



10.20250613

Funktionen mehrerer Variablen

FS 2025 – Prof. Dr. Bernhard Zraggen
Autoren: Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler, Luca Loop
<https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen>

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f: \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^n)$$

- m Anzahl Dimensionen von \mathbb{D}_f , wobei $m \in \mathbb{N}$
- n Anzahl Dimensionen von \mathbb{W}_f , wobei $n \in \mathbb{N}$
- \vec{f} wenn Output vektoriell

△ Variablen sind abhängig von einander!

Multi-Variat:

- f ist "Multi-Variat", wenn:
- Input mehrdimensional ist
 - Output mehrdimensional ist
 - Input **und** Output mehrdimensional sind

- f ist **nicht** "Multi-Variat", wenn:
- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

$$\left. \begin{array}{l} \text{Raum 3D } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t) \in \mathbb{R}^1 \end{array} \right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t; x; y; z)$$

1.1.2 Stationärer Fall

$$t \rightarrow \infty \rightarrow \text{Stationär}$$

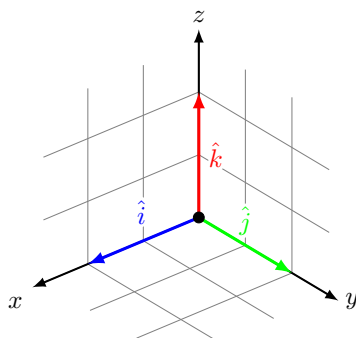
$$T(x; y; z) \frac{\Delta T}{\Delta t} \rightarrow 0$$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = e_1^x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = e_2^y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = e_3^z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion → Teilmenge vom Definitionsbereich \mathbb{D}_f

1.2.1 Partielle Funktion

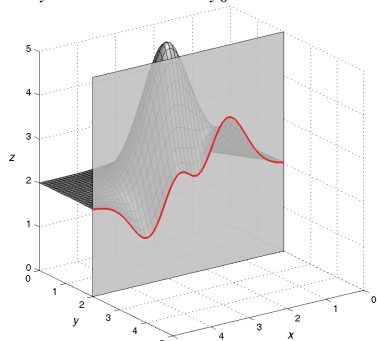
- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
- Alle** anderen Variablen sind fix!

△ \mathbb{W}_f Analyse!

Beispiel: Schnitte

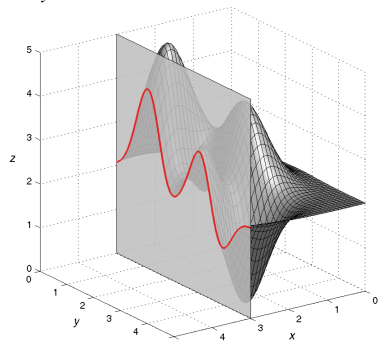
x-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y_0; f(x; y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow y_0 = 2$



y-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x_0; y; f(x_0; y))$
- x-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel



1.2.2 Bedingungen

- Initialbedingungen → Beziehen sich auf die **Zeit**
- Randbedingungen → Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...

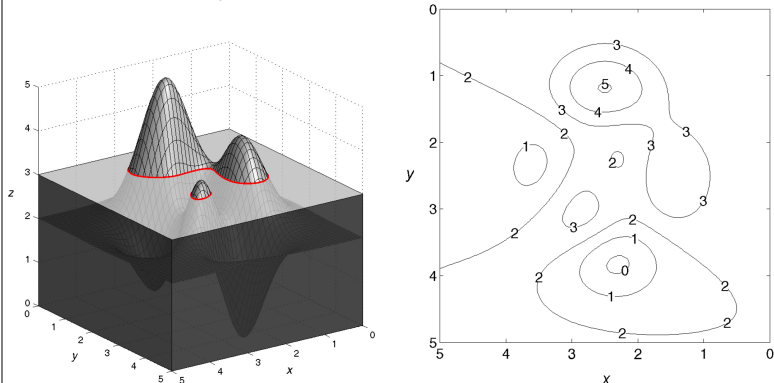
Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion f **konstant**.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \in \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)

- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y; f(x; y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow z_0 = 3$



2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variät)

$$f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}$$

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x, y): y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \text{ **einzige** freie Variable}$$

Notationen

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ordnung: } f(x; y_0) &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x; y_0) \\ 2. \text{ Ordnung: } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \end{aligned}$$

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

Kartesisch

$$\text{Vektorfeld} = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

"Gradient" / Nabla

Zylindrisch

$$\nabla f(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Sphärisch

$$\nabla f(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

2.3 Totale Ableitung

Für Fehlerrechnung benützt, da man hierbei die Abstände von $(x; y; z)$ zu einem festen Punkt $(x_0; y_0; z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

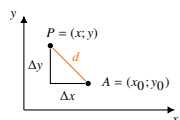
$$D(f; (x_0, y_0, \dots)): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1; \text{ "gute Approximation"}$$

Arbeitspunkt

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \dots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + f(x_0; y_0) + R_1$$

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d \text{")}$$



$$D(f; (x_0; y_0)) = \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \right)$$

$$= (\nabla f)^{\text{tr}} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A$$

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

2.4.1 Tangentialebene

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

$$df \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{bezüglich } A = (x_0; y_0)$$

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

Auf Kontouren sei $df = 0$ (Kontourlinien). Daher lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

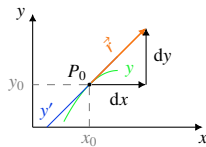
$$f = c = \text{const.} \quad | d(\dots)$$

$$df = dc \stackrel{!}{=} 0$$

Bzw. für Kontourlinien: $f_x dx + f_y dy = 0$

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{dx}{dy} = -\frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



2.5 DGL

$$y' = \left(-\frac{f_x}{f_y} \right); y(x_0) = y_0$$

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

2.6 Richtungselement (Tangentiellinie an Kontouren)

$$\vec{r} = \left(dx = h; dy = y' dx = -\frac{f_x}{f_y} dx \right)^{\text{tr}}$$

2.7 Gradientenfeld \perp Kontouren

$$\text{Skalarprodukt} \rightarrow \nabla f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy = y' dx \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

2.8 Taylor Approximation 2. Ordnung

Man erinnert sich an die Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (\Delta x)^n$$

in einer dimension.

Für höhere Dimensionen kann die Taylorreihe 2. Ordnung mit dem Nabla-Operator und der Hess Matrix als

$$f(x, y, \dots) \approx f(x_0, y_0, \dots) + \nabla f(x_0, y_0, \dots) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \vdots \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y & \dots \end{pmatrix} \vec{H} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \vdots \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

2.9 Richtungs-Ableitung

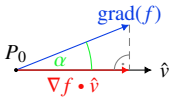
$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \stackrel{!}{=} D(f; (x_0; y_0)) \cdot \hat{v} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \text{grad}(f)^{\text{tr}} \cdot \hat{v} = f_x \cdot v_1 + f_y \cdot v_2$$

Beispiel: Richtungs-Ableitung

$$\vec{x}: \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_1} = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 = \underline{f_x}$$

2.9.1 Spezialfälle

- $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ rechter Winkel
- $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}$ extremal
 - $\alpha = 0$ (max): $\nabla f \cdot \hat{v} > 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$ liegt auf \hat{v}
 - $\alpha = \pi$ (min): $\nabla f \cdot \hat{v} < 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$ liegt invers auf \hat{v}



$$\text{Trigo: } \nabla f \cdot \hat{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \Rightarrow \cos(\alpha) \cdot |\nabla f|$$

3 Extrema von Funktionen finden

Stationaritätsbedingung: $\nabla f \stackrel{!}{=} \vec{0}$

3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$$

2. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$$f_{xx} = \dots \quad f_{xy} = f_{yx} = \dots \quad f_{yy} = \dots$$

3. Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:

$$\Delta = f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - (f_{xy}(x_0; y_0))^2$$

4. Auswertung:

$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) < 0$	\Rightarrow	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) < 0$	\Rightarrow	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) > 0$	\Rightarrow	lokales Minimum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) > 0$	\Rightarrow	lokales Minimum
$\Delta < 0$			\Rightarrow	Sattelpunkt
$\Delta = 0$?	Multi-variate-Taylor-logik ...

