Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zgraggen

Autoren:
Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:
0.1.20240611
https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen

Inhaltsverzeichnis

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren **2**
1.1 Dimensionen . . . 2
1.2 Schnitte . . . 2
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinen, ... 2

2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat) **3**
2.1 Partielle Ableitung . . . 3
2.2 Gradient (Nabla-Operator) . . . 3
2.3 Totale Ableitung . . . 3
2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation) . . . 3
2.5 DGL . . . 3
2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren) . . . 3
2.7 Gradientenfeld $\perp$ Kontouren . . . 3
2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt? . . . 3
2.9 Richtungs-Ableitung . . . 3

3 Extrema von Funktionen finden **4**
3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden . . . 4
3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden . . . 4
3.3 Lokales oder Globales Extremum . . . 4
3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden . . . 4
3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden . . . 4

4 Extrema von Funktionen mehrerer Variabeln finden **5**
4.1 Lokales oder Globales Extremum . . . 5

5 Integration (bi-variat) **6**
5.1 2D . . . 6
5.2 Normalbereich . . . 6
5.3 Polar . . . 6
5.4 2D Transformation Polar zu Kartesisch . . . 6
5.5 Derivative, Ableitung . . . 6
5.6 3D Volumenberechnung . . . 6
5.7 . . . 6
5.8 . . . 6

6 Integration (multi-variat) **7**

7 Differenziation und Integration von Kurven **7**

8 (Ober-)Flächenintegrale **7**

9 Vektoranalysis **7**
9.1 Vektorfelder . . . 7
9.2 Divergenz (Volumenableitung) . . . 7
9.3 Integralsatz von Gauss . . . 7
9.4 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung) . . . 7
9.5 Rotation eines Vektorfelds (rot(), curl()) . . . 7
9.6 Integralsatz von Stokes . . . 7
9.7 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen . . . 7

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f : \mathbb{D}_f (\subseteq \mathbb{R}^{m}) \longrightarrow \mathbb{W}_f (\subseteq \mathbb{R}^{n})$$

$\boldsymbol{m}$	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{D}_f$, wobei $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$
$\boldsymbol{n}$	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{W}_f$, wobei $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$
$\vec{f}$	wenn Output vektoriell

⚠ Variablen sind abhängig von einander!

Multi-Variat:

f ist "Multi-Variat", wenn:
- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

f ist nicht "Multi-Variat", wenn:
- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

$$\left.\begin{array}{r} \text{Raum 3D } (x; y; z)\ \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t)\ \mathbb{R}^1 \end{array}\right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t; x; y; z)$$

1.1.2 Stationärer Fall

$$t \to \infty \to \text{Stationär}$$

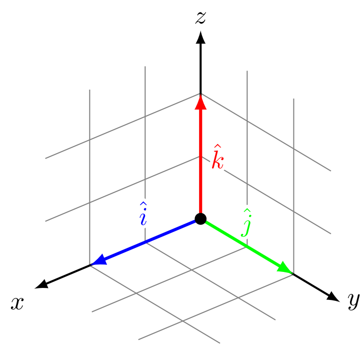
$$T(x; y; z) \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} \to 0$$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



1.2 Schnitte

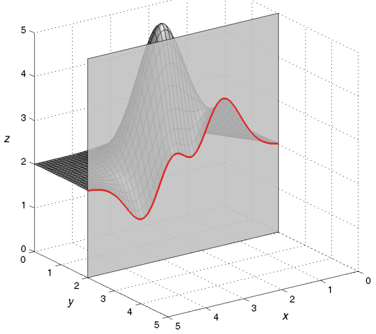
Schnitt = Restriktion → Teilmenge vom Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$

1.2.1 Partielle Funktion

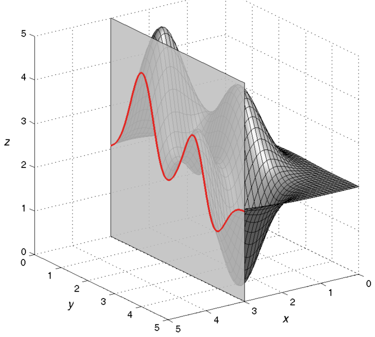
- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
- **Alle** anderen Variablen sind fix!
  ⚠ $\mathbb{W}_f$ Analyse!

Beispiel: Schnitte

x-Linien
- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y_0; f(x; y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow y_0 = 2$



y-Linien
- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt.
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x_0; y; f(x_0; y))$
- x-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel



1.2.2 Bedingungen

Initialbedingungen	→	Beziehen sich auf die **Zeit**
Randbedingungen	→	Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

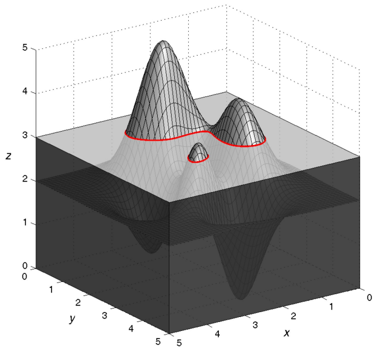
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinen, ...

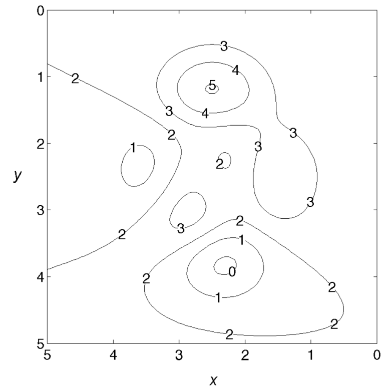
Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion f **konstant**.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \subset \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)
- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y; f(x; y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow z_0 = 3$





2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat)

$$f : \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}$$

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x, y) : \ y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \textbf{ einzige} \text{ freie Variable}$$

Notationen

$$\begin{aligned}
&\text{1. Ordnung:} && f(x; y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x; y_0) \\
&\text{2. Ordnung:} && \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \\
& && \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}
\end{aligned}$$

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

$$\underset{\text{"Gradient" / Nabla}}{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}$$

2.3 Totale Ableitung

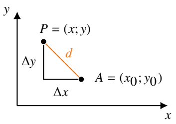
Für Fehlerrechnung benützt, da man hierbei die Abstände von $(x; y; z)$ zu einem festen Punkt $(x_0; y_0; z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f; \underbrace{(x_0, y_0, \dots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \ \mathbb{R}^2 \xrightarrow{1 \times 2 \text{ Matrix}} \mathbb{R}^1; \text{ "gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \dots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + f(x_0; y_0) + R_1$$

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d\text{")}$$



$$D(f; (x_0; y_0)) = \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)\right)$$

$$= (\nabla f)^{\text{tr}} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A$$

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

2.4.1 Tangentialebene

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

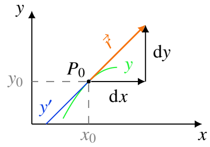
$$\mathrm{d}f \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y \quad \text{bezüglich } A = \underbrace{(x_0; y_0)}$$

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

$$\begin{pmatrix} f = c = \text{const.} & |\,\mathrm{d}(\dots) \\ \mathrm{d}f = \mathrm{d}c \stackrel{!}{=} 0 & \end{pmatrix} \qquad f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{für Kontourlinien}$$

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x}{f_y \neq 0} \lor x'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



2.5 DGL

$$y' = \underbrace{\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)}_{\text{right-hand-side (r.h.s.) Funktion}}; \ y(x_0) = y_0$$

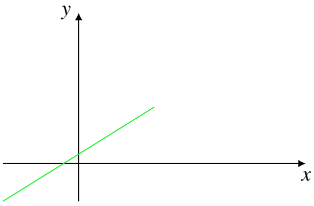
2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

$$\vec{r} = \left(\mathrm{d}x = h; \mathrm{d}y = y' \,\mathrm{d}x = -\frac{f_x}{f_y} \mathrm{d}x\right)^{\text{tr}}$$

2.7 Gradientenfeld ⊥ Kontouren

$$\nabla f \underset{\text{Skalarprodukt}}{\bullet} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y = y' \,\mathrm{d}x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?



$$\begin{aligned}
s(t) &: \quad P_0 + t \cdot \hat{v} \mid t \in \mathbb{R} \\
s(t) &: \quad f(x_0 + t \cdot \hat{v}_1 \,;\, y_0 + t \cdot \hat{v}_2)
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{s}(t) : \quad t \mapsto \overbrace{\begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v_1 \\ y_0 + t \cdot v_2 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \mapsto f(x, y)$$

2.9 Richtungs-Ableitung

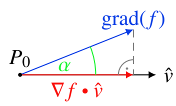
$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \stackrel{!}{=} D(f; (x_0; y_0)) \cdot \hat{v} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \text{grad}(f)^{\text{tr}} \cdot \hat{v} = f_x \cdot v_1 + f_y \cdot v_2$$

Beispiel: Richtungs-Ableitung

$$\vec{x} : \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_1} = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 = \underline{\underline{f_x}}$$

2.9.1 Spezialfälle

- $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ rechter Winkel
- $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}$ extremal
  - $\alpha = 0$ (max): $\nabla f \cdot \hat{v} > 0 \Rightarrow$ grad(f) liegt auf $\hat{v}$
  - $\alpha = \pi$ (min): $\nabla f \cdot \hat{v} < 0 \Rightarrow$ grad(f) liegt invers auf $\hat{v}$



Trigo: $\nabla f \cdot \hat{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \Rightarrow \cos(\alpha) \cdot |\nabla f|$

3 Extrema von Funktionen finden

<u>**Stationäritätsbedingung:**</u> $\nabla f \overset{!}{=} \vec{0}$

3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden

1. **Gradient von f Null-setzten und kritische Stellen finden:**

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$$

2. **Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:**

$f_{xx} = \dots \qquad f_{xy} = f_{yx} = \dots \qquad f_{yy} = \dots$

3. **Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:**

$\Delta = f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - \left(f_{xy}(x_0; y_0)\right)^2$

4. **Auswertung:**

$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\Delta < 0$			$\Longrightarrow$	Sattelpunkt
$\Delta = 0$			?	Multi-variate-Taylor-logik ...

3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden

1. **Gradient von f Null-setzten und kritische Stellen finden:**

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$$

2. **Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:**

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \dots & f_{xt} \\ f_{yx} & f_{yy} & \dots & f_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx} & f_{ty} & \dots & f_{tt} \end{pmatrix}$$

- Symmetrien beachten!
- Nicht doppelt rechnen!
  $\Rightarrow f_{xt} = f_{tx}$

3. **Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen füllen:**

$$\mathbf{H}(x_0, y_0, \dots t_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{xy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots t_0) \end{pmatrix}$$

4. **Eigenwerte λ_i der Hesse-Matrix bestimmen:**

$\det\left(\mathbf{H}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda \cdot \mathbf{E}\right) = 0$

Nullstellen λ_i finden $\rightarrow$ Eigenwerte

<u>Zur Erinnerung:</u>

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

$\mathbf{H}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda \cdot \mathbf{E} = \dots$

$$\dots = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda & f_{xy}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda & \cdots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots t_0) & \cdots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots t_0) - \lambda \end{pmatrix}$$

5. **Auswertung:**

$\lambda_i < 0 \ \ \forall i$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\lambda_i > 0 \ \ \forall i$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\lambda_i > 0$ und $\lambda_i < 0$	$\Longrightarrow$	Sattelpunkt

Erklärung:
- $\lambda_i < 0 \ \ \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind negativ
- $\lambda_i > 0 \ \ \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind positiv

3.3 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion $f(x, y, \dots, t)$ gilt:

$f(x, y, \dots, t) \leq M_{\max}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	globales Maxinum
$f(x, y, \dots, t) > M_{\max}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	kein globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) \geq M_{\min}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	globales Minimum
$f(x, y, \dots, t) < M_{\min}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	kein globales Minimum

$M_{\max}$: grösstes lokales Maximum
$M_{\min}$: kleinstes lokales Minimum

3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden

1. **Nebenbedingung (NB) in Standartform bringen:**

Standartform: $n(x, y) \overset{!}{=} 0$

Nebenbedingung: $x + y = 1$
Standartform der Nebenbedingung: $x + y - 1 = 0$

2. **Lagrancge-Funktion $\mathcal{L}$ aufstellen:**

$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot n(x, y)$ Am besten gleich ausmultiplizieren

3. **Gradient der Lagrancge-Funktion $\mathcal{L}$ Null-setzten und kritische Stellen finden:**

$$\nabla \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_x \\ \mathcal{L}_y \\ \mathcal{L}_\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$$

4. **Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:**

$\mathcal{L}_{\lambda\lambda} \overset{!}{=} 0 \qquad \mathcal{L}_{\lambda x} = \mathcal{L}_{x\lambda} = n_x = \dots$

$\mathcal{L}_{xx} = \dots \qquad \mathcal{L}_{\lambda y} = \mathcal{L}_{y\lambda} = n_y = \dots$

$\mathcal{L}_{yy} = \dots \qquad \mathcal{L}_{xy} = \mathcal{L}_{yx} = \dots$

5. **Geänderte Hesse Matrix $\overline{\mathbf{H}}$ aufstellen und kritische Stellen einsetzen:**

$$\overline{\mathbf{H}}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{\lambda x}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{\lambda y}(x_0, y_0) \\ \mathcal{L}_{x\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xy}(x_0, y_0) \\ \mathcal{L}_{y\lambda}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(x_0, y_0) & n_x(x_0, y_0) & n_y(x_0, y_0) \\ n_x(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xy}(x_0, y_0) \\ n_y(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

6. **Determinante der geänderten Hesse Matrix bestimmen:**

$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = \dots$

7. **Auswertung**

$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = 0$	$\Longrightarrow$	keine Aussage möglich

3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden

1. **Nebenbedingung (NB) in Standartform bringen:**

Standartform: $n(x, y, \dots, t) \overset{!}{=} 0$

2. **Lagrancge-Funktion $\mathcal{L}$ aufstellen:**

$\mathcal{L}(x, y, \dots, t, \lambda) = f(x, y, \dots, t) + \lambda \cdot n(x, y, \dots, t)$ Am besten gleich ausmultiplizieren

3. **Gradient der Lagrancge-Funktion $\mathcal{L}$ Null-setzten und kritische Stellen finden:**

$$\nabla \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_x \\ \mathcal{L}_y \\ \vdots \\ \mathcal{L}_t \\ \mathcal{L}_\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$$

4. **Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:**

$\mathcal{L}_{\lambda\lambda} \overset{!}{=} 0$
$\mathcal{L}_{xx} = \dots$
$\mathcal{L}_{yy} = \dots$
$\vdots$
$\mathcal{L}_{tt} = \dots$

$\mathcal{L}_{\lambda x} = \mathcal{L}_{x\lambda} = n_x = \dots$
$\mathcal{L}_{\lambda y} = \mathcal{L}_{y\lambda} = n_y = \dots$
$\vdots$
$\mathcal{L}_{\lambda t} = \mathcal{L}_{t\lambda} = n_t = \dots$

$\mathcal{L}_{xy} = \mathcal{L}_{yx}$
$\mathcal{L}_{xt} = \mathcal{L}_{tx}$
$\mathcal{L}_{yt} = \mathcal{L}_{ty}$
$\vdots$

5. **Geänderte Hesse Matrix $\overline{\mathbf{H}}$ aufstellen und kritische Stellen einsetzen:**

$$\overline{\mathbf{H}}(x_0, y_0, \dots t_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{\lambda x}(\dots) & \mathcal{L}_{\lambda y}(\dots) & \cdots & \mathcal{L}_{\lambda t}(\dots) \\ \mathcal{L}_{x\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{xx}(\dots) & \mathcal{L}_{xy}(\dots) & \cdots & \mathcal{L}_{xt}(\dots) \\ \mathcal{L}_{y\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{yx}(\dots) & \mathcal{L}_{yy}(\dots) & \cdots & \mathcal{L}_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_{t\lambda}(\dots) & \mathcal{L}_{tx}(\dots) & \mathcal{L}_{ty}(\dots) & \cdots & \mathcal{L}_{tt}(\dots) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(\dots) & n_x(\dots) & n_y(\dots) & \cdots & n_t(\dots) \\ n_x(\dots) & \mathcal{L}_{xx}(\dots) & \mathcal{L}_{\lambda y}(\dots) & \cdots & \mathcal{L}_{xt}(\dots) \\ n_y(\dots) & \mathcal{L}_{yx}(\dots) & \mathcal{L}_{yy}(\dots) & \cdots & \mathcal{L}_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_t(\dots) & \mathcal{L}_{tx}(\dots) & \mathcal{L}_{ty}(\dots) & \cdots & \mathcal{L}_{tt}(\dots) \end{pmatrix}$$

6. **Determinante der geänderten Hesse Matrix bestimmen:**

$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = \dots$

7. **Auswertung**

$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = 0$	$\Longrightarrow$	keine Aussage möglich

4 Extrema von Funktionen mehrerer Variabeln finden

1. Gradient von f Null-setzten und kritische Stellen finden:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_0, y_0, \ldots, t_0 \text{ bestimmen}$$

2. Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \ldots & f_{xt} \\ f_{yx} & f_{yy} & \ldots & f_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx} & f_{ty} & \ldots & f_{tt} \end{pmatrix}$$

- Symmetrien beachten!
- Nicht doppelt rechnen!

  $\Rightarrow f_{xt} = f_{tx}$

3. Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen füllen:

$$\mathbf{H}(x_0, y_0, \ldots t_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \ldots t_0) & f_{xy}(x_0, y_0, \ldots t_0) & \cdots & f_{xt}(x_0, y_0, \ldots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \ldots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \ldots t_0) & \cdots & f_{yt}(x_0, y_0, \ldots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \ldots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \ldots t_0) & \cdots & f_{tt}(x_0, y_0, \ldots t_0) \end{pmatrix}$$

4. Eigenwerte λ_i der Hesse-Matrix bestimmen:

$\det(\mathbf{H}(x_0, y_0, \ldots t_0) - \lambda \cdot \mathbf{E}) = 0$
Nullstellen λ_i finden $\rightarrow$ Eigenwerte

<u>Zur Erinnerung:</u>

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

$\mathbf{H}(x_0, y_0, \ldots t_0) - \lambda \cdot \mathbf{E} = \ldots$

$$\ldots = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \ldots t_0) - \lambda & f_{xy}(x_0, y_0, \ldots t_0) & \cdots & f_{xt}(x_0, y_0, \ldots t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \ldots t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \ldots t_0) - \lambda & \cdots & f_{yt}(x_0, y_0, \ldots t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \ldots t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \ldots t_0) & \cdots & f_{tt}(x_0, y_0, \ldots t_0) - \lambda \end{pmatrix}$$

5. Auswertung:

$\lambda_i < 0 \ \ \forall i$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\lambda_i > 0 \ \ \forall i$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\lambda_i > 0$ und $\lambda_i < 0$	$\Longrightarrow$	Sattelpunkt

Erklärung:

- $\lambda_i < 0 \ \ \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind negativ
- $\lambda_i > 0 \ \ \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind positiv

4.1 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion $f(x, y, \ldots, t)$ gilt:

$f(x, y, \ldots, t) \leq M_{\text{max}}$	$\forall (x, y, \ldots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	globales Maxinum
$f(x, y, \ldots, t) > M_{\text{max}}$	$\exists (x, y, \ldots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	kein globales Maximum
$f(x, y, \ldots, t) \geq M_{\text{min}}$	$\forall (x, y, \ldots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	globales Minimum
$f(x, y, \ldots, t) < M_{\text{min}}$	$\exists (x, y, \ldots, t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	kein globales Minimum

M_{max}: grösstes lokales Maximum
M_{min}: kleinstes lokales Minimum

5 Integration (bi-variat)

5.1 2D

$$\int\int_{\Omega} f(x;y) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y = \int_{X} \left(\int_{Y} f(x;y) \cdot dy \right) \cdot dx$$

$$wenn \int\int |f(x;y)| dxdy < \infty$$

5.2 Normalbereich

Schnitte sind Strecken (Intervalle) für x, y, ...

5.3 Polar

$$\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y = r \cdot d\phi \cdot dr$$

5.4 2D Transformation Polar zu Kartesisch

T = Transformation

$$\text{Polar } (r, \phi) \xrightarrow{T} (x, y) \text{ Kartesisch}$$

$$\begin{pmatrix} x = r \cdot \cos(\varphi) \ \mathbb{R} \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \ \mathbb{R} \end{pmatrix} \text{2D}$$

Die Funktionen für x und y sind skalare Funktion.

$$x = x(r;\varphi) \qquad y = y(r;\varphi)$$

5.5 Derivative, Ableitung

5.6 3D Volumenberechnung

$$V = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} f(x;y)\ dy \right] dx$$

5.7

5.8

6 Integration (multi-variat)

7 Differenziation und Integration von Kurven

8 (Ober-)Flächenintegrale

9 Vektoranalysis

9.1 Vektorfelder

- Jedem Punkt P im Raum ist ein Vektor $\vec{V}$ zugeordnet
- Kann als $\vec{V}(\vec{r})$ geschrieben werden, wobei $\vec{r}$ ein Ortsvektor mit fixem Ursprung $\vec{0}$ ist

9.2 Divergenz (Volumenableitung)

- Beschreibt, wie stark sich ein Vektorfeld in einem Punkt ausbreitet oder zusammenzieht
- Beispiel: Vektorfeld das die Geschwindigkeit von Wasser in eineem Fluss beschreibt
  - An Punkten mit positiver Divergenz fliesst Wasser hinaus (Quelle)
  - An Punkten mit negativer Divergenz fliesst Wasser hinein (Senke)

$$\boxed{\nabla \bullet \vec{V} = \operatorname{div} \vec{V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{(S)} \vec{V} \bullet \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}}$$

9.2.1 Kartesisch

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}$$

9.2.2 Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

9.3 Integralsatz von Gauss

$$\boxed{\int\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{A} \, \mathrm{d}V = \oint\limits_{(S)=\partial V} \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{S}}$$

Fluss durch eingeschlossenen Körper = Gesamter Fluss durch geschlossenen Rand des Körpers

9.4 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

$$\boxed{\Delta\phi = \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}(\phi)\right) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = f(\vec{r})}$$

Δ :	Laplace-Operator
ϕ :	Potentialfeld
$f(\vec{r})$:	Quellfunktion

9.4.1 Laplace-Gleichung

$\boxed{\Delta\phi = f = 0}$ $\Rightarrow$ Spezialfall der Poisson-Gleichung ohne äussere Quellfunktion

9.5 Rotation eines Vektorfelds (rot(), curl())

Beschreibt, wie stark und in welche Richtung sich ein Vektorfeld an einem Punkt rotiert. Wobei der Vektor selbst die Rotationsachse beschreibt und dessen Betrag proportional zur Rotationsgeschwindigkeit ist. Beispiel: Wirbelfelder

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

- $\left|\operatorname{rot} \vec{A}\right| < 0$: Uhrzeigersinn
- $\left|\operatorname{rot} \vec{A}\right| = 0$: Wirbelfrei
- $\left|\operatorname{rot} \vec{A}\right| > 0$: Gegenuhrzeigersinn

Gauss: $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}(\vec{A})\right) \stackrel{!}{=} 0$

9.6 Integralsatz von Stokes

$$\boxed{\oint\limits_{(C)=\partial S} \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_{(S)} \operatorname{rot} \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{S}}$$

∂S **muss** anhand Rechter-Hand-Regel orientiert sein.
Stokes sagt aus, dass die Summe der Verwirbelungen in einer Fläche, der Summe der Vektoren dessen Randes entsprechen.

9.7 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen

–TBD–