

1 Formule in ordine cronologico

1.1 Equazioni per condizioni all'equilibrio

Densità degli stati in Banda di Conduzione

$$N_{BC}(E) = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^*)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$h = 6.626 \times 10^{-34} Js$ (costante di Planck)

$2m_n^*$ = Massa efficace degli elettroni

Distribuzioni di Fermi-Dirac

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_f}{KT}}} \quad (2)$$

E_f = Energia di Fermi K = Costante di Boltzmann

Densità elettronica

$$\rho_n(E) = N_{BC} f(E) \quad (3)$$

Concentrazione elettronica in banda di conduzione

Integrando la densità elettronica, ovvero la moltiplicazione tra (1) e (2) nell'intervallo $[0, +\infty]$ trovo

$$n = N_C e^{-\frac{E_c-E_f}{KT}} \quad (4) \quad p = N_B e^{-\frac{E_f-E_v}{KT}} \quad (5)$$

$N_C = N_V = \frac{2}{h^3} (2\pi m_n^* KT)^{\frac{3}{2}}$ = Densità efficace degli stati in Banda di Conduzione o Valenza

Concentrazioni di elettroni e lacune in un semiconduttore puro

Essendo che nei semiconduttori intrinseci $p = n = p_i = n_i$

$$n_i^2(T) = N_C N_V e^{-\frac{E_g}{KT}} \quad (6)$$

Legge dell'azione di massa

Moltiplicando le concentrazioni di elettroni e lacune in un semiconduttore drogato con atomi accettori o donatori si ottiene

$$n_{n0} p_{n0} = n_{i0}^2 \quad (7) \quad n_{p0} p_{p0} = n_{i0}^2 \quad (8)$$

Equazione di Neutralità

@Equilibrio

$$\rho_n(x) = +q(p_n - n_n + N_D^+) \quad (9)$$

Semiconduttore drogato di tipo n

$$\rho_p(x) = +q(p_p - n_p - N_A^-) \quad (10)$$

Semiconduttore drogato di tipo p

Nel caso di neutralità elettrica $\rho(x) = 0$

Concentrazione elettronica nei semiconduttori drogati

Dalle equazioni dell'azione di massa e di neutralità è possibile ottenere

$$n_{n0} = \frac{N_D^+(T)}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2n_i(T)}{N_D^+(T)} \right)^2} + 1 \right] \quad (11)$$

$$p_{p0} = \frac{N_A^-(T)}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2n_i(T)}{N_A^-(T)} \right)^2} + 1 \right] \quad (12)$$

Compensazione dei droganti

Utilizzando il legame tra il drogaggio effettivo e le concentrazioni di ioni riscrivo le equazioni delle concentrazioni di lacune ed elettroni per semiconduttori drogati inserendo la relazione $N' = |N_D - N_A|$

$$n_{n0} = \frac{N'_D(T)}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2n_i(T)}{N'_D(T)} \right)^2} + 1 \right] \quad (13)$$

$$p_{p0} = \frac{N'_A(T)}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2n_i(T)}{N'_A(T)} \right)^2} + 1 \right] \quad (14)$$

Equazioni di Shockley

Queste equazioni simmetriche permettono di ricavare il lavoro di estrazione $q\Phi_{Sn}$ senza dover ricorrere all'ausilio delle formule in cui sono presenti N_C e N_V

$$n = n_i e^{\frac{E_F - E_{fi}}{KT}} \quad (15)$$

$$p = n_i e^{-\frac{E_F - E_{fi}}{KT}} \quad (16)$$

$$n_i \Big|_{T=300K}^{S_i}$$

E_{fi} = Livello di fermi per semiconduttori intrinseci

1.2 Equazioni per condizioni fuori dall'equilibrio

Per condizioni che portano il semiconduttore al di fuori dell'equilibrio si intende una condizione in cui sia applicata al materiale una differenza di potenziale

Correnti di trascinamento (*Drift current*)

Nel caso agli estremi del semiconduttore sia applicata una differenza di potenziale, gli elettroni e le lacune si muovono con stessa direzione, ma in verso opposto. Gli e^- si muovono in senso contrario rispetto al verso del campo elettrico ε

$$-q \Phi_{xBC}^{e^- drift} = J_n^{drift} \quad (17)$$

$$q \Phi_{xBV}^{e^+ drift} = J_p^{drift} \quad (18)$$

Per J_n^{drift} e J_p^{drift} si intendono le densità di corrente di drift, ovvero $J = nq \bar{v}_{drift}$

