Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zgraggen
Autoren:
Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:
0.1.20240606
https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen

Inhaltsverzeichnis

1 Extrema von Funktionen finden

1.1 Extrema von Funktionen zweier Variabeln finden

1. **Gradient von f Null-setzten und kritische Stellen finden:**
$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{array}{l} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{array} \quad \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$$
2. **Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:**
$f_{xx} = \dots$
$f_{xy} = f_{yx} = \dots$
$f_{yy} = \dots$
3. **Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:**
$\Delta = f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - \left(f_{xy}(x_0; y_0)\right)^2$
4. **Auswertung:**

$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\Delta < 0$			$\Longrightarrow$	Sattelpunkt
$\Delta = 0$			?	Multi-variate-Taylor-logik ...

1.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variabeln finden

1. **Gradient von f Null-setzten und kritische Stellen finden:**
$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$$
2. **Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:**
$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \dots & f_{xt} \\ f_{yx} & f_{yy} & \dots & f_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx} & f_{ty} & \dots & f_{tt} \end{pmatrix}$$
   - Symmetrien beachten!
   - Nicht doppelt rechnen!
   $\Rightarrow f_{xt} = f_{tx}$
3. **Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen füllen:**
$$\mathbf{H}(x_0, y_0, \dots t_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{xy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots t_0) \end{pmatrix}$$
4. **Eigenwerte λ_i der Hesse-Matrix bestimmen:**
$\det\left(\mathbf{H}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda \cdot \mathbf{E}\right) = 0$
Nullstellen λ_i finden $\rightarrow$ Eigenwerte

Zur Erinnerung:
$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

$\mathbf{H}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda \cdot \mathbf{E} = \dots$
$$\dots = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda & f_{xy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda & \cdots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda \end{pmatrix}$$
5. **Auswertung:**

$\lambda_i < 0 \ \forall i$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\lambda_i > 0 \ \forall i$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\lambda_i > 0$ und $\lambda_i < 0$	$\Longrightarrow$	Sattelpunkt

Erklärung:
- $\lambda_i < 0 \ \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind negativ
- $\lambda_i > 0 \ \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind positiv

1.3 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion $f(x, y, \dots, t)$ gilt:

$f(x, y, \dots, t) \leq M_{\max}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	globales Maxinum
$f(x, y, \dots, t) > M_{\max}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	kein globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) \geq M_{\min}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	globales Minimum
$f(x, y, \dots, t) < M_{\min}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	kein globales Minimum

$M_{\max}$: grösstes lokales Maximum
$M_{\min}$: kleinstes lokales Minimum

1.4 Extrema von Funktionen zweier Variabeln mit NB finden

1. **Nebenbedingung (NB) in Standartform bringen:**
Standartform: $n(x, y) \stackrel{!}{=} 0$ — Nebenbedingung: $x + y = 1$
Standartform der Nebenbedingung: $x + y - 1 = 0$
2. **Lagrancge-Funktion $\mathcal{L}$ aufstellen:**
$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot n(x, y)$ — Am besten gleich ausmultiplizieren
3. **Gradient der Lagrancge-Funktion $\mathcal{L}$ Null-setzten und kritische Stellen finden:**
$$\nabla \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_x \\ \mathcal{L}_y \\ \mathcal{L}_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$$
4. **Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:**
$\mathcal{L}_{\lambda\lambda} = \dots$ $\quad \mathcal{L}_{\lambda x} = \mathcal{L}_{x\lambda} = \dots$
$\mathcal{L}_{xx} = \dots$ $\quad \mathcal{L}_{\lambda y} = \mathcal{L}_{y\lambda} = \dots$
$\mathcal{L}_{yy} = \dots$ $\quad \mathcal{L}_{xy} = \mathcal{L}_{yx} = \dots$
5. **Geränderte Hesse Matrix $\overline{\mathbf{H}}$ aufstellen und kritische Stellen einsetzen:**
$$\overline{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{\lambda x}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{\lambda y}(x_0, y_0) \\ \mathcal{L}_{x\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xy}(x_0, y_0) \\ \mathcal{L}_{y\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$
6. **Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:**
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = ...$
7. **Auswertung**

$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = 0$	$\Longrightarrow$	keine Aussage möglich