Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zgraggen
Autoren:
Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:
0.1.20240704
https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen

Inhaltsverzeichnis

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f : \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^{m}) \longrightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^{n})$$

m	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{D}_f$, wobei $m \in \mathbb{N}$
n	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{W}_f$, wobei $n \in \mathbb{N}$
$\vec{f}$	wenn Output vektoriell

⚠ **Variablen sind abhängig von einander!**

Multi-Variat:

f ist "Multi-Variat", wenn:
- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

f ist nicht "Multi-Variat", wenn:
- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

$$\left.\begin{array}{r} \text{Raum 3D } (x;y;z)\ \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t)\ \mathbb{R}^1 \end{array}\right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t;x;y;z)$$

1.1.2 Stationärer Fall

$$t \to \infty \to \text{Stationär}$$

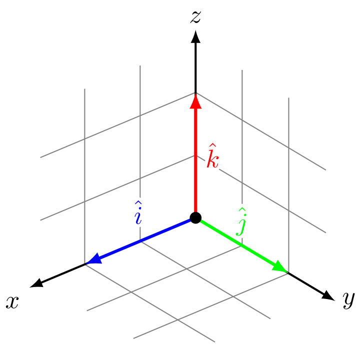
$$T(x;y;z) \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} \to 0$$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion → Teilmenge vom Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$

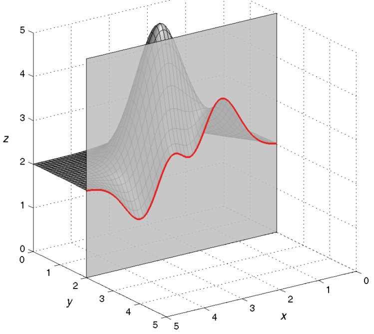
1.2.1 Partielle Funktion

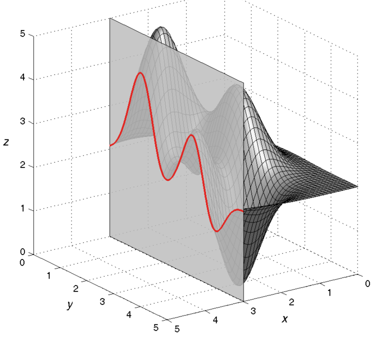
- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
- **Alle** anderen Variablen sind fix!
  ⚠ **$\mathbb{W}_f$ Analyse!**

Beispiel: Schnitte

x-Linien
- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x;y;z)$ Punkten $(x;y_0;f(x;y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow y_0 = 2$

y-Linien
- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt.
- Bestehen aus den $(x;y;z)$ Punkten $(x_0;y;f(x_0;y))$
- x-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel





1.2.2 Bedingungen

Initialbedingungen	→	Beziehen sich auf die **Zeit**
Randbedingungen	→	Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

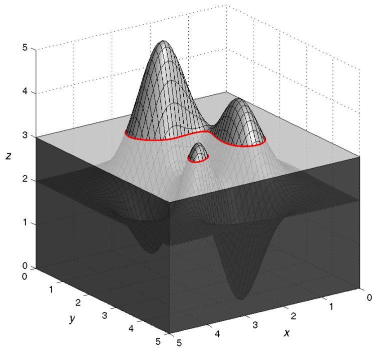
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinen, ...

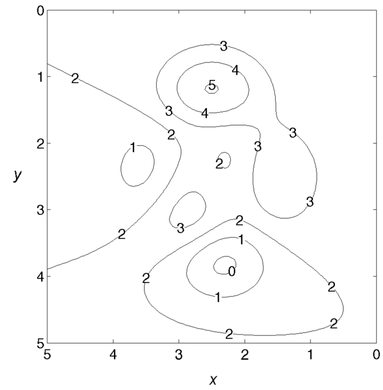
Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion f **konstant**.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \subset \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)
- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x;y;z)$ Punkten $(x;y;f(x;y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow z_0 = 3$





2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat)

$$f : \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}$$

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x,y) : \ y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \textbf{ einzige} \text{ freie Variable}$$

Notationen

$$\text{1. Ordnung:} \quad f(x;y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x;y_0)$$
$$\text{2. Ordnung:} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \overset{!}{=} f_{yx}$$

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

Kartesisch

$$\underbrace{\nabla}_{\text{"Gradient" / Nabla}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}$$

Zylindrisch

$$\nabla f(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Sphärisch

$$\nabla f(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

2.3 Totale Ableitung

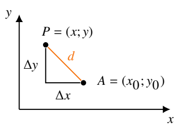
Für Fehlerrechnung benützt, da man hierbei die Abstände von $(x;y;z)$ zu einem festen Punkt $(x_0;y_0;z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f;\underbrace{(x_0,y_0,\ldots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \ \mathbb{R}^2 \xrightarrow{1\times 2 \text{ Matrix}} \mathbb{R}^1; \ \text{"gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \ldots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + f(x_0;y_0) + R_1$$

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \ (\text{"gut", "schneller gegen 0 als } d\text{"})$$



$$D(f;(x_0;y_0)) = \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)\right)$$
$$= (\nabla f)^{\mathrm{tr}} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A$$

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x;y) \approx f(x_0;y_0) + D(f;(x_0;y_0)) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

2.4.1 Tangentialebene

$$g(x;y) = f(x_0;y_0) + D(f;(x_0;y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$
$$g(x;y) = f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0;y_0) \cdot (y - y_0)$$

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

$$\mathrm{d}f \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \quad \text{bezüglich } A = (x_0;y_0)$$

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

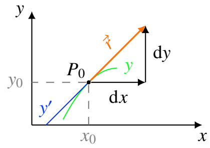
Auf Konturen sei $\mathrm{d}f = 0$ (Kontourlinien). Daher lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$f = c = \text{const.} \quad |\mathrm{d}(\ldots)$$
$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}c \overset{!}{=} 0$$

Bzw. für Kontourlinien: $f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y = 0$

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



2.5 DGL

$$y' = \underbrace{\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)}_{\text{right-hand-side (r.h.s.) Funktion}}; \ y(x_0) = y_0$$

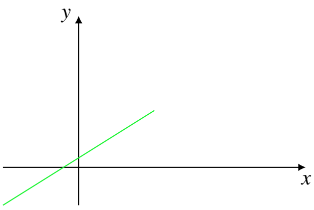
2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

$$\vec{r} = \left(\mathrm{d}x = h; \mathrm{d}y = y' \,\mathrm{d}x = -\frac{f_x}{f_y}\,\mathrm{d}x\right)^{\mathrm{tr}}$$

2.7 Gradientenfeld ⊥ Kontouren

$$\nabla f \underset{\text{Skalarprodukt}}{\bullet} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y = y' \,\mathrm{d}x \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

2.8 TODO: Taylorreihe



$$s(t): \quad P_0 + t \cdot \hat{v} \mid t \in \mathbb{R}$$
$$s(t): \quad f(x_0 + t \cdot \hat{v}_1 \,;\, y_0 + t \cdot \hat{v}_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{s}(t): \quad t \mapsto \overbrace{\begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v_1 \\ y_0 + t \cdot v_2 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \mapsto f(x,y)$$

2.9 Richtungs-Ableitung

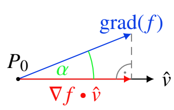
$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \overset{!}{=} D(f;(x_0;y_0)) \cdot \hat{v} \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \mathrm{grad}(f)^{\mathrm{tr}} \cdot \hat{v} = f_x \cdot v_1 + f_y \cdot v_2$$

Beispiel: Richtungs-Ableitung

$$\vec{x} : \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_1} = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 = \underline{\underline{f_x}}$$

2.9.1 Spezialfälle

- $\alpha = \frac{\pi}{2} \implies$ rechter Winkel
- $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}$ extremal
  - $\alpha = 0$ (max): $\nabla f \cdot \hat{v} > 0 \implies \mathrm{grad}(f)$ liegt auf $\hat{v}$
  - $\alpha = \pi$ (min): $\nabla f \cdot \hat{v} < 0 \implies \mathrm{grad}(f)$ liegt invers auf $\hat{v}$



Trigo: $\nabla f \cdot \hat{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \implies \cos(\alpha) \cdot |\nabla f|$

3 Extrema von Funktionen finden

Stationäritätsbedingung: $\nabla f \stackrel{!}{=} \vec{0}$

3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzten und kritische Stellen finden:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$$

2. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$f_{xx} = \dots \qquad f_{xy} = f_{yx} = \dots \qquad f_{yy} = \dots$

3. Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:

$$\Delta = f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - \left(f_{xy}(x_0; y_0)\right)^2$$

4. Auswertung:

$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\Delta < 0$			$\Longrightarrow$	Sattelpunkt
$\Delta = 0$			?	Multi-variate-Taylor-logik ...

3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzten und kritische Stellen finden:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$$

2. Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \dots & f_{xt} \\ f_{yx} & f_{yy} & \dots & f_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx} & f_{ty} & \dots & f_{tt} \end{pmatrix}$$

- Symmetrien beachten!
- Nicht doppelt rechnen!
  $\Rightarrow f_{xt} = f_{tx}$

3. Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen füllen:

$$\mathbf{H}(x_0, y_0, \dots t_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{xy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots t_0) \end{pmatrix}$$

4. Eigenwerte λ_i der Hesse-Matrix bestimmen:

$\det\left(\mathbf{H}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda \cdot \mathbf{E}\right) = 0$

Nullstellen λ_i finden $\rightarrow$ Eigenwerte

Zur Erinnerung:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

$\mathbf{H}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda \cdot \mathbf{E} = \dots$

$$\dots = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda & f_{xy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda & \cdots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda \end{pmatrix}$$

5. Auswertung:

$\lambda_i < 0 \;\; \forall i$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\lambda_i > 0 \;\; \forall i$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\lambda_i > 0$ und $\lambda_i < 0$	$\Longrightarrow$	Sattelpunkt

Erklärung:

- $\lambda_i < 0 \;\; \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind negativ
- $\lambda_i > 0 \;\; \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind positiv

3.3 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion $f(x, y, \dots, t)$ gilt:

$f(x, y, \dots, t) \le M_{\max}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	globales Maxinum
$f(x, y, \dots, t) > M_{\max}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	kein globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) \ge M_{\min}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	globales Minimum
$f(x, y, \dots, t) < M_{\min}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	kein globales Minimum

$M_{\max}$: grösstes lokales Maximum
$M_{\min}$: kleinstes lokales Minimum

3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: $n(x, y) \stackrel{!}{=} 0$

Nebenbedingung: $x + y = 1$
Standardform der Nebenbedingung: $x + y - 1 = 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

$\mathrm{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot n(x, y)$ Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzten und kritische Stellen finden:

$$\nabla \mathrm{L} = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_x \\ \mathrm{L}_y \\ \mathrm{L}_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$\mathrm{L}_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \mathrm{L}_{\lambda x} = \mathrm{L}_{x\lambda} = n_x = \dots$

$\mathrm{L}_{xx} = \dots \qquad \mathrm{L}_{\lambda y} = \mathrm{L}_{y\lambda} = n_y = \dots$

$\mathrm{L}_{yy} = \dots \qquad \mathrm{L}_{xy} = \mathrm{L}_{yx} = \dots$

5. Geänderte Hesse Matrix $\overline{\mathbf{H}}$ aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

$$\overline{\mathbf{H}}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_{\lambda\lambda}(x_0, y_0) & \mathrm{L}_{\lambda x}(x_0, y_0) & \mathrm{L}_{\lambda y}(x_0, y_0) \\ \mathrm{L}_{x\lambda}(x_0, y_0) & \mathrm{L}_{xx}(x_0, y_0) & \mathrm{L}_{xy}(x_0, y_0) \\ \mathrm{L}_{y\lambda}(x_0, y_0) & \mathrm{L}_{yx}(x_0, y_0) & \mathrm{L}_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n_x(x_0, y_0) & n_y(x_0, y_0) \\ n_x(x_0, y_0) & \mathrm{L}_{xx}(x_0, y_0) & \mathrm{L}_{xy}(x_0, y_0) \\ n_y(x_0, y_0) & \mathrm{L}_{yx}(x_0, y_0) & \mathrm{L}_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

6. Determinante der geänderten Hesse Matrix bestimmen:

$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = \dots$

7. Auswertung

$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = 0$	$\Longrightarrow$	keine Aussage möglich

3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: $n(x, y, \dots, t) \stackrel{!}{=} 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

$\mathrm{L}(x, y, \dots, t, \lambda) = f(x, y, \dots, t) + \lambda \cdot n(x, y, \dots, t)$ Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzten und kritische Stellen finden:

$$\nabla \mathrm{L} = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_x \\ \mathrm{L}_y \\ \vdots \\ \mathrm{L}_t \\ \mathrm{L}_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$$\begin{matrix} \mathrm{L}_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0 & & \\ \mathrm{L}_{xx} = \dots & \mathrm{L}_{\lambda x} = \mathrm{L}_{x\lambda} = n_x = \dots & \mathrm{L}_{xy} = \mathrm{L}_{yx} \\ \mathrm{L}_{yy} = \dots & \mathrm{L}_{\lambda y} = \mathrm{L}_{y\lambda} = n_y = \dots & \mathrm{L}_{xt} = \mathrm{L}_{tx} \\ \vdots & \vdots & \mathrm{L}_{yt} = \mathrm{L}_{ty} \\ & \mathrm{L}_{\lambda t} = \mathrm{L}_{t\lambda} = n_t = \dots & \vdots \\ \mathrm{L}_{tt} = \dots & & \end{matrix}$$

5. Geänderte Hesse Matrix $\overline{\mathbf{H}}$ aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

$$\overline{\mathbf{H}}(x_0, y_0, \dots t_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_{\lambda\lambda}(\dots) & \mathrm{L}_{\lambda x}(\dots) & \mathrm{L}_{\lambda y}(\dots) & \cdots & \mathrm{L}_{\lambda t}(\dots) \\ \mathrm{L}_{x\lambda}(\dots) & \mathrm{L}_{xx}(\dots) & \mathrm{L}_{xy}(\dots) & \cdots & \mathrm{L}_{xt}(\dots) \\ \mathrm{L}_{y\lambda}(\dots) & \mathrm{L}_{yx}(\dots) & \mathrm{L}_{yy}(\dots) & \cdots & \mathrm{L}_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{L}_{t\lambda}(\dots) & \mathrm{L}_{tx}(\dots) & \mathrm{L}_{ty}(\dots) & \cdots & \mathrm{L}_{tt}(\dots) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n_x(\dots) & n_y(\dots) & \cdots & n_t(\dots) \\ n_x(\dots) & \mathrm{L}_{xx}(\dots) & \mathrm{L}_{\lambda y}(\dots) & \cdots & \mathrm{L}_{xt}(\dots) \\ n_y(\dots) & \mathrm{L}_{yx}(\dots) & \mathrm{L}_{yy}(\dots) & \cdots & \mathrm{L}_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_t(\dots) & \mathrm{L}_{tx}(\dots) & \mathrm{L}_{ty}(\dots) & \cdots & \mathrm{L}_{tt}(\dots) \end{pmatrix}$$

6. Determinante der geänderten Hesse Matrix bestimmen:

$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = \dots$

7. Auswertung

$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = 0$	$\Longrightarrow$	keine Aussage möglich

4 Support Vector Machine (SVM)

Die Support Vector Machine kann verwendet werden, um ein Modell für das Zuordnen von Daten zu entwickeln. Dadurch wird ein Satz von Punkten, deren Klassifizierung bekannt ist, so linear getrennt, dass der Abstand von der trennenden Geraden zu den beiden Punktegruppen maximal wird. Es resultiert eine einfache Gleichung, mit der sich neue Daten klassifizieren lassen.

4.1 Linear Trennbare Daten

4.1.1 Allgemeines

Datenpunkte: (2D Beispiel)

$A : (\underbrace{(x_1, x_2)}_{\vec{x}_1}; y_1), \quad B : (\underbrace{(x_1, x_2)}_{\vec{x}_2}; y_2), \quad C : (\underbrace{(x_1, x_2)}_{\vec{x}_3}; y_3), \quad \cdots, \quad N : (\underbrace{(x_1, x_2)}_{\vec{x}_n}; y_n)$

$\vec{x}_j$ sind Datenvektoren

$y_j \in \{\pm 1\}$ klassifiziert die jeweiligen Datenvektoren

Hyperebenen:

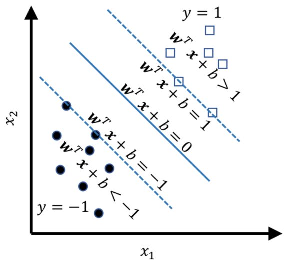
$\boxed{\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b = 0}$

$\vec{w}$: Normalenvektor, $\vec{w} \in \mathbb{R}^d$ und $\vec{w} \neq 0$

b: Konstante, $b \in \mathbb{R}$

Dimmension der Hyperebene $= d - 1$

Abstand der Hyperebene zum Ursprung: $\frac{|b|}{|\vec{w}|}$



Klassifizierung:

$\boxed{\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b > 0} \Rightarrow \vec{x}$ gehört zur Klasse $y = +1$

$\boxed{\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b < 0} \Rightarrow \vec{x}$ gehört zur Klasse $y = -1$

Klassifizierung der Trainigsdaten:

$\boxed{\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b \geq 0} \Rightarrow \vec{x}_j$ gehört zur Klasse $y = +1$

$\boxed{\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b \leq 0} \Rightarrow \vec{x}_j$ gehört zur Klasse $y = -1$

Zielfunktion:

$$\boxed{\frac{2}{|\vec{w}|} = \frac{2}{w}}$$

4.1.2 Das primale Optimierungsproblem

$$\boxed{\frac{1}{2}\vec{w}^{tr} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2}|\vec{w}|^2 = \frac{1}{2}w^2 \rightarrow \text{min!} \quad \text{s.t.} \quad \left(\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b\right) y_j \geq 1 \quad (j = 1, \cdots, N)}$$

4.1.3 Das duale Optimierungsproblem

Nebenbedingung:

$$\boxed{\underbrace{1 - \left(\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b\right) y}_{g_j(\vec{w}^{tr}, b)} \leq 0 \Leftrightarrow g_j(\vec{w}^{tr}, b) \leq 0 \quad (j = 1, \cdots, N)}$$

Lagrange-Funktion:

Zusammengesetzt aus dem primalen Problem und den Nebenbedingungen.

$$\begin{aligned} L(\vec{w}^{tr}, b, \vec{a}) &= L(w_1, w_2, ..., w_d, b, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \\ &= \tfrac{1}{2}\vec{w}^{tr} \cdot \vec{w} + \textstyle\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left(\underbrace{1 - \left(\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b\right) y_j}_{g_j(\vec{w}^{tr}, b)} \right) \end{aligned}$$

Stationaritätsbedingungen:

Aus der Bedingung, dass $\text{grad}(L) = 0$ sein muss, lassen sich folgende Formeln ableiten:

$$\boxed{grad_{\{\vec{w}^{tr}, b\}}\left(L(\vec{w}^{tr}, b, \vec{a})\right) = \vec{0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{w} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j \vec{x}_j} \text{ und } \boxed{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j = 0}$$

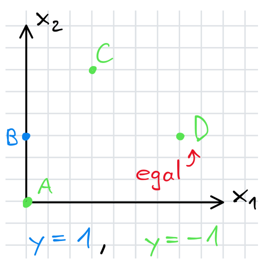
Das duale Problem:

Die oben erhaltenen Summen können nun in die Lagrange-Fkt. eingesetzt werden. Daraus entsteht

$$\boxed{L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^{N} \alpha_j \alpha_{j'} y_j y_{j'} \vec{x}_j^{tr} \cdot \vec{x}_{j'}}_{= \frac{1}{2}\vec{w}^{tr} \cdot \vec{w}} \quad \rightarrow \quad \text{max!} \quad \text{s.t.} \quad \alpha_j \geq 0 \wedge \sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j = 0}$$

Vorgehen zum lösen des dualen Optimierungsproblems:

1. **Skizze mit Datenpunkten erstellen:**
   - Einzelne Datenpunkte klassenweise farblich hervorheben
   - Falls ein Datenpunkt der gleichen Klasse weit weg von den anderen ist
     ➔ diesen vergessen, da sein $\alpha = 0$ sein wird



2. **Nebenbedingungen, Es muss gelten:**
   a: $\boxed{\alpha_j \geq 0}$
   b: $\boxed{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cdot y_j = 0}$
   Nach einem α unstellen und anschliessend jenes α (damit die Nebenbedingung miteinbezogen wird) in der Lagrange-Funktion ersetzen
3. **Kernel-Matrix aufstellen:**
   $\boxed{K\left(\vec{x}^{tr}; \vec{x}\right) = \vec{x}^{tr} \bullet \vec{x}}$

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots \\ \hline \vec{x}_1^{tr} & K(\vec{x}_1^{tr}; \vec{x}_1) & K(\vec{x}_1^{tr}; \vec{x}_2) & \cdots \\ \vec{x}_2^{tr} & K(\vec{x}_2^{tr}; \vec{x}_1) & K(\vec{x}_2^{tr}; \vec{x}_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

   - Einträge sind die Ergebnisse der Skalarprodukte
4. **Lagrange-Funktion aufstellen:**
   $$\boxed{L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^{N} \alpha_j \cdot \alpha_{j'} \cdot y_j \cdot y_{j'} \cdot \vec{x}_j^{tr} \bullet \vec{x}_{j'} \quad \rightarrow \quad \text{max!}}$$
   - **2. b** und **3** brauchen
5. **Alle α finden durch Stationaritätsbedingung**
   $\boxed{\nabla L = \vec{0}}$
   $\Rightarrow$ ersetztes α mit gefundenen α berechnen
6. **$\vec{w}$ berechnen:**
   $$\boxed{\vec{w} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j \vec{x}_j}$$
7. **Konstante b berechnen:**
   Datenpunkte mit der Klasse $y = 1$ oder $y = -1$ wählen und einsetzen
   - **Variante 1:** Stützvektor-Datenpunkt mit $y = +1$
     $\boxed{\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{...} + b = 1} \Leftrightarrow \boxed{b = 1 - \vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{...} = ...}$
   - **Variante 2:** Stützvektor-Datenpunkt mit $y = -1$
     $\boxed{\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{...} + b = -1} \Leftrightarrow \boxed{b = -1 - \vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{...} = ...}$

4.2 Nicht linear Trennbare Daten

Sollte ein Datensatz von nicht linear trennbaren Datenpunkten vorliegen, so muss dieser durch eine Transformation linear trennbar gemacht werden. Dadurch werden die Punkte oft in höhere Dimensionen gebracht. Das Finden einer geeigneten Transformation liegt nicht im Ramen dieses Moduls.

Der einzige Unterschied zu der Methode zum linearen trennen von Datenpunkten ist dann, dass stat mit den Datenpunkten $\vec{x}_i$ mit deren durch φ transformierten gegenstücken $\vec{\varphi}(\vec{x}_i)$ gerechnet wird.

4.2.1 Transformiertes duales Optimierungsproblem

Nebenbedingungen, Es muss gelten:

a: $\boxed{\alpha_j \geq 0}$

b: $\boxed{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cdot y_j = 0}$

$$\boxed{L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^{N} \alpha_j \cdot \alpha_{j'} \cdot y_j \cdot y_{j'} \cdot \underbrace{\vec{z}_j^{tr} \bullet \vec{z}_{j'}}_{\text{Kernel}} \quad \rightarrow \quad \text{max!}}$$

4.2.2 Kernelfunktionen («Kernel-Trick»)

$$\boxed{K\left(\vec{x}_j; \vec{x}_{j'}\right) = \vec{z}_j^{tr} \bullet \vec{z}_{j'} = \vec{\varphi}(\vec{x}_j) \bullet \vec{\varphi}(\vec{x}_{j'})}$$

$$\boxed{\vec{w} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cdot y_j \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}_j)}$$

$\boxed{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cdot y_j \cdot K\left(\vec{x}_j; \vec{x}^*\right) + b > 0 \Longrightarrow \vec{x}^*}$ gehört zur Klasse $y = +1$

$\boxed{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cdot y_j \cdot K\left(\vec{x}_j; \vec{x}^*\right) + b < 0 \Longrightarrow \vec{x}^*}$ gehört zur Klasse $y = -1$

$\vec{x}^*$ steht für Test-Daten

Lösungsweg: gleiches Vorgehen wie beim linearen Fall.

5 Koordinatensysteme

5.1 2D Koordinatensysteme

Neben den Kartesischen Koordinatensystemen kommen in zweidimensionalen Räumen auch Polare Koordinatensysteme zum Einsatz. Die beiden Systeme können mit Hilfe der Trigonometrie in einander überführt werden.

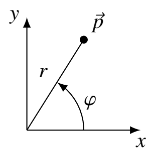
5.1.1 Umrechnung Kartesisch ↔ Polar

Polar zu Kartesisch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Kartesisch zu Polar

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$



Dabei ist zu beachten, dass $\tan^{-1}$ nur werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ liefert, für φ jedoch $\varphi \in [0, \pi]$ gelten soll. φ wird also, je nach dem in welchem Quadranten sich $\vec{p}$ befindet, nach folgendem Schema berechnet:

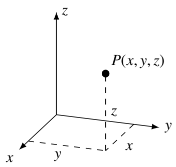
$\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$\tan^{-1} \frac{y}{x}$
$\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$2\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$

Um eine ganzes Integral vom einen Koordinatensystem ins andere zu überführen, muss zum einen die Funktion $f(x, y)$ zu $f(r, \varphi)$ (oder umgekehrt) umgeschrieben, sowie die differentiale angepasst werden. Hier dafür einige gängige Elemente:

	Kartesisch	**Polar**
x-Achsenelement	$\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}x = \cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$
y-Achsenelement	$\mathrm{d}y$	$\mathrm{d}x = \sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$
Linienelement	$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y^2$	$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2$
Flächenelement	$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

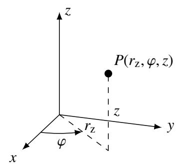
5.2 3D Koordinatensysteme

Kartesisch



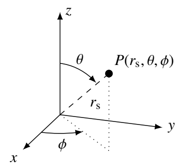
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Zylindrisch



$$\begin{pmatrix} r_z \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s \sin\theta \\ \phi \\ r_s \cos\theta \end{pmatrix}$$

Sphärisch



$$\begin{pmatrix} r_s \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \mathrm{sgn}(y)\cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r_z^2 + z^2} \\ \tan^{-1} \frac{r_z}{z} \\ \varphi \end{pmatrix}$$

5.2.1 Umrechnen zwischen Koordinatensystemen

Beim Umrechnen zwischen den Koordinatensystemen gelten im Grunde genommen die obigen Formeln. Dabei muss jedoch in einigen Fällen auf die Wertebereiche von den trigonometrischen Funktionen rücksicht genommen werden.

