Составление, решение и анализ задачи линейного программирования в Excel

Решить задачи линейного программирования в Excel достаточно просто:

- составить математическую модель задачи,
- внести исходные данные задачи и ограничения,
- выделить место под ячейки решения и целевую функцию, ввести ее формулу,
- запустить надстройку Поиск решения,
- установить нужные параметры решения и запустить выполнение.

Программа **подберёт оптимальное решение** и покажет его в нужных ячейках, вычислит значение целевой функции. При необходимости можно построить отчеты для анализа решения задачи.

ЗАДАНИЕ № 1. Построить математическую модель задачи и решить её средствами Excel. Записать сопряжённую задачу. Провести анализ и сделать выводы по полученным результатам. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует различные ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в таблице.

Ресурсы	*Нормы расхода ресурсов на одно изделие*		*Общее количество ресурсов*
	стол	*шкаф*	
Древесина 1 вида	*0,2*	*0,1*	*40*
Древесина 2 вида	*0,1*	*0,3*	*60*
Трудоемкость	*1,2*	*1,5*	*371,1*
Прибыль от реализации одного изделия	*6*	*9*	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует выпускать, чтобы прибыль от реализации была максимальной.

РЕШЕНИЕ.

Составим математическую модель задачи. Пусть фабрика изготавливает x1 столов и x2 шкафов. По смыслу задачи эти переменные неотрицательны, $x_1, x_2 \geq 0$. Прибыль от реализации такого количества шкафов и столов составит $F = 6*x_1 + 9*x_2$ рублей, ее нужно максимизировать: $F = 6*x_1 + 9*x_2 \rightarrow \max$.

Теперь составим ограничения задачи.

Для изготовления x_1 столов и x_2 шкафов потребуется $0,2x_1 + 0,1x_2$ древесины первого вида, запасы которой составляют 40 куб.м., поэтому $0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 40$, или $2x_1 + x_2 \leq 400$.

Для изготовления x_1 столов и x_2 шкафов потребуется $0,1x_1 + 0,3x_2$ древесины второго вида, запасы которой составляют 60 куб.м., поэтому $0,1x_1 + 0,3x_2 \leq 60$, $x_1 + 3x_2 \leq 600$.

Для изготовления x_1 столов и x_2 шкафов потребуется $1,2x_1 + 1,5x_2$ древесины третьего вида, запасы которой составляют 371,1 куб.м., поэтому $1,2x_1 + 1,5x_2 \leq 371,1$, $12x_1 + 15x_2 \leq 3711$, $4x_1 + 5x_2 \leq 1237$.

Получаем задачу линейного программирования:

$$F = 6x_1 + 9x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 400, \\ x_1 + 3x_2 \le 600, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 1237, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решим задачу средствами Excel.

Заполним ячейки исходными данными (в виде таблицы) и формулами математической модели. Вычисляемые ячейки пометим цветом.

Таблице в режиме чисел:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Основные переменные и целевая функция					
2							
3			Стол	Шкаф		Целевая	
4			0	0		функция	
5		Прибыль	6	9		0	max
6							
7							
8							
9		Требуется для производства (ограничения):					
10							
11		Древесина 1	0,2	0,1	<=	40	0
12		Древесина 2	0,1	0,3	<=	60	0
13		Трудоемкость	1,2	1,5	<=	371,1	0
14							

Таблица в режиме формул:

F5 =СУММПРОИЗВ(C5:D5;C4:D4)

	A	B	C	D	E	F	G
1		Основные переменные и целевая функция					
2							
3			Стол	Шкаф		Целевая	
4			0	0		функция	
5		Прибыль	6	9		0	max
6							
7							
8							
9		Требуется для производства (ограничения):					
10							
11		Древесина 1	0,2	0,1	<=	40	0
12		Древесина 2	0,1	0,3	<=	60	0
13		Трудоемкость	1,2	1,5	<=	371,1	0

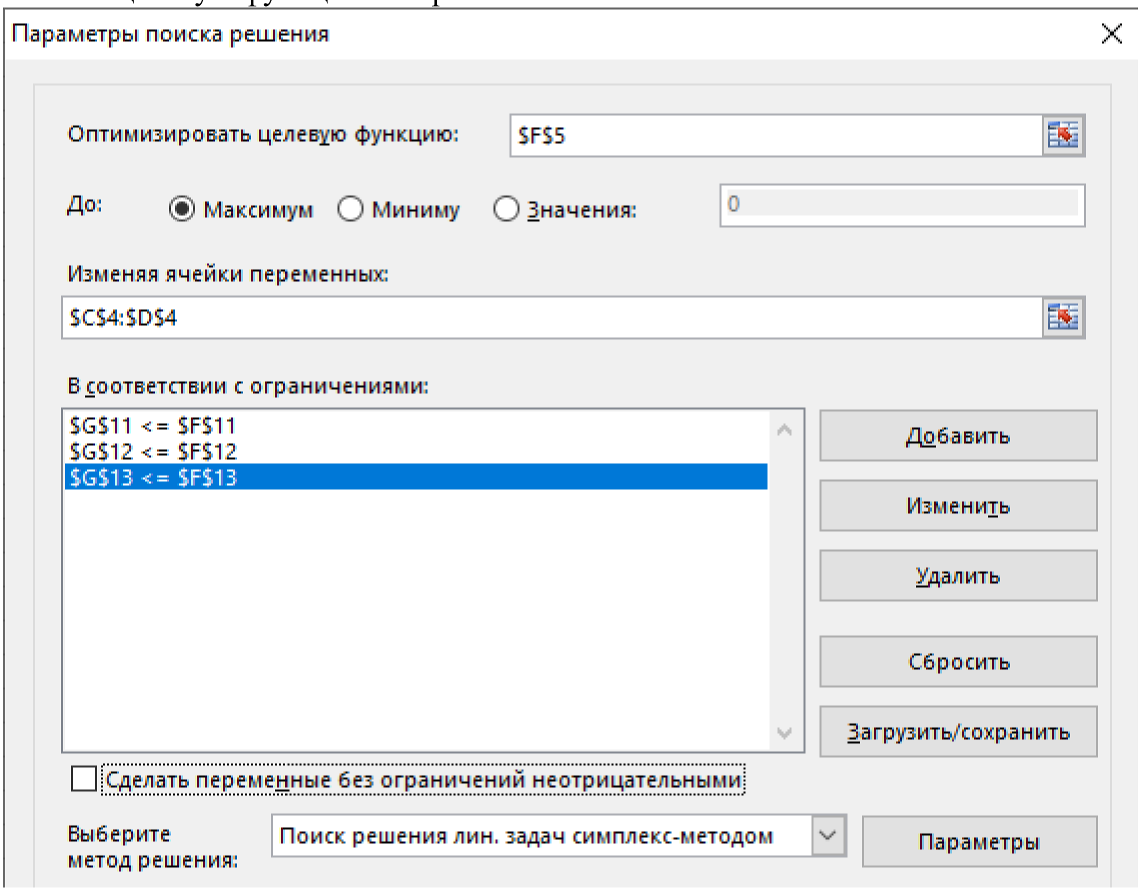
По аналогии сделаны ограничения:

G11 | =СУММПРОИЗВ(C11:D11;C4:D4)

	A	B	C	D	E	F	G
1		Основные переменные и целевая функция					
2							
3			Стол	Шкаф		Целевая	
4			0	0		функция	
5		Прибыль	6	9		0	max
6							
7							
8							
9		Требуется для производства (ограничения):					
10							
11		Древесина 1	0,2	0,1	<=	40	0
12		Древесина 2	0,1	0,3	<=	60	0
13		Трудоемкость	1,2	1,5	<=	371,1	0

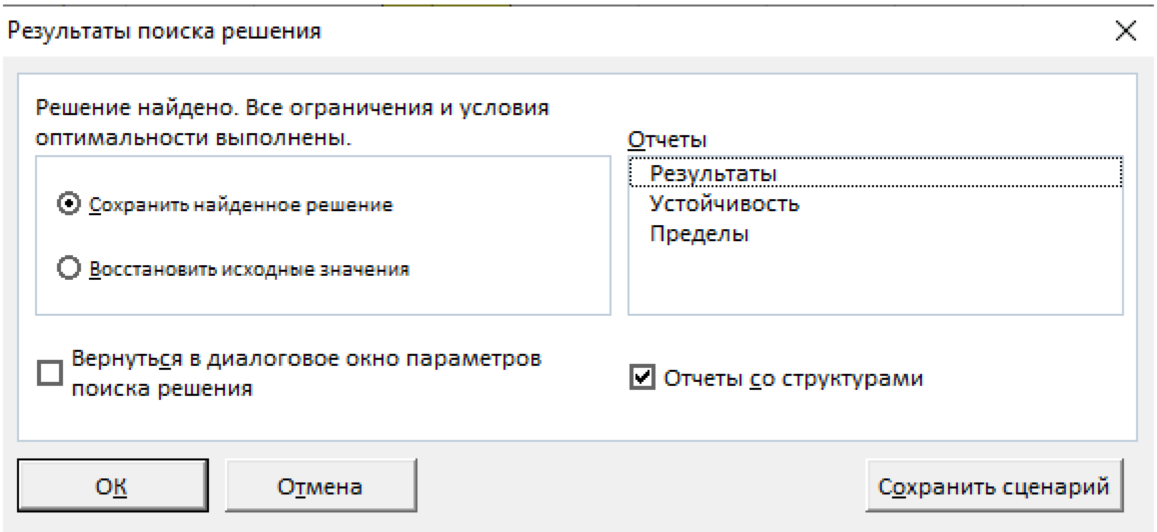
Вызываем надстройку «Поиск решения» на вкладке «Данные» и заполняем параметры:

Вносим целевую функцию и ограничения.



Указываем линейность задачи и неотрицательность переменных.

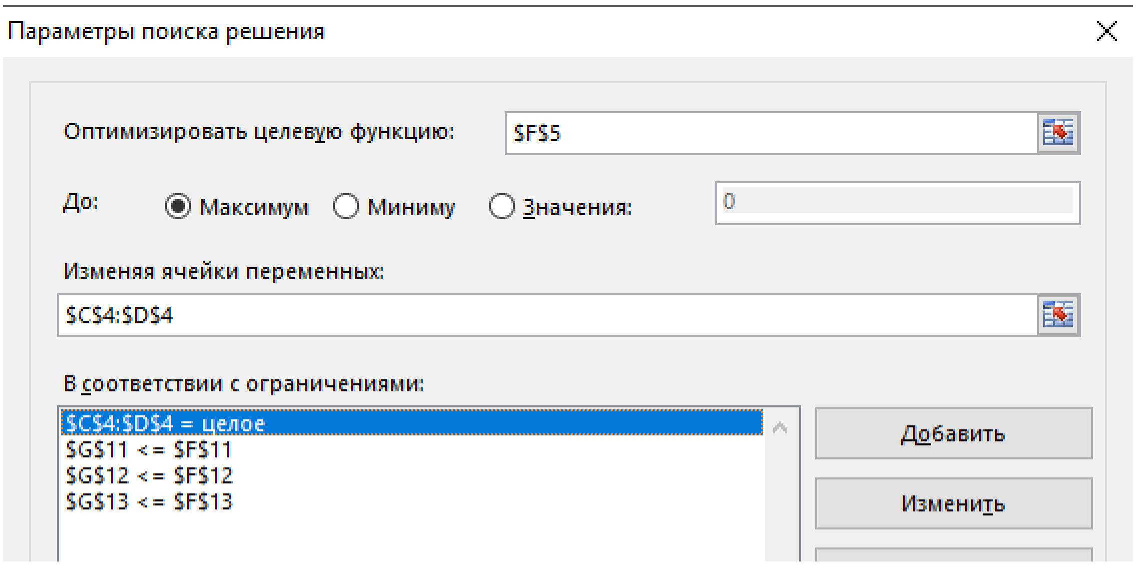
Запускаем решение «Найти решение»:



Получаем решение:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Основные переменные и целевая функция					
2							
3			Стол	Шкаф		Целевая	
4			101,5714	166,1429		функция	
5		Прибыль	6	9		2104,714	max
6							
7							
8							
9		Требуется для производства (ограничения):					
10							
11		Древесина 1	0,2	0,1	<=	40	36,92857
12		Древесина 2	0,1	0,3	<=	60	60
13		Трудоемкость	1,2	1,5	<=	371,1	371,1

Получили нецелочисленное решение – 101,571 столов и 166,143 стульев. Чтобы получить более «реальное» в экономическом смысле решение, добавим ограничение целочисленности переменных, тогда получим:



Искомое решение:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Основные переменные и целевая функция					
2							
3			Стол	Шкаф		Целевая	
4			103	165		функция	
5		Прибыль	6	9		2103	max
6							
7							
8							
9		Требуется для производства (ограничения):					
10							
11		Древесина 1	0,2	0,1	<=	40	37,1
12		Древесина 2	0,1	0,3	<=	60	59,8
13		Трудоемкость	1,2	1,5	<=	371,1	371,1

Таким образом, следует производить 103 стула и 165 шкафов, при этом прибыль от реализации будет максимальна и составит 2103 рубля. В процессе производства будут остатки древесины первого и второго типа: 2,9 и 0,2 кубометра соответственно. Трудоемкость будет «использована» в полном размере.

Эти же данные видны в отчете по результатам (см. последние два столбца последней таблицы):

Microsoft Excel 15.0 Отчет о результатах
Лист: [Задачи по ЛП.xls]Лист1
Отчет создан: 13.01.2024 13:29:44
Результат: Целочисленное решение найдено в пределах допустимого отклонения. Все ограничения выполнены.
Модуль поиска решения
Параметры поиска решения

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$F$5	Прибыль функция	2104,714286	2103

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$C$4	Стол	101,5714286	103	Целочисленное
$D$4	Шкаф	166,1428571	165	Целочисленное

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$G$11	<= max	37,1	$G$11<=$F$11	Без привязки	2,9
$G$12	<= max	59,8	$G$12<=$F$12	Без привязки	0,2
$G$13	<= max	371,1	$G$13<=$F$13	Привязка	0
$C$4:$D$4=Целочисленное					

Запишем сопряженную (двойственную задачу к исходной):

$$F = 6x_1 + 9x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 400, \\ x_1 + 3x_2 \le 600, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 1237, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Так как исходная задача была на максимум, двойственная задача будет на минимум, причем коэффициенты при переменных соответствуют правым частям ограничений, число переменных равно числу ограничений и равно трем:

$$W = 400y_1 + 600y_2 + 1237y_3 \to \min .$$

Строим ограничения, транспонируя матрицу коэффициентов в ограничениях. Так как и первая и вторая переменные были неотрицательны, первое и второе ограничение будут иметь знаки $\ge$. Так как все ограничения имеют знак $\le$, все двойственные переменные неотрицательны. Правые части ограничений – это коэффициенты при переменных в исходной целевой функции.

Получаем:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 \ge 6, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 9, \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Искомая двойственная задача:

$$W = 400y_1 + 600y_2 + 1237y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 \ge 6, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 9, \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 2. Цех производит 8 различных видов деталей для двигателей A, B, C1, C2, C3, D, E6, F имея в своем распоряжении перечисленный ниже парк из 7 видов универсальных станков: 2 шт. - ADF, 3 шт. - SHG, 3 шт. - BSD, 1 шт. - AVP, 1 шт. - BFG, 3 шт. - ABM, 2 шт. - RL.

Время, требуемое для обработки единицы каждого продукта на каждом станке, вклад в прибыль от производства единицы каждого продукта и рыночный спрос на каждый продукт за месяц даны в таблице.

Обработка на	A	B	C1	C2	C3	D	E6	F
ADF	0.24	0.23	0.19	0.15	0.19	0.18	0.23	0.18
SHG	0.05	0.03	-	0.70	0.10	-	0.08	0.08
BSD	0.37	0.59	0.71	0.50	0.32	0.74	0.43	0.40
AVP	0.11	0.11	0.12	0.10	0.09	0.12	0.07	0.10
BFG	0.29	0.22	-	0.20	0.16	0.29	0.14	0.12
ABM	-	0.58	0.70	0.69	0.46	0.31	0.31	0.65
RL	0.08	0.01	0.08	0.11	0.12	0.08	-	0.12
Прибыль	5	6	8	6	7	8	6	4
Потребность рынка	200	350	280	300	350	220	100	200

Цех работает 12 часов в день. Каждый месяц содержит 26 рабочих дней. Для упрощения задачи считаем, что возможен произвольный порядок обработки деталей на различных станках.

Составьте оптимальный план производства.

Определите, производство каких продуктов лимитировано рынком, и каких – техническими возможностями цеха. Какие машинные ресурсы должны быть увеличены в первую очередь, чтобы добиться максимального увеличения прибыли (при заданных потребностях рынка)? Есть ли продукт, который невыгодно производить? Почему? Что нужно изменить, чтобы все продукты стало выгодно производить?

РЕШЕНИЕ.

Заносим данные на лист Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Тип детали	A	B	C1	C2	C3	D	E6	F		
2	Производство										
3											Парк
4	Станки	Время обработки деталей на станках									станков
5	ADF	0,24	0,23	0,19	0,15	0,19	0,18	0,23	0,18		2
6	SHG	0,05	0,03	0,00	0,70	0,10	0,00	0,08	0,08		3
7	BSD	0,37	0,59	0,71	0,50	0,32	0,74	0,43	0,40		3
8	AVP	0,11	0,11	0,12	0,10	0,09	0,12	0,07	0,10		1
9	BFG	0,29	0,22	0,00	0,20	0,16	0,29	0,14	0,12		1
10	ABM	0,00	0,58	0,70	0,69	0,46	0,31	0,31	0,65		3
11	RL	0,08	0,01	0,08	0,11	0,12	0,08	0,00	0,12		2
12											
13	Прибыльность	5	6	8	6	7	8	6	4		
14											
15	Потребность рынка	200	350	280	300	350	220	100	200		

Далее рассчитываем затрачиваемое время (умножаем матрицу выпуска на соответствующее время обработки выпуска) по каждому станку.

L5 =СУММПРОИЗВ(B$2:I$2;B5:I5)

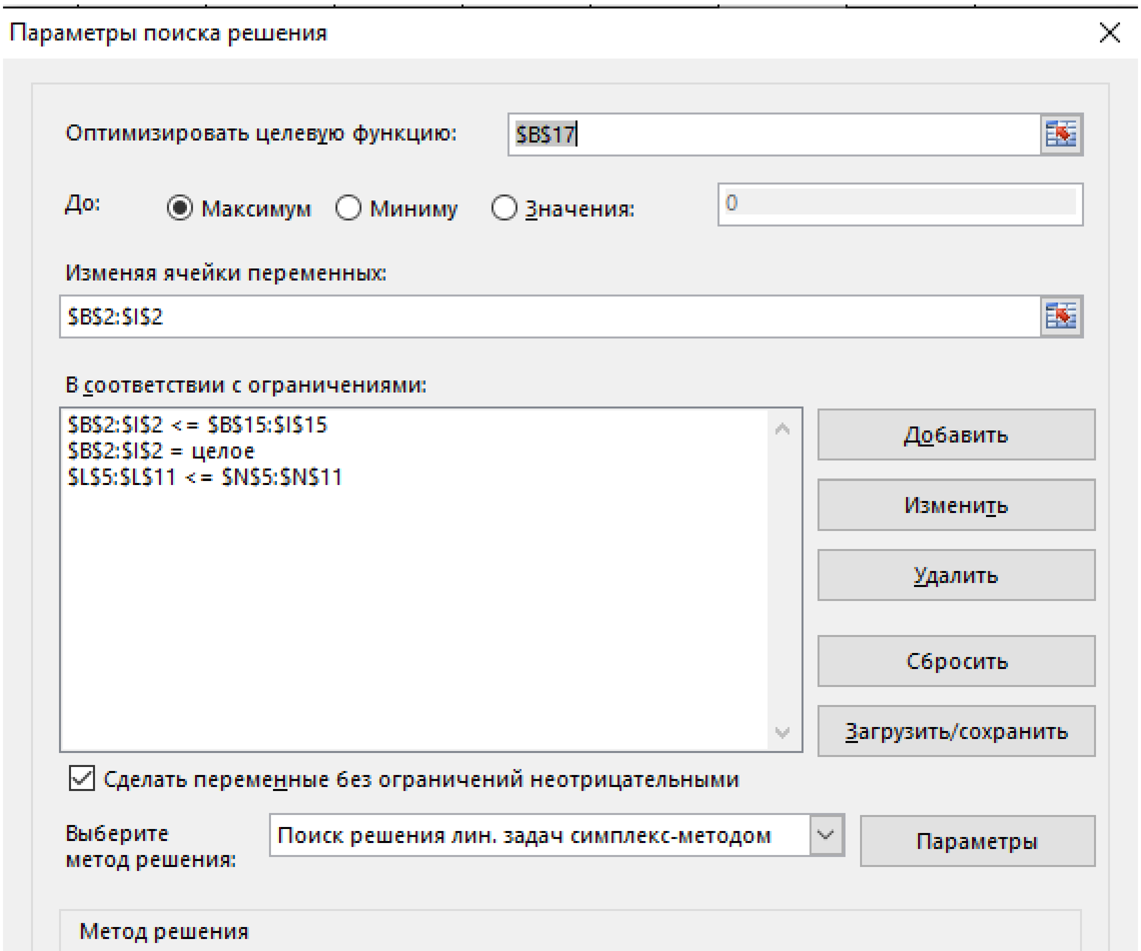
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Тип детали	A	B	C1	C2	C3	D	E6	F			
2	Производство											
3											Парк станков	Потребность времени
4	Станки	Время обработки деталей на станках										
5	ADF	0,24	0,23	0,19	0,15	0,19	0,18	0,23	0,18		2	0
6	SHG	0,05	0,03	0	0,7	0,1	0	0,08	0,08		3	0
7	BSD	0,37	0,59	0,71	0,5	0,32	0,74	0,43	0,4		3	0
8	AVP	0,11	0,11	0,12	0,1	0,09	0,12	0,07	0,1		1	0
9	BFG	0,29	0,22	0	0,2	0,16	0,29	0,14	0,12		1	0
10	ABM	0	0,58	0,7	0,69	0,46	0,31	0,31	0,65		3	0
11	RL	0,08	0,01	0,08	0,11	0,12	0,08	0	0,12		2	0
12												
13	Прибыльность	5	6	8	6	7	8	6	4			
14												
15	Потребность рынка	200	350	280	300	350	220	100	200			

Далее находим предел времени работы каждого станка: 12 часов * 26 дней = 312 часов. На основании этого рассчитываем фонд времени для каждого типа станков в зависимости от количества.

Также рассчитываем прибыль - умножаем матрицу выпуска на матрицу прибыльности.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Тип детали	A	B	C1	C2	C3	D	E6	F							
2	Производство	200	0	0	166	350	0	100	0							
3											Парк станков	Потребность времени		Предел времени		Остаток времени
4	Станки	Время обработки деталей на станках														
5	ADF	0,24	0,23	0,19	0,15	0,19	0,18	0,23	0,18		2	162,4	≤	624		461,6
6	SHG	0,05	0,03	0	0,7	0,1	0	0,08	0,08		3	169,2	≤	936		766,8
7	BSD	0,37	0,59	0,71	0,5	0,32	0,74	0,43	0,4		3	312	≤	936		624
8	AVP	0,11	0,11	0,12	0,1	0,09	0,12	0,07	0,1		1	77,1	≤	312		234,9
9	BFG	0,29	0,22	0	0,2	0,16	0,29	0,14	0,12		1	161,2	≤	312		150,8
10	ABM	0	0,58	0,7	0,69	0,46	0,31	0,31	0,65		3	306,54	≤	936		629,46
11	RL	0,08	0,01	0,08	0,11	0,12	0,08	0	0,12		2	76,26	≤	624		547,74
12																
13	Прибыльность	5	6	8	6	7	8	6	4							
14																
15	Потребность рынка	200	350	280	300	350	220	100	200							
16																
17	Суммарная прибыль	5046														

Далее запускаем надстройку Поиск решения.



Получаем.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Тип детали	A	B	C1	C2	C3	D	E6	F							
2	Производство	155	224	280	300	350	220	100	199							
3											Парк станков	Потребность времени		Предел времени		Остаток времени
4	Станки	Время обработки деталей на станках														
5	ADF	0,24	0,23	0,19	0,15	0,19	0,18	0,23	0,18		2	351,84	≤	624		272,16
6	SHG	0,05	0,03	0	0,7	0,1	0	0,08	0,08		3	283,39	≤	936		652,61
7	BSD	0,37	0,59	0,71	0,5	0,32	0,74	0,43	0,4		3	935,71	≤	936		0,29
8	AVP	0,11	0,11	0,12	0,1	0,09	0,12	0,07	0,1		1	190,09	≤	312		121,91
9	BFG	0,29	0,22	0	0,2	0,16	0,29	0,14	0,12		1	311,91	≤	312		0,09
10	ABM	0	0,58	0,7	0,69	0,46	0,31	0,31	0,65		3	922,47	≤	936		13,53
11	RL	0,08	0,01	0,08	0,11	0,12	0,08	0	0,12		2	153,52	≤	624		470,48
12																
13	Прибыльность	5	6	8	6	7	8	6	4							
14																
15	Потребность рынка	200	350	280	300	350	220	100	200							
16																
17	Суммарная прибыль	11765														

Рассмотрим соотношение оптимального выпуска и потребностей рынка.
На пределе рыночных потребностей выпускаются детали C1-C3, D, E6.
Пробуем изменить потребности рынка.

Тип детали	A	B	C1	C2	C3	D	E6	F						
Производство	169	170	290	310	360	230	110	198						
										Парк станков	Потребность времени		Предел времени	Остаток времени
Станки	Время обработки деталей на станках													
ADF	0,24	0,23	0,19	0,15	0,19	0,18	0,23	0,18		2	352	≤	624	272
SHG	0,05	0,03	0	0,7	0,1	0	0,08	0,08		3	291,19	≤	936	644,81
BSD	0,37	0,59	0,71	0,5	0,32	0,74	0,43	0,4		3	935,63	≤	936	0,37
AVP	0,11	0,11	0,12	0,1	0,09	0,12	0,07	0,1		1	190,59	≤	312	121,41
BFG	0,29	0,22	0	0,2	0,16	0,29	0,14	0,12		1	311,87	≤	312	0,13
ABM	0	0,58	0,7	0,69	0,46	0,31	0,31	0,65		3	915,2	≤	936	20,8
RL	0,08	0,01	0,08	0,11	0,12	0,08	0	0,12		2	157,88	≤	624	466,12
Прибыльность	5	6	8	6	7	8	6	4						
Потребность рынка	200	350	280	300	350	220	100	200						
Суммарная прибыль	11857													

Производство деталей С1-С3, D, E6 опять на пределе рынка, следовательно, в данной ситуации эти детали – наиболее выгодны для производства, и их выпуск на пределе рыночного спроса.

Далее рассмотрим затраты времени станков.

Тип детали	A	B	C1	C2	C3	D	E6	F					
Производство	155	224	280	300	350	220	100	199					
Станки	Время обработки деталей на станках								Парк станков	Потребность времени		Предел времени	Остаток времени
ADF	0,24	0,23	0,19	0,15	0,19	0,18	0,23	0,18	2	351,84	≤	624	272,16
SHG	0,05	0,03	0	0,7	0,1	0	0,08	0,08	3	283,39	≤	936	652,61
BSD	0,37	0,59	0,71	0,5	0,32	0,74	0,43	0,4	3	935,71	≤	936	0,29
AVP	0,11	0,11	0,12	0,1	0,09	0,12	0,07	0,1	1	190,09	≤	312	121,91
BFG	0,29	0,22	0	0,2	0,16	0,29	0,14	0,12	1	311,91	≤	312	0,09
ABM	0	0,58	0,7	0,69	0,46	0,31	0,31	0,65	3	922,47	≤	936	13,53
RL	0,08	0,01	0,08	0,11	0,12	0,08	0	0,12	2	153,52	≤	624	470,48
Прибыльность	5	6	8	6	7	8	6	4					
Потребность рынка	200	350	280	300	350	220	100	200					
Суммарная прибыль	11765												

Остаток времени, близкий 0 - по станкам BSD и BFG, следовательно, данные станки – наиболее дефицитные.

Следовательно, чтобы добиться максимального увеличения прибыли (при заданных потребностях рынка), в первую очередь должны быть увеличены ресурсы времени по данным станкам (BSD и BFG).

Далее рассмотрим продукты, которые не выгодно производить – поскольку в оптимальном плане участвуют все продукты, таких нет.

ЗАДАНИЕ 3. Необходимо составить самый дешевый рацион питания цыплят, содержащий необходимое количество определенных питательных веществ тиамина Т и ниацина Н. Пищевая ценность рациона (в калориях) должна быть не менее заданной. Смесь для цыплят изготавливается из двух продуктов – К и С. Известно содержание тиамина и ниацина в этих продуктах, а также питательная ценность К и С (в калориях). Сколько К и С надо взять для одной порции куриного корма, чтобы цыплята получили необходимую им дозу веществ Н и Т и калорий (или больше), а стоимость порции была минимальна? Исходные данные для расчетов приведены в таблице.

Исходные данные в задаче об оптимизации смеси

	Содержание в 1 унции К	**Содержание в 1 унции С**	**Потребность**
Вещество Т	0,10 мг	0,25 мг	1,00 мг
Вещество Н	1,00 мг	0,25 мг	5,00 мг
Калории	110,00	120,00	400,00
Стоимость 1 унции, в центах	3,8	4,2	

РЕШЕНИЕ.

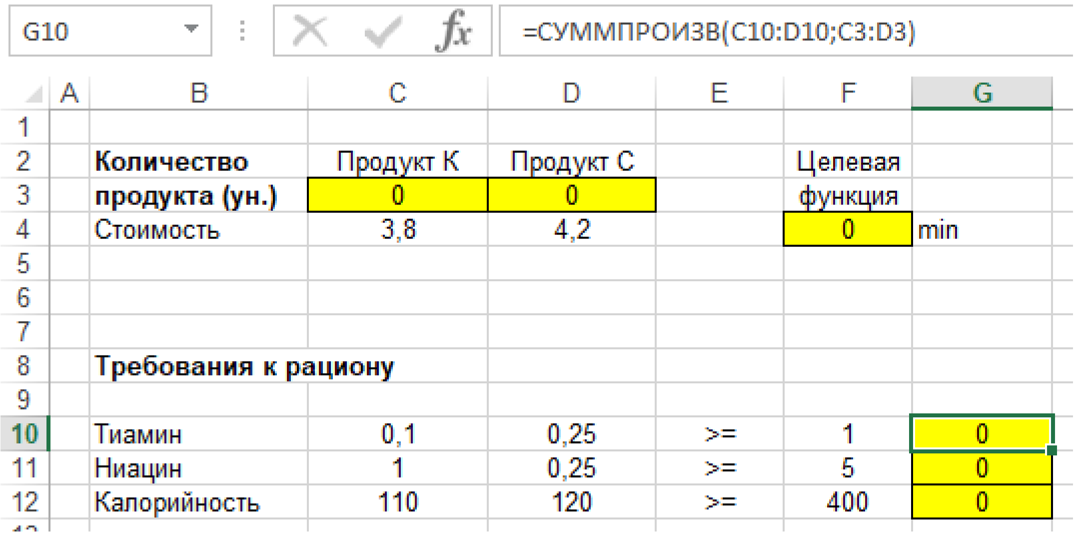
Решим задачу средствами программы MS Excel. Внесем данные в исходную таблицу:

Количество	Продукт К	Продукт С		Целевая	
продукта (ун.)	0	0		функция	
Стоимость	3,8	4,2		0	min
Требования к рациону					
Тиамин	0,1	0,25	>=	1	0
Ниацин	1	0,25	>=	5	0
Калорийность	110	120	>=	400	0

Формулы:

F4 =СУММПРОИЗВ(C3:D3;C4:D4)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		**Количество**	Продукт К	Продукт С		Целевая	
3		**продукта (ун.)**	0	0		функция	
4		Стоимость	3,8	4,2		0	min
5							
6							
7							
8		**Требования к рациону**					
9							
10		Тиамин	0,1	0,25	>=	1	0
11		Ниацин	1	0,25	>=	5	0
12		Калорийность	110	120	>=	400	0

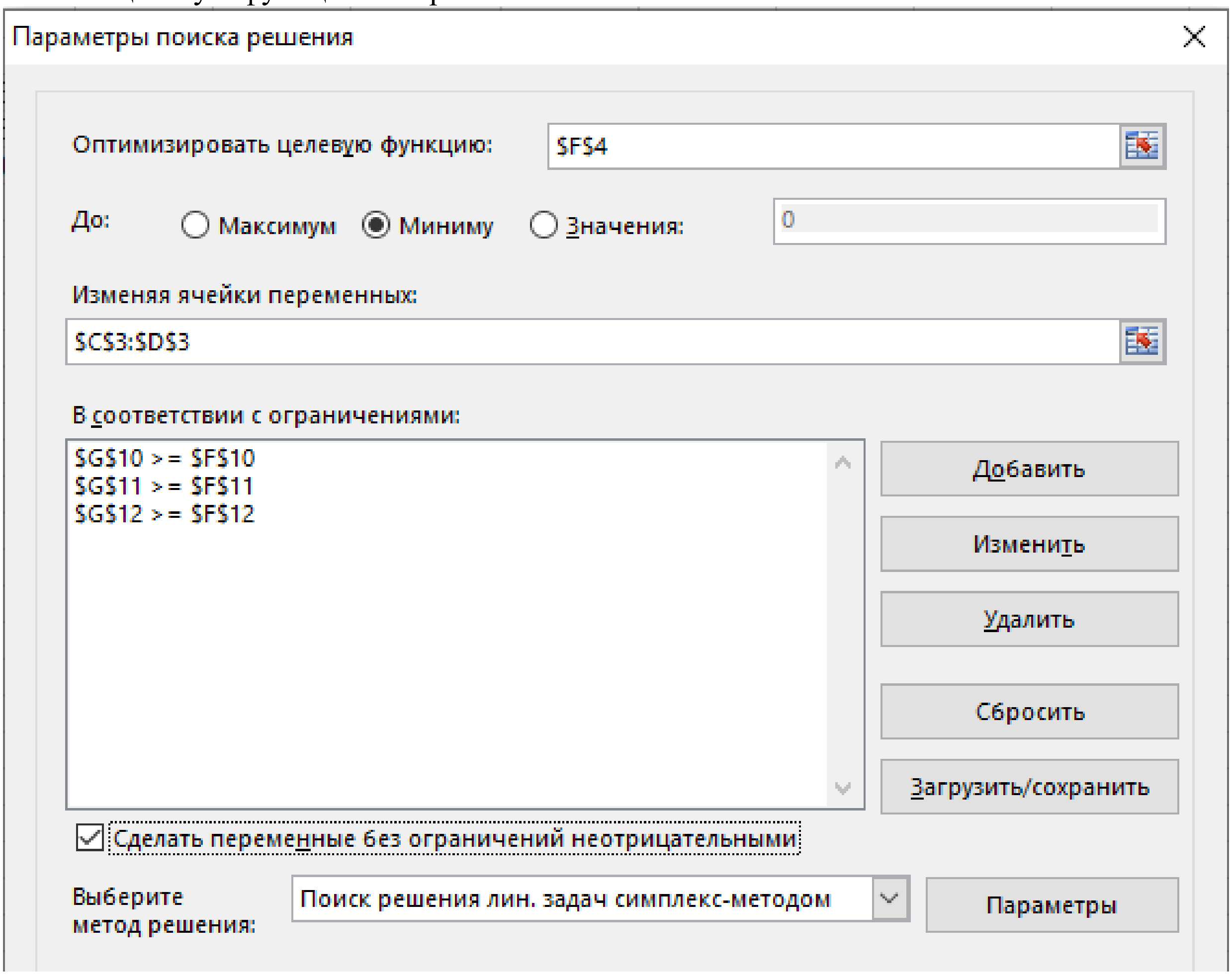


G10 =СУММПРОИЗВ(C10:D10;C3:D3)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		**Количество**	Продукт К	Продукт С		Целевая	
3		**продукта (ун.)**	0	0		функция	
4		Стоимость	3,8	4,2		0	min
5							
6							
7							
8		**Требования к рациону**					
9							
10		Тиамин	0,1	0,25	>=	1	0
11		Ниацин	1	0,25	>=	5	0
12		Калорийность	110	120	>=	400	0

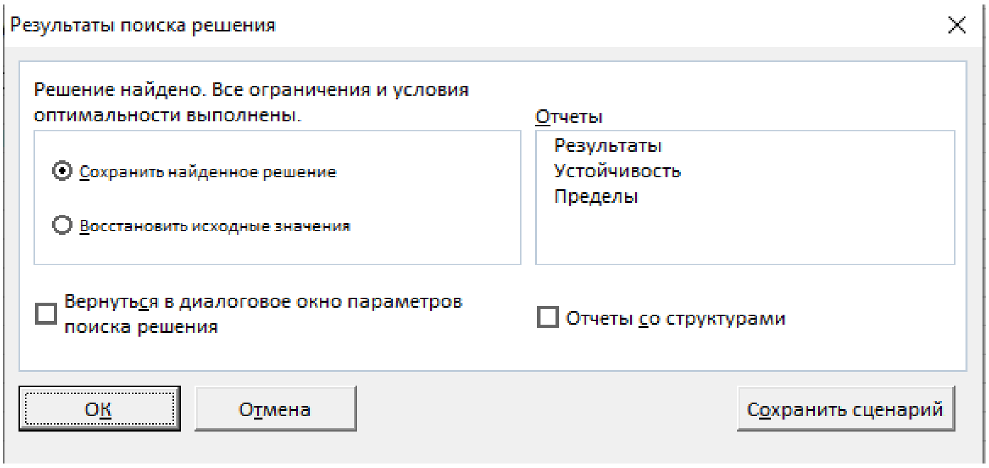
Вызываем надстройку «Поиск решения» и заполняем параметры:

Вносим целевую функцию и ограничения.



Указываем линейность задачи и неотрицательность переменных:

Запускаем решение:

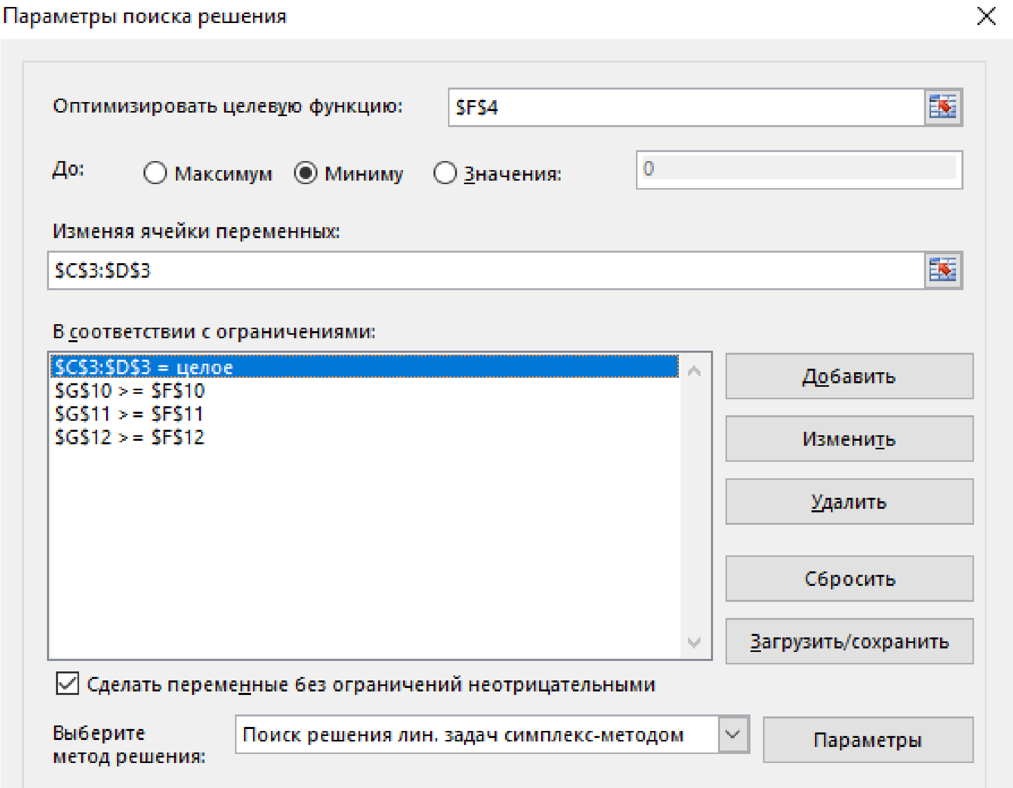


Получаем решение:

Количество продукта (ун.)	Продукт К 4,444444444	Продукт С 2,222222222		Целевая функция	
Стоимость	3,8	4,2		26,22222	min
Требования к рациону					
Тиамин	0,1	0,25	>=	1	1
Ниацин	1	0,25	>=	5	5
Калорийность	110	120	>=	400	755,55556

То есть при данных ограничениях самый дешевый рацион стоит 26,22 цента и содержит 4,44 унции продукта К и 2,22 унции продукта С.

Если предположить, что вес продуктов должен быть целым (целочисленные переменные):



То получим другое решение:

Количество продукта (ун.)	Продукт К	Продукт С		Целевая функция	
	5	2			
Стоимость	3,8	4,2		27,4	min
Требования к рациону					
Тиамин	0,1	0,25	>=	1	1
Ниацин	1	0,25	>=	5	5,5
Калорийность	110	120	>=	400	790

Следует взять 5 унций продукта К, 2 унции продукта С, рацион выйдет немного дороже, стоимость составит 27,4 цента.

ЗАДАНИЕ 4. Производственная задача линейного программирования в Excel.

Фирма "Компьютер-сервис" поставляет компьютеры под ключ четырех базовых комплектаций: «домашний», «игровой», «офисный» и «экстрим». Известны средние затраты времени на сборку, проверку и подключение компьютеров.

Каждый компьютер приносит определенный уровень прибыли, но спрос ограничен. Кроме того, в плановом периоде ограничен ресурс человеко-часов, отведенных на выполнение каждой производственной операции. Определить, сколько компьютеров каждого типа необходимо произвести в плановом периоде, имея целью максимизировать прибыль.

Компьютер	*Прибыль за модель У.е.*	*Максимальный спрос на товар*	*Требуется часов на подключение*	*Требуется часов на сборку*	*Требуется часов на проверку*
Домашний	*33*	*87*	*0,9*	*1,2*	*1,3*
Игровой	*39*	*67*	*1,1*	*1,5*	*1,5*
Офисный	*36*	*110*	*0,7*	*0,9*	*0,9*
Экстрим	*43*	*45*	*1,3*	*1,1*	*1,2*
Доступно человеко-часов на каждую операцию			*70*	*55*	*35*

РЕШЕНИЕ.

Решим задачу средствами программы MS Excel. Внесем данные в таблицу:

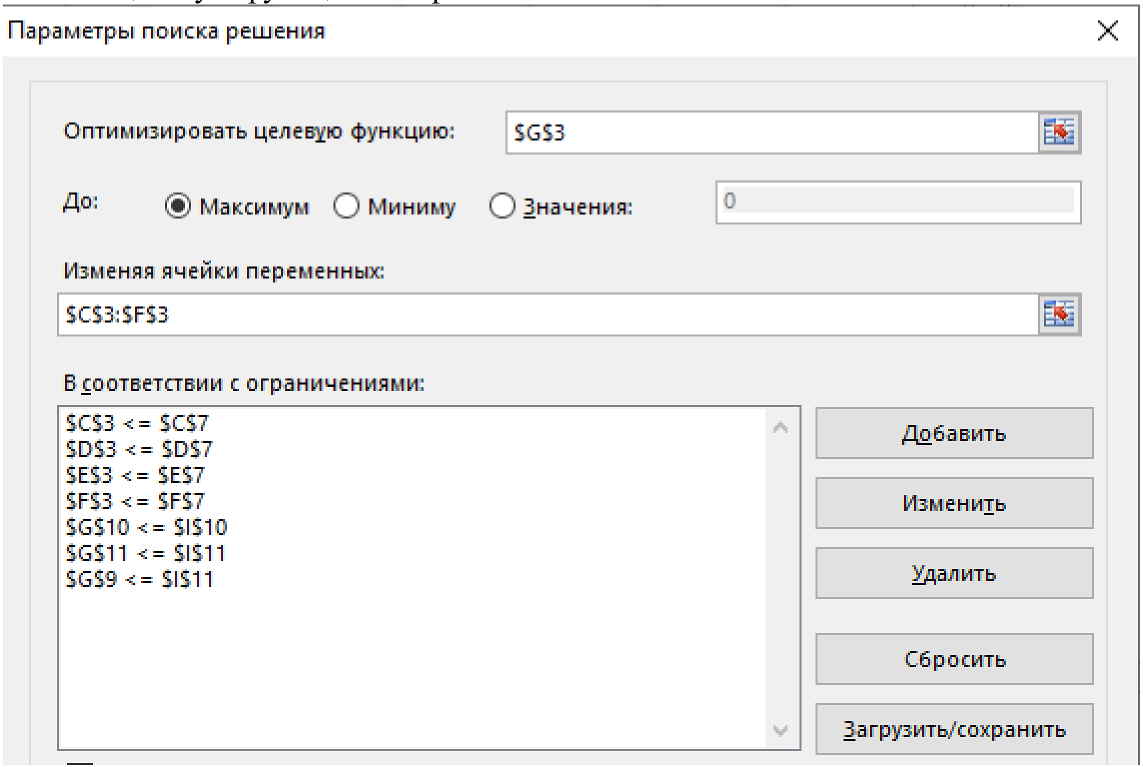
Переменные	x1	x2	x3	x4	F		
	0	0	0	0	0		
Прибыль	33	39	36	43			
Спрос	87	67	110	45			
Ограничения	0,9	1,1	0,7	1,3	0	<=	70
по	1,2	1,5	0,9	1,1	0	<=	55
часам	1,3	1,5	0,9	1,2	0	<=	35

Компьютер	Прибыль за модель У.е.	Максимальный спрос на товар	Требуется часов на подключени	Требуется часов на сборку	Требуется часов
Домашний	33	87	0,9	1,2	1,3
Игровой	39	67	1,1	1,5	1,5
Офисный	36	110	0,7	0,9	0,9
Экстрим	43	45	1,3	1,1	1,2
Доступно человеко-часов на каждую			70	55	35

переменные	x1	x2	x3	x4	F		
	0	0	0	0	0		
прибыль	33	39	36	43			
спрос	87	67	110	45			
ограничения	0,9	1,1	0,7	1,3	0	<=	70
по	1,2	1,5	0,9	1,1	0	<=	55
часам	1,3	1,5	0,9	1,2	0	<=	35

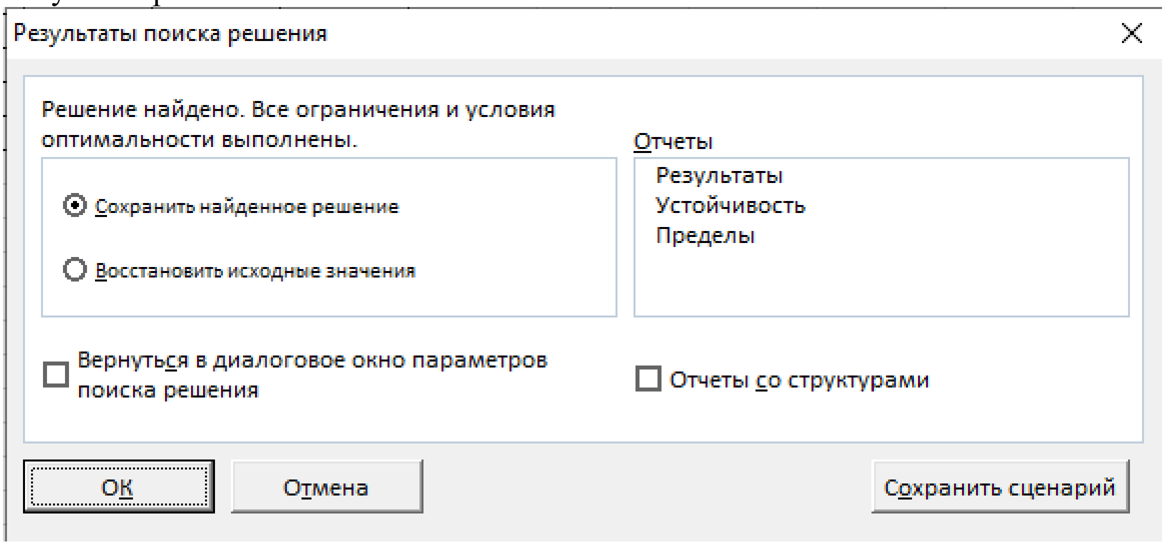
Вызываем надстройку «Поиск решения» и заполняем параметры:

Вносим целевую функцию и ограничения.



Указываем линейность задачи и неотрицательность переменных:

Запускаем решение:



Получаем решение:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Переменные	x1	x2	x3	x4	F		
3			0	0	38,88889	0	1400		
4									
5		Прибыль	33	39	36	43			
6									
7		Спрос	87	67	110	45			
8									
9		Ограничения	0,9	1,1	0,7	1,3	27,22222	<=	70
10		по	1,2	1,5	0,9	1,1	35	<=	55
11		часам	1,3	1,5	0,9	1,2	35	<=	35

То есть при данных ограничениях нужно продавать только компьютеры вида «Офисный» в количестве 38,89 штук, прибыль составит 1400 у.е.

ЗАДАНИЕ 5. Задача о распиле в Excel

На лесопилку поступают доски длиной 10 м. По контракту лесопилка должна поставить клиенту не менее 100 досок длиной 5 м, не менее 200 досок длиной 4 м и не менее 300 досок длиной 3 м. Как работникам лесопилки выполнить условия контракта, разрезав наименьшее количество досок?

РЕШЕНИЕ.
Составим модель задачи. Найдем все возможные способы распила бревен длиной 10 м на доски длиной 5, 4 и 3 м.

Способы распила	**Количество бревен**			**Отходы**
	5 м	**4 м**	**3 м**	
1	2	0	0	0
2	1	1	0	1
3	1	0	1	2
4	0	1	2	0
5	0	2	0	2
6	0	0	3	1

Пусть x_i бревен распиливается по способу i. Составляем модель задачи:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \min,$$

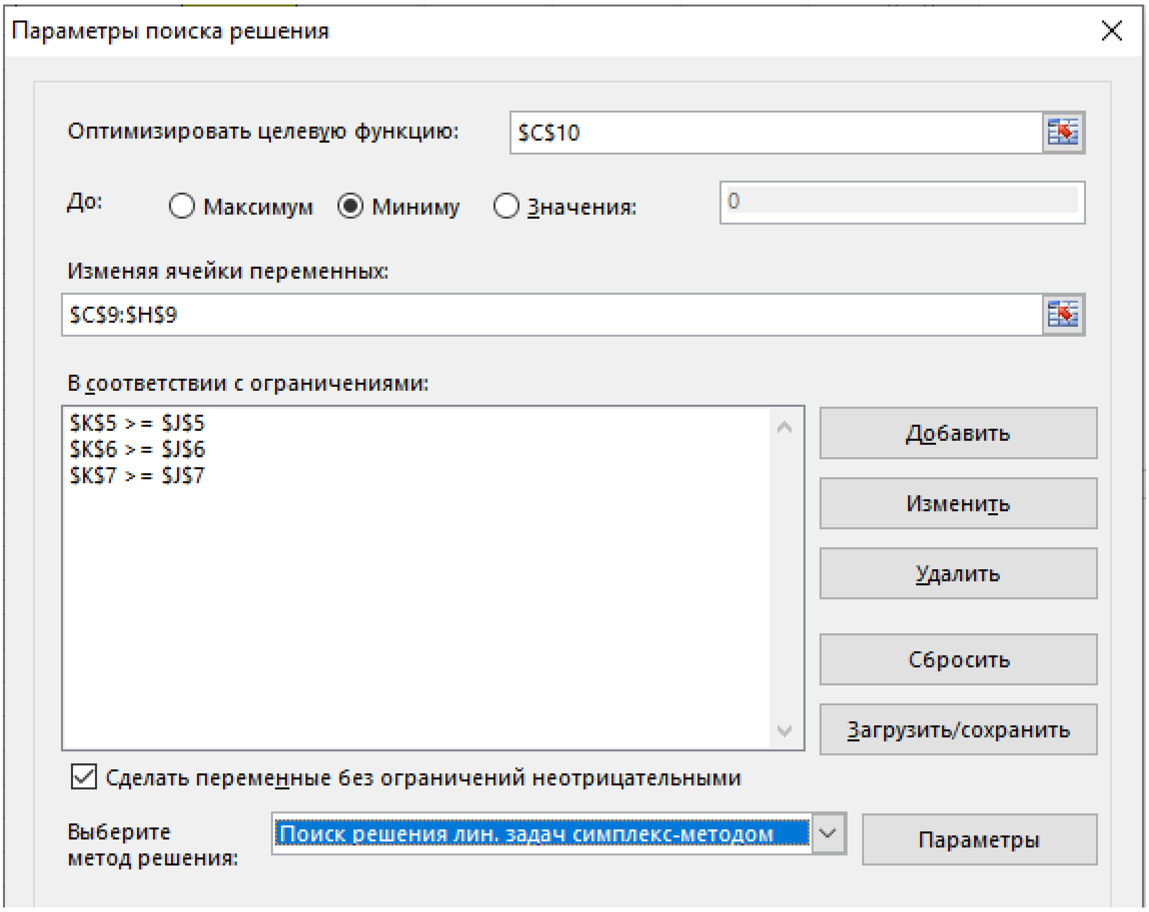
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 100, \\ x_2 + x_4 + 2x_5 \geq 200, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_6 \geq 300, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Подготовим таблицу в Microsoft Excel, содержащую исходные данные задачи, введем формулы для расчета целевой функции и левой части ограничений, заполним форму модуля Поиск решения.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2			**Задача об оптимальном распиле**								
3									Знак	Ограничения	
4		Кол-во бревен	1	1	1	1	1	1		**min**	
5		Бревна 5 м	2	1	1	0	0	0	>=	100	0
6		Бревна 4 м	0	1	0	1	2	0	>=	200	0
7		Бревна 3 м	0	0	1	2	0	3	>=	300	0
8											
9		План распила	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**			
10		Кол-во бревен	**0**								

Вызываем надстройку «Поиск решения» и заполняем параметры:

Вносим целевую функцию и ограничения.



Получаем результаты:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2			Задача об оптимальном распиле								
3									Знак	Ограничения	
4		Кол-во бревен	1	1	1	1	1	1		min	
5		Бревна 5 м	2	1	1	0	0	0	>=	100	100
6		Бревна 4 м	0	1	0	1	2	0	>=	200	200
7		Бревна 3 м	0	0	1	2	0	3	>=	300	300
8											
9		План распила	**50**	**0**	**0**	**150**	**25**	**0**			
10		Кол-во бревен	**225**								

Таким образом, нужно распилить 50 бревен по 1 способу, 150 по четвертому и 25 по пятому способу. При этом все ограничения будут удовлетворены, а количество бревен будет минимальным и составит 225 штук.

ЗАДАНИЕ 6. Задача о назначениях в Excel

Компания "Евростройтур" организует экскурсионные автобусные туры по странам Европы. Компания получила 4 новых автобуса и предполагает направить их на маршруты во Францию, Италию, Чехию и Испанию. Каждый автобус обслуживают 2 водителя. Компанией приглашены 8 водителей, в различной степени знакомых с дорогами европейских стран (в % от экскурсионного маршрута):

	Франция	Италия	Чехия	Испания
Александр	56	43	85	68
Алексей	56	38	99	70
Валентин	63	94	54	84
Василий	96	89	65	24
Николай	44	62	63	72
Виктор	74	85	42	68
Андрей	23	59	37	92
Юрий	89	45	53	78

Необходимо распределить водителей так, чтобы общий показатель освоения маршрутов был максимальным.

РЕШЕНИЕ.

Получаем задачу о назначениях в обобщенном виде.

$F = \sum c_{ij} x_{ij} \to \max$, где c_{ij} - показатель освоения, $x_{ij} = 0$ èëè 1 (назначен данный водитель на маршрут или нет).

$$\begin{cases} \sum\limits_j x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,8}, \\ \sum\limits_i x_{ij} = 2,\ j = \overline{1,4}. \\ x_{ij} = 0 \text{ èëè } 1. \end{cases}$$

Составляем данные в Excel.

Задача о назначениях

Исходные данные

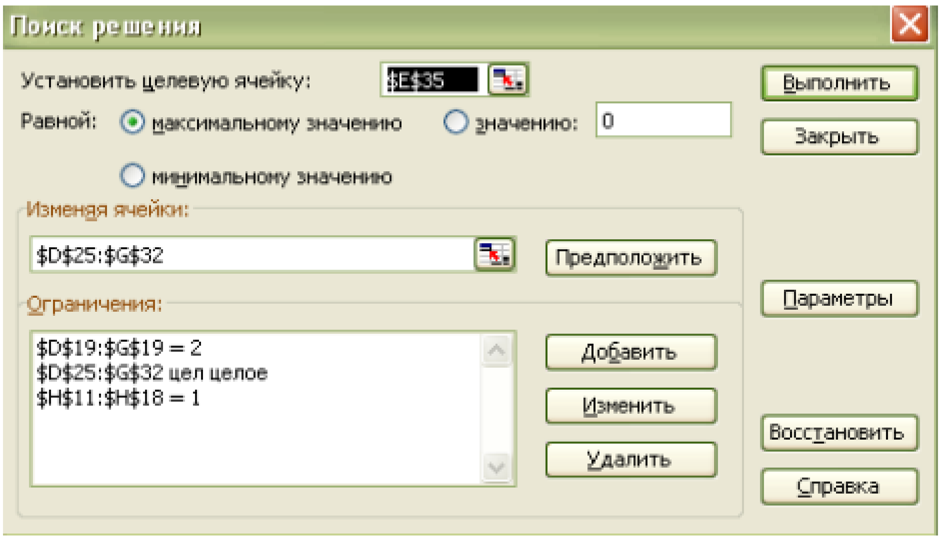
	Франция	Италия	Чехия	Испания	сумма	значение
Александр	56	43	85	68	0	1
Алексей	56	38	99	70	0	1
Валентин	63	94	54	84	0	1
Василий	96	89	65	24	0	1
Николай	44	62	63	72	0	1
Виктор	74	85	42	68	0	1
Андрей	23	59	37	92	0	1
Юрий	89	45	53	78	0	1
сумма	0	0	0	0		
Значение	2	2	2	2		

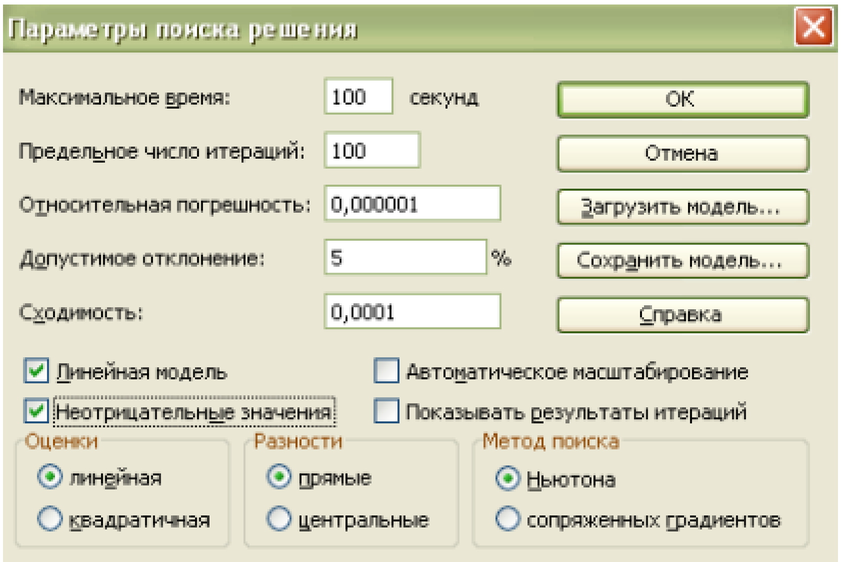
Результаты

	Франция	Италия	Чехия	Испания
Александр	0	0	0	0
Алексей	0	0	0	0
Валентин	0	0	0	0
Василий	0	0	0	0
Николай	0	0	0	0
Виктор	0	0	0	0
Андрей	0	0	0	0
Юрий	0	0	0	0

Показатель освоения	0

Запускаем Поиск решения:





Результат расчетов:

	Задача о назначениях					
		Исходные данные				
	Франция	Италия	Чехия	Испания	сумма	значение
Александр	56	43	85	68	1	1
Алексей	56	38	99	70	1	1
Валентин	63	94	54	84	1	1
Василий	96	89	65	24	1	1
Николай	44	62	63	72	1	1
Виктор	74	85	42	68	1	1
Андрей	23	59	37	92	1	1
Юрий	89	45	53	78	1	1
сумма	2	2	2	2		
Значение	2	2	2	2		
		Результаты				
	Франция	Италия	Чехия	Испания		
Александр	0	0	1	0		
Алексей	0	0	1	0		
Валентин	0	1	0	0		
Василий	1	0	0	0		
Николай	0	0	0	1		
Виктор	0	1	0	0		
Андрей	0	0	0	1		
Юрий	1	0	0	0		
Показатель освоения		712	max			

Итак, нужно назначить на Францию Василия и Юрия, на Италию – Валентина и Виктора, на Чехию – Александра и Алексея, на Испанию – Николая и Андрея.
Максимальный процент освоения – 712%.

ЗАДАНИЕ 7. Целочисленная задача ЛП методом ветвей и границ в Excel

Решить задачу методом ветвей и границ, решая отдельные задачи линейного нецелочисленного программирования с помощью функции "Поиск решения" в Microsoft Excel (в случае, если первая же задача ЛП выдает целочисленное решение, не позволяя ветвить задачу, немного изменить начальные условия).

Состав еды рядовых регламентируется верховной ставкой главнокомандующего, которая устанавливает нижние нормы питания в сутки по основным компонентам: 1500 килокалорий, 100 г белков, 280 г углеводов, 90 г жиров, 1 кг воды. На складах есть 4 вида продуктов, которые выдают защитникам Родины сухим пайком: лимонад, тушенка в маленьких банках, унифицированные наборы горбушек и пирожки с ежевикой. Стоимость этих четырех продуктов соответственно 12 руб., 34 руб., 3 руб. и 20 руб. Какова минимальная сумма, которую должен затратить прапорщик на питание одного солдата?

Продукты	Калории	Белки	Углеводы	Жиры	Вода
Лимонад, порция	50	0	20 г	0	480 г
Тушенка	200	60 г	10 г	30 г	10 г
Набор горбушек	150	0	50 г	5 г	0
Ягодный пирог	400	10 г	40 г	0	0

РЕШЕНИЕ.

Сначала составим экономико-математическую модель задачи.

Переменные задачи - $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ - количество продуктов каждого вида (лимонад, тушенка, набор горбушек и пирог соответственно).

Целевая функция - минимальная стоимость рациона, $F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min$.

Ограничения на питательность рациона возьмем из таблицы условия задачи:

$50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500$ (калорий),

$60x_2 + 10x_4 \geq 100$ (белков),

$20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280$ (углеводов),

$30x_2 + 5x_3 \geq 90$ (жиров),

$480x_1 + 10x_2 \geq 1000$ (воды).

Получили задачу линейного программирования:

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Найдем целочисленное решение этой задачи методом ветвей и границ.

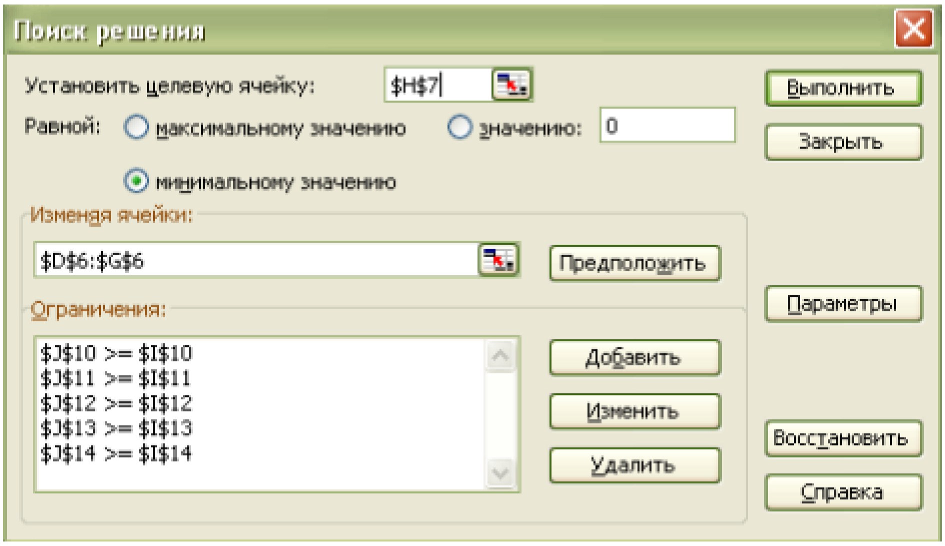
Сначала находим решение сформулированной задачи без учета условия целочисленности переменных. Используем для решения задачи надстройку «Поиск решения…» программы Excel. Первый раз приведем полные скриншоты решения, далее будем ограничиваться результатами расчетов (так как действия аналогичны).

Вносим данные в электронную таблицу.

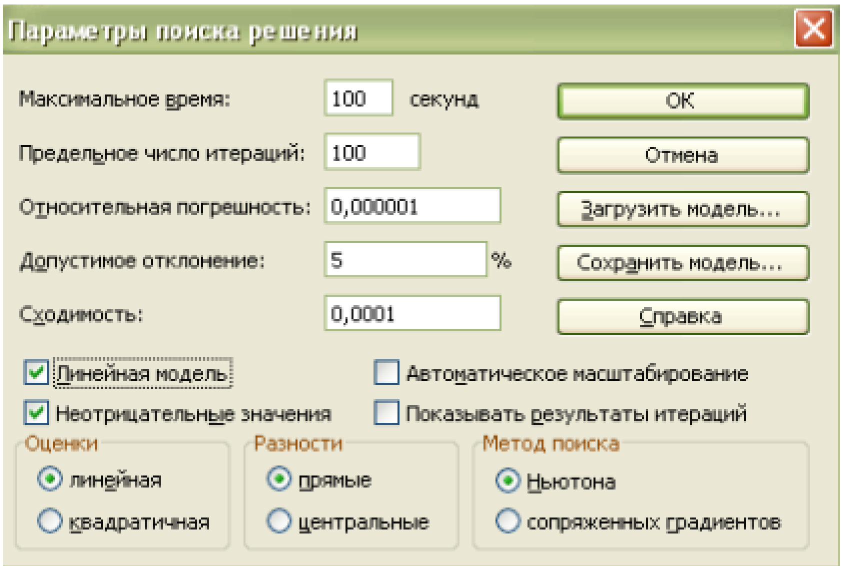
Переменные					F		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	0	**min**	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	0
	0	60	0	10	>=	100	0
	20	10	50	40	>=	280	0
	0	30	5	0	>=	90	0
	480	10	0	0	>=	1000	0

Вызываем надстройку «Поиск решения» и заполняем параметры:

Вносим целевую функцию и ограничения.



Указываем линейность задачи и неотрицательность переменных:



Запускаем и получаем решение:

Переменные	2 7/144	1 2/3	8	0	F		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	105,25	**min**	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1635,764
	0	60	0	10	>=	100	100
	20	10	50	40	>=	280	457,6389
	0	30	5	0	>=	90	90
	480	10	0	0	>=	1000	1000

Получили дробное решение – две переменные дробные. Выберем $x_2 = 1\frac{2}{3}$.
Разбиваем задачу на две подзадачи (учитывая, что $[1\ 2/3] = 1$, в одной полагаем $x_2 \le 1$, в другой - $x_2 \ge 2$.

Получаем следующие задачи:

<u>Задача 1.</u>

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \ge 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \ge 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \ge 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \ge 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \ge 1000, \\ x_2 \le 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	2 1/16	1	12	4	F		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	174,75	**min**	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	3703,125
	0	60	0	10	>=	100	100
	20	10	50	40	>=	280	811,25
	0	30	5	0	>=	90	90
	480	10	0	0	>=	1000	1000

Решение дробное. Разбиваем задачу на две задачи. Возьмем переменную. $x_1 = 2\frac{1}{16}$ и вводим две подзадачи (в одной полагаем $x_1 \le 2$, в другой - $x_1 \ge 3$.

Получаем следующие задачи:

<u>Задача 1.1.</u>

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \ge 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \ge 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \ge 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \ge 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \ge 1000, \\ x_2 \le 1, \\ x_1 \le 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Решаем задачу. Решения нет. Отбрасываем эту ветвь.

<u>Задача 1.2.</u>

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \ge 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \ge 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \ge 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \ge 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \ge 1000, \\ x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	3	1	12	4	F		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	186	**min**	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	3750
	0	60	0	10	>=	100	100
	20	10	50	40	>=	280	830
	0	30	5	0	>=	90	90
	480	10	0	0	>=	1000	1450

Решение целочисленное. $F_{\min} = 186$. Записываем данное решение. Проверяем другие ветви, пока не найдем лучшее целочисленное решение, или не остановится процесс.

<u>Задача 2.</u>

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \ge 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \ge 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \ge 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \ge 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \ge 1000, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	2 1/24	2	6 47/72	0	F		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	112,4583	**min**	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1500
	0	60	0	10	>=	100	120
	20	10	50	40	>=	280	393,4722
	0	30	5	0	>=	90	93,26389
	480	10	0	0	>=	1000	1000

Решение дробное. Разбиваем задачу на две задачи. Возьмем переменную. $x_3 = 6\frac{47}{72}$ и вводим две подзадачи (в одной полагаем $x_3 \le 6$, в другой - $x_3 \ge 7$.

Получаем следующие задачи:

<u>Задача 2.1.</u>

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \ge 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \ge 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \ge 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \ge 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \ge 1000, \\ x_2 \ge 2, \\ x_3 \le 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	2 1/24	2	6	47/192	F		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	115,3958	min	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1500
	0	60	0	10	>=	100	122,4479
	20	10	50	40	>=	280	370,625
	0	30	5	0	>=	90	90
	480	10	0	0	>=	1000	1000

Задача 2.2.

$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \geq 7, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	2 1/24	2	7	0	F		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	113,5	min	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1552,083
	0	60	0	10	>=	100	120
	20	10	50	40	>=	280	410,8333
	0	30	5	0	>=	90	95
	480	10	0	0	>=	1000	1000

Обе задачи имеют дробные решения. Снова производим ветвление и находим решения получившихся задач.

Задача 2.1.1.

$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \leq 6, \\ x_1 \leq 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	2	4	4	0	F		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	172	**min**	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1500
	0	60	0	10	>=	100	240
	20	10	50	40	>=	280	280
	0	30	5	0	>=	90	140
	480	10	0	0	>=	1000	1000

Получили целочисленное решение, $F_{\min} = 172$. Оно лучше предыдущего, временно принимаем его за оптимальное и исследуем остальные ветви.

Задача 2.1.2.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \leq 6, \\ x_1 \geq 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	3	2	6	1/8	F		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	124,5	**min**	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1500
	0	60	0	10	>=	100	121,25
	20	10	50	40	>=	280	385
	0	30	5	0	>=	90	90
	480	10	0	0	>=	1000	1460

Решение дробное.

Задача 2.2.1.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \geq 7, \\ x_1 \leq 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	2	4	7	0	F		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	181	**min**	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1950
	0	60	0	10	>=	100	240
	20	10	50	40	>=	280	430
	0	30	5	0	>=	90	155
	480	10	0	0	>=	1000	1000

Решение целочисленное, но значение целевой функции больше зафиксированного. Отбрасываем ветвь.

Задача 2.2.2.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \geq 7, \\ x_1 \geq 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем:

Переменные	3	2	7	0	F		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	125	**min**	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1600
	0	60	0	10	>=	100	120
	20	10	50	40	>=	280	430
	0	30	5	0	>=	90	95
	480	10	0	0	>=	1000	1460

Получили целочисленное решение, $F_{\min} = 125$. Оно лучше предыдущего, временно принимаем его за оптимальное и исследуем остальные ветви.

Осталась одна ветвь - задача с дробным решением и меньшим значением целевой функции.

Задача 2.1.2.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \ge 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \ge 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \ge 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \ge 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \ge 1000, \\ x_2 \ge 2, \\ x_3 \le 6, \\ x_1 \ge 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Разбиваем ее на две подзадачи.

Задача 2.1.2.1.

$$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \ge 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \ge 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \ge 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \ge 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \ge 1000, \\ x_2 \ge 2, \\ x_3 \le 6, \\ x_1 \ge 3, \\ x_4 \le 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем

Переменные	3	2 1/4	6	0	F		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	130,5	**min**	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1500
	0	60	0	10	>=	100	135
	20	10	50	40	>=	280	382,5
	0	30	5	0	>=	90	97,5
	480	10	0	0	>=	1000	1462,5

Значение целевой функции больше найденного, отбрасываем ветвь.

Задача 2.1.2.2.

$F = 12x_1 + 34x_2 + 3x_3 + 20x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 50x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 400x_4 \geq 1500, \\ 60x_2 + 10x_4 \geq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 40x_4 \geq 280, \\ 30x_2 + 5x_3 \geq 90, \\ 480x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2, \\ x_3 \leq 6, \\ x_1 \geq 3, \\ x_4 \geq 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решаем задачу, получаем

Переменные	3	2	6	1	F		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	142	**min**	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1850
	0	60	0	10	>=	100	130
	20	10	50	40	>=	280	420
	0	30	5	0	>=	90	90
	480	10	0	0	>=	1000	1460

Решение целочисленное, но значение целевой функции больше найденного. Отбрасываем ветвь.

Ветвление закончено. Все ветви отброшены, останавливаемся на оптимальном решении вида:

Переменные	**3**	**2**	**7**	**0**	**F**		
Коэф. ц.ф.	12	34	3	20	125	**min**	
Ограничения	50	200	150	400	>=	1500	1600
	0	60	0	10	>=	100	120
	20	10	50	40	>=	280	430
	0	30	5	0	>=	90	95
	480	10	0	0	>=	1000	1460

То есть: $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 7, x_4 = 0$, $F_{\min} = 125$.

ЗАДАНИЕ 8. Метод Гомори задачи целочисленного ЛП
(решение задачи линейного программирования графическим методом, симплекс-методом и через «Поиск решения» в Excel)

Предприятие выпускает два вида продукции: Изделие 1 и Изделие 2. На изготовление единицы Изделия 1 требуется затратить a_{11} кг сырья первого типа, a_{21} кг сырья второго типа, a_{31} кг сырья третьего типа.
На изготовление единицы Изделия 2 требуется затратить a_{12} кг сырья первого типа, a_{22} кг сырья второго типа, a_{32} кг сырья третьего типа.
Производство обеспечено сырьем каждого типа в количестве b_1 кг, b_2 кг, b_3 кг соответственно.
Рыночная цена единицы Изделия 1 составляет c_1 тыс. руб., а единицы Изделия 2 - c_2 тыс.руб.
Требуется:
1) построить экономико-математическую модель задачи;
2) составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную выручку от их реализации при помощи графического метода решения задачи линейного программирования.
3) составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную выручку от их реализации при помощи табличного симплекс – метода решения задачи линейного программирования.
4) составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную выручку от их реализации, используя надстройку «Поиск решения» в среде MS EXCEL.

$a_{11} = 2$	$a_{12} = 7$	$b_1 = 560$	$c_1 = 55$
$a_{21} = 3$	$a_{22} = 3$	$b_2 = 300$	$c_2 = 35$
$a_{31} = 5$	$a_{32} = 1$	$b_3 = 332$	

РЕШЕНИЕ.

1) ***Математическая модель задачи.***

Переменные задачи

В задаче требуется определить оптимальное число изделий каждого вида, обеспечивающее максимальную прибыль от их реализации, а значит, переменными задачи являются количество каждого вида изделий:

x_1 – количество изделий вида 1;

x_2 – количество изделий вида 2.

Целевая функция

Критерием эффективности служит параметр прибыли, который должен стремиться к *максимуму*. Чтобы рассчитать величину прибыли от реализации изделий, необходимо знать:

- выпускаемое количество изделий каждого вида, т.е. x_1 и x_2;
- прибыль от их реализации – согласно условию, соответственно 55 и 35 тыс. руб.

Таким образом, прибыль от реализации выпускаемых изделий вида 1 равна $55x_1$ тыс.руб., а от реализации изделий вида 2 – $35x_2$ тыс.руб. Поэтому запишем ЦФ в виде суммы прибыли от продажи каждого из видов изделий:

$$Z(x) = 55x_1 + 35x_2 \to \max$$

Ограничения

Возможное оптимальное количество изделий каждого вида x_1 и x_2 ограничивается следующими условиями:

- Заданными ресурсами - 1,2 и 3, которые используются на выпуск каждого вида изделия, не могут превышать общего запаса ресурсов;
- количество каждого вида изделия не может быть отрицательным.

Запишем эти ограничения в *математической* форме:

по расходу ресурса 1: $2x_1 + 7x_2 \le 560$,

по расходу ресурса 2: $3x_1 + 3x_2 \le 300$,

по расходу ресурса 3: $5x_1 + x_2 \le 332$

не отрицательность количества выпускаемых костюмов задаётся так:

$x_1 \ge 0$,

$x_2 \ge 0$.

Таким образом, *математическая модель* этой задачи имеет вид

$$Z(x) = 55x_1 + 35x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \le 560; \\ 3x_1 + 3x_2 \le 300; \\ 5x_1 + x_2 \le 332; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2)

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Так как переменные задачи x_1 и x_2 входят в целевую линейную функцию и ограничения задачи линейны, то соответствующая задача оптимизации – задача линейного программирования.

Построим в декартовой системе координат X_1OX_2 многоугольник решений, или допустимых планов, который является пересечением полуплоскостей - решений каждого из неравенств системы ограничений.

(1): $2x_1 + 7x_2 \le 560$. Сначала строится разделяющая прямая $2x_1 + 7x_2 = 560$. Для этого находим две точки, через которые она проходит:

x_1	0	280
x_2	80	0

Подставим точку (0;0) в неравенство (1): $0 \le 560$ - верно, поэтому стрелки указывают на полуплоскость к нулю.

(2): $3x_1 + 3x_2 \le 300$. Разделяющая прямая $3x_1 + 3x_2 = 300$, найдём точки:

x_1	0	100
x_2	100	0

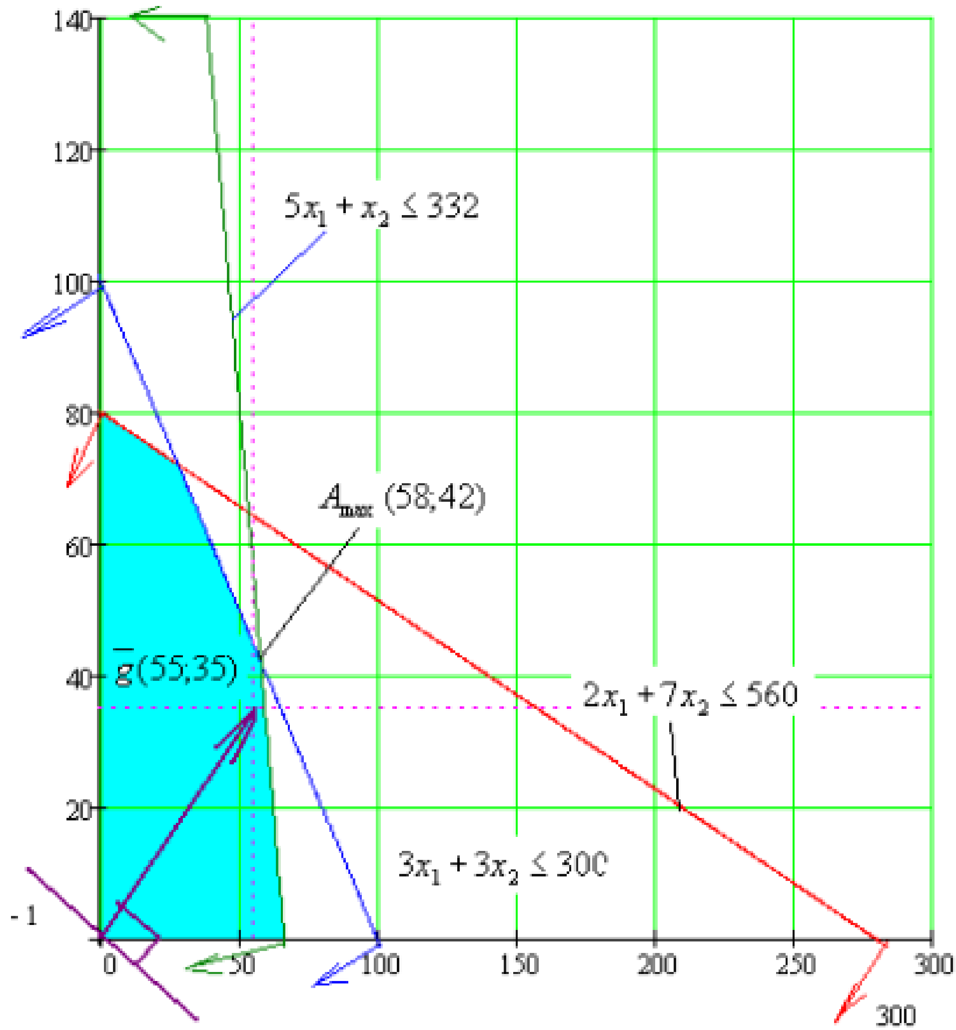
Подставим точку (0;0) в неравенство (2): $0 \le 300$ - верно, поэтому стрелки указывают на полуплоскость к нулю.

(3): $5x_1 + x_2 \le 332$. Разделяющая прямая $5x_1 + x_2 = 332$, найдём точки:

x_1	0	66,4
x_2	332	0

Подставим точку (0;0) в неравенство (3): $0 \le 332$ - верно, поэтому стрелки указывают на полуплоскость к нулю.

Находим многоугольник, в котором пересекаются, накладываются друг на друга все построенные полуплоскости. Многоугольник допустимых решений заштриховывается.



Построим градиент и линию уровня функции цели: $Z(X) = 55x_1 + 35x_2 \Rightarrow \bar{g}(55;35)$. Градиент всегда изображается с началом в т.(0;0). Любая линия уровня перпендикулярна градиенту. Удобно построить линию уровня $Z = 0$, также проходящую через начало координат: $55x_1 + 35x_2 = 0$.

Перемещаем мысленно или с помощью линейки линию уровня так, чтобы найти угловые точки многоугольника допустимых планов, координаты которых доставляют максимальное значение функции цели. В данной задаче линия уровня перемещается в направлении за градиентом, поэтому её значения будут увеличиваться от линии к линии. Следовательно, в точке А будет наибольшее значение. Найдём координаты точки А, как точки пересечения разделяющих прямых:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 300 \\ 5x_1 + x_2 = 332 \end{cases}$$

Второе уравнение умножим на (-3):

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 300 \\ -15x_1 - 3x_2 = -996 \end{cases}$$

сложим уравнения

$$-12x_1 = -696$$
$$x_1 = 58$$
$$x_2 = 332 - 5x_1 = 332 - 5 \cdot 58 = 42$$

Следовательно, $A_{\max}(58;42)$, $Z_{\max}(58;42) = 55 \cdot 58 + 35 \cdot 42 = 4660$.

Ответ: изделия вида 1 необходимо выпускать в количестве 58 единиц, а изделия вида 2 в количестве 42 единицы. При этом прибыль от их реализации максимальная и составит 4660 тыс. руб.

3)

СИМПЛЕКС – МЕТОД

Приводим задачу к каноническому виду, для этого в каждое неравенство вводим дополнительную переменную со знаком плюс: x_3, x_4, x_5.

$$Z(x) = 55x_1 + 35x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 560; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_4 = 300; \\ 5x_1 + x_2 + x_5 = 332; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Дальнейшее решение будем вести в симплекс – таблицах.

Таблица 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				55	35	0	0	0		
2	**Базис**	**Сб**	**B**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**Отношения**	**Коэфф.**
3	x3	0	560	2	7	1	0	0	280	0,4
4	x4	0	300	3	3	0	1	0	100	0,6
5	x5	0	332	5	1	0	0	1	66,4	-
6		Zmax	0	-55	-35	0	0	0		

Так как задача на нахождение максимального значения, то в индексной строке выбираем наибольшую по модулю отрицательную оценку – это столбец с переменной x_1 (таблица 1). Выделяем его.

Далее находим оценочные отношения, путём деления столбца C на столбец D, которые записываем в предпоследний столбец таблицы, из которых выбираем наименьшее из них – это 66,4 – третья строка. Выделяем её. В последнем столбце запишем пересчитывающие коэффициенты: $\frac{2}{5}=0{,}4; \frac{3}{5}=0{,}6$, которые необходимы при пересчёте всех невыделенных элементов. Третью строку делим на 5. Из базиса выводим переменную x_5, при этом в базис вводим переменную x_1. Все невыделенные элементы пересчитываем по методу Гаусса, например для первой строки: $560-332\cdot 0{,}4=427{,}2$, $2-5\cdot 0{,}4=0$ и так все элементы. В результате перейдём к таблице 2.

Таблица 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				55	35	0	0	0		
2	**Базис**	**Сб**	**B**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**Отношения**	**Коэфф.**
8	x3	0	427,2	0	6,6	1	0	-0,4	64,72727273	2,75
9	x4	0	100,8	0	2,4	0	1	-0,6	42	-
10	x1	55	66,4	1	0,2	0	0	0,2	332	0,083333
11		Zmax	3652	0	-24	0	0	11		

Так как в индексной строке присутствует отрицательная оценка, план не оптимален. Требуется улучшение плана. Выделяем столбец с переменной x_2. Далее находим оценочные отношения делением столбца C на столбец E, среди которых наименьшее 42 - вторая строка. Выделяем её. Элементы строки 2 делим на 2,4. Из базиса выводим переменную x_4, при этом в базис вводим переменную x_2. Получим таблицу 3.

Таблица 3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				55	35	0	0	0		
2	**Базис**	**Сб**	**B**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**Отношения**	**Коэфф.**
14	x3	0	150	0	0	1	-2,75	1,25		
15	x2	35	42	0	1	0	0,416667	-0,25		
16	x1	55	58	1	0	0	-0,08333	0,25		
17		Zmax	4660	0	0	0	10	5		

Так как в индексной строке все оценки положительные или равны нулю, план оптимален: $Z_{\max}(58;42)=4660$, ответ такой же как и при решении графическим методом.

4)

ПРИМЕНЕНИЕ НАДСТРОЙКИ «ПОИСК РЕШЕНИЯ» MS EXCEL

Для решения рассмотренной задачи в среде Excel заполним ячейки исходными данными (в виде таблицы) и формулами математической модели.

Excel позволяет получить оптимальное решение без ограничения размерности системы неравенств и целевой функции.

Таблица в режиме чисел

	A	B	C	D
1	Ресурсы	Вид изделия		Запасы
2		Изделие1	Изделие2	
3	1	2	7	560
4	2	3	3	300
5	3	5	1	332
6	Прибыль, тыс.руб.	55	35	
7				
8				
9	План	1	1	
10	Функция цели	90		
11				
12	Ограничения	9	<=	560
13		6	<=	300
14		6	<=	332
15				

Таблица в режиме формул

	A	B	C	D
1	Ресурсы	Вид изделия		Запасы
2		Изделие1	Изделие2	
3	1	2	7	560
4	2	3	3	300
5	3	5	1	332
6	Прибыль, тыс.руб.	55	35	
7				
8				
9	План	1	1	
10	Функция цели	=СУММПРОИЗВ(B6:C6;B9:C9)		
11				
12	Ограничения	=СУММПРОИЗВ(B3:C3;B9:C9)	<=	560
13		=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B9:C9)	<=	300
14		=СУММПРОИЗВ(B5:C5;B9:C9)	<=	332

Здесь: B9:C9 – результат (оптимальное количество изделий каждого вида);

B6:C6 – коэффициенты целевой функции;

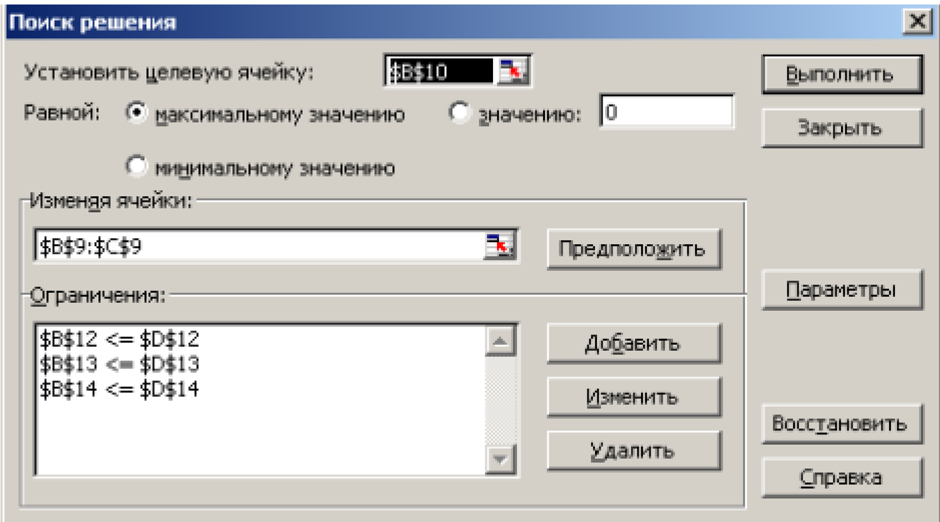
B10 – значение целевой функции;

B3:C5 – коэффициенты ограничений;

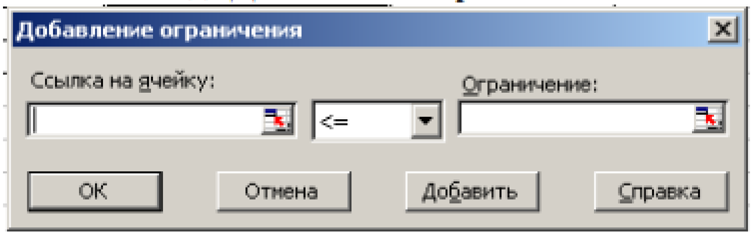
D12:D14 – правая часть ограничений;

B12:B14 – вычисляемые (фактические) значения левой части ограничений.

Решим задачу с помощью команды меню **Сервис / Поиск решения**. Итак, делаем активной ячейку B10. Выполняем команду **Сервис / Поиск решения.** На экране появляется диалоговое окно **Поиск решения**.



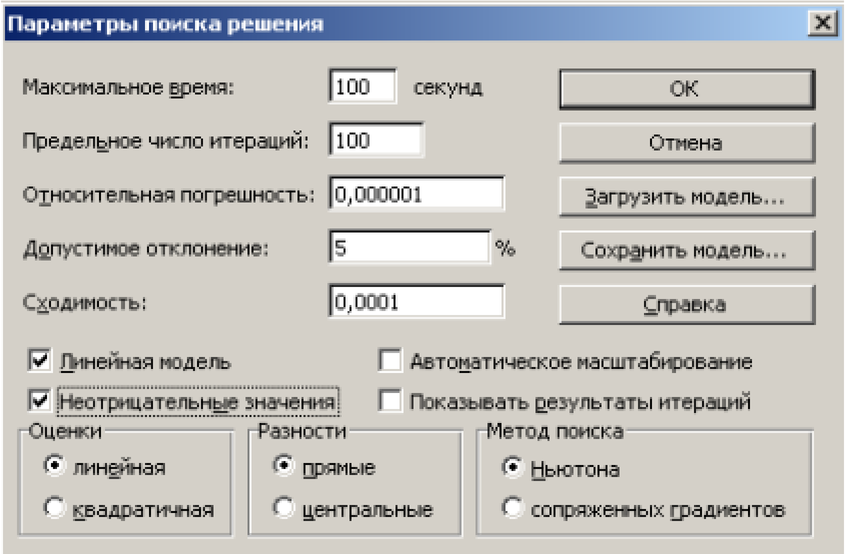
В поле **Установить целевую** будет показана ссылка на активную ячейку, то есть на B10. Причём эта ссылка абсолютная (мы видим $B$10). В секции **Равной**: устанавливаем переключатель **максимальному значению**. Можно задать не только максимальное/минимальное значения, но и любую произвольную величину, введя её в специальное поле **значению** в секции **Равной**:. Ограничения устанавливаются с помощью кнопки **Добавить**, которая вызывает диалоговое окно их ввода **Добавление ограничения**.



В поле ввода **Ссылка на ячейку**: указывается адрес ячейки, содержащей формулу левой части ограничения. Затем выбирается из списка знак соотношения. В поле **Ограничение**: указывается адрес ячейки, содержащей правую часть ограничения. Щёлкаем на кнопку **Добавить** и повторяем для следующего ограничения.

После ввода всех ограничений следует щёлкнуть кнопку **ОК**.

Так как все переменные несут условие не отрицательности, то их положительность задаём через кнопку **Параметры** в окне диалога **Поиск решения**. После щелчка на ней, на экране окно **Параметры поиска решения**.



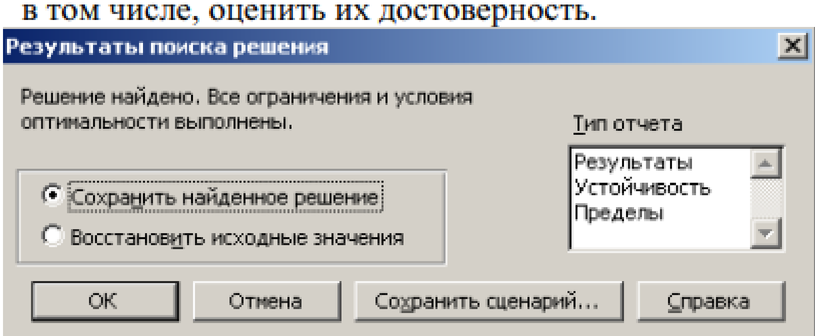
Устанавливаем флажки **Линейная модель** и **Неотрицательные значения,** соглашаясь с остальными установками по умолчанию.

Щёлкаем на кнопке **ОК**.

После этого произойдёт переключение в окно **Поиск решения**, в котором необходимо щёлкнуть кнопку **Выполнить** для решения поставленной задачи.

Excel предъявит окно **Результаты поиска решения** с сообщением о том, что решение найдено, или о том, что не может найти подходящего решения.

Если вычисления оказались успешными, Excel предъявит следующее окно итогов. Их можно сохранить или отказаться (**Восстановить исходные значения**). Кроме того, можно получить один из трёх видов отчётов (**Результаты, Устойчивость, Пределы**), позволяющие лучше осознать полученные результаты, в том числе, оценить их достоверность.



После найденного решения, в ячейках B9:C9 появится оптимальное количество изделий каждого вида. Покажем это.

	A	B	C	D
1	Ресурсы	Вид изделия		Запасы
2		Изделие1	Изделие2	
3	1	2	7	560
4	2	3	3	300
5	3	5	1	332
6	Прибыль, тыс.руб.	55	35	
7				
8				
9	План	58	42	
10	Функция цели	4660		
11				
12	Ограничения	410	<=	560
13		300	<=	300
14		332	<=	332

При сохранении отчёта выбрали вид отчёта – **Отчёт по результатам.**

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам**						
2	**Рабочий лист: [201.xls]Лист3**						
3	**Отчет создан: 24.12.2012 20:02:31**						
4							
5							
6	Целевая ячейка (Максимум)						
7		**Ячейка**	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
8		$B$10	Функция цели Изделие1	90	4660		
9							
10							
11	Изменяемые ячейки						
12		**Ячейка**	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
13		$B$9	План Изделие1	1	58		
14		$C$9	План Изделие2	1	42		
15							
16							
17	Ограничения						
18		**Ячейка**	**Имя**	**Значение**	**Формула**	**Статус**	**Разница**
19		$B$12	Ограничения Изделие1	410	$B$12<=$D$12	не связан.	150
20		$B$13	Изделие1	300	$B$13<=$D$13	связанное	0
21		$B$14	Изделие1	332	$B$14<=$D$14	связанное	0

Из отчёта видно, что ресурс 1 не используется полностью на 150 кг, а ресурсы 2 и 3 используются полностью.

Получили оптимальный план, при котором изделий первого вида необходимо выпустить в количестве 58 шт., а изделий второго вида в количестве 42 шт. При этом прибыль от их реализации максимальная и составит 4660 тыс.руб.