数值分析与计算

北京邮电大学软件学院 漆 涛

October 18, 2019

目录

第三章：线代数方程组求解

高斯消去法，矩阵LU分解

对称矩阵的Cholesky 分解

矩阵范数，误差分析，算法稳定性

迭代法

上三角矩阵方程组解

$$Ux = b$$

```
for(j = n; j>0; --j)
```
$$x_j = \left(b_j - \sum_{k=j+1}^{n} U_{j,k} x_k\right) / u_{j,j}$$

主要工作量乘法次数:

$$\sum_{j=n}^{1} (n-j) = \frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

单位下三角矩阵方程组解

$$Lx = b$$

```
for(j = 1; j<= n; ++j)
```
$x_j = b_j - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k} x_k$

主要工作量乘法次数:

$$\sum_{j=1}^{n} (j-1) = \frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

高斯(Gauss)消去法

$$Ax=b,\qquad \begin{pmatrix}1&2&0&0\\3&7&1&0\\2&6&0&2\\1&5&5&-5\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\11\\10\\6\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\-2&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&0&3\\3&7&1&0&11\\2&6&0&2&10\\1&5&5&-5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0&0&3\\0&1&1&0&2\\0&2&0&2&4\\0&3&5&-5&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&-3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&0&3\\0&1&1&0&2\\0&2&0&2&4\\0&3&5&-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0&0&3\\0&1&1&0&2\\0&0&-2&2&0\\0&0&2&-5&-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&0&3\\0&1&1&0&2\\0&0&-2&2&0\\0&0&2&-5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0&0&3\\0&1&1&0&2\\0&0&-2&2&0\\0&0&0&-3&-3\end{pmatrix}$$

高斯消去法的矩阵表示，矩阵的LU分解

$$G_3G_2G_1A = U$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}A = U$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}U$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}U$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 7 & 1 & 0\\ 2 & 6 & 0 & 2\\ 1 & 5 & 5 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

矩阵的 Gauss 消去 LU 就地分解:

$$A = LU$$

```
gauss_lu(double* a, int n)--> void  {
     for(j = 1; j <= n; ++j){
         for(k = j+1; k <= n; ++k){
             temp = a_{k,j} = a_{k,j}/a_{j,j};
             for(p =j+1; p <= n; ++p)
                 a_{k,p} = a_{k,p} - a_{j,p} * temp;
         }
     }
}
```

乘法次数:

$$\sum_{j=1}^{n} (n-j)^2 = \frac{(n-1)(n-\frac{1}{2})n}{3} \approx \frac{n^3}{3}$$

定理 13 (矩阵的LU分解) *A 是 $n \times n$ 实矩阵. 如果 A 的顺序主子式 $D_1, D_2, \cdots, D_{n-1}$ 均非零, 则 A 可分解为单位下角矩阵 L 和一个上三角矩阵 U 的乘积. 并且这种分解是唯一的.*

证明.

$$det(D_j) = u_{11}u_{22}\cdots u_{jj}$$

$u_{11}, \cdots u_{n-1,n-1}$ 非零, 高斯消去法可以进行. 所以矩阵 A 存在LU 分解.

唯一性

$$LU = L_1U_1$$

由高斯消去法得到 $A = LU$.

$$L_1^{-1}LU = U_1$$

$L_1^{-1}L$ 是单位下三角矩阵. 容易得出 $L_1^{-1}L = I$.

列选主元高斯消去法.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{15}{4} & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad E_{12}A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{15}{4} & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E_{12}A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{41}{12} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \end{pmatrix}$$

$$E_{24} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{41}{12} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{41}{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{41}{12} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \\ 0 & 0 & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} E_{34} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \\ 0 & 0 & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{129}{32} \end{pmatrix}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_3 E_{34} G_2 E_{24} G_1 E_{12} A = U$$

$$A = E_{12} G_1^{-1} E_{24} G_2^{-1} E_{34} G_3^{-1} U$$

$$A = E_{12} E_{24} E_{34} \left[E_{34} E_{24} G_1^{-1} E_{24} E_{34} \right] \left[E_{34} G_2^{-1} E_{34} \right] \left[G_3^{-1} \right] U$$

$$E_{34} E_{24} E_{12} A = \left[E_{34} E_{24} G_1^{-1} E_{24} E_{34} \right] \left[E_{34} G_2^{-1} E_{34} \right] \left[G_3^{-1} \right] U$$

$$PA = LU$$

$$E_{34}E_{24}G_1^{-1}E_{24}E_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{34}G_2^{-1}E_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{8} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

