UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

MA-1002 CÁLCULO II

SEGUNDO CICLO DE 2018

PRÁCTICA SOBRE SUCESIONES NUMÉRICAS E INDUCCIÓN MATEMÁTICA

1) Calcule el límite de las siguientes sucesiones, por el paso a la variable continua. Puede utilizar métodos convencionales para los límites de funciones y otros como la Regla de L'Hôpital y desarrollos limitados:

(a) (a_n) si: $a_n = \frac{\sqrt{9n^4+1}}{(n+1)^2-(n-1)^2}$

(b) (y_n) si: $y_n = \frac{ln^2 n}{n}$

(c) (b_n) si: $b_n = 1 - 2n + \sqrt{4n^2+n}$

(d) (z_n) si: $z_n = n^2 - n^3 sen\left(\frac{1}{n}\right)$

2) Muestre que la sucesión: $\left\langle\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right\rangle$ converge a e^a; donde "a" es un número real.
(Sugerencia: pase a la variable continua "x" y realice el cambio de variable $u = {}^{a}/_{x}$ **).**

3) Utilice el resultado obtenido en el ejercicio anterior para calcular los siguientes límites de sucesiones:

(a) $lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

(b) $lim \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{3n+1}$

(c) $lim \left(\frac{n}{n-2}\right)^n$

(d) $lim\ n\left[ln(n-1) - ln\, n\right]$

(e) $lim\ n\, ln\left(\frac{2n}{2n-3}\right)$

4) Considere la sucesión (a_n), definida por recurrencia: $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{5+a_n}{2}$

(i) Demuestre por inducción matemática que (a_n) está acotada superiormente por **5**.

(ii) Muestre que (a_n) es una sucesión creciente (trate de hacerlo directamente y también por inducción matemática).

(iii) Justifique porqué se puede concluir que (a_n) es convergente.

(iv) Calcule el límite de (a_n)

5) Considere la sucesión (b_n), definida por recurrencia: $b_1 = 5,\ b_{n+1} = \frac{4+b_n}{3}$

(i) Demuestre por inducción matemática que (b_n) está acotada inferiormente por **2**.

(ii) Muestre que (b_n) es una sucesión decreciente (trate de hacerlo directamente y también por inducción matemática).

(iii) Justifique porqué se puede concluir que (b_n) es convergente.

(iv) Calcule el límite de (b_n)

6) En este ejercicio vamos a estudiar el por qué es importante determinar primero la convergencia o divergencia de una sucesión, antes de ponerse a determinar un supuesto valor límite mediante una técnica de cálculo que no garantice la existencia de dicho límite.

Considere la sucesión (c_n), definida por recurrencia: $c_0 = 2,\ c_{n+1} = \frac{1}{c_n}$

(i) Demuestre por inducción matemática que (c_n) es una sucesión de términos positivos.

(ii) Suponga que (c_n) es una sucesión convergente a un número L y justifique por qué L debería ser igual a 1.

(iii) Pruebe mediante inducción matemática que: $c_{2n} = 2$ y que: $c_{2n+1} = \frac{1}{2} \quad \forall\, n \geq 0$.

(iv) Utilice lo probado en **(iii)** para mostrar que (c_n) en realidad es una sucesión divergente y por consiguiente no tiene límite. Por consiguiente, el cálculo realizado en **(ii)** sería incorrecto y el error radica en suponer que dicho límite sí existe sin haberlo verificado previamente. Esto pone de manifiesto la importancia de los “Criterios de Convergencia” como el TCM: “Teorema de la Convergencia Monótona”.

7) Considere la sucesión (r_n), definida por recurrencia: $r_1 = 9,\ r_{n+1} = \sqrt{r_n}$

(i) Demuestre por inducción matemática que (r_n) está acotada inferiormente por **1/4**.

(ii) Muestre que (r_n) es una sucesión decreciente.

(iii) Justifique porqué se puede concluir que (r_n) es convergente.

(iv) Calcule el límite de (r_n)

8) Sea (y_n), definida por: $y_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

(i) Muestre que (y_n), es decreciente $\forall\, n \geq 8$. (Sugerencia: Analice en variable continua.)

(ii) Calcule el límite de (y_n).