

Procedimenti risolutivi per esercizi di Analisi II

16 febbraio 2018

Integrali doppi

Gli Integrali doppi su un certo insieme \mathcal{D} (misurabile) permettono di trovare

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \text{Volume racchiuso tra la funzione integranda } f(x, y) \text{ e il piano } xOy$$

Nel caso in cui si abbia $f(x, y) = 1$ allora

$$\iint_{\mathcal{D}} dx dy = \text{Area dell'insieme } \mathcal{D}$$

I procedimenti che permettono di calcolare gli integrali doppi sono due

Per orizzontali

1. Disegno approssimativamente il dominio d'integrazione ragionando prima su
2. Svolgo prima l'integrale della funzione in dx immaginando che la variabile y sia una costante
3. Poi integro il risultato della prima integrazione in dy . In questo passaggio è vincolante ottenere un valore che non dipenda dalle due variabili $dx dy$.

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) = \int_{y_A}^{y_B} \left(\int_{x_A}^{x_B} f(x, y) dx \right) dy$$

Per verticali

1. Disegno approssimativamente il dominio d'integrazione ragionando prima su
2. Svolgo prima l'integrale della funzione in dy immaginando che la variabile x sia una costante
3. Poi integro il risultato della prima integrazione in dx . In questo passaggio è vincolante ottenere un valore che non dipenda dalle due variabili $dx dy$.

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) = \int_{x_A}^{x_B} \left(\int_{y_A}^{y_B} f(x, y) dy \right) dx$$

Integrali tripli

Nel caso di integrali tripli, come per i doppi, l'integrazione permette di ricavare un "volume", tuttavia in questo caso l'integrale rappresenterà un "volume" non più in \mathbb{R}^3 , bensì in \mathbb{R}^4 . Dato che non è facile immaginarsi un volume in \mathbb{R}^4 è più congeniale pensare a $f(x, y, z)$ come una funzione che descrive l'andamento della massa nel solido e di voler calcolare la massa totale di quest'ultimo (cfr. *Applicazioni alla fisica*). Questo tipo di integrali può essere svolto in due modi.

Per fili

Per immaginarsi l'integrazione per fili è utile pensare di trovare prima il volume di uno spaghetti verticale infinitamente sottile che è lungo esattamente quanto il contenitore dentro al quale si trova, ovvero l'insieme \mathcal{P} e poi di sommare tutti gli spaghetti nel contenitore per trovare il volume del contenitore.

1. Integro la funzione in dz tra gli estremi dell'insieme \mathbb{P}
2. Integro i fili sulla superficie di base \mathcal{B} dell'insieme di integrazione.

$$\iiint_{\mathcal{P}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{B}} \left(\int_{z_A}^{z_B} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Per strati

In questo procedimento ci si deve immaginare di trovare prima l'area di uno strato generico all'interno dell'insieme di integrazione e poi immagino di sommare tutti gli strati in modo di ottenere tutto il volume dell'insieme \mathbb{P}

1. Per prima cosa è necessario trovare gli estremi massimo e minimo per cui si può trovare uno strato
2. Calcolare l'area di un generico strato
3. In fine è sufficiente integrare tutti gli strati tra l'altezza massima e la minima.

$$\iiint_{\mathcal{P}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z_{min}}^{z_{max}} \left(\iint_{\mathcal{B}} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

Applicazioni alla fisica

Definendo la densità di massa $\mu(x, y, z)$ di $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$, allora si possono ricavare alcune grandezze fisiche.

Massa Totale

$$M(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \mu(x, y, z) dx dy dz$$

Baricentro

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{\iiint_{\mathcal{D}} x \mu(x, y, z) dx dy dz}{M(\mathcal{D})} \\ y_G &= \frac{\iiint_{\mathcal{D}} y \mu(x, y, z) dx dy dz}{M(\mathcal{D})} \\ z_G &= \frac{\iiint_{\mathcal{D}} z \mu(x, y, z) dx dy dz}{M(\mathcal{D})} \end{aligned}$$

Momento d'inerzia

$$\iiint_{\mathcal{D}} r^2(x, y, z) \mu(x, y, z) dx dy dz$$

Cambiamenti di coordinate

Polari piane

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Lo jacobiano di questa trasformazione è $JT = \rho$

Casi particolarmente favorevoli Cerchio, corona circolare, “fetta di torta”, “fetta di ciambella”

Polari sferiche

$$T : \begin{cases} x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$

Lo jacobiano di questa trasformazione è $\mathcal{J}T = \rho \sin(\varphi)$

Casi particolarmente favorevoli Sfera, “spicchio”

Cilindriche

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = t \end{cases}$$

Lo jacobiano di questa trasformazione è $\mathcal{J}T = \rho$

Casi particolarmente favorevoli

Integrali curvilinei

Data una curva e una funzione scalare posso:

1. Parametrizzo la curva $\gamma(t)$ sulla quale voglio calcolare l'integrale
2. Calcolo la derivata $\gamma'(t)$ della curva parametrizzata
3. Calcolo la normale $\|\gamma'(t)\|$
4. Calcolo la funzione composta $f(\gamma(t))$
5. Determino gli estremi di integrazione
6. Calcolo l'integrale secondo la formula:

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Integrali di linea

Data una curva e un campo vettoriale posso:

1. Parametrizzo la curva $\gamma(t)$ sulla quale voglio calcolare l'integrale.
2. Calcolo la derivata della curva parametrizzata $\gamma'(t)$
3. Calcolo la funzione composta $\mathbf{F}(\gamma(t))$
4. Calcolo l'integrale dato dalla relazione:

$$\int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Integrali superficiali

1. Parametrizzo la superficie Σ sulla quale voglio integrare
2. Determino la normale alla superficie $\|\mathbf{N}(u, v)\|$ sapendo che

$$\mathbf{N}(u, v) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \Sigma_i}{\partial u} & \frac{\partial \Sigma_j}{\partial u} & \frac{\partial \Sigma_k}{\partial u} \\ \frac{\partial \Sigma_i}{\partial v} & \frac{\partial \Sigma_j}{\partial v} & \frac{\partial \Sigma_k}{\partial v} \end{pmatrix}$$

3. Calcola la composta $f(\sigma(u, v))$
4. Calcolo l'integrale secondo la relazione:

$$\int_{\sigma} f dS = \int_K f(\sigma(u, v)) \|\mathbf{N}(u, v)\| du dv$$

Integrale di flusso

1. Parametrizzo la superficie $\sigma(u, v)$ sulla quale devo risolvere l'integrale
2. Determino il vettore normale alla superficie $\mathbf{N}(u, v)$ e calcolo anche il versore $\mathbf{n}(u, v)$
3. Calcolo la norma del vettore normale
4. Calcolo la composta $\mathbf{F}(\sigma(u, v))$

$$\int_{\sigma} \mathbf{F}(\vec{x}) \cdot d\mathbf{S} = \int_K \mathbf{F}(\sigma(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) du dv$$

Teoremi relativi all'integrazione

Guldino 1

Il volume di un solido di rotazione D è uguale all'area della sezione meridiana S moltiplicata per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di S attorno all'asse di rotazione.

Condizioni

- Solido di rotazione

Nel caso di una rotazione intorno all'asse z

Teorema

$$Volume(D) = \iiint_{\mathcal{P}} dx dy dz = 2\pi y_G A(S)$$

Guldino 2

La superficie di un solido di rotazione uguale alla lunghezza dell'arco generatore moltiplicato per la circonferenza che descrive il baricentro intorno all'asse di rotazione.

Condizioni

- La superficie Σ deve essere data da una rotazione dell'arco $\gamma(t)$, appartenente ad un piano delimitato da due assi cartesiani, intorno ad uno di questi due.

Nel caso di una rotazione di un arco $\gamma(t) \in yOz$ intorno all'asse z ottengo

Teorema

$$Area(\Sigma) = 2\pi y_G l(\gamma)$$

Green

Condizioni

- Sia $\mathbf{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ un campo vettoriale di classe $C^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
- Sia A un aperto limitato contenuto in Ω
- La frontiera di A è il sostegno di un arco chiuso, semplice e regolare a tratti percorso in verso antiorario.

Teorema

$$\int_{\delta A} \mathbf{F}(\vec{x}) \cdot d\mathbf{P} = \iint_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Gauss

Condizioni

- $\mathbf{F}(\vec{x})$ è un campo vettoriale definito in un aperto $\Omega \in \mathbb{R}^3$
- Sia Ω_0 un aperto limitato la cui frontiera è $\delta\Omega_0$

Teorema

$$\int_{\delta\Omega_0} \mathbf{F}(\vec{x}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(\mathbf{F}(\vec{x})) dx dy dz$$

Stokes

Condizioni

- Dato $\mathbf{F}(\vec{x})$ definito in un $\Omega \in \mathbb{R}^3$
- Sia K il compatto costituito dal sostegno di un arco chiuso, semplice e regolare a tratti γ e dal suo interno.
- γ è orientata in modo da lasciare alla sinistra il suo interno
- Sia $\sigma_0 = \sigma(K)$ la calotta relativa a K e $\delta\sigma_0$ l'arco detto bordo della calotta σ_0 il cui verso di percorrenza è dato dalla regola della mano destra rispetto alla normale alla calotta

Teorema

$$\int_{\delta\sigma_0} \mathbf{F}(\vec{x})(P) \cdot d\mathbf{P} = \int_{\sigma_0} \operatorname{rot}(\mathbf{F}(\vec{x})) \cdot dS$$

Campi conservativi

Un campo vettoriale $\mathbf{F}(\vec{x})$, definito in Ω , si dice conservativo se esiste una funzione scalare φ tale che per ogni $x \in \Omega$ si abbia

$$\mathbf{F}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$$

In cui $\varphi(\mathbf{x})$ è detta funzione potenziale

Condizioni

Affinché un campo vettoriale $\mathbf{F}(\vec{x})$ sia conservativo è necessario che:

- $\mathbf{F}(\vec{x})$ deve ammettere un potenziale φ tale che $\mathbf{F}(\vec{x}) = \nabla\varphi$
- Se γ è un arco chiuso e regolare a tratti, allora $\oint_{\gamma} \mathbf{F}(\vec{x}) \cdot d\mathbf{P} = 0$
- Il campo $\mathbf{F}(\vec{x})$ sia definito su di un insieme Ω **semplicemente connesso**, (nel quale una qualunque $\gamma(t)$ chiusa racchiuda un sottoinsieme totalmente contenuto in Ω e che $\operatorname{rot}(\mathbf{F}(\vec{x})) = \mathbf{0}$)

Se un campo vettoriale $\mathbf{F}(\vec{x})$ è conservativo, allora:

- Dato γ un arco chiuso e regolare a tratti, allora $\int_{\gamma} \mathbf{F}(\vec{x}) \cdot d\mathbf{P} = 0$
- $\operatorname{rot}(\mathbf{F}(\vec{x})) = \mathbf{0}$

Ricerca del potenziale

Per trovare il potenziale di un campo conservativo si può ragionare in più modi:

Metodo delle derivate parziali

Dato il campo $\mathbf{F}(f_1, f_2, f_3)$ cerco la funzione $\varphi(x, y, z)$ tale per cui $\mathbf{F}(\vec{x}) = \nabla\varphi(x, y, z)$

- Calcolo $\varphi = \int f_1 dx = \varphi_1 + h(y, z)$
- Calcolo $h(y, z) = \int (f_2 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}) dy$
- Ricavo $\varphi_2 = \varphi_1 + h(x, y)$
- Ottengo la funzione potenziale dalla relazione $\varphi(x, y, z) = \int$

Serie numeriche

Serie a termini positivi

Criterio del confronto

Per poter dimostrare che una serie converge utilizzando il criterio del confronto è necessario trovare una serie (più facile) maggiorante della serie di partenza. Infatti il criterio permette di dimostrare la convergenza della serie di partenza nel caso in cui la serie maggiorante risulti essere convergente.

Criterio del confronto asintotico

Questo criterio permette di determinare la convergenza oppure divergenza di una serie nel caso in cui si trovi una serie con stesso ordine di grandezza della serie di partenza. In questo caso è intuitivo il fatto che entrambe le serie in analisi si comportino allo stesso modo.

Criterio del rapporto

Per poter determinare una convergenza oppure divergenza di una serie mediante questo criterio è necessario risolvere il limite seguente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

Nel caso in cui $L < 1$ la serie converge, mentre nel caso in cui $L > 1$ la serie diverge.

Criterio della radice

Questo criterio è molto simile al criterio del rapporto. Infatti è necessario anche in questo caso risolvere un limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Nel caso in cui $L < 1$ la serie converge, mentre nel caso in cui $L > 1$ la serie diverge.

Criterio di McLaurin

Data una serie necessariamente positiva, continua e decrescente. Ponendo $f(n) = a_n$ allora si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e l'integrale $\int_1^{\infty} f(x)dx$ hanno lo stesso comportamento.

Serie a termini di segno variabile

Teorema della convergenza assoluta

Se una serie è assolutamente convergente ovvero si ha la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è anche convergente

Serie di potenze

Una serie di potenze centrata in x_0 è definita come

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Si chiama raggio di convergenza l'estremo superiore dell'insieme di tutti i numeri reali per i quali la serie di potenze converge. Detto R il raggio di convergenza si dirà che la serie converge per $(-R, R)$.

Per il calcolo del raggio di convergenza si possono usare i due criteri citati sopra (**rapporto** e **convergenza**) con l'accortezza, trattandosi di criteri per serie a termini positivi di prendere il modulo dell'argomento del limite. I due criteri diventano:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

Applicando un criterio dunque si trova un valore L , il raggio di convergenza non è nient'altro che il reciproco di quel valore:

$$R = \frac{1}{L}$$

N.B. Nulla si può dire su come si comporta la serie in $+R$ e $-R$. L'unico modo per scoprirlo è andare a studiare le serie ponendo una volta $x = R$, l'altra $x = -R$.

Serie di Fourier

Data una funzione $f(x)$ periodica di periodo 2π e integrabile in $[-\pi, \pi]$ si definisce la serie di Fourier di f la serie;

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Se $f(x)$ è **pari** allora $b_n = 0$, se $f(x)$ è **dispari** allora $a_0 = a_n = 0$.

Identità di Parseval

Per una f periodica di periodo 2π integrabile su $[-\pi, \pi]$ allora vale

$$\|f\|_2^2 = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$