

\*

Integrazione

## Integrali doppi

Gli Integrali doppi su un certo insieme  $\mathcal{D}$  (misurabile) permettono di trovare

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \text{Volume racchiuso tra la funzione integranda } (f(x, y)) \text{ e il piano } xOy$$

Nel caso in cui si abbia  $f(x, y) = 1$  allora

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \text{Area dell'insieme } \mathcal{D}$$

I Procedimenti che permettono di calcolare gli integrali doppi sono due

### Per orizzontali

1. Disegno approssimativamente il dominio d'integrazione ragionando prima su
2. Svolgo prima l'integrale della funzione in  $dx$  immaginando che la variabile  $y$  sia una costante
3. Poi integro il risultato della prima integrazione in  $dy$ . Da questo passaggio è vincolante ottenere un valore che non dipenda dalle due variabili  $dx dy$

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) = \int_{y_A}^{y_B} \left( \int_{x_A}^{x_B} f(x, y) dx \right) dy$$

### Per verticali

1. Disegno approssimativamente il dominio d'integrazione ragionando prima su
2. Svolgo prima l'integrale della funzione in  $dy$  immaginando che la variabile  $x$  sia una costante
3. Poi integro il risultato della prima integrazione in  $dx$ . Da questo passaggio è vincolante ottenere un valore che non dipenda dalle due variabili  $dx dy$

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) = \int_{x_A}^{x_B} \left( \int_{y_A}^{y_B} f(x, y) dy \right) dx$$

## Integrali tripli

Nel caso di integrali tripli, l'integrazione permette, come nel caso degli integrali doppi, di ricavare un volume, tuttavia in questo caso l'integrale rappresenterà un volume non più in  $\mathbb{R}^3$ , bensì in  $\mathbb{R}^4$ . Questo tipo di integrali può essere svolto in due modi

### Per fili

Per immaginarsi l'integrazione per strati è utile pensare di trovare prima il volume di uno spaghetti verticale infinitamente sottile che è lungo esattamente quanto il contenitore dentro al quale si trova, ovvero l'insieme  $\mathcal{P}$  e poi di sommare tutti gli spaghetti nel contenitore per trovare il volume del contenitore.

1. Integro la funzione in  $dz$  tra gli estremi dell'insieme  $\mathbb{P}$
2. Integro i fili sulla superficie di base  $\mathcal{B}$  dell'insieme dell'insieme di integrazione.

$$\iiint_{\mathcal{P}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{B}} \left( \int_{z_A}^{z_B} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

### Per strati

In questo procedimento ci si deve immaginare di trovare prima l'area di uno strato generico all'interno dell'insieme di integrazione e poi immagino di sommare tutti gli strati in modo di ottenere tutto il volume dell'insieme  $\mathbb{P}$

1. Per prima cosa è necessario trovare un'altezza massima e una minima in cui sia possibile trovare una superficie orizzontale.
2. Dopo è necessario calcolare l'area di un generico strato
3. In fine è sufficiente integrare tutti gli strati tra l'altezza massima e la minima.

$$\iiint_{\mathcal{P}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z_{min}}^{z_{max}} \left( \iint_{\mathcal{B}} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

### Applicazioni alla fisica

Definendo la densità di massa  $\mu(x, y, z)$  di  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ , allora si possono ricavare alcune grandezze fisiche.

#### Massa Totale

$$\mathcal{M}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \mu(x, y, z) dx dy dz$$

#### Baricentro

$$x_G = \frac{\iiint_{\mathcal{D}} x \mu(x, y, z) dx dy dz}{\mathcal{M}(\mathcal{D})}$$

$$y_G = \frac{\iiint_{\mathcal{D}} y \mu(x, y, z) dx dy dz}{\mathcal{M}(\mathcal{D})}$$

$$z_G = \frac{\iiint_{\mathcal{D}} z \mu(x, y, z) dx dy dz}{\mathcal{M}(\mathcal{D})}$$

### Momento d'inerzia

$$\iiint_{\mathcal{D}} r^2(x, y, z) \mu(x, y, z) dx dy dz$$

### Cambiamenti di coordinate

#### Polari piane

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases}$$

**Casi particolarmente favorevoli** Cerchio, corona circolare, "fetta di torta", "fetta di ciambella"

#### Polari sferiche

$$\begin{cases} x = \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = \cos(\varphi) \end{cases}$$

Lo jacobiano di questa trasformazione è  $\mathcal{JT} = \rho \sin(\varphi)$

**Casi particolarmente favorevoli**

#### Cilindriche

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = t \end{cases}$$

Lo jacobiano di questa trasformazione è  $\mathcal{JT} = \rho$

**Casi particolarmente favorevoli**

### Integrali curvilinei

Data una curva e una funzione scalare posso:

1. Parametrizzo la curva  $\gamma(t)$  sulla quale voglio calcolare l'integrale
2. Calcolo la derivata  $\gamma'(t)$  della curva parametrizzata
3. Calcolo la funzione composta  $f(\gamma(t))$
4. Determino gli estremi di integrazione
5. Calcolo l'integrale secondo la formula:

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

## Integrali di linea

Data una curva e un campo vettoriale posso:

1. Parametrizzo la curva  $\gamma(t)$  sulla quale voglio calcolare l'integrale.
2. Calcolo la derivata della curva parametrizzata  $\gamma'(t)$
3. Calcolo il versore dato da  $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$
4. Calcolo la funzione composta  $\mathbf{F}(\gamma(t))$
5. Calcolo l'integrale dato dalla relazione:

$$\int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} dt$$

## Integrali superficiali

1. Parametrizzo la superficie sulla quale voglio integrare
2. Determino la normale alla superficie  $\|\mathbf{N}(u, v)\|$
3. Calcolo la composta  $f(\sigma(u, v))$
4. Calcolo l'integrale secondo la relazione:

$$\int_{\sigma} f dS = \int_K f(\sigma(u, v)) \|\mathbf{N}(u, v)\| du dv$$

## Integrale di flusso

1. Parametrizzo la superficie  $\sigma(u, v)$  sulla quale devo risolvere l'integrale
2. Determino il vettore normale alla superficie  $\mathbf{N}(u, v)$  e calcolo anche il versore  $\mathbf{n}(u, v)$
3. Calcolo la norma del vettore normale
4. Calcolo la composta  $\mathbf{F}(\sigma(u, v))$

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot dS = \int_K \mathbf{F}(\sigma(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) du dv$$

## Teoremi relativi all'integrazione

### Guldino 1

Il volume di un solido di rotazione D è uguale all'area della sezione meridiana S moltiplicata per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di S attorno all'asse di rotazione.

### Condizioni

- Solido di rotazione

Nel caso di una rotazione intorno all'asse  $z$

### Teorema

$$Volume(D) = \iiint_{\mathcal{P}} dx dy dz = 2\pi y_G A(S)$$

### Guldino 2

La superficie di un solido di rotazione è uguale alla lunghezza dell'arco generatore moltiplicato per la circonferenza che descrive il baricentro intorno all'asse di rotazione.

### Condizioni

- La superficie  $\Sigma$  deve essere data da una rotazione dell'arco  $\gamma(t)$ , appartenente ad un piano delimitato da due assi cartesiani, intorno ad uno di questi due.

Nel caso di una rotazione di un arco  $\gamma(t) \in yOz$  intorno all'asse  $z$  ottengo

### Teorema

$$Area(\Sigma) = 2\pi y_G l(\gamma)$$

### Green

#### Condizioni

- Sia  $\mathbf{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$  un campo vettoriale di classe  $C^1(\Omega)$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
- Sia  $A$  un aperto limitato contenuto in  $\Omega$
- La frontiera di  $A$  è il sostegno di un arco chiuso, semplice e regolare a tratti percorso in verso antiorario.

### Teorema

$$\int_{\delta A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \iint_A \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

### Gauss

#### Condizioni

- $\mathbf{F}$  è un campo vettoriale definito in un aperto  $\Omega \in \mathbb{R}^3$
- Sia  $\Omega_0$  un aperto limitato la cui frontiera è  $\delta\Omega_0$

### Teorema

$$\int_{\delta\Omega_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega_0} \text{div}(\mathbf{F}) dx dy dz$$

## Stokes

### Condizioni

- $\mathbf{F}$  patto costituito dal sostegno po vettoriale definito in un  $\Omega \in \mathbb{R}^3$
- Sia  $K$  il compatto costituito dal sostegno di un arco chiuso, semplice e regolare a tratti  $\gamma$  e dal suo interno.
- $\gamma$  è orientata in modo da lasciare alla sinistra il suo interno
- Sia  $\sigma_0 = \sigma(K)$  la calotta relativa a  $K$  e  $\delta\sigma_0$  l'arco detto bordo della calotta  $\sigma_0$  il cui verso di percorrenza è dato dalla regola della mano destra rispetto all normale alla calotta

### Teorema

$$\int_{\delta\sigma_0} \mathbf{F}(P) \cdot d\mathbf{P} = \int_{\sigma_0} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS$$

## Campi conservativi

Un campo vettoriale  $\mathbf{F}$ , definito in  $\Omega$ , si dice conservativo se esiste una funzione scalare  $\varphi$  tale che per ogni  $x \in \Omega$  si abbia

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$$

In cui  $\varphi(\mathbf{x})$  è detta funzione potenziale

### Condizioni

Affinché un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  sia conservativo e che ammetta quindi un potenziale, è necessario che:

- Se  $\gamma$  è un arco chiuso e regolare a tratti, allora  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = 0$
- il  $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$  e che  $\mathbf{F}$  sia definito su di un insieme *semplicemente connesso*

Se un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  è conservativo, allora:

- Se  $\gamma$  è un arco chiuso e regolare a tratti, allora  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = 0$
- $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$

## Ricerca del potenziale