Zylindrisch → Kartesisch:
Sphärisch → Kartesisch:
Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Kartesisch → Zylindrisch:

Der Parameter ϕ wird analog zum zweidimensionalen Fall, je nach dem in welchem Quadranten sich P befindet, nach dem Schema rechts berechnet.

$\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$\tan^{-1} \frac{y}{x}$
$\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$2\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$

Sphärisch → Zylindrisch:
Kartesisch → Sphärisch:
Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Zylindrisch → Sphärisch:

Auch hier macht der $\tan^{-1}$ Probleme, da er Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ liefert, für θ jedoch $\theta \in [0, \pi]$ gelten soll. Je nach dem, ob P sich oberhalb oder unterhalb der xy-Ebene befindet, wird θ wie rechts berechnet.

oberhalb	$\tan^{-1} \frac{r_z}{z}$
xy-Ebene	
unterhalb	$\pi + \tan^{-1} \frac{r_z}{z}$

6 Integration

6.1 Allgemeines

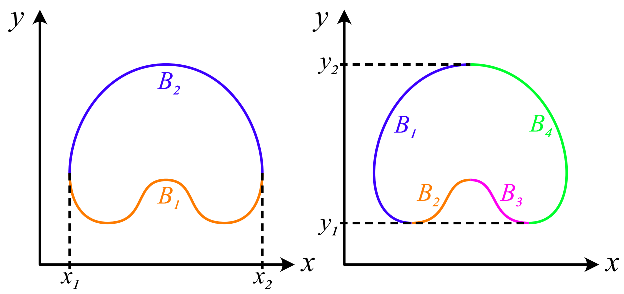
Unter bi- oder multivariater Integration versteht man Integrale, welche sich über zwei oder mehr unabhängige Variablen erstrecken. Sie haben die Form:

$$\int_\Omega f(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \iint \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \quad |\, \Omega \in \mathbb{R}^n$$

6.2 Normalbereiche

Unter einem Normalbereich versteht man einen Bereich, welcher in allen Dimensionen so begrenzt ist, dass eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für jeden Eingangsvektor jeweils nur einen Funktionswert zurückgibt.

Beispiel: Normalbereich in 2D



6.3 Satz von Fubini (Satz von Tonelli)

Der Satz von Fubini besagt, dass die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden kann, sofern die Funktion integrierbar ist.

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

6.4 Erster Metrischer Tensor

Der 1. metrische Tensor (oder auch **erste Fundamentalmatrix**, **erste Fundamentalform**, **metrische Grundform**) beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Kurve oder Fläche im Parameterraum zum Raum, in dem sie sich befindet (z.B. 2D-Fläche im 3D-Raum). Er besteht aus den Skalarprodukten der partiellen Ableitungsvektoren nach den Parametern.

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{S}}{\partial u_i} \bullet \frac{\partial \vec{S}}{\partial u_j}$$

Folglich ergibt sich die Matrix: $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$

Die Einträge dieser Matrix werden benötigt, um Längen- oder Flächen(elemente) zu berechnen.

Beispiel: Längenberechnung

Eine Flächenkurve sei als $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ gegeben. Davon wird das totale Differential gebildet:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{x}_u \cdot \dot{u} + \vec{x}_v \cdot \dot{v}$$

Um die Länge des Vektors (Längenelement) zu erhalten, muss man diesen im ersten Schritt quadrieren:

$$(\dot{\vec{x}})^2 = g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2$$

Das einzelne Längenelement ist somit:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{g_{11}\,\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + g_{22}\,\mathrm{d}v^2}$$

Summiert man nun alle $\mathrm{d}s$ über die Kurve, so ergibt dies das Integral für die gesamte Länge:

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2}\,\mathrm{d}t$$

Beispiel: Flächenberechnung

Es sei eine parametrisierte Fläche als Funktion $\vec{S}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ gegeben. Das Flächenelement lässt sich aus einem Parallelogramm der beiden partiellen Ableitungsvektoren bilden, was dem Betrag des Kreuzproduktes bzw. der Determinante entspricht:

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\det |g_{ij}|}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left|\frac{\partial \vec{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Daraus ergibt sich die Fläche über das Doppelintegral:

$$S = \int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

6.5 Längenintegrale

6.5.1 Längenelemente

$$\mathrm{d}s^2 = \underbrace{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2}_{\text{Sphärisch}}$$

6.5.2 Kurvenintegrale 1. Art: Länge einer Funktion

Die Bestimmung der Länge einer Kurve kann in folgende Schritte unterteilt werden:

1. **Funktion in die Parameterdarstellung überführen (sofern nicht gegeben):**
   Dafür wird einer der Parameter (z.B. x oder θ) $= t$ gesetzt und die anderen Parameter ebenfalls als Funktion von t ausgedrückt.
2. **Integral aufstellen:**
   Das Integral in der Form $\iiint \mathrm{d}s$ wird mit $\frac{dt}{dt}$ erweitert.
3. **Das Integral lösen**

Beispiel: Längenintegral in kartesischen Koordinaten

Es soll die Länge der Kurve $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ auf dem Interval $[t_1, t_2]$ bestimmt werden. Dazu werden die oben genannten Schritte abgearbeitet:

1. **Funktion in die Parameterdarstellung überführen**
   Hier nicht nötig.
2. **Integral aufstellen**
   $\iiint \mathrm{d}s = \iiint \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$
3. Integral lösen
   $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ und $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ ausrechnen, einsetzen, integrieren.

6.5.3 Kurvenintegral 2. Art

Beim Kurvenintegral 2. Art wird nicht die tatsächliche Länge einer Funktion, sondern die Länge deren Projektion auf eine Achse bestimmt. Dazu wird stat über alle Koordinatenrichtungen nur über eine der Koordinaten integriert.
Es folgen einige Paare von Kurvenintegralen 2. Art entlang einer Kontur K für Funktionen in expliziter Form und in Parameterdarstellung.

2D, Projektion auf x:

$$\int_K f(x)dx = \int_{t_0}^{T} \vec{f}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) \cdot dt$$

3D, Projektion auf x:

$$\int_K f(x,y)dx = \int_{t_0}^{T} \vec{f}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) \cdot dt$$

6.6 (Ober-)Flächenintegrale

6.6.1 Flächenelemente

Das Bestimmen der Flächenelemente ist in drei Dimensionen nicht wie bei den Längen- und Volumenelementen pauschal möglich. Dies, da jeweils nur über zwei der drei Koordinaten integriert werden muss. Ein einfaches Verfahren für das Berechnen von Flächeninhalten schafft jedoch abhilfe.

6.6.2 Flächeninhalt einer Oberfläche

Für das Berechnen der Oberflächen von Funktionen des Typs $f(a,b)$ in 3D kann die Formel

$$S = \int_B \int_A \sqrt{(f_a)^2 + (f_b)^2 + 1}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b$$

verwendet werden. Dabei repräsentieren a und b die beiden Koordinatenrichtungen, in denen sich die Fläche erstreckt. f_a und f_b sind die partiellen Ableitungen der Funktion $f(a,b)$ nach a bzw. b.

Beispiele zur Veranschaulichung:
Es soll die Oberfläche der Funktion $f(x,y)$ im Bereich $x \in [x_1, x_2], y \in [y_1, y-2]$ bestimmt werden. Das entsprechende integral lautet:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Wäre die Funktion f stat in kartesischen in polaren oder sphärischen Koordinaten formuliert, ändern sich lediglich die Namen der Variablen. Folglich ist das zu einer in sphärischen Koordinaten definierten Fkt. $f(\theta, \phi)$ gehörende Integral

$$S = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f_\theta)^2 + (f_\phi)^2 + 1}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

sehr leicht aufzustellen.

6.6.3 Allgemeine Wendelfläche

Die allgemeine Wendelfläche rotiert und verschiebt eine parametrisierte 3D Kurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tr im Raum.
Parametrisierung bei vertikaler Rotationsachse und vertikaler Verschiebungsrichtung (z-Achse):

$$\vec{S}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ z(t) + c \cdot \varphi \end{pmatrix} \quad (t_1 \leq t \leq t_2, \wedge \varphi \in \mathbb{R}\,, c \equiv const.)$$

Bei $c = 1$ $\Rightarrow$ Voller Meter bei einer Kurve

6.7 Volumenintegrale

6.7.1 Volumenelemente

$$\mathrm{d}V = \underbrace{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}_{\text{Sphärisch}}$$

6.8 Anwendungsformeln 2D (Doppelintegrale)

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
Flächeninhalt einer ebenen Figur F		
$A = \iint_F \mathrm{d}F$	$= \int_X \int_Y \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int_\Phi \int_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Oberfläche einer Ebene in drei Dimensionen		
$S = \iint_A \frac{1}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}A$	$= \int_X \int_Y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int_\Phi \int_R \sqrt{r^2 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Volumen eines Zylinders		
$V = \iint_A z\,\mathrm{d}A$	$= \int_X \int_Y z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int_\Phi \int_R zr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf die x-Achse		
$I_x = \iint_F y^2\,\mathrm{d}F$	$= \int_X \int_Y (y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int_\Phi \int_R (r^2\sin^2\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf den Pol $(0,0)$		
$I_x = \iint_F r^2\,\mathrm{d}F$	$= \int_X \int_Y (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int_\Phi \int_R (r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Masse einer ebenen Figur F mit Dichtefunktion ϱ		
$m = \iint_F \varrho\,\mathrm{d}F$	$= \int_X \int_Y \varrho(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int_\Phi \int_R \varrho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Koordinaten des Schwerpunkts S einer homogenen, ebenen Figur F		
$x_S = \frac{\iint_F x\,\mathrm{d}F}{A}$ $y_S = \frac{\iint_F y\,\mathrm{d}F}{A}$	$= \frac{\int_X \int_Y x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\int_X \int_Y \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$ $= \frac{\int_X \int_Y y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\int_X \int_Y \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$	$= \frac{\int_\Phi \int_R r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}{\int_\Phi \int_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}$ $= \frac{\int_\Phi \int_R r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}{\int_\Phi \int_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}$

Hinweis: Damit die Flächenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziebar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

6.9 Anwendungsformeln 3D (Dreifachintegrale)

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
Volumen eines Körpers K			
$V = \iiint_K \mathrm{d}V$	$= \iiint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$= \iiint r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$	$= \iiint r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$
Trägheitsmoment eines Körpers K, bezogen auf die Z-Achse			
$I_z = \iiint_K r^2\,\mathrm{d}V$	$= \iiint (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$= \iiint (r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$	$= \iiint (r^2\sin^2\theta) r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$
Masse eines Körpers K mit der Dichtefunktion ϱ			
$M = \iiint_K \varrho\,\mathrm{d}V$	$= \iiint \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$= \iiint \varrho(r,\phi,z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$	$= \iiint \varrho(r,\theta,\phi) r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$
Koordinaten des Schwerpunktes S eines homogenen Körpers K			
$x_S = \frac{\iiint_K x\,\mathrm{d}V}{V}$ $y_S = \frac{\iiint_K y\,\mathrm{d}V}{V}$ $z_S = \frac{\iiint_K z\,\mathrm{d}V}{V}$	$= \frac{\iiint (x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$ $= \frac{\iiint (y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$ $= \frac{\iiint (z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$	$= \frac{\iiint (r\cos\phi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z}{V}$ $= \frac{\iiint (r\sin\phi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z}{V}$ $= \frac{\iiint (z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z}{V}$	$= \frac{\iiint (r\sin\theta\cos\phi) r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{V}$ $= \frac{\iiint (r\sin\theta\sin\phi) r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{V}$ $= \frac{\iiint (r\cos\theta) r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{V}$

Hinweis: Damit die Volumenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziebar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

7 Vektoranalysis

7.1 Vektorfelder

Das Vektorfeld

$$\vec{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

weist jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ zu. Die Notation eines Vektorfelds ist gleich deren eines Vektors, wobei Vektorfelder üblicherweise gross geschrieben werden. Weiter kann auch $\vec{V}(\vec{x})$ geschrieben werden, wobei $\vec{x}$ der Stützvektor eines beliebigen Punktes ist.

7.2 Gradient

Wir erinnern uns an den Nabla- oder Del-Operator aus Kapitel 2.2 als Spaltenvektor der verschiedenen Raumableitungen:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T$$

Der Gradient eines Potentialfelds $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ berechnet sich als

$$\nabla \cdot \phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T \cdot \phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}^T = \vec{F}(\vec{x})$$

und resultiert in einem Vektorfeld.

- Wird als Potential das elektrische Potential verwendet, entspricht $\vec{F}$ dem (negativen, skalierten) elektrischen Feld.
- Wird als Potential eine Höhe verwendet, entspricht $\vec{F}$ der negativen Hangabtriebskraft.
- Der Gradient kann als mehrdimensionale Ableitung verstanden werden.
- Der Gradient steht senkrecht auf allen Kontouren unz zeigt in Richtung hoher wert.
- Die Multiplikation $\nabla \cdot \phi$ wird normalerweise als $\nabla\phi$ abgekürzt.
- Zudem kann der Gradient auch als grad ϕ geschrieben werden.

