Ottica geometrica

- Nell'ambito del Corso di Laboratorio di Fisica a.a. 2016-2017 dip. Di Fisica “Enrico Fermi” Pisa

Autore: Sergio Giudici
Email : sergio.giudici@unipi.it

Ottica geometrica

La più antica teoria dei fenomeni ottici in cui si assume la propagazione rettilinea della luce secondo raggi luminosi. Rappresenta il limite della moderna ottica ondulatoria (che pensa la luce come onda elettro-magnetica) nel caso in cui gli oggetti con cui la luce interagisce, abbiano dimensioni molto maggiori rispetto alla lunghezza d'onda della luce.

Cronologia sommaria di concetti e oggetti che tratteremo

- **Euclide,** Ottica (III sec. A.C) **Propagazione** della luce e **Visione**
- **Archimede** (II sec. A.C.) **, Riflessione** della luce e **Specchi Ustori** (Ottica e leggenda militare)
- **Tolomeo**, Ottica : (II sec. D.C) Prima indagine della **Rifrazione Astronomica**
- **Artigianato Medievale**: Costruzione di :*Lapides ad Legendum* (L**enti di Ingrandimento**) e occhiali
- **Galileo** 1609, Costruzione del T**elescopio**
- **Johannes Kepler**, 1611 (Diottrica): Teoria della **formazione delle immagini** tramite ***lenti*** *e calcolo dell' ingrandimento del telescopio*
- **Legge di Snell-Cartesio**, 1637 (La Dioptrique) **Legge della Rifrazione** in forma non approssimata → Spiegazione Analitica del fenomeno dell'arcobaleno
- **Cassini (~1680)** Primo modello analitico per la Rifrazione Astronomica
- **Newton:** scomposizione cromatica della luce (**Prisma**) , teoria dei colori, teoria corpuscolare della luce ---> Ottica Fisica

I raggi di Euclide

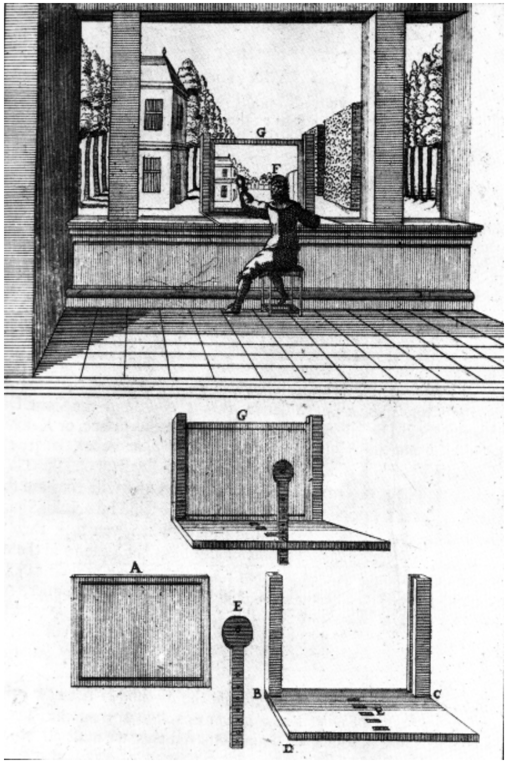
- Euclide pensava che i “raggi” uscissero dall'occhio e “tastassero” gli oggetti posti davanti. Ora si pensa il contrario: gli oggetti emettono raggi luminosi che l'occhio raccoglie e percepisce. Tuttavia dal punto di vista geometrico, l'invertibilità dei cammini ottici assicura l'equivalenza tra le due interpretazioni →
- Certi assiomi di Euclide sulla visione sono validi

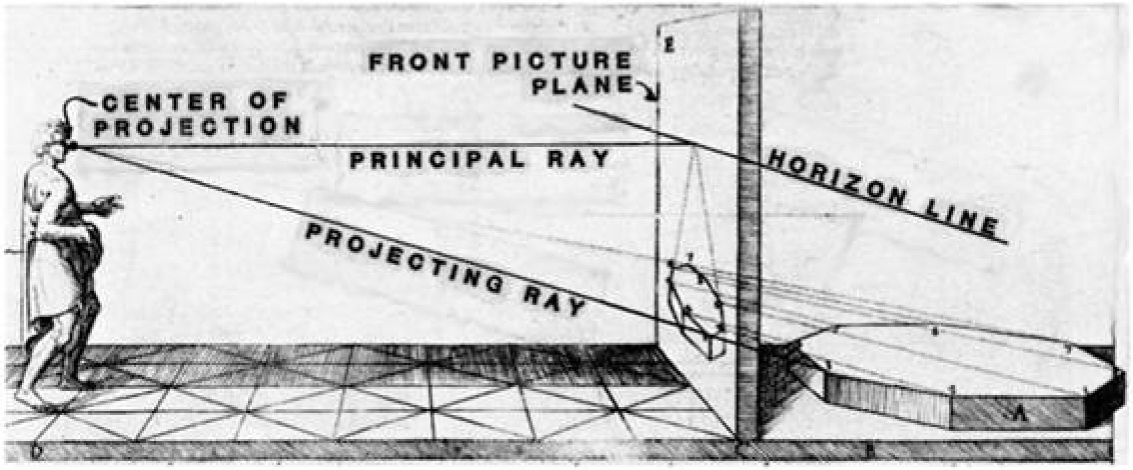
Due assiomi della Ottica Euclidea

1. I raggi emessi dall'occhio procedono per via diritta.

2. La figura compresa dai raggi visivi è un cono che ha il vertice all'occhio e la base al margine dell'oggetto. …..

Da queste Proposizioni discende la Teoria della Prospettiva e le tecniche di rappresentazione 3D





Secondo i teorici Umanisti (Leon Battista Alberti, XV sec.)
Il pittore deve ritrarre l'intersezione della "Piramide visiva" con la tela del quadro, pensata come una lastra di vetro aperta sul mondo. (Proiezione centrale nella terminologia corrente)

Due esercizi di geometria-algebra

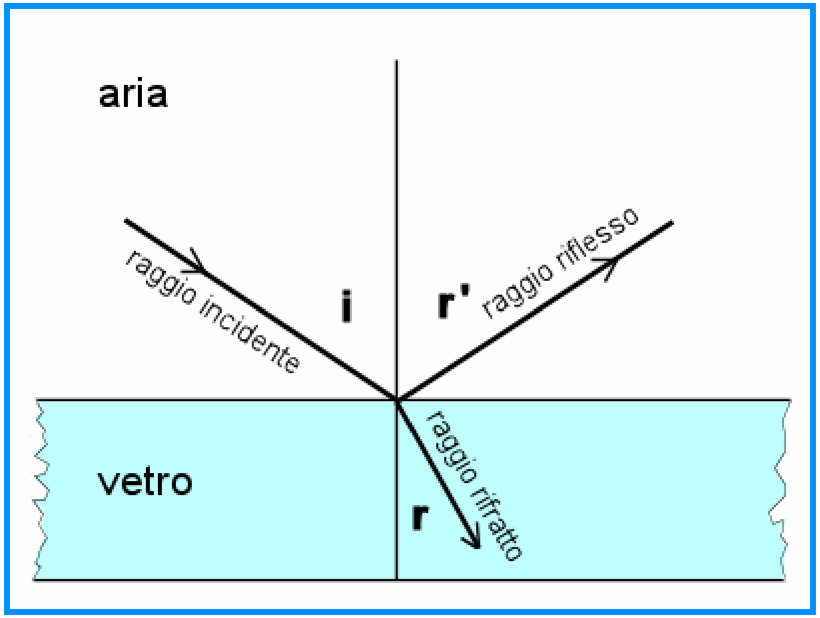
- Dimostrare che una circonferenza vista di sbieco "appare" come una ellisse
- Dimostrare che il contorno della Luna non perfettamente piena è dato da una semicirconferenza + una ellisse

Fenomenologia della Propagazione luminosa

- Nel vuoto i raggi luminosi si propagano in linea retta a velocità costante (**$c \approx 300.000$ km/s**)
- In un mezzo trasparente i raggi si propagano con velocità **c/n**
- **n = indice di rifrazione,** quantità caratteristica del mezzo attraversato
- Nel vuoto **n=1 (per definizione)** , Nell'aria vicino alla superficie terrestre **n~1.0003**, Acqua **$n \approx 1.33$** , Vetro e plexiglass **$n \approx 1.5$**
- Spesso è comodo utilizzare la quantità **$\eta = n-1$**
- **$\eta \approx 10^{-4}$ -~10^{-3}** per i gas
- **$\eta \approx 10^{-2}$ -~10^{-1}** aerogel, schiume, etc..
- **$\eta \approx 10^{-1}$ ~ 1** liquidi e solidi trasparenti
- Esistono <u>tecniche diverse</u> per misurare **n** che cambiano secondo il tipo di materiale e l'ordine di grandezza atteso per **η**

Fenomenologia della propagazione luminosa

- Quando un raggio luminoso incide sulla superficie di separazione tra due mezzi aventi indice di rifrazione diverso. si divide in un raggio riflesso e in un raggio rifratto
- **$r' = i$** Angolo di riflessione uguale all'angolo di incidenza
- **$n_1 \sin i = n_2 \sin r$** (Legge di Snell-Cartesio)



Fenomenologia dell'indice di Rifrazione

- L'indice di rifrazione riassume empiricamente a livello macroscopico ciò che avviene a livello microscopico (interazione tra fotoni e atomi … di cui non parleremo)

- Vale la pena ricordare la legge empirica di **Gladstone-Dale** che lega **n-1** alla densità ρ del materiale

$$n-1=k\rho$$

- Come conseguenza, nel caso dei gas perfetti si ha una dipendenza da pressione e temperatura

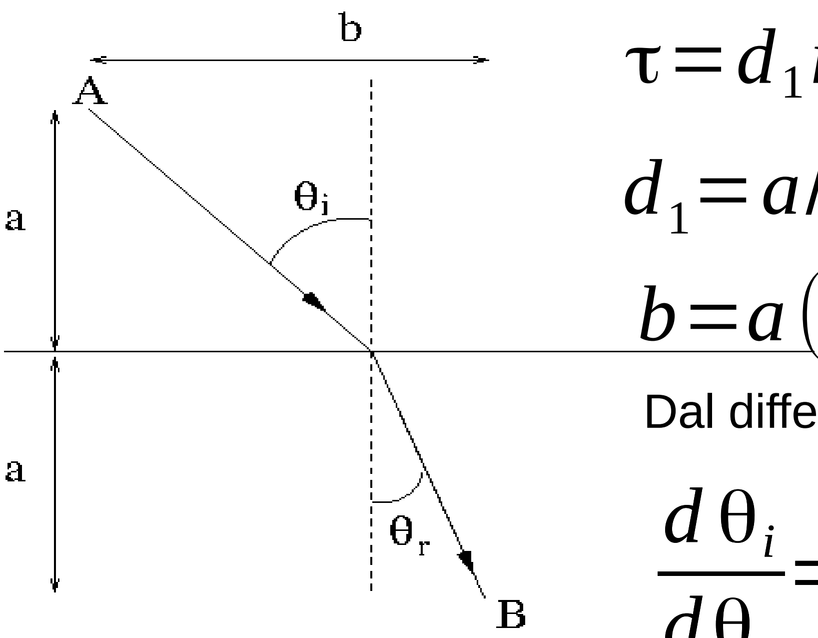
$$\frac{n-1}{n_0-1}=\frac{P}{P_0}\frac{T_0}{T}$$

- Esercizio: Quando un iceberg galleggia sul mare, solo il 10% del suo volume emerge. Stimare l'indice di rifrazione del ghiaccio**.**

Principio di Fermat

- La fenomenologia della propagazione luminosa si riassume in modo elegante dicendo che **"i raggi luminosi si propagano da A a B in modo da rendere minimo il tempo di percorrenza"** (**Principio di Fermat**)
- Come conseguenza si ha che la traiettoria per andare da A a B è la stessa che va da B a A **invertibilità dei cammini ottici**

Derivazione della legge di Snell-Cartesio dal principio di Fermat



$$\tau = d_1 n_1 / c + d_2 n_2 / c \quad (\textit{tempo di percorrenza})$$

$$d_1 = a / \cos\theta_i \quad , \quad d_2 = a / \cos\theta_r$$

$$b = a(\tan\theta_i + \tan\theta_r)$$

Dal differenziale db=0 si ricava

$$\frac{d\theta_i}{d\theta_r} = -\left(\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_r}\right)^2$$

