Test del χ^2

Sommario

In questa esperienza cercheremo di familiarizzare con il test del χ^2 in alcune situazioni tipiche.

Materiale a disposizione

- Computer, carta e penna.
- Dati del pendolo fisico e della misura di g, buona volontà.

Definizioni

Data una serie di n dati sperimentali (x_i, y_i), con errori associati σ_{x_i} e σ_{y_i}, ed un modello $f(x_i; p_1 \ldots p_m)$ dipendente da m parametri *stimati dai dati*, la quantità

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - f(x_i; p_1 \ldots p_m)}{\sigma_{y_i}} \right)^2 \tag{1}$$

è una misura della *distanza* dei dati stessi dal modello. Nell'ipotesi in cui gli errori σ_{x_i} siano *trascurabili* ed i valori y_i fluttuino gaussianamente attorno al modello con deviazione standard σ_{y_i}, la variabile casuale S è distribuita come un χ^2 a $\nu = n - m$ gradi di libertà.

Nel caso di una distribuzione, in cui si confrontano i conteggi osservati o_i nei canali del nostro istogramma sperimentale con i valori e_i predetti dal modello, la (1) può essere riscritta come

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{o_i - e_i}{\sqrt{e_i}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}. \tag{2}$$

In questo caso, se il numero totale n di canali è fissato, il numero di gradi di libertà è $n - m - 1$.

Considerazioni pratiche

Stima dei conteggi attesi per una distribuzione

Supponiamo di avere un istogramma (realizzato sperimentalmente) il cui i-esimo canale contenga o_i conteggi. Supponiamo ancora che il nostro modello $f(x; p_1 \ldots p_m)$ dipenda dalla variabile continua x. Detti x_i^L ed x_i^H gli estremi inferiore e superiore del canale i-esimo, il valore predetto dal modello sarà

$$e_i = n \int_{x_i^L}^{x_i^H} f(x; p_1 \ldots p_m) \mathrm{d}x, \tag{3}$$

dove n è il numero totale di conteggi nell'istogramma. Notiamo esplicitamente che, mentre o_i è una variabile discreta, e_i non è necessariamente un numero intero.

Nel caso in cui il modello sia gaussiano non è possibile calcolare analiticamente l'integrale, ma bisogna passare alla variabile in forma standard ed utilizzare le tavole o il calcolatore.

Realizzazione di un istogramma

Il numero e la larghezza dei canali dovrebbero essere scelti in modo che il numero medio di conteggi per canale sia ragionevole—in modo, cioè, da non avere molti canali senza nessun conteggio o tutti i conteggi concentrati in pochi canali. Per un numero totale di conteggi n, $\sqrt{n}$ canali è tipicamente una scelta *ragionevole*.

Per il test del χ^2 si consiglia di raggruppare insieme i canali meno popolati dell'istogramma in modo da non avere canali con meno di 2 o 3 conteggi (ovviamente i corrispondenti valori attesi si sommano).

Misure da effettuare ed analisi

Test per un modello completamente specificato

Si consideri la serie di dati relativa all'esperienza del pendolo fisico (in cui si misurava il periodo T in funzione della distanza d tra il punto di sospensione ed il centro di massa) e si esegua un test del χ^2 utilizzando il modello

$$T(d) = 2\pi \sqrt{\frac{(l^2/12 + d^2)}{gd}}. \tag{4}$$

Si consideri il modello *completamente specificato* (cioè si prendano i valori misurati di l e d). In questo caso, dati n punti sperimentali, il numero di gradi di libertà è semplicemente $\nu = n$.

Test per un fit ad una serie di dati

Si prenda una serie di dati, tra quelle acquisite in laboratorio durante il semestre, che possa essere ragionevolmente descritta da un modello lineare—ad esempio i periodi al quadrato, T^2, della molla con massa sul piattello m. Si eseguano due fit con le funzioni

$$f_1(x) = a_1 x, \quad f_2(x) = a_2 x + b \tag{5}$$

e si stimino i parametri a_1, a_2, b. Si esegua il test del χ^2 per scegliere la funzione che descrive meglio i dati calcolando i *p-value* corrispondenti. Si determini la massa *mancante* a m.

Test per una distribuzione

Si considerino i dati nella tabella in appendice, in cui ognuno dei 70 valori corrisponde alla media di 10 misure della stessa grandezza (nel caso specifico il periodo di un pendolo, misurato in s).

Si realizzi un istogramma dei dati stessi, scegliendo opportunamente il numero e la larghezza dei canali. Si calcolino quindi la media m e la deviazione standard s del campione e si esegua un test di compatibilità del χ^2 con una distribuzione gaussiana di media m e deviazione standard s. In questo caso, dati n canali per l'istogramma, il numero di gradi di libertà è $\nu = n - 2$.

Compilato il 14 ottobre 2016.

[1] 19.948	[11] 20.395	[21] 20.446	[31] 20.469	[41] 20.490	[51] 20.533	[61] 20.575
[2] 20.094	[12] 20.395	[22] 20.448	[32] 20.469	[42] 20.491	[52] 20.534	[62] 20.577
[3] 20.206	[13] 20.404	[23] 20.450	[33] 20.471	[43] 20.494	[53] 20.538	[63] 20.577
[4] 20.321	[14] 20.405	[24] 20.451	[34] 20.472	[44] 20.499	[54] 20.540	[64] 20.582
[5] 20.324	[15] 20.406	[25] 20.458	[35] 20.476	[45] 20.503	[55] 20.545	[65] 20.587
[6] 20.386	[16] 20.409	[26] 20.461	[36] 20.479	[46] 20.519	[56] 20.554	[66] 20.589
[7] 20.387	[17] 20.417	[27] 20.461	[37] 20.479	[47] 20.522	[57] 20.556	[67] 20.594
[8] 20.392	[18] 20.419	[28] 20.462	[38] 20.482	[48] 20.522	[58] 20.557	[68] 20.613
[9] 20.393	[19] 20.441	[29] 20.462	[39] 20.484	[49] 20.525	[59] 20.565	[69] 20.653
[10] 20.393	[20] 20.443	[30] 20.463	[40] 20.485	[50] 20.528	[60] 20.567	[70] 20.673

Tabella 1: Tabella delle misure di periodo. Ogni valore rappresenta la media di 10 misurazioni dirette. Per facilitare la realizzazione dell'istogramma le medie sono riportate in ordine crescente.