Лабораторная работа №1.

1. Даны векторы

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

   Вычислить их $m-$, $l-$ и $k-$ нормы и найти расстояния $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $d(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ для каждой из этих норм.

2. Даны два вектора

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   На координатной плоскости Ox_1x_2 указать множество точек (x_1, x_2), для которых:

   а) $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_m \leqslant 2$;
   б) $\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_k > 1$;
   в) $\|\mathbf{x} + \mathbf{b}\|_l = 2$;
   г) $\|\mathbf{x} - (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})\|_m \leqslant 3$;
   д) $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_k + \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_k = 4$.

3. На плоскости $\mathbb{R}^2$ указать множество точек $\mathbf{X}$, для которых выполняется неравенство $\|J(\mathbf{x})\|_m < 1$, где $J(\mathbf{x})$ — матрица Якоби следующих систем функций:

   а) $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2^3$;
   б) $f_1(x_1, x_2) = \ln x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2$;
   в) $f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\cos x_1$;
   г) $f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_2^2 + \frac{1}{2}x_2$;
   д) $f_1(x_1, x_2) = \cos x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = \sin x_1$.

4. Вычислить равномерные и квадратичные нормы функций $x(t)$ и $y(t)$ и определить расстояния $d(x, y)_C$, $d(x, y)_{L^2}$, если:

   а) $x(t) = 1 - t, \quad y(t) = t^2 - t, \quad t \in [0, 1]$;
   б) $x(t) = e^t, \quad y(t) = 1 - t, \quad t \in [0, 1]$;
   в) $x(t) = \ln t, \quad y(t) = t, \quad t \in [1, 2]$;
   г) $x(t) = \sin t, \quad y(t) = 1 - \frac{1}{\pi}t, \quad t \in [0, \pi]$.

Лабораторная работа №2.

1. Найти пределы последовательностей векторов и матриц при $k \to \infty$:

   а) $\begin{pmatrix} \frac{k+1}{k} \\ \frac{(k-1)^2}{2k^2} \end{pmatrix}$;

   б) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt[3]{8k^3+k}}{k} & \frac{10\ln k}{k} \\ \left(1+\frac{1}{k}\right)^3 & \frac{3^{k+1}}{5^k} \end{pmatrix}$;

   в) $\begin{pmatrix} \frac{k^3+1}{k^3+2k} \\ -2+\frac{1}{k} \\ \frac{\sqrt{k}-1}{k} \end{pmatrix}$.

2. Исследовать на равномерную сходимость последовательности функций $x^{(k)}(t)$:

   а) $\frac{\sin kt}{k} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi; \quad k = 1, 2, \dots)$;

   б) $\frac{kt}{1+k^2t^2} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1; \quad k = 1, 2, \dots)$;

   в) $\sqrt{t^2 + \frac{1}{k^2}} \quad (-\infty < t < \infty; \quad k = 1, 2, \dots)$;

   г) $\frac{t}{\sqrt{1+kt}} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1; \quad k = 1, 2, \dots)$;

   д) $\frac{t}{k} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1; \quad k = 1, 2, \dots)$;

   е) $\frac{t}{1+k^2t} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1; \quad k = 1, 2, \dots)$.

3. Найти пределы последовательностей в среднем квадратичном

   а) $t^k \quad (0 \leqslant t \leqslant 1; \quad k = 1, 2, \dots)$;

   б) $\frac{1}{\sqrt{1+kt}} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1; \quad k = 1, 2, \dots)$.

4. Показать, что последовательность функций $x^{(k)}(t)$ сходится в среднем квадратичном к предельной функции $x(t)$:

   а) $x^{(k)}(t) = 1 - t^k \quad (0 \leqslant t \leqslant 1; \quad k = 1, 2, \dots), \quad x(t) = 1 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$;

   б) $x^{(k)}(t) = 1 - t^{2k} \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1; \quad k = 1, 2, \dots), \quad x(t) = 1 \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1)$;

   в) $x^{(k)}(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{k}; \\ kt, & -\frac{1}{k} \leqslant t \leqslant \frac{1}{k}; \\ 1, & \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant 1; \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \dots), \quad x(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t < 0; \\ 1, & 0 < t \leqslant 1. \end{cases}$

Лабораторная работа №3.

Методом Гаусса решить системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Сравнить с точным решением ξ.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

14. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

15. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

16. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

17. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

18. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

19. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

20. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

21. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

22. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

23. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

24. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

25. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

26. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$

27. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

28. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

29. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & -4 \\ 10 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -16 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

30. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

31. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

32. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

33. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

34. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Лабораторная работа №4.

Найти решения систем линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ методом итераций с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ (см. упражнения к лабораторной работе №3). Сравнить их с точными решениями ξ. Для систем 1-26 выполнить вручную первые две итерации. Убедиться, что для систем 27-34 достаточные условия сходимости метода итераций не выполнены.

