ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Определение: Множество L, состоящее из элементов x, y, z, … называется линейным пространством, если на этом множестве определены две операции – сложение элементов множества и умножение элементов множества на число, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $x+y=y+x \qquad \forall x,y\in L$

2. $x+(y+z)=(x+y)+z \qquad \forall x,y,z\in L$

3. $\exists 0\in L: \quad x+0=0+x=x \quad \forall x\in L$

4. $\forall x\in L$ *существует противоположный элемент* $-x: \quad x+(-x)=0$

5. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x \quad \forall\lambda,\mu\in R \quad \forall x\in L$

6. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x \quad \forall\lambda,\mu\in R \quad \forall x\in L$

7. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y \quad \forall\lambda\in R \quad \forall x,y\in L$

8. $x\cdot 1=1\cdot x=x \quad \forall x\in L$

Определение: Разность элементов $x-y$ определяется соотношением $x-y=x+(-y) \qquad \forall x,y\in L$

Определение: Линейное пространство называется нормированным, если каждому $\forall x \in L$ поставлено в соответствие действительное число $\|x\|$, удовлетворяющее условиям:

1. $\|x\| > 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

Определение: Расстояние $d(x, y)$между элементами x и y линейного нормированного пространства определяется как норма разности $d(x, y) = \|x - y\|$.

Примеры линейных нормированных пространств

1. Множество действительных чисел (роль нормы выполняет модуль числа)

$d(x, y) = \|x - y\| = |x - y|$.

2. Нормированные пространства n-мерных векторов $x = (x_1, x_2 ..., x_n)$.

$\|x\|_m = \max\{|x_1|, \quad |x_2|, \quad \dots \quad |x_n|\}$.

$\|x\|_l = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|x\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Пример 1: Найти расстояние между $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ *и* $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$*для трех норм.*

$$x - y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\|x - y\|_m = \max\{|0|, \quad |3|, \quad |-4| \quad\} = 4$.

$$\|x-y\|_l = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0+3+4=7$$

$$\|x-y\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{0+9+16} = 5.$$

Пример 2: На плоскости найти множество точек, удовлетворяющих $\|x\|=1$ *для каждой из трех норм.*

a) $\|x\|_m = \max\{|x_1|,|x_2|\} = 1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x_1| = 1 \\ |x_2| \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} |x_2| = 1 \\ |x_1| \le 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

b) $\|x\|_l = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| = 1$

Возможны следующие варианты:

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1$

$x_1 \ge 0,\ x_2 < 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 1$

$x_1 < 0,\ x_2 \ge 0 \Rightarrow -x_1 + x_2 = 1$

$x_1 < 0,\ x_2 < 0 \Rightarrow -x_1 - x_2 = 1$

c) $\|x\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$ – окружность

3. Нормированные пространства матриц размера $n \times m$

$$\|A\|_m = \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right)$$

$$\|A\|_l = \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right)$$

$$\|A\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$$

Пример 3: Найти нормы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\|A\|_m = \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right) = \max_i (1+1+2, \quad 1+3+1, \quad 2+0+1, \quad 1+1+1) = 5$$

$$\|A\|_l = \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right) = 5$$

$$\|A\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2} = 5\,.$$

Определение: Якобианом системы непрерывных со своими частными производными функций $f_1(x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n)$, $f_2(x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n)$, …, $f_n(x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n)$ называется матрица вида

$$J(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Пример 4: Дана система функций $\left\{ \dfrac{1}{4}(x_1 + x_2^2), \quad \dfrac{1}{2}x_1^2 + 1 \right\}$.