3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$$

2. Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \dots & f_{xt} \\ f_{yx} & f_{yy} & \dots & f_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx} & f_{ty} & \dots & f_{tt} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \bullet \text{ Symmetrien beachten!} \\ \bullet \text{ Nicht doppelt rechnen!} \\ \Rightarrow f_{xt} = f_{tx} \end{matrix}$$

3. Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen füllen:

$$H(x_0, y_0, \dots, t_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{xy}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \end{pmatrix}$$

4. Eigenwerte λ_i der Hesse-Matrix bestimmen:

$$\det(H(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda \cdot E) = 0$$

Nullstellen λ_i finden \rightarrow Eigenwerte

Zur Erinnerung:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

$$H(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda \cdot E = \dots$$

$$\dots = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda & f_{xy}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda \end{pmatrix}$$

5. Auswertung:

$\lambda_i < 0 \quad \forall i$	\Rightarrow	lokales Maximum
$\lambda_i > 0 \quad \forall i$	\Rightarrow	lokales Minimum
$\lambda_i > 0$ und $\lambda_i < 0$	\Rightarrow	Sattelpunkt

Erklärung:

- $\lambda_i < 0 \quad \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind negativ
- $\lambda_i > 0 \quad \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind positiv

1×2 Matrix

3.3 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion $f(x, y, \dots, t)$ gilt:

$f(x, y, \dots, t) \leq M_{\max}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) > M_{\max}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) \geq M_{\min}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Minimum
$f(x, y, \dots, t) < M_{\min}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Minimum

M_{\max} : grösstes lokales Maximum

M_{\min} : kleinstes lokales Minimum

3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: $n(x,y) \stackrel{!}{=} 0$ Nebenbedingung: $x + y = 1$
Standardform der Nebenbedingung: $x + y - 1 = 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot n(x,y)$ Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

$\nabla L = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$L_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0$ $L_{\lambda x} = L_{x\lambda} = n_x = \dots$
 $L_{xx} = \dots$ $L_{\lambda y} = L_{y\lambda} = n_y = \dots$
 $L_{yy} = \dots$ $L_{xy} = L_{yx} = \dots$

5. Geränderte Hesse Matrix \bar{H} aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

$$\bar{H}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} L_{\lambda\lambda}(x_0,y_0) & L_{\lambda x}(x_0,y_0) & L_{\lambda y}(x_0,y_0) \\ L_{x\lambda}(x_0,y_0) & L_{xx}(x_0,y_0) & L_{xy}(x_0,y_0) \\ L_{y\lambda}(x_0,y_0) & L_{yx}(x_0,y_0) & L_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & n_x(x_0,y_0) & n_y(x_0,y_0) \\ n_x(x_0,y_0) & L_{xx}(x_0,y_0) & L_{xy}(x_0,y_0) \\ n_y(x_0,y_0) & L_{yx}(x_0,y_0) & L_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

$\det(\bar{H}) = \dots$

7. Auswertung

$\det(\bar{H}) > 0 \Rightarrow$	lokales Maximum
$\det(\bar{H}) < 0 \Rightarrow$	lokales Minimum
$\det(\bar{H}) = 0 \Rightarrow$	keine Aussage möglich

3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: $n(x,y,\dots,t) \stackrel{!}{=} 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

$L(x,y,\dots,t,\lambda) = f(x,y,\dots,t) + \lambda \cdot n(x,y,\dots,t)$ Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

$\nabla L = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ \vdots \\ L_t \\ L_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$L_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0$ $L_{\lambda x} = L_{x\lambda} = n_x = \dots$ $L_{xy} = L_{yx}$
 $L_{xx} = \dots$ $L_{\lambda y} = L_{y\lambda} = n_y = \dots$ $L_{xt} = L_{tx}$
 $L_{yy} = \dots$ $L_{yt} = L_{ty}$
 \vdots \vdots \vdots
 $L_{tt} = \dots$ $L_{\lambda t} = L_{t\lambda} = n_t = \dots$ $L_{\lambda t} = L_{t\lambda}$

5. Geränderte Hesse Matrix \bar{H} aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

$$\bar{H}(x_0,y_0,\dots,t_0) = \begin{pmatrix} L_{\lambda\lambda}(\dots) & L_{\lambda x}(\dots) & L_{\lambda y}(\dots) & \dots & L_{\lambda t}(\dots) \\ L_{x\lambda}(\dots) & L_{xx}(\dots) & L_{xy}(\dots) & \dots & L_{xt}(\dots) \\ L_{y\lambda}(\dots) & L_{yx}(\dots) & L_{yy}(\dots) & \dots & L_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{t\lambda}(\dots) & L_{tx}(\dots) & L_{ty}(\dots) & \dots & L_{tt}(\dots) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & n_x(\dots) & n_y(\dots) & \dots & n_t(\dots) \\ n_x(\dots) & L_{xx}(\dots) & L_{xy}(\dots) & \dots & L_{xt}(\dots) \\ n_y(\dots) & L_{yx}(\dots) & L_{yy}(\dots) & \dots & L_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_t(\dots) & L_{tx}(\dots) & L_{ty}(\dots) & \dots & L_{tt}(\dots) \end{pmatrix}$$

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

$\det(\bar{H}) = \dots$

7. Auswertung

$\det(\bar{H}) > 0 \Rightarrow$	lokales Maximum
$\det(\bar{H}) < 0 \Rightarrow$	lokales Minimum
$\det(\bar{H}) = 0 \Rightarrow$	keine Aussage möglich

3.6 Weiszfeld-Iteration

Der Weiszfeld-Algorithmus ist ein iteratives Verfahren zur Berechnung des geometrischen Medians einer Punktemenge im \mathbb{R}^m . Der geometrische Median ist der Punkt \vec{x} der die Summe der gewichteten euklidischen Abstände zu gegebenen Punkten \vec{p}_j minimiert:

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N r_j w_j = \sum_{j=1}^N \|\vec{x} - \vec{p}_j\| w_j \rightarrow \min!$$

Dabei ist $r_j = \|\vec{x} - \vec{p}_j\|$ der euklidische Abstand und $w_j \geq 0$ das **Gewicht** des Punktes \vec{p}_j . Statt die Minimumsbedingung direkt zu lösen, nutzt man die stationäre Bedingung:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\vec{x} - \vec{p}_j}{\|\vec{x} - \vec{p}_j\|} w_j = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^N \frac{w_j}{\|\vec{x}^{(k)} - \vec{p}_j\|} \vec{p}_j}{\sum_{j=1}^N \frac{w_j}{\|\vec{x}^{(k)} - \vec{p}_j\|}}$$

Im oberen Schritt sieht man die Umformung von der stationären Bedingung zur Weiszfeld-Iteration. $\vec{x}^{(k)}$ sei der aktuelle Schätzwert. $\vec{x}^{(k+1)}$ ist der folgende Schätzwert.

4 Support Vector Machine (SVM)

Die Support Vector Machine kann verwendet werden, um ein Modell für das Zuordnen von Daten zu entwickeln. Dadurch wird ein Satz von Punkten, deren Klassifizierung bekannt ist, so linear getrennt, dass der Abstand von der trennenden Geraden zu den beiden Punktgruppen maximal wird. Es resultiert eine einfache Gleichung, mit der sich neue Daten klassifizieren lassen.

4.1 Linear Trennbare Daten

4.1.1 Allgemeines

Datenpunkte: (2D Beispiel)

$A : ((x_1, x_2); y_1), \quad B : ((x_1, x_2); y_2), \quad C : ((x_1, x_2); y_3), \quad \dots, \quad N : ((x_1, x_2); y_n)$

\vec{x}_j sind Datenvektoren

$y_j \in \{\pm 1\}$ klassifiziert die jeweiligen Datenvektoren

Hyperebenen:

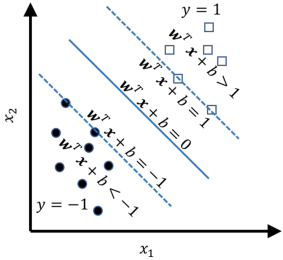
$\vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{x} + b = 0$

\vec{w} : Normalenvektor, $\vec{w} \in \mathbb{R}^d$ und $\vec{w} \neq \vec{0}$

b : Konstante, $b \in \mathbb{R}$

Dimension der Hyperebene = $d - 1$

Abstand der Hyperebene zum Ursprung: $\frac{|b|}{|\vec{w}|}$



Klassifizierung:

$\vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{x} + b > 0 \Rightarrow \vec{x} \text{ gehört zur Klasse } y = +1$

$\vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{x} + b < 0 \Rightarrow \vec{x} \text{ gehört zur Klasse } y = -1$

Klassifizierung der Trainingsdaten:

$\vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{x}_j + b \geq 0 \Rightarrow \vec{x}_j \text{ gehört zur Klasse } y = +1$

$\vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{x}_j + b \leq 0 \Rightarrow \vec{x}_j \text{ gehört zur Klasse } y = -1$

Zielfunktion:

$$\frac{2}{|\vec{w}|} = \frac{2}{w}$$

4.1.2 Das primale Optimierungsproblem

$$\frac{1}{2} \vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2} |\vec{w}|^2 = \frac{1}{2} w^2 \rightarrow \min! \quad \text{s.t.} \quad (\vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{x}_j + b) y_j \geq 1 \quad (j = 1, \dots, N)$$

4.1.3 Das duale Optimierungsproblem

Nebenbedingung:

$$1 - (\vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{x}_j + b) y_j \leq 0 \Leftrightarrow g_j(\vec{w}^{\text{tr}}, b) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, N)$$

Lagrange-Funktion:

Zusammengesetzt aus dem primalen Problem und den Nebenbedingungen.

$$L(\vec{w}^{\text{tr}}, b, \vec{\alpha}) = L(w_1, w_2, \dots, w_d, b, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{w} + \sum_{j=1}^N \alpha_j \left(1 - (\vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{x}_j + b) y_j \right)$$

Stationaritätsbedingungen:

Aus der Bedingung, dass $\text{grad}(L) = 0$ sein muss, lassen sich folgende Formeln ableiten:

$$\text{grad}_{\{\vec{w}^{\text{tr}}, b\}} (L(\vec{w}^{\text{tr}}, b, \vec{\alpha})) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j \vec{x}_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j = 0$$

Das duale Problem:

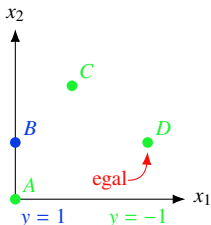
Die oben erhaltenen Summen können nun in die Lagrange-Fkt. eingesetzt werden. Daraus entsteht

$$L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^N \alpha_j \alpha_{j'} y_j y_{j'} \vec{x}_j^{\text{tr}} \cdot \vec{x}_{j'} \rightarrow \max! \quad \text{s.t.} \quad \alpha_j \geq 0 \wedge \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j = 0$$

Vorgehen zum lösen des dualen Optimierungsproblems:

1. Skizze mit Datenpunkten erstellen:

- Einzelne Datenpunkte klassenweise farblich hervorheben
- Falls ein Datenpunkt der gleichen Klasse weit weg von den anderen ist
 \Rightarrow diesen vergessen, da sein $\alpha = 0$ sein wird



2. Nebenbedingungen, Es muss gelten:

a: $\alpha_j \geq 0$

b: $\sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot y_j = 0$

Nach einem α unstellen und anschliessend jenes α (damit die Nebenbedingung miteinbezogen wird) in der Lagrange-Funktion ersetzen

3. Kernel-Matrix aufstellen:

$K(\vec{x}^{tr}; \vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x}$

	\vec{x}_1	\vec{x}_2	...
\vec{x}_1^{tr}	$K(\vec{x}_1^{tr}; \vec{x}_1)$	$K(\vec{x}_1^{tr}; \vec{x}_2)$...
\vec{x}_2^{tr}	$K(\vec{x}_2^{tr}; \vec{x}_1)$	$K(\vec{x}_2^{tr}; \vec{x}_2)$...
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

- Einträge sind die Ergebnisse der Skalarprodukte

4. Lagrange-Funktion aufstellen:

$$L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^N \alpha_j \cdot \alpha_{j'} \cdot y_j \cdot y_{j'} \cdot \vec{x}_j \cdot \vec{x}_{j'} \rightarrow \max!$$

- 2. b und 3 brauchen

5. Alle α finden durch Stationaritätsbedingung

$\nabla L = \vec{0}$

⇒ ersetztes α mit gefundenen α berechnen

6. \vec{w} berechnen:

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j \vec{x}_j$$

7. Konstante b berechnen:

Datenpunkte mit der Klasse $y = 1$ oder $y = -1$ wählen und einsetzen

- Variante 1: Stützvektor-Datenpunkt mit $y = +1$
 $\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{...} + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - \vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{...} = ...$
- Variante 2: Stützvektor-Datenpunkt mit $y = -1$
 $\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{...} + b = -1 \Leftrightarrow b = -1 - \vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{...} = ...$

4.1.4 Euklidische Norm

Die euklidische Norm, ist eine in der Mathematik häufig verwendete Vektornorm. Im zwei- und dreidimensionalen euklidischen Raum entspricht die euklidische Norm der anschaulichen Länge oder dem Betrag eines Vektors und kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

$$|\vec{v}_d| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \dots + d^2}$$

4.2 Nicht linear Trennbare Daten

Sollte ein Datensatz von nicht linear trennbaren Datenpunkten vorliegen, so muss dieser durch eine Transformation linear trennbar gemacht werden. Dadurch werden die Punkte oft in höhere Dimensionen gebracht. Das Finden einer geeigneten Transformation liegt nicht im Ramen dieses Moduls.

