Алгоритм Δ-раскраски графа

Иван Подлужный

4 октября 2016 г.

Введение

- Здесь будет представлен алгорим Δ-списочной раскраски графа G, где Δ – максимальная степень вершины данного графа G.
- Граф G предполагается без петель и кратных рёбер.

Основные понятия

Определение

Пусть $\upsilon \in \mathsf{V}(G)$. *Списком цветов* υ *назовём множество* $\mathscr{P}_\upsilon = \{a_1, a_2, \dots a_n\} \subset \mathbb{N}$.

Определение

Правильной вершинной списочной раскраской G *назовём* $f : \mathsf{V}(G) \to \mathbb{N}$ *такое что*

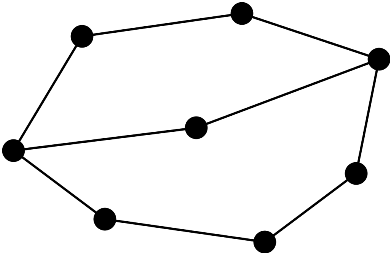
- $\forall \upsilon \in \mathsf{V}(G) \quad f(\upsilon) \in \mathscr{P}_\upsilon$
- $\forall \upsilon, \omega \in \mathsf{V}(G) \quad \upsilon\omega \in \mathsf{E}(G) \Rightarrow f(\upsilon) \neq f(\omega)$

Пусть $g : \mathsf{V}(G) \to \mathbb{N}$ *и пусть* $\#\mathscr{P}_\upsilon = g(\upsilon)\ \forall \upsilon \in \mathsf{V}(G)$. *Тогда* G g*-списочно раскрашиваем, если существует его правильная раскраска.*

Основные понятия

Определение

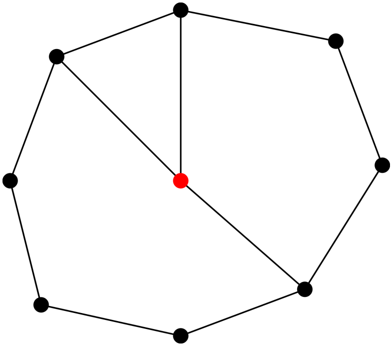
Будем называть граф G $\theta(a, b, c)$-графом, если он состоит из 3-х непересекающихся простых путей $P_{a+1}, P_{b+1}, P_{c+1}$, соединяющих 2 некоторые вершины υ и $\omega \in V(G)$.



Основные понятия

Определение

Будем называть граф G зонтиком, если он состоит из цикла $C = \{v_1, \dots v_k\}$, некоторой вершины $\omega \in \mathrm{V}(G)$, $\omega \in \mathrm{V}(C)$ и рёбер $\omega v_i \in \mathrm{E}(G)$, где i пробегает строго больше одного значения. Если i пробегает все значения, то G будем называть колесом.



Две предварительные леммы

Лемма

Пусть G θ-граф. Тогда $H < G$, где H или чётный цикл, или $\theta(1, b, c)$-граф.

Лемма

Пусть G зонтик. Тогда $\exists H$ $H < G$, где H или чётный цикл, или $\theta(1, b, c)$-граф.

Определение

Пусть G – граф, тогда G – граф Брукса, если $G \neq K_n$, $G \neq C_{2k+1}$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$.

Определение

Назовём G двусвязным, если $\forall \upsilon, \omega \in V(G)$ $\exists$ P_1, P_2 – простые пути:
1) конечные и начальные вершины P_1 и P_2 совпадают
2) $V(P_1) \cap V(P_2) = \{\upsilon, \omega\}$

Теорема

Пусть G двусвязный граф Брукса. Тогда $\exists H$ $H < G$, где H или чётный цикл, или $\theta(1, b, c)$-граф.