Per $\Phi_{xBC}^{e^- drift}$ e $\Phi_{xBV}^{e^+ drift}$ sono rispettivamente la **densità di flusso** degli e^- in BC e la **densità di flusso** degli e^+ in BV, entrambi in funzione di x

Possiamo sostituire nella formula generale la densità elettronica e la densità di lacune.

$$\Phi_{xBC}^{e^- drift} = n_n \bar{v}_{nBC}^{drift} \quad (19)$$

$$\Phi_{xBV}^{e^+ drift} = p_p \bar{v}_{pBV}^{drift} \quad (20)$$

Definendo $\bar{\tau}_n$ il tempo medio tra due "urti" di un elettrone con impurità del cristallino, droganti o nuclei atomici si può ricavare la relazione seguente

$$\bar{\tau}_n = \frac{\lambda}{v_{th}} \quad (21)$$

Se si ammettono le ipotesi in cui λ , T , v_{th} sono costanti e che $\bar{v}_n^{drift} \ll v_{th}$, allora si può considerare τ_n all'incirca invariato anche in condizioni di non equilibrio.

Velocità di trascinamento (*Velocità di drift*)

Passando per il teorema dell'impulso è possibile arrivare a ricavare, a meno di una costante propria del semiconduttore, la velocità di trascinamento degli elettroni.

$$\bar{v}_n^{drift} = \frac{-q\tau}{m_n^*} \mathcal{E} = -\mu_n \mathcal{E} \quad (22)$$

$$\bar{v}_p^{drift} = \frac{q\tau}{m_p^*} \mathcal{E} = \mu_p \mathcal{E} \quad (23)$$

Con $\mu_n = \frac{q\tau}{m_n^*}$ e $\mu_p = \frac{q\tau}{m_p^*}$

Conducibilità e Resistività

Le formule (17) e (18) possono essere riscritte ottenendo

$$J_n^{drift} = (qn\mu_n) \mathcal{E} = \mathcal{E} \sigma_n \quad (24)$$

$$J_p^{drift} = (qp\mu_p) \mathcal{E} = \mathcal{E} \sigma_p \quad (25)$$

Ricordo che la densità di corrente totale la somma algebrica delle due densità di corrente elettronica e delle lacune.

Quindi raccolgo a fattor comune la carica e il campo elettrico si ottiene la formula:

$$J_{tot} = \mathcal{E}(q\mu_n n + q\mu_p p) = \sigma \mathcal{E} \quad (26)$$

in cui $(q\mu_n n + q\mu_p p)$ è la conducibilità σ propria del materiale

Resistenza di un semiconduttore

Utilizzando la legge di Ohm microscopica si può ricavare la seguente relazione

$$R = \frac{1}{\sigma_i} \frac{L}{A} \quad (27)$$

Conducibilità nel caso di un semiconduttore drogato

Sia che si droghi il semiconduttore con atomi accettori che con atomi donatori, si giunge a ragionamenti analoghi. Infatti, data una concentrazione N_D di droganti donatori, in condizioni estrinseche, le concentrazioni $n_{n0} \approx N_D$, quindi posso trascurare il contributo alla resistenza equivalente dato dalla resistività delle lacune (popolazione minoritaria).

$$R_{EQ} \approx \frac{1}{\sigma_{drog}} \frac{L}{A} \approx \frac{1}{q\mu_n N_D} \frac{L}{A} \quad (28)$$

Relazioni di Einstein

$$\begin{cases} D_n = V_T \mu_n \\ D_p = V_T \mu_p \end{cases} \quad (29)$$

Nelle relazioni $V_T = \frac{KT}{q} = 26mV$ è definita Tensione equivalente della temperatura

Densità di corrente di diffusione

Si possono riscrivere le densità di corrente anche per la diffusione.

$$J_n^{diff} = -q\Phi_{xBC}^{e^{-}diff} = qD_n \frac{\partial n}{\partial x} \quad (30)$$

$$J_p^{diff} = q\Phi_{xBV}^{e^{+}diff} = -qD_p \frac{\partial p}{\partial x} \quad (31)$$

Correnti di diffusione

Nel caso in cui il drogaggio non sia omogeneo, all'interno del semiconduttore si creerà un gradiente di concentrazione negativo. Infatti, gli elettroni tenderanno a distribuirsi uniformemente nel cristallo generando così una corrente detta di diffusione.

$$\Phi_{xBC}^{e^{-}diff} = -D_n \frac{\partial n}{\partial x} \quad (32)$$

$$\Phi_{xBV}^{e^{+}diff} = -D_p \frac{\partial p}{\partial x} \quad (33)$$

Con D_n e D_p le costanti di diffusione per gli elettroni e per le lacune

Equazioni di *Drift-Diffusion*

Cercando di riprodurre con un modello matematico fedele alla realtà il comportamento degli elettroni e delle lacune nei semiconduttori, è necessario tenere conto sia della densità di corrente di drift che di diffusione

$$J_n = J_n^{drift} + J_n^{diff} = (q \varepsilon \mu_n n) + \left(q D_n \frac{\partial n}{\partial x} \right) \quad (34) \quad J_p = J_p^{drift} + J_p^{diff} = (q \varepsilon \mu_p p) - \left(q D_p \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (35)$$

Equazioni di continuità

Come nel caso dei fluidi è possibile definire un'equazione di continuità in cui si analizzano le "entrate" e le "uscite" da un immaginario cubo all'interno del semiconduttore

$$\frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial t^2} A dx = \frac{J_n(x) A}{-q} - \frac{J_n(x + dx) A}{-q} + G_{TH} A dx + R A dx \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} A dx = \frac{J_p(x) A}{-q} - \frac{J_p(x + dx) A}{-q} + G_{TH} A dx + R A dx \quad (37)$$

In cui $\frac{J_n(x) A}{-q}$ è il numero di elettroni entranti e $\frac{J_n(x+dx) A}{-q}$ è il numero di elettroni uscenti dalla superficie A

Tasso netto di ricombinazione

Definisco per comodità le seguenti quantità

$$U_n = R - G_{TH} \quad (38)$$

$$U_p = R - G_{TH} \quad (39)$$

Questa notazione permette di semplificare notevolmente le equazioni di continuità, rendendole più compatte

@Equilibrio $U_n = U_p = 0$

Concentrazioni in eccesso

Per comodità è utile definire le concentrazioni in eccesso -fuori equilibrio- di elettroni e di lacune

$$\begin{aligned} n'_n &= n_n - n_{n0} \\ n'_p &= n_p - n_{p0} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} p'_n &= p_n - p_{n0} \\ p'_p &= p_p - p_{p0} \end{aligned} \quad (41)$$

Ricombinazione

Essendo la ricombinazione un fenomeno che interessa sia gli elettroni che le lacune, è ovvio considerare la ricombinazione proporzionale alle concentrazioni di elettroni e di lacune.

@Equilibrio

$$R_0 = \alpha n_{n0} p_{n0} \quad (42)$$

$$R = \alpha n_n p_n \quad (43)$$

Combinando l'equazione (42) e la (44) ottengo

$$R = \alpha n_n (p_n - p_{n0})$$

Tempo di vita media

Si può definire il tempo di vita medio che trascorre tra la generazione della lacuna (o elettrone) e la sua ricombinazione con un elettrone (o lacuna)

$$\tau_n = \frac{1}{\alpha n_{n0}} \quad (44)$$

$$\tau_p = \frac{1}{\alpha p_{p0}} \quad (45)$$

Tasso netto di ricombinazione

Unendo le notazioni delle concentrazioni in eccesso e la relazione della ricombinazione con il tempo di vita medio, le formule (39) e (40) possono essere riscritte

$$U_p = \frac{p'_n}{\tau_p} \quad (46)$$

$$U_n = \frac{n'_p}{\tau_n} \quad (47)$$

1.3 Modello Matematico

Facendo "interagire" tra loro le equazioni di continuità (38) (39), le equazioni del tasso netto di ricombinazione si può ottenere un modello matematico che ci permetta di studiare il comportamento dei semiconduttori.

Equazioni di continuità riscritte

Sviluppando in serie di Taylor il secondo termine, ovvero quello riguardante la quantità di elettroni/lacune in uscita dal volume infinitesimo e sostituisco R e G_{TH}

$$\frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{q} \frac{\partial^2 J_n}{\partial x^2} - U_n \quad (48)$$

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{q} \frac{\partial^2 J_p}{\partial x^2} - U_p \quad (49)$$

Questa rappresenta la prima delle equazioni che permettono di rendere matematicamente il comportamento di elettroni e lacune nei semiconduttori, sia drogati che non.

