

Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zraggen

Autoren:

Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:

0.1.20240612

<https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen>



Inhaltsverzeichnis

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren	2	5 Integration (bi-variät)	6
1.1 Dimensionen	2	5.1 2D	6
1.2 Schnitte	2	5.2 Normalbereich	6
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...	2	5.3 Polar	6
2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variät)	3	5.4 2D Transformation Polar zu Kartesisch	6
2.1 Partielle Ableitung	3	5.5 Derivative, Ableitung	6
2.2 Gradient (Nabla-Operator)	3	5.6 3D Volumenberechnung	6
2.3 Totale Ableitung	3	5.7	6
2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)	3	5.8	6
2.5 DGL	3	6 Integration (multi-variät)	7
2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)	3	7 Differenziation und Integration von Kurven	7
2.7 Gradientenfeld \perp Kontouren	3	8 (Ober-)Flächenintegrale	7
2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?	3	9 Vektoranalysis	7
2.9 Richtungs-Ableitung	3	9.1 Vektorfelder	7
3 Extrema von Funktionen finden	4	9.2 Divergenz (Volumenableitung)	7
3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden	4	9.3 Integralsatz von Gauss	7
3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden	4	9.4 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)	7
3.3 Lokales oder Globales Extremum	4	9.5 Rotation eines Vektorfelds (rot(), curl())	7
3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden	4	9.6 Integralsatz von Stokes	7
3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden	4	9.7 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen	7
4 Support Vector Machine (SVM)	5		
4.1 Lineare Trennbarkeit von Daten	5		

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f: \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^n)$$

- m Anzahl Dimensionen von \mathbb{D}_f , wobei $m \in \mathbb{N}$
- n Anzahl Dimensionen von \mathbb{W}_f , wobei $n \in \mathbb{N}$
- \vec{f} wenn Output vektoriell

⚠ Variablen sind abhängig von einander!

Multi-Variat:

f ist "Multi-Variat", wenn:

- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

f ist **nicht** "Multi-Variat", wenn:

- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

$$\left. \begin{array}{l} \text{Raum 3D } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t) \in \mathbb{R}^1 \end{array} \right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t; x; y; z)$$

1.1.2 Stationärer Fall

$$t \rightarrow \infty \rightarrow \text{Stationär}$$

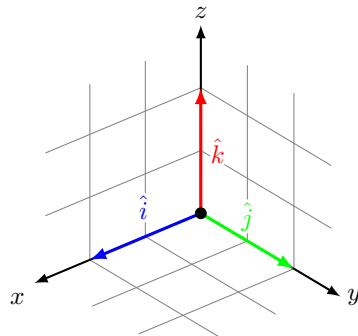
$$T(x; y; z) \frac{\Delta T}{\Delta t} \rightarrow 0$$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion \rightarrow Teilmenge vom Definitionsbereich \mathbb{D}_f

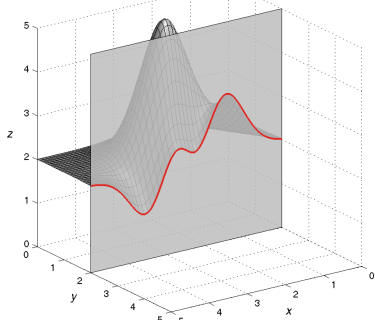
1.2.1 Partielle Funktion

- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
 - **Alle** anderen Variablen sind fix!
- ⚠ \mathbb{W}_f Analyse!

Beispiel: Schnitte

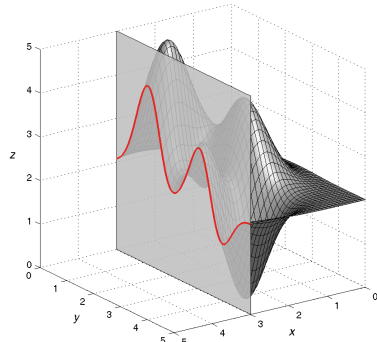
x-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y_0; f(x; y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow y_0 = 2$



y-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x_0; y; f(x_0; y))$
- x-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel



1.2.2 Bedingungen

Initialbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf die **Zeit**

Randbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...

