



# EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



## INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COMITAN

### Alumnos:

- Ruedas Velasco Pedro Eduardo\_\_19700073.
- Hernández Méndez Levi Magdiel\_\_19700039.
- Molina Cifuentes Adriel David\_\_19700061.
- Panti Ordoñez Sergio Ismael\_\_19700065.

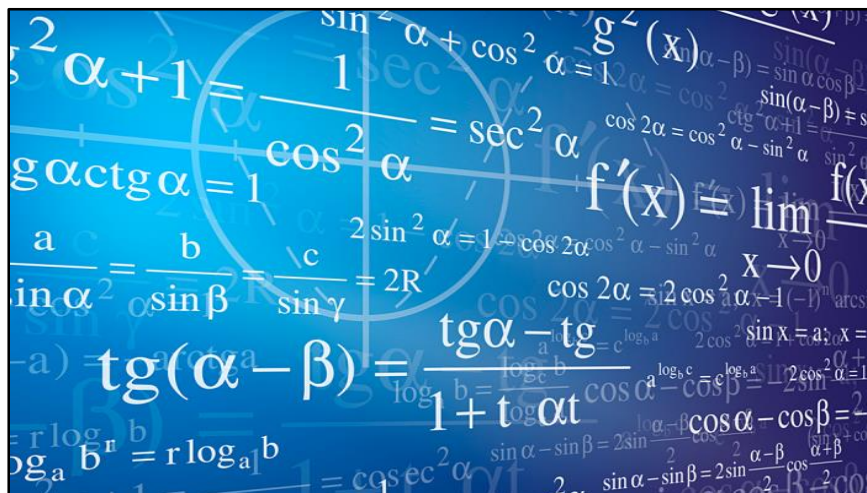
**Docente:** Vera Guillen José Flavio.

**Materia:** Métodos Numéricos.

**Semestre:** Cuarto      **Grupo:** "A"

**Actividad:** Resumen competencia 3.

**Comitán de Domínguez Chiapas, a 20 de Abril del 2021**



## “3.1 Métodos iterativos”.

Un método iterativo trata de resolver un problema matemático (como una ecuación o un sistema de ecuaciones) mediante aproximaciones sucesivas a la solución, empezando desde una estimación inicial. Esta aproximación contrasta con los métodos directos, que tratan de resolver el problema de una sola vez.

Los métodos iterativos son útiles para resolver problemas que involucran un número grande de variables (a veces del orden de millones), donde los métodos directos tendrían un coste prohibitivo incluso con la potencia del mejor computador disponible.

## “3.2 Sistemas de ecuaciones no lineales”.

### 1. El método de aproximaciones sucesivas para sistemas de n ecuaciones no lineales

Este método se basa en el teorema del punto fijo. Para su aplicación, al igual que en el caso de una ecuación, se transforma el sistema  $f(x) = 0$  en otro equivalente (es decir con las mismas soluciones, de la forma  $x = g(x)$ ). La forma de realizar esta transformación no es única. Por ejemplo, si se suma el vector  $x$  en ambos términos del sistema se tendrá que:  $x = x + f(x)$  por lo que podría tomarse  $g(x) = x + f(x)$ .

### 2. Una variante del método de aproximaciones sucesivas

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(i+1)} = g_1(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{j-1}^{(i)}, x_j^{(i)}, x_{j+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ x_2^{(i+1)} = g_2(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{j-1}^{(i)}, x_j^{(i)}, x_{j+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ \dots \dots \dots \\ x_j^{(i+1)} = g_j(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{j-1}^{(i)}, x_j^{(i)}, x_{j+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ \dots \dots \dots \\ x_n^{(i+1)} = g_n(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{j-1}^{(i)}, x_j^{(i)}, x_{j+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \end{array} \right\} \quad (i = 0, 1, \dots)$$

En el método de aproximaciones sucesivas es para la estimación del valor de la variable  $x_{(i+1)j}$  se utilizan los valores obtenidos en la iteración anterior para todas las variables que se están aproximando. No obstante, en ese momento ya se dispone de los valores de  $x_{(i+1)1}, x_{(i+1)2}, \dots, x_{(i+1)j-1}$  que, si el método posee buenas propiedades de convergencia puede pensarse que estén más próximos a los de la solución que los de la iteración anterior. En este sentido, en ocasiones, se sustituye el esquema iterativo antes considerado por el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(i+1)} = g_1(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{j-1}^{(i)}, x_j^{(i)}, x_{j+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ x_2^{(i+1)} = g_2(x_1^{(i+1)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{j-1}^{(i)}, x_j^{(i)}, x_{j+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ \dots \dots \dots \\ x_j^{(i+1)} = g_j(x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, \dots, x_{j-1}^{(i+1)}, x_j^{(i)}, x_{j+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ \dots \dots \dots \\ x_n^{(i+1)} = g_n(x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, \dots, x_{j-1}^{(i+1)}, x_j^{(i+1)}, x_{j+1}^{(i+1)}, \dots, x_n^{(i)}) \end{array} \right\} \quad (i = 0, 1, \dots)$$

