

Corso di Laurea in Astronomia

Laurea Triennale

**DISPENSE DI
ESPERIMENTAZIONI DI
FISICA 2**

A.A. 2013-2014

Indice

1	Introduzione	5
1.1	Indice di rifrazione	5
1.2	Riflessione e rifrazione	6
1.3	Cammino ottico	7
2	Diottro sferico	13
2.1	Definizione dei fuochi	15
2.2	Formazione dell'immagine	17
3	Lenti	21
3.1	Lenti sottili	21
3.2	Lenti spesse	29
3.3	Esempi	35
3.3.1	Lente biconvessa simmetrica	35
3.3.2	Lente biconvessa asimmetrica	35
3.3.3	Lente divergente simmetrica	36
3.3.4	Lente piano-convessa	37
3.3.5	Lente menisco-convergente	38
3.3.6	Lente convesso-concava	38
3.3.7	Lente concentrica	39
3.3.8	Considerazioni	40
3.4	Lenti sottili separate	41
3.5	I doppietti	42
3.6	Stop e pupille	45
4	Specchio sferico	49
5	Le aberrazioni	55
5.1	Aberrazione sferica	55
5.1.1	Esempio	61
5.1.2	Aberrazione sferica nella lente sottile	62
5.2	Aberrazione cromatica	65

5.2.1	Esempio	71
5.2.2	Doppietto acromatico	71
5.2.3	Oculare acromatico	72
6	Teoria di Seidel delle aberrazioni	75
6.1	L'equazione iconale	75
6.2	Il teorema di Malus	78
6.2.1	Esempio	82
6.3	La funzione di aberrazione	84
6.4	Le 5 aberrazioni primarie di Seidel	94
6.4.1	Aberrazione sferica	94
6.4.2	Aberrazioni di astigmatismo e curvatura di campo	95
6.4.3	Aberrazione di distorsione	97
6.4.4	Aberrazione di coma	98
6.4.5	Riassunto	100
7	Telescopi	103
7.1	Il telescopio riflettore	105
7.2	Telescopio Newton	110
7.3	Telescopio Cassegrain	112
7.4	Telescopio Ritchey-Chrétien	114
7.5	Telescopio Schmidt	116
8	Esperienze	125
8.1	Banco ottico	125
8.1.1	Cavalieri portalentini	126
8.1.2	Cavaliere portaschermo	127
8.1.3	Lenti e diaframmi	128
8.2	Misura della focale di una lente convergente sottile	131
8.2.1	Metodo della collimazione	131
8.2.2	Metodo dei punti coniugati	132
8.2.3	Metodo di Bessel	134
8.2.4	Variante di Silbermann	135
8.3	Misura della focale di una lente divergente sottile	136
8.3.1	Metodo della divergenza di un fascio collimato	136
8.3.2	Metodo dei minimi quadrati	139
8.4	Misura dell'aberrazione sferica di una lente convergente sottile	139
8.5	Misura dell'aberrazione cromatica	143

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Indice di rifrazione

Sappiamo che la luce si propaga sottoforma di onda elettromagnetica:

$$\psi(t, \vec{r}) = A \cos(\varphi + \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (1.1)$$

dove A è l'ampiezza dell'onda, φ la costante di fase, ω la frequenza e infine $k = 2\pi/\lambda$ il numero d'onda, e che la sua velocità dipende dal mezzo in cui essa si propaga. In particolare, definiamo indice di rifrazione del mezzo n la quantità:

$$n = \frac{c}{v_p} \quad (1.2)$$

dove $v_p = \omega/k$ è la velocità di fase.

L'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda, cioè $n = n(\lambda)$. Nel 1836 Cauchy determinò una relazione empirica fra la lunghezza d'onda e l'indice di rifrazione:

$$n(\lambda) = B + \frac{C}{\lambda^2}$$

poi ripresa e sviluppata da Sellmeier nel 1871:

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2}$$

dove i termini B e C , B_1 , B_2 , C_1 e C_2 dipendono dal tipo di materiale. Inoltre, B , B_1 e B_2 sono adimensionali, mentre C , C_1 e C_2 sono in unità di μm^2 (Fig. 1.1).

L'indice di rifrazione vale 1 nel vuoto, praticamente 1 nell'aria ($n_{\text{aria}} = 1.000293$) e nella gran parte dei gas, mentre è in generale maggiore di 1 nei liquidi ($n_{\text{acqua}} = 1.333$) e nei solidi trasparenti ($n_{\text{diamante}} = 2.419$).

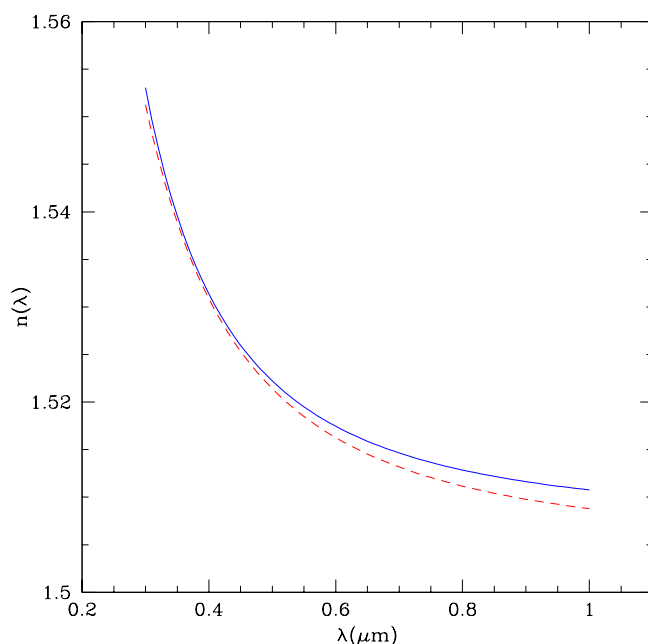


Figura 1.1: Indice di rifrazione per un vetro BK7. La curva rossa tratteggiata è ottenuta con la relazione di Cauchy, mentre quella continua blu è ottenuta con la relazione di Sellmeier.

1.2 Riflessione e rifrazione

Nelle più semplici applicazioni dell'ottica le grandezze in gioco sono molto maggiori della lunghezza d'onda della radiazione considerata, e quindi possiamo assumere che la luce si propaghi in linea retta, nonostante il suo comportamento ondulatorio. Parliamo perciò di **ottica geometrica**.

Quando inviamo un raggio di luce verso una superficie opaca e riflettente, il raggio verrà riflesso con un angolo i' rispetto alla normale alla superficie pari all'angolo di incidenza i :

$$i = i' \quad (1.3)$$

Inoltre, raggio incidente, raggio riflesso e normale alla superficie, giacciono tutti nello stesso piano (Fig. 1.2).

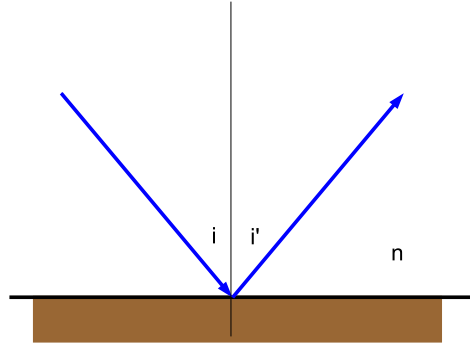


Figura 1.2: Rappresentazione schematica della riflessione.

Quando un raggio luminoso attraversa due mezzi omogenei e trasparenti con indice di rifrazione diverso, subisce una deviazione nella direzione di propagazione. Anche in questo caso, raggio incidente, raggio rifratto e normale alla superficie di separazione sono contenuti nello stesso piano (Fig. 1.3).

La **legge di Snell** fornisce la relazione fra gli angoli di incidenza i e di rifrazione r :

$$n \sin i = n' \sin r \quad (1.4)$$

dove n e n' sono gli indici di rifrazione.

In realtà la rifrazione avviene solo se il raggio è inclinato rispetto alla normale della superficie di separazione fra i due mezzi. Nel caso in cui sia parallelo alla normale, cioè quando $i = 0$ non c'è deviazione.

Dalla formula di Snell è possibile ricavare l'angolo critico i_c oltre il quale si avrà riflessione totale. Questo angolo è tale per cui $r = 90^\circ$, per cui:

$$i_c = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right)$$

Per $i > i_c$ si ha riflessione totale, ma questo può avvenire solo se $n' < n$, cioè nel passaggio da un mezzo più denso a uno meno denso.

1.3 Cammino ottico

Il cammino d di un raggio di luce che si propaga in un mezzo con indice di rifrazione n , vale:

$$d = v \cdot t = \frac{c}{n} \cdot t$$

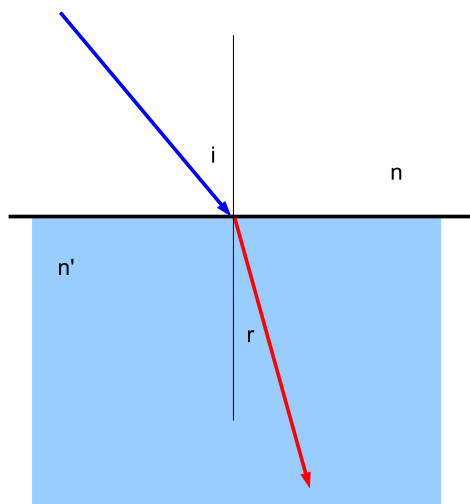


Figura 1.3: Rappresentazione schematica della rifrazione.

da cui

$$nd = ct$$

Il prodotto $l = nd$ è detto **cammino ottico** e come si vede dalla relazione precedente rappresenta la distanza che la luce percorre nel vuoto nello stesso tempo impiegato per percorrere la distanza d nel mezzo. Più in generale quando la luce attraversa vari mezzi con indici di rifrazione diversi:

$$l = \sum_i n_i \cdot d_i$$

Nel 1650 circa Pierre de Fermat enunciò un fondamentale principio che porta il suo nome, **principio di Fermat**, secondo cui

Il percorso fra due punti preso da un raggio di luce è quello che è attraversato nel minor tempo.

Attraverso il principio di Fermat possiamo descrivere le proprietà di riflessione e rifrazione, e possiamo anche derivare la legge di Snell, come vediamo di seguito.

Consideriamo un raggio di luce che emesso da un punto P raggiunge il punto Q dopo aver toccato in un punto C la superficie riflettente posta al di sotto di P e Q. Assumiamo poi che entrambi i punti si trovino in un mezzo con indice di rifrazione n (Fig. 1.4).

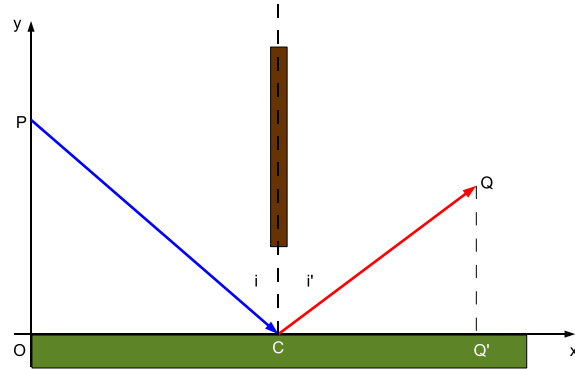


Figura 1.4: P è una sorgente di luce che emette raggi in tutte le direzioni. Uno schermo permette di considerare solo i raggi che colpiscono la superficie riflettente e raggiungono il punto Q.

Il cammino ottico del raggio di luce da P a Q è:

$$l = n \cdot \overline{PC} + n \cdot \overline{CQ}$$

Passiamo alle coordinate cartesiane e assumiamo come variabile x la distanza del punto C dall'origine. Le coordinate dei punti P e Q saranno rispettivamente $(0, y_P)$ e (x_Q, y_Q) . Avremo quindi:

$$l = n \cdot \sqrt{x^2 + y_P^2} + n \cdot \sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}$$

Se il mezzo in cui la luce si propaga è omogeneo e isotropo la traiettoria che richiede il minor tempo coincide con quello della minima distanza. Perciò applicare il principio di Fermat significa calcolare il minimo valore di l :

$$\frac{dl}{dx} = 0$$

da cui:

$$n \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_P^2}} - n \cdot \frac{(x_Q - x)}{\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_P^2}} - \frac{(x_Q - x)}{\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}} = 0$$

$$\sin \hat{OPC} - \sin \hat{Q'QC} = 0$$

$$\sin i = \sin i'$$

e infine:

$$i = i'$$

Calcolando la derivata seconda di l possiamo verificare che si tratta proprio di un minimo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 l}{dx^2} &= n \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y_P^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y_P^2}}}{x^2 + y_P^2} - n \cdot \frac{-\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2} + \frac{(x_Q - x)^2}{\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}}}{(x_Q - x)^2 + y_Q^2} \\ \frac{d^2 l}{dx^2} &= n \cdot \frac{(x^2 + y_P^2) - x^2}{(x^2 + y_P^2)\sqrt{x^2 + y_P^2}} - n \cdot \frac{-[(x_Q - x)^2 + y_Q^2] + (x_Q - x)^2}{[(x_Q - x)^2 + y_Q^2]\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}} \\ \frac{d^2 l}{dx^2} &= n \cdot \frac{y_P^2}{(x^2 + y_P^2)\sqrt{x^2 + y_P^2}} + n \cdot \frac{y_Q^2}{[(x_Q - x)^2 + y_Q^2]\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}} > 0 \end{aligned}$$

Possiamo quindi affermare che la condizione imposta dalla legge della riflessione è quella che minimizza il cammino ottico da P a Q.

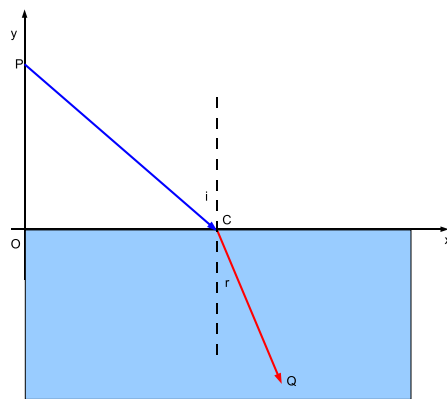


Figura 1.5: Un raggio di luce dal punto P attraversa la superficie di separazione fra due mezzi con indice di rifrazione diverso e arriva nel punto Q.

Consideriamo ora il caso in cui un raggio di luce emesso dal punto P che si trova in un mezzo con indice di rifrazione n raggiunge il punto Q che invece si trova in un mezzo diverso con indice di rifrazione n' , passando attraverso la superficie di separazione dei due mezzi (Fig. 1.5).

Il cammino ottico questa volta sarà:

$$l = n \cdot \sqrt{x^2 + y_P^2} + n' \cdot \sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}$$

Ponendo di nuovo uguale a zero la derivata di l , avremo:

$$n \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_P^2}} - n' \cdot \frac{(x_Q - x)}{\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}} = 0$$

$$n \sin i - n' \sin r = 0$$

e infine:

$$n \sin i = n' \sin r$$

Capitolo 2

Diottro sferico

Si indica con il termine **diottro sferico** una calotta sferica che separa due mezzi con indice di rifrazione diverso. La congiungente il centro di curvatura C della calotta con il vertice V viene chiamata asse principale del diottro.

Sia P il punto-oggetto sull'asse del diottro, n ed n' gli indici di rifrazione dei due mezzi separati dal diottro, Q il punto-immagine, $\overline{PP'}$ un raggio incidente sulla superficie del diottro, $\overline{P'Q}$ il corrispondente raggio rifratto, $\overline{CP'}$ il raggio di curvatura del diottro, i ed r gli angoli di incidenza e di rifrazione, φ , φ' e ω gli angoli compresi rispettivamente fra raggio incidente, raggio rifratto e raggio di curvatura del diottro con l'asse ottico. P e Q vengono chiamati **punti coniugati** e i piani passanti per essi e perpendicolari all'asse ottico (π e π') vengono chiamati **piani coniugati** (Fig. 2.1).

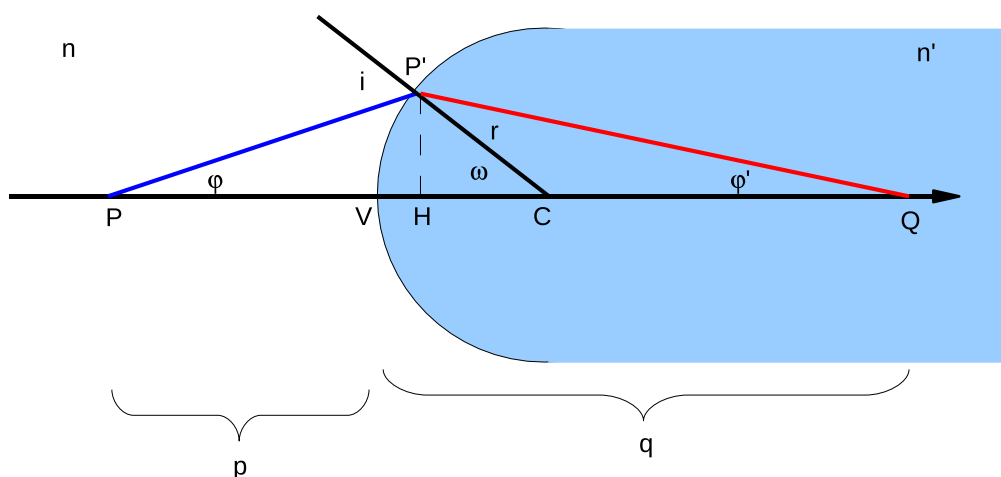


Figura 2.1: Schema ottico del diottro sferico.

Impostiamo la legge della rifrazione di Snell:

$$n \sin i = n' \sin r$$

Dalla figura, possiamo scrivere $i = \varphi + \omega$ e $r = \omega - \varphi'$, e sostituendo si ha:

$$n \sin(\varphi + \omega) = n' \sin(\omega - \varphi')$$

$$n[\sin\omega\cos\varphi + \sin\varphi\cos\omega] = n'[\sin\omega\cos\varphi' - \sin\varphi'\cos\omega]$$

Esprimiamo ora le funzioni trigonometriche in termini di segmenti. Chiamiamo R il raggio di curvatura del diottro.

$$n \left[\frac{\overline{P'H} \overline{PH}}{R \overline{PP'}} + \frac{\overline{P'H} \overline{HC}}{\overline{PP'} \overline{R}} \right] = n' \left[\frac{\overline{P'H} \overline{HQ}}{R \overline{P'Q}} - \frac{\overline{P'H} \overline{HC}}{\overline{P'Q} \overline{R}} \right]$$

Per angoli φ e ω piccoli, $H \rightarrow V$, $\frac{\overline{HC}}{R} \rightarrow 1$, $\frac{\overline{HQ}}{\overline{P'Q}} \rightarrow 1$ e $\frac{\overline{PH}}{\overline{PP'}} \rightarrow 1$. Se ora chiamiamo p la distanza fra l'oggetto e il vertice del diottro e q la distanza fra il vertice del diottro e l'immagine, otteniamo:

$$n \left[\frac{\overline{P'H}}{R} + \frac{\overline{P'H}}{p} \right] = n' \left[\frac{\overline{P'H}}{R} - \frac{\overline{P'H}}{q} \right]$$

$$n \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{p} \right] = n' \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{q} \right]$$

e infine:

$$\boxed{\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{R}} \quad (2.1)$$

che è nota con il nome di **formula di Gauss per il diottro sferico**.

È possibile ottenere lo stesso risultato partendo da:

$$n \sin(\varphi + \omega) = n' \sin(\omega - \varphi')$$

e applicando l'espansione in serie di McLaurin di \sin e \cos arrestate al primo ordine:

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

Da cui:

$$n(\varphi + \omega) \cong n'(\omega - \varphi')$$

$$n\varphi + n\omega = n'\omega - n'\varphi'$$

$$n\varphi + n'\varphi' = (n' - n)\omega$$

E infine:

$$n \frac{\overline{P'H}}{\overline{PH}} + n' \frac{\overline{P'H}}{\overline{HQ}} = (n' - n) \frac{\overline{P'H}}{\overline{HC}}$$

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{R}$$

come ottenuto prima.

L'approssimazione applicata a questa trattazione, chiamata anche **parassiale**, è nota come **approssimazione di Gauss**. Essa consiste non soltanto nel considerare raggi che formano un angolo piccolo con l'asse ottico, ma che oltre a ciò incidono in un' area ristretta intorno al vertice della calotta sferica. Perciò dato un punto-oggetto che si trovi fuori dall'asse ottico, ma non troppo distante da esso, la formula di Gauss per il diottro sferico può servire a calcolare la distanza del punto-immagine. In definitiva possiamo ragionevolmente assumere che solamente in approssimazione di Gauss il diottro sferico si comporti come un sistema stigmatico ed ortoscopico, cioè un sistema in cui tutti i raggi uscenti da P vanno ad incontrarsi in Q e in cui un oggetto che si trovi in un piano π abbia un'immagine simile in un piano π' .

2.1 Definizione dei fuochi

Ripartendo dalla (2.1) e assumendo che l'immagine si formi all'infinito ($q \rightarrow \infty$), si ottiene:

$$\frac{n}{f} = \frac{n' - n}{R}$$

dove $f = p = \overline{FV}$.

Se invece è l'oggetto a trovarsi all'infinito ($p \rightarrow \infty$) avremo:

$$\frac{n'}{f'} = \frac{n' - n}{R}$$

dove $f' = q = \overline{VF'}$.

Le quantità f e f' vengono chiamate **fuochi** del diottro (Fig. 2.2).

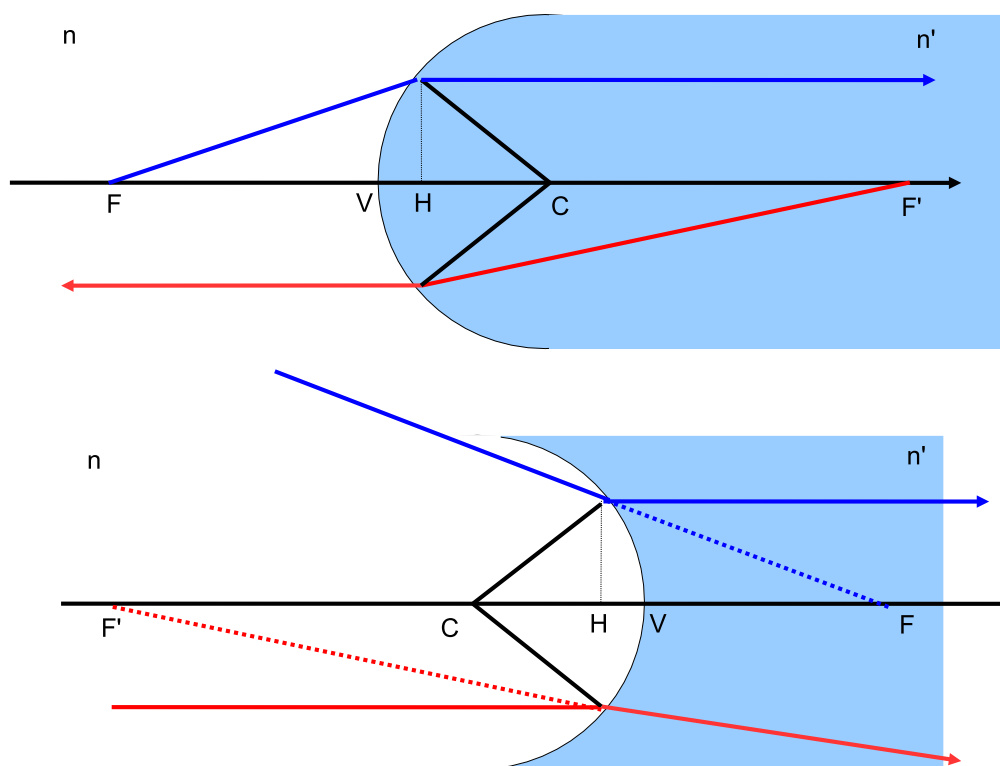


Figura 2.2: In alto uno diottro sferico convergente. I raggi uscenti dal fuoco F o dal fuoco F' diventano un fascio parallelo all'asse ottico. In basso un diottro sferico divergente. I raggi, i cui prolungamenti sono diretti verso il fuoco F , diventano paralleli all'asse ottico.

Si deduce facilmente la relazione fra i fuochi:

$$\frac{n}{f} = \frac{n' - n}{R} = \frac{n'}{f'}$$

da cui:

$$\frac{f'}{f} = \frac{n'}{n} \quad (2.2)$$

cioè la distanza del fuoco dal vertice del diottro è tanto maggiore quanto maggiore è il valore dell'indice di rifrazione del mezzo. Le posizioni dei fuochi sono simmetriche solo nel caso in cui i due mezzi abbiano lo stesso indice di rifrazione, cosa che si verifica nel

caso in cui la superficie sferica del diottro abbia uno spessore molto sottile rispetto alla distanze in gioco.

2.2 Formazione dell'immagine

Per costruire l'immagine di un oggetto esteso possiamo sfruttare le proprietà appena viste del diottro.

Assumiamo per semplicità che l'oggetto si trovi in un piano ortogonale all'asse ottico del diottro. Inoltre l'oggetto abbia un'estremità sull'asse ottico (A) e l'altra si trovi nella parte superiore, che per convenzione indichiamo positiva (B). La dimensione dell'oggetto sarà \overline{AB} . Da B tracciamo un raggio parallelo all'asse ottico, e lo prolunghiamo nel mezzo n' in modo che intersechi il fuoco F' . Sempre da B tracciamo un secondo raggio, diretto verso il centro di curvatura del diottro (C): questo raggio non subirà rifrazione in quanto la sua direzione è ortogonale alla superficie del diottro nel punto di attraversamento. L'intersezione fra i due raggi darà la posizione del punto-immagine B'. Mentre per avere il punto-immagine A' basterà tracciare da B' la normale all'asse ottico (Fig. 2.3).

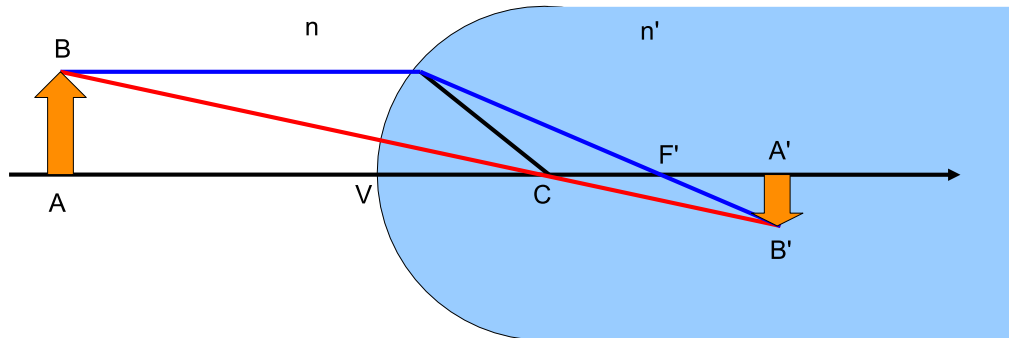


Figura 2.3: Costruzione dell'immagine di una sorgente estesa di dimensione \overline{AB} .

Il punto-oggetto A si troverà a distanza p dal vertice V del diottro, mentre il punto-immagine A' sarà a distanza q . Consideriamo ora i triangoli ABC e A'B'C. Come si vede sono simili, per cui se è R il raggio di curvatura del diottro, possiamo scrivere:

$$\frac{\overline{A'B'}}{q - R} = \frac{\overline{AB}}{p + R}$$

da cui, definiamo la quantità **ingrandimento** m come:

$$m = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{q - R}{p + R} \quad (2.3)$$

Dalla formula si può notare che man mano che aumenta la distanza dell'oggetto dal diottro, l'immagine diventa più piccola e al limite tende a zero quando l'oggetto è all'infinito. Inoltre l'ingrandimento vale 1 (Fig. 2.4) quando l'oggetto è a distanza:

$$p = q - 2R$$

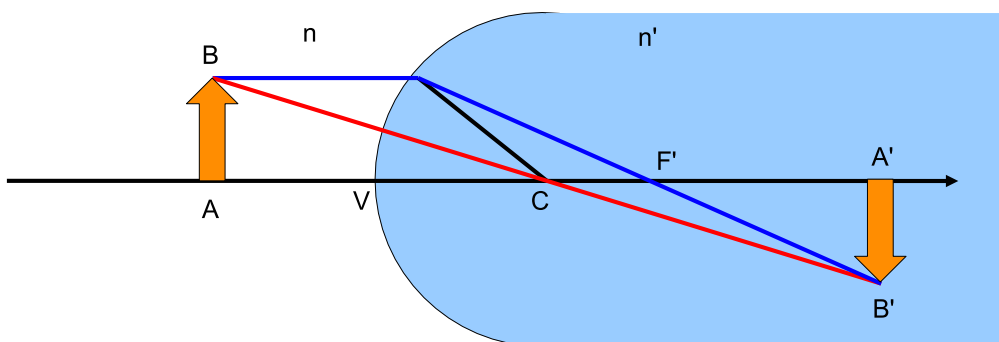


Figura 2.4: Condizione per avere ingrandimento pari a 1, cioè $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

ed è maggiore di 1 (Fig. 2.5) quando:

$$p < q - 2R$$

mentre è minore di 1 nel caso opposto. Si noti inoltre che l'immagine appare rovesciata.

Proviamo adesso a considerare il caso del diottro sferico concavo (Fig. 2.6).

Come prima tracciamo da B verso il diottro un raggio parallelo all'asse ottico del sistema. A causa della rifrazione questo divergerà e dovremo quindi considerare il prolungamento all'indietro del raggio rifratto verso il punto focale F. Poi tracciamo da B un raggio che intersechi il centro ottico del diottro. I due raggi definiranno il punto immagine B'. Come si nota, l'immagine ottenuta è virtuale, dalla stessa parte dell'oggetto e dritta.

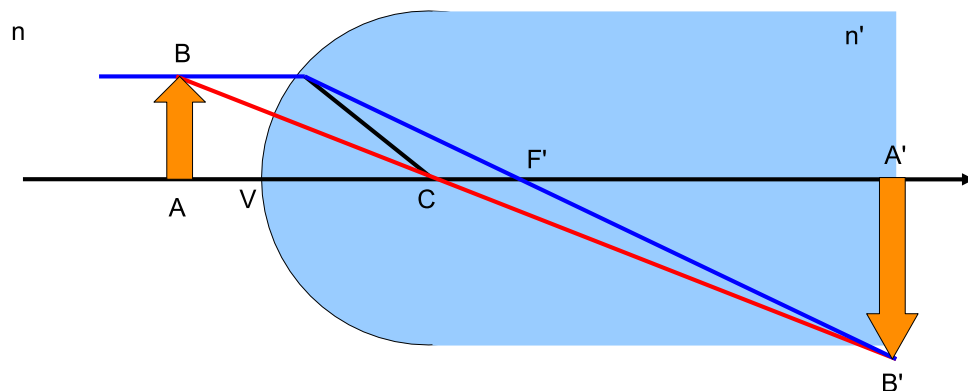


Figura 2.5: L'ingrandimento aumenta quando la sorgente si avvicina al vertice V.

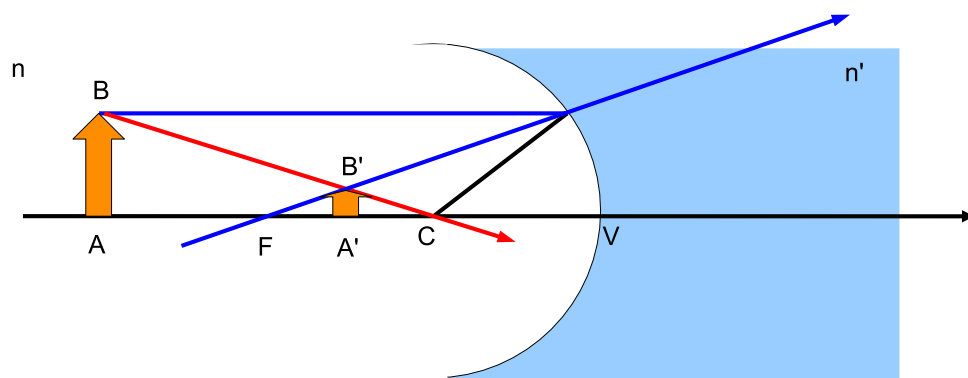


Figura 2.6: Costruzione dell'immagine nel caso di un diottro sferico divergente.

Capitolo 3

Lenti

3.1 Lenti sottili

Indichiamo con il termine **lente** un sistema ottico costituito da materiale trasparente e omogeneo limitato da due superfici che possono essere entrambe sferiche oppure una piana ed una sferica (ma mai entrambe piane!), le quali separano un mezzo di indice di rifrazione n' da un mezzo di indice di rifrazione n .

Una lente si dice **sottile** quando si può assumere che il suo spessore sia piccolo in confronto alle lunghezze in gioco, come ad esempio i raggi di curvatura, le lunghezze focali e le distanze dell'immagine e dell'oggetto. In pratica, in termini di ottica geometrica, la lente si considera assimilata a un piano e si trascura ciò che avviene all'interno di essa quando è attraversata da raggi di luce.

Esistono due famiglie principali di lenti: **convergenti** e **divergenti**. E all'interno di esse abbiamo varie categorie come ad esempio la lente biconvessa, o biconcava, piano-convessa o piano-concava, menisco-convergente o menisco-divergente, ecc. (Fig. 3.1)

Consideriamo ora due diottri concavi addossati, che creano una sorta di lente spessa (chiamiamo d lo spessore della lente) avente indice di rifrazione n (Fig. 3.2). I due diottri abbiano raggi di curvatura R_1 e R_2 diversi. Poniamo una sorgente luminosa in P e consideriamo un raggio che da P si propaga verso il primo diottro. Per effetto della rifrazione andrà a divergere e dovremo considerarne il prolungamento all'indietro fino al punto Q' sull'asse ottico. Il raggio prosegue dentro i due diottri e viene nuovamente rifratto, andando a incrociare l'asse ottico nel punto Q.

Impostiamo le equazioni dei due diottri, assumendo che $p' = q + d$:

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q} = \frac{n-1}{R_1}$$

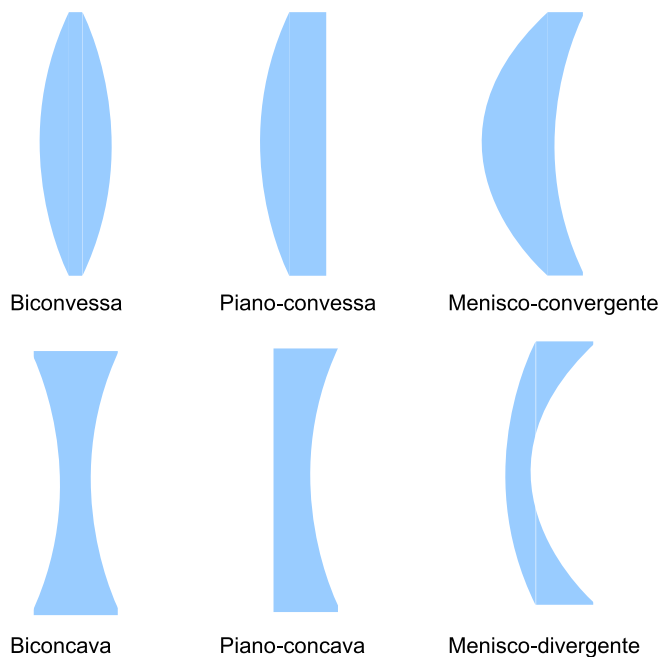


Figura 3.1: Esempi di lenti. In alto lenti convergenti, in basso lenti divergenti.

$$\frac{n}{q+d} + \frac{1}{q'} = \frac{1-n}{R_2}$$

Nell'approssimazione della lente sottile $d \ll q$ e quindi possiamo scrivere:

$$\frac{n}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1-n}{R_2}$$

Da cui, sommando membro a membro le due equazioni, otteniamo:

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q} + \frac{n}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{1-n}{R_2}$$

e infine:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.1)$$

Quindi, nel caso della lente sottile, ciò che avviene all'interno della lente si può trascurare.

