Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zgraggen
Autoren:
Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:
0.1.20240606
https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen

Inhaltsverzeichnis

9 Vektoranalysis

9.1 Vektorfelder

- Jedem Punkt P im Raum ist ein Vektor $\vec{V}$ zugeordnet
- Kann als $\vec{V}(\vec{r})$ geschrieben werden, wobei $\vec{r}$ ein Ortsvektor mit fixem Ursprung $\vec{0}$ ist

9.2 Divergenz (Volumenableitung)

- Beschreibt, wie stark sich ein Vektorfeld in einem Punkt ausbreitet oder zusammenzieht
- Beispiel: Vektorfeld das die Geschwindigkeit von Wasser in eineem Fluss beschreibt
  - An Punkten mit positiver Divergenz fliesst Wasser hinaus (Quelle)
  - An Punkten mit negativer Divergenz fliesst Wasser hinein (Senke)

$$\boxed{\nabla\vec{V} = \operatorname{div}\vec{V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{(S)} \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}}$$

9.2.1 Kartesisch

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{V} = \nabla\cdot\vec{V} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}$$

9.2.2 Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

9.3 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

$$\boxed{\Delta\phi = \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}(\phi)\right) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = f(\vec{r})}$$

Δ :	Laplace-Operator
ϕ :	Potentialfeld
$f(\vec{r})$:	Quellfunktion

9.3.1 Laplace-Gleichung

$\boxed{\Delta\phi = f = 0}$ $\Rightarrow$ Spezialfall der Poisson-Gleichung ohne äussere Quellfunktion

9.4 Rotation eines Vektorfelds (rot(), curl())

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

$\operatorname{div}\operatorname{rot}(\vec{A}) \overset{!}{=} 0$
asdfasf asdfasff asdfasf asdf

9.5 Stokes Integralsatz

9.6 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen