

Agenda - Ordenación topológica

- Definición
- Ejemplos de aplicaciones de Grafos dirigidos Acíclicos (DAG)
- Algoritmos
 - Con complejidad $O(|V|^2)$: Implementación con Arreglo (versión 1)
 - Con complejidad $O(|V| + |A|)$
 - Implementación con Pila o Cola (versión 2)
 - DFS (versión 3)

Agenda - Ordenación topológica

➤ Definición

➤ Ejemplos de aplicaciones de Grafos dirigidos Acíclicos (DAG)

➤ Algoritmos

- Con complejidad $O(|V|^2)$: Implementación con Arreglo (versión 1)
- Con complejidad $O(|V| + |A|)$
 - Implementación con Pila o Cola (versión 2)
 - DFS (versión 3)

Definición

- *La ordenación topológica es una permutación:
 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{|V|}$ de los vértices, tal que si $(v_i, v_j) \in E$,
 $v_i \neq v_j$, entonces v_i precede a v_j en la permutación.*
- *La ordenación no es posible si G es cíclico.*
- *La ordenación topológica no es única.*
- *Una ordenación topológica es como una ordenación de los vértices a lo largo de una línea horizontal, con los arcos de izquierda a derecha.*

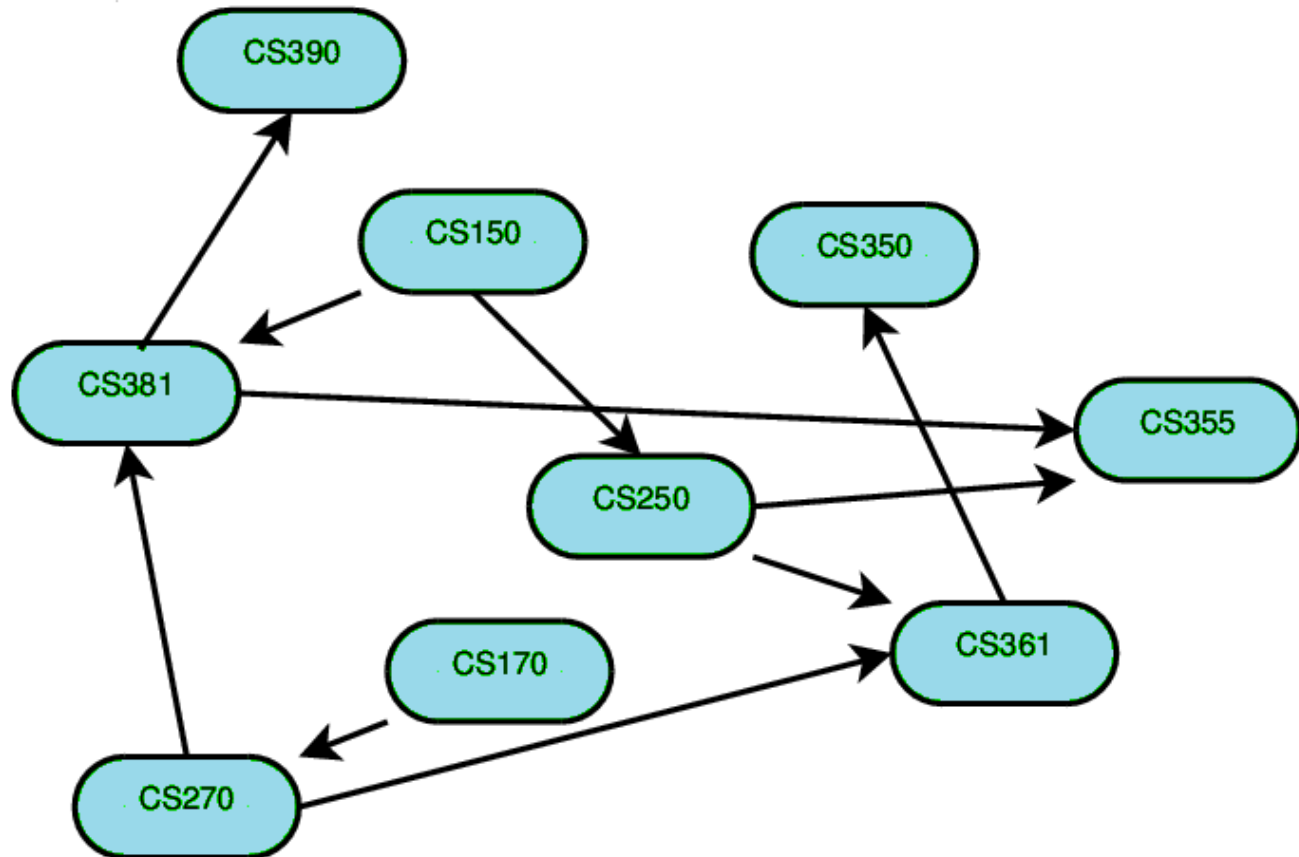
Agenda - Ordenación topológica

- Definición
- **Ejemplos de aplicaciones de Grafos dirigidos Acíclicos (DAG)**
- Algoritmos
 - Con complejidad $O(|V|^2)$: Implementación con Arreglo (versión 1)
 - Con complejidad $O(|V| + |A|)$
 - Implementación con Pila o Cola (versión 2)
 - DFS (versión 3)

Aplicaciones

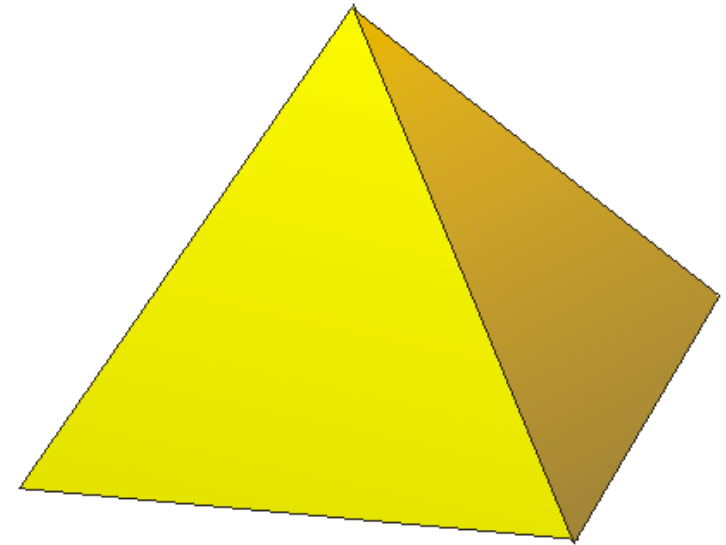
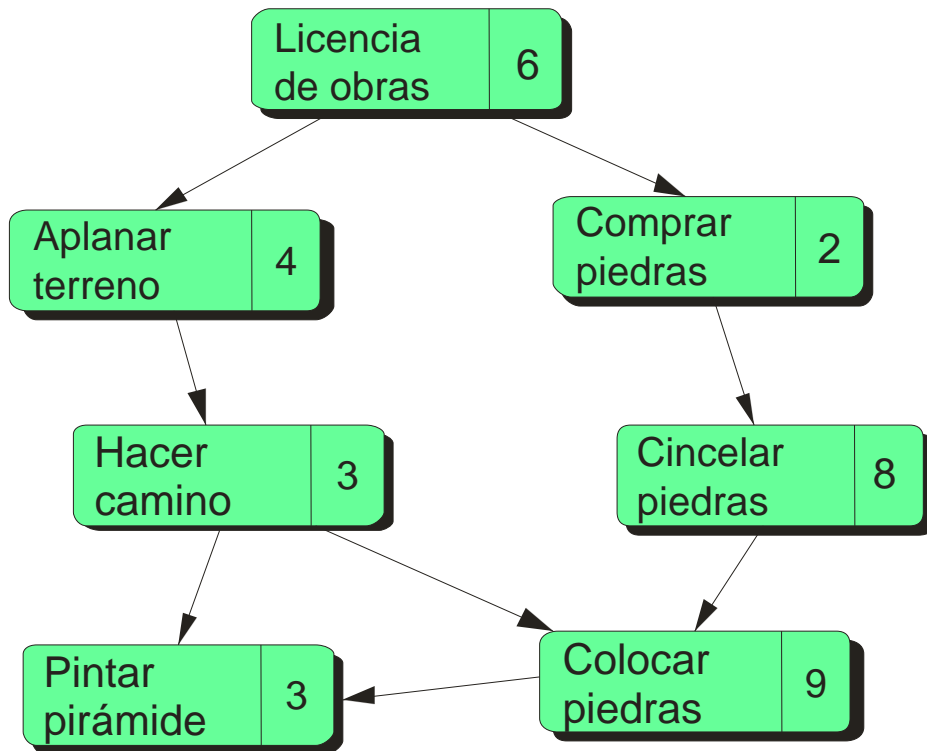
- *Para indicar la precedencia entre eventos*
- *Para planificación de tareas*
- *Organización curricular*

