Обозначения модальностей:

- $\Diamond_0$ и $\Diamond_1$ – модальности GLB, J
- $\Diamond_* A := \Diamond_0(\Diamond_1 T \wedge A)$ – доказуемость в предположении 1-непротиворечивости
- $\Diamond A := \Diamond_1 A \vee \Diamond_* A$ – доказуемость арифметики Нибергаля относительно PA

Лемма 1. $J \vdash K(\Diamond), GL(\Diamond_*), GL(\Diamond_*^2), GL(\Diamond_0\Diamond_1\cdot), GL(\Diamond_1 T \wedge \Diamond_*\cdot)$
Под этой записью мы подразумеваем, что в J доказываются аксиомы соответствующих теорий и усиление по соответствующей модальности является допустимым правилом вывода в J.

Доказательство. Докажем выводимость аксиом Лёба.

- $J \vdash \Diamond_* p \to \Diamond_*(p \wedge \neg\Diamond_* p)$
  Применяя аксиому Лёба для $\Diamond_0$:
  $$J \vdash \Diamond_0(\Diamond_1 T \wedge p) \to \Diamond_0(\Diamond_1 T \wedge p \wedge \neg\Diamond_0(\Diamond_1 T \wedge p))$$
  с точностью до обозначения $\Diamond_*\cdot = \Diamond_0(\Diamond_1 T \wedge \cdot)$ это и есть требуемое
- $J \vdash \Diamond_*^2 p \to \Diamond_*^2(p \wedge \neg\Diamond_*^2 p)$
  Из предыдущего пункта, пользуясь нормальностью $\Diamond_*$:
  $$J \vdash \Diamond_*^2 p \to \Diamond_*^2(p \wedge \neg\Diamond_* p)$$
  Осталось воспользоваться тем, что $GL(\Diamond_*) \vdash \Diamond_*^2 p \to \Diamond_* p$
- $J \vdash \Diamond_0\Diamond_1 p \to \Diamond_0\Diamond_1(p \wedge \neg\Diamond_0\Diamond_1 p)$
  По аксиоме Лёба
  $$J \vdash \Diamond_0\Diamond_1 p \to \Diamond_0(\Diamond_1 p \wedge \neg\Diamond_0\Diamond_1 p)\Diamond_1 p \qquad\qquad \to \Diamond_1(p \wedge \neg\Diamond_1 p)$$
  Пользуясь тем, что $J \vdash \neg\Diamond_0\Diamond_1 p \to \Box_1(\neg\Diamond_0\Diamond_1 p)$ по нормальности получаем требуемое
- $J \vdash \Diamond_1 T \wedge \Diamond_* p \to \Diamond_1 T \wedge \Diamond_*(p \wedge (\neg\Diamond_1 T \vee \neg\Diamond_* p))$
  Следует из аксиомы Лёба для $\Diamond_*$

$\square$

Лемма 2.

$$\begin{aligned} J \vdash & \Diamond\Diamond_* p \to \Diamond_* p, \\ & \Diamond_*\Diamond_1 p \leftrightarrow \Diamond_0\Diamond_1 p, \\ & \Diamond_1\Diamond_0 p \leftrightarrow \Diamond_1 T \wedge \Diamond_0 p, \\ & \Diamond_1\Diamond_* p \leftrightarrow \Diamond_1 T \wedge \Diamond_* p \end{aligned}$$

Предложение 1. $J \vdash \Diamond(p \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond r)) \to \Diamond q \vee \Diamond(p \wedge \Diamond r) \wedge \Diamond r$

Доказательство. Раскроем $\Diamond$ в посылке

$$\Diamond(p \wedge \Diamond_*(q \wedge \Diamond r)) \to \Diamond\Diamond_* q, \to \Diamond_* q, \to \Diamond q$$

$$\begin{aligned} \Diamond(p \wedge \Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r)) &\to \Diamond\Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r), \equiv \Diamond_1^2(q \wedge \Diamond_1 r) \vee \Diamond_*\Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r) \\ \Diamond_1^2(q \wedge \Diamond_1 r) &\to \Diamond_1^2 q, \to \Diamond_1 q \to \Diamond q \\ \Diamond_*\Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r) &\leftrightarrow \Diamond_0\Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r), \to \Diamond_0(q \wedge \Diamond_1 r), \to \Diamond_* q, \to \Diamond q \end{aligned}$$

$$\Diamond(p \wedge \Diamond_1(q \wedge \Diamond_* r)) \to \Diamond\Diamond_1\Diamond_* r, \to \Diamond_* r, \to \Diamond r$$
$$\Diamond(p \wedge \Diamond_1(q \wedge \Diamond_* r)) \to \Diamond(p \wedge \Diamond_1\Diamond_* r), \Diamond(p \wedge \Diamond r)$$

□

Следствие. $J \vdash \Diamond^3 p \to \Diamond^2 p$

Лемма 3. *Пусть* $\Diamond_a$ *и* $\Diamond_b$ *— модальности логики* T, $\Diamond_\star A \equiv \Diamond_a A \vee \Diamond_b A$.

$$T \vdash GL(\Diamond_a), GL(\Diamond_b), \Diamond_b\Diamond_a p \to \Diamond_a p, \Diamond_a\Diamond_b p \to \Diamond_\star p$$

Тогда $T \vdash GL(\Diamond_\star)$

Доказательство. Нормальность очевидна.
Из аксиомы Лёба для $\Diamond_a$

$$\Diamond_a p \to \Diamond_a(p \wedge \neg\Diamond_\star p) \vee \Diamond_a(p \wedge \neg\Diamond_a p \wedge \Diamond_b p)$$

Из аксиомы Лёба для $\Diamond_b$

$$\Diamond_a(p \wedge \neg\Diamond_a p \wedge \Diamond_b p) \to \Diamond_a(p \wedge \neg\Diamond_a p \wedge \Diamond_b(p \wedge \neg\Diamond_b p))$$

Откуда по нормальности, так как $\neg\Diamond_a p \to \Box_b\neg\Diamond_a p$

$$\begin{aligned}\Diamond_a(p \wedge \neg\Diamond_a p \wedge \Diamond_b p) &\to \Diamond_a(p \wedge \Diamond_b(p \wedge \neg\Diamond_\star p))\\ &\to \Diamond_a\Diamond_b(p \wedge \neg\Diamond_\star p),\\ &\to \Diamond_\star(p \wedge \neg\Diamond_\star p)\end{aligned}$$

Итак, $\Diamond_a p \to \Diamond_\star(p \wedge \neg\Diamond p)$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned}\neg\Diamond_a p \wedge \Diamond_b p &\to \Box_b\neg\Diamond_a p \wedge \Diamond_b(p \wedge \neg\Diamond_b p)\\ &\to \Diamond_b(p \wedge \neg\Diamond_\star p)\end{aligned}$$

□

Предложение 2. $J \vdash GL(\Diamond^2\cdot)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}J \vdash \Diamond^2 p &\leftrightarrow \Diamond_1\Diamond_1 p \vee \Diamond_1\Diamond_* p \vee \Diamond_*\Diamond_1 p \vee \Diamond_*\Diamond_* p\\ &\leftrightarrow \Diamond_1 T \wedge \Diamond_* p \vee \Diamond_0\Diamond_1 p \vee \Diamond_*^2 p\end{aligned}$$

Теперь дважды воспользуемся леммой.
Сначала для $\Diamond_a \equiv \Diamond_0\Diamond_1$ и $\Diamond_b \equiv \Diamond_*^2$.

- $J \vdash \Diamond_*^2\Diamond_0\Diamond_1 p \to \Diamond_0^3\Diamond_1 p, \to \Diamond_0\Diamond_1 p$
- $J \vdash \Diamond_0\Diamond_1\Diamond_*^2 p \to \Diamond_* p$

Осталось применить ту же лемму для $\Diamond_a \equiv \Diamond_1 T \wedge \Diamond_*\cdot$ и $\Diamond_b \equiv \Diamond_0\Diamond_1\cdot \vee \Diamond_*^2\cdot$.

- $J \vdash \Diamond_1 T \wedge \Diamond_*(\Diamond_0\Diamond_1 p \vee \Diamond_*^2 p) \to \Diamond_0\Diamond_0\Diamond_1 p \vee \Diamond_0\Diamond_*^2 p, \to \Diamond_0\Diamond_1 p \vee \Diamond_*^2 p$
- $J \vdash \Diamond_0\Diamond_1(\Diamond_1 T \wedge \Diamond_* p) \vee \Diamond_*^2(\Diamond_1 T \wedge \Diamond_* p) \to \Diamond_0\Diamond_1\Diamond_* p \vee \Diamond_*^3 p, \to \Diamond_0\Diamond_1 p \vee \Diamond_*^2 p$

□

Следствие. $J \vdash GL(\Diamond \cdot \vee \Diamond^2 \cdot)$, *а точнее:*

- $J \vdash \Diamond^2 p \to \Diamond^2(p \wedge \neg\Diamond p \wedge \neg\Diamond^2 p)$
- $J \vdash \Diamond p \to \Diamond(p \wedge \neg\Diamond p \wedge \neg\Diamond^2 p) \vee \Diamond^2 p$

Доказательство. То, что $J \vdash GL(\Diamond \cdot \vee \Diamond^2 \cdot)$ является следствием следующих пунктов

- Используя предыдущее предложение и нормальность

  $$J \vdash \Diamond^2 p \to \Diamond^2(p \wedge \neg\Diamond p \wedge \neg\Diamond^2 p) \vee \Diamond^2(p \wedge \Diamond p \wedge \neg\Diamond^2 p)$$

  Так как $J \vdash \Diamond^3 p \to \Diamond^2 p$ и $K(\Diamond) \vdash \Diamond p \wedge \neg\Diamond^2 p \wedge \neg\Diamond^3 p \to \Diamond(p \wedge \neg\Diamond p \wedge \neg\Diamond^2 p)$

  $$J \vdash \Diamond^2(p \wedge \Diamond p \wedge \neg\Diamond^2 p) \to \Diamond^2\Diamond(p \wedge \neg\Diamond p \wedge \neg\Diamond^2 p), \to \Diamond^2(p \wedge \neg\Diamond p \wedge \neg\Diamond^2 p)$$

- Заметим, что

  $$K(\Diamond) \vdash \Diamond p \to \Diamond(p \wedge \neg\Diamond p \wedge \neg\Diamond^2 p) \vee \Diamond^2 p \vee \Diamond^3 p$$

  Откуда пользуясь тем, что $J \vdash \Diamond^3 p \to \Diamond^2 p$ получаем требуемое

$\square$