Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 – Prof. Dr. Bernhard Zgraggen
Autoren:
Laurin Heitzer, Flurin Brechbühler

V 0.1.20240502
https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f : \mathbb{D}_f(\subseteq \mathbb{R}^{m}) \longrightarrow \mathbb{W}_f(\subseteq \mathbb{R}^{n})$$

m	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{D}_f$, wobei $m \in \mathbb{N}$
n	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{W}_f$, wobei $n \in \mathbb{N}$
$\vec{f}$	wenn Output vektoriell

⚠ **Variablen sind abhängig von einander!**

Multi-Variat:

f ist "Multi-Variat", wenn:
- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

f ist nicht "Multi-Variat", wenn:
- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

$$\left.\begin{aligned}\text{Raum 3D } (x; y; z)\ \mathbb{R}^3\\ \text{Zeit 1D } (t)\ \mathbb{R}^1\end{aligned}\right\}\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t; x; y; z)$$

1.1.2 Stationärer Fall

$$t \to \infty \to \text{Stationär}$$

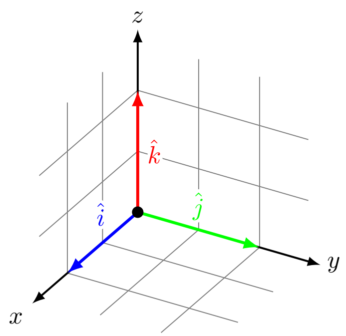
$$T(x; y; z) \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} \to 0$$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion → Teilmenge vom Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$

1.2.1 Partielle Funktion

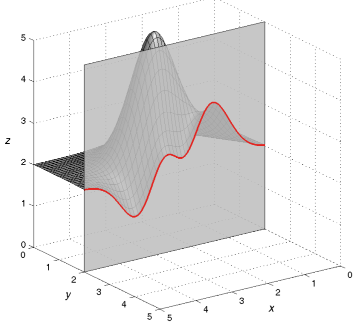
- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
- **Alle** anderen Variablen sind fix!

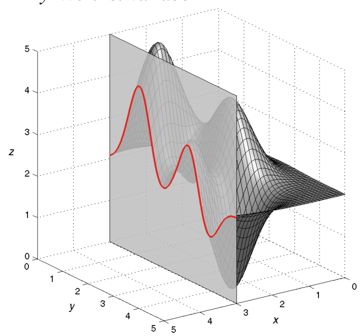
⚠ **$\mathbb{W}_f$ Analyse!**

Beispiel: Schnitte

x-Linien
- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y_0; f(x; y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow y_0 = 2$

y-Linien
- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt.
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x_0; y; f(x_0; y))$
- x-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel





1.2.2 Bedingungen

Initialbedingungen	→	Beziehen sich auf die **Zeit**
Randbedingungen	→	Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

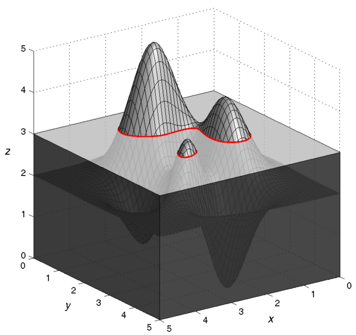
1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinien, ...

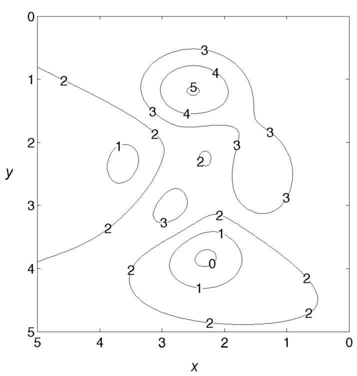
Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion f **konstant**

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \subset \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)
- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x; y; z)$ Punkten $(x; y; f(x; y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow z_0 = 3$





2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat)

$$f : \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}$$

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x, y): \ y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \textbf{ einzige} \text{ freie Variable}$$

Notationen

$$\text{1. Ordnung:} \quad f(x; y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x; y_0)$$

$$\text{2. Ordnung:} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

$$\underbrace{\nabla}_{\text{"Gradient"}} f = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \vdots\end{pmatrix} \;\hat{=}\; \text{Vektorfeld}$$

2.3 Totale Ableitung

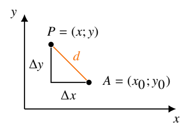
Für Fehlerrechnung benützt, da man hierbei die Abstände von $(x; y; z)$ zu einem festen Punkt $(x_0; y_0; z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f; \underbrace{(x_0, y_0, \ldots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \ \mathbb{R}^2 \xrightarrow{1 \times 2 \text{ Matrix}} \mathbb{R}^1; \text{ "gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \ldots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + f(x_0; y_0) + R_1$$

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d\text{")}$$



$$D(f; (x_0; y_0)) = \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)\right)$$

$$= (\nabla f)^{tr} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A$$

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x;y) \approx f(x_0;y_0) + D(f;(x_0;y_0)) \cdot \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} \qquad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

2.4.1 Tangentialebene

$$g(x;y) = f(x_0;y_0) + D(f;(x_0;y_0)) \cdot \begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$

$$g(x;y) = f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0)$$

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

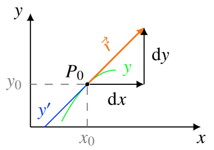
$$df \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \quad \text{bezüglich } A = \underbrace{(x_0;y_0)}$$

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

$$\begin{pmatrix} f = c = \text{const.} \quad |\,d(\ldots) \\ df = dc \overset{!}{=} 0 \end{pmatrix} \qquad f_x\,dx + f_y\,dy = 0 \quad \text{für Kontourlinien}$$

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{dx}{dy} = -\frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



2.5 DGL

$$y' = \left(-\frac{f_x}{f_y}\right);\ y(x_0) = y_0$$

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

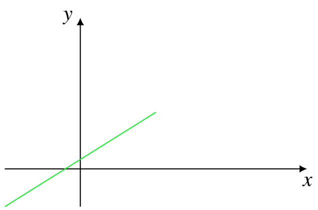
2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

$$\vec r = \left(dx = h; dy = y'\,dx = -\frac{f_x}{f_y}\,dx\right)^{tr}$$

2.7 Gradientenfeld ⊥ Kontouren

$$\nabla f \overset{\text{Skalarprodukt}}{\bullet} \begin{pmatrix} dx \\ dy = y'\,dx \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

2.8 ?Wie heisst dieser Abschnitt?



$$s(t): \quad P_0 + t\cdot\hat v \mid t \in \mathbb{R}$$
$$s(t): \quad f(x_0 + t\cdot\hat v_1\ ;\ y_0 + t\cdot\hat v_2)$$

$$\frac{d\,s(t)}{dt} = \dot s(t): \quad t \mapsto \overbrace{\begin{pmatrix}x_0 + t\cdot v_1\\ y_0 + t\cdot v_2\end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}} \mapsto f(x,y)$$

2.9 Richtungs-Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \hat v} \overset{!}{=} D(f;(x_0;y_0))\cdot\hat v \overset{Def.}{\Leftrightarrow} grad(f)^{tr}\cdot\hat v = f_x\cdot v_1 + f_y\cdot v_2$$

Beispiel: Richtungs-Ableitung

$$\vec x : \vec v = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \hat e_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat e_1} = f_x\cdot 1 + f_y\cdot 0 = \underline{\underline{f_x}}$$

3 Extrema von Funktionen (bi-variat)

4 Ableitungen, Extrema (multi-variat)

5 Integration (bi-variat)

5.1 2D

$$\int\int_{\Omega} f(x;y)\cdot dx\cdot dy = \int_X \left(\int_Y f(x;y)\cdot dy\right)\cdot dx$$

$$wenn \int\int |f(x;y)|dxdy < \infty$$

5.2 Normalbereich

Schnitte sind Strecken (Intervalle) für x, y, ...

5.3 Polar

$$dx\cdot dy = r\cdot d\phi\cdot dr$$

5.4 2D Transformation Polar zu Kartesisch

T = Transformation

Polar $(r,\phi) \xrightarrow{T} (x,y)$ Kartesisch

$$\begin{pmatrix} x = r\cdot\cos(\varphi)\ \mathbb{R} \\ y = r\cdot\sin(\varphi)\ \mathbb{R} \end{pmatrix} \text{2D}$$

Die Funktionen für x und y sind skalare Funktion.

$$x = x(r;\varphi) \qquad y = y(r;\varphi)$$

5.5 Derivative, Ableitung

5.6

5.7

5.8

6 Integration (multi-variat)

7 Differenziation und Integration von Kurven

8 (Ober-)Flächenintegrale)

9 Vektoranalysis