Ejemplo 1: prerrequisito



Cursos conectados por aristas que representan la **relación** de “prerrequisito”

Ejemplo 2: Planificación de tareas



Agenda - Ordenación topológica

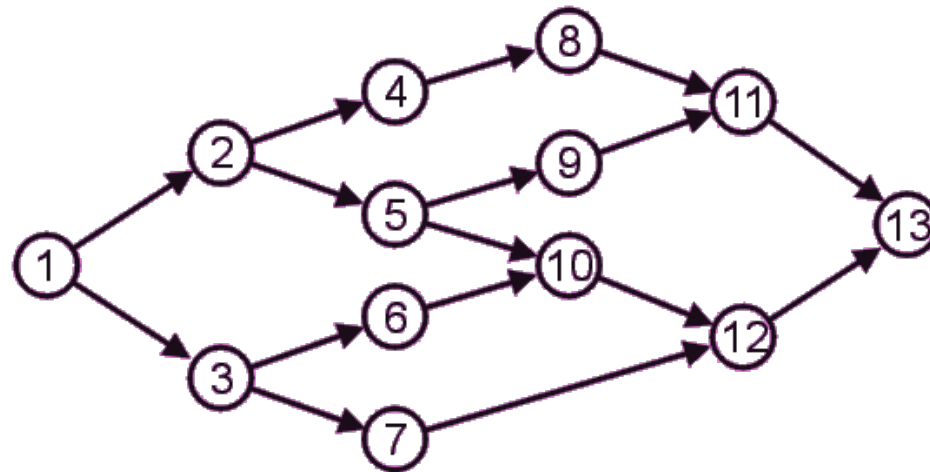
- Definición
- Ejemplos de aplicaciones de Grafos dirigidos Acíclicos (DAG)
- **Algoritmos**
 - Con complejidad $O(|V|^2)$: Implementación con Arreglo (versión 1)
 - Con complejidad $O(|V| + |A|)$
 - Implementación con Pila o Cola (versión 2)
 - DFS (versión 3)

Ordenación topológica

Dos ordenaciones válidas para el siguiente grafo:

1, 3, 2, 7, 6, 5, 4, 10, 9, 8, 12, 11, 13

1, 2, 4, 8, 5, 9, 11, 3, 6, 10, 7, 12, 13



Y hay muchas más..... buscar al menos 5 más

Ordenación topológica - (versión 1)

➤ *En esta versión el algoritmo utiliza un arreglo Grado_in en el que se almacenan los grados de entradas de los vértices y en cada paso se toma de allí un vértice con $\text{grado_in} = 0$.*

Ordenación topológica - (versión 1)

Pasos generales:

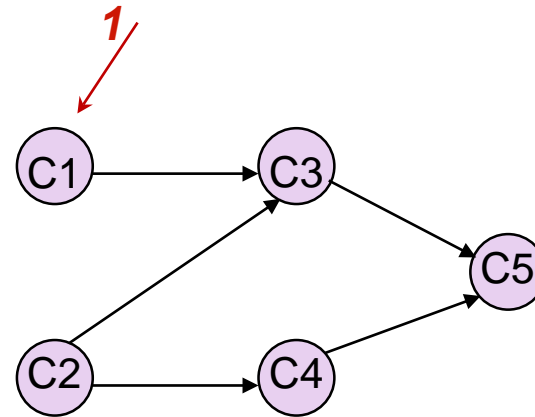
1. Seleccionar un vértice v con grado de entrada cero
2. Visitar v
3. “Eliminar v , junto con sus aristas salientes”
4. Repetir el paso 1 hasta seleccionar todos los vértices

Ordenación topológica - (versión 1)

→ Tomando vértice con $\text{grado_in} = 0$ del vector Grado_in

Grado_in

C1	C2	C3	C4	C5
0	0	2	1	2



Sort Topológico :

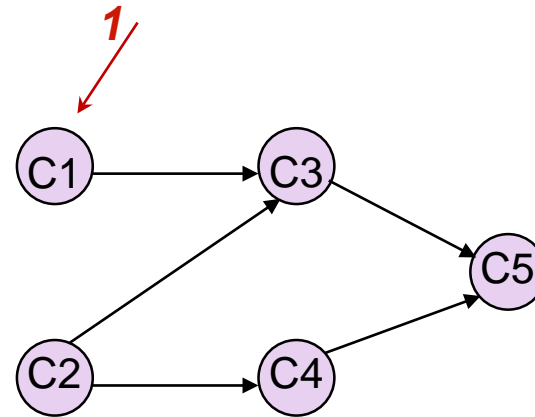
C1

Ordenación topológica - (versión 1)

→ Tomando vértice con $\text{grado_in} = 0$ del vector Grado_in

Grado_in

C1	C2	C3	C4	C5
0	0	2	1	2
0	0	1	1	2



Sort Topológico :

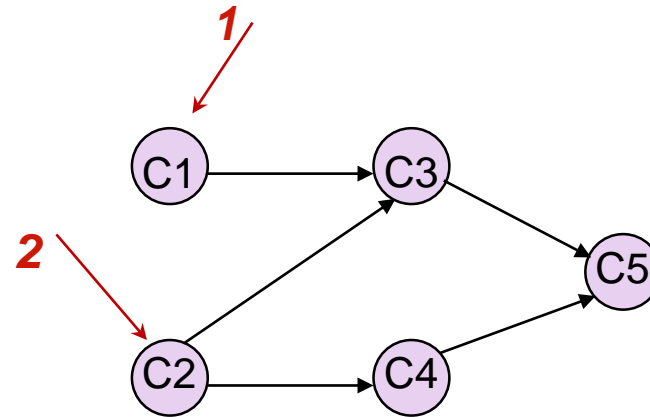
C1

Ordenación topológica - (versión 1)

→ Tomando vértice con $\text{grado_in} = 0$ del vector Grado_in

Grado_in

C1	C2	C3	C4	C5
0	0	2	1	2
0	0	1	1	2



Sort Topológico :

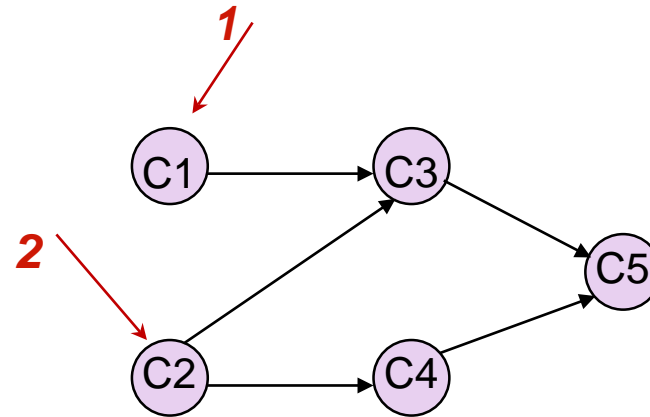
C1 C2

Ordenación topológica - (versión 1)

→ Tomando vértice con $\text{grado_in} = 0$ del vector Grado_in

Grado_in

C1	C2	C3	C4	C5
0	0	2	1	2
0	0	1	1	2
0	0	0	0	2



Sort Topológico :

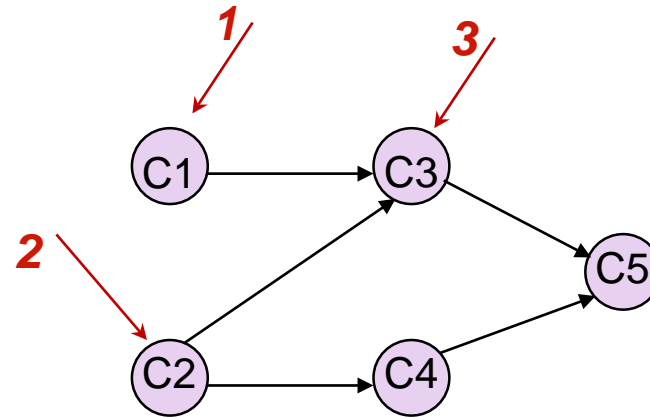
C1 C2

Ordenación topológica - (versión 1)

→ Tomando vértice con $\text{grado_in} = 0$ del vector Grado_in

Grado_in

C1	C2	C3	C4	C5
0	0	2	1	2
0	0	1	1	2
0	0	0	0	2



Sort Topológico :

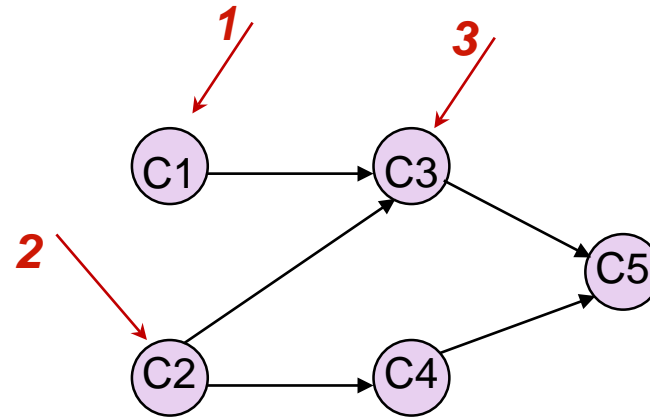
C1 C2 C3

Ordenación topológica - (versión 1)

→ Tomando vértice con $\text{grado_in} = 0$ del vector Grado_in

Grado_in

	C1	C2	C3	C4	C5
	0	0	2	1	2
	0	0	1	1	2
	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	1



Sort Topológico :

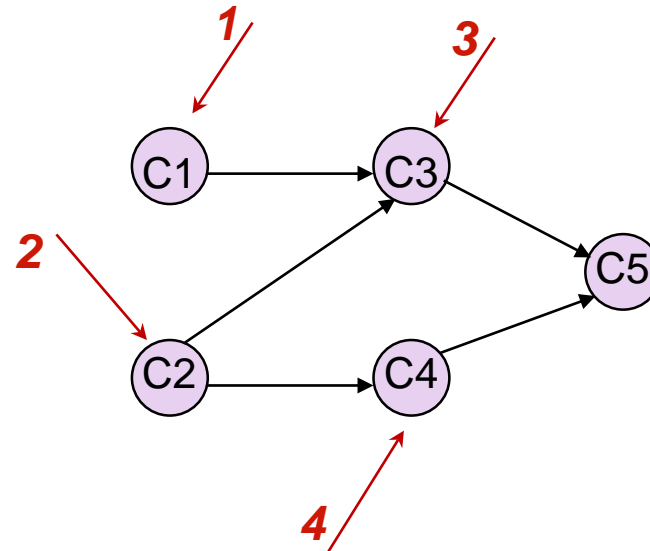
C1 C2 C3

Ordenación topológica - (versión 1)

→ Tomando vértice con $\text{grado_in} = 0$ del vector Grado_in

Grado_in

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	0	0	2	1	2
C2	0	0	1	1	2
C3	0	0	0	0	2
C4	0	0	0	0	1



Sort Topológico :

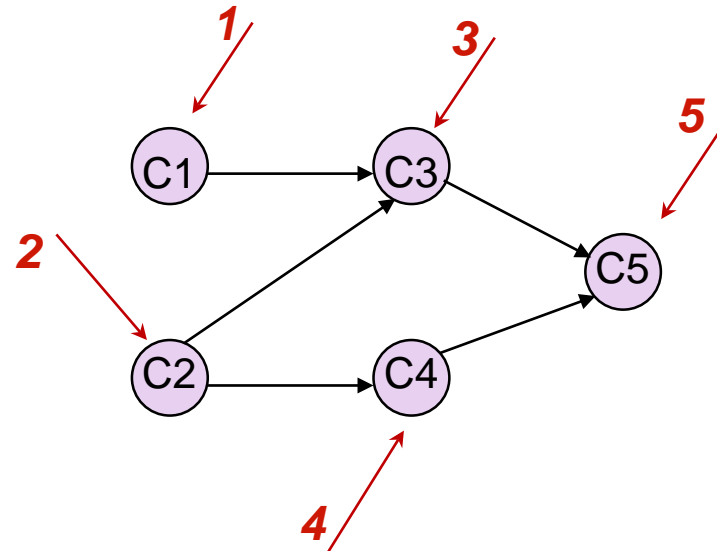
C1 C2 C3 C4

Ordenación topológica - (versión 1)

→ Tomando vértice con $\text{grado_in} = 0$ del vector Grado_in

Grado_in

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	0	0	2	1	2
C2	0	0	1	1	2
C3	0	0	0	0	2
C4	0	0	0	0	1
C5	0	0	0	0	0



Sort Topológico :

C1 C2 C3 C4 C5

Ordenación topológica - (versión 1)

Calcular $\text{Grado_in}(v_i)$

$\forall v_i \in V$

```
int sortTopologico( ){  
    int numVerticesVisitados = 0;  
    while(haya vertices para visitar){  
        if(no existe vertice con grado_in = 0)  
            break;  
        else{  
            seleccionar un vertice v con grado_in = 0;  
            visitar v; //mandar a la salida  
            numVerticesVisitados++;  
            borrar v y todas sus aristas salientes;  
        }  
    }  
  
    return numVerticesVisitados;  
}
```

Ordenación topológica - (versión 1)

```
int sortTopologico( ){  
    int numVerticesVisitados = 0;  
    while(haya vertices para visitar){  
        if(no existe vertice con grado_in = 0)  
            break;  
        else{  
            seleccionar un vertice v con grado_in = 0;  
            visitar v; //mandar a la salida  
            numVerticesVisitados++;  
            borrar v y todas sus aristas salientes;  
        }  
    }  
  
    return numVerticesVisitados;  
}
```

Calcular $\text{Grado_in}(v_i)$
 $\forall v_i \in V$

Búsqueda
secuencial
en el
arreglo

Decrementar el
grado de
entrada de los
adyacentes de v

Ordenación topológica - (versión 1)

El tiempo total del algoritmo es:

Calcular $\text{Grado_in}(v_i)$
 $\forall v_i \in V$

$O(|V| + |E|)$

```
int sortTopologico( ){  
    int numVerticesVisitados = 0;  
    while(haya vertices para visitar){  
        if(no existe vertice con grado_in = 0)  
            break;  
        else{  
            seleccionar un vertice v con grado_in = 0;  
            visitar v; //mandar a la salida  
            numVerticesVisitados++;  
            borrar v y todas sus aristas salientes;  
        }  
    }  
    return numVerticesVisitados;  
}
```

$|V|$
 $\sum_{i=1}$

$O(|V|)$

Orden del
número de
aristas de v

Ordenación topológica - (versión 1)

El tiempo total del algoritmo es:

```
int sortTopologico( ){
    int numVerticesVisitados = 0;
    while(haya vertices para visitar){
        if(no existe vertice con grado_in = 0)
            break;
        else{
            seleccionar un vertice v con grado_in = 0;
            visitar v; //mandar a la salida
            numVerticesVisitados++;
            borrar v y todas sus aristas salientes;
        }
    }

    return numVerticesVisitados;
}
```

Calcular $\text{Grado_in}(v_i)$
 $\forall v_i \in V$

$O(|V| + |E|)$

$O(|V|)$

$O(|V|^2 + |E|)$

Orden del
número de
aristas de v

Ordenación topológica - (versión 2)

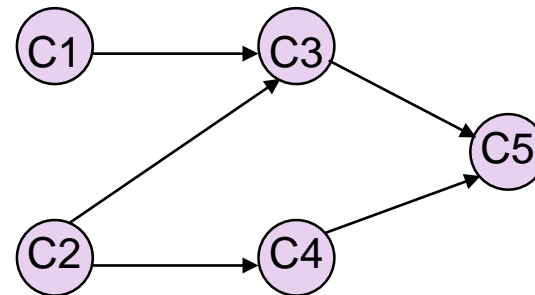
➤ *En esta versión el algoritmo utiliza un arreglo Grado_in en el que se almacenan los grados de entradas de los vértices y una pila P (o una cola Q) en donde se almacenan los vértices con grados de entrada igual a cero.*

Ordenación topológica - (versión 2)

→ Tomando los vértices con $\text{grado_in} = 0$ de una Pila (o Cola)

Grado_in

C1	C2	C3	C4	C5
0	0	2	1	2



Pila ***P*** : **C1** – **C2**

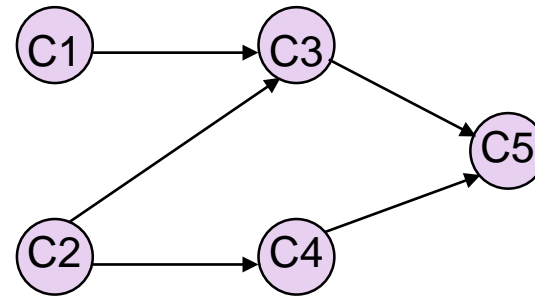
Sort Topológico :

Ordenación topológica - (versión 2)

→ Tomando los vértices con $\text{grado_in} = 0$ de una Pila (o Cola)

Grado_in

C1	C2	C3	C4	C5
0	0	2	1	2



Pila **P** : **C1** – **C2**
: C1 //

Sort Topológico :

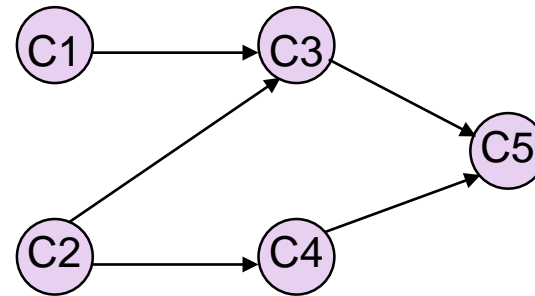
C2

Ordenación topológica - (versión 2)

→ Tomando los vértices con $\text{grado_in} = 0$ de una Pila (o Cola)

Grado_in

C1	C2	C3	C4	C5
0	0	2	1	2
0	0	1	0	2



Pila **P** : **C1** – **C2**
: C1 //

Sort Topológico :

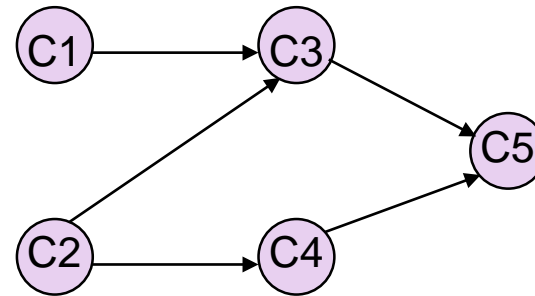
C2

Ordenación topológica - (versión 2)

→ Tomando los vértices con $\text{grado_in} = 0$ de una Pila (o Cola)

Grado_in

C1	C2	C3	C4	C5
0	0	2	1	2
0	0	1	0	2



Pila **P** : **C1** – **C2**

: C1 // C1 – **C4**

Sort Topológico :

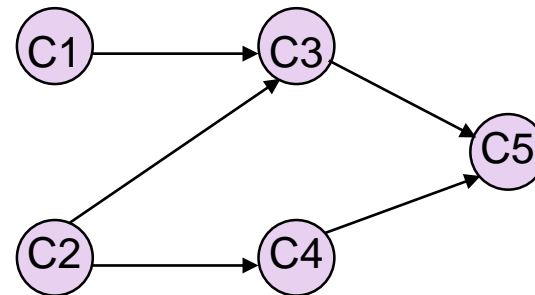
C2

Ordenación topológica - (versión 2)

→ Tomando los vértices con $\text{grado_in} = 0$ de una Pila (o Cola)

Grado_in

	C1	C2	C3	C4	C5
	0	0	2	1	2
	0	0	1	0	2



Pila **P** : **C1** – **C2**

: C1 // C1 – **C4**

: C1 // C1

Sort Topológico :

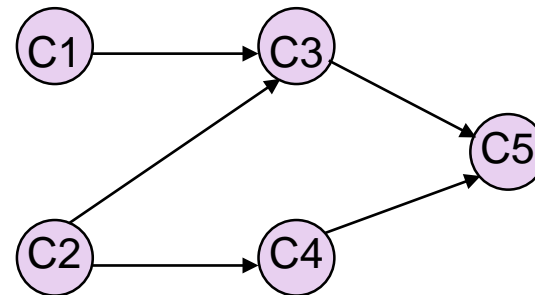
C2 C4

Ordenación topológica - (versión 2)

→ Tomando los vértices con $\text{grado_in} = 0$ de una Pila (o Cola)

Grado_in

	C1	C2	C3	C4	C5
	0	0	2	1	2
	0	0	1	0	2
	0	0	1	0	1



Pila **P** : **C1** – **C2**

: C1 // C1 – **C4**

: C1 // C1

Sort Topológico :

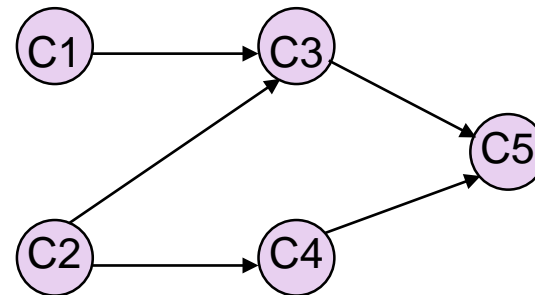
C2 C4

Ordenación topológica - (versión 2)

→ Tomando los vértices con $\text{grado_in} = 0$ de una Pila (o Cola)

Grado_in

	C1	C2	C3	C4	C5
	0	0	2	1	2
	0	0	1	0	2
	0	0	1	0	1



Pila **P** : **C1** – **C2**

: C1 // C1 – **C4**

: C1 // C1

: //

Sort Topológico :

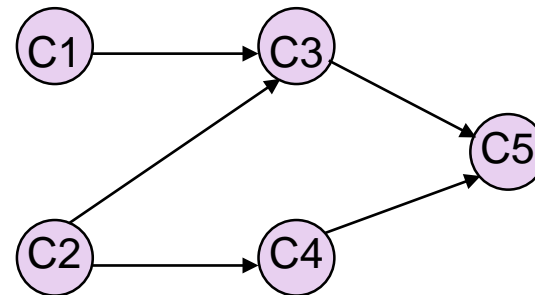
C2 C4 C1

Ordenación topológica - (versión 2)

→ Tomando los vértices con $\text{grado_in} = 0$ de una Pila (o Cola)

Grado_in

	C1	C2	C3	C4	C5
	0	0	2	1	2
	0	0	1	0	2
	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1



Pila **P** : **C1** – **C2**

: C1 // C1 – **C4**

: C1 // C1

: // **C3**

Sort Topológico :

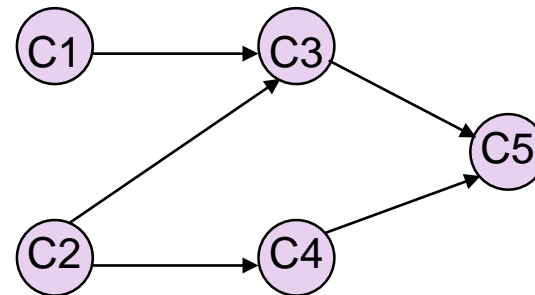
C2 C4 C1

Ordenación topológica - (versión 2)

→ Tomando los vértices con $\text{grado_in} = 0$ de una Pila (o Cola)

Grado_in

	C1	C2	C3	C4	C5
	0	0	2	1	2
	0	0	1	0	2
	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1



Pila **P** : **C1** – **C2**

: C1 // C1 – **C4**

: C1 // C1

: // **C3**

: //

Sort Topológico :

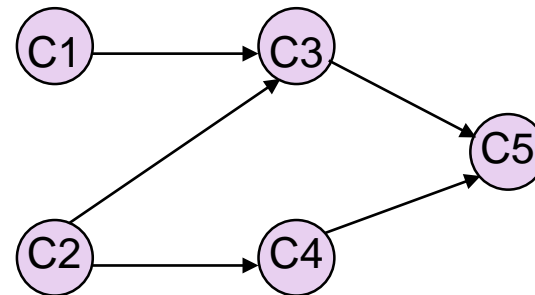
C2 C4 C1 C3

Ordenación topológica - (versión 2)

→ Tomando los vértices con $\text{grado_in} = 0$ de una Pila (o Cola)

Grado_in

	C1	C2	C3	C4	C5
	0	0	2	1	2
	0	0	1	0	2
	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0



Pila **P** : **C1** – **C2**

: C1 // C1 – **C4**

: C1 // C1

: // **C3**

: // **C5**

Sort Topológico :

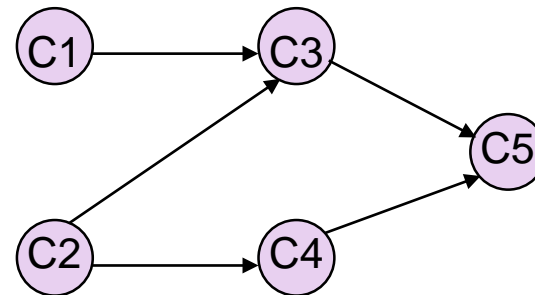
C2 C4 C1 C3

Ordenación topológica - (versión 2)

→ Tomando los vértices con $\text{grado_in} = 0$ de una Pila (o Cola)

Grado_in

	C1	C2	C3	C4	C5
	0	0	2	1	2
	0	0	1	0	2
	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0



Pila **P** : **C1** – **C2**

: C1 // C1 – **C4**

: C1 // C1

: // **C3**

: //

Sort Topológico :

C2 C4 C1 C3 C5

Ordenación topológica - (versión 2)

Calcular $\text{Grado_in}(v_i) \forall v_i \in V$
Apilar (o encolar) los v_i con
 $\text{Grado_in}(v_i) = 0$

```
int sortTopologico( ){
    int numVerticesVisitados = 0;
    while(haya vertices para visitar){
        if(no existe vertice con grado_in = 0)
            break;
        else{
            seleccionar un vertice v con grado_in = 0;
            visitar v; //mandar a la salida
            numVerticesVisitados++;
            borrar v y todas sus aristas salientes;
        }
    }

    return numVerticesVisitados;
}
```

Ordenación topológica - (versión 2)

Calcular $\text{Grado_in}(v_i) \forall v_i \in V$
Apilar (o encolar) los v_i con
 $\text{Grado_in}(v_i) = 0$

```
int sortTopologico( ){  
    int numVerticesVisitados = 0;  
    while(haya vertices para visitar){  
        if(no existe vertice con grado_in = 0)  
            break;  
        else{  
            seleccionar un vertice v con grado_in = 0;  
            visitar v; //mandar a la salida  
            numVerticesVisitados++;  
            borrar v y todas sus aristas salientes;  
        }  
    }  
  
    return numVerticesVisitados;  
}
```

Tomar el
vértice de la
Pila (o Cola)

Decrementar el grado
de entrada de los
adyacentes de v. Si
llegó a 0, apilarlo (o
encolarlo)

Ordenación topológica - (versión 2)

El tiempo total del algoritmo es:

Calcular $\text{Grado_in}(v_i) \forall v_i \in V$
Apilar (o encolar) los v_i con
 $\text{Grado_in}(v_i) = 0$

$O(|V| + |E|)$

$O(1)$

```
int sortTopologico( ){
    int numVerticesVisitados = 0;
    while(haya vertices para visitar){
        if(no existe vertice con grado_in = 0)
            break;
        else{
            seleccionar un vertice v con grado_in = 0;
            visitar v; //mandar a la salida
            numVerticesVisitados++;
            borrar v y todas sus aristas salientes;
        }
    }

    return numVerticesVisitados;
}
```

$|V|$
 $\sum_{i=1}$

Orden del
número de
aristas de v

Ordenación topológica - (versión 2)

El tiempo total del algoritmo es:

```
int sortTopologico( ){
    int numVerticesVisitados = 0;
    while(haya vertices para visitar){
        if(no existe vertice con grado_in = 0)
            break;
        else{
            seleccionar un vertice v con grado_in = 0;
            visitar v; //mandar a la salida
            numVerticesVisitados++;
            borrar v y todas sus aristas salientes;
        }
    }

    return numVerticesVisitados;
}
```

Calcular $\text{Grado_in}(v_i) \forall v_i \in V$
Apilar (o encolar) los v_i con
 $\text{Grado_in}(v_i) = 0$

$O(|V| + |E|)$

$O(1)$

$O(|V| + |E|)$

Orden del
número de
aristas de v

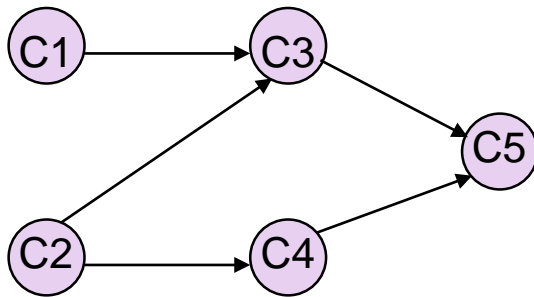
Ordenación topológica - (versión 3)

- *En esta versión se aplica el recorrido en profundidad.*
- *Se realiza un recorrido DFS, marcando cada vértice en post-orden, es decir, una vez visitados todos los vértices a partir de uno dado, el marcado de los vértices en post-orden puede implementarse según una de las sig. opciones:*
- a) numerándolos antes de retroceder en el recorrido; luego se listan los vértices según sus números de post-orden de mayor a menor.*
 - b) colocándolos en una pila P, luego se listan empezando por el tope.*

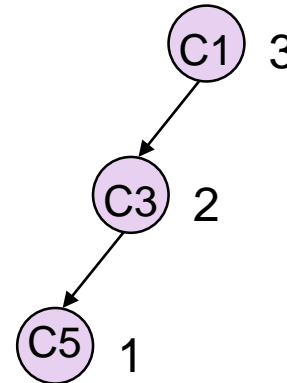
Ordenación topológica - (versión 3)

→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **a)** - numerando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

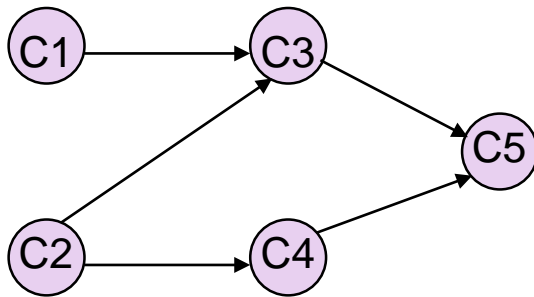


Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1

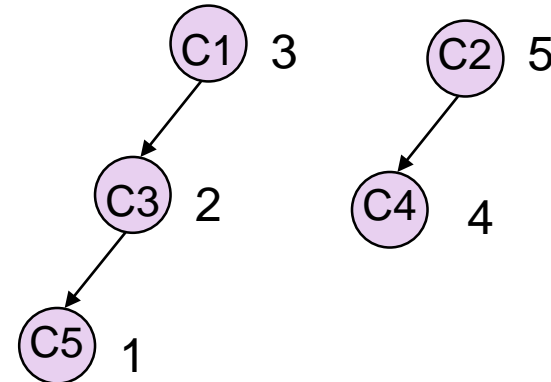
Ordenación topológica - (versión 3)

→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **a)** - numerando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

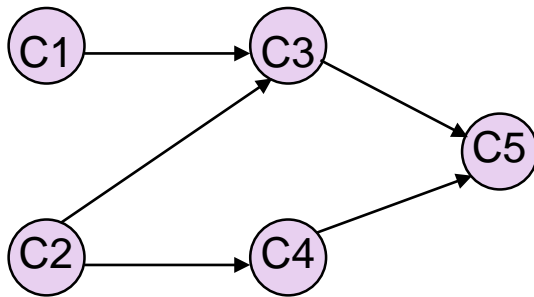


Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1

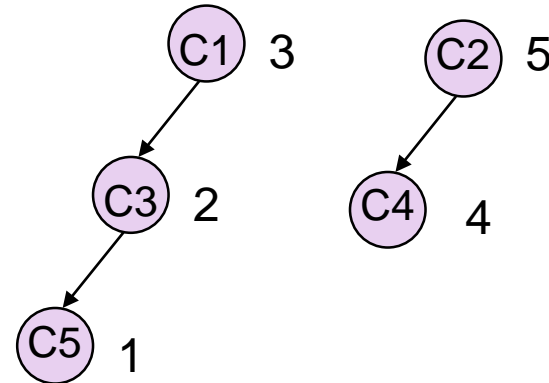
Ordenación topológica - (versión 3)

→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

Opción **a)** - numerando los vértices



Grafo dirigido acíclico



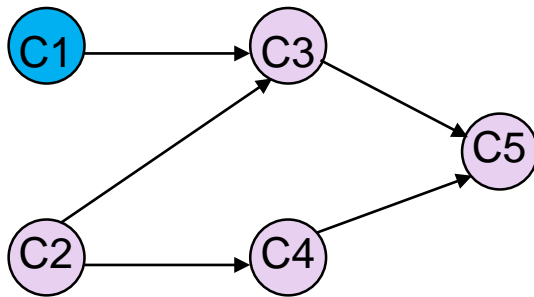
Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1

Ordenación Topológica: C2 C4 C1 C3 C5

Ordenación topológica - (versión 3)

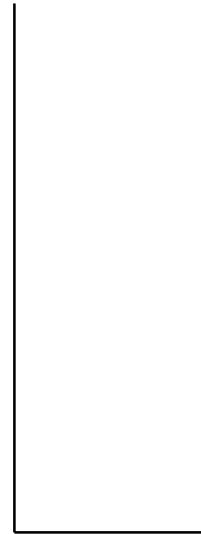
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:

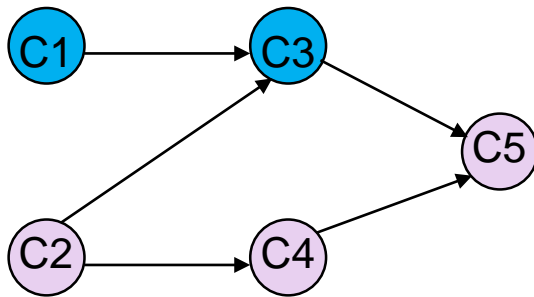


- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación topológica - (versión 3)

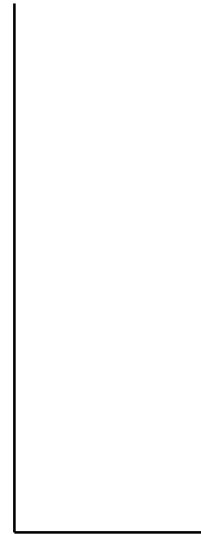
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:

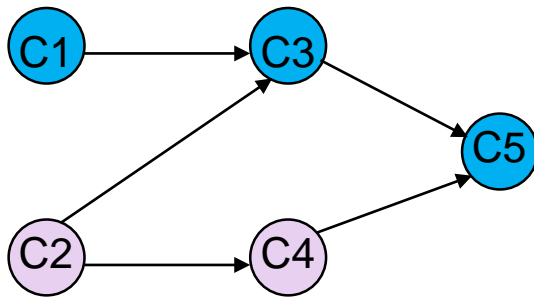


- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación topológica - (versión 3)

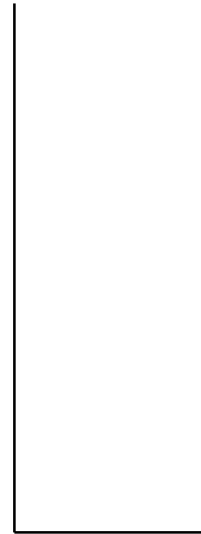
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:

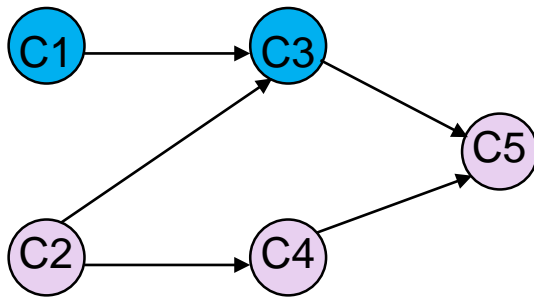


- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación topológica - (versión 3)

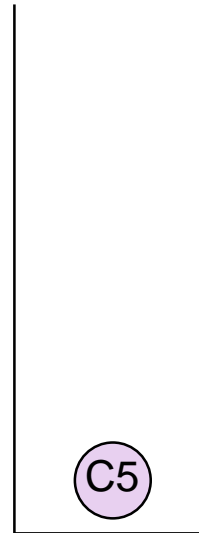
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:

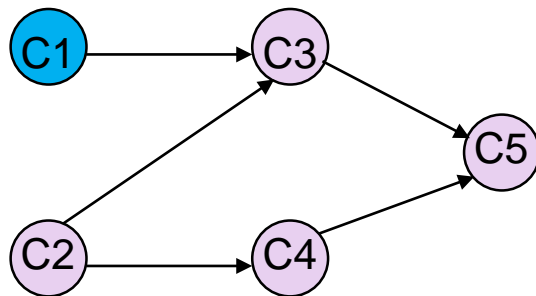


- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación topológica - (versión 3)

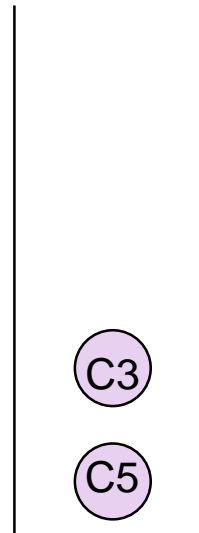
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:

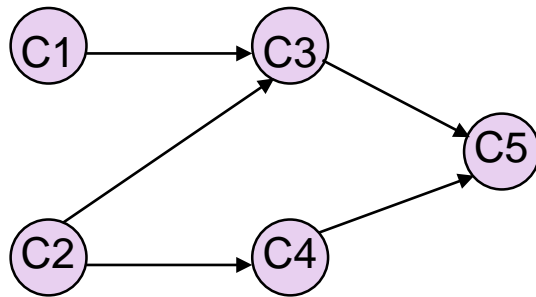


- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación topológica - (versión 3)

