数值分析与计算

北京邮电大学软件学院 漆 涛

November 15, 2019

目录

第五章: 插值与逼近

线性赋范空间的最佳逼近

X 是线性赋范空间.

$$S = span\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$$

为 X 的 n 维子空间.

$f \in X$. 如果 $p \in S$ 满足:

$$\|f - p\| = \min_{q \in S} \|f - q\|$$

则称 p 为 f 在 S 中最佳逼近元素.

定理 29 *赋范空间最佳逼近元存在.*

证明: 令

$F(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \|f - c_1 g_1 - c_2 g_2 - \cdots - c_n g_n\|$

F 是连续函数:

$$\begin{aligned} & |F(c_1, \cdots, c_n) - F(d_1, \cdots, d_n)| \\ \leqslant \ & \left\| \sum_{j=0}^{n} (c_j - d_j) g_j \right\| \leqslant \max_j \left| c_j - d_j \right| \left(\sum_{j=1}^{n} \|g_j\| \right) \end{aligned}$$

在 F 中取 $f = 0$, 即

$$G(c_1, \cdots, c_n) = \|c_1 g_1 + c_2 g_2 + \cdots + c_n g_n\|$$

G 也是连续的. G 在单位球 $c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 1$ 上有最小值. 记这个最小值为 M.

$$c = (c_1, \cdots, c_n) \in R^n$$

取 $\gamma > \frac{2\|f\|}{M}$. 考虑闭球 $B = \{c \in R^n : \|c\|_2 \leqslant \gamma\}$. $F(c)$ 在这个闭球上有最小值

$$F(c_1^0, \cdots, c_n^0) = \min_{c \in B} F(c)$$

$$F(c_1^0, \cdots, c_n^0) \leqslant F(0, \cdots, 0) = \|f\|$$

当 $\|c\|_2 > \gamma$ 时

$$\begin{aligned} F(c) &\geqslant \|G(c)\| - \|f\| = \|c\|_2 G\left(\frac{c}{\|c\|_2}\right) - \|f\| \\ &\geqslant \frac{2\|f\|}{M} M - \|f\| = \|f\| \end{aligned}$$

所以 c^0 是 $F(c)$ 在全空间上的的最小值:

$$F(c^0) = \min_{c \in R^n} F(c)$$

即 $c_1^0 g_1 + \cdots + c_n^0 g_n$ 是 f 的最佳逼近元. 证毕

最佳逼近不一定唯一.

定义 30 X *为赋范空间. 如果*

$$\|f+g\| = \|f\| + \|g\| \longrightarrow f = \alpha g$$

则称 X *为严格赋范空间.*

性质 31 $C[a,b]$ *中定义范数*

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\, q(x)dx}$$

其中 $q(x)$ *几乎处处大于零. 则*$C[a,b]$ *是严格赋范空间.*

性质 32 *在严格赋范空间中, 最佳逼近元是唯一的.*

最佳一致逼近多项式

$C[a,b]$ 上定义无穷范数

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

逼近空间: n 次多项式 $\mathscr{P}_n$

$$E_n(f) = \min_{p\in\mathscr{P}_n} \|f-p\|_\infty$$

最佳一致逼近多项式.

引理 33 (Valli-Bussen) *设* $f \in C[a,b]$, $q \in \mathscr{P}_n$. *如果在区间* $[a,b]$ *上存在* $n+2$ *个点*

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} \leqslant b$$

使得 $f(x) - q(x)$ *在这些点上的值是正负交错的, 则*

$$E_n(f) \geqslant \mu = \min_{j=0,\cdots,n+1} \left| f(x_j) - q(x_j) \right|$$

证明: 反证. 设 p 为 f 在 $\mathscr{P}_n$ 中的最佳逼近:

$$\|f - p\|_\infty = E_n(f) < \mu$$

考虑函数 $q(x) - p(x)$ 在 $x_0, \cdots, x_{n+1}$ 上的符号.

$$q(x_j) - p(x_j) = [q(x_j) - f(x_j)] - [p(x_j) - f(x_j)]$$

由于 $\left|p(x_j) - f(x_j)\right| < \mu$, 所以 $q(x_j) - p(x_j)$ 的符号与 $[q(x_j) - f(x_j)]$. 也是正负交错的. 从而有 $n+1$ 个根. 但是 $q(x) - p(x)$ 是 n 次多项式. 矛盾. 证毕

令 $\|f\|_\infty = \delta$.
如果 $f(x_j) = \delta$, 则称 x_j 为一个正偏离点,
如果 $f(x_j) = -\delta$, 则称 x_j 为一个负偏离点.

定理 34 (切比雪夫) *多项式 $p(x) \in \mathscr{P}_n$ 为连续函数 f 的最佳一致逼近的充要条件是 $f-p$ 存在 $n+2$ 个正负交错的偏离点. (切比雪夫偏离点)*

证明. 充分性由 Valli-Bussen 引理得出.

定理 35 *连续函数的最佳一致逼近多项式是唯一的.*

证明: 设有两个最佳一致逼近多项式 $p, q \in \mathscr{P}_n$. 则

$$\left\|f - \frac{p+q}{2}\right\| \leqslant \left\|\frac{f-p}{2}\right\| + \left\|\frac{f-q}{2}\right\| = E_n(f)$$

所以 $(p+q)/2$ 也是最佳逼近多项式. 令

$$x_0, \cdots, x_{n+1}$$

是其正负交错偏离点. 有

$$\left|\frac{p(x_j)+q(x_j)}{2} - f(x_j)\right| = E_n(f)$$

从而

$$\left|p(x_j) - f(x_j) + q(x_j) - f(x_j)\right| = 2E_n(f)$$

但是

$$\left|q(x_j) - f(x_j)\right| \leqslant E_n(f), \left|p(x_j) - f(x_j)\right| \leqslant E_n(f)$$

只有当

$$p(x_j) - f(x_j) = q(x_j) - f(x_j) = \pm E_n(f)$$

时上式才能成立. 即 p, q 在这 $n+2$ 个点上的值相同. 从而 $p = q$. 证毕

切比雪夫多项式

定义

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n > 0)
\end{aligned}$$

$T_n(x)$ 对于的母函数:

$$\sum_{j=1}^{\infty} T_n(x)t^j = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}$$

表达式

$$T_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n}{2}$$

表达式三角函数表达式:

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= \cos(n \arccos x) \\
\theta &= \arccos x \\
\cos((n+1)\theta) &= 2\cos\theta\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)
\end{aligned}
$$

$$
T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & \text{当} \quad |x| \leqslant 1 \\ \cosh(n \ arc \cosh x) & \text{当} \quad x > 1 \\ (-1)^n \cosh(n \ arc \cosh(-x)) & \text{当} \quad x > 1 \end{cases}
$$

$T_n(x)$ 的零点:

$$
x_m = \cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{2n}\right), \quad (m = 1, \cdots, n)
$$

$T_n(x)$ 的极值点

$$
z_m = \cos\left(\frac{m\pi}{n}\right), \quad (m = 0, \cdots, n)
$$

$$
T_n(z_m) = \cos(m\pi) = (-1)^m
$$

首壹切比雪夫多项式:

$$\overline{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} = x^n + \cdots$$

定理 36 *$\overline{T}_n(x)$ 时偏离零点最小的 n 次首壹多项式. 即如果 $p_n(x)$ 为 n 次首壹多项式, 则*

$$\max_{x\in[-1,1]} |p_n(x)| = \|p_n(x)\|_\infty \geqslant \|\overline{T}_n(x)\|_\infty = 2^{1-n}$$

证明: 反证. 假设存在 $\|p_n(x)\| < 2^{1-n}$, 考虑 $n-1$ 次多项式$\overline{T}_n(x) - p_n(x)$ 在 $T_n(x)$ 的极值点 z_m 处的符号.

$$\begin{aligned} & sign\left(\overline{T}_n(z_m) - p_n(z_m)\right) \\ = & \; sign\left((-1)^m 2^{1-n} - p(z_m)\right) \\ = & \; (-1)^m, \quad (m = 0, \cdots, n) \end{aligned}$$

$n-1$ 次多项式 $\overline{T}_n(x) - p_n(x)$ 有 n 个零点. 矛盾.

证毕

事实上如果 $p_n(x) \neq \overline{T}_n(x)$, 则 $\|p_n(x))\| > 2^{1-n}$.

$[a,b]$ 上的切比雪夫多项式.

$y = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x$ 将区间 $x \in [-1,1]$ 变成 $y \in [a,b]$.

$$T_n\left(\frac{2y-b-a}{b-a}\right) \triangleq S_n(y)$$

是 $y \in [a,b]$ 上的切比雪夫多项式.

$$\overline{S}_n(y) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} S_n(y)$$

是 $[a,b]$ 上 n 次首壹切比雪夫多项式.

定理 37 *$\overline{S}_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上偏离零点最小的 n 次首壹多项式. 即如果 $p_n(x)$ 是 n 次首壹多项式, 则*

$$\max_{x\in[a,b]} |p_n(x)| \geqslant \max_{x\in[a,b]} \left|\overline{S}_n(x)\right| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$$

$S_n(x)$ 的零点:

$$x_m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{2n}\right) \quad m = 1, \cdots, n$$

$[-1,1]$ 上 $f(x)=x^n$ 的最佳 $n-1$ 次多项式逼近?

考虑

$$p_{n-1}(x)=x^n-\overline{T}_n(x)$$

$\overline{T}_n(x)=x^n-p_{n-1}(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有 $n+1$ 个正负交错的偏离点.

$p_{n-1}(x)$ 就是 x^n 的最佳一致逼近.

平方逼近

X 为内积空间. 范数 $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}$.

$$S = span\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$$

为 X 的 n 维子空间.

$f \in X$. 如果 $p \in S$ 满足:

$$\|f - p\| = \min_{q \in S} \|f - q\|$$

则称 p 为 f 在 S 中最佳平方逼近元素.
又称 p 为 f 在 S 中的投影.

正交 $(f, g) = 0$. 记为 $f \perp g$.

$C[a, b]$ 中的内积:

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$$

$\rho(x)$ 权函数. 几乎处处大于零.

定理 38 $p \in S$ 是 $f \in X$ 在 S 中的投影的充要条件是

$$f - p \perp S$$

证明: 充分性. 设 $f - p \perp S$. 有

$$\forall q \in S, \quad (f-p, p-q) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \|f-q\|^2 = (f-q, f-q) \\
= \ & (f-p+p-q, f-p+p-q) \\
= \ & (f-p, f-p) + 2(f-p, p-q) + (p-q, p-q) \\
= \ & \|f-p\|^2 + \|p-q\|^2 \\
\geqslant \ & \|f-p\|^2
\end{aligned}$$

必要性. 设 p 是 f 在 S 中的投影.

如果存在 $q \in S$ 使得

$$(f-p,q)=\delta \neq 0$$

不妨假设 $\|q\|=1$.

$$\begin{aligned}\|f-r\|^2 &= (f-r,f-r)\\ &= \|f-p\|^2-2\delta(f-p,q)+\delta^2\\ &= \|f-p\|^2-\delta^2\\ &< \|f-p\|^2\end{aligned}$$

与 p 是投影矛盾. 所以 $f-p\perp S$. 证毕

推论 39 *f 在 S 中的投影如果存在则唯一.*

如果有两个投影 p,q. 有

$$\|f-p\|^2=\|f-q\|^2+\|p-q\|^2$$

$f \in X,\ S = span\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$

$f - p \perp S$ 的充要条件 $f - p \perp g_j,\ j = 1, \cdots, n.$

即 $(p, g_j) = (f, g_j),\ j = 1, \cdots, n$

$p \in S, p = c_1 g_1 + \cdots + c_n g_n$

$$\begin{pmatrix} (g_1, g_1) & (g_1, g_2) & \cdots & (g_1, g_n) \\ (g_2, g_1) & (g_2, g_2) & \cdots & (g_2, g_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_n, g_1) & (g_n, g_2) & \cdots & (g_n, g_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, g_1) \\ (f, g_2) \\ \vdots \\ (f, g_n) \end{pmatrix}$$

$[a, b]$ 上, 积分定义

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

简单函数空间: n 次多项式

$$\mathscr{P}_n = \left\{1, x, x^2, \ldots, x^n\right\}$$

$f \in C[a, b]$ 在 $\mathscr{P}_n$ 中的投影为 $p_n(x)$, 则

1. $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_2 = 0$

2. 如果 $f'' \in C[a, b]$ 在对任意 ϵ , 当 n 充分大时有

$$\|f - p_n\|_\infty \leqslant \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$$

$[0,1]$ 上，积分定义

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

简单函数空间： n 次多项式

$$\mathscr{P}_n=\left\{1,x,x^2,\ldots,x^n\right\}$$

$f\in C[0,1]$ 在 $\mathscr{P}_n$ 中的投影?

$[0,1]$ 上，积分定义

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

简单函数空间

$$\mathscr{P}=\{1,x\}$$

$f=\sqrt{x}$ 在 $\mathscr{P}_1$ 中的投影?

$[0,2\pi]$ 上，积分定义为

$$(f,g)=\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

的正交基

$$1,\cos x,\sin x,\cos(2x),\sin(2x),\cdots$$

$f(x)$ 在

$span\{1,\cos x,\sin x,\cos(2x),\sin(2x),\cdots,\cos(nx),\sin(nx)\}$

中的投影:

$$a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ a_j &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(jx)dx \\ b_j &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(jx)dx \end{aligned}$$

$[-1, 1]$ 上, 积分定义为

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

的正交多项式: 切比雪夫多项式.

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

正交性

$$(T_m, T_n) = \begin{cases} 0 & \text{当} \quad m \neq n \\ \pi & \text{当} \quad m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{当} \quad m = n \neq 0 \end{cases}$$

$[-1,1]$ 上, 积分定义为

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}dx$$

的正交多项式: 第二类切比雪夫多项式.

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x)-U_{n-1}(x) \end{aligned}$$

$U_n(x)$ 的母函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n=\frac{1}{1-xt+t^2}$$

$$U_n(x)=\frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sin\arccos x}$$

正交性

$$(U_m,U_n)=\begin{cases} 0 & \text{当} \quad m\neq n \\ \pi & \text{当} \quad m=n=0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{当} \quad m=n\neq 0 \end{cases}$$

$C[a,b]$ 上给定内积定义:

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

正交多项式

$$\{p_0(x),p_1(x),\cdots,p_n(x),\cdots\}$$

其中 $p_j(x)$ 为 j 次多项式. 满足

$$(p_j,p_k)=0, \quad (j\neq k)$$

正交多项式的存在性: Gram-Schmit 正交化方法.

$$\begin{pmatrix}1 & x & x^2 & \cdots & x^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_0(x) & p_1(x) & \cdots & p_n(x)\end{pmatrix}\cdot R$$

其中R 为 $(n+1)\times(n+1)$ 的严格上三角矩阵.

$$R=\begin{pmatrix}1 & x & x & \cdots & x & x\\ 0 & 1 & x & \cdots & x & x\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

首壹正交多项式的唯一性

$p_0(x) = 1$ 是唯一确定的.

如果$p_0(x), \cdots, p_n(x)$ 唯一确定, 则

$$p_{n+1}(x) = x^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j p_j(x)$$

根据正交性 $(p_{n+1}, p_j) = 0$ 得到

$$\alpha_j = \frac{(x^{n+1}, p_j)}{(p_j, p_j)}, \qquad (j = 0, \cdots, n)$$

$p_{n+1}(x)$ 也被唯一的确定了.

首壹正交多项式的三递推公式. $n > 0$.

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)p_n(x) - \beta_n p_{n-1}(x)$$

其中

$$\alpha_n = \frac{(xp_n, p_n)}{(p_n, p_n)}, \quad \beta_n = \frac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})}$$

证明: 考虑有下面公式递归定义的多项式$g_n(x)$

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 1, \\ g_1(x) &= x - \delta, \quad \left(\delta = \frac{(x,1)}{(1,1)}\right) \\ g_{n+1}(x) &= (x - \alpha_n)g_n(x) - \beta_n g_{n-1}(x) \end{aligned}$$

其中 a_n 为$p_n(x)$ 的首项系数. 而

$$\alpha_n = \frac{(xg_n, g_n)}{(g_n, g_n)}, \quad \beta_n = \frac{(g_n, g_n)}{(g_{n-1}, g_{n-1})}$$

可以用归纳法证明

$$\{g_0(x), g_1(x), \cdots, g_n(x), \cdots\}$$

是首壹正交多项式. 根据首壹正交多项式的唯一性得出 $g_n = p_n$.

一般正交多项式的三递推公式

$$p_{n+1}(x) = \frac{a_{n+1}}{a_n}(x-\alpha_n)p_n(x) - \frac{a_{n+1}a_{n-1}}{a_n^2}\beta_{n-1}p_{n-1}(x)$$

其中 a_n 为$p_n(x)$ 的首项系数. 而

$$\alpha_n = \frac{(xp_n, p_n)}{(p_n, p_n)}, \quad \beta_n = \frac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})}$$

Legendre 正交多项式

$C[-1,1]$ 上定义内积 $(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

$$L_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]\right)$$

首项系数

$$a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)!}$$

正交性

$$(L_n,L_n)=\frac{2}{2n+1}$$

奇偶性

$$L_n(-x)=(-1)^n L_n(x)$$

三递推公式

$$L_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xL_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

前几项

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= 1\\
L_1(x) &= x\\
L_2(x) &= (3x-1)/2\\
L_3(x) &= (5x^3-3x)/2\\
L_4(x) &= (35x^4-30x^2+3)/8\\
L_5(x) &= (63x^5-70x^3+15x)/8\\
L_6(x) &= (231x^6-315x^4+105x^2-5)/16
\end{aligned}
$$

$C[a,b]$ 上定义内积 $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$ 的正交多项式.

$$y=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}x, \quad x=\frac{2y-a-b}{b-a}$$

正交多项式

$$Q_n(y)=L_n\left(\frac{2y-a-b}{b-a}\right)$$

多项式插值问题

Runge 现象

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad [-1,1]$$

将区间 n 等分:

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n; \qquad x_j = \frac{2j}{n} - 1$$

当 $|x| < 0.72$ 时收敛; 当 $|x| > 0.72$ 时误差很大.

Faber 定理

对区间 [a,b] 上的任意划分

$$
\begin{array}{llll}
x_0^0 & & & \\
x_0^1 & x_1^1 & & \\
x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \\
 & \cdots & & \\
x_0^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \\
 & \cdots & &
\end{array}
$$

总存在 $f(x) \in C[a,b]$ 使得按照上面三角矩阵的第 n 行为节点进行插值得到的插值函数 $p_n(x)$ 不能一致收敛到 $f(x)$.

即不管如何加密插值点，都不能保证收敛性.

$[a,b]=[-1,1]$,
插值节点取 $n+1$ 次切比雪夫多项式的零点.

甲)如果 $\|f^{(m)}\|_\infty < \infty$ 则

$$\|f-L_n\|_\infty = O\left(\frac{\ln n}{n^m}\right)$$

乙) 如果 f 在 $[-1,1]$ 上解析, 则

$$\|f-L_n\|_\infty = O\left(q^m\right), \quad (0<q<1)$$

样条插值

给定区间 [a,b] 的一个划分:

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < d_n = b$$

如果函数s(x) 满足:

1. 在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上是次数不超过 k 的多项式.

2. 在整个区间 $[a, b]$ 上有 $k-1$ 阶连续的导数.

则称s(x) 为划分 π 上的 k 次样条函数.

x_0, x_n:　边界节点.　　其他为内部节点.

[a,b] 可以为 $(-\infty, \infty)$.

$$\mathscr{D}_{k,\pi}$$

半截多项式

$$x_+^k = \begin{cases} x^k & \text{当} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{当} \quad x < 0 \end{cases}$$

定理 40 线性空间 $\mathscr{D}_{k,\pi}$ 的维数是 $n+k$. 事实上

$$\mathscr{D}_{k,\pi} = span\left\{1, x, \cdots, x^k, (x-x_1)_+^k, \cdots, (x-x_{n-1})_+^k\right\}$$

证明. 设 $s(x) \in \mathscr{D}_{k,\pi}$. 令

$$\delta_j = s^{(k)}(x_j+0) - s^{(k)}(x_j-0)$$

则

$$s(x) = p(x) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\delta_j}{k!}(x-x_j)_+^k$$

三次样条插值问题

定理 41 *两个边界条件的三次样条插值问题的解都是存在并且唯一的.*

定理 42 *设* $f(x)$ *在* $C[a,b]$ *上四阶导数连续.* $s(x)$ *是满足第一或者第二边界条件的三次样条插值函数. 令* $h_j = x_{j+1} - x_j, h = \max\left\{h_j\right\}$. *则*

$$\|f^{(m)} - s^{(m)}\|_\infty \leqslant \alpha_m \|f^{(4)}\|_\infty h^{4-m}$$

其中 $m = 0, 1, 2$ *而* $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2$ *是与* f, s *无关的常数.*

三弯矩法求三次样条插值函数.

B样条

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$$

令

$$v_j^k(x) = \frac{x - x_j}{x_{j+k} - x_j}, \quad (k > 0)$$

定义零次样条

$$B_j^0(x) = \begin{cases} 1, & 当 x \in (x_j, x_{j+1}) \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

递归定义 k 次B 样条:

$$B_j^k(x) = v_j^k(x) B_j^{k-1}(x) + \left[1 - v_{j+1}^k(x)\right] B_{j+1}^{k-1}(x)$$

$$B_j^1(x) = \begin{cases} \frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j} & \text{当} \quad x \in (x_j, x_{j+1}] \\ \frac{x-x_{j+2}}{x_{j+1}-x_{j+2}} & \text{当} \quad x \in [x_{j+1}, x_{j+2}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

性质 43

1. 当 $x \in (x_j, x_{j+k+1})$ 时， $B_j^k(x) > 0$. 其他地方等于零.

2. $\forall x, \sum_{j=-\infty}^{\infty} B^k(x) = 1$

3. $B_j^k(x) \in \mathscr{D}_{k,\pi}$.

4. $\mathscr{D}_{k,\pi} = span\left\{B_{-k}^k(x), \cdots, B_0^k(x), \cdots, B_{n-1}^k(x)\right\}$

令 $x_j = j - (k+1)/2, \quad j \in (-\infty, \infty)$

$$\Omega^k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{k+1}{j} \left(x + \frac{k+1}{2} - j \right)_+^k$$

中心点都在 0. 偶函数.

当 $|x| \geqslant (k+1)/2$ 时, $\Omega^k(x) = 0$.

当 $|x| < (k+1)/2$ 时, $\Omega^k(x) > 0$.

$\Omega^1(x) = (x+1)_+ - 2x_+ + (x-1)+$

$$\Omega^1(x) = (x+1)_+ - 2x_+ + (x-1)_+$$

等距划分. π:

$$x_0 < \cdots < x_n, \quad x_j = a + jh, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

记 $x_\alpha = a + \alpha h$. 令

$$\phi_i(x) = \Omega^k \left(\frac{x - x_{i-(k-1)/2}}{h} \right)$$

$\phi_i(x)$ 定义在 $(-\infty, \infty)$ 上, 以

$$x_{i-k}, x_{i-k+1}, \cdots, x_{i+1}$$

为划分点的k 次样条函数. (B样条)

$$\mathscr{D}_{k,\pi} = span \left\{ \phi_0(x), \cdots, \phi_{n+k-1}(x) \right\}$$

傅里叶变换

$$f : (-\infty, \infty) \to C$$

以 2π 为周期. 将区间 $[0, 2\pi)$ n 等分.

$$x_j = \frac{2\pi j}{n}, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1$$

逼近空间

$$T_n = span\{\phi_0(x), \phi_1(x), \cdots, \phi_{n-1}(x)\}$$

其中

$$\phi_k(x) = e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$$

三角函数插值问题: 求

$$s(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \phi_k(x) \in T_n$$

满足

$$s(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \cdots, n-1$$

$$w = e^{i\frac{2\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 为虚单位.

$$\phi_k(x_j) = \phi_k\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = w^{jk}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

快速傅里叶变换

$w = e^{i\frac{2\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. 称矩阵:

$$F(w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

为 n 阶傅里叶变换.

$$F(w) = \left(F_{j,k}\right) = \left(w^{jk}\right), \quad j, k \in [0, n)$$

普通的矩阵向量乘法 $y = F(w)x$, 复杂度为 $O(n^2)$.

当 $n = 2^p$ 时, 利用 w 的周期性: $w^{kn+j} = w^j$, 可以将其复杂度降为 $O(n\log n)$.

以 $n = 8$ 为例.

$$y_j = \sum_{k=0}^{7} x_k w^{jk}, \quad 0 \le j < 8 \tag{4}$$

将 j, k 表示为二进制形式:

$$\begin{aligned} j = (j_2, j_1, j_0) &= 4j_2 + 2j_1 + j_0 \\ k = (k_2, k_1, k_0) &= 4k_2 + 2k_1 + k_0 \end{aligned}$$

将公式 (4) 也转换为二进制形式:

$$\begin{aligned} y_j &= y(j_2, j_1, j_0) = \sum_{k=0}^{7} x_k w^{jk} \\ &= \sum_{k_0=0}^{1} \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} x(k_2, k_1, k_0) w^{(k_2,k_1,k_0)(j_2,j_1,j_0)} \end{aligned}$$

$$(k_2, k_1, k_0)(j_2, j_1, j_0) = \\ 4k_2(j_2, j_1, j_0) + 2k_1(j_2, j_1, j_0) + k_0(j_2, j_1, j_0)$$

$$w^8 = 1,$$

$$w^{(k_2,k_1,k_0)(j_2,j_1,j_0)} = \\ w^{k_2(j_0,0,0)} w^{k_1(j_1,j_0,0)} w^{k_0(j_2,j_1,j_0)}$$

傅里叶变换可以表示为

$$y(j_2, j_1, j_0) = \\ \sum_{k_0=0}^{1} \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} x(k_2, k_1, k_0) w^{k_2(j_0,0,0)} w^{k_1(j_1,j_0,0)} w^{k_0(j_2,j_1,j_0)}$$

$$= \sum_{k_0=0}^{1} \left[\sum_{k_1=0}^{1} \left(\sum_{k_2=0}^{1} x(k_2, k_1, k_0) w^{k_2(j_0,0,0)} \right) w^{k_1(j_1,j_0,0)} \right] w^{k_0(j_2,j_1,j_0)}$$

令:

$$a(j_0,k_1,k_0)=\sum_{k_2=0}^{1}x(k_2,k_1,k_0)w^{k_2(j_0,0,0)}$$

则:

$$y(j_2,j_1,j_0)=$$
$$\sum_{k_0=0}^{1}\left[\sum_{k_1=0}^{1}\left(\sum_{k_2=0}^{1}x(k_2,k_1,k_0)w^{k_2(j_0,0,0)}\right)w^{k_1(j_1,j_0,0)}\right]w^{k_0(j_2,j_1,j_0)}$$
$$=\sum_{k_0=0}^{1}\left[\sum_{k_1=0}^{1}a(j_0,k_1,k_0)w^{k_1(j_1,j_0,0)}\right]w^{k_0(j_2,j_1,j_0)}$$

令

$$b(j_1,j_0,k_0)=\sum_{k_1=0}^{1}a(j_0,k_1,k_0)w^{k_1(j_1,j_0,0)}$$

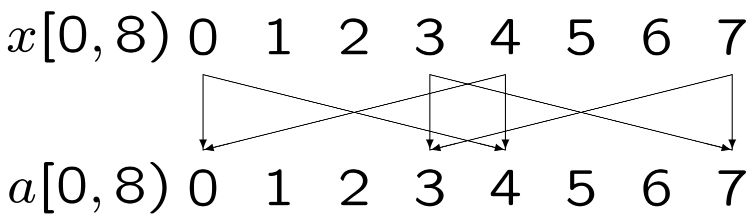
则:

$$\begin{aligned}y(j_2,j_1,j_0) &= \sum_{k_0=0}^{1}\left[\sum_{k_1=0}^{1}a(j_0,k_1,k_0)w^{k_1(j_1,j_0,0)}\right]w^{k_0(j_2,j_1,j_0)}\\ &= \sum_{k_0=0}^{1}b(j_1,j_0,k_0)w^{k_0(j_2,j_1,j_0)}\end{aligned}$$

a 向量的计算格式为:

$$
\begin{aligned}
a(j_0, k_1, k_0) &= \sum_{k_2=0}^{1} x(k_2, k_1, k_0) w^{k_2(j_0,0,0)} \\
&= x(0, k_1, k_0) + x(1, k_1, k_0) w^{(j_0,0,0)} \\
a(0, k_1, k_0) &= x(0, k_1, k_0) + x(1, k_1, k_0) \\
a(1, k_1, k_0) &= x(0, k_1, k_0) - x(1, k_1, k_0)
\end{aligned}
$$

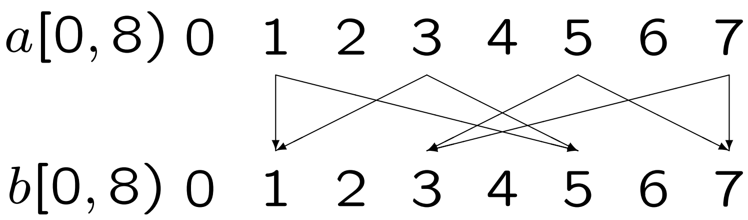
可以用图示为:



b 向量的计算格式为

$$
\begin{aligned}
b(j_1, j_0, k_0) &= \sum_{k_1=0}^{1} a(j_0, k_1, k_0) w^{k_1(j_1, j_0, 0)} \\
&= a(j_0, 0, k_0) + a(j_0, 1, k_0) w^{(j_1, j_0, 0)} \\
b(0, j_0, k_0) &= a(j_0, 0, k_0) + a(j_0, 1, k_0) w^{2j_0} \\
b(1, j_0, k_0) &= a(j_0, 0, k_0) - a(j_0, 1, k_0) w^{2j_0}
\end{aligned}
$$

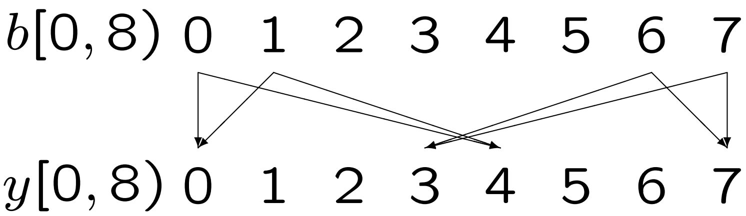
可以用图示为:



y 向量的计算格式为

$$\begin{aligned} y(j_2,j_1,j_0) &= \sum_{k_0=0}^{1} b(j_1,j_0,k_0)w^{k_0(j_2,j_1,j_0)} \\ &= b(j_1,j_0,0)+b(j_1,j_0,1)w^{(j_2,j_1,j_0)} \\ y(0,j_1,j_0) &= b(j_1,j_0,0)+b(j_1,j_0,1)w^{2j_1+j_0} \\ y(1,j_1,j_0) &= b(j_1,j_0,0)-b(j_1,j_0,1)w^{2j_1+j_0} \end{aligned}$$

可以用图示为:



二进制倒序变换

长度为 $n = 2^p$ 的数组，其二进制倒序是指将下标的二进制表示中的 0,1 串倒置.

长度为 8的数组

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$

的二进制倒序是

$$(x_0, x_4, x_2, x_6, x_1, x_5, x_3, x_7)$$

(0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0)

的二进制倒序为:

(0.0, 4.0, 2.0, 6.0, 1.0, 5.0, 3.0, 7.0)

$n = 8$ 的二进制倒序变换

数组分量	下标	下标倒置	数组分量
x_0	000	000	x_0
x_1	001	100	x_4
x_2	010	010	x_2
x_3	011	110	x_6
x_4	100	001	x_1
x_5	101	101	x_5
x_6	110	011	x_3
x_7	111	111	x_7

B: n 维空间中的二进制倒置变换.

二进制模式串倒置后再倒置就变回自身. 所以

$$B^2 = I$$

当 $n = 8$ 时 B 相当于下面的排列:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$
$$= (0)(1,4)(2)(3,6)(5)(7)$$

B 是线性变换

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0^T \\ e_4^T \\ e_2^T \\ e_6^T \\ e_1^T \\ e_5^T \\ e_3^T \\ e_7^T \end{pmatrix} \\ &= (e_0, e_4, e_2, e_6, e_1, e_5, e_3, e_7) \\ &= B^T = B^{-1} \end{aligned}$$

$n=16$ 的二进制倒序变换

数组分量	下标	下标倒置	数组分量
x_0	0000	0000	x_0
x_1	0001	1000	x_8
x_2	0010	0100	x_4
x_3	0011	1100	x_{12}
x_4	0100	0010	x_2
x_5	0101	1010	x_{10}
x_6	0110	0110	x_6
x_7	0111	1110	x_{14}
x_8	1000	0001	x_1
x_9	1001	1001	x_9
x_{10}	1010	0101	x_5
x_{11}	1011	1101	x_{13}
x_{12}	1100	0011	x_3
x_{13}	1101	1011	x_{11}
x_{14}	1110	0111	x_7
x_{15}	1111	1111	x_{15}

$(0)(1,8)(2,4)(3,12)(5,10)(6)(7,14)(9)(11,13)(15)$

令 $k \in [0, 2^p)$, k 的 p 位二进制表示为

$$k = (b_{p-1} \cdots b_1 b_0)_2 = \sum_{j=0}^{p-1} b_j 2^j$$

记 k 的二进制倒置数为

$$\overleftarrow{k} = (b_0 b_1 \cdots b_{p-1})_2 = \sum_{j=0}^{p-1} b_j 2^{p-j-1}$$

有下面关系:

$$\begin{array}{ccc|ccc} k & = & (xyz01\cdots1)_2 & \overleftarrow{k} & = & (1\cdots10zyx)_2 \\ \hline k+1 & = & (xyz10\cdots0)_2 & \overleftarrow{k+1} & = & (0\cdots01zyx)_2 \end{array}$$

由 k 到 $k+1$ 可以由计算机硬件作加法实现.

由 $\overleftarrow{k}$ 到 $\overleftarrow{k+1}$ 的变换需要程序自己实现.

```
void biot(T* x, int p)          //二进制倒序变换
{
    if(p < 2)  return;
    int const n = (1 << p);
    int k = 1;
    int j = n/2;                    //j 为 k 的倒置
    while(k < n - 1) {
        if(k < j)  std::swap(x[k], x[j]);
        //求 k+1 的倒置
        p = n/2;
        while(j >= p) { j = j-p;   p = p/2; }
        j = j + p;                  //j 为 k+1 的倒置
        k = k + 1;
    }
}
```

$BF(w)$ 的计算格式

正序傅里叶变换:

$$y(j_2, j_1, j_0) = \sum_{k=0}^{7} x_k w^{jk}$$

$$= \sum_{k_0=0}^{1} \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} x(k_2, k_1, k_0) w^{(k_2,k_1,k_0)(j_2,j_1,j_0)}$$

倒序傅里叶变换:

$$y(j_0, j_1, j_2) = \sum_{k=0}^{7} x_k w^{jk}$$

$$= \sum_{k_0=0}^{1} \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} x(k_2, k_1, k_0) w^{(k_2,k_1,k_0)(j_2,j_1,j_0)}$$

$$y(j_0, j_1, j_2) =$$

$$\sum_{k_0=0}^{1} \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} x(k_2, k_1, k_0) w^{k_2(j_0,0,0)} w^{k_1(j_1,j_0,0)} w^{k_0(j_2,j_1,j_0)}$$

$$= \sum_{k_0=0}^{1} \left[\sum_{k_1=0}^{1} \left(\sum_{k_2=0}^{1} x(k_2, k_1, k_0) w^{k_2(j_0,0,0)} \right) w^{k_1(j_1,j_0,0)} \right] w^{k_0(j_2,j_1,j_0)}$$

令:

$$a(j_0,k_1,k_0)=\sum_{k_2=0}^{1}x(k_2,k_1,k_0)w^{k_2(j_0,0,0)}$$

$$\begin{aligned}
y(j_0,j_1,j_2)&=\\
\sum_{k_0=0}^{1}\left[\sum_{k_1=0}^{1}\left(\sum_{k_2=0}^{1}x(k_2,k_1,k_0)w^{k_2(j_0,0,0)}\right)w^{k_1(j_1,j_0,0)}\right]w^{k_0(j_2,j_1,j_0)}\\
&=\sum_{k_0=0}^{1}\left[\sum_{k_1=0}^{1}a(j_0,k_1,k_0)w^{k_1(j_1,j_0,0)}\right]w^{k_0(j_2,j_1,j_0)}
\end{aligned}$$

令:

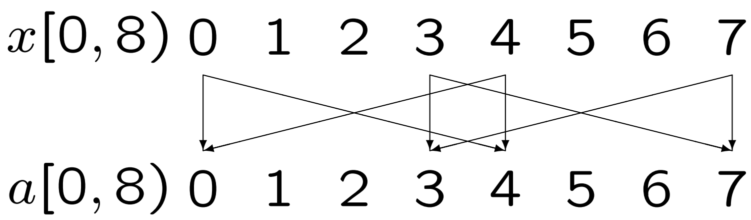
$$b(j_0,j_1,k_0)=\sum_{k_1=0}^{1}a(j_0,k_1,k_0)w^{k_1(j_1,j_0,0)}$$

$$\begin{aligned}
y(j_0,j_1,j_2)&=\sum_{k_0=0}^{1}\left[\sum_{k_1=0}^{1}a(j_0,k_1,k_0)w^{k_1(j_1,j_0,0)}\right]w^{k_0(j_2,j_1,j_0)}\\
&=\sum_{k_0=0}^{1}b(j_0,j_1,k_0)w^{k_0(j_2,j_1,j_0)}
\end{aligned}$$

a 向量的计算格式为:

$$
\begin{aligned}
a(j_0, k_1, k_0) &= \sum_{k_2=0}^{1} x(k_2, k_1, k_0) w^{k_2(j_0,0,0)} \\
&= x(0, k_1, k_0) + x(1, k_1, k_0) w^{(j_0,0,0)} \\
a(0, k_1, k_0) &= x(0, k_1, k_0) + x(1, k_1, k_0) \\
a(1, k_1, k_0) &= x(0, k_1, k_0) - x(1, k_1, k_0)
\end{aligned}
$$

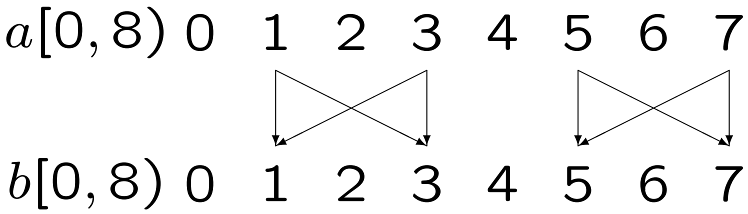
可以用图示为:



b 向量的计算格式为

$$
\begin{aligned}
b(j_0, j_1, k_0) &= \sum_{k_1=0}^{1} a(j_0, k_1, k_0) w^{k_1(j_1, j_0, 0)} \\
&= a(j_0, 0, k_0) + a(j_0, 1, k_0) w^{(j_1, j_0, 0)} \\
b(j_0, 0, k_0) &= a(j_0, 0, k_0) + a(j_0, 1, k_0) w^{2j_0} \\
b(j_0, 1, k_0) &= a(j_0, 0, k_0) - a(j_0, 1, k_0) w^{2j_0}
\end{aligned}
$$

可以用图示为:



y 向量的计算格式为

$$
\begin{aligned}
y(j_0, j_1, j_2) &= \sum_{k_0=0}^{1} b(j_0, j_1, k_0) w^{k_0(j_2, j_1, j_0)} \\
&= b(j_0, j_1, 0) + b(j_0, j_1, 1) w^{(j_2, j_1, j_0)} \\
y(j_0, j_1, 0) &= b(j_0, j_1, 0) + b(j_0, j_1, 1) w^{2j_1 + j_0} \\
y(j_0, j_1, 1) &= b(j_0, j_1, 0) - b(j_0, j_1, 1) w^{2j_1 + j_0}
\end{aligned}
$$

可以用图示为:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
b[0,8) & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
y[0,8) & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7
\end{array}
$$

傅里叶变换的逆变换

$$F(w)F(\overline{w}) = nI, \qquad F^{-1}(w) = \frac{1}{n}F(\overline{w})$$

多项式乘法与长整数乘法

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_{n-1} x^{n-1} \\
g(x) &= g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots + g_{n-1} x^{n-1} \\
h(x) &= f(x) g(x) \\
&= h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots + h_{n-1} x^{n-1}
\end{aligned}
$$

在 n 个不同点上的值唯一确定一个多项式

$$x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$$

由系数计算多项式的值

$$
\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}
$$

取 $x_j = w^j, \quad w = e^{i\frac{2\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$$\begin{pmatrix} f(w^0) \\ f(w^1) \\ f(w^2) \\ \vdots \\ f(w^{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$