

# Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zraggen

Autoren:

Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:

0.1.20240611

<https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen>



## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren</b>	<b>2</b>	<b>5 Integration (bi-variät)</b>	<b>6</b>
1.1 Dimensionen	2	5.1 2D	6
1.2 Schnitte	2	5.2 Normalbereich	6
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...	2	5.3 Polar	6
<b>2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variät)</b>	<b>3</b>	5.4 2D Transformation Polar zu Kartesisch	6
2.1 Partielle Ableitung	3	5.5 Derivative, Ableitung	6
2.2 Gradient (Nabla-Operator)	3	5.6 3D Volumenberechnung	6
2.3 Totale Ableitung	3	5.7	6
2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)	3	5.8	6
2.5 DGL	3	<b>6 Integration (multi-variät)</b>	<b>7</b>
2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)	3	<b>7 Differenziation und Integration von Kurven</b>	<b>7</b>
2.7 Gradientenfeld $\perp$ Kontouren	3	<b>8 (Ober-)Flächenintegrale</b>	<b>7</b>
2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?	3	<b>9 Vektoranalysis</b>	<b>7</b>
2.9 Richtungs-Ableitung	3	9.1 Vektorfelder	7
<b>3 Extrema von Funktionen finden</b>	<b>4</b>	9.2 Divergenz (Volumenableitung)	7
3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden	4	9.3 Integralsatz von Gauss	7
3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden	4	9.4 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)	7
3.3 Lokales oder Globales Extremum	4	9.5 Rotation eines Vektorfelds (rot(), curl())	7
3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden	4	9.6 Integralsatz von Stokes	7
3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden	4	9.7 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen	7
<b>4 Support Vector Machine (SVM)</b>	<b>5</b>		
4.1 Lineare Trennbarkeit von Daten	5		

# 1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

## 1.1 Dimensionen

$$f: \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^n)$$

- $m$  Anzahl Dimensionen von  $\mathbb{D}_f$ , wobei  $m \in \mathbb{N}$
- $n$  Anzahl Dimensionen von  $\mathbb{W}_f$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$
- $\vec{f}$  wenn Output vektoriell

⚠ Variablen sind abhängig von einander!

### Multi-Variat:

$f$  ist "Multi-Variat", wenn:

- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

$f$  ist **nicht** "Multi-Variat", wenn:

- Input **und** Output Skalare sind

### 1.1.1 Raumzeit

$$\left. \begin{array}{l} \text{Raum 3D } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t) \in \mathbb{R}^1 \end{array} \right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t; x; y; z)$$

### 1.1.2 Stationärer Fall

$$t \rightarrow \infty \rightarrow \text{Stationär}$$

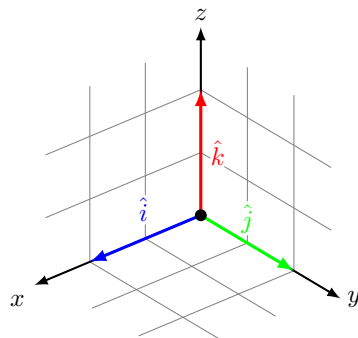
$$T(x; y; z) \frac{\Delta T}{\Delta t} \rightarrow 0$$

### 1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



## 1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion  $\rightarrow$  Teilmenge vom Definitionsbereich  $\mathbb{D}_f$

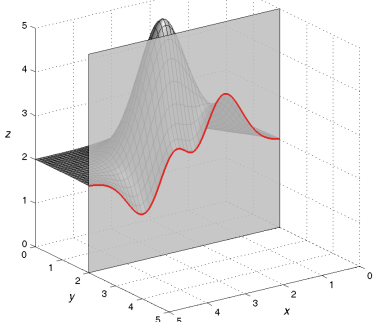
### 1.2.1 Partielle Funktion

- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
  - **Alle** anderen Variablen sind fix!
- ⚠  $\mathbb{W}_f$  Analyse!