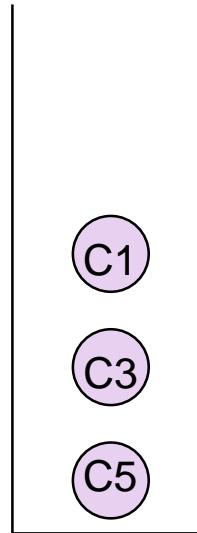
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:

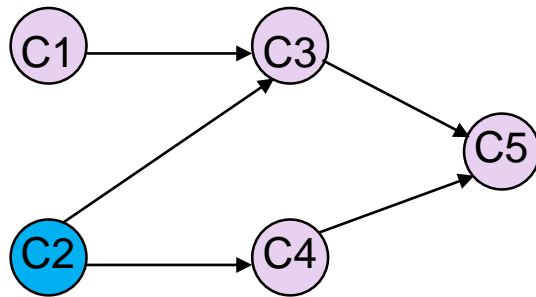


- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación topológica - (versión 3)

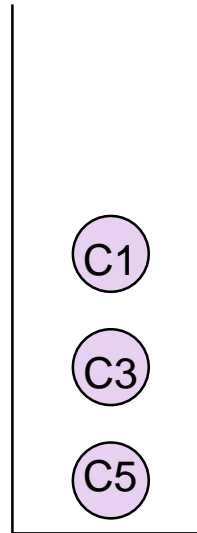
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:

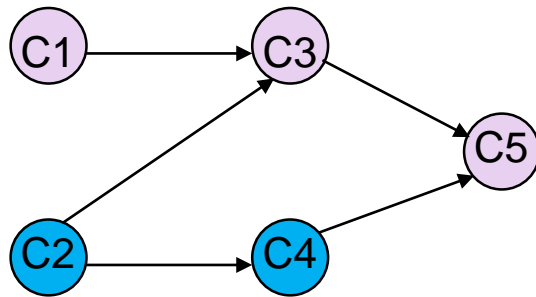


- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación topológica - (versión 3)

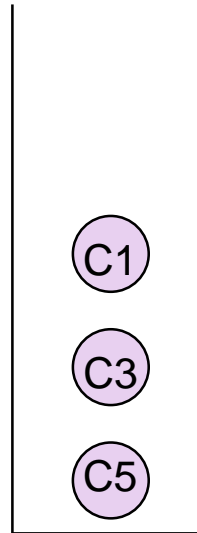
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:

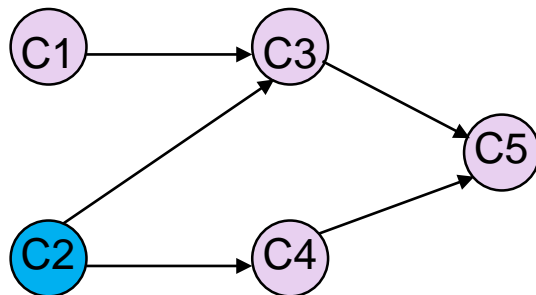


- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación topológica - (versión 3)

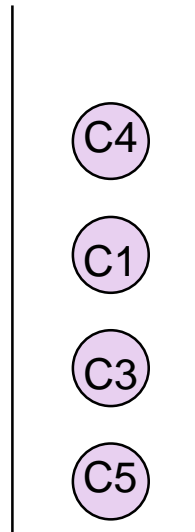
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:

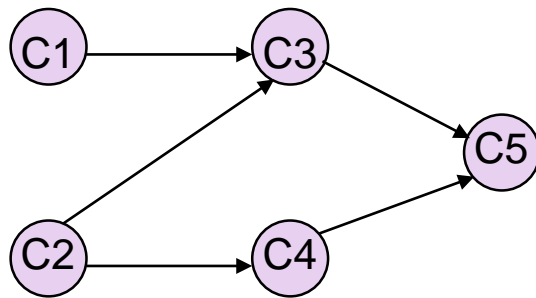


- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación topológica - (versión 3)

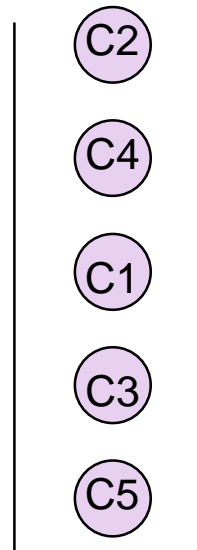
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

Opción **b)** - *apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:

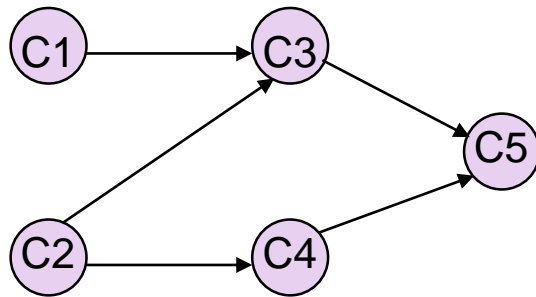


- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación topológica - (versión 3)

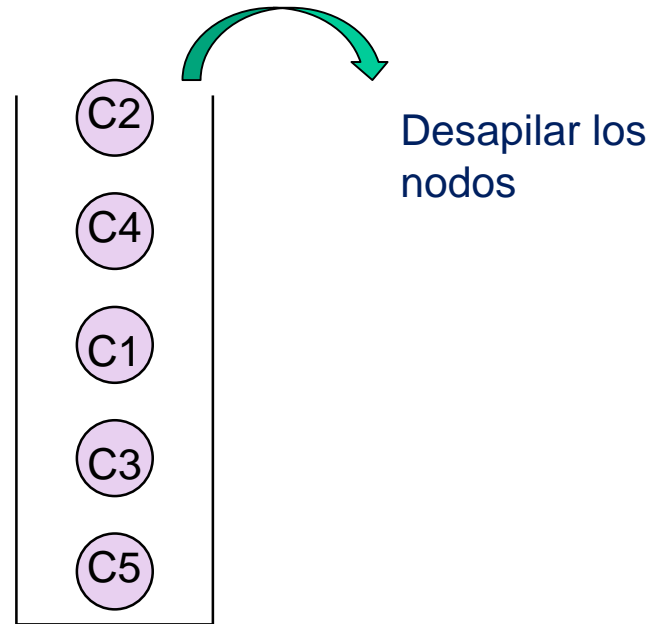
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:



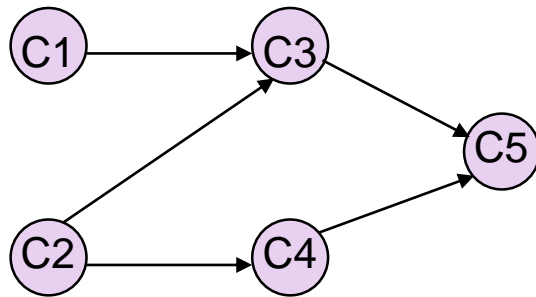
- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación Topológica:

Ordenación topológica - (versión 3)

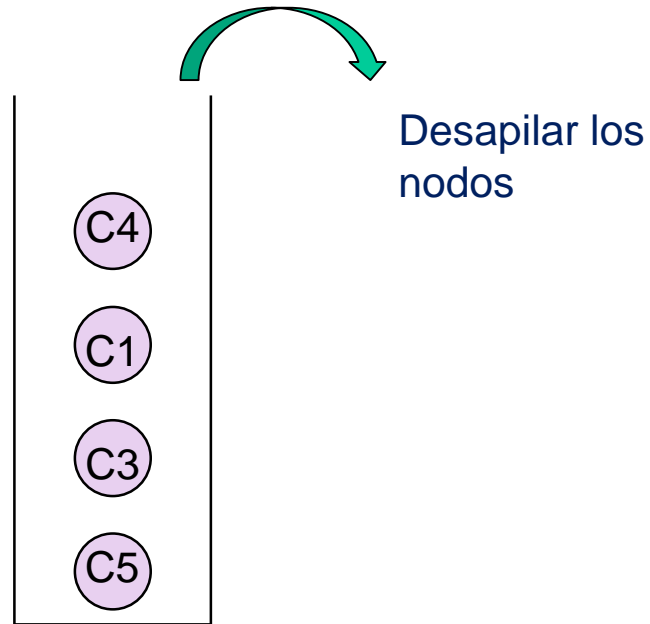
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:



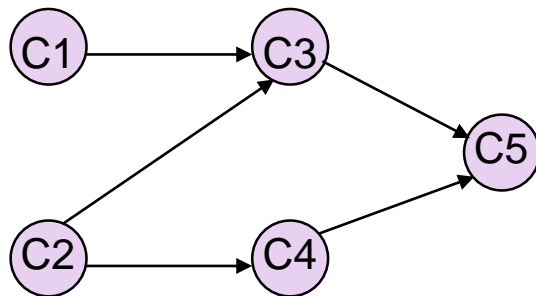
- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación Topológica: C2

Ordenación topológica - (versión 3)

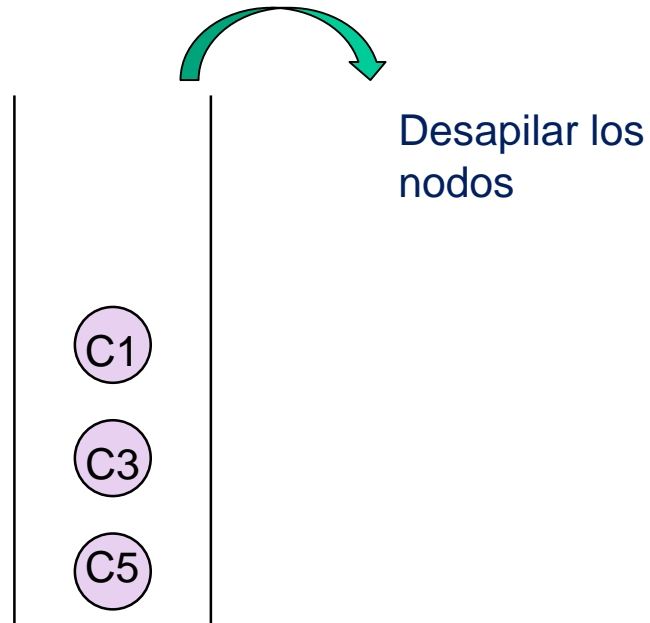
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:



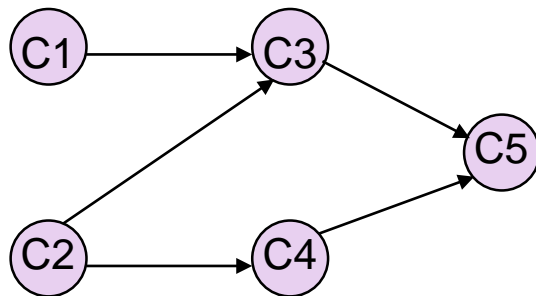
- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación Topológica: C2 C4

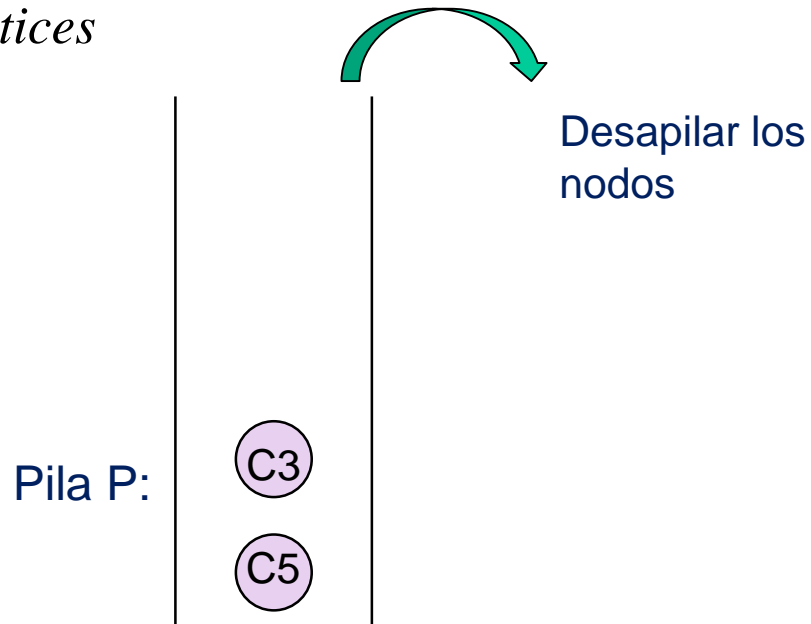
Ordenación topológica - (versión 3)

→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico



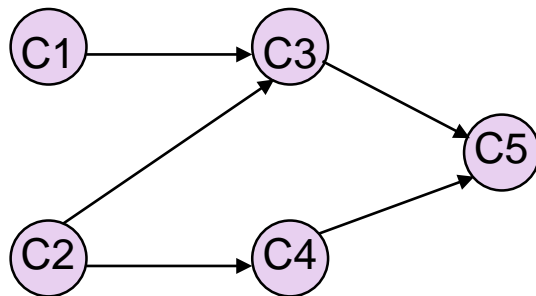
- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación Topológica: C2 C4 C1

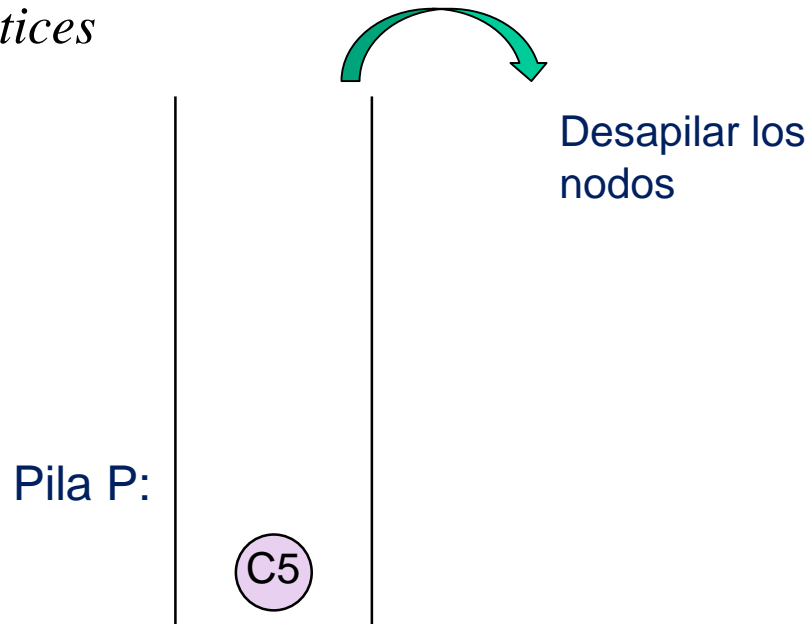
Ordenación topológica - (versión 3)

→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico



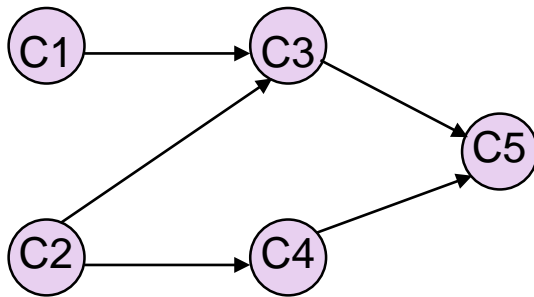
- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación Topológica: C2 C4 C1 C3

Ordenación topológica - (versión 3)

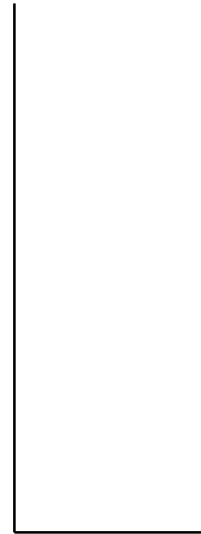
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:



- 1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
- 2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación Topológica: C2 C4 C1 C3 C5