma parcial S_m.

Ejemplo 1.1. La serie

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}}$$

es la serie de término general $a_n = \dfrac{2^n}{5^{n+1}}$.

Definición 1.2 (Convergencia de la serie)**.** La serie numérica

$$S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n$$

es llamada serie numérica **convergente** si existe y es finito el límite

$$\lim_{m\to+\infty} S_m = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=k}^{m} a_n$$

En tal caso el valor numérico del límite anterior es llamado valor de convergencia o "suma de la serie".
Si el límite es infinito o no existe, se dice entonces que la serie numérica S es **divergente**.
En otras palabras, la serie numérica S es convergente si y solo si la sucesión S_m es convergente.

Ejemplo 1.2. Considere la serie numérica

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

Note que

$$\sum_{n=1}^{m} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

entonces

$$S = \lim_{m\to+\infty} \frac{m(m+1)}{2} = +\infty$$

Por lo tanto la serie numérica S es divergente.

Ejemplo 1.3. Considere la serie numérica

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

en tal caso

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= 1 - 1 = 0 \\ S_2 &= 1 - 1 + 1 = 1 \\ S_3 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

o sea que

$$S_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es par} \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

como la sucesión S_m es divergente, entonces S es una serie numérica divergente.

Ejemplo 1.4. Resuelva los siguientes ejercicios:

(a) Demuestre por inducción que

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^m}$$

(b) Determine la convergencia de la serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

Solución:

(a) Por inducción sobre $m = 1, 2, \dots$

$\boxed{m = 1}$

$$\sum_{n=1}^{1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \left[1 - \frac{1}{2^m}\right]_{m=1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\checkmark)$$

$\boxed{m \to m+1}$

La hipótesis de inducción y lo que hay que demostrar son de manera correspondiente:

$$\begin{cases} h.i: \quad S_m = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^m} \\ h.q.d: \quad S_{m+1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{m+1}} \end{cases}$$

Tenemos que

$$S_{m+1} = \sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{m+1}} \overset{h.i}{=} 1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}$$

luego

$$S_{m+1} = 1 - \frac{1}{2^m} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^{m+1}} \quad (\checkmark)$$

Se concluye por inducción matemática, que para todo natural $m \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^m}$$

(b) Note que

$$S = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} = \lim_{m\to+\infty} \left[1 - \frac{1}{2^m}\right] = 1 - 0 = 1$$

existe y es finito, por lo tanto la serie numérica S es convergente.

Además el valor de convergencia de la serie S es 1.

□

Ejemplo 1.5 (Una serie numérica para e)**.** Recordemos que la función e^x tiene fórmula de Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \frac{e^\theta x^{m+1}}{(m+1)!}, \; \theta \in V(0,x)$$

Tomando $x = 1$ y cambiando de lado el resto de la fórmula obtenemos

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} = e - \frac{e^\theta}{(m+1)!}, \; \theta \in V(0,1) = [0,1]$$

En otras palabras, tenemos que

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} = e - \frac{e^\theta}{(m+1)!}, \; \theta \in [0,1]$$

es la suma parcial de la serie numérica

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Luego

$$\boxed{S = e - \lim_{m\to+\infty} \frac{e^\theta}{(m+1)!}, \; \theta \in [0,1]}$$

Como $\theta \in [0,1] \implies 0 \leq \lim_{m\to+\infty} \frac{e^\theta}{(m+1)!} \leq \lim_{m\to+\infty} \frac{e}{(m+1)!} = 0$, entonces

$$S = e - 0 = e$$

Así tenemos una serie numérica convergente de límite e:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e}$$

Ejemplo 1.6 (Una serie numérica para π)**.** Recordemos que la función $\arctan(x)$ tiene fórmula de Taylor

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^m\, x^{2m+1}}{2m+1} + \frac{(-1)^{m+1}\, x^{2m+3}}{(2m+3)(1+\theta)^{m+2}}, \quad \theta \in V(0,x^2)$$

Tomando $x=1$ obtenemos la fórmula

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^m}{2m+1} = \arctan(1) - \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+3)(1+\theta)^{m+2}}, \quad \theta \in [0,1]$$

O lo que es lo mismo

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+3)(1+\theta)^{m+2}}, \quad \theta \in [0,1]$$

Entonces

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - \lim_{m\to+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+3)(1+\theta)^{m+2}}, \quad \theta \in [0,1]}$$

Como $\theta \in [0,1] \implies \frac{1}{1+\theta} \leq 1 \implies \forall m \in \mathbb{N},\ \frac{1}{(1+\theta)^{m+2}} \leq 1$

Luego

$$0 \leq \left| \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+3)(1+\theta)^{m+2}} \right| = \frac{1}{(2m+3)(1+\theta)^{m+2}} \leq \frac{1}{2m+3} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Al final tenemos la siguiente serie numérica convergente a π

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{2n+1} = \pi}$$

2 Criterios de convergencia

2.1 Series Geométricas y propiedades de las series

Criterio 2.1 (Series Geométricas). *Si $r \in \mathbb{R}$ es una constante, entonces la serie numérica*

$$S = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \ldots$$

*es llamada **Serie Geométrica**.*
Luego S es convergente si y solo si $|r| < 1$, o sea que S es divergente si y solo si $|r| \geq 1$.
Si $|r| < 1$, entonces

$$\boxed{S = \frac{1}{1-r}}$$

Nota 2.1. Para todo $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ se cumple que

$$\sum_{n=0}^{m} r^n = \frac{1 - r^{m+1}}{1-r}$$

por lo tanto, para todo $r \neq 0, 1$

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \lim_{m \to +\infty} \frac{1 - r^{m+1}}{1-r} = \begin{cases} \dfrac{1-0}{1-r} & , \text{ si } |r| < 1 \\ \dfrac{1-\infty}{1-r} & , \text{ si } r > 1 \\ \nexists & , \text{ si } r \leq -1 \end{cases}$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & , \text{ si } |r| < 1 \\ +\infty & , \text{ si } r \geq 1 \\ \nexists & , \text{ si } r \leq -1 \end{cases}$$

Además $r = 0 \implies 1 + r + r^2 + \cdots + r^m + \cdots = 1 = \dfrac{1}{1+0}$.
Lo cuál verifica el criterio 2.1

Ejemplo 2.1. La serie

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{5^n}$$

es una serie geométrica convergente, pues

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n \quad \wedge \quad \frac{2}{5} < 1$$

luego

$$S = \frac{1}{1 - 2/5} = \frac{5}{3}$$

Ejemplo 2.2. La serie

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{3n}}{5^n}$$

es una serie geométrica divergente, pues

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2^3}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{8}{5}\right)^n \quad \wedge \quad \frac{8}{5} > 1$$

Teorema 2.1. *Considere una sucesión real $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en tal caso para toda constante $k \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ es convergente} \iff \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \text{ es convergente}$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ es divergente} \iff \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \text{ es divergente}$$

Nota 2.2. El teorema anterior es justificado por la igualdad

$$\sum_{n=0}^{m} a_n = \sum_{n=0}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{m} a_n$$

pues al aplicar límites se obtiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{+\infty} a_n$$

Teorema 2.2 (Cambio de índice)**.** *Para todo $k, \ell \in \mathbb{N}$ y dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se cumple que*

$$\boxed{\sum_{n=k}^{+\infty} a_n = \sum_{n=k-\ell}^{+\infty} a_{n+\ell}}$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{n=k}^{+\infty} a_n = \sum_{n=k+\ell}^{+\infty} a_{n-\ell}$$

Nota 2.3. Para todo $r \neq 0, 1$ y dado $k > 0$, se cumple que

$$\sum_{n=k}^{m} r^n = \sum_{n=0}^{m-k} r^{n+k} = r^k \cdot \sum_{n=0}^{m-k} r^n = r^k \cdot \frac{1 - r^{m-k+1}}{1-r} = \frac{r^k - r^{m+1}}{1-r}$$

luego si $|r| < 1$, se cumple que

$$\boxed{\sum_{n=k}^{+\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r}}$$

Ejemplo 2.3. La serie numérica

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{7^n}{5^{2n}}$$

es serie geométrica convergente pues

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{7}{25}\right)^n \quad \wedge \quad \frac{7}{25} < 1$$

luego

$$S = \left(\frac{7}{25}\right)^3 \cdot \frac{1}{1 - 7/25} = \frac{7^3}{25^3} \cdot \frac{25}{18} = \frac{7^3}{18 \cdot 25^2} = \frac{343}{11250}$$

Nota 2.4 (Serie Geométrica Alternada)**.** Si $r > 0$ entonces la serie numérica

$$S = \sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^n \, r^n$$

es llamada **Serie Geométrica Alternada**, en tal caso es convergente si y solo si $r < 1$ y divergente si y solo si $r \geq 1$.

Cuando $|r| < 1$ se cumplen las igualdades

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, r^n = \frac{1}{1+r}} \quad \wedge \quad \boxed{\sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^n r^n = \frac{(-1)^k \, r^k}{1+r}}$$

Ejemplo 2.4. La serie numérica

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{9^n}$$

es una serie geométrica alternada convergente pues $2/9 < 1$, cumpliéndose que

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1 + 2/9} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{9}{11} = -\frac{2}{11}$$

Teorema 2.3. *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones reales y sea $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Si se cumple que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ es convergente} \quad \vee \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ es convergente}$$

entonces tenemos la igualdad

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [\, \alpha \cdot a_n + b_n \,] = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Nota 2.5. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones reales y sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ es convergente} \quad \wedge \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ es convergente} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} [\alpha \, a_n + b_n] \text{ es convergente}$$

En tal caso

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} [\alpha \, a_n + b_n] = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n}$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ es convergente} \quad \wedge \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ es divergente} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} [\alpha \, a_n + b_n] \text{ es divergente}$$

Ejemplo 2.5. Analice la convergencia de la serie

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3 \cdot 4^n - 1}{3^{n+2}}$$

Calcule la suma en caso de ser convergente.

Solución: Note que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3\cdot 4^n - 1}{3^2\cdot 3^n} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{4^n}{3\cdot 3^n} - \frac{1}{9\cdot 3^n}\right] \\ &= \frac{1}{3}\cdot \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n - \frac{1}{9}\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{3^n} \end{aligned}$$

que es la suma de una serie geométrica divergente y de una serie convergente, pues $4/3 > 1$ y $1/3 < 1$, Luego S es una serie numérica divergente. □

Ejemplo 2.6. Analice la convergencia de la serie

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^{n-2} + (-1)^{n+1} + 6}{5^{n+1}}$$

Calcule la suma en caso de ser convergente.

Solución:
Tenemos que

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{5}\cdot\sum_{n=3}^{+\infty}\left[\frac{2^{n-2}}{5^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{5^n} + \frac{6}{5^n}\right] \\ &= \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{1}{2^2}\cdot\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{5^n} + 6\cdot\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{5^n}\right] \end{aligned}$$

es suma de series geométricas convergentes, pues $2/5 < 1 \ \wedge\ 1/5 < 1$, luego

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{1}{2^2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\frac{1}{1-2/5} - \frac{(-1)^3}{5^3}\cdot\frac{1}{1+1/5} + 6\cdot\frac{1}{5^3}\cdot\frac{1}{1-1/5}\right] \\ &= \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{2}{5^3}\cdot\frac{5}{3} + \frac{1}{5^3}\cdot\frac{5}{6} + 6\cdot\frac{1}{5^3}\cdot\frac{5}{4}\right] \\ &= \frac{1}{5^3}\cdot\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{2}\right] \\ &= \frac{7}{3\cdot 5^3} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.7. Halle una representación fraccionaria del número periódico

$$4.\overline{175} = 4.175175175\ldots$$

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}
4.\overline{175} &= 4 + 0.175 + 0.000\,175 + 0.000\,000\,175 + \dots \\
&= 4 + \frac{175}{1000} + \frac{175}{1000^2} + \frac{175}{1000^3} + \dots \\
&= 4 + 175 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1000^n} \\
&= 4 + 175 \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{1 - 1/1000} \\
&= 4 + \frac{175}{999} \\
&= \frac{4171}{999}
\end{aligned}$$

□

2.2 Series Telescópicas

Criterio 2.2 (Series Telescópicas). *Si* $(b_n)_{n=k,\,k+1,\,k+2,\dots}$ *es una sucesión real, entonces la serie numérica*

$$S = \sum_{n=k}^{+\infty} \left[\, b_n - b_{n+1} \,\right]$$

*es llamada **Serie Telescópica**.*
Luego S *es convergente si y solo si existe y es finito el límite*

$$\lim_{m\to\infty} b_m$$

Además se cumple que

$$\boxed{\sum_{n=k}^{+\infty} \left[\, b_n - b_{n+1} \,\right] = b_k - \lim_{m\to+\infty} b_m}$$

Nota 2.6. Si $(b_n)_{n=k,\,k+1,\,k+2,\dots}$ es una sucesión real, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{m-1} \left[\, b_n - b_{n+1} \,\right] &= \left[\, b_k - b_{k+1} \,\right] + \left[\, b_{k+1} - b_{k+2} \,\right] + \left[\, b_{k+2} - b_{k+3} \,\right] + \left[\, b_{k+3} - b_{k+4} \,\right] + \dots \\
&\qquad \cdots + \left[\, b_{m-3} - b_{m-2} \,\right] + \left[\, b_{m-2} - b_{m-1} \,\right] + \left[\, b_{m-1} - b_m \,\right] \\
&= b_k + \left[\, -b_{k+1} + b_{k+1} \,\right] + \left[\, -b_{k+2} + b_{k+2} \,\right] + \left[\, -b_{k+3} + b_{k+3} \,\right] + \dots \\
&\qquad \cdots + \left[\, -b_{m-2} + b_{m-2} \,\right] + \left[\, -b_{m-1} + b_{m-1} \,\right] - b_m \\
&= b_k + 0 + 0 + \cdots + 0 - b_m \\
&= b_k - b_m
\end{aligned}$$

Note entonces que

$$\sum_{n=k}^{m-1} \left[\, b_n - b_{n+1} \,\right] = b_k - b_m \qquad \wedge \qquad \sum_{n=k}^{m-1} \left[\, b_{n+1} - b_n \,\right] = b_m - b_k$$

Se concluye de lo anterior que, si $b_\infty = \lim_{m\to+\infty} b_m$ entonces

$$\boxed{\sum_{n=k}^{+\infty} \left[\, b_n - b_{n+1} \,\right] = b_k - b_\infty} \qquad \wedge \qquad \boxed{\sum_{n=k}^{+\infty} \left[\, b_{n+1} - b_n \,\right] = b_\infty - b_k}$$

Ejemplo 2.8. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=4}^{+\infty} \left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right]$$

En caso de ser convergente calcule la suma.

Solución:
Note que si

$$b_n = \frac{1}{n+3} \implies b_{n+1} = \frac{1}{n+4}$$

por lo tanto S es una serie telescópica convergente pues

$$S = \sum_{n=4}^{+\infty} \left[\, b_n - b_{n+1} \,\right] = b_4 - b_\infty = \left.\frac{1}{n+3}\right|_{n=4} - \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m+3} = \frac{1}{7} - 0 = \frac{1}{7}$$

$\square$

Ejemplo 2.9. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=5}^{+\infty} \ln\left[\frac{2n+5}{2n+3}\right]$$

En caso de ser convergente calcule la suma.

Solución:

Por propiedades de los logaritmos, tenemos que

$$S = \sum_{n=5}^{+\infty} \big[\ln(2n+5) - \ln(2n+3)\big]$$

Note que si

$$b_n = \ln(2n+3) \implies b_{n+1} = \ln[2(n+1)+3] = \ln(2n+5)$$

por lo tanto S es una serie telescópica divergente pues

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=4}^{+\infty} \big[\, b_{n+1} - b_n \,\big] &= b_\infty - b_5 \\ &= \lim_{m\to+\infty} \ln(2m+3) - \ln(2n+3)\Big|_{n=5} \\ &= +\infty - \ln(13) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Entonces la serie es divergente. □

2.3 Condición necesaria

Criterio 2.3 (Criterio de la Condición Necesaria). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real, entonces:*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ es Convergente } \implies a_n \text{ es Convergente } \wedge \lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

O lo que es lo mismo:

$$\boxed{a_n \text{ es Divergente } \vee \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ es Divergente}}$$

Nota 2.7. El criterio de la condición necesaria es un criterio de divergencia nada más, es decir que no determina si una serie numérica es convergente.

Note entonces que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real convergente, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \implies \text{ No hay criterio para determinar la convergencia de } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Nota 2.8 (Sobre la condición de Cauchy). Dada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real, sean

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \qquad \wedge \qquad S_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} S \quad \text{es convergente} &\iff S_m \text{ es una sucesión convergente} \\ &\iff \forall p \in \mathbb{N},\ \lim_{m\to+\infty} \big[S_{m+p} - S_m\big] = 0 \quad (\text{ Cond. Cauchy }) \\ &\iff \forall p \in \mathbb{N},\ \lim_{m\to+\infty} \big[a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+p}\big] = 0 \end{aligned}$$

Como consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} S \quad \text{es convergente} &\implies \lim_{m\to+\infty} a_{m+1} = \lim_{m\to+\infty} \big[S_{m+1} - S_m\big] = 0 \\ &\implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \end{aligned}$$

lo cual corresponde a la condición necesaria.

Ejemplo 2.10. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} n \operatorname{sen}(4/n)$$

Solución:

El coeficiente general de la serie numérica S corresponde a

$$a_n = n \operatorname{sen}(4/n)$$

entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} n\,\text{sen}\,(4/n)\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}(4x)}{x}, \qquad \text{siendo } x = 1/n\\ &= 4\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}(4x)}{4x}\\ &= 4\cdot 1\\ &= 4\neq 0\end{aligned}$$

Se concluye entonces que S es divergente, pues no satisface la condición necesaria. □

Ejemplo 2.11. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left[\frac{n+2}{n+3}\right]$$

Solución:

El coeficiente general de la serie numérica S corresponde a

$$a_n = \ln\left[\frac{n+2}{n+3}\right] \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\ln\left[\frac{n+2}{n+3}\right] = \ln\left[\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n+3}\right] = \ln[1] = 0$$

Luego el criterio de la condición necesaria NO concluye nada! (NO hay criterio).

