

Oscillazioni accoppiate

Lorenzo Cavuoti
Alice Longhena

26 maggio 2017

1 Scopo dell'esperienza

Studiare il moto di due pendoli, sia singolarmente che simultaneamente e osservare e studiare il fenomeno dei battimenti.

2 Cenni teorici

Un singolo pendolo libero di oscillare si muove con pulsazione angolare

$$w_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad (1)$$

idealmente costante nel tempo; in presenza di attrito non trascurabile, tuttavia, lo smorzamento diventa significativo. L'ampiezza si riduce secondo la legge:

$$\theta_0(t) = \theta_0(0)e^{-\lambda t} \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \quad (2)$$

Se invece il sistema coinvolge due oscillatori accoppiati il moto risulta più complicato ma può essere interamente descritto studiando i due modi normali di oscillazione: in fase ed in controfase, di pulsazione rispettivamente w_s e w_c .

$$x(t) = A_0[\cos(w_f t + \phi_1) + \cos(w_c t + \phi_2)] \quad (3)$$

o, per le formule di prostaferesi

$$x(t) = 2A_0(\cos[\frac{(w_c + w_f)t}{2} + \frac{(\phi_2 + \phi_1)}{2}] \cos[\frac{(w_c - w_f)t}{2} + \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{2}]) \quad (4)$$

dove

$$w_p = \frac{w_c + w_f}{2} \approx w_c, w_f \quad (5)$$

è la pulsazione dell'oscillazione portante, mentre

$$w_b = \frac{w_c - w_f}{2} \ll w_c, w_f \quad (6)$$

risulta la pulsazione modulante corrispondente a un'oscillazione armonica di periodo molto più grande, che descrive il fenomeno dei battimenti ovvero la variazione periodica dell'ampiezza massima di oscillazione.

3 Apparato sperimentale e strumenti

- due pendoli accoppiati (in cui consideriamo tutta la massa concentrata nel corpo cilindrico all'estremità)
- una molla con costante elastica piccola
- uno smorzatore galleggiante
- programma di acquisizione

4 Descrizione delle misure

Per prima cosa abbiamo tenuto i pendoli fermi nella posizione di equilibrio e abbiamo preso un set di misure, così da avere una stima dell'errore di misura di arduino. Poi abbiamo lasciato andare un pendolo senza galleggiante così da avere una stima iniziale della pulsazione. Successivamente abbiamo aggiunto il galleggiante e preso un altro set di misure, così da ricavare la costante di smorzamento λ . Una volta fatto questo abbiamo collegato i pendoli con una molla e li abbiamo fatti oscillare nei due moti normali, ovvero in fase e in controfase, prendendo un set di dati per entrambi. Infine, sempre con la molla attaccata, abbiamo lasciato un pendolo fermo mettendo in oscillazione l'altro, quello che si osserva è il fenomeno dei battimenti, anche per questo moto abbiamo preso un set di misure.

5 Analisi dei dati

5.1 Oscillatore singolo

Analizzando l'oscillazione senza galleggiante (e quindi non smorzata) abbiamo ricavato come parametro di best fit la pulsazione, la quale risulta $w_0 = 4.4429 \pm 0.0002 \text{ s}^{-1}$.

Successivamente abbiamo analizzato il moto del pendolo con il galleggiante ed eseguendo un fit con la funzione `curve_fit` del modulo `scipy` di `python` abbiamo stimato la pulsazione risultante w_d e il tempo di decadimento dell'ampiezza τ

$$w_d = 4.4223 \pm 0.0003 \text{ [s}^{-1}\text{]} \quad \tau = \frac{1}{\lambda} = 4.01 \cdot 10^{-2} \pm 0.03 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

da cui $\frac{T_0}{T_d} = \frac{w_d}{w_0} = 0.9954$, il periodo risulta aumentato di un fattore 0.0046, per cui non risulta cambiato significativamente, mentre l'ampiezza dopo 10 secondi risulta ridotta di circa 34 unità di arduino, come si può osservare dal grafico (inserire grafico).

5.2 Oscillatore doppio

Per quanto riguarda l'oscillazione accoppiata abbiamo iniziato studiando i modi normali di oscillazione:

- oscillazione in fase: i pendoli sono rilasciati dalla stessa altezza e dalla stessa parte rispetto alla verticale.
- oscillazione in controfase: rilasciati dalla stessa altezza ma da parti opposte rispetto alla verticale.

Nell'esperienza i pendoli erano collegati da una molla e durante l'oscillazione il sistema ha risentito della forza elastica per cui non risulta propriamente in fase. La pulsazione è stimata come parametro di best fit (abbiamo ricavato il parametro per entrambi i pendoli e poi fatto la media) risulta $w_f = 4.4359 \pm 0.0005 \text{ s}^{-1}$ e il rapporto $\frac{w_f}{w_0} = 0.998$ (inserire errore), da cui si deduce che il comportamento degli oscillatori in fase sia equivalente a quello di un oscillatore singolo, in quanto l'effetto della molla risulta, in linea teorica, annullato.

Con la stessa funzione abbiamo effettuato un fit con i dati ricavati dal secondo modo di oscillazione, sempre facendo la media dei due parametri si ottiene una pulsazione $w_c = 4.5689 \pm 0.0003 \text{ s}^{-1}$ il cui valore verifica $w_c > w_f$, in accordo con la teoria.

5.3 Battimenti

L'ultima serie di dati riguarda il moto più generale dell'oscillatore doppio il quale è dato dalla somma dei due modi normali secondo la (3). Usando questa volta la (4) come modello per il fit abbiamo ricavato i parametri w_p e w_b e li abbiamo confrontati coi loro valori teorici calcolati in base a w_c e w_f stimati precedentemente.

(s^{-1})	valore di fit	valore teorico
w_p	$4.50906 \pm 6 \cdot 10^{-5}$	4.5024 ± 0.0004
w_b	$0.06687 \pm 7 \cdot 10^{-5}$	0.0664 ± 0.0004
$\frac{w_p \text{fit}}{w_p \text{teorico}} = 1.001$		$\frac{w_b \text{fit}}{w_b \text{teorico}} = 1.005$

La corrispondenza si può dire verificata.

6 Conclusioni

Analizzando i dati sull'oscillazione singola il valore di ω_0 ricavato risulta diverso dalla teoria, infatti $\omega_0 = 4.4429 \pm 0.0002 [\text{s}^{-1}]$.

Mentre il valore previsto dalla teoria è:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} = \sqrt{\frac{mgl}{\frac{1}{2}mr^2 + ml^2}} = \sqrt{\frac{gl}{\frac{r^2}{2} + l^2}} = 4.383 \pm 0.004 [s^{-1}]$$

Questa discrepanza è spiegabile con il fatto che il nostro fit non considera alcuni effetti come l'attrito dell'aria o le forze applicate nel perno, inoltre il momento d'inerzia è stato calcolato trascurando lo spessore dell'asta che compone il pendolo (approssimando il sistema ad un filo con un cilindro appeso all'estremità).

Per il resto si può notare che in alcuni grafici relativi ai residui i dati non risultano distribuiti casualmente attorno al modello, ad esempio quelli dell'oscillatore singolo non smorzato sembrano crescere nel tempo, o addirittura quelli dei modi normali sembrano oscillare. Questo inconveniente è probabilmente legato al fit, parti del modello che abbiamo utilizzato potrebbero non rispettare l'effettivo comportamento dell'oscillatore; ad esempio per l'oscillatore singolo abbiamo aggiunto un fattore di smorzamento esponenziale per comprendere tutti gli eventuali effetti legati ad attrito dell'aria, del giunto o al fatto che quando il pendolo viene rilasciato crea un lieve moto ondoso nella vaschetta sottostante (anche senza galleggiante), ma non siamo sicuri che la nostra scelta rispecchi le conseguenze di questi effetti. Nonostante questo i parametri risultanti dal fit sono in buon accordo con la teoria.