Дерево блоков и точек сочленения

Определение

- *Пусть G – граф, тогда $\omega \in \mathrm{V}(G)$ есть точка сочленения, если $G - \omega$ не связен.*
- *Блок – максимальный подграф G, не содержащий точек сочленения.*
- *Пусть $B_G = \{B_1, \dots B_n\}$ множество блоков G, а $C_G = \{c_1, \dots, c_n\}$ множество точек сочленения графа. Тогда граф $BC(G)$ определённый как $\mathrm{V}(BC(G)) = B_G \cup C_G$, $\mathrm{E}(BC(G)) = \{(B_i, c_j) | c_j \in B_i\}$*

Дерево блоков и точек сочленения

Лемма

$BC(G)$ – дерево и каждый его лист отвечает некоторому $B_i \in B_G$

Определение

Блок B_i, отвечающий листу в $BC(G)$ назовём крайним.

Блоки и графы Брукса

Определение

Максимальную степень вершины в графе будем обозначать $\Delta(G) = \max\limits_{v \in (G)} d_G(v)$, *минимальную* $\delta(G) = \min\limits_{v \in (G)} d_G(v)$.

Определение

Граф G *регулярен, если* $\delta(G) = \Delta(G)$

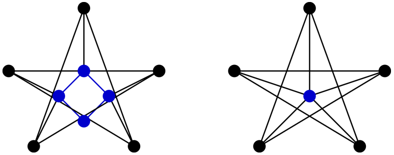
Теорема

Пусть G *регулярный граф Брукса. Тогда* $\exists B_i < G$: B_i *блок и* B_i *граф Брукса.*

Свойства списочной раскрашиваемости

Теорема

Пусть связный граф G содержит связный $I < G$ d_I-списочно раскашиваемый граф. Тогда G d_G-списочно раскрашиваем.



Три замечания

Замечание

Пусть C_{2k} цикл чётной длинны. Тогда он d_G-раскрашиваем.

Замечание

$\theta(a, b, c)$-граф d_G-раскрашиваем.

Замечание

Пусть W зонтик. Тогда он d_G-раскрашиваем.

Раскраска нерегуляргных графов

Лемма

Пусть G *нерегулярный граф и* $d_G(v_0) \neq \Delta(G)$ $v \in \mathsf{V}(G)$.
Определим:

$$d'(v) = \begin{cases} d(v) & \forall v \in \mathsf{V}(G)\, v \neq v_0 \\ d(v)+1 & v = v_0 \end{cases}.$$

Тогда G $d'(G)$*-раскрашиваемый.*

Основная теорема

Теорема

Пусть G граф Брукса. Тогда он $\Delta(G)$-списочно раскрашиваем.

План доказательства

- Выделить в G компоненты связности.
- Проверить G на регулярность.
- Найти в G крайний блок H.
- Найти в H чётный цикл или θ-граф U.
- Покрасить $G \cdot U$, а затем совместить раскраску с U.

Реализация

- Проверку на сязность осуществляется обходом в глубину с последующим отсечением компонент связности использует не более $O(v+e)$ операций.
- Проверка связной компоненты на регулярность использует $O(v^2)$ операций.
- Поиск крайнего блока в G реализуется с помощью поиска в глубину и использует не более $O(v+e)$ операций.
- Нахождение в G цикла также осуществляется за поиском в глубину и также использует не более $O(v+e)$ операций.
- Покрасить $G \cdot U$ поиском в глубину, а затем покрасить U занимает $O(v+e)$ по числу операций.

Реализация случая нечётного цикла

- Алгоритм поиска максимальной клики, содержащей данный треугольник реализуется посредством очереди и рекурсии и занимает не более $O(v + e)$ операций.
- Алгорим поиска кратчайшего пути, огибающего заданное множество использует поиск в ширину и работает за $O(v + e)$.

Использованная литература

- S. Skulrattanakulchai Δ-*List vertex coloring in linear time.*, Information Processing Letters. — 2006. — Vol. 98, Iss. 3. — Pg. 101–106
- H.N. Gabow, S. Skulrattanakulchai *Coloring algorithms on subcubic graphs,*, Internat. J. Found. Comput. Sci. 15 (1) (2004) 21–40.