Electromagnétisme

lincoln.travens@parisdescartes.fr

INSTITUT PARIS DESCARTES NEUROSCIENCES COGNITION

BioMedical Engineering
Master's Degree Program

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Chapitre 1

Outils mathématiques de la théorie des champs

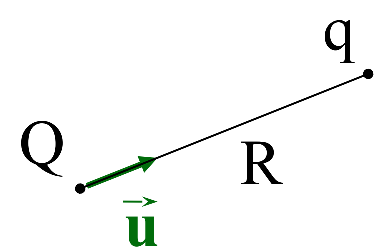
1.0 Définition d’un champ

1.0.1 Introduction

Dans ce cours nous allons étudier des phénomènes électriques et magnétiques en termes de ***champs*** créés par les charges électriques statiques et/ou en mouvement (courants).

Par exemple, considérons une charge électrique Q située à l’origine et calculons la force qu’elle exerce sur une autre charge q à la position $\vec{R}$. La loi de Coulomb donne cette force $\vec{F}$ en fonction de q, Q, la distance R séparant les deux charges et une constante ε_o:

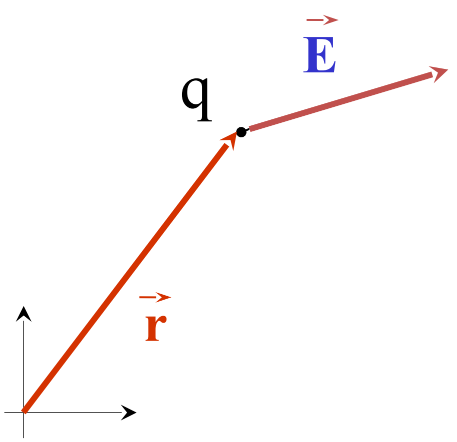
$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qQ}{R^2}\vec{\mathbf{u}} \qquad \vec{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mathbf{R}}}{R}$$



Nous pouvons également mettre cette force sous la forme $\vec{F} = q\,\vec{E}$ où $\vec{E}$ est appelé **champ électrique**. Ce champ matérialise l'effet de la charge Q, ou de toute distribution de charges $\{Q_i\}$ sur la charge *test* q à la position de cette dernière charge. Si on change la position de la charge test - les autres charges Q_i restant fixes (ou alors le calcul étant fait au même instant) - le module et l'orientation du champ $\vec{E}$ vont changer, ce que l'on peut prendre en considération dans une notation du type $\vec{E}(\vec{r})$.

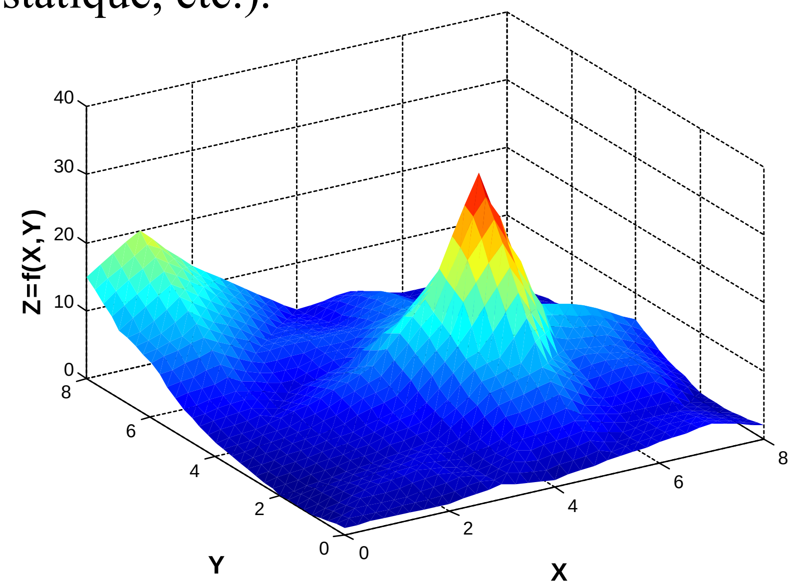
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qQ}{R^2}\,\vec{u}$$

$$\vec{F} = q\,\vec{E}(\vec{r})$$



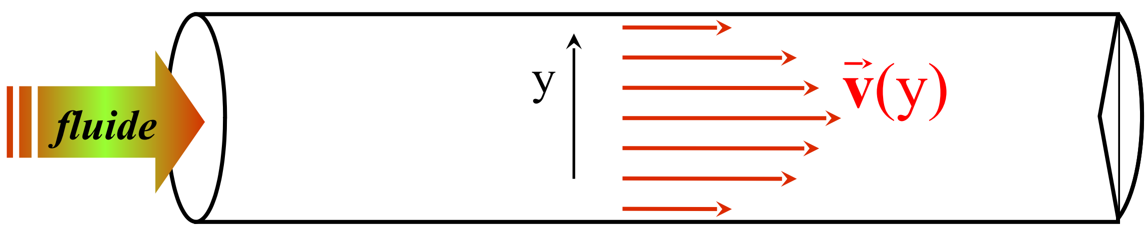
Plus généralement, un **champ** est une grandeur qui représente une quantité physique en tous les points de l'espace. Si cette grandeur peut être complètement déterminée par un seul nombre (qui peut être complexe), on parle de ***champ scalaire*** (température, densité, potentiel électrostatique, etc.).

exemple:



Si au contraire il faut connaître en tous points son orientation et son module (nombre) on parle alors de ***champ vectoriel*** (vitesse dans un écoulement, force de gravitation, champ électrique ou magnétique, etc.).

exemple:



1.0.2 Définitions

➢ ***Champ uniforme***

À un instant t donné, la ***valeur du champ est la même en tous points*** d'une région de l'espace.

Champ stationnaire (ou permanent)

La ***valeur du champ est indépendante du temps*** (mais elle peut varier d'un point à l'autre)

Surface de niveau d'un champ scalaire (ou surface «équipotentielle)

Surface en tous points de laquelle ***le champ scalaire prend la même valeur.***

L'intersection d'une surface de niveau avec un plan constitue une ***ligne de niveau*** ou ***courbe équipotentielle***.

Ligne de champ d'un champ vectoriel

Courbe dont la tangente en chacun de ses points M est colinéaire au vecteur champ $\vec{\mathbf{A}}$(M) en M.

