

Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 Prof. Dr. Bernhard Zraggen

Autoren:

Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

Version:

0.1.20240603

<https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen>



Inhaltsverzeichnis

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren	2	4 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden	5
1.1 Dimensionen	2	4.1 Lokales oder Globales Extremum	5
1.2 Schnitte	2		
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien,	2	5 Integration (bi-variät)	6
		5.1 2D	6
2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variät)	3	5.2 Normalbereich	6
2.1 Partielle Ableitung	3	5.3 Polar	6
2.2 Gradient (Nabla-Operator)	3	5.4 2D Transformation Polar zu Kartesisch	6
2.3 Totale Ableitung	3	5.5 Derivative, Ableitung	6
2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)	3	5.6 3D Volumenberechnung	6
2.5 DGL	3	5.7	6
2.6 Richtungselement (Tangentallinie an Kontouren)	3	5.8	6
2.7 Gradientenfeld \perp Kontouren	3	6 Integration (multi-variät)	7
2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?	3		
2.9 Richtungs-Ableitung	3	7 Differenziation und Integration von Kurven	7
3 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden	4	8 (Ober-)Flächenintegrale	7
		9 Vektoranalysis	7

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f: \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^n)$$

- m Anzahl Dimensionen von \mathbb{D}_f , wobei $m \in \mathbb{N}$
- n Anzahl Dimensionen von \mathbb{W}_f , wobei $n \in \mathbb{N}$
- \vec{f} wenn Output vektoriell

⚠ Variablen sind abhängig von einander!

Multi-Variat:

f ist "Multi-Variat", wenn:

- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

f ist **nicht** "Multi-Variat", wenn:

- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

$$\left. \begin{array}{l} \text{Raum 3D } (x; y; z) \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t) \mathbb{R}^1 \end{array} \right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t; x; y; z)$$

1.1.2 Stationärer Fall

$$t \rightarrow \infty \rightarrow \text{Stationär}$$

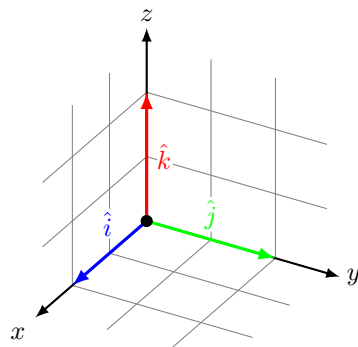
$$T(x; y; z) \frac{\Delta T}{\Delta t} \rightarrow 0$$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = e_1^x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = e_2^y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = e_3^z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion \rightarrow Teilmenge vom Definitionsbereich \mathbb{D}_f

1.2.1 Partielle Funktion

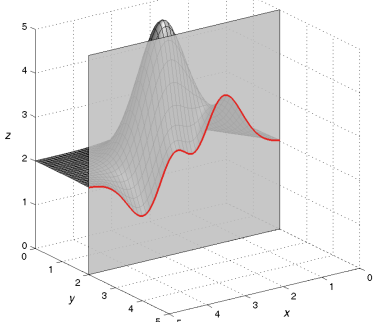
- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
- **Alle** anderen Variablen sind fix!

⚠ \mathbb{W}_f Analyse!

Beispiel: Schnitte

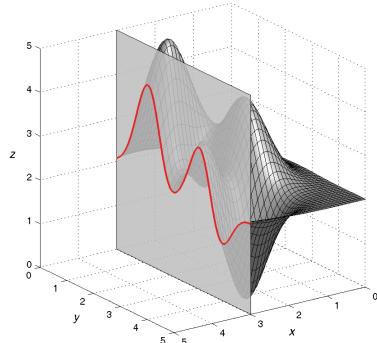
x-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y_0; f(x; y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow y_0 = 2$



y-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x_0; y; f(x_0; y))$
- x-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel



1.2.2 Bedingungen

Initialbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf die **Zeit**

Randbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...

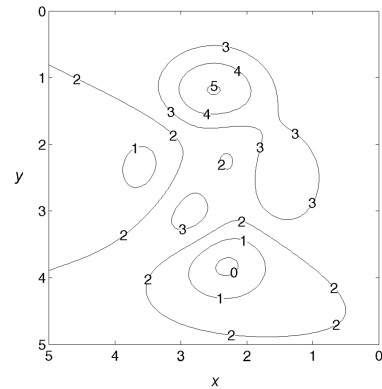
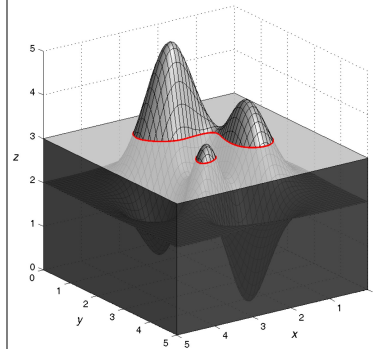
Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion f **konstant**.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \in \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)

- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y; f(x; y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow z_0 = 3$



2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variät)

$$f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}$$

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x, y): y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \text{ **einzig**e freie Variable}$$

Notationen

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ordnung: } & f(x; y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x; y_0) \\ 2. \text{ Ordnung: } & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \end{aligned}$$

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

"Gradient" $\rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}$

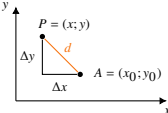
2.3 Totale Ableitung

Für Fehlerrechnung benutzt, da man hierbei die Abstände von $(x; y; z)$ zu einem festen Punkt $(x_0; y_0; z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f; \underbrace{(x_0, y_0, \dots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[1 \times 2 \text{ Matrix}]{\text{gute Approximation}} \mathbb{R}^1; \text{ "gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \dots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + f(x_0; y_0) + R_1$$

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d \text{")}$$


$$\begin{aligned} D(f; (x_0; y_0)) &= \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \right) \\ &= (\nabla f)^{\text{tr}} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A \end{aligned}$$

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

2.4.1 Tangentialebene

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$g(x; y) = f(x_0; y_0) + f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

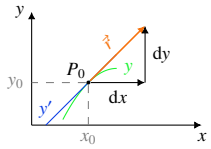
$$df \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{bezüglich } A = (x_0; y_0)$$

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

$$\left(\begin{array}{l} f = c = \text{const.} \quad | d(\dots) \\ df = dc \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right) \quad f_x dx + f_y dy = 0 \quad \text{für Kontourlinien}$$

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = - \frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{dx}{dy} = - \frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



2.5 DGL

$$y' = \left(- \frac{f_x}{f_y} \right); y(x_0) = y_0$$

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

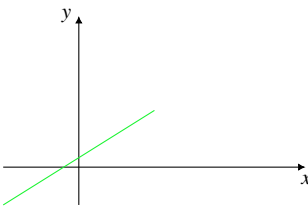
2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

$$\vec{r} = \left(dx = h; dy = y' dx = - \frac{f_x}{f_y} dx \right)^{\text{tr}}$$

2.7 Gradientenfeld \perp Kontouren

Skalarprodukt $\nabla f \bullet \begin{pmatrix} dx \\ dy = y' dx \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$

2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?



$$\begin{aligned} s(t) &: P_0 + t \cdot \hat{v} \mid t \in \mathbb{R} \\ s(t) &: f(x_0 + t \cdot \hat{v}_1; y_0 + t \cdot \hat{v}_2) \end{aligned}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t) : t \mapsto \overbrace{\begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v_1 \\ y_0 + t \cdot v_2 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \mapsto f(x, y)$$

2.9 Richtungs-Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \stackrel{!}{=} D(f; (x_0; y_0)) \cdot \hat{v} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \text{grad}(f)^{\text{tr}} \cdot \hat{v} = f_x \cdot v_1 + f_y \cdot v_2$$

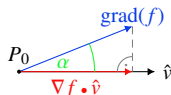
Beispiel: Richtungs-Ableitung

$$\vec{x} : \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_1} = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 = \underline{\underline{f_x}}$$

2.9.1 Spezialfälle

- $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ rechter Winkel
- $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}$ extremal
 - $\alpha = 0$ (max): $\nabla f \cdot \hat{v} > 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$ liegt auf \hat{v}
 - $\alpha = \pi$ (min): $\nabla f \cdot \hat{v} < 0 \Rightarrow \text{grad}(f)$ liegt invers auf \hat{v}

$$\text{Trigo: } \nabla f \cdot \hat{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \Rightarrow \cos(\alpha) \cdot |\nabla f|$$



3 Extrema von Funktionen zweier Variabeln finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$$

2. Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \dots \\ f_{xy} &= f_{yx} = \dots \\ f_{yy} &= \dots \end{aligned}$$

3. Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:

$$\Delta = f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - \left(f_{xy}(x_0; y_0)\right)^2$$

4. Auswertung:

$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) < 0$	\implies	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) < 0$	\implies	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0; y_0) > 0$	\implies	lokales Minimum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0; y_0) > 0$	\implies	lokales Minimum
$\Delta < 0$			\implies	Sattelpunkt
$\Delta = 0$?	Multi-variate-Taylor-logik ...

4 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden

1. Gradient von f Null-setzen und kritische Stellen finden:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0, y_0, \dots, t_0 \text{ bestimmen}$$

2. Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \dots & f_{xt} \\ f_{yx} & f_{yy} & \dots & f_{yt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx} & f_{ty} & \dots & f_{tt} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \bullet \text{ Symmetrien beachten!} \\ \bullet \text{ Nicht doppelt rechnen!} \\ \Rightarrow f_{xt} = f_{tx} \end{array}$$

3. Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen füllen:

$$H(x_0, y_0, \dots, t_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{xy}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \end{pmatrix}$$

4. Eigenwerte λ_i der Hesse-Matrix bestimmen:

$$\det(H(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda \cdot E) = 0$$

Nullstellen λ_i finden \rightarrow Eigenwerte

Zur Erinnerung:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

$$H(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda \cdot E = \dots$$

$$\dots = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda & f_{xy}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{xt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{yy}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda & \dots & f_{yt}(x_0, y_0, \dots, t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{tx}(x_0, y_0, \dots, t_0) & f_{ty}(x_0, y_0, \dots, t_0) & \dots & f_{tt}(x_0, y_0, \dots, t_0) - \lambda \end{pmatrix}$$

5. Auswertung:

$\lambda_i < 0 \quad \forall i$	\Rightarrow	lokales Maximum
$\lambda_i > 0 \quad \forall i$	\Rightarrow	lokales Minimum
$\lambda_i > 0$ und $\lambda_i < 0$	\Rightarrow	Sattelpunkt

Erklärung:

- $\lambda_i < 0 \quad \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind negativ
- $\lambda_i > 0 \quad \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind positiv

4.1 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion $f(x, y, \dots, t)$ gilt:

$f(x, y, \dots, t) \leq M_{\max}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) > M_{\max}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Maximum
$f(x, y, \dots, t) \geq M_{\min}$	$\forall (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	globales Minimum
$f(x, y, \dots, t) < M_{\min}$	$\exists (x, y, \dots, t) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow$	kein globales Minimum

M_{\max} : grösstes lokales Maximum

M_{\min} : kleinstes lokales Minimum

5 Integration (bi-variat)

5.1 2D

$$\int\int_{\Omega} f(x;y) \cdot dx \cdot dy = \int_X \left(\int_Y f(x;y) \cdot dy \right) \cdot dx$$

wenn $\int\int |f(x;y)| dx dy < \infty$

5.2 Normalbereich

Schnitte sind Strecken (Intervalle) für x, y, ...

5.3 Polar

$$dx \cdot dy = r \cdot d\phi \cdot dr$$

5.4 2D Transformation Polar zu Kartesisch

T = Transformation

Polar $(r, \phi) \xrightarrow{T} (x, y)$ Kartesisch

$$\begin{pmatrix} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \mathbb{R}^{2D}$$

Die Funktionen für x und y sind skalare Funktion.

$x = x(r; \varphi) \quad y = y(r; \varphi)$

5.5 Derivative, Ableitung

5.6 3D Volumenberechnung

$$V = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left[\int_{y_{min}(x)}^{y_{max}(x)} f(x;y) \, dy \right] dx$$

5.7

5.8

6	Integration (multi-variät)
7	Differenziation und Integration von Kurven
8	(Ober-)Flächenintegrale
9	Vektoranalysis

6 Seiten Limit erreicht!