

# Wyznacznik macierzy i metoda Cramera rozwiązywania układu równań

## Programy w Dev C++ / Borland TurboC++

Tematy obejmujące przedstawione tu dwa programy są czysto akademickie ale jednocześnie nie takie proste jak wszystkie inne operacje na macierzach (tych nie przedstawiam, nie chcąc powielać istniejące w Internecie kody).

### 1. Obliczanie wyznacznika macierzy kwadratowej - max 10x10

Możliwe rozszerzenie programu na większą macierz kwadratową - metoda 'klasyczna'.

Dla sprawdzenia poprawności wyników obliczeń wyznacznika można użyć bardziej prostych metod obliczeniowych jak chociażby tę, wykorzystującą fakt, że jeżeli poniżej (lub powyżej) przekątnej znajdują się same zera (należy macierz doprowadzić do tego stanu) to wyznacznik macierzy jest równy iloczynowi wyrazów na przekątnej.

### 2. Rozwiązywanie układu 'n' równań liniowych z 'n' niewiadomymi.

Tu  $n \leq 10$ . Możliwe rozszerzenie programu na większą ilość równań i zmiennych.

(Metoda Cramera:

Układ równań może być przedstawiony w postaci operacji na trzech macierzach jako  $Ax = B$ , gdzie:

A - macierz współczynników - macierz utworzona ze współczynników przy zmiennych (przy  $x_1, x_1, \dots$ ),

x - jednokolumnowa macierz zmiennych ( $x_1, x_1, \dots$ ),

B - jednokolumnowa macierz wyrazów wolnych - nie związanych ze zmiennymi  $x_1, x_1, \dots$ )

Skoro metoda Cramera jest klasyką matematyki uczelnianej, można ten program wykorzystać chociażby do obliczeń ilości pętli wstawiając do programu liczniki w odpowiednich miejscach. Ale już niewątpliwie zaletą tego programu będzie to, że metoda Cramera przestaje w tym miejscu być czystą teorią a zaczyna istnieć jako żywy element matematyki.

Programy nie są krótkie ale wykonane z modułów, które są swoimi kopiami od etykiety T2 do T10, rozszerzanymi systematycznie tylko o jeden element. Reszta kodu to obsługa tych etykiet. Jestem przekonany, że szybko stwierdzisz prostotę programów i będziesz miał ochotę dorzucić do nich swojego kodu.

Programy te jest łatwo rozszerzyć do macierzy kwadratowych o większej ilości elementów (nie tylko 10x10). Granicą jest tu tylko... cierpliwość użytkownika programu i jego tolerancja wobec 'wydolności' komputera.

Obydwa programy działają na przykładowych danych i są przygotowane do natychmiastowego uruchomienia w środowisku Dev C++ . Jakkolwiek linie dla *Borland TurboC++* są zakomentowane i wyraźnie opisane.

Dane liczbowe są deklarowane jako całkowite aby kod był jak najbardziej przejrzysty. W przypadku ogólnym należy przyjąć ich klasę zmiennoprzecinkową. Należy pamiętać, że wyznacznik ma być koniecznie klasy/typu 'double' aby uniknąć przykrych niespodzianek błędnych obliczeń (wykraczających poza zakres typu liczby - wtedy kompilator nie sygnalizuje błędu!).

## Rezultat działania programów:

### 1. Obliczanie wyznacznika macierzy kwadratowej - max 10x10

```
C:\Users\Leszek\Desktop\M_1.exe — □ ×
Macierz:
  2  1 -1  3  1  0  2  1  0  2
  1  4 -3  2  5 -1 -1 -2  2  3
 -2  3  0  2  1  3  3  5  3 -1
  3 -1  5 -3  0  0  0  3  1  5
  1 -1  2  0  1 -2 -2  1 -1  0
 -1  3  0  2  4  1  1  3  2  2
  0  2 -1  3  2  1  1  4  0 -3
  5  2 -1  3  0 -3 -3 -1  1  2
  0  1  3  2  0 -1  1  1 -3 -2
  2 -2  1  3  1 -3  2  1  4  1

Wyznacznik macierzy to -182974

Przyciśnij dowolny klawisz aby wyjść z programu
```

### 2. Rozwiązywanie układu 'n' równań liniowych z 'n' niewiadomymi

```
C:\Users\Leszek\Desktop\M_2.exe — □ ×
Układ równań:
2*x1 +1*x2 -1*x3 +3*x4 +1*x5 +0*x6 +2*x7 +1*x8 +0*x9 +2*x10 = 6
1*x1 +4*x2 -3*x3 +2*x4 +5*x5 -1*x6 -1*x7 -2*x8 +2*x9 +3*x10 = 15
-2*x1 +3*x2 +0*x3 +2*x4 +1*x5 +3*x6 +3*x7 +5*x8 +3*x9 -1*x10 = -17
3*x1 -1*x2 +5*x3 -3*x4 +0*x5 +0*x6 +0*x7 +3*x8 +1*x9 +5*x10 = 17
1*x1 -1*x2 +2*x3 +0*x4 +1*x5 -2*x6 -2*x7 +1*x8 -1*x9 +0*x10 = 17
-1*x1 +3*x2 +0*x3 +2*x4 +4*x5 +1*x6 +1*x7 +3*x8 +2*x9 +2*x10 = 8
0*x1 +2*x2 -1*x3 +3*x4 +2*x5 +1*x6 +1*x7 +4*x8 +0*x9 -3*x10 = -2
5*x1 +2*x2 -1*x3 +3*x4 +0*x5 -3*x6 -3*x7 -1*x8 +1*x9 +2*x10 = 16
0*x1 +1*x2 +3*x3 +2*x4 +0*x5 -1*x6 +1*x7 +1*x8 -3*x9 -2*x10 = 12
2*x1 -2*x2 +1*x3 +3*x4 +1*x5 -3*x6 +2*x7 +1*x8 +4*x9 +1*x10 = -1

Rozwiązanie tego układu równań to:

    x1= 1.000    x2=-0.000    x3= 2.000    x4= 1.000
    x5= 3.000    x6=-1.000    x7=-2.000    x8=-0.000
    x9=-3.000    x10= 2.000

Przyciśnij dowolny klawisz aby wyjść z programu.
```

Aby zweryfikować powyższe wyniki można użyć strony internetowej RESHISH'a:

<https://matrix.resish.com/determinant.php>

Przykład: Dla punktu 1. (Obliczanie wyznacznika macierzy kwadratowej - max 10x10)

Wyznacznik  $\Delta = -182974$

| Sign |    | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$  | $A_4$     | $A_5$     | $A_6$      | $A_7$      | $A_8$       | $A_9$       | $A_{10}$     |
|------|----|-------|-------|--------|-----------|-----------|------------|------------|-------------|-------------|--------------|
| +    | 1  | 2     | 1     | -1     | 3         | 1         | 0          | 2          | 1           | 0           | 2            |
|      | 2  | 0     | $7/2$ | $-5/2$ | $1/2$     | $9/2$     | -1         | -2         | $-5/2$      | 2           | 2            |
|      | 3  | 0     | 0     | $13/7$ | $31/7$    | $-22/7$   | $29/7$     | $51/7$     | $62/7$      | $5/7$       | $-9/7$       |
|      | 4  | 0     | 0     | 0      | $-239/13$ | $126/13$  | $-146/13$  | $-298/13$  | $-296/13$   | $8/13$      | $87/13$      |
|      | 5  | 0     | 0     | 0      | 0         | $567/239$ | $-657/239$ | $-863/239$ | $-376/239$  | $-203/239$  | $-206/239$   |
|      | 6  | 0     | 0     | 0      | 0         | 0         | $92/63$    | $1186/567$ | $158/567$   | $4/81$      | $1492/567$   |
|      | 7  | 0     | 0     | 0      | 0         | 0         | 0          | $-247/207$ | $379/207$   | $-187/207$  | $-886/207$   |
|      | 8  | 0     | 0     | 0      | 0         | 0         | 0          | 0          | $-1000/247$ | $281/494$   | $2326/247$   |
|      | 9  | 0     | 0     | 0      | 0         | 0         | 0          | 0          | 0           | $-1683/250$ | $-1243/125$  |
|      | 10 | 0     | 0     | 0      | 0         | 0         | 0          | 0          | 0           | 0           | $-8317/1224$ |

$$\Delta = 2 \times 7/2 \times 13/7 \times (-239/13) \times 567/239 \times 92/63 \times (-247/207) \times (-1000/247) \times (-1683/250) \times (-8317/1224) = -182974$$

Hide solution

Recalculate

Result:

$\Delta = -182974$