### Beispiel: Schnitte

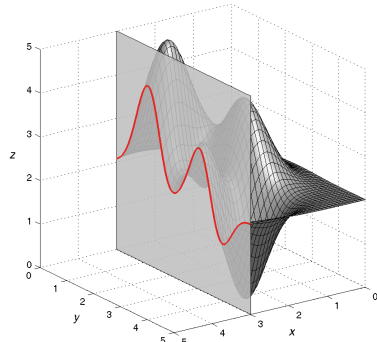
#### x-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den  $(x; y; z)$  Punkten  $(x; y_0; f(x; y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert  $\Leftrightarrow y_0 = 2$



#### y-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den  $(x; y; z)$  Punkten  $(x_0; y; f(x_0; y))$
- x-Wert ist fixiert  $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel



### 1.2.2 Bedingungen

- Initialbedingungen  $\rightarrow$  Beziehen sich auf die **Zeit**
- Randbedingungen  $\rightarrow$  Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

## 1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...

Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion  $f$  **konstant**.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \in \mathbb{D}_f$$

## Beispiel: Höhenlinien

### Kontouren (Höhenlinien)

- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den  $(x; y; z)$  Punkten  $(x; y; f(x; y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert  $\Leftrightarrow z_0 = 3$



## 2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variät)

$$f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}$$

### 2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

#### Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x, y): y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \text{ **einzig**e freie Variable}$$

#### Notationen

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ordnung: } & f(x; y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x; y_0) \\ 2. \text{ Ordnung: } & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \end{aligned}$$

#### 2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn  $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$  &  $f_{yx}$  **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

### 2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

$$\text{"Gradient" / Nabla} \rightarrow \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}$$

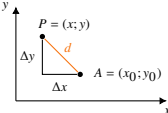
### 2.3 Totale Ableitung

Für Fehlerrechnung benutzt, da man hierbei die Abstände von  $(x; y; z)$  zu einem festen Punkt  $(x_0; y_0; z_0)$  erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f; \underbrace{(x_0, y_0, \dots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[1 \times 2 \text{ Matrix}]{\text{gute Approximation}} \mathbb{R}^1; \text{ "gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \dots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + f(x_0; y_0) + R_1$$

Wobei  $R_1$  dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d \text{")}$$


$$\begin{aligned} D(f; (x_0; y_0)) &= \left( D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \right) \\ &= (\nabla f)^{\text{tr}} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A \end{aligned}$$

### 2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

#### 2.4.1 Tangentialebene

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

#### 2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

$$df \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{bezüglich } A = (x_0; y_0)$$

#### 2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

$$\left( \begin{array}{l} f = c = \text{const.} \quad | d(\dots) \\ df = dc \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right) \quad f_x dx + f_y dy = 0 \quad \text{für Kontourlinien}$$

### 2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = - \frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{dx}{dy} = - \frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



### 2.5 DGL

$$y' = \left( - \frac{f_x}{f_y} \right); y(x_0) = y_0$$

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

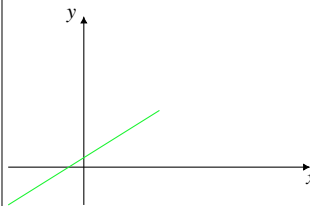
### 2.6 Richtungselement (Tangentiellinie an Kontouren)

$$\vec{r} = \left( dx = h; dy = y' dx = - \frac{f_x}{f_y} dx \right)^{\text{tr}}$$

### 2.7 Gradientenfeld $\perp$ Kontouren

$$\text{Skalarprodukt} \rightarrow \nabla f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy = y' dx \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

### 2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?



$$\begin{aligned} s(t) &: P_0 + t \cdot \hat{v} \mid t \in \mathbb{R} \\ s(t) &: f(x_0 + t \cdot \hat{v}_1; y_0 + t \cdot \hat{v}_2) \end{aligned}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t) : t \mapsto \overbrace{\begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v_1 \\ y_0 + t \cdot v_2 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \mapsto f(x, y)$$