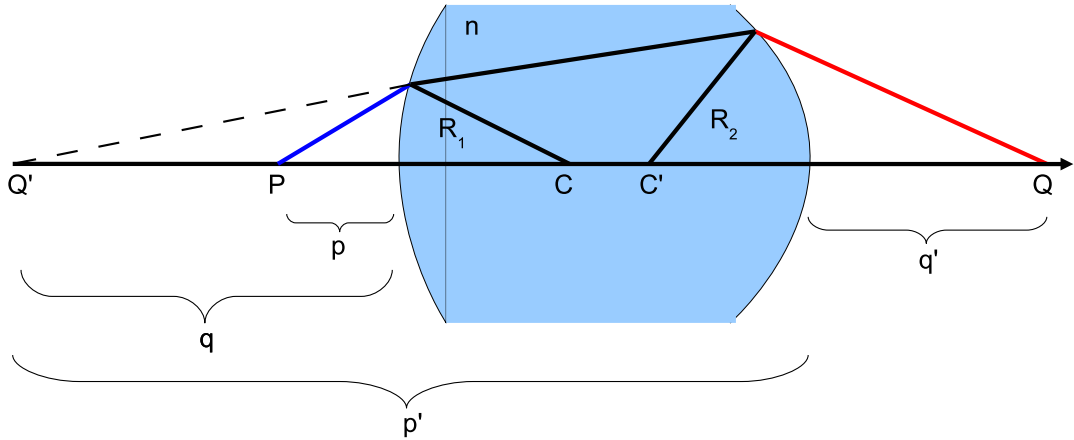


Figura 3.2: Schema ottico nel caso generale della lente: due diottri addossati.

Torniamo adesso alla vecchia notazione e indichiamo con p la distanza del punto-oggetto e con q la distanza del punto-immagine dalla lente. Immaginiamo di portare la sorgente all'infinito ($p \rightarrow \infty$). I raggi paralleli e vicini all'asse ottico andranno a concentrarsi in un punto detto fuoco della lente.

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Simmetricamente, se mettiamo la sorgente nel fuoco della lente, l'immagine si forma all'infinito. Come si può facilmente capire dalla formula, la distanza focale f è una sola per la lente sottile. Nel caso di una lente convergente non necessariamente simmetrica, avremo che $R_1 > 0$ e $R_2 < 0$, per cui alla fine la lunghezza focale sarà positiva ($f > 0$). Al contrario, per una lente divergente avremo che $R_1 < 0$ e $R_2 > 0$, per cui sarà $f < 0$. Si noti inoltre che nella lente menisco-convergente entrambi i raggi sono positivi, ma $R_2 > R_1$ per cui $f > 0$, mentre nella lente menisco-divergente sono ancora entrambi positivi, ma $R_2 < R_1$ e quindi $f < 0$.

In definitiva possiamo scrivere che l'equazione dei punti coniugati (o **formula di Gauss**) per la lente sottile è la seguente:

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}} \quad (3.2)$$

È possibile ottenere questo risultato seguendo un semplice ragionamento basato sulla similitudine dei triangoli (Fig. 3.3).

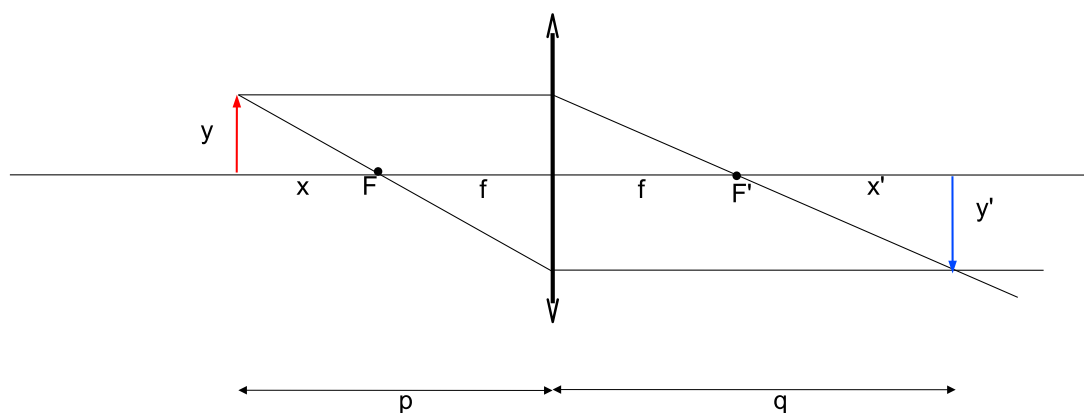


Figura 3.3: Immagine di una sorgente estesa.

$$\frac{y - y'}{q} = \frac{y}{f}$$

$$\frac{y - y'}{p} = -\frac{y'}{f}$$

e sommando membro a membro si ha:

$$\frac{y - y'}{p} + \frac{y - y'}{q} = \frac{y}{f} - \frac{y'}{f}$$

da cui si riottiene la formula di Gauss:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

È possibile mettere in relazione la focale della lente non solo alla distanze di oggetto e immagine dalla lente stessa, ma anche alle distanze di oggetto e immagine dai fuochi:

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{-y'} \quad \frac{x'}{f} = \frac{-y'}{y}$$

Moltiplicando membro a membro si ottiene:

$$\boxed{x \cdot x' = f^2} \quad (3.3)$$

nota come **formula di Newton**.

Definiamo ora l'**ingrandimento** di una lente sottile come il rapporto fra la dimensione dell'immagine e la dimensione dell'oggetto. Sempre dalla Fig. 3.3 e dalla similitudine fra triangoli possiamo scrivere:

$$\frac{-y'}{f} = \frac{y - y'}{f + x}$$

$$\frac{y}{f} = \frac{y - y'}{f + x'}$$

da cui, dividendo membro a membro, otteniamo:

$$m = \frac{-y'}{y} = \frac{f + x'}{f + x} = \frac{q}{p} \quad (3.4)$$

cioè l'ingrandimento è dato banalmente dal rapporto fra le distanze dei piani coniugati dal centro della lente.

Consideriamo l'equazione dei punti coniugati e scriviamola in una forma diversa:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$1 + \frac{p}{q} = \frac{p}{f}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{p - f}{f}$$

E infine:

$$m = \frac{f}{p - f}$$

L'asintoto verticale si ha quando $p = f$ (Fig. 3.4).

Per $p > f$, cioè ponendo l'oggetto a distanza dalla lente maggiore della distanza focale, l'ingrandimento è positivo, $m > 0$, e si forma un'immagine reale e capovolta dalla parte opposta rispetto alla lente. Quando invece $p < f$, cioè quando l'oggetto si trova fra il fuoco dalla lente e la lente stessa l'ingrandimento è negativo, $m < 0$, e si forma un'immagine virtuale dritta dalla stessa parte dell'oggetto.

Si ha ingrandimento pari a 1 quando:

$$p - f = f \Rightarrow p = 2f$$

Per cui, allontanare l'oggetto a distanze $p > 2f$ significa produrre un'immagine reale che diventa via via sempre più piccola e che si avvicina alla lente. Quando invece

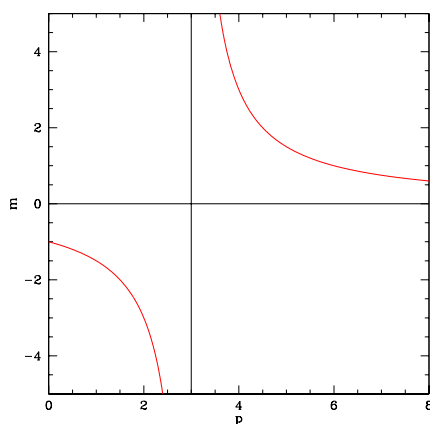


Figura 3.4: Ingrandimento in funzione della distanza dell'oggetto dalla lente, per una data distanza focale.

l'oggetto si trova a distanze $f < p < 2f$, l'ingrandimento cresce. Quando l'oggetto si trova a distanze $0 < p < f$, l'immagine è dritta e sempre più grande dell'oggetto. Ma avvicinando l'oggetto alla lente, l'immagine tende a rimpicciolirsi fino a coincidere con l'oggetto quando questo è a contatto con la lente (Fig. 3.5).

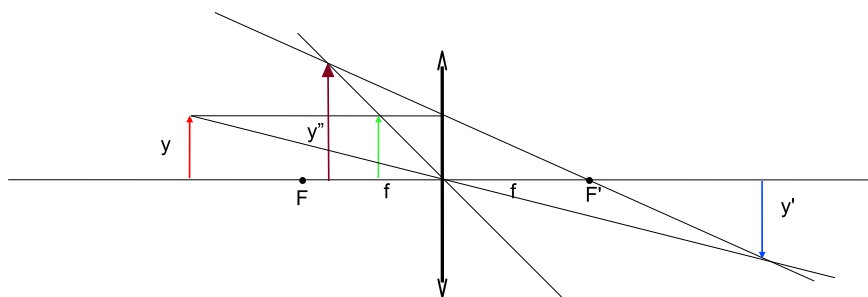


Figura 3.5: L'oggetto (in rosso) si trova a distanza maggiore di f , l'immagine (in blu) è reale e capovolta. Se l'oggetto (in verde) si trova a distanza minore di f , l'immagine (in magenta) è virtuale e dritta.

Per confronto, si veda il caso della lente divergente, che produce sempre un'immagine dritta, virtuale, con ingrandimento minore di 1 e che si forma tra il fuoco e la lente dalla parte dell'oggetto. Con l'avvicinarsi dell'oggetto alla lente, l'immagine si ingrandisce e si avvicina anch'essa alla lente fino a coincidere con l'oggetto quando questo è a contatto

con la lente (Fig. 3.6).

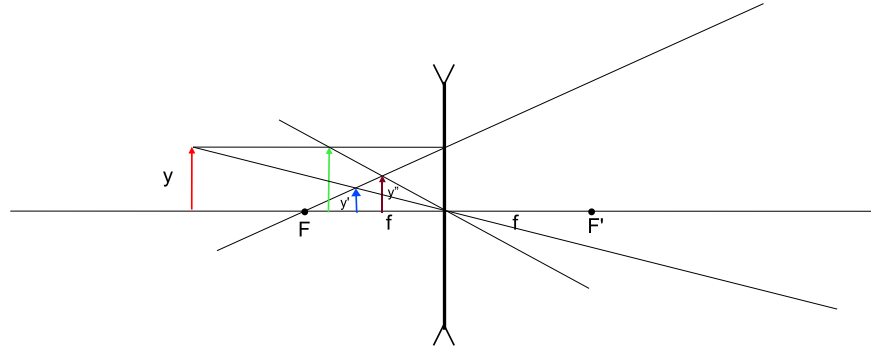


Figura 3.6: Nel caso della lente divergente si ottiene sempre un'immagine virtuale e dritta.

Si definisce **potere diottrico** di una lente la quantità:

$$P = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.5)$$

Viene misurato in diottrie se la distanza focale è espressa in metri.

Immaginiamo adesso un sistema fatto di due (o più lenti) sottili addossate. Poniamo una sorgente di luce all'infinito: i raggi paralleli che incidono sulla prima lente dovrebbero convergere nel fuoco secondario F'_1 posto alla distanza f_1 , ma incontrano la seconda lente. Il fuoco F'_1 diventa l'oggetto virtuale per la seconda lente che ha distanza focale f_2 . Il punto in cui si forma l'immagine finale è per definizione il fuoco secondario del sistema di due lenti, e la sua distanza dalle lenti, f , si calcola applicando la formula dei punti coniugati:

$$\frac{1}{-f_1} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f_2}$$

da cui:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (3.6)$$

O anche:

$$P = P_1 + P_2 \quad (3.7)$$

Quindi, possiamo affermare che il potere diottrico di lenti sottili a contatto è dato dalla somma dei poteri diottrici delle singole lenti. Si tenga sempre a mente che queste equazioni sono valide solo per lenti sottili addossate. Nel caso in cui esse fossero distanziate

di una quantità non trascurabile, il potere diottrico finale sarebbe dipendente dalla separazione. Nel caso, però, che il fascio emergente dalla prima lente sia parallelo all'asse ottico, l'effetto sulla seconda lente diventa indipendente dalla distanza fra le due lenti e tutto avviene come se fossero addossate.

Introduciamo infine il concetto di **profondità di campo**.

Immaginiamo una sorgente luminosa posta in P , la cui immagine è il punto Q . Spostiamo ora la sorgente di un tratto $\overline{PP'} = \Delta p$. L'immagine si sposterà della quantità $\overline{QQ'} = \Delta q$ (Fig. 3.7). Come sono legati Δp e Δq ?

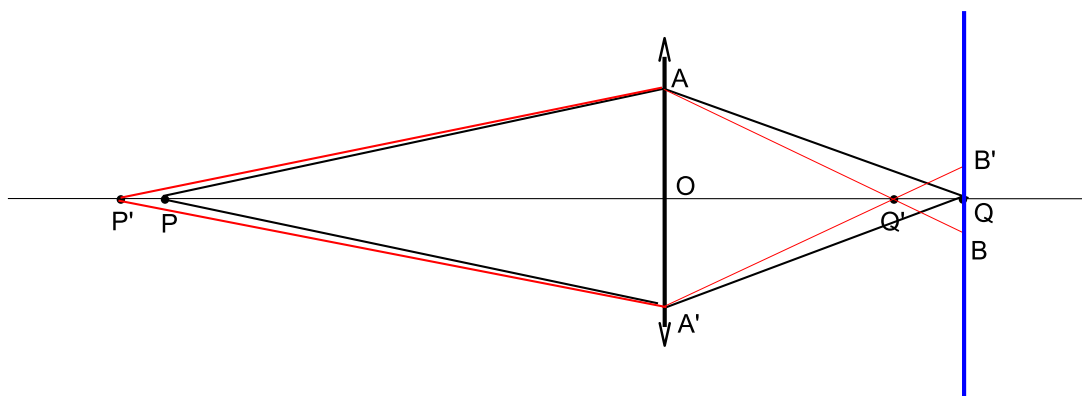


Figura 3.7: L'oggetto in P viene spostato in P' , l'immagine in Q si sposta in Q' .

Prendiamo la legge dei punti coniugati e differenziamo ambo i membri:

$$-\frac{\Delta p}{p^2} - \frac{\Delta q}{q^2} = 0$$

Se $p \gg f$, cioè se l'oggetto è molto lontano dalla lente, come accade per i telescopi e in genere per le macchine fotografiche, possiamo assumere che $q \cong f$. Quindi:

$$\Delta p \cong -p^2 \frac{\Delta q}{f^2}$$

Se adesso $\overline{AO} = h$ e $\overline{B'Q} = \epsilon$, per la similitudine fra i triangoli $AQ'A'$ e $BQ'B'$, avremo:

$$\frac{\Delta q}{2\epsilon} \cong \frac{f}{2h}$$

ossia:

$$\Delta q \cong \epsilon \frac{f}{h}$$

Se adesso i dischetti di diametro non superiore a 2ϵ possono essere considerati in prima approssimazione immagini puntiformi, segue che tutti i punti-oggetto compresi fra $p - \Delta p$ e $p + \Delta p$, con

$$|\Delta p| \cong \frac{p^2}{f^2} \epsilon \frac{f}{h} = \epsilon \frac{p^2}{hf}$$

avranno un'immagine nitida e puntiforme.

La quantità $2\Delta p$ si chiama **profondità di campo**, per oggetti a distanza p e sotto l'apertura h .

Come si può notare, se teniamo costanti ϵ e f , sia Δp che Δq , crescono al decrescere di h . Quindi la profondità di campo aumenta quando si passa da raggi marginali a raggi parassiali. Inoltre, se teniamo costanti ϵ e h , Δp cresce al decrescere della lunghezza focale. Le macchine fotografiche a fuoco fisso hanno in genere focale corta e piccola apertura, in modo da avere grande profondità di campo.

3.2 Lenti spesse

Nel caso in cui non possiamo considerare lo spessore della lente trascurabile, le formule fin qui utilizzate non sono direttamente applicabili. Ciò nonostante, è possibile trattare il caso delle lenti spesse in modo relativamente semplice, utilizzando i cosiddetti **piani principali**, che possono essere definiti come quei due piani coniugati per cui l'ingrandimento vale +1.

Consideriamo una lente spessa, biconcava e asimmetrica. Poniamo una sorgente di luce nel fuoco primario F_1 , dalla parte opposta della lente emergerà un fascio di raggi paralleli. Vediamo cosa avviene all'interno della lente: i raggi provenienti dal fuoco raggiungono la prima superficie e subiscono una rifrazione, poi raggiungono la seconda superficie e subiscono una seconda rifrazione. Prolunghiamo i raggi incidenti e i raggi emergenti dentro la lente e otteniamo così il primo piano principale H_1 . Ripetiamo la procedura per il fuoco secondario F_2 e otteniamo il secondo piano principale H_2 (Fig. 3.8).

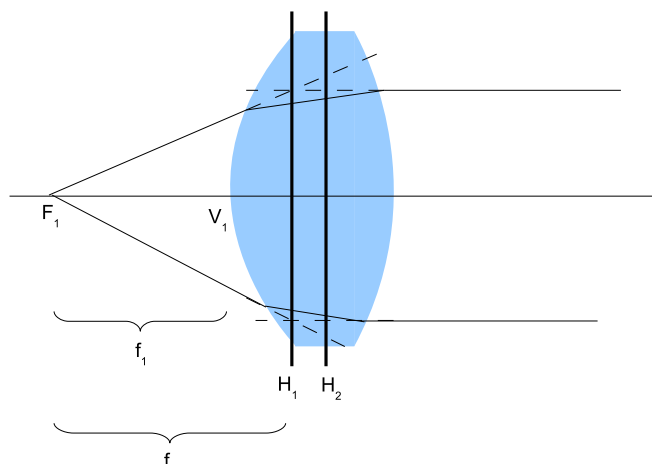


Figura 3.8: Costruzione geometrica dei piani principali H_1 e H_2 di una lente spessa. f_1 è la distanza focale del primo fuoco della lente, mentre f è la lunghezza focale della lente.

Le intersezioni di questi piani con l'asse ottico della lente definiscono i **punti principali**. I raggi tra i piani principali si propagano paralleli all'asse ottico, e quindi una volta definita la loro posizione è possibile utilizzarli al posto della lente spessa, per esempio per costruire l'immagine esattamente come nel caso di una lente sottile (Fig. 3.9). Si faccia attenzione che indichiamo con f_1 ed f_2 le **distanze focali**, misurate dai vertici V_1 e V_2 della lente ai rispettivi fuochi F_1 e F_2 , mentre f è la **lunghezza focale** della lente, misurata dai piani principali. In una lente spessa in generale $f_1 \neq f_2 \neq f$. In una lente sottile al contrario non c'è distinzione fra queste due quantità, i piani principali coincidono fra di loro i punti principali coincidono con il centro della lente e con i vertici delle calotte.

Determiniamo ora la lunghezza focale f di una lente spessa avente spessore d e indice di rifrazione n .

Chiamiamo d la distanza fra i vertici V_1 e V_2 della lente e consideriamo la lente spessa come il risultato di due diottri addossati. Ogni diottro avrà due distanze focali: f_{11} e f_{12} siano le distanze focali del primo diottro, e f_{21} e f_{22} le distanze focali del secondo diottro (Fig. 3.10).

Immaginiamo che la luce provenga da sinistra e dall'infinito ($p \rightarrow \infty$). Scriviamo l'equazione del primo diottro:

$$\frac{n}{f_{12}} = \frac{n-1}{R_1}$$

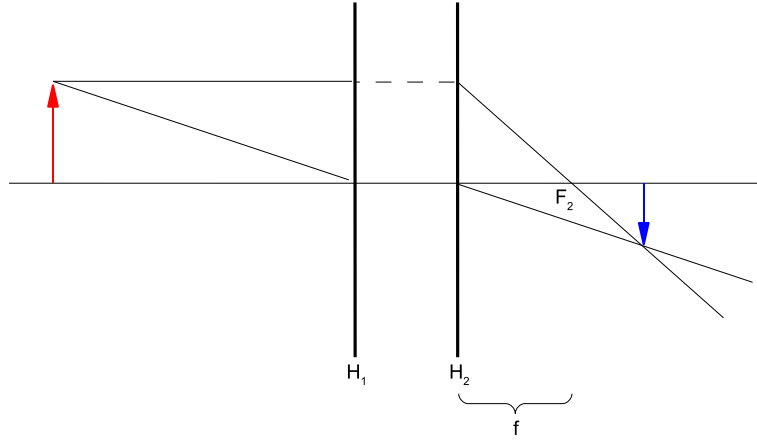


Figura 3.9: Costruzione dell'immagine di una sorgente estesa per mezzo dei piani principali.

dove R_1 è il raggio di curvatura del primo diottro, che vale:

$$R_1 = \frac{n-1}{n} f_{12}$$

Il fuoco f_{12} diventerà punto-oggetto per il secondo diottro:

$$\frac{n}{-(f_{12} - d)} + \frac{1}{\overline{V_2 F_2}} = \frac{1-n}{-R_2} = \frac{n}{f_{21}}$$

dove R_2 è il raggio di curvatura del secondo diottro, che vale:

$$R_2 = \frac{n-1}{n} f_{21}$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{V_2 F_2}} &= \frac{n}{f_{12} - d} + \frac{n}{f_{21}} = n \frac{f_{21} + f_{12} - d}{f_{21}(f_{12} - d)} \\ \overline{V_2 F_2} &= \frac{f_{21}(f_{12} - d)}{n(f_{21} + f_{12} - d)} \end{aligned}$$

Ora facciamo delle considerazioni basate sulle proprietà dei piani principali e dei punti nodali (Fig. 3.11). Dato un punto-oggetto fuori asse, consideriamo quello tra i raggi incidenti che emerge dalla lente parallelo a se stesso. I due punti di intersezione dei

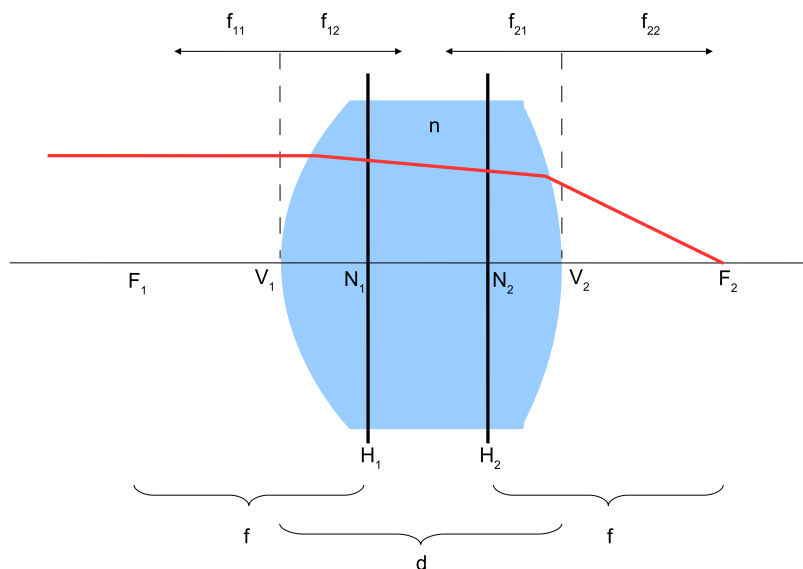


Figura 3.10: La lente spessa è considerata come due diottri addossati. f_{11} , f_{12} , f_{21} e f_{22} sono le distanze focali rispettivamente del primo e del secondo diottero.

suoi prolungamenti con l'asse ottico sono detti **punti nodali**. Per una lente in aria (o immersa in un mezzo con un unico indice di rifrazione) i punti nodali coincidono con i punti principali.

Siano adesso O_1 e O_2 i centri di curvatura dei diottri, C il centro ottico della lente, B_1 e B_2 i punti dove incide ed emerge il raggio di luce, N_1 e N_2 i punti nodali.

Dalla similitudine dei triangoli B_1CO_1 e B_2CO_2 si ottiene:

$$\frac{O_1C}{O_2C} = \frac{O_1B_1}{O_2B_2} = \frac{R_1}{-R_2}$$

$$O_2O_1 = O_1C - O_2C = O_1C + \frac{R_2}{R_1}O_1C = \frac{R_1 + R_2}{R_1}O_1C$$

da cui:

$$O_1C = \frac{R_1}{R_1 + R_2}O_2O_1$$

Adesso,

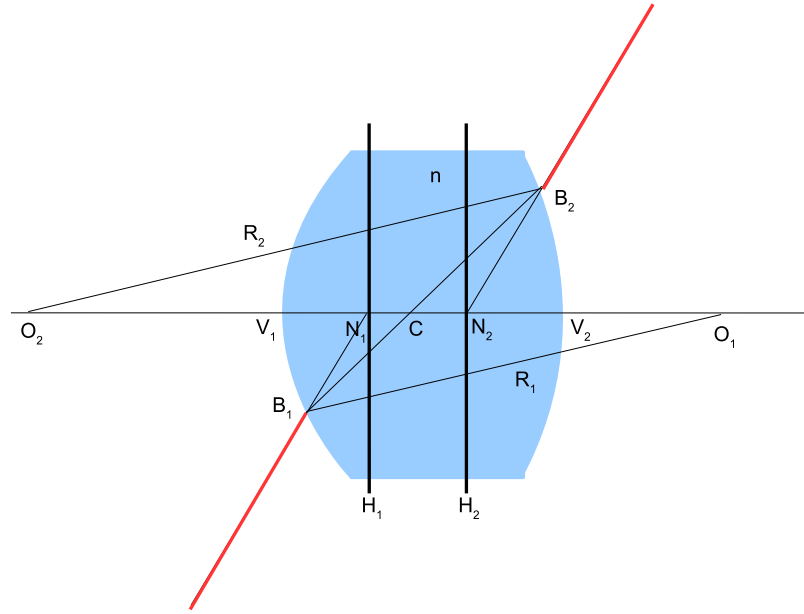


Figura 3.11: Un raggio fuori asse incide sulla lente in modo tale da uscire parallelo a se stesso.

$$O_2O_1 = (R_1 - d) + d + (R_2 - d) = R_1 + R_2 - d$$

e quindi

$$O_1C = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (R_1 + R_2 - d) = R_1 - \frac{dR_1}{R_1 + R_2}$$

Calcoliamo adesso le distanze dei vertici della lente dal centro ottico della lente stessa.

$$V_1C = O_1V_1 - O_1C = R_1 - R_1 + \frac{dR_1}{R_1 + R_2} = \frac{dR_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_2C = d - V_1C = d - \frac{dR_1}{R_1 + R_2} = \frac{dR_2}{R_1 + R_2}$$

Sostituendo l'espressione dei raggi in funzione delle focali, si ottiene:

$$V_1C = \frac{d \frac{n-1}{n} f_{12}}{\frac{n-1}{n} f_{12} + \frac{n-1}{n} f_{21}} = \frac{df_{12}}{f_{12} + f_{21}}$$

$$V_2C = \frac{df_{21}}{f_{12} + f_{21}}$$

A questo punto possiamo ricavare la distanza del secondo piano principale dal vertice del secondo diottro. I punti C e N_2 sono coniugati, in particolare se C è il punto-oggetto, N_2 è il punto-immagine.

$$\frac{n}{V_2C} - \frac{1}{V_2N_2} = \frac{1-n}{-R_2} = \frac{n}{f_{21}}$$

$$\frac{1}{V_2N_2} = \frac{n}{V_2C} - \frac{n}{f_{21}} = n \left(\frac{f_{12} + f_{21}}{df_{21}} \right) - \frac{n}{f_{21}} = \frac{n}{df_{21}} (f_{12} + f_{21} - d)$$

$$V_2N_2 = \frac{df_{21}}{n(f_{12} + f_{21} - d)}$$

Infine possiamo calcolare la lunghezza focale della lente:

$$f = V_2F_2 + V_2N_2 = \frac{f_{21}(f_{12} - d)}{n(f_{21} + f_{12} - d)} + \frac{df_{21}}{n(f_{12} + f_{21} - d)}$$

da cui si ottiene:

$$f = \frac{f_{12}f_{21}}{n(f_{21} + f_{12} - d)} \quad (3.8)$$

oppure:

$$\frac{1}{f} = \frac{n}{f_{12}} + \frac{n}{f_{21}} - \frac{nd}{f_{12}f_{21}} \quad (3.9)$$

Possiamo riscrivere a questo punto le distanze dei piani principali dai vertici della lente, usando la lunghezza focale:

$$V_2 N_2 = \frac{df_{21}}{n(f_{12} + f_{21} - d)} = \frac{d}{f_{12}} f \quad (3.10)$$

e analogamente per l'altro vertice:

$$V_1 N_1 = \frac{d}{f_{21}} f \quad (3.11)$$

Sulla base delle relazioni fra le focali dei due diottri e i rispettivi raggi di curvatura, è possibile ottenere espressioni equivalenti per la lunghezza focale della lente spessa:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_{11}} + \frac{1}{f_{22}} - \frac{d}{n(f_{11}f_{22})} = \frac{n}{f_{12}} + \frac{1}{f_{22}} - \frac{d}{f_{12}f_{22}} = \frac{1}{f_{11}} + \frac{n}{f_{21}} - \frac{d}{f_{11}f_{21}} \quad (3.12)$$

3.3 Esempi

Secondo le convenzioni fin qui adottate, i fuochi sono positivi per diottri convessi ($R > 0$), mentre sono negativi per i diottri concavi ($R < 0$).

3.3.1 Lente biconvessa simmetrica

$R_1 = 12 \text{ cm}$, $R_2 = 12 \text{ cm}$, $d = 1.2 \text{ cm}$, $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 12 = 36 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 12 = 36 \text{ cm}$$

$$f = \frac{36 \cdot 36}{1.5(36 + 36 - 1.2)} = 12.2 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{1.2 \cdot 12.2}{36} = 0.4 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{1.2 \cdot 12.2}{36} = 0.4 \text{ cm}$$

I due piani principali sono interni alla lente e simmetrici rispetto al centro della lente (Fig. 3.12).

3.3.2 Lente biconvessa asimmetrica

$R_1 = 6 \text{ cm}$, $R_2 = 12 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$, $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 6 = 18 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 12 = 36 \text{ cm}$$

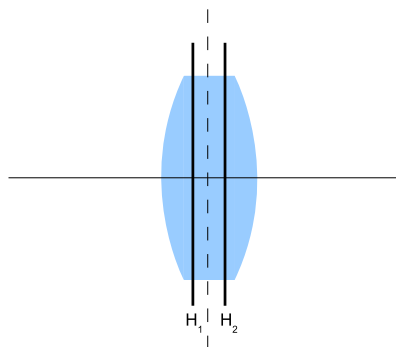


Figura 3.12: Piani principali nella lente biconvessa simmetrica.

$$f = \frac{18 \cdot 36}{1.5(18 + 36 - 2)} \simeq 8.3 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot 8.3}{36} = 0.46 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot 8.3}{18} = 0.92 \text{ cm}$$

I due piani principali sono interni alla lente, ma spostati verso il diottro con minore raggio di curvatura (Fig. 3.13).

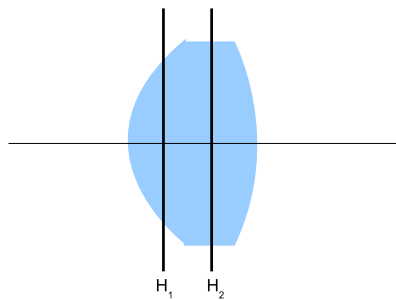


Figura 3.13: Piani principali nella lente biconvessa asimmetrica.

3.3.3 Lente divergente simmetrica

$R_1 = -8 \text{ cm}$, $R_2 = -8 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$, $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1}(-8) = -24 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1}(-8) = -24 \text{ cm}$$

$$f = \frac{(-24) \cdot (-24)}{1.5(-24 - 24 - 2)} = -7.7 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot (-7.7)}{(-24)} = 0.64 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot (-7.7)}{(-24)} = 0.64 \text{ cm}$$

I due piani principali sono interni alla lente e simmetrici rispetto al centro della lente (Fig. 3.14).

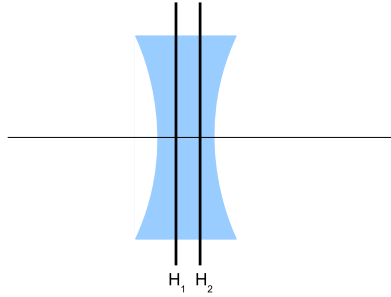


Figura 3.14: Piani principali nella lente divergente asimmetrica.

3.3.4 Lente piano-convessa

$R_1 = 6 \text{ cm}$, $R_2 = \infty$, $d = 1 \text{ cm}$, $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1}6 = 18 \text{ cm} \quad f_{21} = \infty$$

Dall'equazione 3.9 otteniamo:

$$\frac{1}{f} = \frac{n}{f_{12}}$$

e quindi, la focale di questa lente vale:

$$f = \frac{18}{1.5} = 12 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = 0 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{1 \cdot 12}{18} = 0.67 \text{ cm}$$

Il primo piano principale è tangente al vertice del primo diottro, il secondo piano è interno alla lente (Fig. 3.15).

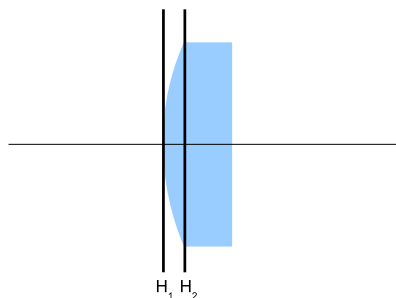


Figura 3.15: Piani principali nella lente piano-convessa.

3.3.5 Lente menisco-convergente

$R_1 = 20 \text{ cm}$, $R_2 = -50 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$, $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 20 = 60 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} (-50) = -150 \text{ cm}$$

$$f = \frac{60 \cdot (-150)}{1.5(60 - 150 - 2)} = 65.2 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot 65.2}{-150} = -0.87 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot 65}{60} = 2.17 \text{ cm}$$

I due piani principali sono entrambi esterni alla lente (Fig. 3.16)

3.3.6 Lente convesso-concava

$R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = -10 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$, $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 10 = 30 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} (-10) = -30 \text{ cm}$$

$$f = \frac{30 \cdot (-30)}{1.5(30 - 30 - 2)} = 300 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot 300}{-30} = -20 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot 300}{30} = 20 \text{ cm}$$

I due piani principali sono lontani dalla lente, dal lato del primo diottro e sono separati da una distanza pari allo spessore della lente sull'asse ottico (Fig. 3.17).

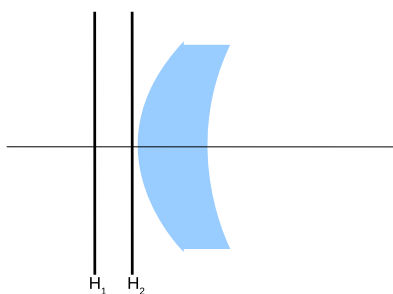


Figura 3.16: Piani principali nella lente menisco-convergente.



Figura 3.17: Piani principali nella lente convesso-concava.

3.3.7 Lente concentrica

$R_1 = 12 \text{ cm}$, $R_2 = -10 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$, $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 12 = 36 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} (-10) = -30 \text{ cm}$$

$$f = \frac{36 \cdot (-30)}{1.5(36 - 30 - 2)} = -180 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot (-180)}{-30} = 12 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot (-180)}{36} = -10 \text{ cm}$$

I due piani principali sono coincidenti e si trovano in corrispondenza ai centri di curvatura (anch'essi coincidenti) della lente (Fig. 3.18).

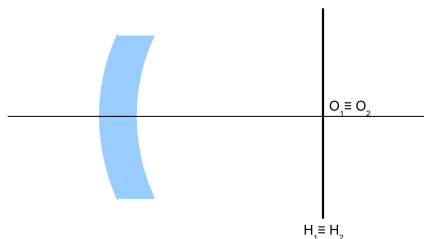


Figura 3.18: Piani principali nella lente concentrica.

3.3.8 Considerazioni

Possiamo raggruppare le proprietà di lenti e piani principali dicendo che:

- le lenti biconvesse e biconcave hanno i piani principali all'interno, equidistanti dai vertici se simmetriche;
- le lenti piano-convexe e piano-concave hanno un piano tangente alla faccia curva della lente;
- il menisco ha in genere i due piani esterni alla lente.

Poniamoci adesso la seguente domanda: è possibile avere una lente che in apparenza sia convergente (o divergente), ma che in realtà ha potere diottrico nullo?

Vediamo il seguente caso:

$R_1 = 25$ mm, $R_2 = -24$ mm, $d = 5$ mm, $n = 1.6$

$$f_{12} = \frac{1.6}{1.6 - 1} 25 = 66.67 \text{ mm} \quad f_{21} = \frac{1.6}{1.6 - 1} (-24) = -64 \text{ mm}$$

$$f = \frac{66.67 \cdot (-64)}{1.6(66.67 - 64 - 5)} = 1144.55 \text{ mm}$$

Quindi questa lente è convergente.

Se la lente fosse sottile avremmo che $d = 0$, per cui la focale sarebbe:

$$f = \frac{66.67 \cdot (-64)}{1.6(66.67 - 64)} = -998.80 \text{ mm}$$

cioè sarebbe una lente divergente.

Quando il potere diottrico vale 0 ?

$$\frac{1}{f} = 0 \Rightarrow \frac{n}{f_{12}} + \frac{n}{f_{21}} = \frac{nd}{f_{12}f_{21}}$$

da cui si ottiene:

$$d = f_{12} + f_{21} \quad (3.13)$$

Nel caso specifico, la lente dovrebbe avere spessore $d = 2.67$ affinché il suo potere diottrico fosse nullo.

3.4 Lenti sottili separate

Nel caso in cui, anziché due diottri consideriamo due lenti sottili separate da una distanza d (Fig. 3.19), il ragionamento è analogo a quello della lente spessa, con però un'importante semplificazione:

$$f_{11} = f_{12} = f_1$$

$$f_{21} = f_{22} = f_2$$

$$n = 1$$

da cui si ottiene l'equazione della **focale equivalente** per un sistema ottico formato da due lenti:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}} \quad (3.14)$$

Si ha il massimo potere diottrico quando $d = 0$, cioè quando le lenti sono addossate. Mentre, si ha potere diottrico nullo quando:

$$\frac{1}{f} = 0 \Rightarrow \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{d}{f_1 f_2} \Rightarrow f_1 + f_2 = d$$

Supponiamo di avere un sistema di due lenti sottili convergenti di lunghezza focale $f_1 = 10$ cm e $f_2 = 20$ cm, e poniamole a distanze pari a $d = 0, 5, 10$ cm. Vediamo come cambia la lunghezza focale del sistema.

$$d = 0 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = 0.15 \Rightarrow f = 6.67 \text{ cm}$$

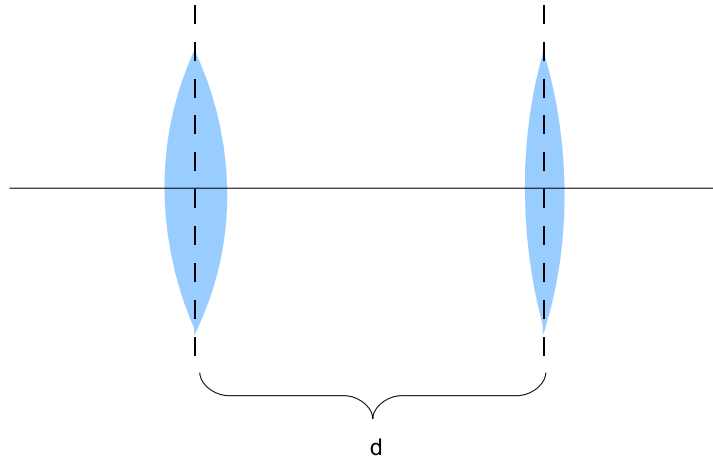


Figura 3.19: Lenti sottili convergenti a distanza d .

$$d = 5 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} - \frac{5}{10 \cdot 20} = 0.125 \Rightarrow f = 8 \text{ cm}$$

$$d = 10 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} - \frac{10}{10 \cdot 20} = 0.1 \Rightarrow f = 10 \text{ cm}$$

In quest'ultimo caso come si può vedere, la presenza della seconda lente non ha alcun effetto.

3.5 I doppietti

Se prendiamo due lenti piano-convesse, con la stessa focale, $f_1 = f_2 = f$, separate di una distanza d e con il lato curvo rivolto l'uno verso l'altro, otteniamo il **doppietto di Ramsden** (Fig. 3.20).

È chiaro che se $d = f$, la seconda lente non ha alcun effetto, quindi in genere si usa una distanza inferiore del tipo $d = 0.8f$. In questo modo si ha:

$$\frac{1}{f_R} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} - \frac{0.8f}{f^2} = \frac{2}{f} - \frac{0.8}{f} = \frac{1.2}{f}$$

da cui, la lunghezza focale del doppietto di Ramsden si può esprimere come $f_R = 0.833f$.

Calcoliamo le posizioni dei piani principali:

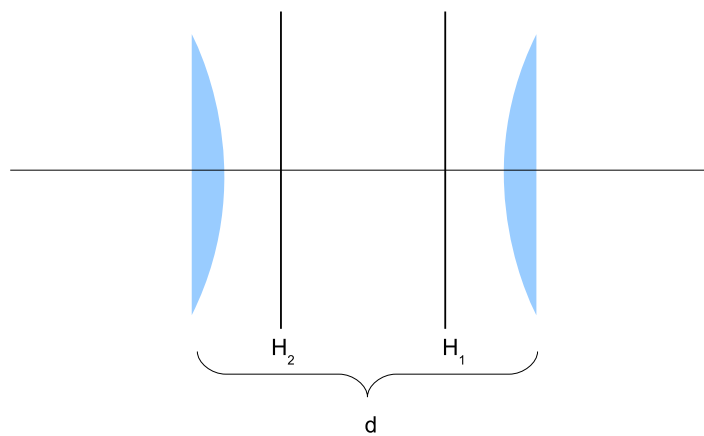


Figura 3.20: Schema ottico del doppietto di Ramsden.

$$V_1 N_1 = \frac{fd}{f_{21}} = \frac{0.833f \cdot 0.8f}{f} = 0.667f$$

$$V_2 N_2 = \frac{fd}{f_{12}} = \frac{0.833f \cdot 0.8f}{f} = 0.667f$$

Come si vede i piani principali sono invertiti.

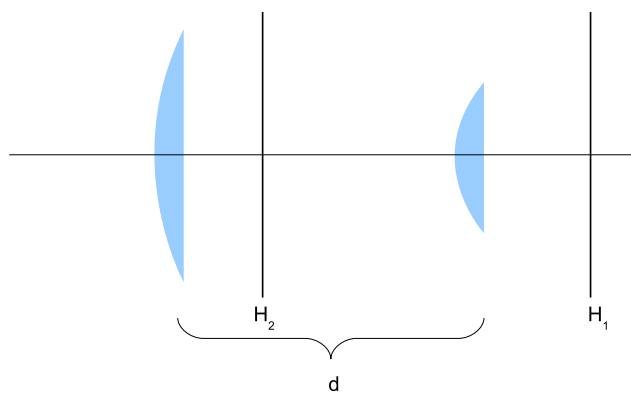


Figura 3.21: Schema ottico del doppietto di Huygens.

Nel **doppietto di Huygens** (Fig. 3.21) invece si ha tipicamente $f_1 = 2f_2$ e la condizione è tale che $\frac{1}{f} = \frac{3}{2f_1}$. Vediamo quanto vale la separazione fra le due lenti:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{2}{f_1} - 2\frac{d}{f_1^2} = \frac{3}{2f_1}$$

da cui:

$$d = \frac{3}{4}f_1$$

che corrisponde alla semisomma delle lunghezze focali delle due lenti.

Calcoliamo le distanze dei piani principali dai vertici del doppietto:

$$V_1 N_1 = \frac{\frac{2}{3}f_1 \cdot \frac{3}{4}f_1}{\frac{1}{2}f_1} = f_1$$

$$V_2 N_2 = \frac{\frac{2}{3}f_1 \cdot \frac{3}{4}f_1}{f_1} = \frac{f_1}{2}$$

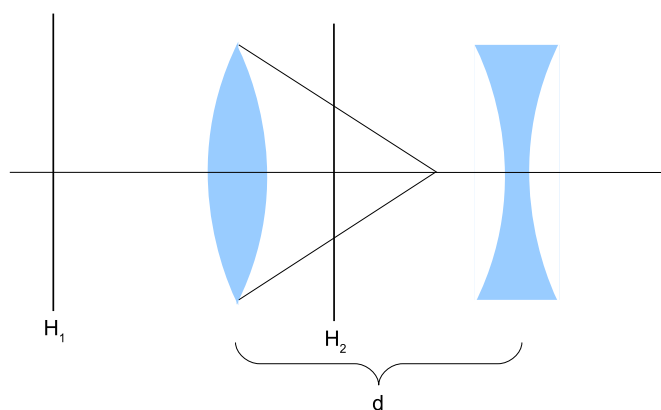


Figura 3.22: Lente positiva più lente negativa di uguale potenza.

Interessante è la combinazione di una lente positiva con una negativa, ma di uguale potenza (Fig. 3.22). Assumiamo che le lunghezze focali siano identiche, cambieranno solo i segni: $f_1 = -f_2 = f$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f} + \frac{d}{f^2}$$

$$F = \frac{f^2}{d}$$

$$V_1 N_1 = \frac{\frac{f^2}{d} d}{-f} = -f$$

$$V_2 N_2 = \frac{\frac{f^2}{d} d}{f} = f$$

3.6 Stop e pupille

Introduciamo adesso i concetti di **stop** e **pupilla** che saranno importanti quando tratteremo le aberrazioni.

A dispetto del suo nome, uno stop è un'apertura, tipicamente un diaframma, ma anche una lente o uno specchio, che è in grado di limitare le dimensioni di un fascio di raggi luminosi che entrano in un sistema ottico, oppure di limitare l'angolo di entrata del fascio incidente. Nel primo caso si parla di **stop di apertura**, che limita la quantità di luce, mentre nel secondo caso di **stop di campo**, che limita la dimensione del campo inquadrato.

Si definisce **pupilla di entrata** l'immagine dello stop di apertura formata dal sistema ottico che lo precede, e **pupilla di uscita** l'immagine dello stop di apertura formata dal sistema ottico che lo segue. Allo stesso modo, si definiscono **finestra di entrata** e **finestra di uscita** le immagini dello stop di campo formate dal sistema ottico rispettivamente quando questo lo precede e lo segue.

Consideriamo il caso di una lente convergente sottile e un diaframma $A'B'$ posto fra la lente e il fuoco secondario F (Figg. 3.23; 3.24).

Come si può notare dalla figura, il diaframma limita l'angolo di entrata del fascio di luce incidente, ma non determina l'apertura del fascio, $A_1 B_1$, la quale corrisponde all'immagine virtuale del diaframma $A_2 B_2$, ed è chiamata **pupilla di entrata**, perché rappresenta la vera apertura del fascio di luce utilizzato. Al contrario, il diaframma viene chiamato **pupilla di uscita**, perché rappresenta il limite del fascio uscente. Il raggio che passa per il centro della pupilla di entrata E_1 e della pupilla di uscita E_2 si chiama **raggio principale**.

Se invece mettiamo il diaframma prima della lente, fra essa e il suo fuoco primario F_1 (Fig. 3.26), si ottiene

che il diaframma funge da pupilla d'entrata, che limita l'apertura del fascio di raggi e anche l'angolo di entrata del fascio, mentre l'immagine virtuale del diaframma funge da pupilla di uscita.

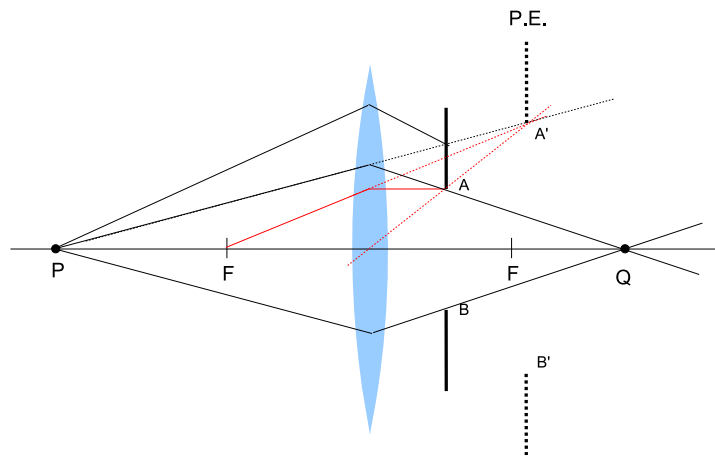


Figura 3.23: Esempio di stop di apertura (AB) e pupilla di entrata (A'B').

È chiaro che se avviciniamo il diaframma fino a portarlo a contatto con la lente, pupilla di entrata e di uscita coincideranno.

Se invece abbiamo a che fare con un sistema di lenti e poniamo il diaframma all'interno (Fig. 3.27), chiameremo pupilla d'entrata l'immagine del diaframma formata dalla lente o dalle lenti che lo precedono, mentre chiameremo pupilla d'uscita l'immagine formata dalla lente o dalle lenti che lo seguono.

I piani che contengono diaframmi e pupille sono piani coniugati. In condizioni di assenza di aberrazioni, ogni punto del piano delimitato dal diaframma ha per immagine un punto delle due pupille.

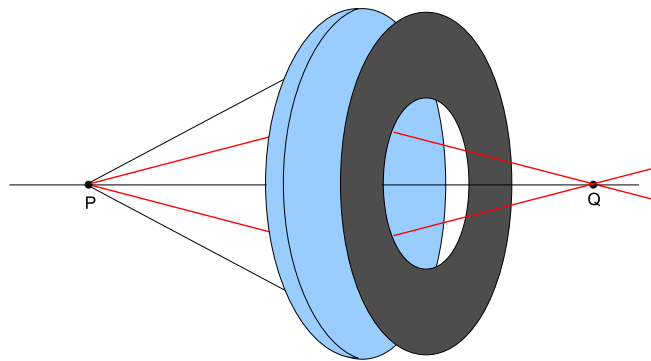


Figura 3.24: Visione tridimensionale.

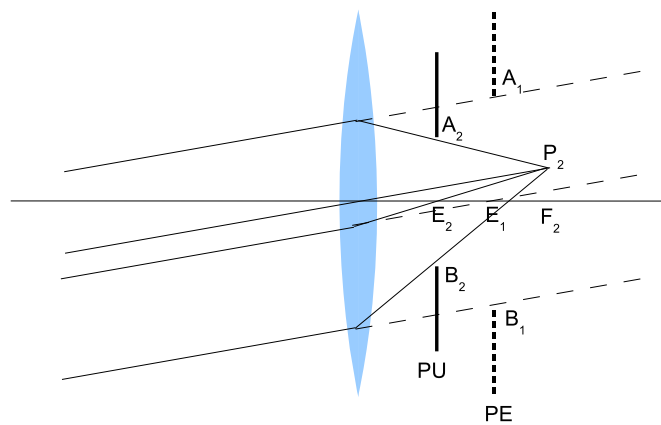


Figura 3.25:

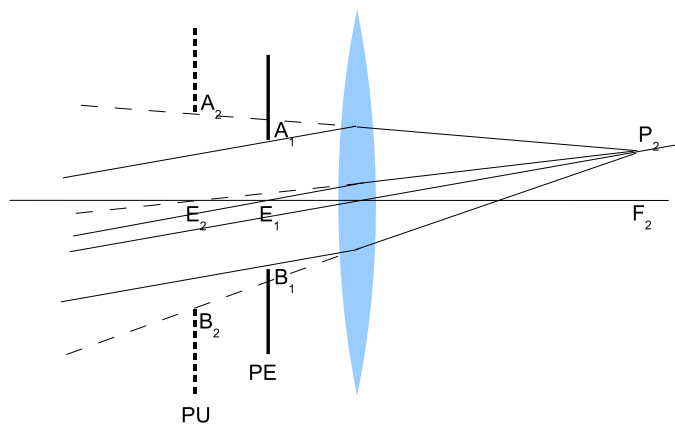


Figura 3.26:

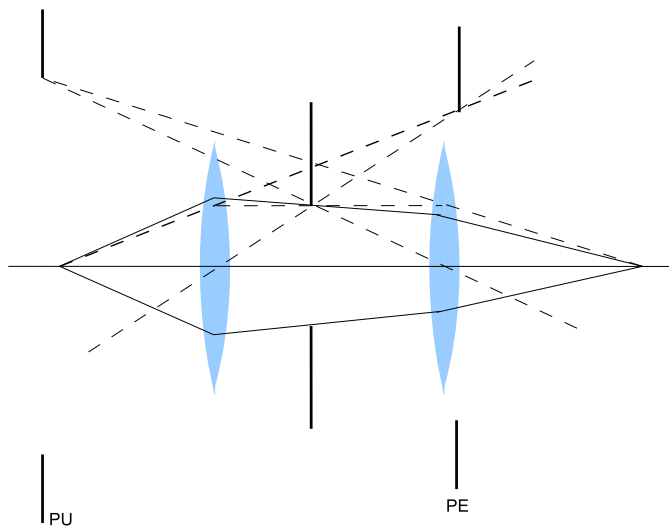


Figura 3.27:

Capitolo 4

Specchio sferico

Se al posto di un diottro sferico consideriamo una superficie sferica riflettente e concava, otteniamo lo **specchio sferico**. Anche in questo caso abbiamo una lunghezza focale, che si ottiene considerando un fascio di raggi parassiali, cioè raggi vicini all'asse ottico del sistema. E questo equivale all'approssimazione di angoli piccoli (Fig.4.1).

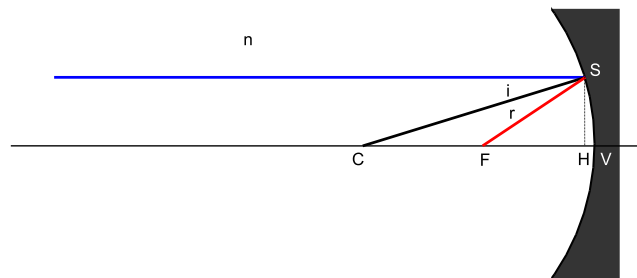


Figura 4.1: Raggi parassiali dall'infinito si concentrano in un punto F, detto fuoco dello specchio. C è il centro di curvatura dello specchio e V il vertice dello specchio, cioè il punto in cui l'asse ottico interseca lo specchio.

Consideriamo una sorgente all'infinito ($p \rightarrow \infty$). Un raggio parassiale incide sulla

superficie sferica riflettente nel punto S . L'angolo di incidenza i sarà compreso fra il raggio incidente e il raggio di curvatura CS (R). Per la legge della riflessione, angolo di incidenza e di riflessione coincidono, $i = r$, il raggio torna indietro e interseca l'asse ottico nel punto F . La distanza di F dal vertice V definisce la lunghezza focale dello specchio sferico f .

Come si vede dalla figura, il triangolo CFS è isoscele, e quindi $\overline{CF} = \overline{FS}$. Per angoli piccoli, il segmento \overline{FS} tende ad approssimare FV , quindi si ha:

$$\overline{CF} \cong \overline{FV} = \frac{R}{2}$$

$$f = \frac{R}{2}$$

Consideriamo adesso una sorgente luminosa puntiforme posta a distanza finita p sull'asse ottico di uno specchio sferico (Fig. 4.2).

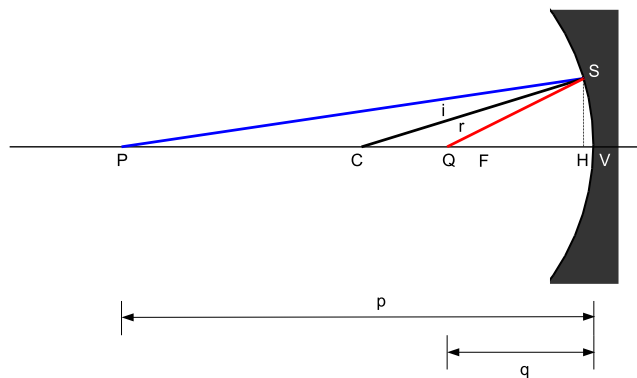


Figura 4.2: Immagine di una sorgente puntiforme prodotta da uno specchio sferico.

Un raggio da P incide sullo specchio nel punto S e viene riflesso incontrando l'asse nel punto Q , che si trova a distanza q dal vertice dello specchio. Come nel caso del diottro,

P e Q sono punti coniugati. Gli angoli $P\hat{S}C$ e $C\hat{S}Q$ sono uguali, ossia il segmento \overline{CS} è bisettrice dell'angolo in \hat{S} nel triangolo PSQ . Poiché la bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati, possiamo scrivere:

$$\frac{PS}{QS} = \frac{PC}{CQ}$$

e nell'approssimazione di Gauss, ossia di angoli piccoli:

$$PS \approx PV = p$$

$$QS \approx QV = q$$

Quindi:

$$\frac{p}{q} = \frac{p-R}{R-q}$$

$$p(R-q) = q(p-R)$$

$$pR + qR = 2pq$$

E dividendo ambo i membri per pqR :

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}} \quad (4.1)$$

che è la stessa relazione che si ha nelle lenti sottili.

Esprimiamo ora la distanza dell'immagine dal vertice dello specchio in funzione della distanza dell'oggetto e della lunghezza focale:

$$q = \frac{pf}{p-f} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{f}{1 - \frac{f}{p}}$$

L'ingrandimento m anche in questo caso è dato da:

$$\frac{y'}{y} = \frac{R-q}{p-R}$$

Ma dalla relazione precedente sappiamo che:

$$\frac{p - R}{R - q} = \frac{p}{q}$$

per cui

$$m = \frac{q}{p} = \frac{\frac{f}{p}}{1 - \frac{f}{p}} = \frac{1}{\frac{p}{f} - 1}$$

Se poniamo l'oggetto a distanza $p > R$, otteniamo un'immagine reale, rovesciata, rimpicciolita ($m < 1$) e a distanza $q > f$ (Fig.4.3).

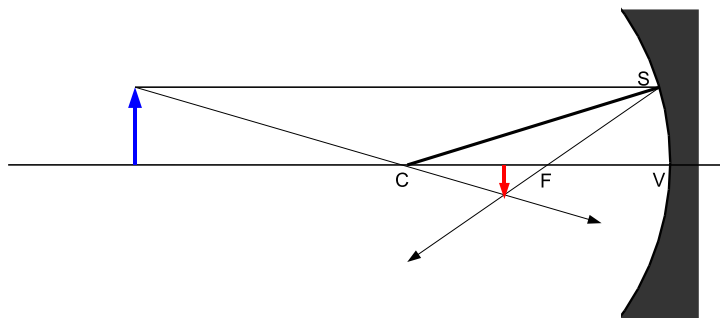


Figura 4.3: Costruzione dell'immagine di una sorgente estesa.

Se invece l'oggetto si trova a distanza $p = R$, cioè in corrispondenza del centro di curvatura, si ha ancora un'immagine capovolta, ma con ingrandimento pari a 1 e posizionata anch'essa nel centro di curvatura dello specchio (Fig. 4.4).

Poniamo ora l'oggetto tra fuoco e centro di curvatura ($f < p < R$). L'immagine si forma a una distanza $q > R$, è capovolta e ingrandita (Fig. 4.5).

Infine, se mettiamo l'oggetto fra fuoco e specchio, $p < f$, si ottiene un'immagine virtuale, dritta e ingrandita (Fig. 4.6).

Interessante è il caso dello **specchio convesso**. Sia il raggio di curvatura che il fuoco si trovano dall'altra parte rispetto alla superficie riflettente. Perciò per determinare la traiettoria di un raggio riflesso da uno specchio convesso, bisogna tenere presente che la normale alla superficie dello specchio è la semiretta che parte dal punto di riflessione e che appartiene alla retta che congiunge il punto stesso con il centro di curvatura. Se consideriamo un raggio parallelo all'asse principale, il corrispondente raggio riflesso sarà divergente, ma in modo che il suo prolungamento dalla parte opposta dello specchio

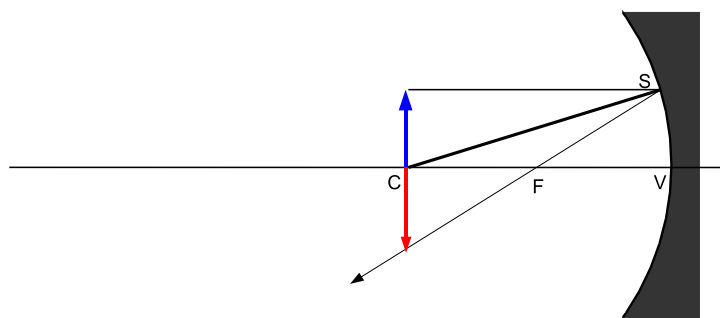


Figura 4.4: L'oggetto esteso si trova esattamente nel centro di curvatura dello specchio.

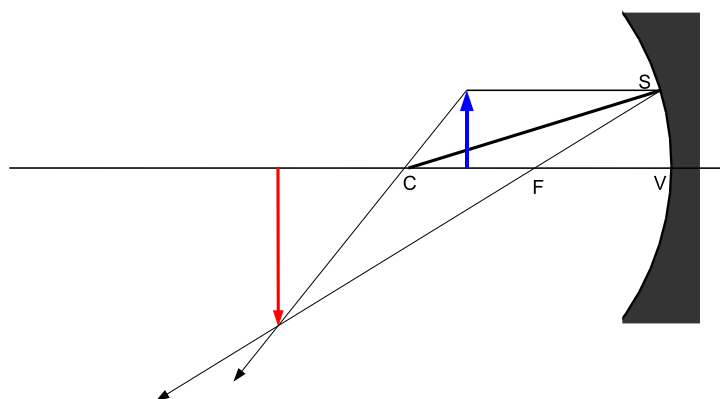


Figura 4.5: L'oggetto si trova fra il centro di curvatura e il fuoco dello specchio.

si intersechi con il prolungamento della normale alla superficie riflettente, producendo un'immagine virtuale (Fig. 4.7). Si verifica facilmente che qualunque sia il punto dove l'oggetto viene situato, la sua immagine sarà sempre virtuale, dritta e rimpicciolita.

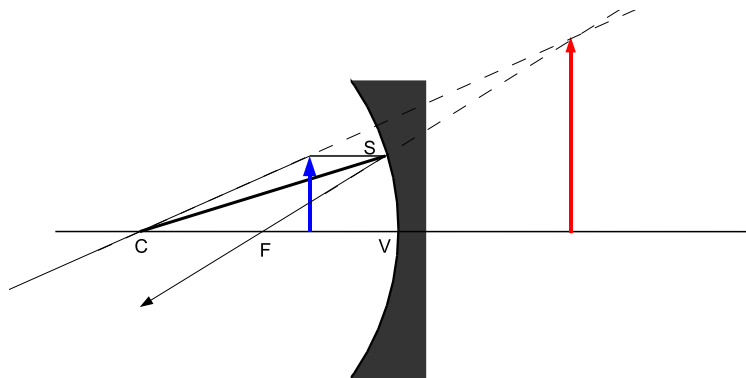


Figura 4.6: L'oggetto si trova fra il fuoco e il vertice dello specchio.

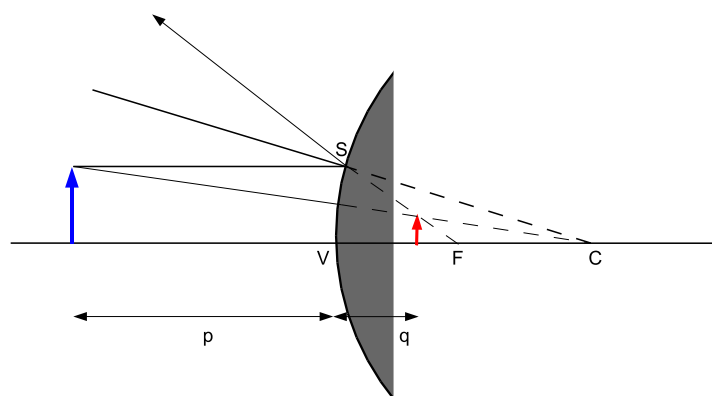


Figura 4.7: Caso dello specchio convesso.

Capitolo 5

Le aberrazioni

5.1 Aberrazione sferica

In approssimazione di Gauss, i raggi parassiali prodotti da una sorgente puntiforme posta sull'asse di un sistema ottico vanno a incontrarsi in un punto-immagine posto anch'esso sull'asse (Fig. 5.1).

In generale questo non avviene, cioè i raggi si incontrano in punti diversi dell'asse a seconda della loro distanza dall'asse stesso.

Riprendiamo la trattazione del diottro.

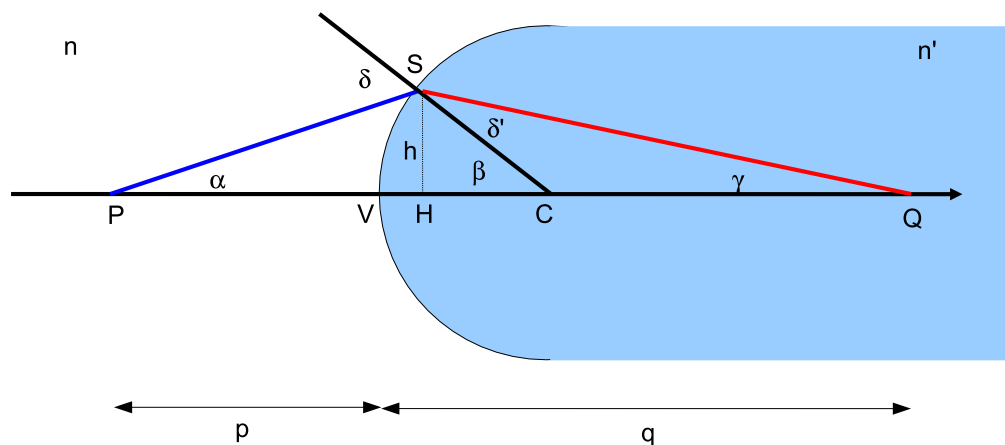


Figura 5.1: Formazione dell'immagine nel diottro in condizioni di raggi non parassiali.

Consideriamo i triangoli PSC e QSC . Applichiamo il teorema dei seni e la legge di Snell:

$$\frac{\sin \alpha}{R} = \frac{\sin (\pi - \delta)}{p + R} = \frac{\sin \delta}{p + R}$$

$$\frac{\sin \delta'}{q - R} = \frac{\sin \gamma}{R}$$

$$\frac{\sin \delta}{\sin \delta'} = \frac{n'}{n}$$

Dividendo le prime due equazioni si ottiene:

$$\frac{\sin \delta'}{q - R} \cdot \frac{p + R}{\sin \delta} = \frac{\sin \gamma}{R} \cdot \frac{R}{\sin \alpha}$$

$$\frac{p + R}{q - R} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \frac{n'}{n} = \frac{n'}{n} \frac{\overline{PS}}{\overline{QS}}$$

Utilizziamo ora il teorema dei coseni:

$$\overline{PS}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{SC}^2 - 2\overline{PC} \cdot \overline{SC} \cdot \cos \beta$$

$$\overline{PS}^2 = (p + R)^2 + R^2 - 2R \cdot (p + R) \cdot \cos \beta$$

$$\overline{QS}^2 = \overline{SC}^2 + \overline{CQ}^2 - 2\overline{SC} \cdot \overline{CQ} \cdot \cos (\pi - \beta)$$

$$\overline{QS}^2 = R^2 + (q - R)^2 + 2R \cdot (q - R) \cdot \cos \beta$$

Se adesso β non è molto grande, possiamo esprimere $\cos \beta$ in serie:

$$\cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2}$$

e approssimare β alla sua tangente:

$$\tan \beta \cong \beta = \frac{h}{R}$$

da cui:

$$\overline{PS} = \sqrt{(p+R)^2 + R^2 - 2R \cdot (p+R) \cdot \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)} = \sqrt{p^2 + (p+R) \frac{h^2}{R}}$$

$$\overline{QS} = \sqrt{R^2 + (q-R)^2 + 2R \cdot (q-R) \cdot \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)} = \sqrt{q^2 + (R-q) \frac{h^2}{R}}$$

A questo punto abbiamo che:

$$\frac{p+R}{q-R} = \frac{n'}{n} \frac{\sqrt{p^2 + (p+R) \frac{h^2}{R}}}{\sqrt{q^2 + (R-q) \frac{h^2}{R}}} = \frac{n'}{n} \frac{p}{q} \frac{\sqrt{1 + (p+R) \frac{h^2}{p^2 R}}}{\sqrt{1 + (R-q) \frac{h^2}{q^2 R}}}$$

Espandiamo in serie i due termini sotto radice quadrata, ricordando che: $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x$:

$$\frac{p+R}{q-R} = \frac{n'}{n} \frac{p}{q} \left[\frac{1 + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R}\right) \frac{h^2}{2p}}{1 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{R}\right) \frac{h^2}{2q}} \right]$$

Adesso, applicando la definizione di fuoco secondario del diottro sferico:

$$f = \frac{n'R}{n' - n}$$

si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{R} + \left[\left(\frac{h^2 n^2 R}{2fn'} \right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{n' - n}{np} \right) \right] \quad (5.1)$$

Tenendo conto che gli indici di rifrazione, il raggio di curvatura e la focale sono costanti, una volta posizionata la sorgente a distanza p dal vertice, l'immagine si formerà a distanza $q(h)$.

Consideriamo un fascio di raggi uscente da una sorgente puntiforme e vediamo che tipo di immagine si forma. Già sappiamo che per effetto della **diffrazione**, l'immagine di

una sorgente puntiforme non è mai un punto geometrico, bensì una figura di estensione finita, chiamata generalmente **centrica**, e formata da una zona centrale luminosa attorniata da anelli chiari e scuri con intensità decrescente allontanandosi dal centro (**disco di Airy**).

L'aberrazione di **sfericità** è causata dal fatto che raggi a distanze diverse dall'asse ottico vanno a incontrarsi in punti diversi lungo l'asse stesso. In particolare, si ha aberrazione sferica **longitudinale** e **trasversale**, e nello spazio la composizione di queste due produce una figura chiamata **caustica** (Fig. 5.2). L'aberrazione sferica è l'unica delle aberrazioni monocromatiche che dipende solo dall'apertura.

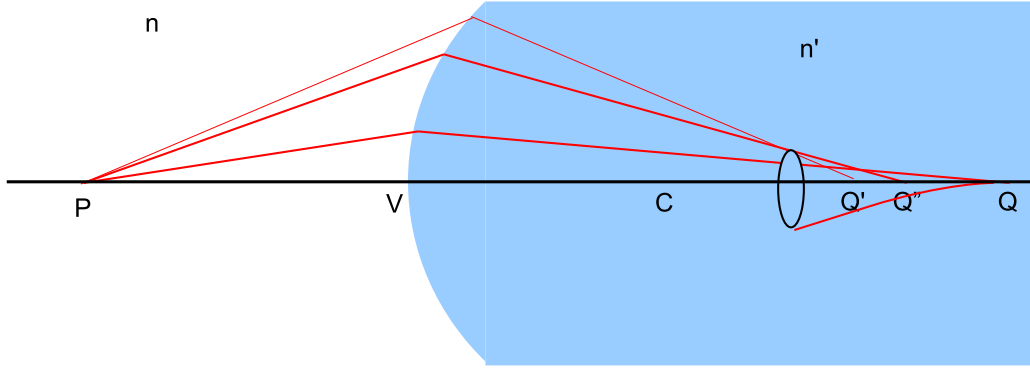


Figura 5.2: Formazione della caustica causata da aberrazione sferica.

Se h è la distanza del punto di incidenza del raggio sul diottro rispetto all'asse ottico e f_p il fuoco secondario del diottro nell'approssimazione di Gauss, abbiamo:

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q(h)} = \frac{n' - n}{R} + \left[\left(\frac{h^2 n^2 R}{2 f_p n'} \right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{n' - n}{np} \right) \right] \quad (5.2)$$

Poniamo adesso la sorgente luminosa all'infinito ($p \rightarrow \infty$). Un raggio marginale, a distanza h dall'asse ottico, si focalizza a distanza $f'(h) \neq f_p$.

$$\frac{n'}{f'(h)} = \frac{n' - n}{R} + \left[\left(\frac{h^2 n^2 R}{2 f_p n'} \right) \frac{1}{R^2} \frac{1}{R} \right] \quad (5.3)$$

$$\frac{n'}{f'(h)} = \frac{n'}{f_p} + \frac{h^2 n^2}{2 f_p n' R^2} \quad (5.4)$$

Da cui si ottiene l'equazione:

$$f'(h) = \frac{f_p}{1 + \frac{n^2}{2n'^2 R^2} h^2} \quad (5.5)$$

che indica che la distanza focale decresce al crescere della distanza dei raggi marginali dall'asse stesso.

Mettiamoci adesso nella condizione più semplice da trattare, cioè quella dello specchio sferico (Fig. 5.3).

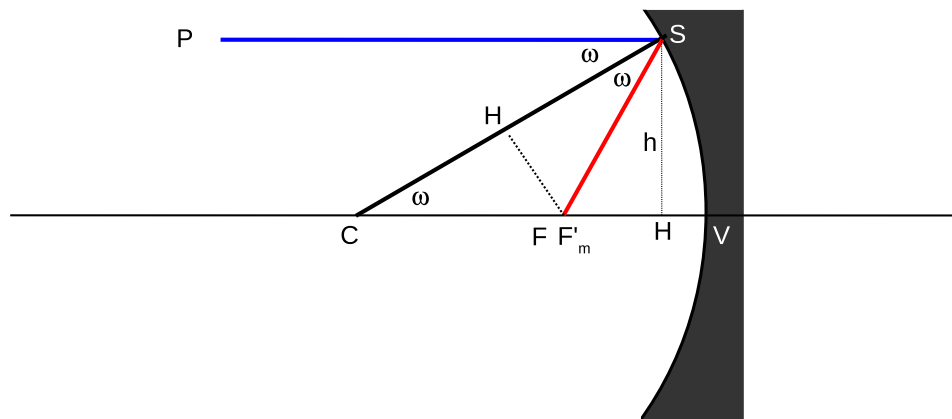


Figura 5.3: Un raggio marginale proveniente dall'infinito viene riflesso in un punto F'_m diverso dal fuoco F , definito dai raggi parassiali.

$P\hat{S}C = C\hat{S}F'_m = S\hat{C}V = \omega$, per cui il triangolo CSF'_m è isoscele. Tracciamo la verticale da F'_m al raggio di curvatura CS , per cui $CH = HS = \frac{R}{2}$. Essendo CHF'_m un triangolo rettangolo, $CH < CF'_m$ e quindi $F'_mV = f' < \frac{R}{2}$. Quindi, in generale possiamo dire che $f' \neq \frac{R}{2}$ e in particolare $f' < \frac{R}{2}$.

Calcoliamo ora la distanza fra i due fuochi F , dato dall'approssimazione gaussiana, e F'_m .

$$\overline{FF'_m} = \overline{CF'_m} - \overline{CF} = \frac{\overline{CH}}{\cos \omega} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \left(\frac{1}{\cos \omega} - 1 \right)$$

Espandiamo in serie il $\cos \omega$:

$$\cos \omega \cong 1 - \frac{\omega^2}{2}$$

$$\overline{FF'_m} = \frac{R}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{2}} - 1 \right)$$

Moltiplicando e dividendo per $1 + \frac{\omega^2}{2}$ e trascurando i termini di grado superiore al secondo:

$$\overline{FF'_m} = \frac{R}{2} \left(1 + \frac{\omega^2}{2} - 1 \right) = \frac{R\omega^2}{4}$$

Chiamiamo **aberrazione sferica longitudinale principale** (“principale” indica per convenzione che il punto-oggetto è all’infinito), la quantità:

$$l = \frac{f\omega^2}{2}$$

Esprimiamo l in funzione di h .

$$\begin{aligned} \sin \omega = \frac{h}{R} = \frac{h}{2f} \quad \Rightarrow \quad \omega = \arcsin \left(\frac{h}{2f} \right) &\cong \frac{h}{2f} + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2f} \right)^3 \\ l = \frac{f}{2} \left[\frac{h}{2f} + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2f} \right)^3 \right]^2 &\cong \frac{h^2}{8f} \end{aligned} \quad (5.6)$$

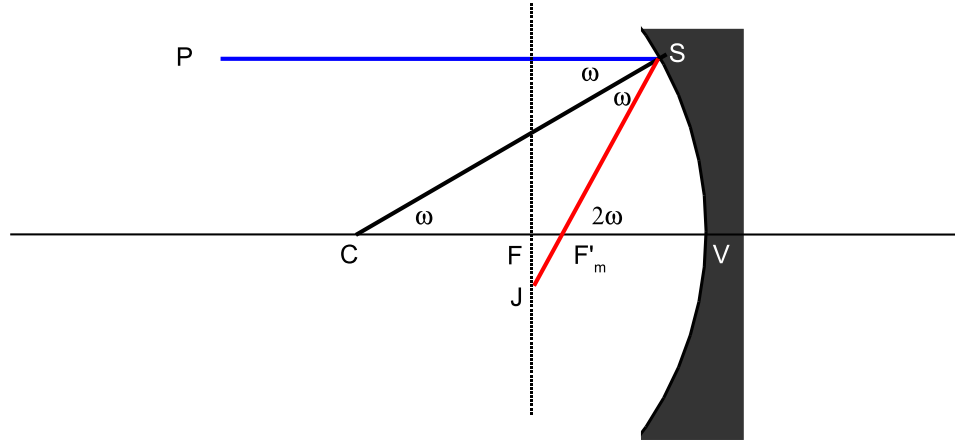
Definiamo **aberrazione sferica trasversale principale** (Fig. 5.4), la quantità:

$$t = 2 \cdot \overline{FJ} = 2l \cdot \tan 2\omega$$

Espandiamo in serie la tangente, e otteniamo:

$$\overline{FJ} \cong l \left[2\omega + \frac{1}{3}(2\omega)^3 \right]$$

Sostituendo i valori di ω e di l trovati prima, si ha:

Figura 5.4: Il prolungamento di F'_m incontra il piano focale nel punto J.

$$t = 2 \cdot \frac{h^2}{8f} \left[2 \left(\frac{h}{2f} + \frac{1}{6} \frac{h^3}{8f^3} \right) + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{2f} + \frac{1}{6} \frac{h^3}{8f^3} \right)^3 \right]$$

E approssimando:

$$t \cong 2 \frac{h^2}{8f} \frac{2h}{2f} = \frac{h^3}{4f^2} \quad (5.7)$$

5.1.1 Esempio

Consideriamo uno specchio sferico di diametro $D = 100$ mm e lunghezza focale $f = 400$ mm. La dimensione sul piano focale dell'immagine di una sorgente puntiforme in assenza di aberrazioni è data dalla diffrazione:

$$d = 2 \cdot \frac{1.22\lambda}{D} \cdot f$$

Assumiamo $\lambda = 5500$ Å, e otteniamo $d \simeq 0.0054$ mm.

Calcoliamo adesso l'aberrazione sferica longitudinale e trasversale per raggi a distanza $h = 10, 20, 30, 40$ mm dall'asse ottico della lente.

h (mm)	l (mm)	t (mm)
10	0.0312	0.0015
20	0.1250	0.0125
30	0.2812	0.0422
40	0.5000	0.1000

Come si vede, l'effetto dell'aberrazione sferica è quasi sempre superiore a quello della diffrazione. E inoltre l'aberrazione sferica longitudinale è maggiore di quella trasversale. Infatti:

$$l > t \quad \Rightarrow \quad \frac{h^2}{8f} > \frac{h^3}{4f^2} \quad \Rightarrow \quad h < \frac{f}{2}$$

Poiché $h \leq \frac{D}{2}$ e sapendo che in genere le lenti hanno $f/D \geq 1$, si ottiene che $h < \frac{f}{2}$.

5.1.2 Aberrazione sferica nella lente sottile

L'espressione dell'aberrazione sferica longitudinale nel caso della lente sottile è più complicata di quella relativa allo specchio sferico. In particolare vale:

$$l = \frac{R^2 f^2}{2} \frac{n-1}{n^2} \left\{ \left[-\frac{1}{R_2} + (n+1)(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \left[-\frac{1}{R_2} + (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]^2 + \frac{1}{R_1^3} \right\}$$

Il termine fra parentesi $\{ \}$ dipende dai raggi di curvatura della lente e dal suo indice di rifrazione. È dunque una quantità costante, quindi conviene scrivere:

$$l = c \frac{R^2}{f} \tag{5.8}$$

dove c è una costante adimensionale ($[L]^3 \cdot \{[L]^{-1} \cdot [L]^{-2} + [L]^{-3}\}$).

Dalla Fig. 5.5 si ottiene:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'_m F}}{\overline{OF'_m}}$$

$$\frac{t}{2R} = \frac{l}{f'_m}$$

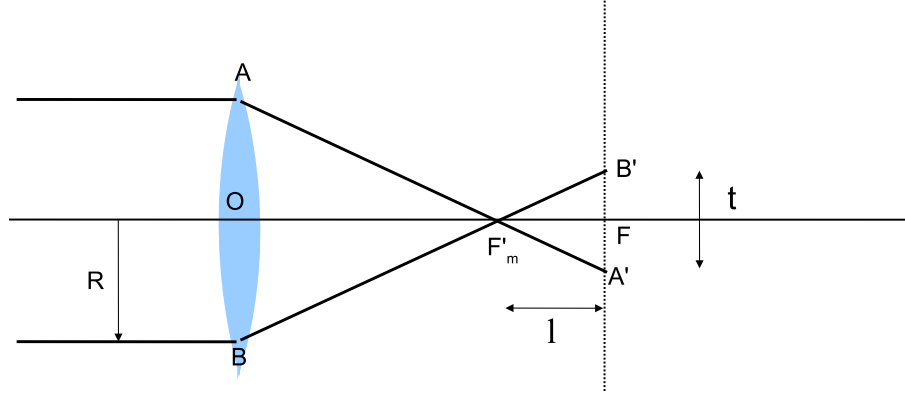


Figura 5.5: Aberrazione sferica longitudinale e trasversale in una lente.

$$t = \frac{2Rl}{f'_m} \cong \frac{2Rl}{f} = 2c \frac{R^3}{f^2}$$

Dove f è il fuoco dei raggi parassiali $\frac{1}{f_p} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ e c è una costante che dipende dall'indice di rifrazione e dai raggi di curvatura, $c(n(\lambda), |R_1|, |R_2|)$.

Se chiamiamo h la distanza dall'asse ottico della lente, possiamo esprimere la posizione del fuoco al variare di h :

$$f(h) = f_p - c \frac{h^2}{f_p}$$

Definiamo ora, *fattore di forma* la quantità:

$$q = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} = \frac{\frac{R_2}{R_1} + 1}{\frac{R_2}{R_1} - 1}$$

da cui:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{q+1}{q-1}$$

È possibile minimizzare l'aberrazione sferica trovando il valore di q che minimizza la costante c :

$$\frac{dc}{dq} = 0$$

Vediamo alcuni casi (Fig. 5.6) in cui assumiamo che l'indice di rifrazione valga $n = 1.5$:

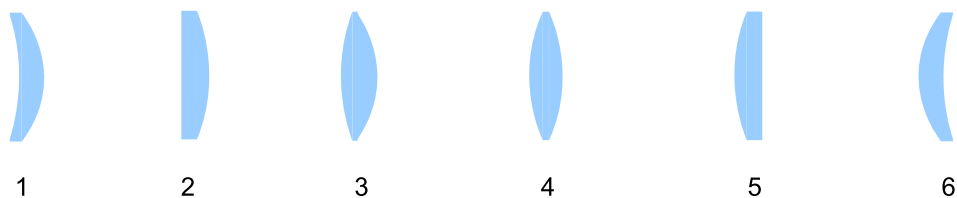


Figura 5.6: Fattore di forma per lenti di vario tipo, da concavo-convesso (1) a convesso-concavo (6).

- 1) $|R_1| > R_2$
Siano $R_1 = -10$ cm e $R_2 = -3.33$ cm.
Si ottiene $f = 10$ cm, $q \cong -2$ e $c = 9.66$.
- 2) $|R_1| \rightarrow \infty$
Sia $R_2 = -5.0$ cm.
Si ottiene $f = 10$ cm, $q = -1$ e $c = 4.5$.
- 3) $|R_1| > R_2$
Siano $R_1 = 20$ cm e $R_2 = -6.66$ cm.
Si ottiene $f = 10$ cm, $q \cong -0.5$ e $c = 2.79$.
- 4) $R_1 = |R_2|$
Siano $R_1 = 10$ cm e $R_2 = -10$ cm.
Si ottiene $f = 10$ cm, $q = 0$ e $c = 1.7$.

- 5) $R_2 \rightarrow \infty$
 Sia $R_1 = 5.0$ cm.
 Si ottiene $f = 10$ cm, $q = 1$ e $c \cong 1.17$.
- 6) $|R_2| > R_1$
 Siano $R_1 = 3.33$ cm e $R_2 = 10$ cm.
 Si ottiene $f = 10$ cm, $q \cong 2$ e $c \cong 3$

Se confrontiamo l'espressione per l'aberrazione sferica longitudinale e trasversa dello specchio sferico con quelle della lente sottile, abbiamo:

$$l = \frac{h^2}{8f} = c \frac{R^2}{f} \quad t = \frac{h^3}{4f^2} = 2c \frac{R^3}{f^2}$$

da cui, assumendo $R = h$ si ricava che $c = 1/8$.

Mentre per la lente sottile simmetrica, in cui $R_1 = |R_2| = R$ e $\frac{1}{f} = \frac{2(n-1)}{R}$, avremo:

$$c = \frac{f^3}{2} \frac{n-1}{n^2} \left\{ \left[\frac{1}{R} + (n^2-1) \frac{2}{R} \right] \left[\frac{1}{R} + (n-1) \frac{2}{R} \right]^2 + \frac{1}{R^3} \right\}$$

Sviluppando e semplificando si ottiene la seguente relazione:

$$c = \frac{4n^3 - 4n^2 - n + 2}{8n(n-1)^2} \quad (5.9)$$

Se assumiamo che $n = 1.5$, otteniamo $c \cong 1.7$.

5.2 Aberrazione cromatica

Riprendiamo il concetto di indice di rifrazione n . Come abbiamo visto nel Cap. 1, n è il rapporto fra la velocità della luce nel vuoto e nel mezzo, e dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione che attraversa il mezzo. In particolare, per mezzi trasparenti come il vetro, si osserva che n decresce al crescere della lunghezza d'onda:

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0$$

Questo implica che quando consideriamo una lente e un fascio di raggi che l'attraversano, l'effetto della rifrazione sui raggi dipenderà dall'indice di rifrazione. In particolare, verranno deviati maggiormente i raggi a lunghezza d'onda minore, rispetto a quelli a lunghezza d'onda maggiore. Questo meccanismo è alla base dell'effetto di **aberrazione cromatica** (Fig. 5.7).

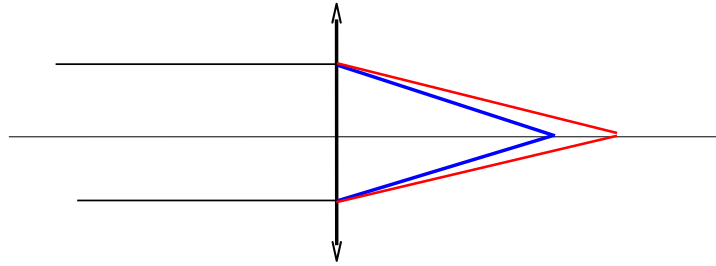


Figura 5.7: Al variare della lunghezza d'onda varia la distanza focale: il fuoco dei raggi blu è più corto di quello dei raggi rossi.

Per studiare questa aberrazione abbiamo bisogno di un set di tre filtri interferenziali. I filtri sono sistemi ottici in grado di selezionare un certo intervallo di lunghezze d'onda, bloccando tutte le altre. In particolare i filtri interferenziali consentono di fare passare radiazione centrata ad una certa λ ma con un intervallo molto stretto ($50 - 60 \text{ \AA}$ o meno).

Il set di filtri utilizzato è il seguente: $\lambda_F = 4861 \text{ \AA}$ (riga $H\beta$ dell'idrogeno), $\lambda_D = 5892 \text{ \AA}$ (doppietto del sodio), $\lambda_C = 6563 \text{ \AA}$ (riga $H\alpha$ dell'idrogeno). Le lettere F, D, C corrispondono alla notazione di Fraunhofer. Più in generale si parla di filtro $H\alpha$, $H\beta$, ecc.

Dalla definizione di lunghezza focale della lente, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_F} &= (n_F - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{f_C} &= (n_C - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ \frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} &= (n_F - 1 - n_C + 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = (n_F - n_C) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

Per poter eliminare il termine contenente i raggi di curvatura utilizziamo il filtro D :

$$\frac{1}{f_D} = (n_D - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f_D(n_D - 1)}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} &= \frac{1}{f_D} \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \\ \frac{f_C - f_F}{f_F f_C} &= \frac{1}{f_D} \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \end{aligned}$$

Definiamo quindi **aberrazione cromatica longitudinale (principale)** la quantità:

$$A = f_C - f_F = f(\lambda_C) - f(\lambda_F)$$

Chiamiamo **potere dispersivo** ω del materiale la quantità:

$$\omega = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

e **numero di Abbe** ν la quantità:

$$\nu = \frac{1}{\omega} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

I vetri ottici possono essere raggruppati in due grandi famiglie: 1) Crown, aventi $n \approx 1.5$ e $\nu \approx 60$ (basso potere dispersivo), 2) Flint, aventi $n \approx 1.6$ e $\nu \approx 30$ (alto potere dispersivo). Ad esempio, consideriamo un vetro Schott BK7 avente:

$$\begin{aligned} n_F &= 1.52238 \\ n_D &= 1.51680 & \Rightarrow & \omega = 0.0156 & \Rightarrow & \nu = 64 \\ n_C &= 1.51342 \end{aligned}$$

Dalla definizione di aberrazione cromatica otteniamo:

$$A = \frac{f_F f_C}{f_D} \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

Se assumiamo la seguente approssimazione: $f_F f_C \cong f_D^2$, abbiamo:

$$A \cong \omega f_D = \frac{f_D}{\nu}$$

Cerchiamo ora di comprendere il significato del numero di Abbe.

Ripartiamo dalla definizione di lunghezza focale della lente e differenziamo ambo i membri:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) n - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ -\frac{1}{f^2} df &= \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dn \\ \frac{df}{dn} &= -f^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

Assumendo $f = f_D$, cioè la focale corrispondente alla lunghezza d'onda del doppietto del sodio, come rappresentativa della focale della lente:

$$\frac{1}{f_D} = (n_D - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

E poi approssimando: $dn \cong \Delta n = n_C - n_F$, $df \cong \Delta f$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta n} &= -f_D^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ \frac{\Delta f}{\Delta n} &= -f_D \left[f_D \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \\ \frac{\Delta f}{\Delta n} &= \frac{-f_D}{n_D - 1} \\ \frac{\Delta f}{f_D} &= \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = \frac{1}{\nu} = \omega \end{aligned}$$

Essendo $\nu > 0$ per i vetri ottici, il numero di Abbe è inversamente proporzionale alla dispersione cromatica della lunghezza focale.

Vediamo adesso cosa accade quando la sorgente puntiforme non si trova all'infinito ma a distanza finita p . Ovviamente applichiamo la legge dei punti coniugati per calcolare l'effetto dell'aberrazione cromatica sulla misura di q .

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_F} = \frac{n_F - 1}{f_D(n_D - 1)} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q_C} = \frac{n_C - 1}{f_D(n_D - 1)}$$

Sottraendo membro a membro:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_F} - \frac{1}{q_C} &= \frac{n_F - 1 - n_C + 1}{f_D(n_D - 1)} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \frac{1}{f_D} = \frac{1}{\nu f_D} \\ \frac{q_C - q_F}{q_F q_C} &= \frac{1}{\nu f_D} \Rightarrow q_C - q_F = \frac{q_F q_C}{\nu f_D} \end{aligned}$$

EsPLICITIAMO q_F E q_C USANDO L'EQUAZIONE DEI PUNTI CONIUGATI:

$$q_F = \frac{1}{\left(\frac{n_F - 1}{n_D - 1}\right) \frac{1}{f_D} - \frac{1}{p}} \quad q_C = \frac{1}{\left(\frac{n_C - 1}{n_D - 1}\right) \frac{1}{f_D} - \frac{1}{p}}$$

Se approssimiamo $\left(\frac{n_C - 1}{n_D - 1}\right) \cong 1$, abbiamo:

$$q_C - q_F \cong \frac{1}{\nu f_D \left(\frac{1}{f_D} - \frac{1}{p}\right)^2}$$

Sappiamo che:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_D} = \frac{1}{f_D}$$

Quindi l'aberrazione cromatica $q_C - q_F$ vale:

$$q_C - q_F = \frac{q_D^2}{\nu f_D} = \frac{f_D}{\nu} \left(\frac{q_D}{f_D}\right)^2$$

Da questa relazione si ricava che:

- $q_C - q_F \propto q_D^2$;

- $q_D > f_D \Rightarrow \frac{q_D}{f_D} > 1$, cioè l'aberrazione cromatica cresce rapidamente con il crescere della distanza dell'immagine dalla lente;
- $q_D < f_D \Rightarrow \frac{q_D}{f_D} < 1$, cioè l'aberrazione cromatica decresce rapidamente con il decrescere della distanza dell'immagine dalla lente.

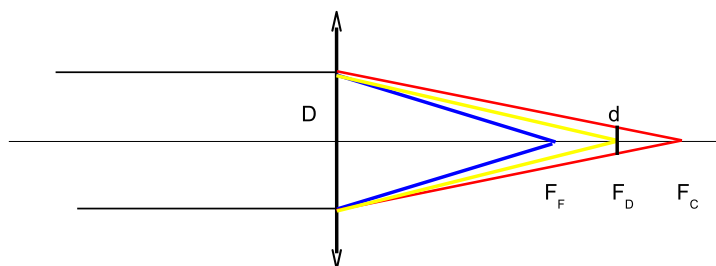


Figura 5.8: Distanze focali ottenute con il filtro blu, giallo e rosso. La focale corrispondente al colore giallo è assunta essere la distanza focale della lente. D è il diametro del fascio di luce.

Come si nota dalla Fig. 5.8, possiamo definire anche l'**aberrazione cromatica trasversa** d .

$$\frac{d}{f_C - f_D} = \frac{D}{f_C}$$

Applicando le seguenti approssimazioni: $f_C \approx f_D$ e $f_C - f_D \approx \frac{f_C - f_F}{2}$, si ottiene:

$$\frac{d}{\frac{f_C - f_F}{2}} \cong \frac{D}{f_D}$$

da cui:

$$d = \frac{1}{2} \frac{f_C - f_F}{f_D} D \cong \frac{1}{2} \frac{D}{\nu}$$

5.2.1 Esempio

Consideriamo una lente in vetro Schott FK5, avente diametro $D = 50$ mm e lunghezza focale $F = 150$ mm.

Calcoliamo prima il diametro del disco di Airy alla lunghezza d'onda $\lambda = 5500\text{\AA}$:

$$\phi = 2 \frac{1.22\lambda}{D} F = 4\mu$$

Supponiamo che la lente abbia i seguenti indici di rifrazione: $n_C = 1.48535$, $n_D = 1.48749$, $n_F = 1.49227$. Il valore del numero di Abbe sarà $\nu \cong 70$. Allora l'aberrazione cromatica longitudinale vale: $A = \frac{150}{70} \cong 2.15$ mm, mentre quella trasversa vale: $d = \frac{50}{2 \cdot 70} \cong 0.35$ mm.

5.2.2 Doppietto acromatico

È possibile combinare lenti con caratteristiche diverse per annullare l'aberrazione cromatica?

Sappiamo che addossando lenti sottili, il potere diottrico risultante è la somma dei poteri diottrici delle singole lenti:

$$D_{tot} = \sum_i D_i$$

Prendiamo due lenti con lunghezze focali f e f' , avremo:

$$\frac{1}{F_F} = \frac{1}{f_F} + \frac{1}{f'_F} \quad \frac{1}{F_C} = \frac{1}{f_C} + \frac{1}{f'_C}$$

Sottraendo membro a membro:

$$\frac{1}{F_F} - \frac{1}{F_C} = \frac{F_C - F_F}{F_F F_C} = \frac{1}{f_F} + \frac{1}{f'_F} - \frac{1}{f_C} - \frac{1}{f'_C} = \left(\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} \right) + \left(\frac{1}{f'_F} - \frac{1}{f'_C} \right)$$

L'aberrazione cromatica del doppietto sarà $A_{tot} = F_C - F_F$, per cui:

$$\frac{A_{tot}}{F_F F_C} = \frac{A}{f_F f_C} + \frac{A'}{f'_F f'_C}$$

$$\frac{A_{tot}}{F_F F_C} \cong \frac{A}{f_D^2} + \frac{A'}{f_D'^2}$$

$$\frac{A_{tot}}{F_F F_C} = \frac{1}{\nu f_D} + \frac{1}{\nu' f_D'}$$

Imponiamo ora la condizione di acromatizzazione: $A_{tot} = 0$.

$$\nu f_D + \nu' f_D' = 0$$

Se $\nu = \nu'$, cioè se le due lenti hanno lo stesso potere dispersivo, la condizione implica che: $f_D = -f_D'$, cioè serve una lente convergente e una divergente. Purtroppo il potere diottrico di un tale doppietto è $D_{tot} = 0$, cioè la lente non ha nessun poter di convergenza.

Se invece $\nu \neq \nu'$, si ha: $\frac{1}{\nu f_D} = -\frac{1}{\nu' f_D'}$. Poiché $\nu, \nu' > 0$, le focali delle due lenti hanno segni opposti.

È chiaro quindi che non basta semplicemente addossare una lente positiva a una negativa per avere un doppietto acromatico, bisogna essere certi che le due lenti siano composte di un materiale diverso.

Se ad esempio la lente convergente è un vetro Crown, il doppietto ha potere diottrico positivo quando $f < f'$, ed è acromatico quando $\nu > \nu'$, e quindi quando il vetro della lente divergente è un Flint.

5.2.3 Oculare acromatico

È possibile ottenere un sistema acromatico utilizzando due o più lenti spaziate?

Sappiamo che il potere diottrico risultante di due lenti sottili separate da una distanza d è:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

Da cui, differenziando membro a membro:

$$-\frac{df}{f^2} = \left(-\frac{1}{f_1^2} + \frac{d}{f_1^2 f_2} \right) df_1 + \left(-\frac{1}{f_2^2} + \frac{d}{f_1 f_2^2} \right) df_2$$

$$-\frac{df}{f^2} = -\frac{df_1}{f_1^2} \left(1 - \frac{d}{f_2}\right) - \frac{df_2}{f_2^2} \left(1 - \frac{d}{f_1}\right)$$

Facciamo la seguente approssimazione:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{f_1} &\approx \frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{1}{\nu_1} \\ \frac{df}{f^2} &\cong \frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{f_1} \left(1 - \frac{d}{f_2}\right) + \frac{1}{f_2} \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) \right] \end{aligned}$$

Imponiamo adesso la condizione di acromatizzazione: $\frac{df}{f^2} = 0$,

$$\frac{f_2 - d + f_1 - d}{f_1 f_2} = 0$$

$$f_1 + f_2 - 2d = 0$$

$$d = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Quindi per avere un sistema acromatico bisogna che le due lenti siano separate di una distanza pari alla media delle due focali.

Infine:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) \frac{1}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{2f_1} - \frac{1}{2f_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)$$

Capitolo 6

Teoria di Seidel delle aberrazioni

6.1 L'equazione iconale

Passiamo ora alla trattazione delle aberrazioni al cosiddetto III° ordine, nota anche come Teoria di Seidel.

Cominciamo considerando l'onda piana che si propaga nella direzione dell'asse x (Fig. 6.1) :

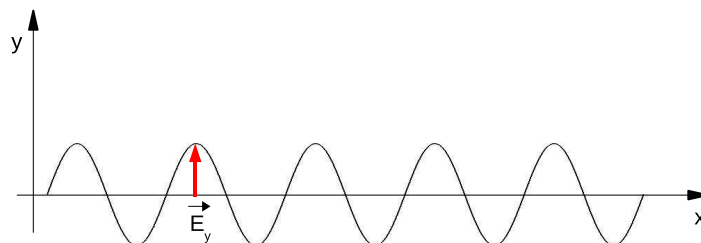


Figura 6.1: Grafico di un'onda piana. La freccia rossa indica la direzione del campo elettrico.

$$E_y(x, t) = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]$$

Essendo $n = \frac{c}{v}$, possiamo scrivere il campo elettromagnetico:

$$E_y(x, t) = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{nx}{c} \right) \right]$$

Più in generale, utilizzando la notazione complessa:

$$E'(x, t) = E_0 e^{i\omega(t - \frac{nx}{c})}$$

Dalla definizione di numero d'onda nel vuoto $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ e frequenza di oscillazione $\omega = \frac{2\pi}{T}$, si ottiene:

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{T}{T} = \frac{\omega}{c}$$

da cui:

$$E'(x, t) = E_0 e^{i(-nk_0x + \omega t)}$$

L'espressione generale per $n = cost.$, è:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(-n\vec{k}_0 \cdot \vec{r} + \omega t)}$$

Questa espressione soddisfa l'equazione di d'Alembert:

$$\Delta E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Se invece $n \neq cost.$ e in particolare $n = n(\vec{r})$, ma varia comunque su scale molto maggiori della lunghezza d'onda della radiazione, l'espressione per l'onda è:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(-k_0 S(\vec{r}) + \omega t)}$$

La funzione $S(\vec{r})$ soddisfa l'**equazione iconale**:

$$\boxed{(\vec{\nabla} S)^2 = n^2(\vec{r})} \quad (6.1)$$

Ricaviamo adesso questa equazione.

Assumiamo il caso generale in cui anche l'ampiezza dell'onda varia: $E_0 = e^{A(\vec{r})}$.

Per praticità di notazione, indichiamo $A = A(\vec{r})$ e $\phi = -k_0 S(\vec{r}) + \omega t$.

Calcoliamo intanto la derivata prima di E rispetto ad \vec{r} :

$$\frac{\partial E}{\partial \vec{r}} = e^A \left(\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) e^{i\phi} + e^A e^{i\phi} \left(-ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right)$$

e poi la derivata seconda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial \vec{r}^2} &= e^A \left(\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) e^{i\phi} + e^A \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \vec{r}^2} \right) e^{i\phi} + e^A \left(\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) e^{i\phi} \left(-ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right) \\ &+ e^A \left(\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) e^{i\phi} \left(-ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right) + e^A e^{i\phi} \left(-ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right) \left(-ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right) + e^A e^{i\phi} \left(-ik_0 \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r}^2} \right) = \\ &= e^A e^{i\phi} (\vec{\nabla} A)^2 + e^A e^{i\phi} \Delta A - i2k_0 e^A e^{i\phi} \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S - e^A e^{i\phi} k_0^2 (\vec{\nabla} S)^2 - ik_0 e^A e^{i\phi} \Delta S \end{aligned}$$

Ora calcoliamo la derivata prima e seconda di E rispetto al tempo t :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = e^A e^{i\phi} (i\omega)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = e^A e^{i\phi} (i\omega)^2 = -\omega^2 e^A e^{i\phi}$$

Sostituendo otteniamo:

$$(\vec{\nabla} A)^2 + \Delta A - i2k_0 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S - k_0^2 (\vec{\nabla} S)^2 - ik_0 \Delta S + \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 = 0$$

$$\left[(\vec{\nabla} A)^2 + \Delta A - k_0^2 (\vec{\nabla} S)^2 + \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \right] + i \left[-2k_0 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S - k_0 \Delta S \right] = 0$$

Separando parte reale da parte immaginaria, otteniamo due equazioni:

$$(\vec{\nabla} A)^2 + \Delta A - k_0^2 (\vec{\nabla} S)^2 + \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 = 0$$

$$2k_0 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S + k_0 \Delta S = 0$$

Esprimiamo il termine $\frac{\omega}{v}$ in funzione di k_0 e n :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad n = \frac{c}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T} \frac{n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = k_0 n$$

Le due equazioni diventano:

$$\Delta A + (\vec{\nabla} A)^2 + k_0^2[n^2 - (\vec{\nabla} S)^2] = 0 \quad (6.2)$$

$$\Delta S + 2\vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S = 0 \quad (6.3)$$

A questo punto, nell'ipotesi in cui $A(\vec{r})$ varia su scale molto grandi, cioè $\vec{\nabla} A \approx 0$, e di conseguenza $\Delta A \approx 0$, la prima equazione è soddisfatta se:

$$(\vec{\nabla} S)^2 = n^2$$

che è appunto l'equazione iconale.

6.2 Il teorema di Malus

Vediamo adesso il significato della funzione $S(\vec{r})$.

Da quanto detto prima, possiamo affermare che l'ottica geometrica è una sorta di caso limite dell'ottica ondulatoria per $\lambda \rightarrow 0$.

$$(\vec{\nabla} S)^2 = \vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla} S$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z)$$

Consideriamo di nuovo l'onda:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(-k_0 S(\vec{r}) + \omega t)}$$

La condizione $S(\vec{r}) = \text{cost.}$ definisce in ogni istante t i punti di ugual fase, cioè definisce l'**equazione della superficie d'onda**.

Nel caso di un'onda piana che si propaga in mezzo omogeneo ($n = \text{cost.}$):

$$S = nx = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad x = \text{cost.}$$

cioè, nel caso di onde piane, le superfici d'onda sono piani ortogonali alla direzione di propagazione (Fig. 6.2).

Se abbiamo invece a che fare con un'onda nello spazio, conviene definire il versore:

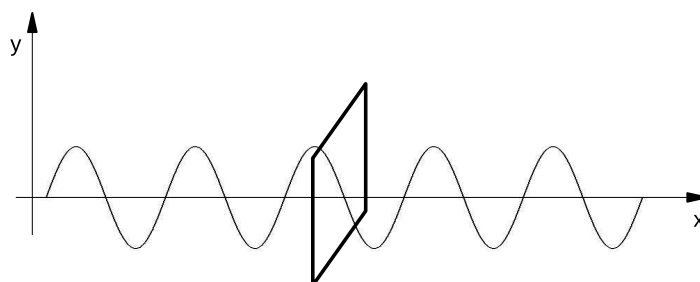


Figura 6.2: Le superfici d'onda di un fascio di onde piane in fase sono piani ortogonali alla direzione di propagazione delle onde.

$$\vec{s} = \frac{\vec{\nabla} S}{n}$$

che indica la direzione e il verso di propagazione della superficie d'onda (Fig. 6.3).

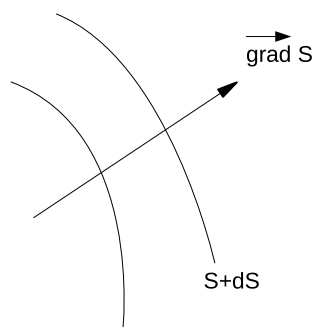


Figura 6.3: Derivando la superficie d'onda si ottiene la direzione di propagazione dei raggi luminosi.

Prima proposizione del Teorema di Malus

le superfici d'onda e i raggi luminosi in un mezzo isotropo qualsiasi formano due sistemi ortogonali

Come si può facilmente capire, è lungo \vec{s} che si propaga l'energia. Infatti la quantità di energia elettromagnetica che ogni secondo si propaga attraverso una superficie unitaria ortogonale alla direzione di propagazione del campo elettromagnetico, è descritta la vettore di Poynting $|\vec{P}| = |\vec{E} \wedge \vec{B}|$, avente dimensione $[P] = \text{Watt}/\text{m}^2$.

Riprendiamo ora il concetto di cammino ottico: *cammino nel vuoto percorso dalla radiazione nel tempo impiegato a compiere il cammino reale (nel mezzo) fra due punti considerati.*

Se l è il percorso reale da un punto P_1 a un punto P_2 in un mezzo omogeneo, cioè con indice di rifrazione costante, si ha:

$$\bar{t} = \frac{l}{v} \quad v = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow l_0 = c\bar{t} = c\frac{l}{v} = c\frac{l}{\frac{c}{n}} = nl$$

Essendo $n > 1$ si ha $l_0 > l$.

Se al contrario $n \neq cost.$, l'espressione per il cammino ottico sarà:

$$[P_1 P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n \, ds \quad (6.4)$$

dove s è l'ascissa curvilinea definita lungo il percorso.

Per un'onda piana in un mezzo omogeneo:

$$S(x) = cost \quad \Rightarrow \quad nx = cost$$

che significa cammini ottici uguali.

Di conseguenza possiamo affermare che: *la superficie d'onda $S(\vec{r})$ non è solo il luogo dei punti di ugual fase, ma è anche il luogo dei punti tali che i tragitti ottici da una fase all'altra sono gli stessi.*

In generale definiamo l'ascissa curvilinea \vec{s} (Fig. 6.4) come:

$$\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Dall'equazione iconale, moltiplicando scalarmente membro a membro \vec{s} , si ottiene:

$$\vec{s} \cdot \vec{s} = \frac{\vec{\nabla} S}{n} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}$$

da cui:

$$n \, ds = \vec{\nabla} S \cdot d\vec{r}$$

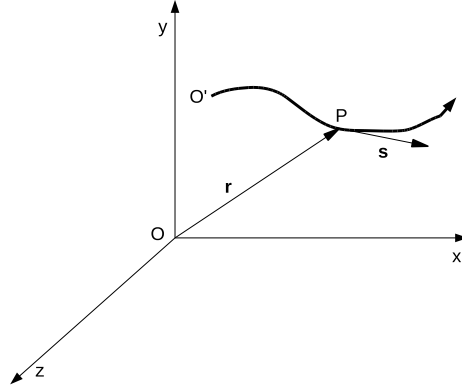


Figura 6.4: Percorso ipotetico di un raggio luminoso in un sistema di riferimento con origine O.

$$n \, ds = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz = dS$$

Introduciamo questo risultato nell'espressione del cammino ottico:

$$[P_1 P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n \, ds = S(P_2) - S(P_1) = S_2 - S_1$$

Essendo S_1, S_2 superfici d'onda, ne segue che $[P_1 P_2] = cost$, indipendentemente dalla coppia di punti scelti, purché siano coppie di punti appartenenti a diverse superfici d'onda e intercettati da un medesimo raggio (*punti corrispondenti*).

Seconda proposizione del Teorema di Malus

I cammini ottici misurati fra punti corrispondenti qualsiasi di due superfici d'onda S_1 e S_2 sono sempre uguali fra loro

Dalla Fig. 6.5, essendo (P_1, P_2) e (P'_1, P'_2) coppie di punti corrispondenti, possiamo scrivere:

$$[P_1 P_2] = [P'_1 P'_2]$$

$$n x_1 + n' x'_1 = n x_2 + n' x'_2$$

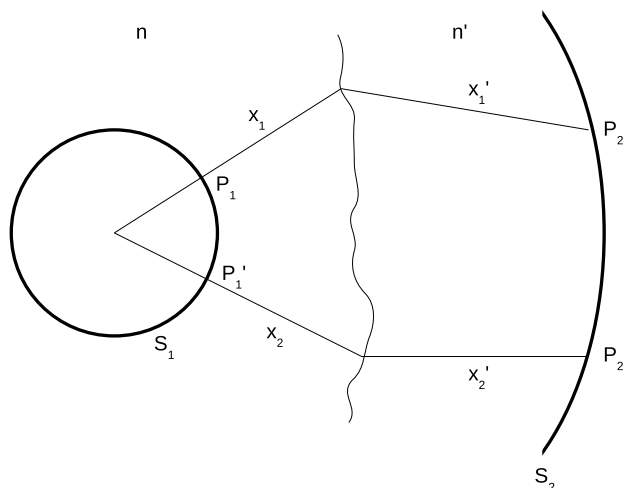


Figura 6.5: S_1 e S_2 sono due superfici d'onda in due mezzi con indice diverso n e n' . P_1 e P_2 , P_1' e P_2' sono punti corrispondenti.

Si noti che: *si passa da superfici d'onda a raggi luminosi tramite derivazione.*

Quindi, in definitiva, raggi luminosi e leggi dell'ottica geometrica non sono in contraddizione con la concezione ondulatoria della luce.

6.2.1 Esempio

Vediamo cosa accade nel caso di una lente piano-convessa (Fig.6.6).

Consideriamo una sorgente all'infinito, i raggi che arrivano alla lente sono paralleli all'asse ottico. In altri termini possiamo dire che alla lente arrivano superfici d'onda piane e parallele fra loro.

Come sarà la superficie d'onda dopo che i raggi hanno attraversato la lente?

Dalla seconda proposizione del Teorema di Malus abbiamo:

$$[A_0A'] = [B_0B'] = [C_0C']$$

D'altra parte possiamo scrivere che:

$$[A_0A'] = \overline{A_0A_1} + n\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A'}$$

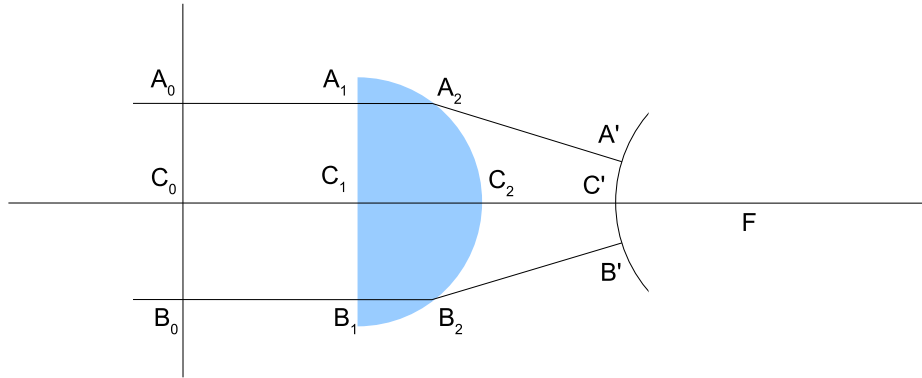


Figura 6.6: La lente trasforma le superfici d'onda piane in superfici sferiche che vanno a concentrarsi nel fuoco.

$$[C_0C'] = \overline{C_0C_1} + n\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C'}$$

Ora, $\overline{A_0A_1} = \overline{C_0C_1}$, mentre $\overline{A_1A_2} < \overline{C_1C_2}$, perché è minore il percorso fatto dal raggio dentro la lente. Segue che: $\overline{A_2A'} > \overline{C_2C'}$. Lo stesso può dirsi per il raggio B , simmetrico di A rispetto all'asse ottico: $\overline{B_2B'} > \overline{C_2C'}$.

Si comprende facilmente che la superficie S_2 è una superficie sferica con centro nel fuoco F .

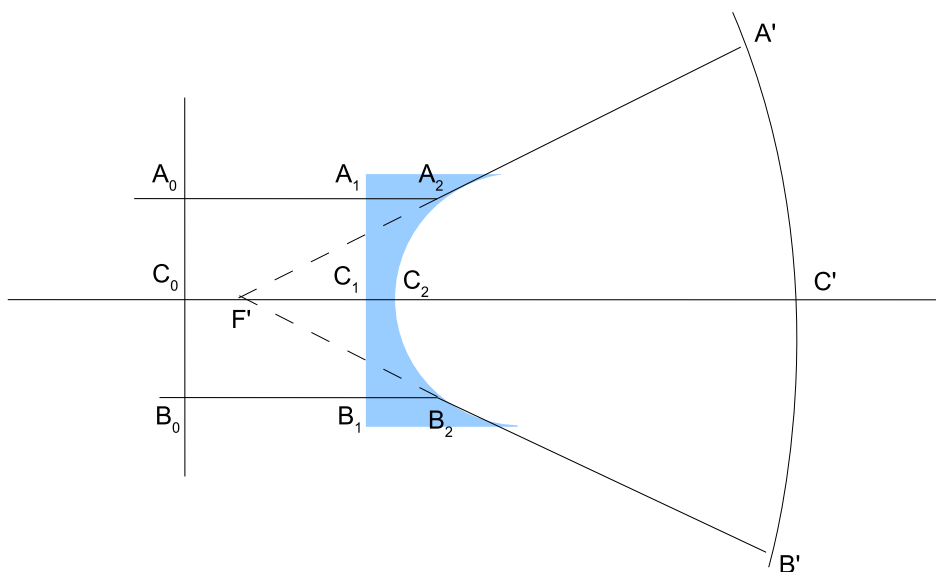


Figura 6.7: La lente trasforma le superfici d'onda piane in superfici sferiche che provengono dal fuoco.

Cambiamo il tipo di lente, consideriamo una lente piano-concava (Fig. 6.7).

Come prima: $[A_0A'] = [B_0B'] = [C_0C']$.

$$\overline{A_0A_1} + n\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A'} = \overline{C_0C_1} + n\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C'}$$

La lente è più sottile al centro e più spessa ai bordi, quindi: $\overline{A_1A_2} > \overline{C_1C_2}$, e $\overline{B_1B_2} > \overline{C_1C_2}$. Ne segue che: $\overline{A_2A'} < \overline{C_2C'}$ e $\overline{B_2B'} < \overline{C_2C'}$.

Ancora una volta S_2 è una superficie sferica, questa volta centrata sul fuoco F' .

In conclusione: *le due lenti mettendo a fuoco raggi paralleli, trasformano superfici d'onda piane in sferiche.*

6.3 La funzione di aberrazione

Prendiamo due superfici d'onda che si propagano in un mezzo non omogeneo ($n \neq 0$) (Fig. 6.8). Il cammino ottico fra due punti corrispondenti P_0 e P_1 sarà costante:

$$[P_0 P_1] = \int_{P_0}^{P_1} n \, ds = S_1(P_1) - S_0(P_0)$$

Chiamiamo *funzione caratteristica di Hamilton*:

$$V(P_0, P_1) = [P_0 P_1]$$

il cammino ottico da P_0 a P_1 in funzione delle loro coordinate, cioè:

$$[P_0 P_1] = \int_{P_0}^{P_1} n \, ds = V(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) = S(x_1, y_1, z_1) - S(x_0, y_0, z_0)$$

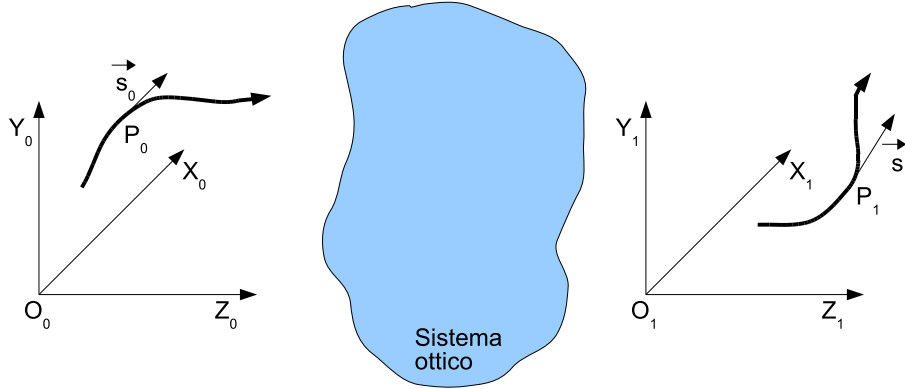


Figura 6.8: Caso generale del percorso di un raggio luminoso attraverso un sistema ottico.

Sappiamo che $\vec{\nabla} S = n \vec{s}$, per cui otteniamo:

$$\vec{\nabla}_{P_0} V = -\vec{\nabla} S(x_0, y_0, z_0) = -n \vec{s}_0$$

$$\vec{\nabla}_{P_1} V = n \vec{s}_1$$

e in generale possiamo scrivere:

$$\vec{\nabla}_{P_i} V = \pm n \vec{s}_i \quad (6.5)$$

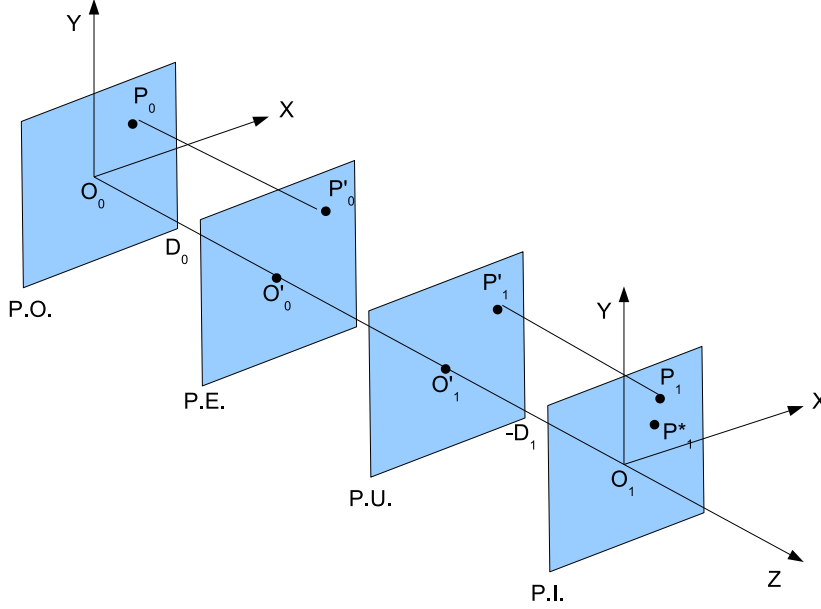


Figura 6.9: Un raggio luminoso emesso dal punto P_0 sul piano degli oggetti passa attraverso la pupilla di entrata, la pupilla di uscita e raggiunge il piano delle immagini in P_1 . In assenza di aberrazioni il punto-immagine sarebbe P_1^* .

Consideriamo adesso il piano degli oggetti, il piano della pupilla di entrata, il piano della pupilla di uscita e il piano delle immagini. Definiamo su ogni piano un sistema di assi cartesiani xyz di origine O_0 , O'_0 , O'_1 e O_1 rispettivamente. Le origini siano allineate lungo l'asse z , che coincide con l'asse ottico del sistema. Il piano della pupilla di entrata si trovi a distanza D_0 dal piano degli oggetti, mentre il piano della pupilla di uscita si trovi a distanza $-D_1$ dal piano delle immagini. Infine sia P_0 un punto sul piano degli oggetti, e siano P'_0 , P'_1 e P_1 , le immagini del punto su ogni piano (Fig. 6.9). Se il sistema fosse privo di aberrazioni, l'immagine di P_0 dovrebbe formarsi in P_1^* .

Definiamo quindi *aberrazione del raggio* la quantità $\overline{P_1^*P_1} \equiv (X_1 - X_1^*, Y_1 - Y_1^*, 0)$. È conveniente trattare il problema in termini di aberrazione d'onda usando l'equazione iconale: come i raggi si ottengono derivando le superfici d'onda, così le aberrazioni dei raggi si ottengono derivando le aberrazioni d'onda.

La Fig. 6.10 mostra il confronto fra un'ipotetica superficie d'onda S e la stessa aberrata W . Il cammino ottico da \overline{Q} a Q è la funzione di aberrazione:

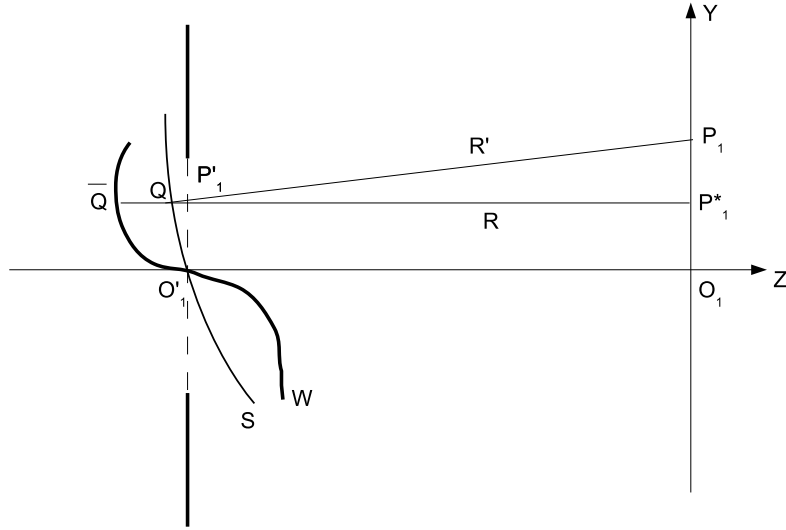


Figura 6.10: Il piano della pupilla di uscita (a sinistra) e delle immagini (a destra) visti dall'asse X. Q e \bar{Q} sono punti corrispondenti, il primo appartenente alla superficie d'onda in caso di assenza di aberrazioni, il secondo appartenente alla superficie aberrata.

$$\tilde{\Phi} = [\bar{Q}Q] = [P_0Q] - [P_0\bar{Q}]$$

Si assume che la funzione $\tilde{\Phi} > 0$ quando entrambi \bar{Q} e P_1 si trovano da lati opposti rispetto a Q .

Da quanto detto prima sappiamo che:

$$[P_0Q] = \int_{P_0}^Q n \, ds = S(Q) - S(P_0) = V_Q(P_0, Q)$$

dove $Q \equiv Q(X, Y, Z)$ è tale che $(X - X_1^*)^2 + (Y - Y_1^*)^2 + Z^2 = R^2$.

Poiché \overline{Q} e O'_1 appartengono allo stesso fronte d'onda, per la seconda proposizione del teorema di Malus, i cammini ottici da P_0 a \overline{Q} e da P_0 a O'_1 coincidono.

$$[P_0\overline{Q}] = \int_{P_0}^{\overline{Q}} n \, ds = [P_0\overline{O'_1}] = \int_{P_0}^{O'_1} n \, ds = V_{\overline{Q}}(P_0, O'_1)$$

$$\tilde{\Phi} = V_Q(P_0, Q) - V_{\overline{Q}}(P_0, O'_1) = V_Q(X_0, Y_0, 0, X, Y, Z) - V_{\overline{Q}}(X_0, Y_0, 0, 0, 0, -D_1)$$

Deriviamo adesso la funzione di aberrazione:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X} \right|_Q = \frac{\partial V_Q}{\partial X} + \frac{\partial V_Q}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X}$$

$$\frac{\partial V_Q}{\partial X} = n \, s_X = n \cos \alpha$$

$$\frac{\partial V_Q}{\partial Z} = n \, s_Z = n \cos \gamma$$

dove $\cos \alpha$ e $\cos \gamma$ sono i coseni direttori di \vec{s} .

$$Z = \sqrt{R^2 - (X - X_1^*)^2 - (Y - Y_1^*)^2} \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial X} = -\frac{X - X_1^*}{Z}$$

Dalla Fig. 6.11 si vede che:

$$\cos \alpha = \frac{X_1 - X}{R'} \quad \cos \gamma = \frac{0 - Z}{R'}$$

da cui, sostituendo:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X} = -n \frac{X - X_1}{R'} - n \frac{Z}{R'} \left(-\frac{X - X_1^*}{Z} \right) = \frac{n}{R'} (X_1 - X_1^*)$$

Si può dimostrare che con un ragionamento analogo si ottiene:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial Y} = \frac{n}{R'} (Y_1 - Y_1^*)$$

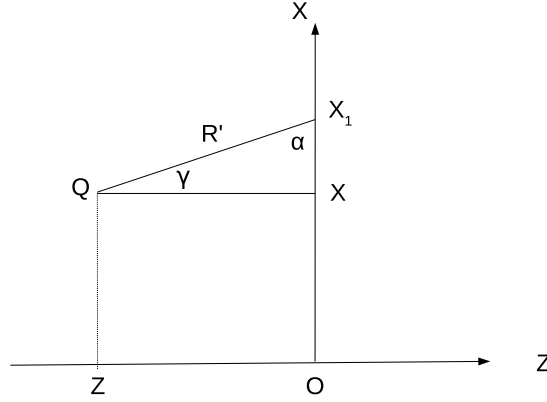


Figura 6.11: Il piano delle immagini visto dall'asse Y. γ è l'angolo formato dalla direzione di propagazione della superficie d'onda da Q a P_1 con l'asse Z, mentre α è l'angolo formato con l'asse X.

Rigirando queste espressioni si ha:

$$X_1 - X_1^* = \frac{R'}{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X} \quad Y_1 - Y_1^* = \frac{R'}{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial Y}$$

Le derivate di $\tilde{\Phi}$ si riferiscono al punto Q , che non ha una posizione fisicamente identificabile. È meglio utilizzare il punto P'_1 , che si trova sul piano della pupilla di uscita. Inoltre le formule appena scritte contengono R' anziché R . Operiamo un cambio di variabili: $\partial X \rightarrow \partial X'_1$, $\partial Y \rightarrow \partial Y'_1$, $R' \rightarrow -D_1$, $\tilde{\Phi}(X_0, Y_0, X, Y) \rightarrow \tilde{\Phi}(X_0, Y_0, X'_1, Y'_1)$.

$$X_1 - X_1^* = -\frac{D_1}{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X'_1} \quad Y_1 - Y_1^* = -\frac{D_1}{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial Y'_1}$$

Introduciamo a questo punto le *variabile ridotte di Seidel*.

Consideriamo il piano degli oggetti e delle immagini. Scegliamo un segmento arbitrario l_0 come unità di lunghezza sul piano degli oggetti e il suo coniugato l_1 sul piano delle immagini in modo tale che l'ingrandimento trasversale fra i due piani sia $G = \frac{l_1}{l_0}$.

Definiamo le coordinate ridotte x_0 , y_0 , x_1 e y_1 come:

$$\begin{aligned} x_0 &= C \frac{X_0}{l_0} & x_1 &= C \frac{X_1}{l_1} \\ y_0 &= C \frac{Y_0}{l_0} & y_1 &= C \frac{Y_1}{l_1} \end{aligned}$$

dove C è una costante arbitraria.

In approssimazione di Gauss (I^o ordine) si avrebbe:

$$\frac{x_0}{x_1} = C \frac{X_0}{l_0} \frac{l_1}{CX_1} = 1$$

$$\frac{y_0}{y_1} = C \frac{Y_0}{l_0} \frac{l_1}{CY_1} = 1$$

Scegliamo sui piani della pupilla di entrata e di uscita i segmenti arbitrari λ_0 e λ_1 tali che $G = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$:

$$\xi_0 = \frac{X'_0}{\lambda_0} \quad \xi_1 = \frac{X'_1}{\lambda_1}$$

$$\eta_0 = \frac{Y'_0}{\lambda_0} \quad \eta_1 = \frac{Y'_1}{\lambda_1}$$

In approssimazione di Gauss si avrebbe $\frac{\xi_0}{\xi_1} = 1$ e $\frac{\eta_0}{\eta_1} = 1$.

Effettuiamo un altro cambio di variabili della funzione di aberrazione: $\tilde{\Phi}(X_0, Y_0, X'_1, Y'_1) \rightarrow \tilde{\Phi}(x_0, y_0, \xi_1, \eta_1)$.

$$X_1 - X_1^* = \frac{l_1}{C}(x_1 - x_1^*) \cong \frac{l_1}{C}(x_1 - x_0) = -\frac{D_1}{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X'_1}$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X'_1} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial X'_1} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} \frac{1}{\lambda_1}$$

$$\frac{l_1}{C}(x_1 - x_0) = -\frac{D_1}{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} \frac{1}{\lambda_1}$$

Da cui si ottengono le seguenti equazioni:

$$x_1 - x_0 = -\frac{D_1}{n} \frac{C}{l_1 \lambda_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1}$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{D_1}{n} \frac{C}{l_1 \lambda_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1}$$

Conviene assumere come costante C la quantità: $C = \frac{n\lambda_1 L_1}{D_1}$, la cui unità di misura è una lunghezza. C è infatti una costante legata al cammino ottico.

Le due nuove equazioni differenziali di $\tilde{\Phi}$ in coordinate ridotte sono:

$$x_1 - x_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} \quad y_1 - y_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} \quad (6.6)$$

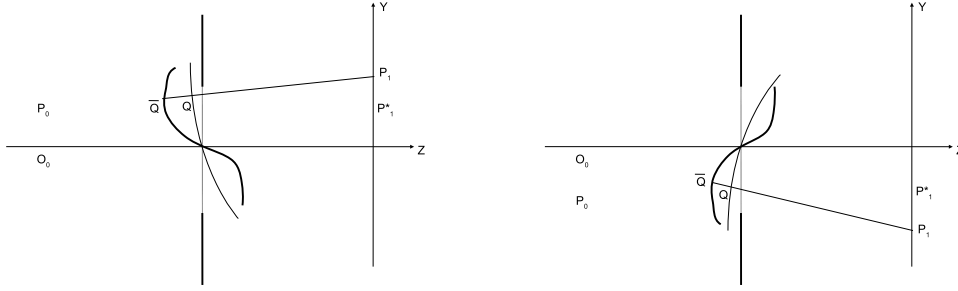


Figura 6.12: Due casi simmetrici.

Immaginiamo ora di effettuare una trasformazione di simmetria che riguardi $P_0 \equiv P_0(X_0, Y_0, 0)$, $P'_1 \equiv P'_1(X'_1, Y'_1, D_1)$, $\tilde{\Phi} > 0$ e $Y_1 - Y_1^* > 0$:

$$\begin{aligned} X_0 &\rightarrow -X_0 \\ Y_0 &\rightarrow -Y_0 \\ X'_1 &\rightarrow -X'_1 \\ Y'_1 &\rightarrow -Y'_1 \end{aligned}$$

Si ottiene che $Y_1 - Y_1^* < 0$, ma $\tilde{\Phi} > 0$.

Se P_0 è fisso $\tilde{\Phi}$ non deve variare per una rotazione rigida di un angolo ϑ degli assi (x_0, y_0) e (ξ_1, η_1) . Infatti $\tilde{\Phi}$ è una differenza di cammino e non dipende dalla descrizione fatta dal sistema di riferimento. Quindi $\tilde{\Phi}$ deve essere una funzione di combinazioni di x_0, y_0, ξ_1 e η_1 invarianti per rotazione e si può dimostrare che con 4 variabili si possono costruire 3 invarianti:

$$e_1 = x_0^2 + y_0^2 \quad e_2 = x_0 \xi_1 + y_0 \eta_1 \quad e_3 = \xi_1^2 + \eta_1^2$$

per cui, $\tilde{\Phi} \equiv \tilde{\Phi}(e_1, e_2, e_3)$.

Mostriamo a titolo di esempio, che $x_0^2 + y_0^2$ è un invariante per rotazione (Fig. 6.13).

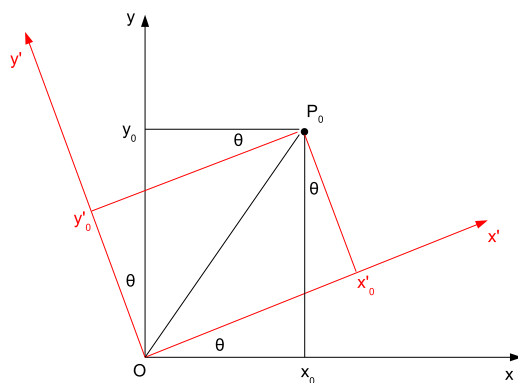


Figura 6.13: In rosso il sistema di riferimento XOY ruotato di un angolo θ . Il punto P_0 avrà coordinate x'_0 e y'_0 .

$$x_0 = x'_0 \cos \vartheta - y'_0 \sin \vartheta$$

$$y_0 = x'_0 \sin \vartheta + y'_0 \cos \vartheta$$

Da cui:

$$x_0^2 + y_0^2 = x_0'^2 \cos^2 \vartheta + y_0'^2 \sin^2 \vartheta - 2x'_0 y'_0 \sin \vartheta \cos \vartheta +$$

$$+ x_0'^2 \sin^2 \vartheta + y_0'^2 \cos^2 \vartheta + 2x'_0 y'_0 \sin \vartheta \cos \vartheta = x_0'^2 + y_0'^2$$

Ritorniamo alla funzione di aberrazione e applichiamo un'espansione in serie di MacLaurin:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} \cong & A_0 + (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3) + \frac{1}{2}(A_{11} e_1^2 + 2A_{12} e_1 e_2 + 2A_{13} e_1 e_3 + A_{22} e_2^2 + 2A_{23} e_2 e_3 + A_{33} e_3^2) + \\ & + \frac{1}{6}(A_{111} e_1^3 + 3A_{122} e_1 e_2^2 + \dots) + \dots\end{aligned}$$

Lungo l'asse ottico l'aberrazione d'onda è nulla: $\tilde{\Phi} = 0 \Rightarrow e_1 = e_2 = e_3 = 0 \Rightarrow A_0 = 0$. In approssimazione di Gauss, l'aberrazione del raggio è nulla e quindi:

$$x_1 - x_0 \cong -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = -A_2 x_0 - 2A_3 \xi_1 = 0$$

$$y_1 - y_0 \cong -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = -A_2 y_0 - 2A_3 \eta_1 = 0$$

Poiché queste equazioni devono valere per qualsiasi combinazione di x_0 , y_0 , ξ_1 e η_1 , la soluzione deve essere: $A_2 = 0$ e $A_3 = 0$.

Se vogliamo migliorare l'approssimazione di Gauss occorre salire di ordine: Gauss $\Rightarrow \sin \gamma \cong \gamma$, Seidel $\Rightarrow \gamma - \frac{\gamma^3}{3!}$.

Inoltre, A_1, A_{11} , etc. si possono trascurare perché sono costanti quando si deriva rispetto a ξ_1 e η_1 . Si ottiene quindi: $\tilde{\Phi} \cong \tilde{\Phi}^{(4)} + \tilde{\Phi}^{(6)} + \dots$, dove (4) e (6) indicano termini di 4° e 6° grado nelle coordinate.

Se ci limitiamo a $\tilde{\Phi}^{(4)}$ otteniamo le **5 aberrazioni primarie di Seidel**. A meno di una costante avremo:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} \cong \tilde{\Phi}^{(4)} &= A_{12} e_1 e_2 + A_{13} e_1 e_3 + \frac{1}{2} A_{22} e_2^2 + A_{23} e_2 e_3 + \frac{1}{2} A_{33} e_3^2 \\ \tilde{\Phi} \cong \tilde{\Phi}^{(4)} &= E e_1 e_2 - \frac{1}{2} D e_1 e_3 - C e_2^2 + F e_2 e_3 - \frac{1}{4} B e_3^2\end{aligned}\tag{6.7}$$

dove B, C, D, E, F sono i coefficienti di aberrazione sferica, astigmatismo, curvatura di campo, distorsione e coma.

6.4 Le 5 aberrazioni primarie di Seidel

6.4.1 Aberrazione sferica

Supponiamo che $B \neq 0$, mentre $C = D = E = F = 0$.

La funzione di aberrazione vale:

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{4}B e_3^2 = -\frac{1}{4}B(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2$$

Derivando rispetto a ξ_1 e η_1 :

$$x_1 - x_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}B \cdot 2(\xi_1^2 + \eta_1^2)2\xi_1 = B\xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2)$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = B\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2)$$

Eseguiamo una trasformazione in coordinate polari (ρ, ϑ) sul piano della pupilla di uscita (Fig. 6.14): $\xi_1 = \rho \sin \vartheta$ e $\eta_1 = \rho \cos \vartheta$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

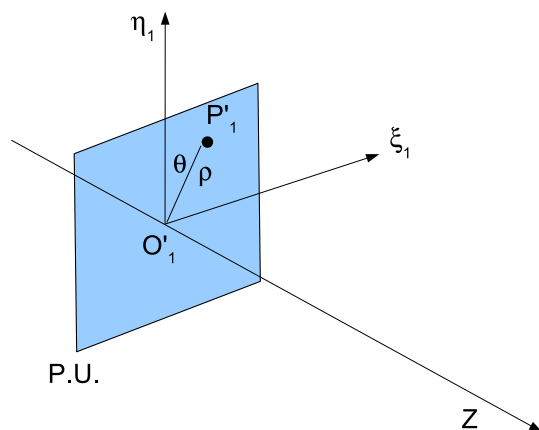


Figura 6.14: La posizione del punto aberrato P'_1 sul piano della pupilla di uscita in coordinate polari.

$$x_1 - x_0 = B\rho \sin \vartheta (\rho^2 \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta) = B\rho^3 \sin \vartheta$$

$$y_1 - y_0 = B\rho^3 \cos \vartheta$$

Da cui si deduce che fissato ρ , al variare di ϑ sul piano di Gauss viene descritta una circonferenza di centro (x_0, y_0) e di raggio $B\rho^3$.

Per semplicità poniamo $x_0 = 0$. Il vettore $P_1^*P_1$ (Fig. 6.15) ruota al variare di ϑ . La sua lunghezza è $B\rho^3$ e quindi aumenta al crescere di ρ .

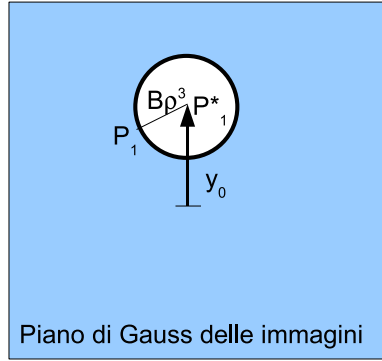


Figura 6.15: L'aberrazione sferica trasforma l'immagine di una sorgente puntiforme in un disco di raggio $B\rho^3$ centrato sulla posizione del punto non aberrato.

Se adesso consideriamo tutti i raggi uscenti dalla pupilla di uscita e poniamo che $0 < \rho < \rho_{max}$, dove ρ_{max} è la massima apertura del fascio di raggi, osserviamo che l'immagine della sorgente puntiforme P_0 è un disco di raggio $B\rho_{max}$.

La dimensione del disco non dipende da y_0 , e questo significa che non serve eliminare il fuori-asse per far sparire l'aberrazione di sfericità; dipende invece da ρ_{max}^3 , cioè è necessario diminuire l'apertura del fascio. Infine, corrisponde all'aberrazione sferica trasversa, $t = 2c \frac{R^3}{f^2}$.

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{4}B e_3^2 = -\frac{1}{4}B(\rho^2 \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta)^2 = -\frac{1}{4}B\rho^4$$

La seguente figura (Fig. 6.16) mostra l'andamento della funzione di aberrazione. Quando si considerano raggi parassiali, la funzione è appiattita attorno allo zero, mentre all'aumentare della distanza dall'asse, l'aberrazione sferica cresce rapidamente.

6.4.2 Aberrazioni di astigmatismo e curvatura di campo

Siano $C \neq 0$ e $D \neq 0$, mentre $B = E = F = 0$.

Il termine che riguarda l'astigmatismo è $-Ce_2^2$, mentre quello della curvatura di campo

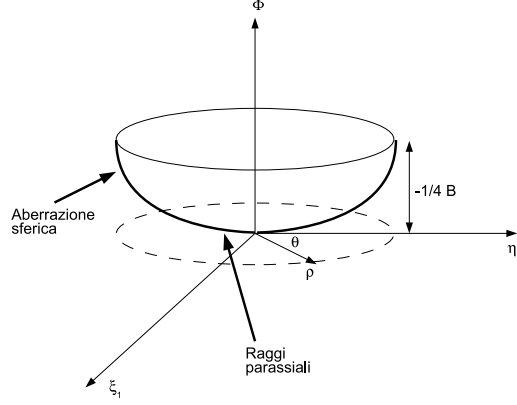


Figura 6.16: La funzione di aberrazione nel caso di sola aberrazione sferica. Quando si considerano solo raggi parassiali, cioè quando ρ è piccolo, l'aberrazione è praticamente nulla, mentre cresce rapidamente al crescere di ρ .

è $-\frac{1}{2}De_1e_3$.

La funzione di aberrazione vale:

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{2}De_1e_3 - Ce_2^2 = -\frac{1}{2}D(x_0^2 + y_0^2)(\xi_1^2 + \eta_1^2) - C(x_0\xi + y_0\eta_1)^2$$

Assumiamo anche in questo caso $x_0 = 0$, si ottiene: $\tilde{\Phi} = -\frac{1}{2}Dy_0^2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - Cy_0^2\eta_1^2$.

Le equazioni diventano:

$$x_1 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = Dy_0^2\xi_1$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = Dy_0^2\eta_1 + 2Cy_0^2\eta_1 = y_0^2\eta_1(2C + D)$$

Effettuiamo il cambio in coordinate polari:

$$x_1 = Dy_0^2\rho \sin \vartheta$$

$$y_1 = y_0 + (2C + D)y_0^2\rho \cos \vartheta$$

Sul piano di Gauss la figura descritta da queste equazioni è un'ellisse di semiassi $Dy_0^2\rho$ e $(2C + D)y_0^2\rho$. Al crescere di y_0 , cresce anche l'ellisse.

Quando $D = 0$ si ha l'astigmatismo sagittale descritto da $x_1 = 0$ e $y_1 = y_0 + 2y_0^2 C \rho \cos \vartheta$, mentre quando $2C + D = 0$ si ha l'astigmatismo tangenziale descritto da $x_1 = Dy_0^2 \rho \sin \vartheta$ e $y_1 = y_0$ (Fig. 6.17).

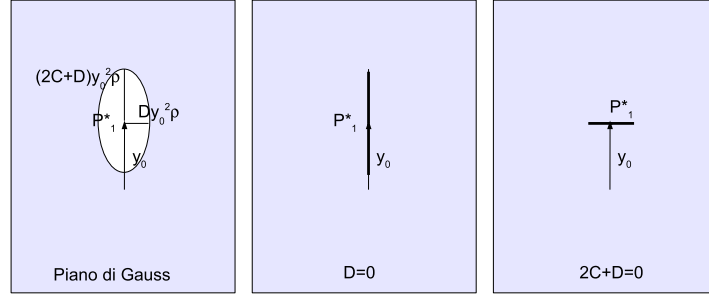


Figura 6.17: L'effetto combinato di astigmatismo e curvatura di campo produce un'immagine di forma ellittica.

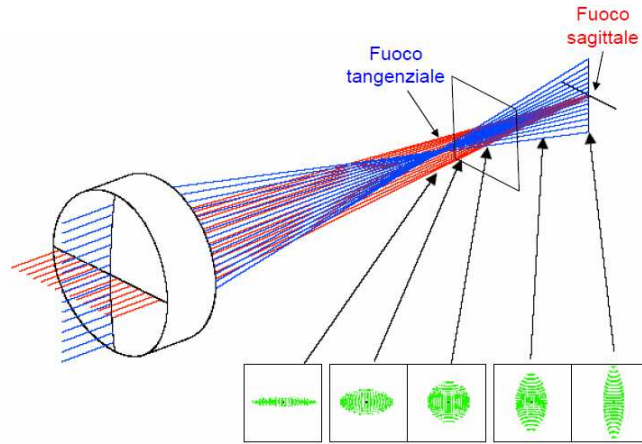


Figura 6.18: L'immagine è a fuoco ma ha una forma ellittica, schiacciata in direzione tangenziale oppure in direzione sagittale a seconda che si consideri una posizione intrafocale o extrafocale.

6.4.3 Aberrazione di distorsione

Sia ora $E \neq 0$, mentre $B = C = D = F = 0$. La funzione di aberrazione diventa: $\tilde{\Phi} = E(x_0^2 + y_0^2)(x_0\xi_1 + y_0\eta_1)$.

Da cui:

$$x_1 - x_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = -E(x_0^2 + y_0^2)x_0 = -E|OP_0|^2 x_0$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = -E|OP_0|^2 y_0$$

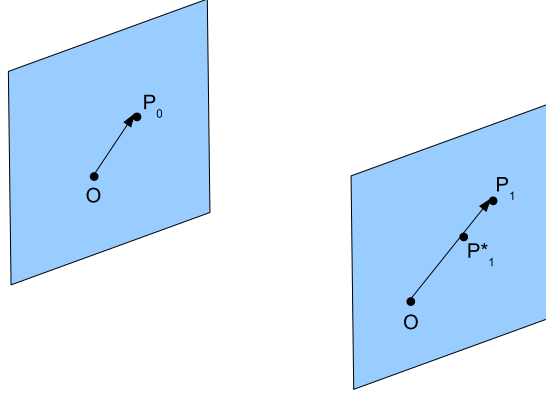


Figura 6.19: La distorsione dipende solo dal fuori-asse.

Come si nota dalla Fig. 6.19, l'aberrazione del raggio sul piano delle immagini corrisponde al segmento $P_1^*P_1 \equiv P_1^*P_1(-E|OP_0|^2 x_0, -E|OP_0|^2 y_0)$. E inoltre $\overrightarrow{P_1^*P_1} \parallel \overrightarrow{OP_0}$. La distorsione non dipende da ϑ perché non dipende né da ξ_1 né da η_1 e non fa perdere di stigmatismo al sistema.

$$P_1^*P_1 = \sqrt{[-E|OP_0|^2 x_0]^2 + [-E|OP_0|^2 y_0]^2} = E|OP_0|^2 \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = E|OP_0|^3$$

Quindi la distorsione avviene nella stessa direzione del vettore $\overrightarrow{OP_0}$ ma con verso concorde o discorde a seconda che $E < 0$ o che $E > 0$ rispettivamente. Il suo modulo aumenta con il cubo del fuori-asse (Fig. 6.20).

6.4.4 Aberrazione di coma

Sia $F \neq 0$, mentre $B = C = D = E = 0$.

La funzione di aberrazione vale: $\tilde{\Phi} = Fe_2e_3 = F(x_0\xi_1 + y_0\eta_1)(\xi_1^2 + \eta_1^2)$. Assumiamo per semplicità che $x_0 = 0$, e otteniamo: $\tilde{\Phi} = Fy_0\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2)$. Ripetiamo i passaggi precedenti:

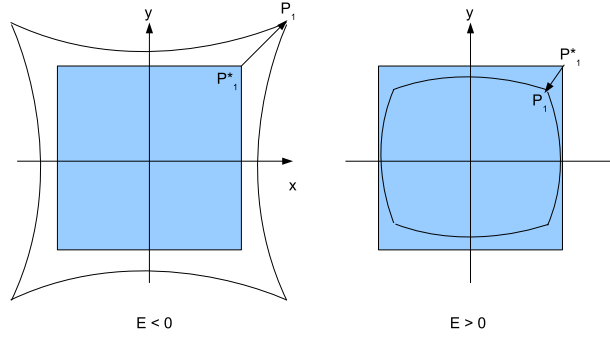


Figura 6.20: A seconda del valore di E , positivo o negativo, il punto aberrato si avvicina all'asse ottico oppure si allontana da esso.

$$x_1 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = -2Fy_0\eta_1\xi_1$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = -Fy_0(\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2Fy_0\eta_1^2$$

Passiamo in coordinate polari come prima:

$$x_1 = -2Fy_0\rho \sin \vartheta \rho \cos \vartheta = -Fy_0\rho^2 \sin 2\vartheta$$

$$y_1 = y_0 - 2Fy_0\rho^2 \cos^2 \vartheta - Fy_0(\rho^2 \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta) = y_0 - 2Fy_0\rho^2 \cos^2 \vartheta - Fy_0\rho^2 =$$

$$= y_0 - Fy_0\rho^2(2\cos^2 \vartheta + 1) = y_0 - Fy_0\rho^2(\cos 2\vartheta + 2) = y_0 - 2Fy_0\rho^2 - Fy_0\rho^2 \cos 2\vartheta$$

Queste due espressioni indicano che a causa dell'aberrazione di coma i raggi uscenti da mezza pupilla formano sul piano di Gauss una circonferenza di raggio $Fy_0\rho^2$ e di centro spostato rispetto a P_1^* della quantità $2Fy_0\rho^2$ (con $F < 0$) (Fig. 6.21).

Al diminuire del valore di ρ non solo si formano circonferenze di raggio minore, ma il loro centri si spostano verso P_1^* . È facile mostrare che si forma un'immagine circolare che si assottiglia fino a diventare a punta in corrispondenza di P_1^* , e l'angolo di apertura è di 60° (Fig. 6.22). Basta infatti tracciare da P_1^* le due tangenti a una circonferenza qualsiasi di raggio ρ e si ottiene:

$$\frac{Fy_0\rho^2}{2Fy_0\rho^2} = \frac{1}{2} = \sin \theta \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

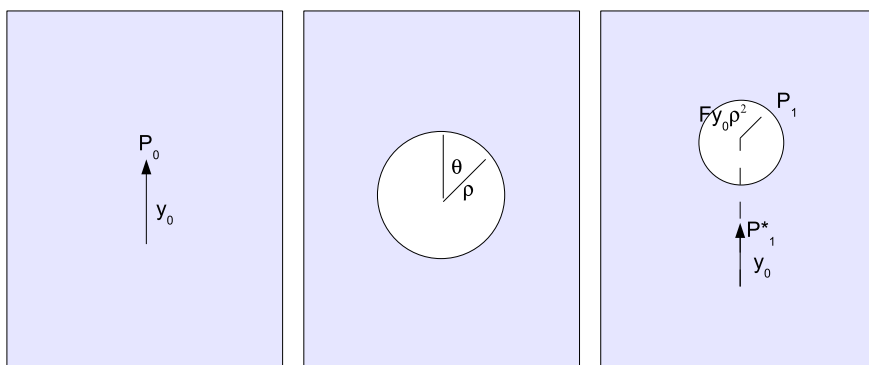


Figura 6.21: L'aberrazione di coma dipende sia dal raggio di apertura che dal fuori asse. Causa la formazione di un disco il cui centro è a distanza pari al doppio del suo raggio dal punto non aberrato.

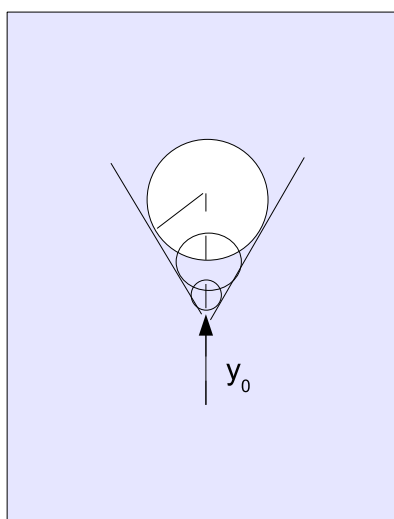


Figura 6.22: La figura di coma è un'immagine allungata con una punta in corrispondenza del punto non aberrato.

Quindi a causa dell'aberrazione di coma l'immagine di una sorgente puntiforme è una figura allungata, tondeggiante da un lato e appuntita dall'altro, e con la punta rivolta verso l'asse ottico. Dipende sia dal fuori-asse che dal quadrato dell'apertura del fascio luminoso.

6.4.5 Riassunto

Riassumiamo qui le dipendenze delle varie aberrazioni. Abbiamo chiamato con y_0 il fuori-asse e con ρ_{max} la massima apertura della pupilla di uscita. Mentre l'aberrazione sferica, la coma e l'astigmatismo fanno perdere di stigmatismo al sistema, la distorsione e la curvatura di campo spostano semplicemente il punto-immagine.

Sferica	\rightarrow	\propto	ρ_{max}^3
Coma	\rightarrow	\propto	$\rho_{max}^2 y_0$
Ast.+Curv.	\rightarrow	\propto	$\rho_{max} y_0^2$
Distorsione	\rightarrow	\propto	y_0^3

Capitolo 7

Telescopi

Consideriamo il più semplice tipo di telescopio: un obiettivo (lente o specchio) di diametro D e lunghezza focale f .

Definiamo **rapporto di apertura** f/D la quantità f/D . Il telescopio Galileo di Asiago, dopo le recenti modifiche (sostituzione dello specchio secondario, metà del 2011) ha $D = 120$ cm e lunghezza focale equivalente $f = 1200$ cm, quindi il suo rapporto di apertura è $f/10$. Mentre il telescopio Copernico di Cima Ekar ha $D = 182$ cm e $f = 1638$ cm, quindi è un $f/9$. (Attenzione, non stiamo considerando qui le lunghezze focali dei singoli specchi primari ma quella totale).

Consideriamo una sorgente in cielo di dimensione angolare α . La sua distanza è tale da far sì che α sia molto piccolo. Sia h la sua dimensione lineare sul piano focale del telescopio. Come si vede dalla Fig. 7.1 :

$$\frac{h}{f} = \tan \alpha \cong \alpha \Rightarrow h = f\alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{h} = \frac{1}{f}$$

con α in radianti. Definiamo **scala del telescopio** la quantità $S = \frac{\theta}{h}$, dove $\theta = \alpha \cdot 206265$ è la dimensione angolare della sorgente in secondi d'arco. Per cui:

$$\boxed{S = \frac{\theta}{h} = \frac{206265}{f}} \quad (7.1)$$

La lunghezza focale si esprime in mm e la scala in unità di **arcsec/mm**.

Quindi, nota la dimensione angolare di una sorgente e la focale del telescopio, è facilmente calcolabile la dimensione lineare dell'immagine che si forma sul piano focale. Consideriamo come esempio la Luna piena che ha un diametro angolare di circa $30'$. Il telescopio di Asiago ha una scala di circa $17''/\text{mm}$, e quindi la Luna ha un diametro

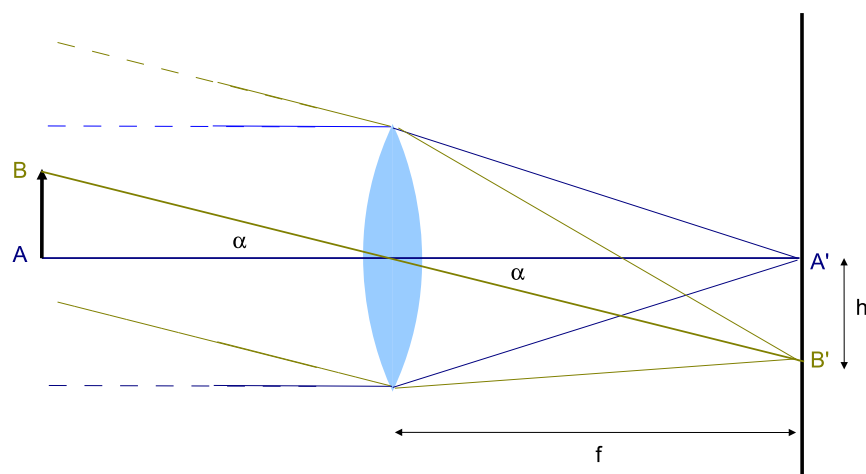


Figura 7.1: Sorgente estesa posta all'infinito e osservata con un telescopio, qui schematizzato da una lente convergente.

di circa 106 mm sul piano focale. Il telescopio di Cima Ekar ha una scala di circa $12.6''/\text{mm}$ e quindi la Luna ha un diametro lineare di circa 143 mm.

Un telescopio con obiettivo più grande raccoglie una maggior quantità di luce, questa in particolare cresce con l'area della lente o dello specchio, quindi con il quadrato del raggio o del diametro. Quindi il 182 cm raccoglie 2.22 volte la luce raccolta dal 120 cm. D'altra parte, il 182 cm ha una lunghezza focale superiore al 120 cm, e questo implica che ogni mm^2 sul piano focale dei due telescopi corrisponde ad un'area di cielo minore nel caso del 182 cm ($12.6 \times 12.6 \text{ arcsec}^2$) rispetto al 120 cm ($17 \times 17 \text{ arcsec}^2$), e quindi minore quantità di luce raccolta. In particolare, dal rapporto (elevato al quadrato) fra le due lunghezze focali si ottiene un fattore circa 1.8 a favore del 120 cm, e quindi in definitiva il telescopio di Cima Ekar è appena 1.2 volte più luminoso del telescopio Galileo. Questi calcoli non sono in realtà corretti perché non tengono conto della presenza in entrambi i telescopi dello specchio secondario, che causa ostruzione. In particolare, il secondario del 182 cm ha un diametro di 58 cm, mentre il secondario del 120 cm ha un diametro di 52 cm. Per cui il rapporto fra la quantità di luce raccolta dallo specchio primario del 182 cm e quella raccolta dal 120 cm, vale $(182^2 - 58^2)/(120^2 - 52^2) = 2.54$. In definitiva, il 180 cm è più luminoso del 120 cm di un fattore circa 1.4.

Se accoppiamo due sistemi ottici, ad esempio due lenti, di cui una sarà l'obiettivo e l'altra l'oculare, in modo tale che i loro piani focali coincidano, possiamo calcolare l'in-

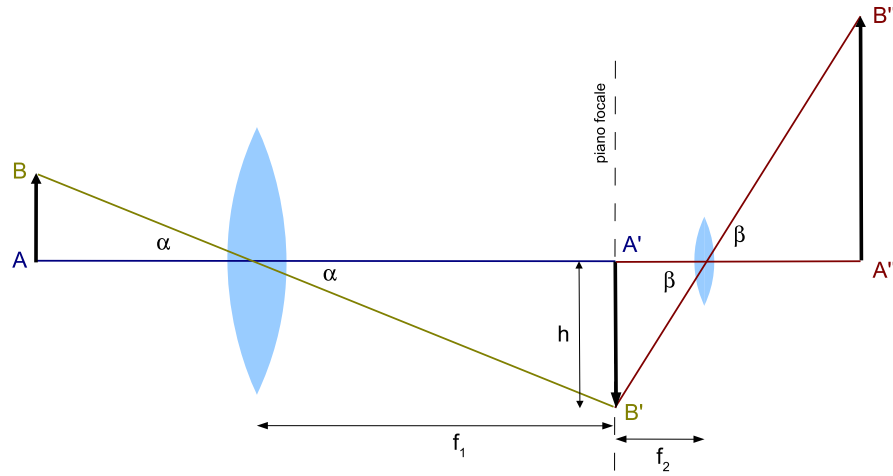


Figura 7.2: Accoppiamento obiettivo-oculare: l'immagine dell'oggetto si forma sul piano focale dell'obiettivo, che è anche piano focale dell'oculare, del quale essa diventa oggetto.

grandimento prodotto da questo telescopio (Fig. 7.2):

$$\tan \alpha = \frac{h}{f_1} \quad \tan \beta = \frac{h}{f_2}$$

$$I = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{h}{f_2} \cdot \frac{f_1}{h} = \frac{f_1}{f_2}$$

cioè il numero di ingrandimenti si calcola dal rapporto fra la lunghezza focale dell'obiettivo (f_1) e la lunghezza focale dell'oculare (f_2). Ad esempio un telescopio con $f_1 = 4$ m a cui viene accoppiato un oculare che ha $f_2 = 20$ mm, produce 200 ingrandimenti.

7.1 Il telescopio riflettore

Il telescopio riflettore è costituito da uno specchio di forma concava o convessa la cui superficie è descritta dall'equazione di una conica in coordinate cilindriche:

$$\boxed{(1 + b)z^2 - 2Rz + r^2 = 0} \quad (7.2)$$

dove z e r sono le variabili delle coordinate cilindriche ($r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, z$), e R è il raggio di curvatura della conica. Al variare di b , cambia il tipo di conica:

$b > 0$	ellissoide prolato
$b = 0$	sfera
$-1 < b < 0$	ellissoide oblato
$b = -1$	paraboloide
$b < -1$	iperboloide

Vogliamo trovare l'espressione per la lunghezza focale f della conica. Cominciamo esplicitando z in funzione di r :

$$z = \frac{R - \sqrt{R^2 - (1+b)r^2}}{1+b} = \frac{R}{1+b} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)} \right]$$

Si noti che delle due soluzioni consideriamo quella con il segno $-$. Questo perché i punti sulla superficie della conica avranno sempre $z < R$ (Fig. 7.3).

Cosideriamo il termine sotto radice quadrata: poiché $\frac{r}{R} \ll 1$ si può espandere in serie di Taylor. Se chiamiamo $u = -\frac{r^2}{R^2}(1+b)$, possiamo scrivere:

$$\sqrt{1+u} \cong 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + \dots$$

Da cui:

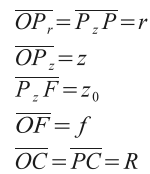
$$\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2}(1+b) - \frac{1}{8} \frac{r^4}{R^4}(1+b)^2 - \frac{1}{16} \frac{r^6}{R^6}(1+b)^3 - \dots$$

Sostituendo nell'espressione di z si ha:

$$z = \frac{R}{1+b} \left[1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2}(1+b) + \frac{1}{8} \frac{r^4}{R^4}(1+b)^2 + \frac{1}{16} \frac{r^6}{R^6}(1+b)^3 + \dots \right]$$

$$z = \frac{1}{2} \frac{r^2}{R} + \frac{1}{8} \frac{r^4}{R^3}(1+b) + \frac{1}{16} \frac{r^6}{R^5}(1+b)^2 + \dots$$

A questo punto dobbiamo determinare z_0 . Consideriamo la Fig. 7.3: la tangente alla curva nel punto P è ortogonale al raggio di curvatura R e taglia l'asse z nel punto H. Il triangolo rettangolo HPP_z è simile al triangolo rettangolo HCP, quindi l'angolo H \hat{P} P_z è uguale all'angolo H \hat{C} P, che è uguale a ϑ . Inoltre, poiché P_zP e l'asse r sono paralleli,



l'angolo che la tangente in P forma con l'asse r è proprio ϑ . Per cui, la derivata della curva in P fornisce la $\tan \vartheta$:

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{R}{1+b} \frac{-\frac{1+b}{R^2} 2r}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} (1+b)}} = \frac{\frac{r}{R}}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} (1+b)}}$$

$$\frac{1+b}{R}z = 1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)} = 1 - \frac{1+b}{R}z$$
$$\frac{dz}{dr} = \frac{\frac{r}{R}}{1 - \frac{1+b}{R}z} = \frac{r}{R - (1+b)z} = \tan \vartheta$$

La lunghezza focale sarà $f = z + z_0$ e come si vede dalla figura $\tan 2\vartheta = \frac{r}{z_0}$, da cui:

$$\tan 2\vartheta = \frac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} = \frac{2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta} = \frac{2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\cos^2 \vartheta (1 - \tan^2 \vartheta)} = \frac{2 \tan \vartheta}{1 - \tan^2 \vartheta} = \frac{r}{z_0}$$

$$z_0 = \frac{r(1 - \tan^2 \vartheta)}{2 \tan \vartheta}$$

Sostituendo il valore di $\tan \vartheta$, si ottiene:

$$z_0 = \frac{r \left(1 - \frac{r^2}{(R - (1+b)z)^2} \right)}{2 \frac{r}{R - (1+b)z}} = \frac{r}{2} \left[\frac{R - (1+b)z}{r} - \frac{r}{R - (1+b)z} \right]$$

Calcoliamo ora l'espressione per la lunghezza focale:

$$f = z + \frac{R - (1+b)z}{2} - \frac{r^2}{2[R - (1+b)z]} = \frac{R}{2} + \frac{(1-b)z}{2} - \frac{r^2}{2[R - (1+b)z]}$$

E sostituendo l'espressione di z in serie di Taylor:

$$\boxed{f = \frac{R}{2} - (1+b) \frac{r^2}{4R} - (1+b)(3+b) \frac{r^4}{16R^3} - \dots} \quad (7.3)$$

Quando $b = -1$, cioè quando la conica è un paraboloide, si ottiene:

$$f = \frac{R}{2}$$

mentre quando $b = 0$, cioè quando la conica è una superficie sferica, si ottiene:

$$f = \frac{R}{2} - \frac{r^2}{4R} - \frac{3}{16} \frac{r^4}{R^3} - \dots$$

Nel caso in cui r è piccolo, cioè in caso di raggi parassiali, la quantità $\frac{r}{R} \ll 1$ e il fuoco vale $f = \frac{R}{2}$.

Riprendiamo adesso le espressioni dei termini di aberrazione visti nel capitolo precedente e scriviamo la funzione di aberrazione (con l'assunzione $x_0 = 0$):

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{4}B(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2 - Cy_0^2\eta_1^2 - \frac{1}{2}Dy_0^2(\xi_1^2 + \eta_1^2) + Ey_0^3\eta_1 + Fy_0\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2)$$

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{4}B\rho^4 - Cy_0^2\rho^2 \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}Dy_0^2\rho^2 + Ey_0^3\rho \cos \vartheta + Fy_0\rho^3 \cos \vartheta$$

Sul piano delle immagini, l'aberrazione lungo gli assi cartesiani XY, vale:

$$\Delta x = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = B\xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + Dy_0^2\xi_1 - 2Fy_0\xi_1\eta_1$$

$$\Delta x = B\rho^3 \sin \vartheta + Dy_0^2\rho \sin \vartheta - 2Fy_0\rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$\Delta y = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = B\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + 2Cy_0^2\eta_1 + Dy_0^2\eta_1 - Ey_0^3 - Fy_0(\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2Fy_0\eta_1^2$$

$$\Delta y = B\rho^3 \cos \vartheta + (2C + D)y_0^2\rho \cos \vartheta - Ey_0^3 - Fy_0\rho^2(2 \cos^2 \vartheta + 1)$$

Delle 5 aberrazioni, consideriamo le 3 che fanno perdere di stigmatismo al sistema: sferica, coma e astigmatismo.

Chiamiamo y il raggio dello specchio primario del telescopio, mentre φ sia la distanza angolare della sorgente osservata dal centro del campo (che coincide con la direzione dell'asse ottico). Sappiamo che l'aberrazione sferica trasforma una sorgente puntiforme in un disco di diametro $2By^3$, la coma invece in una figura appuntita di lunghezza complessiva $3Fy^2\varphi$, e infine l'astigmatismo in una figura allungata di dimensione $2Cy\varphi^2$. I coefficienti di aberrazione B, C, F sono stati calcolati da Schwarzschild per un telescopio con due specchi:

$$B = \frac{1 + b_1}{8f_1^3} - \left[b_2 + \left(\frac{f + f_1}{f - f_1} \right)^2 \right] \frac{(f - f_1)^3(f_1 - d)}{8f^3f_1^4}$$

$$C = \frac{f_1(f - d)}{2f^2(f_1 - d)} - \left[b_2 + \left(\frac{f + f_1}{f - f_1} \right)^2 \right] \frac{(f - f_1)^3d^2}{8f^3f_1^2(f_1 - d)}$$

$$F = \frac{1}{4f^2} + \left[b_2 + \left(\frac{f + f_1}{f - f_1} \right)^2 \right] \frac{(f - f_1)^3d}{8f^3f_1^3}$$

In queste formule, f, f_1, f_2 sono la focale equivalente $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$, la focale dello specchio primario, la focale dello specchio secondario. d è la distanza fra primario e secondario. b_1, b_2 sono i coefficienti delle coniche dei due specchi.

Vediamo adesso in sequenza i principali tipi di telescopi.

7.2 Telescopio Newton

Consideriamo un telescopio composto essenzialmente da un unico specchio. In questo caso assumiamo $f \equiv f_1$ e $f_2 = 0$.

I coefficienti di aberrazione diventano:

$$B = \frac{1 + b_1}{8f^3} \quad C = \frac{1}{2f} \quad F = \frac{1}{4f^2}$$

Eliminare l'aberrazione sferica significa imporre che $B = 0$. Questo significa che $b_1 = -1$, cioè lo specchio deve essere **parabolico**.

Un telescopio in cui lo specchio primario è parabolico, mentre il secondario è uno specchio piano che ha l'unica funzione di deviare i raggi di luce in direzione ortogonale a quella di arrivo (Fig. 7.4), si chiama telescopio Newton o newtoniano. Si noti che il bordo del secondario ha la forma ellittica, questo perché quando un piano interseca un cono si ottiene una circonferenza (se il piano è parallelo alla base del cono), un'ellisse, una parabola e un'iperbole all'aumentare dell'angolo di inclinazione del piano rispetto alla base del cono. In questo caso, la superficie piana dello specchio intercetta il cono di luce proveniente dal primario formando una sezione ellittica, per cui il suo bordo è tale da intercettare tutta la luce e causare la minima ostruzione possibile.

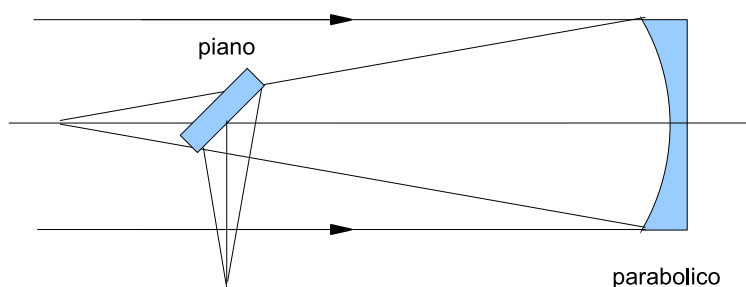


Figura 7.4: Il telescopio Newton è costituito da uno specchio primario parabolico e un secondario piano.

Calcoliamo i valori delle aberrazioni per un telescopio Newton di diametro $D = 120$ cm e lunghezza focale $f = 600$ cm. Assumiamo solo per esercizio che il primario sia sferico, cioè che $b_1 = 0$. Ovviamente non possiamo parlare di telescopio Newton in questo caso, ma può essere utile quantificare il valore dell'aberrazione sferica per confrontarlo con quelli di coma e astigmatismo.

L'aberrazione sferica è data da:

$$By^3 = \frac{1}{8f^3} \left(\frac{D}{2} \right)^3 = \frac{1}{64} \left(\frac{120}{600} \right)^3 = 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Trasformando i radianti in secondi d'arco, cioè moltiplicando per $206265''/\text{rad}$ si ottiene un valore di circa $26''$.

Le aberrazioni di coma e astigmatismo sono date da:

$$3Fy^2\varphi = 3\frac{1}{4f^2}y^2\varphi = \frac{3}{4} \left(\frac{D}{2f} \right)^2 \varphi$$

$$2Cy\varphi^2 = 2\frac{1}{2f}y\varphi^2 = \frac{D}{2f}\varphi^2$$

Supponiamo che $\varphi=10'$, cioè di osservare una sorgente a una distanza di $10'$ dal centro del campo. Convertendo in radianti, $\varphi= 2.91 \cdot 10^{-3}$ rad, e sostituendo:

$$\frac{3}{4} \left(\frac{120}{2 \cdot 600} \right)^2 \cdot 2.91 \cdot 10^{-3} = 2.18 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

che convertito in secondi d'arco corrisponde a circa $4.5''$.

$$\frac{120}{2 \cdot 600} (2.91 \cdot 10^{-3})^2 = 8.47 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

che corrisponde a circa $0.17''$.

Calcolando ora la scala del telescopio: $S = \frac{206265}{6000} \cong 34.4''/\text{mm}$ e convertendo i valori delle aberrazioni da angolari a lineari si ottiene $760 \mu\text{m}$, $130 \mu\text{m}$ e $5 \mu\text{m}$ rispettivamente per aberrazione sferica, coma e astigmatismo. Infine se immaginiamo di porre sul piano focale del telescopio un sensore digitale avente pixel di dimensioni tra 13 e 15μ , è possibile calcolare l'estensione delle aberrazioni nell'immagine in pixel. Come si vede, l'astigmatismo produce un effetto trascurabile essendo questo inferiore alla dimensione del singolo pixel. Quindi in definitiva, la principale aberrazione da cui è affetto un telescopio Newton è l'aberrazione di coma.

7.3 Telescopio Cassegrain

Come si nota dai calcoli precedenti, uno specchio parabolico è privo di aberrazione sferica, ma ha una forte aberrazione di coma. Per ridurre questa bisogna intervenire inserendo uno specchio secondario e allungando la focale del telescopio.

Prendiamo quindi in considerazione un sistema ottico formato da due specchi. Imporre la condizione che l'aberrazione sferica del sistema sia nulla, significa imporre che:

$$\tilde{\Phi}_B = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow b_1 = -1 \quad b_2 = -\left(\frac{f+f_1}{f-f_1}\right)^2$$

Quindi il primario deve essere ancora **parabolico**.

Poiché $f+f_1 > |f-f_1|$, si trova facilmente che $b_2 < -1$, cioè che lo specchio secondario deve essere un **iperbolico**.

D'altra parte con queste soluzioni, il coefficiente dell'aberrazione di coma vale $F = \frac{1}{4f^2}$ come prima. Stavolta però f è la focale equivalente del telescopio.

Per ridurre la coma la lunghezza focale deve aumentare. Partiamo allora dall'espressione della focale equivalente del sistema ottico:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$f > f_1 \Rightarrow \frac{1}{f} < \frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} < 0$$

- Primo caso: $f_2 < 0$ (secondario **convesso**)

$$-\frac{1}{|f_2|} + \frac{d}{f_1 |f_2|} < 0 \Rightarrow d < f_1$$

- Secondo caso: $f_2 > 0$ (secondario **concavo**)

$$\frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} < 0 \Rightarrow d > f_1$$

Nel primo caso il telescopio è in configurazione **Cassegrain** (Guillaume Cassegrain, Francia, 1672), nel secondo si ha invece una specie di telescopio Gregoriano (James

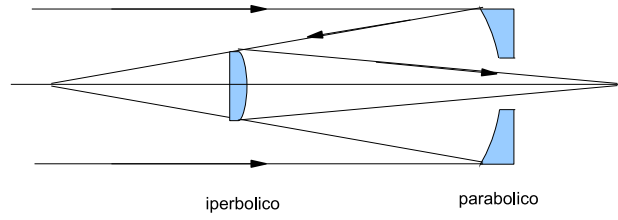


Figura 7.5:

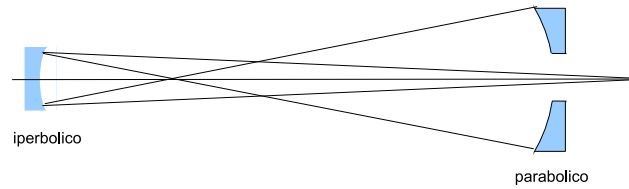


Figura 7.6:

Gregory, Scozia, 1663), anche se in realtà il Gregoriano utilizza un secondario concavo di superficie **ellissoidale**.

La configurazione Cassegrain consente quindi di ottenere telescopi con lunghezze focali lunghe mantenendo il telescopio di dimensioni relativamente compatte. Si noti che il piano delle immagini è localizzato dietro lo specchio primario.

Riprendiamo il caso del telescopio di Asiago (che è un Cassegrain), con lunghezza focale equivalente $F = 1200$ cm e con distanza $d = 372$ cm fra primario e secondario.

Calcoliamo l'aberrazione di coma e di astigmatismo a $10'$ di distanza dal centro del campo (dove l'asse ottico principale incontra il piano delle immagini).

$$\tilde{\Phi}_F = \frac{3}{4} \left(\frac{60}{1200} \right)^2 (10 \cdot 60) \cong 1.125''$$

$$C = \frac{600 \cdot (1200 - 372)}{2 \cdot 1200^2 (600 - 372)} = 7.56 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

$$\tilde{\Phi}_C = 2 \cdot 7.56 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \left(\frac{10 \cdot 60}{206265} \right)^2 \cdot 206265 \cong 0.16''$$

Usando la scala del telescopio, che ora vale $S = \frac{206265}{12000} \cong 17''/mm$. Una dimensione angolare in $10'$ si traduce sul piano focale in 66μ di coma e 9.4μ di astigmatismo, cioè circa 5 px e < 1 px assumendo di utilizzare un CCD con pixel da 13μ . In questo caso, l'astigmatismo è trascurabile e la coma è al di sotto delle condizioni tipiche di seeing dell'osservatorio, quindi entro $10'$ di raggio non si osserva.

Si noti infine che il valore della costante della superficie conica del secondario è:

$$b_2 = - \left(\frac{1200 + 600}{1200 - 600} \right)^2 = -9$$

7.4 Telescopio Ritchey-Chrétien

È possibile eliminare aberrazione sferica e coma allo stesso tempo?

$$B(b_1, b_2) = 0 \quad F(b_2) = 0$$

$$B = 0 \Rightarrow \frac{1 + b_1}{8f_1^3} - K \frac{(f - f_1)^3(f_1 - d)}{8f^3f_1^4} = 0$$

$$F = 0 \Rightarrow \frac{1}{4f^2} + K \frac{(f - f_1)^3d}{8f^3f_1^3} = 0$$

dove $K = b_2 + \left(\frac{f+f_1}{f-f_1} \right)^2$.

Dalla seconda equazione ricaviamo che:

$$K = - \frac{2ff_1^3}{(f - f_1)^3d} = b_2 + \left(\frac{f + f_1}{f - f_1} \right)^2$$

da cui:

$$b_2 = - \frac{2ff_1^3}{(f - f_1)^3d} - \left(\frac{f + f_1}{f - f_1} \right)^2$$

Sostituendo il valore di b_2 nell'espressione del coefficiente B , si ottiene:

$$\frac{1 + b_1}{8f_1^3} + \frac{2ff_1^3}{(f - f_1)^3d} \frac{(f - f_1)^3(f_1 - d)}{8f^3f_1^4} = 0$$

da cui si ricava l'espressione per il termine b_1 :

$$b_1 = -1 - 2 \frac{f_1 - d}{d} \left(\frac{f_1}{f} \right)^2$$

Se $f_1 > d$, cioè se primario e secondario si trovano a distanza minore della focale del primario, così come avviene nel Cassegrain, si ottiene che $b < -1$, cioè il primario deve essere **iperbolico**.

D'altra parte se consideriamo l'espressione di b_2 :

$$b_2 = -\frac{2ff_1^3}{(f-f_1)^3d} - \left(\frac{f+f_1}{f-f_1} \right)^2$$

vediamo che il primo termine è sicuramente negativo, il secondo è minore di 1 e quindi anche $b_2 < -1$, cioè anche il secondario è **iperbolico**.

Il telescopio che unisce primario iperbolico a secondario iperbolico fu ideato da George Willis Ritchey e Henri Chrétien (Fig. 7.7).

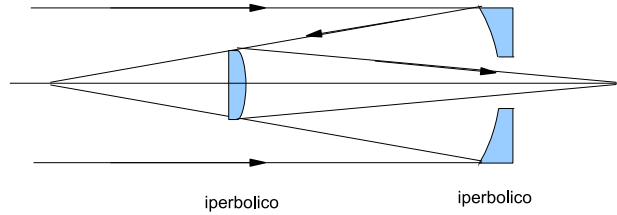


Figura 7.7:

Ipotizziamo che il telescopio di Asiago sia un Ritchey-Chrétien e calcoliamo le costanti delle coniche relative ai due specchi:

$$b_1 = -1 - 2 \frac{600 - 372}{372} \left(\frac{600}{1200} \right)^2 = -1.30$$

$$b_2 = -\frac{2 \cdot 1200 \cdot 600^3}{372(1200 - 600)^3} - \left(\frac{1200 + 600}{1200 - 600} \right)^2 = -15.45$$

Si faccia attenzione al fatto che al fuoco primario questo telescopio non è esente da aberrazione sferica ($B \neq 0$)!

Calcoliamo adesso il valore dell'astigmatismo.

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{f_1(f-d)}{2f^2(f_1-d)} - \left[b_2 + \left(\frac{f+f_1}{f-f_1} \right)^2 \right] \frac{(f-f_1)^3 d^2}{8f^3 f_1^2 (f_1-d)} \\
 C &= \frac{f_1(f-d)}{2f^2(f_1-d)} + \frac{2ff_1^3}{(f-f_1)^3 d} \frac{(f-f_1)^3 d^2}{8f^3 f_1^2 (f_1-d)} = \\
 &= \frac{f_1(f-d)}{2f^2(f_1-d)} + \frac{f_1 d}{4f^2(f_1-d)} = \frac{2f_1 f - 2f_1 d + f_1 d}{4f^2(f_1-d)} = \\
 &= \frac{f_1(2f-d)}{4f^2(f_1-d)}
 \end{aligned}$$

Sostituendo i soliti valori si ottiene:

$$C = \frac{600(2 \cdot 1200 - 372)}{4 \cdot 1200^2(600 - 372)} \cong 9.27 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

E infine:

$$\tilde{\Phi}_C = 2 \cdot 9.27 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \left(\frac{10 \cdot 60}{206265} \right)^2 \cdot 206265 \cong 0.19''$$

Ancora una volta l'astigmatismo ha valori analoghi a quelli trovati per il Newton e per il Cassegrain.

7.5 Telescopio Schmidt

Il telescopio ideato da Bernhard Schmidt nel 1930 è costituito da un unico specchio di forma sferica.

È diaframmato per cercare di ridurre l'aberrazione sferica da cui è affetto.

Rispetto ai casi precedenti in cui pupilla di entrata e di uscita coincidevano con lo specchio primario, qui la pupilla di entrata è il diaframma ($f_1 \rightarrow \infty$) mentre la focale del telescopio coincide con quella dello specchio sferico ($f \equiv f_2$) (Fig. 7.8). Quindi le equazioni di Schwarzschild diventano:

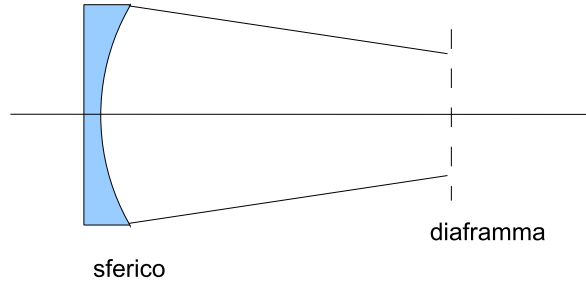


Figura 7.8:

$$B = \frac{1+b_1}{8f_1^3} - \left[b_2 + \left(\frac{\frac{f}{f_1} + 1}{\frac{f}{f_1} - 1} \right)^2 \right] \frac{f_1^3 \left(\frac{f}{f_1} - 1 \right)^3 f_1 \left(1 - \frac{d}{f_1} \right)}{8f^3 f_1^4}$$

$$\lim_{f_1 \rightarrow \infty} B = -[b_2 + 1] \frac{-1}{8f^3} = \frac{1+b_2}{8f^3} = B_0$$

$$F = \frac{1}{4f^2} + \left[b_2 + \left(\frac{\frac{f}{f_1} + 1}{\frac{f}{f_1} - 1} \right)^2 \right] \frac{f_1^3 \left(\frac{f}{f_1} - 1 \right)^3 d}{8f^3 f_1^3}$$

$$\lim_{f_1 \rightarrow \infty} F = \frac{1}{4f^2} + [b_2 + 1] \frac{-d}{8f^3} = F_0 - dB_0$$

avendo indicato $F_0 = \frac{1}{4f^2}$.

$$C = \frac{f_1(f-d)}{2f^2 f_1 \left(1 - \frac{d}{f_1} \right)} - \left[b_2 + \left(\frac{\frac{f}{f_1} + 1}{\frac{f}{f_1} - 1} \right)^2 \right] \frac{f_1^3 \left(\frac{f}{f_1} - 1 \right)^3 d^2}{8f^3 f_1^3 \left(1 - \frac{d}{f_1} \right)}$$

$$\lim_{f_1 \rightarrow \infty} C = \frac{f-d}{2f^2} - [b_2 + 1] \frac{-d^2}{8f^3} = \frac{1}{2f} - \frac{d}{2f^2} + d^2 \frac{1+b_2}{8f^3} = C_0 - 2dF_0 + d^2 B_0$$

avendo indicato $C_0 = \frac{1}{2f}$.

Quindi riassumendo abbiamo:

$$B = B_0$$

$$F = F_0 - dB_0$$

$$C = C_0 - 2dF_0 + d^2B_0$$

Nel caso di uno specchio parabolico, $B_0 = 0$ e quindi $F = F_0$, cioè l'aberrazione di coma non dipende dalla distanza della pupilla di entrata.

In uno specchio sferico $B_0 \neq 0$, ma possiamo cercare il valore di d che annulli sia F che C .

Intanto in uno specchio sferico $b_2 = 0$ e quindi $B = \frac{1}{8f^3}$.
Annullando l'aberrazione di coma si ha:

$$F = \frac{1}{4f^2} - d\frac{1}{8f^3} = 0 \Rightarrow d = 2f$$

e considerando che $f = \frac{R}{2}$, si ottiene $d = R$, con R raggio di curvatura dello specchio. Quindi per annullare la coma, bisogna porre il diaframma in coincidenza con il centro di curvatura dello specchio, ad una distanza dallo specchio pari al doppio della distanza focale.

Sostituiamo adesso questo valore di d , nell'espressione di C :

$$C = \frac{1}{2f} - \frac{2f}{2f^2} + \frac{1}{8f^3}(2f)^2 = \frac{1}{2f} - \frac{1}{f} + \frac{1}{2f} = 0$$

Quindi la condizione $d = 2f$ annulla sia la coma che l'astigmatismo.

Ma resta il problema dell'aberrazione sferica. È chiaro che più il diaframma è chiuso e minore è la sferica perché si vanno a utilizzare raggi sempre più parassiali, d'altra parte minore è la quantità di luce che entra, e si finisce per non sfruttare la superficie dello specchio come collettore di luce. Serve quindi una soluzione ottica per correggere l'aberrazione sferica: una **lente correttrice** che sia in grado di trasformare uno specchio sferico in parabolico!

... Per produrre uno specchio parabolico da uno specchio sferico, il bordo esterno di quest'ultimo deve essere appiattito, cioè deve essere impresso ad esso un raggio di curvatura più grande... (B. Schmidt)

Consideriamo l'equazione del profilo di una superficie sferica di raggio R . Sia D il diametro dello specchio e $P(x, y)$ un punto sulla superficie (Fig. 7.9):

$$(R - x)^2 + y^2 = R^2$$

Esplicitando x e mettendosi nell'ipotesi che $\frac{y}{R} < 1$, si ha:

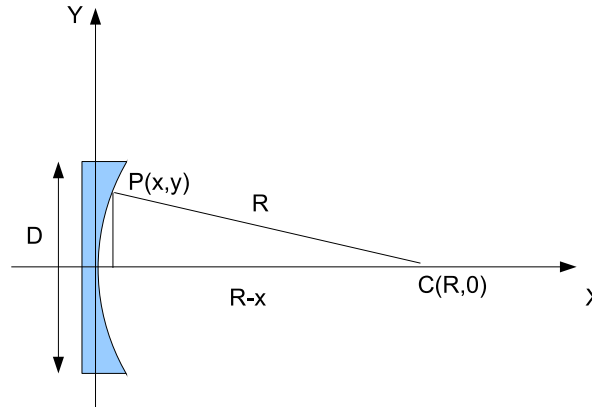


Figura 7.9:

$$R^2 + x^2 - 2Rx + y^2 = R^2$$

$$x = R - \sqrt{R^2 - y^2} = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2} \cong \frac{y^2}{2R} + \frac{y^4}{8R^3} + \dots$$

(Si usa la soluzione con il - perché $x < R$)

Il termine $\frac{y^2}{2R}$ rappresenta il profilo parabolico, mentre il termine $\frac{y^4}{8R^3}$ è l'eccesso di convergenza dello specchio sferico rispetto al parabolico. Per cui, trascurando termini di ordine superiore, possiamo dire che la quantità $\Delta = \frac{y^4}{8R^3}$ è di fatto il cammino ottico da aggiungere ai raggi paralleli all'asse ottico principale che incidono sullo specchio sferico a distanza y dall'asse per ottenere l'equivalente parabolico.

É possibile compensare questo cammino ottico con una lastra correttiva a riflessione oppure con una a rifrazione. Nel secondo caso si dimostra che la lastra correttiva deve avere una curvatura quattro volte maggiore, rispetto a quella a riflessione, e il suo profilo più semplice sarà dato da (Fig. 7.12):

$$T(y) = T(0) + 4 \frac{y^4}{8R^3}$$

Questa equazione assume che l'indice di rifrazione del vetro sia $n = 1.5$.

... In generale, al fine di ottenere per rifrazione la stessa deviazione data dalla riflessione, bisogna dare un'inclinazione 4 volte più grande...(B. Schmidt)

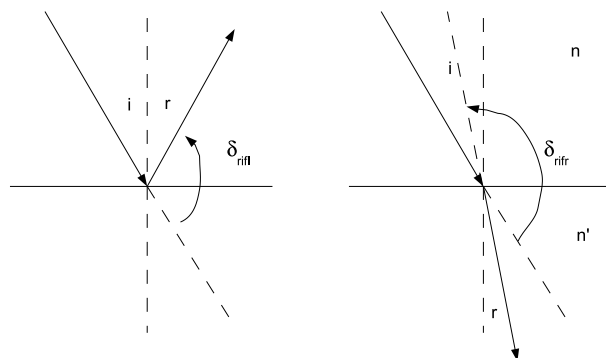


Figura 7.10:

Nel caso della riflessione, l'angolo di deviazione è dato da:

$$\delta_{rifl} = \pi - (\hat{i} + \hat{r}) = \pi - 2\hat{r}$$

Invece in caso di rifrazione:

$$\delta_{rifr} = \pi - (\hat{i} - \hat{r})$$

Applicando la legge di Snell nell'approssimazione di angoli piccoli, $\frac{\hat{i}}{\hat{r}} \cong \frac{n'}{n}$, e assumendo i raggi luminosi passano da aria a vetro, $n = 1, n' \cong 1.5$ si ha:

$$\hat{i} \cong \frac{3}{2}\hat{r}$$

$$\delta_{rifr} = \pi - \left(\frac{3}{2}\hat{r} - \hat{r}\right) = \pi - \frac{1}{2}\hat{r}$$

Da cui si deduce che per avere $\delta_{rifr} = \delta_{rifl}$ è necessario che l'angolo di rifrazione sia 4 volte maggiore.

Inoltre, consideriamo due diottri sferici concentrici con raggi di curvatura diversi, e un raggio di luce parallelo all'asse ottico e distante h da esso. L'angolo di incidenza (come si vede in Fig. 7.11) varia al variare del raggio di curvatura del diottro, in particolare $\hat{i} \cong \frac{h}{R}$ e quindi decresce quando R cresce.

Di conseguenza, la curvatura del profilo della lastra correttiva deve essere quattro volte maggiore di quella di un profilo riflettente per ottenere la stessa deviazione in ogni punto.

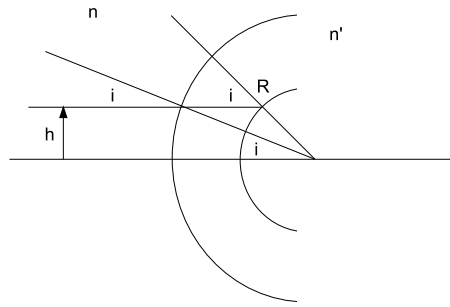


Figura 7.11:

Nel caso più generale, il profilo della lastra sarà :

$$T(y) = T(0) + \frac{y^4}{8R^3} \left(\frac{2}{n-1} \right) = T(0) + \beta \frac{y^4}{4(n-1)}$$

dove $T(0)$ é lo spessore della lastra al centro.

Si dimostra che i coefficienti di aberrazione in presenza di lastra correttiva diventano:

$$B = \frac{1+b}{8f^3} - \beta$$

$$F = \frac{1}{4f^2} - d\beta$$

$$C = \frac{1}{2f} - d^2\beta$$

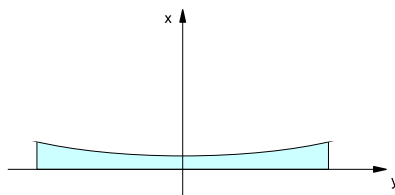


Figura 7.12:

Deriviamo la condizione che annulla l'aberrazione sferica, la coma e l'astigmatismo. Abbiamo così 3 equazioni nelle 3 incognite (b, d, β).

$$C = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2fd^2}$$

$$F = 0 \Rightarrow \frac{1}{4f^2} - d\frac{1}{2fd^2} = 0 \Rightarrow d = 2f$$

da cui si ricava che $\beta = \frac{1}{8f^3}$ e $b = 0$.

Il sistema è quindi privo delle aberrazioni che gli fanno perdere di stigmatismo. Se trascuriamo la distorsione, resta solo la curvatura di campo, il cui coefficiente vale $|D| = \frac{1}{2f}$.

Una lastra correttiva del tipo descritto finora soffre di aberrazione cromatica.

... La situazione è alquanto diversa per le aberrazioni cromatiche della lastra correttiva. Per renderle piccole quanto più è possibile, la lastra correttiva deve essere modellata in modo tale che la parte centrale agisca come una lente convergente e che le parti esterne abbiano un effetto divergente... (B. Schmidt).

La lastra correttiva con questa nuova forma (Fig. 7.13) avrà equazione:

$$T(y) = T(0) + \frac{y^4 - Ay^2}{32(n-1)f^3}$$

dove A è il termine che minimizza l'aberrazione cromatica e contiene il raggio di curvatura e un fattore di forma della lastra.

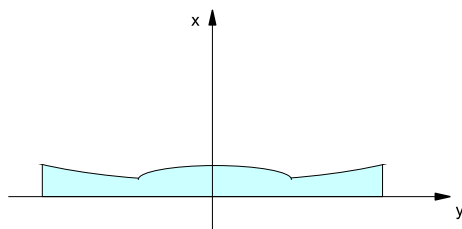


Figura 7.13:

Se applichiamo il primo tipo di lastra otteniamo che i raggi parassiali la attraversano praticamente indisturbati, mentre i raggi marginali divergono dopo aver attraversato la lastra in modo tale da produrre una convergenza più lunga e far coincidere il loro fuoco con quello dei raggi parassiali (Fig. 7.14).

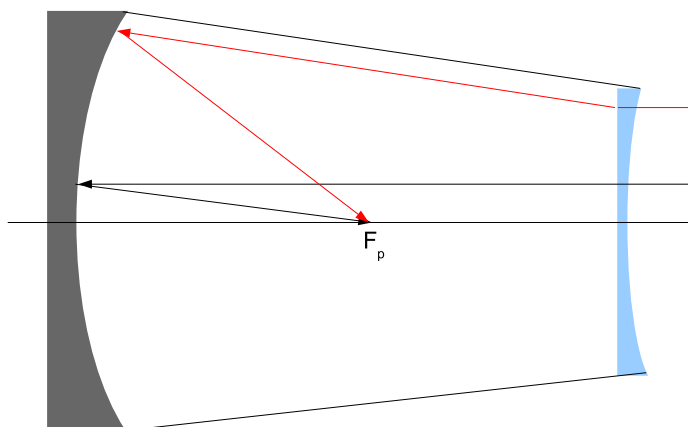


Figura 7.14:

Invece, utilizzando la seconda lastra correttiva vengono deviati sia i parassiali che i marginali, con il risultato che i parassiali anticipano la convergenza, mentre i marginali la ritardano e la posizione del fuoco è intermedia fra quella dei raggi parassiali e quella dei raggi marginali (in assenza di lastra correttiva) (Fig.7.15).

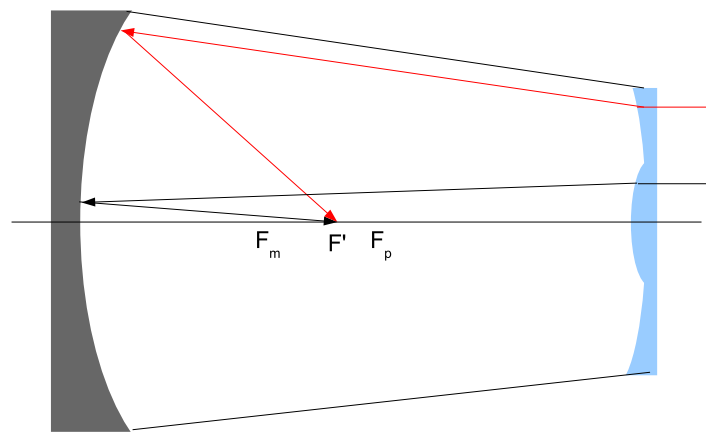


Figura 7.15:

Capitolo 8

Esperienze

8.1 Banco ottico

Per effettuare le esperienze di ottica del corso si utilizza il banco ottico schematizzato in Fig. 8.1.

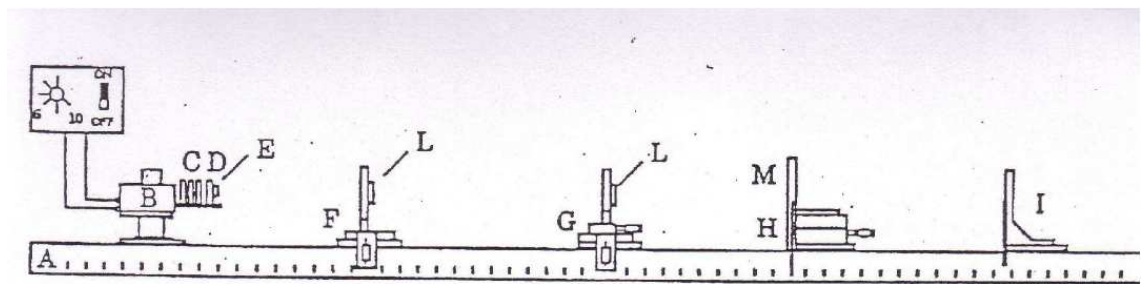


Fig.V.1.1. Schema del banco ottico. A: profilato guida con riga millimetrata; B: lampada; C: filtri interferenziali; D: porta-mascherine oggetto; E: mascherina oggetto; F: cavaliere portalenti fisso; G: cavaliere portalenti con movimento micrometrico lungo l'asse X; H: cavaliere portaschermo con movimenti micrometrici lungo gli assi X e Y; I: cavaliere con squadra per posizionamento mascherina oggetto; L: ghiera portalenti; M: schermo in vetro smerigliato; N: alimentatore della lampada con regolazione di intensità e interruttore.

Figura 8.1:

La rotaia su cui può scorrere il tutto è costituita da un profilato di alluminio (A) munito di una scala graduata che valuta il mezzo millimetro, cioè con una sensibilità di 0.5 mm. Sul suo asse orizzontale, che indicheremo con X, saranno posti con relativa posizione x:

- una lampada alogena (B) alimentata con corrente alternata variabile da 6 a 10 Volt da cui fuoriesce luce bianca che può attraversare
 - filtri (C) di tipo interferenziale e precisamente: a) un filtro blu centrato su $F = 4861\text{\AA}$, lunghezza d'onda vicina alla riga F dello spettro di Fraunhofer; b) un filtro giallo centrato su $D = 5893\text{\AA}$, lunghezza d'onda vicina alla riga D dello spettro di Fraunhofer e infine c) un filtro rosso centrato su $C = 6563\text{\AA}$, lunghezza d'onda vicina alla riga C dello spettro di Fraunhofer, che corrispondono rispettivamente alla riga dell'idrogeno $H\beta$, alla riga del doppietto del sodio, e alla riga dell'idrogeno $H\alpha$;
 - una mascherina (E) ad 1 foro di diametro $d = 0.5 \pm 0.01$ mm per ottenere una sorgente di luce puntiforme e una mascherina a 2 fori con lo stesso diametro d distanti 4 ± 0.01 mm per ottenere una sorgente estesa, entrambe da porre sul braccio della lanterna e poste in un porta mascherine (D);
- un cavaliere posizionario (I) da far combaciare tramite due perni metallici da infilarsi negli appositi fori del cavaliere. La posizione della mascherina verrà letta a destra della molla del posizionario;
- due cavalieri portalenti, uno fisso (F) e l'altro (G) dotato di movimento micrometrico lungo l'asse X;
- alla loro destra si avviteranno con un nonio circolare di sensibilità 0.01 mm le ghiera portalenti ove sono poste le lenti che saranno utilizzate di volta in volta nelle esperienze;
- due tipi di diaframmi, uno indicato con D4, a 4 fori di 0.50 ± 0.01 mm di diametro, 2 parassiali a distanza $R_1 = 2.50 \pm 0.01$ mm dal centro e 2 marginali alla distanza $R = 14.00 \pm 0.01$ mm sempre dal centro. L'altro indicato con D1 e avente un foro centrale di diametro $d = 10.00 \pm 0.01$ mm;
- un cavaliere portaschermo (M) con movimento lungo gli assi X e Y, cioè ortogonalmente all'asse ottico per spostamenti perpendicolari al piano della rotaia;
- un alimentatore della lampada con regolazione d'intensità.

8.1.1 Cavalieri portalenti

Ogni banco ha in dotazione due cavalieri portalenti di tipo diverso, uno fisso e l'altro dotato di movimento micrometrico lungo l'asse X, come si può vedere in Fig. 8.2.

All'altezza dell'asse ottico c'è un foro filettato dove è possibile avvitare sia i diaframmi, a sinistra, che, a destra, le ghiera portalenti, che una volta posizionate avranno il loro spigolo sinistro, cioè la battuta, in corrispondenza della faccia destra del portalente stesso. Nel caso del portalente fisso la tacca che indica la lettura sulla scala graduata

del banco passerà per il piano fisso indicato dalla freccia che attraverserà il centro della lente; per quanto riguarda il cavaliere mobile a movimento micrometrico, una volta azzerato il micrometro dopo aver avvitato la ghiera, bisognerà fare avanzare lo stesso micrometro del valore indicato su di esso e aggiungerci il valore $\frac{dr}{2}$ della lente utilizzata.

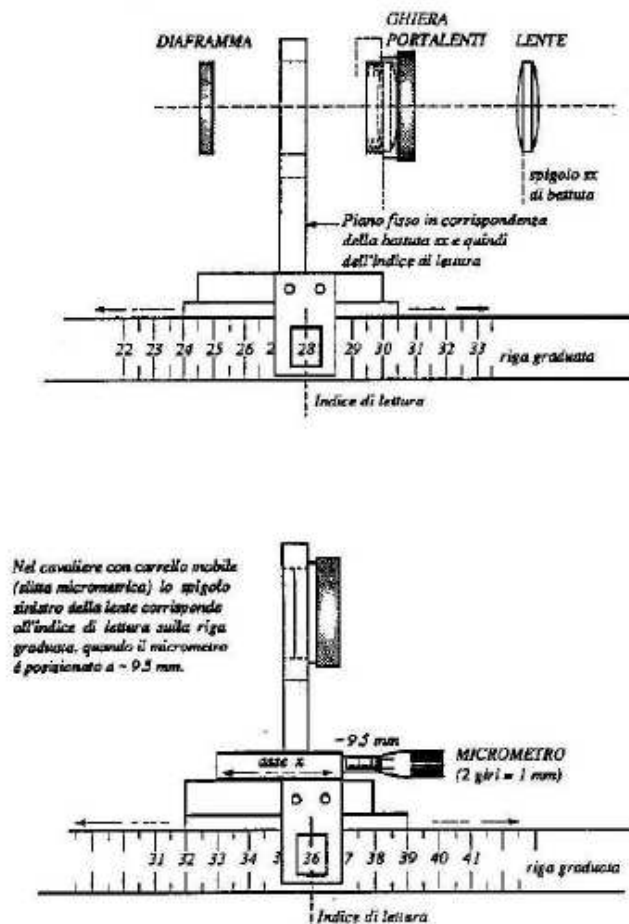


Figura 8.2:

8.1.2 Cavaliere portaschermo

Tale cavaliere fisserà uno schermo traslucido costituito da un vetro smerigliato su cui è tracciato un reticolo con passo di 10 mm × 10 mm. La lettura della posizione dello schermo rispetto alla scala graduata del banco viene effettuata sempre sul filo destro dell'indice (Fig. 8.3).

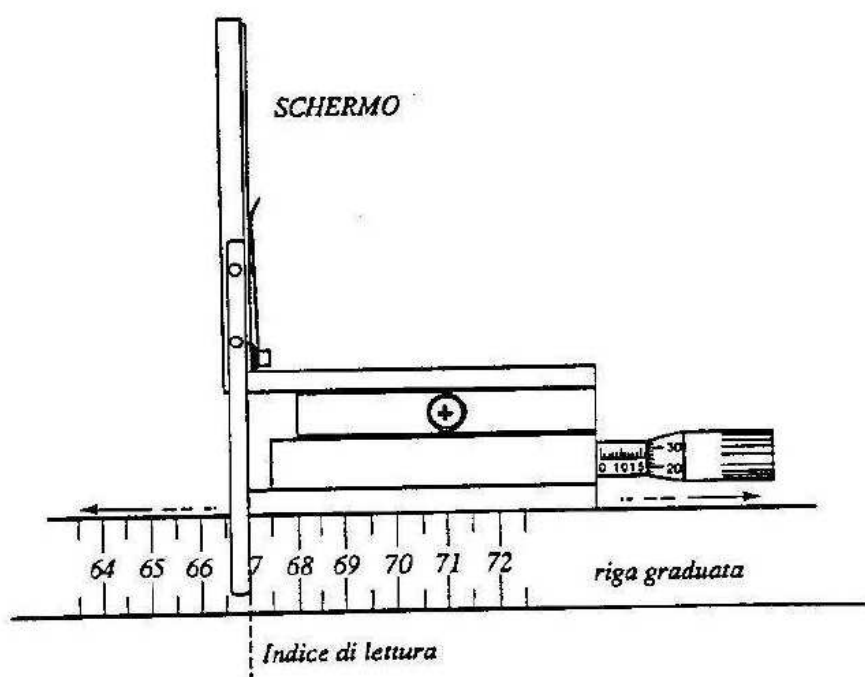


Figura 8.3:

8.1.3 Lenti e diaframmi

In Fig. 8.4 sono riportate le lenti usate nelle esperienze in laboratorio; la seconda da sinistra è la lente convergente, la terza, sempre da sinistra è quella divergente, mentre la prima a destra è il doppietto acromatico utilizzato come lente collimatrice. Sotto sono disegnati i due tipi di mascherina, a un foro per creare una sorgente puntiforme e a due fori per avere una sorgente estesa, e i due diaframmi che saranno usati, quello con un foro centrale D1 e il diaframma D4 a 4 fori per selezionare raggi parassiali e marginali.

Il vetro di cui sono costituite le lenti (BK7) ha indice di rifrazione:

$$n(\lambda_C) = 1.5143, \quad n(\lambda_F) = 1.5224, \quad n(\lambda_D) = 1.5168$$

In Fig. 8.5 sono riportate le caratteristiche geometriche delle lenti con i valori di VV' e dr che competono ad esse.

