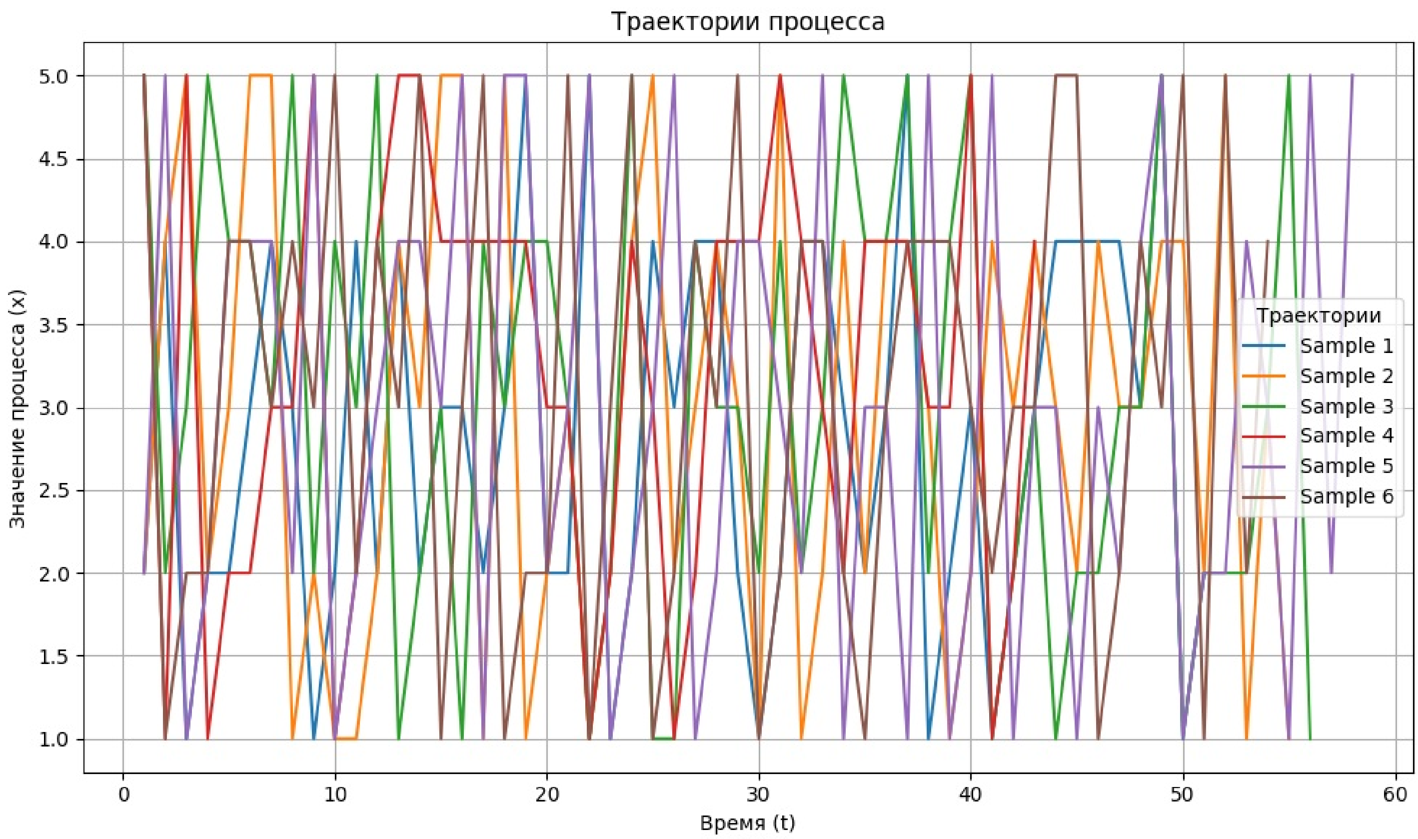
1) Нарисуйте (в каком-то виде) графики траекторий из **data.csv.**

In [1]:

```python
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

file_path = 'data.csv'
data = pd.read_csv(file_path)
```

In [2]:

```python
plt.figure(figsize=(10, 6))

for sample in data['sample'].unique():
    trajectory = data[data['sample'] == sample]
    plt.plot(trajectory['t'], trajectory['x'], label=f'Sample {sample}')

# Настройки графика
plt.title('Траектории процесса')
plt.xlabel('Время (t)')
plt.ylabel('Значение процесса (x)')
plt.legend(title='Траектории')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()

# Показ графика
plt.show()
```



2) Получите в явном виде оценки максимального правдоподобия π и **P** для нескольким независимым выборочным траекториям.

Вот такая формула для $\hat{\pi}_k$:

$$\hat{\pi}_k$$

$$= \frac{\#(x_{i1} = k)}{\sum_{k=1}^{p} \#(x_{i1} = k)}$$

И вот такая для **P:**

$$P_{lm} = \frac{\#(x_{it} = m, x_{it-1} = l)}{\sum_{m=1}^{p} \#(x_{it} = m, x_{it-1} = l)}$$

Запрограмируем

In [3]:

```
def estimate_initial_distribution(data,n):
    initial_dist = np.zeros(n)
    for i in data[data['t'] == 1]['x']:
        initial_dist[i-1] += 1
    pi = initial_dist / np.sum(initial_dist)
    return pi


def estimate_transition_matrix(data,n):
    transition_matrix = np.zeros((n,n))
    for sample in data['sample'].unique():
        trajectory = data[data['sample'] == sample]
        for i in range(len(trajectory) - 1):
            current_state = trajectory.iloc[i]['x']
            next_state = trajectory.iloc[i + 1]['x']
            transition_matrix[current_state-1,next_state-1] += 1
    row_sums = transition_matrix.sum(axis=1, keepdims=True)
    normalized_matrix = np.divide(transition_matrix, row_sums, where=row_sums != 0)
    return normalized_matrix
```

3) Оцените π и **P** по методу максимального правдоподобия исходя из данных в **data.csv.**

In [4]:

```
pi = estimate_initial_distribution(data,5)
pi
```

Out[4]:

```
array([0. , 0.5, 0. , 0. , 0.5])
```

In [5]:

```
P = estimate_transition_matrix(data,5)
P
```

Out[5]:

```
array([[0.03846154, 0.65384615, 0.13461538, 0.03846154, 0.13461538],
       [0.04225352, 0.12676056, 0.28169014, 0.42253521, 0.12676056],
       [0.21538462, 0.12307692, 0.15384615, 0.15384615, 0.35384615],
       [0.01428571, 0.11428571, 0.4       , 0.37142857, 0.1       ],
       [0.64150943, 0.18867925, 0.        , 0.0754717 , 0.09433962]])
```

4) Пусть $(X_1, \dots, X_n)$ — значения из первой выборочной траектории (где (n) — последний момент времени, для которого присутствует наблюдение в выборочной траектории). Исходя из полученных оценок для начального распределения и матрицы переходных вероятностей,

вычислите условные вероятности: $P(\xi(n+1) = x \mid X_1,...,X_n)$ и $P(\xi(n+2) = x \mid X_1,...,X_n)$ для всех **x** $\in \mathrm{dom}\xi$.

In [6]:

```
def get_future_step(last_record,Pf,step):
    result = Pf[last_record-1]
    for _ in range(step-1):
        result = result @ Pf
    return result
```

ЗАДАНИЕ 2

In [7]:

```
import random
def generate_markov_trajectory(pi,P,sample,max_t):
    t1 = np.random.choice(len(pi), p=pi)
    trajectory = [[sample, 1, t1 + 1]]

    for t in range(1, max_t):
        current_state = trajectory[-1][2] - 1
        next_state = np.random.choice(len(P), p=P[current_state])
        trajectory.append([sample, t+1, next_state + 1])

    return trajectory
```

In [8]:

```
a = generate_markov_trajectory(pi,P,1,5)
a
```

Out[8]:

```
[[1, 1, 5], [1, 2, 1], [1, 3, 1], [1, 4, 3], [1, 5, 3]]
```

In [9]:

```
from tqdm import tqdm
pi_results = []
P_results = []
last_records = []

pt1_result = []
pt2_result = []

max_t_per_sample = data.groupby('sample')['t'].max()
for k in tqdm(range(1000), desc="Итерации"):
    trajectories = []
    for sample in range(1,7):
        max_t = max_t_per_sample.get(sample, random.randint(45, 60))
        traj = generate_markov_trajectory(pi,P,sample,max_t)
        trajectories.extend(traj)

    new_data = pd.DataFrame(trajectories, columns=["sample", "t", "x"])

    pi_new = estimate_initial_distribution(new_data,5)
    P_new = estimate_transition_matrix(new_data,5)

    pi_results.append(pi_new)
    P_results.append(P_new)
```

```
Итерации: 100%|
| 1000/1000 [00:35<00:00, 27.78it/s
```

]

Дисперсии для π и P

In [10]:

```
def get_variance(pi_results,P_results):
    # Оценка дисперсии для pi
    pi_var = np.var(pi_results, axis=0)  # Дисперсия для каждого элемента pi
    # Оценка дисперсии для P
    P_var = np.var(P_results, axis=0)  # Дисперсия для каждого элемента P

    df_pi = pd.DataFrame({
        'Дисперсия': pi_var})
    df_P_var = pd.DataFrame(P_var, columns=[i + 1 for i in range(P_var.shape[1])],
                            index=[i + 1 for i in range(P_var.shape[0])])
    print("\nДисперсия для pi")
    display(df_pi)
    print("\nДисперсия для P:")
    display(df_P_var)
```

In [11]:

```
get_variance(pi_results,P_results)
```

Дисперсия для pi

	Дисперсия
0	0.000000
1	0.043002
2	0.000000
3	0.000000
4	0.043002

Дисперсия для P:

	1	2	3	4	5
1	0.000681	0.004322	0.002231	0.000768	0.002311
2	0.000607	0.001529	0.002658	0.003255	0.001566
3	0.002814	0.001828	0.001891	0.001892	0.003519
4	0.000215	0.001601	0.003511	0.003377	0.001305
5	0.004121	0.002728	0.000000	0.001242	0.001560

0.9 Квантиль Для $P(\xi(n+1))$ и 0.9 Квантиль Для $P(\xi(n+2))$

In [12]:

```
def get_quantile(P_results):
    first_sample_records = data[data['sample'] == 1]["x"].tolist()

    pt1_result = np.array([get_future_step(record, P_new, 1) for record, P_new in zip(fi
rst_sample_records, P_results)])
    pt1_lower = np.quantile(pt1_result, 0.05, axis=0)
    pt1_upper = np.quantile(pt1_result, 0.95, axis=0)

    print("Для P(xi(n+1))")
    print(pt1_lower)
```

```
    print(pt1_upper)

    pt2_result = np.array([get_future_step(record, P_new, 2) for record, P_new in zip(fi
rst_sample_records, P_results)])
    pt2_lower = np.quantile(pt2_result, 0.05, axis=0)
    pt2_upper = np.quantile(pt2_result, 0.95, axis=0)

    print("Для P(xi(n+2))")
    print(pt2_lower)
    print(pt2_upper)
```

In [13]:

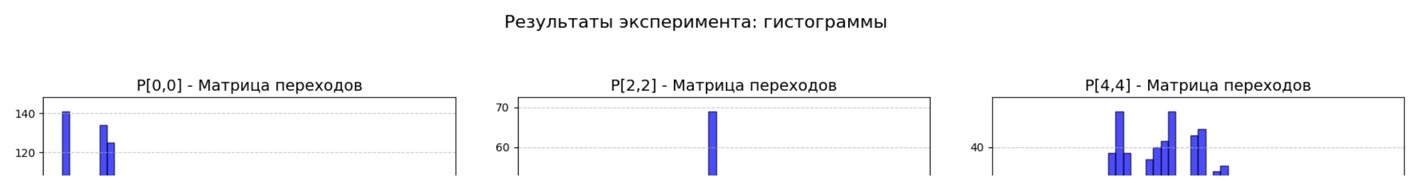
```
get_quantile(P_results)
```

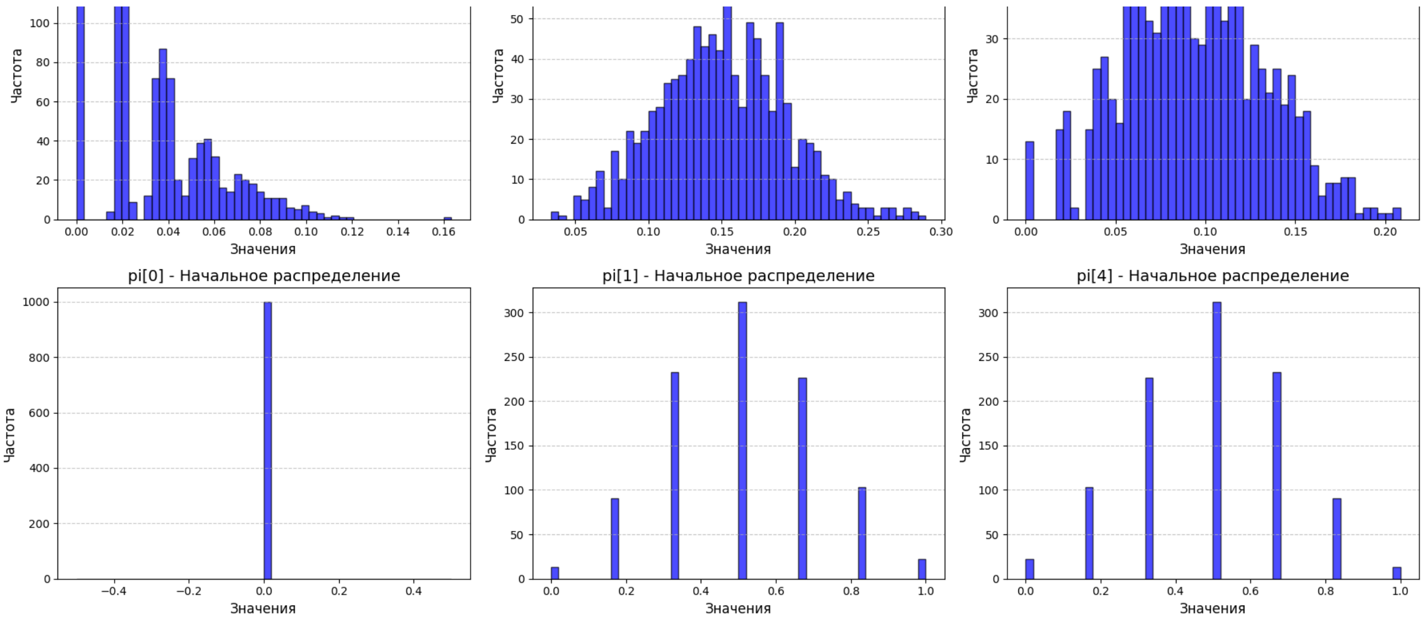
```
Для P(xi(n+1))
[0.         0.06599261 0.         0.01745598 0.05852273]
[0.59801678 0.68787879 0.4122807  0.47264919 0.42960634]
Для P(xi(n+2))
[0.0834031  0.11378966 0.13086825 0.14843744 0.11581513]
[0.31610292 0.4464344  0.26810659 0.34482685 0.22395392]
```

Гистограммы для p{0,0} p{2,2} p{4,4} и pi{1}, pi{4}, pi{0}

In [14]:

```
def plot_experiment_histograms(pi_results, P_results, bins=50):
    # Выбираем нужные элементы для визуализации
    p00 = P_results[:, 0, 0]  # Все P[0,0] из каждой итерации
    p22 = P_results[:, 2, 2]  # Все P[2,2]
    p44 = P_results[:, 4, 4]  # Все P[4,4]

    pi0 = pi_results[:, 0]  # Все pi[0]
    pi1 = pi_results[:, 1]  # Все pi[1]
    pi4 = pi_results[:, 4]  # Все pi[4]

    # Названия для графиков
    titles = [
        "P[0,0] - Матрица переходов",
        "P[2,2] - Матрица переходов",
        "P[4,4] - Матрица переходов",
        "pi[0] - Начальное распределение",
        "pi[1] - Начальное распределение",
        "pi[4] - Начальное распределение"
    ]

    data_list = [p00, p22, p44, pi0, pi1, pi4]

    # Настраиваем сетку графиков
    fig, axes = plt.subplots(2, 3, figsize=(18, 10))
    axes = axes.ravel()  # Для удобной индексации

    for i, (data, title) in enumerate(zip(data_list, titles)):
        axes[i].hist(data, bins=bins, color="blue", edgecolor="black", alpha=0.7)
        axes[i].set_title(title, fontsize=14)
        axes[i].set_xlabel("Значения", fontsize=12)
        axes[i].set_ylabel("Частота", fontsize=12)
        axes[i].grid(axis='y', linestyle='--', alpha=0.7)

    plt.suptitle("Результаты эксперимента: гистограммы", fontsize=16)
    plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.95])
    plt.show()

plot_experiment_histograms(np.array(pi_results), np.array(P_results),bins = 50)
```





