

Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zraggen

Autoren:

Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:

0.1.20240630

<https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen>



Inhaltsverzeichnis

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren	2		
1.1 Dimensionen	2		
1.2 Schnitte	2		
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...	2		
2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variät)	3		
2.1 Partielle Ableitung	3		
2.2 Gradient (Nabla-Operator)	3		
2.3 Totale Ableitung	3		
2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)	3		
2.5 DGL	3		
2.6 Richtungselement (Tangentallinie an Kontouren)	3		
2.7 Gradientenfeld \perp Kontouren	3		
2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?	3		
2.9 Richtungs-Ableitung	3		
3 Extrema von Funktionen finden	4		
3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden	4		
3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden	4		
3.3 Lokales oder Globales Extremum	4		
3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden	4		
3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden	4		
4 Support Vector Machine (SVM)	5		
4.1 Lineare Trennbarkeit von Daten	5		
5 Integration (bi-variät)	6		
5.1 Normalbereich	6		
5.2 Zweidimensionale Koordinatensysteme	6		
5.3 2D Transformation Polar zu Kartesisch	6		
5.4 Derivative, Ableitung	6		
5.5 Anwendungsformeln Doppelintegral	6		
6 Integration (multi-variät)	7		
6.1 Dreidimensionale Koordinatensysteme	7		
6.2 Längenintegrale	7		
6.3 Flächenintegrale	7		
6.4 Volumenintegrale	7		
6.5 Anwendungen Trippel-Integrale	7		
7 Differenziation und Integration von Kurven	7		
7.1 Kurvenintegral 1. Art	7		
7.2 Kurvenintegral 2. Art	7		
8 (Ober-)Flächenintegrale	8		
8.1 Allgemeine Wendelfläche	8		
8.2 Freie Fläche	8		
8.3 1. metrischer Tensor	8		
9 Vektoranalysis	8		
9.1 Vektorfelder	8		
9.2 Gradient	8		
9.3 Vektorgradient	8		
9.4 Divergenz	8		
9.5 Laplace Operator Delta	8		
9.6 Rotation eines Vektorfelds (rot, curl)	8		
9.7 Rechenregeln mit Nabla	8		
9.8 Anwendungen	9		
9.9 Integralsatz von Gauss	9		
9.10 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)	9		
9.11 Integralsatz von Stokes	9		
9.12 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen	9		

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f: \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^n)$$

- m Anzahl Dimensionen von \mathbb{D}_f , wobei $m \in \mathbb{N}$
- n Anzahl Dimensionen von \mathbb{W}_f , wobei $n \in \mathbb{N}$
- \vec{f} wenn Output vektoriell

⚠ Variablen sind abhängig von einander!

Multi-Variat:

f ist "Multi-Variat", wenn:

- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

f ist **nicht** "Multi-Variat", wenn:

- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

$$\left. \begin{array}{l} \text{Raum 3D } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t) \in \mathbb{R}^1 \end{array} \right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t; x; y; z)$$

1.1.2 Stationärer Fall

$$t \rightarrow \infty \rightarrow \text{Stationär}$$

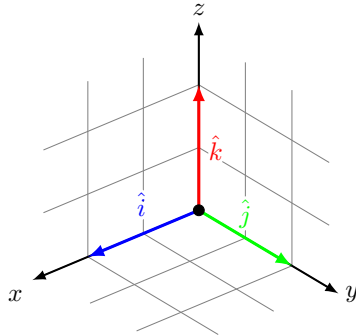
$$T(x; y; z) \frac{\Delta T}{\Delta t} \rightarrow 0$$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion \rightarrow Teilmenge vom Definitionsbereich \mathbb{D}_f

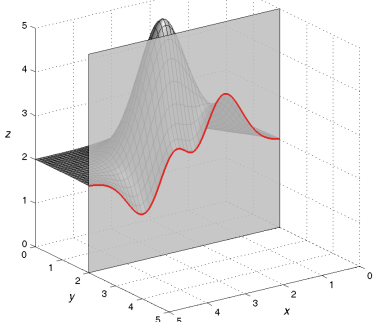
1.2.1 Partielle Funktion

- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
 - **Alle** anderen Variablen sind fix!
- ⚠ \mathbb{W}_f Analyse!

Beispiel: Schnitte

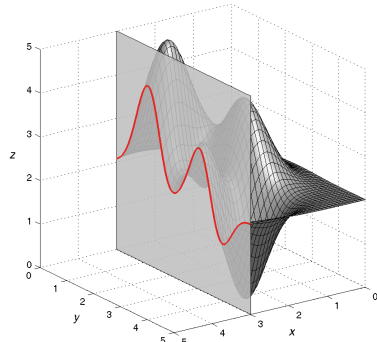
x-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y_0; f(x; y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow y_0 = 2$



y-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x_0; y; f(x_0; y))$
- x-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel



1.2.2 Bedingungen

- Initialbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf die **Zeit**
- Randbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...

Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion f **konstant**.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \in \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)

- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y; f(x; y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow z_0 = 3$



2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat)

$$f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}$$

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x, y): y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \text{ \textbf{einzige} freie Variable}$$

Notationen

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ordnung: } f(x; y_0) &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x; y_0) \\ 2. \text{ Ordnung: } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \end{aligned}$$

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

$$\text{"Gradient" / Nabla} \rightarrow \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}$$

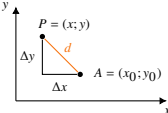
2.3 Totale Ableitung

Für Fehlerrechnung benutzt, da man hierbei die Abstände von $(x; y; z)$ zu einem festen Punkt $(x_0; y_0; z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f; \underbrace{(x_0, y_0, \dots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[1 \times 2 \text{ Matrix}]{\text{gute Approximation}} \mathbb{R}^1; \text{ "gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \dots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + f(x_0; y_0) + R_1$$

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d \text{")}$$


$$\begin{aligned} D(f; (x_0; y_0)) &= \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \right) \\ &= (\nabla f)^{\text{tr}} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A \end{aligned}$$

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

2.4.1 Tangentialebene

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

$$df \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{bezüglich } A = (x_0; y_0)$$

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

$$\left(\begin{array}{l} f = c = \text{const.} \quad | d(\dots) \\ df = dc \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right) \quad f_x dx + f_y dy = 0 \quad \text{für Kontourlinien}$$

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = - \frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{dx}{dy} = - \frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



2.5 DGL

$$y' = \left(- \frac{f_x}{f_y} \right); y(x_0) = y_0$$

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

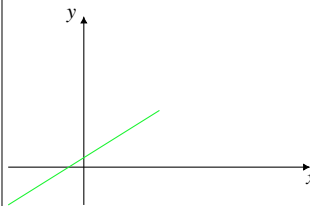
2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

$$\vec{r} = \left(dx = h; dy = y' dx = - \frac{f_x}{f_y} dx \right)^{\text{tr}}$$

2.7 Gradientenfeld \perp Kontouren

$$\text{Skalarprodukt} \rightarrow \nabla f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy = y' dx \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?



$$\begin{aligned} s(t) &: P_0 + t \cdot \hat{v} \mid t \in \mathbb{R} \\ s(t) &: f(x_0 + t \cdot \hat{v}_1; y_0 + t \cdot \hat{v}_2) \end{aligned}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t) : t \mapsto \overbrace{\begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v_1 \\ y_0 + t \cdot v_2 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \mapsto f(x, y)$$

2.9 Richtungs-Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \stackrel{!}{=} D(f; (x_0; y_0)) \cdot \hat{v} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \text{grad}(f)^{\text{tr}} \cdot \hat{v} = f_x \cdot v_1 + f_y \cdot v_2$$

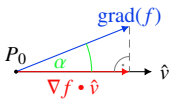
Beispiel: Richtungs-Ableitung

$$\vec{x} : \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_1} = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 = \underline{\underline{f_x}}$$

2.9.1 Spezialfälle

- $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ rechter Winkel
- $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}$ extremal
 - $\alpha = 0$ (max): $\nabla f \cdot \hat{v} > 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$ liegt auf \hat{v}
 - $\alpha = \pi$ (min): $\nabla f \cdot \hat{v} < 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$ liegt invers auf \hat{v}

$$\text{Trigo: } \nabla f \cdot \hat{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \Rightarrow \cos(\alpha) \cdot |\nabla f|$$



3 Extrema von Funktionen finden

Stationaritätsbedingung: ∇f $\stackrel{!}{=}$ $\vec{0}$

3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇f = $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$f_{xx} = \dots \quad f_{xy} = f_{yx} = \dots \quad f_{yy} = \dots$

3. Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:

Δ = $f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - \left(f_{xy}(x_0; y_0)\right)^2$

4. Auswertung:

Δ > 0	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) < 0 \Rightarrow$	lokales Maximum
Δ > 0	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) < 0 \Rightarrow$	lokales Maximum
Δ > 0	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) > 0 \Rightarrow$	lokales Minimum
Δ > 0	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) > 0 \Rightarrow$	lokales Minimum
Δ < 0		\Rightarrow	Sattelpunkt
Δ = 0		?	Multi-variate-Taylor-logik ...

3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇f = $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:

H = $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \dots & f_{xt} \\ f_{yx} & f_{yy} & \dots & f_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx} & f_{ty} & \dots & f_{tt} \end{pmatrix}$
 • Symmetrien beachten!
 • Nicht doppelt rechnen!
 $\Rightarrow f_{xt} = f_{tx}$

3. Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen fllen:

H(x₀, y₀, ... t₀) = $\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{xy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots t_0) \end{pmatrix}$

4. Eigenwerte λ_i der Hesse-Matrix bestimmen:

det(H(x₀, y₀, ... t₀) - λ · E) = 0
Nullstellen λ_i finden → Eigenwerte

Zur Erinnerung:

E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$

H(x₀, y₀, ... t₀) - λ · E = ...

... = $\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda & f_{xy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda \end{pmatrix}$

5. Auswertung:

λ _i < 0 $\forall i \Rightarrow$	lokales Maximum
λ _i > 0 $\forall i \Rightarrow$	lokales Minimum
λ _i > 0 und λ _i < 0 \Rightarrow	Sattelpunkt

Erklärung:

- λ_i < 0 $\forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind negativ
- λ_i > 0 $\forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind positiv

3.3 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion f(x, y, ..., t) gilt:

$f(x, y, \dots, t) \leq M_{\max}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) > M_{\max}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) \geq M_{\min}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Minimum
$f(x, y, \dots, t) < M_{\min}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Minimum

- M_{max}: grssstes lokales Maximum
M_{min}: kleinstes lokales Minimum

3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: $n(x, y) \stackrel{!}{=} 0$ Nebenbedingung: $x + y = 1$
Standardform der Nebenbedingung: $x + y - 1 = 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot n(x, y)$ Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇L = $\begin{pmatrix} \mathcal{L}_x \\ \mathcal{L}_y \\ \mathcal{L}_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$\mathcal{L}_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0$ $\mathcal{L}_{\lambda x} = \mathcal{L}_{x\lambda} = n_x = \dots$
 $\mathcal{L}_{xx} = \dots$ $\mathcal{L}_{\lambda y} = \mathcal{L}_{y\lambda} = n_y = \dots$
 $\mathcal{L}_{yy} = \dots$ $\mathcal{L}_{xy} = \mathcal{L}_{yx} = \dots$

5. Gernderte Hesse Matrix H aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

H(x₀, y₀) = $\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{\lambda x}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{\lambda y}(x_0, y_0) \\ \mathcal{L}_{x\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xy}(x_0, y_0) \\ \mathcal{L}_{y\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$
= $\begin{pmatrix} 0 & n_x(x_0, y_0) & n_y(x_0, y_0) \\ n_x(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xy}(x_0, y_0) \\ n_y(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

det(H) = ...