Por otro lado note que S es una serie telescópica de manera tal que

$$\begin{aligned}S &= \sum_{n=0}^{+\infty}\big[\ln(n+2)-\ln(n+3)\big]\\ &= \ln(0+2) - \lim_{m\to+\infty}\ln(m+2)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

En este caso tenemos que S es una serie numérica que SI satisface la condición necesaria pero

$$\boxed{S \text{ es divergente}}$$

□

2.4 Criterio de la integral y error de una suma

Criterio 2.4 (Criterio de la Integral)**.** *Dado $k \in \mathbb{N}$, sea $(a_n)_{n=k,\,k+1,\,k+2,\ldots}$ una sucesión numérica real positiva y decreciente y sea $f : [k, +\infty[\to \big[0, +\infty\big[$ una función continua y decreciente tal que $\forall\, n \in \{k,\, k+1,\, k+2,\, \ldots\}$*

$$S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \quad \wedge \quad f(n) = a_n$$

Entonces S es convergente si y solo si la integral

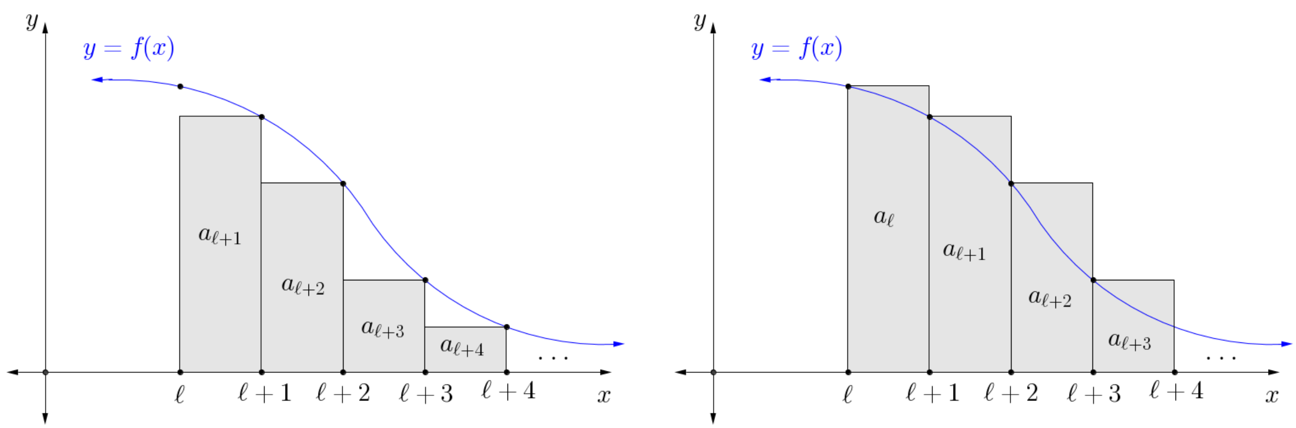
$$I = \int_k^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{z \to +\infty} \int_k^z f(x)\, dx$$

es una integral impropia de primera especie convergente. (Es decir, que existe y es finito)
Se puede escribir que

$$\sum_{n=k}^{+\infty} a_n \sim \int_k^{+\infty} f(x)\, dx$$

para expresar que la serie S y la integral I tienen la misma naturaleza (ambas convergen o ambas divergen).
Además tenemos que, para todo natural $\ell \geq k$

$$\sum_{n=\ell+1}^{+\infty} a_n \leq \int_\ell^{+\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{n=\ell}^{+\infty} a_n$$



Luego se cumple que

$$0 \leq R_m = S - S_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n \leq \int_m^{+\infty} f(x)\, dx$$

Ejemplo 2.12. Estudie la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\big[\ln^5(2n) - 1\big]}$$

Solución: Tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{x\big[\ln^5(2x) - 1\big]} \implies \forall\, n \in \mathbb{N},\; f(n) = a_n \quad \text{es el término general de } S$$

Claramente $f(x)$ es continua en $[3, +\infty[$, pues $x \geq 3 > 0$ y $\ln^5(2x) - 1 = 0 \iff x = e/2 < 3$.

Luego

$$\begin{aligned} I &= \int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x\left[\,\ln^5(2x) - 1\right]} \\ &= \int_{\ln(6)}^{+\infty} \frac{2du}{u^5 - 1}, \qquad \text{donde } u = \ln(2x) \iff du = \frac{dx}{2x} \\ &\sim \int_{\ln(6)}^{+\infty} \frac{du}{u^5} \qquad \text{que es una } p\text{-integral convergente, pues } p = 5 > 1 \end{aligned}$$

Se concluye que la integral I es convergente, entonces la serie numérica S es convergente por el criterio de la integral. □

Definición 2.1 (Error de la suma)**.** Considere una serie numérica

$$S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n$$

y sea

$$R_m = S - S_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n$$

el resto de la serie numérica, entonces el error cometido al calcular Sm corresponde al valor

$$\varepsilon = |R_m|$$

y expresa "cuanto dista" la suma parcial S_m del valor numérico de la serie numérica S cuando esta es convergente.

Nota 2.9. Si $(a_n)_{n=k,\,k+1,\,k+2,\,\dots}$ una sucesión numérica real positiva y decreciente y sea $f : [k, +\infty[\to \mathbb{R}$ una función positiva, continua y decreciente tal que $\forall\, n \in \{k,\, k+1,\, k+2,\, \dots\}$

$$S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \quad \wedge \quad f(n) = a_n$$

Si S es convergente entonces el error ε cometido al calcular la suma parcial S_m cumple que

$$\boxed{\varepsilon = |R_m| \leq \int_{m}^{+\infty} f(x)\, dx}$$

O sea que la integral nos proporciona una cota para el error.

También se cumple que

$$\boxed{S_m + \int_{m+1}^{+\infty} f(x)\, dx \leq S \leq S_m + \int_{m}^{+\infty} f(x)\, dx}$$

Teorema 2.4. *Considere una serie numérica y su suma parcial respectivamente*

$$S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \qquad \wedge \qquad S_m = \sum_{n=k}^{m} a_n,\ m \geq k$$

y sea $R_m = S - S_m$ el resto de la serie numérica S, entonces

$$\boxed{S \textit{ es Convergente} \iff \lim_{m \to +\infty} R_m = 0}$$

Nota 2.10. Dada la serie numérica y su respectiva suma parcial

$$S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \qquad \wedge \qquad S_m = \sum_{n=k}^{m} a_n, \; m \geq k$$

si $R_m = S - S_m$ es el resto de la serie numérica S, entonces

$$\lim_{m\to+\infty} R_m = \lim_{m\to+\infty} \big[S - S_m\big] = S - \lim_{m\to+\infty} S_m = S - S = 0$$

Ejemplo 2.13. Considere la serie numérica

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Resolver los siguientes problemas

(a) Verifique que S es una serie numérica convergente.

(b) Halle una cota del error cometido al calcular S_8.

(c) Aproxime el valor numérico de S, sumando los dos primeros términos de la serie numérica y acote el error cometido.

(d) ¿Cuántos términos de la serie hay que sumar para que el error ε sea menor que $1/100\,000$?

Solución:

(a) Es claro que $1/x^4$ es una función continua, positiva y decreciente en $[3, +\infty[$.

Luego S es una serie numérica convergente por el criterio de la integral, pues

$$S \sim \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^4}, \qquad \text{que es una } p\text{-integral convergente } (p = 4 > 1)$$

(b) El error cometido al calcular S_8 corresponde a

$$\begin{aligned}
\varepsilon_8 = |R_8| &\leq \int_8^{+\infty} \frac{dx}{x^4} \\
&= \left.\frac{-1}{3x^3}\right|_8^{+\infty} \\
&= -0 + \frac{1}{3\cdot 8^3} \\
&= \frac{1}{1536} \\
&\approx 0.000651
\end{aligned}$$

(c) La suma de los primeros dos términos de S corresponde a

$$a_3 + a_4 = S_4 = \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} = \frac{256+81}{81\cdot 256} = \frac{337}{20736} \approx 0.016251929012346$$

El error cometido corresponde a

$$\begin{aligned}
\varepsilon_4 = |R_4| &\le \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^4} \\
&= \left.\frac{-1}{3x^3}\right|_4^{+\infty} \\
&= -0 + \frac{1}{3\cdot 4^3} \\
&= \frac{1}{192} \\
&= 0.005208\overline{3}
\end{aligned}$$

(d) Para que el error ε sea menor que $1/100\,000 = 1/10^5$, es suficiente que

$$\begin{aligned}
\varepsilon = |R_m| &\le \int_m^{+\infty} \frac{dx}{x^4} \\
&= \left.\frac{-1}{3x^3}\right|_m^{+\infty} \\
&= -0 + \frac{1}{3\cdot m^3} \\
&< \frac{1}{10^5}
\end{aligned}$$

entonces

$$3\,m^3 > 10^5 \iff m > \sqrt[3]{\frac{10^5}{3}} \approx 32.18 \quad (\text{ Con ayuda de la calculadora })$$

Se concluye que S_{33} aproxima a S con un error menor que $1/10^5$.