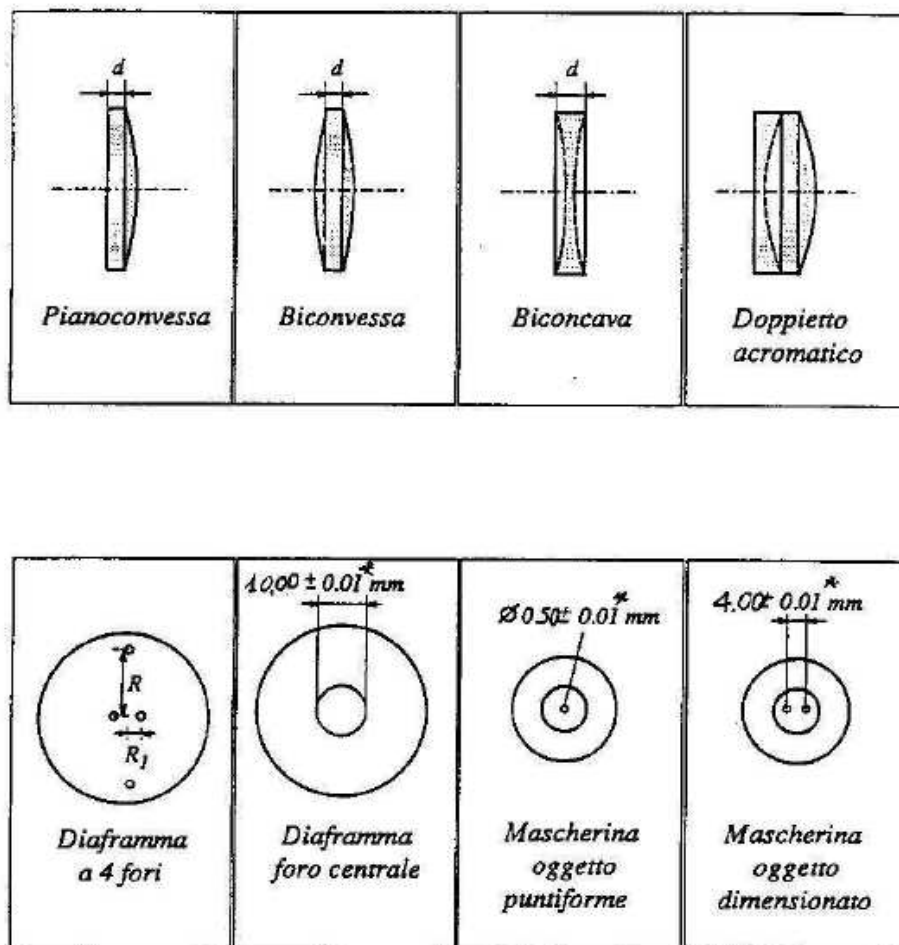


Figura 8.4:

Lente n.	VV' (mm)	Dr (mm)
Lenti convergenti		
1	10.10	2.60
2	10.10	2.70
3	8.00	2.30
4	8.00	2.30
5	10.10	2.70
6	10.10	2.70
7	7.00	2.30
8	10.10	2.60
9	10.10	2.70
10	10.10	2.60
11	10.10	2.70
12	10.10	2.60
13	10.10	2.60
14	10.10	2.60
15	11.80	2.60
16	11.80	2.40
17	6.00	2.10
Lenti divergenti		
18		5.90
19		5.70
20		5.70
21		5.70
22		5.70
23		5.70
24		5.70
25		3.90
26		3.90
27		3.90
28		3.90
29		3.90
30		3.90
31		5.70

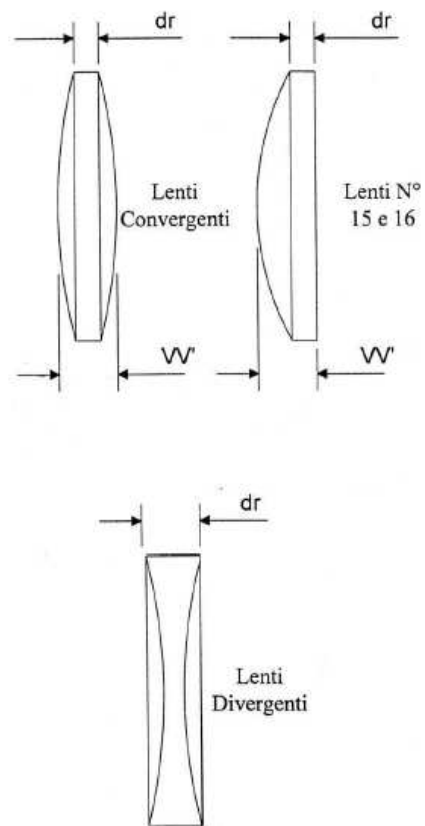


Figura 8.5:

8.2 Misura della focale di una lente convergente sottile

Dotazione: banco ottico e lente convergente.

Scopo dell'esperienza: determinazione della lunghezza focale f di una lente convergente biconvessa simmetrica.

Generalmente si possono utilizzare per la misura diversi metodi:

- metodo della collimazione;
- metodo dei punti coniugati;
- metodo di Bessel;
- variante di Silbermann.

8.2.1 Metodo della collimazione

Consideriamo una lente convergente e immaginiamo di porre una sorgente di luce a sinistra della lente e molto lontano da essa, tanto da poterla considerare all'infinito. Dalla teoria sappiamo che tale lente concentrerà un fascio di raggi paralleli al suo asse ottico in un punto detto fuoco secondario (F_2), che si trova a destra della lente stessa. La distanza tra F_2 ed il vertice della lente dalla parte del fuoco è detta distanza focale. Ma la lente è dotata di due fuochi, per cui se adesso poniamo una sorgente luminosa puntiforme nel fuoco primario (F_1) essa genera un fascio di raggi omocentrico che viene collimato dalla lente convergente in un fascio di raggi paralleli all'asse ottico, che emerge a destra della lente.

In generale le due distanze focali sono diverse ma per una lente simmetrica, come nel nostro caso, esse coincidono e nel limite di spessore nullo della lente sono uguali alla lunghezza focale della lente, che è quella per cui vale l'equazione dei punti coniugati. Tali ipotesi sono verificate per tutte le lenti che si trovano in laboratorio. Dunque, se si pone la lente a una distanza dalla sorgente puntiforme tale che il fascio emergente sia collimato, quella distanza è proprio la lunghezza focale della lente.

In pratica, si tratta di avvitare la lente nell'apposito supporto, cioè a destra del cavaliere portalenti con micrometro e provvedere a centrarla in modo che il centro della lente cada esattamente in corrispondenza della tacca bianca del supporto, tacca a cui ci si riferisce per le letture sulla scala graduata. Per il centraggio si regola la vite micrometrica del supporto nella posizione di azzeramento indicata sul supporto stesso ($\Delta_{micrometro}$), cui si aggiunge il semispessore minimo della lente $\frac{dr}{2}$. Si inserisce poi la mascherina puntiforme nel braccio della lanterna e si pone la lente a diverse distanze p dalla sorgente (cioè la mascherina), fino a trovare la distanza alla quale il fascio emergente è ben

collimato. L'errore su p è dato dalla somma dell'errore di sensibilità sulla posizione della sorgente e dell'errore di sensibilità sulla posizione della lente. Per controllare la collimazione del fascio si fa scorrere lo schermo lungo la rotaia, controllando che la macchia luminosa che si forma su di esso mantenga sempre lo stesso diametro. La collimazione appare buona non per un unico valore di p , ma per un certo intervallo di valori di p . È possibile determinare il massimo e il minimo valore corretto di p , per ottenere una stima di f e di Δf .

Questo metodo è relativamente poco accurato, ma permette di ottenere rapidamente una stima della distanza focale della lente convergente.

8.2.2 Metodo dei punti coniugati

Questo metodo sfrutta l'equazione dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Riscriviamo questa equazione esplicitando f e calcoliamo l'errore massimo associato Δf utilizzando la propagazione degli errori:

$$f = \frac{pq}{p+q}$$

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial p} \right| \Delta p + \left| \frac{\partial f}{\partial q} \right| \Delta q$$

$$\Delta f = \frac{q^2}{(p+q)^2} \Delta p + \frac{p^2}{(p+q)^2} \Delta q$$

Si utilizza la mascherina per la sorgente puntiforme e si applica il diaframma D4 per mettersi nella condizione di raggi parassiali (Fig. 8.6).

Operativamente, si posiziona la lente a una distanza p_k con $k = 1, 2, \dots, 10$, dalla sorgente puntiforme. L'errore associato Δp_k sarà dato dalla combinazione dell'errore di sensibilità della scala graduata agli estremi del segmento p_k . Si porta lo schermo vicino alla lente e si comincia ad allontanarlo, finché i due punti-immagine diventano uno solo. Si misura la posizione sulla scala graduata indicando questo valore come $q_{k,min}$. A causa della profondità di campo, esisterà un $q_{k,max}$ oltre il quale il punto si sfuoca di nuovo in due punti. Tra $q_{k,min}$ e $q_{k,max}$ l'immagine della sorgente puntiforme è ancora puntiforme. Si calcola il valore medio fra $q_{k,min}$ e $q_{k,max}$ e si prende quello come valore di q_k corrispondente al valore di p_k .

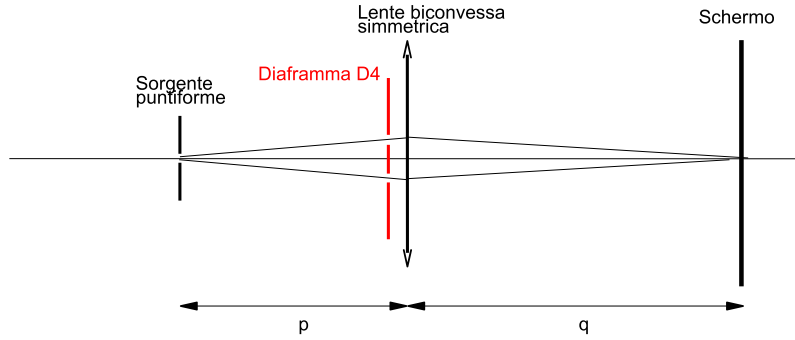


Figura 8.6:

Conviene ripetere questa misura 10 volte, in modo da avere:

$$q_{kj} = \frac{q_{kj,max} + q_{kj,min}}{2} \quad j = 1, 2, \dots, 10$$

$$q_k = \frac{\sum_{j=1}^{10} q_{kj}}{10} \quad \sigma_{q_k} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{10} (q_{kj} - q_k)^2}{9}}$$

A causa dell'effetto combinato di profondità di campo e errore di misura, è consigliabile utilizzare gli errori massimi, per cui $\Delta q_k = 3\sigma_{q_k}$.

Per ogni valore di k si calcola il corrispondente valore della lunghezza focale e del suo errore $f_k \pm \Delta f_k$. Infine si calcola la media pesata dei valori ottenuti per ricavare la lunghezza focale della lente:

$$f = \frac{\sum_{k=1}^{10} w_k f_k}{\sum_{k=1}^{10} w_k} \quad \sigma_f = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{10} w_k}} \quad w_k = \left(\frac{1}{\sigma_{f_k}} \right)^2$$

Si tenga conto che $\Delta f = 3\sigma_f$ e $\Delta f_k = 3\sigma_{f_k}$.

8.2.3 Metodo di Bessel

Il metodo di Bessel si basa sulla constatazione che partendo dalla legge dei punti coniugati e tenendo fissa la distanza fra sorgente e schermo su cui si forma l'immagine, si hanno due possibili posizioni della lente che consentono di mettere a fuoco l'immagine. Queste due posizioni saranno simmetriche rispetto al centro della distanza sorgente-schermo.

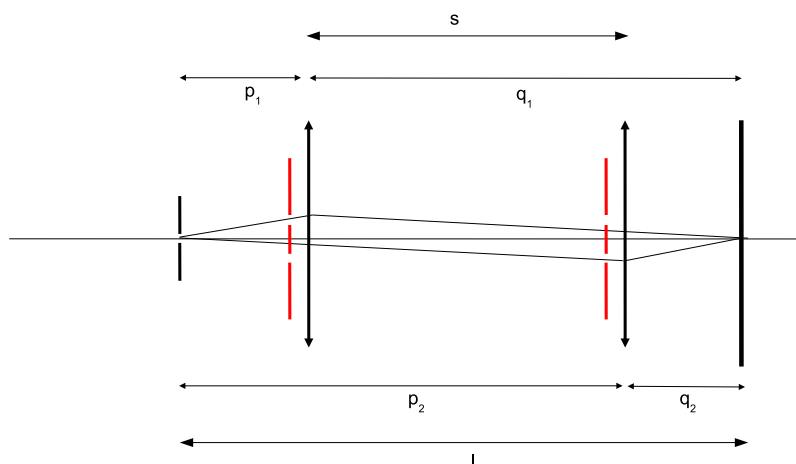


Figura 8.7:

Come si vede dalla figura (Fig. 8.7), $p_1 = q_2$ e $p_2 = q_1$. Chiamiamo l la distanza sorgente-schermo e s la distanza fra le due posizioni della lente per cui si ha un'immagine a fuoco sullo schermo.

$$f = \frac{pq}{p+q} \quad q = l - p$$

$$f = \frac{p(l-p)}{p+l-p} = \frac{pl-p^2}{l}$$

$$p^2 - pl + fl = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}$$

Se $l = 4f$ si ha $p_1 = p_2 = q_1 = q_2$, cioè la lente è posizionata a metà della distanza sorgente-schermo.

Se $l > 4f$, si ha $p_1 \neq p_2$:

$$p_1 = \frac{l}{2} - \frac{s}{2} \quad q_1 = l - p_1 = l - \frac{l}{2} + \frac{s}{2} = \frac{l}{2} + \frac{s}{2}$$

$$f = \frac{p_1 q_1}{p_1 + q_1} = \frac{\left(\frac{l}{2} - \frac{s}{2}\right) \left(\frac{l}{2} + \frac{s}{2}\right)}{\frac{l}{2} - \frac{s}{2} + \frac{l}{2} + \frac{s}{2}} = \frac{l^2 - s^2}{4l}$$

Quindi è possibile esprimere la lunghezza focale della lente in termini della distanza sorgente-schermo e della distanza fra le posizioni della lente per cui si ha un'immagine a fuoco.

Operativamente, si fissa lo schermo a una distanza l_1 maggiore di $4f$, si determinano le due posizioni $p_{1,1}$ e $p_{2,1}$, si calcola $s_1 = |p_{2,1} - p_{1,1}|$, si ripete questa operazione per un numero di volte $N=10$, in modo da avere $\bar{s}_1 \pm \sigma_{\bar{s}_1}$. Si ripete l'operazione ponendo lo schermo a una distanza $l_2 > l_1$ fino a l_{10} . Dalla propagazione degli errori, l'errore massimo su l sarà $\Delta l = 2\Delta x$, con Δx errore di sensibilità della scala graduata. Come per il metodo precedente si procede al calcolo della media pesata delle lunghezze focali e relativo errore, ottenendo $f \pm \Delta f$.

8.2.4 Variante di Silbermann

Questo metodo è una variante del metodo di Bessel ed è basato sull'utilizzo della soluzione $l = 4f$, che implica lente posizionata a metà distanza sorgente-schermo, ma implica anche ingrandimento $m = 1$. Quindi si procede per approssimazioni successive, utilizzando come sorgente quella estesa, ponendo lo schermo a una distanza $l > 4f$, la lente a metà percorso, e misurando la dimensione dell'immagine. Si sposta poi lo schermo e di conseguenza la lente fino a misurare ingrandimento pari a 1.

8.3 Misura della focale di una lente divergente sottile

Scopo di questa seconda esperienza è la determinazione della lunghezza focale f di una lente divergente biconcava simmetrica per cui vale:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

dove n è l'indice di rifrazione del vetro e r_1 (< 0), r_2 (> 0) sono i raggi di curvatura delle superfici della lente, per cui risulta $f < 0$. Una lente divergente fa divergere un fascio di raggi paralleli al suo asse ottico principale in modo che i prolungamenti dei raggi si incontrino nel punto focale F_1 , cioè in modo che i raggi emergenti, provengano virtualmente da F_1 , che si dice punto focale immagine. F_1 è appunto un fuoco virtuale, in quanto l'immagine del punto all'infinito che la lente divergente forma in F_1 non è reale ma virtuale. I raggi che incidono sulla lente divergente convergendo verso il punto F_2 vengono deviati dalla lente in un fascio di raggi paralleli al suo asse ottico principale. F_2 si dice punto focale oggetto e anch'esso è un fuoco virtuale, in quanto la sorgente puntiforme posta in F_2 che produce, attraverso la lente divergente, un'immagine all'infinito non è un oggetto reale ma virtuale. Per una lente simmetrica F_1 ed F_2 si trovano alla stessa distanza dalla lente. Tale distanza, presa col segno negativo, è la focale della lente divergente.

Per determinare la focale di una lente divergente si possono usare 3 metodi:

- il metodo della divergenza di un fascio collimato
- il metodo dei minimi quadrati
- il metodo dei punti coniugati

In questa esperienza useremo i primi due.

8.3.1 Metodo della divergenza di un fascio collimato

Consideriamo un fascio collimato, avente sezione circolare di diametro d , che incide sulla lente divergente parallelamente al suo asse ottico principale. La lente devia i raggi del fascio cosicché su uno schermo posto a distanza h dalla lente si forma una chiazza circolare di diametro k (Fig. 8.8).

In base alla proprietà di similitudine di due triangoli rettangoli ottenuti attraverso prolungamento all'indietro dei raggi divergenti verso il fuoco F_1 , si dimostra che vale la relazione:

$$f = \frac{d \cdot h}{k - d}$$

Conoscendo d e h , dalla misura di k si risale alla focale f .

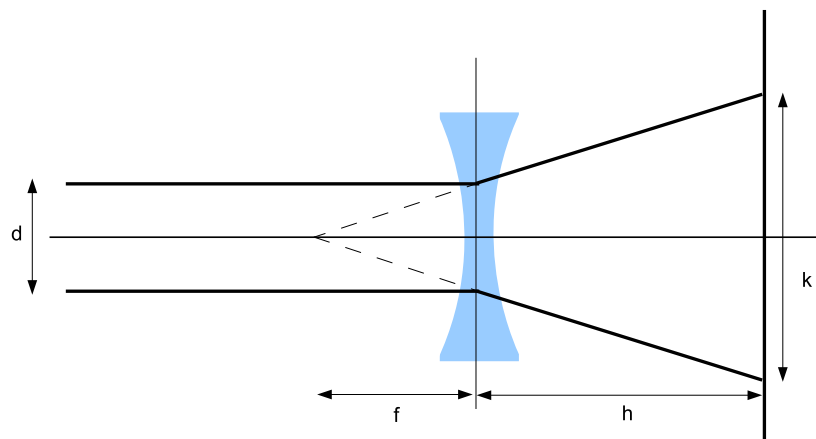


Figura 8.8:

In pratica:

- 1) si inserisce la lente nell'apposito supporto e si provvede a centrarla in modo che il centro della lente cada esattamente in corrispondenza della tacca bianca del supporto. Per il centraggio si regola, esattamente come è stato fatto nella prima esperienza, la vite micrometrica del supporto nella posizione di azzeramento indicata sul supporto stesso ($\Delta_{micrometro}$), cui si aggiunge il semispessore massimo della lente $\frac{dr}{2}$
- 2) si inserisce la mascherina puntiforme sul braccio della lanterna e si pone il doppietto acromatico fra la sorgente e la lente divergente, ad una distanza dalla sorgente stessa pari alla sua lunghezza focale, $f_d = 81.83 \pm 0.81$ mm, usando l'apposita sbarretta calibratrice. Il doppietto agisce allora come collimatore, fornendo un fascio di raggi paralleli all'asse ottico
- 3) si inserisce il diaframma con un foro circolare davanti alla lente divergente per lavorare solo con i raggi parassiali e ridurre quindi l'aberrazione sferica. Il diametro del fascio incidente viene allora a coincidere (a meno di difetti di parallelismo e

di difetti di circolarità del diaframma) col diametro d del diaframma, che è noto:
 $d = 10.00 \pm 0.01$ mm

- 4) si pone poi il filtro giallo davanti alla lampada per ridurre l'aberrazione cromatica
- 5) si pone la lente divergente a una distanza dal doppietto opportunamente piccola, dell'ordine di 10 cm, in modo da ridurre difetti di parallelismo del fascio collimato stesso
- 6) si pone lo schermo ad una certa distanza h dalla lente e si misura il diametro k dello chiazza luminosa che si forma sullo schermo, usando il micrometro per gli spostamenti laterali ed il reticolo tracciato sullo schermo.

Per ogni valore h_i , con $i = 1, \dots, 10$, si effettuano 10 misure ripetute k_{ij} , con $j = 1, \dots, 10$. Si calcola il valore medio e lo scarto quadratico medio di ogni k_i , l'errore massimo associato sarà $\Delta k_i = 3\sigma_{k_i}$. L'errore massimo Δh sarà dato dal doppio dell'errore di sensibilità dell'asta millimetrata e sarà uguale per ogni h_i .

Si calcolano poi f_i e Δf_i :

$$f_i = \frac{d \cdot h_i}{k_i - d}$$

$$\Delta f_i = \left| \frac{\partial f_i}{\partial h_i} \right| \Delta h_i + \left| \frac{\partial f_i}{\partial d} \right| \Delta d + \left| \frac{\partial f_i}{\partial k_i} \right| \Delta k_i = \frac{d}{k_i - d} \Delta h + \frac{h_i k_i}{(k_i - d)^2} \Delta d + \frac{h_i d}{(k_i - d)^2} \Delta k_i$$

Si faccia attenzione di scegliere i valori h_i in modo che sia sempre verificato $k_i(h_i) > 2d$, così da evitare che la propagazione dell'errore sulla misura (indiretta) di f_i sia troppo elevato. Infatti se $k_i \cong d$, l'errore su f_i diverge molto rapidamente.

Si converte Δf_i in σ_{f_i} usando la solita formula $\Delta f_i = 3\sigma_{f_i}$. Si calcola infine la media pesata dei dieci valori della lunghezza focale e il suo errore associato:

$$f = \frac{\sum_{i=1}^{10} w_i f_i}{\sum_{i=1}^{10} w_i} \quad \sigma_f = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} w_i}} \quad w_i = \left(\frac{1}{\sigma_{f_i}} \right)^2$$

8.3.2 Metodo dei minimi quadrati

Utilizziamo le stesse misure h_i e k_i ottenute col metodo precedente. Riscriviamo la formula della focale in questo modo:

$$k = \left(\frac{d}{f}\right) h + d$$

Abbiamo quindi una retta di pendenza $\frac{d}{f}$ e di intercetta d .

Mettiamo i valori (h_i, k_i) in grafico, con le barre d'errore associate. Utilizziamo il metodo dei minimi quadrati per ricavare pendenza e intercetta e relativi errori. Riportiamo la retta sul grafico e verifichiamo la compatibilità con gli errori delle misure. Infine riportiamo per confronto la retta ottenuta usando il valore noto di d e quello di f calcolato con il metodo precedente.

8.4 Misura dell'aberrazione sferica di una lente convergente sottile

L'equazione dei punti coniugati per una lente sottile:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

vale solo in approssimazione di raggi parassiali ossia per angoli di apertura φ piccoli. In tale approssimazione fissato un punto oggetto p sull'asse ottico, q risulta indipendente dall'angolo di apertura φ del raggio considerato e la lente risulta un sistema ottico stigmatico. Andando ad approssimazioni di ordine superiore, invece per un dato p , q dipende anche da φ , e la lente non è più un sistema ottico stigmatico. Per $p \rightarrow \infty$, cioè con un fascio di raggi incidenti paralleli all'asse ottico, raggi parassiali e marginali convergono in fuochi diversi: la distanza focale f_m per i raggi marginali è minore di quella per i raggi parassiali f_p . La distanza fra i due fuochi F_m e F_p , si dice aberrazione sferica principale longitudinale:

$$\overline{F_m F_p} = f_p - f_m = l$$

In approssimazione del terzo ordine, che vuol dire che nell'equazione di Snell i seni degli angoli coinvolti vengono sviluppati secondo la formula di Taylor fino al 3° ordine, l'espressione dell'aberrazione sferica principale longitudinale risulta:

$$l = c \frac{h^2}{f}$$

dove h è il raggio dell'apertura massima del fascio incidente, f la lunghezza focale della lente, c il coefficiente di aberrazione sferica principale:

$$c = \frac{4n^3 - 4n^2 - n + 2}{8n(n-1)^2}$$

Nell'esperienza si usa il filtro giallo, quindi $n = n(\lambda_D)$. A causa della diversa convergenza dei raggi parassiali e marginali, per una sorgente puntiforme all'infinito, sul piano focale corrispondente ai raggi parassiali, i raggi marginali non danno un'immagine puntiforme bensì una chiazza di dimensioni finite. Il diametro di tale spot si chiama aberrazione sferica principale trasversale.

Da considerazioni geometriche tale diametro sarà dato da:

$$t = l \cdot \left(\frac{2h}{f-l} \right)$$

sostituendo in quest'ultima l'espressione di l si ottiene:

$$t = 2c \frac{h^3}{f(f-l)}$$

Ricordiamo che f che compare in questa formula, come in quella dell'aberrazione sferica principale longitudinale, è uguale alla focale misurata nella prima esperienza e sarà molto maggiore di l , per cui si può fare la seguente approssimazione:

$$f(f-l) \cong f^2$$

Per cui si ottiene una relazione per l'aberrazione sferica trasversale principale indipendente da l :

$$t = 2c \frac{h^3}{f^2}$$

Scopo dell'esperienza è la misura dell'aberrazione sferica principale longitudinale l e trasversale t della lente convergente, e ricavare da queste misure il coefficiente di aberrazione sferica c ottenuto tramite la misura longitudinale (c_l) e trasversale (c_t). Dal confronto si dovrà verificare che sono uguali entro gli errori di misura al valore teorico della costante di aberrazione sferica principale c .

In pratica:

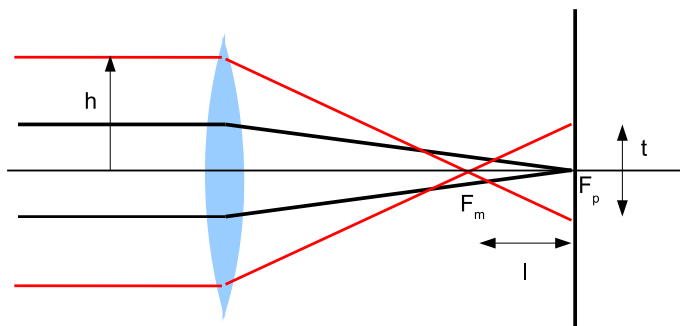


Figura 8.9:

- si avvita la lente nell'apposito cavaliere e la si centra, come per le esperienze precedenti
- si inserisce davanti alla lampada il filtro giallo per ridurre l'aberrazione cromatica
- si inserisce la mascherina puntiforme sul braccio della lanterna, nella solita posizione delle altre esperienze
- si pone il doppietto acromatico, avvitato sull'apposito supporto, ad una distanza dalla mascherina (sorgente puntiforme) pari alla sua focale $f = 81.83 \pm 0.81$ mm; tale distanza si può determinare con l'apposita sbarretta calibratrice. Il doppietto funge così da collimatore fornendo un fascio di raggi (in buona approssimazione) paralleli all'asse ottico
- si pone il diaframma D4 davanti alla lente, per poter isolare alternativamente i raggi parassiali e quelli marginali
- si chiudono i fori per i raggi parassiali e si trova, spostando lo schermo, il fuoco F_m dei raggi marginali; si annota la corrispondente lettura l_m del micrometro su nonio circolare per gli spostamenti longitudinali dello schermo
- si chiudono poi i fori per i raggi marginali e si aprono quelli per i parassiali. Spostando lo schermo col micrometro si trova il fuoco dei raggi parassiali F_p ; sia l_p il valore corrispondente sul nonio. La differenza fra l_p e l_m sarà uguale a l
- lasciando lo schermo su F_p si chiudono i fori per i raggi parassiali e si aprono quelli per i marginali. I raggi marginali, sul piano focale formano due punti luminosi distinti, la cui distanza è t . Si misurano le posizioni t_s e t_d dei due punti sfruttando

il micrometro per gli spostamenti laterali ed il reticolato tracciato sullo schermo. La differenza tra questi due valori sarà uguale a t

- si sposta poi di nuovo lo schermo col micrometro per gli spostamenti longitudinali fino a ritrovare il fuoco dei marginali F_m

E così via si ripete il procedimento fino ad ottenere 10 determinazioni di l_m , l_p , t_s e t_d . Poiché ci interessano misure differenziali ($l = l_p - l_m$, $t = t_s - t_d$), non occorre dare le posizioni assolute di F_m e F_p (cioè le loro distanze dalla lente f_m ed f_p), ma sono sufficienti le letture relative sul micrometro. L'errore delle singole determinazioni di l_{m_i} , l_{p_i} , t_{s_i} , t_{d_i} , con ($i = 1, 2, \dots, 10$) è dato dall'errore di sensibilità dei due micrometri.

Se il fuoco dei raggi parassiali non è ben definito a causa della profondità di campo della lente stessa, opportuno ottenere l_{p_i} segnandosi la prima posizione del micrometro appena l'immagine sembra a fuoco (intrafocale) e l'ultima posizione poco prima di sfuocare (extrafocale) per poi fare la media aritmetica, in modo da evitare errori sistematici.

A questo punto per ogni i si calcola $l_i = l_{p_i} - l_{m_i}$, dove l_{p_i} è ottenuto come detto poco prima. E si calcola $t_i = |t_{d_i} - t_{s_i}|$. Si calcola poi la media e lo scarto quadratico medio di queste due quantità ottenendo $l \pm \sigma_l$ e $t \pm \sigma_t$.

Dalla teoria sappiamo che:

$$l = c \frac{h^2}{f}$$

nel nostro caso h , raggio dell'apertura massima del fascio di raggi incidenti, corrisponde alla metà della distanza fra i fori per i raggi marginali del diaframma D_4 , che è nota, cioè $h = 14.00 \pm 0.01$ mm. La distanza focale $f \pm \Delta f$ della lente convergente è stata determinata nella prima esperienza. Dalla determinazione di l si può ricavare indirettamente il coefficiente di aberrazione sferica principale:

$$c_l = \frac{f \cdot l}{h^2}$$

con errore dato da:

$$\Delta c_l = \left| \frac{f}{h^2} \right| \Delta l + \left| \frac{l}{h^2} \right| \Delta f + \left| -\frac{2fl}{h^3} \right| \Delta h$$

dove $\Delta l = 3\sigma_l$ e $\Delta t = 3\sigma_t$.

Sempre dalla teoria sappiamo che:

$$t = 2c \frac{h^3}{f^2}$$

Conoscendo h ed f e misurato t si può ricavare indirettamente e con un'altra relazione, il coefficiente di aberrazione sferica principale:

$$c_t = \frac{t \cdot f^2}{2h^3}$$

con con errore dato da:

$$\Delta c_t = \left| \frac{f^2}{2h^3} \right| \Delta t + \left| \frac{tf}{h^3} \right| \Delta f + \left| -\frac{3tf^2}{2h^4} \right| \Delta h$$

Alla fine si ottengono valori che dovranno essere confrontati tra loro e con il valore teorico di c : $c_l \pm \Delta c_l$ e $c_t \pm \Delta c_t$.

8.5 Misura dell'aberrazione cromatica

Lo scopo di questa esperienza è la determinazione dell'aberrazione cromatica. Dalla teoria, sappiamo che l'indice di rifrazione (n) dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione che attraversa il mezzo. In particolare, per mezzi trasparenti come il vetro, n decresce al crescere della lunghezza d'onda:

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0 \quad (8.1)$$

Quindi, l'effetto della rifrazione sui raggi incidenti dipende dalla lunghezza d'onda e in particolare verranno deviati maggiormente i raggi a lunghezza d'onda inferiore, rispetto a quelli a lunghezza d'onda maggiore. Questo è alla base dell'effetto di aberrazione cromatica.

I set di filtri che useremo in laboratorio fanno passare la radiazione con lunghezza d'onda centrata a un certo valore e con un intervallo molto stretto ($< 50\text{\AA}$). I filtri sono:

- filtro blu $\lambda_F = 4861 \text{\AA}$ (corrispondente alla riga $H\beta$ dell'idrogeno);
- filtro giallo $\lambda_D = 5892 \text{\AA}$ (corrispondente al doppietto del sodio);
- filtro rosso $\lambda_C = 6563 \text{\AA}$ (corrispondente alla riga $H\alpha$ dell'idrogeno).

Definiamo aberrazione cromatica longitudinale (principale) la quantità:

$$A = f_C - f_F = f(\lambda_C) - f(\lambda_F) \quad (8.2)$$

l'errore associato sarà la somma degli errori sulle determinazioni delle due focali:

$$\Delta A = \Delta f_C + \Delta f_F \quad (8.3)$$

Definiamo aberrazione cromatica trasversa la quantità:

$$d = \frac{1}{2} \frac{f_C - f_F}{f_D} D = \frac{1}{2} \frac{A \times D}{f_D} \quad (8.4)$$

l'errore relativo associato sarà dato dalla somma degli errori relativi delle diverse quantità calcolate. Usiamo gli errori relativi perché d è calcolato come rapporto. D è la distanza tra i fori della mascherina che viene usata e vale $D = 5.00 \pm 0.01$ mm. Per calcolare le focali si usa il metodo dei punti coniugati:

$$f = \frac{pq}{p+q} \quad (8.5)$$

Praticamente i passi da seguire sono i seguenti:

1. avvitare la lente sul cavaliere portalenti con il micrometro, avendo cura di avvitarela sul lato destro. Centrare la lente regolando la vite micrometrica del supporto nella posizione di azzeramento (segnata sul cavaliere stesso), aggiungendo il semi-spessore della lente ($d_r/2$);
2. inserire la mascherina con la sorgente puntiforme;
3. avvitare al cavaliere portalenti il diaframma con i quattro fori, sul lato sinistro, per lavorare con i raggi parassiali;
4. inserire il filtro rosso;
5. posizionare la lente a distanze p_k (con $k = 1, 2, \dots, 10$) dalla sorgente. L'errore Δp_k sarà la somma degli errori di sensibilità della scala graduata agli estremi del segmento p_k . Non posizionare la lente troppo vicina alla sorgente, altrimenti la profondità di campo viene molto grande;
6. spostare lo schermo in modo da trovare il punto in cui i raggi vanno a fuoco, cioè quando i due punti diventano un punto solo. Per ottenere una misura precisa, andrà usato il micrometro per determinare la posizione in cui i raggi vanno a fuoco. A causa della profondità di campo, i raggi non vanno a fuoco in un solo punto, ma in un intervallo. Determinare q_{kj}^{\min} e q_{kj}^{\max} per 5 volte per ogni posizione della lente, sfuocando e ritrovando il fuoco ogni volta;

7. Per ogni posizione della lente, ripetere il procedimento trovando 5 q_{kj}^{\min} e q_{kj}^{\max} nel filtro rosso, giallo e blu;
8. spostare la lente nella posizione successiva e ripetere la procedura fino a ottenere 10 valori di p_k e, per ognuno di essi, i corrispondenti 5 q_{kj}^{\min} e 5 q_{kj}^{\max} per ogni filtro.

Alla fine otterremo 10 valori diversi di p_k . Per ogni valore di p_k , avremo 5 q_{kj}^{\min} e 5 q_{kj}^{\max} nei tre filtri. Calcoliamo ora la media di q_{kj}^{\min} e q_{kj}^{\max} e avremo:

$$\langle q_{kj} \rangle = \frac{q_{kj}^{\min} + q_{kj}^{\max}}{2} \quad (8.6)$$

Poi calcoliamo la media dei $\langle q_{kj} \rangle$:

$$\langle q_k \rangle = \frac{\sum_{j=1}^5 \langle q_{kj} \rangle}{5} \quad (8.7)$$

e gli scarti quadratici medi:

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^5 (\langle q_{kj} \rangle - \langle q_k \rangle)^2}{4}} \quad (8.8)$$

Poi calcoliamo l'errore massimo $\Delta q_k = 3\sigma_k$. Calcoliamo ora la focale nei tre filtri e l'errore associato, per ogni posizione della lente:

$$f_k = \frac{p_k q_k}{p_k + q_k} \quad (8.9)$$

$$\Delta f_k = \left| \frac{\partial f_k}{\partial p_k} \right| \Delta p_k + \left| \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \right| \Delta q_k \quad (8.10)$$

Per ricavare il valore della focale per ogni filtro, calcoliamo la media pesata delle focali:

$$f = \frac{\sum_{k=1}^{10} w_k f_k}{\sum_{k=1}^{10} w_k} \quad (8.11)$$

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{10} w_k}} \quad (8.12)$$

con

$$w_k = \left(\frac{1}{\sigma_k} \right)^2$$