

Обозначения модальностей:

- $\Diamond_0$  и  $\Diamond_1$  – модальности  $GLB$ ,  $J$
- $\Diamond_*A := \Diamond_0(\Diamond_1T \wedge A)$  – доказуемость в предположении 1-непротиворечивости
- $\Diamond A := \Diamond_1A \vee \Diamond_*A$  – доказуемость арифметики Нибергаля относительно РА

**Лемма 1.**  $J \vdash K(\Diamond), GL(\Diamond_*), GL(\Diamond_*^2), GL(\Diamond_0\Diamond_1\cdot), GL(\Diamond_1T \wedge \Diamond_*\cdot)$

Под этой записью мы подразумеваем, что в  $J$  доказываются аксиомы соответствующих теорий и усиление по соответствующей модальности является допустимым правилом вывода в  $J$ .

*Доказательство.* Докажем выводимость аксиом Лёба.

- $J \vdash \Diamond_*p \rightarrow \Diamond_*(p \wedge \neg\Diamond_*p)$

Применяя аксиому Лёба для  $\Diamond_0$ :

$$J \vdash \Diamond_0(\Diamond_1T \wedge p) \rightarrow \Diamond_0(\Diamond_1T \wedge p \wedge \neg\Diamond_0(\Diamond_1T \wedge p))$$

с точностью до обозначения  $\Diamond_*\cdot = \Diamond_0(\Diamond_1T \wedge \cdot)$  это и есть требуемое

- $J \vdash \Diamond_*^2p \rightarrow \Diamond_*^2(p \wedge \neg\Diamond_*^2p)$

Из предыдущего пункта, пользуясь нормальностью  $\Diamond_*$ :

$$J \vdash \Diamond_*^2p \rightarrow \Diamond_*^2(p \wedge \neg\Diamond_*p)$$

Осталось воспользоваться тем, что  $GL(\Diamond_*) \vdash \Diamond_*^2p \rightarrow \Diamond_*p$

- $J \vdash \Diamond_0\Diamond_1p \rightarrow \Diamond_0\Diamond_1(p \wedge \neg\Diamond_0\Diamond_1p)$

По аксиоме Лёба

$$\begin{aligned} J \vdash \Diamond_0\Diamond_1p &\rightarrow \Diamond_0(\Diamond_1p \wedge \neg\Diamond_0\Diamond_1p) \\ \Diamond_1p &\rightarrow \Diamond_1(p \wedge \neg\Diamond_1p) \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что  $J \vdash \neg\Diamond_0\Diamond_1p \rightarrow \Box_1(\neg\Diamond_0\Diamond_1p)$  по нормальности получаем требуемое

- $J \vdash \Diamond_1T \wedge \Diamond_*p \rightarrow \Diamond_1T \wedge \Diamond_*(p \wedge (\neg\Diamond_1T \vee \neg\Diamond_*p))$

Следует из аксиомы Лёба для  $\Diamond_*$

□

**Лемма 2.**

$$\begin{aligned} J \vdash \Diamond\Diamond_*p &\rightarrow \Diamond_*p, \\ \Diamond_*\Diamond_1p &\leftrightarrow \Diamond_0\Diamond_1p, \\ \Diamond_1\Diamond_0p &\leftrightarrow \Diamond_1T \wedge \Diamond_0p, \\ \Diamond_1\Diamond_*p &\leftrightarrow \Diamond_1T \wedge \Diamond_*p \end{aligned}$$

**Предложение 1.**  $J \vdash \Diamond(p \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond r)) \rightarrow \Diamond q \vee \Diamond(p \wedge \Diamond r) \wedge \Diamond r$

*Доказательство.* Раскроем  $\Diamond$  в посылке

$$\Diamond(p \wedge \Diamond_*(q \wedge \Diamond r)) \rightarrow \Diamond\Diamond_*q, \rightarrow \Diamond_*q, \rightarrow \Diamond q$$

$$\begin{aligned}
& \Diamond(p \wedge \Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r)) \rightarrow \Diamond \Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r), \equiv \Diamond_1^2(q \wedge \Diamond_1 r) \vee \Diamond_* \Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r) \\
& \quad \Diamond_1^2(q \wedge \Diamond_1 r) \rightarrow \Diamond_1^2 q, \rightarrow \Diamond_1 q \rightarrow \Diamond q \\
& \quad \Diamond_* \Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r) \leftrightarrow \Diamond_0 \Diamond_1(q \wedge \Diamond_1 r), \rightarrow \Diamond_0(q \wedge \Diamond_1 r), \rightarrow \Diamond_* q, \rightarrow \Diamond q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Diamond(p \wedge \Diamond_1(q \wedge \Diamond_* r)) \rightarrow \Diamond \Diamond_1 \Diamond_* r, \rightarrow \Diamond_* r, \rightarrow \Diamond r \\
& \Diamond(p \wedge \Diamond_1(q \wedge \Diamond_* r)) \rightarrow \Diamond(p \wedge \Diamond_1 \Diamond_* r), \Diamond(p \wedge \Diamond r)
\end{aligned}$$

□

**Следствие.**  $J \vdash \Diamond^3 p \rightarrow \Diamond^2 p$

**Лемма 3.** Пусть  $\Diamond_a$  и  $\Diamond_b$  — модальности логики  $T$ ,  $\Diamond_* A \equiv \Diamond_a A \vee \Diamond_b A$ .

$$T \vdash GL(\Diamond_a), GL(\Diamond_b), \Diamond_b \Diamond_a p \rightarrow \Diamond_a p, \Diamond_a \Diamond_b p \rightarrow \Diamond_* p$$

Тогда  $T \vdash GL(\Diamond_*)$

*Доказательство.* Нормальность очевидна.

Из аксиомы Лёба для  $\Diamond_a$

$$\Diamond_a p \rightarrow \Diamond_a(p \wedge \neg \Diamond_* p) \vee \Diamond_a(p \wedge \neg \Diamond_a p \wedge \Diamond_b p)$$

Из аксиомы Лёба для  $\Diamond_b$

$$\Diamond_a(p \wedge \neg \Diamond_a p \wedge \Diamond_b p) \rightarrow \Diamond_a(p \wedge \neg \Diamond_a p \wedge \Diamond_b(p \wedge \neg \Diamond_b p))$$

Откуда по нормальности, так как  $\neg \Diamond_a p \rightarrow \Box_b \neg \Diamond_a p$

$$\begin{aligned}
\Diamond_a(p \wedge \neg \Diamond_a p \wedge \Diamond_b p) & \rightarrow \Diamond_a(p \wedge \Diamond_b(p \wedge \neg \Diamond_* p)) \\
& \rightarrow \Diamond_a \Diamond_b(p \wedge \neg \Diamond_* p), \\
& \rightarrow \Diamond_*(p \wedge \neg \Diamond_* p)
\end{aligned}$$

Итак,  $\Diamond_a p \rightarrow \Diamond_*(p \wedge \neg \Diamond_* p)$ . Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
\neg \Diamond_a p \wedge \Diamond_b p & \rightarrow \Box_b \neg \Diamond_a p \wedge \Diamond_b(p \wedge \neg \Diamond_b p) \\
& \rightarrow \Diamond_b(p \wedge \neg \Diamond_* p)
\end{aligned}$$

□

**Предложение 2.**  $J \vdash GL(\Diamond^2 \cdot)$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
J \vdash \Diamond^2 p & \leftrightarrow \Diamond_1 \Diamond_1 p \vee \Diamond_1 \Diamond_* p \vee \Diamond_* \Diamond_1 p \vee \Diamond_* \Diamond_* p \\
& \leftrightarrow \Diamond_1 T \wedge \Diamond_* p \vee \Diamond_0 \Diamond_1 p \vee \Diamond_*^2 p
\end{aligned}$$

Теперь дважды воспользуемся леммой.

Сначала для  $\Diamond_a \equiv \Diamond_0 \Diamond_1$  и  $\Diamond_b \equiv \Diamond_*^2$ .

- $J \vdash \Diamond_*^2 \Diamond_0 \Diamond_1 p \rightarrow \Diamond_0^3 \Diamond_1 p, \rightarrow \Diamond_0 \Diamond_1 p$
- $J \vdash \Diamond_0 \Diamond_1 \Diamond_*^2 p \rightarrow \Diamond_* p$

Осталось применить ту же лемму для  $\Diamond_a \equiv \Diamond_1 T \wedge \Diamond_* \cdot$  и  $\Diamond_b \equiv \Diamond_0 \Diamond_1 \cdot \vee \Diamond_*^2 \cdot$ .

- $J \vdash \Diamond_1 T \wedge \Diamond_*(\Diamond_0 \Diamond_1 p \vee \Diamond_*^2 p) \rightarrow \Diamond_0 \Diamond_0 \Diamond_1 p \vee \Diamond_0 \Diamond_*^2 p, \rightarrow \Diamond_0 \Diamond_1 p \vee \Diamond_*^2 p$
- $J \vdash \Diamond_0 \Diamond_1 (\Diamond_1 T \wedge \Diamond_* p) \vee \Diamond_*^2 (\Diamond_1 T \wedge \Diamond_* p) \rightarrow \Diamond_0 \Diamond_1 \Diamond_* p \vee \Diamond_*^3 p, \rightarrow \Diamond_0 \Diamond_1 p \vee \Diamond_*^2 p$

□

**Следствие.**  $J \vdash GL(\Diamond \cdot \vee \Diamond^2 \cdot)$ , а точнее:

- $J \vdash \Diamond^2 p \rightarrow \Diamond^2(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p)$
- $J \vdash \Diamond p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p) \vee \Diamond^2 p$

*Доказательство.* То, что  $J \vdash GL(\Diamond \cdot \vee \Diamond^2 \cdot)$  является следствием следующих пунктов

- Используя предыдущее предложение и нормальность

$$J \vdash \Diamond^2 p \rightarrow \Diamond^2(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p) \vee \Diamond^2(p \wedge \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p)$$

Так как  $J \vdash \Diamond^3 p \rightarrow \Diamond^2 p$  и  $K(\Diamond) \vdash \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p \wedge \neg \Diamond^3 p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p)$

$$J \vdash \Diamond^2(p \wedge \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p) \rightarrow \Diamond^2 \Diamond(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p), \rightarrow \Diamond^2(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p)$$

- Заметим, что

$$K(\Diamond) \vdash \Diamond p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond^2 p) \vee \Diamond^2 p \vee \Diamond^3 p$$

Откуда пользуясь тем, что  $J \vdash \Diamond^3 p \rightarrow \Diamond^2 p$  получаем требуемое

□