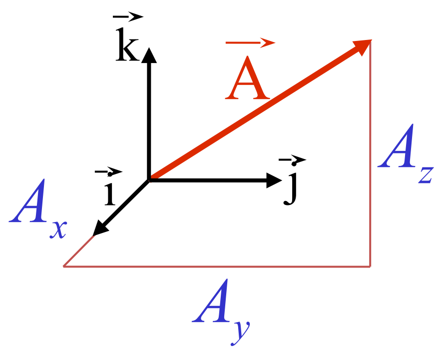
L'équation d'une ligne de champ s'obtient en écrivant :

Tube de champ d'un champ vectoriel

C'est la surface constituée par ***l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur une courbe fermée.***

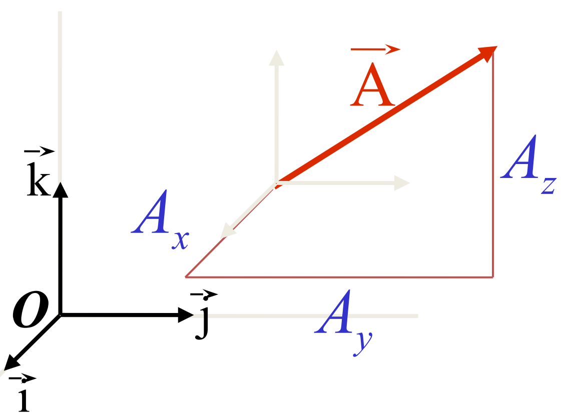
1.1 Produits de vecteurs

Vecteur: un vecteur est caractérisé par ses ***n*** composantes (projections) le long de ***n*** axes définissant les ***n*** directions d'un espace à ***n*** dimensions. Nous nous limiterons à l'espace physique à 3 dimensions et utiliserons en général un système d'axes orthonormé. Un vecteur possède donc une ***orientation*** (direction + sens) et une ***longueur*** (module ou norme), ***mais n'a pas a priori d'origine***.



$$\vec{A}=(A_x, A_y, A_y)$$

$$\vec{A}=\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_y \end{pmatrix}$$

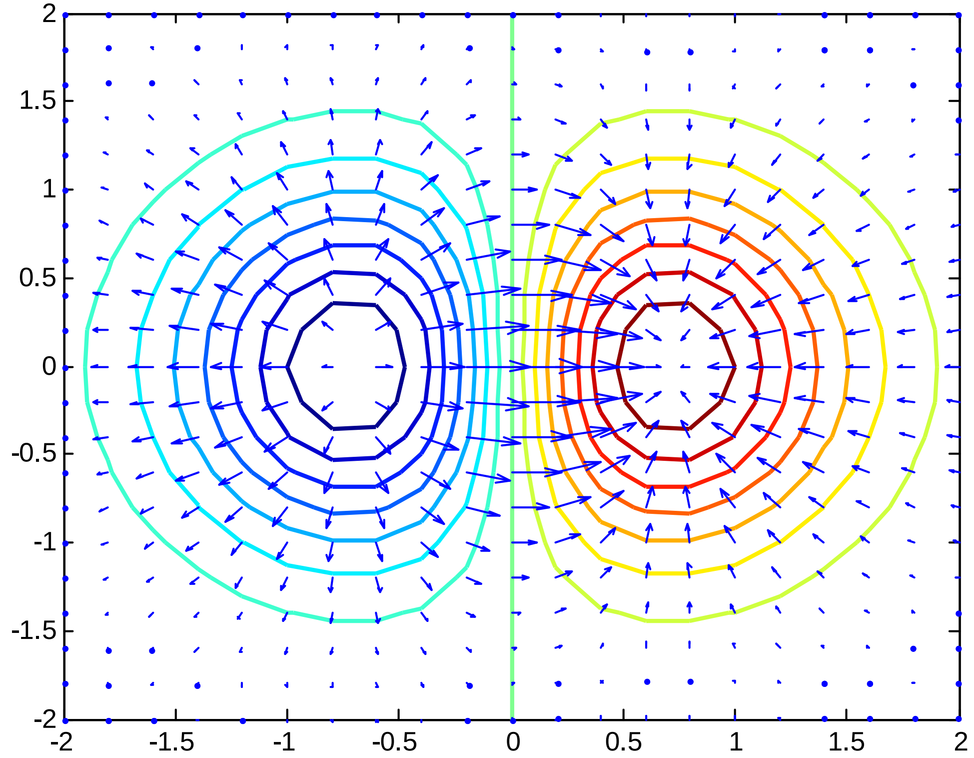


$$\mathrm{A} = |\mathrm{A}| = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}}$$

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormé !

Champ de Vecteurs: un champ de vecteurs est l'association d'un vecteur à chaque point de l'espace:

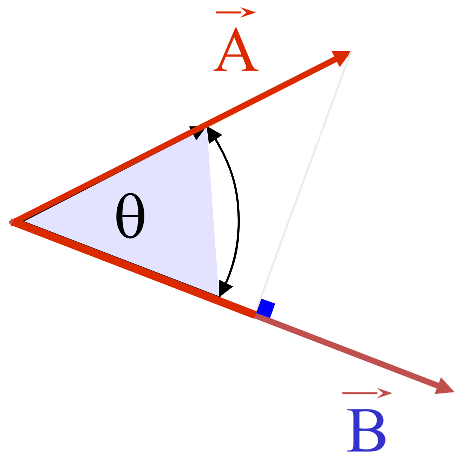
en tout point de l'espace on définit le champ par un vecteur ⇔ direction & module



Le champ de vecteurs ci-dessus (flèches bleues) correspond au champ électrique créé par deux charges électriques ponctuelles.

Les lignes de couleurs correspondent à des iso-contours équipotentiels.

Produit Scalaire:



$$\vec{A}\bullet\vec{B} = A\,B\cos(\theta)$$

$$\frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{B} = \text{projection de } \vec{A} \text{ sur la direction de } \vec{B}$$

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = \vec{B}\bullet\vec{A} \qquad \vec{A}\bullet\vec{A} = A^2$$

$$\vec{A}\bullet(\lambda\,\vec{B}) = \lambda\,(\vec{A}\bullet\vec{B})$$

$$\vec{A}\bullet(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\bullet\vec{B} + \vec{A}\bullet\vec{C}$$

repère orthonormé:

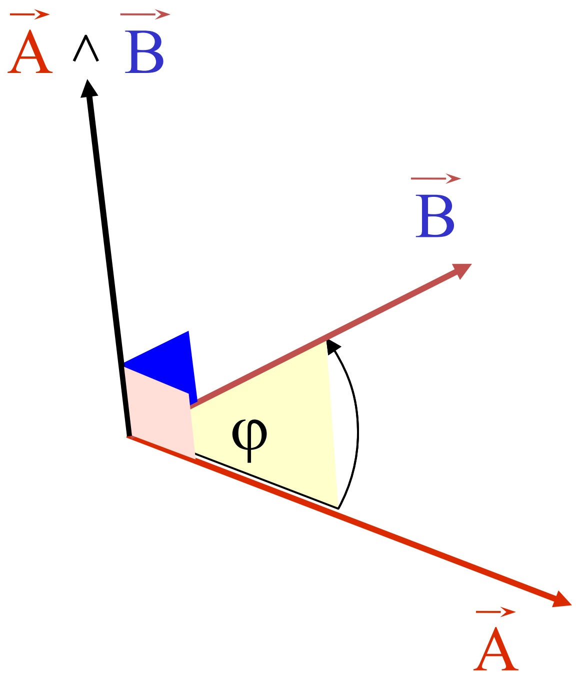
$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z$$

exemple: travail dW d'une force $\vec{F}$ le long d'un déplacement $d\,\vec{r}$: $dW = \vec{F}\cdot d\,\vec{r}$

Produit Vectoriel:



$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{C} \bullet \vec{A} = \vec{C} \bullet \vec{B} = 0$$

$$C = A\,B\,\sin(\varphi)$$

$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ trièdre direct !!!

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$$

$$\vec{A} \wedge (\lambda \vec{B}) = \lambda\,(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

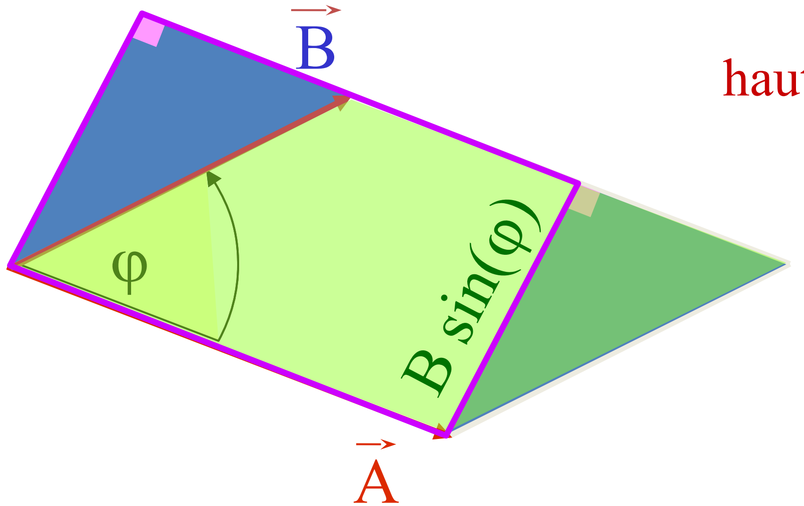
repère orthonormé: $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

permutations circulaires $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\vec{k}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$C = A\,\underbrace{B\,\sin(\varphi)}_{\text{hauteur du triangle}}$$



parallélogramme

ABsin(φ) = surface du rectangle

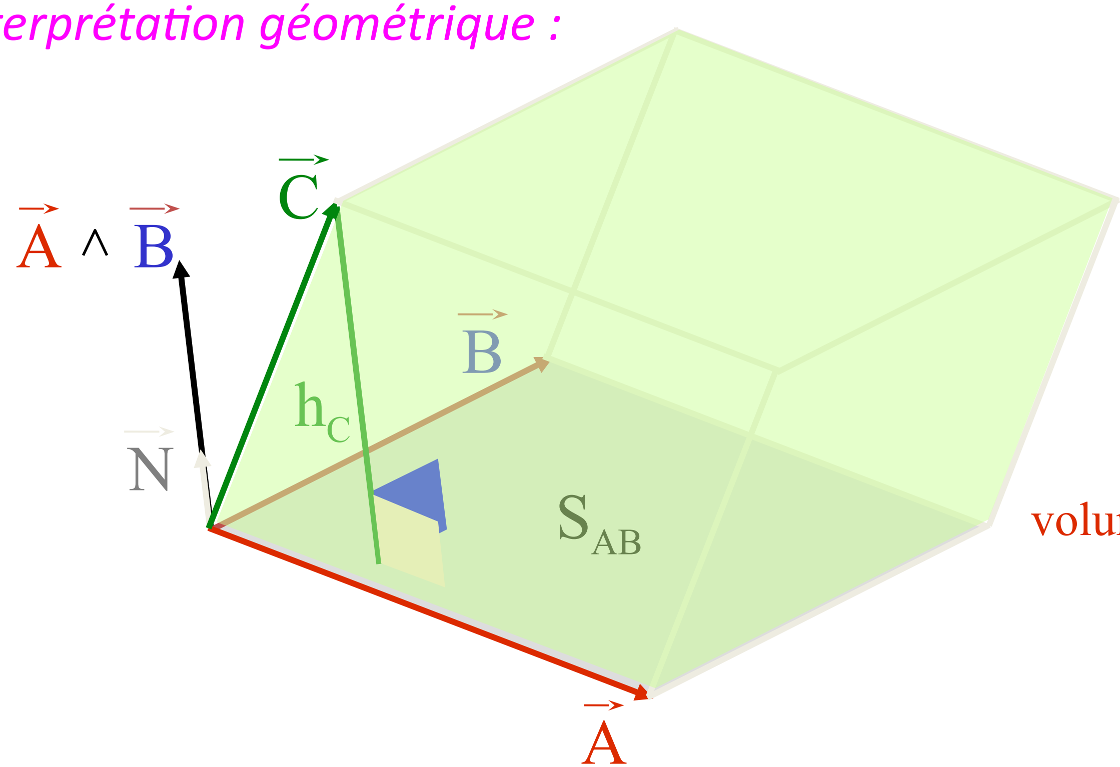
ABsin(φ) = surface du parallélogramme construit sur $\vec{A}$ et $\vec{B}$

Invariance:, *Les produits scalaire et vectoriel sont invariants,* ***ils ne dépendent pas d'un système de coordonnées particulier*** mais uniquement des longueurs des vecteurs et de l'angle entre les vecteurs (angle orienté pour le produit vectoriel qui n'est pas commutatif).

Produit Mixte:

$$\vec{A}\bullet(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{C}\bullet(\underbrace{\vec{A}\wedge\vec{B}}_{\text{surface parallélogramme } S_{AB}}) = \vec{B}\bullet(\vec{C}\wedge\vec{A})$$

interprétation géométrique :



$$\underbrace{\vec{C}\bullet\vec{N}}_{\text{hauteur prisme}}\ S_{AB}$$

$$\underbrace{h_C\ S_{AB} = V_{ABC}}_{\text{volume parallélépipède A,B,C}}$$

astuce de calcul du produit vectoriel dans un repère orthonormé:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_y \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - B_y A_z \\ A_z B_x - B_z A_x \\ A_x B_y - B_x A_y \end{pmatrix}$$

permutation circulaire

Symétrie: y,z pour A et z,y pour B

1.2 Vecteur gradient

1.2.1 Différentielle

Pour une fonction scalaire f à une variable x

$$df = \frac{df}{dx}\,dx = f'(x)\,dx = f'_x\,dx$$

Lorsqu'une fonction scalaire f dépend de plusieurs variables (x,y,z,...) l'accroissement de la fonction f lorsqu'on accroît les variables x, y, z ,... de quantités dx, dy, dz,... autour du point de coordonnées x, y, z,... est donné par:

$$df(x,y,z) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z} \cdot dx + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{z,x} \cdot dy + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y} \cdot dz$$

où la quantité $\partial f/\partial x$ est la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x, c'est à dire qu'on calcule la dérivée de f par rapport à x comme s'il s'agissait d'une fonction à une seule variable x et où y, z,... seraient des *paramètres*.

exemple:

Calculer la différentielle de la fonction :

$$u(x,z)=\frac{z}{\left(x^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_z=-\frac{x\,z}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_x=\frac{x^2}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$du=\frac{1}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}\left[-xz\,dx+x^2dz\right]$$

1.2.2 Gradient d'un champ scalaire

Considérons une ***fonction scalaire*** dépendant des trois variables d'espace $f(x,y,z)$.
La ***différentielle*** df définit l'accroissement de la fonction au point x,y,z.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{dy} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{dz}$$

