



1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$f: \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^n)$

- m Anzahl Dimensionen von \mathbb{D}_f , wobei $m \in \mathbb{N}$
- n Anzahl Dimensionen von \mathbb{W}_f , wobei $n \in \mathbb{N}$
- \vec{f} wenn Output vektoriell

⚠ Variablen sind abhängig von einander!

Multi-Variat:

f ist "Multi-Variat", wenn:

- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

f ist **nicht** "Multi-Variat", wenn:

- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

Raum 3D $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$
Zeit 1D $(t) \in \mathbb{R}^1$
 $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{Raum 3D} \\ \text{Zeit 1D} \end{matrix}} \right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t; x; y; z)$

1.1.2 Stationärer Fall

$t \rightarrow \infty \rightarrow \text{Stationär}$

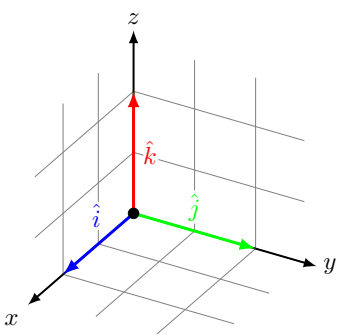
$T(x; y; z) \xrightarrow{\Delta t} 0$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = e_1^x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = e_2^y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = e_3^z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion \rightarrow Teilmenge vom Definitionsbereich \mathbb{D}_f

1.2.1 Partielle Funktion

- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
- **Alle** anderen Variablen sind fix!
- **⚠ \mathbb{W}_f Analyse!**

Beispiel: Schnitte

x-Linien

- Fläche wird **geschnitten mit Ebene**, die parallel zur **x,z-Ebene** liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y_0; f(x; y_0))$
- **x-Wert** ist **variabel**
- **y-Wert** ist **fixiert** $\Leftrightarrow y_0 = 2$

y-Linien

- Fläche wird **geschnitten mit Ebene**, die parallel zur **y,z-Ebene** liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x_0; y; f(x_0; y))$
- **y-Wert** ist **variabel**
- **x-Wert** ist **fixiert** $\Leftrightarrow x_0 = 3$

1.2.2 Bedingungen

Initialbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf die **Zeit**

Randbedingungen \rightarrow Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...

Bei **Kontouren, Levelsets, Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion **f konstant**

$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const.}$ wobei $\vec{x} \subset \mathbb{D}_f$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)

- Fläche wird **geschnitten mit Ebene**, die parallel zur **x,y-Ebene** liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y; f(x; y) = z_0)$
- **x-Wert** und **y-Wert** sind **variabel**
- **z-Wert** ist **fixiert** $\Leftrightarrow z_0 = 3$

2 Ableitungen, DGL und Gradienten

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

$f(x, y) : y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \text{ **einzige** freie Variable}$

Notationen

1. Ordnung: $f(x; y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x; y_0)$

2. Ordnung: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$

$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

"Gradient" $\rightarrow \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektorfeld}$

2.3 Totale Ableitung

Für Fehlerrechnung benützt, da man hierbei die Abstände von $(x; y; z)$ zu einem festen Punkt $(x_0; y_0; z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

$D(f; (\underbrace{x_0, y_0, \dots}_{\text{Arbeitspunkt}})) : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{1 \times 2 \text{ Matrix}} \mathbb{R}^1$; "gute Approximation"

$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \dots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + f(x_0; y_0) + R_1$

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$\frac{R_1}{d} = \frac{R_1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0$ ("gut", "schneller gegen 0 als d")

$D(f; (x_0; y_0)) = \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \right)$

$= (\nabla f)^T$ wenn $\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}$ stetig bei A

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ linear in Δx und Δy

2.4.1 Tangentialebene

$g(x; y) = f(x_0; y_0) + D(f; (x_0; y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

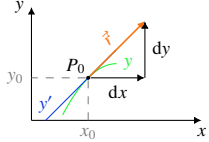
$df \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ bezüglich $A = (x_0; y_0)$

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

$\left(\begin{array}{l} f = c = \text{const.} \quad | \, d(\dots) \\ df = dc \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right) \quad f_x dx + f_y dy = 0 \quad \text{für Kontourlinien}$

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{dx}{dy} = -\frac{f_y}{f_x \neq 0}$



2.5 DGL

$y' = \left(-\frac{f_x}{f_y} \right); y(x_0) = y_0$
right-hand-side (r.h.s.) Funktion

2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

$\vec{r} = \left(dx = h; dy = y' dx = -\frac{f_x}{f_y} dx \right)^T$

2.7 Gradientenfeld \perp Kontouren

Skalarprodukt $\nabla f \bullet \begin{pmatrix} dx \\ dy = y' dx \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$

2.8 Richtungs-Ableitung

