

Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zraggen

Autoren:

Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:

0.1.20240614

<https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen>



Inhaltsverzeichnis

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren	2	5 Integration (bi-variät)	6
1.1 Dimensionen	2	5.1 Normalbereich	6
1.2 Schnitte	2	5.2 Zweidimensionale Koordinatensysteme	6
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...	2	5.3 2D Transformation Polar zu Kartesisch	6
		5.4 Derivative, Ableitung	6
		5.5 Anwendungsformeln Doppelintegral	6
2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variät)	3	6 Integration (multi-variät)	7
2.1 Partielle Ableitung	3	6.1 Dreidimensionale Koordinatensysteme	7
2.2 Gradient (Nabla-Operator)	3	6.2 Längenintegrale	7
2.3 Totale Ableitung	3	6.3 Flächenintegrale	7
2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)	3	6.4 Volumenintegrale	7
2.5 DGL	3	6.5 Anwendungen Trippel-Integrale	7
2.6 Richtungselement (Tangentiellinie an Kontouren)	3		
2.7 Gradientenfeld \perp Kontouren	3	7 Differenziation und Integration von Kurven	7
2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?	3		
2.9 Richtungs-Ableitung	3	8 (Ober-)Flächenintegrale	7
		8.1 Allgemeine Wendelfläche	7
		8.2 Freie Fläche	7
		8.3 1. metrischer Tensor	7
3 Extrema von Funktionen finden	4	9 Vektoranalysis	7
3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden	4	9.1 Vektorfelder	7
3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden	4	9.2 Divergenz (Volumenableitung)	7
3.3 Lokales oder Globales Extremum	4	9.3 Integralsatz von Gauss	8
3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden	4	9.4 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)	8
3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden	4	9.5 Rotation eines Vektorfelds (rot(), curl())	8
		9.6 Integralsatz von Stokes	8
4 Support Vector Machine (SVM)	5	9.7 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen	8
4.1 Lineare Trennbarkeit von Daten	5		

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f: \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^n)$$

- m Anzahl Dimensionen von \mathbb{D}_f , wobei $m \in \mathbb{N}$
- n Anzahl Dimensionen von \mathbb{W}_f , wobei $n \in \mathbb{N}$
- \vec{f} wenn Output vektoriell

⚠ Variablen sind abhängig von einander!

Multi-Variat:

f ist "Multi-Variat", wenn:

- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

f ist **nicht** "Multi-Variat", wenn:

- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

$$\left. \begin{array}{l} \text{Raum 3D } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t) \in \mathbb{R}^1 \end{array} \right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t; x; y; z)$$

1.1.2 Stationärer Fall

$$t \rightarrow \infty \rightarrow \text{Stationär}$$

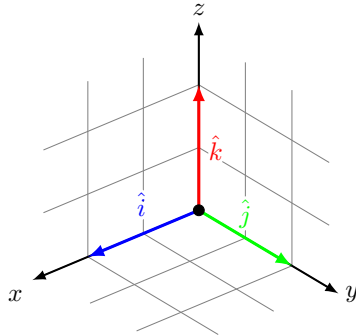
$$T(x; y; z) \frac{\Delta T}{\Delta t} \rightarrow 0$$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion \rightarrow Teilmenge vom Definitionsbereich \mathbb{D}_f

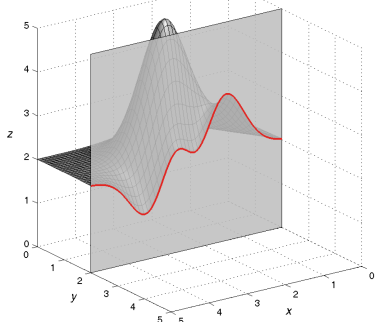
1.2.1 Partielle Funktion

- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
 - **Alle** anderen Variablen sind fix!
- ⚠ \mathbb{W}_f Analyse!

Beispiel: Schnitte

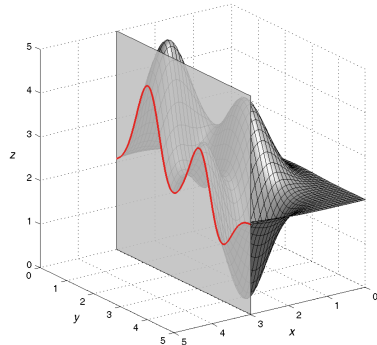
x-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y_0; f(x; y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow y_0 = 2$



y-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x_0; y; f(x_0; y))$
- x-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel



1.2.2 Bedingungen

Initialbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf die **Zeit**

Randbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...

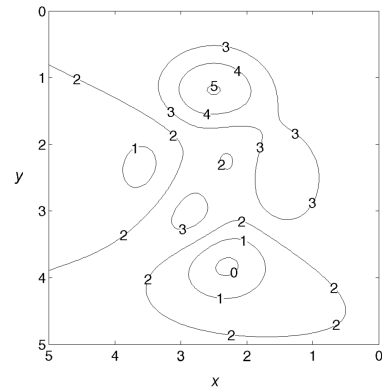
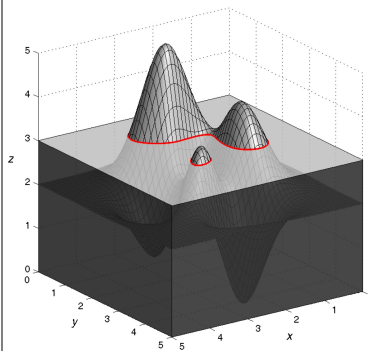
Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion f **konstant**.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \in \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)

- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y; f(x; y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow z_0 = 3$



2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat)

$$f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}$$

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x, y): y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \text{ **einzig**e freie Variable}$$

Notationen

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ordnung: } f(x; y_0) &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x; y_0) \\ 2. \text{ Ordnung: } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \end{aligned}$$

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

$$\text{"Gradient" / Nabla} \rightarrow \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}$$

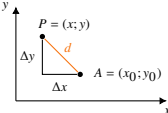
2.3 Totale Ableitung

Für Fehlerrechnung benutzt, da man hierbei die Abstände von $(x; y; z)$ zu einem festen Punkt $(x_0; y_0; z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f; \underbrace{(x_0, y_0, \dots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[1 \times 2 \text{ Matrix}]{\text{gute Approximation}} \mathbb{R}^1; \text{ "gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \dots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + f(x_0; y_0) + R_1$$

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d \text{")}$$


$$\begin{aligned} D(f; (x_0; y_0)) &= \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \right) \\ &= (\nabla f)^{\text{tr}} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A \end{aligned}$$

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

2.4.1 Tangentialebene

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

$$df \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{bezüglich } A = (x_0; y_0)$$

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

$$\left(\begin{array}{l} f = c = \text{const.} \quad | d(\dots) \\ df = dc \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right) \quad f_x dx + f_y dy = 0 \quad \text{für Kontourlinien}$$

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = - \frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{dx}{dy} = - \frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



2.5 DGL

$$y' = \left(- \frac{f_x}{f_y} \right); y(x_0) = y_0$$

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

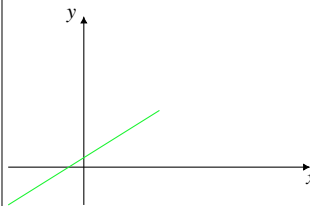
2.6 Richtungselement (Tangentiellinie an Kontouren)

$$\vec{r} = \left(dx = h; dy = y' dx = - \frac{f_x}{f_y} dx \right)^{\text{tr}}$$

2.7 Gradientenfeld \perp Kontouren

$$\text{Skalarprodukt} \rightarrow \nabla f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy = y' dx \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?



$$s(t): P_0 + t \cdot \hat{v} \mid t \in \mathbb{R}$$

$$s(t): f(x_0 + t \cdot \hat{v}_1; y_0 + t \cdot \hat{v}_2)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t): t \mapsto \overbrace{\begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v_1 \\ y_0 + t \cdot v_2 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \mapsto f(x, y)$$

2.9 Richtungs-Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \stackrel{!}{=} D(f; (x_0; y_0)) \cdot \hat{v} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \text{grad}(f)^{\text{tr}} \cdot \hat{v} = f_x \cdot v_1 + f_y \cdot v_2$$

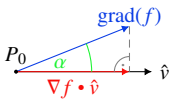
Beispiel: Richtungs-Ableitung

$$\vec{x}: \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_1} = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 = \underline{f_x}$$

2.9.1 Spezialfälle

- $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ rechter Winkel
- $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}$ extremal
 - $\alpha = 0$ (max): $\nabla f \cdot \hat{v} > 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$ liegt auf \hat{v}
 - $\alpha = \pi$ (min): $\nabla f \cdot \hat{v} < 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$ liegt invers auf \hat{v}

$$\text{Trigo: } \nabla f \cdot \hat{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \Rightarrow \cos(\alpha) \cdot |\nabla f|$$



3 Extrema von Funktionen finden

Stationaritätsbedingung: ∇f $\stackrel{!}{=} \vec{0}$

3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇f = (f_x / f_y) $\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

f_xx = ... f_xy = f_yx = ... f_yy = ...

3. Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:

Δ = f_xx(x_0; y_0) · f_yy(x_0; y_0) - (f_xy(x_0; y_0))^2

4. Auswertung:

Δ > 0	AND	f_xx(x_0; y_0) < 0	⇒	lokales Maximum
Δ > 0	AND	f_yy(x_0; y_0) < 0	⇒	lokales Maximum
Δ > 0	AND	f_xx(x_0; y_0) > 0	⇒	lokales Minimum
Δ > 0	AND	f_yy(x_0; y_0) > 0	⇒	lokales Minimum
Δ < 0			⇒	Sattelpunkt
Δ = 0		?		Multi-variate-Taylor-logik ...

3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇f = (f_x / f_y / ... / f_t) $\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:

H = (f_xx f_xy ... f_xt / f_yx f_yy ... f_yt / ... / f_tx f_ty ... f_tt) • Symmetrien beachten! • Nicht doppelt rechnen! ⇒ f_xt = f_tx

3. Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen füllen:

H(x_0, y_0, ... t_0) = (f_xx(x_0, y_0, ... t_0) f_xy(x_0, y_0, ... t_0) ... f_xt(x_0, y_0, ... t_0) / f_yx(x_0, y_0, ... t_0) f_yy(x_0, y_0, ... t_0) ... f_yt(x_0, y_0, ... t_0) / ... / f_tx(x_0, y_0, ... t_0) f_ty(x_0, y_0, ... t_0) ... f_tt(x_0, y_0, ... t_0))

4. Eigenwerte λ_i der Hesse-Matrix bestimmen:

det(H(x_0, y_0, ... t_0) - λ · E) = 0 Nullstellen λ_i finden → Eigenwerte

Zur Erinnerung:

E = (1 0 ... 0 / 0 1 ... 0 / ... / 0 0 ... 1) λ · E = (λ 0 ... 0 / 0 λ ... 0 / ... / 0 0 ... λ)

H(x_0, y_0, ... t_0) - λ · E = ...

... = (f_xx(x_0, y_0, ... t_0) - λ f_xy(x_0, y_0, ... t_0) ... f_xt(x_0, y_0, ... t_0) / f_yx(x_0, y_0, ... t_0) f_yy(x_0, y_0, ... t_0) - λ ... f_yt(x_0, y_0, ... t_0) / ... / f_tx(x_0, y_0, ... t_0) f_ty(x_0, y_0, ... t_0) ... f_tt(x_0, y_0, ... t_0) - λ)

5. Auswertung:

λ_i < 0 ∀i	⇒	lokales Maximum
λ_i > 0 ∀i	⇒	lokales Minimum
λ_i > 0 und λ_i < 0	⇒	Sattelpunkt

Erklärung:

- λ_i < 0 ∀i ⇔ Alle λ_i sind negativ
- λ_i > 0 ∀i ⇔ Alle λ_i sind positiv

3.3 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion f(x, y, ..., t) gilt:

f(x, y, ..., t) ≤ M_max	∀(x, y, ..., t) ∈ D_f	⇒	globales Maximum
f(x, y, ..., t) > M_max	∃(x, y, ..., t) ∈ D_f	⇒	kein globales Maximum
f(x, y, ..., t) ≥ M_min	∀(x, y, ..., t) ∈ D_f	⇒	globales Minimum
f(x, y, ..., t) < M_min	∃(x, y, ..., t) ∈ D_f	⇒	kein globales Minimum

- M_max: grösstes lokales Maximum
- M_min: kleinstes lokales Minimum

3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: n(x, y) $\stackrel{!}{=} 0$ Nebenbedingung: x + y = 1 Standardform der Nebenbedingung: x + y - 1 = 0

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

L(x, y, λ) = f(x, y) + λ · n(x, y) Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇L = (L_x / L_y / L_λ) $\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

L_λλ $\stackrel{!}{=} 0$ L_λx = L_xλ = n_x = ... L_xx = ... L_λy = L_yλ = n_y = ... L_yy = ... L_xy = L_yx = ...

5. Geränderte Hesse Matrix H aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

H(x_0, y_0) = (L_λλ(x_0, y_0) L_λx(x_0, y_0) L_λy(x_0, y_0) / L_xλ(x_0, y_0) L_xx(x_0, y_0) L_xy(x_0, y_0) / L_yλ(x_0, y_0) L_yx(x_0, y_0) L_yy(x_0, y_0)) = (0 n_x(x_0, y_0) n_y(x_0, y_0) / n_x(x_0, y_0) L_xx(x_0, y_0) L_xy(x_0, y_0) / n_y(x_0, y_0) L_yx(x_0, y_0) L_yy(x_0, y_0))

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

det(H) = ...

7. Auswertung

det(H) > 0	⇒	lokales Maximum
det(H) < 0	⇒	lokales Minimum
det(H) = 0	⇒	keine Aussage möglich

3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: n(x, y, ..., t) $\stackrel{!}{=} 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

L(x, y, ..., t, λ) = f(x, y, ..., t) + λ · n(x, y, ..., t) Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇L = (L_x / L_y / ... / L_t / L_λ) $\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

L_λλ $\stackrel{!}{=} 0$ L_λx = L_xλ = n_x = ... L_xy = L_yx L_xx = ... L_λy = L_yλ = n_y = ... L_xt = L_tx L_yy = ... L_yt = L_ty ... L_tλ = L_λt = n_t = ...

5. Geränderte Hesse Matrix H aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

H(x_0, y_0, ... t_0) = (L_λλ(...) L_λx(...) L_λy(...) ... L_λt(...) / L_xλ(...) L_xx(...) L_xy(...) ... L_xt(...) / L_yλ(...) L_yx(...) L_yy(...) ... L_yt(...) / ... / L_tλ(...) L_tx(...) L_ty(...) ... L_tt(...)) = (0 n_x(...) n_y(...) ... n_t(...) / n_x(...) L_xx(...) L_λy(...) ... L_xt(...) / n_y(...) L_yx(...) L_yy(...) ... L_yt(...) / ... / n_t(...) L_tx(...) L_ty(...) ... L_tt(...))

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

det(H) = ...

7. Auswertung

det(H) > 0	⇒	lokales Maximum
det(H) < 0	⇒	lokales Minimum
det(H) = 0	⇒	keine Aussage möglich

4 Support Vector Machine (SVM)

4.1 Lineare Trennbarkeit von Daten

4.1.1 Allgemeines

Datenpunkte: (2D Beispiel)

$$A : \underbrace{((x_1, x_2); y_1)}_{\vec{x}_1}, \quad B : \underbrace{((x_1, x_2); y_2)}_{\vec{x}_2}, \quad C : \underbrace{((x_1, x_2); y_3)}_{\vec{x}_3}, \quad \dots, \quad N : \underbrace{((x_1, x_2); y_n)}_{\vec{x}_n}$$

\vec{x}_j sind Datenvektoren

$y_j \in \{\pm 1\}$ klassifiziert die jeweiligen Datenvektoren

Hyperebenen:

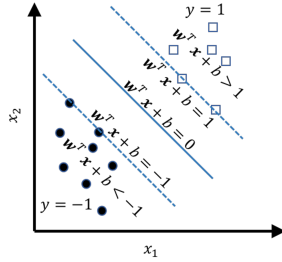
$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b = 0$$

\vec{w} : Normalenvektor, $\vec{w} \in \mathbb{R}^d$ und $\vec{w} \neq 0$

b : Konstante, $b \in \mathbb{R}$

Dimmension der Hyperebene = $d - 1$

Abstand der Hyperebene zum Ursprung: $\frac{|b|}{|\vec{w}|}$



Klassifizierung:

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b > 0 \Rightarrow \vec{x} \text{ gehört zur Klasse } y = +1$$

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b < 0 \Rightarrow \vec{x} \text{ gehört zur Klasse } y = -1$$

Klassifizierung der Trainingsdaten:

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b \geq 0 \Rightarrow \vec{x}_j \text{ gehört zur Klasse } y = +1$$

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b \leq 0 \Rightarrow \vec{x}_j \text{ gehört zur Klasse } y = -1$$

Zielfunktion:

$$\frac{2}{|\vec{w}|} = \frac{2}{w}$$

4.1.2 Das primale Optimierungsproblem

$$\frac{1}{2} \vec{w}^{tr} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2} |\vec{w}|^2 = \frac{1}{2} w^2 \rightarrow \min! \quad \text{s.t.} \quad (\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b) y_j \geq 1 \quad (j = 1, \dots, N)$$