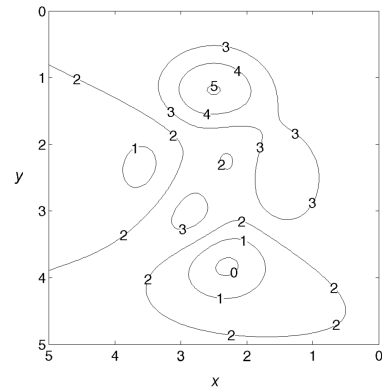
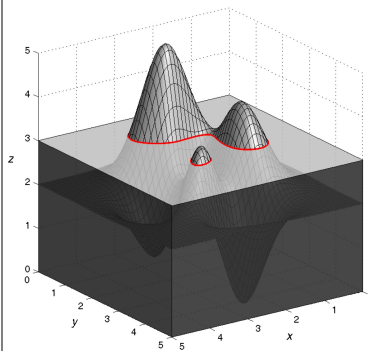
Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion f **konstant**.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \in \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)

- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y; f(x; y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow z_0 = 3$



2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat)

$$f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}$$

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x, y): y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \text{ \textbf{einzige} freie Variable}$$

Notationen

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ordnung: } & f(x; y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x; y_0) \\ 2. \text{ Ordnung: } & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \end{aligned}$$

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

$$\text{"Gradient" / Nabla} \rightarrow \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}$$

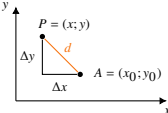
2.3 Totale Ableitung

Für Fehlerrechnung benutzt, da man hierbei die Abstände von $(x; y; z)$ zu einem festen Punkt $(x_0; y_0; z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f; \underbrace{(x_0, y_0, \dots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[1 \times 2 \text{ Matrix}]{\text{gute Approximation}} \mathbb{R}^1; \text{ "gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \dots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + f(x_0; y_0) + R_1$$

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d \text{")}$$


$$\begin{aligned} D(f; (x_0; y_0)) &= \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \right) \\ &= (\nabla f)^{\text{tr}} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A \end{aligned}$$

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

2.4.1 Tangentialebene

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

$$df \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{bezüglich } A = (x_0; y_0)$$

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

$$\left(\begin{array}{l} f = c = \text{const.} \quad | d(\dots) \\ df = dc \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right) \quad f_x dx + f_y dy = 0 \quad \text{für Kontourlinien}$$

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = - \frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{dx}{dy} = - \frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



2.5 DGL

$$y' = \left(- \frac{f_x}{f_y} \right); y(x_0) = y_0$$

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

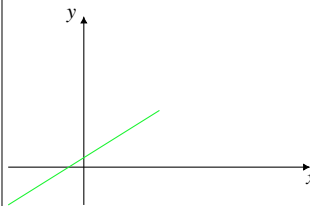
2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

$$\vec{r} = \left(dx = h; dy = y' dx = - \frac{f_x}{f_y} dx \right)^{\text{tr}}$$

2.7 Gradientenfeld \perp Kontouren

$$\text{Skalarprodukt} \rightarrow \nabla f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy = y' dx \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?



$$s(t): P_0 + t \cdot \hat{v} \mid t \in \mathbb{R}$$

$$s(t): f(x_0 + t \cdot \hat{v}_1; y_0 + t \cdot \hat{v}_2)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t): t \mapsto \overbrace{\begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v_1 \\ y_0 + t \cdot v_2 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \mapsto f(x, y)$$

2.9 Richtungs-Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \stackrel{!}{=} D(f; (x_0; y_0)) \cdot \hat{v} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \text{grad}(f)^{\text{tr}} \cdot \hat{v} = f_x \cdot v_1 + f_y \cdot v_2$$