Лабораторная работа №5.

Методом половинного деления найти решения следующих уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

1. $x^4 - 3x - 20 = 0 \quad (x > 0)$.
2. $x^3 - 2x - 5 = 0 \quad (x > 0)$.
3. $x^3 + 3x + 5 = 0$.
4. $x^4 + 5x - 7 = 0 \quad (x > 0)$.
5. $x^3 - 12x - 5 = 0 \quad (x > 0)$.
6. $x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0 \quad (x < 0)$.
7. $x + e^x = 0$.
8. $x^5 - x - 2 = 0$.
9. $x^3 - 10x + 5 = 0 \quad (x < 0)$.
10. $2 - \ln x - x = 0$.
11. $x^3 + 2x - 7 = 0$.
12. $x^3 + x^2 - 11 = 0 \quad (x > 0)$.
13. $x^4 - 2x - 4 = 0 \quad (x > 0)$.
14. $2e^x + x - 1 = 0$.
15. $x^4 - 2x - 4 = 0 \quad (x < 0)$.
16. $2x^3 + x^2 - 4 = 0 \quad (x > 0)$.
17. $e^x - x - 2 = 0$.
18. $\frac{1}{2}e^x - x - 1 = 0 \quad (x > 0)$.
19. $x^2 - \cos x = 0 \quad (x > 0)$.
20. $x^2 + \ln x = 0$.
21. $\ln x + \frac{1}{2}x - 1 = 0$.
22. $\ln x - \frac{1}{2}x + 1 = 0 \quad (x > 1)$.
23. $\frac{1}{1+x^2} - \ln x = 0$.
24. $\frac{1}{1+x^2} - \frac{e^x}{2} = 0 \quad (x > 0)$.
25. $\frac{x}{2+x} - \ln x = 0$.

Лабораторная работа №6.

Методом итераций с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ решить уравнения 1-25 (см. упражнения к лабораторной работе №5.).

Лабораторная работа №7.

Методом итераций найти решения следующих уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

1. $\begin{cases} x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 4, \\ x_1^2 - 2x_2 = 0, \end{cases} \quad (x_1 > 0).$

2. $\begin{cases} x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 4, \\ x_1^2 - 2x_2 = 0, \end{cases} \quad (x_1 < 0).$

3. $\begin{cases} x_2 - \sqrt{x_1 + 1} = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0, \end{cases} \quad (x_1 > 0).$

4. $\begin{cases} x_1 \cos x_1 - x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad (x_1 > 0).$

5. $\begin{cases} x_1 \cos x_1 - x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad (x_1 < 0).$

6. $\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_2 - x_1^{2/3} = 0, \end{cases} \quad (x_2 > 0).$

7. $\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_2 + x_1^{2/3} = 0, \end{cases} \quad (x_2 < 0).$

8. $\begin{cases} x_2 - \sin x_1 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad (x_1 > 0).$

9. $\begin{cases} x_2 - \sin x_1 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad (x_1 < 0).$

10. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0, \\ x_2 - e^{-x_1} = 0, \end{cases} \quad (x_1 < 0).$

11. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0, \\ x_2 - e^{-x_1} = 0, \end{cases} \quad (x_1 > 0).$

12. $\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 1 = 0, \\ x_2 - \sqrt{x_1 + 1} = 0, \end{cases} \quad (x_1 > 0).$

13. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = 0, \\ x_2 - \ln x_1 = 0, \end{cases} \quad (x_2 > 0).$

14. $\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2 + 1 = 0, \\ x_2 - \sqrt{x_1 + 1} = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = 0, \end{cases} \quad (x_2 > 0).$

16. $\left\{ \begin{array}{l} x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1, \\ x_2^2 + x_1^2 - 2x_1 = 0, \end{array} \right. \qquad (x_2 < 0).$

17. $\left\{ \begin{array}{l} x_1 \sin x_1 - x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \end{array} \right. \qquad (x_1 > 0).$

18. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{1+x_1^2} - x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \end{array} \right. \qquad (x_1 > 0).$

19. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{1+x_1^2} - x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \end{array} \right. \qquad (x_1 < 0).$

20. $\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0, \\ x_2 - \frac{1}{2} \ln(x_1 + 1) = 0, \end{array} \right. \qquad (x_1 > 0).$

21. $\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0, \\ x_2 - 2 \ln(x_1 + 1) = 0, \end{array} \right. \qquad (x_1 > 0).$

22. $\left\{ \begin{array}{l} x_2 - 2x_1 e^{-x_1} = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \end{array} \right. \qquad (x_1 < 0).$

23. $\left\{ \begin{array}{l} (x_1^2 + x_2^2)^2 = 2(x_1^2 - x_2^2), \\ x_1^2 + x_2 - 1 = 0, \end{array} \right. \qquad (x_1 > 0,\ x_2 > 0).$

24. $\left\{ \begin{array}{l} (x_1^2 + x_2^2)^2 = 2(x_1^2 - x_2^2), \\ x_1^2 + x_2 - 1 = 0, \end{array} \right. \qquad (x_1 < 0,\ x_2 > 0).$

Примечание. Для изображения кривой $(x_1^2 + x_2^2)^2 = 2(x_1^2 - x_2^2)$ (лемнискаты Бернулли) воспользоваться полярными координатами.

Лабораторная работа №8.

Найти ряд Фурье для функции $f(x)$, представить графически приближения этой функции с помощью тригонометрических многочленов степеней n_1, n_2, n_3. Оценить погрешность приближения $\overline{d}(f, Q_3)$.

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leqslant x < 0, \\ 2, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ $(n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 7)$.

2. $f(x) = 1 - x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$, (разложить по косинусам), $(n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5)$.

3. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$ (разложить по косинусам), $(n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5)$.

4. $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$ $(n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5)$.

5. $f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 3x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$ $(n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5)$.

6. $f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 2, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$ $(n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 7)$.

7. $f(x) = \pi - 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$, (разложить по косинусам), $(n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5)$.

8. $f(x) = \pi - 2x, \quad 0 < x \leqslant \pi$, (разложить по синусам), $(n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = 6)$.

9. $f(x) = \pi + x, \quad -pi \leqslant x \leqslant \pi, \quad (n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 7)$.

10. $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi \leqslant x < 0, \\ -2, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$ $(n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 7)$.

11. $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leqslant x < 0, \\ -2, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$ $(n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 7)$.

12. $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ x - \pi, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$ $(n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5)$.

13. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 2x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$ $(n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5)$.

14. $f(x) = 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$, (разложить по косинусам), $(n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5)$.

15. $f(x) = 2 + |x|, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2, (n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5)$.

16. $f(x) = 2 - |x|, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2, (n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5)$.

17. $f(x) = \begin{cases} 2x, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ -3x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$ $(n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5)$.

18. $f(x)=\begin{cases} 0, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ $\quad(n_1=1,n_2=3,n_3=5)$.

19. $f(x)=\begin{cases} x, & -4\leqslant x\leqslant 0,\\ 2x, & 0\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$ $\quad(n_1=1,n_2=3,n_3=5)$.

20. $f(x)=\begin{cases} -x, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ $\quad(n_1=2,n_2=3,n_3=4)$.

21. $f(x)=\begin{cases} -1, & -1\leqslant x< 0,\\ 3, & 0< x\leqslant 1,\end{cases}$ $\quad(n_1=3,n_2=5,n_3=7)$.

22. $f(x)=\begin{cases} 0, & -2\leqslant x< 0,\\ -2, & 0< x\leqslant 2,\end{cases}$ $\quad(n_1=3,n_2=5,n_3=7)$.

23. $f(x)=\begin{cases} 1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1+x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ $\quad(n_1=2,n_2=3,n_3=4)$.

24. $f(x)=\begin{cases} 1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ $\quad(n_1=2,n_2=3,n_3=4)$.

25. $f(x)=\begin{cases} 0, & -2\leqslant x< 0,\\ 2-x, & 0< x\leqslant 2,\end{cases}$ $\quad(n_1=3,n_2=4,n_3=5)$.

Лабораторная работа №9.

Найти алгебраический многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения $Q_n(x)$ для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Представить графически приближение функции $f(x)$ многочленом $Q_n(x)$. Оценить погрешность среднеквадратичного приближения $\overline{d}(f,Q_n)$.

1. $f(x)=\begin{cases} -2, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ x-2, & 0\leqslant x\leqslant 2, \end{cases} \quad (n=2).$

2. $f(x)=\begin{cases} 2x, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ -3x, & 0\leqslant x\leqslant 2, \end{cases} \quad (n=2).$

3. $f(x)=\begin{cases} -x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-2, & 1\leqslant x\leqslant 2, \end{cases} \quad (n=2).$

4. $f(x)=\begin{cases} x, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 2, \end{cases} \quad (n=2).$

5. $f(x)=\begin{cases} x, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ -2x, & 0\leqslant x\leqslant 2, \end{cases} \quad (n=2).$

6. $f(x)=\begin{cases} -x, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ 2x, & 0\leqslant x\leqslant 2, \end{cases} \quad (n=3).$

7. $f(x)=\begin{cases} x, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ 2x, & 0\leqslant x\leqslant 2, \end{cases} \quad (n=2).$

8. $f(x)=\begin{cases} x, & -3\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 3, \end{cases} \quad (n=2).$

9. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2, \end{cases} \quad (n=2).$

10. $f(x)=\begin{cases} 0, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases} \quad (n=4).$

11. $f(x)=\begin{cases} 1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases} \quad (n=2).$