7. Auswertung

det(H) > 0 \Rightarrow	lokales Maximum
det(H) < 0 \Rightarrow	lokales Minimum
det(H) = 0 \Rightarrow	keine Aussage möglich

3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: $n(x, y, \dots, t) \stackrel{!}{=} 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

$\mathcal{L}(x, y, \dots, t, \lambda) = f(x, y, \dots, t) + \lambda \cdot n(x, y, \dots, t)$ Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇L = $\begin{pmatrix} \mathcal{L}_x \\ \mathcal{L}_y \\ \vdots \\ \mathcal{L}_t \\ \mathcal{L}_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$\mathcal{L}_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0$ $\mathcal{L}_{\lambda x} = \mathcal{L}_{x\lambda} = n_x = \dots$ $\mathcal{L}_{xy} = \mathcal{L}_{yx}$
 $\mathcal{L}_{xx} = \dots$ $\mathcal{L}_{\lambda y} = \mathcal{L}_{y\lambda} = n_y = \dots$ $\mathcal{L}_{xt} = \mathcal{L}_{tx}$
 $\mathcal{L}_{yy} = \dots$ \vdots $\mathcal{L}_{yt} = \mathcal{L}_{ty}$
 \vdots $\mathcal{L}_{\lambda t} = \mathcal{L}_{t\lambda} = n_t = \dots$ \vdots
 $\mathcal{L}_{tt} = \dots$

5. Gernderte Hesse Matrix H aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

H(x₀, y₀, ... t₀) = $\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{\lambda x}(\dots) & \mathcal{L}_{\lambda y}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{\lambda t}(\dots) \\ \mathcal{L}_{x\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{xx}(\dots) & \mathcal{L}_{xy}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{xt}(\dots) \\ \mathcal{L}_{y\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{yx}(\dots) & \mathcal{L}_{yy}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_{t\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{tx}(\dots) & \mathcal{L}_{ty}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{tt}(\dots) \end{pmatrix}$
= $\begin{pmatrix} 0 & n_x(\dots) & n_y(\dots) & \dots & n_t(\dots) \\ n_x(\dots) & \mathcal{L}_{xx}(\dots) & \mathcal{L}_{xy}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{xt}(\dots) \\ n_y(\dots) & \mathcal{L}_{yx}(\dots) & \mathcal{L}_{yy}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_t(\dots) & \mathcal{L}_{tx}(\dots) & \mathcal{L}_{ty}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{tt}(\dots) \end{pmatrix}$

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

det(H) = ...

7. Auswertung

det(H) > 0 \Rightarrow	lokales Maximum
det(H) < 0 \Rightarrow	lokales Minimum
det(H) = 0 \Rightarrow	keine Aussage möglich

4 Support Vector Machine (SVM)

4.1 Lineare Trennbarkeit von Daten

4.1.1 Allgemeines

Datenpunkte: (2D Beispiel)

$$A : ((x_1, x_2); y_1), \quad B : ((x_1, x_2); y_2), \quad C : ((x_1, x_2); y_3), \quad \dots, \quad N : ((x_1, x_2); y_n)$$

\vec{x}_j sind Datenvektoren

$y_j \in \{\pm 1\}$ klassifiziert die jeweiligen Datenvektoren

Hyperebenen:

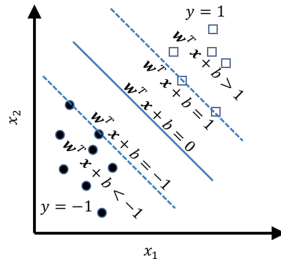
$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b = 0$$

\vec{w} : Normalenvektor, $\vec{w} \in \mathbb{R}^d$ und $\vec{w} \neq 0$

b : Konstante, $b \in \mathbb{R}$

Dimmension der Hyperebene = $d - 1$

Abstand der Hyperebene zum Ursprung: $\frac{|b|}{|\vec{w}|}$



Klassifizierung:

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b > 0 \Rightarrow \vec{x} \text{ gehört zur Klasse } y = +1$$

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b < 0 \Rightarrow \vec{x} \text{ gehört zur Klasse } y = -1$$

Klassifizierung der Trainingsdaten:

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b \geq 0 \Rightarrow \vec{x}_j \text{ gehört zur Klasse } y = +1$$

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b \leq 0 \Rightarrow \vec{x}_j \text{ gehört zur Klasse } y = -1$$

Zielfunktion:

$$\frac{2}{|\vec{w}|} = \frac{2}{w}$$

4.1.2 Das primale Optimierungsproblem

$$\frac{1}{2} \vec{w}^{tr} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2} |\vec{w}|^2 = \frac{1}{2} w^2 \rightarrow \min! \quad \text{s.t.} \quad (\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b) y_j \geq 1 \quad (j = 1, \dots, N)$$

4.1.3 Das duale Optimierungsproblem

Nebenbedingung:

$$1 - \underbrace{(\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b) y_j}_{g_j(\vec{w}^{tr}, b)} \leq 0 \Leftrightarrow g_j(\vec{w}^{tr}, b) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, N)$$

Lagrange-Funktion:

Zusammengesetzt aus dem primalen Problem und den Nebenbedingungen.