Como el índice n de la serie comienza en $n = 3$, entonces es necesario sumar al menos $33 - 2 = 31$ términos de la serie.

Otra manera de estimar un valor para m es haciendo

$$\sqrt[3]{\frac{10^5}{3}} = 10^2\,\sqrt[3]{\frac{1}{30}} < 100\,\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{100}{3} < \frac{102}{3} = 34$$

entonces podemos tomar

$$m = 34 > \sqrt{\frac{10^5}{3}}$$

de lo cuál se sigue que con $34 - 2 = 32$ términos el error es menor que $1/10^5$.

$\square$

2.5 p-series

Criterio 2.5 (p-series). *Una serie numérica de la forma*

$$S = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-n_0)^p}$$

es llamada p-serie siempre que $n_0 < k$.
En tal caso

$$\boxed{S \text{ Convergente} \iff p > 1}$$

Note que

$$S \text{ Divergente} \iff p \leq 1$$

Ejemplo 2.14. La serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

es una p-serie convergente, porque $p = 2 > 1$.

Nota 2.11.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Ejemplo 2.15. La serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

es una p-serie divergente, porque $p = 1$.

Nota 2.12 (Serie armónica). La p-serie divergente

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

es llamada también **serie armónica**.
Note que por el criterio integral

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sim \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln(x)\Big|_1^{+\infty} = +\infty$$

Ejemplo 2.16. Notando que $4 < 6$, tenemos que la serie

$$S = \sum_{n=6}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n-4)^5}} = \sum_{n=6}^{+\infty} \frac{1}{(n-4)^{5/3}}$$

es una p-serie Convergente, porque $p = 5/3 > 1$.

Ejemplo 2.17. Notando que $4 < 6$, tenemos que la serie

$$S = \sum_{n=6}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(n-4)^3}} = \sum_{n=6}^{+\infty} \frac{1}{(n-4)^{3/4}}$$

es una p-serie Divergente, porque $p = 3/4 < 1$.

Ejemplo 2.18. Muestre que la siguiente serie es convergente,

$$S = \sum_{n=6}^{+\infty} \frac{2^{n+1} + n^2 - 6n + 9}{2^n (n-3)^2}$$

y calcule su valor de convergencia con ayuda de la nota 2.11.

Solución:

Por el criterio de la integral, y luego tomando en cuenta que $\forall \alpha,\ 2^x \gg n^\alpha \ \wedge\ x - 3 \sim x$

$$\begin{aligned} S &\sim \int_6^{+\infty} \frac{2^{x+1} + x^2 - 6x + 9}{2^x (x-3)^2}\, dx \sim \int_6^{+\infty} \frac{2^x}{2^x \cdot x^2}\, dx \\ &= \int_6^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad \text{que es } p\text{-integral convergente} \end{aligned}$$

entonces S es Convergente por el criterio de la integral.

Para el cálculo tenemos que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=6}^{+\infty} \frac{2^{n+1} + n^2 - 6n + 9}{2^n (n-3)^2} \\ &= \sum_{n=6}^{+\infty} \frac{2^{n+1} + (n-3)^2}{2^n\,(n-3)^2} \\ &= \sum_{n=6}^{+\infty} \left[\frac{2^{n+1}}{2^n\,(n-3)^2} + \frac{(n-3)^2}{2^n\,(n-3)^2} \right] \\ &= \sum_{n=6}^{+\infty} \left[\frac{2}{(n-3)^2} + \frac{1}{2^n} \right] \end{aligned}$$

entonces S es suma de una p-serie convergente y de una serie geométrica convergente:

$$\begin{aligned} S &= 2\sum_{n=6}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)^2} + \sum_{n=6}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 2\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{1 - 1/2} \quad \text{por cambio de índice y suma geométrica} \\ &= 2 \cdot \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{n^2} \right] + \frac{1}{2^6} \cdot 2 \\ &= 2 \cdot \left[\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{2^5} \quad \text{por la nota 2.11} \\ &= \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2} + \frac{1}{32} \\ &= \frac{\pi^2}{3} - \frac{79}{32} \end{aligned}$$

□

Nota 2.13. A continuación las sumas de algunas p-series convergentes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Ejemplo 2.19.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{1}{2^4} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{1440}$$

Ejemplo 2.20. Analice la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Solución: Note que

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^2 \cdot (n-1/2)^2} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2}$$

es una p-serie convergente pues $p = 2 > 1$. □

Nota 2.14. A continuación las sumas de algunas p-series convergentes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

Nota 2.15. Con ayuda del software `wxMaxima` podemos obtener la suma de una serie numérica. Por ejemplo, después de cargar el paquete "`simplify_sum`" haciendo

```
(%i1)  load(simplify_sum);
(%o1)  "/usr/share/maxima/5.24.0/share/contrib/solve_rec/simplify_sum.mac"
```

El siguiente código calcula la suma de serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$:

```
(%i2)  sum( 1/(2*n+1)^6, n,0,inf );
       simplify_sum(%);
```

(%o2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$

(%o3) $\frac{\pi^6}{960}$

2.6 Comparación directa

Criterio 2.6 (Criterio de Comparación Directa). *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones reales positivas, entonces*

$$\textbf{(a)} \qquad a_n \leq b_n \quad \wedge \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \textit{ es Convergente} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \textit{ es Convergente}$$

$$\textbf{(b)} \qquad a_n \geq b_n \quad \wedge \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \textit{ es Divergente} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \textit{ es Divergente}$$

En cualquier otro caso no hay criterio.

Teorema 2.5. *Sean* $(a_n)_{n=k,\,k+1,\dots}$ *y* $(b_n)_{n=k,\,k+1,\dots}$ *sucesiones reales, entonces*

$$\forall n \geq 0,\ a_n \leq b_n \Longrightarrow \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=k}^{+\infty} b_n$$

Nota 2.16. En el criterio 2.6 de comparación directa también se puede escribir

$$\textbf{(a)} \qquad \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=k}^{+\infty} b_n \quad \wedge \quad \sum_{n=k}^{+\infty} b_n \text{ es Convergente} \Longrightarrow \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \text{ Convergente}$$

$$\textbf{(b)} \qquad \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=k}^{+\infty} b_n \quad \wedge \quad \sum_{n=k}^{+\infty} b_n \text{ es Divergente} \Longrightarrow \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \text{ es Divergente}$$

Siempre que $a_n,\, b_n \geq 0,\ \forall n \geq k \in \mathbb{N}$.
En cualquier otro caso no hay criterio.

Nota 2.17. Recordemos algunas desigualdades:

1. $a \leq b \iff a + x \leq b + x$
2. $\forall x > 0,\ a \leq b \Longrightarrow ax \leq bx$
3. $\forall x > 0,\ a + x > a \quad \wedge \quad a - x < a$
4. $a \leq b \iff \dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$, siempre que $a, b \neq 0$
5. $\forall x > 0 \ \wedge\ a > 0, \quad \dfrac{1}{a+x} < \dfrac{1}{a}$
6. $\forall x > 0 \ \wedge\ a > x, \quad \dfrac{1}{a-x} > \dfrac{1}{a}$
7. $f(x) \nearrow \quad \wedge \quad a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$
8. $f(x) \searrow \quad \wedge \quad a \leq b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$
9. $\forall u \in \mathbb{R},\ \ln(u) < u \iff \dfrac{1}{\ln(u)} > \dfrac{1}{u}$

Ejemplo 2.21. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 6n + 8}$$

En caso de ser convergente calcule la suma.

Solución:

Note que

$$n^2+6n+8>n^2 \implies \frac{1}{n^2+6n+8}<\frac{1}{n^2}$$

luego se tiene que

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+6n+8}\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},\quad \text{que es una } p\text{-serie convergente } (\ p=2>1\ )$$

entonces S es una serie numérica convergente por el criterio de comparación directa.

Para calcular note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2+6n+8}&=\frac{1}{(n+2)(n+4)}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+4-(n+2)}{(n+2)(n+4)}\\&=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right]\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right]\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right]\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right]\end{aligned}$$

que es una suma de series telescópicas convergentes, al final

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+2}-\frac{1}{+\infty}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+3}-\frac{1}{+\infty}\right]\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\\&=\frac{7}{24}\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.22. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S=\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}-2}$$

Solución:

$$S=\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}-2}\ge\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\qquad \text{que es } p\text{-serie divergente } (\ p=2/3<1\ ).$$

Entonces S es divergente por comparación directa. □

Ejemplo 2.23. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\arctan(5+n)}{\sqrt[4]{n^6} + 2\sqrt{n}}$$

Solución:
Como $\arctan(5+n) \leq \pi/2 \quad \wedge \quad \sqrt[4]{n^6} + 2\sqrt{n} > \sqrt[4]{n^6}$

$$S = \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\arctan(5+n)}{\sqrt[4]{n^6} + 2\sqrt{n}} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^6}} \qquad \text{que es } p\text{-serie convergente (} p = 6/4 > 1 \text{)}$$

Entonces S es convergente por comparación directa. □

Ejemplo 2.24. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+4}{\sqrt{n}\,\ln(n)}$$

Solución:
Recordemos que $\ln(n) < n$ siempre, entonces

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+4}{\sqrt{n}\,\ln(n)} \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+4}{\sqrt{n} \cdot n} \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n} \cdot n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es una p-serie divergente ($p = 1/2 < 1$), entonces S es divergente por comparación directa. □

Notas 2.18. Recordemos que, dadas dos sucesiones $a_n, b_n,\ n \in \mathbb{N}$:

1. Se dice que a_n y b_n son **equivalentes** si y solo si

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

   se denota $a_n \cong b_n$

2. Si existe y es finito el límite

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha \neq 0$$

   se escribe $a_n \sim b_n$

   lo cual se puede leer como que "a_n y b_n son similares".

3. Se dice que a_n es "más rápido" que b_n o que b_n es "más lento" que a_n si y solo si

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$

   se denota $a_n \gg b_n \iff b_n \ll a_n$

4. $\forall p > 0$, $\boxed{\ln(n) \ll n^p}$

5. Si $p_1 < p_2$, entonces $\boxed{n^{p_1} \ll n^{p_2}}$

6. Para todo $p \in \mathbb{R}$ y para todo $r > 1$ se cumple que $\boxed{n^p \ll r^n \ll n! \ll n^n}$

7. $a_n \ll b_n \iff \dfrac{1}{a_n} \gg \dfrac{1}{b_n}$

Nota 2.19. Dados $(a_n)_{n=k,\,k+1,\,\dots}$ y $(b_n)_{n=k,\,k+1,\,\dots}$ sucesiones reales

(a) Si $\forall n \geq k$, $a_n \ll b_n$ entonces existe $\alpha > 0$ tal que

$$a_n \leq \alpha \cdot b_n \implies \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \leq \alpha \cdot \sum_{n=k}^{+\infty} b_n$$

(b) Si $\forall n \geq k$, $a_n \gg b_n$ entonces existe $\alpha > 0$ tal que

$$a_n \geq \alpha \cdot b_n \implies \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \geq \alpha \cdot \sum_{n=k}^{+\infty} b_n$$

(c) Si $\forall n \geq k$, $a_n \sim b_n$ entonces existen α, $\beta > 0$ tal que

$$\alpha \cdot b_n \leq a_n \leq \beta \cdot b_n \implies \alpha \cdot \sum_{n=k}^{+\infty} b_n \leq \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \leq \beta \cdot \sum_{n=k}^{+\infty} b_n$$

Ejemplo 2.25. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+4}{n^5-3}$$

Solución:

Como $n + 4 > n \quad \wedge \quad n^5 - 3 < n^5$ entonces

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+4}{n^5-3} \geq \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n}{n^5} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ es una p-serie convergente NO hay criterio para una comparación directa.

Por otro lado note que

$$\frac{n+4}{n^5-3} \cong \frac{1}{n^4} \implies \exists\ \alpha,\ \frac{n+4}{n^5-3} < \alpha \cdot \frac{1}{n^4}$$

En este caso puede ser $\alpha = 3$, podemos demostrar que

$$\frac{n+4}{n^5-3} < \frac{3}{n^4}$$

Al final

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+4}{n^5-3} \leq 3 \cdot \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ es una p-serie convergente entonces S es convergente por el Criterio de Comparación Directa. $\square$

2.7 Criterio del límite

2.7.1 Criterio del límite y equivalencia asintótica

Criterio 2.7 (Criterio del Límite)**.** *Sean* $(a_n)_{n=k,\,k+1,\dots}$ *y* $(b_n)_{n=k,\,k+1,\dots}$ *sucesiones reales positivas, tales que*

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

(a) $\exists L \neq 0$ *y es finito* $\Longrightarrow \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \wedge \sum_{n=k}^{+\infty} b_n$ *tienen el mismo comportamiento*

(Ambas convergen o ambas divergen)

se denota $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n \sim \sum_{n=k}^{+\infty} b_n$

(b) $L = 0 \quad \wedge \quad \sum_{n=k}^{+\infty} b_n$ *es Convergente* $\Longrightarrow \sum_{n=k}^{+\infty} a_n$ *es Convergente*

(c) $L = +\infty \quad \wedge \quad \sum_{n=k}^{+\infty} b_n$ *es Divergente* $\Longrightarrow \sum_{n=k}^{+\infty} a_n$ *es Divergente*

En cualquier otro caso no hay criterio.

Nota 2.20. Otra manera de escribir el criterio 2.7.1 del límite es la siguiente

(a) $a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \sim \sum_{n=k}^{+\infty} b_n$

(b) $a_n \ll b_n \quad \wedge \quad \sum_{n=k}^{+\infty} b_n$ es Convergente $\Longrightarrow \sum_{n=k}^{+\infty} b_n$ es Convergente

(c) $a_n \gg b_n \quad \wedge \quad \sum_{n=k}^{+\infty} b_n$ es Divergente $\Longrightarrow \sum_{n=k}^{+\infty} a_n$ es Divergente

Nota 2.21 (Equivalencia Asintótica)**.** Recuerde que (Ver **Notas 2.18** en página 24)

$$a_n \sim b_n \iff \exists \alpha \neq 0 \text{ finito}, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$$

Se puede dice que asintóticamente a_n y $\alpha\, b_n$ son equivalentes o que $a_n \cong \alpha\, b_n$.

Ejemplo 2.26. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+4}{n^5-3}$$

Solución:

Tomemos las sucesiones

$$a_n = \frac{n+4}{n^5-3} \quad \wedge \quad b_n = \frac{1}{n^4}$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+4}{n^5-3} \cdot n^4 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5+4n^4}{n^5-3} = 1 \neq 0$$

Entonces por el criterio del límite

$$S \sim \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{que es una } p\text{-serie convergente, pues } p = 4 > 1.$$

Se concluye que S es convergente. $\square$

Nota 2.22. Si cuando $n \to +\infty$

$$a_n \ll b_n \implies \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n \sim b_n$$

siempre que $\beta \neq 0$, pues

$$\frac{\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n}{b_n} = \alpha \cdot \frac{a_n}{b_n} + \beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + \beta = \beta \neq 0$$

Nota 2.23. Sean $(a_n)_{n=k,\,k+1,\dots}$ sucesión real tal que

$$a_n = \frac{P(n) \cdot h(n)}{Q(n)}$$

donde P, Q son expresiones radicales con grados

$$\text{Grado}[P(n)] = p_1 \quad \wedge \quad \text{Grado}[Q(n)] = p_2$$

mientras que $h(n)$ es una expresión no radical ($\log, \operatorname{sen}, \arctan, \dots$).
Se sugiere tomar

$$b_n = \frac{n^{p_1}}{n^{p_2}} = \frac{1}{n^{p_2 - p_1}}$$

Al analizar el límite se obtiene

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{P(n) \cdot h(n)}{Q(n)} \cdot \frac{1}{b_n} = \alpha \cdot \lim_{n\to+\infty} h(n)$$

donde

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)/Q(n)}{b_n} \neq 0, \qquad \text{pues } \frac{P(n)}{Q(n)} \sim b_n$$

Nota 2.24. Recuerde que

$$\boxed{p_1 < p_2 \implies n^{p_1} \ll n^{p_2} \quad \text{cuando } n \to +\infty}$$

Ejemplo 2.27. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n^3 - 1} + n + 2}{5n^4 - 3n}$$

Solución:

Note que

$$a_n = \frac{\sqrt{2n^3 - 1} + n + 2}{5n^4 - 3n} \sim \frac{\sqrt{n^3}}{n^4} = \frac{1}{n^{4-3/2}} = \frac{1}{n^{5/2}}$$

Entonces

$$b_n = \frac{1}{n^{5/2}} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{2}}{5} \neq 0$$

Por el criterio del límite

$$S \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/2}} \quad \text{que es } p\text{-serie convergente, pues } p = 5/2 > 1.$$

Luego S es una serie numérica convergente. $\square$

Ejemplo 2.28. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{4n+3}}{n+\sqrt[3]{n^2-1}}$$

Solución:
Note que

$$a_n=\frac{\sqrt{4n+3}}{n+\sqrt[3]{n^2-1}}\sim\frac{n^{1/2}}{n}=\frac{1}{n^{1/2}}$$

Entonces

$$b_n=\frac{1}{n^{1/2}}\implies\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{4}=2\neq 0$$

Por el criterio del límite

$$\begin{aligned}S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{4n+3}}{n+\sqrt[3]{n^2-1}}&\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{4n+3}}{n+\sqrt[3]{n^2-1}}\\&\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1/2}}\quad\text{que es }p\text{-serie divergente, pues }p=1/2<1.\end{aligned}$$

Luego S es una serie numérica divergente. □

Nota 2.25. Para todo $p\in\mathbb{R}$

$$\boxed{1\leq\alpha<\beta\implies n^p\ll\alpha^n\ll\beta^n\quad\text{cuando } n\to+\infty}$$

Ejemplo 2.29. En caso de ser convergente, calcule el valor numérico de la serie numérica

$$S=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3^{n+1}+n^2+n-2}{3^n\left(n^2+n-2\right)}$$

Solución:
Note que

$$a_n=\frac{3^{n+1}+n^2+n-2}{3^n\left(n^2+n-2\right)}\sim\frac{3^n}{3^n\cdot n^2}=\frac{1}{n^2}$$

Entonces

$$b_n=\frac{1}{n^2}\implies\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}n^2+n^4+n^3-2n^2}{3^n\left(n^2+n-2\right)}=3\neq 0$$

Por el criterio del límite

$$S\sim\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\quad\text{que es }p\text{-serie convergente, pues }p=2>1.$$

Luego S es una serie numérica convergente.
Notemos ahora que

$$\begin{aligned}\frac{3^{n+1}+n^2+n-2}{3^n\left(n^2+n-2\right)}&=\frac{3^{n+1}}{3^n\left(n^2+n-2\right)}+\frac{n^2+n-2}{3^n\left(n^2+n-2\right)}\\&=\frac{3}{(n-1)(n+2)}+\frac{1}{3^n}\end{aligned}$$

Note que

$$S_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{(n-1)(n+2)} \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \wedge \quad S_2 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{6}$$

son series convergentes por criterio del límite y geométrica respectivamente, entonces $S = S_1 + S_2$. Tenemos que S_1 es combinación de sumas telescópicas convergentes

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right] \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] \\
&= \left[\frac{1}{2-1} - \frac{1}{+\infty}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{+\infty}\right] + \left[\frac{1}{2+1} - \frac{1}{+\infty}\right] \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$S = \frac{11}{6} + \frac{1}{6} = 2$$

□

Ejemplo 2.30. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\arctan(3n)}{n^2-5}$$

Solución:

Sean

$$a_n = \frac{\arctan(3n)}{n^2-5} \quad \wedge \quad b_n = \frac{1}{n^2}$$

Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \arctan(3n)}{n^2-5} = 1 \cdot \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

Por el criterio del límite

$$S \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(3n)}{n^2-5} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{que es } p\text{-serie convergente, pues } p = 2 > 1.$$

Entonces S es convergente. □

Ejemplo 2.31. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n + \sqrt[3]{n^4 + 2^n - 1}}{6n^3 + \sqrt{5n + 7^n}} \cdot \ln\left[\frac{n+1}{n+3}\right]$$

Solución:

Note que

$$a_n = \frac{n + \sqrt[3]{n^4 + 2^n - 1}}{6n^3 + \sqrt{5n + 7^n}} \cong \frac{\sqrt[3]{2^n}}{\sqrt{7^n}} = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{7}}\right)^n = \left(\sqrt[6]{\frac{4}{7^3}}\right)^n$$

Entonces

$$b_n = \left(\sqrt[6]{\frac{4}{7^3}}\right)^n \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \cdot \lim_{n\to+\infty} \ln\left[\frac{n+1}{n+3}\right] = 1 \cdot 0 = 0$$

Como $\sqrt[6]{\frac{4}{7^3}} < 1$, entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt[6]{\frac{4}{7^3}}\right)^n \quad \text{es una serie geométrica convergente.}$$

Luego S es convergente por el criterio del límite. □

Ejemplo 2.32. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \ln(2+n)}{n+5}$$

Solución:

Note que

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+5} \cong \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n^{1/2}}$$

Entonces

$$b_n = \frac{1}{n^{1/2}} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \ln(2+n) = +\infty$$

Como $p = 1/2 < 1$ entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}} \quad \text{es } p\text{-serie divergente.}$$

Luego

$$S \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \ln(2+n)}{n+5} \text{ es serie divergente por el Criterio del Limite.}$$

Así S es una serie numérica divergente. □

Ejemplo 2.33. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(2+n)}{n^2}$$

Solución:

Si tomamos

$$a_n = \frac{\ln(2+n)}{n^2} \quad \wedge \quad b_n = \frac{1}{n^2} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \ln(2+n) = +\infty$$

Como $p = 2 > 1$ entonces

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{es } p\text{-serie convergente} \implies \text{El Criterio del Límite NO se puede aplicar!}$$

Por otro lado, tenemos que por el criterio integral

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(2+n)}{n^2} \sim \int_2^{+\infty} \frac{\ln(2+x)}{x^2}\, dx = I$$

Si hacemos $u = \ln(2+x) \implies x = e^u - 2 \ \wedge \ dx = e^u\, du$, entonces

$$I = \int_{\ln(4)}^{+\infty} \frac{u\, e^u\, du}{(e^u - 2)^2}$$

Note que

$$\frac{u\, e^u}{(e^u-2)^2} \cong \frac{u\, e^u}{(e^u)^2} = \frac{u}{e^u} \implies I \sim \int_{\ln(4)}^{+\infty} \frac{u}{e^u}\, du$$

Note que $\forall a > 1,\ u \ll a^u$, en particular $u < 2^u$ para todo $u \geq \ln(4)$.
Tenemos así que

$$\int_{\ln(4)}^{+\infty} \frac{u\, du}{e^u} \leq \int_{\ln(4)}^{+\infty} \frac{2^u\, du}{e^u} = \int_{\ln(4)}^{+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^u du$$

que es una integral impropia exponencial convergente, pues $\frac{2}{e} < 1$.
Entonces $\displaystyle\int_{\ln(4)}^{+\infty} \frac{u}{e^u}\, du$ converge por el criterio de comparación directa para integrales impropias.
Finalmente I es convergente $\implies$ S es serie convergente. □

Ejemplo 2.34. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+5} \cdot \ln\left[\frac{n+3}{n+1}\right]$$

Solución:
Note que

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+5} \cong \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n^{1/2}}$$

Entonces

$$b_n = \frac{1}{n^{1/2}} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \ln\left[\frac{n+3}{n+1}\right] = \ln(1) = 0$$

Como $1/2 < 1$ entonces

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}} \quad \text{es } p\text{-serie divergente} \implies \text{El Criterio del Límite NO se puede aplicar!}$$

“ Ver la solución final en el Ejemplo 2.36. ”

□

2.7.2 Aplicando Desarrollos Generalizados

Notas 2.26 (Sobre Desarrollos Generalizados)**.**

1. Recordemos que
$$f(x) = \mathcal{O}[g(x)] \ \text{ cuando } x \to a \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
Por defecto $a = 0$, además de que a puede cambiarse por $a^+, a^-, +\infty$ o $-\infty$.

2. En el caso de sucesiones vamos a decir que
$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

3. Si $f(x) = P(x) + \mathcal{O}(x^\alpha)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$ es un desarrollo generalizado, entonces para la sucesión $a_n = f(1/n),\ n \in \mathbb{N}$ satisface
$$a_n = f(1/n) = P(1/n) + \mathcal{O}(1/n^\alpha)$$
En general, si $\rho(n)$ converge a 0 cuando $n \to +\infty$ y si $|\rho(n)|$ decreciente para n suficientemente grande, entonces
$$f[\rho(n)] = P[\rho(n)] + \mathcal{O}[\rho(n)^\alpha]$$

Ejemplo 2.35. Considere la sucesión
$$a_n = \arctan\left[\frac{3n+4}{3n+1} - 1\right]$$
Note que
$$a_n = \arctan\left[\frac{3n+4-3n-1}{3n+1}\right] = \arctan\left[\frac{3}{3n+1}\right]$$
Recordemos el desarrollo limitado
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$$
Como $x = \dfrac{3}{3n+1} \searrow 0$ cuando $n \to +\infty$ entonces
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3}{3n+1} - \frac{1}{3}\left[\frac{3}{3n+1}\right]^3 + \mathcal{O}\left[\frac{3^3}{(3n+1)^3}\right] \\ &= \frac{3}{3n+1} - \frac{9}{(3n+1)^3} + \mathcal{O}\left[\frac{1}{(3n+1)^3}\right] \end{aligned}$$

Nota 2.27.

1. Recuerde que $a_n \sim b_n \iff$ Existe $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$ y es finito.

2. Recuerde también que por el criterio del límite
$$a_n,\, b_n > 0 \quad \wedge\ a_n \sim b_n \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sim \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

3. Si $a_n = b_n + \mathcal{O}(b_n) \implies a_n \cong b_n \implies a_n \sim b_n$.
4. Si $a_n > 0$ y $a_n = b_n + \mathcal{O}(b_n)$, entonces
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sim \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$
Como consecuencia del criterio del límite.
5. Si $a_n \sim b_n \implies u_n \cdot a_n \sim u_n \cdot b_n$.
6. Si $a_n \sim b_n$ y si $G(x)$ es una aplicación monótona y definida en el rango de a_n, entonces $G(a_n) \sim G(b_n)$.

Ejemplo 2.36 (Ver ejemplo 2.34)**.** Determine la convergencia de la serie numérica
$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+5} \cdot \ln\left[\frac{n+3}{n+1}\right]$$

Solución:
Note que
$$\ln\left[\frac{n+3}{n+1}\right] = \ln\left[\frac{n+1+2}{n+1}\right] = \ln\left[1 + \frac{2}{n+1}\right]$$
Recordemos que $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x)$, luego
$$x = \frac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{decreciente}} 0 \implies \ln\left[\frac{n+3}{n+1}\right] = \ln\left[1 + \frac{2}{n+1}\right] = \frac{2}{n+1} + \mathcal{O}\left[\frac{2}{n+1}\right]$$
Luego
$$\frac{\sqrt{n}}{n+5} \cdot \ln\left[\frac{n+3}{n+1}\right] \cong \frac{\sqrt{n}}{n+5} \cdot \frac{2}{n+1} \sim \frac{n^{1/2}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$
Entonces
$$S \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+5} \cdot \ln\left[\frac{n+3}{n+1}\right] \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \qquad \text{que es } p\text{-serie convergente (} p = 3/2 > 1 \text{).}$$
□

Ejemplo 2.37. Determine la convergencia de la serie numérica
$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \operatorname{sen}^3\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$$

Solución:
Como $\operatorname{sen}(x) = x + \mathcal{O}(x)$ y $x = 1/\sqrt{n+1} \to 0$ cuando $n \to +\infty$, entonces
$$\operatorname{sen}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right] = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \mathcal{O}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$$
Por lo tanto
$$S \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]^3 \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/3} \cdot n^{3/2}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{11/6}}$$
que es una p-serie convergente, pues $p = 11/6 > 1$, luego S es convergente por el criterio del límite.
□

Ejemplo 2.38. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1-\cos(1/n)}{3n-2}$$

Solución:

Recordemos que $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)$, como $x = 1/n \to 0$ cuando $n \to +\infty$

$$1-\cos(1/n) = \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}(1/n^2) \implies S \sim \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1/(2n^2)}{3n-2} = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{6n^3-4n^2} \sim \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

que es una p-serie convergente ($p = 3 > 1$), entonces S converge por el Criterio del límite.

□

Ejemplo 2.39. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left[\frac{1}{n^2+9n+21}\right]$$

Calcule en caso de convergencia.

Solución:

Recordemos que $\arctan(x) = x + \mathcal{O}(x)$, entonces

$$\arctan\left[\frac{1}{n^2+9n+21}\right] = \frac{1}{n^2+9n+21} + \mathcal{O}\left[\frac{1}{n^2+9n+21}\right]$$

Entonces

$$S \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+9n+21} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ que es } p\text{-serie convergente (} p = 2 > 1 \text{).}$$

Entonces S es una serie numérica convergente.
Para el cálculo notemos primero que

$$\begin{aligned}
\arctan\left[\frac{1}{n^2+9n+21}\right] &= \arctan\left[\frac{1}{1+n^2+9n+20}\right] \\
&= \arctan\left[\frac{1}{1+(n+4)(n+5)}\right] \\
&= \arctan\left[\frac{(n+5)-(n+4)}{1+(n+4)(n+5)}\right]
\end{aligned}$$

Recordemos que

$$\boxed{\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}}$$

Entonces si tomamos $\tan(a) = (n+5)$ y $\tan(b) = (n+4)$ obtenemos que

$$\frac{(n+5)-(n+4)}{1+(n+4)(n+5)} = \tan(a-b) = \tan\Big[\arctan(n+5) - \arctan(n+4)\Big]$$

Por lo tanto

$$\arctan\left[\frac{1}{n^2+9n+21}\right] = \arctan(n+5) - \arctan(n+4)$$

Finalmente vemos que S es una serie telescópica

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\arctan(n+5) - \arctan(n+4)\Big] \\ &= \arctan(+\infty) - \arctan(0+4) \\ &= \frac{\pi}{2} + \arctan(4) \end{aligned}$$

$\square$

Nota 2.28. Para todo α, $\beta \in \mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$\boxed{\arctan\left[\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha\cdot\beta}\right] = \arctan(\beta) - \arctan(\alpha)}$$

2.8 Series Alternadas

Criterio 2.8 (Serie numérica alternada). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión numérica real positiva y sea*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$$

*La serie numérica S es llamada **Serie Numérica Alternada**, y es convergente si se cumplen las siguientes dos condiciones.*

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

(b) La sucesión a_n es decreciente.

*Este criterio es llamado criterio de las series alternadas o **Criterio de Leibniz**.*
Además se cumple que

$$\boxed{\varepsilon = |R_m| \leq a_{m+1}}$$

donde $R_m = S - S_m = \sum\limits_{n=m+1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ es la cola de la serie y ε el error cometido al calcular S_m.

Ejemplo 2.40. Considere la serie numérica

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Resuelva los siguientes problemas:

(a) Verifique que la serie numérica S converge condicionalmente.

(b) Aproxime el valor numérico de S sumando los 3 primeros términos de la serie y halle una cota del error cometido.

(c) ¿Cuántos términos de la serie hay que sumar para que el error ε sea menor que $1/100$?

Solución:

(a) S es una serie numérica alternada convergente, pues

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{n} \searrow$$

Note además que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{es } p\text{-serie divergente } (\ p = 1\ )$$

Entonces S converge condicionalmente.

(b) Sumar tres términos significa sumar los términos de índice 2, 3 y 4:

$$S \approx S_4 = \sum_{n=2}^{4} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} = 0.41\overline{6}$$

Usando el criterio de las series alternadas con $a_n = 1/n$, el error cometido corresponde a

$$\varepsilon_4 = |R_4| \leq a_5 = \frac{1}{5} = 0.2$$

(c) Para que el error ε sea menor que $1/100$, es suficiente que

$$\varepsilon = |R_m| = \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{100} \iff m+1 > 100 \iff m > 99$$

entonces S_{100} nos garantiza un error menor que $1/100$.

Como el índice de la serie comienza en $n = 2$, hay que sumar $100 - 1 = 99$ términos de la suma parcial.

$\square$

Nota 2.29. La serie numérica

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

es llamada **serie armónica alternada** y es convergente condicionalmente, además

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)}$$

Esto pues como

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{m+1} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \frac{(-1)^{m+1} x^{m+2}}{(m+2)(1+\theta)^{m+2}}, \ \theta \in V(0,x)$$

$$\ln(2) = -\sum_{n=1}^{m+1} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{m+1}}{(m+2)(1+\theta)^{m+2}}, \ \theta \in V(0,1) = [0,1]$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2) + \lim_{m\to+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m+2)(1+\theta)^{m+2}}, \ \theta \in [0,1]$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\theta} < 1 \implies & \lim_{m\to+\infty} \left| \frac{(-1)^{m+1}}{(m+2)(1+\theta)^{m+2}} \right| \leq \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m+2} = 0 \\ \implies & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2) \end{aligned}$$

En el último ejemplo tenemos la serie

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} + 1 \\ &= -\ln(2) + 1 \\ &\approx 0.30685 \end{aligned}$$

Nota 2.30 (p-series alternadas)**.** En general las series alternadas de la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

son convergentes siempre que $p > 0$.

Notas 2.31. A continuación las sumas de algunas p-series alternadas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\,\pi^4}{720}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6} = \frac{31\pi^6}{30\,240}$$

Ejemplo 2.41. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{sen}(1/n)$$

Solución:

S es una serie convergente, pues $\forall\, n \geq 2,\ \operatorname{sen}(1/n) > 0$.

Tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(1/n) = \operatorname{sen}(0) = 0$$

Además

$$[\operatorname{sen}(1/x)]' = -\frac{1}{x^2}\cdot\cos(1/x) < 0,\ \forall x \geq 2 \implies \forall x \geq 2,\ \operatorname{sen}(1/x) \searrow$$

Luego la sucesión $\operatorname{sen}(1/n) \searrow 0$, entonces S es una serie alternada convergente. $\square$

Ejemplo 2.42. Determine la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\arctan(1/n)}{5 + \sqrt[3]{n^2+4}}$$

Solución:

S es una serie convergente, pues

$$\frac{\arctan(1/n)}{5 + \sqrt[3]{n^2+4}} > 0$$

Tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(1/n)}{5 + \sqrt[3]{n^2+4}} = \frac{\arctan(0^+)}{+\infty} = 0^+$$

Además

$$\arctan(n) \nearrow \quad \wedge \quad \frac{1}{n} \searrow \quad \Longrightarrow \quad \arctan(1/n) \searrow$$

Adicionalmente $5 + \sqrt[3]{n^2+4} \nearrow$, entonces $a_n \searrow$ por ser producto de sucesiones decrecientes.
Se concluye que S es una serie alternada convergente. $\square$

2.9 Convergencia absoluta

Criterio 2.9 (Convergencia Absoluta)**.** *Sea* $(a_n)_{n=k,\,k+1,\ldots}$ *una sucesión real y sean*

$$S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \quad \wedge \quad A = \sum_{n=k}^{+\infty} |a_n|$$

si la serie numérica A es Convergente, entonces S es Convergente.
En tal caso se dice que S ***converge absolutamente****.*
Si S es Convergente y A es Divergente, entonces se dice que S ***converge condicionalmente****.*

Ejemplo 2.43. Analice la convergencia de la serie

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\,\pi/4)}{\sqrt{n^3+2}}$$

Solución:
Tenemos que, como $|\cos(u)| \leq 1$ siempre

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos(n\,\pi/4)}{\sqrt{n^3+2}} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos(n\,\pi/4)|}{\sqrt{n^3+2}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ es una p-serie convergente, pues $p = 3/2 > 1$, entonces A es convergente por el criterio de Comparación Directa.

