LABORATORIO DI FISICA 3

Estimatori dei parametri
Correlazioni

Prof. Francesco Forti

Lezione 3b

Estimatori dei parametri

- Gli estimatori sono ottenuti dalle osservazioni sperimentali e rappresentano una stima del valore dei parametri ignoti (il valore “vero” della quantità da misurare)
  - ad esempio la media delle misure è un estimatore della media (vera) della distribuzione genitrice
- Caratteristiche da ricercare negli estimatori
  - Consistenza – converge al valore vero per sample grandi
  - Unbiassedness – non è sistematicamente spostato rispetto al valore vero
  - Minima varianza – deve avere la minima varianza, cioè essere il più preciso possibile

Molti libri di statistica: Bevington, Frodesen-Kjeggestad, Papoulis, Lyons
Bohm-Zech www-library.desy.de/preparch/books/vstatmp_engl.pdf

Errori e fit ai dati

- In generale, prendendo molte punti sperimentali si migliora la precisione della misura.
- Media di misure indipendenti (scorrelate)

$$\hat{x} = \frac{\sum_i x_i/\sigma_i^2}{\sum_i 1/\sigma_i^2}$$

- Da notare che $Var(x_i)$ non entra da nessuna parte
  - Ma assumo di sapere le σ_i

$$1/\sigma^2 = \sum_i 1/\sigma_i^2$$

- Se invece so che sto estraendo dalla stessa distribuzione con σ ignota l'estimatore

$$s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{N-1}$$

è unbiased.

Minimi quadrati

- Ad una serie di punti x_i (i=1…N) corrispondono delle misure y_i, di cui si ipotizza una relazione con x_i attraverso una funzione che dipende da L parametri ignoti $\theta_1 \ldots \theta_L$.

$$f_i = f(\theta_1, \cdots, \theta_L; x_i) = f(\boldsymbol{\theta}; x_i)$$

- Un estimatore "buono" dei parametri θ si ottiene cercando il minimo della quantità

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i - f_i)^2}{\sigma_i^2}$$

- Se le misure y_i sono correlate da una matrice di covarianza V_{ij}, la formula diventa

$$\chi^2 = \sum_{ij} (y_i - f_i) V_{ij}^{-1} (y_j - f_j)$$

Parametri ed errori

- I parametri θ si determinano da:

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial\theta_k} = \frac{\partial\sum_{ij}(y_i - f(\boldsymbol{\theta};x_i))V_{ij}^{-1}(y_j - f(\boldsymbol{\theta};x_j))}{\partial\theta_k} = 0$$

  - Nel caso lineare forma chiusa, altrimenti, sol. numerica

- La matrice di covarianza dei parametri è

$$V_{ij}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\chi^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

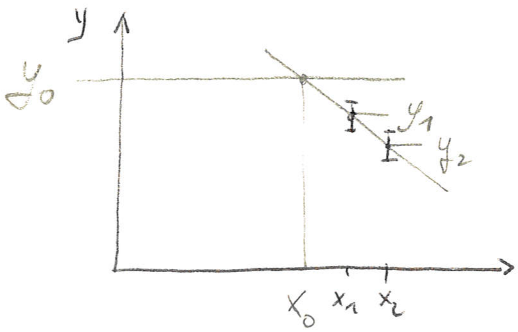
- Che nel caso unidimensionale diventa

$$\frac{1}{\sigma_\theta^2} = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\chi^2}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}}$$

giovedì

Estrapolazione, interpolazione, fit...

Problema: ho misurato due punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e voglio estrapolare (interpolare) la retta a una nuova y_0 di cui voglio calcolare x_0



Semplifichiamoci la vita
- errori su x_1, x_2 trascurabili
- $\sigma(y_1) = \sigma(y_2) = \sigma_1 = \sigma_2$

y_0 noto senza errore.

Quanto vale $\sigma(x_0)$?

1) Fit alla retta. Cerco la retta di eq $y = mx + q$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad q = y_1 - x_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_2 \oplus \sigma_1}{|x_2 - x_1|} = \frac{\sqrt{2}}{|x_2 - x_1|}\sigma_1$$ → indipendente dalla posizione dell'asse

$$\sigma_q = \frac{x_2\sigma_1 \oplus x_1\sigma_2}{|x_2 - x_1|} = \frac{\sqrt{x_2^2 + x_1^2}}{|x_2 - x_1|}\sigma_1$$ → aumenta con la lontananza dall'asse

Trovo x_0 da $y_0 = m x_0 + q \rightarrow x_0 = \frac{y_0 - q}{m}$

$$\sigma(x_0) = \cancel{\frac{\sigma(y_0)}{m}} \oplus \frac{\sigma(q)}{m} \oplus x_0 \frac{\sigma(m)}{m}$$

$$= 0 \oplus \sigma_1 \frac{\sqrt{x_2^2 + x_1^2}}{|x_2 - x_1|} \cdot \left|\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right| \oplus \left|\frac{y_0 - q}{m}\right| \cdot \frac{\sqrt{2}\,\sigma_1}{|x_2 - x_1|} \cdot \left|\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right|$$

$$= \frac{1}{|m|}\left[\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2x_0^2}}{|x_2 - x_1|}\right]\sigma_1 = \sigma_1 \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2x_0^2}}{|y_2 - y_1|}$$

→ più l'asse è lontano, ~~peg~~ più grande è $\sigma(x_0)$ Perché?

2) Calcolo diretto

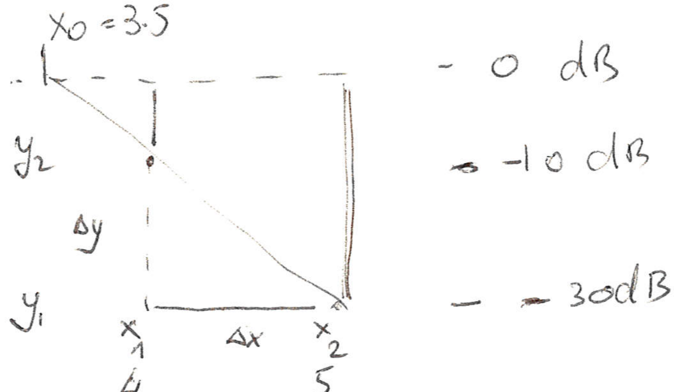
$$\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} = \frac{x_0-x_1}{y_0-y_1} \longrightarrow x_0 = x_1 + \frac{y_0-y_1}{y_2-y_1}(x_2-x_1)$$

$$\left|\frac{\partial x_0}{\partial y_1}\right| = |x_2-x_1|\left[\frac{y_1-y_2+y_0-y_1}{|y_2-y_1|^2}\right] = \frac{|x_2-x_1|}{|y_2-y_1|}\cdot\frac{|y_0-y_2|}{|y_2-y_1|}$$

$$\left|\frac{\partial x_0}{\partial y_2}\right| = |x_2-x_1|\left[\frac{y_1-y_0}{(y_2-y_1)^2}\right] = \frac{|x_2-x_1|}{|y_2-y_1|}\cdot\frac{|y_0-y_1|}{|y_2-y_1|}$$

$$\sigma(x_0) = \frac{\partial x_0}{\partial y_1}\sigma_1 \oplus \frac{\partial x_0}{\partial y_2}\sigma_2 = \sigma_1\frac{|x_2-x_1|}{|y_2-y_1|^2}\left[(y_0-y_1)^2+(y_0-y_2)^2\right]^{1/2}$$

$$= \sigma_1\frac{|x_2-x_1|}{|y_2-y_1|}\cdot\frac{\sqrt{(y_0-y_1)^2+(y_0-y_2)^2}}{|y_2-y_1|} \longleftarrow \text{solo differenze!}$$



Quale è giusto? Facciamo un caso pratico

Per esempio: $f_1 = 10\ kHz$ $f_2 = 100\ kHz$ $x = \log_{10} f$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5\ dB$ $x_1 = 4$ $x_2 = 5$

$y_0 = 0\ dB$ $y_1 = -10\ dB \pm 0.5$ $y_2 = -30 \pm 0.5\ dB$

$\sigma(x_0)$ (metodo 2) $= 0.5\,\frac{1}{20}\cdot\frac{\sqrt{100+900}}{20} = 0.04 \rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \ln 10 \times 0.04 = 9\%$

$\sigma(x_0)$ (metodo 1) $= \frac{0.5}{20}\sqrt{4^2+5^2+(3.5)^2\times 2} = 0.20 \rightarrow \frac{\Delta f}{f} = 46\%$

→ il fit lo fate VOI, non "gnuplot"

fit in KHZ → errore minore $\frac{0.5}{20}\sqrt{1^2+2^2+(0.5)^2\cdot 2} \simeq 0.12$

N.B.: nel metodo 1, x_0 viene corretto:

$$m = -20\ \text{dB/decade} \qquad q = -10 + 80\ \text{dB} = 70\ \text{dB}$$

$$x_0 = \frac{0 - 70}{20} = 3{,}5$$

L'errore è sbagliato perché: q e m sono MOLTO CORRELATI → somma in quadratura è sbagliata.

→ Calcolo delle correlazioni

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad q = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \qquad x_0 = \frac{y_0 - q}{m}$$

$$cov_{mq} = \frac{\partial m}{\partial y_1}\frac{\partial q}{\partial y_1}\sigma_1^2 + \frac{\partial m}{\partial y_2}\frac{\partial q}{\partial y_2}\sigma_2^2 = \frac{1}{(x_2 - x_1)^2}\left[(-1)(x_2)\sigma_1^2 + (1)\cdot(-x_2)\sigma_2^2\right]$$

$$= -\frac{x_2\sigma_1^2 + x_1\sigma_2^2}{(x_2 - x_1)^2} = -\frac{\sigma_1^2}{|x_2 - x_1|} \quad \text{se } \sigma_1 = \sigma_2$$

$$\sigma^2(x_0) = \left(\frac{\partial x_0}{\partial m}, \frac{\partial x_0}{\partial q}\right)\begin{pmatrix} \sigma_m^2 & cov_{mq} \\ cov_{mq} & \sigma_q^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial x_0/\partial m \\ \partial x_0/\partial q \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{x_0}{m}, -\frac{1}{m}\right)\begin{pmatrix} \frac{2\sigma_1^2}{(x_2 - x_1)^2} & -\frac{\sigma_1^2}{|x_2 - x_1|} \\ -\frac{\sigma_1^2}{|x_2 - x_1|} & \frac{x_2^2 + x_1^2}{(x_2 - x_1)^2}\sigma_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_0/m \\ -1/m \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{m^2}\left[\frac{x_0^2 \cdot 2\sigma_1^2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{(x_1^2 + x_2^2)\sigma_1^2}{(x_2 - x_1)^2} - \frac{2\sigma_1^2 x_0}{|x_2 - x_1|}\right]$$

↑ segno meno che riduce l'errore

Quindi?

1) Il fit è qualcosa che FATE VOI.
Non voglio sentire pesi come:
"gnuplot mi da questo errore, non so cosa fare ...."

2) Garbage-IN, Garbage-OUT: il dettaglio di come si ~~fa~~ inseriscono i dati CONTA MOLTO

→ Dovete ragionare sul modo migliore per estrarre le informazioni
→ Utile fare tentativi diversi

3) Indicazioni
- evitate funzioni esponenziali
- pensate al braccio di leva dell'estrapolazione
- Assi vicino al punto di interesse
- Guardare matrice di correlazione (ed eventualmente usarla)