UNAH
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS
Tegucigalpa, Honduras, C.A.
Departamento de Matemáticas

Implementación del método de elementos finítos (MEF) para la solución numérica de la ecuación de Black-Scholes

Lester Armando Vallecillo

Elemento Finito

28 de mayo del 2020

Introducción

El objeto de estudio es implementar MEF para aproximar la solución del problema transitorio de Black-Scholes con ganancia *put*

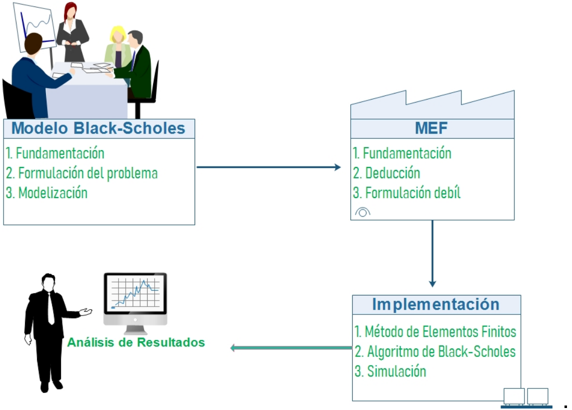


Figura: Metodología de implementación de MEF. [F: Propia]

El Modelo Back-Scholes

Se presenta la ecuación de Back-Scholes de ganancia 'put' como un problema transitorio de valor inicial y de frontera.

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + r\frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0, \\ \\ \phi(x_t) = \text{máx}\,(x_t - K, 0) \end{cases}$$

Donde $\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $r\frac{\partial V}{\partial x}$ y $-rV$ son las componentes de difusión, convección y reacción, respectivamente.

logounah

Método de los Elementos Finitos

El objetivo es enunciar los aspectos teóricos y prácticos para deducir algunos resultados importantes. Adicionalmente, utilizar la formulación débil para su implementación computacional.

Formulación débil

Encontrar $w_h \in S_0^h,$ tal que:

$$\|w - w_h\|_H \leq \|w - v_h\|_H \,,$$

para toda $v_h \in S_0^h$.

logounah

Solución

Establecer un algoritmo que permite implementar el MEF a el problema transitorio de Black-Scholes con condiciones de Dirichlet. La solución general *u(x)* del problema de valor inicial y de frontera es la sumatoria siguiente:

$$u(x) = A\phi_0(x) + \sum_{j=1} w_j\phi_j(x) + B\phi_1(x),$$

Formulación débil del problema semi-discreto

Se describe la formulación débil del problema semi-discreto de la ecuación Black-Scholes.

Encontrar la función $u_h \in S^h,$ tal que:

$$\begin{cases} < \dfrac{\partial u_h}{\partial \tau}, v_h > -\mathcal{A}(u_h, v_h) =< f, v_h >, \\ u_h(0) = u_{h,0} \\ \forall x \in [a, b], \ \tau \in [0, T] \end{cases}$$

$$\begin{cases} M\dot{u_h}^{(n)}(x) + K u_h^{(n)}(x) = b(\tau), \\ \\ u_h(0) = u_0 \\ \\ \forall x \in [a, b], \ \tau \in [0, T] \end{cases}$$

El problema discreto

Resolver este sistema el sistema mediante el uso de técnicas de integración con variable temporal como ser Crack-Nikolson $(\mu = \frac{1}{2})$ y alto orden. El sistema problema discreto es:
sean $\tau_0 = 0$, $\tau_M = T$, $\tau_m = t_{m+1} - t_m$ y $k_m = \sum_{i=1}^{m} \tau_i$. Sea $T_k(\hat{x})$ definido por:

$$\begin{aligned}
&u_h^{(m+\mu)} = \mu u_h^{(m-1+\mu)} + (1-\mu) u_h^m \\
&y \\
&f^{(m+\mu)} = \mu f(\tau_{m+1}) - (1-\mu) f(\tau_m)
\end{aligned}$$

La formulación del problema discreto.

$$\text{Encontrar la función } u_h l^m \in S^h, \text{ tal que:}$$

$$\begin{cases}
\frac{1}{k_m} < u_h^m - u_h^{(m-1)}, v_h > + \mathcal{A}(u_h^{(m-1+\mu)}, v_h) \\
\qquad\qquad = < f^{(m-1+\mu)}, v_h >, \\
u_h^0 = u_{h,0} \\
\forall x \in [a, b], \ \tau_m \in [0, T]
\end{cases}$$

Experimento Numérico

Realizar un experimento numerico del algoritmo que permita obtener una aproximación del vector solución para luego analizar su estabilidad, presición y error del MEF mediante el uso de métodos de las Crank-Nicolson(Trapecio) y alto orden.

$r(x)$	$=0.05$	Tasa de interés (constante)
$\beta(x)$	$=0.2$	Volatilidad (constante)
T	$=1$	Fecha de vencimiento
K	$=15$	Precio de ejercicio
N	$=20$	numero de nodos

Resolución MEF(alto orden):

$Ub(x,t) = 13{,}4337 \quad 17{,}6516 \quad 10{,}4748 \quad 12{,}3960$
$11{,}8765 \quad 12{,}0054 \quad 11{,}9455 \quad 11{,}8975 \quad 11{,}7466$
$11{,}3661 \quad 10{,}3833 \quad 07{,}8526 \quad 01{,}3188 \quad 00{,}0116$
$-0{,}0262 \quad 0{,}11150 \quad -0{,}4053 \quad 0{,}5194 \quad -0{,}6647$

Error de aproximación Uh: 0.00262

Gráfico comparativo de MEF

En conclusión, el método mas preciso es MEF Trapecio.

Figura: Aproximación de la solución

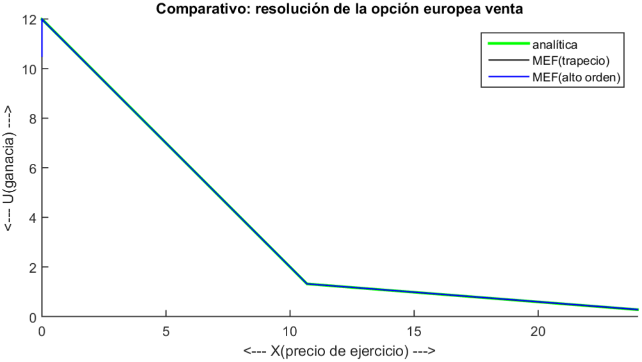
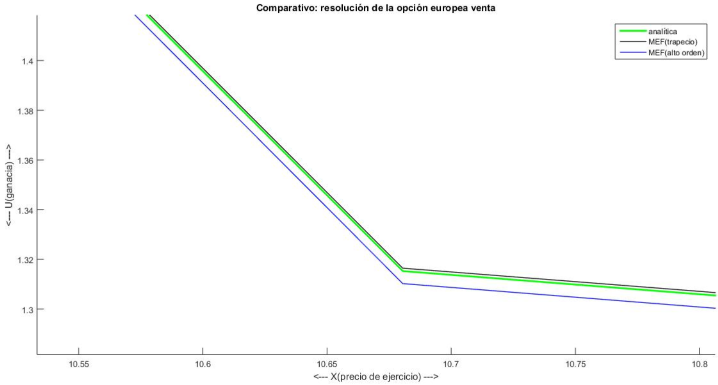


Gráfico comparativo de MEF

En conclusión, el método mas preciso es MEF Trapecio.

Figura: Aproximación de la solución



Conclusiones

El MEF es una alternativa para aproximar la solución numérica en el problema transitorio de Black-Scholes.

Un problema está mal condicionado si una pequeña variación en los datos del problema causa grandes variaciones en su solución. En esté caso, los errores de redondeo provocan grandes variaciones en los resultados.

El comparativo de MEF con el uso de las técnicas del trapecio y alto orden se puede concluir que con la técnica del trapecio se obtiene una mejor aproximación de la solución para el problema transitorio de Black-Scholes. Además, de mejor presición tiene menor costo computacional.

Bibliografia

- Sanz H, Héctor, *El Método de Elementos Finitos en la Valoración de Opciones*, Universidad de Valladolid.
- Bachelier, Louis, *Théorie de la Spéculation*, Ann. Sci. Éc. Norm. Super., 1900.
- Durán G, Antonio, Ferreirós D, José, *El Valor de las Matemáticas*, Editorial Universidad de Sevilla, 2015.
- Suli, Endre, Mayers, F., David, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 2006.
- F. Black, M. Choles, The pricing of options and corporate liabilities., J. Polit. Econ., 1973.
- R. C.Merton, Theory of rational optiong pricing., Bell J. Econ.Manag. Sci., 1973.
- Zapata, Carlos, A.(2016), *Aplicaciones del lema de Itó en Finanzas Corporativas*, Universidad Externado de Colombia.

logounah