TEOREMA DE HAHN-BANACH

Lester Armando Vallecillo, lester.vallecillo@unah.hn

Carrera de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Objetivo

El propósito de estudio es describir los aspectos teóricos relacionados con Teorema de Hahn-Banach y su aplicación en el análisis funcional, el cual se ilustra en tres versiones diferentes.

Introducción

La estructura del análisis funcional tiene como base el estudio de la teoría de dualidad en algunos espacios fundamentales y/o clásicos, de los cuales no se puede asegurar la existencia de funcionales lineales continuos en su dual no nulos, para dotar dichos espacios de propiedades mas generales.

Para garantizar que el dual de un espacio arbitrario sobre un cuerpo de escalares real sea no trivial, se utiliza una de las herramientas pilares del análisis funcional descrita como la versión analítica del teorema de Hahn-Banach.

Una importante aplicación de este resultado es el teorema de extensión de Hahn-Banach en espacios normados, el cual propone extender un funcional lineal definido en un subconjunto de un espacio normado a todo el espacio, preservando la acotación del funcional definido en todo el espacio normado [1].

La versión geométrica del teorema se centra en resumir distintos teoremas de separación de conjuntos convexos como la separación de espacios vectoriales complejos mediante un hiperplano afín.

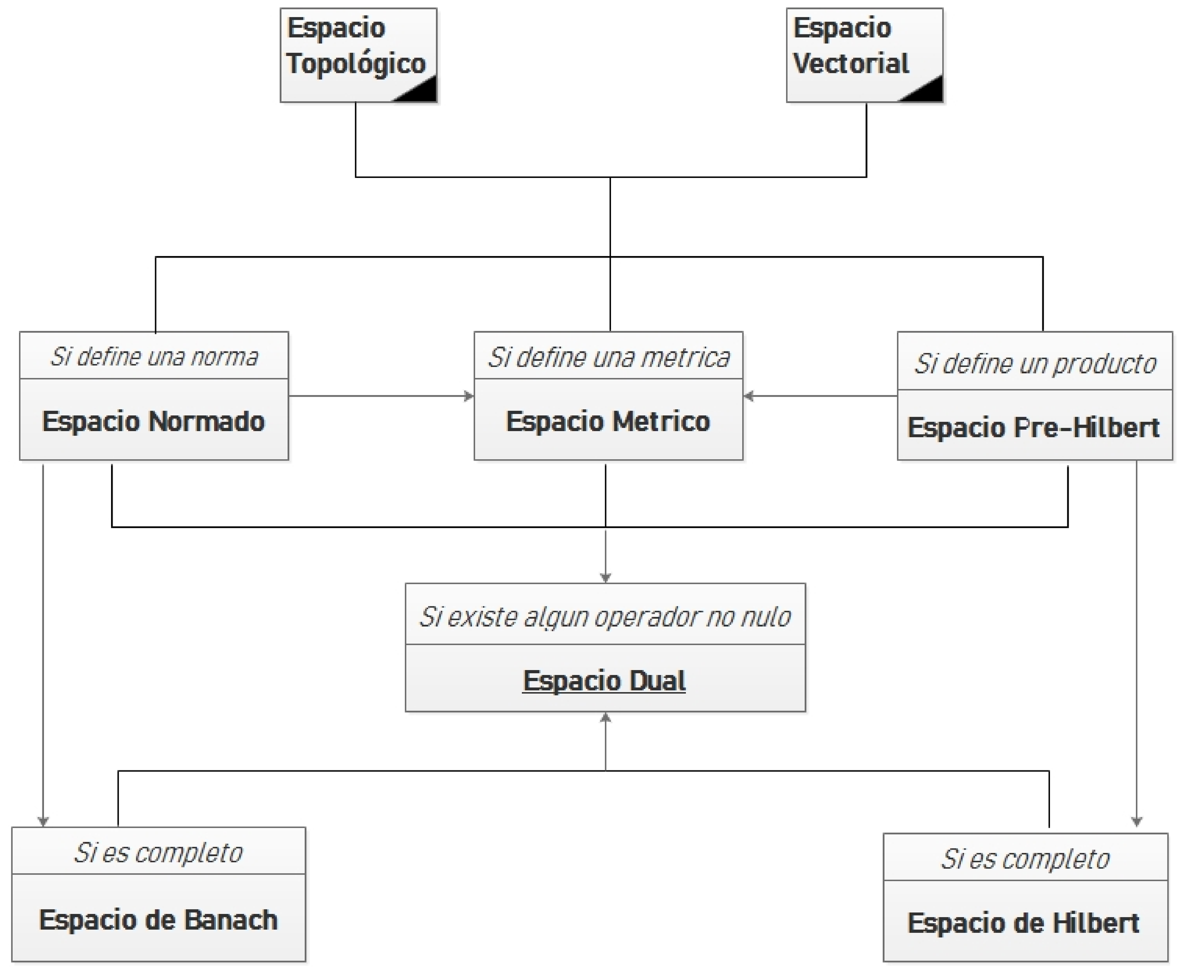

Figure 1:Enfoque de la teoría de dualidad sobre espacios fundamentales del análisis funcional. [Fuente: propia]

