Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zgraggen

Autoren:
Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:
0.1.20240603
https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen

Inhaltsverzeichnis

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f : \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^{\color{blue}m}) \longrightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^{\color{green}n})$$

$\color{blue}m$	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{D}_f$, wobei $\color{blue}m$ $\in \mathbb{N}$
$\color{green}n$	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{W}_f$, wobei $\color{green}n$ $\in \mathbb{N}$
$\vec{f}$	wenn Output vektoriell

⚠ Variablen sind abhängig von einander!

Multi-Variat:

f ist "Multi-Variat", wenn:
- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

f ist nicht "Multi-Variat", wenn:
- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

$$\left.\begin{array}{r} \text{Raum 3D } (x; y; z)\ \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t)\ \mathbb{R}^1 \end{array}\right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t; x; y; z)$$

1.1.2 Stationärer Fall

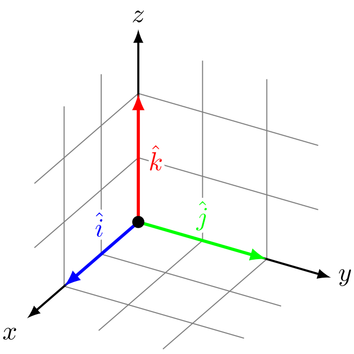
$$t \to \infty \to \text{Stationär}$$
$$T(x; y; z) \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} \to 0$$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



1.2 Schnitte

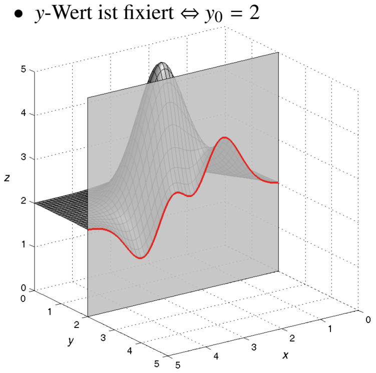
Schnitt = Restriktion → Teilmenge vom Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$

1.2.1 Partielle Funktion

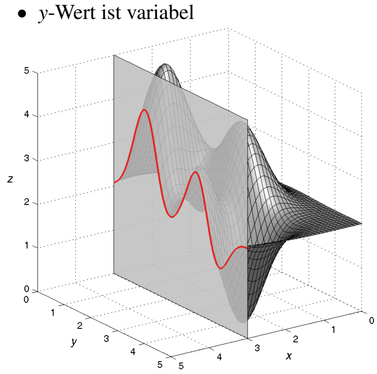
- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
- **Alle** anderen Variablen sind fix!
  ⚠ $\mathbb{W}_f$ Analyse!

Beispiel: Schnitte

x-Linien
- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y_0; f(x; y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow y_0 = 2$



y-Linien
- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt.
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x_0; y; f(x_0; y))$
- x-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel



1.2.2 Bedingungen

Initialbedingungen	→	Beziehen sich auf die **Zeit**
Randbedingungen	→	Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

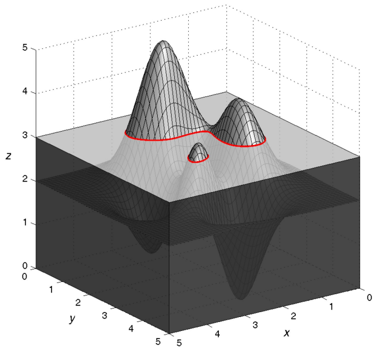
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinen, ...

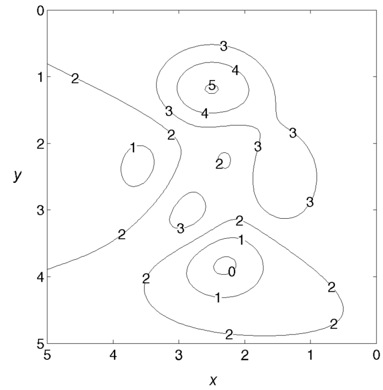
Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion f **konstant**.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \subset \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)
- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y; f(x; y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow z_0 = 3$





2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat)

$$f : \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}$$

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x, y) : \ y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \textbf{ einzige} \text{ freie Variable}$$

Notationen

$$\begin{aligned} \text{1. Ordnung:} \quad & f(x; y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x; y_0) \\ \text{2. Ordnung:} \quad & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \\ & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \end{aligned}$$

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

$$\underbrace{\nabla}_{\text{"Gradient"}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}$$

2.3 Totale Ableitung

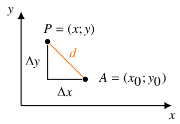
Für Fehlerrechnung benützt, da man hierbei die Abstände von $(x; y; z)$ zu einem festen Punkt $(x_0; y_0; z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f; \underbrace{(x_0, y_0, \ldots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{1\times 2 \text{ Matrix}} \mathbb{R}^1; \text{ "gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \ldots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + f(x_0; y_0) + R_1$$

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d\text{")}$$



$$D(f; (x_0; y_0)) = \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)\right)$$

$$= (\nabla f)^{\text{tr}} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A$$

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

2.4.1 Tangentialebene

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

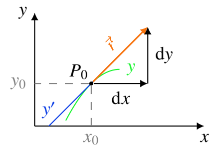
$$\mathrm{d}f \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y \quad \text{bezüglich } A = \underbrace{(x_0; y_0)}$$

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

$$\begin{pmatrix} f = c = \text{const.} & |\,\mathrm{d}(\ldots) \\ \mathrm{d}f = \mathrm{d}c \stackrel{!}{=} 0 & \end{pmatrix} \qquad f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{für Kontourlinien}$$

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



2.5 DGL

$$y' = \left(-\frac{f_x}{f_y}\right); \ y(x_0) = y_0$$

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

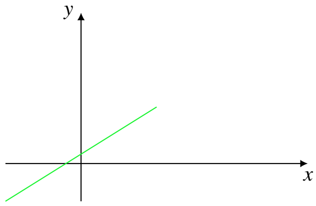
2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

$$\vec{r} = \left(\mathrm{d}x = h; \mathrm{d}y = y' \,\mathrm{d}x = -\frac{f_x}{f_y} \mathrm{d}x\right)^{\text{tr}}$$

2.7 Gradientenfeld ⊥ Kontouren

$$\nabla f \overset{\text{Skalarprodukt}}{\bullet} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y = y' \,\mathrm{d}x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?



$$\begin{aligned} s(t) : \quad & P_0 + t \cdot \hat{v} \mid t \in \mathbb{R} \\ s(t) : \quad & f(x_0 + t \cdot \hat{v}_1 \ ; \ y_0 + t \cdot \hat{v}_2) \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{s}(t) : \quad t \mapsto \overbrace{\begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v_1 \\ y_0 + t \cdot v_2 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \mapsto f(x, y)$$

2.9 Richtungs-Ableitung

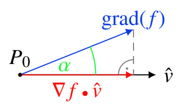
$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \stackrel{!}{=} D(f; (x_0; y_0)) \cdot \hat{v} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \text{grad}(f)^{\text{tr}} \cdot \hat{v} = f_x \cdot v_1 + f_y \cdot v_2$$

Beispiel: Richtungs-Ableitung

$$\vec{x} : \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_1} = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 = \underline{\underline{f_x}}$$

2.9.1 Spezialfälle

- $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ rechter Winkel
- $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}$ extremal
  - $\alpha = 0$ (max): $\nabla f \cdot \hat{v} > 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$ liegt auf $\hat{v}$
  - $\alpha = \pi$ (min): $\nabla f \cdot \hat{v} < 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$ liegt invers auf $\hat{v}$



Trigo: $\nabla f \cdot \hat{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \Rightarrow \cos(\alpha) \cdot |\nabla f|$

3 Extrema von Funktionen zweier Variabeln finden

1. **Gradient von f Null-setzten und kritische Stellen finden:**
$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow x_0$ und y_0 bestimmen

2. **Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:**
$f_{xx} = \dots$
$f_{xy} = f_{yx} = \dots$
$f_{yy} = \dots$

3. **Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:**
$\Delta = f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - \left(f_{xy}(x_0; y_0)\right)^2$

4. **Auswertung:**

$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\Delta < 0$			$\Longrightarrow$	Sattelpunkt
$\Delta = 0$			?	Multi-variate-Taylor-logik ...

4 Extrema von Funktionen mehrerer Variabeln finden

1. **Gradient von f Null-setzten und kritische Stellen finden:**

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_0, y_0, \ldots, t_0 \text{ bestimmen}$$

2. **Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:**

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \cdots & f_{xt} \\ f_{yx} & f_{yy} & \cdots & f_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx} & f_{ty} & \cdots & f_{tt} \end{pmatrix}$$

- Symmetrien beachten!
- Nicht doppelt rechnen!
  $\Rightarrow f_{xt} = f_{tx}$

3. **Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen füllen:**

$$\mathbf{H}(x_0, y_0, \ldots t_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \ldots t_0) & f_{xy}(x_0, y_0, \ldots t_0) & \cdots & f_{xt}(x_0, y_0, \ldots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \ldots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \ldots t_0) & \cdots & f_{yt}(x_0, y_0, \ldots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \ldots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \ldots t_0) & \cdots & f_{tt}(x_0, y_0, \ldots t_0) \end{pmatrix}$$

4. **Eigenwerte λ_i der Hesse-Matrix bestimmen:**
   $\det(\mathbf{H}(x_0, y_0, \ldots t_0) - \lambda \cdot \mathbf{E}) = 0$
   Nullstellen λ_i finden $\rightarrow$ Eigenwerte

   <u>Zur Erinnerung:</u>

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}(x_0, y_0, \ldots t_0) - \lambda \cdot \mathbf{E} = \ldots$$

$$\ldots = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \ldots t_0) - \lambda & f_{xy}(x_0, y_0, \ldots t_0) & \cdots & f_{xt}(x_0, y_0, \ldots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \ldots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \ldots t_0) - \lambda & \cdots & f_{yt}(x_0, y_0, \ldots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \ldots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \ldots t_0) & \cdots & f_{tt}(x_0, y_0, \ldots t_0) - \lambda \end{pmatrix}$$

5. **Auswertung:**

$\lambda_i < 0 \ \ \forall i$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\lambda_i > 0 \ \ \forall i$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\lambda_i > 0$ und $\lambda_i < 0$	$\Longrightarrow$	Sattelpunkt

Erklärung:
- $\lambda_i < 0 \ \ \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind negativ
- $\lambda_i > 0 \ \ \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind positiv

4.1 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion $f(x, y, \ldots, t)$ gilt:

$f(x, y, \ldots, t) \leq M_{\max}$	$\forall (x, y, \ldots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	globales Maxinum
$f(x, y, \ldots, t) > M_{\max}$	$\exists (x, y, \ldots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	kein globales Maximum
$f(x, y, \ldots, t) \geq M_{\min}$	$\forall (x, y, \ldots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	globales Minimum
$f(x, y, \ldots, t) < M_{\min}$	$\exists (x, y, \ldots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	kein globales Minimum

$M_{\max}$: grösstes lokales Maximum
$M_{\min}$: kleinstes lokales Minimum

5 Integration (bi-variat)

5.1 2D

$$\int\int_{\Omega} f(x;y) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y = \int_{X} \left(\int_{Y} f(x;y) \cdot dy \right) \cdot dx$$

$$wenn \int\int |f(x;y)| dxdy < \infty$$

5.2 Normalbereich

Schnitte sind Strecken (Intervalle) für x, y, ...

5.3 Polar

$$\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y = r \cdot d\phi \cdot dr$$

5.4 2D Transformation Polar zu Kartesisch

T = Transformation

$$\text{Polar } (r, \phi) \xrightarrow{T} (x, y) \text{ Kartesisch}$$

$$\begin{pmatrix} x = r \cdot \cos(\varphi) \ \mathbb{R} \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \ \mathbb{R} \end{pmatrix} \text{2D}$$

Die Funktionen für x und y sind skalare Funktion.

$$x = x(r;\varphi) \qquad y = y(r;\varphi)$$

5.5 Derivative, Ableitung

5.6 3D Volumenberechnung

$$V = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} f\,(x;y)\ dy \right] dx$$

5.7

5.8

6 Integration (multi-variat)

7 Differenziation und Integration von Kurven

8 (Ober-)Flächenintegrale

9 Vektoranalysis