

Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zraggen

Autoren:

Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:

0.1.20240704

<https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen>



Inhaltsverzeichnis

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren	2	5 Koordinatensysteme	6
1.1 Dimensionen	2	5.1 2D Koordinatensysteme	6
1.2 Schnitte	2	5.2 3D Koordinatensysteme	6
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...	2		
2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variät)	3	6 Integration	6
2.1 Partielle Ableitung	3	6.1 Allgemeines	6
2.2 Gradient (Nabla-Operator)	3	6.2 Normalbereiche	6
2.3 Totale Ableitung	3	6.3 Satz von Fubini (Satz von Tonelli)	6
2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)	3	6.4 Erster Metrischer Tensor	6
2.5 DGL	3	6.5 Längenintegrale	7
2.6 Richtungselement (Tangentiellinie an Kontouren)	3	6.6 (Ober-)Flächenintegrale	7
2.7 Gradientenfeld \perp Kontouren	3	6.7 Volumenintegrale	7
2.8 TODO: Taylorreihe	3	6.8 Anwendungsformeln 2D (Doppelintegrale)	7
2.9 Richtungs-Ableitung	3	6.9 Anwendungsformeln 3D (Dreifachintegrale)	7
3 Extrema von Funktionen finden	4	7 Vektoranalysis	7
3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden	4	7.1 Vektorfelder	7
3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden	4	7.2 Gradient	7
3.3 Lokales oder Globales Extremum	4	7.3 Vektorgradient	8
3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden	4	7.4 Divergenz (Volumenableitung)	8
3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden	4	7.5 Laplace Operator Delta	8
4 Support Vector Machine (SVM)	5	7.6 Rotation eines Vektorfelds (rot, curl)	8
4.1 Linear Trennbare Daten	5	7.7 Rechenregeln mit Nabla	9
4.2 Nicht linear Trennbare Daten	5	8 Anwendungen	9
		8.1 Integralsatz von Gauss	9
		8.2 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)	9
		8.3 Integralsatz von Stokes	9
		8.4 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen	9

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f: \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^n)$$

- m Anzahl Dimensionen von \mathbb{D}_f , wobei $m \in \mathbb{N}$
- n Anzahl Dimensionen von \mathbb{W}_f , wobei $n \in \mathbb{N}$
- \vec{f} wenn Output vektoriell

⚠ Variablen sind abhängig von einander!

Multi-Variat:

f ist "Multi-Variat", wenn:

- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

f ist **nicht** "Multi-Variat", wenn:

- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

$$\left. \begin{array}{l} \text{Raum 3D } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t) \in \mathbb{R}^1 \end{array} \right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t; x; y; z)$$

1.1.2 Stationärer Fall

$$t \rightarrow \infty \rightarrow \text{Stationär}$$

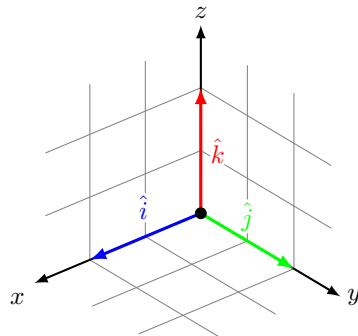
$$T(x; y; z) \frac{\Delta T}{\Delta t} \rightarrow 0$$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion \rightarrow Teilmenge vom Definitionsbereich \mathbb{D}_f

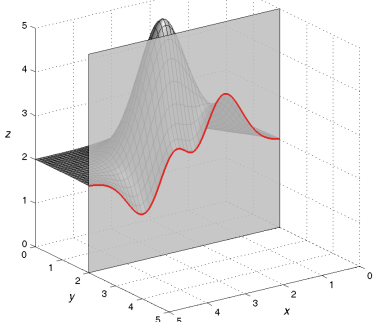
1.2.1 Partielle Funktion

- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
 - **Alle** anderen Variablen sind fix!
- ⚠ \mathbb{W}_f Analyse!

Beispiel: Schnitte

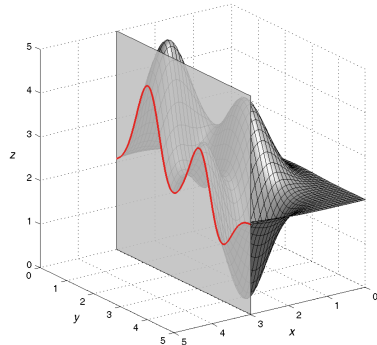
x-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y_0; f(x; y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow y_0 = 2$



y-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x_0; y; f(x_0; y))$
- x-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel



1.2.2 Bedingungen

- Initialbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf die **Zeit**
- Randbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...

Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion f **konstant**.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \in \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)

- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y; f(x; y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow z_0 = 3$



2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat)

f : D_f ⊆ ℝ² → W_f ⊆ ℝ skalar

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

f(x,y) : y fixieren = const. = y_0; x **einzige** freie Variable

Notationen

1. Ordnung: f(x; y_0) ⇒ ∂f/∂x = f_x(x; y_0)
2. Ordnung: ∂/∂x (∂f/∂x) = ∂²f/∂x² = f_xx
∂/∂y (∂f/∂x) = ∂²f/∂y∂x = f_xy

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_xx, f_yy, f_xy & f_yx stetig (sprungfrei) sind, dann gilt:

f_xy ≐ f_yx

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

"Gradient" / Nabla → ∇f = (∂f/∂x, ∂f/∂y, ∂f/∂y)ᵀ ≐ Vektorfeld

2.3 Totale Ableitung

Für Fehlerrechnung benützt, da man hierbei die Abstände von (x; y; z) zu einem festen Punkt (x_0; y_0; z_0) erhält. (relative Koordinaten)

D(f; (x_0, y_0, ...)) : ℝ² → ℝ¹; "gute Approximation"
Arbeitspunkt

f(x = x_0 + Δx; y = y_0 + Δy; ...) = (D_11; D_12) · (Δx, Δy)ᵀ + f(x_0; y_0) + R_1

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

R_1 / d = √(Δx² + Δy²) → 0 ("gut", "schneller gegen 0 als d")
Diagram: A(x_0; y_0), P(x; y), Δx, Δy, d