Este método se conoce, en algunos textos, con el nombre de método de Gauss-Seidel, no siempre funciona mejor esta variante del método que el método clásico de aproximaciones sucesivas pues con el se puede estar modificando la función  $g(x)$  de la iteración empeorando su constante de Lipschitz.

## 1. El método de Newton-Raphson para sistemas de $n$ ecuaciones no lineales

Considérese nuevamente el sistema de  $n$  ecuaciones no lineales con  $n$  incógnitas representado por

$$f(x) = 0 \iff \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Al igual que se hizo en el caso de una variable, supongamos que en un dominio cerrado  $D \subset \mathbb{R}^n$   $f(x)$  es una función de clase  $(C^2(D))^n$ . Y supongamos además que la ecuación anterior admite una solución  $x^*$  en el dominio  $D$ . Para cualquier otro vector  $x(0) \in D$ , denotando por  $\delta x$  al vector tal que  $x^* = x(0) + \delta x$ , la expresión del desarrollo en serie de Taylor nos permitiría afirmar, para cada una de las ecuaciones del sistema, que existen valores  $\theta_j \in [0, 1]$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) tales que

$$0 = f_j(x^*) = f_j(x(0) + \delta x) = f_j(x(0)) + \nabla f_j(x(0))^T \cdot \delta x + \frac{1}{2} \cdot \{\delta x\}^T \cdot Hf_j(x(0) + \theta_j \cdot \delta x) \cdot \delta x$$

donde  $Hf_j(x)$  es la matriz hessiana de la función  $f_j(x)$ . Si conocido  $x(0)$  se fuese capaz de determinar  $\delta x$  resolviendo el sistema formado para  $j = 1, 2, \dots, n$ , por las ecuaciones:

$$f_j(x(0)) + \nabla f_j(x(0))^T \cdot \delta x + \frac{1}{2} \cdot \{\delta x\}^T \cdot Hf_j(x(0) + \theta_j \cdot \delta x) \cdot \delta x = 0.$$

El método de Newton-Raphson (o método de linealización de Newton) se sustenta en simplificar las expresiones anteriores linealizándolas. Para ello considera que si se está suficientemente cerca de la solución (es decir si  $\|\delta x\|$  es suficientemente pequeño) los términos:

$(1/2) \cdot \{\delta x\}^T \cdot Hf_j(x(0) + \theta_j \cdot \delta x) \cdot \delta x$  podrán despreciarse frente a los otros términos de cada ecuación del sistema. Por ello, denotando por  $[Jf(x)]$  a la matriz jacobiana de  $f$  en el punto  $x$ , en este método se resuelve el sistema lineal:

$f(x(0)) + Jf(x(0)) \cdot \Delta x(0) = 0$  del que se obtiene que:  $\Delta x(0) = -[Jf(x(0))]^{-1} \cdot f(x(0))$ .

Obviamente, al ser diferente el sistema linealizado que el proporcionado por el desarrollo de Taylor, se tendrá que  $\Delta x(0) \neq \delta x$  y por tanto  $x^* = x(0) + \delta x \neq x(1) = x(0) + \Delta x(0)$ . De una forma intuitiva (que después deberemos precisar cuándo es correcta) puede pensarse que aunque  $x(1)$  sea diferente de  $x^*$  será un vector más próximo a  $x^*$  que  $x(0)$  pues lo hemos obtenido "aproximando" el valor  $\delta x$  que nos llevaba de  $x(0)$  a  $x^*$ . Con ello el método de Newton-Raphson propone repetir este proceso de forma recursiva hasta estar lo suficientemente cercanos a la solución buscada. Mas concretamente el método de Newton-Raphson consiste en: Dado un vector  $x(0)$ , generar la sucesión:  $x(i+1) = x(i) - [Jf(x(i))]^{-1} \cdot f(x(i))$   $\infty i=0$ .