Antecedentes

Helly en 1921 investigó las nociones geométricas ligadas a la convexidad, y su relación con la norma. Con esta idea, logro introducir nuevas técnicas de demostración usando la separabilidad del espacio y el principio de inducción. Estos resultados fueron fundamentales para la solución del problema que obtuvo Hahn.

La versión analítica del Teorema de Hahn-Banach fue demostrada por el matemático austríaco Hahn en 1927 para un espacio normado definido en un cuerpo de escalares real.

Tomando como base el resultado de Hahn, en 1929 Banach demostró un planteamiento más general, utilizar funcionales lineales dominados por una seminorma y aplicarlos para obtener resultados de dualidad, esta aplicación es el teorema de extensión [2].

De esta manera, surge la teoría de dualidad como base abstracta del análisis funcional, y en sus aspectos teóricos se destaca el teorema de Hahn-Banach.

Aspectos teóricos

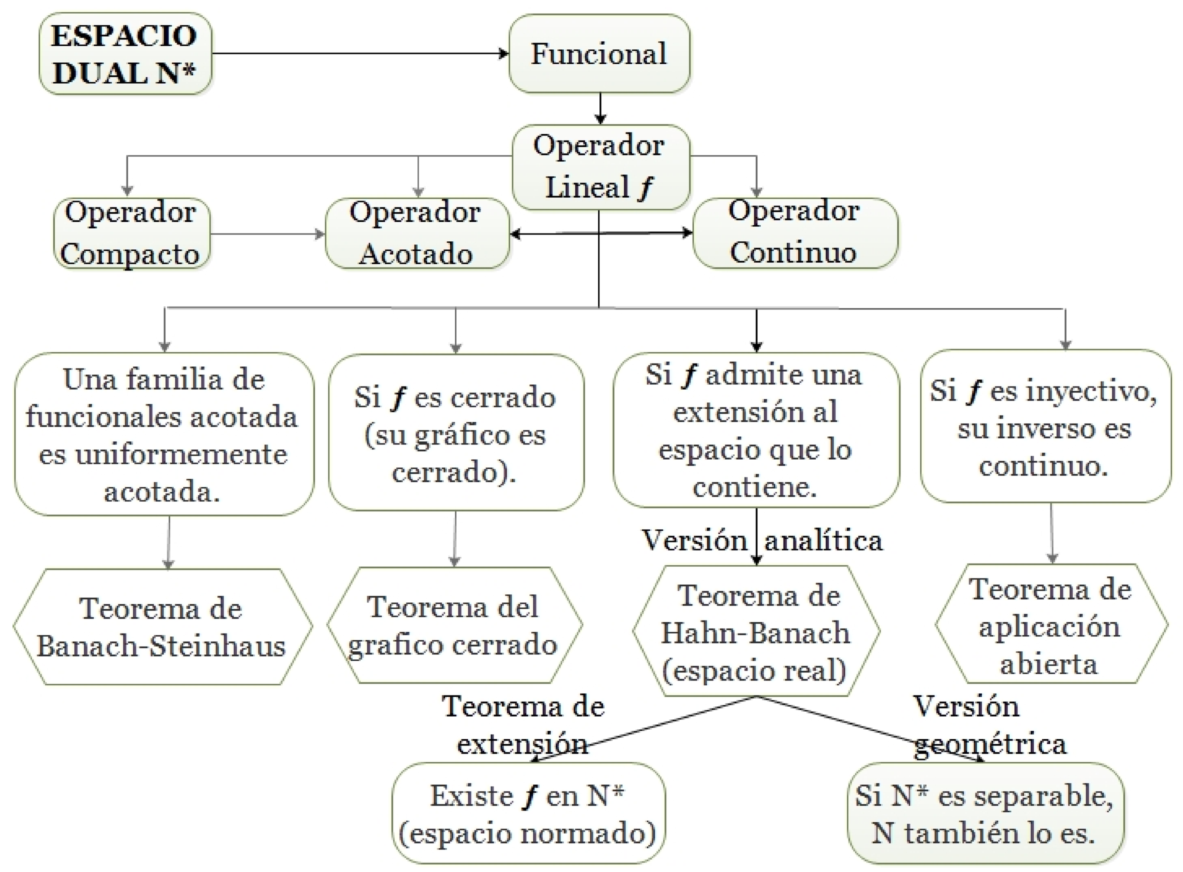

Figure 2:Enfoque de abstracción de la teoría de dualidad. [Fuente: propia]

Teorema de Hahn-Banach(Versión Analítica)

Sean $f:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{R}$ un funcional sobre un espacio vectorial real, $p\in\mathbb{V}^*$ una función sublineal, $\mathbb{S}\subseteq\mathbb{V}$ un subespacio, $\mathbb{S}^*$ el dual de $\mathbb{S}$, con $f\in\mathbb{S}^*$ un funcional lineal dominado por p y que cumple la acotación:

$$f(y)\leq p(y)\quad\forall y\in\mathbb{S}$$

Entonces existe una funcional $\phi\in\mathbb{V}^*$ que cumple las condiciones siguientes:

a) $\phi(x)\leq p(x)\qquad\forall x\in\mathbb{V}$
b) ϕ extiende a f, entonces, $\phi(y)=f(y)\ \forall y\in\mathbb{S}$.

$$\text{Es decir,}\quad \begin{array}{ccc} \phi:\mathbb{V} & & \phi\leq p \\ \mid & \searrow & \\ f:\mathbb{S} & \longrightarrow \mathbb{R} & f\leq p \end{array} \implies \phi(y)=f(y)$$

Teorema de Extensión de Hahn-Banach

Si X es espacio normado sobre $K=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $f:\mathbb{S}\to K$ (es decir, $f\in\mathbb{S}^*$) es un funcional lineal continuo, entonces existe un funcional continuo $\phi\in\mathbb{X}^*$ que extiende a f, de manera que $\forall x\in X$, se cumple que,

$$\|\phi(x)\|=\|f(x)\|$$

Este resultado propone extender todo funcional lineal continuo definido en un subespacio de un espacio normado a todo el espacio, conservando la norma [1].

Versión Geométrica

Consiste en un conjunto de teoremas teoremas de separación de conjuntos convexos, aplicando la versión analítica del teorema de Hahn-Banach.

Teorema de Separación.
Si $\mathbb{V}$ es espacio vectorial complejo, A y B subconjuntos convexos de $\mathbb{V}$, no vacíos y disjuntos. Sea $x_0\in A$ tal que $A-x_0$ es absorbente. Entonces podemos separar A y B, si existe un funcional $f:X\longmapsto\mathbb{K}$ y un hiperplano de ecuación $f(x)=\alpha$, con $\alpha\in\mathbb{R}$, tales que $\forall a\in A$, $\forall b\in B$ y se cumple, $f(a)\leq\sigma\leq f(b)$

Aplicación al problema de momentos

El problema de momentos de Hausdorff puede estar asociado a funciones de densidad de carga de partículas ó de distribuciones de probabilidad, si se toma una sucesión de números reales $\{c_n\}$ en el espacio de probabilidades C[0, 1].

Para asegurar la existencia de un funcional lineal continuo, se define un funcional de variación acotada φ, de manera que, para cada $n\in N$ se cumple,

$$c_n=\int_0^1 t^n d\varphi(t)$$

En este problema se dan las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema de infinitas ecuaciones e infinitas incógnitas en un espacio normado tenga solución. Este resultado, es consecuencia del teorema de Hahn-Banach.

Conclusiones

El análisis funcional tiene como base la teoría de la dualidad, es decir, su estudio se centra en la abstracción de funcionales lineales que forman el espacio dual no trivial.

Los operadores lineales del dual se pueden extender con el propósito de dotar de propiedades mas generales a algunos espacios fundamentales.

Se puede resolver sistemas de infinitas ecuaciones lineales utilizando el teorema de Hahn-Banach, un aplicación particular es el problema de momentos.

Se propone estudiar aplicaciones del teorema de Hahn-Banach en la áreas de computación ó mecánica cuántica.

Referencias

[1] Juan Carlos Cabello P.
Análisis Funcional.
Departamento de Matemáticas, II Vol.(22):33–55, Febrero 2009.

[2] Fernando Bombal.
Análisis Funcional: una perspectiva histórica.
Secretariado de Publicaciones, II Vol.(38):1–38, Abril 2003.

[3] Stefan Banach.
Theory of Linear Operations.
North-Holland Mathematical Library, I edition, 1987.

UNAH
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS