TD 1 : Outils mathématiques de la théorie des champs

Exercice 1 Produits scalaires et vectoriels

Dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les trois vecteurs :
$\vec{A}=\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3$, $\vec{B}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{C}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2-\vec{e}_3$

1. Calculer la norme des trois vecteurs, les produits scalaires $\vec{A}\cdot\vec{B}$, $\vec{A}\cdot\vec{C}$, $\vec{B}\cdot\vec{C}$ et les produits vectoriels $\vec{A}\wedge\vec{B}$, $\vec{A}\wedge\vec{C}$, $\vec{B}\wedge\vec{C}$.
2. Calculer le produit mixte $(\vec{A},\vec{B},\vec{C})=\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})$. Quelle est sa signification géométrique ?
3. Calculer les composantes des vecteurs $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$ et $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$. Conclusion ?
4. Soit les vecteurs $\vec{M}=\vec{A}-\vec{B}$ et $\vec{N}=-\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$. Calculer les composantes de ces vecteurs.
5. Calculer le produit scalaire $\vec{M}\cdot\vec{N}$ et le produit vectoriel $\vec{M}\wedge\vec{N}$ d'abord directement puis en utilisant les produits scalaires et vectoriels calculés à la question 1.

Exercice 2 Double produit vectoriel

Démontrer la relation : $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$.

Exercice 3 Coordonnées cylindriques

1. Définir les coordonnées (ρ, θ, z) utilisées dans le système de coordonnées cylindriques.
2. Définir les vecteurs $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ de la base locale mobile utilisée dans ce système de coordonnées.
3. Donner l'expression dans ce système de coordonnées :
   - d'un vecteur élémentaire quelconque,
   - des trois vecteurs représentant les éléments de surface fondamentaux (colinéaires aux vecteurs de la base locale),
   - d'un élément de volume.

Exercice 4 Coordonnées sphériques

1. Définir les coordonnées (r, θ, ϕ) utilisées dans le système de coordonnées cylindriques.
2. Définir les vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ de la base locale mobile utilisée dans ce système de coordonnées.
3. Donner l'expression dans ce système de coordonnées :
   - d'un vecteur élémentaire quelconque,
   - des trois vecteurs représentant les éléments de surface fondamentaux (colinéaires aux vecteurs de la base locale),
   - d'un élément de volume.
4. Ecrire les composantes des vecteurs vitesse et accélération d'un point M en mouvement dans ce système de coordonnées.
   -

Exercice 5 Gradient

Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes d'un point M par rapport à un repère orthonormé direct $R=(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et F(M) une fonction des trois coordonnées de M.

1 Exprimer la différentielle de F(M) à l'aide des coordonnées cartésiennes de M dans R puis à l'aide des coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) et sphériques (r, θ, ϕ) de M dans R.

2 En exprimant le vecteur élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, en déduire les composantes du vecteur $\overrightarrow{grad}\, F$ dans chacun de ces systèmes de coordonnées.

3 Application : Deux charges électriques ponctuelles $q_1=-q_2=q>0$ sont respectivement placées sur un axe $(x'Ox)$ en x = a et x = -a. Le potentiel $V(r, \theta)$ créé par ces deux charges en un point M du plan xOy, repéré par ses coordonnées polaires r et θ, et tel que r >> a s'écrit :

$$V(r, \theta)=k\frac{2qa\cos(\theta)}{r^2}$$ où k est une constante positive.

3.1 Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{grad}\, V$ dans la base locale (e_r, e_θ) .

3.2 En déduire $\overrightarrow{grad}\, V$ au point $M(r=1, \theta=\frac{\pi}{4})$. O donne : $\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7$.

3.3 Représenter le vecteur $\vec{U}=\frac{1}{kqa}\overrightarrow{grad}\, V$ au point M.

Exercice 6 Rotationnel et divergence

1 Démontrer les relations suivantes :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\,U)=\vec{0} \qquad \overrightarrow{rot}(a\vec{V})=a\,\overrightarrow{rot}(\vec{V})+\overrightarrow{grad}\,a\wedge\vec{V}$$

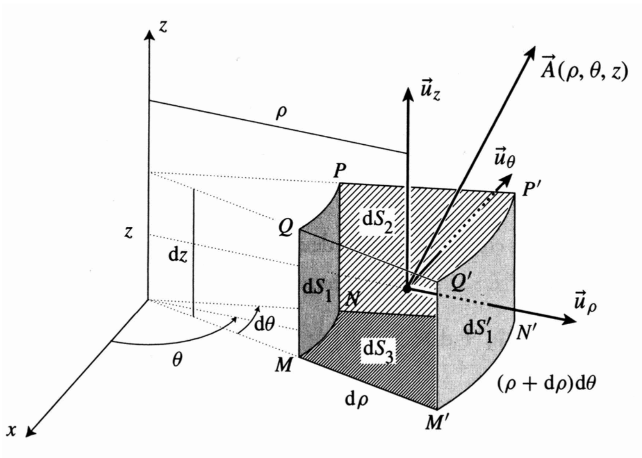
$$\mathrm{div}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E})=0 \qquad \mathrm{div}(a\vec{V})=a\,\mathrm{div}(\vec{V})+\overrightarrow{grad}\,a\cdot\vec{V}$$

$$\mathrm{div}(\vec{U}\wedge\vec{V})=\vec{V}\cdot\overrightarrow{rot}(\vec{U})-\vec{U}\cdot\overrightarrow{rot}(\vec{V})$$

2 Soit $\vec{V}(\vec{r})=\vec{E}\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$ dans lequel $\vec{E}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs constants. Calculer $\mathrm{div}\,\vec{V}$ et $\overrightarrow{rot}\,\vec{V}$.

3 On considère le vecteur $\vec{V}$ de composantes $V_x = xy$ et $V_y = x^2/2 + 3x$. En utilisant le théorème de Stokes, calculer la circulation de $\vec{V}$ le long du cercle de centre O et de rayon R = 3 cm.

4 On considère un volume élémentaire de cylindre MNPQM'N'P'Q' centré sur le point C suivant :



On note $\vec{A}(\rho,\theta,z)$ un vecteur d'origine C.

4.1 Calculer le flux du vecteur $\vec{A}$ à travers la surface totale du volume élémentaire (la normale étant orientée sur chaque face vers l'extérieur).

4.2 En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, en déduire l'expression de la divergence de $\vec{A}$ en coordonnées cylindriques.

4.3 Calculer la circulation du vecteur $\vec{A}$ le long des trajets orientés : M'N'P'Q', MQQ'M' et M'N'NM.

4.4 En déduire l'expression du rotationnel de $\vec{A}$ en coordonnées cylindriques.