## 2. Variantes del método de Newton-Raphson para sistemas: método de Newton modificado y métodos de cuasi-Newton

El paso más costoso de la aplicación del método de Newton-Raphson consiste en la evaluación en cada iteración de la matriz jacobiana  $Jf(x(i))$  (lo cual conlleva un número de  $n^2$  evaluaciones de las funciones derivadas parciales primeras, que a su vez implicaran un número de operaciones elementales que dependerá de las expresiones de estas derivadas parciales) y de su inversión  $[Jf(x(i))]^{-1}$  o lo que es equivalente de la resolución del sistema lineal de ecuaciones algebraicas  $Jf(x(i)) \cdot \delta x(i) = -f(x(i))$ , lo cual implica tener que hacer del orden de  $O(\lambda \cdot n^3)$  operaciones, siendo  $n$  el número de incógnitas y ecuaciones del sistema y  $\lambda$  un parámetro menor o igual a  $(2/3)$  dependiendo de la estructura de la matriz jacobiana. Ello permite estimar el número de operaciones elementales en cada iteración como un valor proporcional a  $n^3$  lo cual, cuando  $n$  toma valores elevados puede representar un coste computacional grande. Para intentar solventar este problema de la aplicación práctica del método de Newton-Raphson se han desarrollado numerosos métodos que, con mayor o mejor fortuna según el sistema al que se aplique, tratan de aproximar ya sea  $Jf(x(i))$  o su inversa  $[Jf(x(i))]^{-1}$ . Entre ellos señalamos los siguientes:

## 4.1 Aproximación de las derivadas parciales mediante diferencias finitas

En esta variante del método los valores de las derivadas que intervienen en la expresión de la matriz jacobiana se aproximan mediante fórmulas en diferencias finitas como, por ejemplo:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(i)}) \approx \frac{f_k(x_1^{(i)}, \dots, x_{j-1}^{(i)}, x_j^{(i)} + h_j^{(i)}, x_{j+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) - f_k(x_1^{(i)}, \dots, x_{j-1}^{(i)}, x_j^{(i)}, x_{j+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})}{h_j^{(i)}}$$

Donde los parámetros  $h_j^{(i)}$  ( $j=1, \dots, n$ ) son tomados en cada iteración "suficientemente" pequeños para asegurar una buena aproximación. Por ejemplo:

$$h_j^{(i)} = h^{(i)} = \text{Inf} \left( \frac{\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}\|}{10}, h^{(i-1)} \right)$$

## 4.2 Método de Newton modificado

Esta variante consiste en utilizar durante la  $k$  primeras iteraciones (siendo  $k$  un número a predeterminedar por el usuario del método) como aproximación de la matriz tangente la matriz  $J_f(\mathbf{x}(0))$ . Con ello en estas  $k$  iteraciones solo se realiza una vez el cálculo de la matriz jacobiana y de su inversa (y si se optase por la resolución del sistema  $J_f(\mathbf{x}(0)) \cdot \Delta \mathbf{x}^{(i)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)})$  bastara con factorizar una vez la matriz  $J_f(\mathbf{x}(0))$  en la primera iteración y conservar las matrices de la factorización). Realizadas estas  $k$  primeras iteraciones se calcula  $J_f(\mathbf{x}(k))$  y se utiliza esta matriz en las  $k$  siguientes iteraciones tras las cuales se vuelve a actualizar obteniéndose  $J_f(\mathbf{x}(2k))$  y continuando así el proceso. Con ello, a costa de una pérdida de velocidad de convergencia, se logra que solo las iteraciones  $1a$ ,  $(k+1)^\text{ª}$ -ésima,  $(2k+1)^\text{ª}$ -ésima, .... impliquen la realización de un número de operaciones proporcional a  $n^3$  en tanto que el resto conllevaran del orden de  $n^2$  operaciones.

## 4.3 Método de Jacobi

En este método la matriz tangente que interviene en cada iteración  $J_f(\mathbf{x}^{(i)})$  se sustituye por otra con la misma diagonal pero con todos sus demás elementos nulos. Mas concretamente, denotando por  $D_f(\mathbf{x}^{(i)})$  a la matriz:

$$[D_f(\mathbf{x}^{(i)})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^{(i)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^{(i)}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}^{(i)}) \end{bmatrix}$$

Se utilizará el esquema iterativo

$$x(i+1) = x(i) - Df(x(i))^{-1} \cdot f(x(i)) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

Esta forma de proceder efectivamente reduce de forma notable el número de operaciones (solo conlleva evaluar  $n$  funciones derivadas en lugar de  $n^2$  y además la inversión de una matriz diagonal solo implica  $n$  operaciones). Pero solo es válida si los elementos no diagonales de la matriz jacobiana son "pequeños" comparados con los términos diagonales.