Como A es convergente, entonces $S \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\,\pi/4)}{\sqrt{n^3+2}}$ es una serie absolutamente convergente.

$$\therefore\ S \text{ es convergente}$$

$\square$

2.10 Criterios de la Razón y de la Raíz

Criterio 2.10. *Sea* $(a_n)_{n=k,\,k+1,\,k+2,\,\ldots}$ *una sucesión real y sean*

$$S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n$$

entonces

(a) ***Criterio de D'Alambert:*** *También llamado "criterio de la razón", establece que si*

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

entonces

i. $L < 1 \implies S$ *es Convergente Absolutamente*

ii. $L > 1 \implies S$ *es Divergente*

iii. *NO hay criterio si* $L = 1$

(b) ***Criterio de Cauchy:*** *También llamado "criterio de la raíz", establece que si*

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

entonces

i. $L < 1 \implies S$ *es Convergente Absolutamente*

ii. $L > 1 \implies S$ *es Divergente*

iii. *NO hay criterio si* $L = 1$

Ejemplo 2.44. Analice la convergencia de la serie

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$$

Solución:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{3^n}{(n+1)!} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{3^n} \\ &= \frac{3\,(n+1)!}{(n+2)(n+1)!} \\ &= \frac{3}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1 \end{aligned}$$

entonces S es una serie convergente por en criterio de la razón. $\square$

Nota 2.32. Notemos que $\forall \alpha \neq 0$ y $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left[1 + \frac{\alpha}{n}\right]^n = e^\alpha} \quad \wedge \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha\, n + k} = 1}$$

Ejemplo 2.45. Analice la convergencia de la serie

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

Solución:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} \implies \sqrt[n]{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to e^{-1} < 1$$

entonces S es una serie convergente por en criterio de la raíz. □

Ejemplo 2.46. Analice la convergencia de la serie

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n)!}{3^n\,(n!)^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{(2n)!}{3^n\,(n!)^2} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)!}{3^{n+1}\,[(n+1)!]^2}\cdot\frac{3^n\,(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!\cdot(n!)^2}{3\,(n+1)^2\,(n!)^2(2n)!} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{3} > 1 \end{aligned}$$

entonces S es una serie divergente por en criterio de la razón. □

2.10.1 La fórmula de Stirling

Teorema 2.6 (Fórmula de Stirling)**.** *Cuando* $n \to +\infty$

$$\boxed{n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi\, n}}$$

Es decir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n/e)^n\,\sqrt{2\pi\, n}} = 1$$

En tal caso, si $a_n = G(n, n!)$ es una sucesión positiva (no nula) entonces

$$\sum_{n=0}^{+\infty} G(n, n!) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} G\left[n,\ \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi\, n}\right]$$

Ejemplo 2.47. Use la fórmula de Stirling para analizar la convergencia de la serie

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^n}{n!\cdot 5^n}$$

Solución:

Usando la fórmula de Stirling, tenemos que

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^n}{n!\cdot 5^n} \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^n}{(n/e)^n\,\sqrt{2\pi\, n}\cdot 5^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{e}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\, n}}$$

Tenemos que

$$\sqrt[n]{\left(\frac{e}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\, n}}} = \frac{e}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{2\pi\, n}}} \to \frac{e}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{e}{5} < 1$$

Entonces por aplicación de la fórmula de Stirling y el criterio de la raíz, S es convergente. □

Ejemplo 2.48. Use la fórmula de Stirling para analizar la convergencia de la serie

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n)!}{3^n\,(n!)^2}$$

Solución:

Usando la fórmula de Stirling, tenemos que

$$n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi\,n} \quad \wedge \quad (2n)! \cong \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi\,n}$$

Luego

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n)!}{3^n\,(n!)^2} \\
&\sim \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi\,n} \cdot \frac{1}{3^n \cdot \left[(n/e)^n \sqrt{2\,\pi\,n}\,\right]^2} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{4\,\pi\,n} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{2\,\pi\,n} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{2\sqrt{\pi\,n}}{2\,\pi\,n} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\,n}}
\end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\sqrt[n]{\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\,n}}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{\pi\,n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{4}{3} > 1$$

Entonces por aplicación de la fórmula de Stirling y el criterio de la raíz, S es divergente. $\square$

2.11 Criterio de Raabe

Criterio 2.11 (Criterio de la Raabe). *Sea* $(a_n)_{n=k,\,k+1,\ldots}$ *una sucesión real y sea*

$$S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \quad \wedge \quad L = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$$

entonces

(a) $L > 1 \implies S$ *es Convergente Absolutamente*

(b) $L < 1 \implies S$ *es Divergente*

(c) NO hay criterio si $L = 1$

Nota 2.33 (El doble Factorial). Para todo $n \in \mathbb{N}$ se define el doble factorial de n como

$$n!! = \begin{cases} 1 & ,\ \text{si } n \leq 1 \\ (n-2)!! \cdot n & ,\ \text{si } n > 1 \end{cases}$$

En tal caso

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots (2k-1) \cdot (2k+1) & ,\ \text{si } n = 2k+1 \\ 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2k-2) \cdot (2k) & ,\ \text{si } n = 2k \end{cases}$$

Ejemplo 2.49. Analice la convergencia de la serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}$$

Solución:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2n-1)!!} \\ &= \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot (n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)} \\ &= \frac{2n+1}{2 \cdot (n+1)} \to 1 \end{aligned}$$

entonces el criterio de la razón NO concluye nada.
Consideremos entonces el criterio de Raabe

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(1 - \frac{2n+1}{2 \cdot (n+1)}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(\frac{2n+2-(2n+1)}{2 \cdot (n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

entonces S es una serie divergente por en criterio de Raabe. □

2.12 Criterio de Condensación de Cauchy

Criterio 2.12 (Criterio de Condensación de Cauchy)**.** *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión positiva y monótona decreciente, entonces se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sim \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$$

Nota 2.34. Este criterio es particularmente útil, cuando el término general de una serie numérica, contiene logarítmos.

Ejemplo 2.50. Estudie la convergencia de la serie numérica

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\big[\ln^5(2n) - 1\big]}$$

Solución: Claramente la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n\big[\ln^5(2n) - 1\big]}$ es positiva y decreciente, entonces por el criterio de condensación de Cauchy: (y tomando en cuenta que $3 < 4 = 2^2$)

$$\begin{aligned} S \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n\big[\ln^5(2\cdot 2^n) - 1\big]} & \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^5(2^{n+1}) - 1} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^5 \cdot \ln^5(2) - 1} \\ &\sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^5}, \quad \text{que es } p\text{-serie convergente}(p = 5 > 1) \end{aligned}$$

Se concluye que S es una serie numérica convergente. □

Referencias

[1] Pisa Volio E., *Introducción al Análisis real en una variable*, Editorial de la Universidad de Costa Rica, Costa Rica, 2003

[2] Poltronieri J., *Cálculo 2*, Serie: Cabécar, Costa Rica, 1998

[3] Duarte A. & Cambronero S., *Construcción de conjuntos Numéricos*, 2007

[4] Duarte A. & Cambronero S., *Complementos de Cálculo*, 2011

[5] Ugalde W. J., *MA0350 Cálculo en una Variable II*, 2011

[6] Takeuchi Y., *Sucesiones y Series*, Editorial Limusa, M'exico, 1983

[7] Spivak M., *Cálculo Infinitesimal*, Editorial Reverté, 1988

[8] Apostol T.M., *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, México, 1982

[9] Demidovich B., *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*, Editorial Mir, Moscú, URSS, 1973

[10] Piskunov N., *Cálculo diferencial e integral. tomo II*, Editorial Mir, Moscú, 1978

[11] Doneddu A., *Análisis y Geometría Diferencial*, Editorial Aguilar, España, 1979

[12] Larson R., Hostetler, *Cálculo y Geometría Analítica*, Editorial McGraw-Hill, México, 1989

[13] Edwards C.H & Penney D. E., *Cálculo con Geometría Analítica*, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1996

[14] Spiegel M. R., *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*, Editorial McGraw-Hill, México, 1970