Der einzige Unterschied zu der Methode zum linearen trennen von Datenpunkten ist dann, dass stat mit den Datenpunkten \vec{x}_i mit deren durch φ transformierten gegenstück $\vec{\varphi}(\vec{x}_i)$ gerechnet wird.

4.2.1 Transformiertes duales Optimierungsproblem

Nebenbedingungen, Es muss gelten:

a: $\alpha_j \geq 0$

b: $\sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot y_j = 0$

$$L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^N \alpha_j \cdot \alpha_{j'} \cdot y_j \cdot y_{j'} \cdot \underbrace{\vec{z}_j \cdot \vec{z}_{j'}}_{\text{Kernel}} \rightarrow \max!$$

4.2.2 Kernelfunktionen ("Kernel-Trick")

$K(\vec{x}_j; \vec{x}_{j'}) = \vec{z}_j \cdot \vec{z}_{j'} = \vec{\varphi}(\vec{x}_j) \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}_{j'})$

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot y_j \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}_j)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot y_j \cdot K(\vec{x}_j; \vec{x}^*) + b > 0 \Rightarrow \vec{x}^* \text{ gehört zur Klasse } y = +1$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot y_j \cdot K(\vec{x}_j; \vec{x}^*) + b < 0 \Rightarrow \vec{x}^* \text{ gehört zur Klasse } y = -1$$

\vec{x}^* steht für Test-Daten

Lösungsweg: gleiches Vorgehen wie beim linearen Fall.

5 Koordinatensysteme

5.1 2D Koordinatensysteme

Neben den Kartesischen Koordinatensystemen kommen in zweidimensionalen Räumen auch Polare Koordinatensysteme zum Einsatz. Die beiden Systeme können mit Hilfe der Trigonometrie in einander überführt werden.

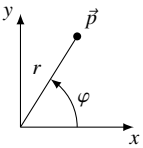
5.1.1 Umrechnung Kartesisch ↔ Polar

Polar zu Kartesisch

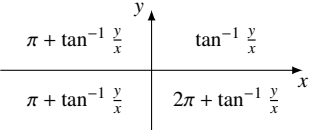
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Kartesisch zu Polar

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$



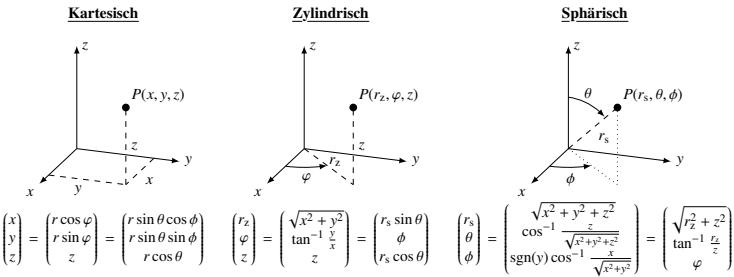
Dabei ist zu beachten, dass \tan^{-1} nur Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ liefert, für φ jedoch $\varphi \in [0, \pi]$ gelten soll. φ wird also, je nach dem in welchem Quadranten sich \vec{p} befindet, nach folgendem Schema berechnet:



Um eine ganzes Integral vom einen Koordinatensystem ins andere zu überführen, muss zum einen die Funktion $f(x, y)$ zu $f(r, \varphi)$ (oder umgekehrt) umgeschrieben, sowie die differentiale angepasst werden. Hier dafür einige gängige Elemente:

	Kartesisch	Polar
x-Achselement	dx	dx = cos φ dr - r sin φ dφ
y-Achselement	dy	dy = sin φ dr + r cos φ dφ
Linielement	ds² = dx² + dy²	ds² = dr² + r² dφ²
Flächenelement	dA = dx dy	dA = r dr dφ

5.2 3D Koordinatensysteme



5.2.1 Umrechnen zwischen Koordinatensystemen

Beim Umrechnen zwischen den Koordinatensystemen gelten im Grunde genommen die obigen Formeln. Dabei muss jedoch in einigen Fällen auf die Wertebereiche von den trigonometrischen Funktionen rücksicht genommen werden.

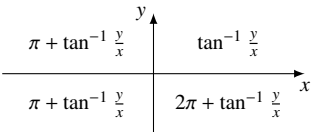
Zylindrisch → Kartesisch:

Sphärisch → Kartesisch:

Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Kartesisch → Zylindrisch:

Der Parameter ϕ wird analog zum zweidimensionalen Fall, je nach dem in welchem Quadranten sich P befindet, nach dem Schema rechts berechnet.



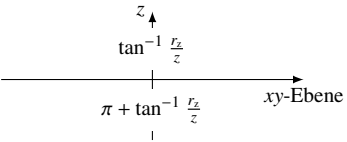
Sphärisch → Zylindrisch:

Kartesisch → Sphärisch:

Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Zylindrisch → Sphärisch:

Auch hier macht der \tan^{-1} Probleme, da er Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ liefert, für θ jedoch $\theta \in [0, \pi]$ gelten soll. Je nach dem, ob P sich oberhalb oder unterhalb der xy -Ebene befindet, wird θ wie rechts berechnet.



6 Integration

6.1 Allgemeines

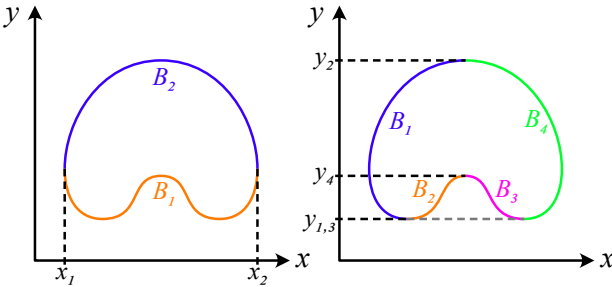
Unter bi- oder multivariater Integration versteht man Integrale, welche sich über zwei oder mehr unabhängige Variablen erstrecken. Sie haben die Form:

∫Ω f(ω) dω = ∫∫⋯∫ f(x1, x2, ..., xn) dx1 dx2 ⋯ dxn | Ω ∈ ℝ^n

6.2 Normalbereiche

Unter einem Normalbereich versteht man einen Bereich, welcher in allen Dimensionen so begrenzt ist, dass eine Funktion f(x1, x2, ..., xn) für jeden Eingangsvektor jeweils nur einen Funktionswert zurückgibt.

Beispiel: Normalbereich in 2D



6.3 Satz von Fubini (Satz von Tonelli)

Der Satz von Fubini besagt, dass die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden kann, sofern die Funktion integrierbar ist.

∫∫_{y1, x1}^{y2, x2} f(x, y) dx dy = ∫∫_{x1, y1}^{x2, y2} f(x, y) dy dx

6.4 Jacobi Matrix und Determinante

Die Jacobi-Matrix besteht aus den partiellen Ableitungen eines Vektorfelds nach den Parametern.

J_f = [[∂f1/∂x1, ∂f1/∂x2, ..., ∂f1/∂xn], [∂f2/∂x1, ∂f2/∂x2, ..., ∂f2/∂xn], ..., [∂fm/∂x1, ∂fm/∂x2, ..., ∂fm/∂xn]]

Anhand der Jacobi-Matrix kann die Längen- und Flächenänderung bei einer Transformation berechnet werden.

