Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zgraggen
Autoren:
Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:
0.1.20240629
https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen

Inhaltsverzeichnis

5 Koordinatensysteme

5.1 2D Koordinatensysteme

Neben den Kartesischen Koordinatensystemen kommen in zweidimensionalen Räumen auch Polare Koordinatensysteme zum Einsatz. Die beiden Systeme können mit Hilfe der Trigonometrie in einander überführt werden.

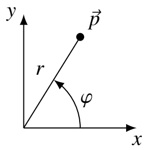
5.1.1 Umrechnung Kartesisch ↔ Polar

Polar zu Kartesisch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Kartesisch zu Polar

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$



Dabei ist zu beachten, dass $\tan^{-1}$ nur werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ liefert, für φ jedoch $\varphi \in [0, \pi]$ gelten soll. φ wird also, je nach dem in welchem Quadranten sich $\vec{p}$ befindet, nach folgendem Schema berechnet:

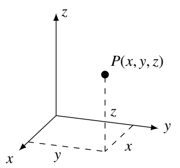
$x<0$	$x>0$
$y>0$: $\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$\tan^{-1} \frac{y}{x}$
$y<0$: $\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$2\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$

Um eine ganzes Integral vom einen Koordinatensystem ins andere zu überführen, muss zum einen die Funktion $f(x, y)$ zu $f(r, \varphi)$ (oder umgekehrt) umgeschrieben, sowie die differentiale angepasst werden. Hier dafür einige gängige Elemente:

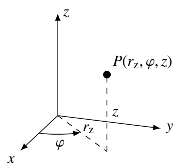
	Kartesisch	Polar
x-Achsenelement	$\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}x = \cos\varphi \,\mathrm{d}r - r\sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$
y-Achsenelement	$\mathrm{d}y$	$\mathrm{d}x = \sin\varphi \,\mathrm{d}r + r\cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi$
Linienelement	$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 \,\mathrm{d}y^2$	$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2 \,\mathrm{d}\varphi^2$
Flächenelement	$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$	$\mathrm{d}A = r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi$

5.2 3D Koordinatensysteme

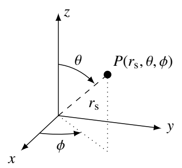
Kartesisch



Zylindrisch



Sphärisch



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r_z \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s \sin\theta \\ \phi \\ r_s \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r_s \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \mathrm{sgn}(y) \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r_z^2 + z^2} \\ \tan^{-1} \frac{r_z}{z} \\ \varphi \end{pmatrix}$$

5.2.1 Umrechnen zwischen Koordinatensystemen

Beim Umrechnen zwischen den Koordinatensystemen gelten im Grunde genommen die obigen Formeln. Dabei muss jedoch in einigen Fällen auf die Wertebereiche von den trigonometrischen Funktionen rücksicht genommen werden.

Zylindrisch → Kartesisch:
Sphärisch → Kartesisch:
Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Kartesisch → Zylindrisch:

Der Parameter ϕ wird analog zum zweidimensionalen Fall, je nach dem in welchem Quadranten sich P befindet, nach dem Schema rechts berechnet.

$x<0$	$x>0$
$y>0$: $\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$\tan^{-1} \frac{y}{x}$
$y<0$: $\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$2\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$

Sphärisch → Zylindrisch:
Kartesisch → Sphärisch:
Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Zylindrisch → Sphärisch:

Auch hier macht der $\tan^{-1}$ Probleme, da er Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ liefert, für θ jedoch $\theta \in [0, \pi]$ gelten soll. Je nach dem, ob P sich oberhalb oder unterhalb der xy-Ebene befindet, wird θ wie rechts berechnet.

oberhalb der xy-Ebene (z)	$\tan^{-1} \frac{r_z}{z}$
unterhalb der xy-Ebene	$\pi + \tan^{-1} \frac{r_z}{z}$

6 Integration

6.1 Längenintegrale

6.1.1 Längenelemente

$$\mathrm{d}s^2 = \underbrace{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{\mathrm{d}r^2 + r^2 \,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{\mathrm{d}r^2 + r^2 \,\mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \,\mathrm{d}\phi^2}_{\text{Sphärisch}}$$

6.1.2 Länge einer Funktion

Die Bestimmung der Länge einer Kurve kann in folgende Schritte unterteilt werden:

1. **Funktion in die Parameterdarstellung überführen (sofern nicht gegeben):**
   Dafür wird einer der Parameter (z.B. x oder θ) $= t$ gesetzt und die anderen Parameter ebenfals als Funktion von t ausgedrückt.
2. **Integral aufstellen:**
   Das Integral in der Form $\iiint \mathrm{d}s$ wird mit $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}$ erweitert.
3. **Das Integral lösen**

Beispiel: Längenintegral in kartesischen Koordinaten

Es soll die Länge der Kurve $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ auf dem Interval $[t_1, t_2]$ bestimmt werden. Dazu werden die oben genannten Schritte abgearbeitet:

1. **Funktion in die Parameterdarstellung überführen**
   Hier nicht nötig.
2. **Integral aufstellen**
   $\iiint \mathrm{d}s = \iiint \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \,\mathrm{d}t$
3. Integral lösen
   $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ und $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ ausrechnen, einsetzen, integrieren.

6.2 Flächenintegrale

6.2.1 Flächenelemente

Das Bestimmen der Flächenelemente ist in drei Dimensionen nicht wie bei den Längen- und Volumenelementen pauschal möglich. Dies, da jeweils nur über zwei der drei Koordinaten integriert werden muss. Ein einfaches Verfahren für das Berechnen von Flächeninhalten schafft jedoch abhilfe.

6.2.2 Flächeninhalt einer Oberfläche

Für das Berechnen der Oberflächen von Funktionen des Typs $f(a, b)$ in 3D kann die Formel

$$S = \int_B \int_A \sqrt{(f_a)^2 + (f_b)^2 + 1} \,\mathrm{d}a \,\mathrm{d}b$$

verwendet werden. Dabei repräsentieren a und b die beiden Koordinatenrichtungen, in denen sich die Fläche erstreckt. f_a und f_b sind die partiellen Ableitungen der Funktion $f(a, b)$ nach a bzw. b.

Beispiele zur Veranschaulichung:
Es soll die Oberfläche der Funktion $f(x, y)$ im Bereich $x \in [x_1, x_2], y \in [y_1, y-2]$ bestimmt werden. Das entsprechende integral lautet:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Wäre die Funktion f stat in kartesischen in polaren oder sphärischen Koordinaten formuliert, ändern sich lediglich die Namen der Variablen. Folglich ist das zu einer in sphärischen Koordinaten definierten Fkt. $f(\theta, \phi)$ gehörende Integral

$$S = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f_\theta)^2 + (f_\phi)^2 + 1} \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$$

sehr leicht aufzustellen.

6.3 Volumenintegrale

6.3.1 Volumenelemente

$$\mathrm{d}V = \underbrace{\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r}_{\text{Sphärisch}}$$

6.4 Anwendungsformeln 2D (Doppelintegrale)

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
Flächeninhalt einer ebenen Figur F		
$A = \iint\limits_F \mathrm{d}a$	$= \int\limits_X \int\limits_Y \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int\limits_\Phi \int\limits_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Oberfläche einer Ebene in drei Dimensionen		
$S = \iint\limits_A \frac{1}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}a$	$= \int\limits_X \int\limits_Y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int\limits_\Phi \int\limits_R \sqrt{r^2 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Volumen eines Zylinders		
$V = \iint\limits_A z\,\mathrm{d}a$	$= \int\limits_X \int\limits_Y z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int\limits_\Phi \int\limits_R zr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf die x-Achse		
$I_x = \iint\limits_F y^2\,\mathrm{d}a$	$= \int\limits_X \int\limits_Y (y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int\limits_\Phi \int\limits_R (r^2\sin^2\varphi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf den Pol $(0,0)$		
$I_x = \iint\limits_F r^2\,\mathrm{d}a$	$= \int\limits_X \int\limits_Y (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int\limits_\Phi \int\limits_R (r^2)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Masse einer ebenen Figur F mit Dichtefunktion ϱ		
$m = \iint\limits_F \varrho\,\mathrm{d}a$	$= \int\limits_X \int\limits_Y \varrho(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int\limits_\Phi \int\limits_R \varrho(r,\varphi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Koordinaten des Schwerpunkts S einer homogenen, ebenen Figur F		
$x_S = \frac{\iint\limits_F x\,\mathrm{d}a}{A}$ $y_S = \frac{\iint\limits_F y\,\mathrm{d}a}{A}$	$= \frac{\int\limits_X \int\limits_Y x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\int\limits_X \int\limits_Y \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$ $= \frac{\int\limits_X \int\limits_Y y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\int\limits_X \int\limits_Y \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$	$= \frac{\int\limits_\Phi \int\limits_R r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}{\int\limits_\Phi \int\limits_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}$ $= \frac{\int\limits_\Phi \int\limits_R r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}{\int\limits_\Phi \int\limits_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}$

Hinweis: Damit die Flächenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziebar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

6.5 Anwendungsformeln 3D (Dreifachintegrale)

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
Volumen eines Körpers K			
$V = \iiint\limits_K \mathrm{d}V$	$= \iiint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$= \iiint r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$	$= \iiint r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$
Trägheitsmoment eines Körpers K, bezogen auf die Z-Achse			
$I_z = \iiint\limits_K r^2\,\mathrm{d}V$	$= \iiint (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$= \iiint (r^2)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$	$= \iiint (r^2\sin^2\theta)r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$
Masse eines Körpers K mit der Dichtefunktion ϱ			
$M = \iiint\limits_K \varrho\,\mathrm{d}V$	$= \iiint \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$= \iiint \varrho(r,\phi,z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$	$= \iiint \varrho(r,\theta,\phi)r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$
Koordinaten des Schwerpunktes S eines homogenen Körpers K			
$x_S = \frac{\iiint\limits_K x\,\mathrm{d}V}{V}$ $y_S = \frac{\iiint\limits_K y\,\mathrm{d}V}{V}$ $z_S = \frac{\iiint\limits_K z\,\mathrm{d}V}{V}$	$= \frac{\iiint (x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$ $= \frac{\iiint (y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$ $= \frac{\iiint (z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$	$= \frac{\iiint (r\cos\phi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z}{V}$ $= \frac{\iiint (r\sin\phi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z}{V}$ $= \frac{\iiint (z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z}{V}$	$= \frac{\iiint (r\sin\theta\cos\phi)r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{V}$ $= \frac{\iiint (r\sin\theta\sin\phi)r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{V}$ $= \frac{\iiint (r\cos\theta)r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{V}$

Hinweis: Damit die Volumenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziebar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.