Rogers-Ramanujan恒等式的三个证明

宋旭　　求真书院

摘要

Rogers-Ramanujan恒等式由两个等式组成，最早由Leonard James Rogers和Srinivasha Ramanujan分别独立地发现。Rogers-Ramanujan恒等式形式优美，在数论方面有着重要的应用，是建立Rogers-Ramanujan连分数理论和Ramanujan模方程的基石。本文收集并整理了Rogers-Ramanujan恒等式的三个证明。

目录

0.Rogers-Ramanujan恒等式的等价形式

Rogers-Ramanujan恒等式由以下两个等式组成：

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^m)}=\prod_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5m+1})(1-q^{5m+4})} \tag{0.1}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{m^2+m}}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^m)}=\prod_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5m+2})(1-q^{5m+3})} \tag{0.2}$$

这里q是一个模长小于1的复数. 接下来引入新的记号，使得恒等式看起来更加简洁：

定义.设$a,q\in\mathbb{C},n\in\mathbb{N}$,定义

$$\begin{cases}1, & 若n=0\\ (1-a)(1-aq)...(1-aq^{n-1})=\prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k), & 若n\geq 1\end{cases}$$

特别的，当$|q|<1$时，我们可以定义

$$(a;q)_\infty=\prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)$$

更一般的,对多个$a_1,a_2,...,a_k$,可以定义

$$(a_1,a_2,...,a_k;q)_\infty=(a_1;q)_\infty(a_2;q)_\infty...(a_k,q)_\infty$$

有了这个记号，我们可以得到公式(0.1), (0.2)的等价形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty} \tag{0.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q^2;q^5)_\infty(q^3;q^5)_\infty} \tag{0.4}$$

回忆**(Jacobi's Triple Product Identity)**：对于$|q|<1$和$x\neq 0$,有恒等式

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+xq^n)(1+x^{-1}q^{n-1}) \\ &= (q;q)_\infty(-xq;q)_\infty(-x^{-1};q)_\infty\end{aligned}$$

在式子中将q换成q^5,将x分别换成$-q^{-2}$和$-q^{-1}$,得

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{5n^2+n}{2}} &= (q^5:q^5)_\infty(q^3;q^5)_\infty(q^2,q^5)_\infty \\ &= \frac{(q;q)_\infty}{(q;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}} &= (q^5;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty(q;q^5)_\infty \\ &= \frac{(q;q)_\infty}{(q^2;q^5)_\infty(q^3;q^5)_\infty}\end{aligned}$$

从而等式(0.3), (0.4)分别等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{5n^2+n}{2}} \tag{0.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}} \tag{0.6}$$

在本文中，我们总假定$q\in\mathbb{C}, |q|<1$.

1.第一个证明——基于二项式恒等式的证明

这个证明大量运用了二项式的性质.

我们首先引入一些记号.

定义($q-$阶乘).对于$q \in \mathbb{C}, |q| < 1$,以及$s \in \mathbb{Z}$,定义$q-$ 阶乘为

$$(q)_s \equiv \prod_1^\infty \frac{(1-q^m)}{(1-q^{s+m})}$$

当s是正整数时,有$(q)_s = (1-q)(1-q^2)...(1-q^s)$. 当$s$是负整数时,${(q)_s}^{-1} = 0$. 当$s = 0$时,$(q)_0 = 1$.

定义(高斯多项式)对于$N \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ 定义高斯多项式

$$\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} = \frac{(q)_N}{(q)_m (q)_{N-m}} = \begin{cases} 1, & \text{若} m = 0, N \\ 0, & \text{若} m < 0 \text{或} m > N \\ \dfrac{(1-q^N)(1-q^{N-1})...(1-q^{N-m+1})}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^m)}, & \text{若} 0 < m < N \end{cases}$$

我们接下来将证明以下恒等式:

$$\begin{aligned} &\sum_{N \geq s \geq t \geq 0} \frac{q^{s^2+t^2}(1+xq)(1+xq^2)...(1+xq^t)}{(1-q)...(1-q^{N-s})(1-q)...(1-q^{s-t})} \\ &\quad \times \frac{(1+x^{-1})(1+x^{-1}q)...(1+x^{-1}q^{t-1})}{(1-q)...(1-q^{2t})} \\ &= (\prod_1^{2N}(1-q^m))^{-1} \sum_{-N}^{N} x^m q^{\frac{5m^2+m}{2}} \begin{bmatrix} 2N \\ N-m \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.1}$$

当$x = -1$时，等式化为

$$\begin{aligned} &\sum_{N \geq s \geq 0} \frac{q^{s^2}}{(1-q)...(1-q^{N-s})(1-q)...(1-q^s)} \\ &= (\prod_1^{2N}(1-q^m))^{-1} \sum_{-N}^{N} (-1)^m q^{\frac{5m^2+m}{2}} \frac{(1-q^{2N})(1-q^{2N-1})...(1-q^{N+m+1}))}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^{N-m})} \end{aligned}$$

令$N \to \infty$,并在等号两边同时乘以$\prod_1^\infty (1-q^m)$,便得到了(0.5).

当$x = -q$时，等式化为

$$\begin{aligned} &\sum_{N \geq s \geq 0} \frac{q^{s^2}}{(1-q)...(1-q^{N-s})(1-q)...(1-q^s)} + \sum_{N \geq s \geq 0} \frac{q^{s^2+1}(1-q^2)}{(1-q)...(1-q^{N-s})(1-q)...(1-q^{s-1})} \\ &= (\prod_1^{2N}(1-q^m))^{-1} \sum_{-N}^{N} (-1)^m q^{\frac{5m^2+3m}{2}} \frac{(1-q^{2N})(1-q^{2N-1})...(1-q^{N+m+1}))}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^{N-m})} \end{aligned}$$

令$N\to\infty$,并在等号两边同时乘以$\prod_1^\infty(1-q^m)$，得

$$\sum_0^\infty\frac{q^{s^2}}{(1-q)...(1-q^s)}-\sum_1^\infty\frac{q^{s^2+1}(1-q^2)(1-q^{-1})}{(1-q)...(1-q^{s-1})(1-q)(1-q^2)}$$
$$=(\prod_1^{2N}(1-q^m))^{-1}\sum_{-\infty}^\infty(-1)^mq^{\frac{5m^2+3m}{2}}$$

此即为(0.6). 这说明为了证明 Rogers-Ramanujan 恒等式,只需证明恒等式(1.1).

我们还需要以下的一系列引理.

引理1($q-$二项式定理)：对于$n\in\mathbb{N}$,有恒等式

$$\sum_0^\infty y^mq^{(m^2+m)/2}\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=(1+yq)(1+yq^2)...(1+yq^n)\tag{1.2}$$

注意到$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}$在$m>n$时为0,故恒等式左边是一个有限和.

引理1的证明：等式两边在$n=1$时显然成立.

注意到(1.2)的两边均满足递推式

$$f_n(y;q)=f_{n-1}(y;q)+yq^nf_{n-1}(y;q)$$

故由归纳知恒等式成立.

引理2：有以下恒等式

$$\sum_{-N}^Nx^mq^{(m^2+m)/2}\begin{bmatrix}2N\\N-m\end{bmatrix}=\prod_1^N(1+xq^m)(1+x^{-1}q^{m-1})\tag{1.3}$$

引理2的证明：将 $n=2N,y=xq^{-N}$ 带入(1.2)即得.

引理3 :对$k\in\mathbb{Z}^+$,有恒等式

$$(\prod_1^k(1-xq^j))^{-1}=\sum_j\frac{x^jq^{j^2}}{(1-xq)...(1-xq^j)}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}\tag{1.4}$$

引理3的证明: $k=1$时，等式为 $(1-xq)^{-1}=1+\frac{xq}{1-xq}$, 显然成立.

注意到等式两边均满足递推式

$$g_k(x;q)=g_{k-1}(x;q)+\frac{xq^k}{q-xq}g_{k-1}(xq;q)$$

故由归纳知恒等式成立.

引理4. 对$n\in\mathbb{Z}^+, a\in\mathbb{C}$, 有等式

$$\sum_m \frac{x^m q^{am^2}}{(q)_{n-m}(q)_{n+m}} = \sum_s \frac{q^{s^2}}{(q)_{n-s}} \sum_m \frac{x^m q^{(a-1)m^2}}{(q)_{n-s}(q)_{s+m}} \tag{1.5}$$

引理4的证明：在(10)中令$k=n-m, x=q^{2m}$,再在等式两边同时乘以$(q)_{2m}^{-1}$, 得

$$(q)_{n+m}^{-1} = \sum_j \frac{q^{j^2+2mj}}{(q)_{j+2m}} \frac{(q)_{n-m}}{(q)_j(q)_{n-m-j}}$$

将其带入(1.5)的左边，得

$$\begin{aligned}\sum_m \frac{x^m q^{am^2}}{(q)_{n-m}(q)_{n+m}} &= \sum_m \frac{x^m q^{am^2}}{(q)_{n-m}} \sum_j \frac{q^{j^2+2mj}(q)_{n-m}}{(q)_{j+2m}(q)_j(q)_{n-m-j}} \\ &= \sum_{m,j} \frac{q^{(m+j)^2}}{(q)_{n-m-j}} \frac{x^m q^{(a-1)m^2}}{(q)_j(q)_{2m+j}} \\ &\overset{s=m+j}{=} \sum_s \frac{q^{s^2}}{(q)_{n-s}} \sum_m \frac{x^m q^{(a-1)m^2}}{(q)_{n-s}(q)_{s+m}}\end{aligned}$$

我们现在开始证明(1.1).
我们从(1.1)式的右边出发,由前面得引理得：

$$\begin{aligned}(\prod_1^{2N}(1-q^m))^{-1}\sum_{-N}^{N} x^m q^{\frac{5m^2+m}{2}} \begin{bmatrix}2N\\N-m\end{bmatrix} &= (q)_{2N}^{-1}\sum_m x^m q^{(5m^2+m)/2}\begin{bmatrix}2N\\N-m\end{bmatrix} \\ &= \sum_m \frac{(xq^{1/2})^m q^{5m^2/2}}{(q)_{N-m}(q)_{N+m}} \\ &= \sum_s \frac{q^{s^2}}{(s)_{N-s}} \sum_m \frac{(xq^{1/2})^m q^{3m^2/2}}{(q)_{s-m}(q)_{s+m}} && \text{(由引理4)} \\ &= \sum_s \frac{q^{s^2}}{(s)_{N-s}} \sum_t \frac{q^{t^2}}{(q)_{s-t}} \sum_m \frac{(xq^{1/2})^m q^{m^2/2}}{(q)_{t-m}(q)_{t+m}} && \text{(由引理4)} \\ &= \sum_s \frac{q^{s^2}}{(s)_{N-s}} \sum_t \frac{q^{t^2}}{(q)_{s-t}} \sum_m x^m q^{(m^2+m)/2}\begin{bmatrix}2t\\t-m\end{bmatrix}(q)_{2t}^{-1} \\ &= \sum_s \frac{q^{s^2}}{(s)_{N-s}} \sum_t \frac{q^{t^2}}{(q)_{s-t}} \frac{\prod_1^t(1+xq^m)(1+x^{-1}q^{m-1})}{(q)_{2t}} && \text{(由引理2)} \\ &= \sum_{s,t} \frac{q^{s^2+t^2}}{(q)_{N-s}(q)_{s-t}} \frac{\prod_1^t(1+xq^m)(1+x^{-1}q^{m-1})}{(q)_{2t}}\end{aligned}$$

此即为(1.1)式. 至此我们便证明了Rogers-Ramanujan 恒等式.

最后介绍(1.1)式的一个推广形式：

定理.给定$k, N \in \mathbb{Z}^{+}$,有以下恒等式:

$$\begin{aligned}&\sum_{s_1,\ldots,s_k} \frac{q^{{s_1}^2+{s_2}^2+\ldots+{s_k}^2}}{(q)_{N-s_1}(q)_{s_1-s_2}\ldots(q)_{s_{k-1}-s_k}(q)_{2s_k}} \prod_{1}^{s_k}(1+xq^m)(1+x^{-1}q^{m-1}) \\ =&{(q)_{2N}}^{-1}\sum_m x^m q^{((2k+1)m^2+m)/2}.\begin{bmatrix} 2N \\ N-m \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1.6}$$

当$k=2$时,上式即为(1.1).

该定理的证明与(1.1)的证明用到的方法完全一致,只需对定理右边的式子先用 k 次引理4,再用一次引理2.

2.第二个证明——Ramanujan的证明

Ramanujan实际上证明的是:

$$(aq;q)_\infty \sum_{n\geq 0} \frac{a^n q^{n^2}}{(q;q)_n} = 1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k a^{2k} q^{(5k^2-k)/2}(1-aq^{2k})\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k} \tag{2.1}$$

其中$a \in \mathbb{C}$是一个参数.

令$a=1$, (2.1)化为

$$\begin{aligned}(q;q)_\infty \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} =&1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k q^{(5k^2-k)/2}(1-q^{2k})\frac{(q;q)_{k-1}}{(q;q)_k} \\ =&1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k q^{(5k^2-k)/2}(1+q^k) \\ =&\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{5n^2+n}{2}}\end{aligned}$$

此为(0.5).

令$a=q$, (2.1)化为

$$(q^2;q)_\infty \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n} = 1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k q^{(5k^2+3k)/2}(1-q^{2k+1})\frac{(q^2;q)_{k-1}}{(q;q)_k}$$

得

$$
\begin{aligned}
(q;q)_\infty \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n} =& 1-q+\sum_{k\geq 1}(-1)^k q^{(5k^2+3k)/2}(1-q^{2k+1}) \\
=& 1-q+\sum_{k\geq 1}(-1)^k q^{(5k^2+3k)/2}+\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1} q^{(5k^2+7k+2)/2} \\
=& 1-q+\sum_{k\geq 1}(-1)^k q^{(5k^2+3k)/2}+\sum_{k\leq -2}(-1)^{k} q^{(5k^2+3k)/2} \\
=& \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{(5k^2+3k)/2}
\end{aligned}
$$

此为(0.6).

现在我们开始证明(2.1). 用$G(a)$表示(2.1)式的右边：

$$
G(a)=1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k a^{2k} q^{(5k^2-k)/2}(1-aq^{2k})\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k} \tag{2.2}
$$

则

$$
\begin{aligned}
G(a) =& 1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k a^{2k} q^{(5k^2-k)/2}((1-q^k)+q^k(1-aq^k))\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k} \\
=& 1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k a^{2k}(q^{(5k^2-k)/2}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}+q^{(5k^k+k)/2}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}) \\
=& 1-a^2q^2+\sum_{k\geq 1}(-1)^k a^{2k} q^{(5k^2+k)/2}(1-a^2q^{4k+2})\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k} \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

将(2.3)两边同时除以$1-aq$,得

$$
\frac{G(a)}{1-aq}=1+aq+\sum_{k\geq 1}(-1)^k a^{2k} q^{(5k^2+k)/2}(1-a^2q^{4k+2})\frac{(aq^2;q)_{k-1}}{(q;q)_k} \tag{2.4}
$$

同时,由(2.2)得

$$
G(aq)=1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k a^{2k} q^{(5k^2+3k)/2}(1-aq^{2k+1})\frac{(aq^2;q)_{k-1}}{(q;q)_k} \tag{2.5}
$$

用(2.4)减去(2.5),得

$$
\begin{aligned}
&\frac{G(a)}{1-aq}-G(aq)\\
&=aq+\sum_{k\geq 1}(-1)^k a^{2k}q^{(5k^2+k)/2}((1-a^2q^{4k+2})-q^k(1-aq^{2k+1}))\frac{(aq^2;q)_{k-1}}{(q;q)_k}\\
&=aq+\sum_{k\geq 1}(-1)^k a^{2k}q^{(5k^2+k)/2}((1-q^k)+aq^{3k+1}(1-aq^{k+1}))\frac{(aq^2;q)_{k-1}}{(q;q)_k}\\
&=aq+\sum_{k\geq 1}(-1)^k a^{2k}(q^{(5k^2+k)/2}\frac{(aq^2;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}+aq^{(5k^2+7k+2)/2}\frac{(aq^2;q)_k}{(q;q)_k})\\
&=aq-a^2q^3+\sum_{k\geq 1}(-1)^k a^{2k+1}q^{(5k^2+7k+2)/2}(1-aq^{2k+2})\frac{(aq^2;q)_k}{(q;q)_k}\\
&=aq(1-aq^2)+aq(1-aq^2)\sum_{k\geq 1}(-1)^k a^{2k}q^{(5k^2+7k)/2}(1-aq^{2k+2})\frac{(aq^3;q)_{k-1}}{(q;q)_k}\\
&=aq(1-aq)G(aq^2) \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

从而

$$G(a)=(1-aq)G(aq)+aq(1-aq)(1-aq^2)G(aq^2). \qquad (2.7)$$

令

$$G(a)=(aq;q)_\infty F(a). \qquad (2.8)$$

得

$$F(a)=F(aq)+aqF(aq^2). \qquad (2.9)$$

从而我们得到一个关于F的函数方程.可设

$$F(a)=\sum_{n\geq 0}c_n a^n \qquad (2.10)$$

带入(2.9),比较a^{n+1}前面的系数得

$$c_{n+1}(1-q^{n+1})=c_nq^{2n+1},\forall n\geq 0 \qquad (2.11)$$

由$G(0)=1$得,$F(0)=1$,从而$c_0=1$.由(2.11)的递推式得

$$c_n=\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} \qquad (2.12)$$

从而

$$F(a)=\sum_{n\geq 0}\frac{a^nq^{n^2}}{(q;q)_n} \qquad (2.13)$$

最终得到

$$G(a)=(aq;q)_\infty\sum_{n\geq 0}\frac{a^nq^{n^2}}{(q;q)_n} \qquad (2.14)$$

此即为(2.1).至此便证明了Rogers-Ramanujan恒等式.

3.第三个证明——高斯积分的$q-$版本

这个证明将Hermite多项式和高斯积分联系起来，并将其推广到了q-级数的版本,最后通过用两种不同的方式计算q-版本的高斯积分证明了Rogers-Ramanujan 恒等式.

3.1 高斯积分与Hermite多项式

对$x, t \in \mathbb{R}$,有高斯积分

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt+t^2/2} e^{-x^2/2} dx = e^{t^2} \tag{3.1.1}$$

不难发现，上面的式子其实等价于

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+t)^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

这便是经典的高斯积分，它可以通过基本的微积分方法计算出来. 在这里我们用Hermite多项式给出它的一个证明.

我们首先给出Hermite多项式的定义和一些基本的性质.

定义（Hermite多项式) Hermite多项式 $H_n(x)$ 由以下递推式给出：

$$xH_n(x) = H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x)$$

其中$H_0(x) = 1, H_1(x) = x$.

•显示表达式

Hermite多项式满足如下显然表达式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

• 正交性

定义权函数$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, Hermite多项式之间有正交关系：

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) w(x) dx = n! \delta_{mn}$$

对任意$m, n \geq 0$.

• 生成函数

Hermite多项式的生成函数$G(x, t)$满足

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{xt-t^2/2}$$

现在我们用Hermite多项式重新表述$I(t)$. 注意到

$$e^{-xt+t^2/2} = G(x, t)^{-1} = G(ix; it) \tag{3.1.2}$$

我们有

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)^{-1} w(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(ix;it) w(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(ix) w(x) dx. \end{aligned}$$

为了利用正交性进行计算,我们需要将$H_n(ix)$表示成$H_0(x), H_1(x), H_2(x)$...的线性组合:

$$H_n(ix) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n! i^n}{k!(n-2k)!} H_{n-2k}(x) \tag{3.1.3}$$

从而$H_0(x)$的系数为0，当n是奇数；为$i^n \frac{n!}{(n/2)!}$,当n是偶数. 于是

$$\begin{aligned} I(t) &= \sum_{n \geq 0 \text{为偶数}} \frac{(it)^n}{n!} i^n \frac{n!}{(n/2)!} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{t^{2N}}{N!} \\ &= e^{t^2} \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

3.2 高斯积分与Hermite多项式的$q-$版本

定义($q-$Hermite多项式):

定义$q-$Hermite多项式$H_n(x|q)$ 为满足以下递推式的多项式:

$$2xH_n(x|q) = H_{n+1}(x|q) + (1-q^n)H_{n-1}(x|q)$$

对任意$n \geq 1$,且$H_{-1}(x|q) = 0, H_0(x|q) = 1$.

- 正交性

定义权函数$w_q(x)$满足

$$w_q(cos\theta) = \frac{(q;q)_\infty}{2\pi}(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)$$

进而对任意$m, n \geq 0$,有：

$$\int_0^\pi H_m(cos\theta|q) H_n(cos\theta|q) w_q(cos\theta) d\theta = (q;q)_n \delta_{mn}$$

- 生成函数

$q-$Hermite多项式的生成函数$G_q(x,t)$满足:

$$G_q(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(cos\theta|q) \frac{t^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(te^{i\theta}, te^{-i\theta}; q)_\infty}$$

$H_n(x|q)$实际上是$H_n(x)$的“$q-$推广形式”：

$$\lim_{q\to 1^-}\frac{H_n(x\sqrt{1-q}/2|q)}{(1-q)^{n/2}}=H_n(x)$$
$$\lim_{q\to 1^-}w_q(x\sqrt{1-q}/2)=w(x),$$
$$\lim_{q\to 1^-}G_q(x\sqrt{1-q}/2,t\sqrt{1-q})=G(x,t)..$$

定义$q-$高斯积分为

$$\begin{aligned}I_q(t)=&\frac{(q;q)_\infty}{2\pi}\int_0^\pi(te^{i\theta},te^{-i\theta},e^{2i\theta},e^{-2i\theta};q)_\infty d\theta\\ =&\int_0^\pi G_q(cos\theta,t)^{-1}w_q(cos\theta)d\theta.\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

为了仿照在3.1中的计算方法,我们需要仿照$G(x,t)^{-1}=G(ix,it)$找到$G_q(x,t)$满足的一些性质,实际上我们有

$$\begin{aligned}G_q(x,t)^{-1}&=G_{1/q}(x,t/q)=(te^{i\theta},te^{-i\theta};q)_\infty\\ &=\sum_{n=0}^\infty H_n(x|q^{-1})\frac{q^{\binom{n}{2}}(-t)^n}{(q;q)_n}\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

由于

$$\lim_{q\to 1^-}\frac{H_n(x\sqrt{1-q}/2|q^{-1})}{(1-q)^{n/2}}\frac{(1-q)^n(-t)^n}{(q;q)_n}=H_n(ix)\frac{(ix)^n}{n!}$$

故(3.2.2)是$G(x,t)^{-1}=G(ix,it)$ 的$q-$推广.
从而我们最终计算出$I_q(t)$：

$$\begin{aligned}I_q(t)&=\int_0^\pi G_{1/q}(cos\theta,t/q)w_q(cos\theta)d\theta\\ &=\sum_{n=0}^\infty\frac{q^{\binom{n}{2}}(-t)^n}{(q;q)_n}\int_0^\infty H_n(cos\theta|q^{-1})w_q(cos\theta)d\theta.\end{aligned}$$

为了在计算中使用正交性,将$H_(x|q^{-1})$ 表示为

$$H_n(x|q^{-1})=\sum_{k=0}^{n/2}\frac{q^{k(k-n)(q;q)_n}}{(q;q)_k(q;q)_{n-2k}}H_{n-2k}(x|q).\tag{3.2.3}$$

当n是奇数时,常数项为0；当n是偶数时，常数项为$q^{-n^2/4}\frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n/2}}$. 因此

$$I_q(t)=\sum_{N=0}^\infty\frac{q^{N^2-N}t^{2N}}{(q;q)_N}\tag{3.2.4}$$

3.3 Rogers-Ramanujan恒等式

我们用另一种方法计算$I_q(\sqrt{q})$ 和$I_q(q)$得到Roger-Ramanujan恒等式.

这次,我们不用3.2节的$q-$正交性,而是利用经典的

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}e^{-im\theta}d\theta=\delta_{mn}$$

注意到$(te^{i\theta},te^{-i\theta},e^{2i\theta},e^{-2i\theta};q)$是关于$\theta$的偶函数,故

$$\begin{aligned}I_q(t)=&\frac{(q;q)_\infty}{2\pi}\int_0^{\pi}(te^{i\theta},te^{-i\theta},e^{2i\theta},e^{-2i\theta};q)_\infty d\theta\\ =&\frac{(q;q)_\infty}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(te^{i\theta},te^{-i\theta},e^{2i\theta},e^{-2i\theta};q)_\infty d\theta\\ =&\frac{(q;q)_\infty}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(te^{i\theta},te^{-i\theta};q)_\infty(e^{2i\theta},e^{-2i\theta};q)_\infty d\theta\end{aligned}$$

首先,由Jacobi Triple Product Identity

$$(q;q,q/z;q)_\infty=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{(k^2-k)/2}z^k.$$

得

$$\begin{aligned}(q,\sqrt{q}e^{i\theta},\sqrt{q}e^{-i\theta};q)_\infty=&\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k^2/2}e^{-ik\theta},\\ (q,e^{2i\theta},e^{-2i\theta};q)_\infty=&(1-e^{2i\theta})\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{(j^2+j)/2}e^{2ij\theta}.\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}I_q(\sqrt{q})=&\frac{1}{4\pi(q;q)_\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(q,\sqrt{q}e^{i\theta},\sqrt{q}e^{-i\theta};q)_\infty(q,e^{2i\theta},e^{-2i\theta};q)_\infty d\theta\\ =&\frac{1}{4\pi(q;q)_\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=\infty}^{\infty}q^{k^2/2}(-1)^k q^{(j^2+j)/2}(-1)^j\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ik\theta}e^{2ij\theta}(1-e^{2i\theta})d\theta\\ =&\frac{1}{2(q;q)_\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(q^{2j^2}q^{(j^2+j)/2}-q^{2(j+1)^2}q^{(j^2+j)/2})(-1)^j\\ =&\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{(5j^2+j)/2}(-1)^j.\end{aligned}$$

又由(3.2.4),有

$$\begin{aligned}I_q(\sqrt{q})=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2-n}\sqrt{q}^{2n}}{(q;q)_n}\\ =&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{(5j^2+j)/2}(-1)^j.$$

此即Rogers-Ramanujan的第一个恒等式. 同理计算$I_q(q)$,可以得到第二个恒等式.

参考文献

[1] D.M.Bressoud, An Easy Proof of the Rogers-Ramanujan Identities, *Journal of Number Theory*, **16**, 1983, 235-241.

[2] Michael D.Hirschhorn, *The Power of q*, Springer-Verlag, Syndey, 1966.

[3] D.Stanton, Gaussian Integrals and the Rogers-Ramanujan Identities, *Developments in Mathematics*, 255–65. Boston, MA: Springer US, 2001

[4] Pawel J.Szablowski, On the q-Hermite Polynomials and Their Relationship with Some Other Families of Orthogonal Polynomials, arXiv:1101.2875v4[math.CO] 16Jun 2013.