$$L(\vec{w}^{tr}, b, \vec{\alpha}) = L(w_1, w_2, \dots, w_d, b, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \\ = \frac{1}{2} \vec{w}^{tr} \cdot \vec{w} + \sum_{j=1}^N \alpha_j \left(1 - \underbrace{(\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b) y_j}_{g_j(\vec{w}^{tr}, b)} \right)$$

Stationaritätsbedingungen:

Aus der Bedingung, dass $\text{grad}(L) = 0$ sein muss, lassen sich folgende Formeln ableiten:

$$\text{grad}_{\{\vec{w}^{tr}, b\}} (L(\vec{w}^{tr}, b, \vec{\alpha})) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j \vec{x}_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j = 0$$

Das duale Problem:

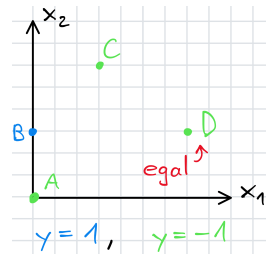
Die oben erhaltenen Summen können nun in die Lagrange-Fkt. eingesetzt werden. Daraus entsteht

$$L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j,j'=1}^N \alpha_j \alpha_{j'} y_j y_{j'} \vec{x}_j^{tr} \cdot \vec{x}_{j'}}_{= \frac{1}{2} \vec{w}^{tr} \cdot \vec{w}} \rightarrow \max! \quad \text{s.t.} \quad \alpha_j \geq 0 \wedge \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j = 0$$

Vorgehen zum lösen des dualen Optimierungsproblems:

1. **Skizze mit Datenpunkten erstellen:**

- Einzelne Datenpunkte klassenweise farblich hervorheben
- Falls ein Datenpunkt der gleichen Klasse weit weg von den anderen ist
 \Rightarrow diesen vergessen, da sein $\alpha = 0$ sein wird



2. **Nebenbedingungen, Es muss gelten:**

$$\text{a: } \alpha_j \geq 0$$

$$\text{b: } \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot y_j = 0$$

Nach einem α umstellen und anschliessend jenes α

(damit die Nebenbedingung miteinbezogen wird) in der Lagrange-Funktion ersetzen

3. **Kernel-Matrix aufstellen:**

$$K(\vec{x}^{tr}; \vec{x}) = \vec{x}^{tr} \bullet \vec{x}$$

$$\begin{matrix} & \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots \\ \vec{x}_1^{tr} & K(\vec{x}_1^{tr}; \vec{x}_1) & K(\vec{x}_1^{tr}; \vec{x}_2) & \dots \\ \vec{x}_2^{tr} & K(\vec{x}_2^{tr}; \vec{x}_1) & K(\vec{x}_2^{tr}; \vec{x}_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

- Einträge sind die Ergebnisse der Skalarprodukte

4. **Lagrange-Funktion aufstellen:**

$$L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^N \alpha_j \cdot \alpha_{j'} \cdot y_j \cdot y_{j'} \cdot \vec{x}_j^{tr} \bullet \vec{x}_{j'} \rightarrow \max!$$

- 2. b und 3 brauchen

5. **Alle α finden durch Stationaritätsbedingung**

$$\nabla L = \vec{0}$$

\Rightarrow ersetzt α mit gefundenen α berechnen

6. **\vec{w} berechnen:**

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j \vec{x}_j$$

7. **Konstante b berechnen:**

Datenpunkte mit der Klasse $y = 1$ oder $y = -1$ wählen und einsetzen

- **Variante 1:** Stützvektor-Datenpunkt mit $y = +1$

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{\dots} + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - \vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{\dots} = \dots$$

- **Variante 2:** Stützvektor-Datenpunkt mit $y = -1$

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{\dots} + b = -1 \Leftrightarrow b = -1 - \vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{\dots} = \dots$$

5 Integration (bi-variät)

Als bi-variate Integrale versteht man Integrale, die siech über zwei unabhängige Variablen erstrecken. Sie haben die Form

∫∫Ω f(ω) · dω = ∫X ∫Y f(x; y) · dy · dx

wobei Ω ⊂ ℝ², X ⊂ ℝ und Y ⊂ ℝ ist. Es gilt dabei das Fubini-Theorem:

∫X (∫Y f(x; y) · dy) · dx = ∫Y (∫X f(x; y) · dx) · dy

5.1 Normalbereich

Ein schlichtes Gebiet, auch Normalbereich, zeichnet sich dadurch aus, dass die Integration darüber besonders einfach ist. Dies ist der Fall, wenn die Integralgrenzen nicht von der jeweilig anderen variable abhängig ist. Der Normalbereich eines bivariaten Integrals in kartesischen Koordinaten ist so ein Rechteck. In Polaren koordinaten stellt der Normalbereich einen Kreissektor oder einen Sektor eines Rings dar.

5.2 Zweidimensionale Koordinatensysteme

Neben den Kartesischen Koordinatensystemen kommen in zweidimensionalen Räumen auch Polare Koordinatensysteme zum Einsatz. Die beiden Systeme können mit Hilfe der Trigonometrie in einander überführt werden.

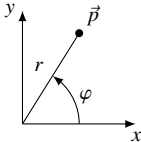
5.2.1 Umrechnung Kartesisch ↔ Polar

Polar zu Kartesisch

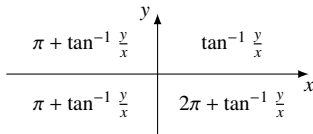
Kartesisch zu Polar

(x y) = (r * cos φ r * sin φ)

(r φ) = (sqrt(x² + y²) tan⁻¹(y/x))



Dabei ist zu beachten, dass tan⁻¹ nur werte von -π/2 bis π/2 liefert, für φ jedoch φ ∈ [0, π] gelten soll. φ wird also, je nach dem in welchem Quadranten sich p befindet, nach folgendem Schema berechnet:



5.2.2 Transformation verschiedener Elemente

Um eine ganzes Integral vom einen Koordinatensystem ins andere zu überführen, muss zum einen die Funktion f(x, y) zu f(r, φ) (oder umgekehrt) umgeschrieben, sowie die differentiale angepasst werden. Hier dafür einige gängige Elemente:

	Kartesisch	Polar
x-Achsenelement	dx	dx = cos φ dr - r sin φ dφ
y-Achsenelement	dy	dy = sin φ dr + r cos φ dφ
Linienelement	ds² = dx² dy²	ds² = dr² + r² dφ²
Flächenelement	dA = dx dy	dA = r dr dφ

5.3 2D Transformation Polar zu Kartesisch

TODO: Das isch ja ds glieche wie obe beschribe, oder? Wänn da no meh ane sött wüsstich nöd was... -Flurin T = Transformation

Polar (r, φ) → (x, y) Kartesisch

(x = r · cos(φ) ℝ y = r · sin(φ) ℝ) 2D

Die Funktionen für x und y sind skalare Funktion.

x = x(r; φ) y = y(r; φ)

5.4 Derivative, Ableitung

TODO: Idk was da ane söll -Flurin

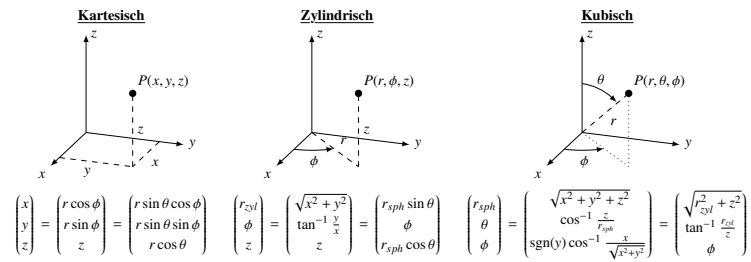
5.5 Anwendungsformeln Doppelintegral

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
Flächeninhalt einer ebenen Figur F		
A = ∫∫F da	= ∫X ∫Y dy dx	= ∫Φ ∫R r dr dφ
Oberfläche einer Ebene in drei Dimensionen		
S = ∫∫A 1/cos γ da	= ∫X ∫Y sqrt(1 + (∂z/∂x)² + (∂z/∂y)²) dy dx	= ∫Φ ∫R sqrt(r² + r² (∂z/∂r)² + (∂z/∂φ)²) dr dφ
Volumen eines Zylinders		
V = ∫∫A z da	= ∫X ∫Y z dy dx	= ∫Φ ∫R z r dr dφ
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf die x-Achse		
Ix = ∫∫F y² da	= ∫X ∫Y (y²) dy dx	= ∫Φ ∫R (r² sin² φ) r dr dφ
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf den Pol (0, 0)		
Ix = ∫∫F r² da	= ∫X ∫Y (x² + y²) dy dx	= ∫Φ ∫R (r²) r dr dφ
Masse einer ebenen Figur F mit Dichtefunktion ϱ		
m = ∫∫F ϱ da	= ∫X ∫Y ϱ(x, y) dy dx	= ∫Φ ∫R ϱ(r, φ) r dr dφ
Koordinaten des Schwerpunkts S einer homogenen, ebenen Figur F		
xS = (∫∫F x da) / A	= (∫X ∫Y x dy dx) / (∫X ∫Y dy dx)	= (∫Φ ∫R r² cos φ dr dφ) / (∫Φ ∫R r dr dφ)
yS = (∫∫F y da) / A	= (∫X ∫Y y dy dx) / (∫X ∫Y dy dx)	= (∫Φ ∫R r² sin φ dr dφ) / (∫Φ ∫R r dr dφ)

Hinweis: Damit die Flächenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziehbar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

6 Integration (multi-variät)

6.1 Dreidimensionale Koordinatensysteme



6.1.1 Umrechnen zwischen Koordinatensystemen

Beim Umrechnen zwischen den Koordinatensystemen gelten im Grunde genommen die obigen Formeln. Dabei muss jedoch in einigen Fällen auf die Wertebereiche von den trigonometrischen Funktionen rücksicht genommen werden.

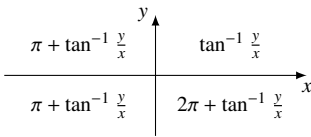
Zylindrisch → Kartesisch:

Sphärisch → Kartesisch:

Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Kartesisch → Zylindrisch:

Der Parameter ϕ wird analog zum zweidimensionalen Fall, je nach dem in welchem Quadranten sich P befindet, nach dem Schema rechts berechnet.



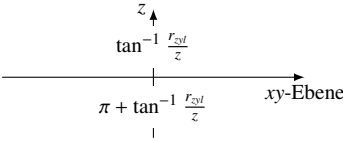
Sphärisch → Zylindrisch:

Kartesisch → Sphärisch:

Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Zylindrisch → Sphärisch:

Auch hier macht der \tan^{-1} Probleme, da er Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ liefert, für θ jedoch $\theta \in [0, \pi]$ gelten soll. Je nach dem, ob P sich oberhalb oder unterhalb der xy -Ebene befindet, wird θ wie rechts berechnet.



6.2 Längenintegrale

6.2.1 Längenelemente

ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2) = (dr^2 + r^2 dtheta^2 + dz^2) = (dr^2 + r^2 dtheta^2 + r^2 sin^2 theta dphi^2)

6.2.2 Länge einer Funktion

- Die Bestimmung der Länge einer Kurve kann in folgende Schritte unterteilt werden:
- 1. **Funktion in die Parameterdarstellung überführen (sofern nicht gegeben):** Dafür wird einer der Parameter (z.B. x oder theta) = t gesetzt und die anderen Parameter ebenfalls als Funktion von t ausgedrückt.
- 2. **Integral aufstellen:** Das Integral in der Form ∫∫∫ ds wird mit dt/dt erweitert.
- 3. **Das Integral lösen**

6.2.3 Beispiel

Es soll die Länge der Kurve v(t) = (x(t), y(t), z(t)) auf dem Intervall [t1, t2] bestimmt werden. Dazu

werden die oben genannten Schritte abgearbeitet:

- 1. **Funktion in die Parameterdarstellung überführen** Hier nicht nötig.
- 2. **Integral aufstellen** ∫∫∫ ds = ∫∫∫ sqrt(dx^2 + dy^2 + dz^2) = ∫_{t1}^{t2} sqrt((dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2) dt
- 3. **Integral lösen** dx/dt, dy/dt und dz/dt ausrechnen, einsetzen, integrieren.

6.3 Flächenintegrale

6.3.1 Flächenelemente

Das Bestimmen der Flächenelemente ist in drei Dimensionen nicht wie bei den Längen- und Volumenelementen pauschal möglich. Dies, da jeweils nur über zwei der drei Koordinaten integriert werden muss. Ein einfaches Verfahren für das Berechnen von Flächeninhalten schafft jedoch abhilfe.

6.3.2 Flächeninhalt einer Oberfläche

Für das Berechnen der Oberflächen von Funktionen des Typs f(a, b) in 3D kann die Formel

S = ∫_B ∫_A sqrt(fa^2 + fb^2 + 1) da db

verwendet werden. Dabei repräsentieren a und b die beiden Koordinatenrichtungen, in denen sich die Fläche erstreckt. fa und fb sind die partiellen Ableitungen der Funktion f(a, b) nach a bzw. b.

Beispiele zur Veranschaulichung:

Es soll die Oberfläche der Funktion f(x, y) im Bereich x ∈ [x1, x2], y ∈ [y1, y - 2] bestimmt werden. Das entsprechende Integral lautet:

S = ∫_{y1}^{y2} ∫_{x1}^{x2} sqrt(fx^2 + fy^2 + 1) dx dy

Wäre die Funktion f stat in kartesischen in polaren oder sphärischen Koordinaten formuliert, ändern sich lediglich die Namen der Variablen. Folglich ist das zu einer in sphärischen Koordinaten definierten Fkt. f(theta, phi) gehörende Integral

S = ∫_{phi1}^{phi2} ∫_{theta1}^{theta2} sqrt(ftheta^2 + fphi^2 + 1) dtheta dphi

sehr leicht aufzustellen.

6.4 Volumenintegrale

6.4.1 Volumenelemente

dV = dx dy dz = r dr dphi dz = r^2 sin theta dtheta dphi dr

6.5 Anwendungen Trippel-Integrale

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
Volumen eines Körpers K			
V = ∫∫∫_K dV	= ∫∫∫ dx dy dz	= ∫∫∫ r dr dphi dz	= ∫∫∫ r^2 sin theta dtheta dphi dr
Trägheitsmoment eines Körpers K, bezogen auf die Z-Achse			
I_z = ∫∫∫_K r^2 dV	= ∫∫∫ (x^2 + y^2) dx dy dz	= ∫∫∫ (r^2) r dr dphi dz	= ∫∫∫ (r^2 sin^2 theta) r^2 sin theta dtheta dphi dr
Masse eines Körpers K mit der Dichtefunktion rho			
M = ∫∫∫_K rho dV	= ∫∫∫ rho(x, y, z) dx dy dz	= ∫∫∫ rho(r, phi, z) r dr dphi dz	= ∫∫∫ rho(r, theta, phi) r^2 sin theta dtheta dphi dr
Koordinaten des Schwerpunktes S eines homogenen Körpers K			
x_S = ∫∫∫_K x dV / V	= ∫∫∫ (x) dx dy dz / V	= ∫∫∫ (r cos phi) r dr dphi dz / V	= ∫∫∫ (r sin theta cos phi) r^2 sin theta dtheta dphi dr / V
y_S = ∫∫∫_K y dV / V	= ∫∫∫ (y) dx dy dz / V	= ∫∫∫ (r sin phi) r dr dphi dz / V	= ∫∫∫ (r sin theta sin phi) r^2 sin theta dtheta dphi dr / V
z_S = ∫∫∫_K z dV / V	= ∫∫∫ (z) dx dy dz / V	= ∫∫∫ (z) r dr dphi dz / V	= ∫∫∫ (r cos theta) r^2 sin theta dtheta dphi dr / V

Hinweis: Damit die Volumenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziehbar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

7 Differenziation und Integration von Kurven

7.1 Kurvenintegral 1. Art

Mit dem Kurvenintegral 1. Art wird die Länge einer Kurve in einer Ebene oder im Raum bestimmt.

7.1.1 Zweidimensional

Um die Länge einer Kurve K, die durch f(x, y) beschrieben wird, in der Ebene zu bestimmen, wird über das Linienelement ds integriert:

∫_K ds = ∫_{x1}^{x2} ∫_{y1}^{y2} sqrt(dx^2 + dy^2)

Dabei ist es nötig, die Funktion f(x) in die Parameterdarstellung f(x(t), y(t)) zu bringen. da der Ausdruck sqrt(dx^2 + dy^2) problematisch ist. Es folgt

∫_{x1}^{x2} ∫_{y1}^{y2} f(x, y) sqrt(dx^2 + dy^2) dt = ∫_{t0}^T sqrt((dx/dt)^2 + (dy/dt)^2) dt,

wobei dx/dt und dy/dt Funktionen sind, die durch Ableiten von x(t) bzw. y(t) nach t berechnet werden können.

7.1.2 Dreidimensional

Das Kurvenintegral 1. Art in drei Dimensionen wurde bereits in Kapitel 6.2.2 beschrieben.