Equazioni di continuità per i portatori minoritari

In condizioni di basso livello di iniezione, le concentrazioni dei portatori minoritari sono date dalle relazioni seguenti

$$\frac{\partial^2 n_p(x, t)}{\partial t^2} = n_p \mu_n \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \mu_n \varepsilon \frac{\partial^2 n_p}{\partial x^2} + D_n \frac{\partial^2 n_p}{\partial x^2} + G_n - \frac{n'_p}{\tau_n} \quad (50)$$

$$\frac{\partial^2 p_n(x, t)}{\partial t^2} = p_n \mu_p \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \mu_p \varepsilon \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + D_p \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + G_p - \frac{p'_n}{\tau_p} \quad (51)$$

Equazione di Poisson

Questa relazione permette di trovare il campo elettrico e il potenziale in dipendenza dalla densità di carica e la permeabilità del semiconduttore.

$$\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_s} \quad (52)$$

$\Phi(x)$ = Potenziale elettrico

$\varepsilon_s = \varepsilon_r \varepsilon_0$ con $\varepsilon_r \Big|_{T=300K}^{Si}$

Il modello matematico in condizioni stazionarie e di quasi neutralità può essere riscritto con la seguente formulazione

Per i minoritari

$$\frac{\partial^2 n'_p(x)}{\partial x^2} = \frac{n'_p(x)}{\tau_n} \quad (53)$$

$$\frac{\partial^2 p'_n(x)}{\partial x^2} = \frac{p'_n(x)}{\tau_p} \quad (54)$$

per i maggioritari si ottengono due formule analoghe

1.4 Semiconduttori illuminati

Nel caso in cui un semiconduttore venga illuminato con una radiazione elettromagnetica che abbia un'energia sufficiente a creare una coppia elettrone-lacuna, all'interno del materiale si creerà un gradiente di diffusione.

1.4.1 Bassa iniezione

Nel caso più specifico in cui la radiazione generi otticamente una quantità di lacune e elettroni di molto inferiore alla quantità di portatori maggioritari già presenti all'interno del semiconduttore allora si ragionerà principalmente sull'ammontare di minoritari in eccesso a causa della generazione ottica. Se le condizioni al contorno sono di quasi neutralità e di stazionarietà, allora è possibile, trovando gli autovalori dell'equazione differenziale, determinare la lunghezza di diffusione, ovvero:

$$L_p = \frac{1}{\sqrt{D_p \tau_p}} \quad \text{Nel caso in cui i minoritari siano le lacune}$$

$$L_n = \frac{1}{\sqrt{D_n \tau_n}} \quad \text{Nel caso in cui i minoritari siano gli elettroni}$$

Semiconduttore lungo Si denota con semiconduttore lungo, un semiconduttore che abbia una lunghezza maggiore della lunghezza di diffusione precedentemente calcolata. in questo caso se si risolve il modello matematico semplificato dalle due condizioni (quasi neutralità e stazionarietà) si ottengono le seguenti relazioni:

$$n'_p(x) = n'_p(0) e^{-\frac{x}{L_n}} \quad (55)$$

$$p'_n(x) = p'_n(0) e^{-\frac{x}{L_p}} \quad (56)$$

Nel caso in cui si abbia un semiconduttore le cui dimensioni siano paragonabili alla lunghezza di diffusione, allora una delle condizioni utilizzate per risolvere l'equazione differenziale del caso precedente, ovvero che le concentrazioni dei minoritari si sarebbero annullate alla faccia del lato opposto, non può più essere applicata, quindi si immagina di metallizzare la faccia d'arrivo per poter riutilizzare le equazioni del caso precedente. con questo ragionamento si ottengono le due seguenti relazioni:

$$n'_p(x) = n'_p(0) \frac{\sinh(\frac{L-x}{L_n})}{\sinh(\frac{L}{L_n})} \quad (57)$$

$$p'_n(x) = p'_n(0) \frac{\sinh(\frac{L-x}{L_p})}{\sinh(\frac{L}{L_p})} \quad (58)$$

Semiconduttore corto Analogamente si può ragionare nel caso in cui il semiconduttore non abbia dimensioni più grandi della lunghezza di diffusione, bensì sia più corto. In questo caso si può approssimare l'argomento del seno iperbolico con il suo argomento.

$$n'_p(x) = n'_p(0)(1 - \frac{x}{L}) \quad (59)$$

$$p'_n(x) = p'_n(0)(1 - \frac{x}{L}) \quad (60)$$

1.4.2 Semiconduttore di tipo n in condizioni di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} - U_p \\ J_p = J_{pDIFF} + J_{pDRIFT} \\ U_p = \frac{p'_n}{\tau_p} \\ D_p = \frac{KT}{q} \mu_p \end{cases}$$

1.5 Giunzione p - n

1.5.1 Ragionamenti preliminari

Prendendo in considerazione un pezzo di semiconduttore in cui in una porzione di volume limitata è avvenuta una compensazione dei droganti si possono fare alcune considerazioni.

All'interno della giunzione, al momento del contatto tra il semiconduttore drogato di tipo n e di tipo p, si creano due correnti:

Una dovuta al generarsi di un gradiente di concentrazione e un'altra dovuta alla mancata compensazione delle impurità droganti.

All'equilibrio termodinamico, ovvero a condizioni di regime, la densità di corrente attraverso la giunzione dovrà però essere nulla. Quindi sviluppando la relazione che permette di trovare la densità di carica e uguagliandola a zero si ottiene che $\frac{dE_F}{dt} = 0$ ovvero, che il livello dell'energia di Fermi è costante.

1.5.2 All'equilibrio

Densità di carica

Ipotizzando di avere una compensazione netta, nel semiconduttore si creerà una densità di carica così disposta

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq -x_p \\ \rho_1 & \text{if } -x_p < x < 0 \\ \rho_2 & \text{if } 0 < x < x_n \\ 0 & \text{if } x \geq x_n \end{cases} \quad (61)$$

Campo elettrico

Sfruttando l'equazione di Poisson, integrando la densità di carica è possibile determinare il campo elettrico in funzione della posizione

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq x_p \\ -\frac{\rho_1}{\varepsilon_s}(x_p + x) & \text{if } -x_p < x < 0 \\ -\frac{\rho_1}{\varepsilon_s}x_p + \frac{\rho_2}{\varepsilon_s}x & \text{if } 0 < x < x_n \\ 0 & \text{if } x \geq x_n \end{cases} \quad (62)$$

Campo elettrico

Integrando nuovamente l'equazione di Poisson è possibile trovare la differenza di potenziale tra le varie sezioni del semiconduttore

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq x_p \\ \Phi(-x_p) + \frac{\rho_1}{2\varepsilon_s}(x_n + x)^2 & \text{if } x_p < x < 0 \\ +\frac{\rho_1}{2\varepsilon_s}x_p^2 + \frac{\rho_1}{\varepsilon_s}x_px - \frac{\rho_2}{2\varepsilon_s}x^2 & \text{if } 0 < x < x_n \\ +\frac{\rho_1}{2\varepsilon_s}x_p^2 + \frac{\rho_1}{2\varepsilon_s}x_n^2 & \text{if } x \geq x_n \end{cases} \quad (63)$$

1.5.3 Analisi elettrostatica della giunzione

Energia di barriera

Si può calcolare l'energia di barriera all'interno di una giunzione p-n eguagliandola alla differenza tra l'energia di estrazione $q\Phi S_p$ e $q\Phi S_n$

$$q\Phi_i = q\Phi S_p - q\Phi S_n = KT \ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right) \quad (64)$$

Zona di svuotamento

Per comodità si definisce una lunghezza che rappresenta tutta la porzione di semiconduttore privo di portatori

$$x_d = x_n + x_p \quad (65)$$

Relazione delle zone di svuotamento

Integrando le distribuzioni di carica si può ottenere una legge di neutralità generale

$$qN_A x_p = qN_D x_n \quad (66)$$

Zona di svuotamento 2.0

Utilizzo le relazioni (59) e (57) per riscrivere la formula (58)

$$x_d = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_{EQ}}\Phi_i} \quad (67)$$

Con $N_{EQ} = \frac{N_A N_D}{N_A + N_D}$

X_n e X_p

Utilizzando la relazione precedente similmente ad un partitore di tensione mi ricavo le misure delle zone di svuotamento

$$x_n = \frac{N_D}{N_A + N_D} x_d \quad (68)$$

$$x_p = \frac{N_A}{N_A + N_D} x_d \quad (69)$$

1.5.4 Giunzione Polarizzata

Una giunzione può essere polarizzata in due modi, ovvero applicando una tensione positiva con il morsetto collegato alla parte drogata di tipo p e applicando una tensione negativa. Nel caso in cui la tensione V_a sia positiva si ha una polarizzazione diretta e la barriera $q\Phi_i$ sarà più bassa, mentre se si applica una tensione negativa, si ha una polarizzazione inversa che innalza la barriera di potenziale interno.

Tensione in una giunzione polarizzata

Per semplificare la notazione si definisce la tensione risultante all'interno del semiconduttore come

$$V_J = \Phi_i - V_a \quad (70)$$

Tutte le relazioni trovate per la giunzione all'equilibrio possono essere riscritte sfruttando questa relazione

Capacità di una giunzione

Essendo che all'interno di una giunzione nella zona di svuotamento si vengono a creare due cariche dovute agli ioni di drogaggio, allora si può in un certo senso analizzare una giunzione anche come un condensatore con capacità variabili

$$C_{DEP} = \sqrt{\frac{q\varepsilon_s N_{EQ}}{2V_J}} \quad (71)$$

arg4