

Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zraggen

Autoren:

Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:

0.1.20240705

<https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen>



Inhaltsverzeichnis

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren	2	6 Integration	6
1.1 Dimensionen	2	6.1 Allgemeines	6
1.2 Schnitte	2	6.2 Normalbereiche	6
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...	2	6.3 Satz von Fubini (Satz von Tonelli)	6
2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variät)	3	6.4 Jacobi Matrix und Determinante	6
2.1 Partielle Ableitung	3	6.5 Erster Metrischer Tensor	6
2.2 Gradient (Nabla-Operator)	3	6.6 Längenintegrale	7
2.3 Totale Ableitung	3	6.7 (Ober-)Flächenintegrale	7
2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)	3	6.8 Volumenintegrale	7
2.5 DGL	3	6.9 Anwendungsformeln 2D (Doppelintegrale)	7
2.6 Richtungselement (Tangentiellinie an Kontouren)	3	6.10 Anwendungsformeln 3D (Dreifachintegrale)	7
2.7 Gradientenfeld \perp Kontouren	3	7 Vektoranalysis	8
2.8 Taylor Approximation 2. Ordnung	3	7.1 Vektorfelder	8
2.9 Richtungs-Ableitung	3	7.2 Gradient	8
3 Extrema von Funktionen finden	4	7.3 Vektorgradient	8
3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden	4	7.4 Divergenz (Volumenableitung)	8
3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden	4	7.5 Laplace Operator Delta	8
3.3 Lokales oder Globales Extremum	4	7.6 Rotation eines Vektorfelds (rot, curl)	8
3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden	4	7.7 Rechenregeln mit Nabla	9
3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden	4	8 Anwendungen	9
4 Support Vector Machine (SVM)	5	8.1 Integralsatz von Gauss	9
4.1 Linear Trennbare Daten	5	8.2 Integralsatz von Stokes	9
4.2 Nicht linear Trennbare Daten	5	8.3 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)	9
5 Koordinatensysteme	6	8.4 Prinzip von d'Alambert	9
5.1 2D Koordinatensysteme	6	8.5 Maxwell-Gleichungen	9
5.2 3D Koordinatensysteme	6	9 Anhang	10
		9.1 Trigonometrie	10
		9.2 Ableitungsregeln	10
		9.3 Ableitungen	10

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f: \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^n)$$

- m Anzahl Dimensionen von \mathbb{D}_f , wobei $m \in \mathbb{N}$
- n Anzahl Dimensionen von \mathbb{W}_f , wobei $n \in \mathbb{N}$
- \vec{f} wenn Output vektoriell

⚠ Variablen sind abhängig von einander!

Multi-Variat:

f ist "Multi-Variat", wenn:

- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

f ist **nicht** "Multi-Variat", wenn:

- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

$$\left. \begin{array}{l} \text{Raum 3D } (x; y; z) \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t) \mathbb{R}^1 \end{array} \right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t; x; y; z)$$

1.1.2 Stationärer Fall

$$t \rightarrow \infty \rightarrow \text{Stationär}$$

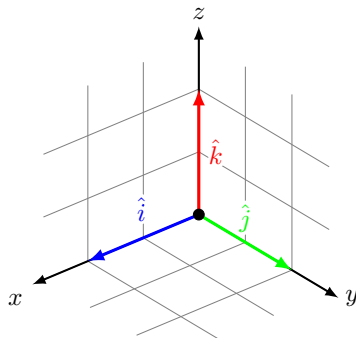
$$T(x; y; z) \frac{\Delta T}{\Delta t} \rightarrow 0$$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion \rightarrow Teilmenge vom Definitionsbereich \mathbb{D}_f

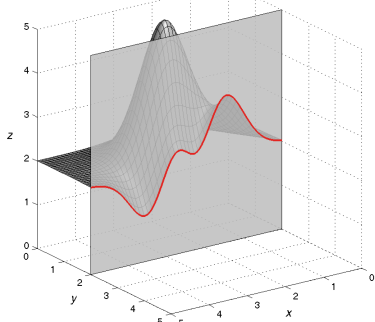
1.2.1 Partielle Funktion

- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
 - **Alle** anderen Variablen sind fix!
- ⚠ \mathbb{W}_f Analyse!

Beispiel: Schnitte

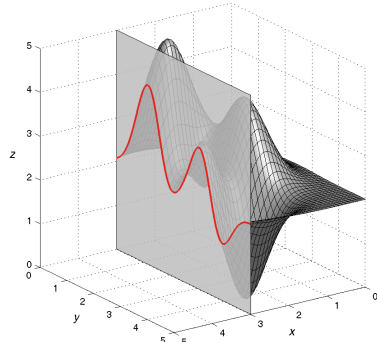
x-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y_0; f(x; y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow y_0 = 2$



y-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt.
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x_0; y; f(x_0; y))$
- x-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel



1.2.2 Bedingungen

- Initialbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf die **Zeit**
- Randbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...

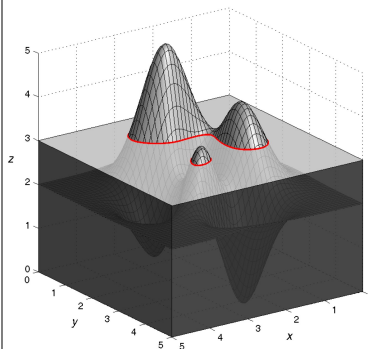
Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion f **konstant**.

$$\vec{v} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \in \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)

- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y; f(x; y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow z_0 = 3$



2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variät)

f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

f(x,y) : y fixieren = const. = y_0; \quad x \text{ **einzig**e freie Variable}

Notationen

1. Ordnung: f(x; y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x; y_0)

2. Ordnung: \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}

\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

"Gradient" / Nabla \longrightarrow \overset{\text{Kartesisch}}{\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}}

\overset{\text{Zylindrisch}}{\nabla f(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}}

\overset{\text{Sphärisch}}{\nabla f(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix}}

2.3 Totale Ableitung

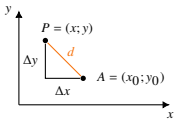
Für Fehlerrechnung benützt, da man hierbei die Abstände von (x; y; z) zu einem festen Punkt (x_0; y_0; z_0) erhält. (relative Koordinaten)

D(f; \underbrace{(x_0, y_0, \dots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{1 \times 2 \text{ Matrix}} \mathbb{R}^1; \text{ "gute Approximation"}

f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \dots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + f(x_0; y_0) + R_1

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als d")}



D(f; (x_0; y_0)) = \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \right)

= (\nabla f)^tr \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei A}

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y

2.4.1 Tangentialebene

g(x; y) = f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}

g(x; y) = f(x_0; y_0) + f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

df \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{bezüglich } A = (x_0; y_0)

2.4.3 Differential-Trick (d f Trick)

Auf Kontouren sei df = 0 (Kontourlinien). Daher lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

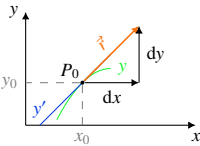
f = c = \text{const.} \quad | d(\dots)

df = dc \stackrel{!}{=} 0

Bzw. für Kontourlinien: f_x dx + f_y dy = 0

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{dx}{dy} = -\frac{f_y}{f_x \neq 0}



2.5 DGL

y' = \left(-\frac{f_x}{f_y} \right); y(x_0) = y_0

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

\vec{r} = \left(dx = h; dy = y' dx = -\frac{f_x}{f_y} dx \right)^tr

2.7 Gradientenfeld \perp Kontouren

Skalarprodukt \longrightarrow \nabla f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy = y' dx \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0

2.8 Taylor Approximation 2. Ordnung

Man erinnert sich an die Taylorreihe

f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (\Delta x)^n

in einer dimension.

Für höhere Dimensionen kann die Taylorreihe 2. Ordnung mit dem Nabla-Operator und der Hess Matrix als

f(x, y, \dots) \approx f(x_0, y_0, \dots) + \nabla f(x_0, y_0, \dots) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \vdots \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y & \dots \end{pmatrix} \vec{H} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \vdots \end{pmatrix}

geschrieben werden.

2.9 Richtungs-Ableitung

\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \stackrel{!}{=} D(f; (x_0; y_0)) \cdot \hat{v} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \text{grad}(f)^tr \cdot \hat{v} = f_x \cdot v_1 + f_y \cdot v_2

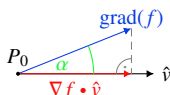
Beispiel: Richtungs-Ableitung

\vec{x} : \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_1} = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 = \underline{f_x}

2.9.1 Spezialfälle

- \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{rechter Winkel}
- \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \text{ extremal}
- \alpha = 0 (\text{max}): \nabla f \cdot \hat{v} > 0 \Rightarrow \text{grad}(f) \text{ liegt auf } \hat{v}
- \alpha = \pi (\text{min}): \nabla f \cdot \hat{v} < 0 \Rightarrow \text{grad}(f) \text{ liegt invers auf } \hat{v}

Trigo: \nabla f \cdot \hat{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \Rightarrow \cos(\alpha) \cdot |\nabla f|



3 Extrema von Funktionen finden

Stationaritätsbedingung: ∇f $\stackrel{!}{=}$ $\vec{0}$

3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇f = $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$f_{xx} = \dots \quad f_{xy} = f_{yx} = \dots \quad f_{yy} = \dots$

3. Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:

Δ = $f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - (f_{xy}(x_0; y_0))^2$

4. Auswertung:

Δ > 0	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) < 0$	⇒	lokales Maximum
Δ > 0	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) < 0$	⇒	lokales Maximum
Δ > 0	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) > 0$	⇒	lokales Minimum
Δ > 0	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) > 0$	⇒	lokales Minimum
Δ < 0			⇒	Sattelpunkt
Δ = 0		?		Multi-variate-Taylor-logik ...

3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇f = $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:

H = $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \dots & f_{xt} \\ f_{yx} & f_{yy} & \dots & f_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx} & f_{ty} & \dots & f_{tt} \end{pmatrix}$
 • Symmetrien beachten!
 • Nicht doppelt rechnen!
 ⇒ $f_{xt} = f_{tx}$

3. Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen fllen:

H(x₀, y₀, ... t₀) = $\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{xy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots t_0) \end{pmatrix}$

4. Eigenwerte λ_i der Hesse-Matrix bestimmen:

det (H(x₀, y₀, ... t₀) - λ · E) = 0
Nullstellen λ_i finden → Eigenwerte

Zur Erinnerung:

E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$

H(x₀, y₀, ... t₀) - λ · E = ...
... = $\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda & f_{xy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda \end{pmatrix}$

5. Auswertung:

λ _i < 0 $\forall i$	⇒	lokales Maximum
λ _i > 0 $\forall i$	⇒	lokales Minimum
λ _i > 0 und λ _i < 0	⇒	Sattelpunkt

Erklärung:

- λ_i < 0 $\forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind negativ
- λ_i > 0 $\forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind positiv

3.3 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion f(x, y, ... , t) gilt:

$f(x, y, \dots, t) \leq M_{\max}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) > M_{\max}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) \geq M_{\min}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Minimum
$f(x, y, \dots, t) < M_{\min}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Minimum

M_{max}: grösstes lokales Maximum
M_{min}: kleinstes lokales Minimum

3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: $n(x, y) \stackrel{!}{=} 0$
 Nebenbedingung: $x + y = 1$
 Standardform der Nebenbedingung: $x + y - 1 = 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

L(x, y, λ) = f(x, y) + λ · n(x, y)
 Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇L = $\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$L_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0 \quad L_{\lambda x} = L_{x\lambda} = n_x = \dots$
 $L_{xx} = \dots \quad L_{\lambda y} = L_{y\lambda} = n_y = \dots$
 $L_{yy} = \dots \quad L_{xy} = L_{yx} = \dots$

5. Gernderte Hesse Matrix \bar{H} aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

$\bar{H}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} L_{\lambda\lambda}(x_0, y_0) & L_{\lambda x}(x_0, y_0) & L_{\lambda y}(x_0, y_0) \\ L_{x\lambda}(x_0, y_0) & L_{xx}(x_0, y_0) & L_{xy}(x_0, y_0) \\ L_{y\lambda}(x_0, y_0) & L_{yx}(x_0, y_0) & L_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 0 & n_x(x_0, y_0) & n_y(x_0, y_0) \\ n_x(x_0, y_0) & L_{xx}(x_0, y_0) & L_{xy}(x_0, y_0) \\ n_y(x_0, y_0) & L_{yx}(x_0, y_0) & L_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

det (\bar{H}) = ...

7. Auswertung

det (\bar{H}) > 0	⇒	lokales Maximum
det (\bar{H}) < 0	⇒	lokales Minimum
det (\bar{H}) = 0	⇒	keine Aussage möglich

3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: $n(x, y, \dots, t) \stackrel{!}{=} 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

L(x, y, ..., t, λ) = f(x, y, ..., t) + λ · n(x, y, ..., t)
 Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇L = $\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ \vdots \\ L_t \\ L_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$L_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0 \quad L_{\lambda x} = L_{x\lambda} = n_x = \dots \quad L_{xy} = L_{yx}$
 $L_{xx} = \dots \quad L_{\lambda y} = L_{y\lambda} = n_y = \dots \quad L_{xt} = L_{tx}$
 $L_{yy} = \dots \quad \vdots \quad L_{yt} = L_{ty}$
 $\vdots \quad L_{\lambda t} = L_{t\lambda} = n_t = \dots \quad \vdots$
 $L_{tt} = \dots$

5. Gernderte Hesse Matrix \bar{H} aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

$\bar{H}(x_0, y_0, \dots t_0) = \begin{pmatrix} L_{\lambda\lambda}(\dots) & L_{\lambda x}(\dots) & L_{\lambda y}(\dots) & \dots & L_{\lambda t}(\dots) \\ L_{x\lambda}(\dots) & L_{xx}(\dots) & L_{xy}(\dots) & \dots & L_{xt}(\dots) \\ L_{y\lambda}(\dots) & L_{yx}(\dots) & L_{yy}(\dots) & \dots & L_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{t\lambda}(\dots) & L_{tx}(\dots) & L_{ty}(\dots) & \dots & L_{tt}(\dots) \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 0 & n_x(\dots) & n_y(\dots) & \dots & n_t(\dots) \\ n_x(\dots) & L_{xx}(\dots) & L_{xy}(\dots) & \dots & L_{xt}(\dots) \\ n_y(\dots) & L_{yx}(\dots) & L_{yy}(\dots) & \dots & L_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_t(\dots) & L_{tx}(\dots) & L_{ty}(\dots) & \dots & L_{tt}(\dots) \end{pmatrix}$

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

det (\bar{H}) = ...

7. Auswertung

det (\bar{H}) > 0	⇒	lokales Maximum
det (\bar{H}) < 0	⇒	lokales Minimum
det (\bar{H}) = 0	⇒	keine Aussage möglich

5

5 Koordinatensysteme

5.1 2D Koordinatensysteme

Neben den Kartesischen Koordinatensystemen kommen in zweidimensionalen Räumen auch Polare Koordinatensysteme zum Einsatz. Die beiden Systeme können mit Hilfe der Trigonometrie in einander überführt werden.

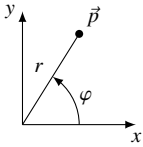
5.1.1 Umrechnung Kartesisch ↔ Polar

Polar zu Kartesisch

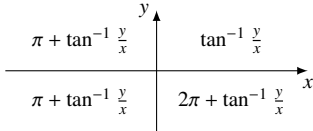
Kartesisch zu Polar

(x, y) = (r · cos φ, r · sin φ)

(r, φ) = (sqrt(x^2 + y^2), tan^-1(y/x))



Dabei ist zu beachten, dass tan^-1 nur Werte von -π/2 bis π/2 liefert, für φ jedoch φ ∈ [0, π] gelten soll. φ wird also, je nach dem in welchem Quadranten sich P befindet, nach folgendem Schema berechnet:



Um ein ganzes Integral vom einen Koordinatensystem ins andere zu überführen, muss man die Funktion f(x, y) zu f(r, φ) (oder umgekehrt) umschreiben, sowie die differentiale angepasst werden. Hier dafür einige gängige Elemente:

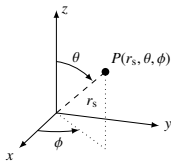
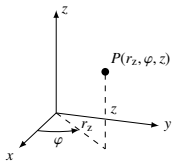
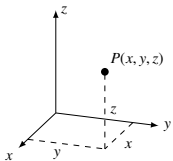
x-Achsenelement	dx	dx = cos φ dr - r sin φ dφ
y-Achsenelement	dy	dy = sin φ dr + r cos φ dφ
Linielement	ds^2 = dx^2 + dy^2	ds^2 = dr^2 + r^2 dφ^2
Flächenelement	dA = dx dy	dA = r dr dφ

5.2 3D Koordinatensysteme

Kartesisch

Zylindrisch

Sphärisch



(x, y, z) = (r cos φ, r sin φ, z) = (r sin θ cos φ, r sin θ sin φ, r cos θ)
(r_z, φ, z) = (sqrt(x^2 + y^2), tan^-1(y/x), z) = (r_s sin θ, φ, r_s cos θ)
(r_s, θ, φ) = (sqrt(x^2 + y^2 + z^2), cos^-1(z/sqrt(x^2 + y^2 + z^2)), tan^-1(y/x)) = (sqrt(r_z^2 + z^2), tan^-1(r_z/z), φ)

5.2.1 Umrechnen zwischen Koordinatensystemen

Beim Umrechnen zwischen den Koordinatensystemen gelten im Grunde genommen die obigen Formeln. Dabei muss jedoch in einigen Fällen auf die Wertebereiche von den trigonometrischen Funktionen Rücksicht genommen werden.

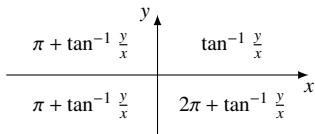
Zylindrisch → Kartesisch:

Sphärisch → Kartesisch:

Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Kartesisch → Zylindrisch:

Der Parameter φ wird analog zum zweidimensionalen Fall, je nach dem in welchem Quadranten sich P befindet, nach dem Schema rechts berechnet.



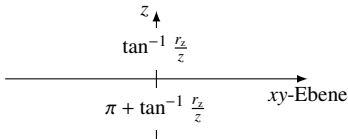
Sphärisch → Zylindrisch:

Kartesisch → Sphärisch:

Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Zylindrisch → Sphärisch:

Auch hier macht der tan^-1 Probleme, da er Werte von -π/2 bis π/2 liefert, für θ jedoch θ ∈ [0, π] gelten soll. Je nach dem, ob P sich oberhalb oder unterhalb der xy-Ebene befindet, wird θ wie rechts berechnet.



6 Integration

6.1 Allgemeines

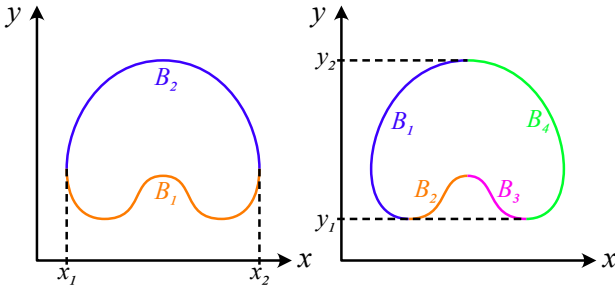
Unter bi- oder multivariater Integration versteht man Integrale, welche sich über zwei oder mehr unabhängige Variablen erstrecken. Sie haben die Form:

integrate(f(omega), omega)

6.2 Normalbereiche

Unter einem Normalbereich versteht man einen Bereich, welcher in allen Dimensionen so begrenzt ist, dass eine Funktion f(x_1, x_2, ..., x_n) für jeden Eingangsvektor jeweils nur einen Funktionswert zurückgibt.

Beispiel: Normalbereich in 2D



6.3 Satz von Fubini (Satz von Tonelli)

Der Satz von Fubini besagt, dass die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden kann, sofern die Funktion integrierbar ist.

integrate(integrate(f(x,y), x), y)

6.4 Jacobi Matrix und Determinante

Die Jacobi-Matrix besteht aus den partiellen Ableitungen eines Vektorfelds nach den Parametern.

J_f = [partial f / partial x_1, partial f / partial x_2, ..., partial f / partial x_n]

Anhand der Jacobi-Matrix kann die Längen- und Flächenänderung bei einer Transformation berechnet werden.

6.4.1 Längenverzerrung

Die Längenverzerrung in eine Richtung x_k ist definiert als: |partial f / partial x_k| = |k. Spalte von J|

6.4.2 Elementverzerrung (Flächen- / Volumenverzerrung)

Die Elementverzerrung ist definiert als: dV' = |det J| · dV

6.4.3 Längenelement

Ein Längenelement lässt sich ebenfalls aus der Jacobi Matrix berechnen:

dx^2 = dx · dx = (di)^tr · (J^tr · J) · (di)

6.5 Erster Metrischer Tensor

Der 1. metrische Tensor (oder auch **erste Fundamentalmatrix**, **erste Fundamentalfarm**, **metrische Grundform**) beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Kurve oder Fläche im Parameterraum zum Raum, in dem sie sich befindet (z.B. 2D-Fläche im 3D-Raum). Er besteht aus den Skalarprodukten der partiellen Ableitungsvektoren nach den Parametern.

g_ij = partial S / partial u_i · partial S / partial u_j = J^tr · J

Folglich ergibt sich die Matrix: (E F; F G) = (g_11 g_12; g_21 g_22)

Die Einträge dieser Matrix werden benötigt, um Längen- oder Flächen(elemente) zu berechnen. Anhand der Einträge kann auch ausgesagt werden, ob eine Längen, Flächen und/oder Winkelerhaltung vorliegt:

Längenerhaltung

Flächenerhaltung

Winkelerhaltung

g_ij = I = (1 0; 0 1)

det(g_ij) = 1

Diagonale 1. Fundamentalfarm: (g_11 = g_22) ∧ (g_12 = g_21 = 0)

Beispiel: Längenberechnung

Gegeben: Flächenkurve als $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

Totales Differential bilden:

ds^2 = \dot{\vec{x}} = \vec{x}_u \cdot \dot{u} + \vec{x}_v \cdot \dot{v}

Für Längenelement Pythagoras anwenden:

(\vec{x})^2 = g_{11} \dot{u}^2 + 2g_{12} \dot{u} \dot{v} + g_{22} \dot{v}^2

Das einzelne Längenelement ist somit:

ds = \sqrt{g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2}

ds integrieren, für Gesamtlänge:

s = \int_a^b \sqrt{g_{11} \dot{u}^2 + 2g_{12} \dot{u} \dot{v} + g_{22} \dot{v}^2} dt