4.1.3 Das duale Optimierungsproblem

Nebenbedingung:

$$\underbrace{1 - (\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b) y_j}_{g_j(\vec{w}^{tr}, b)} \leq 0 \Leftrightarrow g_j(\vec{w}^{tr}, b) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, N)$$

Lagrange-Funktion:

Zusammengesetzt aus dem primalen Problem und den Nebenbedingungen.

$$\begin{aligned} L(\vec{w}^{tr}, b, \vec{\alpha}) &= L(w_1, w_2, \dots, w_d, b, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \\ &= \frac{1}{2} \vec{w}^{tr} \cdot \vec{w} + \sum_{j=1}^N \alpha_j \left(\underbrace{1 - (\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b) y_j}_{g_j(\vec{w}^{tr}, b)} \right) \end{aligned}$$

Stationaritätsbedingungen:

Aus der Bedingung, dass $\text{grad}(L) = 0$ sein muss, lassen sich folgende Formeln ableiten:

$$\text{grad}_{\{\vec{w}^{tr}, b\}} (L(\vec{w}^{tr}, b, \vec{\alpha})) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j \vec{x}_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j = 0$$

Das duale Problem:

Die oben erhaltenen Summen können nun in die Lagrange-Fkt. eingesetzt werden. Daraus entsteht

$$L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^N \alpha_j \alpha_{j'} y_j y_{j'} \vec{x}_j^{tr} \cdot \vec{x}_{j'}}_{= \frac{1}{2} \vec{w}^{tr} \cdot \vec{w}} \rightarrow \max! \quad \text{s.t.} \quad \alpha_j \geq 0 \wedge \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j = 0$$

Formulieren des dualen Optimierungsproblems mit den Lagrange-Variablen α_j :

Vorgehensbeispiel für 3 Datenpunkte:

1. Lagrange-Funktion $L(\vec{\alpha})$ aufstellen:

$$L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^N \alpha_j \alpha_{j'} y_j y_{j'} \vec{x}_j^{tr} \cdot \vec{x}_{j'} \rightarrow \max!$$

Finden der Lagrange-Variablen α_j :

1. Stationaritätsbedingungen aufstellen:

$$\text{a: } \alpha_j \geq 0 \quad \text{und} \quad \text{b: } \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j = 0$$

2. Nebenrechnung:

b umstellen nach einer Variablen (z.B. α_1) und in Lagrange-Funktion ersetzen

3. Gradient von verkürzter Lagrange-Funktion berechnen und restliche α finden:

$$\nabla(L_{\text{neu}}(\alpha_2, \alpha_3)) \Rightarrow \alpha_2 = \dots, \alpha_3 = \dots$$

4. Fehlendes α berechnen:

α_2 und α_3 in **2. b** einsetzen und α_1 berechnen

Lösen des dualen Optimierungsproblems:

1. Normalenvektor \vec{w} finden:

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j \vec{x}_j$$

2. Konstante b finden:

Mit Stützvektor-Datenpunkt aus Klasse $y = +1$:

$$b = +1 - \vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{\dots} = \dots$$

Mit Stützvektor-Datenpunkt aus Klasse $y = -1$:

$$b = -1 - \vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{\dots} = \dots$$

5 Integration (bi-variat)

Als bi-variate Integrale versteht man Integrale, die siech über zwei unabhängige Variablen erstrecken. Sie haben die Form

int_{Omega} f(omega) . d omega = int_X int_Y f(x; y) . dy . dx

wobei Omega subset R^2, X subset R und Y subset R ist.

5.1 Normalbereich

TODO: WTF ist ein Normalbereich? Schnitte sind Strecken (Intervalle) für x, y, ...

5.2 Zweidimensionale Koordinatensysteme

Neben den Kartesischen Koordinatensystemen kommen in zweidimensionalen Räumen auch Polare Koordinatensysteme zum Einsatz. Die beiden Systeme können mit Hilfe der Trigonometrie in einander überführt werden.

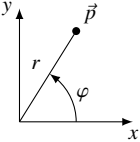
5.2.1 Umrechnung Kartesisch ↔ Polar

Polar zu Kartesisch

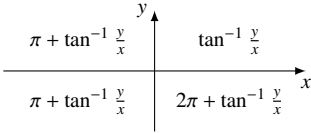
Kartesisch zu Polar

(x, y) = (r * cos phi, r * sin phi)

(r, phi) = (sqrt(x^2 + y^2), tan^-1(y/x))



Dabei ist zu beachten, dass tan^-1 nur werte von -pi/2 bis pi/2 liefert, für phi jedoch phi in [0, pi] gelten soll. phi wird also, je nach dem in welchem Quadranten sich P befindet, nach folgendem Schema berechnet:



Um eine ganzes Integral vom einen Koordinatensystem ins andere zu überführen, muss zum einen die Funktion f(x, y) zu f(r, phi) (oder umgekehrt) umgeschrieben, sowie die differentiale angepasst werden. Hier dafür einige gängige Elemente:

	Kartesisch	Polar
x-Achsenelement	dx	dx = cos phi dr - r sin phi d phi
y-Achsenelement	dy	dy = sin phi dr + r cos phi d phi
Linienelement	ds^2 = dx^2 + dy^2	ds^2 = dr^2 + r^2 d phi^2
Flächenelement	dA = dx dy	dA = r dr d phi

5.3 2D Transformation Polar zu Kartesisch

TODO: Das isch ja ds gliche wie obe beschribe, oder? Wänn da no meh ane sött wüssstich nöd was... -Flurin T = Transformation

Polar (r, phi) ->^T (x, y) Kartesisch

(x = r * cos(phi), y = r * sin(phi)) 2D

Die Funktionen für x und y sind skalare Funktion.

x = x(r; phi) y = y(r; phi)

5.4 Derivative, Ableitung

TODO: Idk was da ane söll -Flurin

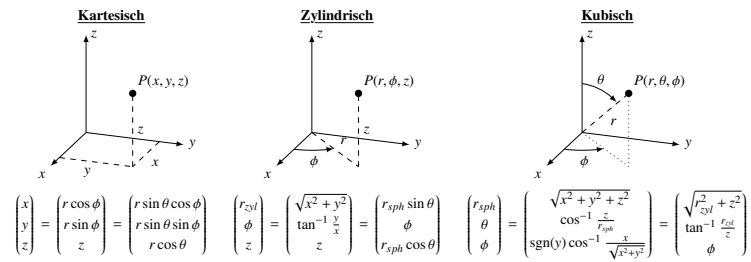
5.5 Anwendungsformeln Doppelintegral

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
Flächeninhalt einer ebenen Figur F		
A = double integral_F da	= int_X int_Y dy dx	= int_Phi int_R r dr d phi
Oberfläche einer Ebene in drei Dimensionen		
S = double integral_A 1/cos gamma da	= int_X int_Y sqrt(1 + (d z/d x)^2 + (d z/d y)^2) dy dx	= int_Phi int_R sqrt(r^2 + r^2 (d z/d r)^2 + (d z/d phi)^2) dr d phi
Volumen eines Zylinders		
V = double integral_A z da	= int_X int_Y z dy dx	= int_Phi int_R z r dr d phi
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf die x-Achse		
I_x = double integral_F y^2 da	= int_X int_Y (y^2) dy dx	= int_Phi int_R (r^2 sin^2 phi) r dr d phi
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf den Pol (0, 0)		
I_x = double integral_F r^2 da	= int_X int_Y (x^2 + y^2) dy dx	= int_Phi int_R (r^2) r dr d phi
Masse einer ebenen Figur F mit Dichtefunktion rho		
m = double integral_F rho da	= int_X int_Y rho(x, y) dy dx	= int_Phi int_R rho(r, phi) r dr d phi
Koordinaten des Schwerpunkts S einer homogenen, ebenen Figur F		
x_S = (double integral_F x da) / A	= (int_X int_Y x dy dx) / (int_X int_Y dy dx)	= (int_Phi int_R r^2 cos phi dr d phi) / (int_Phi int_R r dr d phi)
y_S = (double integral_F y da) / A	= (int_X int_Y y dy dx) / (int_X int_Y dy dx)	= (int_Phi int_R r^2 sin phi dr d phi) / (int_Phi int_R r dr d phi)

Hinweis: Damit die Flächenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziehbar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

6 Integration (multi-variät)

6.1 Dreidimensionale Koordinatensysteme



6.1.1 Umrechnen zwischen Koordinatensystemen

Beim Umrechnen zwischen den Koordinatensystemen gelten im Grunde genommen die obigen Formeln. Dabei muss jedoch in einigen Fällen auf die Wertebereiche von den trigonometrischen Funktionen rücksicht genommen werden.

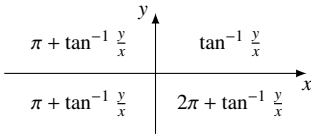
Zylindrisch → Kartesisch:

Sphärisch → Kartesisch:

Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Kartesisch → Zylindrisch:

Der Parameter ϕ wird analog zum zweidimensionalen Fall, je nach dem in welchem Quadranten sich P befindet, nach dem Schema rechts berechnet.



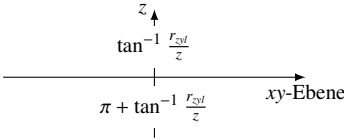
Sphärisch → Zylindrisch:

Kartesisch → Sphärisch:

Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Zylindrisch → Sphärisch:

Auch hier macht der \tan^{-1} Probleme, da er Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ liefert, für θ jedoch $\theta \in [0, \pi]$ gelten soll. Je nach dem, ob P sich oberhalb oder unterhalb der xy -Ebene befindet, wird θ wie rechts berechnet.



6.2 Längenintegrale

6.2.1 Längenelemente

$$ds^2 = \underbrace{dx^2 + dy^2 + dz^2}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}_{\text{Sphärisch}}$$

6.2.2 Länge einer Funktion

Die Bestimmung der Länge einer Kurve kann in folgende Schritte unterteilt werden:

1. Funktion in die Parameterdarstellung überführen (sofern nicht gegeben):

Dafür wird einer der Parameter (z.B. x oder θ) = t gesetzt und die anderen Parameter ebenfalls als Funktion von t ausgedrückt.

2. Integral aufstellen:

Das Integral in der Form $\int \int \int ds$ wird mit $\frac{dt}{dt}$ erweitert.

3. Das Integral lösen

6.2.3 Beispiel

Es soll die Länge der Kurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ auf dem Intervall $[t_1, t_2]$ bestimmt werden. Dazu

werden die oben genannten Schritte abgearbeitet:

1. Funktion in die Parameterdarstellung überführen

Hier nicht nötig.

2. Integral aufstellen

$$\int \int \int ds = \int \int \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

3. Integral lösen

$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ ausrechnen, einsetzen, integrieren.

6.3 Flächenintegrale

6.3.1 Flächenelemente

Das Bestimmen der Flächenelemente ist in drei Dimensionen nicht wie bei den Längen- und Volumenelementen pauschal möglich. Dies, da jeweils nur über zwei der drei Koordinaten integriert werden muss. Ein einfaches Verfahren für das Berechnen von Flächeninhalten schafft jedoch abhilfe.

6.3.2 Flächeninhalt einer Oberfläche

Für das Berechnen der Oberflächen von Funktionen des Typs $f(a, b)$ in 3D kann die Formel

$$S = \int_B \int_A \sqrt{(f_a)^2 + (f_b)^2 + 1} da db$$

verwendet werden. Dabei repräsentieren a und b die beiden Koordinatenrichtungen, in denen sich die Fläche erstreckt. f_a und f_b sind die partiellen Ableitungen der Funktion $f(a, b)$ nach a bzw. b .

Beispiele zur Veranschaulichung:

Es soll die Oberfläche der Funktion $f(x, y)$ im Bereich $x \in [x_1, x_2]$, $y \in [y_1, y_2]$ bestimmt werden. Das entsprechende Integral lautet:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} dx dy$$

Wäre die Funktion f stat in kartesischen in polaren oder sphärischen Koordinaten formuliert, ändern sich lediglich die Namen der Variablen. Folglich ist das zu einer in sphärischen Koordinaten definierten Fkt. $f(\theta, \phi)$ gehörende Integral

$$S = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f_\theta)^2 + (f_\phi)^2 + 1} d\theta d\phi$$

sehr leicht aufzustellen.

6.4 Volumenintegrale

6.4.1 Volumenelemente

$$dV = \underbrace{dx dy dz}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{r dr d\phi dz}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}_{\text{Sphärisch}}$$

6.5 Anwendungen Trippel-Integrale

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
Volumen eines Körpers K			
$V = \iiint_K dV$	$= \iiint dx dy dz$	$= \iiint r dr d\phi dz$	$= \iiint r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$
Trägheitsmoment eines Körpers K, bezogen auf die Z-Achse			
$I_z = \iiint_K r^2 dV$	$= \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz$	$= \iiint (r^2) r dr d\phi dz$	$= \iiint (r^2 \sin^2 \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$
Masse eines Körpers K mit der Dichtefunktion ρ			
$M = \iiint_K \rho dV$	$= \iiint \rho(x, y, z) dx dy dz$	$= \iiint \rho(r, \phi, z) r dr d\phi dz$	$= \iiint \rho(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$
Koordinaten des Schwerpunktes S eines homogenen Körpers K			
$x_S = \frac{\iiint_K x dV}{V}$	$= \frac{\iiint (x) dx dy dz}{V}$	$= \frac{\iiint (r \cos \phi) r dr d\phi dz}{V}$	$= \frac{\iiint (r \sin \theta \cos \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}{V}$
$y_S = \frac{\iiint_K y dV}{V}$	$= \frac{\iiint (y) dx dy dz}{V}$	$= \frac{\iiint (r \sin \phi) r dr d\phi dz}{V}$	$= \frac{\iiint (r \sin \theta \sin \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}{V}$
$z_S = \frac{\iiint_K z dV}{V}$	$= \frac{\iiint (z) dx dy dz}{V}$	$= \frac{\iiint (z) r dr d\phi dz}{V}$	$= \frac{\iiint (r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}{V}$

Hinweis: Damit die Volumenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziehbar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

7 Differenziation und Integration von Kurven

8 (Ober-)Flächenintegrale

8.1 Allgemeine Wendelfläche

$$\vec{S}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ z(t) + c \cdot \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Bei $c = 1 \Rightarrow$ Voller Meter bei einer Kurve

8.2 Freie Fläche

8.3 1. metrischer Tensor

9 Vektoranalysis

9.1 Vektorfelder

- Jedem Punkt P im Raum ist ein Vektor \vec{V} zugeordnet
- Kann als $\vec{V}(\vec{r})$ geschrieben werden, wobei \vec{r} ein Ortsvektor mit fixem Ursprung $\vec{0}$ ist

9.2 Divergenz (Volumenableitung)

- Beschreibt, wie stark sich ein Vektorfeld in einem Punkt ausbreitet oder zusammenzieht
- Beispiel: Vektorfeld das die Geschwindigkeit von Wasser in eineem Fluss beschreibt
 - An Punkten mit positiver Divergenz fließt Wasser hinaus (Quelle)
 - An Punkten mit negativer Divergenz fließt Wasser hinein (Senke)

$$\nabla \cdot \vec{V} = \text{div } \vec{V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{(S)} \vec{V} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

9.2.1 Kartesisch

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\vec{\nabla}} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

9.2.2 Zylinderkoordinaten

div V -> 1/r * d/dr (r V_r) + 1/r * dV_phi/dphi + dV_z/dz

9.3 Integralsatz von Gauss

Integral over (V) of div A dV = Integral over (S)=dV of A . dS

Fluss durch eingeschlossenen Körper = Gesamter Fluss durch geschlossenen Rand des Körpers

9.4 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

Delta phi = div (grad(phi)) = nabla^2 phi = d^2 phi / dx^2 + d^2 phi / dy^2 + d^2 phi / dz^2 = f(r)

Delta : Laplace-Operator
phi : Potentialfeld
f(r) : Quellfunktion

9.4.1 Laplace-Gleichung

Delta phi = f = 0 => Spezialfall der Poisson-Gleichung ohne äussere Quellfunktion

9.5 Rotation eines Vektorfelds (rot(), curl())

Beschreibt, wie stark und in welche Richtung sich ein Vektorfeld an einem Punkt rotiert. Wobei der Vektor selbst die Rotationsachse beschreibt und dessen Betrag proportional zur Rotationsgeschwindigkeit ist. Beispiel: Wirbelfelder

rot A = nabla x A = (d/dx, d/dy, d/dz) x (A_x, A_y, A_z) = (dA_z/dy - dA_y/dz, dA_x/dz - dA_z/dx, dA_y/dx - dA_x/dy)

- |rot A| < 0: Uhrzeigersinn
- |rot A| = 0: Wirbelfrei
- |rot A| > 0: Gegenuhrzeigersinn

Gauss: div (rot(A)) = 0

9.6 Integralsatz von Stokes

Integral over (C)=dS of A . d r = Integral over (S) of rot A . d S

o S muss anhand Rechter-Hand-Regel orientiert sein. Stokes sagt aus, dass die Summe der Verwirbelungen in einer Fläche, der Summe der Vektoren dessen Randes entsprechen.

9.7 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen

-TBD-