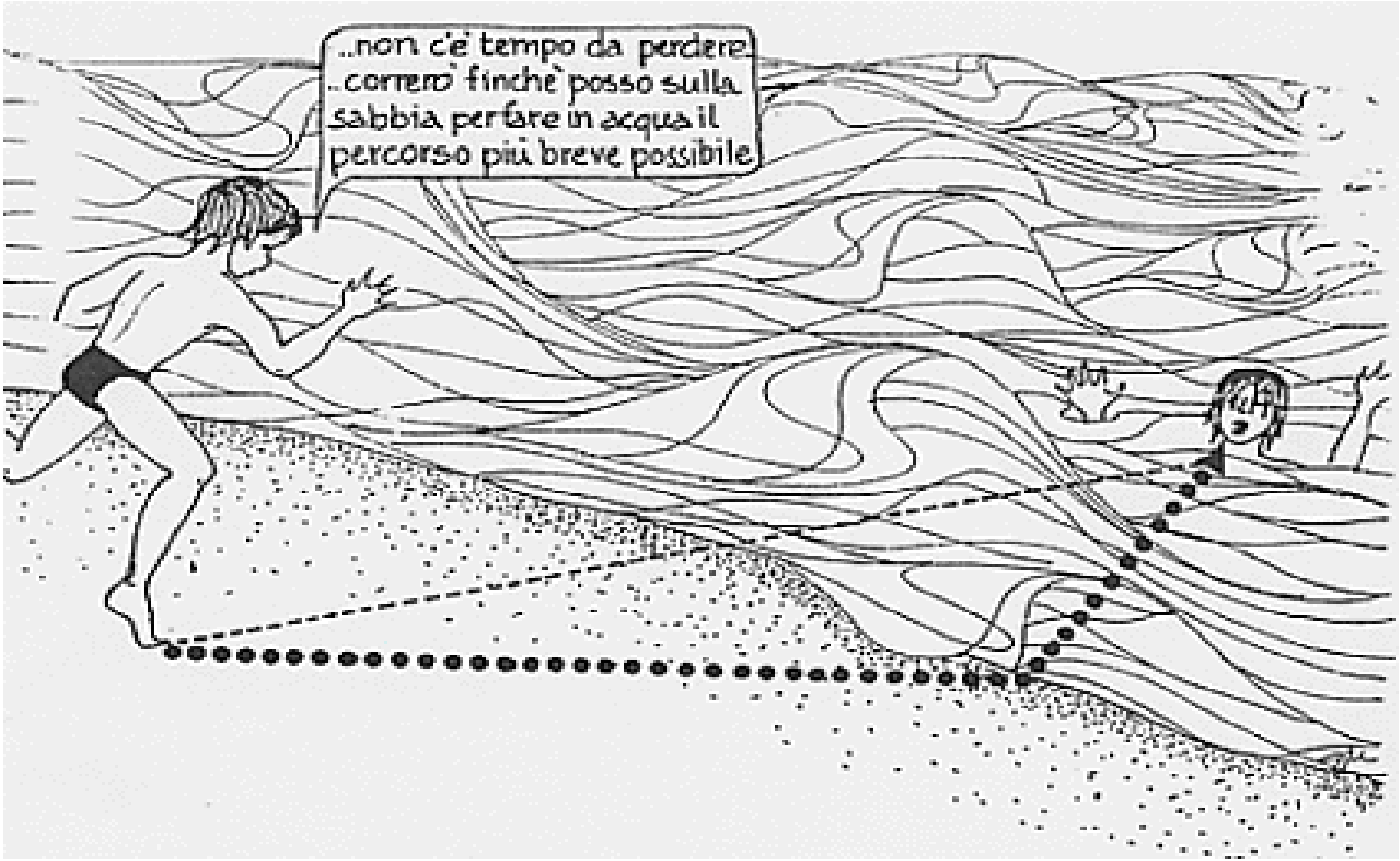
Da cui segue che

$$\frac{d\tau}{d\theta_r} = \frac{a}{b\cos^2\theta_r}(-n_1 \sin\theta_i + n_2 \sin\theta_r)$$

La derivata si annulla quando è nullo il termine tra parentesi ovvero la legge della rifrazione!

Si noti l'invarianza per scambio di 1 con 2 e di i con r (Invertibilità dei cammini ottici)

Salvataggio in mare



Esercizi e Ricerche

- Si cerchino diverse tecniche per effettuare i calcoli nel “Problema del bagnino” .

- **LEGGE DELLA RIFLESSIONE**
- Si scelgano i punti A e B nello stesso semi-piano e si deduca la legge della riflessione
- Si cerchi in rete “**riflettore catarinfrangente**”
- Cercare in rete “***Prisma riflettore a spigolo di cubo***”. Perché tale oggetto è stato sistemato sulla Luna?
- Si consideri il fatto stranoto per cui “uno specchio piano scambia la destra con la sinistra ma non l'alto con il basso” . Si cerchino in rete le varie spiegazioni proposte identificando quelle sbagliate e quella più convincente.

- **VELOCITA' DELLA LUCE**
- Cercare in rete la più antica determinazione della velocità della luce. (parole chiavi: Ole Roemer, satelliti di Giove, velocità, luce,...)

...Riflessione...

- Specchi ustori parabolici
- Specchio concavi
- Specchi convessi

Focalizzazione dei raggi

- Una conseguenza di riflessione e rifrazione è che, tramite strumenti opportuni, è possibile deflettere raggi incidenti paralleli in modo da farli convergere in un punto (Fuoco)
- I raggi luminosi trasportano energia, dunque il focheggiamento concentra notevoli quantità di calore nel Fuoco innescando talvolta la combustione. ---> Specchi Ustori
- Un caso celebre è quello degli Specchi Parabolici

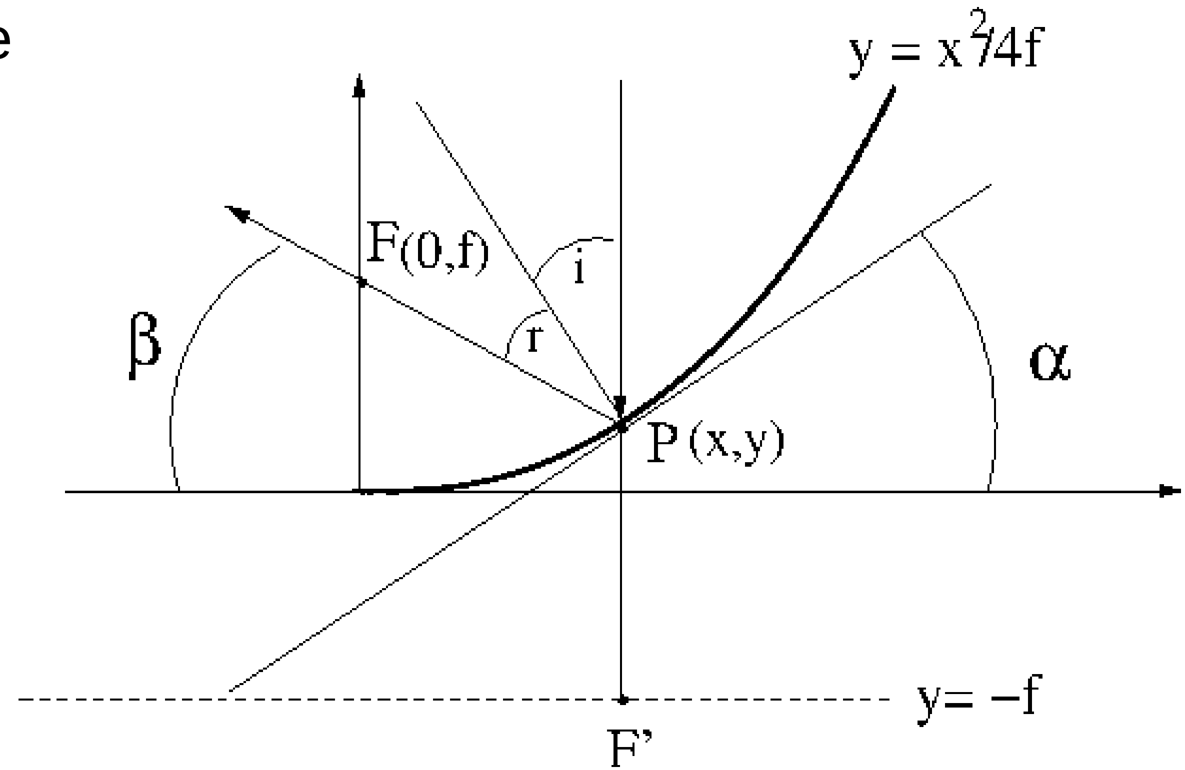
Proprietà focali (esatte) degli specchi Parabolici

La tangente nel punto P è anche bisettrice dell'angolo FPF'.
Basta infatti mostrare che

$$2(\alpha+\beta)=\beta+90°$$

Equivalente a dire

$$\tan(2\alpha)=\cot\beta$$



Quest'ultima segue dalle identità
Trigonometriche tenendo conto che

$$\tan\alpha=\frac{x}{2f} \qquad \tan\beta=\frac{f-y}{x}$$

Inoltre

$$i=\alpha$$
$$i+r+\beta=90°$$

$$i=r=\alpha$$

Legge della riflessione !

Risultato: raggi paralleli all'asse ottico sono riflessi nel fuoco

Esercizi

- Cercare il valore della costante solare (Energia solare che incide sulla superficie terrestre nella unità di tempo e superficie). Capire come la costante solare è stata misurata per la prima volta con il Pireliometro inventato da Pouillet
- Cercare il valore tipico di riflettività di uno specchio (vedere voce “reflectance” su wikipedia)
- Progettare uno specchio parabolico specificando il materiale di cui è fatto (Alluminio ? Argento ? Oro ?) e le dimensioni (sezione trasversa e distanza focale) affinché 5 litri di acqua, inizialmente a temperatura ambiente, raggiungano il punto ebollizione dopo 20' di esposizione allo specchio? Stimare il peso dello specchio

Esercizio: Discutere con argomenti quantitativi se gli Specchi Ustori di Archimede Siano da considerarsi leggenda oppure no... muoversi tra la sterminata bibliografia!

Esercizio.. traccia

$$P = \pi a^2 W$$

Potenza Solare concentrata nel fuoco (Energia/tempo)
W = 1000 Watt/m^2 (valore tipico della costante solare)

$$P = cM \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

Potenza necessaria per scaldare una massa M di acqua
c = 1 cal/gr   Calore specifico dell'acqua
1 cal = 4.18 J

$$a^2 = \frac{cM}{\pi W} \frac{\Delta T}{\Delta t} \qquad a \approx 50\, cm$$

La soluzione è una “prima” approssimazione. Non si è tenuto conto della rilfettività dello specchio. Inoltre non tutta la potenza incidente è ceduta all'acqua, una parte serve a scaldare il recipiente e l'aria circostante … (Come se ne potrebbe tenere conto ?)

Domande

- Le proprietà focali della parabola valgono non solo per i raggi luminosi ma anche per le Onde Elettromagnetiche, acustiche, etc...
- Perché la ricezione dei segnali TV talvolta si effettua con antenne paraboliche e in altri casi con antenne lineari ?

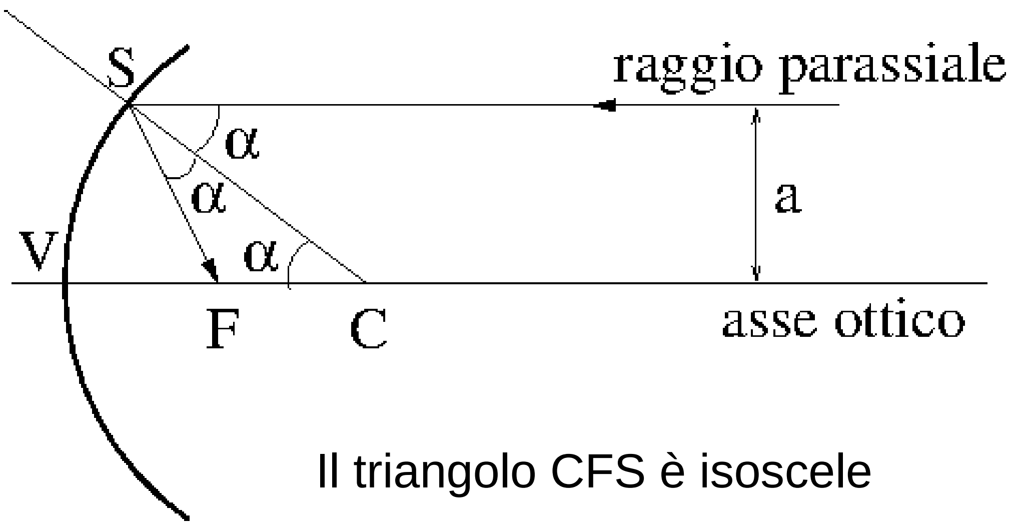
Specchio Sferico Concavo (proprietà focali approssimate)

Il fondo di un paraboloide si può approssimare con una calotta sferica,
ci sono dunque proprietà focali approssimate valide per gli specchi sferici

Ricordiamo che per angoli piccoli
valgono le approssimazioni

$$\sin x \approx \tan x \approx x$$

$$\cos x \approx 1 + O\left(x^2\right)$$



Se il raggio non è molto lontano
dall'asse ottico (a<<R)

$$\sin\alpha = \frac{a}{R} \approx \alpha$$

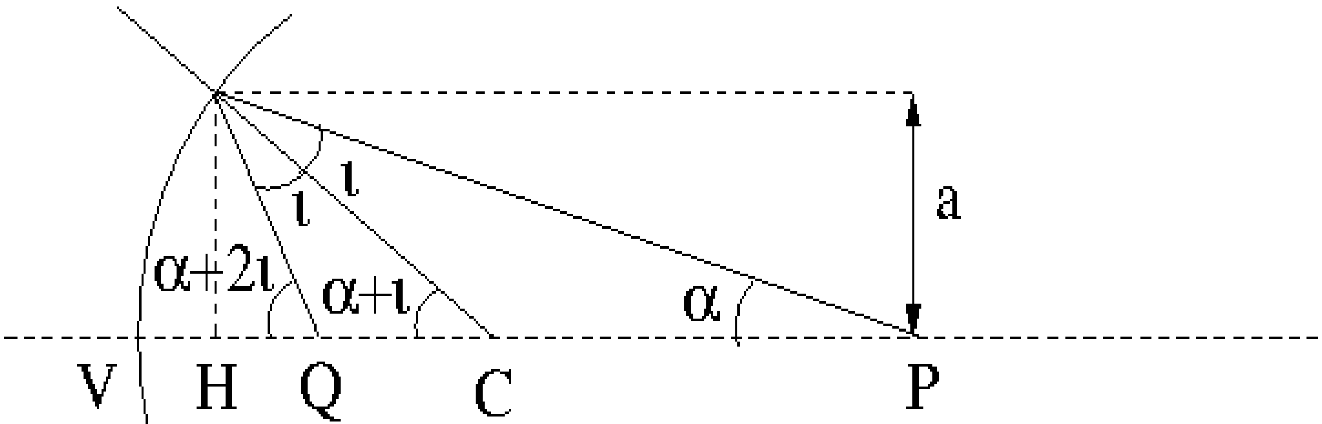
$$\cos\alpha \approx 1$$

Il triangolo CFS è isoscele

$$CF = \frac{R}{2}\frac{1}{\cos\alpha} \approx R/2$$

Risultato: Raggi parassiali vengono riflessi nel Fuoco F posto a distanza R/2 dal vertice dello specchio

Legge dello specchio concavo



Se l'angolo α è piccolo allora il segmento VH (sagitta) risulta trascurabile rispetto a PV = p, ,CV=R e QV=q Valgono pertanto le espressioni approssimate O(α^2)

$$\alpha \approx a/p$$

$$\alpha \approx a/q - 2i$$

$$\alpha \approx a/R - i$$

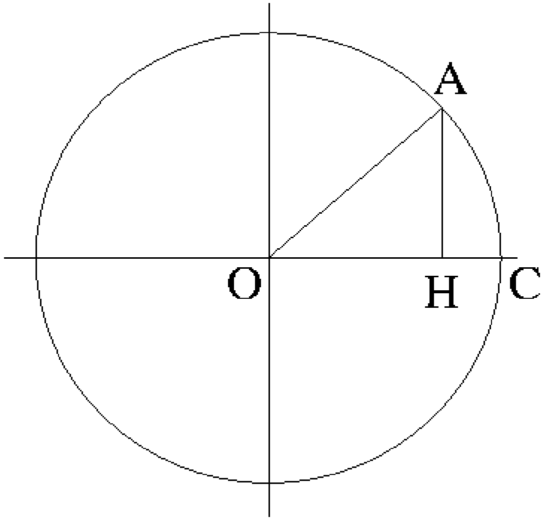
$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}}$$

$$f = R/2 \left(distanza\, focale \right)$$

Si noti che se p → ∞ allora q = f che è il risultato dimostrato precedentemente

Approssimazione di Gauss

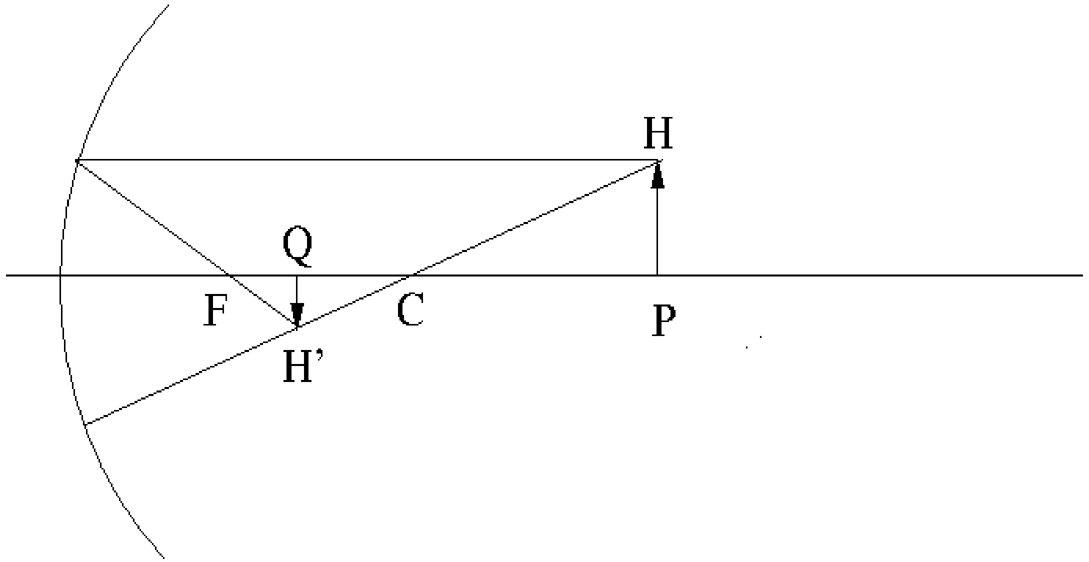
- Lo specchio sferico è il primo esempio di come ogni punto P dello spazio oggetti risulta coniugato ad un punto Q dello spazio immagini.
- La relazione tra le distanza p e q si esprime in maniera semplice quando valgono certe approssimazioni
- Approssimazioni di Gauss: I raggi luminosi uscenti da P che incontrano lo specchio formano **angoli piccoli** con l'asse ottico o sono parassiali (paralleli all'asse ottico ma a **piccola distanza dall'asse ottico rispetto al raggio**)
- In pratica nei dispositivi sferici, l'approssimazione di Gauss significa **trascurare la sagitta rispetto al raggio**.



$$OA = OC = R$$
$$AH = R \sin\alpha \approx R\alpha$$
$$OH = R\cos\alpha \approx R\left(1-\alpha^2/2\right)$$
$$HC = R\left(1-\cos\alpha\right) \approx R\alpha^2/2$$

Formazione delle immagini

Uno specchio concavo è in grado di produrre immagini
ingrandite o rimpiccilolite rispetto all'originale secondo la posizione dell'oggetto



Tra gli infiniti raggi che escono dalla punta della freccia scegliamo quello che passa per il centro C dello specchio e quello parallelo all'asse ottico trovando il punto H' Coniugato di H. IL rapporto tra le altezze h'/h è definito ingrandimento trasversale e si calcola considerando la similitudine tra i triangoli PCH e CQH'

Definiamo fattore di ingrandimento G il rapporto G = QH'/PH = h'/h

Ingrandimento Specchio Concavo

$$\frac{h'}{h}=\frac{2\mathrm{f}-q}{p-2\mathrm{f}}$$

Si può eliminare q tramite la relazione

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$

$$G=\frac{h'}{h}=\frac{f}{p-f}$$

Armarsi di pazienza e fare i calcoli...

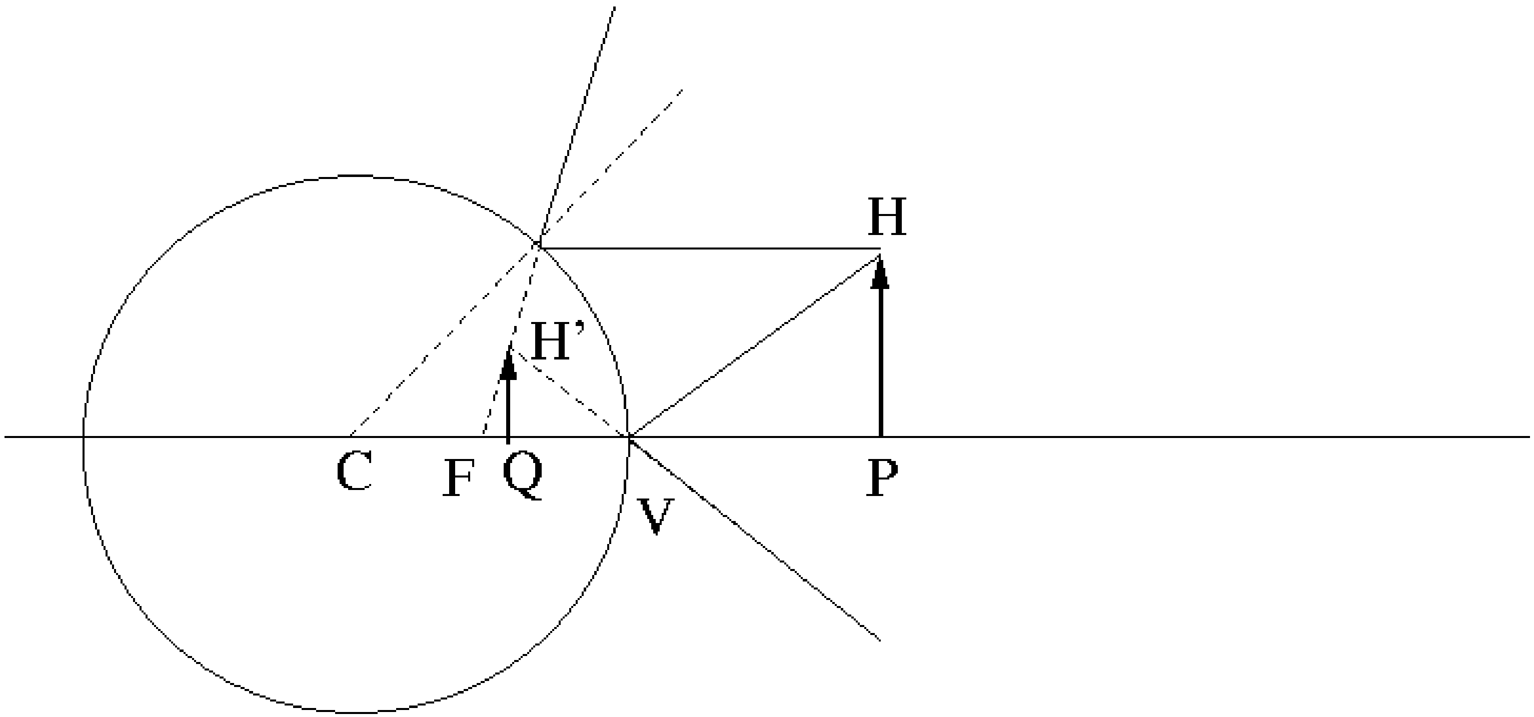
Si noti che se p>f   l'immagine è capovolta
Se p<f l'immagine NON è capovolta ed è
Sempre ingrandita ingrandimento cioè |h'/h| > 1

Esercizi: Fare il grafico di G = G(p)
Che significato ha il segno di G ?

Immagini Reali e Virtuali

- Le immagini capovolte nascono sempre dalla intersezione di raggi luminosi. Ovvero in esse si concentra l'energia luminosa trasportata dalla Luce. Sono dette **Immagini Reali** perché possono essere raccolte su uno schermo
- Le immagini dritte “sembrano” invece originare da un punto che non appartiene ai raggi luminosi. Non avviene concentrazione di energia luminosa e non si possono raccogliere su uno schermo. **Queste immagini sono dette virtuali.**
- **Uno specchio convesso produce solo immagini virtuali**

Specchio Convesso



1) Ricavare la relazione tra p e q per uno specchio convesso
2) Dimostrare che per qualunque p l'immagine è sempre virtuale
   e rimpicciolita
3) Chiedersi a cosa serve uno specchio convesso e
   cercarne applicazioni “stradali”.
4) Nei bagni degli Hotel a 4 stelle ci sono specchi concavi con R
   Abbastanza grande... perché ?
”

Legge degli specchi

La legge valida per lo specchio concavo $$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$

Vale per qualunque tipo di specchio (sferico) avendo cura di scegliere $f = + R/2$ (positivo)
Se lo specchio è concavo e $f = - R/2$ se lo specchio è convesso.
I valori di $q>0$ cadono davanti allo specchio mentre quelli $q<0$ cadono “dietro” lo specchio e si riferiscono dunque a immagini virtuali .
Lo specchio piano corrisponde al caso particolare $f \to \infty$ per cui si ha sempre $q = -p$.

Definizione di Diottria

Tipico dell'Ottica è il fatto che le sue leggi contengono quasi sempre l'inverso di lunghezze. Per questo motivo gli “ottici” Adottano come unità di misura la diottria: 1 diottria = 1 m^{-1}

Specchio Retrovisore Convesso

Le automobili circolanti nella EU adottano specchi retrovisori piani mentre altri paesi usano specchi retrovisori convessi.
Dire vantaggi e svantaggi per ciascuna opzione.
Perchè sugli specchi convessi si pone l'avvertimento
" **Objects in the mirror are closer than they may appear**" ?

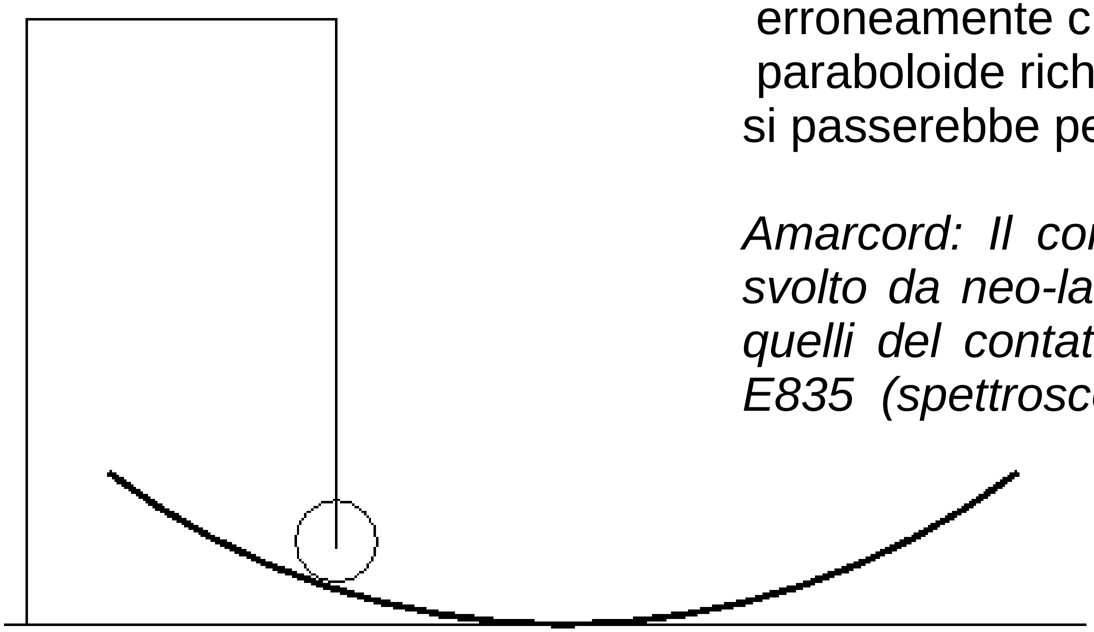
Specchio dei dentisti

Concavo, Piano o Convesso ?

La prima volta che andate dal dentista fatevelo mostrare !

Esercizio

- Avete commissionato ad una ditta la costruzione di uno specchio parabolico di equazione z = a(x^2 +y^2) . Una volta consegnato dovete verificare se lo specchio soddisfa le specifiche richieste. Allo scopo si impiega una fresa di precisione. La fresa è una macchina a controllo numerico con una punta sferica che appoggia delicatamente sullo specchio e restituisce le coordinate del centro della sfera. valutare l'errore sistematico introdotto dal raggio finito della sferetta



Se non si effettuasse la correzione si potrebbe ritenere erroneamente che lo Specchio non corrisponde al paraboloide richiesto. Lamentandosene con il fornitore si passerebbe per **Incompetenti.**

Amarcord: Il controllo è stato il primo lavoro che ho svolto da neo-laureato: gli specchi in questione erano quelli del contatore a luce Cerenkov dell'esperimento E835 (spettroscopia del Charmonio)

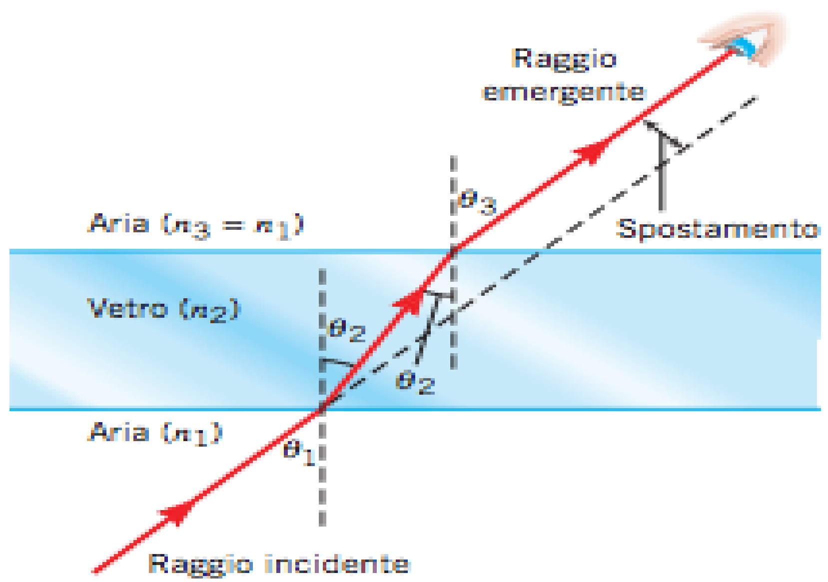
...Rifrazione..

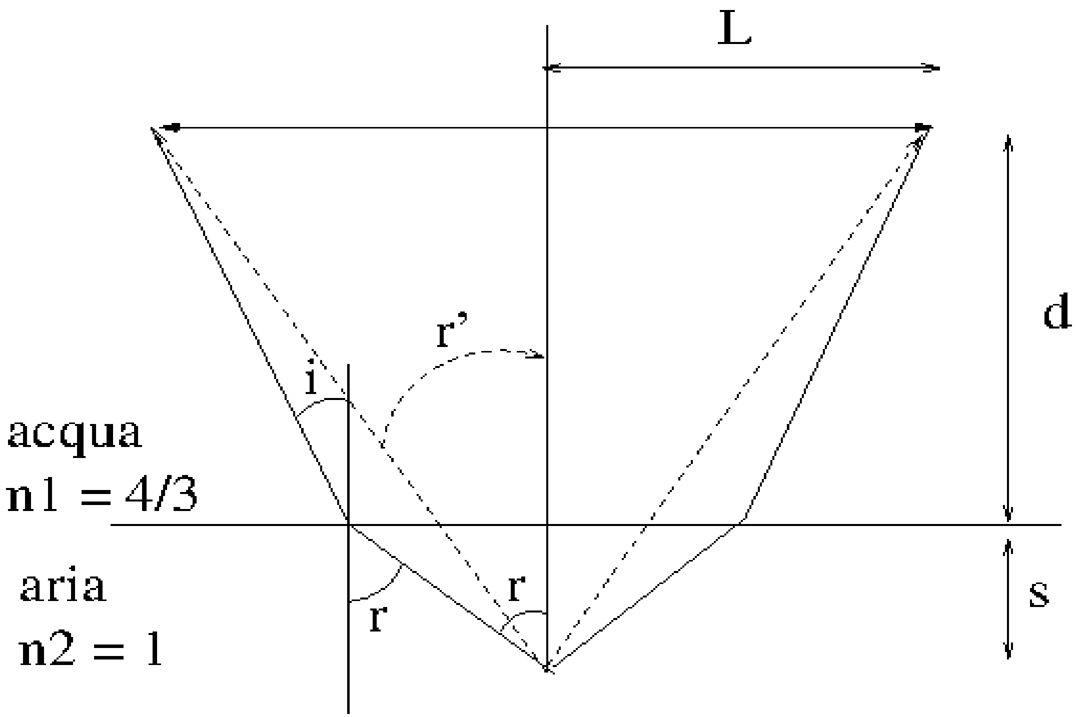
- Un ingrandimento rifrattivo
- Misura di indici di rifrazione (misura diretta, angolo limite, prisma, diottro sferico)
- Lenti sottill
- Doppietto di lenti sottili
- I telescopi

Un Ingrandimento rifrattivo

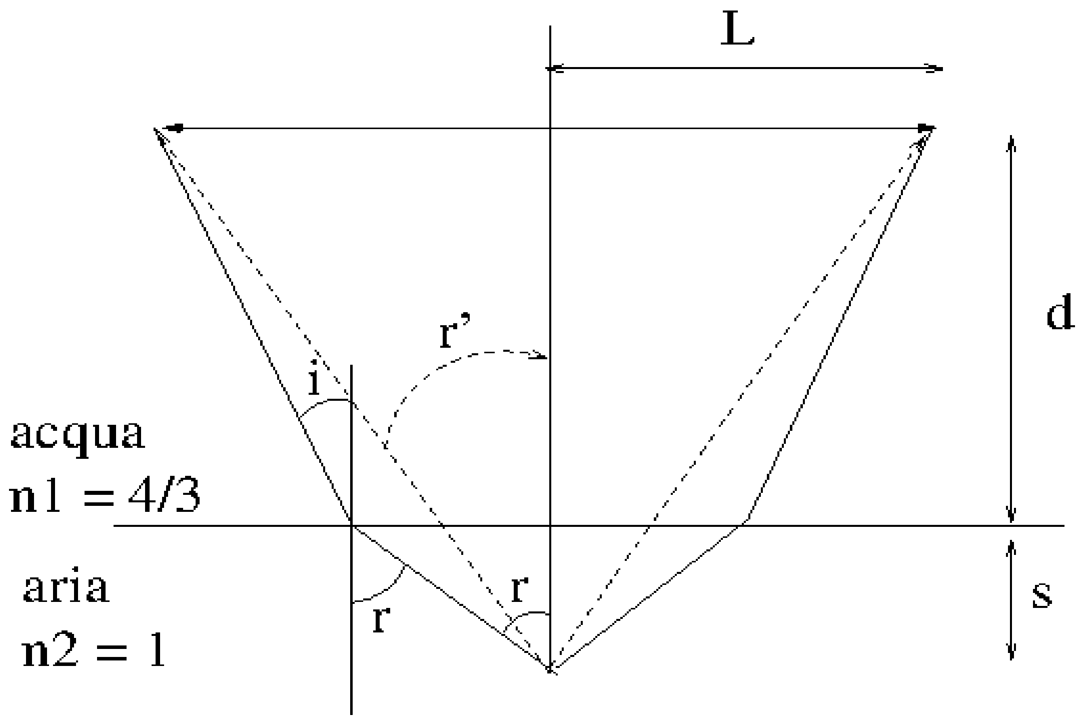
Si definisce dimensione angolare apparente l'ampiezza dell'angolo sotto il quale l'occhio vede
Un oggetto. La Luna e il Sole ad esempio hanno una dimensione apparente di circa ½ °

Gli oggetti che un sub in immersione vede attraverso la maschera appaiono sotto una dimensione
Angolare apparente sistematicamente più grande. Dovuto al fatto che l'acqua ha un indice
Maggiore dell'aria posta tra il vetro della maschera e l'occhio
L'effetto si spiega tenendo conto che il vetro della maschera causa solo un piccolo
“spostamento” laterale, trascurabile se il vetro e poco spesso rispetto alla distanza degli oggetti





Un ingrandimento rifrattivo



Nell'approssimazione di piccoli angoli L << d (Oggetti non troppo vicini)

$$n\,i = r \left(legge\ della\ rifrazione \right)$$

$$d \times i + s \times r = L$$

$$r' = L/d$$

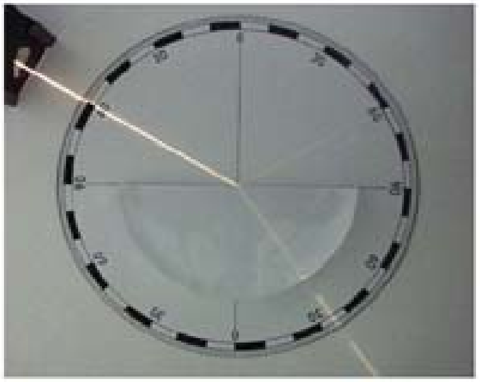
$$r' = \left(s/d + 1/n \right) r$$

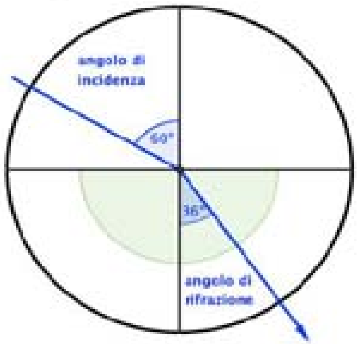
$$r/r' \approx n \left(essendo\ s \ll d \right)$$

Gli oggetti appaiono ingranditi di un fattore 1.3

L'indice di rifrazione del Plexiglass

- In laboratorio si utilizza un semi-cilindro di plexiglas montato su (una specie di) goniometro, sul quale incide un fascetto luminoso collimato. Esplorando varie orientazioni si trova la relazione (lineare) tra le variabili $y = R\sin\theta_i$ $x = R\sin\theta_r$

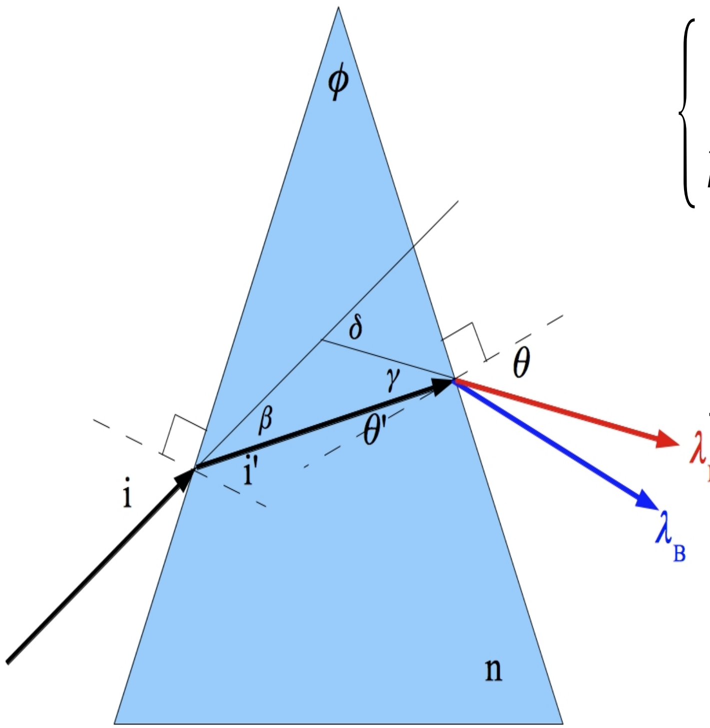




Angolo di incidenza i	Angolo di rifrazione r	$\frac{i}{r}$
10°	7°	1,43
20°	14°	1,43
30°	20°	1,58
...	...	...
60°	36°	1,67
70°	39°	1,79
80°	41°	1,95
85°	42°	2,02

La pendenza della retta è l'indice di Rifrazione del materiale.

Misura di n con un prisma



$$\begin{cases} \sin i = n \sin i' \\ n \sin \theta' = \sin \theta \end{cases}$$

Legge di Snell-Cartesio

$$\begin{cases} \beta = i - i' \\ \gamma = \theta - \theta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \beta + \gamma = i + \theta - \varphi \\ \varphi = i' + \theta' \end{cases}$$

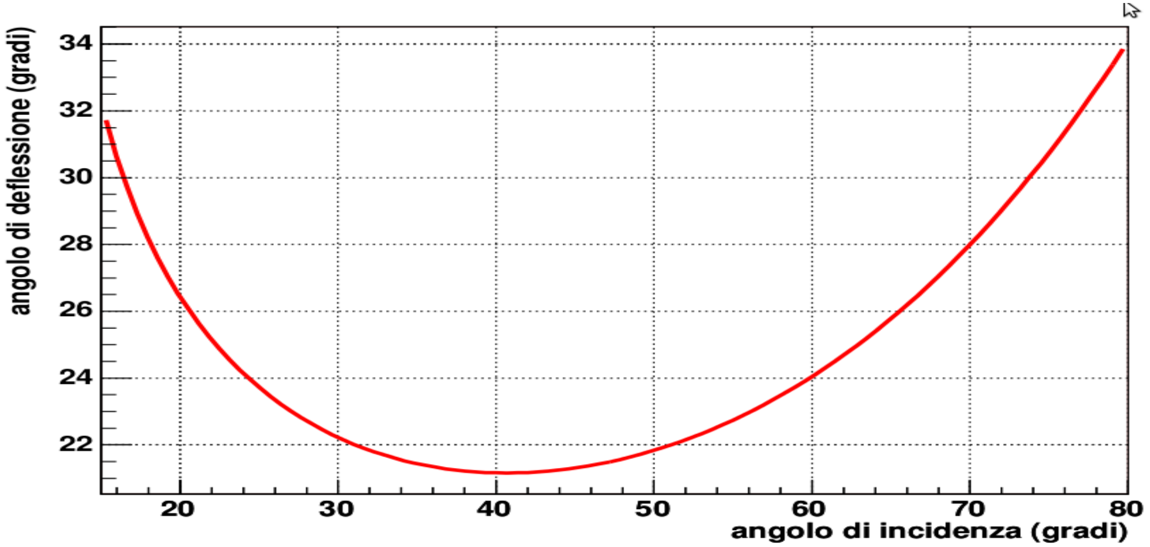
$$\sin \theta = n \sin \theta' = n \sin(\varphi - i') = n \sin \varphi \cos i' - n \cos \varphi \sin i'$$

$$\sin \theta = \sin \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \varphi \sin i \Rightarrow$$

La deflessione dipende dall''angolo di incidenza e dall'angolo al vertice del prisma

$$\delta = i - \varphi + asin\left(\sin \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \varphi \sin i\right)$$

Prisma: Deflessione minima



Deflessione in funzione dell'angolo di incidenza per n = 1.31 (ghiaccio) e $\Phi = 60°$

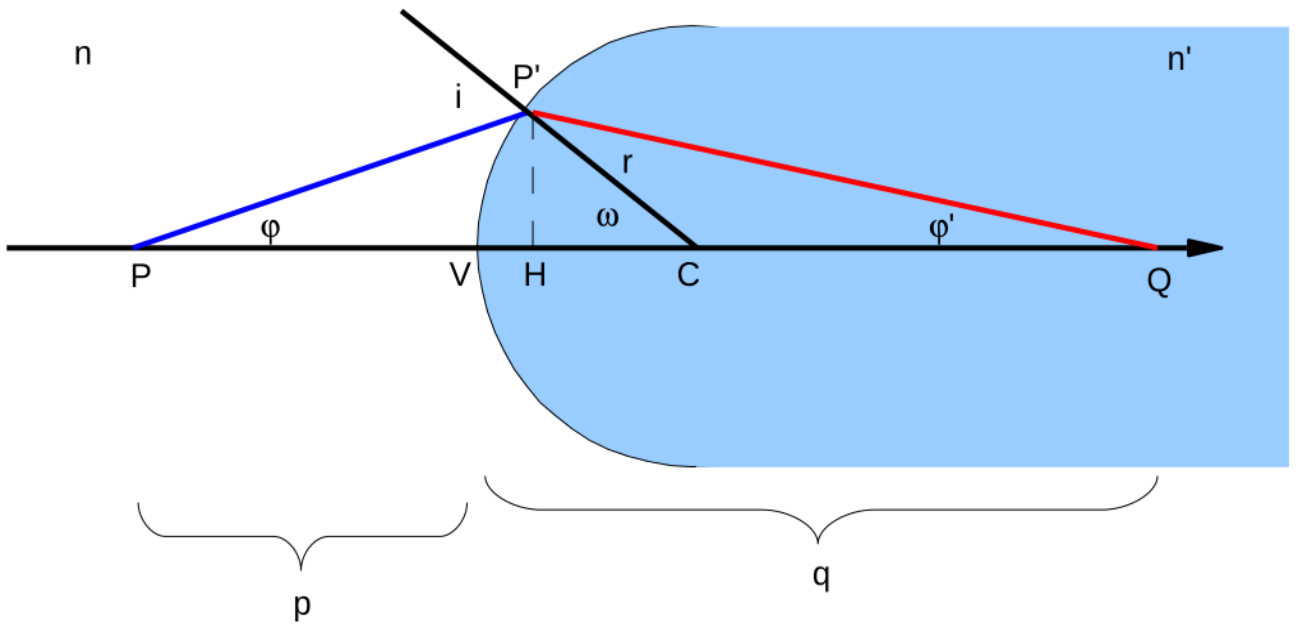
Esercizio: Dimostrare che la deflessione minima si ha quando il raggio rifratto si propaga Parallelo alla base del prisma (quando $i = \theta$ e $i' = \theta'$). L'angolo di deflessione minima soddisfa l'identità

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_m + \varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Si può ricavare l'indice di rifrazione misurando La zona di minima deflessione.

Misura dell'indice di rifrazione dell'acqua: il diottro sferico

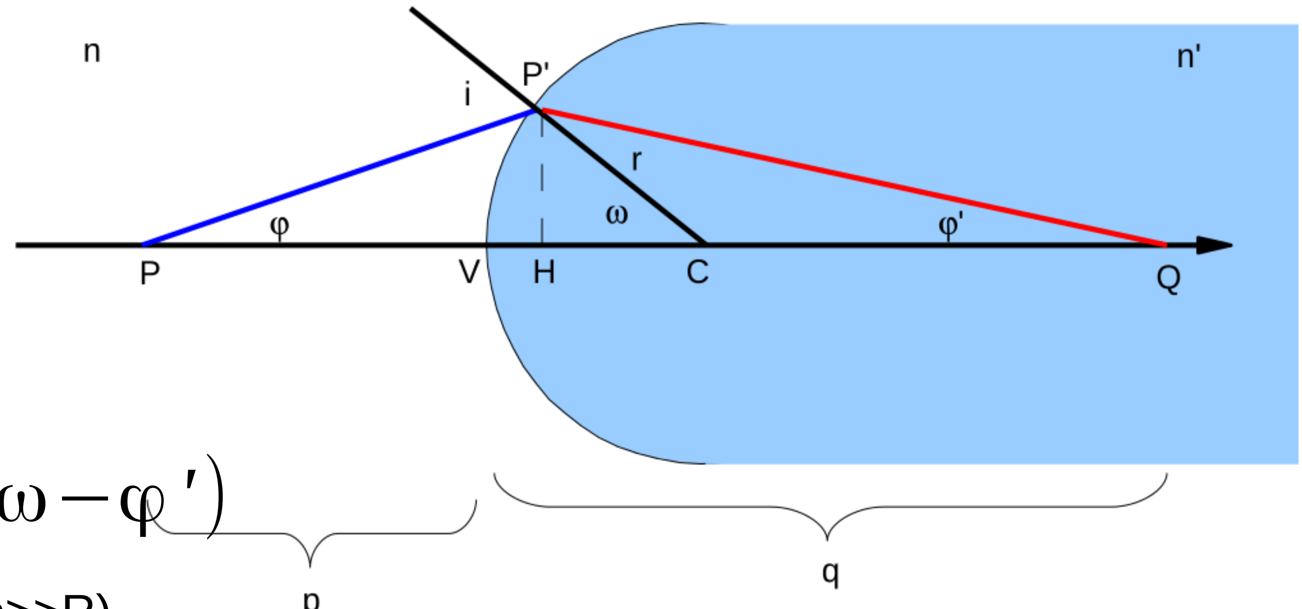
- Una superficie sferica che separa due mezzi con indice di rifrazione diverso ha proprietà focali che si possono utilizzare per misurare n.



Vogliamo mostrare che il diottro in figura focalizza i raggi uscenti da O (immerso nel mezzo
Con indice n') nel punto P (nel mezzo con indice n)

Diottro

$$\begin{cases} n\sin i = n'\sin r \\ i = \varphi + \omega \\ r = \omega - \varphi' \end{cases}$$



Sostituendo abbiamo

$$n\sin(\varphi+\omega) = n'\sin(\omega-\varphi')$$

Se tutti gli angoli sono piccoli (p>>R)

$$n\varphi + n'\varphi' = (n'-n)\omega$$

Esprimendo gli angoli secondo le lunghezze dei segmenti

$$\boxed{\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n'-n}{R}}$$

(Equazione di Gauss del diottro sferico)

Esercizi:
studiare la funzione q= q(p) e attribuire
Significato ai valori q<0

Invertire la concavità del diottro e mostrare
Che formalmente equivale a cambiare
Il segno del raggio di curvatura R-> -R

Diottro

- Nel caso in cui il diottro separi acqua (n' ~ 4/3) da aria (n~1), si pone in q una lampadina e su uno schermo si raccoglie l'immagine focalizzata in p. Misurando vari p e q si determina sperimentalmente la retta

$$y = -n' x + (n' - 1)/R$$

Ottenuta ponendo

$$y = 1/p$$

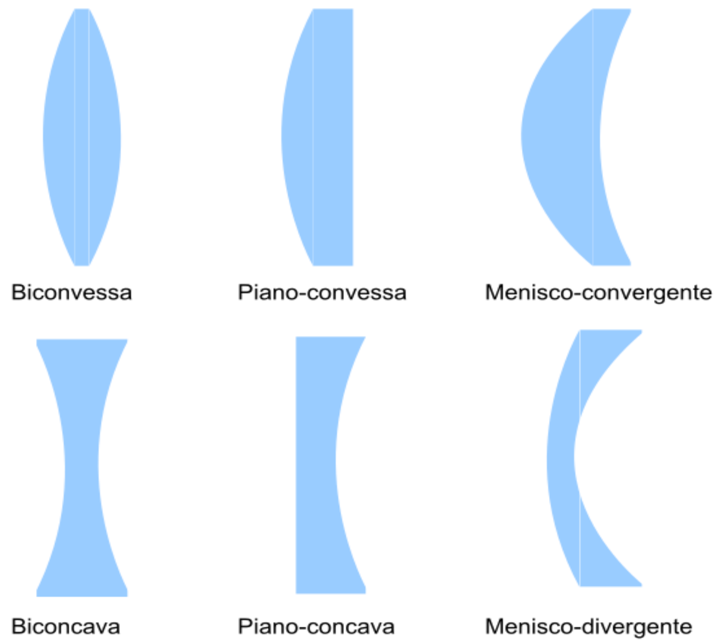
$$x = 1/q$$

$$\frac{1}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - 1}{R}$$

La misura diretta di “Termine noto” e “pendenza” permettono di determinare n' e il raggio di curvatura

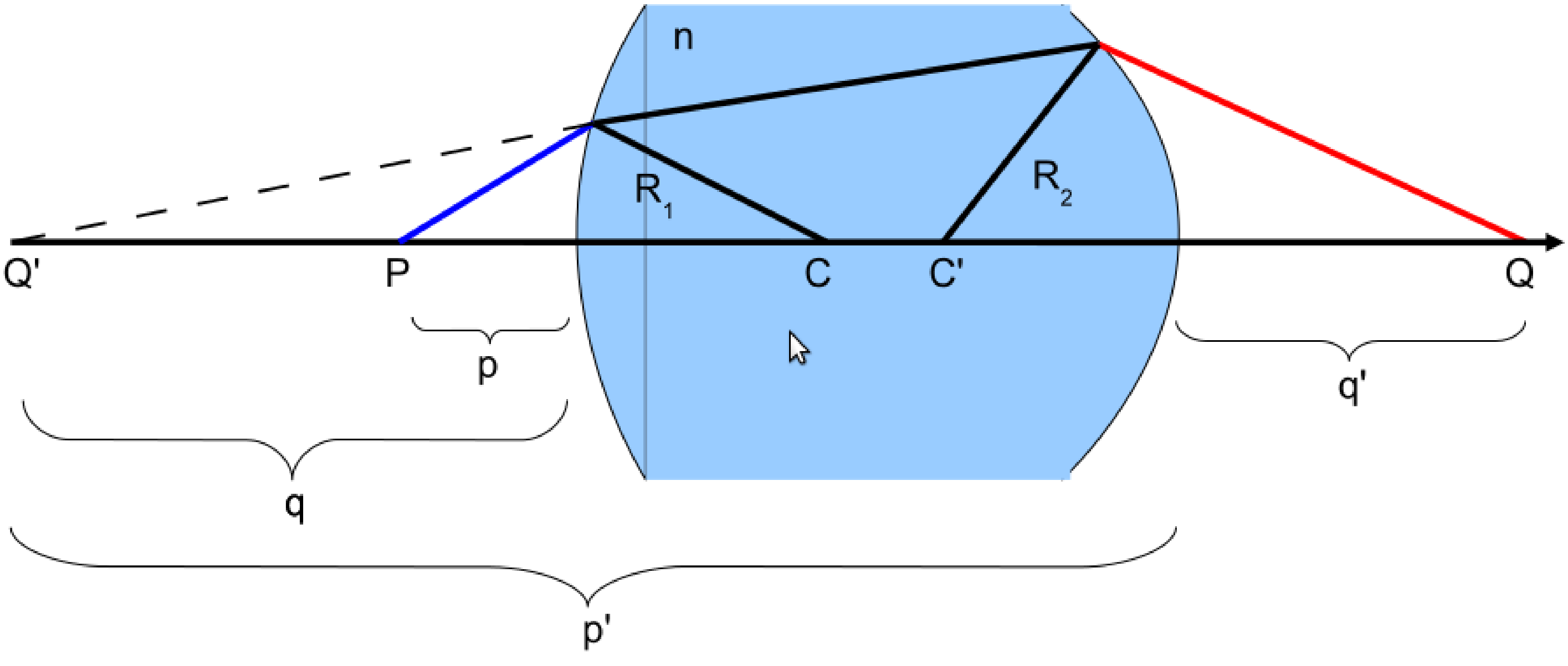
Lente sottile

- Indichiamo con il termine lente un sistema ottico costituito da materiale trasparente e omogeneo limitato da due superfici che possono essere entrambe sferiche oppure una piana ed una sferica (ma mai entrambe piane!), le quali separano un mezzo di indice di rifrazione n (il vetro) da un mezzo di indice di rifrazione n' (di solito aria)
- In pratica una lente è la combinazione di due diottri sferici e ha proprietà focali riassunte nella cosiddetta "**Formula del costruttore di lenti**"



Formula del costruttore di lenti

Consideriamo due diottri concavi addossati, che creano una lente (d è lo spessore della lente)
 il “vetro” ha indice di rifrazione n. I due diottri hanno raggi di curvatura R1 e R2 diversi.
Poniamo una sorgente luminosa in P e consideriamo un raggio che da P si propaga verso
il primo diottro. Per effetto della rifrazione andrà a divergere e Dovremmo considerarne il
prolungamento all'indietro fino al punto Q'. Il raggio prosegue all'interno dei due diottri
ed è nuovamente rifratto,intersecando l'asse ottico nel punto Q



Formula del costruttore di lenti

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} - \dfrac{n}{q} = \dfrac{n-1}{R_1} \\[2ex] \dfrac{n}{p'} + \dfrac{1}{q'} = \dfrac{1-n}{R_2} \end{cases}$$

Equazione per il Primo diottro
<u>**FARE ATTENZIONE AI SEGNI**</u>
<u>Perchè p e q hanno segno discorde?</u>

Equazione per il secondo diottro
FARE ATTENZIONE AI SEGNI
Perchè p' e q' hanno segno concorde ?
Perchè R1 e R2 hanno segno discorde ?

$$p' = q + d$$

Sommando a membro a membro e trascurando d (d<<q LENTE SOTTILE!!!!)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Il limite p → infinito mostra che raggi paralleli sono focalizzati nel punto f con

$$\boxed{\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

Lunghezza focale

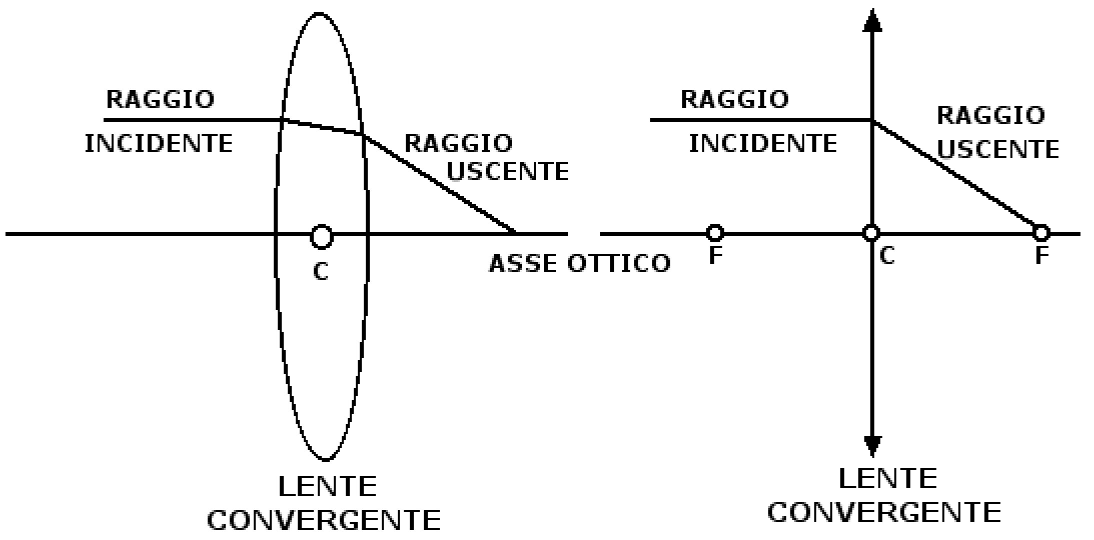
- Una lente (sottile) è otticamente caratterizzata dalla sua lunghezza focale. La lente è simmetrica: lavora allo stesso modo da sinistra a destra o viceversa (invarianza per scambio di p e q')
- **Le lenti con $f>0$ sono convergenti**
- **Le lenti con $f<0$ sono divergenti**

Lenti convergenti

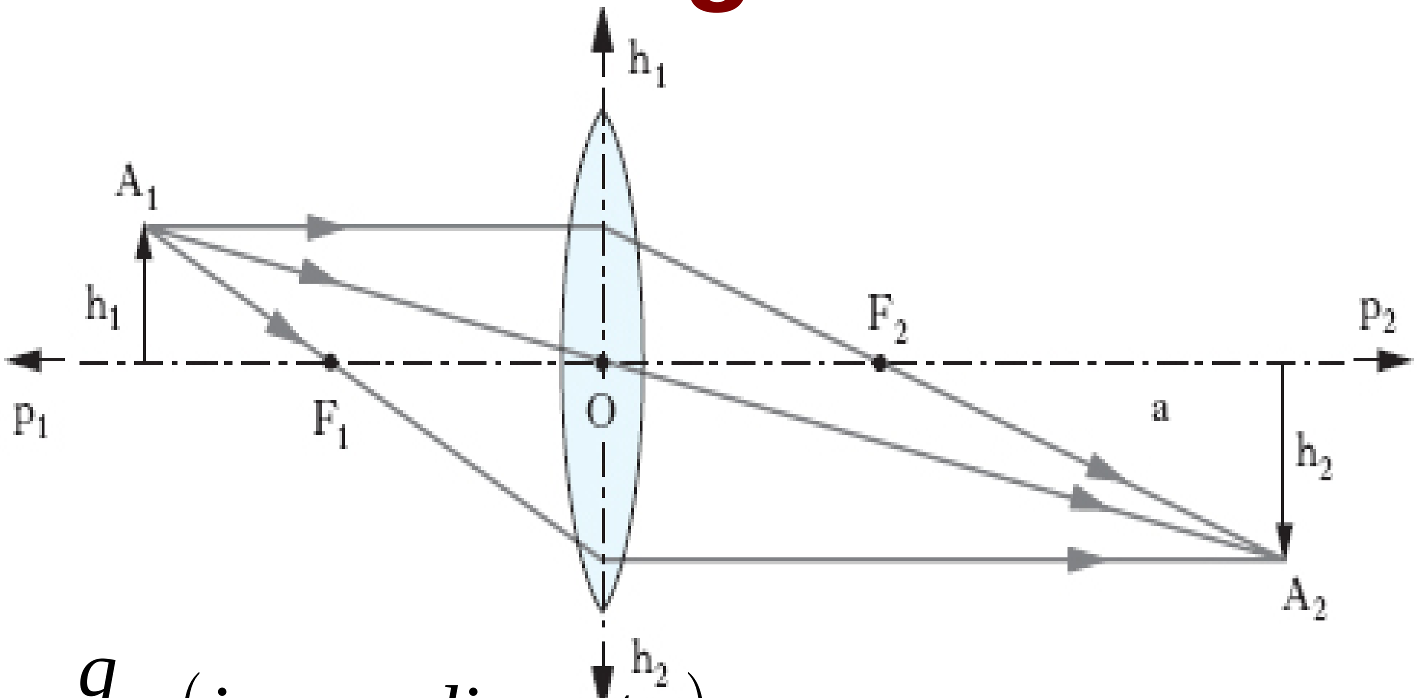
- Si usano per concentrare raggi paralleli nel fuoco oppure - mettendo la sorgente nel fuoco - per creare un fascio focalizzato.

Lenti convergenti

- Si usano per concentrare raggi paralleli nel fuoco oppure - mettendo la sorgente nel fuoco - per creare un fascio focalizzato.



Lenti convergenti : Formazione Immagine

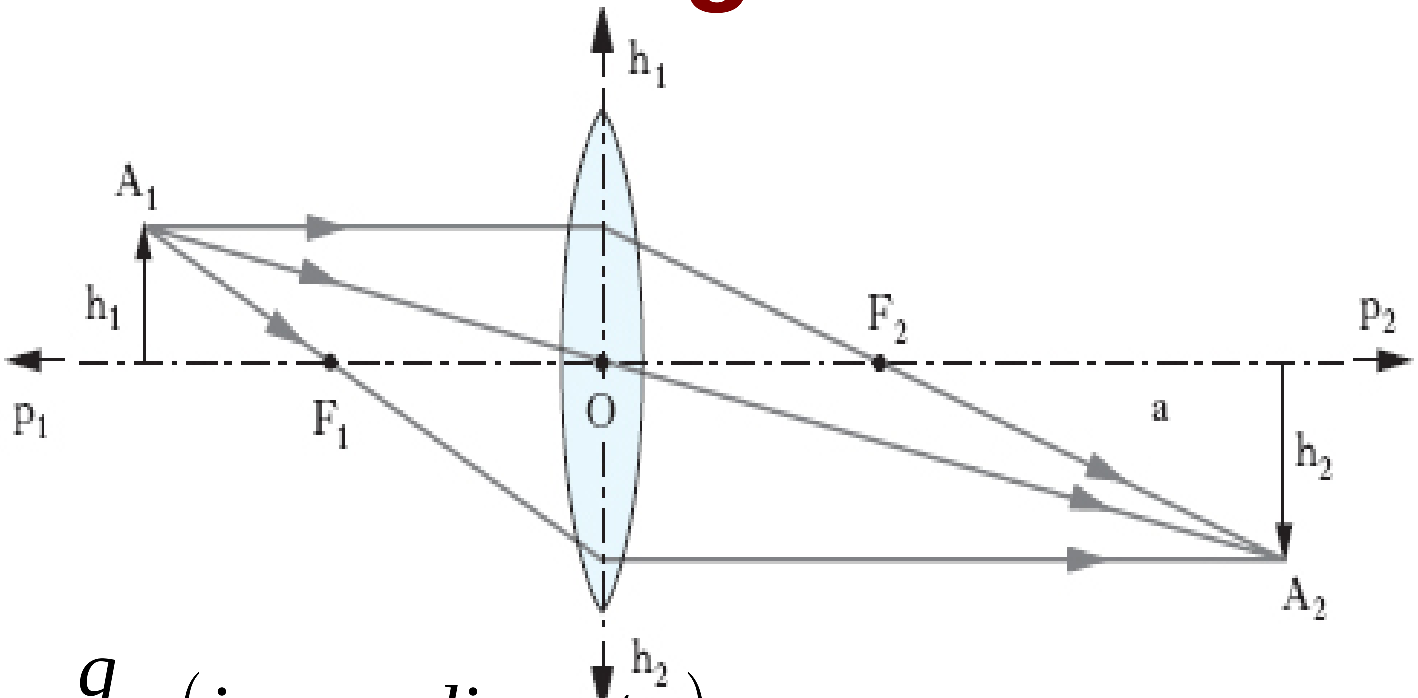


$$G = \frac{h_2}{h_1} = \frac{q}{p} \quad (ingrandimento)$$

Eliminando q si ottiene $$G = \frac{f}{p-f}$$

Notare la somiglianza con l'ingrandimento dello specchio

Lenti convergenti : Formazione Immagine



$$G=\frac{h_2}{h_1}=\frac{q}{p}\quad(ingrandimento)$$

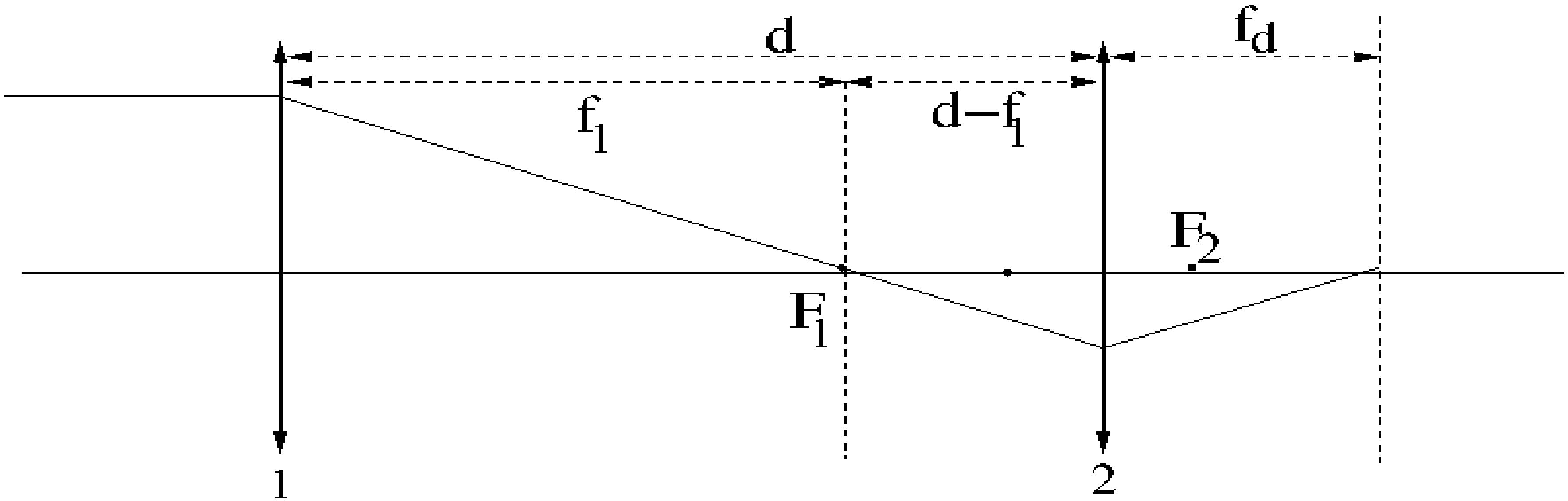
Eliminando q si ottiene $$G=\frac{f}{p-f}$$

Notare la somiglianza con l'ingrandimento dello specchio

Esercizi e domande

- Che significato ha il segno di G ?
- Per quali valori di p si ha $|G| > 1$?
- La formula vale anche per lunghezze focali negative ?
- Dimostrare che una lente divergente <u>non può</u> essere usata come lente di ingrandimento
- Dimostrare che una lente divergente <u>non può</u> creare immagini reali. (Chiedersi dunque a cosa serve una lente divergente e cercare una risposta)
- Un costruttore ha fabbricato una lente convergente di vetro i cui raggi di curvatura non sono costanti ma “fluttuano” di +- 1% rispetto ai valori medi $R1 = 10$ cm e $R2 = 20$ cm. Il fuoco non è più un punto ma uno “spot” luminoso. Stimare le dimensioni dello Spot.

Doppietto di lenti sottili



Raggi paralleli all'asse ottico provenienti da sinistra focalizzano nel **fuoco destro**

$$\frac{1}{d-f_1}+\frac{1}{f_d}=\frac{1}{f_2}$$

Allo stesso modo quelli provenienti da destra focalizzano nel **fuoco sinistro**

$$\frac{1}{d-f_2}+\frac{1}{f_s}=\frac{1}{f_1}$$

Doppietto di lenti sottili

Ci si chiede quale focale deve avere una lente sottile posta nel mezzo del doppietto affinché realizzi un sistema ottico equivalente, cioè con la stessa coppia di fuochi sinistro e destro.

La lente equivalente avrà lunghezza focale tale che $f_s + f_d + d = 2\mathrm{f}_e$

Si risolve quindi il sistema di tre equazioni

$$\begin{cases} f_s + f_d + d = 2\mathrm{f}_e \\ \dfrac{1}{d - f_1} + \dfrac{1}{f_d} = \dfrac{1}{f_2} \\ \dfrac{1}{d - f_2} + \dfrac{1}{f_s} = \dfrac{1}{f_1} \end{cases}$$

$$f_e = \frac{f_1 f_2 - d^2/2}{f_1 + f_2 - d}$$

Se d << f1,f2 trascuriamo d^2

$$\boxed{\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}}$$

Doppietto di lenti sottili

Ci si chiede quale focale deve avere una lente sottile posta nel mezzo del doppietto affinché realizzi un sistema ottico equivalente, cioè con la stessa coppia di fuochi sinistro e destro.

La lente equivalente avrà lunghezza focale tale che $f_s + f_d + d = 2\mathrm{f}_e$

Si risolve quindi il sistema di tre equazioni

$$\begin{cases} f_s + f_d + d = 2\mathrm{f}_e \\ \dfrac{1}{d - f_1} + \dfrac{1}{f_d} = \dfrac{1}{f_2} \\ \dfrac{1}{d - f_2} + \dfrac{1}{f_s} = \dfrac{1}{f_1} \end{cases} \Rightarrow \quad f_e = \frac{f_1 f_2 - d^2/2}{f_1 + f_2 - d}$$

Se d << f1,f2 trascuriamo d^2

$$\boxed{\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}}$$

Doppietto di lenti sottili addossate

- La formula del doppietto di lenti vale qualunque sia il segno delle focali f1 e f2
- Se d<<f1,f2 e d è trascurabile cioè se le lenti sono “addossate” la formula si riduce alla somma degli inversi

$$\frac{1}{f_e}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

Dimostrare che un doppietto di lenti convergenti addossate è convergente
Discutere le proprietà focali di un doppietto addossato misto (f1>0 e f2<0))

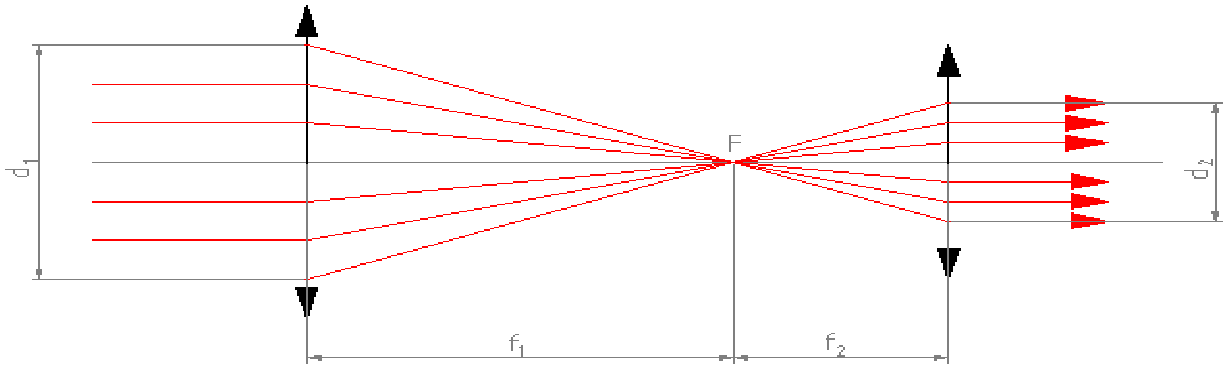
$$f_e=\frac{f_1 f_2}{f_1+f_2} \qquad |f_2|>f_1>0 \quad \Longrightarrow \quad f_e>f_1>0$$

Si può aumentare (o diminuire) la lunghezza focale di una lente convergente addossando una opportuna seconda lente divergente.

Sistemi afocali

- Un doppietto di lenti (sottili) può essere arrangiato in modo da realizzare un dispositivi ottico afocale
- Si chiama afocale un sistema avente fuoco all'infinito...ovvero che trasforma un raggio parallelo all'asse ottico in un altro raggio parallelo all'asse ottico

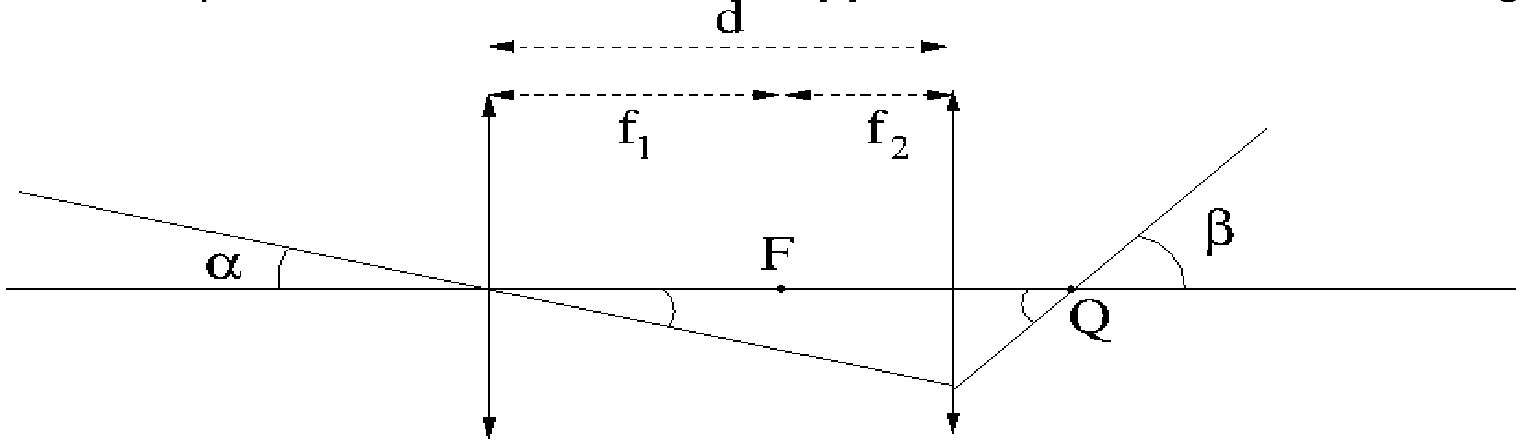
$$\frac{1}{f_e}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1 f_2} \qquad d=f_1+f_2 \Rightarrow f_e=\infty$$



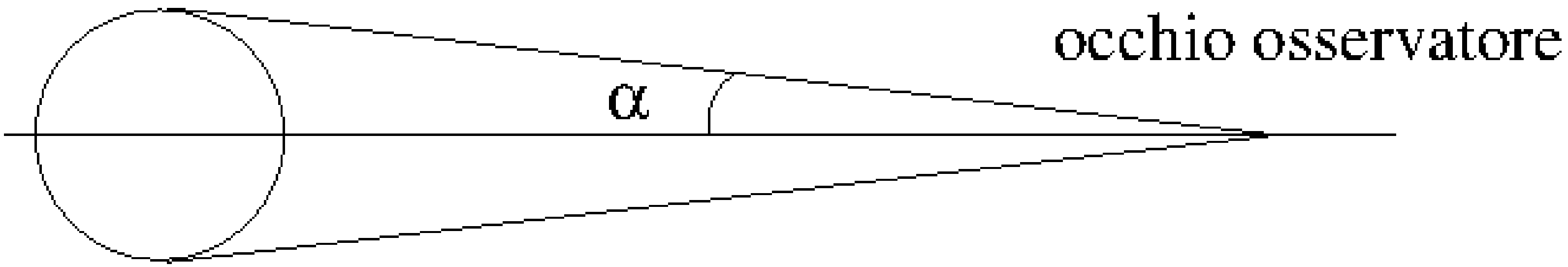
Il fuoco di una lente è posizionato nel fuoco dell'altra
Esercizio: creare un sistema afocale con un doppietto misto

Canocchiale kepleriano

Il canocchiale kepleriano è costituito da un **doppietto afocale di lenti convergenti.**

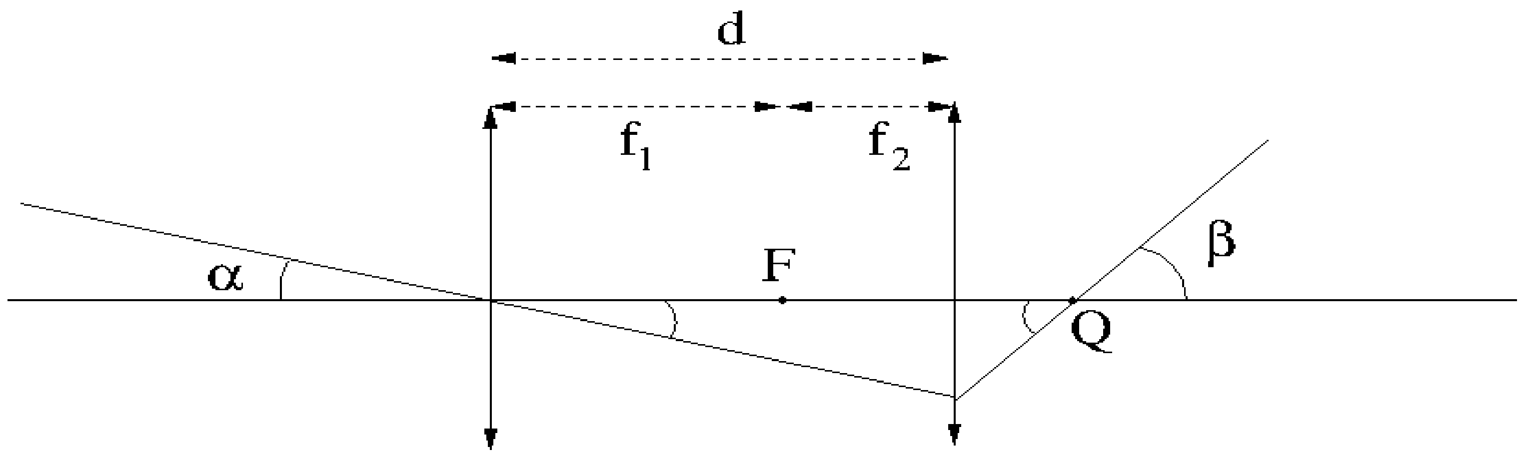


L'ingrandimento è dato dal fatto che l'angolo apparente di un oggetto celeste ad esempio la Luna, risulta ingrandito come se l'oggetto fosse più vicino all'osservatore



Nel caso della Luna vista a occhio nudo l'angolo vale circa ¼ ° ed è l'angolo formato dai raggi provenienti dal bordo lunare rispetto all'asse ottico del sistema.
Se guardiamo a occhio nudo l'asse ottico è quello del nostro occhio...
Se guardiamo la Luna attraverso un sistema afocale, al fine di valutare l'ingrandimento, occorre considerare l'angolo che lo stesso raggio uscente forma con l'asse ottico del sistema

Canocchiale Kepleriano Ingrandimento



Consideriamo il raggio proveniente dal bordo lunare e passante per il centro della prima Lente. Esso forma l'angolo a rispetto all'asse ottico e viene rifratto dalla seconda lente nel punto Q dell'asse ottico. L'angolo b e quindi la dimensione angolare (percepita) da chi guarda la luna attraverso il dispositivo ottico!

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f_2}$$

$$d=f_1+f_2$$

$$d\tan\alpha=q\tan\beta$$

$$\tan\beta=\frac{f_2}{f_1}\tan\alpha$$

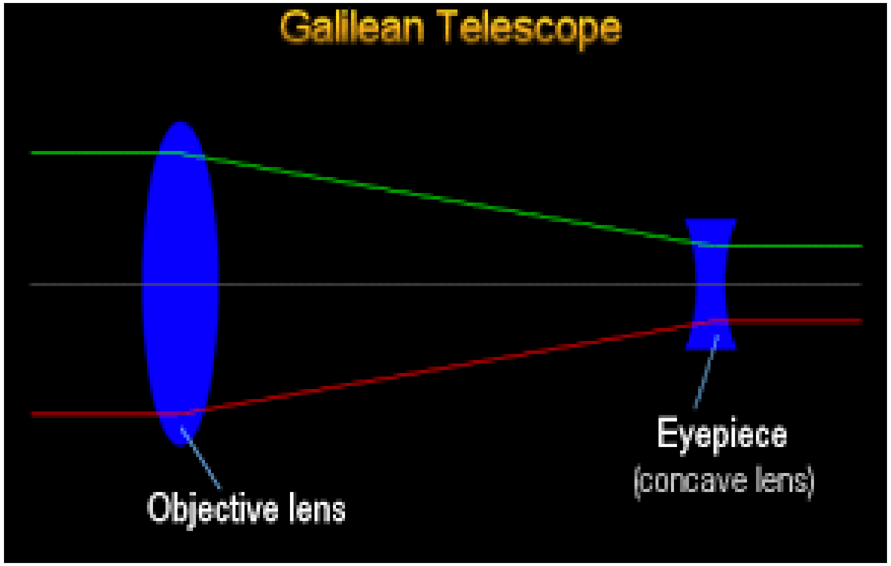
$$\beta>\alpha \quad se \quad f_2>f_1$$

Canocchiale Galileiano (esercizio)

- Il canocchiale galileiano è un dispositivo afocale ottenuto combinando una lente divergente e una convergente
- **Esercizio: progettare un canocchiale galileiano che abbia un fattore di ingrandimento (angolare) pari a 10**

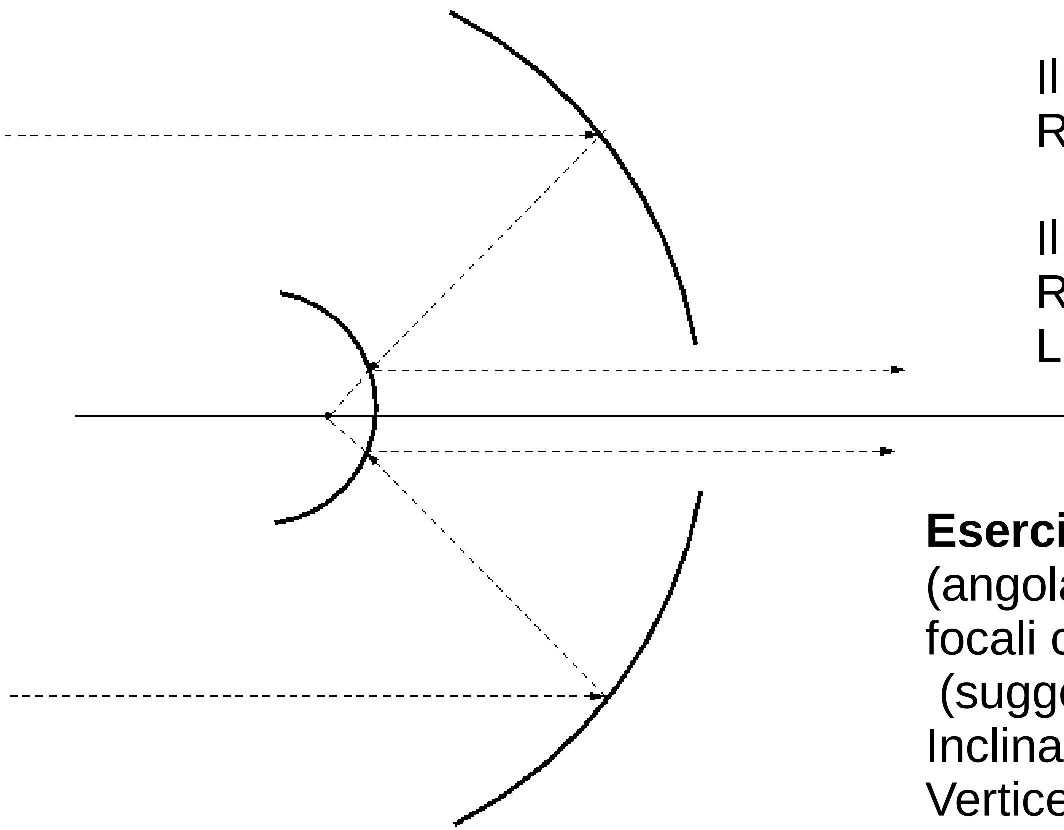
$$\tan\beta = 10\tan\alpha$$

- Il canocchiale non è uno strumento reversibile: ingrandisce se si guarda da un lato. Cosa succede se si guarda dall'altro ? Perchè ? Dove sta l'asimmetria ?
- Nel canocchiale Kepleriano si usa di solito uno specchio per "raddrizzare" l'immagine. Perchè ? Quello galileiano ha lo stesso problema ?



Sistema afocale con soli specchi

- un sistema afocale si può realizzare con uno specchio concavo ed uno convesso sistemati in modo che i loro fuochi coincidano



Il sistema è afocale perchè manda
Raggi paralleli in raggi paralleli.

Il telescopio basato solo su specchi si chiam
Riflettore o Cassegrain (dal nome di chi
Lo ha inventato)

Esercizio : dimostrare che l'ingrandimento (angolare) è dato dal rapporto tra le lunghezze focali come nel caso rifrattore Kepleriano .
(suggerimento: si consideri il raggio
Inclinato rispetto all'asse ottico e che incide nel
Vertice dello specchio piccolo convesso)

Un fenomeno ottico atmosferico

- Alcuni fenomeni ottici atmosferici si possono spiegare combinando ottica geometrica e considerazione di tipo statistico.
- Come esempio analizziamo il fenomeno noto come alone lunare

Alone Lunare

Misura delle dimensioni dell'alone

- Nella fotografia si osserva la Luna circondata da un alone luminoso e la presenza di stelle “famose” sullo sfondo permette di “calibrare” l'immagine ovvero di misurare le dimensioni angolari dell'alone!
- Presa una coppia di stelle, per ciascuna cerchiamo le coordinate (sferiche) $(\theta 1, \varphi 1)$ $(\theta 2, \varphi 2)$ ιn un catalogo stellare. Gli astronomi redigono cataloghi stellari da secoli quindi non ne mancano !
- La trigonometria sferica permette di calcolare la distanza angolare δ tra i due astri tramite la formula

$$\cos\delta = \sin\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Si stabilisce il fattore di conversione tra gradi e pixel dell'immagine. (CALIBRAZIONE) e Il raggio (angolare) dell'alone risulta pari a circa 22°

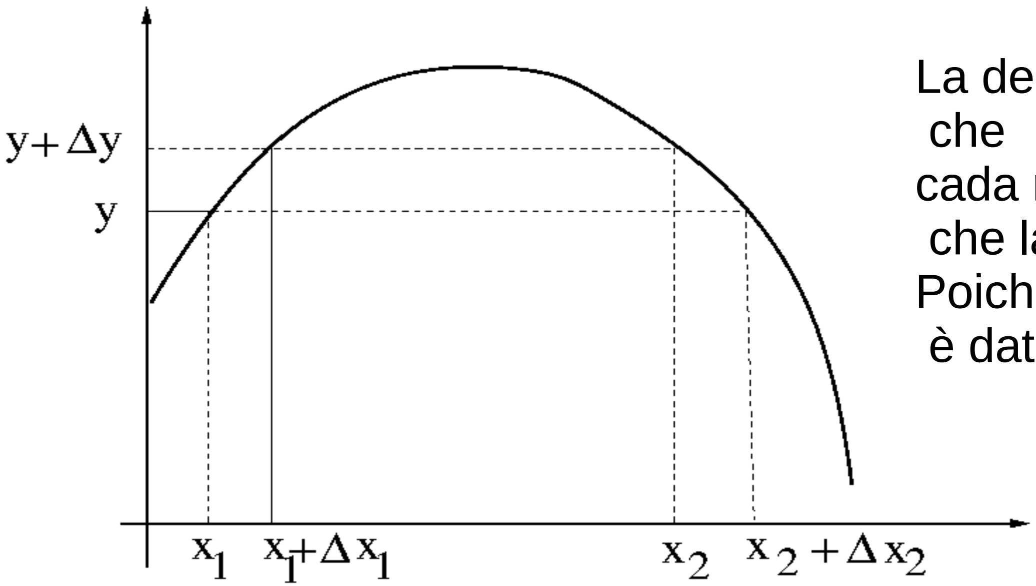
Perché 22° ?

- Per chi osserva l'alone è come se fosse raggiunto da raggi luminosi che per qualche motivo hanno subìto una deflessione di 22°. La domanda giusta è dunque: per quale motivo la deflessione a 22° è più probabile delle altre? Oppure perchè la luce non viene diffusa in tutte le direzioni con la stessa probabilità ?
- La spiegazione richiede un argomento di calcolo delle probabilità che discutiamo

Un esercizio di Probabilità

- Si consideri la variabile aleatoria x distribuita uniformemente nell'intervallo [0,1]
- Si consideri la funzione y = f(x) derivabile e monotona a tratti
- Domandiamoci … come si distribuisce la variabile y ?
- Si risponde esaminando il grafico della funzione

Addensarsi di y nei punti estremali



La densità di probabilità P(y) è definità in modo tale che P(y)dy è la probabilità che la variabile y cada nell'intervallo dy. Essa è pari alla probabilità che la x cada negli intervalli dx1 , dx2.
Poichè x è distribuita uniformemente, tale probabilità è data dalla larghezza complessiva di tali intervalli.

$$P(y)\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

$$P(y)\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Per definizione di derivata per ogni intervallo vale

$$\Delta y = f(x_i)\Delta x_i$$

$$P(y) = 1/f'(x_1) + 1/f'(x_2)$$

I punti estremali (massimi o minimi), ovvero quelli in cui f'(x) si annulla, corrispondono a valori in cui la densità P(y) diverge. Dunque sono i valori intorno ai quali la y va addensandosi

esercizio

- Per verificare la comprensione dell'argomento precedente dimostrare che se x è uniforme in [0,1] allora la densità di probabilità di y = x^2 è data da

$$P(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Inutitivamente facendo il quadrato di numeri presi a caso in [0,1] si ottengono numeri che
Si “addensano” intorno allo zero … che è infatti valore estremale di y = x^2

Alone Lunare: Conclusione

- Per spiegare l'alone lunare (ovvero l'addensarsi di raggi di luce a 22°) si deve immaginare che talvolta nella atmosfera si formano cristalli di ghiaccio. Si sa che tali cristalli esibiscono una struttura esagonale. (ovvero otticamente sono simili a prismi con angolo al vertice $\varphi = 60°$ e indice di rifrazione n= 1.31)
- L'orientazione dei cristalli è casuale ovvero l'angolo di incidenza della luce è uniforme tuttavia la deflessione ha probabilità massima di avvenire (vedere la slide relativa al prisma) per l'angolo δ_m tale che

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_m + \varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Facendo i calcoli ci si convince che

$$\delta_m \approx 22°$$

Cosa si impara dall'alone ?
Un modo di procedere tipico della Fisica

- Acquisizione dei dati (immagine dell'alone)
- Calibrazione (fattore di conversione pixel-angolo)
- Il modello teorico per la deflessione luminosa nei prismi suggerisce la presenza (talvolta) di formazioni cristalline nella atmosfera
- Dai dati (la fotografia) si ottiene una misura (indiretta) dell'indice di rifrazione del ghiaccio che magari in futuro confronteremo con una misura diretta fatta in laboratorio.