

Million-Queens

计科1602 吴嘉梁 20167801

一、暴力搜索和随机重复爬山

直观的暴力搜索优化到极致也只能处理几十皇后的问题，时间花费会随着皇后数量的变大成指数级增长，在如此大的数据量下是不可取的。但是我们可以知道， N 皇后问题的可行解数量是很多的（尤其当 N 很大时），可以参见[OEIS-A000170](#)。所以我考虑使用随机重复爬山法，当 N 足够大时可以保证在一次搜索中就找到答案。

二、代价函数和结构

首先我们定义 $d_i = \text{permutaton}(N)$ ，表示每一行的皇后位置，这样可以保证皇后之间的冲突只发生在对角线上。对于 $\text{permutation}(N)$ ，可以在 $O(N)$ 时间里生成均匀地随机排列。

```
1  for(int i=1; i<=N; i++)
2      {
3          swap(d[i],d[random(1,N)]);
4      }
```

在 $N * N$ 的棋盘上，共有 $2 * N - 1$ 条正向对角线， $2 * N - 1$ 条负向对角线，一条正向对角线上 $i - d_i$ 是相同的，一条负向对角线上 $i + d_i$ 是相同的。所以我们可以以此统计任意一点在对角线上的冲突数，我们定义一条对角线上的冲突数等于对角线上的皇后数减一。当全局冲突数为0时，我们就找到了一个合适的解。

在这种定义下我们冲突数的最大值为 $N - 1$ ，每次循环遍历棋盘上的每一点，尝试交换后是否会使冲突数减少，这样执行一次算法的时间复杂度就是 $O(N^3)$ 。由于当 N 很大时，这个过程只会执行一次，所以算法的总体复杂度就是 $O(N^3)$ 。

三、算法优化

上述算法跑 $1e5$ 左右的数据就有点吃力了，如果在局部搜索中加入随机，能在 $300s$ 左右的时间里跑出 $1e6$ 的数据，比较接近要求但是还有一小段距离。

这个时候我在Google Scholar上找到了一篇大神Rok Sosic 的论文，他在一篇1994年的论文中给出了一种在 $55s$ 内求解 $3e6$ 规模 N 皇后的算法，后面就是开始研究他的论文。

效用函数的定义我和他大致相同，但是他在生成序列和最后的搜索中有两项非常神奇的优化。首先是在初始化排列时，就尽量保证皇后之间没有冲突。通过随机，在棋盘左上角构造一个没有冲突的小正方形。可以证明在 $3.08N$ 次随机尝试后就能构造一个很大的矩形，这样需要处理的皇后数就只在100以下。

下图引自论文。

TABLE II
THE NUMBER OF QUEENS, PLACED DURING
THE INITIAL SEARCH, USING $3.08n$ STEPS
(10 runs)

Number of queens n	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
Average	91	979	9969	99 977	999 975
Minimum	84	959	9919	99 964	999 946
Maximum	97	990	9990	99 988	999 987

其次就是对于有冲突的皇后的处理，对于每个有冲突的皇后 i ，我们取 $j = random(1, N)$ ，如果交换 i, j 后两点都没有对角线上的冲突，则进行交换，可以证明每个皇后需要进行72次左右的随机尝试来找到可交换的位置。

以上两点优化的数学证明详见论文-----[Efficient local search with conflict minimization: A case study of the n-queens problem](#)。

但是运行程序后会发现，对于 N 较小的情况($N < 200$)，这种方式并不是很好，所以对于这种情况，我们对有冲突的点遍历所有可能的交换情况，由于 N 很小，所以时间花费并不大。

我编写的程序运行结果如下。

N	十次平均运行时间(S)
1e3	0.00080
1e4	0.00260
1e5	0.02710
1e6	0.48770
1e7	7.98760
5e7	48.59330

四、引用和讨论

主要参考了一下几篇论文。

[1]. R. Sosič J. Gu "A polynomial time algorithm for the n-queens problem"
SIGART Bull. vol. 1 no. 3 pp. 7-11 Oct. 1990.

[2] R. Sosič J. Gu "3000000 queens in less than a minute" SIGART Bull. vol. 2
no. 2 pp. 22-24 Apr. 1991.

[3]R. Sosič, J. Gu, " Efficient local search with conflict minimization: A casestudy of the n -queen problem ", *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.*, vol. 6, no. 5, pp. 661-668, 1994.

在写程序的过程中，我和1603班的金轶凡同学（20167846）进行了交流，分享了查到的论文并讨论了有关随机策略的问题，修正了一些随机函数上的错误。