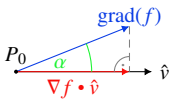
Beispiel: Richtungs-Ableitung

$$\vec{x}: \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_1} = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 = \underline{f_x}$$

2.9.1 Spezialfälle

- $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ rechter Winkel
- $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}$ extremal
 - $\alpha = 0$ (max): $\nabla f \cdot \hat{v} > 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$ liegt auf \hat{v}
 - $\alpha = \pi$ (min): $\nabla f \cdot \hat{v} < 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$ liegt invers auf \hat{v}

$$\text{Trigo: } \nabla f \cdot \hat{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \Rightarrow \cos(\alpha) \cdot |\nabla f|$$



3 Extrema von Funktionen finden

Stationaritätsbedingung: ∇f $\stackrel{!}{=}$ $\vec{0}$

3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇f = $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$f_{xx} = \dots \quad f_{xy} = f_{yx} = \dots \quad f_{yy} = \dots$

3. Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:

Δ = $f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - \left(f_{xy}(x_0; y_0)\right)^2$

4. Auswertung:

Δ > 0	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) < 0 \Rightarrow$	lokales Maximum
Δ > 0	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) < 0 \Rightarrow$	lokales Maximum
Δ > 0	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) > 0 \Rightarrow$	lokales Minimum
Δ > 0	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) > 0 \Rightarrow$	lokales Minimum
Δ < 0		\Rightarrow	Sattelpunkt
Δ = 0		?	Multi-variate-Taylor-logik ...

3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇f = $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:

H = $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \dots & f_{xt} \\ f_{yx} & f_{yy} & \dots & f_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx} & f_{ty} & \dots & f_{tt} \end{pmatrix}$
 • Symmetrien beachten!
 • Nicht doppelt rechnen!
 $\Rightarrow f_{xt} = f_{tx}$

3. Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen fllen:

H(x_0, y_0, \dots, t_0) = $\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{xy}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \end{pmatrix}$

4. Eigenwerte λ_i der Hesse-Matrix bestimmen:

det(H(x_0, y_0, \dots, t_0) - λ · E) = 0
Nullstellen λ_i finden → Eigenwerte

Zur Erinnerung:

E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$

H(x_0, y_0, \dots, t_0) - λ · E = ...
... = $\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda & f_{xy}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda \end{pmatrix}$

5. Auswertung:

λ _i < 0 $\forall i \Rightarrow$	lokales Maximum
λ _i > 0 $\forall i \Rightarrow$	lokales Minimum
λ _i > 0 und λ _i < 0 \Rightarrow	Sattelpunkt

Erklärung:

- λ_i < 0 $\forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind negativ
- λ_i > 0 $\forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind positiv

3.3 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion f(x, y, ..., t) gilt:

$f(x, y, \dots, t) \leq M_{\max}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) > M_{\max}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) \geq M_{\min}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Minimum
$f(x, y, \dots, t) < M_{\min}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Minimum

- M_{max}: grssstes lokales Maximum
M_{min}: kleinstes lokales Minimum

3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: $n(x, y) \stackrel{!}{=} 0$ Nebenbedingung: $x + y = 1$
Standardform der Nebenbedingung: $x + y - 1 = 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot n(x, y)$ Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇L = $\begin{pmatrix} \mathcal{L}_x \\ \mathcal{L}_y \\ \mathcal{L}_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$\mathcal{L}_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0$ $\mathcal{L}_{\lambda x} = \mathcal{L}_{x\lambda} = n_x = \dots$
 $\mathcal{L}_{xx} = \dots$ $\mathcal{L}_{\lambda y} = \mathcal{L}_{y\lambda} = n_y = \dots$
 $\mathcal{L}_{yy} = \dots$ $\mathcal{L}_{xy} = \mathcal{L}_{yx} = \dots$

5. Gernderte Hesse Matrix H aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

$\bar{H}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{\lambda x}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{\lambda y}(x_0, y_0) \\ \mathcal{L}_{x\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xy}(x_0, y_0) \\ \mathcal{L}_{y\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 0 & n_x(x_0, y_0) & n_y(x_0, y_0) \\ n_x(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xy}(x_0, y_0) \\ n_y(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

det(\bar{H}) = ...