7.2.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

$$\boxed{\operatorname{grad} V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

Zylindrisch:

$$\boxed{\operatorname{grad} V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

Sphärisch:

$$\boxed{\operatorname{grad} V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} \end{pmatrix}}$$

7.3 Vektorgradient

Die Definition des Gradienten eines Vektorfeldes $\vec{V}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lautet

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{a}} = \vec{a} \bullet \operatorname{grad} \vec{V},$$

wobei $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor und $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{a}}$ die Richtungsableitung von $\vec{V}$ nach $\vec{a}$ ist. Daraus kann man schliessen, dass der Vektorgradient als

$$\operatorname{grad} \vec{V} = \nabla \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \quad \left(= \nabla^T \bullet \vec{V}\right)$$

berechnet werden kann.

- $\nabla \vec{V}$ entspricht der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}$. Mit dieser kann die Hesse-Matrix einer skalaren Funktion F (siehe Kap. 3) bestimmt werden:
$$\mathbf{H}(F) = \mathbf{J}^T(\nabla F) = (\operatorname{grad} \operatorname{grad} F)^T$$
- Der Vektorgradient wird als $\nabla \vec{V}$ geschrieben, da die Notation $\nabla^T \bullet \vec{V}$, die den tatsächlichen Rechenweg beschreibt, etwas umständlich ist.
- Die Notation $\nabla \bullet \vec{V}$ ist nicht nur falsch, sondern zudem bereits durch die Divergenz besetzt.

7.4 Divergenz (Volumenableitung)

Die Divergenz oder Volumenableitung eines Vektorfelds

$$\begin{aligned} \nabla \bullet \vec{V}(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T \bullet \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) & v_2(\vec{x}) & \cdots & v_n(\vec{x}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{aligned}$$

ist ein Skalarfeld, das beschreibt, wie stark das Vektorfeld an einem gegebenen Punkt "nach aussen gerichtet" ist.

- Wird als Vektorfeld die Fliessgeschwindigkeit einer Flüssigkeit eingesetzt, so entspricht die Divergenz dem Fluss aus einem Punkt heraus.
  - An Punkten mit positiver Divergenz fliesst Flüssigkeit hinaus (Quelle)
  - An Punkten mit negativer Divergenz fliesst Flüssigkeit hinein (Senke)
- Wird das E-Feld eingesetzt, so entspricht die Divergenz der Ladungsdichte.
  - Pos. Ladungsdichte entspricht pos. Divergenz, bewirkt eine Quelle im E-Feld.
  - Neg. Ladungsdichte entspricht neg. Divergenz, bewirkt eine Senke im E-Feld.
- Das Skalarprodukt sollte zwingend $\nabla \bullet \vec{V}$ ausgschreiben werden, da sonst Verwechslungsgefahr mit dem Vektorgradienten besteht.
- Die Notation $\operatorname{div} \vec{V}$ ist ebenfalls gebräuchlich.

Eine alternative und gut visualisierbare Definition der Divergenz, ist in zwei dimensionen

$$\operatorname{div} \vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \lim_{A \to 0} \frac{\oint_{C=\partial A} \vec{V} \bullet \hat{n} \, \mathrm{d}s}{A},$$

wobei A eine Fläche mit den Normalen $\hat{n}$ und C dessen Kontur darstellt.
Verallgemeinert für die Anwendung in mehr als 2 Dimensionen lautet die Definition

$$\nabla \bullet \vec{V} = \operatorname{div} \vec{V} = \lim_{\Omega \to 0} \frac{\oint_{C=\partial\Omega} \vec{V} \bullet \hat{n} \, \mathrm{d}s}{\Omega},$$

wobei Ω ein Bereich im Raum $\mathbb{R}^n$ und C dessen Kontur in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist.

7.4.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}$$

Zylindrisch:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)}$$

Sphärisch:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta \cdot V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}}$$

7.5 Laplace Operator Δ

Der Laplaceoperator ist nichts anderes als die Divergenz des Gradienten eines Skalarfelds und vergleichbar mit der zweiten Ableitung. Folglich gilt

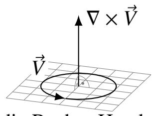
$$\Delta\phi = \nabla \bullet (\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_n^2},$$

wobei das Resultat ein Skalarfeld ist.

7.6 Rotation eines Vektorfelds (rot, curl)

Die Rotation eines Vektorfelds, auch Curl genannt, beschreibt, wie stark ein Vektorfeld um einen gegebenen Punkt "rotiert" und wird als

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$



berechnet. Der resultierende Vektor ist dabei die Rotationsachse, wobei die Rechte-Hand-Regel gilt.
Wie bei der Divergenz kann auch hier zur Hilfe der Verständlichkeit ein Limitsatz als Definition beigezogen werden. So sei

$$\nabla \times \vec{V} = \operatorname{rot} \vec{V} = \hat{n} \lim_{S \to 0} \frac{\oint_{C=\partial S} \vec{V} \bullet \mathrm{d}\vec{l}}{S},$$

wobei S ein planare Testfläche mit normale $\hat{n}$ und C dessen Kontur ist.
Der Curl ist grundsätzlich nur in drei Raumdimensionen definiert. Wenn die Rotation eines auf der Ebene $z = 0$ definierten Vektorfelds berechnet werden soll, kann die obige Formel mit $V_z = 0$ angepasst werden:

$$\operatorname{rot} \vec{V}(x, y) = \nabla \times \vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Mit dem Curl-Operator kann z.B. elegant beschrieben werden, dass Wirbel im E-Feld auf zeitliche Änderungen im magnetischen Feld zurückzuführen sind:
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

7.6.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

Zylindrisch:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r \cdot V_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \phi}\right) \end{pmatrix}}$$

Sphärisch:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (V_\phi \cdot \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r \cdot V_\phi)}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r \cdot V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}}$$

7.7 Rechenregeln mit ∇

Für das dalegen der Rechenregeln werden die folgenden Platzhalter verwendet:

$$\begin{aligned} A, B&: \quad \text{Skalarfelder } (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \\ \vec{A}, \vec{B}&: \quad \text{Vektorfelder } (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n) \\ F&: \quad \text{Skalare Funktion } (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \\ c&: \quad \text{Konstante} \end{aligned}$$

Gradienten:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(A + B) &= \operatorname{grad}(A) + \operatorname{grad}(B) &&\leftrightarrow && \nabla(A + B) = \nabla A + \nabla B \\ \operatorname{grad}(A \cdot B) &= A \operatorname{grad}(B) + B \operatorname{grad}(A) &&\leftrightarrow && \nabla(A \cdot B) = A \cdot \nabla B + B \cdot \nabla A \\ \operatorname{grad}(c \cdot A) &= c \operatorname{grad}(A) &&\leftrightarrow && \nabla(c \cdot A) = c \cdot \nabla A \\ \operatorname{grad}(F(A)) &= F'(A) \cdot \operatorname{grad} A &&\leftrightarrow && \nabla F(A) = F'(A) \cdot \nabla A \end{aligned}$$

