Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 – Prof. Dr. Bernhard Zgraggen
Autoren:
Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

V 0.1.20240506
https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f : \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^n)$$

m	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{D}_f$, wobei $m \in \mathbb{N}$
n	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{W}_f$, wobei $n \in \mathbb{N}$
$\vec{f}$	wenn Output vektoriell

⚠ **Variablen sind abhängig von einander!**

Multi-Variat:

f ist "Multi-Variat", wenn:
- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

f ist nicht "Multi-Variat", wenn:
- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

$$\left.\begin{array}{r}\text{Raum 3D } (x;y;z)\ \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t)\ \mathbb{R}^1\end{array}\right\}\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t;x;y;z)$$

1.1.2 Stationärer Fall

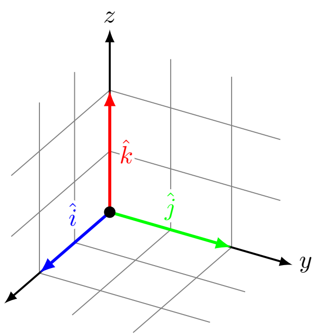
$$t \to \infty \to \text{Stationär}$$
$$T(x;y;z)\quad \frac{\Delta T}{\Delta t} \to 0$$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{\imath} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{\jmath} = \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



1.2 Schnitte

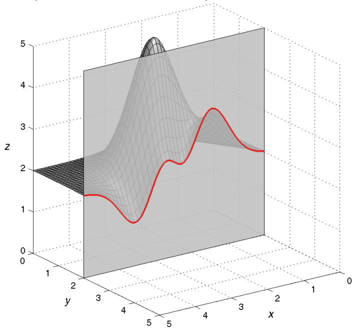
Schnitt = Restriktion → Teilmenge vom Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$

1.2.1 Partielle Funktion

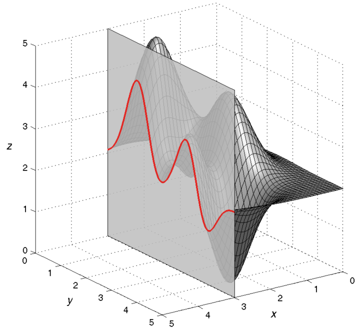
- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
- **Alle** anderen Variablen sind fix!
  ⚠ $\mathbb{W}_f$ **Analyse!**

Beispiel: Schnitte

x-Linien
- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x;y;z)$ Punkten $(x;y_0;f(x;y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert ⇔ $y_0 = 2$



y-Linien
- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt.
- Bestehen aus den $(x;y;z)$ Punkten $(x_0;y;f(x_0;y))$
- x-Wert ist fixiert ⇔ $x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel



1.2.2 Bedingungen

Initialbedingungen	→	Beziehen sich auf die **Zeit**
Randbedingungen	→	Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

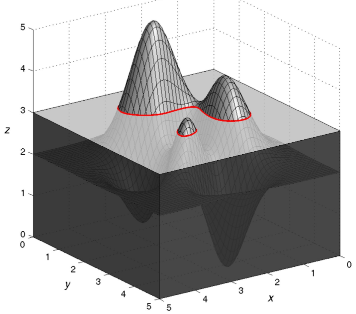
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...

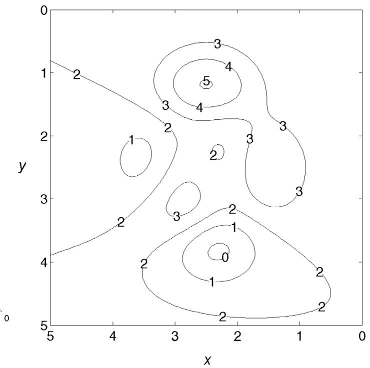
Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion f **konstant**.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \subset \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)
- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x;y;z)$ Punkten $(x;y;f(x;y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert ⇔ $z_0 = 3$





2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat)

$$f : \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}$$

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x,y):\ y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \textbf{ einzige} \text{ freie Variable}$$

Notationen

$$\text{1. Ordnung:} \quad f(x;y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x;y_0)$$

$$\text{2. Ordnung:} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \overset{!}{=} f_{yx}$$

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

$$\underbrace{\nabla}_{\text{"Gradient"}} f = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \vdots\end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}$$

2.3 Totale Ableitung

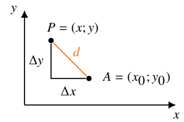
Für Fehlerrechnung benützt, da man hierbei die Abstände von $(x;y;z)$ zu einem festen Punkt $(x_0;y_0;z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f;\underbrace{(x_0,y_0,\ldots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{1\times 2 \text{ Matrix}} \mathbb{R}^1; \text{ "gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \ldots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + f(x_0;y_0) + R_1$$

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d\text{")}$$



$$D(f;(x_0;y_0)) = \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)\right)$$
$$= (\nabla f)^{tr} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A$$

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x;y) \approx f(x_0;y_0) + D(f;(x_0;y_0)) \cdot \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

2.4.1 Tangentialebene

$$g(x;y) = f(x_0;y_0) + D(f;(x_0;y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$g(x;y) = f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0)$$

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

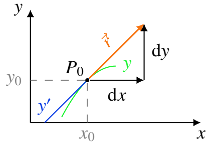
$$\mathrm{d}f \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \quad \text{bezüglich } A = \underbrace{(x_0;y_0)}$$

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

$$\left(\begin{array}{l} f = c = \text{const.} \quad |\,\mathrm{d}(\ldots) \\ \mathrm{d}f = \mathrm{d}c \stackrel{!}{=} 0 \end{array}\right) \qquad f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{für Kontourlinien}$$

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



2.5 DGL

$$y' = \underbrace{\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)}_{\text{right-hand-side (r.h.s.) Funktion}};\; y(x_0) = y_0$$

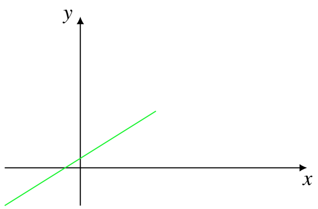
2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

$$\vec r = \left(\mathrm{d}x = h;\, \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x = -\frac{f_x}{f_y}\,\mathrm{d}x\right)^{\mathrm{tr}}$$

2.7 Gradientenfeld $\perp$ Kontouren

$$\nabla f \overset{\text{Skalarprodukt}}{\bullet} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?



$$s(t): \quad P_0 + t\cdot\hat v \mid t \in \mathbb{R}$$
$$s(t): \quad f(x_0 + t\cdot\hat v_1\,;\, y_0 + t\cdot\hat v_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \dot s(t): \quad t \mapsto \overbrace{\begin{pmatrix} x_0 + t\cdot v_1 \\ y_0 + t\cdot v_2 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \mapsto f(x,y)$$

2.9 Richtungs-Ableitung

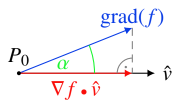
$$\frac{\partial f}{\partial \hat v} \stackrel{!}{=} D(f;(x_0;y_0))\cdot\hat v \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \mathrm{grad}(f)^{\mathrm{tr}}\cdot\hat v = f_x\cdot v_1 + f_y\cdot v_2$$

Beispiel: Richtungs-Ableitung

$$\vec x: \vec v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat e_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \hat e_1} = f_x\cdot 1 + f_y\cdot 0 = \underline{\underline{f_x}}$$

2.9.1 Spezialfälle

- $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ rechter Winkel
- $\frac{\partial f}{\partial \hat v}$ extremal
  - $\alpha = 0$ (max): $\nabla f\cdot\hat v > 0$ $\Rightarrow$ grad(f) liegt auf $\hat v$
  - $\alpha = \pi$ (min): $\nabla f\cdot\hat v < 0$ $\Rightarrow$ grad(f) liegt invers auf $\hat v$



Trigo: $\nabla f\cdot\hat v \wedge \frac{\partial f}{\partial \hat v}$ $\Rightarrow$ $\cos(\alpha)\cdot|\nabla f|$

3 Extrema von Funktionen (bi-variat)

3.1 Stationärbedingungen

- Nicht am Rand des Definitionsbereichs ($\mathbb{D}_f$)
- f muss differenzierbar sein

f lokal (relativ) extremal $\Rightarrow$ horizontale Tangentialebene

3.1.1 Verallgemeinerung des Fermat-Prinzips

$$f(x_0;y_0) + \underbrace{\mathrm{d}f}_{0} = f(x_0;y_0) + \underbrace{f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y}_{0}$$

$$\Leftrightarrow f_x \stackrel{!}{=} 0 \wedge f_y \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \mathrm{grad}(f) = \vec 0$$

3.2 Hinreichende Bedingungen

Aus An1: $\underset{\min}{f'' > 0} \mid \underset{\max}{f'' < 0}$
Ausnahme: Sattelfläche

$$(v_1;v_2)\underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}}_{\text{Hess-Matrix (H)}}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det(H) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

$\Delta > 0$: Extremalstelle (max oder min)
$\Delta < 0$: Sattel-Situation (**nicht** extremal)
$\Delta = 0$: Unklar; Multi-Variate Taylor-Logik (wenn mögl. vermeiden)

4 Ableitungen, Extrema (multi-variat)

5 Integration (bi-variat)

6 Integration (multi-variat)

7 Differenziation und Integration von Kurven

8 (Ober-)Flächenintegrale)

9 Vektoranalysis