列选主元Gauss 消去法就地 LU 分解

$$P=(1,2,3,4)$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \frac{15}{4} & 0\\ 3 & 7 & 1 & 0\\ 2 & 6 & 0 & 2\\ 1 & 5 & 5 & -5\end{pmatrix},\quad E_{12}A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 1 & 0\\ 1 & 2 & \frac{15}{4} & 0\\ 2 & 6 & 0 & 2\\ 1 & 5 & 5 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0\\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}E_{12}A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{41}{12} & 0\\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 2\\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5\end{pmatrix}$$

$$P=(2,1,3,4)$$

$$A\Rightarrow\begin{pmatrix}3 & 7 & 1 & 0\\ \underline{1/3} & -\frac{1}{3} & \frac{41}{12} & 0\\ \underline{2/3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 2\\ \underline{1/3} & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5\end{pmatrix}$$

$$E_{24}\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{41}{12} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{41}{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{41}{12} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \\ 0 & 0 & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

$$P = (2, 4, 3, 1)$$

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ \underline{1/3} & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \\ \underline{2/3} & \underline{1/2} & -3 & \frac{9}{2} \\ \underline{1/3} & \underline{-1/8} & 4 & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} E_{34} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \\ 0 & 0 & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{129}{32} \end{pmatrix}$$

$$P = (2, 4, 1, 3)$$

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ \underline{1/3} & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -5 \\ \underline{1/3} & \underline{-1/8} & 4 & -\frac{5}{8} \\ \underline{2/3} & \underline{1/2} & \underline{-3/4} & \frac{129}{32} \end{pmatrix}$$

列选主元Gauss 消去法就地 LU 分解

```
guass_lu(double* a, int* p, int n)--> void
{
    p[1,n] = {1, 2, ···, n};
    for(j = 1; j < n; ++j) {
        在 {a_{j,j}, a_{j+1,j}, ···, a_{n,j}} 找绝对值最大者 a_{t,j};
        swap(a的第j行, a的第t行);
        swap(p_j, p_t);
        for(k = j+1; k <= n; ++k) {
            temp = a_{k,j} = a_{k,j}/a_{j,j};
            for(s = j+1; s <= n; ++s)
                a_{k,s} = a_{k,s} - a_{j,s} * temp;
        }
    }
```

Doolittle 分解算法(矩阵三角分解. LU 分解)

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\
0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\
0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix} l_{j1} & l_{j2} & \cdots & l_{j,j-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{jj} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{jj}$$

$$u_{jj} = a_{jj} - \sum_{\delta=1}^{j-1} l_{j\delta} u_{\delta j}$$

$$\begin{pmatrix} l_{j1} & l_{j2} & \cdots & l_{j,j-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \vdots \\ u_{jk} \\ x \\ x \end{pmatrix} = a_{jk}$$

其中 $k > j$. 得到

$$u_{jk} = a_{jk} - \sum_{\delta=1}^{j-1} l_{j\delta} u_{\delta k}$$

算出 $(0 \cdots, 0, u_{jj}, u_{j,j+1}, \cdots, u_{j,n})$

令 $i > j$

$$\begin{pmatrix} l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{ij} & x & x & \cdots & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{jj} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{ij}$$

得到

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{\delta=1}^{j-1} l_{i\delta} u_{\delta j} \right) / u_{jj}$$

算出

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ l_{j+1,j} \\ \vdots \\ l_{n,j} \end{pmatrix}$$

```
doolittle(double* a, int n) --> void
{
     for(j = 1, j <= n; ++j) {
         for(k = j, k <= n; ++k)
             u_{j,k} = a_{j,k} - \sum_{δ=1}^{j-1} l_{j,δ} u_{δ,k};
         for(k = j+1; j <= n; ++k)
             l_{k,j} = ( a_{j,k} - \sum_{δ=1}^{j-1} l_{k,δ} u_{δ,j} ) / u_{jj};
     }
}
```

乘法次数

$$\sum_{j=1}^{n} 2(j-1)(n-j+1) \approx \frac{n^3}{3}$$

向量与矩阵范数

$x, y \in R^n$ 或者 $x, y \in C^n$.

1. (非负性)

   $\|x\| \geqslant 0, \quad \|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

2. (齐次性)

   对任意的 $\alpha \in R$ (或者$\alpha \in C$) 都有,

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$$

3. (三角不等式)

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

1. 壹范数

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} \left|x_j\right|$$

2. 贰范数, 欧几里得范数

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|x_j\right|^2}$$

3. p 范数

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} \left|x_j\right|^p} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

4. 无穷范数

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{\left|x_j\right|\right\}$$

范数的连续性

$$f(x) = f(x_1, \cdots, x_n) = \|x\|$$

$$\begin{aligned}
\big|\|x\| - \|y\|\big| &\leqslant \|x-y\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j) e_j\right\| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|x_j - y_j\right| \|e_j\| \\
&\leqslant \|x-y\|_\infty \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|
\end{aligned}$$

范数的等价性

定理 14

$$A\|x\|_s \leqslant \|x\|_t \leqslant B\|x\|_s$$

证明: $S = \{x \in R^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$. S 是有界闭集. $f(x) = \|x\|_t$ 在 S 上的最大最小值:

$$A \leqslant \|x\|_t \leqslant B$$

对任意 $x \neq 0$,

$$A \leqslant \left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\|_t \leqslant B$$

由范数定义的收敛性

R^n 中点列 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 收敛于 x^*, 记为

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$$

如果

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0$$

矩阵范数

$A, B \in R^{n\times n}$

1. (非负性)

   $\|A\| \geqslant 0, \quad \|A\| = 0$ 当且仅当 $A = 0$;

2. (齐次性)

   对任意的 $\alpha \in R$ (或者$\alpha \in C$) 都有,

   $$\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$$

3. (三角不等式)

   $$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$$

4. (相容性)

   $$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$$

有向量范数诱导的矩阵范数(算子范数, 从属范数)

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

矩阵范数与向量范数的相容性:

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$$

算子范数是相容范数.

算子范数: $\|I\| = 1$.

1. 行范数，无穷范数

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{k=1}^{n} \left|a_{jk}\right|$$

2. 列范数，壹范数

$$\|A\|_1 = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{jk}\right|$$

3. 贰范数，欧几里得范数，谱范数

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} = \sqrt{\rho(A^TA)}$$

4. p 范数

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

5. F 范数，弗罗贝尼乌斯范数

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^2} = \sqrt{tr(A^TA)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A^TA)}$$

F 范数是相容范数. 它与矩阵的欧几里得范数相容.

由于

$$\|A\|_2 \leqslant \|A\|_F$$

所以

$$\|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_2\|x\|_2 \leqslant \|A\|_F\|x\|_2$$

定理 15 *如果矩阵范数 $\|A\|$ 与某个向量范数相容, 则*

$$\rho(A) \leqslant \|A\|$$

$\rho(A)$: A 的谱半径.

如果 A 为对称矩阵, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \rho(A)$

摄动分析

定理 16 *矩阵范数* $\|\cdot\|$ *为算子范数. 并且* $\|B\| < 1$, *则* $I \pm B$ *非奇, 且*

$$\|I \pm B\| \leqslant \frac{1}{1 - \|B\|}$$

证明: 如果 $I - B$ 奇异. 则存在非零的 x^* 使得

$$x^* = Bx^*$$

从而

$$\|x^*\| = \|Bx^*\| \leqslant \|B\| \|x^*\| < \|x^*\|$$

矛盾.

$$(I-B)(I-B)^{-1} = I, \quad (I-B)^{-1} = I + B(I-B)^{-1}$$

$$\|(I-B)^{-1}\| \leqslant \|I\| + \|B\| \cdot \|(I-B)^{-1}\|$$

条件数 $cond(A), \kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$.

定理 17 *设* $Ax = b, \quad A(x + \delta x) = b + \delta b$. *则*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

证明:

$$\|b\| \leqslant \|A\|\|x\|, \quad \|\delta x\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

两式相乘.

定理 18

$$Ax=b,\quad (A+\delta A)(x+\delta x)=b$$

并且 $\|A^{-1}\|\|\delta A\|<1$ *则有*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leqslant\frac{\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

证明: 由于$\|A^{-1}\delta A\|\leqslant\|A^{-1}\|\|\delta A\|<1$, 从而 $I+A^{-1}\delta A$ 非奇.

$$(A+\delta A)\delta x=-\delta Ax,\quad \delta x=(A+\delta A)^{-1}\delta Ax$$

$$\begin{aligned}\delta x &= -(I+A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}\delta Ax\\ \|\delta x\| &\leqslant \frac{\|A^{-1}\delta A\|}{1-\|A^{-1}\delta A\|}\|x\|\\ &\leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|\delta A\|}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}\|x\|\\ \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} &\leqslant \frac{\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\end{aligned}$$

定理 19

$$Ax = b, \quad (A+\delta A)(x+\delta x) = b + \delta b$$

并且 $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$ *则有*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

证明:

$$\begin{aligned}
\delta x &= (I + A^{-1}\delta A)^{-1}\left(A^{-1}\delta b - A^{-1}\delta A x\right) \\
\|\delta x\| &\leqslant \frac{1}{1-\|A^{-1}\delta A\|}\left(\|A^{-1}\|\|\delta b\| + \|A^{-1}\delta A\|\|x\|\right) \\
&\leqslant \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\|x\| + \frac{\|\delta b\|}{\|A\|}\right) \\
\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} &\leqslant \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|A\|\|x\|}\right) \\
&\leqslant \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b|}\right)
\end{aligned}$$

1. $\kappa(A) \geqslant |\lambda_1/\lambda_n|$;

2. 谱条件数

$$\kappa(A)_2 = cond(A)_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^T A)}{\lambda_{min}(AA^T)}}$$

3. 如果 A 为实对称矩阵

$$\kappa(A)_2 = \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right|$$

1. $\kappa(A) \geqslant \|AA^{-1}\| = \|I\| \geqslant 1$;

2. $\kappa(cA) = \kappa(A)$;

3. $\kappa(Q)_2 = 1, \kappa(QA)_2 = \kappa(AQ)_2 = \kappa(A)_2$. (Q 为正交矩阵)

Hilbert 矩阵

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

$$H_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \vdots \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

$$\det(H_n) = a_n \frac{(2\pi)^n}{\sqrt[4]{n}4^{n^2}} \to 0 \quad a_n \to 0.645$$

$$\left(H^{-1}\right)_{jk} = (-1)^{j+k}(j+k-1)\binom{n+j-1}{n-k}\binom{n+k-1}{n-j}\binom{j+k-2}{j-1}$$

Hilbert 矩阵谱条件数

n	$\kappa(a)$
3	5.24×10^2
4	1.55×10^4
5	4.77×10^5
6	1.50×10^7
7	4.75×10^8
8	1.53×10^{10}
9	4.93×10^{11}
10	1.60×10^{13}

$$\kappa(H_n)_2 = O\left(\frac{(1+\sqrt{2})^{4n}}{\sqrt{n}}\right) \approx O\left(\frac{2^{5n}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} = U^{-1}L^{-1}$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \|G\|_1 = n & \|G^{-1}\| = 1 & \kappa(G) = n \\ \|L\|_1 = n & \|L^{-1}\| = 2^{n-1} & \kappa(L) = n2^{n-1} \\ \|U\|_1 = 2^n - 1 & \|U^{-1}\| = 1 & \kappa(U) = 2^n - 1 \end{array}$$

上三角矩阵方程组数组解的舍入误差分析.

$$Ux = b, \quad \text{数值解 } x^*$$

则

$$|b - Ux^*| \leqslant \frac{\epsilon}{1 - n\epsilon} |U| E |x^*|$$

其中 $E = diag(n, n-1, \cdots, 1)$.

严格下三角矩阵方程组数组解的舍入误差分析.

$$Lx = b, \quad \text{数值解 } x^*$$

则

$$|b - Lx^*| \leqslant \frac{\epsilon}{1 - n\epsilon} (|L| E - I) |x^*|$$

其中 $E = diag(1, 2, \cdots, n)$.

列选主元Gauss消去法LU分解的舍入误差分析

$$A \approx LU,\ \ LU \text{由列选主元Gauss消去法得到}$$

有

$$|A - LU| \leqslant 2a\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \end{pmatrix}$$

其中 a 是对矩阵 A 运算过程中出现的绝对值最大元.

$$a_0 = \max\left|a_{jk}\right|, a_q = \max\left|a_{jk}^p\right|$$

则

$$a_q \leqslant 2^q a_0, \quad a \leqslant 2^{n-1}a_0$$

对于矩阵

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad a = 2^{n-1}a_0$$

上Hessenberg 矩阵

$$G = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{pmatrix} \quad a \leqslant (n-1)a_0$$

三对角矩阵: $a \leqslant 2a_0$

结论: 列选主元高斯消去法LU分解对上Hessenberg 矩阵, 三对角矩阵是稳定的. 对一般矩阵稳定性不详.

现实中, 绝大部分矩阵是稳定的.

完全选主元Gauss消去法LU分解的舍入误差分析

$A \approx LU$, LU 由列选主元Gauss消去法得到

有

$$|A-LU| \leqslant 2a\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \end{pmatrix}$$

其中 a 是对矩阵 A 运算过程中出现的绝对值最大元.

$$a_0 = \max\left|a_{jk}\right|, a_q = \max\left|a_{jk}^p\right|$$

则

$$a_q \leqslant f(q)a_0$$

其中 $f(q) = q^{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{1}{1}}3^{\frac{1}{2}}4^{\frac{1}{4}}\cdots q^{\frac{1}{q-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$ 是增长缓慢函数.

现实中

$$a_q \leqslant (q+1)a_0$$

可以认为完全选主元Gauss LU 分解是稳定的.

$$A + \delta A = LU$$

$$|\delta A| \leqslant 2a \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \end{pmatrix}$$

列选主元Gauss 消去法解方程舍入误差分析.

$$A \approx LU, \text{方程数值解 } x^*$$

如果 $n\epsilon < \frac{1}{2}$, 则

$$|b - Ax^*| \leqslant \frac{n\epsilon}{1-n\epsilon} |L| \, |U| \, |x^*|$$

换一种说法

$$Ax^* = b + \delta b$$

而

$$|\delta b| \leqslant \frac{n\epsilon}{1-n\epsilon} |L| \, |U| \, |x^*|$$

Prager 定理:

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \{A : |A - A_0| \leqslant \delta A\} \\ \mathscr{B} &= \{b : |b - b_0| \leqslant \delta b\} \end{aligned}$$

x^* 是 $A_0 x = b_0$ 的一个近似解(带有舍入误差). 则存在

$$A \in \mathscr{A}, \quad b \in \mathscr{B}$$

使得

$$Ax^* = b$$

的充要条件是

$$|b_0 - A_0 x^*| \leqslant \delta A\, |x^*| + \delta b$$

Householder 变换

$$w \in R^n, \ \|w\|_2 = 1$$

Householder 变换: $P = I - 2ww^T$.

1. $P^T = P = P^{-1}$

2. 如果 $x \neq y$, $\quad \|x\|_2 = \|y\|_2 \neq 0$, 则

$$Px = y$$

其中 $P = I - 2ww^T, \quad w = \frac{x-y}{\|x-y\|_2}$

$$\begin{aligned} Px &= x - \frac{2(x-y)^T x}{(x-y)^T(x-y)}(x-y) \\ &= x - \frac{2(x^T x - y^T x)}{x^T x - x^T y - y^T x + y^T y}(x-y) \\ &= x - (x-y) = y \end{aligned}$$

$\|x\| = k$, 用Householder 变换将 $\pm k e_1$

残量校正法

设 x' 是方程 $Ax = b$ 的数值解.

$$Ax' \approx b, \quad r = b - Ax'$$

称 r 为数值解 x' 的残量.

令 $Ad = r$. 则 $x' + d$ 是 $Ax = b$ 的理论解.

设 d' 是 $Ad = r$ 的数值解. 称

$$x'' = x' + d'$$

为 x' 的残量校正.

残量校正可以进行多次. 最好还是收敛(残量小).

当 A 的条件数比较大但又不是非常大时, 残量校正法有效.

行平衡法: 矩阵的行元素数量级相差较大.

左乘对角矩阵使得矩阵行元素数量级相同.

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 10^9 \end{pmatrix} \qquad \kappa(A)_1 \approx 10^{10}$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 10^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-10} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(B) \approx 4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10^9 \end{pmatrix} \qquad \kappa(A)_1 \approx 10^9$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(B)_1 = 4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^9 & 2 \times 10^9 \end{pmatrix} \qquad \kappa(A)_1 \approx 10^9$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^9 & 2 \times 10^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(B)_1 = 6$$

行平衡法不成功例子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10^9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \kappa(A)_1 \approx 10^9$$

$$B = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10^9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(B)_1 \approx 10^9$$

迭代法

$$x = Gx + b$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^0 & = & \text{随机选取} \\ x^{k+1} & = & Gx^k + b \end{array}\right.$$

定理 20 *如果 $\|G\| < 1$, 则上面迭代收敛. 并且*

$$\begin{array}{rcl} \|x^k - x^*\| & \leqslant & \dfrac{\|G\|^k}{1 - \|G\|}\|x^1 - x^0\| \\ \|x^k - x^*\| & \leqslant & \dfrac{\|G\|}{1 - \|G\|}\|x^k - x^{k-1}\| \end{array}$$

定理 21 *上面迭代格式收敛的充要条件是 $\rho(G) < 1$.*

Jacobi 迭代格式

$$A = -L + D - U, \quad x = D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

定理 22 *如果 A 主对角线元行占优(或者列占优) 则上面迭代格式收敛.*

证明: G 的无穷范数(或者壹范数) 小于1.

Gauss-Seidel 迭代

$$A = D - L - U, \quad x = (D-L)^{-1}Ux + (D-L)^{-1}b$$

定理 23 *如果 A*

1. *主对角线元占优;或者*

2. *对称正定*

则上面迭代格式收敛.

Gauss-Seidel 迭代计算格式

$$Dx^{k+1} = Lx^{k+1} + Ux^k + b$$

$$x^k = (x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k)^T$$

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)^T$
for(j = 1; j<=n; ++j)
    $x_j^{k+1} = (b_j - \sum_{\delta=1}^{j-1} a_{j\delta} x_\delta^{k+1} - \sum_{\delta=j+1}^{n} a_{j\delta} x_\delta^k)/a_{jj}$

助次松弛迭代(successive over relaxation method)

$$
\begin{aligned}
A &= D - L - U \\
&= \left(\frac{1}{\omega} D - L\right) + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) D - U, \\
x &= (D - \omega L)^{-1}((1-\omega)D + \omega U)x + \omega(D - \omega L)^{-1}b \\
G &= (D - \omega L)^{-1}((1-\omega)D + \omega U)
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\det(D - \omega L) &= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \\
\det((1-\omega)D + U) &= (1-\omega)^n a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \\
\det(G) &= (1-\omega)^n = \lambda_1 \cdots \lambda_n
\end{aligned}
$$

迭代格式收敛的必要条件: $0 < \omega < 2$.
低松弛: $\omega \in (0, 1)$; 超松弛: $\omega \in (1, 2)$

最佳松弛因子: 使得 $\rho(G)$ 达到最小.

对于一类矩阵 $\omega_{opt} \in (1, 2)$

定理 24 *如果* A

1. *主对角线占优并且* $\omega \in (0, 1]$*; 或者*

2. *对称正定并且* $\omega \in (0, 2)$

则上面迭代格式收敛.

松弛迭代格式计算

$$Dx^{k+1} = Dx^k + \omega\left(b + Lx^{k+1} + Ux^k - Dx^k\right)$$

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)^T$

```
for(j = 1; j<=n; ++j)
```

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \omega\left(b_j - \sum_{\delta=1}^{j-1} a_{j\delta} x_\delta^{k+1} - \sum_{\delta=j}^{n} a_{j\delta} x_\delta^k\right)/a_{jj}$$

实验题: 用各种方法求解

$$H_n x = b$$

H_n 是 $n \times n$ Hilbert 矩阵.

求 $\kappa(H_n)_1 \quad n = 10, 20, 30.$

设置 b 使得上面方程的准确解是 $x = (1, 1, \cdots, 1)^T$.

Python 语言实现. (有理数, IEEE 单精度, 双精度, 自定义精度)

方法: 列选主元高斯消去法, 完全选主元高斯消去法. Householder 变换.

变体: 行平衡法以及变换后矩阵的条件数 $\kappa(A)_1$.

误差: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ 和 $\frac{\|b - Ax'\|}{\|x\|}$

矩阵特征值问题.

$$\mathsf{det}(\lambda I - A) = p(\lambda)$$