Divergenzen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{A} + \vec{B}) &= \operatorname{div}(\vec{A}) + \operatorname{div}(\vec{B}) &&\leftrightarrow && \nabla \bullet (\vec{A} + \vec{B}) = (\nabla \bullet \vec{A}) + (\nabla \bullet \vec{B}) \\ \operatorname{div}(A \cdot \vec{B}) &= A \operatorname{div}(\vec{B}) + \vec{B} \operatorname{grad}(A) &&\leftrightarrow && \nabla \bullet (A \cdot \vec{B}) = A \cdot (\nabla \bullet \vec{B}) + \vec{B} \bullet \nabla A \\ \operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \bullet \operatorname{rot}(\vec{A}) - \vec{A} \bullet \operatorname{rot}(\vec{B}) &&\leftrightarrow && \nabla \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \bullet (\nabla \times \vec{B}) \\ \operatorname{div}(c \cdot \vec{A}) &= c \operatorname{div}(\vec{A}) &&\leftrightarrow && \nabla \bullet (c \cdot \vec{A}) = c \cdot (\nabla \bullet \vec{A}) \end{aligned}$$

Curl:

$$\operatorname{rot}(\vec{A}+\vec{B}) = \operatorname{rot}(\vec{A}) + \operatorname{rot}(\vec{B}) \quad \leftrightarrow \quad \nabla\times(\vec{A}+\vec{B}) = (\nabla\times\vec{A}) + (\nabla\times\vec{B})$$

$$\operatorname{rot}(A\cdot\vec{B}) = A\operatorname{rot}(\vec{B}) + (\operatorname{grad}(A)\times\vec{B}) \quad \leftrightarrow \quad \nabla\times(A\cdot\vec{B}) = A\cdot(\nabla\times\vec{B}) + (\nabla A\times\vec{B})$$

$$\operatorname{rot}(c\vec{A}) = c\operatorname{rot}(\vec{A}) \quad \leftrightarrow \quad \nabla\times(c\vec{A}) = c\cdot(\nabla\times\vec{A})$$

$$\operatorname{rot}(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\bullet\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\bullet\nabla)\vec{B} + \vec{A}\operatorname{div}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{div}\vec{A}$$

$$\searrow$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\bullet\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\bullet\nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla\bullet\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\bullet\vec{A})$$

Laplaceoperator:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}A = \Delta A \quad \leftrightarrow \quad \nabla\bullet(\nabla A) = \Delta A$$

$$\operatorname{rot}(\Delta\vec{A}) = \Delta\operatorname{rot}\vec{A} \quad \leftrightarrow \quad \nabla\times(\Delta\vec{A}) = \Delta(\nabla\times\vec{A})$$

Kombinationen:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \nabla\bullet(\nabla\times\vec{A}) = 0$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}A = \Delta A \quad \leftrightarrow \quad \nabla\bullet\nabla A = \Delta A$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\vec{A} = \vec{0} \quad \leftrightarrow \quad \nabla\times(\nabla A) = \vec{0}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} \quad \leftrightarrow \quad \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\bullet\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

8 Anwendungen

8.1 Integralsatz von Gauss

$$\boxed{\int_{(V)} \operatorname{div}\vec{A}\,\mathrm{d}V = \oint_{(S)=\partial V} \vec{A}\bullet\mathrm{d}\vec{S}}$$

Fluss durch eingeschlossenen Körper = Gesamter Fluss durch geschlossenen Rand des Körpers

8.2 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

Kartesisch

$$\boxed{\Delta\phi = \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}(\phi)\right) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = f(\vec{r})}$$

Δ : Laplace-Operator
ϕ : Potentialfeld
$f(\vec{r})$: Quellfunktion

Zylindrisch

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}$$

Sphärisch

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}}$$

8.2.1 Laplace-Gleichung

$\boxed{\Delta\phi = f = 0}$ $\Rightarrow$ Spezialfall der Poisson-Gleichung ohne äussere Quellfunktion

8.3 Integralsatz von Stokes

$$\boxed{\oint_{(C)=\partial S} \vec{A}\bullet\mathrm{d}\vec{r} = \int_{(S)} \operatorname{rot}\vec{A}\bullet\mathrm{d}\vec{S}}$$

∂S **muss** anhand Rechter-Hand-Regel orientiert sein.
Stokes sagt aus, dass die Summe der Verwirbelungen in einer Fläche, der Summe der Vektoren dessen Randes entsprechen.

8.4 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen

–TBD–

9 Anhang

9.1 Trigonometrie

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot(α)	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

9.1.1 Komplexe Darstellung

$$\sin(x) = \frac{e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}} \qquad \cos(x) = \frac{e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x}}{2}$$

9.1.2 Beziehungen zwischen $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$

$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$

9.1.3 Additionstheoreme

$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cdot\cos(b) \pm \cos(a)\cdot\sin(b)$
$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cdot\cos(b) \mp \sin(a)\cdot\sin(b)$
$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a)\pm\tan(b)}{1\mp\tan(a)\cdot\tan(b)}$

9.1.4 Produkte

$\sin(a)\cdot\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$
$\cos(a)\cdot\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$
$\sin(a)\cdot\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b) + \sin(a+b)\right)$

9.1.5 Summen und Differenzen

$\sin(a) + \sin(b) = 2\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\sin(a) - \sin(b) = 2\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$\cos(a) + \cos(b) = 2\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\cos(a) - \cos(b) = -2\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a\pm b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)}$

9.1.6 Winkelvielfache und Halbwinkel

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cdot\cos(a)$
$\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$
$\sin(4a) = 8\cos^3(a)\cdot\sin(a) - 4\cos(a)\cdot\sin(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
$\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$
$\cos(4a) = 8\cos^4(a) - 8\cos^2(a) + 1$
$\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(a))} \qquad \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos(a))}$

9.1.7 Potenzen

$\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1-\cos(2a))$
$\sin^3(a) = \frac{1}{4}(3\sin(a) - \sin(3a))$
$\sin^4(a) = \frac{1}{8}(\cos(4a) - 4\cos(2a) + 3)$
$\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1+\cos(2a))$
$\cos^3(a) = \frac{1}{4}(\cos(3a) + 3\cos(a))$
$\cos^4(a) = \frac{1}{8}(\cos(4a) + 4\cos(2a) + 3)$

9.2 Ableitungsregeln

Produktregel	$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$
Kettenregel	$g(f(x))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$

9.3 Ableitungen

Funktion $f(x)$	Ableitung $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$
1	0
0	0
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
x^a	$a\cdot x^{a-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Funktion $f(x)$	Ableitung $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$\ln(a)\cdot a^x$