Найти $X \subset R^2$, на котором $\|J(X)\|_m < 1$.

$$J(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{x_2}{2} \\ x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|J(X)\|_m = \max_i \left(\left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{x_2}{2}\right|, \quad |x_1| + 0 \right) = \max_i \left(\frac{1}{4} + \frac{|x_2|}{2}, |x_1| \right) < 1$$

Последнее равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}+\frac{|x_2|}{2}<1 \\ |x_1|<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|x_2|}{2}<\frac{3}{4} \\ |x_1|<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x_2|<\frac{3}{2} \\ |x_1|<1 \end{cases}$$

4. Нормированные пространства функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$

Норму на множестве таких функций можно задать двумя способами:

$\|x\|_C = \max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|$ - равномерная норма

$\|x\|_{L^2} = \sqrt{\int\limits_a^b x^2(t)dt}$ – квадратичная норма

Введем расстояние между $x(t)$ и $y(t)\in C[a,b]$ по равномерной и квадратичной нормам:

$$d(x,y)_C = \|x-y\|_C = \max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$$

$$d(x,y)_{L^2} = \|x-y\|_{L^2} = \sqrt{\int\limits_a^b (x(t)-y(t))^2 dt}\ .$$

Пример 5: Найти равномерную и квадратичную нормы $x(t)$ *и* $y(t)\in C[a,b]$*; определить* $d(x,y)_C$ и $d(x,y)_{L^2}$, если $x(t)=\sin t$ *и* $y(t)=\cos t$, $t\in[0,\pi]$.

Решение:

$$\|x(t)\|_C = \max_{0\le t\le\pi}|x(t)| = \max_{0\le t\le\pi}|\sin t| = 1;$$

$$\|y(t)\|_C = \max_{0\le t\le\pi}|y(t)| = \max_{0\le t\le\pi}|\cos t| = 1;$$

$$\|x\|_{L^2} = \sqrt{\int\limits_0^\pi x^2(t)dt} = \sqrt{\int\limits_0^\pi \sin^2 t dt} = \sqrt{\int\limits_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}\ ;$$

$$\|y\|_{L^2} = \sqrt{\int\limits_0^\pi y^2(t)dt} = \sqrt{\int\limits_0^\pi \cos^2 t dt} = \sqrt{\int\limits_0^\pi \frac{1+\cos 2t}{2}dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}\ ;$$

$$d(x,y)_{L^2} = \|x-y\|_{L^2} = \sqrt{\int\limits_a^b (x(t)-y(t))^2 dt} = \sqrt{\int\limits_0^\pi (\sin t-\cos t)^2 dt} = \sqrt{\int\limits_0^\pi (1-\sin 2t)dt}$$

$$= \sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)\Big|_0^\pi} = \sqrt{\left(\pi+\frac{1}{2}\cos 2\pi-\frac{1}{2}\cos 0\right)} = \sqrt{\pi}\ ;$$

$$d(x,y)_C = \|x-y\|_C = \max_{0\le t\le \pi}|\sin t - \cos t|$$

Введем обозначение: $g(t) = \sin t - \cos t$

Тогда: $g^{/}(t) = \cos t + \sin t$

$$g^{/}(t) = \cos t + \sin t = 0 \;\Rightarrow t = \frac{3\pi}{4} \in [0,\pi].$$

Находим: $g(0) = \sin 0 - \cos 0 = -1$

$$g(\pi) = \sin\pi - \cos\pi = 1$$

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Итак: $d(x,y)_C = \sqrt{2}$.

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Определение: Последовательность $\{x^k(t)\}$ линейного нормированного пространства называется сходящейся к элементу a этого пространства, если $d(x^k(t), a) \to 0$ при $k \to \infty$:

$$a = \lim_{k \to \infty} x^k(t).$$

1. *Сходимость последовательностей векторов и матриц*
2. *Сходимость последовательностей непрерывных функций*

Определение: Последовательность $\{x^k(t)\}$ линейного нормированного пространства сходится в точке $t_0 \in [a, b]$, если $\exists \lim\limits_{k \to \infty} x^k(t_0)$.

Определение: Последовательность $\{x^k(t)\}$ линейного нормированного пространства сходится поточечно к $x(t)$ на отрезке $[a, b]$, если она сходится в каждой точке этого отрезка.