Beispiel: Flächenberechnung

Es sei eine parametrisierte Fläche als Funktion \vec{S}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} gegeben. Das Flächen-

element lässt sich aus einem Parallelogramm der beiden partiellen Ableitungsvektoren bilden, was dem Betrag des Kreuzproduktes bzw. der Determinante entspricht:

dS = \sqrt{|\det [g_{ij}]|} du dv = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv = \left| \frac{\partial \vec{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial v} \right| du dv

Daraus ergibt sich die Fläche über das Doppelintegral:

S = \iint_{v_1 u_1}^{v_2 u_2} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv

6.6 Längenintegrale

6.6.1 Längenelemente

ds^2 = \underbrace{dx^2 + dy^2 + dz^2}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}_{\text{Sphärisch}}

6.6.2 Kurvenintegrale 1. Art: Länge einer Funktion

Die Bestimmung der Länge einer Kurve kann in folgende Schritte unterteilt werden:

- 1. Funktion in die Parameterdarstellung überführen (sofern nicht gegeben):
Dafür wird einer der Parameter (z.B. x oder \theta) = t gesetzt und die anderen Parameter ebenfalls als Funktion von t ausgedrückt.
- 2. Integral aufstellen:
Das Integral in der Form \iint ds wird mit \frac{dt}{dt} erweitert.
- 3. Das Integral lösen

Beispiel: Längenintegral in kartesischen Koordinaten

Es soll die Länge der Kurve \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} auf dem Intervall [t_1, t_2] bestimmt werden. Dazu

werden die oben genannten Schritte abgearbeitet:

- 1. Funktion in die Parameterdarstellung überführen
Hier nicht nötig.
- 2. Integral aufstellen

\iint ds = \iint \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt

- 3. Integral lösen
 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ ausrechnen, einsetzen, integrieren.

6.6.3 Kurvenintegral 2. Art

Beim Kurvenintegral 2. Art wird nicht die tatsächliche Länge einer Funktion, sondern die Länge deren Projektion auf eine Achse bestimmt. Dazu wird stat über alle Koordinatenrichtungen nur über eine der Koordinaten integriert. Es folgen einige Paare von Kurvenintegralen 2. Art entlang einer Kontur K für Funktionen in expliziter Form und in Parameterdarstellung.

2D, Projektion auf x:

\int_K f(x) dx = \int_{t_0}^T \vec{f}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) \cdot dt

3D, Projektion auf x:

\int_K f(x, y) dx = \int_{t_0}^T \vec{f}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) \cdot dt

6.7 (Ober-)Flächenintegrale

6.7.1 Flächenelemente

Das Bestimmen der Flächenelemente ist in drei Dimensionen nicht wie bei den Längen- und Volumenelementen pauschal möglich. Dies, da jeweils nur über zwei der drei Koordinaten integriert werden muss. Ein einfaches Verfahren für das Berechnen von Flächeninhalten schafft jedoch abhilfe.

6.7.2 Flächeninhalt einer Oberfläche

Für das Berechnen der Oberflächen von Funktionen des Typs f(a, b) in 3D kann die Formel

S = \int_B \int_A \sqrt{(f_a)^2 + (f_b)^2 + 1} da db

verwendet werden. Dabei repräsentieren a und b die beiden Koordinatenrichtungen, in denen sich die Fläche erstreckt. f_a und f_b sind die partiellen Ableitungen der Funktion f(a, b) nach a bzw. b.

Beispiele zur Veranschaulichung:

Es soll die Oberfläche der Funktion f(x, y) im Bereich x \in [x_1, x_2], y \in [y_1, y_2] bestimmt werden. Das entsprechende Integral lautet:

S = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} dx dy

6.7.3 Allgemeine Wendelfläche

Die allgemeine Wendelfläche rotiert und verschiebt eine parametrisierte 3D Kurve \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) tr im Raum.

Parametrisierung bei vertikaler Rotationsachse und vertikaler Verschiebungsrichtung (z-Achse):

\vec{S}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ z(t) + c \cdot \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (t_1 \leq t \leq t_2, \wedge \varphi \in \mathbb{R}, c \equiv const.)

Bei c = 1 \Rightarrow Voller Meter bei einer Kurve

6.8 Volumenintegrale

6.8.1 Volumenelemente

dV = \underbrace{dx dy dz}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{r dr d\varphi dz}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}_{\text{Sphärisch}}

6.9 Anwendungsformeln 2D (Doppelintegrale)

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
Flächeninhalt einer ebenen Figur F		
A = \iint_F dF	= \int_X \int_Y dy dx	= \int_\Phi \int_R r dr d\varphi
Oberfläche einer Ebene in drei Dimensionen		
S = \iint_A \frac{1}{\cos \gamma} dA	= \int_X \int_Y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy dx	= \int_\Phi \int_R \sqrt{r^2 + r^2 \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} dr d\varphi
Volumen eines Zylinders		
V = \iint_A z dA	= \int_X \int_Y z dy dx	= \int_\Phi \int_R z r dr d\varphi
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf die x-Achse		
I_x = \iint_F y^2 dF	= \int_X \int_Y (y^2) dy dx	= \int_\Phi \int_R (r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf den Pol (0, 0)		
I_x = \iint_F r^2 dF	= \int_X \int_Y (x^2 + y^2) dy dx	= \int_\Phi \int_R (r^2) r dr d\varphi
Masse einer ebenen Figur F mit Dichtefunktion \varrho		
m = \iint_F \varrho dF	= \int_X \int_Y \varrho(x, y) dy dx	= \int_\Phi \int_R \varrho(r, \varphi) r dr d\varphi
Koordinaten des Schwerpunkts S einer homogenen, ebenen Figur F		
x_S = \frac{\iint_F x dF}{A}	= \frac{\int_X \int_Y x dy dx}{\int_X \int_Y dy dx}	= \frac{\int_\Phi \int_R r^2 \cos \varphi dr d\varphi}{\int_\Phi \int_R r dr d\varphi}
y_S = \frac{\iint_F y dF}{A}	= \frac{\int_X \int_Y y dy dx}{\int_X \int_Y dy dx}	= \frac{\int_\Phi \int_R r^2 \sin \varphi dr d\varphi}{\int_\Phi \int_R r dr d\varphi}

Hinweis: Damit die Flächenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziehbar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

6.10 Anwendungsformeln 3D (Dreifachintegrale)

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
Oberfläche eines Körpers K (Senkrecht zu \hat{a}_r)			
S = \iint_K dS	Siehe metrischer Tensor	= \iint r d\varphi dz	= \iint r^2 \sin \theta d\theta d\phi
Volumen eines Körpers K			
V = \iiint_K dV	= \iiint dx dy dz	= \iiint r dr d\varphi dz	= \iiint r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr
Trägheitsmoment eines Körpers K, bezogen auf die Z-Achse			
I_z = \iiint_K r^2 dV	= \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz	= \iiint (r^2) r dr d\varphi dz	= \iiint (r^2 \sin^2 \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr
Masse eines Körpers K mit der Dichtefunktion \varrho			
M = \iiint_K \varrho dV	= \iiint \varrho(x, y, z) dx dy dz	= \iiint \varrho(r, \varphi, z) r dr d\varphi dz	= \iiint \varrho(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr
Koordinaten des Schwerpunktes S eines homogenen Körpers K			
x_S = \frac{\iiint_K x dV}{V}	= \frac{\iiint (x) dx dy dz}{V}	= \frac{\iiint (r \cos \varphi) r dr d\varphi dz}{V}	= \frac{\iiint (r \sin \theta \cos \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}{V}
y_S = \frac{\iiint_K y dV}{V}	= \frac{\iiint (y) dx dy dz}{V}	= \frac{\iiint (r \sin \varphi) r dr d\varphi dz}{V}	= \frac{\iiint (r \sin \theta \sin \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}{V}
z_S = \frac{\iiint_K z dV}{V}	= \frac{\iiint (z) dx dy dz}{V}	= \frac{\iiint (z) r dr d\varphi dz}{V}	= \frac{\iiint (r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}{V}

Hinweis: Damit die Volumenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziehbar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

7 Vektoranalysis

7.1 Vektorfelder

Das Vektorfeld

$\vec{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

weist jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ zu. Die Notation eines Vektorfelds ist gleich der eines Vektors, wobei Vektorfelder üblicherweise gross geschrieben werden. Weiter kann auch $\vec{V}(\vec{x})$ geschrieben werden, wobei \vec{x} der Stützvektor eines beliebigen Punktes ist.

7.2 Gradient

Wir erinnern uns an den Nabla- oder Del-Operator aus Kapitel 2.2 als Spaltenvektor der verschiedenen Raumableitungen:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T$$

Der Gradient eines Potentialfelds $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ berechnet sich als

$$\nabla \cdot \phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T \cdot \phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}^T = \vec{F}(\vec{x})$$

und resultiert in einem Vektorfeld.

- Wird als Potential das elektrische Potential verwendet, entspricht \vec{F} dem (negativen, skalierten) elektrischen Feld.
- Wird als Potential eine Höhe verwendet, entspricht \vec{F} der negativen Hangabtriebskraft.
- Der Gradient kann als mehrdimensionale Ableitung verstanden werden.
- Der Gradient steht senkrecht auf allen Kontouren und zeigt in Richtung hoher Werte.
- Die Multiplikation $\nabla \cdot \phi$ wird normalerweise als $\nabla \phi$ abgekürzt.
- Zudem kann der Gradient auch als $\text{grad } \phi$ geschrieben werden.

7.2.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

$$\text{grad } V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Zylindrisch:

$$\text{grad } V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Sphärisch:

$$\text{grad } V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

7.3 Vektorgradient

Die Definition des Gradienten eines Vektorfeldes $\vec{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lautet

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{a}} = \vec{a} \cdot \text{grad } \vec{V},$$

wobei \vec{a} ein beliebiger Vektor und $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{a}}$ die Richtungsableitung von \vec{V} nach \vec{a} ist. Daraus kann man schließen, dass der Vektorgradient als

$$\text{grad } \vec{V} = \nabla \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \quad (= \nabla^T \cdot \vec{V})$$

berechnet werden kann.

- $\nabla \vec{V}$ entspricht der Jacobi-Matrix \mathbf{J} . Mit dieser kann die Hesse-Matrix einer skalaren Funktion F (siehe Kap. 3) bestimmt werden:

$$\mathbf{H}(F) = \mathbf{J}^T (\nabla F) = (\text{grad grad } F)^T$$

- Der Vektorgradient wird als $\nabla \vec{V}$ geschrieben, da die Notation $\nabla^T \cdot \vec{V}$, die den tatsächlichen Rechenweg beschreibt, etwas umständlich ist.
- Die Notation $\nabla \cdot \vec{V}$ ist nicht nur falsch, sondern zudem bereits durch die Divergenz besetzt.

7.4 Divergenz (Volumenableitung)

Die Divergenz oder Volumenableitung eines Vektorfelds

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V}(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) & v_2(\vec{x}) & \cdots & v_n(\vec{x}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{aligned}$$

ist ein Skalarfeld, das beschreibt, wie stark das Vektorfeld an einem gegebenen Punkt “nach aussen gerichtet” ist.

- Wird als Vektorfeld die Fließgeschwindigkeit einer Flüssigkeit eingesetzt, so entspricht die Divergenz dem Fluss aus einem Punkt heraus.
 - An Punkten mit positiver Divergenz fließt Flüssigkeit hinaus (Quelle)

- An Punkten mit negativer Divergenz fließt Flüssigkeit hinein (Senke)
- Wird das E-Feld eingesetzt, so entspricht die Divergenz der Ladungsdichte.
 - Pos. Ladungsdichte entspricht pos. Divergenz, bewirkt eine Quelle im E-Feld.
 - Neg. Ladungsdichte entspricht neg. Divergenz, bewirkt eine Senke im E-Feld.
- Das Skalarprodukt sollte zwingend $\nabla \cdot \vec{V}$ ausgeschrieben werden, da sonst Verwechslungsgefahr mit dem Vektorgradienten besteht.
- Die Notation $\text{div } \vec{V}$ ist ebenfalls gebräuchlich.

Eine alternative und gut visualisierbare Definition der Divergenz, ist in zwei Dimensionen

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint_{C=\partial A} \vec{V} \cdot \hat{n} \, ds}{A},$$

wobei A eine Fläche mit den Normalen \hat{n} und C dessen Kontur darstellt.

Verallgemeinert für die Anwendung in mehr als 2 Dimensionen lautet die Definition

$$\nabla \cdot \vec{V} = \text{div } \vec{V} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\oint_{C=\partial \Omega} \vec{V} \cdot \hat{n} \, ds}{\Omega},$$

wobei Ω ein Bereich im Raum \mathbb{R}^n und C dessen Kontur in \mathbb{R}^{n-1} ist.

7.4.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Zylindrisch:

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Sphärisch:

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \cdot V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$$

7.5 Laplace Operator Δ

Der Laplaceoperator ist nichts anderes als die Divergenz des Gradienten eines Skalarfelds und vergleichbar mit der zweiten Ableitung. Folglich gilt

$$\Delta V(x_1 \dots x_n) = \nabla \cdot (\nabla V(x_1 \dots x_n)) = \nabla^2 V(x_1 \dots x_n) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2},$$

wobei das Resultat ein Skalarfeld ist.

7.5.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

$$\Delta V(x, y, z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Zylindrisch:

$$\Delta V(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

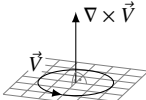
Sphärisch:

$$\Delta V(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

7.6 Rotation eines Vektorfelds (rot, curl)

Die Rotation eines Vektorfelds, auch Curl genannt, beschreibt, wie stark ein Vektorfeld um einen gegebenen Punkt “rotiert” und wird als

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$



berechnet. Der resultierende Vektor ist dabei die Rotationsachse, wobei die Rechte-Hand-Regel gilt.

Wie bei der Divergenz kann auch hier zur Hilfe der Verständlichkeit ein Limitsatz als Definition beigezogen werden. So sei

$$\nabla \times \vec{V} = \text{rot } \vec{V} = \hat{n} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{C=\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{l}}{S},$$

wobei S ein planare Testfläche mit normale \hat{n} und C dessen Kontur ist.

Der Curl ist grundsätzlich nur in drei Raumdimensionen definiert. Wenn die Rotation eines auf der Ebene $z = 0$ definierten Vektorfelds berechnet werden soll, kann die obige Formel mit $V_z = 0$ angepasst werden:

$$\text{rot } \vec{V}(x, y) = \nabla \times \vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Mit dem Curl-Operator kann z.B. elegant beschrieben werden, dass Wirbel im E-Feld auf zeitliche Änderungen im magnetischen Feld zurückzuführen sind:
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

7.6.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

rot V = nabla x V = (dV_z/dy - dV_y/dz, dV_x/dz - dV_z/dx, dV_y/dx - dV_x/dy)

Zylindrisch:

rot V = nabla x V = (1/r * (dV_z/dphi - dV_phi/dz), dV_r/dz - dV_z/dr, 1/r * (d(r * V_phi)/dr - dV_r/dphi))

Sphärisch:

rot V = nabla x V = (1/(r sin theta) * (d(V_phi * sin theta)/dtheta - dV_theta/dphi), 1/r * (1/sin theta * dV_z/dphi - d(r * V_phi)/dr), 1/r * (d(r * V_theta)/dr - dV_r/dtheta))

7.7 Rechenregeln mit nabla

Für das dalegen der Rechenregeln werden die folgenden Platzhalter verwendet:

- A, B: Skalarfelder (R^n -> R)
- A, B: Vektorfelder (R^n -> R^n)
- F: Skalare Funktion (R^n -> R)
- c: Konstante

Gradienten:

grad(A + B) = grad(A) + grad(B) <=> nabla(A + B) = nabla A + nabla B
grad(A . B) = A grad(B) + B grad(A) <=> nabla(A . B) = A . nabla B + B . nabla A
grad(c . A) = c grad(A) <=> nabla(c . A) = c . nabla A
grad(F(A)) = F'(A) . grad A <=> nabla F(A) = F'(A) . nabla A

Divergenzen:

div(A + B) = div(A) + div(B) <=> nabla . (A + B) = (nabla . A) + (nabla . B)
div(A . B) = A div(B) + B grad(A) <=> nabla . (A . B) = A . (nabla . B) + B . nabla A
div(A x B) = B . rot(A) - A . rot(B) <=> nabla . (A x B) = B . (nabla x A) - A . (nabla x B)
div(c . A) = c div(A) <=> nabla . (c . A) = c . (nabla . A)

Curl:

rot(A + B) = rot(A) + rot(B) <=> nabla x (A + B) = (nabla x A) + (nabla x B)
rot(A . B) = A rot(B) + (grad(A) x B) <=> nabla x (A . B) = A . (nabla x B) + (nabla A x B)
rot(cA) = c rot(A) <=> nabla x (cA) = c . (nabla x A)
rot(A x B) = (B . nabla)A - (A . nabla)B + A div B - B div A
nabla x (A x B) = (B . nabla)A - (A . nabla)B + A(nabla . B) - B(nabla . A)

Laplaceoperator:

div grad A = Delta A <=> nabla . (nabla A) = Delta A
rot(Delta A) = Delta rot A <=> nabla x (Delta A) = Delta (nabla x A)

Kombinationen:

div rot A = 0 <=> nabla . (nabla x A) = 0
div grad A = Delta A <=> nabla . nabla A = Delta A
rot grad A = 0 <=> nabla x (nabla A) = 0
rot rot A = grad div A - Delta A <=> nabla x (nabla x A) = nabla (nabla . A) - Delta A

8 Anwendungen

8.1 Integralsatz von Gauss

Der Integralsatz von Gauss

oint_{S=partial V} A . n dS = int_V nabla . A dV

beschreibt, dass die aufintegrierte Divergenz in einem Körper gleich dem Fluss durch die Kontur dieses Körpers sein muss. Die Normale n steht dabei senkrecht auf dem Oberflächenelement dS und zeigt nach aussen.

8.1.1 Green'sches Integraltheorem

Das Green'sche Integraltheorem (auch Satz von Green)

oint_{C=partial S} A . n dl = iint_S (dA_y/dx - dA_x/dy) dx dy

ist der zweidimensionale Spezialfall des Integralsatzes von Gauss. Auch hier zeigt die normale n nach aussen.

Green'sche Identität Nr. 1 Wird A = U1 nabla U2 eingesetzt, so resultiert aufgrund der Produktregel

oint_{S=partial V} (U1 nabla U2) . n dS = int_V (U1 nabla U2 + nabla U1 . nabla U2) dV.

Green'sche Identität Nr. 2 Wird A = U1 nabla U2 - U2 nabla U1 eingesetzt, so resultiert

oint_{S=partial V} (U1 nabla U2 - U2 nabla U1) . n dS = int_V (U1 nabla U2 - U2 nabla U1) dV.

Mit U1 = 1 resultiert die etwas handlichere Identität

oint_{S=partial V} (nabla U2) . n dS = int_V (nabla U2) dV.

8.2 Integralsatz von Stokes

Der Integralsatz von Stokes

int_S rot A . n dS = oint_{C=partial S} A . dr

sagt aus, dass durch das Integrieren eines Vektorfelds A entlang der Kontur C einer Fläche S auf die mittleren Verwirbelungen im Innern der Fläche geschlossen werden kann. Die Normale n und die Integrationsrichtung r müssen dabei die Rechte-Hand-Regel erfüllen.

8.3 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

Die Poisson-Gleichung

Delta phi(r) = f(r) oder nabla^2 phi(r) = f(r)

findet in der Physik oft Anwendung. phi beschreibt dabei ein skalares Potentialfeld, f wird Quellenfunktion genannt und r ist ein beliebiger Stützvektor.

8.3.1 Laplace-Gleichung

Die Laplace-Gleichung

Delta phi = f = 0

ist der Spezialfall der Poisson-Gleichung, bei dem keine Quellenfunktion f besteht.

8.4 Prinzip von d'Alembert

Das Prinzip von d'Alembert ist ein Vorgehen zum Lösen von Wellengleichungen. Die eindimensionale Wellengleichung

1/c^2 * d^2 u/dt^2 = d^2 u/dz^2

mit den Initialbedingungen

u(0, z) = f(z) bzw. u(0, z) = f(z) ^ du/dt(0, z) = g(z)

wird gelöst durch

u(t, z) = 1/2 * (f(z+ct) + f(z-ct)) bzw. u(t, z) = 1/2 * (f(z+ct) + f(z-ct)) + 1/2c * int_{z-ct}^{z+ct} g(s) ds.

8.5 Maxwell-Gleichungen

8.5.1 Gauss'sches Gesetz

nabla . E = rho/epsilon_0

8.5.2 Gauss'sches Gesetz des Magnetismus

nabla . B = 0

8.5.3 Induktionsgesetz

nabla x E = - dB/dt

8.5.4 Durchflutungsgesetz

nabla x B = mu_0(J + epsilon_0 dB/dt)

Zusammengesetzt aus dem Ampèreschem Gesetz nabla x B = mu_0 J und Maxwells Erweiterung, der Verschiebungsstromdichte epsilon_0 dB/dt.

9 Anhang

9.1 Trigonometrie

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot(\alpha)$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

9.1.1 Komplexe Darstellung

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

9.1.2 Beziehungen zwischen $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$$\sin(-a) = -\sin(a)$$
$$\sin(\pi - a) = \sin(a)$$
$$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$$

$$\cos(-a) = \cos(a)$$
$$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$$
$$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$$

9.1.3 Additionstheoreme

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$$
$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$$
$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

9.1.4 Produkte

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$$
$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$$
$$\sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a - b) + \sin(a + b))$$

9.1.5 Summen und Differenzen

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}$$

9.1.6 Winkelvielfache und Halbwinkel

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cdot \cos(a)$$
$$\sin(3a) = 3 \sin(a) - 4 \sin^3(a)$$
$$\sin(4a) = 8 \cos^3(a) \cdot \sin(a) - 4 \cos(a) \cdot \sin(a)$$
$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$
$$\cos(3a) = 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a)$$
$$\cos(4a) = 8 \cos^4(a) - 8 \cos^2(a) + 1$$
$$\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(a))} \qquad \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(a))}$$

9.1.7 Potenzen

$$\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$$
$$\sin^3(a) = \frac{1}{4}(3 \sin(a) - \sin(3a))$$
$$\sin^4(a) = \frac{1}{8}(\cos(4a) - 4 \cos(2a) + 3)$$
$$\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$$
$$\cos^3(a) = \frac{1}{4}(\cos(3a) + 3 \cos(a))$$
$$\cos^4(a) = \frac{1}{8}(\cos(4a) + 4 \cos(2a) + 3)$$

9.2 Ableitungsregeln

Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

Kettenregel

$$g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

9.3 Ableitungen

Funktion $f(x)$	Ableitung $\frac{df(x)}{dx}$	Funktion $f(x)$	Ableitung $\frac{df(x)}{dx}$
1	0	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
x^a	$a \cdot x^{a-1}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	a^x	$\ln(a) \cdot a^x$