12. $f(x)=\begin{cases} -2x, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ 3x, & 0\leqslant x\leqslant 2, \end{cases} \quad (n=2).$

13. $f(x)=\begin{cases} 2, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ 2-x, & 0\leqslant x\leqslant 2, \end{cases} \quad (n=2).$

14. $f(x)=\begin{cases} -x, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ -\frac{1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 2, \end{cases} \quad (n=2).$

15. $f(x)=\begin{cases} 0, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases} \quad (n=4).$

16. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases} \qquad (n = 5).$

17. $f(x) = 2 - |x|, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2, \quad (n = 4).$

18. $f(x) = \sqrt{|x - 1|}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad (n = 4).$

19. $f(x) = 1 - |x|, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad (n = 4).$

20. $f(x) = 2|x|, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2, \quad (n = 4).$

21. $f(x) = -1 + |x|, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad (n = 4).$

22. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leqslant x < 0, \\ 2, & 0 < x \leqslant 2, \end{cases} \qquad (n = 5).$

23. $f(x) = 1 + |x|, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad (n = 4).$

24. $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases} \qquad (n = 5).$

25. $f(x) = |x|, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad (n = 4).$

Лабораторная работа №10.

Функцию $f(x)$, полученную, например, в результате эксперимента, определенную таблицей, аппроксимировать алгебраическими многочленами наилучшего среднеквадратичного приближения $Q_2(x)$, $Q_3(x)$; оценить погрешности $\overline{d}(f, Q_2)$, $\overline{d}(f, Q_3)$. Изобразить графики функций $Q_2(x)$, $Q_3(x)$ и отметить экспериментальные точки в той же системе координат.

1.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,1	1,4	1,6	1,7	1,9

2.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,05	1,55	1,7	1,75	1,8

3.

x_i	2	3	4	5	6
y_i	0,4	0,55	0,13	0,09	0,07

4.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,5	6,2	5,5	3,5	3

5.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	8,2	5,9	4,9	4	3,2

6.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,2	5,9	4,9	4	3,2

7.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,1	6,1	4,9	4	3,1

8.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,55	0,7	0,77	0,82	0,85

9.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,1	1,55	1,9	2,3	2,6

10.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,1	1,55	1,9	2,25	2,5

11.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	5,1	4,4	3,2	2,7	2,55

12.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	5,1	3,4	3,2	2,7	2,55

13.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,9	5,5	10	15	21

14.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3	3,5	3,67	3,75	3,8

15.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,25	0,09	0,07	0,05	0,04

16.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,25	0,111	0,071	0,053	0,042

17.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,20	0,28	0,33	0,36	0,38

18.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4,8	5,76	6,912	8,294	9,95

19.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3,08	4,3	5,16	5,83

20.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,33	0,5	0,6	0,67	0,71

21.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,5	1,75	1,83	1,87	1,9

22.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	0,2	0,11	0,077	0,059

23.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	0,4	0,33	0,31	0,29

24.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2,25	3,37	5,06	7,59	11,4

25.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	2,69	3,1	3,39	3,61

Лабораторная работа №11.

Выполнить упражнения 1-25 из лабораторной работы №10 в соответствии со следующим заданием.

1. Нанести экспериментальные точки (x_i, y_i) на координатную сетку (x, y).

2. Выбрать одну из шести предложенных формул преобразования к переменным (X, Y) так, чтобы преобразованные экспериментальные данные (X_i, Y_i) наименее уклонялись от прямой.

3. Методом наименьших квадратов найти наилучшие значения параметров k и b в уравнении прямой.

4. Найти явный вид эмпирической формулы $y = Q(x, \alpha, \beta)$ и построить график эмпирической функции.

Лабораторная работа №12.

1. Функция $f(x)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени для системы трех равномерно расположенных на отрезке узлов. Оценить погрешность интерполяции в точке ξ.

   а) $f(x) = \cos x^2, \quad \xi = \frac{\pi}{12},\ (0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4})$

   б) $f(x) = x \cos x, \quad \xi = \frac{\pi}{12},\ (0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4})$

   в) $f(x) = e^{-x^2}, \quad \xi = 0{,}3,\ (0 \leqslant x \leqslant 0,4)$

2. Функции $f(x) = e^x; e^{-x}; \operatorname{sh} x; \operatorname{ch} x \sin x; \cos x; \ln x$ определены на отрезке [1,00; 1,20]. Найти значения многочлена Лагранжа, интерполизирующего функции $f(x)$ на этом отрезке по системе трех равномерно расположенных узлов (с шагом 0,1), в точках 1,05; 1,09; 1,13; 1,15; 1,17. Полученные результаты сравнить с табличными значениями и дать оценку точности интерполяции.

Лабораторная работа №13.