7. Auswertung

det(\bar{H}) > 0 \Rightarrow	lokales Maximum
det(\bar{H}) < 0 \Rightarrow	lokales Minimum
det(\bar{H}) = 0 \Rightarrow	keine Aussage möglich

3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: $n(x, y, \dots, t) \stackrel{!}{=} 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

$\mathcal{L}(x, y, \dots, t, \lambda) = f(x, y, \dots, t) + \lambda \cdot n(x, y, \dots, t)$ Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇L = $\begin{pmatrix} \mathcal{L}_x \\ \mathcal{L}_y \\ \vdots \\ \mathcal{L}_t \\ \mathcal{L}_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$\mathcal{L}_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0$ $\mathcal{L}_{\lambda x} = \mathcal{L}_{x\lambda} = n_x = \dots$ $\mathcal{L}_{xy} = \mathcal{L}_{yx}$
 $\mathcal{L}_{xx} = \dots$ $\mathcal{L}_{\lambda y} = \mathcal{L}_{y\lambda} = n_y = \dots$ $\mathcal{L}_{xt} = \mathcal{L}_{tx}$
 $\mathcal{L}_{yy} = \dots$ \vdots $\mathcal{L}_{yt} = \mathcal{L}_{ty}$
 \vdots $\mathcal{L}_{\lambda t} = \mathcal{L}_{t\lambda} = n_t = \dots$ \vdots
 $\mathcal{L}_{tt} = \dots$

5. Gernderte Hesse Matrix H aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

$\bar{H}(x_0, y_0, \dots, t_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{\lambda x}(\dots) & \mathcal{L}_{\lambda y}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{\lambda t}(\dots) \\ \mathcal{L}_{x\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{xx}(\dots) & \mathcal{L}_{xy}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{xt}(\dots) \\ \mathcal{L}_{y\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{yx}(\dots) & \mathcal{L}_{yy}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_{t\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{tx}(\dots) & \mathcal{L}_{ty}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{tt}(\dots) \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 0 & n_x(\dots) & n_y(\dots) & \dots & n_t(\dots) \\ n_x(\dots) & \mathcal{L}_{xx}(\dots) & \mathcal{L}_{xy}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{xt}(\dots) \\ n_y(\dots) & \mathcal{L}_{yx}(\dots) & \mathcal{L}_{yy}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_t(\dots) & \mathcal{L}_{tx}(\dots) & \mathcal{L}_{ty}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{tt}(\dots) \end{pmatrix}$

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

det(\bar{H}) = ...

7. Auswertung

det(\bar{H}) > 0 \Rightarrow	lokales Maximum
det(\bar{H}) < 0 \Rightarrow	lokales Minimum
det(\bar{H}) = 0 \Rightarrow	keine Aussage möglich

4 Support Vector Machine (SVM)

4.1 Lineare Trennbarkeit von Daten

4.1.1 Allgemeines

Datenpunkte: (2D Beispiel)

$$A : ((\underbrace{x_1, x_2}_{\vec{x}_1}); y_1), \quad B : ((\underbrace{x_1, x_2}_{\vec{x}_2}); y_2), \quad C : ((\underbrace{x_1, x_2}_{\vec{x}_3}); y_3), \quad \dots, \quad N : ((\underbrace{x_1, x_2}_{\vec{x}_n}); y_n)$$

\vec{x}_j sind Datenvektoren

$y_j \in \{\pm 1\}$ klassifiziert die jeweiligen Datenvektoren

Hyperebenen:

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b = 0$$

\vec{w} : Normalenvektor, $\vec{w} \in \mathbb{R}^d$ und $\vec{w} \neq 0$

b : Konstante, $b \in \mathbb{R}$

Dimmension der Hyperebene = $d - 1$

Abstand der Hyperebene zum Ursprung: $\frac{|b|}{|\vec{w}|}$

Klassifizierung:

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b > 0 \Rightarrow \vec{x} \text{ gehört zur Klasse } y = +1$$

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b < 0 \Rightarrow \vec{x} \text{ gehört zur Klasse } y = -1$$

Klassifizierung der Trainingsdaten:

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b \geq 0 \Rightarrow \vec{x}_j \text{ gehört zur Klasse } y = +1$$

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b \leq 0 \Rightarrow \vec{x}_j \text{ gehört zur Klasse } y = -1$$

Zielfunktion:

$$\frac{2}{|\vec{w}|} = \frac{2}{w}$$

4.1.2 Das primale Optimierungsproblem

$$\frac{1}{2} \vec{w}^{tr} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2} |\vec{w}|^2 = \frac{1}{2} w^2 \rightarrow \min! \quad \text{s.t.} \quad (\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b) y_j \geq 1 \quad (j = 1, \dots, N)$$

4.1.3 Das duale Optimierungsproblem

Nebenbedingung:

$$\underbrace{1 - (\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b) y_j}_{g_j(\vec{w}^{tr}, b)} \leq 0 \Leftrightarrow g_j(\vec{w}^{tr}, b) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, N)$$

Lagrange-Funktion:

$$L(\vec{w}^{tr}, b, \vec{\alpha}) = L(w_1, w_2, \dots, w_d, b, a_1, a_2, \dots, a_N) = \frac{1}{2} \vec{w}^{tr} \cdot \vec{w} + \sum_{j=1}^N \alpha_j \underbrace{\left(1 - (\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b) y_j \right)}_{g_j(\vec{w}^{tr}, b)}$$

Stationaritätsbedingungen:

$$\text{grad}_{\{\vec{w}^{tr}, b\}} (L(\vec{w}^{tr}, b, \vec{\alpha})) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j \vec{x}_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j = 0$$

Das duale Problem:

$$L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^N \alpha_j \alpha_{j'} y_j y_{j'} \vec{x}_j^{tr} \cdot \vec{x}_{j'} \rightarrow \max! \quad \text{s.t.} \quad \alpha_j \geq 0 \wedge \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j = 0$$

Formulieren des dualen Optimierungsproblems mit den Lagrange-Variablen α_j :

Vorgehensbeispiel für 3 Datenpunkte:

1. Lagrange-Funktion $L(\vec{\alpha})$ aufstellen:

$$L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^N \alpha_j \alpha_{j'} y_j y_{j'} \vec{x}_j^{tr} \cdot \vec{x}_{j'} \rightarrow \max!$$

Finden der Lagrange-Variablen α_j :

1. Stationaritätsbedingungen aufstellen:

$$\text{a: } \alpha_j \geq 0 \quad \text{und} \quad \text{b: } \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j = 0$$

2. Nebenrechnung:

b umstellen nach einer Variablen (z.B. α_1) und in Lagrange-Funktion einsetzen

3. Gradient von verkürzter Lagrange-Funktion berechnen und restliche α finden:

$$\nabla(L_{neu}(\alpha_2, \alpha_3)) \Rightarrow \alpha_2 = \dots, \alpha_3 = \dots$$

4. Fehlendes α berechnen:

α_2 und α_3 in **2. b** einsetzen und α_1 berechnen

Lösen des dualen Optimierungsproblems:

1. Normalenvektor \vec{w} finden:

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j \vec{x}_j$$

2. Konstante b finden:

Mit Stützvektor-Datenpunkt aus Klasse $y = +1$:

$$b = +1 - \vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{\dots} = \dots$$

Mit Stützvektor-Datenpunkt aus Klasse $y = -1$:

$$b = -1 - \vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{\dots} = \dots$$

5 Integration (bi-variat)

5.1 2D

$$\int\int_{\Omega} f(x;y) \cdot dx \cdot dy = \int_X \left(\int_Y f(x;y) \cdot dy \right) \cdot dx$$

wenn $\int\int |f(x;y)| dx dy < \infty$

5.2 Normalbereich

Schnitte sind Strecken (Intervalle) für x, y, ...

