

Обозначения модальностей:

- \Diamond_0 и \Diamond_1 – модальности GLB , J
- $\Diamond_* A := \Diamond_0(\Diamond_1 T \wedge A)$ – доказуемость в предположении 1-непротиворечивости
- $\Diamond A := \Diamond_1 A \vee \Diamond_* A$ – доказуемость арифметики Нибергаля относительно РА

Лемма 1. $J \vdash K(\Diamond), GL(\Diamond_*), GL(\Diamond_*^2), GL(\Diamond_0 \Diamond_1 \cdot), GL(\Diamond_1 T \wedge \Diamond_* \cdot)$

Под этой записью мы подразумеваем, что в J доказываются аксиомы соответствующих теорий и усиление по соответствующей модальности является допустимым правилом вывода в J .

Доказательство. Докажем выводимость аксиом Лёба.

- $J \vdash \Diamond_* p \rightarrow \Diamond_*(p \wedge \neg \Diamond_* p)$

Применяя аксиому Лёба для \Diamond_0 :

$$J \vdash \Diamond_0(\Diamond_1 T \wedge p) \rightarrow \Diamond_0(\Diamond_1 T \wedge p \wedge \neg \Diamond_0(\Diamond_1 T \wedge p))$$

с точностью до обозначения $\Diamond_* \cdot = \Diamond_0(\Diamond_1 T \wedge \cdot)$ это и есть требуемое

- $J \vdash \Diamond_*^2 p \rightarrow \Diamond_*^2(p \wedge \neg \Diamond_*^2 p)$

Из предыдущего пункта, пользуясь нормальностью \Diamond_* :

$$J \vdash \Diamond_*^2 p \rightarrow \Diamond_*^2(p \wedge \neg \Diamond_* p)$$

Осталось воспользоваться тем, что $GL(\Diamond_*) \vdash \Diamond_*^2 p \rightarrow \Diamond_* p$

- $J \vdash \Diamond_0 \Diamond_1 p \rightarrow \Diamond_0 \Diamond_1(p \wedge \neg \Diamond_0 \Diamond_1 p)$

По аксиоме Лёба

$$\begin{aligned} J \vdash \Diamond_0 \Diamond_1 p &\rightarrow \Diamond_0(\Diamond_1 p \wedge \neg \Diamond_0 \Diamond_1 p) \\ \Diamond_1 p &\rightarrow \Diamond_1(p \wedge \neg \Diamond_1 p) \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $J \vdash \neg \Diamond_0 \Diamond_1 p \rightarrow \Box_1(\neg \Diamond_0 \Diamond_1 p)$ по нормальности получаем требуемое

- $J \vdash \Diamond_1 T \wedge \Diamond_* p \rightarrow \Diamond_1 T \wedge \Diamond_*(p \wedge (\neg \Diamond_1 T \vee \neg \Diamond_* p))$

Следует из аксиомы Лёба для \Diamond_*

□

Лемма 2.

$$\begin{aligned} J \vdash \Diamond \Diamond_* p &\rightarrow \Diamond_* p, \\ \Diamond_* \Diamond_1 p &\leftrightarrow \Diamond_0 \Diamond_1 p, \\ \Diamond_1 \Diamond_0 p &\leftrightarrow \Diamond_1 T \wedge \Diamond_0 p, \\ \Diamond_1 \Diamond_* p &\leftrightarrow \Diamond_1 T \wedge \Diamond_* p \end{aligned}$$

Предложение 1. $J \vdash \Diamond(p \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond r)) \rightarrow \Diamond q \vee \Diamond(p \wedge \Diamond r) \wedge \Diamond r$

Доказательство. Раскроем \Diamond в посылке

$$\Diamond(p \wedge \Diamond_*(q \wedge \Diamond r)) \rightarrow \Diamond \Diamond_* q, \rightarrow \Diamond_* q, \rightarrow \Diamond q$$

$$\begin{aligned}
& \Diamond(p \wedge \Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r)) \rightarrow \Diamond \Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r), \equiv \Diamond_1^2(q \wedge \Diamond_1 r) \vee \Diamond_* \Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r) \\
& \quad \Diamond_1^2(q \wedge \Diamond_1 r) \rightarrow \Diamond_1^2 q, \rightarrow \Diamond_1 q \rightarrow \Diamond q \\
& \quad \Diamond_* \Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r) \leftrightarrow \Diamond_0 \Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r), \rightarrow \Diamond_0(q \wedge \Diamond_1 r), \rightarrow \Diamond_* q, \rightarrow \Diamond q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Diamond(p \wedge \Diamond_1(q \wedge \Diamond_* r)) \rightarrow \Diamond \Diamond_1 \Diamond_* r, \rightarrow \Diamond_* r, \rightarrow \Diamond r \\
& \Diamond(p \wedge \Diamond_1(q \wedge \Diamond_* r)) \rightarrow \Diamond(p \wedge \Diamond_1 \Diamond_* r), \Diamond(p \wedge \Diamond r)
\end{aligned}$$

□

Следствие. $J \vdash \Diamond^3 p \rightarrow \Diamond^2 p$

Лемма 3. Пусть \Diamond_a и \Diamond_b — модальности логики T , $\Diamond_* A \equiv \Diamond_a A \vee \Diamond_b A$.

$$T \vdash GL(\Diamond_a), GL(\Diamond_b), \Diamond_b \Diamond_a p \rightarrow \Diamond_a p, \Diamond_a \Diamond_b p \rightarrow \Diamond_* p$$

Тогда $T \vdash GL(\Diamond_*)$

Доказательство. Нормальность очевидна.

Из аксиомы Лёба для \Diamond_a

$$\Diamond_a p \rightarrow \Diamond_a(p \wedge \neg \Diamond_* p) \vee \Diamond_a(p \wedge \neg \Diamond_a p \wedge \Diamond_b p)$$

Из аксиомы Лёба для \Diamond_b

$$\Diamond_a(p \wedge \neg \Diamond_a p \wedge \Diamond_b p) \rightarrow \Diamond_a(p \wedge \neg \Diamond_a p \wedge \Diamond_b(p \wedge \neg \Diamond_b p))$$

Откуда по нормальности, так как $\neg \Diamond_a p \rightarrow \Box_b \neg \Diamond_a p$

$$\begin{aligned}
\Diamond_a(p \wedge \neg \Diamond_a p \wedge \Diamond_b p) & \rightarrow \Diamond_a(p \wedge \Diamond_b(p \wedge \neg \Diamond_* p)) \\
& \rightarrow \Diamond_a \Diamond_b(p \wedge \neg \Diamond_* p), \\
& \rightarrow \Diamond_*(p \wedge \neg \Diamond_* p)
\end{aligned}$$

Итак, $\Diamond_a p \rightarrow \Diamond_*(p \wedge \neg \Diamond_* p)$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
\neg \Diamond_a p \wedge \Diamond_b p & \rightarrow \Box_b \neg \Diamond_a p \wedge \Diamond_b(p \wedge \neg \Diamond_b p) \\
& \rightarrow \Diamond_b(p \wedge \neg \Diamond_* p)
\end{aligned}$$

□

Предложение 2. $J \vdash GL(\Diamond^2 \cdot)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
J \vdash \Diamond^2 p & \leftrightarrow \Diamond_1 \Diamond_1 p \vee \Diamond_1 \Diamond_* p \vee \Diamond_* \Diamond_1 p \vee \Diamond_* \Diamond_* p \\
& \leftrightarrow \Diamond_1 T \wedge \Diamond_* p \vee \Diamond_0 \Diamond_1 p \vee \Diamond_*^2 p
\end{aligned}$$

Теперь дважды воспользуемся леммой.

Сначала для $\Diamond_a \equiv \Diamond_0 \Diamond_1$ и $\Diamond_b \equiv \Diamond_*^2$.

- $J \vdash \Diamond_*^2 \Diamond_0 \Diamond_1 p \rightarrow \Diamond_0^3 \Diamond_1 p, \rightarrow \Diamond_0 \Diamond_1 p$
- $J \vdash \Diamond_0 \Diamond_1 \Diamond_*^2 p \rightarrow \Diamond_* p$

Осталось применить ту же лемму для $\Diamond_a \equiv \Diamond_1 T \wedge \Diamond_* \cdot$ и $\Diamond_b \equiv \Diamond_0 \Diamond_1 \cdot \vee \Diamond_*^2 \cdot$.

- $J \vdash \Diamond_1 T \wedge \Diamond_*(\Diamond_0 \Diamond_1 p \vee \Diamond_*^2 p) \rightarrow \Diamond_0 \Diamond_0 \Diamond_1 p \vee \Diamond_0 \Diamond_*^2 p, \rightarrow \Diamond_0 \Diamond_1 p \vee \Diamond_*^2 p$
- $J \vdash \Diamond_0 \Diamond_1 (\Diamond_1 T \wedge \Diamond_* p) \vee \Diamond_*^2 (\Diamond_1 T \wedge \Diamond_* p) \rightarrow \Diamond_0 \Diamond_1 \Diamond_* p \vee \Diamond_*^3 p, \rightarrow \Diamond_0 \Diamond_1 p \vee \Diamond_*^2 p$

□

Следствие. $J \vdash GL(\Diamond \cdot \vee \Diamond^2 \cdot)$, а точнее:

- $J \vdash \Diamond^2 p \rightarrow \Diamond^2(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p)$
- $J \vdash \Diamond p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p) \vee \Diamond^2 p$

Доказательство. То, что $J \vdash GL(\Diamond \cdot \vee \Diamond^2 \cdot)$ является следствием следующих пунктов

- Используя предыдущее предложение и нормальность

$$J \vdash \Diamond^2 p \rightarrow \Diamond^2(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p) \vee \Diamond^2(p \wedge \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p)$$

Так как $J \vdash \Diamond^3 p \rightarrow \Diamond^2 p$ и $K(\Diamond) \vdash \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p \wedge \neg \Diamond^3 p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p)$

$$J \vdash \Diamond^2(p \wedge \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p) \rightarrow \Diamond^2 \Diamond(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p), \rightarrow \Diamond^2(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p)$$

- Заметим, что

$$K(\Diamond) \vdash \Diamond p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p) \vee \Diamond^2 p \vee \Diamond^3 p$$

Откуда пользуясь тем, что $J \vdash \Diamond^3 p \rightarrow \Diamond^2 p$ получаем требуемое

□