数值分析与计算

北京邮电大学软件学院 漆 涛

November 1, 2019

目录

第四章: 矩阵特征值问题

$$\det(\lambda I - A) = p(\lambda)$$

λ^{-1}: A^{-1} 的特征值.

$c\lambda$ 是 cA 的特征值.

A, A^T 有相同的特征值.

$\lambda - \mu$ 是 $A - \mu I$ 的特征值.

λ^k 是 A^k 的特征值.

矩阵相似 $A \sim B$: 存在非奇矩阵 P 使得

$$B = P^{-1}AP$$

可对角化: 存在非奇矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

如果特征值互不相同则可对角化. 对称矩阵可对角化.

实对称矩阵的特征值为实数, 并且
存在正交矩阵 Q 将其对角化.

$$Q^T AQ = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

Jordan 标准型, 约当标准型

Jordan 块

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

所有矩阵相似与

$$\begin{pmatrix}J(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & J(\lambda_2) & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & J(\lambda_{t-1}) & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J(\lambda_t)\end{pmatrix}$$

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_t$ 可以相同.

特征值估计

Gershgorin: (俄)格尔什戈林

(行)盖尔圆

$$G_j = \left\{ z \in C : \left| z - a_{jj} \right| \leqslant r_j = \sum_{k \neq j} \left| a_{jk} \right| \right\}$$

Gershgorin 圆盘定理

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{10}{9} \\ 0.9 & 0.9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$3 \leqslant \lambda_1 \leqslant 5, \qquad -\frac{19}{9} \leqslant \lambda_2 \leqslant \frac{19}{9} \qquad -5.8 \leqslant \lambda_3 \leqslant -2.2$$

定理 27 (Bauer-Fike 定理) *设 μ 是 $A+E$ 的某个特征值. $P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 则有*

$$\min_{\lambda \in \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}} |\lambda - \mu| \leqslant \|P^{-1}\| \|P\| \|E\|$$

其中的范数可以是壹范数, 贰范数, 无穷范数.

$$\nu(A) = \inf \left\{ \kappa(P) : P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \right\}$$

$\nu(A)$: 矩阵 A 的特征值问题的条件数.

$A = diag(1, 10^{-9}), \nu(A) = 1, \kappa(A) = 10^9$

幂法求最大特征值

$$\begin{cases} x^0 & = & \text{随机选取并且 } \|x^0\| = 1 \\ y^{k+1} & = & Ax^k \\ x^{k+1} & = & \frac{y^{k+1}}{\|y^{k+1}\|} \end{cases}$$

则

$$\lim_{k\to\infty} x^k = v_1$$

收敛速度:线性收敛 $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k$

特征值?

无穷范数

若 $y^k=(y_1^k,y_2^k,\cdots,y_n^k)^T$，令

$$\mu_k=y_j^k \quad \text{其中} \quad \left|y_j^k\right|=\max\left\{\left|y_1^k\right|,\cdots,\left|y_n^k\right|\right\}$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\mu_k=\lambda_1$$

贰范数

$$\lim_{k\to\infty}(y^{k+1},x^k)=\lambda_1$$

壹范数

$$\lim_{k\to\infty}\|y^k\|_1=|\lambda_1|$$

反幂法求最小特征值

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^0 & = & \text{随机选取并且 } \|x^0\| = 1 \\ Ay^{k+1} & = & x^k \quad \text{求线性代数方程组解} \\ x^{k+1} & = & \frac{y^{k+1}}{\|y^{k+1}\|} \end{array}\right.$$

Givens 变换

$$P(j,k,\theta) = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & \\ & \vdots & I & \vdots & \\ & -\sin\theta & \cdots & \cos\theta & \\ & & & & I \end{pmatrix}$$

正交矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_j \\ \cdots \\ A_k \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} \qquad PA = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ \cos\theta A_j + \sin\theta A_k \\ \cdots \\ -\sin\theta A_j + \cos\theta A_k \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$A = \Big(A_1, \cdots, A_j, \cdots, A_k, \cdots, A_n\Big)$$

则

$$AP = \big(A_1, \cdots, \cos\theta A_j + \sin\theta A_k, \cdots, -\sin\theta A_j + \cos\theta A_k, \cdots, A_n\big)$$

Jocobi 算法:求实对称矩阵的所有特征值.

A:实对称矩阵.

$$\begin{aligned}
B &= P^T A P \\
b_{jj} &= a_{jj}\cos^2\theta + a_{kk}\sin^2\theta + 2a_{jk}\cos\theta\sin\theta \\
b_{kk} &= a_{jj}\sin^2\theta + a_{kk}\cos^2\theta - 2a_{jk}\cos\theta\sin\theta \\
b_{jk} &= b_{kj} \\
&= \frac{a_{kk}-a_{jj}}{2}\sin 2\theta + a_{jk}\cos 2\theta
\end{aligned}$$

如果 $a_{jk} \neq 0$ $(j \neq k)$ 可取

$$ctg 2\theta = \frac{a_{jj}-a_{kk}}{2a_{jk}}$$

使得 $b_{jk} = 0$.

Jacobi 算法

```
jacobi(A)--> A 的标准型
{       //A 实对称矩阵
     do {
          a_jk = A 的非对角元按模最大元;
          if(a_jk == 0)
              return A;
          θ = arctan((a_jj - a_kk)/(2a_jk));
          P = P(j,k,θ);
          A = P^T A P;
     }
}
```

$$
\begin{cases}
A_0 = A; \\
a_{jk} = A_m\text{非对角元按模最大元} \\
\text{如果}a_{jk} == 0\text{，返回}A \\
A_{m+1} = P^T A P
\end{cases}
$$

$$
A_m = \left(a_{jk}^m\right), \zeta_m = \sum_{j \neq k} \left(a_{jk}^m\right)^2
$$

则

$$
\zeta_{m+1} \leqslant \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) \zeta_m
$$

矩阵的 QR 分解

QR 分解唯一性

基本QR算法: $A_1 = A$

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_k &=& Q_k R_k \\ A_{k+1} &=& R_k Q_k \end{array}\right.$$

$$A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k = (Q_1 \cdots Q_k)^T A_1 (Q_1 \cdots Q_k)$$

定理 28 *A 非奇, 特征值全为实数, 互不相同. $A = X^{-1} D X$, 而 X^{-1} 有LU分解. 则 $\{A_k\}$ 本质收敛于下三角矩阵.*

(上)Hessenberg 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{pmatrix}$$

$$A = \left|\begin{array}{cccc|ccc} x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x & x \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{array}\right|$$

矩阵特征值问题实验题:

用Python 实现幂法, Jacobi 算法和QR算法.

子)用它们计算下面的五矩阵的特征值.

$$A=\begin{pmatrix} 611 & 196 & -192 & 407 & -8 & -52 & -49 & 29 \\ & 899 & 113 & -192 & -71 & -43 & -8 & -44 \\ & & 899 & 196 & 61 & 49 & 8 & 52 \\ & & & 611 & 8 & 44 & 59 & -23 \\ & & & & 411 & -599 & 208 & 208 \\ & \text{对} & \text{称} & & & 411 & 208 & 208 \\ & & & & & & 99 & -911 \\ & & & & & & & 99 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 \\ & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 & 1/11 \\ & & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 & 1/11 & 1/12 \\ & & & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 & 1/11 & 1/12 & 1/13 \\ & & & & 1/9 & 1/10 & 1/11 & 1/12 & 1/13 & 1/14 \\ & & & & & 1/11 & 1/12 & 1/13 & 1/14 & 1/15 \\ & & & & & & 1/13 & 1/14 & 1/15 & 1/16 \\ & & \text{对} & \text{称} & & & & 1/15 & 1/16 & 1/17 \\ & & & & & & & & 1/17 & 1/18 \\ & & & & & & & & & 1/19 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 11 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 10 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \left(d_{jk}\right)_{20\times 20} \quad 1 \le j,k \le 20, d_{jk} = \sqrt{2/21}\,\mathrm{sin}(jk\pi/21)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}_{50\times 50} \qquad \text{50 阶Guass 矩阵}$$

实验报告中给出下面表格中的信息.

幂法 (注: 用 $\|Mx-\lambda x\|_2$ 计量误差)

矩阵	最大/小特征值	特征向量	误差	运行时间	备注
A					
A					
B					
B					
C					
C					
D					
D					
E					
E					

Jacobi 方法

矩阵	特征值	运行时间	备注
A			
B			
C			
D			

QR 方法

矩阵	特征值	运行时间	备注
A			
B			
C			
D			
E			

丑) 求11次多项式的根

$$x^{11} + x^{10} + \cdots + x + 1 = 0$$

第五章：插值与逼近