Функции $f(x) = e^x; e^{-x}; \operatorname{sh} x; \operatorname{ch} x \sin x; \cos x; \ln x$ определены на отрезке [1; 1,2]. Выбрав шаг h=0,05, найти приближенные значения производных f' и f'' в точках 1 и 1,1; оценить погрешность вычислений. Сравнить результаты с точными значениями производных в этих точках.

Лабораторная работа №14.

Вычислить заданные интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, если отрезок интегрирования разбит на $n = 2$ и $n = 4$ равные части. Оценить погрешность результата и сравнить приближенные значения интеграла с точными.

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad (\Im = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785).$

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (\Im = \ln 2 \approx 0{,}693).$

3. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x\, dx \quad (\Im = 0,5).$

4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad (\Im = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}881).$

5. $\int\limits_0^e \ln x\, dx \quad (\Im = 1).$

6. $\int\limits_0^1 \ln(x+1)\, dx \quad (\Im = 2\ln 2 \approx 0{,}386).$

7. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\, dx \quad (\Im = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}571).$

8. $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx \quad (\Im = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}433).$

9. $\int\limits_0^{\pi} \cos^3 x\, dx \quad (\Im = 0).$

10. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} \quad (\Im = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}881).$

11. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x} \quad (\Im = 1).$

12. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx \quad (\Im = \frac{1}{4}(\pi - 2\ln 2) \approx 0{,}438).$

13. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+e^x} \quad (\Im \approx 0{,}38).$

14. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \arcsin x\, dx \quad (\Im = \frac{\sqrt{2}}{8}(\pi+4) - 1 \approx 0{,}26).$

15. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx \quad (\Im = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}346).$

16. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x \, dx \quad (\Im = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}346).$

17. $\int\limits_{0}^{1} xe^x \, dx \quad (\Im = 1).$

18. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x} \, dx \quad (\Im = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \approx 1{,}22).$

19. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x} \quad (\Im = 1).$

20. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \quad (\Im = 2(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}828).$

21. $\int\limits_{0}^{e} \ln^2 x \, dx \quad (\Im = e - 2 \approx 0{,}718).$

22. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \, dx \quad (\Im = \frac{4-\pi}{4} \approx 0{,}215).$

23. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 x \, dx \quad (\Im = \frac{4-\pi}{4} \approx 0{,}215).$

24. $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \quad (\Im = \frac{e^{\pi/2}-1}{2} \approx 1{,}905).$

25. $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \quad (\Im = \frac{e^{\pi/2}+1}{2} \approx 2{,}905).$

Лабораторная работа №15.

Вычислить приближенные значения интегралов 1-25 из лабораторной работы №14, используя квадратурную формулу Гаусса м тремя узлами для числа разбиения отрезка интегрирования $n = 1$. Оценить погрешность результата, сравнить приближенные значения интеграла со значениями, полученными в лабораторной работе №14, и с их точными значениями.

Лабораторная работа №16.

Используя определение, показать, что несобственный интеграл $\Im = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится. Аппроксимировать его определенным интегралом с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Вычислить определенный интеграл с помощью квадратурной формулы Гаусса методом двойного пересчета с точностью 10^{-4}. Сравнить полученный результат с точным значением несобственного интеграла, вычисленным с шестью верными знаками.

1. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}} \quad (\Im = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}))$.

2. $\int\limits_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx \quad (\Im = 0{,}5)$.

3. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}} \quad (\Im = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}))$.

4. $\int\limits_0^\infty e^{-x}\cos x dx \quad (\Im = 0{,}5)$.

5. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\sin^2 x dx \quad (\Im = \frac{\sqrt{\pi}}{4}(1-e^{-1}))$.

6. $\int\limits_0^\infty xe^{-x}\sin x dx \quad (\Im = 0{,}5)$.

7. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos^2 x dx \quad (\Im = \frac{\sqrt{\pi}}{4}(1+e^{-1}))$.

8. $\int\limits_0^\infty xe^{-x}\cos x dx \quad (\Im = 0)$.

9. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+e^{2x}} \quad (\Im = \frac{1}{2}\ln 2))$.

10. $\int\limits_0^\infty xe^{-x}dx \quad (\Im = 1)$.

11. $\int\limits_{\sqrt{3}}^\infty \frac{dx}{x+\sqrt{(x^2+1)^3}} \quad (\Im = \frac{\ln 3 - 1}{2})$.

12. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx \quad (\Im = \frac{\sqrt{\pi}}{2})$.

13. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2+1})^3} \quad (\Im = \frac{3}{8})$.

14. $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx \quad (\Im = 0{,}25)$.

15. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2+1})^4} \quad (\Im = \frac{4}{15})$.

16. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+\sqrt{e^x}} \quad (\Im = 2\ln 2)$.

17. $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-3x}\, dx \quad (\Im = \frac{2}{27})$.

18. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} \quad (\Im = 0{,}5)$.