5.3 Polar

$$dx \cdot dy = r \cdot d\phi \cdot dr$$

5.4 2D Transformation Polar zu Kartesisch

T = Transformation

Polar $(r, \phi) \xrightarrow{T} (x, y)$ Kartesisch

$$\begin{pmatrix} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \mathbb{R}^{2D}$$

Die Funktionen für x und y sind skalare Funktion.

$x = x(r; \varphi) \quad y = y(r; \varphi)$

5.5 Derivative, Ableitung

5.6 3D Volumenberechnung

$$V = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} f(x;y) \, dy \right] dx$$

5.7

5.8

6 Integration (multi-variät)

7 Differenziation und Integration von Kurven

8 (Ober-)Flächenintegrale

9 Vektoranalysis

9.1 Vektorfelder

- Jedem Punkt P im Raum ist ein Vektor \vec{V} zugeordnet
- Kann als $\vec{V}(\vec{r})$ geschrieben werden, wobei \vec{r} ein Ortsvektor mit fixem Ursprung $\vec{0}$ ist

9.2 Divergenz (Volumenableitung)

- Beschreibt, wie stark sich ein Vektorfeld in einem Punkt ausbreitet oder zusammenzieht
- Beispiel: Vektorfeld das die Geschwindigkeit von Wasser in einem Fluss beschreibt
 - An Punkten mit positiver Divergenz fließt Wasser hinaus (Quelle)
 - An Punkten mit negativer Divergenz fließt Wasser hinein (Senke)

$$\nabla \cdot \vec{V} = \text{div } \vec{V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{(\partial V)} \vec{V} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

9.2.1 Kartesisch

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\vec{\nabla}} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

9.2.2 Zylinderkoordinaten

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

9.3 Integralsatz von Gauss

$$\int_{(V)} \text{div } \vec{A} dV = \oint_{(S)=\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Fluss durch eingeschlossenen Körper = Gesamter Fluss durch geschlossenen Rand des Körpers

9.4 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

$$\Delta \phi = \text{div}(\text{grad}(\phi)) = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = f(\vec{r})$$

Δ : Laplace-Operator
 ϕ : Potentialfeld
 $f(\vec{r})$: Quellfunktion

9.4.1 Laplace-Gleichung

$$\Delta \phi = f = 0 \Rightarrow \text{Spezialfall der Poisson-Gleichung ohne äussere Quellfunktion}$$

9.5 Rotation eines Vektorfelds (rot(), curl())

Beschreibt, wie stark und in welche Richtung sich ein Vektorfeld an einem Punkt rotiert. Wobei der Vektor selbst die Rotationsachse beschreibt und dessen Betrag proportional zur Rotationsgeschwindigkeit ist. Beispiel: Wirbelfelder

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- $|\text{rot } \vec{A}| < 0$: Uhrzeigersinn
- $|\text{rot } \vec{A}| = 0$: Wirbelfrei
- $|\text{rot } \vec{A}| > 0$: Gegenuhrzeigersinn

$$\text{Gauss: } \text{div}(\text{rot}(\vec{A})) \stackrel{!}{=} 0$$

9.6 Integralsatz von Stokes

$$\oint_{(C)=\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{(S)} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

∂S **muss** anhand Rechter-Hand-Regel orientiert sein.

Stokes sagt aus, dass die Summe der Verwirbelungen in einer Fläche, der Summe der Vektoren dessen Randes entsprechen.

9.7 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen