

# Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zraggen

Autoren:

Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:

0.1.20240610

<https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen>



## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren</b>	<b>2</b>		
1.1 Dimensionen	2		
1.2 Schnitte	2		
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...	2		
<b>2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variät)</b>	<b>3</b>		
2.1 Partielle Ableitung	3		
2.2 Gradient (Nabla-Operator)	3		
2.3 Totale Ableitung	3		
2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)	3		
2.5 DGL	3		
2.6 Richtungselement (Tangentiellinie an Kontouren)	3		
2.7 Gradientenfeld $\perp$ Kontouren	3		
2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?	3		
2.9 Richtungs-Ableitung	3		
<b>3 Extrema von Funktionen finden</b>	<b>4</b>		
3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden	4	3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden	4
3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden	4	3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden	4
3.3 Lokales oder Globales Extremum	4		
		<b>4 Integration (bi-variät)</b>	<b>5</b>
		4.1 2D	5
		4.2 Normalbereich	5
		4.3 Polar	5
		4.4 2D Transformation Polar zu Kartesisch	5
		4.5 Derivative, Ableitung	5
		4.6 3D Volumenberechnung	5
		4.7	5
		4.8	5
		<b>5 Integration (multi-variät)</b>	<b>6</b>
		<b>6 Differenziation und Integration von Kurven</b>	<b>6</b>
		<b>7 (Ober-)Flächenintegrale</b>	<b>6</b>
		<b>8 Vektoranalysis</b>	<b>6</b>

# 1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

## 1.1 Dimensionen

$$f: \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^n)$$

- $m$  Anzahl Dimensionen von  $\mathbb{D}_f$ , wobei  $m \in \mathbb{N}$
- $n$  Anzahl Dimensionen von  $\mathbb{W}_f$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$
- $\vec{f}$  wenn Output vektoriell

⚠ Variablen sind abhängig von einander!

### Multi-Variat:

$f$  ist "Multi-Variat", wenn:

- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

$f$  ist **nicht** "Multi-Variat", wenn:

- Input **und** Output Skalare sind

#### 1.1.1 Raumzeit

$$\left. \begin{array}{l} \text{Raum 3D } (x; y; z) \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t) \mathbb{R}^1 \end{array} \right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t; x; y; z)$$

#### 1.1.2 Stationärer Fall

$$t \rightarrow \infty \rightarrow \text{Stationär}$$

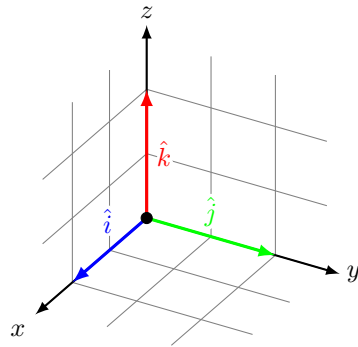
$$T(x; y; z) \frac{\Delta T}{\Delta t} \rightarrow 0$$

#### 1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



## 1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion  $\rightarrow$  Teilmenge vom Definitionsbereich  $\mathbb{D}_f$

### 1.2.1 Partielle Funktion

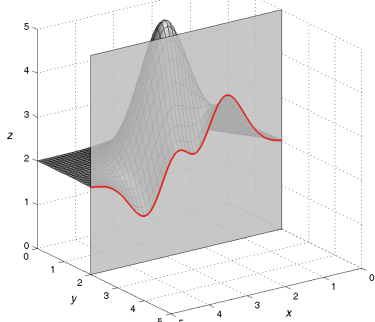
- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
- **Alle** anderen Variablen sind fix!

⚠  $\mathbb{W}_f$  Analyse!

### Beispiel: Schnitte

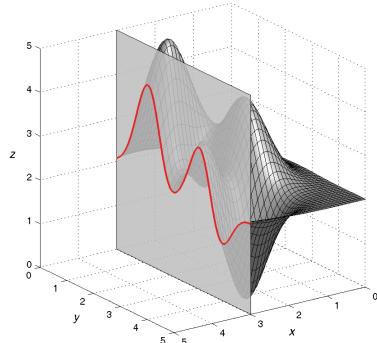
#### x-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den  $(x; y; z)$  Punkten  $(x; y_0; f(x; y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert  $\Leftrightarrow y_0 = 2$



#### y-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den  $(x; y; z)$  Punkten  $(x_0; y; f(x_0; y))$
- x-Wert ist fixiert  $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel



#### 1.2.2 Bedingungen

Initialbedingungen  $\rightarrow$  Beziehen sich auf die **Zeit**

Randbedingungen  $\rightarrow$  Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

## 1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...

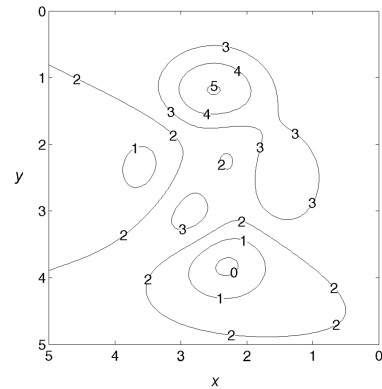
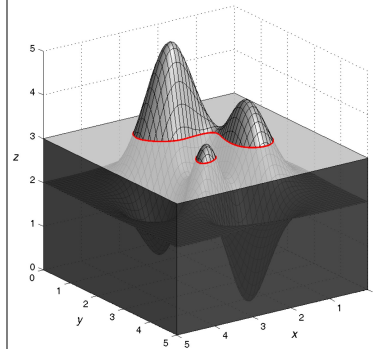
Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion  $f$  **konstant**.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \in \mathbb{D}_f$$

## Beispiel: Höhenlinien

### Kontouren (Höhenlinien)

- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den  $(x; y; z)$  Punkten  $(x; y; f(x; y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert  $\Leftrightarrow z_0 = 3$



## 2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat)

$$f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}$$

### 2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

#### Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x, y): y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \text{ **einzig**e freie Variable}$$

#### Notationen

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ordnung: } f(x; y_0) &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x; y_0) \\ 2. \text{ Ordnung: } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \end{aligned}$$

#### 2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn  $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$  &  $f_{yx}$  **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

### 2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

$$\text{"Gradient"} \rightarrow \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}$$

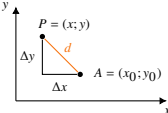
### 2.3 Totale Ableitung

Für Fehlerrechnung benutzt, da man hierbei die Abstände von  $(x; y; z)$  zu einem festen Punkt  $(x_0; y_0; z_0)$  erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f; \underbrace{(x_0, y_0, \dots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[1 \times 2 \text{ Matrix}]{\text{gute Approximation}} \mathbb{R}^1; \text{ "gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \dots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + f(x_0; y_0) + R_1$$

Wobei  $R_1$  dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d \text{")}$$


$$\begin{aligned} D(f; (x_0; y_0)) &= \left( D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \right) \\ &= (\nabla f)^{\text{tr}} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A \end{aligned}$$

### 2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

#### 2.4.1 Tangentialebene

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

#### 2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

$$df \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{bezüglich } A = (x_0; y_0)$$

#### 2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

$$\left( \begin{array}{l} f = c = \text{const.} \quad | d(\dots) \\ df = dc \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right) \quad f_x dx + f_y dy = 0 \quad \text{für Kontourlinien}$$

### 2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = - \frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{dx}{dy} = - \frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



### 2.5 DGL

$$y' = \left( - \frac{f_x}{f_y} \right); y(x_0) = y_0$$

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

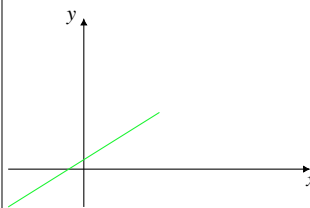
### 2.6 Richtungselement (Tangentiellinie an Kontouren)

$$\vec{r} = \left( dx = h; dy = y' dx = - \frac{f_x}{f_y} dx \right)^{\text{tr}}$$

### 2.7 Gradientenfeld $\perp$ Kontouren

$$\text{Skalarprodukt} \rightarrow \nabla f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy = y' dx \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

### 2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?



$$\begin{aligned} s(t) &: P_0 + t \cdot \hat{v} \mid t \in \mathbb{R} \\ s(t) &: f(x_0 + t \cdot \hat{v}_1; y_0 + t \cdot \hat{v}_2) \end{aligned}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t) : t \mapsto \overbrace{\begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v_1 \\ y_0 + t \cdot v_2 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \mapsto f(x, y)$$

### 2.9 Richtungs-Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \stackrel{!}{=} D(f; (x_0; y_0)) \cdot \hat{v} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \text{grad}(f)^{\text{tr}} \cdot \hat{v} = f_x \cdot v_1 + f_y \cdot v_2$$

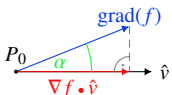
#### Beispiel: Richtungs-Ableitung

$$\vec{x} : \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_1} = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 = \underline{f_x}$$

#### 2.9.1 Spezialfälle

- $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  rechter Winkel
- $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}$  extremal
  - $\alpha = 0$  (max):  $\nabla f \cdot \hat{v} > 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$  liegt auf  $\hat{v}$
  - $\alpha = \pi$  (min):  $\nabla f \cdot \hat{v} < 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$  liegt invers auf  $\hat{v}$

$$\text{Trigo: } \nabla f \cdot \hat{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \Rightarrow \cos(\alpha) \cdot |\nabla f|$$



3 Extrema von Funktionen finden

Stationaritätsbedingung: ∇f  $\stackrel{!}{=} \vec{0}$

3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇f = (f\_x / f\_y)  $\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

f\_xx = ... f\_xy = f\_yx = ... f\_yy = ...

3. Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:

Δ = f\_xx(x\_0; y\_0) · f\_yy(x\_0; y\_0) - (f\_xy(x\_0; y\_0))^2

4. Auswertung:

Δ > 0	AND	f_xx(x_0; y_0) < 0	⇒	lokales Maximum
Δ > 0	AND	f_yy(x_0; y_0) < 0	⇒	lokales Maximum
Δ > 0	AND	f_xx(x_0; y_0) > 0	⇒	lokales Minimum
Δ > 0	AND	f_yy(x_0; y_0) > 0	⇒	lokales Minimum
Δ < 0			⇒	Sattelpunkt
Δ = 0			?	Multi-variate-Taylor-logik ...

3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇f = (f\_x / f\_y / ... / f\_t)  $\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:

H = (f\_xx f\_xy ... f\_xt / f\_yx f\_yy ... f\_yt / ... / f\_tx f\_ty ... f\_tt) • Symmetrien beachten! • Nicht doppelt rechnen! ⇒ f\_xt = f\_tx

3. Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen füllen:

H(x\_0, y\_0, ... t\_0) = (f\_xx(x\_0, y\_0, ... t\_0) f\_xy(x\_0, y\_0, ... t\_0) ... f\_xt(x\_0, y\_0, ... t\_0) / f\_yx(x\_0, y\_0, ... t\_0) f\_yy(x\_0, y\_0, ... t\_0) ... f\_yt(x\_0, y\_0, ... t\_0) / ... / f\_tx(x\_0, y\_0, ... t\_0) f\_ty(x\_0, y\_0, ... t\_0) ... f\_tt(x\_0, y\_0, ... t\_0))

4. Eigenwerte λ\_i der Hesse-Matrix bestimmen:

det (H(x\_0, y\_0, ... t\_0) - λ · E) = 0 Nullstellen λ\_i finden → Eigenwerte

Zur Erinnerung:

E = (1 0 ... 0 / 0 1 ... 0 / ... / 0 0 ... 1) λ · E = (λ 0 ... 0 / 0 λ ... 0 / ... / 0 0 ... λ)

H(x\_0, y\_0, ... t\_0) - λ · E = ...

... = (f\_xx(x\_0, y\_0, ... t\_0) - λ f\_xy(x\_0, y\_0, ... t\_0) ... f\_xt(x\_0, y\_0, ... t\_0) / f\_yx(x\_0, y\_0, ... t\_0) f\_yy(x\_0, y\_0, ... t\_0) - λ ... f\_yt(x\_0, y\_0, ... t\_0) / ... / f\_tx(x\_0, y\_0, ... t\_0) f\_ty(x\_0, y\_0, ... t\_0) ... f\_tt(x\_0, y\_0, ... t\_0) - λ)

5. Auswertung:

λ_i < 0 ∀i	⇒	lokales Maximum
λ_i > 0 ∀i	⇒	lokales Minimum
λ_i > 0 und λ_i < 0	⇒	Sattelpunkt

Erklärung:

- λ\_i < 0 ∀i ⇔ Alle λ\_i sind negativ
- λ\_i > 0 ∀i ⇔ Alle λ\_i sind positiv

3.3 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion f(x, y, ... , t) gilt:

f(x, y, ... , t) ≤ M_max	∀(x, y, ... , t) ∈ D_f	⇒	globales Maximum
f(x, y, ... , t) > M_max	∃(x, y, ... , t) ∈ D_f	⇒	kein globales Maximum
f(x, y, ... , t) ≥ M_min	∀(x, y, ... , t) ∈ D_f	⇒	globales Minimum
f(x, y, ... , t) < M_min	∃(x, y, ... , t) ∈ D_f	⇒	kein globales Minimum

M\_max: grösstes lokales Maximum

M\_min: kleinstes lokales Minimum

3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: n(x, y)  $\stackrel{!}{=} 0$  Nebenbedingung: x + y = 1 Standardform der Nebenbedingung: x + y - 1 = 0

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

L(x, y, λ) = f(x, y) + λ · n(x, y) Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇L = (L\_x / L\_y / L\_λ)  $\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

L\_λλ  $\stackrel{!}{=} 0$  L\_λx = L\_xλ = n\_x = ... L\_xx = ... L\_λy = L\_yλ = n\_y = ... L\_yy = ... L\_xy = L\_yx = ...

5. Geränderte Hesse Matrix H aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

H(x\_0, y\_0) = (L\_λλ(x\_0, y\_0) L\_λx(x\_0, y\_0) L\_λy(x\_0, y\_0) / L\_xλ(x\_0, y\_0) L\_xx(x\_0, y\_0) L\_xy(x\_0, y\_0) / L\_yλ(x\_0, y\_0) L\_yx(x\_0, y\_0) L\_yy(x\_0, y\_0) / n\_x(x\_0, y\_0) n\_x(x\_0, y\_0) n\_y(x\_0, y\_0) / n\_y(x\_0, y\_0) L\_yx(x\_0, y\_0) L\_yy(x\_0, y\_0) / n\_y(x\_0, y\_0) L\_yx(x\_0, y\_0) L\_yy(x\_0, y\_0))

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

det (H) = ...

7. Auswertung

det (H) > 0	⇒	lokales Maximum
det (H) < 0	⇒	lokales Minimum
det (H) = 0	⇒	keine Aussage möglich

3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: n(x, y, ..., t)  $\stackrel{!}{=} 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

L(x, y, ..., t, λ) = f(x, y, ..., t) + λ · n(x, y, ..., t) Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇L = (L\_x / L\_y / ... / L\_t / L\_λ)  $\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

L\_λλ  $\stackrel{!}{=} 0$  L\_λx = L\_xλ = n\_x = ... L\_xy = L\_yx L\_xx = ... L\_λy = L\_yλ = n\_y = ... L\_xt = L\_tx L\_yy = ... L\_yt = L\_ty L\_tt = ... L\_λt = L\_tλ = n\_t = ...

5. Geränderte Hesse Matrix H aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

H(x\_0, y\_0, ... t\_0) = (L\_λλ(...) L\_λx(...) L\_λy(...) ... L\_λt(...) / L\_xλ(...) L\_xx(...) L\_xy(...) ... L\_xt(...) / L\_yλ(...) L\_yx(...) L\_yy(...) ... L\_yt(...) / ... / L\_tx(...) L\_ty(...) L\_tt(...) / n\_x(...) n\_x(...) n\_y(...) ... n\_t(...) / n\_y(...) L\_yx(...) L\_yy(...) ... L\_yt(...) / ... / n\_t(...) L\_tx(...) L\_ty(...) ... L\_tt(...))

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

det (H) = ...

7. Auswertung

det (H) > 0	⇒	lokales Maximum
det (H) < 0	⇒	lokales Minimum
det (H) = 0	⇒	keine Aussage möglich

4 Integration (bi-variat)

4.1 2D

$$\int\int_{\Omega} f(x;y) \cdot dx \cdot dy = \int_X \left( \int_Y f(x;y) \cdot dy \right) \cdot dx$$

wenn  $\int\int |f(x;y)| dx dy < \infty$

4.2 Normalbereich

Schnitte sind Strecken (Intervalle) für x, y, ...

4.3 Polar

$$dx \cdot dy = r \cdot d\phi \cdot dr$$

4.4 2D Transformation Polar zu Kartesisch

T = Transformation

Polar  $(r, \phi) \xrightarrow{T} (x, y)$  Kartesisch

$$\begin{pmatrix} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \mathbb{R}^{2D}$$

Die Funktionen für x und y sind skalare Funktion.

$x = x(r; \varphi) \quad y = y(r; \varphi)$

4.5 Derivative, Ableitung

4.6 3D Volumenberechnung

$$V = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[ \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} f(x;y) \, dy \right] dx$$

4.7

4.8

<b>5</b>	<b>Integration (multi-variät)</b>
<b>6</b>	<b>Differenziation und Integration von Kurven</b>
<b>7</b>	<b>(Ober-)Flächenintegrale</b>
<b>8</b>	<b>Vektoranalysis</b>