Пример 7: Последовательность $t,\ t^2,\ \cdots,\ t^k$ линейного нормированного пространства сходится поточечно к $x(t)$ на отрезке $[0,1]$, где:

$$x(t) = \left\{ \begin{matrix} 0, \text{если} \quad 0 \le t < 1 \\ 1, \text{если} \quad t = 1 \end{matrix} \right\}.$$

Определение: Последовательность $\{x^k(t)\}$ линейного нормированного пространства сходится равномерно к $x(t)$ на $[a, b]$, если

$$\lim_{k \to \infty} d(x^k(t), x(t))_C = \lim_{k \to \infty} \max_{a \le t \le b} |x^k(t) - x(t)| = 0.$$

Пример 8: $x^k(t)=\dfrac{kt}{1+k+t}$ *определена на отрезке* $[0,1]$. Определить сходится ли последовательность равномерно.

Решение:

$$x(t)=\lim_{k\to\infty}x^k(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{kt}{1+k+t}=\lim_{k\to\infty}\frac{t}{\frac{1}{k}+1+\frac{t}{k}}=t$$

$$\lim_{k\to\infty}d\left(x^k(t),x(t)\right)_C=\lim_{k\to\infty}\max_{0\le t\le 1}\left|x^k(t)-x(t)\right|=\lim_{k\to\infty}\max_{0\le t\le 1}\left|\frac{kt}{1+k+t}-t\right|=\lim_{k\to\infty}\max_{0\le t\le 1}\left|\frac{kt-t-kt-t^2}{1+k+t}\right|$$

$=\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{0\le t\le 1}\left|\dfrac{-t-t^2}{1+k+t}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{0\le t\le 1}\dfrac{t+t^2}{1+k+t}\le\dfrac{2}{1+k}\to 0$, следовательно, последовательность равномерно сходится.

Определение: Последовательность $\{x^k(t)\}$ линейного нормированного пространства сходится в среднем квадратичном к $x(t)$ на $[a,b]$, если

$$\lim_{k\to\infty}d\left(x^k(t),x(t)\right)_{L^2}=\lim_{k\to\infty}\sqrt{\int_0^1\left(x^k(t)-x(t)\right)^2dt}=0.$$

<u>*Замечание:*</u> Из равномерной сходимости следует сходимость в среднем квадратичном.

Обратное не верно.

Пример 8: $x^k(t)=\dfrac{kt}{1+kt}$ *определена на отрезке* $[0,1]$. Определить сходится ли последовательность равномерно; в среднем квадратичном.

Решение:

$$x(t)=\lim_{k\to\infty}x^k(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{kt}{1+kt}=1$$

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x^k(t), x(t)\right)_{L^2} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\int_0^1 \left(x^k(t)-x(t)\right)^2 dt} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\int_0^1 \left(\frac{kt}{1+kt}-1\right)^2 dt} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\sqrt{\int_0^1 \left(\frac{-1}{1+kt}\right)^2 dt} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\int_0^1 \frac{1}{(1+kt)^2}\, dt} = \left|\begin{array}{c} 1+kt=w \\ dw = kdt \\ dt=\dfrac{dw}{k}\end{array}\right| = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{1}{k}\int_0^1 \frac{dw}{w^2}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{1}{k}\int_0^1 w^{-2}dw} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{-\frac{1}{kw}} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{-\frac{1}{k(1+kt)}}\Big|_0^1 = \lim_{k\to\infty}\sqrt{-\frac{1}{k(1+k)}+\frac{1}{k}} =$$

$= \lim_{k\to\infty}\sqrt{\dfrac{-1+(1+k)}{k(1+k)}} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{(1+k)}} = 0$ то есть последовательность сходится в среднем квадратичном.

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x^k(t), x(t)\right)_C = \lim_{k\to\infty}\max_{0\le t\le 1}\left|x^k(t)-x(t)\right| = \lim_{k\to\infty}\max_{0\le t\le 1}\left|\frac{kt}{1+kt}-1\right| = \lim_{k\to\infty}\max_{0\le t\le 1}\left|\frac{-1}{1+kt}\right| = 1 \ne 0,$$

следовательно, последовательность равномерно не сходится.