### 2.9 Richtungs-Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \stackrel{!}{=} D(f; (x_0; y_0)) \cdot \hat{v} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \text{grad}(f)^{\text{tr}} \cdot \hat{v} = f_x \cdot v_1 + f_y \cdot v_2$$

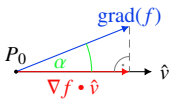
#### Beispiel: Richtungs-Ableitung

$$\vec{x} : \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_1} = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 = \underline{\underline{f_x}}$$

#### 2.9.1 Spezialfälle

- $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  rechter Winkel
- $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}$  extremal
  - $\alpha = 0$  (max):  $\nabla f \cdot \hat{v} > 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$  liegt auf  $\hat{v}$
  - $\alpha = \pi$  (min):  $\nabla f \cdot \hat{v} < 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$  liegt invers auf  $\hat{v}$

$$\text{Trigo: } \nabla f \cdot \hat{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \Rightarrow \cos(\alpha) \cdot |\nabla f|$$



3 Extrema von Funktionen finden

Stationaritätsbedingung: ∇f  $\stackrel{!}{=}$   $\vec{0}$

3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇f =  $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$f_{xx} = \dots \quad f_{xy} = f_{yx} = \dots \quad f_{yy} = \dots$

3. Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:

Δ =  $f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - \left(f_{xy}(x_0; y_0)\right)^2$

4. Auswertung:

Δ > 0	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) < 0 \Rightarrow$	lokales Maximum
Δ > 0	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) < 0 \Rightarrow$	lokales Maximum
Δ > 0	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) > 0 \Rightarrow$	lokales Minimum
Δ > 0	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) > 0 \Rightarrow$	lokales Minimum
Δ < 0		$\Rightarrow$	Sattelpunkt
Δ = 0		?	Multi-variate-Taylor-logik ...

3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇f =  $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:

H =  $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \dots & f_{xt} \\ f_{yx} & f_{yy} & \dots & f_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx} & f_{ty} & \dots & f_{tt} \end{pmatrix}$    
 • Symmetrien beachten!  
 • Nicht doppelt rechnen!  
  $\Rightarrow f_{xt} = f_{tx}$

3. Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen fllen:

H(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, ... t<sub>0</sub>) =  $\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{xy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots t_0) \end{pmatrix}$

4. Eigenwerte λ<sub>i</sub> der Hesse-Matrix bestimmen:

det(H(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, ... t<sub>0</sub>) - λ · E) = 0  
Nullstellen λ<sub>i</sub> finden → Eigenwerte

Zur Erinnerung:

E =  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$

H(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, ... t<sub>0</sub>) - λ · E = ...

... =  $\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda & f_{xy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda \end{pmatrix}$

5. Auswertung:

λ <sub>i</sub> < 0 $\forall i \Rightarrow$	lokales Maximum
λ <sub>i</sub> > 0 $\forall i \Rightarrow$	lokales Minimum
λ <sub>i</sub> > 0 und λ <sub>j</sub> < 0 $\Rightarrow$	Sattelpunkt

Erklärung:

- λ<sub>i</sub> < 0  $\forall i \Leftrightarrow$  Alle λ<sub>i</sub> sind negativ
- λ<sub>i</sub> > 0  $\forall i \Leftrightarrow$  Alle λ<sub>i</sub> sind positiv

3.3 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion f(x, y, ..., t) gilt:

$f(x, y, \dots, t) \leq M_{\max}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) > M_{\max}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) \geq M_{\min}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Minimum
$f(x, y, \dots, t) < M_{\min}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Minimum

- M<sub>max</sub>: grssstes lokales Maximum  
M<sub>min</sub>: kleinstes lokales Minimum

3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform:  $n(x, y) \stackrel{!}{=} 0$       Nebenbedingung:  $x + y = 1$   
Standardform der Nebenbedingung:  $x + y - 1 = 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot n(x, y)$       Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇L =  $\begin{pmatrix} \mathcal{L}_x \\ \mathcal{L}_y \\ \mathcal{L}_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$\mathcal{L}_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0$        $\mathcal{L}_{\lambda x} = \mathcal{L}_{x\lambda} = n_x = \dots$   
 $\mathcal{L}_{xx} = \dots$        $\mathcal{L}_{\lambda y} = \mathcal{L}_{y\lambda} = n_y = \dots$   
 $\mathcal{L}_{yy} = \dots$        $\mathcal{L}_{xy} = \mathcal{L}_{yx} = \dots$