On peut écrire cette différentielle comme le produit scalaire des vecteurs $\vec{A}$ et $d\vec{r}$:

$$\vec{A} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

Vecteur déplacement élémentaire entre 2 points infiniment voisins M(x,y,z) et M'(x+dx, y+dy, z+dz)

Le *vecteur* $\vec{A}$ *est appelé* ***gradient*** *de la fonction* ***f*** *et on le note :* $\overrightarrow{\textbf{grad}}\, f$ *ou* $\vec{\nabla} f$

$$f(\vec{r}+d\vec{r}) = f(\vec{r}) + \underbrace{\vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}}_{df}$$

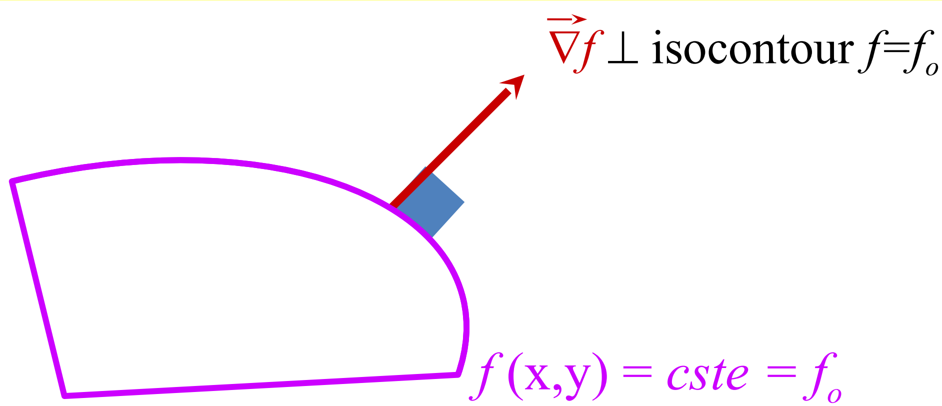
développement de Taylor au 1er ordre pour une fonction à plusieurs variables

$$df = \overrightarrow{grad}\, f(M) \cdot \overrightarrow{dr} = \vec{\nabla} f \cdot \overrightarrow{dr}$$

D'après la définition du produit scalaire, df peut s'écrire: $df = |\vec{\nabla} f|\,|\overrightarrow{dr}| \cos(\theta)$

L'accroissement df est donc maximum quand $\overrightarrow{dr}$ a la même direction que le gradient. **Le gradient de la fonction *f* est donc un vecteur dont l'amplitude et la direction sont celles de la variation maximum de *f* en fonction des coordonnées d'espace.**

Corollaire: si $\overrightarrow{dr}$ est perpendiculaire au gradient alors cos(θ)=0 et donc df = 0, c'est à dire que ***le gradient est perpendiculaire aux lieux où la fonction f est constante*** (**isocontours**, **isosurfaces**).



Notion d'opérateur : L'opération sur la fonction scalaire $\boldsymbol{f}$ qui donne les coordonnées du vecteur gradient revient à faire agir l'opérateur ∇ « ***nabla*** » sur la fonction de la manière suivante:

Expression en coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

appliquer la dérivation partielle par rapport à « x » à la fonction f

$$\left[\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right] \boldsymbol{f}\,(x,y,z)$$

et prendre le résultat comme composante suivant x

$$\vec{\nabla}\boldsymbol{f} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}\,\vec{k}$$

exemple:

Calculer au point (1, -1, 1) les composantes du vecteur gradient de la fonction $f(x,y,z) = x^2 - 3xy^2 + 2z^3$.

Représenter grad f sur un schéma.

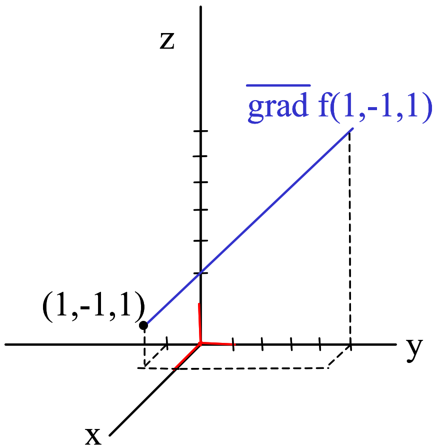
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} = 2x - 3y^2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} = -6xy$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} = 6z^2$$

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x-3y^2 \\ -6xy \\ 6z^2 \end{pmatrix}$$

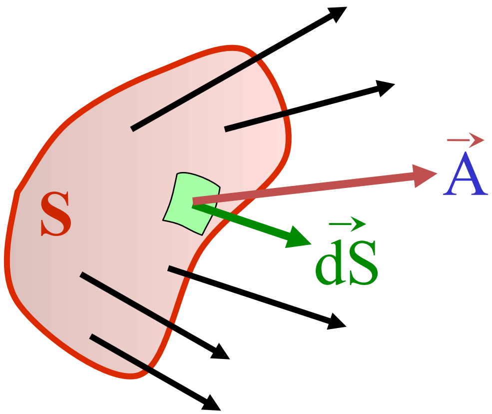
Au point (1,-1,1), on a :



1.3 Flux et divergence d'un champ de vecteurs

Flux: Le flux Φ d'un champ de vecteur $\vec{A}$ à travers la surface S est donné par l'intégrale sur toute la surface S du produit scalaire de $\vec{A}$ avec le vecteur $\vec{dS}$ représentant un élément de surface infinitésimal:

$$\Phi = \int d\Phi = \underbrace{\int_S \vec{A} \cdot \vec{dS}}_{\textit{intégrale double !!!}} = \iint_{x,y} A(x,y)\,dxdy$$



$\vec{dS}$ est un vecteur orienté !!!
vers l'extérieur pour une surface fermée

Exemple : **débit massique de fluide dans une canalisation.**

S *surface axiale de la canalisation* $[L^2]$.
ρ *masse volumique du fluide* $[ML^{-3}]$, supposée homogène (constante).
$\vec{v}$ *vitesse du fluide en un point* $[LT^{-1}]$, *prise constante sur toute la surface S.*

$\int \rho\vec{v} \cdot \vec{dS} = \rho v S = Q \quad [MT^{-1}]$ *débit massique à travers la canalisation*

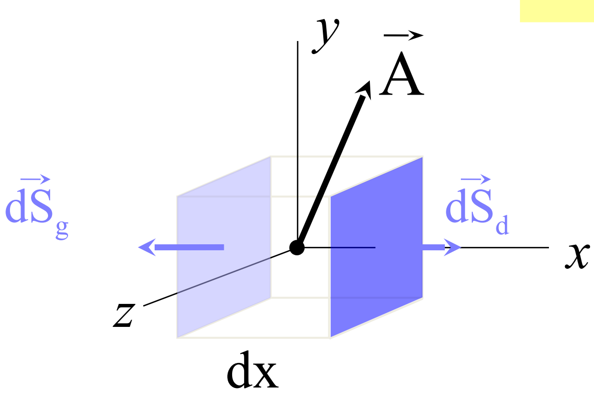
Divergence: La divergence d'un vecteur $\vec{A}$ est définie par le produit scalaire de l'opérateur « nabla » avec ce vecteur. Le résultat est un scalaire.