#### 4.4 Método de Gauss-Seidel

En esta variante del método de Newton-Raphson, la matriz tangente de cada iteración es sustituida por otra triangular inferior en la que los elementos de la diagonal y los que están por debajo de ella coinciden con los de la matriz jacobiana. Más concretamente, siendo  $Gf(x(i))$  la matriz:

$$[Gf(x^{(i)})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^{(i)}) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^{(i)}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^{(i)}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^{(i)}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x^{(i)}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^{(i)}) \end{bmatrix}$$

El esquema que se emplea es:

$$x(i+1) = x(i) - Gf(x(i))^{-1} \cdot f(x(i)) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

En esta variante del método de Newton-Raphson también se reduce de forma notable el número de operaciones (solo conlleva evaluar  $(n \cdot (n + 1) / 2)$  funciones derivadas en lugar de  $n^2$  y además la inversión de una matriz triangular solo implica del orden de  $n^2$  operaciones). Pero también su límite de validez lo marcará la pequeñez de los términos que se están despreciando en la matriz tangente.

#### 4.5 Métodos de sobre relajación (SOR)

Con la misma notación empleada en la descripción de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel, este método consiste en utilizar el esquema:

$$x(i+1) = x(i) - \rho \cdot Df(x(i))^{-1} \cdot f(x(i)) + Gf(x(i))^{-1} \cdot f(x(i)) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

Donde  $\rho$  es un parámetro que debe fijarse de antemano llamándose parámetro de relajación al valor  $\omega = 1 / (1 + \rho)$ . La matriz a invertir también es ahora triangular inferior por lo que el número de operaciones es similar al del método de Gauss-Seidel.





### “3.3 Iteración y convergencia de sistemas de ecuaciones”.

Sistemas de Ecuaciones Lineales aparecen en muchos aspectos de las matemáticas aplicadas y la computación científica. Dichos sistemas de ecuaciones lineales son de la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

:

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

En notación matriz-vector, un sistema de ecuaciones algebraicas lineales tiene la forma:

A: Matriz.

b: Vector.

x: Es el vector de incógnitas a ser determinado.

Lo siguiente conduce a la pregunta: ¿Puede el vector b ser expresado como una combinación lineal de las columnas de la matriz A?

1. Los coeficientes de esta combinación lineal están dados por los componentes del vector solución x.
2. Puede o no tener solución.
3. Puede no ser única.

## "3.4 Aplicaciones".

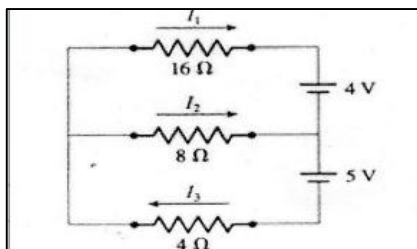
Los sistemas de ecuaciones lineales nos sirven para resolver diversos problemas, desde los que se presentan en nuestra vida diaria hasta problemas que se presentan en ingeniería, física, matemáticas, economía y otras ciencias.

Algunas aplicaciones del sistema de ecuaciones lineales son:

### 1. Circuitos eléctricos mediante la ley de kirchhoff:

Las leyes de kirchhoff nos sirven para resolver circuitos y conocer el comportamiento de todos sus elementos activos y pasivos.

Se puede mostrar que las corrientes  $I_1, I_2$  e  $I_3$  pasan por las tres ramas del circuito y por lo tanto se cumple con el sistema lineal dado para determinar las corrientes.



$$\begin{aligned} I_1, I_2 \text{ e } I_3. \\ \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 16I_1 - 8I_2 = 4 \\ 8I_2 + 4I_3 = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

### 2. Modelo insumo-producto de leontief:

En el modelo de insumos se encarga de ilustra la forma que tiene que manejarse todo el flujo de transacciones inter-industriales y por lo tanto los niveles sectoriales de producción bruta.

$$X = [I - A]^{-1} * E$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 80 \\ 10 & 20 & 100 \\ 100 & 60 & 120 \end{bmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X =$$

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/6 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \right)^{-1} * \begin{bmatrix} 50 & 100 & 80 \\ 10 & 20 & 100 \\ 100 & 60 & 120 \end{bmatrix}$$



### 3. Ajustes de curvas:

El ajuste de curvas se presenta en áreas de la ingeniería y estadística. Se tienen como datos pares coordenados de la forma:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \\ (x_2, y_2) \\ (x_3, y_3) \\ \vdots \\ (x_n, y_n)\end{aligned}$$

Y se necesita encontrar un polinomio cuya gráfica pase por estos puntos. Se puede demostrar que si todos los puntos son distintos, entonces hay un polinomio único de grado  $n - 1$  (o menor) que se ajusta a los puntos dados.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1}$$

Los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$  del polinomio buscado se pueden encontrar sustituyendo los puntos en la ecuación polinomial y después resolver un sistema de ecuaciones lineales.