Integrazione

Integrali doppi

Gli Integrali doppi su un certo insieme $\mathcal{D}$ (misurabile) permettono di trovare

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy \; = \; \text{Volume racchiuso tra la funzione integranda } (f(x,y)) \text{ e il piano } xOy$$

Nel caso in cui si abbia $f(x,y) = 1$ allora

$$\iint_{\mathcal{D}} dxdy \; = \; \text{Area dell'insieme } \mathcal{D}$$

I procedimenti che permettono di calcolare gli integrali doppi sono due

Per orizzontali

1. Disegno approssimativamente il dominio d'integrazione ragionando prima su;
2. Svolgo prima l'integrale della funzione in dx immaginando che la variabile y sia una costante;
3. Poi integro il risultato della prima integrazione in dy. In questo passaggio è vincolante ottenere un valore che non dipenda dalle due variabili dx dy.

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y) = \int_{y_A}^{y_B} \Big(\int_{x_A}^{x_B} f(x,y)dx \Big) dy$$

Per verticali

1. Disegno approssimativamente il dominio d'integrazione ragionando prima su;
2. Svolgo prima l'integrale della funzione in dy immaginando che la variabile x sia una costante;
3. Poi integro il risultato della prima integrazione in dx. In questo passaggio è vincolante ottenere un valore che non dipenda dalle due variabili dx dy.

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y) = \int_{x_A}^{x_B} \Big(\int_{y_A}^{y_B} f(x,y)dy \Big) dx$$

Integrali tripli

Nel caso di integrali tripli, come per i doppi, l'integrazione permette di ricavare un "volume", tuttavia in questo caso l'integrale rappresenterà un "volume" non più in $\mathbb{R}^3$, bensì in $\mathbb{R}^4$. Dato che non è facile immaginarsi un volume in $\mathbb{R}^4$ è più congeniale pensare a $f(x,y,z)$ come una funzione che descrive l'andamento della massa nel solido e di voler calcolare la massa totale di quest'ultimo (cfr. *Applicazioni alla fisica*). Questo tipo di integrali può essere svolto in due modi.

Per fili

Per immaginarsi l'integrazione per fili è utile pensare di trovare prima il volume di uno spaghetto verticale infinitamente sottile che è lungo esattamente quanto il contenitore dentro al quale si trova, ovvero l'insieme $\mathcal{P}$ e poi di sommare tutti gli spaghetti nel contenitore per trovare il volume del contenitore.

1. Integro la funzione in dz tra gli estremi dell'insieme $\mathbb{P}$;
2. Integro i fili sulla superficie di base $\mathcal{B}$ dell'insieme di integrazione.

$$\iiint_{\mathcal{P}} f(x,y,z)dxdydz \; = \; \iint_{\mathcal{B}} \Big(\int_{z_A}^{z_B} f(x,y,z) \Big) dxdy$$

Per strati

In questo procedimento ci si deve immaginare di trovare prima l'area di uno strato generico all'interno dell'insieme di integrazione e poi immagino di sommare tutti gli strati in modo di ottenere tutto il volume dell'insieme $\mathbb{P}$

1. Per prima cosa è necessario trovare gli estremi massimo e minimo per cui si può trovare uno strato;
2. Calcolare l'area di un generico strato;
3. In fine è sufficiente integrare tutti gli strati tra l'altezza massima e la minima.

$$\iiint_{\mathcal{P}} f(x,y,z)dxdydz \;=\; \int_{z_{min}}^{z_{max}} \Big(\iint_{\mathcal{B}} f(x,y,z)dxdy \Big) dz$$

Applicazioni alla fisica

Definendo la densità di massa $\mu(x,y,z)$ di $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$, allora si possono ricavare alcune grandezze fisiche.

Massa Totale

$$M(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \mu(x,y,z)dxdydz$$

Baricentro

$$x_G = \frac{\iiint_{\mathcal{D}} x\mu(x,y,x)dxdydz}{M(\mathcal{D})}$$
$$y_G = \frac{\iiint_{\mathcal{D}} y\mu(x,y,x)dxdydz}{M(\mathcal{D})}$$
$$z_G = \frac{\iiint_{\mathcal{D}} z\mu(x,y,x)dxdydz}{M(\mathcal{D})}$$

Momento d'inerzia

$$\iiint_{\mathcal{D}} r^2(x,y,z)\mu(x,y,z)dxdydz$$

Cambiamenti di coordinate

Polari piane

$$T : \begin{cases} x = cos(\theta) \\ y = sin(\theta) \end{cases}$$

Casi particolarmente favorevoli Cerchio, corona circolare, "fetta di torta", "fetta di ciambella"

Polari sferiche

$$T : \begin{cases} x = sin(\varphi)cos(\theta) \\ y = sin(\varphi)sin(\theta) \\ z = cos(\varphi) \end{cases}$$

Lo jacobiano di questa trasformazione è $\mathcal{J}T = \rho sin(\varphi)$

Casi particolarmente favorevoli

Cilindriche

$$\begin{cases} x = cos(\theta) \\ y = sin(\theta) \\ z = t \end{cases}$$

Lo jacobiano di questa trasformazione è $\mathcal{J}T = \rho$

Casi particolarmente favorevoli

Integrali curvilinei

Data una curva e una funzione scalare posso:

1. Parametrizzo la curva $\gamma(t)$ sulla quale voglio calcolare l'integrale
2. Calcolo la derivata $\gamma'(t)$della curva parametrizzata
3. Calcolo la normale $\|\gamma'(t)\|$
4. Calcolo la funzione composta $f(\gamma(t))$
5. Determino gli estremi di integrazione
6. Calcolo l'integrale secondo la formula:

$$\int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

Integrali di linea

Data una curva e un campo vettoriale posso:

1. Parametrizzo la curva $\gamma(t)$ sulla quale voglio calcolare l'integrale.
2. Calcolo la derivata della curva parametrizzata $\gamma'(t)$
3. Calcolo la funzione composta $\mathbf{F}(\gamma(t))$
4. Calcolo l'integrale dato dalla relazione:

$$\int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Integrali superficiali

1. Parametrizzo la superficie Σ sulla quale voglio integrare
2. Determino la normale alla superficie $\|\mathbf{N}(u,v)\|$ sapendo che

$$\mathbf{N}(u,v) = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \Sigma_i}{\partial u} & \frac{\partial \Sigma_j}{\partial u} & \frac{\partial \Sigma_k}{\partial u} \\ \frac{\partial \Sigma_i}{\partial v} & \frac{\partial \Sigma_j}{\partial v} & \frac{\partial \Sigma_k}{\partial v} \end{pmatrix}$$

3. Calcola la composta $f(\sigma(u,v))$
4. Calcolo l'integrale secondo la relazione:

$$\int_\sigma f dS = \int_K f(\sigma(u,v))\, \|\mathbf{N}(u,v)\|\, dudv$$

Integrale di flusso

1. Parametrizzo la superficie $\sigma(u,v)$ sulla quale devo risolvere l'integrale
2. Determino il vettore normale alla superficie $\mathbf{N}(u,v)$ e calcolo anche il versore $\mathbf{n}(u,v)$
3. Calcolo la norma del vettore normale
4. Calcolo la composta $\mathbf{F}(\sigma(u,v))$

$$\int_\sigma \mathbf{F} \cdot dS = \int_K \mathbf{F}(\sigma(u,v)) \cdot \mathbf{N}(u,v) dudv$$

Teoremi relativi all'integrazione

Guldino 1

Il volume di un solido di rotazione D è uguale all'area della sezione meridiana S moltiplicata per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di S attorno all'asse di rotazione.

Condizioni

- Solido di rotazione

Nel caso di una rotazione intorno all'asse z

Teorema

$$Volume(D) = \iiint_{\mathcal{P}} dxdydz = 2\pi y_G A(S)$$

Guldino 2

La superficie di un solido di rotazione uguale alla lunghezza dell'arco generatore moltiplicato per la circonferenza che descrive il baricentro intorno all'asse di rotazione.

Condizioni

- La superficie Σ deve essere data da una rotazione dell'arco $\gamma(t)$, appartenente ad un piano delimitato da due assi cartesiani, intorno ad uno di questi due.

Nel caso di una rotazione di un arco $\gamma(t) \in yOz$ intorno all'asse z ottengo

Teorema

$$Area(\Sigma) = \ 2\pi y_G l(\gamma)$$

Green

Condizioni

- Sia $\mathbf{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ un campo vettoriale di classe $C^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
- Sia A un aperto limitato contenuto in Ω
- La frontiera di A è il sostegno di un arco chiuso, semplice e regolare a tratti percorso in verso antiorario.

Teorema

$$\int_{\delta A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \iint_A \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big) dxdy$$

Gauss

Condizioni

- $\mathbf{F}$ è un campo vettoriale definito in un aperto $\Omega \in \mathbb{R}^3$
- Sia Ω_0 un aperto limitato la cui frontiera è $\delta\Omega_0$

Teorema

$$\int_{\delta\Omega_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega_0} div(\mathbf{F}) dxdydz$$

Stokes

Condizioni

- $\mathbf{F}$ patto costituito dal sostegno po vettoriale definito in un $\Omega \in \mathbb{R}^3$
- Sia K il compatto costituito dal sostegno di un arco chiuso, semplice e regolare a tratti γ e dal suo interno.
- γ è orientata in modo da lasciare alla sinistra il suo interno
- Sia $\sigma_0 = \sigma(K)$ la calotta relativa a K e $\delta\sigma_0$ l'arco detto bordo della calotta σ_0 il cui verso di percorrenza è dato dalla regola della mano destra rispetto alla normale alla calotta

Teorema

$$\int_{\delta\sigma_0} \mathbf{F}(P) \cdot d\mathbf{P} = \int_{\sigma_0} rot(\mathbf{F}) \cdot dS$$

Campi conservativi

Un campo vettoriale $\mathbf{F}$, definito in Ω, si dice conservativo se esiste una funzione scalare φ tale che per ogni $x \in \Omega$ si abbia

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$$

In cui $\varphi(\mathbf{x})$ è detta funzione potenziale

Condizioni

Affinché un campo vettoriale $\mathbf{F}$ sia conservativo e che ammetta quindi un potenziale, è necessario che:

- Se γ è un arco chiuso e regolare a tratti, allora $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbb{P} = 0$
- il $rot(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ e che $\mathbf{F}$ sia definito su di un insieme ***semplicemente connesso***

Se un campo vettoriale $\mathbf{F}$ è conservativo, allora:

- Se γ è un arco chiuso e regolare a tratti, allora $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbb{P} = 0$
- $rot(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$

Ricerca del potenziale

Per trovare il potenziale di un campo conservativo si può ragionare in più modi:

Metodo delle derivate parziali

La definizione di potenziale di un campo vettoriale conservativo