7.2 Kurvenintegral 2. Art

Beim Kurvenintegral 2. Art wird nicht die tatsächliche Länge einer Funktion, sondern die Länge deren Projektion auf eine Achse bestimmt. Dazu wird stat über alle Koordinatenrichtungen nur über eine der Koordinaten integriert.

Es folgen einige Paare von Kurvenintegralen 2. Art entlang einer Kontur K für Funktionen in expliziter Form und in Parameterdarstellung.

2D, Projektion auf x:

∫_K f(x, y) dx = ∫_{t0}^T f(x(t), y(t)) · x'(t) · dt

3D, Projektion auf x:

∫_K f(x, y, z) dx = ∫_{t0}^T f(x(t), y(t), z(t)) · x'(t) · dt

7.2.1 Anwendungen

TODO: Für was wird das gebraucht?!

8 (Ober-)Flächenintegrale

8.1 Allgemeine Wendelfläche

S(t, phi) = (cos(phi) -sin(phi) / sin(phi) cos(phi) * (x(t) / y(t)) / z(t) + c * phi)

Bei c = 1 -> Voller Meter bei einer Kurve

8.2 Freie Fläche

8.3 1. metrischer Tensor

9 Vektoranalysis

9.1 Vektorfelder

Das Vektorfeld

v: R^n -> R^n

weist jedem Punkt P in R^n einen Vektor v in R^n zu. Die Notation eines Vektorfelds ist gleich der eines Vektors, wobei Vektorfelder üblicherweise gross geschrieben werden. Weiter kann auch v(x) geschrieben werden, wobei x der Stützvektor eines beliebigen Punktes ist.

9.2 Gradient

Wir erinnern uns an den Nabla- oder Del-Operator aus Kapitel 2.2 als Spaltenvektor der verschiedenen Raumableitungen:

nabla = (d/dx1, d/dx2, ..., d/dxn)^T

Der Gradient eines Potentialfelds phi: R^n -> R berechnet sich als

nabla * phi(x) = (d/dx1, d/dx2, ..., d/dxn)^T * phi(x) = (dphi/dx1(x), dphi/dx2(x), ..., dphi/dxn(x))^T = F(x)

und resultiert in einem Vektorfeld.

- Wird als Potential das elektrische Potential verwendet, entspricht F dem (negativen, skalierten) elektrischen Feld.
- Wird als Potential eine Höhe verwendet, entspricht F der negativen Hangabtriebskraft.
- Der Gradient kann als mehrdimensionale Ableitung verstanden werden.
- Der Gradient steht senkrecht auf allen Kontouren und zeigt in Richtung hoher Werte.
- Die Multiplikation nabla * phi wird normalerweise als nabla phi abgekürzt.
- Zudem kann der Gradient auch als grad phi geschrieben werden.

9.3 Vektorgradient

Die Definition des Gradienten eines Vektorfeldes v: R^n -> R^m lautet

d(v)/d(a) = d * grad v,

wobei a ein beliebiger Vektor und d(v)/d(a) die Richtungsableitung von v nach a ist. Daraus kann man schließen, dass der Vektorgradient als

grad v = nabla v = (dV1/dx1, ..., dV1/dxn, ..., dVm/dx1, ..., dVm/dxn) = J (= n^T * v)

berechnet werden kann.

- nabla v entspricht der Jacobi-Matrix J. Mit dieser kann die Hesse-Matrix einer skalaren Funktion F (siehe Kap. 3) bestimmt werden:

H(F) = J^T (nabla F) = (grad grad F)^T

- Der Vektorgradient wird als nabla v geschrieben, da die Notation n^T * v, die den tatsächlichen Rechenweg beschreibt, etwas umständlich ist.
- Die Notation nabla * v ist nicht nur falsch, sondern zudem bereits durch die Divergenz besetzt.

9.4 Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfelds

nabla * v(x) = (d/dx1, d/dx2, ..., d/dxn)^T * (v1(x), v2(x), ..., vn(x)) = d(v1)/dx1(x) + d(v2)/dx2(x) + ... + d(vn)/dxn(x)

ist ein Skalarfeld, das beschreibt, wie stark das Vektorfeld an einem gegebenen Punkt "nach aussen gerichtet" ist.

- Wird als Vektorfeld die Fließgeschwindigkeit einer Flüssigkeit eingesetzt, so entspricht die Divergenz dem Fluss aus einem Punkt heraus.
 - An Punkten mit positiver Divergenz fließt Flüssigkeit hinaus (Quelle)

- An Punkten mit negativer Divergenz fließt Flüssigkeit hinein (Senke)
- Wird das E-Feld eingesetzt, so entspricht die Divergenz der Ladungsdichte.
 - Pos. Ladungsdichte entspricht pos. Divergenz, bewirkt eine Quelle im E-Feld.
 - Neg. Ladungsdichte entspricht neg. Divergenz, bewirkt eine Senke im E-Feld.
- Das Skalarprodukt sollte zwingend nabla * v ausgeschrieben werden, da sonst Verwechslungsgefahr mit dem Vektorgradienten besteht.
- Die Notation div v ist ebenfalls gebräuchlich.

Eine alternative und gut visualisierbare Definition der Divergenz, ist in zwei Dimensionen

div v = nabla * v = lim(A -> 0) (f_C=partial A (v(x) * x dx) / A),

wobei A eine Fläche und C dessen Kontur darstellt.

Verallgemeinert für die Anwendung in mehr als 2 Dimensionen lautet die Definition

nabla * v = div v = lim(Omega -> 0) (f_C=partial Omega (v(x) * x d x) / Omega),

wobei Omega ein Bereich im Raum R^n und C dessen Kontur ist.

9.4.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

div v = nabla * v = (d/dx, d/dy, d/dz) * (Vx / Vy / Vz) = dVx/dx + dVy/dy + dVz/dz

Zylinderkoordinaten:

div v = 1/r * d/dr (r Vr) + 1/r * dV_phi/dphi + dV_z/dz

Kugelkoordinaten:

9.5 Laplace Operator Delta

Der Laplaceoperator ist nichts anderes als die Divergenz des Gradienten eines Skalarfelds und vergleichbar mit der zweiten Ableitung. Folglich gilt

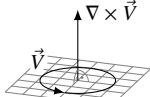
Delta phi = nabla * (nabla phi) = nabla^2 phi = d^2 phi_1/dx1^2 + d^2 phi_2/dx2^2 + ... + d^2 phi_n/dxn^2,

wobei das Resultat ein Skalarfeld ist.

9.6 Rotation eines Vektorfelds (rot, curl)

Die Rotation eines Vektorfelds, auch Curl genannt, beschreibt, wie stark ein Vektorfeld um einen gegebenen Punkt "rotiert" und wird als

rot v = nabla x v = (d/dx, d/dy, d/dz) x (Vx / Vy / Vz) = (dVy/dx - dVx/dy, dVz/dy - dVy/dz, dVx/dz - dVz/dx)



berechnet. Der resultierende Vektor ist dabei die Rotationsachse, wobei die Rechte-Hand-Regel gilt.

Der Curl ist grundsätzlich nur in drei Raumdimensionen definiert. Wenn die Rotation eines auf der Ebene z = 0 definierten Vektorfelds berechnet werden soll, kann die obige Formel mit Vz = 0 angepasst werden:

rot v(x, y) = nabla x v(x, y) = (d/dx, d/dy) x (Vx / Vy) = (0, 0, dVy/dx - dVx/dy)

- Mit dem Curl-Operator kann z.B. elegant beschrieben werden, dass Wirbel im E-Feld auf zeitliche Änderungen im magnetischen Feld zurückzuführen sind:

nabla x E = - dH/dt

9.7 Rechenregeln mit nabla

Für das folgende der Rechenregeln werden die folgenden Platzhalter verwendet:

- A, B: Skalarfelder (R^n -> R)
- A, B: Vektorfelder (R^n -> R^n)
- F: Skalare Funktion (R^n -> R)
- c: Konstante

Gradienten:

- grad(A + B) = grad(A) + grad(B) <=> nabla(A + B) = nabla A + nabla B
- grad(A * B) = A grad(B) + B grad(A) <=> nabla(A * B) = A * nabla B + B * nabla A
- grad(c * A) = c grad(A) <=> nabla(c * A) = c * nabla A
- grad(F(A)) = F'(A) * grad A <=> nabla F(A) = F'(A) * nabla A

Divergenzen:

- div(A + B) = div(A) + div(B) <=> nabla * (A + B) = (nabla * A) + (nabla * B)
- div(A * B) = A div(B) + B grad(A) <=> nabla * (A * B) = A * (nabla * B) + B * nabla A
- div(A x B) = B * rot(A) - A * rot(B) <=> nabla * (A x B) = B * (nabla x A) - A * (nabla x B)
- div(c * A) = c div(A) <=> nabla * (c * A) = c * (nabla * A)

Curl:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{A} + \vec{B}) &= \operatorname{rot}(\vec{A}) + \operatorname{rot}(\vec{B}) && \nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) + (\nabla \times \vec{B}) \\ \operatorname{rot}(A \cdot \vec{B}) &= A \operatorname{rot}(\vec{B}) + (\operatorname{grad} A) \times \vec{B} && \nabla \times (A \cdot \vec{B}) = A \cdot (\nabla \times \vec{B}) + (\nabla A \times \vec{B}) \\ \operatorname{rot}(c\vec{A}) &= c \operatorname{rot}(\vec{A}) && \nabla \times (c\vec{A}) = c \cdot (\nabla \times \vec{A}) \\ \operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} \\ &&& \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) \end{aligned}$$

Laplaceoperator:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} A &= \Delta A & \Leftrightarrow & \nabla \cdot (\nabla A) = \Delta A \\ \operatorname{rot}(\Delta \vec{A}) &= \Delta \operatorname{rot} \vec{A} & \Leftrightarrow & \nabla \times (\Delta \vec{A}) = \Delta(\nabla \times \vec{A}) \end{aligned}$$

Kombinationen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} &= 0 && \Leftrightarrow && \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} A &= \Delta A && \Leftrightarrow && \nabla \cdot \nabla A = \Delta A \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} \vec{A} &= \vec{0} && \Leftrightarrow && \nabla \times (\nabla A) = \vec{0} \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} && \Leftrightarrow && \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \end{aligned}$$

Gradient: (TODO: Check if this is right)

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

9.8 Anwendungen

9.9 Integralsatz von Gauss

$$\int_{(V)} \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint_{(S)=\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Fluss durch eingeschlossenen Körper = Gesamter Fluss durch geschlossenen Rand des Körpers

9.10 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

$$\Delta\phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\phi)) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = f(\vec{r})$$

 Δ : Laplace-Operator

ϕ : Potentialfeld

 $f(\vec{r})$: Quellfunktion

9.10.1 Laplace-Gleichung

$$\Delta\phi = f = 0 \quad \Rightarrow \text{Spezialfall der Poisson-Gleichung ohne äussere Quellfunktion}$$

9.11 Integralsatz von Stokes

$$\oint_{(C)=\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{(S)} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

∂S **muss** anhand Rechter-Hand-Regel orientiert sein.

Stokes sagt aus, dass die Summe der Verwirbelungen in einer Fläche, der Summe der Vektoren dessen Randes entsprechen.

9.12 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen

-TBD-