Делаем такую же движуху способом из 6.2

In [15]:

```
tetta_P = np.clip(2 * P - P_results, 0, 1)
tetta_pi = np.clip(2 * pi - pi_results, 0, 1)
```

In [16]:

```
get_variance(tetta_pi,tetta_P)
```

```
Дисперсия для pi
```

	Дисперсия
0	0.000000
1	0.043002
2	0.000000
3	0.000000
4	0.043002

```
Дисперсия для P:
```

	1	2	3	4	5
1	0.000558	0.004322	0.002217	0.000583	0.002267
2	0.000509	0.001529	0.002658	0.003255	0.001564
3	0.002814	0.001797	0.001891	0.001886	0.003519
4	0.000123	0.001570	0.003511	0.003377	0.001277
5	0.004121	0.002728	0.000000	0.001157	0.001545

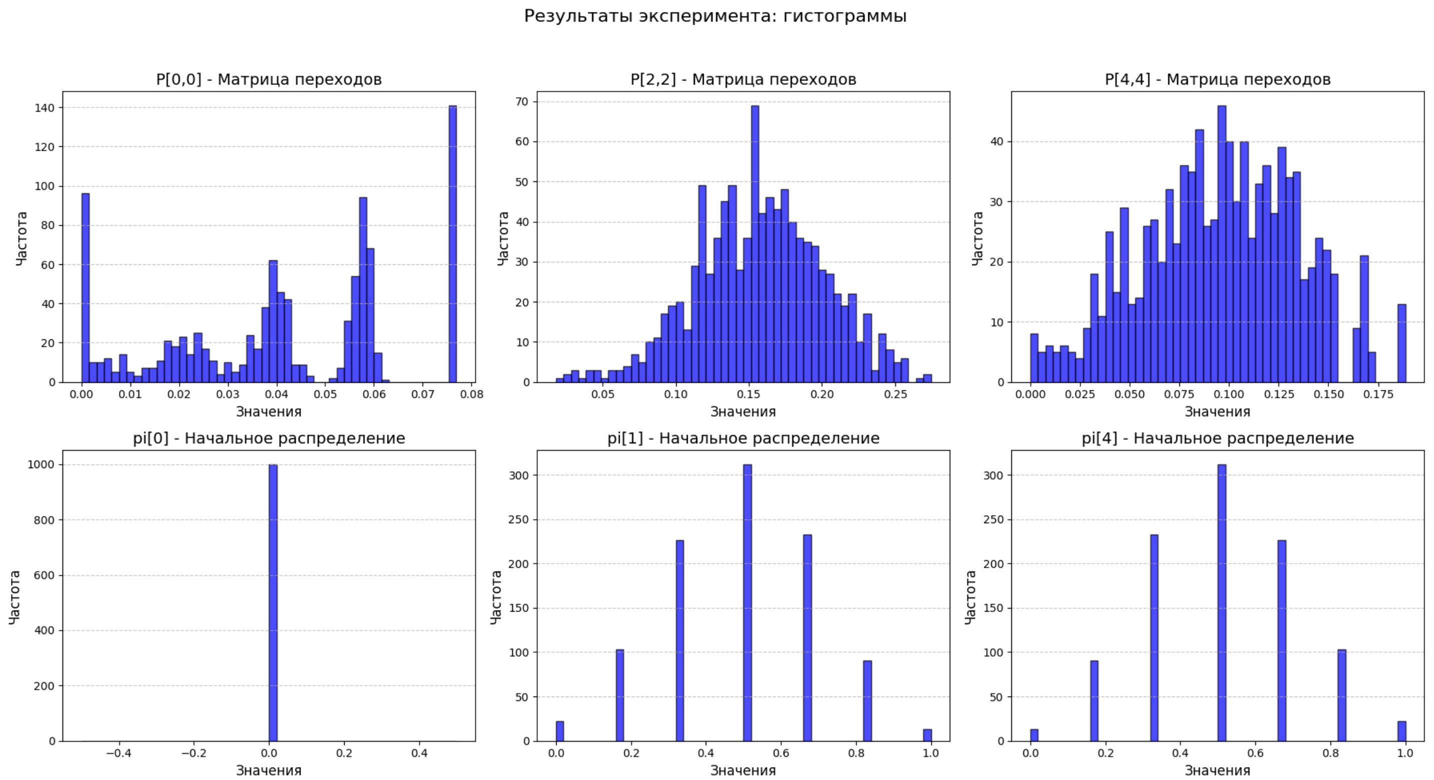
In [17]:

```
get_quantile(tetta_P)
```

```
Для P(xi(n+1))
[0.         0.04937961 0.         0.04071749 0.05222219]
[0.58604917 0.6502849  0.44961637 0.47544526 0.395116  ]
Для P(xi(n+2))
[0.0995151  0.10243379 0.14454104 0.1314671  0.11618738]
[0.26051469 0.41066665 0.29457065 0.34025251 0.23703033]
```