5. Gernderte Hesse Matrix H aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

$\bar{H}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{\lambda x}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{\lambda y}(x_0, y_0) \\ \mathcal{L}_{x\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xy}(x_0, y_0) \\ \mathcal{L}_{y\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(x_0, y_0) & n_x(x_0, y_0) & n_y(x_0, y_0) \\ n_x(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xy}(x_0, y_0) \\ n_y(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

det( $\bar{H}$ ) = ...

7. Auswertung

det( $\bar{H}$ ) > 0 $\Rightarrow$	lokales Maximum
det( $\bar{H}$ ) < 0 $\Rightarrow$	lokales Minimum
det( $\bar{H}$ ) = 0 $\Rightarrow$	keine Aussage möglich

3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform:  $n(x, y, \dots, t) \stackrel{!}{=} 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

$\mathcal{L}(x, y, \dots, t, \lambda) = f(x, y, \dots, t) + \lambda \cdot n(x, y, \dots, t)$       Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇L =  $\begin{pmatrix} \mathcal{L}_x \\ \mathcal{L}_y \\ \vdots \\ \mathcal{L}_t \\ \mathcal{L}_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$\mathcal{L}_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0$        $\mathcal{L}_{\lambda x} = \mathcal{L}_{x\lambda} = n_x = \dots$        $\mathcal{L}_{xy} = \mathcal{L}_{yx}$   
 $\mathcal{L}_{xx} = \dots$        $\mathcal{L}_{\lambda y} = \mathcal{L}_{y\lambda} = n_y = \dots$        $\mathcal{L}_{xt} = \mathcal{L}_{tx}$   
 $\mathcal{L}_{yy} = \dots$        $\vdots$        $\mathcal{L}_{yt} = \mathcal{L}_{ty}$   
 $\vdots$        $\mathcal{L}_{\lambda t} = \mathcal{L}_{t\lambda} = n_t = \dots$        $\vdots$   
 $\mathcal{L}_{tt} = \dots$

5. Gernderte Hesse Matrix H aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

$\bar{H}(x_0, y_0, \dots t_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{\lambda x}(\dots) & \mathcal{L}_{\lambda y}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{\lambda t}(\dots) \\ \mathcal{L}_{x\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{xx}(\dots) & \mathcal{L}_{xy}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{xt}(\dots) \\ \mathcal{L}_{y\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{yx}(\dots) & \mathcal{L}_{yy}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_{t\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{tx}(\dots) & \mathcal{L}_{ty}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{tt}(\dots) \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(\dots) & n_x(\dots) & n_y(\dots) & \dots & n_t(\dots) \\ n_x(\dots) & \mathcal{L}_{xx}(\dots) & \mathcal{L}_{\lambda y}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{xt}(\dots) \\ n_y(\dots) & \mathcal{L}_{yx}(\dots) & \mathcal{L}_{yy}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_t(\dots) & \mathcal{L}_{tx}(\dots) & \mathcal{L}_{ty}(\dots) & \dots & \mathcal{L}_{tt}(\dots) \end{pmatrix}$

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

det( $\bar{H}$ ) = ...

7. Auswertung

det( $\bar{H}$ ) > 0 $\Rightarrow$	lokales Maximum
det( $\bar{H}$ ) < 0 $\Rightarrow$	lokales Minimum
det( $\bar{H}$ ) = 0 $\Rightarrow$	keine Aussage möglich

4 Support Vector Machine (SVM)

4.1 Lineare Trennbarkeit von Daten

4.1.1 Allgemeines

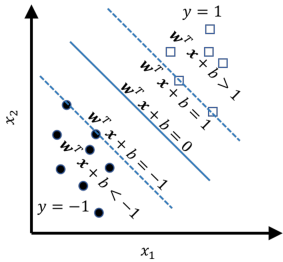
Datenpunkte: (2D Beispiel)

A : ((x1, x2); y1),    B : ((x1, x2); y2),    C : ((x1, x2); y3),    ...,    N : ((x1, x2); yn)

→ sind Datenvektoren  
y ∈ {±1} klassifiziert die jeweiligen Datenvektoren

Hyperebenen:

w^tr · x + b = 0  
w: Normalenvektor, w ∈ ℝ^d und w ≠ 0  
b: Konstante, b ∈ ℝ  
Dimmension der Hyperebene = d - 1  
Abstand der Hyperebene zum Ursprung: |b|/|w|



Klassifizierung:

w^tr · x + b > 0 ⇒ x gehört zur Klasse y = +1  
w^tr · x + b < 0 ⇒ x gehört zur Klasse y = -1

Klassifizierung der Trainingsdaten:

w^tr · x\_j + b ≥ 0 ⇒ x\_j gehört zur Klasse y = +1  
w^tr · x\_j + b ≤ 0 ⇒ x\_j gehört zur Klasse y = -1

Zielfunktion:

2/|w| = 2/w

4.1.2 Das primale Optimierungsproblem

1/2 w^tr · w = 1/2 |w|^2 = 1/2 w^2 → min!    s.t.    (w^tr · x\_j + b) y\_j ≥ 1    (j = 1, ..., N)

4.1.3 Das duale Optimierungsproblem

Nebenbedingung:

1 - (w^tr · x\_j + b) y\_j ≤ 0 ⇔ g\_j(w^tr, b) ≤ 0    (j = 1, ..., N)

Lagrange-Funktion:

L(w^tr, b, α) = L(w1, w2, ..., wd, b, a1, a2, ..., aN) = 1/2 w^tr · w + ∑\_{j=1}^N α\_j (1 - (w^tr · x\_j + b) y\_j)

Stationaritätsbedingungen:

grad\_{w^tr, b} (L(w^tr, b, α)) = 0 ⇔ w = ∑\_{j=1}^N α\_j y\_j x\_j    und    ∑\_{j=1}^N α\_j y\_j = 0

Das duale Problem:

L(α) = ∑\_{j=1}^N α\_j - 1/2 ∑\_{j,j'=1}^N α\_j α\_{j'} y\_j y\_{j'} x\_j^tr · x\_{j'},    →    max!    s.t.    α\_j ≥ 0 ∧ ∑\_{j=1}^N α\_j y\_j = 0

Formulieren des dualen Optimierungsproblems mit den Lagrange-Variablen α\_j:

Vorgehensbeispiel für 3 Datenpunkte:

1. Lagrange-Funktion L(α) aufstellen:

L(α) = ∑\_{j=1}^N α\_j - 1/2 ∑\_{j,j'=1}^N α\_j α\_{j'} y\_j y\_{j'} x\_j^tr · x\_{j'}    →    max!

Finden der Lagrange-Variablen α\_j:

1. Stationaritätsbedingungen aufstellen:

a: α\_j ≥ 0    und    b: ∑\_{j=1}^N α\_j y\_j = 0

2. Nebenrechnung:

b umstellen nach einer Variablen (z.B. α\_1) und in Lagrange-Funktion ersetzen

3. Gradient von verkürzter Lagrange-Funktion berechnen und restliche α finden:

∇(L\_neu(α\_2, α\_3)) ⇒ α\_2 = ..., α\_3 = ...

4. Fehlendes α berechnen:

α\_2 und α\_3 in 2. b einsetzen und α\_1 berechnen

Lösen des dualen Optimierungsproblems:

1. Normalenvektor w finden:

w = ∑\_{j=1}^N α\_j y\_j x\_j

2. Konstante b finden:

Mit Stützvektor-Datenpunkt aus Klasse y = +1:

b = +1 - w^tr · x\_... = ...

Mit Stützvektor-Datenpunkt aus Klasse y = -1:

b = -1 - w^tr · x\_... = ...

5 Integration (bi-variat)

5.1 2D

$$\int\int_{\Omega} f(x;y) \cdot dx \cdot dy = \int_X \left( \int_Y f(x;y) \cdot dy \right) \cdot dx$$

wenn  $\int\int |f(x;y)| dx dy < \infty$

5.2 Normalbereich

Schnitte sind Strecken (Intervalle) für x, y, ...

5.3 Polar

$$dx \cdot dy = r \cdot d\phi \cdot dr$$

5.4 2D Transformation Polar zu Kartesisch

T = Transformation

Polar  $(r, \phi) \xrightarrow{T} (x, y)$  Kartesisch

$$\begin{pmatrix} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \mathbb{R}^{2D}$$

Die Funktionen für x und y sind skalare Funktion.

$x = x(r; \varphi) \quad y = y(r; \varphi)$

5.5 Derivative, Ableitung

5.6 3D Volumenberechnung

$$V = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[ \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} f(x;y) \, dy \right] dx$$

5.7

5.8

6 Integration (multi-variät)

7 Differenziation und Integration von Kurven

8 (Ober-)Flächenintegrale

9 Vektoranalysis

9.1 Vektorfelder

- Jedem Punkt  $P$  im Raum ist ein Vektor  $\vec{V}$  zugeordnet
- Kann als  $\vec{V}(\vec{r})$  geschrieben werden, wobei  $\vec{r}$  ein Ortsvektor mit fixem Ursprung  $\vec{0}$  ist

9.2 Divergenz (Volumenableitung)

- Beschreibt, wie stark sich ein Vektorfeld in einem Punkt ausbreitet oder zusammenzieht
- Beispiel: Vektorfeld das die Geschwindigkeit von Wasser in einem Fluss beschreibt
  - An Punkten mit positiver Divergenz fließt Wasser hinaus (Quelle)
  - An Punkten mit negativer Divergenz fließt Wasser hinein (Senke)

$$\nabla \cdot \vec{V} = \operatorname{div} \vec{V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{(\partial V)} \vec{V} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

9.2.1 Kartesisch

$$\operatorname{div} \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\vec{\nabla}} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

9.2.2 Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

9.3 Integralsatz von Gauss

$$\int_{(V)} \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint_{(S)=\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Fluss durch eingeschlossenen Körper = Gesamter Fluss durch geschlossenen Rand des Körpers

9.4 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

$$\Delta \phi = \operatorname{div} \left( \operatorname{grad}(\phi) \right) = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = f(\vec{r})$$

$\Delta :$

$\phi :$

$f(\vec{r}) :$

Laplace-Operator

Potentialfeld

Quellfunktion

9.4.1 Laplace-Gleichung

$$\Delta \phi = f = 0$$

$\Rightarrow$  Spezialfall der Poisson-Gleichung ohne äussere Quellfunktion

9.5 Rotation eines Vektorfelds (rot(), curl())

Beschreibt, wie stark und in welche Richtung sich ein Vektorfeld an einem Punkt rotiert. Wobei der Vektor selbst die Rotationsachse beschreibt und dessen Betrag proportional zur Rotationsgeschwindigkeit ist. Beispiel: Wirbelfelder

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- $|\operatorname{rot} \vec{A}| < 0$ : Uhrzeigersinn
- $|\operatorname{rot} \vec{A}| = 0$ : Wirbelfrei
- $|\operatorname{rot} \vec{A}| > 0$ : Gegenuhrzeigersinn

Gauss:  $\operatorname{div} \left( \operatorname{rot}(\vec{A}) \right) \stackrel{!}{=} 0$

9.6 Integralsatz von Stokes

$$\oint_{(C)=\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{(S)} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$\partial S$  **muss** anhand Rechter-Hand-Regel orientiert sein.  
Stokes sagt aus, dass die Summe der Verwirbelungen in einer Fläche, der Summe der Vektoren dessen Randes entsprechen.

9.7 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen