UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

MA-0294 CÁLCULO PARA COMPUTACIÓN II

SEGUNDO CICLO DE 2018

PRÁCTICA SOBRE POLINOMIOS DE TAYLOS Y SUS APLICACIONES

1. Para las siguientes funciones, encuentre el polinomio de Maclaurin o de Taylor alrededor del número que se le indica, con el orden pedido. En cada caso determine su resto en la forma de Lagrange y escriba la fórmula de Taylor para dicha función.
   a) $f(x) = \sqrt{x}$; Polinomio de Taylor de orden **4** centrado en $a = 4$.
   b) $g(x) = \sqrt[3]{(x+8)^2}$; Polinomio de Maclaurin de orden **3**.
   c) $c(x) = \cos x$; Polinomio de Taylor de orden **4** centrado en $a = \pi/3$.
   d) $t(x) = \tan x$; Polinomios de Maclaurin de orden **5** y de orden **6**. Compárelos y explique por qué ocurre esto. ¿Cuál resto sería mejor para estimar errores?
   Observación: al calcular las derivadas utilice la identidad: $sec^2 x = 1 + tan^2 x$, de esta forma obtendrá fácilmente que $(\tan x)'' = 2\tan x + 2\tan^3 x$ y llegará finalmente, con cálculos más simples, a que:
   $$(\tan x)^{vi} = 272\tan x + 1.232\tan^3 x + 1.680\tan^5 x + 750\tan^7 x$$

2. Se sabe que: $arcsen\, x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112\,(1+c)^{7/2}}x^7$; satisfaciéndose que: $-x^2 < c < 0$
   (i) Determine el valor de x tal que $arcsen\, x = \pi/6$.
   (ii) Utilice el polinomio de Maclaurin dado, para calcular un valor aproximado de $\pi/6$.
   (iii) Estime el error cometido con el valor aproximado de $\pi/6$ obtenido en **(ii)**.

3. Sea $f(x) = \sqrt[5]{x}$
   (i) Calcule las cuatro primeras derivadas de $f(x)$.
   (ii) Verifique que el polinomio de Taylor de orden 3 para $f(x)$, alrededor de $a = 32$, tiene la siguiente forma: $T_3(x) = 2 + \frac{1}{80}(x-32) - \frac{1}{6.400}(x-32)^2 + \frac{3}{1.024.000}(x-32)^3$.
   (iii) Verifique que el resto de Lagrange, parar el $T_3(x)$ obtenido en **(ii)**, es el siguiente:
   $$R_3(x) = \frac{-21}{625\sqrt[5]{c^{19}}}(x-32)^4 .$$
   (iv) Utilice el anterior polinomio de Taylor y determine valores aproximados para $\sqrt[5]{34}$ y $\sqrt[5]{40}$.
   (v) Estime los errores cometidos con los valores aproximados calculados en **(iv)** y explique por qué uno de ellos es mayor que el otro.

4. Calcule el polinomio de Maclaurin de orden 2 para $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ y verifique que se cumple la fórmula de aproximación cuadrática: $sen\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{4}(2 + 2x - x^2)$. Utilice esa fórmula para encontrar un valor aproximado para $sen\, 42º$ (Sugerencia: observe que $42º = 45º - 3º = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{60}$. Puesto que las fórmulas de Taylor y Maclaurin para funciones trigonométricas deben de operarse en radianes.)

5. En este ejercicio vamos a aprender un poco sobre el concepto de "***convergencia***". Abriremos una ventana hacia el problema de cómo acelerar la convergencia y cómo lograr hacer cálculos sobre valores que en principio son divergentes.

Recordemos que: $\boldsymbol{ln\,(1+x) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}}$ **,** donde $\boldsymbol{c}$ es un número que se encuentra entre $\boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{x}$. Lamentablemente este desarrollo polinomial solo permite aproximar valores eficientemente para números que se ubiquen en el intervalo: $]\boldsymbol{-1,1}]$. Para números superiores a $\boldsymbol{1}$ los valores de estos polinomios de Maclaurin empiezan a alternar entre valores negativos y positivos de magnitud cada vez mayor, cuando se toman más términos. Esto es, dichas cantidades no convergen a ningún valor específico y se alejan del valor real de la función, el cual sí está bien definido para números superiores a 1. El estudiante podrá convencerse intuitivamente de este comportamiento divergente para el caso en que $\boldsymbol{x = 2}$, o sea para $\boldsymbol{ln\,3}$:

Calcule: $\boldsymbol{T_1(2)}$, $\boldsymbol{T_2(2)}$, $\boldsymbol{T_3(2)}$, $\boldsymbol{T_4(2)}$, $\boldsymbol{T_5(2)}$ y $\boldsymbol{T_6(2)}$, para observar la divergencia.

Para $\boldsymbol{x = 1}$ estos polinomios de Taylor sí convergen al valor de $\boldsymbol{ln\,2}$. Así tenemos que:

$$\boldsymbol{ln\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}}. \text{ Donde } \boldsymbol{0 \le c \le 1}.$$

Verifique que se requiere que $\boldsymbol{n \ge 5.000}$ para que el error sea $\boldsymbol{\varepsilon < 0,0002}$. Lo que indica que la convergencia es muy lenta. Ahora, verifique que $\boldsymbol{ln\,2 = 2\,ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + ln\left(1 + \frac{7}{25}\right)}$. Aquí basta utilizar polinomios de grado 5 en cada uno de esos logaritmos, para obtener una aproximación con un error total menor a $\boldsymbol{0,00017}$ (**¡Verifíquelo!**). Compruebe que el valor aproximado que se obtiene con dichos polinomios es: $\boldsymbol{0,693279}$ ... (compárelo con el valor real de $\boldsymbol{ln\,2}$ que le da su calculadora). Note que con ese simple "truco" se ha acelerado la convergencia de tener que sumar 5.000 términos a solo sumar 10 términos en total.

Más interesante resulta poder calcular logaritmos de números fuera del rango de convergencia. Por ejemplo, si bien $\boldsymbol{ln\,3}$ no se puede calcular directamente, podemos usar un truco parecido: utilizar el resultado ya obtenido para $\boldsymbol{ln\,2}$ y un polinomio de orden 11 en $\boldsymbol{ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)}$, conjuntamente con la igualdad: $\boldsymbol{ln\,3 = ln\,2 + ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)}$ para obtener una aproximación de $\boldsymbol{ln\,3}$ con un error $\boldsymbol{\varepsilon} < 0{,}0002$. Haga los cálculos y obtenga $\boldsymbol{1,098758}$ ... , como valor aproximado para $\boldsymbol{ln3}$. Este procedimiento ilustra cómo es posible calcular valores de logaritmos para números que están fuera del rango de convergencia del desarrollo polinomial de Maclaurin para la función logarítmica. Pero el método general es algo diferente: consiste en ubicar el número entre potencias enteras consecutivas del número $\boldsymbol{e}$. Así, si queremos calcular $\boldsymbol{ln\,20}$ entonces primero notamos que: $\boldsymbol{20} \in]\boldsymbol{e^2, e^3}[$; luego tomamos $\boldsymbol{x = \frac{20}{e^3} - 1}$, el cual cumple que $\boldsymbol{-1} < x < 0$ y por lo tanto se puede realizar el cálculo de $\boldsymbol{ln\,(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2}$, utilizando una aproximación de orden 2. Note que: $\boldsymbol{ln\,(1+x) = ln\left(1 + \frac{20}{e^3} - 1\right) = -3 + ln\,20} \Rightarrow$ $\boldsymbol{ln\,20 = 3 + ln\,(1+x) \approx 3 + x - \frac{1}{2}x^2}$, realice los cálculos correspondientes y obtenga la aproximación de $\boldsymbol{ln\,20} \approx \boldsymbol{2,995732299}$ ... y compárela con el valor real que le da su calculadora. Este procedimiento requiere conocer los valores de las potencias enteras del número $\boldsymbol{e}$ con mucha exactitud, pero eso se logra con anterioridad gracias al desarrollo de la exponencial.

6. Se sabe que: $G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{42}e^c x^7$; satisfaciéndose que: $-x^2 < c < 0$
   (i) Utilice el polinomio de Maclaurin dado, para calcular un valor aproximado de $G(\frac{1}{2})$.
   (ii) Estime el error cometido con el valor aproximado de $G(\frac{1}{2})$ obtenido en **(i)**.

7. Se sabe que:
   $C(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt = x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{216}x^9 - \frac{1}{9.360}\cos\theta\ x^{13}$; satisfaciéndose que: $-x^2 < \theta < 0$.
   (i) Utilice el polinomio de Maclaurin dado, para calcular un valor aproximado de $C(1)$.
   (ii) Estime el error cometido con el valor aproximado de $C(1)$ obtenido en **(i)**.

8. Resuelva los siguientes límites utilizando desarrollos limitados:

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x^2) - x\,\operatorname{sen} x}{\cos 6x - 1}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt{4+3x}}{\sqrt[7]{1-2x^2} - \sqrt[5]{1+4x}}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2\,\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}{x^5}$$

(d)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x - 1 - 2\sqrt{x-2}}{\ln(x-2) - x - 3}$$

(e)

$$\lim_{x\to 2} (3x-5)^{\csc(x-2)}$$

(f)

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{e}\right]^x$$

(g)

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right)$$

(h)

$$\lim_{x\to +\infty} \left[x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e x^3 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$