# Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 – Prof. Dr. Bernhard Zgraggen
Autoren:
Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

V 0.1.20240426
https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen

## 1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

### 1.1 Dimensionen

$$f : \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^{\color{blue}m}) \longrightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^{\color{green}n})$$

| | |
|---|---|
| $\color{blue}m$ | Anzahl Dimensionen von $\mathbb{D}_f$, wobei $\color{blue}m \in \mathbb{N}$ |
| $\color{green}n$ | Anzahl Dimensionen von $\mathbb{W}_f$, wobei $\color{green}n \in \mathbb{N}$ |
| $\vec{f}$ | wenn Output vektoriell |

**⚠ Variablen sind abhängig von einander!**

**Multi-Variat:**

$f$ ist "Multi-Variat", wenn:
- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

$f$ ist nicht "Multi-Variat", wenn:
- Input **und** Output Skalare sind

#### 1.1.1 Raumzeit

$$\left.\begin{array}{r}\text{Raum 3D } (x;y;z)\ \mathbb{R}^3\\ \text{Zeit 1D } (t)\ \mathbb{R}^1\end{array}\right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t;x;y;z)$$

#### 1.1.2 Stationärer Fall

$$t \to \infty \to \text{Stationär}$$

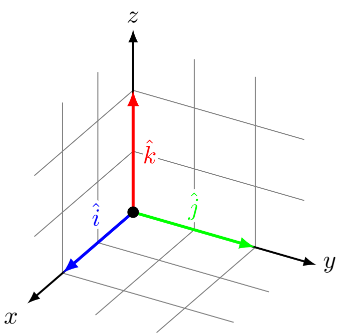
$$T(x;y;z)\quad \frac{\Delta T}{\Delta t} \to 0$$

#### 1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$




### 1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion → Teilmenge vom Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$

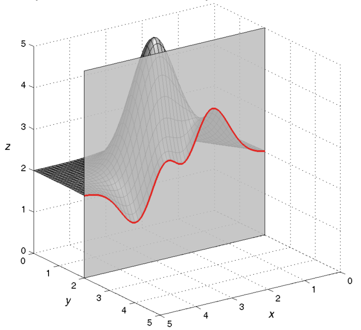
#### 1.2.1 Partielle Funktion

- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
- **Alle** anderen Variablen sind fix!

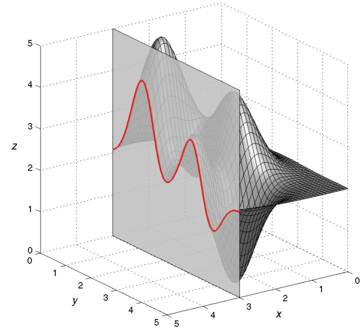
**⚠ $\mathbb{W}_f$ Analyse!**

**Beispiel: Schnitte**

**x-Linien**
- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x;y;z)$ Punkten $(x;y_0;f(x;y_0))$
- $x$-Wert ist variabel
- $y$-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow y_0 = 2$




**y-Linien**
- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt.
- Bestehen aus den $(x;y;z)$ Punkten $(x_0;y;f(x_0;y))$
- $x$-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- $y$-Wert ist variabel




#### 1.2.2 Bedingungen

| | | |
|---|---|---|
| **Initial**bedingungen | → | Beziehen sich auf die **Zeit** |
| **Rand**bedingungen | → | Beziehen sich auf **räumliche Ebenen** |

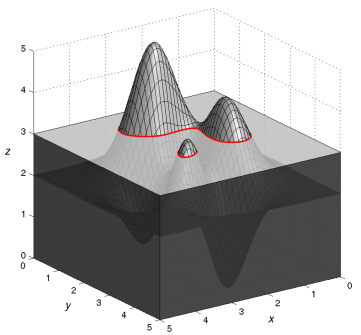
### 1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...

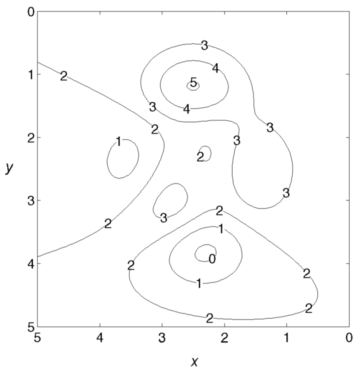
Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion $f$ **konstant**

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \subset \mathbb{D}_f$$

**Beispiel: Höhenlinien**

**Kontouren (Höhenlinien)**
- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x;y;z)$ Punkten $(x;y;f(x;y) = z_0)$
- $x$-Wert ist variabel
- $y$-Wert ist variabel
- $z$-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow z_0 = 3$




## 2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat)

### 2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

**Beispiel: Bi-Variate Funktion**

$$f(x,y):\ y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0;\quad x \textbf{ einzige} \text{ freie Variable}$$

**Notationen**

$$\text{1. Ordnung:}\quad f(x;y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x;y_0)$$

$$\text{2. Ordnung:}\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

#### 2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$ & $f_{yx}$ **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

### 2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

$$\underbrace{\nabla}_{\text{"Gradient"}} f = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \vdots\end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}$$

### 2.3 Totale Ableitung

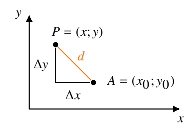
Für Fehlerrechnung benützt, da man hierbei die Abstände von $(x;y;z)$ zu einem festen Punkt $(x_0;y_0;z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f;\underbrace{(x_0,y_0,\ldots)}_{\text{Arbeitspunkt}}):\ \mathbb{R}^2 \xrightarrow{1\times 2 \text{ Matrix}} \mathbb{R}^1;\ \text{"gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y;\ldots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + f(x_0;y_0) + R_1$$

Wobei $R_1$ dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d\text{")}$$




$$D(f;(x_0;y_0)) = \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)\right)$$
$$= (\nabla f)^{tr} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A$$

### 2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x;y) \approx f(x_0;y_0) + D(f;(x_0;y_0)) \cdot \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}\qquad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

### 2.4.1 Tangentialebene

$$g(x;y) = f(x_0;y_0) + D(f;(x_0;y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$g(x;y) = f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0;y_0) \cdot (y - y_0)$$

### 2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

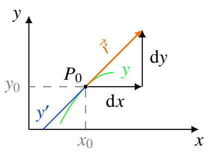
$$\mathrm{d}f \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \quad \text{bezüglich } A = \underbrace{(x_0;y_0)}$$

### 2.4.3 Differential-Trick (d$f$ Trick)

$$\begin{pmatrix} f = c = \text{const.} \quad | \,\mathrm{d}(\ldots) \\ \mathrm{d}f = \mathrm{d}c \overset{!}{=} 0 \end{pmatrix} \qquad f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{für Kontourlinien}$$

### 2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{f_y}{f_x \neq 0}$$




## 2.5 DGL

$$y' = \left(-\frac{f_x}{f_y}\right);\ y(x_0) = y_0$$

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

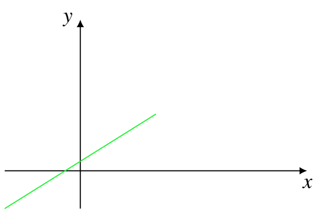
## 2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

$$\vec{r} = \left(\mathrm{d}x = h; \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x = -\frac{f_x}{f_y}\,\mathrm{d}x\right)^{tr}$$

## 2.7 Gradientenfeld ⊥ Kontouren

$$\underset{\text{Skalarprodukt}}{\nabla f \bullet} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

## 2.8 Richtungs-Ableitung




# 3 Extrema von Funktionen (bi-variat)

# 4 Ableitungen, Extrema (multi-variat)

# 5 Integration (bi-variat)

# 6 integration (multi-variat)

# 7 Differenziation und Integration von Kurven

# 8 (Ober-)flächenintegrale)

# 9 Vektoranalysis