D(f; (x_0; y_0)) = (D_11 = ∂f/∂x(x_0; y_0); D_12 = ∂f/∂y(x_0; y_0))
= (∇f)ᵀ wenn ∂f/∂x; ∂f/∂y stetig bei A

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

f(x; y) ≈ f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) · (Δx, Δy)ᵀ linear in Δx und Δy

2.4.1 Tangentialebene

g(x; y) = f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) · (x - x_0, y - y_0)ᵀ

g(x; y) = f(x_0; y_0) + f_x(x_0; y_0) · (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) · (y - y_0)

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

df ≐ ∂f/∂x dx + ∂f/∂y dy bezüglich A = (x_0; y_0)

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

Auf Kontouren sei df = 0 (Kontourlinien). Daher lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

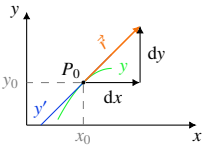
f = c = const. | d(...)

df = dc ≐ 0

Bzw. für Kontourlinien: f_x dx + f_y dy = 0

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

y'(x) = dy/dx = -f_x/f_y ≠ 0 ∨ x'(y) = dx/dy = -f_y/f_x ≠ 0



2.5 DGL

y' = (-f_x/f_y); y(x_0) = y_0

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

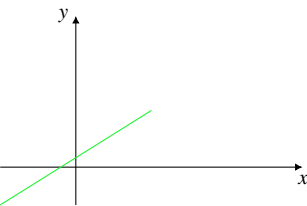
2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

r̃ = (dx = h; dy = y' dx = -f_x/f_y dx)ᵀ

2.7 Gradientenfeld ⊥ Kontouren

Skalarprodukt ∇f · (dx, dy = y' dx)ᵀ ≐ 0

2.8 TODO: Taylorreihe



s(t) : P_0 + t · v̂ | t ∈ ℝ
s(t) : f(x_0 + t · v̂_1; y_0 + t · v̂_2)

ds(t)/dt = ṡ(t) : t ↦ (x, y)ᵀ ↦ f(x, y)
x_0 + t · v_1, y_0 + t · v_2

2.9 Richtungs-Ableitung

∂f/∂v̂ ≐ D(f; (x_0; y_0)) · v̂ Def. grad(f)ᵀ · v̂ = f_x · v_1 + f_y · v_2

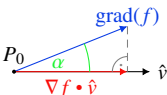
Beispiel: Richtungs-Ableitung

x̃ : v̂ = (1, 0)ᵀ = e_1 ⇒ ∂f/∂e_1 = f_x · 1 + f_y · 0 = f_x

2.9.1 Spezialfälle

- α = π/2 ⇒ rechter Winkel
- ∂f/∂v̂ extremal
 - α = 0 (max): ∇f · v̂ > 0 ⇒ grad(f) liegt auf v̂
 - α = π (min): ∇f · v̂ < 0 ⇒ grad(f) liegt invers auf v̂

Trigo: ∇f · v̂ ∧ ∂f/∂v̂ ⇒ cos(α) · |∇f|



3 Extrema von Funktionen finden

Stationaritätsbedingung: ∇f $\stackrel{!}{=}$ $\vec{0}$

3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

∇f = $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$f_{xx} = \dots \quad f_{xy} = f_{yx} = \dots \quad f_{yy} = \dots$

3. Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:

$\Delta = f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - \left(f_{xy}(x_0; y_0)\right)^2$

4. Auswertung:

$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) < 0$	\implies	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) < 0$	\implies	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) > 0$	\implies	lokales Minimum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) > 0$	\implies	lokales Minimum
$\Delta < 0$			\implies	Sattelpunkt
$\Delta = 0$?	Multi-variate-Taylor-logik ...

3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$

2. Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \dots & f_{xt} \\ f_{yx} & f_{yy} & \dots & f_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx} & f_{ty} & \dots & f_{tt} \end{pmatrix}$$

- Symmetrien beachten!
- Nicht doppelt rechnen!
 $\Rightarrow f_{xt} = f_{tx}$

3. Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen fllen:

$$\mathbf{H}(x_0, y_0, \dots, t_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{xy}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \end{pmatrix}$$

4. Eigenwerte λ_i der Hesse-Matrix bestimmen:

$\det(\mathbf{H}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda \cdot \mathbf{E}) = 0$
Nullstellen λ_i finden → Eigenwerte

Zur Erinnerung:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

$\mathbf{H}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda \cdot \mathbf{E} = \dots$

$$\dots = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda & f_{xy}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda \end{pmatrix}$$

5. Auswertung:

$\lambda_i < 0 \ \forall i$	\implies	lokales Maximum
$\lambda_i > 0 \ \forall i$	\implies	lokales Minimum
$\lambda_i > 0$ und $\lambda_i < 0$	\implies	Sattelpunkt

Erklärung:

- λ_i < 0 $\forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind negativ
- λ_i > 0 $\forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind positiv

3.3 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion f(x, y, ..., t) gilt:

$f(x, y, \dots, t) \leq M_{\max}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) > M_{\max}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) \geq M_{\min}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Minimum
$f(x, y, \dots, t) < M_{\min}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Minimum

- M_{\max} : grssstes lokales Maximum
 M_{\min} : kleinstes lokales Minimum

3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: $n(x, y) \stackrel{!}{=} 0$
Nebenbedingung: $x + y = 1$
Standardform der Nebenbedingung: $x + y - 1 = 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot n(x, y)$ Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

$\nabla L = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$L_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0 \quad L_{\lambda x} = L_{x\lambda} = n_x = \dots$
 $L_{xx} = \dots \quad L_{\lambda y} = L_{y\lambda} = n_y = \dots$
 $L_{yy} = \dots \quad L_{xy} = L_{yx} = \dots$

5. Gernderte Hesse Matrix $\bar{\mathbf{H}}$ aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}(x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} L_{\lambda\lambda}(x_0, y_0) & L_{\lambda x}(x_0, y_0) & L_{\lambda y}(x_0, y_0) \\ L_{x\lambda}(x_0, y_0) & L_{xx}(x_0, y_0) & L_{xy}(x_0, y_0) \\ L_{y\lambda}(x_0, y_0) & L_{yx}(x_0, y_0) & L_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & n_x(x_0, y_0) & n_y(x_0, y_0) \\ n_x(x_0, y_0) & L_{xx}(x_0, y_0) & L_{xy}(x_0, y_0) \\ n_y(x_0, y_0) & L_{yx}(x_0, y_0) & L_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

$\det(\bar{\mathbf{H}}) = \dots$

7. Auswertung

$\det(\bar{\mathbf{H}}) > 0$	\implies	lokales Maximum
$\det(\bar{\mathbf{H}}) < 0$	\implies	lokales Minimum
$\det(\bar{\mathbf{H}}) = 0$	\implies	keine Aussage möglich

3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden

1. Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:

Standardform: $n(x, y, \dots, t) \stackrel{!}{=} 0$

2. Lagrange-Funktion L aufstellen:

$L(x, y, \dots, t, \lambda) = f(x, y, \dots, t) + \lambda \cdot n(x, y, \dots, t)$ Am besten gleich ausmultiplizieren

3. Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzen und kritische Stellen finden:

$$\nabla L = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ \vdots \\ L_t \\ L_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$$

4. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$L_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0 \quad L_{\lambda x} = L_{x\lambda} = n_x = \dots \quad L_{xy} = L_{yx}$
 $L_{xx} = \dots \quad L_{\lambda y} = L_{y\lambda} = n_y = \dots \quad L_{xt} = L_{tx}$
 $L_{yy} = \dots \quad \vdots \quad L_{yt} = L_{ty}$
 $\vdots \quad L_{\lambda t} = L_{t\lambda} = n_t = \dots \quad \vdots$
 $L_{tt} = \dots$

5. Gernderte Hesse Matrix $\bar{\mathbf{H}}$ aufstellen und kritische Stellen einsetzen:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}(x_0, y_0, \dots, t_0) &= \begin{pmatrix} L_{\lambda\lambda}(\dots) & L_{\lambda x}(\dots) & L_{\lambda y}(\dots) & \dots & L_{\lambda t}(\dots) \\ L_{x\lambda}(\dots) & L_{xx}(\dots) & L_{xy}(\dots) & \dots & L_{xt}(\dots) \\ L_{y\lambda}(\dots) & L_{yx}(\dots) & L_{yy}(\dots) & \dots & L_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{t\lambda}(\dots) & L_{tx}(\dots) & L_{ty}(\dots) & \dots & L_{tt}(\dots) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & n_x(\dots) & n_y(\dots) & \dots & n_t(\dots) \\ n_x(\dots) & L_{xx}(\dots) & L_{\lambda y}(\dots) & \dots & L_{xt}(\dots) \\ n_y(\dots) & L_{yx}(\dots) & L_{yy}(\dots) & \dots & L_{yt}(\dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_t(\dots) & L_{tx}(\dots) & L_{ty}(\dots) & \dots & L_{tt}(\dots) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Determinante der geränderten Hesse Matrix bestimmen:

$\det(\bar{\mathbf{H}}) = \dots$

7. Auswertung

$\det(\bar{\mathbf{H}}) > 0$	\implies	lokales Maximum
$\det(\bar{\mathbf{H}}) < 0$	\implies	lokales Minimum
$\det(\bar{\mathbf{H}}) = 0$	\implies	keine Aussage möglich

4 Support Vector Machine (SVM)

Die Support Vector Machine kann verwendet werden, um ein Modell für das Zuordnen von Daten zu entwickeln. Dadurch wird ein Satz von Punkten, deren Klassifizierung bekannt ist, so linear getrennt, dass der Abstand von der trennenden Geraden zu den beiden Punktegropen maximal wird. Es resultiert eine einfache Gleichung, mit der sich neue Daten klassifizieren lassen.

4.1 Linear Trennbare Daten

4.1.1 Allgemeines

Datenpunkte: (2D Beispiel)

$$A : ((x_1, x_2); y_1), \quad B : ((x_1, x_2); y_2), \quad C : ((x_1, x_2); y_3), \quad \dots, \quad N : ((x_1, x_2); y_n)$$

\vec{x}_j sind Datenvektoren

$y_j \in \{\pm 1\}$ klassifiziert die jeweiligen Datenvektoren

Hyperebenen:

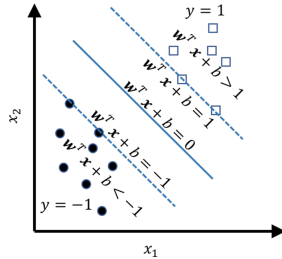
$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b = 0$$

\vec{w} : Normalenvektor, $\vec{w} \in \mathbb{R}^d$ und $\vec{w} \neq 0$

b : Konstante, $b \in \mathbb{R}$

Dimension der Hyperebene = $d - 1$

Abstand der Hyperebene zum Ursprung: $\frac{|b|}{|\vec{w}|}$



Klassifizierung:

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b > 0 \Rightarrow \vec{x} \text{ gehört zur Klasse } y = +1$$

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b < 0 \Rightarrow \vec{x} \text{ gehört zur Klasse } y = -1$$

Klassifizierung der Trainingsdaten:

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b \geq 0 \Rightarrow \vec{x}_j \text{ gehört zur Klasse } y = +1$$

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b \leq 0 \Rightarrow \vec{x}_j \text{ gehört zur Klasse } y = -1$$

Zielfunktion:

$$\frac{2}{|\vec{w}|} = \frac{2}{w}$$

4.1.2 Das primale Optimierungsproblem

$$\frac{1}{2} \vec{w}^{tr} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2} |\vec{w}|^2 = \frac{1}{2} w^2 \rightarrow \min! \quad \text{s.t.} \quad (\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b) y_j \geq 1 \quad (j = 1, \dots, N)$$

4.1.3 Das duale Optimierungsproblem

Nebenbedingung:

$$\underbrace{1 - (\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b) y_j}_{g_j(\vec{w}^{tr}, b)} \leq 0 \Leftrightarrow g_j(\vec{w}^{tr}, b) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, N)$$

Lagrange-Funktion:

Zusammengesetzt aus dem primalen Problem und den Nebenbedingungen.

$$L(\vec{w}^{tr}, b, \vec{\alpha}) = L(w_1, w_2, \dots, w_d, b, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \\ = \frac{1}{2} \vec{w}^{tr} \cdot \vec{w} + \sum_{j=1}^N \alpha_j \underbrace{\left(1 - (\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b) y_j \right)}_{g_j(\vec{w}^{tr}, b)}$$

Stationaritätsbedingungen:

Aus der Bedingung, dass $\text{grad}(L) = 0$ sein muss, lassen sich folgende Formeln ableiten:

$$\text{grad}_{\{\vec{w}^{tr}, b\}} (L(\vec{w}^{tr}, b, \vec{\alpha})) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j \vec{x}_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j = 0$$

Das duale Problem:

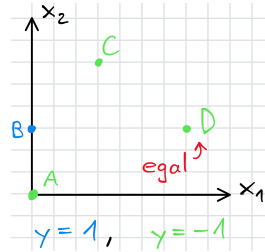
Die oben erhaltenen Summen können nun in die Lagrange-Fkt. eingesetzt werden. Daraus entsteht

$$L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j,j'=1}^N \alpha_j \alpha_{j'} y_j y_{j'} \vec{x}_j^{tr} \cdot \vec{x}_{j'}}_{= \frac{1}{2} \vec{w}^{tr} \cdot \vec{w}} \rightarrow \max! \quad \text{s.t.} \quad \alpha_j \geq 0 \wedge \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j = 0$$

Vorgehen zum lösen des dualen Optimierungsproblems:

1. **Skizze mit Datenpunkten erstellen:**

- Einzelne Datenpunkte klassenweise farblich hervorheben
- Falls ein Datenpunkt der gleichen Klasse weit weg von den anderen ist
 \Rightarrow diesen vergessen, da sein $\alpha = 0$ sein wird



2. **Nebenbedingungen, Es muss gelten:**

$$\text{a: } \alpha_j \geq 0$$

$$\text{b: } \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot y_j = 0$$

Nach einem α umstellen und anschliessend jenes α

(damit die Nebenbedingung miteinbezogen wird) in der Lagrange-Funktion ersetzen

3. **Kernel-Matrix aufstellen:**

$$K(\vec{x}^{tr}; \vec{x}) = \vec{x}^{tr} \cdot \vec{x}$$

$$\begin{matrix} & \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots \\ \vec{x}_1^{tr} & K(\vec{x}_1^{tr}; \vec{x}_1) & K(\vec{x}_1^{tr}; \vec{x}_2) & \dots \\ \vec{x}_2^{tr} & K(\vec{x}_2^{tr}; \vec{x}_1) & K(\vec{x}_2^{tr}; \vec{x}_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

- Einträge sind die Ergebnisse der Skalarprodukte

4. **Lagrange-Funktion aufstellen:**

$$L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^N \alpha_j \cdot \alpha_{j'} \cdot y_j \cdot y_{j'} \cdot \vec{x}_j^{tr} \cdot \vec{x}_{j'} \rightarrow \max!$$

- 2. b und 3 brauchen

5. **Alle α finden durch Stationaritätsbedingung**

$$\nabla L = \vec{0}$$

\Rightarrow ersetztes α mit gefundenen α berechnen

6. **\vec{w} berechnen:**

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j \vec{x}_j$$

7. **Konstante b berechnen:**

Datenpunkte mit der Klasse $y = 1$ oder $y = -1$ wählen und einsetzen

- **Variante 1:** Stützvektor-Datenpunkt mit $y = +1$

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{\dots} + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - \vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{\dots} = \dots$$

- **Variante 2:** Stützvektor-Datenpunkt mit $y = -1$

$$\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{\dots} + b = -1 \Leftrightarrow b = -1 - \vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_{\dots} = \dots$$

4.2 Nicht linear Trennbare Daten

Sollte ein Datensatz von nicht linear trennbaren Datenpunkten vorliegen, so muss dieser durch eine Transformation linear trennbar gemacht werden. Dadurch werden die Punkte oft in höhere Dimensionen gebracht. Das Finden einer geeigneten Transformation liegt nicht im Rahmen dieses Moduls.

Der einzige Unterschied zu der Methode zum linearen trennen von Datenpunkten ist dann, dass stat mit den Datenpunkten \vec{x}_i mit deren durch φ transformierten gegenstücken $\vec{\varphi}(\vec{x}_i)$ gerechnet wird.

5 Koordinatensysteme

5.1 2D Koordinatensysteme

Neben den Kartesischen Koordinatensystemen kommen in zweidimensionalen Räumen auch Polare Koordinatensysteme zum Einsatz. Die beiden Systeme können mit Hilfe der Trigonometrie in einander überführt werden.

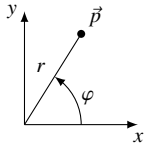
5.1.1 Umrechnung Kartesisch ↔ Polar

Polar zu Kartesisch

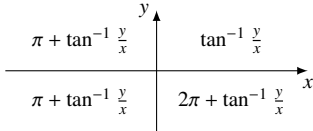
Kartesisch zu Polar

(x, y) = (r · cos φ, r · sin φ)

(r, φ) = (sqrt(x^2 + y^2), tan^-1(y/x))



Dabei ist zu beachten, dass tan^-1 nur Werte von -pi/2 bis pi/2 liefert, für phi jedoch phi in [0, pi] gelten soll. phi wird also, je nach dem in welchem Quadranten sich p befindet, nach folgendem Schema berechnet:



Um ein ganzes Integral vom einen Koordinatensystem ins andere zu überführen, muss zum einen die Funktion f(x, y) zu f(r, phi) (oder umgekehrt) umgeschrieben, sowie die differentiale angepasst werden. Hier dafür einige gängige Elemente:

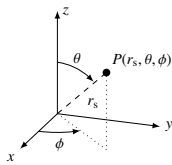
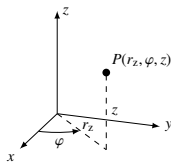
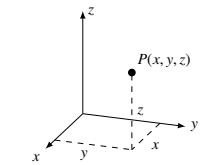
Table with 3 columns: Element, Kartesisch, Polar. Rows: x-Achselement, y-Achselement, Linienelement, Flächenelement.

5.2 3D Koordinatensysteme

Kartesisch

Zylindrisch

Sphärisch



Conversion formulas for x, y, z between Cartesian, Cylindrical, and Spherical coordinates.

5.2.1 Umrechnen zwischen Koordinatensystemen

Beim Umrechnen zwischen den Koordinatensystemen gelten im Grunde genommen die obigen Formeln. Dabei muss jedoch in einigen Fällen auf die Wertebereiche von den trigonometrischen Funktionen Rücksicht genommen werden.

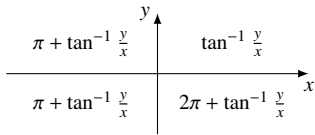
Zylindrisch → Kartesisch:

Sphärisch → Kartesisch:

Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Kartesisch → Zylindrisch:

Der Parameter phi wird analog zum zweidimensionalen Fall, je nach dem in welchem Quadranten sich P befindet, nach dem Schema rechts berechnet.



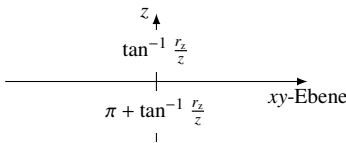
Sphärisch → Zylindrisch:

Kartesisch → Sphärisch:

Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Zylindrisch → Sphärisch:

Auch hier macht der tan^-1 Probleme, da er Werte von -pi/2 bis pi/2 liefert, für theta jedoch theta in [0, pi] gelten soll. Je nach dem, ob P sich oberhalb oder unterhalb der xy-Ebene befindet, wird theta wie rechts berechnet.



6 Integration

6.1 Allgemeines

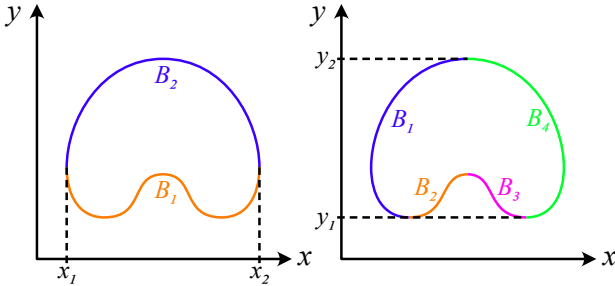
Unter bi- oder multivariater Integration versteht man Integrale, welche sich über zwei oder mehr unabhängige Variablen erstrecken. Sie haben die Form:

Integral of f(omega) d omega = triple integral of f(x1, x2, ..., xn) dx1 dx2 ... dxn | Omega in R^n

6.2 Normalbereiche

Unter einem Normalbereich versteht man einen Bereich, welcher in allen Dimensionen so begrenzt ist, dass eine Funktion f(x1, x2, ..., xn) für jeden Eingangsvektor jeweils nur einen Funktionswert zurückgibt.

Beispiel: Normalbereich in 2D



6.3 Satz von Fubini (Satz von Tonelli)

Der Satz von Fubini besagt, dass die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden kann, sofern die Funktion integrierbar ist.

Double integral of f(x, y) dx dy = double integral of f(x, y) dy dx

6.4 Erster Metrischer Tensor

Der 1. metrische Tensor (oder auch erste Fundamentalmatrix, erste Fundamentalform, metrische Grundform) beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Kurve oder Fläche im Parameterraum zum Raum, in dem sie sich befindet (z.B. 2D-Fläche im 3D-Raum). Er besteht aus den Skalarprodukten der partiellen Ableitungsvektoren nach den Parametern.

g_ij = partial S / partial u_i . partial S / partial u_j

Following matrix: [E F; F G] = [g11 g12; g21 g22]

Die Einträge dieser Matrix werden benötigt, um Längen- oder Flächen(elemente) zu berechnen.

Beispiel: Längenberechnung

Eine Flächenkurve sei als x(t) = (u(t), v(t)) gegeben. Davon wird das totale Differential gebildet:

dx = x_u . du + x_v . dv

Um die Länge des Vektors (Längenelement) zu erhalten, muss man diesen im ersten Schritt quadrieren:

(dx)^2 = g11 du^2 + 2g12 du dv + g22 dv^2

Das einzelne Längenelement ist somit:

ds = sqrt(g11 du^2 + 2g12 du dv + g22 dv^2)

Summiert man nun alle ds über die Kurve, so ergibt dies das Integral für die gesamte Länge:

s = integral from a to b of sqrt(g11 du^2 + 2g12 du dv + g22 dv^2) dt

Beispiel: Flächenberechnung

Es sei eine parametrisierte Fläche als Funktion S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) gegeben. Das Flächenelement lässt sich aus einem Parallelogramm der beiden partiellen Ableitungsvektoren bilden, was dem Betrag des Kreuzproduktes bzw. der Determinante entspricht:

dS = sqrt(det[g_ij]) du dv = sqrt(g11 g22 - g12^2) du dv = |partial S / partial u x partial S / partial v| du dv

Daraus ergibt sich die Fläche über das Doppelintegral:

S = double integral from u1 to u2, v1 to v2 of sqrt(g11 g22 - g12^2) du dv

6.5 Längenintegrale

6.5.1 Längenelemente

ds^2 = \underbrace{dx^2 + dy^2 + dz^2}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}_{\text{Sphärisch}}

6.5.2 Kurvenintegrale 1. Art: Länge einer Funktion

Die Bestimmung der Länge einer Kurve kann in folgende Schritte unterteilt werden:

- 1. **Funktion in die Parameterdarstellung überführen (sofern nicht gegeben):**
Dafür wird einer der Parameter (z.B. x oder θ) = t gesetzt und die anderen Parameter ebenfalls als Funktion von t ausgedrückt.
- 2. **Integral aufstellen:**
Das Integral in der Form $\int \! \! \int ds$ wird mit $\frac{dt}{dt}$ erweitert.
- 3. **Das Integral lösen**

Beispiel: Längenintegral in kartesischen Koordinaten

Es soll die Länge der Kurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ auf dem Intervall $[t_1, t_2]$ bestimmt werden. Dazu werden die oben genannten Schritte abgearbeitet:

- 1. **Funktion in die Parameterdarstellung überführen**
Hier nicht nötig.
- 2. **Integral aufstellen**

\int \! \! \int ds = \int \! \! \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt

- 3. **Integral lösen**
 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ ausrechnen, einsetzen, integrieren.

6.5.3 Kurvenintegral 2. Art

Beim Kurvenintegral 2. Art wird nicht die tatsächliche Länge einer Funktion, sondern die Länge deren Projektion auf eine Achse bestimmt. Dazu wird stat über alle Koordinatenrichtungen nur über eine der Koordinaten integriert.

Es folgen einige Paare von Kurvenintegralen 2. Art entlang einer Kontur K für Funktionen in expliziter Form und in Parameterdarstellung.

2D, Projektion auf x:

\int_K f(x) dx = \int_{t_0}^T \vec{f}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) \cdot dt

3D, Projektion auf x:

\int_K f(x, y) dx = \int_{t_0}^T \vec{f}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) \cdot dt

6.6 (Ober-)Flächenintegrale

6.6.1 Flächenelemente

Das Bestimmen der Flächenelemente ist in drei Dimensionen nicht wie bei den Längen- und Volumenelementen pauschal möglich. Dies, da jeweils nur über zwei der drei Koordinaten integriert werden muss. Ein einfaches Verfahren für das Berechnen von Flächeninhalten schafft jedoch abhilfe.

6.6.2 Flächeninhalt einer Oberfläche

Für das Berechnen der Oberflächen von Funktionen des Typs $f(a, b)$ in 3D kann die Formel

S = \int_B \int_A \sqrt{(f_a)^2 + (f_b)^2 + 1} da db

verwendet werden. Dabei repräsentieren a und b die beiden Koordinatenrichtungen, in denen sich die Fläche erstreckt. f_a und f_b sind die partiellen Ableitungen der Funktion $f(a, b)$ nach a bzw. b .

Beispiele zur Veranschaulichung:

Es soll die Oberfläche der Funktion $f(x, y)$ im Bereich $x \in [x_1, x_2], y \in [y_1, y - 2]$ bestimmt werden. Das entsprechende integral lautet:

S = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} dx dy

Wäre die Funktion f stat in kartesischen in polaren oder sphärischen Koordinaten formuliert, ändern sich lediglich die Namen der Variablen. Folglich ist das zu einer in sphärischen Koordinaten definierten Fkt. $f(\theta, \phi)$ gehörende Integral

S = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f_\theta)^2 + (f_\phi)^2 + 1} d\theta d\phi

sehr leicht aufzustellen.

6.6.3 Allgemeine Wendelfläche

Die allgemeine Wendelfläche rotiert und verschiebt eine parametrisierte 3D Kurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tr im Raum.

Parametrisierung bei vertikaler Rotationsachse und vertikaler Verschiebungsrichtung (z-Achse):

\vec{S}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ z(t) + c \cdot \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (t_1 \leq t \leq t_2, \wedge \varphi \in \mathbb{R}, c \equiv const.)

Bei $c = 1 \Rightarrow$ Voller Meter bei einer Kurve

6.7 Volumenintegrale

6.7.1 Volumenelemente

dV = \underbrace{dx dy dz}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{r dr d\varphi dz}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}_{\text{Sphärisch}}

6.8 Anwendungsformeln 2D (Doppelintegrale)

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
Flächeninhalt einer ebenen Figur F		
A = \int_F dF	= \int_X \int_Y dy dx	= \int_\Phi \int_R r dr d\varphi
Oberfläche einer Ebene in drei Dimensionen		
S = \int_A \frac{1}{\cos \gamma} dA	= \int_X \int_Y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy dx	= \int_\Phi \int_R \sqrt{r^2 + r^2 \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} dr d\varphi
Volumen eines Zylinders		
V = \int_A z dA	= \int_X \int_Y z dy dx	= \int_\Phi \int_R z r dr d\varphi
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf die x-Achse		
I_x = \int_F y^2 dF	= \int_X \int_Y (y^2) dy dx	= \int_\Phi \int_R (r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf den Pol (0, 0)		
I_x = \int_F r^2 dF	= \int_X \int_Y (x^2 + y^2) dy dx	= \int_\Phi \int_R (r^2) r dr d\varphi
Masse einer ebenen Figur F mit Dichtefunktion \varrho		
m = \int_F \varrho dF	= \int_X \int_Y \varrho(x, y) dy dx	= \int_\Phi \int_R \varrho(r, \varphi) r dr d\varphi
Koordinaten des Schwerpunkts S einer homogenen, ebenen Figur F		
x_S = \frac{\int_F x dF}{A}	= \frac{\int_X \int_Y x dy dx}{\int_X \int_Y dy dx}	= \frac{\int_\Phi \int_R r^2 \cos \varphi dr d\varphi}{\int_\Phi \int_R r dr d\varphi}
y_S = \frac{\int_F y dF}{A}	= \frac{\int_X \int_Y y dy dx}{\int_X \int_Y dy dx}	= \frac{\int_\Phi \int_R r^2 \sin \varphi dr d\varphi}{\int_\Phi \int_R r dr d\varphi}

Hinweis: Damit die Flächenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziehbar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

6.9 Anwendungsformeln 3D (Dreifachintegrale)

Allgemein	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
Volumen eines Körpers K			
V = \int\!\!\int\!\!\int_K dV	= \int\!\!\int\!\!\int dx dy dz	= \int\!\!\int\!\!\int r dr d\phi dz	= \int\!\!\int\!\!\int r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr
Trägheitsmoment eines Körpers K, bezogen auf die Z-Achse			
I_z = \int\!\!\int\!\!\int_K r^2 dV	= \int\!\!\int\!\!\int (x^2 + y^2) dx dy dz	= \int\!\!\int\!\!\int (r^2) r dr d\phi dz	= \int\!\!\int\!\!\int (r^2 \sin^2 \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr
Masse eines Körpers K mit der Dichtefunktion \varrho			
M = \int\!\!\int\!\!\int_K \varrho dV	= \int\!\!\int\!\!\int \varrho(x, y, z) dx dy dz	= \int\!\!\int\!\!\int \varrho(r, \phi, z) r dr d\phi dz	= \int\!\!\int\!\!\int \varrho(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr
Koordinaten des Schwerpunktes S eines homogenen Körpers K			
x_S = \frac{\int\!\!\int\!\!\int_K x dV}{V}	= \frac{\int\!\!\int\!\!\int (x) dx dy dz}{V}	= \frac{\int\!\!\int\!\!\int (r \cos \phi) r dr d\phi dz}{V}	= \frac{\int\!\!\int\!\!\int (r \sin \theta \cos \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}{V}
y_S = \frac{\int\!\!\int\!\!\int_K y dV}{V}	= \frac{\int\!\!\int\!\!\int (y) dx dy dz}{V}	= \frac{\int\!\!\int\!\!\int (r \sin \phi) r dr d\phi dz}{V}	= \frac{\int\!\!\int\!\!\int (r \sin \theta \sin \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}{V}
z_S = \frac{\int\!\!\int\!\!\int_K z dV}{V}	= \frac{\int\!\!\int\!\!\int (z) dx dy dz}{V}	= \frac{\int\!\!\int\!\!\int (z) r dr d\phi dz}{V}	= \frac{\int\!\!\int\!\!\int (r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}{V}

Hinweis: Damit die Volumenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziehbar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

7 Vektoranalysis

7.1 Vektorfelder

Das Vektorfeld

\vec{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n

weist jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ zu. Die Notation eines Vektorfelds ist gleich deren eines Vektors, wobei Vektorfelder üblicherweise gross geschrieben werden. Weiter kann auch $\vec{V}(\vec{x})$ geschrieben werden, wobei \vec{x} der Stützvektor eines beliebigen Punktes ist.

7.2 Gradient

Wir erinnern uns an den Nabla- oder Del-Operator aus Kapitel 2.2 als Spaltenvektor der verschiedenen Raumableitungen:

\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T

Der Gradient eines Potentialfelds $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ berechnet sich als

$$\nabla \cdot \phi(\vec{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T \cdot \phi(\vec{x}) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\vec{x}) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(\vec{x}) \quad \dots \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)^T = \vec{F}(\vec{x})$$

und resultiert in einem Vektorfeld.

- Wird als Potential das elektrische Potential verwendet, entspricht \vec{F} dem (negativen, skalierten) elektrischen Feld.
- Wird als Potential eine Höhe verwendet, entspricht \vec{F} der negativen Hangabtriebskraft.
- Der Gradient kann als mehrdimensionale Ableitung verstanden werden.
- Der Gradient steht senkrecht auf allen Kontouren und zeigt in Richtung hoher Werte.
- Die Multiplikation $\nabla \cdot \phi$ wird normalerweise als $\nabla \phi$ abgekürzt.
- Zudem kann der Gradient auch als $\text{grad } \phi$ geschrieben werden.

7.2.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

$$\text{grad } V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Zylindrisch:

$$\text{grad } V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Sphärisch:

$$\text{grad } V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

7.3 Vektorgradient

Die Definition des Gradienten eines Vektorfeldes $\vec{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lautet

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{a}} = \vec{a} \cdot \text{grad } \vec{V},$$

wobei \vec{a} ein beliebiger Vektor und $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{a}}$ die Richtungsableitung von \vec{V} nach \vec{a} ist. Daraus kann man schließen, dass der Vektorgradient als

$$\text{grad } \vec{V} = \nabla \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial V_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \quad (= \nabla^T \cdot \vec{V})$$

berechnet werden kann.

- $\nabla \vec{V}$ entspricht der Jacobi-Matrix \mathbf{J} . Mit dieser kann die Hesse-Matrix einer skalaren Funktion F (siehe Kap. 3) bestimmt werden:

$$\mathbf{H}(F) = \mathbf{J}^T (\nabla F) = (\text{grad grad } F)^T$$

- Der Vektorgradient wird als $\nabla \vec{V}$ geschrieben, da die Notation $\nabla^T \cdot \vec{V}$, die den tatsächlichen Rechenweg beschreibt, etwas umständlich ist.
- Die Notation $\nabla \cdot \vec{V}$ ist nicht nur falsch, sondern zudem bereits durch die Divergenz besetzt.

7.4 Divergenz (Volumenableitung)

Die Divergenz oder Volumenableitung eines Vektorfeldes

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V}(\vec{x}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) & v_2(\vec{x}) & \dots & v_n(\vec{x}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{aligned}$$

ist ein Skalarfeld, das beschreibt, wie stark das Vektorfeld an einem gegebenen Punkt “nach aussen gerichtet” ist.

- Wird als Vektorfeld die Fließgeschwindigkeit einer Flüssigkeit eingesetzt, so entspricht die Divergenz dem Fluss aus einem Punkt heraus.
 - An Punkten mit positiver Divergenz fließt Flüssigkeit hinaus (Quelle)
 - An Punkten mit negativer Divergenz fließt Flüssigkeit hinein (Senke)
- Wird das E-Feld eingesetzt, so entspricht die Divergenz der Ladungsdichte.
 - Pos. Ladungsdichte entspricht pos. Divergenz, bewirkt eine Quelle im E-Feld.
 - Neg. Ladungsdichte entspricht neg. Divergenz, bewirkt eine Senke im E-Feld.
- Das Skalarprodukt sollte zwingend $\nabla \cdot \vec{V}$ ausschreiben werden, da sonst Verwechslungsgefahr mit dem Vektorgradienten besteht.
- Die Notation $\text{div } \vec{V}$ ist ebenfalls gebräuchlich.

Eine alternative und gut visualisierbare Definition der Divergenz, ist in zwei Dimensionen

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint_{C=\partial A} \vec{V} \cdot \hat{n} \, ds}{A},$$

wobei A eine Fläche mit den Normalen \hat{n} und C dessen Kontur darstellt. Verallgemeinert für die Anwendung in mehr als 2 Dimensionen lautet die Definition

$$\nabla \cdot \vec{V} = \text{div } \vec{V} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\oint_{C=\partial \Omega} \vec{V} \cdot \hat{n} \, ds}{\Omega},$$

wobei Ω ein Bereich im Raum \mathbb{R}^n und C dessen Kontur in \mathbb{R}^{n-1} ist.

7.4.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Zylindrisch:

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

Sphärisch:

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \cdot V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$$

7.5 Laplace Operator Δ

Der Laplaceoperator ist nichts anderes als die Divergenz des Gradienten eines Skalarfelds und vergleichbar mit der zweiten Ableitung. Folglich gilt

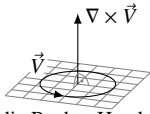
$$\Delta \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_n^2},$$

wobei das Resultat ein Skalarfeld ist.

7.6 Rotation eines Vektorfelds (rot, curl)

Die Rotation eines Vektorfelds, auch Curl genannt, beschreibt, wie stark ein Vektorfeld um einen gegebenen Punkt “rotiert” und wird als

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$



berechnet. Der resultierende Vektor ist dabei die Rotationsachse, wobei die Rechte-Hand-Regel gilt.

Wie bei der Divergenz kann auch hier zur Hilfe der Verständlichkeit ein Limitsatz als Definition beigezogen werden. So sei

$$\nabla \times \vec{V} = \text{rot } \vec{V} = \hat{n} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{C=\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{l}}{S},$$

wobei S ein planare Testfläche mit normale \hat{n} und C dessen Kontur ist. Der Curl ist grundsätzlich nur in drei Raumdimensionen definiert. Wenn die Rotation eines auf der Ebene $z = 0$ definierten Vektorfelds berechnet werden soll, kann die obige Formel mit $V_z = 0$ angepasst werden:

$$\text{rot } \vec{V}(x, y) = \nabla \times \vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Mit dem Curl-Operator kann z.B. elegant beschrieben werden, dass Wirbel im E-Feld auf zeitliche Änderungen im magnetischen Feld zurückzuführen sind:
$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

7.6.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Zylindrisch:

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r \cdot V_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

Sphärisch:

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(V_\phi \cdot \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r \cdot V_\phi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r \cdot V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

7.7 Rechenregeln mit ∇

Für das dalegen der Rechenregeln werden die folgenden Platzhalter verwendet:

- A, B: Skalarfelder (ℝ^n → ℝ)
- A→, B→: Vektorfelder (ℝ^n → ℝ^n)
- F: Skalare Funktion (ℝ^n → ℝ)
- c: Konstante

Gradienten:

grad(A + B) = grad(A) + grad(B) ↔ ∇(A + B) = ∇A + ∇B

grad(A · B) = A grad(B) + B grad(A) ↔ ∇(A · B) = A · ∇B + B · ∇A

grad(c · A) = c grad(A) ↔ ∇(c · A) = c · ∇A

grad(F(A)) = F'(A) · grad A ↔ ∇F(A) = F'(A) · ∇A

Divergenzen:

div(A→ + B→) = div(A→) + div(B→) ↔ ∇ · (A→ + B→) = (∇ · A→) + (∇ · B→)

div(A · B→) = A div(B→) + B→ grad(A) ↔ ∇ · (A · B→) = A · (∇ · B→) + B→ · ∇A

div(A→ × B→) = B→ · rot(A→) - A→ · rot(B→) ↔ ∇ · (A→ × B→) = B→ · (∇ × A→) - A→ · (∇ × B→)

div(c · A→) = c div(A→) ↔ ∇ · (c · A→) = c · (∇ · A→)

Curl:

rot(A→ + B→) = rot(A→) + rot(B→) ↔ ∇ × (A→ + B→) = (∇ × A→) + (∇ × B→)

rot(A · B→) = A rot(B→) + (grad(A) × B→) ↔ ∇ × (A · B→) = A · (∇ × B→) + (∇A × B→)

rot(cA→) = c rot(A→) ↔ ∇ × (cA→) = c · (∇ × A→)

rot(A→ × B→) = (B→ · ∇)A→ - (A→ · ∇)B→ + A→ div B→ - B→ div A→

∇ × (A→ × B→) = (B→ · ∇)A→ - (A→ · ∇)B→ + A→(∇ · B→) - B→(∇ · A→)

Laplaceoperator:

div grad A = ΔA ↔ ∇ · (∇A) = ΔA

rot(ΔA→) = Δ rot A→ ↔ ∇ × (ΔA→) = Δ(∇ × A→)

Kombinationen:

div rot A→ = 0 ↔ ∇ · (∇ × A→) = 0

div grad A = ΔA ↔ ∇ · ∇A = ΔA

rot grad A→ = 0→ ↔ ∇ × (∇A) = 0→

rot rot A→ = grad div A→ - ΔA→ ↔ ∇ × (∇ × A→) = ∇(∇ · A→) - ΔA→

Gradient: (TODO: Check if this is right)

∇(A→ · B→) = (A→ · ∇)B→ + (B→ · ∇)A→ + A→ × (∇ × B→) + B→ × (∇ × A→)

8 Anwendungen

8.1 Integralsatz von Gauss

∫(V) div A→ dV = ∮(S)=∂V A→ · dS→

Fluss durch eingeschlossenen Körper = Gesamter Fluss durch geschlossenen Rand des Körpers

8.2 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

Δφ = div (grad(φ)) = ∇²φ = ∂²φ/∂x² + ∂²φ/∂y² + ∂²φ/∂z² = f(r→)

Δ : Laplace-Operator

φ : Potentialfeld

f(r→) : Quellfunktion

8.2.1 Laplace-Gleichung

Δφ = f = 0 ⇒ Spezialfall der Poisson-Gleichung ohne äussere Quellfunktion

8.3 Integralsatz von Stokes

∮(C)=∂S A→ · dS→ = ∫(S) rot A→ · dS→

∂S muss anhand Rechter-Hand-Regel orientiert sein.

Stokes sagt aus, dass die Summe der Verwirbelungen in einer Fläche, der Summe der Vektoren dessen Randes entsprechen.

8.4 Anwendungen: Maxwell-Gleichungen

-TBD-