19. $\int\limits_0^\infty \frac{x \sin x\, dx}{(1+x^2)^3} \quad (\Im = \frac{\pi}{8e})$.

20. $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x\, dx}{x^4} \quad (\Im = \frac{1}{9})$.

21. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4} \quad (\Im = \frac{\pi}{4})$.

22. $\int\limits_1^\infty \frac{\ln^2 x\, dx}{x^4} \quad (\Im = \frac{2}{27})$.

23. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2}} \quad (\Im = \ln 2)$.

24. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} \quad (\Im = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9})$.

25. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{ch}\pi x} \quad (\Im = 2 - \frac{\pi}{2})$.

Лабораторная работа №17.

Показать, что несобственный интеграл $\Im = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ от неограниченной на одном из концов отрезка $[a,b]$ функции $f(x)$ сходится. Используя замену переменной интегрирования, преобразовать несобственный интеграл от разрывной на отрезке интегрирования функции в несобственный интеграл с бесконечным пределом. Аппроксимировать несобственный интеграл определенным с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Вычислить определенный интеграл с помощью квадратурной формулы Гаусса методом двойного пересчета с точностью 10^{-4}. Сравнить полученный результат с его аналитическим значением, вычисленным с шестью верными знаками.

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \quad (\Im = \frac{\pi}{2})$.

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(3+x)} \quad (\Im = \frac{\pi\sqrt{3}}{9})$.

3. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \quad (\Im = \frac{2\pi}{3})$.

4. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(3+x)} \quad (\Im = \frac{\pi\sqrt{3}}{6})$.

5. $\int\limits_0^{0{,}25} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)} \quad (\Im = \ln 3)$.

6. $\int\limits_{0{,}5}^1 \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{1-x}} \quad (\Im = \frac{17\sqrt{2}}{6})$.

7. $\int\limits_0^1 \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{1-x}} \quad (\Im = \frac{16}{3})$.

8. $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}} \quad (\Im = \frac{10}{3})$.

9. $\int\limits_0^2 \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{2-x}} \quad (\Im = \frac{14\sqrt{2}}{3})$.

10. $\int\limits_{-0{,}5}^0 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x}} \quad (\Im = -\frac{1}{3})$.

11. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1+x}} \quad (\Im = \frac{\pi}{2})$.

12. $\int\limits_0^{0{,}5} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x}} \quad (\Im = \frac{1}{3})$.

13. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+4)\sqrt{1+x}} \quad (\Im = \frac{\pi\sqrt{3}}{9})$.

14. $\int\limits_{0}^{0{,}5} \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{1-2x}} \quad (\Im = \frac{4}{3})$.

15. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1+x}} \quad (\Im = \frac{\ln 3}{2})$.

16. $\int\limits_{0{,}5}^{1} \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{2x-1}} \quad (\Im = \frac{8}{3})$.

17. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{1+x}} \quad (\Im = \frac{8}{3})$.

18. $\int\limits_{1}^{2} \frac{x\,dx}{(x+2)\sqrt{x-1}} \quad (\Im = \frac{18-2\pi\sqrt{3}}{9})$.

19. $\int\limits_{1}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x}} \quad (\Im = \frac{14\sqrt{2}}{3})$.

20. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x}} \quad (\Im = 4\sqrt{3})$.

21. $\int\limits_{0}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x}} \quad (\Im = \frac{32}{3})$.

22. $\int\limits_{1}^{2} \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x-1}} \quad (\Im = \frac{14}{3})$.

23. $\int\limits_{-0{,}5}^{0} \frac{dx}{\sqrt{-x}(1+x)} \quad (\Im = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right))$.

24. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(3-x)} \quad (\Im = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right))$.

25. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x\,dx}{(x-1)\sqrt{x+1}} \quad (\Im = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right))$.

26. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+1}} \quad (\Im = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right))$.

27. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(x+3)\sqrt{1-x}} \quad (\Im = \frac{1}{2}\ln 3)$.

28. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(5-x)} \quad (\Im = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right))$.

29. $\int\limits_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x}(x+3)}$ $\quad (\Im = \frac{2\sqrt{3}}{9}(3\sqrt{3} - \pi))$.

30. $\int\limits_1^2 \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x-1}}$ $\quad (\Im = \frac{20}{3})$.

Лабораторная работа №18.

Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка на равномерной сетке отрезка $[a, b]$ один раз с шагом h=0,2, другой - с шагом 0,1 методами Эйлера, Эйлера-Коши и классическим методом Рунге-Кутта. Оценить погрешность численного решения по принципу Рунге. Сравнить численное решение с точным. Результат представить в виде таблиц.

1. $y' = \frac{1+xy}{x^2}, \quad y\big|_{x=1} = 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}).$
2. $y' = y - \frac{2x}{y}, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = \sqrt{2x+1}.$
3. $y' = x - \frac{3y}{x}, \quad y\big|_{x=1} = 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = x^2(x-1).$
4. $y' = xy, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.$
5. $y' = \frac{y^2+xy}{x^2}, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = \frac{x}{1-\ln x}.$
6. $y' = \frac{1-y+\ln x}{x}, \quad y\big|_{x=1} = 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = \ln x.$
7. $y' = \frac{x+y}{x}, \quad y\big|_{x=1} = 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = x \ln x.$
8. $y' + 2xy = xe^{-x^2}, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x^2}.$
9. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = \sin x + e^{-\sin x} - 1.$
10. $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x, \quad y\big|_{x=0} = -1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = (1 - 2\cos x)\cos x.$
11. $xy' - y^2 \ln x + y = 0, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1+\ln x}.$
12. $xy' = x + y + x\exp(\frac{y}{x}), \quad y\big|_{x=1} = 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant 1{,}9, \quad \varphi(x) = x \ln \frac{x}{2-x}.$
13. $x^2y' - y = x^2\exp(x - \frac{1}{x}), \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = \exp(\frac{x^2-1}{x}).$
14. $(x^2+1)y' + xy - 1 = 0, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}.$
15. $xy' - y = \frac{x}{\ln x}, \quad y\big|_{x=e} = 0, \quad e \leqslant x \leqslant e+1, \quad \varphi(x) = x \ln\ln x.$
16. $xy' - y = x^2 \sin x, \quad y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+1, \quad \varphi(x) = -x\cos x.$
17. $xy' + y = x\sin x, \quad y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+1, \quad \varphi(x) = \frac{\sin x - 1}{x} - \cos x.$
18. $y' + e^{x-y} = e^{x(1-x)} + 2x, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = x^2.$
19. $xy' = y\ln y, \quad y\big|_{x=1} = e, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = e^x.$
20. $xy' - y(\ln(xy) - 1) = 0, \quad y\big|_{x=1} = e, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = \frac{e^x}{x}.$
21. $xy' = x\sin\frac{y}{x}, \quad y\big|_{x=1} = \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = 2x \operatorname{arctg} x.$

22. $x^2y' = (x-1)y, \quad y\big|_{x=1} = e, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = x\exp(\frac{1}{x}).$

23. $(x^2+1)y' + xy = x(x^2+1), \quad y\big|_{x=\sqrt{2}} = 1, \quad \sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}+1, \quad \varphi(x) = \frac{x^2+1}{3}.$

24. $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x, \quad y\big|_{x=e} = \frac{e^2}{2}, \quad e \leqslant x \leqslant e+1, \quad \varphi(x) = \frac{x^2}{2}\ln x.$

25. $y' - y\operatorname{ctg} x = \sin x, \quad y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+1, \quad \varphi(x) = (x-\frac{\pi}{2})\sin x.$

Лабораторная работа №19.

Задачу Коши для данного дифференциального уравнения второго порядка преобразовать к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Найти решение последней задачи методом Рунге-Кутта на сетке отрезка $[a, b]$. Вычисления провести дважды с шагами h и $\frac{h}{2}$, полагая $h{=}0{,}2$. Найти численное решение дифференциального уравнения и оценить его погрешность с помощью правила Рунге. Сравнить численное решение с известным аналитическим решением $\varphi(x)$. Результаты представить в виде таблицы. Относительно иррациональных исходных данных задачи учесть замечания к лабораторной работе №18.

1. $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0, \quad y\big|_{x=1} = e^2, \quad y'\big|_{x=1} = 2e^2, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = e^{2x}.$
2. $x^2y'' + xy' - y = 3x^2, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad y'\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - x + \frac{1}{x}).$
3. $x^2y'' - 6y = 0, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad y'\big|_{x=1} = 3, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = x^3.$
4. $x^2y'' - 12y = 0, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad y'\big|_{x=1} = 4, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = x^4.$
5. $xy'' - \frac{1}{2}y' = 0, \quad y\big|_{x=1} = 2, \quad y'\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = 2\sqrt{x}.$
6. $x^2y'' + \frac{y}{\ln x} = xe^x(2 + x\ln x), \quad y\big|_{x=2} = e^2\ln 2, \quad y'\big|_{x=2} = e^2(\ln 2 + 0{,}5),$
   $2 \leqslant x \leqslant 3, \quad \varphi(x) = e^x \ln x.$
7. $x^2y'' + xy' = 0, \quad y\big|_{x=1} = 0, \quad y'\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = \ln x.$
8. $x^2y'' - xy' + y = 3x^3, \quad y\big|_{x=1} = 0{,}75, \quad y'\big|_{x=1} = 2{,}25, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = \frac{3}{4}x^3.$
9. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4 - x^2, \quad y\big|_{x=1} = 0{,}5, \quad y'\big|_{x=1} = 3, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2,$
   $\varphi(x) = \frac{x^4}{2} + x^2\ln x.$
10. $x^2y'' + (x^2 - 1)y' - y = 0, \quad y\big|_{x=1} = \frac{1}{e}, \quad y'\big|_{x=1} = -\frac{1}{e}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = e^{-x}.$
11. $x^2y'' - (x^2 - 2x)y' - (3x+2)y = 0, \quad y\big|_{x=1} = e, \quad y'\big|_{x=1} = 2e, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = xe^x.$
12. $x^2y'' + x^3y' + (x^2 - 2)y = 0, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad y'\big|_{x=1} = -1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x}.$
13. $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y\big|_{x=2} = 5, \quad y'\big|_{x=2} = 4, \quad 2 \leqslant x \leqslant 3, \quad \varphi(x) = x^2 + 1.$
14. $x(x+1)y'' + (3x+2)y' + y = 0, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad y'\big|_{x=1} = -1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x}.$
15. $y'' - 2(2x^2 + 1)y = 0, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad y'\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = e^{x^2}.$
16. $y'' + y'\operatorname{tg} x - y\cos^2 x = 0, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad y'\big|_{x=0} = -1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = e^{-\sin x}.$
17. $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = xe^{x^2}.$
18. $y'' + 2y'\operatorname{tg} x + 3y = 0, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad y'\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = \cos^3 x.$
19. $x(x+1)y'' - (x-1)y' + y = 0, \quad y\big|_{x=1} = y'\big|_{x=1} = -4, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2,$
    $\varphi(x) = (x-1)\ln|x| - 4x.$

20. $y'' + 4y = \cos^3 x, \quad y\big|_{x=0} = \frac{1}{5}, \quad y'\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = \frac{1}{4}(\cos x - \frac{\cos 3x}{5}).$

21. $y''x^2 \ln x - xy' + y = 0, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad y'\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) = \ln x + 1.$

22. $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = e^x - 1.$

23. $y'' \sin y - 2(y')^2 \cos y = 0, \quad y\big|_{x=0} = \frac{\pi}{4}, \quad y'\big|_{x=0} = \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$
$\varphi(x) = \mathrm{arcctg}(1 - x).$

24. $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x + 2, \quad y\big|_{x=3} = 3, \quad y'\big|_{x=3} = 3, \quad 3 \leqslant x \leqslant 4,$
$\varphi(x) = (x-2)^2 + x - 1.$

25. $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad y'\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) = e^{x^2}.$

Лабораторная работа №20.

Для заданной целевой функции $f(x)$ найти промежуток $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, на котором она унимодальна. Найти точное решение задачи одномерной минимизации $f(x) \to \min$, $x \in \mathbf{X}$ ($\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$). Найти приближенное решение этой задачи с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$:

а) методом половинного деления;

б) методом золотого сечения;

в) методом сканирования.

1. $\frac{x^3}{3} + x^2$.
2. $x^3 + 6x^2 + 9x$.
3. $\frac{x^2}{x-2}$.
4. $x^3 + \frac{x^4}{4}$.
5. $\frac{x^4}{4} - 2x^2 \quad (x > 0)$.
6. $2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.
7. $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.
8. $xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
9. $x - 2\ln x$.
10. $x^{2/3}(x-5)$.
11. $\frac{x^2}{2-x}$.
12. $\frac{x^4}{4} - 2x^2 \quad (x > 0)$.
13. $1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.
14. $\frac{x^2-3}{x+2}$.
15. $3x^4 - 8x^3 + 6x^2$.
16. $-\frac{\ln x}{x}$.
17. $\frac{3-x^2}{x+2}$.
18. $\frac{x^2+1}{x} \quad (x > 0)$.
19. $(1-x^2)(x^3-1)$.
20. $\frac{(4-x)^3}{9(2-x)}$.

21. $x\sqrt{2-x^2}$.

22. $(1-x^2)(1-x^3)$.

23. $-x-2\sqrt{-x}$.

24. $(x-2)^{\frac{2}{3}}(2x+1)$.

25. $(x-5)e^x$.

Лабораторная работа №21.

Найти приближенное решение задачи

$$f(\mathbf{x}) \to \min, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

где вид целевой функции $f(\mathbf{x})$ определен в упражнениях 1-25 из лабораторной работы №20. Использовать

а) метод покоординатного спуска;

б) метод скорейшего спуска.

Найти приближенное решение системы двух уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0, \end{cases}$$

сведя эту задачу к задаче безусловной минимизации

$$\Phi(\mathbf{x}) = f_1^2(x_1, x_2) + f_2^2(x_1, x_2) \to \min, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Использовать системы, заданные в упражнениях 1-25 из лабораторной работы №7. Решение задачи безусловной минимизации получить с помощью метода покоординатного спуска или метода скорейшего спуска с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.