MA-1002 CÁLCULO II

SEGUNDO CICLO DE 2018

PRÁCTICA SOBRE SERIES NUMÉRICAS

1) Calcule el valor de convergencia de las siguientes series numéricas:

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3^n}{2^{2n+1}} \qquad R\colon \frac{2}{7}$$

(ii)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} \qquad R\colon \frac{16}{3}$$

(iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3^{2n-1}}{10^{n-2}} \qquad R\colon -\frac{300}{19}$$

(iv)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad R\colon \frac{1}{2}$$

(v)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \qquad R\colon \frac{3}{4}$$

(vi)

$$\sum_{n=2}^{\infty} ln\left(\frac{2n^2+n}{2n^2+n-1}\right) \qquad R\colon\ ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

(Sugerencia: primero verifique que: $ln\left(\frac{2n^2+n}{2n^2+n-1}\right) = ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) - ln\left(\frac{2n-1}{n}\right)$ **)**

(vii) Inspírese en el ejercicio anterior para encontrar el valor de:

$$\sum_{n=2}^{\infty} ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) \qquad R\colon\ ln\, 2$$

2) Sea (y_n), definida por: $y_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

(i) Muestre que (y_n), es decreciente. (Sugerencia: Analice en variable continua.)

(ii) Calcule el límite de (y_n).

(iii) Justifique por qué se puede afirmar que la siguiente serie es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

(iv) Justifique por qué se puede afirmar que esta otra serie es divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

(v) ¿Qué tipo de convergencia presenta la serie en (iii)?

3) Sea (z_n), definida por: $z_n = \frac{\ln n}{n}$

(i) Muestre que (z_n), es decreciente $\forall n \geq 3$. (Sugerencia: Analice en variable continua.)

(ii) Calcule el límite de (z_n).

(iii) Justifique por qué se puede afirmar que la siguiente serie es convergente.

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$$

(iv) Justifique por qué se puede afirmar que esta otra serie es divergente.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

(v) ¿Qué tipo de convergencia presenta la serie en (iii)?

4) Sea (a_n), definida por: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{3-a_n}$

(i) Demuestre por inducción que: $0 < a_n \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall n$.

(ii) Justifique por qué podemos afirmar que la siguiente serie converge absolutamente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

5) Muestre que las siguientes series convergen absolutamente:

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2+1)}{\sqrt{n^3+2}}$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^p} \; ; \quad con \;\; p > 1$$

6) Utilice el Criterio Integral para demostrar que la siguiente serie converge si $p > 1$ y diverge en caso contrario:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ ln^{p} n}$$

7) Analice la convergencia o divergencia de las siguientes series numéricas:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{(n+1)^2} \qquad R: converge.$$

b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^{n} \qquad R: diverge.$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \qquad R: diverge.$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)} \qquad R: converge.$$

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad R: converge.$$

f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad R: converge.$$

g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n\, n!} \qquad R: diverge.$$