# Lezione 11

N.B.: da fare dopo la Lezione 12

## Sistemi con feedback

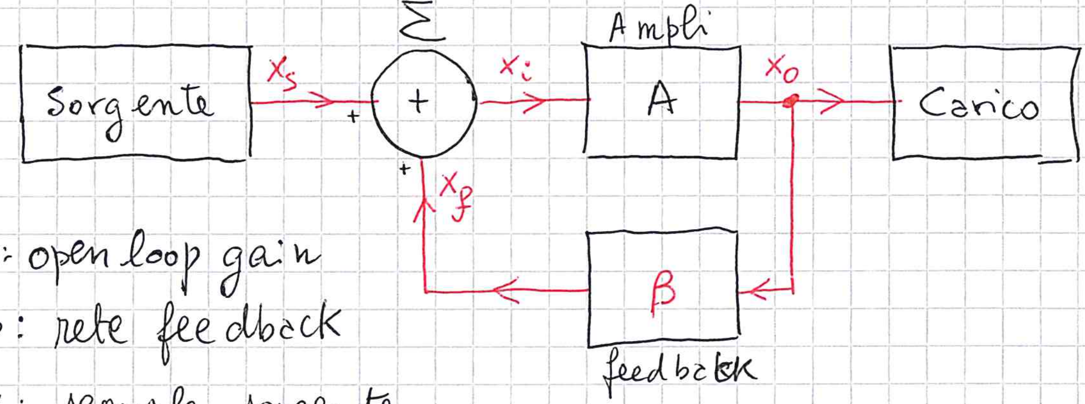
a) Concetto base del feedback, o retroazione:
uscita sommata, con un peso, all'ingresso.

Feedback positivo: sistemi non lineari, oscillatori

Feedback negativo: amplificatori, filtri

Gioca un ruolo fondamentale la rete di feedback

Schema di base di un sistema con feedback:




A: open loop gain

β: rete feedback

$x_s$: segnale sorgente

$x_i$: segnale ingresso amplificatore $= x_s + x_f$

$x_f$: segnale di feedback $= \beta x_o$

$x_o$: segnale di uscita $= A x_i$

$$x_o = A x_i = A(x_s + x_f) = A(x_s + \beta x_o)$$

$$x_o = \frac{A}{1-\beta A} x_i \Rightarrow A_f = \frac{A}{1-\beta A}$$

$A_f$ = guadagno con feedback

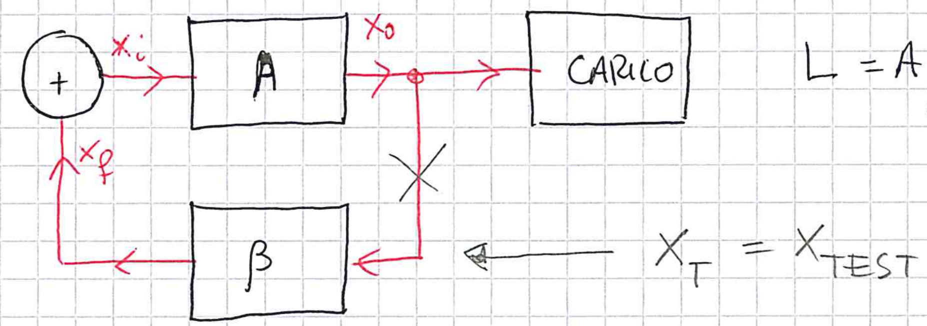
$\beta A$ = loop gain = guadagno ampli × guadagno feedback

Feedback positivo $(\beta > 0) \rightarrow 1-\beta A$ può essere 0 : $A \rightarrow \infty$

Feedback negativo $(\beta < 0) \rightarrow$ se $A \rightarrow \infty$ $A_f \rightarrow \boxed{-\frac{1}{\beta}}$

## b) Feedback positivo e oscillatori

Utilizzando il feedback positivo si possono costruire sistemi che producono un segnale senza segnale in ingresso → OSCILLATORI




$L = A\beta$ = loop gain

Studiamo il sistema interrompendo il ciclo di feedback ed introducendo un segnale di test $X_T$

$$X_0 = \beta A X_T$$

Se adesso collego di nuovo il sistema di feedback:

$$X_T = X_0 \Rightarrow X_0 = \beta A X_0 \Rightarrow \begin{cases} X_0 = 0 \rightarrow \text{segnale nullo} \\ \beta A = 1 \rightarrow L = 1 \end{cases}$$

La condizione $L = 1$ si dice condizione di Barkhausen ed è necessaria per avere un uscita stabile $\neq 0$.

Corrisponde alla condizione $A_f = \dfrac{A}{1 - \beta A} \rightarrow \infty$

In generale $L = |L| e^{j\phi} = |L(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$ è complesso e dipende dalla frequenza.

Utilizzando di nuovo l'interruzione sul feedback, ed immaginando di iniettare ciclicamente ed in modo discreto il segnale $X_0$ come segnale di test si ha:

$$X_T^0 = X_A(e^{j\omega t}) \rightarrow X_0^1 = L X_A(e^{j\omega t}) = X_T^1 \rightarrow X_0^2 = L X_T^1 = L^2 X_A(e^{j\omega t}) \ldots$$

$$X_0^n = L^n X_A(e^{j\omega t}) = |L|^n \cdot e^{jn\phi(\omega)} \cdot X_A(e^{j\omega t})$$

↑ tutto dipende da come si comporta $L^n$.

# Condizioni su Loop Gain

1. $|L| = |A\beta| < 1$ : $|L|^n \to 0$ , $x_0^n \to 0$

   l'oscillazione muore $\to$ segnale nullo

2. $|L| = |A\beta| = 1$ ; $|x_0^n| =$ costante (arbitraria)

   a. $\varphi = 0 + 2k\pi$ $\quad x_0^n = \underbrace{1 \cdot e^{jn \cdot 0}}_{1} ; x_A e^{j\omega t}$

   se inietto un certo segnale, quello si mantiene di ampiezza stabile e fase costante

   b. $\varphi \neq 0 + 2k\pi$ $\quad x_0^n = 1 \cdot e^{jn\phi} \; x_A e^{j\omega t}$

   $x_0^n$ si muove su una circonferenza nel piano complesso $\to$ media nulla

   $\langle Re \, x_0^n \rangle = 0 \to$ segnale nullo.

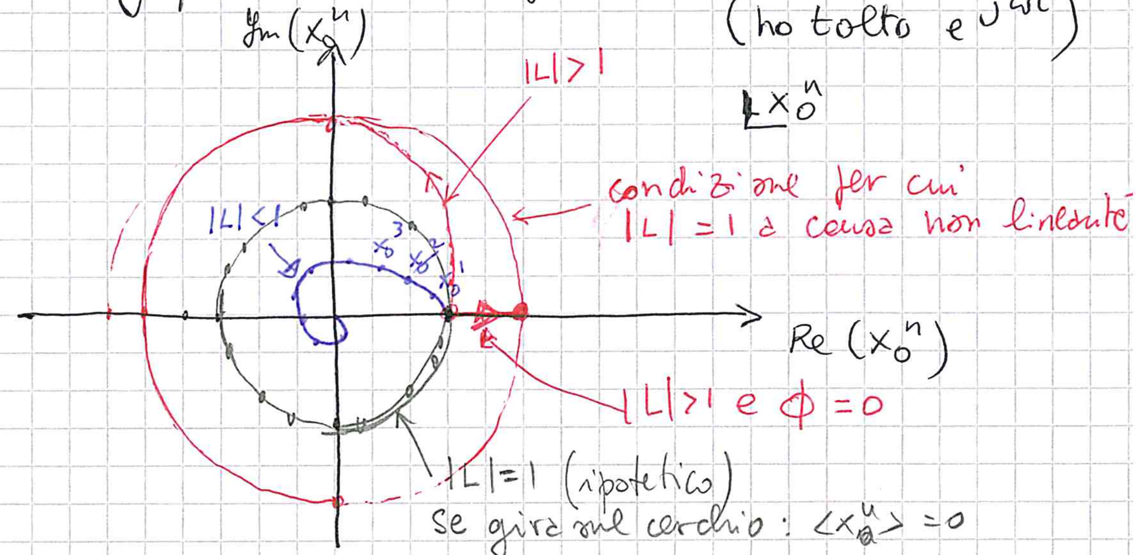
3. $|L| > 1$ $\quad |x_0^n|$ aumenta in ampiezza (diverge)

   In pratica, tutti i sistemi riducono il guadagno quando l'ampiezza aumenta. Spesso si introduce un meccanismo voluto ed esplicito di non linearità :


N.B. NON è un plot di Bode!

Quindi se $|A\beta| > 1$ l'ampiezza aumenta fino a raggiungere il punto corrispondente a $|A\beta| = 1$, e poi si stabilizza.

Plot di Nyquist del segnale $x_0^n = L^n x_A$ (ho tolto $e^{j\omega t}$)




- Non è possibile realizzare $|A\beta| = 1$ esattamente, ma si deve avere $|A\beta|>1$ e poi un meccanismo di non linearità che limita l'ampiezza
- È necessario che la condizione $\phi(\omega)=0$ avvenga solo per una certa frequenza, in modo da avere una oscillazione sinusoidale:

a) Stabilità in frequenza: $\phi=0$ solo per $\omega=\omega_0$

e $\left.\frac{d\phi}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}$ deve essere grande

b) Stabilità in ampiezza: $|A\beta|$ deve arrivare a 1 ben prima della saturazione ed inoltre

$$\left.\frac{d|A\beta|}{dx}\right|_{|A\beta|=1} \quad \text{deve essere grande}$$

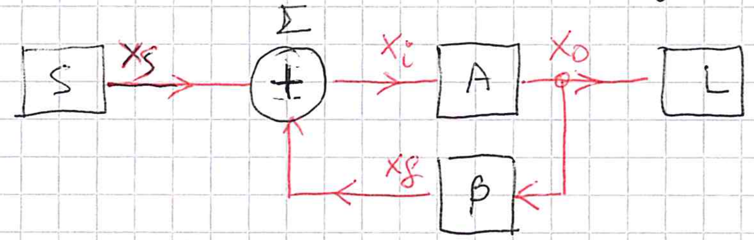
ampiezza

$\Longrightarrow$ Oscillatore sinusoidale

# C. Feedback negativo e stabilità

Effetti desiderabili del feedback negativo
- Desensibilizzazione del guadagno
- Riduzione delle non linearità
- Riduzione del rumore
- Controllo impedenze IN/OUT
- Larghezza di banda

$\to$ Tutto a spese del guadagno




$A_f = \dfrac{A}{1-\beta A}$  A = open loop gain $\to$ Attivo

$[\beta < 0]$  $\beta$ = feedback gain $\to$ Passivo

1. Desensibilizzazione del guadagno
   - Se A è grande ($|\beta A| >> 1$) $\to$ $A_f = -\dfrac{1}{\beta}$

     $\to$ dipende solo dalla rete di feedback, non dalle caratteristiche dell'amplificatore

   - Più in generale:

$$\frac{dA_f}{dA} = \frac{(1-\beta A + A\cdot(\beta))}{(1-\beta A)^2} = \frac{1}{(1-\beta A)^2}$$

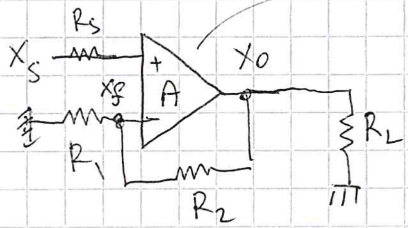
$$\frac{dA_f}{A_f} = \frac{dA}{(1-\beta A)^2}\cdot\frac{(1-\beta A)}{A} = \frac{dA}{A}\,\frac{1}{1-\beta A}$$

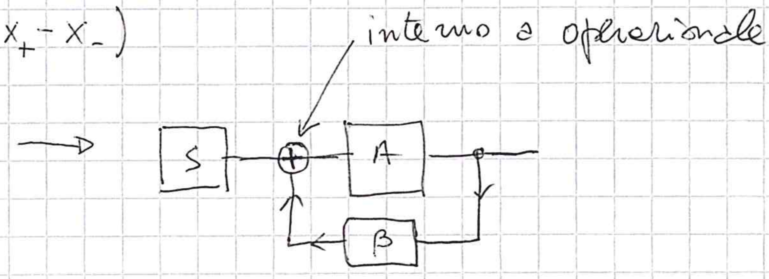
$1-\beta A \to$ Fattore di desensibilizzazione

In pratica $1-\beta A \cong -\beta A = -L$ (loop gain)

Esempio ampli non invertente

$x_o = A(x_+ - x_-)$




$$\beta = -\frac{1}{1 + R_2/R_1} \qquad A = A_{open\ loop}\ opAmp$$

$$A_f \triangleq \frac{A}{1-\beta A} \xrightarrow{A \to \infty} -\frac{1}{\beta} = 1 + R_2/R_1$$

Se chiedo $A_f = 10$, quanto vale il loop gain?

Se $A = 10^4$, $\beta = -\frac{1}{A_f} = -\frac{1}{10} \rightarrow -L = 10^3$

- [N.B. Spesso si cambia segno alle formule a seconda se si tratta feedback positivo o negativo.]

Quindi se $\frac{\Delta A}{A} = 50\% \rightarrow \frac{\Delta A_f}{A_f} = \frac{\Delta A}{A} \frac{1}{|L|} = \boxed{0.05\%}$

- $\boxed{NB}$: non sto considerando l'incertezza su $\beta$, che in questo caso diventa dominante:

$$\Delta A_f / A_f = \Delta\beta/\beta$$ (non sono sensibile ad A)

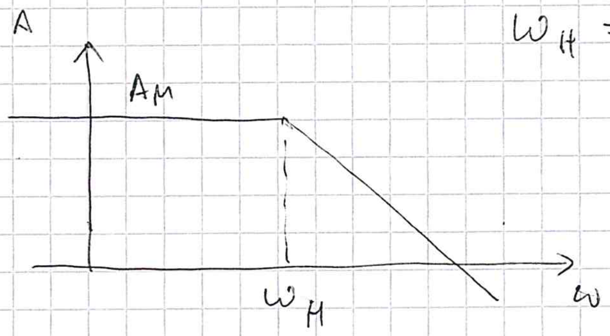
# 2. Banda Passante

Supponiamo un amplificatore con un singolo polo

$$A = \frac{A_M}{1 + s/\omega_H}$$

$A_M$ = guadagno di centro banda (bassa frequenza)

$\omega_H$ = frequenza di taglio




$$A_f = \frac{A}{1-\beta A} = \frac{A_M}{1+ s/\omega_H} \cdot \frac{1}{1 - \beta \frac{A_M}{1+s/\omega_H}} =$$

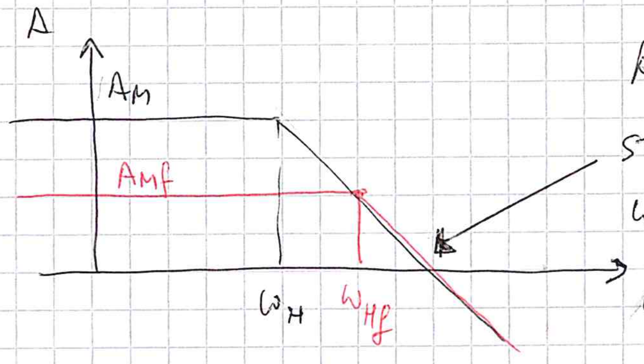
$$= \frac{A_M}{1-\beta A_M + s/\omega_H} = \frac{A_M}{1-\beta A_M} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_H \cdot (1-\beta A_M)}}$$

$$= \frac{A_{Mf}}{1+ \frac{s}{\omega_{Hf}}} \quad \text{con} \quad A_{Mf} = \frac{A_M}{1-\beta A_M}$$

$$\omega_{Hf} = \omega_H \cdot (1-\beta A_M)$$

GAIN . BANDWIDTH . PRODUCT $\quad A_{Mf} \cdot \omega_{Hf} = A_M \omega_H$

Estende la banda a spese del guadagno




Ad alte frequenze, stessa retta. Per $\omega \gg \omega_{Hf}$; $A_f \sim \frac{A_{Mf} \cdot \omega_{Hf}}{s} = \frac{GBW}{s} = \frac{A_M \cdot \omega_H}{s}$

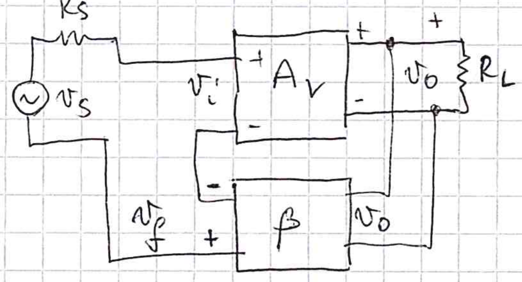
3. Effetto su resistenze di ingresso - uscita.

→ Dipende dalla topologia di feedback e dal tipo di amplificatore.

Ampli | Schema

**Voltage**

$A_V$

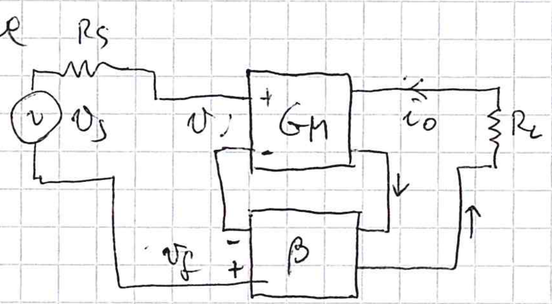



$v_o = A_V v_i$  $v_f = +\beta v_o$

Sample : tensione
Sum : series
$R_{IN}$ : $\infty$ (ideale)
$R_{OUT}$ : 0 (ideale)

**Transconductance**

$G_M$

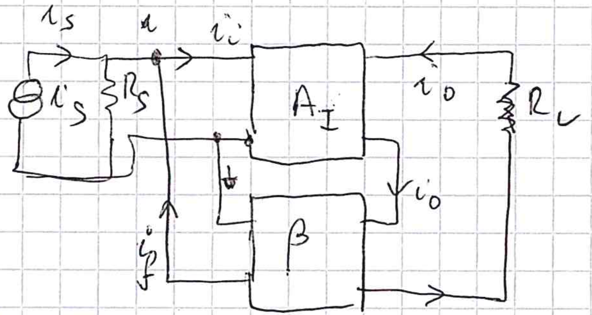



$i_o = G_M v_i$  $v_f = \beta i_o$

Sample : corrente
Sum : series
$R_{IN}$ : $\infty$
$R_{OUT}$ : $\infty$

**Current**

$A_I$

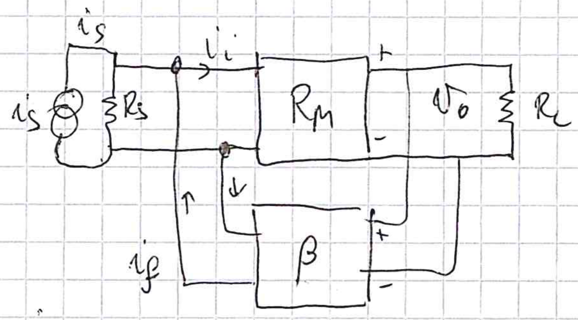



$i_o = A_I i_i$  $i_f = \beta i_o$

Sample : corrente
Sum : parallelo
$R_{IN}$ : 0
$R_{OUT}$ : $\infty$

**Transresistance**

$R_M$

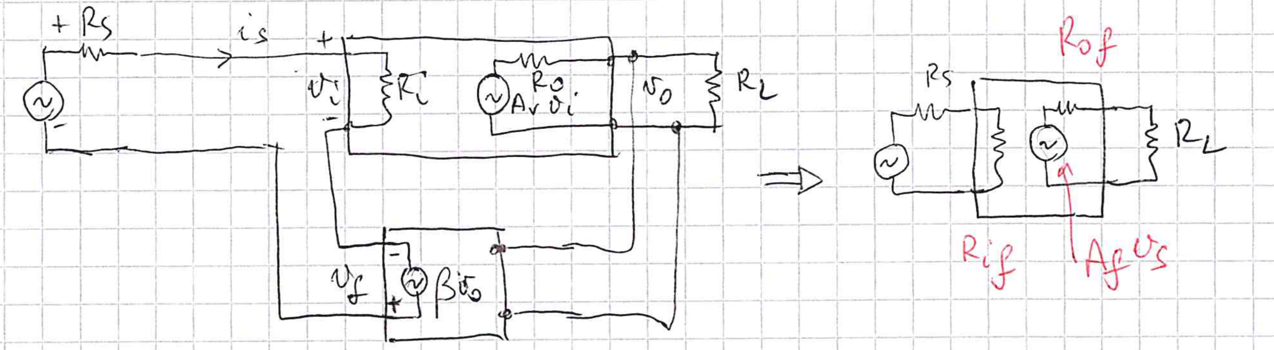



$v_o = R_M i_i$  $i_f = \beta v_o$

Sample : tensione
Sum : parallelo
$R_{IN}$ : 0
$R_{OUT}$ : 0

$\boxed{\beta A = L = \text{sempre numero puro!}}$

# Esempio con Amplif. di tensione




$v_i = v_s + v_f$ $\quad(\beta<0)$ $\quad$ Trascuriamo $R_s \to 0$

$R_L \to \infty$

$$R_{if} = \frac{v_s}{i_s} = \frac{v_s}{v_i/R_i} = R_i\,\frac{v_i - v_f}{v_i} = R_i\left(1-\frac{v_f}{v_i}\right) = \boxed{R_i(1-\beta A_v)}$$

$$R_{of} = \frac{v_o(\text{open})}{i_o(\text{short})} = \frac{A_f \cdot v_s}{(A_v \cdot v_s)/R_o} = R_o \cdot \frac{A_f}{A_v} = \boxed{\frac{R_o}{1-\beta A}}$$

NB: quando cortocircuito l'uscita $v_o = 0$, $v_f = 0$, $v_s = v_i$

$\to$ $R_i$ aumenta
$\quad$ $R_o$ diminuisce $\Big\}$ $\to$ Virtuoso.

## In generale

| Summing | $R_{IN}$ | Sampling | $R_{OUT}$ |
|---|---|---|---|
| serie | $R_i\cdot(1-\beta A)$ | tensione | $R_o/(1-\beta A)$ |
| parallelo | $R_i/(1-\beta A)$ | corrente | $R_o\cdot(1-\beta A)$ |