$$\left.\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{A} &= A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k}\end{aligned}\right\}$$

$$\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(A_x\vec{i}\right) = \vec{i}\,\frac{\partial A_x}{\partial x}\,\vec{i} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\,\vec{i}\cdot\vec{i} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \mathrm{div}\vec{A}$$

Interprétation: Soit un volume infinitésimal cubique de volume $d^3r = dxdydz$ au point de coordonnées x,y,z où l'on considère le vecteur $\vec{A}$.



développement 1er ordre de A_x :

- *en x - dx/2 :* $d\Phi_{xg} = -\left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz$

$$d\Phi_{xg} = \vec{A}(x-dx/2,y,z)\cdot d\vec{S}_g = A_x(x-dx/2,y,z)\vec{i}\cdot(-dydz)\vec{i}$$

- *en x+ dx/2 :* $d\Phi_{xd} = \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz$

soit au total pour la direction x : $d\Phi_x = d\Phi_{xg} + d\Phi_{xd} = \frac{\partial A_x}{\partial x}dxdydz = \frac{\partial A_x}{\partial x}d^3r$

$$d\Phi_x = \frac{\partial A_x}{\partial x}\, d^3r$$
$$d\Phi_y = \frac{\partial A_y}{\partial y}\, d^3r$$
$$d\Phi_z = \frac{\partial A_z}{\partial z}\, d^3r$$

généralisation par symétrie aux directions x,y et z

$$d\Phi_A = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) d^3r$$

$$\boxed{d\Phi_A = \vec{\nabla}\bullet\vec{A}\, d^3r}$$

à la manière d'un produit scalaire !!!

théorème de Green-Ostrogradsky:

$$\Phi = \int d\Phi = \boxed{\int_S \vec{A}\bullet\vec{dS} = \int_{V_S} \vec{\nabla}\bullet\vec{A}\, d^3r}$$

intégrale double !!! ***intégrale triple !!!***

V_S volume délimité par la surface S !!!

$$\int_{V_S} \vec{\nabla}\bullet\vec{A}\, d^3r \xrightarrow[V_S \to 0]{} \vec{\nabla}\bullet\vec{A}\, V_S$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\bullet\vec{A} = \lim_{V_S \to 0} \frac{1}{V_S} \int_S \vec{A}\bullet\vec{dS}}$$

La divergence est le flux sortant par unité de volume, quand le volume tend vers 0

1.4 Circulation et rotationnel d'un champ de vecteurs

Circulation: La circulation d'un vecteur $\vec{A}$ le long d'un chemin $\vec{L}$ est définie par l'intégrale du ***produit scalaire*** du vecteur $\vec{A}$ avec un élément infinitésimal du chemin $d\vec{L}$.
Le résultat est un ***scalaire***.

$$\int_L \vec{A} \bullet d\vec{L}$$

exemple: travail d'une force de rappel le long d'un déplacement **rectiligne**.

$$dW = -k\,\vec{r} \cdot d\,\vec{r} \qquad\qquad W = \int_{r_1}^{r_2} -k\,\vec{r} \cdot d\,\vec{r} \;=\; -\,k\,\left[\frac{1}{2}\,r^2\right]_{r_1}^{r_2}$$

Rotationnel: Le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$ est le résultat de l'application de l'opérateur nabla sur ce vecteur, à la manière d'un ***produit vectoriel***. Le résultat est un ***vecteur***, que l'on peut calculer avec la règle de composition du produit vectoriel en repère orthonormé.

Expression en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Propriétés

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{A}+\vec{B})=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}+\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\Leftrightarrow\overrightarrow{rot}(\vec{A}+\vec{B})=\overrightarrow{rot}\,\vec{A}+\overrightarrow{rot}\,\vec{B}$$

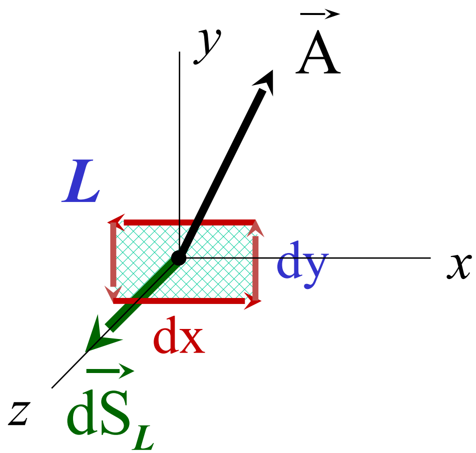
$$\vec{\nabla}\wedge(f\,\vec{A})=f\,\vec{\nabla}\wedge\vec{A}+\vec{\nabla}f\wedge\vec{A}\Leftrightarrow\overrightarrow{rot}(f\,\vec{A})=f\,\overrightarrow{rot}\,\vec{A}+\overrightarrow{grad}\,f\wedge\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})=(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\cdot B-\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})\Leftrightarrow\mathrm{div}(\vec{A}\wedge\vec{B})=(\overrightarrow{rot}\,\vec{A})\cdot\vec{B}-\vec{A}\cdot\overrightarrow{rot}\,\vec{B}$$

***Sens physique**:*
Le rotationnel est une mesure de la tendance à pivoter qu'aurait un petit objet situé à l'endroit étudié, et sur lequel la grandeur vectorielle aurait un quelconque effet d'entraînement .

1.5 Théorème de Stokes

Théorème de Stokes: La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé ***L*** est égale au flux du rotationnel de ce vecteur à travers une surface S_L qui s'appuie sur ce contour (l'orientation de la surface par rapport au sens de circulation est donnée par la règle du tire-bouchon - ou trièdre direct).



- ***illustration***: *contour infinitésimal dans le plan **xy***

décomposer $d\vec{L}$ suivant « x » et « y »

$$\oint \vec{A}\bullet d\vec{L} = \underbrace{\oint A_x dx} + \oint A_y dy$$

- *le long de **dx**:* *dev^{lpt} 1^{er} ordre, en **y-dy/2** et **y+dy/2***

$$\left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{dy}{2} \right) dx - \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{dy}{2} \right) dx \approx -\frac{\partial A_x}{\partial y} dxdy$$

- *soit pour le circuit entier:* $$\oint \vec{A}\bullet d\vec{L} \approx \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}\bullet d\vec{S}$$

- *contour infinitésimal ayant une composante dans le plan* ***xy***

$$\oint \vec{A} \bullet d\vec{\boldsymbol{L}}_{\mathbf{xy}} \approx \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} \bullet d\vec{S} \quad \mathbf{xy}$$

- *contour infinitésimal ayant une composante dans le plan* ***yz***

$$\oint \vec{A} \bullet d\vec{\boldsymbol{L}}_{\mathbf{yz}} \approx \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} \bullet d\vec{S} \quad \mathbf{yz}$$

- *contour infinitésimal ayant une composante dans le plan* ***xy***

$$\oint \vec{A} \bullet d\vec{\boldsymbol{L}}_{\mathbf{zx}} \approx \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} \bullet d\vec{S} \quad \mathbf{zx}$$

composantes du rotationnel

- ***contour infinitésimal quelconque***

$$\oint \vec{A} \bullet d\vec{\boldsymbol{L}} \approx (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \bullet d\vec{S}$$

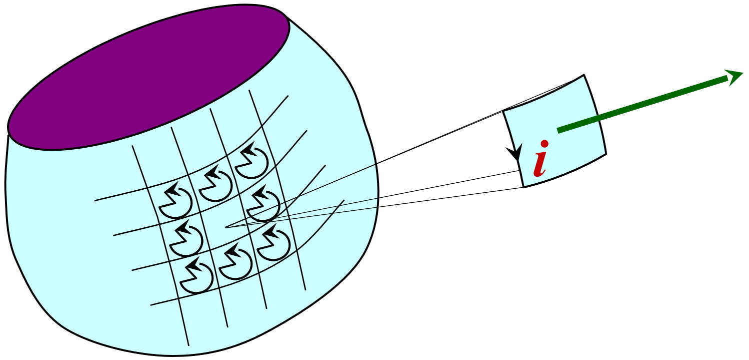
- ***contour quelconque***

A partir de la circulation le long d'un contour fermé infinitésimal on peut donner une nouvelle interprétation du rotationnel: la composante normale à une surface S du rotationnel d'un vecteur **A** est la limite lorsque S tend vers zéro du quotient de la circulation du vecteur le long d'un contour fermé s'appuyant sur cette surface par l'aire de cette même surface .

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{N}_S = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_{L_S} \vec{A} \bullet d\vec{L}$$

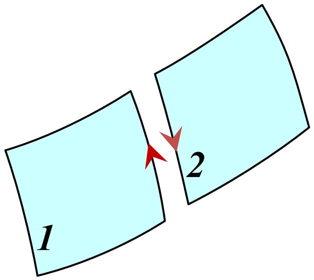
- ***théorème de Stokes*** (cas où S n'est pas infinitésimale)

→ décomposition de la surface en éléments infinitésimaux:



$$\oint \vec{A} \bullet d\vec{L}_i = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \bullet d\vec{S}_i$$

→ éléments infinitésimaux adjacents :



- $dS = dS_1 + dS_2$

  la somme des contributions des deux éléments de surface le long d'une arête commune est nulle (sens inverses).

- passage de la somme à l'intégrale.

$$\oint_{L_S} \vec{A} \bullet \vec{dL} = \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \bullet \vec{dS}$$

Théorème de Stokes

Le flux du rotationnel d'un vecteur à travers une surface est égal à la circulation de ce vecteur le long d'un contour fermé sur lequel s'appuie cette surface.

Champ conservatif: On dit qu'un champ de vecteurs est conservatif si sa circulation le long d'une courbe fermée est nulle.

$$\oint \vec{A} \bullet d\vec{L} = 0$$

Le rotationnel d'un champ de vecteurs conservatif est nul en tout point.

Pour un contour donné il y a une infinité de surfaces s'appuyant sur ce contour et donc la seule façon d'annuler l'intégrale de surface est que le rotationnel soit nul en tout point .

$$\underbrace{\oint_{L_S} \vec{A} \bullet d\vec{L}}_{\mathbf{0}} = \int_S \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})}_{\mathbf{0}} \bullet d\vec{S}$$

$$\mathbf{0} \qquad \textit{si} \qquad \mathbf{0}$$

1.6 Laplacien

En électromagnétisme, ainsi qu'en mécanique des fluides et bien d'autres domaines, la **divergence du gradient** d'une fonction revêt une grande importance.

On nomme cette quantité le **laplacien** et on la note ∇^2 (ou Δ).

- *pour une fonction scalaire*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- *pour une fonction vectorielle*

En coordonnées cartésiennes c'est un vecteur dont chaque composante est le laplacien de la composante du champ de vecteur selon la direction considérée (x, y ou z)

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \vec{i} + \nabla^2 A_y \vec{j} + \nabla^2 A_z \vec{k}$$

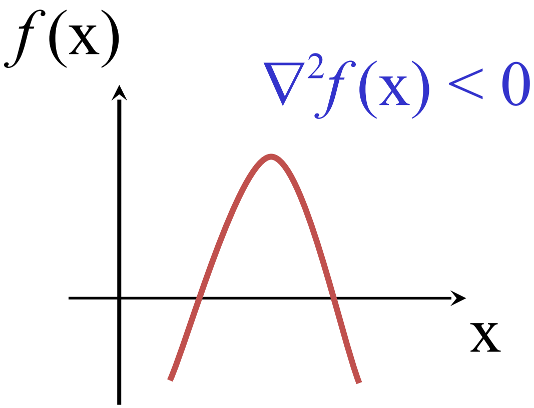
En coordonnées quelconques on peut utiliser l'identité suivante:

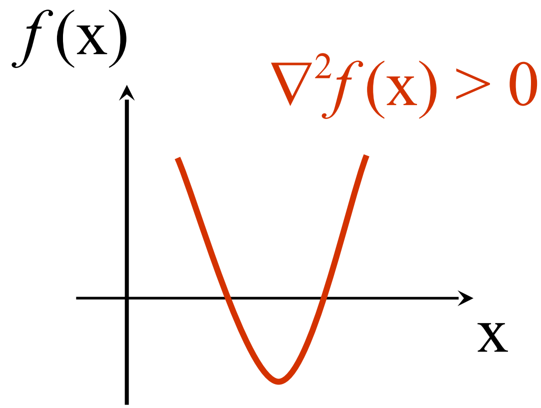
$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

- *pour une fonction ne dépendant que d'une seule variable, le* ***Laplacien*** *s'apparente à la dérivée seconde, c'est à dire à la* ***courbure de la fonction****.*

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- *proche d'un* ***maximum*** *le Laplacien est* ***négatif****, tandis qu'au voisinage d'un* ***minimum*** *il est* ***positif****.*

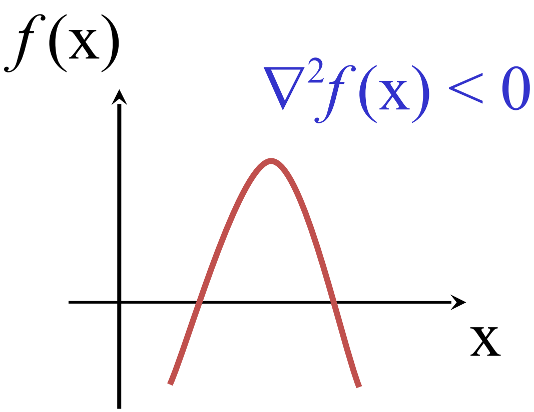


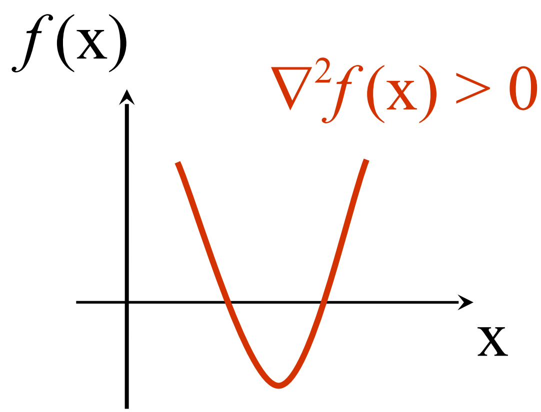


- *pour une fonction ne dépendant que d'une seule variable, le* ***Laplacien*** *s'apparente à la dérivée seconde, c'est à dire à la* ***courbure de la fonction****.*

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- *proche d'un* ***maximum*** *le Laplacien est* ***négatif****, tandis qu'au voisinage d'un* ***minimum*** *il est* ***positif****.*





1.7 Quelques relations à connaître en analyse vectorielle

Dans ce paragraphe, ainsi que dans la suite du cours, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté entre quantités « scalaires » et « vectorielles », les **scalaires** seront représentés en **caractères simples** et les **vecteurs en caractères gras et sans flèche**.

Les identités ci-dessous seront souvent utilisées dans ce cours et concernent essentiellement les règles de distributivité des produits scalaires et vectoriels avec l'opérateur Nabla.

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge (f\mathbf{A}) = (\boldsymbol{\nabla} f) \wedge \mathbf{A} + f\,(\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{A})$$

$$\boldsymbol{\nabla} \bullet (f\mathbf{A}) = (\boldsymbol{\nabla} f) \bullet \mathbf{A} + f\,\boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \bullet (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \bullet (\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{A}) - \mathbf{A} \bullet (\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{B})$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \bullet \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{A} + (\mathbf{A} \bullet \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge (\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{A}) + \mathbf{A} \wedge (\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{B})$$

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \bullet \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{A} - (\mathbf{A} \bullet \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{B} + (\boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{B})\,\mathbf{A} - (\boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{A})\,\mathbf{B}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \bullet (\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{A}) = 0$$

1.8 Systèmes de coordonnées

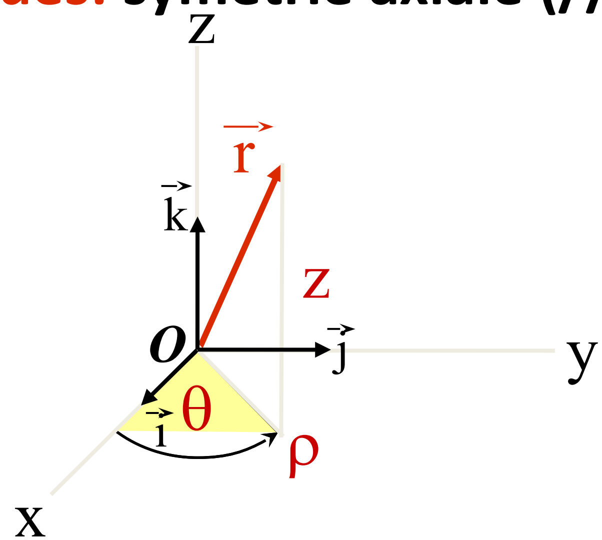
Traiter les problèmes en coordonnées cartésiennes est sans doute le plus facile du point de vue conceptuel, mais parfois n'est pas le moyen le plus adapté. La **symétrie** d'un système doit toujours être prise en considération car elle permet de simplifier les calculs ou d'avoir des moyens de vérification a-posteriori.

Ceci conduit à préférer, suivant les cas, d'autres systèmes de coordonnées qui sont adaptés à la symétrie: **coordonnées polaires, cylindriques** ou **sphériques**.

Les expressions des calculs différentiels, vectoriels et d'application des opérateurs permettant de calculer le gradient, la divergence, le rotationnel ou le laplacien dans les systèmes cartésien, polaire, cylindrique et sphérique seront abordés en TD.

Coordonnées cylindriques: symétrie axiale (// axe Oz)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\text{cartesien}}$$



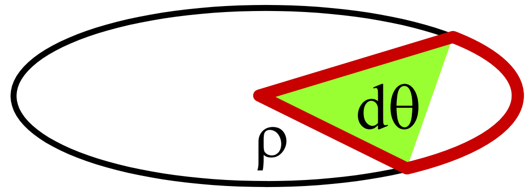
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{cylindrique}$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\theta) \\ y &= \rho \sin(\theta) \\ z &= z \\ r^2 &= \rho^2 + z^2 \end{aligned}$$

Est utilisé quand une quantité est invariante par rotation autour d'un axe:
Cette quantité ne dépend que de la distance ρ à l'axe et de la cote z suivant l'axe

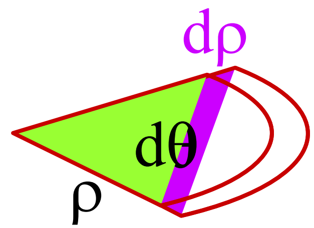
Pour passer en coordonnées polaires, faire z=0.

élément de longueur d’arc



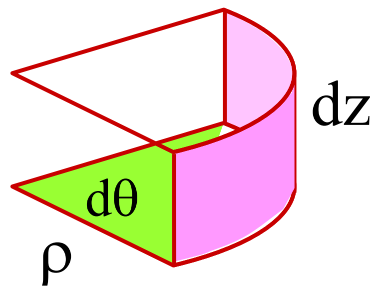
$dl = dr = \rho d\theta$

élément d’aire de secteur



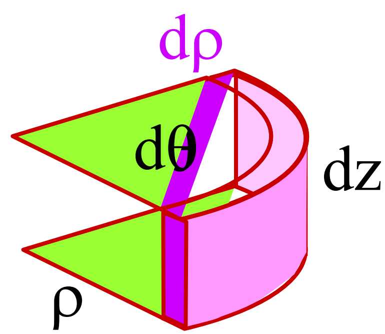
$dA = d^2r = \rho d\theta d\rho$

élément de surface cylindrique



$dS = d^2r = \rho d\theta dz$

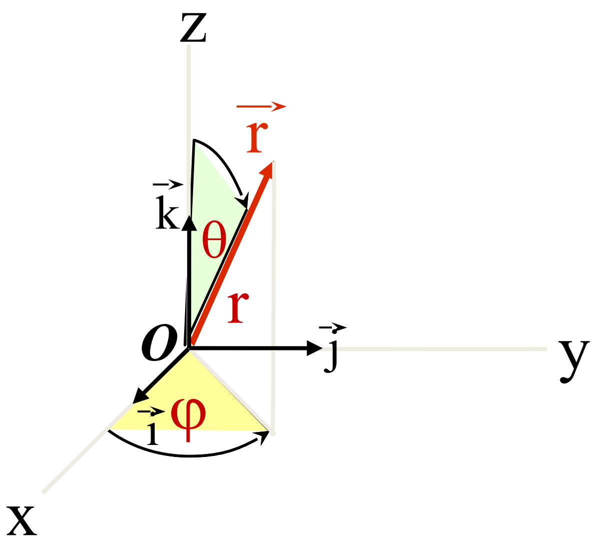
élément de volume cylindrique



$dV = d^3r = \rho d\theta d\rho dz$

Coordonnées sphériques: symétrie radiale

cartésien



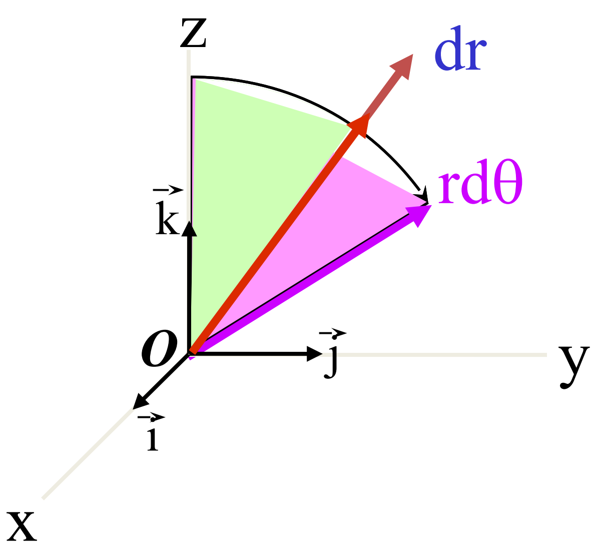
sphérique

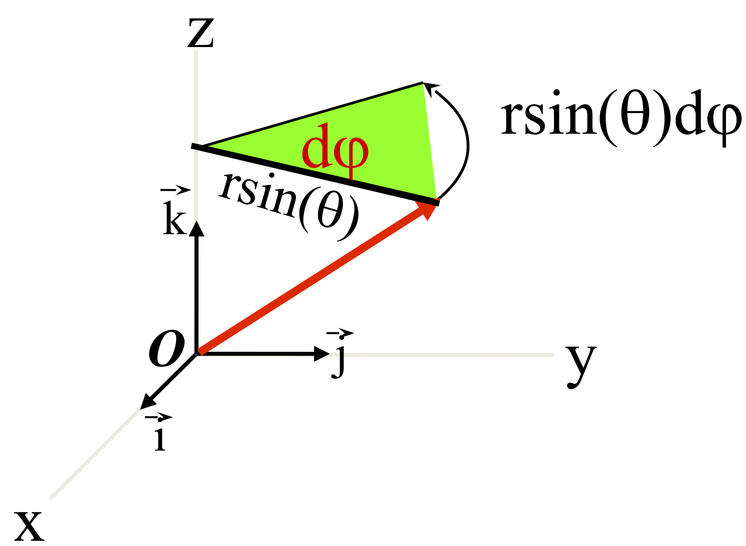
$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$z = r\cos(\theta)$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Utilisé quand une quantité est invariante par rotation autour d'un point:
Cette quantité ne dépend que de la distance r au point

Pour passer en coordonnées polaires, faire $\theta = \pi/2$.

éléments de longueur



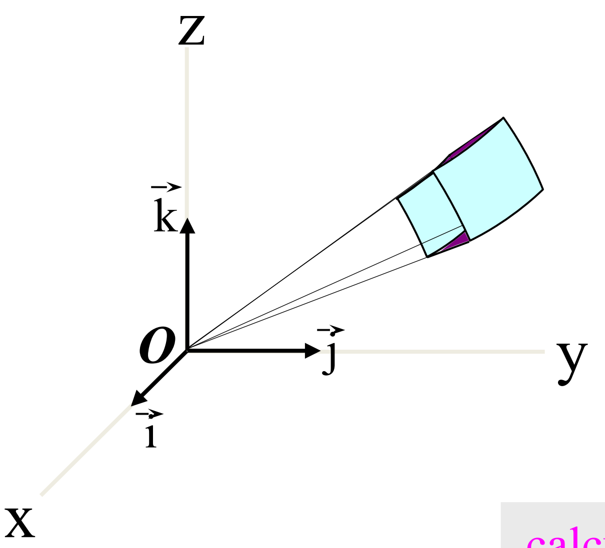


éléments de surface: rdrdθ, rsin(θ)dφdr, rsin(θ)dφrdθ

calcul de la surface d'une sphère de rayon R:

$$S = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R^2 \sin(\theta) d\theta \, d\varphi = R^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta) \, d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = R^2 \left[-\cos(\theta)\right]_{\theta=0}^{\pi} \left[\varphi\right]_{\varphi=0}^{2\pi} = 4\pi R^2$$

élément de volume: $r^2\sin(\theta)\ dr d\theta\ d\varphi$

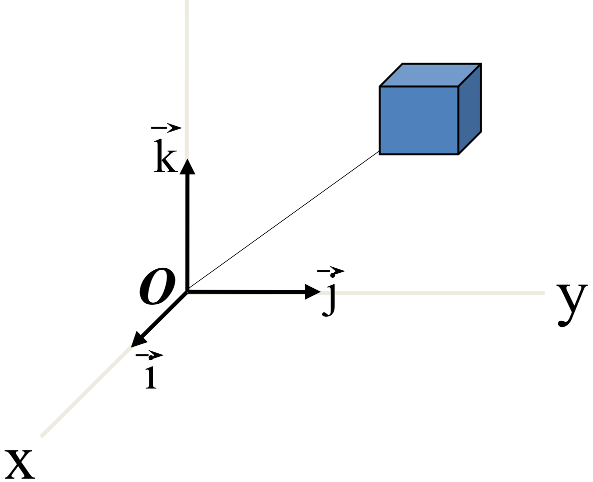


calcul du volume d'une sphère de rayon R:

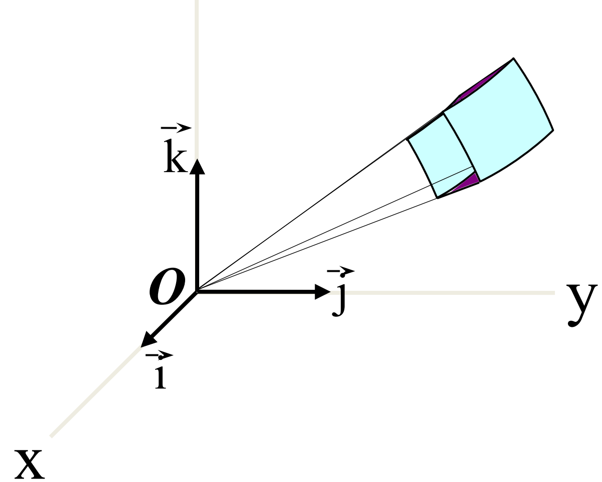
$$S = \int^{R}_{0} \int^{\pi}_{\theta} \int^{2\pi}_{\varphi} r^2\sin(\theta)\ d\theta\ d\varphi = 4/3\ \pi\ R^3$$

Densité:

$dV = d^3r = dx\,dy\,dz$



$dV = d^3r = r^2\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi$



Imaginons qu'il y ait $dN(\mathbf{r})$ particules dans le volume infinitésimal d^3r au point **r**.

On définit la densité $n(\mathbf{r})$ en tout point r par:

$$n(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{dN(\vec{\mathbf{r}})}{d^3r}$$