Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 – Prof. Dr. Bernhard Zgraggen
Autoren:
Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

V 0.1.20240312
https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f : \mathbb{D}_f (\subseteq \mathbb{R}^{m}) \longrightarrow \mathbb{W}_f (\subseteq \mathbb{R}^{n})$$

m	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{D}_f$, wobei $m \in \mathbb{N}$
n	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{W}_f$, wobei $n \in \mathbb{N}$
$\vec{f}$	wenn Output vektoriell

⚠ **Variablen sind abhängig von einander!**

Multi-Variat:

Die Funktion f ist "Multi-Variat", wenn:

- Input, Output oder beides mehrdimensional ist.
  (Nur wenn Input **und** Output Skalare sind ist eine Funktion nicht Multi-Variat.)

1.1.1 Raumzeit

$$\left.\begin{array}{r} \text{Raum 3D } (x;y;z)\ \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t)\ \mathbb{R}^1 \end{array}\right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 (t;x;y;z) = \text{4D Raumzeit}$$

1.1.2 Stationärer Fall

$$t \to \infty \to \text{Stationär}$$

$$T(x;y;z) \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} \to 0$$

1.1.3 Koordinatenvektoren = Einheitsvektoren

$$\vec{i} = \hat{i} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{j} = \hat{j} = \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{k} = \hat{k} = \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion $\rightarrow$ Teilmenge vom Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$

1.2.1 Partielle Funktion

- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
- **Alle** anderen Variablen sind fix!
  ⚠ $\mathbb{W}_f$ **Analyse!**

1.3 Konturen, Levelsets, Niveaulinien, ...

Output = konstant = const. = fix:

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \subset \mathbb{D}_f$$

Man spricht von "Konturen, Levelsets oder Niveaulinien", wenn der Output von f konstant ist.

Hier wäre ein Bild von Höhenlinien aus dem Skript cool

2 Ableitungen, DGL und Gradienten

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x,y): \ y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \textbf{ einzige} \text{ freie Variable}$$

Notationen

$$\begin{array}{ll} \text{1. Ordnung:} & f(x;y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x;y_0) \\ \text{2. Ordnung:} & \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \end{array} \end{array}$$

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

$$\underbrace{\nabla}_{\text{"Gradient"}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}$$

2.3 Totale Ableitung

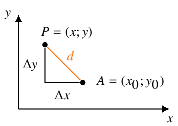
Für Fehlerrechnung benützt, da man hierbei die Abstände von $(x;y;z)$ zu einem festen Punkt $(x_0;y_0;z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f;\underbrace{(x_0,y_0,\ldots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \ \overset{1\times 2 \text{ Matrix}}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1}; \text{ "gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \ldots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix} + f(x_0;y_0) + R_1$$

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d\text{")}$$



$$D(f;(x_0;y_0)) = \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)\right)$$

$$= (\nabla f)^{tr} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A$$

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x;y) \approx f(x_0;y_0) + D(f;(x_0;y_0)) \cdot \begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

2.4.1 Tangentialebene

$$g(x;y) = f(x_0;y_0) + D(f;(x_0;y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

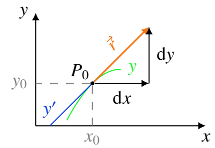
$$\mathrm{d}f \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \quad \text{bezüglich } A = \underbrace{(x_0;y_0)}$$

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

$$\begin{pmatrix} f = c = \text{const.} & |\,\mathrm{d}(\ldots) \\ \mathrm{d}f = \mathrm{d}c \stackrel{!}{=} 0 & \end{pmatrix} \qquad f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{für Kontourlinien}$$

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



2.5 DGL

$$y' = \left(-\frac{f_x}{f_y}\right); \ y(x_0) = y_0$$

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

$$\vec{r} = \left(\mathrm{d}x = h; \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x = -\frac{f_x}{f_y}\,\mathrm{d}x\right)^{tr}$$

2.7 Gradientenfeld ⊥ Kontouren

$$\nabla f \underset{\text{Skalarprodukt}}{\bullet} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$