6.4.1 Transformation

Koordinatensysteme können mit der Jacobi-Matrix allgemein in andere Systeme transformiert werden.

T : (u, v) -> (x(u, v), y(u, v))

Eine Transformation könnte dann beispielsweise wie folgt aussehen:

dx dy = det(J_T(u, v)) du dv,

dabei ist det(J_T(u, v)) der Skalierungsfaktor.

6.4.2 Längenverzerrung

Die Längenverzerrung in eine Richtung x_k ist definiert als: |∂f/∂x_k| = |k. Spalte von J|

6.4.3 Elementverzerrung (Flächen- / Volumenverzerrung)

Die Elementverzerrung ist definiert als: dV' = |det J| · dV

6.4.4 Längenelement

Ein Längenelement lässt sich ebenfalls aus der Jacobi Matrix berechnen:

d\vec{x}^2 = d\vec{x} · d\vec{x} = (d\vec{u})^tr · (J^tr · J) · (d\vec{u})

6.5 Erster Metrischer Tensor

Der 1. metrische Tensor (oder auch **erste Fundamentalmatrix**, **erste Fundamentalfom**, **metrische Grundform**) beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Kurve oder Fläche im Parameterraum zum Raum, in dem sie sich befindet (z.B. 2D-Fläche im 3D-Raum). Er besteht aus den Skalarprodukten der partiellen Ableitungsvektoren nach den Parametern.

g_ij = ∂S/∂u_i · ∂S/∂u_j = J^tr · J

Folglich ergibt sich die Matrix: [E F; F G] = [g11 g12; g21 g22]

Die Einträge dieser Matrix werden benötigt, um Längen- oder Flächen(elemente) zu berechnen. Anhand der Einträge kann auch ausgesagt werden, ob eine Längen, Flächen und/oder Winkelerhaltung vorliegt:

Längenerhaltung

g_ij = I = [1 0; 0 1]

Flächenerhaltung

det(g_ij) = 1

Winkelerhaltung

Diagonale 1. Fundamentalfom: (g11 = g22) ∧ (g12 = g21 = 0)

Beispiel: Längenberechnung

Gegeben: Flächenkurve als \vec{x}(t) = [u(t); v(t)]

Totales Differential bilden:

ds^2 = \dot{\vec{x}} · \dot{\vec{x}} = \dot{x}_u · \dot{u} + \dot{x}_v · \dot{v}

Für Längenelement Pythagoras anwenden:

(\dot{\vec{x}})^2 = g11 \dot{u}^2 + 2g12 \dot{u} \dot{v} + g22 \dot{v}^2

Das einzelne Längenelement ist somit:

ds = \sqrt{g11 du^2 + 2g12 du dv + g22 dv^2}

ds integrieren, für Gesamtlänge:

s = \int_a^b \sqrt{g11 \dot{u}^2 + 2g12 \dot{u} \dot{v} + g22 \dot{v}^2} dt

Beispiel: Flächenberechnung

Es sei eine parametrisierte Fläche als Funktion \vec{S}(u, v) = [x(u, v); y(u, v); z(u, v)] gegeben. Das Flächenelement lässt sich aus einem Parallelogramm der beiden partiellen Ableitungsvektoren bilden, was dem Betrag des Kreuzproduktes bzw. der Determinante entspricht:

dS = \sqrt{|\det[g_ij]|} du dv = \sqrt{g11g22 - g12^2} du dv = | \partial\vec{S}/\partial u \times \partial\vec{S}/\partial v | du dv

Daraus ergibt sich die Fläche über das Doppelintegral:

S = \int_{u1}^{u2} \int_{v1}^{v2} \sqrt{g11g22 - g12^2} du dv

6.6 Längenintegrale

6.6.1 Längenelemente

ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \underbrace{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}_{\text{Sphärisch}}

6.6.2 Kurvenintegrale 1. Art: Länge einer Funktion

Die Bestimmung der Länge einer Kurve kann in folgende Schritte unterteilt werden:

- 1. **Funktion in die Parameterdarstellung überführen (sofern nicht gegeben):** Dafür wird einer der Parameter (z.B. x oder \theta) = t gesetzt und die anderen Parameter ebenfalls als Funktion von t ausgedrückt.
- 2. **Integral aufstellen:** Das Integral in der Form \int ds wird mit \frac{d\vec{x}}{dt} erweitert.
- 3. **Das Integral lösen**

Beispiel: Längenintegral in kartesischen Koordinaten

Es soll die Länge der Kurve \vec{v}(t) = [x(t); y(t); z(t)] auf dem Intervall [t1, t2] bestimmt werden. Dazu

werden die oben genannten Schritte abgearbeitet:

- 1. **Funktion in die Parameterdarstellung überführen** Hier nicht nötig.
- 2. **Integral aufstellen**

\int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t1}^{t2} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} dt

- 3. **Integral lösen** \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} und \frac{dz}{dt} ausrechnen, einsetzen, integrieren.

6.6.3 Kurvenintegral 2. Art

Beim Kurvenintegral 2. Art wird nicht die tatsächliche Länge einer Funktion, sondern die Länge deren Projektion auf eine Achse bestimmt. Dazu wird stat über alle Koordinatenrichtungen nur über eine der Koordinaten integriert.

Es folgen einige Paare von Kurvenintegralen 2. Art entlang einer Kontur K für Funktionen in expliziter Form und in Parameterdarstellung.

2D, Projektion auf x:

\int_K f(x) dx = \int_{t0}^T \vec{f}(x(t), y(t)) · x'(t) · dt

3D, Projektion auf x:

\int_K f(x, y) dx = \int_{t0}^T \vec{f}(x(t), y(t), z(t)) · x'(t) · dt

6.7 (Ober-)Flächenintegrale

6.7.1 Flächenelemente

Das Bestimmen der Flächenelemente ist in drei Dimensionen nicht wie bei den Längen- und Volumenelementen pauschal möglich. Dies, da jeweils nur über zwei der drei Koordinaten integriert werden muss. Ein einfaches Verfahren für das Berechnen von Flächeninhalten schafft jedoch abhilfe.

6.7.2 Flächeninhalt einer Oberfläche

Für das Berechnen der Oberflächen von Funktionen des Typs $f(a,b)$ in 3D kann die Formel

S = \int_B \int_A \sqrt{(f_a)^2 + (f_b)^2 + 1} da db

verwendet werden. Dabei repräsentieren a und b die beiden Koordinatenrichtungen, in denen sich die Fläche erstreckt. f_a und f_b sind die partiellen Ableitungen der Funktion $f(a,b)$ nach a bzw. b .

Beispiele zur Veranschaulichung:

Es soll die Oberfläche der Funktion $f(x,y)$ im Bereich $x \in [x_1,x_2], y \in [y_1,y_2]$ bestimmt werden. Das entsprechende Integral lautet:

S = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} dx dy

6.7.3 Allgemeine Wendelfläche

Die allgemeine Wendelfläche rotiert und verschiebt eine parametrisierte 3D Kurve $\vec{r}(t) = (x(t),y(t),z(t))$ tr im Raum.

Parametrisierung bei vertikaler Rotationsachse und vertikaler Verschiebungsrichtung (z-Achse):

\vec{S}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ z(t) + c \cdot \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1 \leq t \leq t_2, \wedge \varphi \in \mathbb{R}, c \equiv const.)

Bei $c = 1 \Rightarrow$ Voller Meter bei einer Kurve

6.8 Volumenintegrale

6.8.1 Volumenelemente

dV = \underbrace{dx dy dz}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{r dr d\varphi dz}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}_{\text{Sphärisch}}

6.9 Anwendungsformeln 2D (Doppelintegrale)

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
Flächeninhalt einer ebenen Figur F		
$A = \iint_F dF$	$= \int_X \int_Y dy dx$	$= \int_\Phi \int_R r dr d\varphi$
Oberfläche einer Ebene in drei Dimensionen		
$S = \iint_A \frac{1}{\cos \gamma} dA$	$= \int_X \int_Y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy dx$	$= \int_\Phi \int_R \sqrt{r^2 + r^2 \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} dr d\varphi$
Volumen eines Zylinders		
$V = \iint_A z dA$	$= \int_X \int_Y z dy dx$	$= \int_\Phi \int_R zr dr d\varphi$
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf die x-Achse		
$I_x = \iint_F y^2 dF$	$= \int_X \int_Y (y^2) dy dx$	$= \int_\Phi \int_R (r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi$
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf den Pol (0, 0)		
$I_x = \iint_F r^2 dF$	$= \int_X \int_Y (x^2 + y^2) dy dx$	$= \int_\Phi \int_R (r^2) r dr d\varphi$
Masse einer ebenen Figur F mit Dichtefunktion ϱ		
$m = \iint_F \varrho dF$	$= \int_X \int_Y \varrho(x,y) dy dx$	$= \int_\Phi \int_R \varrho(r,\varphi) r dr d\varphi$
Koordinaten des Schwerpunkts S einer homogenen, ebenen Figur F		
$x_S = \frac{\iint_F x dF}{A}$	$= \frac{\int_X \int_Y x dy dx}{\int_X \int_Y dy dx}$	$= \frac{\int_\Phi \int_R r^2 \cos \varphi dr d\varphi}{\int_\Phi \int_R r dr d\varphi}$
$y_S = \frac{\iint_F y dF}{A}$	$= \frac{\int_X \int_Y y dy dx}{\int_X \int_Y dy dx}$	$= \frac{\int_\Phi \int_R r^2 \sin \varphi dr d\varphi}{\int_\Phi \int_R r dr d\varphi}$

Hinweis: Damit die Flächenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziehbar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

6.10 Anwendungsformeln 3D (Dreifachintegrale)

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
Oberfläche eines Körpers K (Senkrecht zu \hat{a}_r)			
$S = \iint_K dS$	<i>Siehe metrischer Tensor</i>	$= \iint r d\varphi dz$	$= \iint r^2 \sin \theta d\theta d\phi$
Volumen eines Körpers K			
$V = \iiint_K dV$	$= \iiint dx dy dz$	$= \iiint r dr d\varphi dz$	$= \iiint r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$
Trägheitsmoment eines Körpers K, bezogen auf die Z-Achse			
$I_z = \iiint_K r^2 dV$	$= \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz$	$= \iiint (r^2) r dr d\varphi dz$	$= \iiint (r^2 \sin^2 \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$
Masse eines Körpers K mit der Dichtefunktion ϱ			
$M = \iiint_K \varrho dV$	$= \iiint \varrho(x,y,z) dx dy dz$	$= \iiint \varrho(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz$	$= \iiint \varrho(r,\theta,\phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$
Koordinaten des Schwerpunktes S eines homogenen Körpers K			
$x_S = \frac{\iiint_K x dV}{V}$	$= \frac{\iiint (x) dx dy dz}{V}$	$= \frac{\iiint (r \cos \varphi) r dr d\varphi dz}{V}$	$= \frac{\iiint (r \sin \theta \cos \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}{V}$
$y_S = \frac{\iiint_K y dV}{V}$	$= \frac{\iiint (y) dx dy dz}{V}$	$= \frac{\iiint (r \sin \varphi) r dr d\varphi dz}{V}$	$= \frac{\iiint (r \sin \theta \sin \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}{V}$
$z_S = \frac{\iiint_K z dV}{V}$	$= \frac{\iiint (z) dx dy dz}{V}$	$= \frac{\iiint (z) r dr d\varphi dz}{V}$	$= \frac{\iiint (r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}{V}$

Hinweis: Damit die Volumenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziehbar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

7 Vektoranalysis

7.1 Vektorfelder

Das Vektorfeld

\vec{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n

weist jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ zu. Die Notation eines Vektorfelds ist gleich der eines Vektors, wobei Vektorfelder üblicherweise gross geschrieben werden. Weiter kann auch $\vec{V}(\vec{x})$ geschrieben werden, wobei \vec{x} der Stützvektor eines beliebigen Punktes ist.

7.2 Gradient

Wir erinnern uns an den Nabla- oder Del-Operator aus Kapitel 2.2 als Spaltenvektor der verschiedenen Raumableitungen:

\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T

Der Gradient eines Potentialfelds $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ berechnet sich als

\nabla \cdot \phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T \cdot \phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}^T = \vec{F}(\vec{x})

und resultiert in einem Vektorfeld.

- Wird als Potential das elektrische Potential verwendet, entspricht \vec{F} dem (negativen, skalierten) elektrischen Feld.
- Wird als Potential eine Höhe verwendet, entspricht \vec{F} der negativen Hangabtriebskraft.
- Der Gradient kann als mehrdimensionale Ableitung verstanden werden.
- Der Gradient steht senkrecht auf allen Kontouren und zeigt in Richtung hoher Werte.
- Die Multiplikation $\nabla \cdot \phi$ wird normalerweise als $\nabla \phi$ abgekürzt.
- Zudem kann der Gradient auch als $\text{grad } \phi$ geschrieben werden.

7.2.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

\text{grad } V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}

Zylindrisch:

\text{grad } V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}

Sphärisch:

\text{grad } V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{pmatrix}

7.3 Vektorgradient

Die Definition des Gradienten eines Vektorfeldes $\vec{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lautet

\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{a}} = \vec{a} \cdot \text{grad } \vec{V},

wobei \vec{a} ein beliebiger Vektor und $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{a}}$ die Richtungsableitung von \vec{V} nach \vec{a} ist. Daraus kann man schließen, dass der Vektorgradient als

\text{grad } \vec{V} = \nabla \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial V_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \quad (= \nabla^T \cdot \vec{V})

berechnet werden kann.

- $\nabla \vec{V}$ entspricht der Jacobi-Matrix \mathbf{J} . Mit dieser kann die Hesse-Matrix einer skalaren Funktion F (siehe Kap. 3) bestimmt werden:

\mathbf{H}(F) = \mathbf{J}^T (\nabla F) = (\text{grad grad } F)^T

- Der Vektorgradient wird als $\nabla \vec{V}$ geschrieben, da die Notation $\nabla^T \cdot \vec{V}$, die den tatsächlichen Rechenweg beschreibt, etwas umständlich ist.
- Die Notation $\nabla \cdot \vec{V}$ ist nicht nur falsch, sondern zudem bereits durch die Divergenz besetzt.

7.4 Divergenz (Volumenableitung)

Die Divergenz oder Volumenableitung eines Vektorfelds

∇ • V(x) = (∂/∂x1, ∂/∂x2, ..., ∂/∂xn)^T • (v1(x), v2(x), ..., vn(x))^T
= ∂v1/∂x1(x) + ∂v2/∂x2(x) + ... + ∂vn/∂xn(x)

ist ein Skalarfeld, das beschreibt, wie stark das Vektorfeld an einem gegebenen Punkt "nach aussen gerichtet" ist.

- Wird als Vektorfeld die Fließgeschwindigkeit einer Flüssigkeit eingesetzt, so entspricht die Divergenz dem Fluss aus einem Punkt heraus.
- An Punkten mit positiver Divergenz fließt Flüssigkeit hinaus (Quelle)
- An Punkten mit negativer Divergenz fließt Flüssigkeit hinein (Senke)
- Wird das E-Feld eingesetzt, so entspricht die Divergenz der Ladungsdichte.
- Pos. Ladungsdichte entspricht pos. Divergenz, bewirkt eine Quelle im E-Feld.
- Neg. Ladungsdichte entspricht neg. Divergenz, bewirkt eine Senke im E-Feld.
- Das Skalarprodukt sollte zwingend ∇ • V ausschreiben werden, da sonst Verwechslungsgefahr mit dem Vektorgradienten besteht.
- Die Notation div V ist ebenfalls gebräuchlich.

Eine alternative und gut visualisierbare Definition der Divergenz, ist in zwei dimensionen

div V = ∇ • V = lim_{A -> 0} (∫_{C=∂A} V • n ds) / A

wobei A eine Fläche mit den Normalen n und C dessen Kontur darstellt. Verallgemeinert für die Anwendung in mehr als 2 Dimensionen lautet die Definition

∇ • V = div V = lim_{Ω -> 0} (∫_{C=∂Ω} V • n ds) / Ω

wobei Ω ein Bereich im Raum R^n und C dessen Kontur in R^{n-1} ist.

7.4.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

div V = ∇ • V = ∂Vx/∂x + ∂Vy/∂y + ∂Vz/∂z

Zylindrisch:

div V = ∇ • V = 1/r ∂(r • Vr)/∂r + 1/r ∂Vφ/∂φ + ∂Vz/∂z

Sphärisch:

div V = ∇ • V = 1/r^2 ∂(r^2 • Vr)/∂r + 1/(r sin θ) ∂(sin θ • Vθ)/∂θ + 1/(r sin θ) ∂Vφ/∂φ

7.5 Laplace Operator Δ

Der Laplaceoperator ist nichts anderes als die Divergenz des Gradienten eines Skalarfelds und vergleichbar mit der zweiten Ableitung. Folglich gilt

ΔV(x1 ... xn) = ∇ • (∇V(x1 ... xn)) = ∇^2 V(x1 ... xn) = ∂^2 V/∂x1^2 + ∂^2 V/∂x2^2 + ... + ∂^2 V/∂xn^2

wobei das Resultat ein Skalarfeld ist.

7.5.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

ΔV(x, y, z) = ∂^2 V/∂x^2 + ∂^2 V/∂y^2 + ∂^2 V/∂z^2

Zylindrisch:

ΔV(r, φ, z) = 1/r ∂/∂r (r ∂V/∂r) + 1/r^2 ∂^2 V/∂φ^2 + ∂^2 V/∂z^2

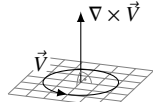
Sphärisch:

ΔV(r, θ, φ) = 1/r^2 ∂/∂r (r^2 ∂V/∂r) + 1/(r^2 sin θ) ∂/∂θ (sin θ ∂V/∂θ) + 1/(r^2 sin^2 θ) ∂^2 V/∂φ^2

7.6 Rotation eines Vektorfelds (rot, curl)

Die Rotation eines Vektorfelds, auch Curl genannt, beschreibt, wie stark ein Vektorfeld um einen gegebenen Punkt "rotiert" und wird als

rot V = ∇ × V = (∂/∂x, ∂/∂y, ∂/∂z) × (Vx, Vy, Vz) = (∂Vz/∂y - ∂Vy/∂z, ∂Vx/∂z - ∂Vz/∂x, ∂Vy/∂x - ∂Vx/∂y)



berechnet. Der resultierende Vektor ist dabei die Rotationsachse, wobei die Rechte-Hand-Regel gilt.

Wie bei der Divergenz kann auch hier zur Hilfe der Verständlichkeit ein Limitsatz als Definition beigezogen werden. So sei

∇ × V = rot V = n̂ lim_{S -> 0} (∫_S V • dI) / S

wobei S ein planare Testfläche mit normale n̂ und C dessen Kontur ist. Der Curl ist grundsätzlich nur in drei Raumdimensionen definiert. Wenn die Rotation eines auf der Ebene z = 0 definierten Vektorfelds berechnet werden soll, kann die obige Formel mit Vz = 0 angepasst werden:

rot V(x, y) = ∇ × V(x, y) = (∂/∂x, ∂/∂y, 0) × (Vx, Vy, 0) = (0, 0, ∂Vx/∂y - ∂Vy/∂x)

- Mit dem Curl-Operator kann z.B. elegant beschrieben werden, dass Wirbel im E-Feld auf zeitliche Änderungen im magnetischen Feld zurückzuführen sind:

∇ × E = -∂H/∂t

7.6.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

rot V = ∇ × V = (∂Vz/∂y - ∂Vy/∂z, ∂Vx/∂z - ∂Vz/∂x, ∂Vy/∂x - ∂Vx/∂y) oder: ∇ × V = (i, j, k; ∂/∂x, ∂/∂y, ∂/∂z; Vx, Vy, Vz) (Determinante!)

Zylindrisch:

rot V = ∇ × V = (1/r ∂Vz/∂φ - ∂Vφ/∂z, ∂Vr/∂z - ∂Vz/∂r, 1/r (∂(r • Vφ)/∂r - ∂Vr/∂φ))

Sphärisch:

rot V = ∇ × V = (1/(r sin θ) (∂(Vφ • sin θ)/∂θ - ∂Vθ/∂φ), 1/r (1/sin θ ∂Vz/∂φ - ∂(r • Vφ)/∂r), 1/r (∂(r • Vθ)/∂r - ∂Vr/∂θ))

7.7 Rechenregeln mit ∇

Für das dalegen der Rechenregeln werden die folgenden Platzhalter verwendet:

- A, B: Skalarfelder (R^n -> R)
- A', B': Vektorfelder (R^n -> R^n)
- F: Skalare Funktion (R^n -> R)
- c: Konstante

Gradienten:

grad(A + B) = grad(A) + grad(B) <=> ∇(A + B) = ∇A + ∇B
grad(A • B) = A grad(B) + B grad(A) <=> ∇(A • B) = A • ∇B + B • ∇A
grad(c • A) = c grad(A) <=> ∇(c • A) = c • ∇A
grad(F(A)) = F'(A) • grad A <=> ∇F(A) = F'(A) • ∇A

Divergenzen:

div(A • B) = div(A') + div(B') <=> ∇ • (A' • B') = (∇ • A') • B' + A' • ∇B'
div(A • B) = A div(B) + B grad(A) <=> ∇ • (A • B) = A • ∇B + B • ∇A
div(A' × B') = B' • rot(A') - A' • rot(B') <=> ∇ • (A' × B') = B' • ∇ × A' - A' • ∇ × B'
div(c • A') = c div(A') <=> ∇ • (c • A') = c • ∇ • A'

Curl:

rot(A' + B') = rot(A') + rot(B') <=> ∇ × (A' + B') = (∇ × A') + (∇ × B')
rot(A • B) = A rot(B) + (grad(A) × B') <=> ∇ × (A • B) = A • ∇ × B' + (∇A × B')
rot(cA') = c rot(A') <=> ∇ × (cA') = c • ∇ × A'
rot(A' × B') = (B' • ∇)A' - (A' • ∇)B' + A' div B' - B' div A' <=> ∇ × (A' × B') = (B' • ∇)A' - (A' • ∇)B' + A' div B' - B' div A'

Laplaceoperator:

div grad A = ΔA <=> ∇ • (∇A) = ΔA
rot(ΔA') = Δ rot A' <=> ∇ × (ΔA') = Δ(∇ × A')

Kombinationen:

div rot A' = 0 <=> ∇ • (∇ × A') = 0
div grad A = ΔA <=> ∇ • ∇A = ΔA
rot grad A' = 0 <=> ∇ × (∇A) = 0
rot rot A' = grad div A' - ΔA' <=> ∇ × (∇ × A') = ∇(∇ • A') - ΔA'

8 Anwendungen

8.1 Integralsatz von Gauss

Der Integralsatz von Gauss

$$\oint_{S=\partial V} \vec{A} \cdot \hat{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \vec{A} \, dV$$

beschreibt, dass die aufintegrierte Divergenz in einem Körper gleich dem Fluss durch die Kontur dieses Körpers sein muss. Die Normale \hat{n} steht dabei senkrecht auf dem Oberflächenelement dS und zeigt nach aussen.

8.1.1 Green’sches Integraltheorem

Das Green’sche Integraltheorem (auch Satz von Green)

$$\oint_{C=\partial S} \vec{A} \cdot \hat{n} \, dl = \iint_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx \, dy$$

ist der zweidimensionale Spezialfall des Integralsatzes von Gauss. Auch hier zeigt die normale \hat{n} nach aussen.

Green’sche Identität Nr. 1 Wird $\vec{A} = U_1 \nabla U_2$ eingesetzt, so resultiert aufgrund der Produktregel

$$\oint_{S=\partial V} (U_1 \nabla U_2) \cdot \hat{n} \, dS = \int_V (U_1 \nabla U_2 + \nabla U_1 \cdot \nabla U_2) \, dV.$$

Green’sche Identität Nr. 2 Wird $\vec{A} = U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1$ eingesetzt, so resultiert

$$\oint_{S=\partial V} (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1) \cdot \hat{n} \, dS = \int_V (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1) \, dV.$$

Mit $U_1 = 1$ resultiert die etwas handlichere Identität

$$\oint_{S=\partial V} (\nabla U_2) \cdot \hat{n} \, dS = \int_V (\nabla U_2) \, dV.$$

8.2 Integralsatz von Stokes

Der Integralsatz von Stokes

$$\int_S \text{rot } \vec{A} \cdot \hat{n} \, dS = \oint_{C=\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

sagt aus, dass durch das Integrieren eines Vektorfelds \vec{A} entlang der Kontur C einer Fläche S auf die mittleren Verwirbelungen im Innern der Fläche geschlossen werden kann.

Die Normale \hat{n} und die Integrationsrichtung \vec{r} müssen dabei die Rechte-Hand-Regel erfüllen.

8.3 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

Die Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi(\vec{r}) = f(\vec{r}) \quad \text{oder} \quad \nabla^2 \phi(\vec{r}) = f(\vec{r})$$

findet in der Physik oft Anwendung. ϕ beschreibt dabei ein skalares Potentialfeld, f wird Quellenfunktion genannt und \vec{r} ist ein beliebiger Stützvektor.

8.3.1 Laplace-Gleichung

Die Laplace-Gleichung

$$\Delta \phi = f = 0$$

ist der Spezialfall der Poisson-Gleichung, bei dem keine Quellenfunktion f besteht.

8.4 Prinzip von d’Alambert

Das Prinzip von d’Alembert ist ein Vorgehen zum Lösen von Wellengleichungen. Die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

mit den Initialbedingungen

$$u(0, z) = f(z) \quad \text{bzw.} \quad u(0, z) = f(z) \wedge \frac{\partial u}{\partial t}(0, z) = g(z)$$

wird gelöst durch

$$u(t, z) = \frac{1}{2} (f(z+ct) + f(z-ct)) \quad \text{bzw.} \quad u(t, z) = \frac{1}{2} (f(z+ct) + f(z-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{z-ct}^{z+ct} g(s) ds.$$

8.5 Maxwell-Gleichungen

8.5.1 Gaussssches Gesetz

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

8.5.2 Gaussssches Gesetz des Magnetismus

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

8.5.3 Induktionsgesetz

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

8.5.4 Durchflutungsgesetz

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

Zusammengesetzt aus dem **Ampèreschem Gesetz** $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ und Maxwells Erweiterung, der Verschiebungsstromdichte $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

9 Anhang

9.1 Trigonometrie

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot(\alpha)$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

9.1.1 Komplexe Darstellung

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \qquad \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

9.1.2 Beziehungen zwischen $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$$\begin{aligned} \sin(-a) &= -\sin(a) & \cos(-a) &= \cos(a) \\ \sin(\pi - a) &= \sin(a) & \cos(\pi - a) &= -\cos(a) \\ \sin(\pi + a) &= -\sin(a) & \cos(\pi + a) &= -\cos(a) \end{aligned}$$

9.1.3 Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \tan(a \pm b) &= \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)} \end{aligned}$$

9.1.4 Produkte

$$\begin{aligned} \sin(a) \cdot \sin(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \cos(a) \cdot \cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b)) \\ \sin(a) \cdot \cos(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b)) \end{aligned}$$

9.1.5 Winkelveiﬀache und Halbwinkel

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= 2 \sin(a) \cdot \cos(a) \\ \sin(3a) &= 3 \sin(a) - 4 \sin^3(a) \\ \sin(4a) &= 8 \cos^3(a) \cdot \sin(a) - 4 \cos(a) \cdot \sin(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ \cos(3a) &= 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a) \\ \cos(4a) &= 8 \cos^4(a) - 8 \cos^2(a) + 1 \\ \sin\left(\frac{a}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(a))} & \cos\left(\frac{a}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(a))} \end{aligned}$$

9.1.6 Potenzen

$$\begin{aligned} \sin^2(a) &= \frac{1}{2} (1 - \cos(2a)) \\ \cos^2(a) &= \frac{1}{2} (1 + \cos(2a)) \end{aligned}$$

9.2 Ableitungsregeln

$$\begin{aligned} \text{Produktregel} & \quad (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \text{Quotientenregel} & \quad \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \\ \text{Kettenregel} & \quad g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

9.3 Ableitungen

Funktion $f(x)$	Ableitung $\frac{df(x)}{dx}$	Funktion $f(x)$	Ableitung $\frac{df(x)}{dx}$
1	0	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
x^a	$a \cdot x^{a-1}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	a^x	$\ln(a) \cdot a^x$