In [18]:

```
plot_experiment_histograms(np.array(tetta_pi), np.array(tetta_P),bins = 50)
```



Задание№3

Сформируйте выборку предполагаемых значений $\theta_1^* \dots \theta_n^*$ параметра $\theta = (\pi, P)$ с k = 10000 исходя из метода, описанного в п. 7, используя метод Метрополиса-Гастингса.

In [19]:

```
from itertools import product
K = 10000
Pi_degree = np.array([sum(data[data["t"]==1]["x"] == k+1)  for k in range(len(pi))])
P_degree = np.zeros((len(pi), len(pi)))
for l, m in product(range(1, len(pi)+1),  range(1, len(pi)+1)):
    for i in range(data.shape[0] - 1):
        if data.iloc[i]["x"] == l and data.iloc[i+1]["x"] == m and data.iloc[i]["sample"
] == data.iloc[i+1]["sample"]:
            P_degree[l-1, m-1] += 1
```

In [20]:

```
import numpy as np

def likelihood_prod(Pi, P,Pi_degree,P_degree):
    _Pi = Pi.copy()
    _P = P.copy()
    pi_product = np.prod(_Pi ** Pi_degree)
    p_product = np.prod(_P ** P_degree, axis=1)
    return np.prod(pi_product) * np.prod(p_product)

def metropolis_hastings_markov_chain(pi,P, k, sigma2):
    xi_pi = [pi]
    xi_P = [P]
    curr_xi_pi = xi_pi[0]
    curr_xi_P = xi_P[0]
    accepted_count = 0

    for i in range(1, k):
```

```
        # Предложение новых параметров
        eta = np.random.uniform(0, 1)
        pi_gamma = np.random.normal(loc=0, scale = sigma2, size = pi.shape)
        P_gamma = np.random.normal(loc=0, scale = sigma2, size = P.shape)

        pi_theta = pi_gamma + curr_xi_pi
        pi_theta[:-1] = np.clip(pi_theta[:-1], 0, 1)
        pi_theta[-1] = 1 - np.sum(pi_theta[:-1])
        # print(pi_theta.sum()==1)

        P_theta = P_gamma + curr_xi_P
        P_theta[:, :-1] = np.clip(P_theta[:, :-1], 0, 1)
        P_theta[:, -1] = 1 - np.sum(P_theta[:, :-1], axis=1)
        # print(P_theta.sum()==5)

        acceptance_ratio = likelihood_prod(pi_theta,P_theta,Pi_degree,P_degree) / likeli
hood_prod(curr_xi_pi,curr_xi_P,Pi_degree,P_degree)

        if eta <= acceptance_ratio:
            accepted_count+=1
            xi_pi.append(pi_theta)
            xi_P.append(P_theta)

            curr_xi_pi = pi_theta
            curr_xi_P = P_theta
        else:
            xi_pi.append(curr_xi_pi)
            xi_P.append(curr_xi_P)
    print((accepted_count/k))
    return xi_pi, xi_P
```

In [21]:

```
# Запуск алгоритма
pi_results, P_results = metropolis_hastings_markov_chain(pi, P, 10000, 0.001)
```

```
0.931
```

Дисперсии для π и P

In [22]:

```
get_variance(pi_results,P_results)
```

```
Дисперсия для pi
```

	Дисперсия
0	0.001308
1	0.000791
2	0.000520
3	0.000169
4	0.000972

```
Дисперсия для P:
```

	1	2	3	4	5
1	0.000956	0.000714	0.000492	0.000412	0.000777
2	0.000147	0.000180	0.000989	0.000565	0.000790
3	0.000514	0.000593	0.000638	0.000337	0.003035
4	0.001069	0.000318	0.001143	0.000347	0.001707
5	0.001133	0.001388	0.000071	0.000431	0.000610

0.9 Квантиль Для $P(\xi(n+1))$ и **0.9** Квантиль Для $P(\xi(n+2))$

In [23]:

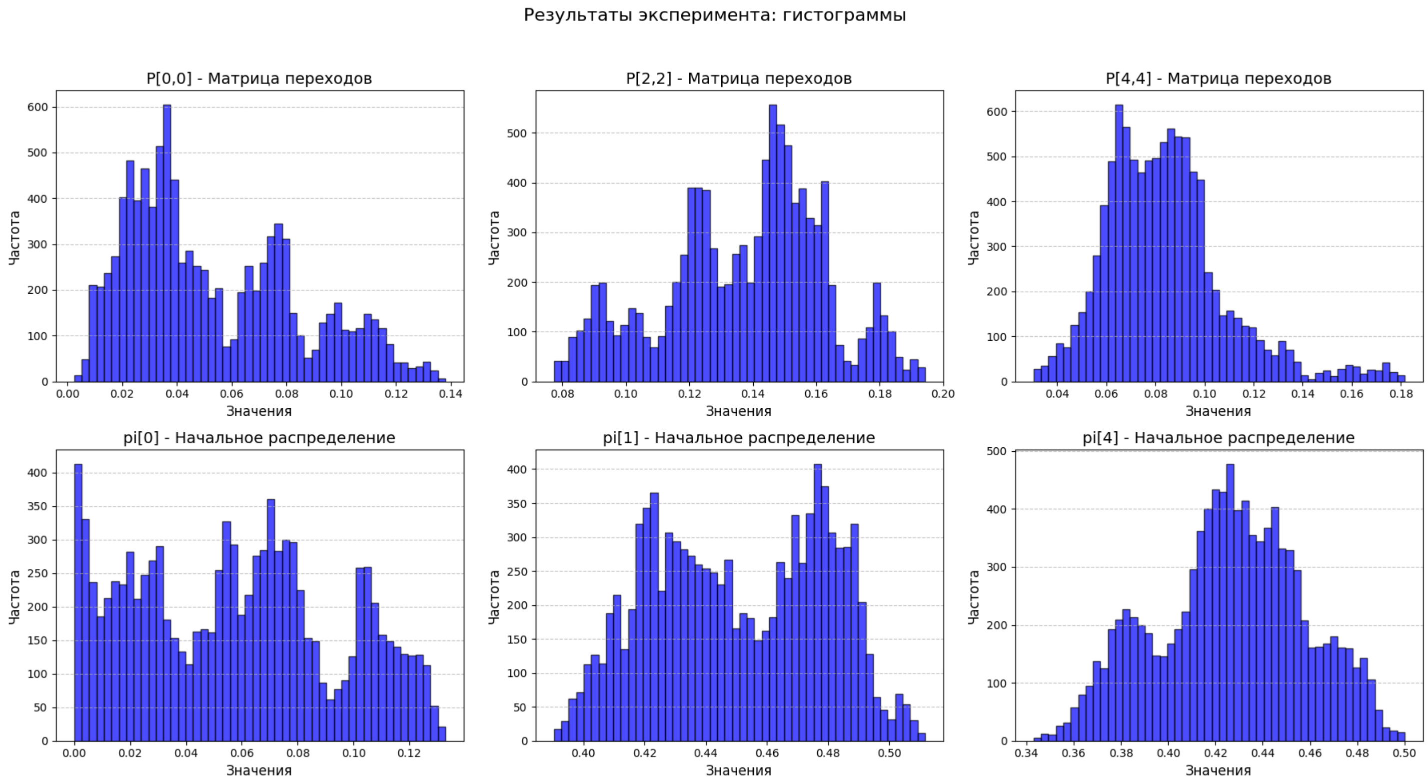
```
get_quantile(P_results)
```

```
Для P(xi(n+1))
[0.01673612 0.10389144 0.01042857 0.05177744 0.08919216]
[0.64221113 0.64966735 0.3966029  0.43115299 0.34811808]
Для P(xi(n+2))
[0.09241211 0.13652969 0.15032802 0.15916233 0.1220811 ]
[0.2721269  0.4647182  0.25382095 0.33214529 0.20376298]
```

Гистограммы для **p{0,0} p{2,2} p{4,4}** и **pi{1}, pi{4}, pi{0}**

In [24]:

```
plot_experiment_histograms(np.array(pi_results), np.array(P_results),bins = 50)
```



Сравним результаты из пункта **2** и **3:** Ну, разные, да. Метод Метрополиса-Гастингса рулит

In [ ]: