EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COMITAN

Alumno: Ruedas Velasco Pedro Eduardo

No. Control: 19700073

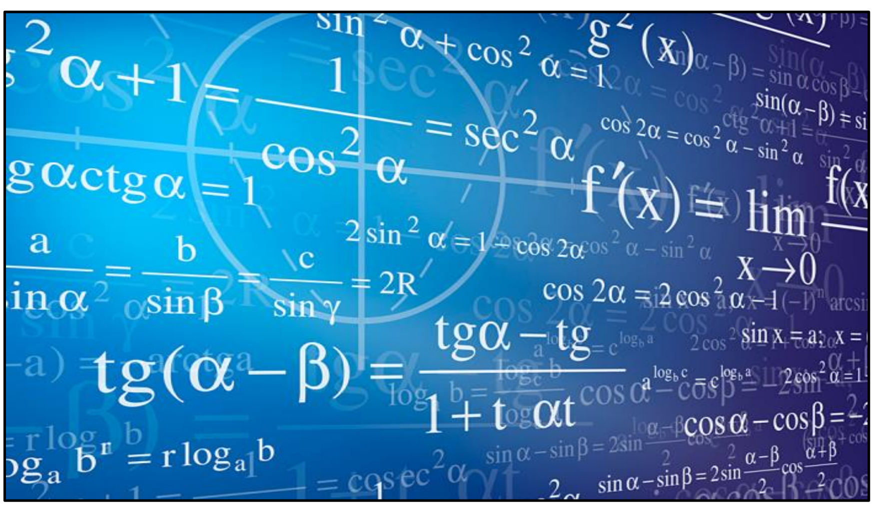
Docente: Vera Guillen José Flavio.

Materia: Métodos Numéricos.

Semestre: Cuarto **Grupo:** “A”

Actividad: U6_Busqueda de Informacion.

Comitán de Domínguez Chiapas, a 17 de Junio 2021.



6. Solución de ecuaciones diferenciales.

6.1 Métodos de un paso.

1. Euler:

El método de Euler, llamado así en honor de Leonhard Euler, es un procedimiento de integración numérica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de un valor inicial dado.

El método de Euler es un método de primer orden, lo que significa que el error local es proporcional al cuadrado del tamaño del paso, y el error global es proporcional al tamaño del paso. El método de Euler regularmente sirve como base para construir métodos más complejos.

El método de Euler es el más simple de los métodos numéricos resolver un problema del siguiente tipo:

$$PVI = \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_i) = ? \end{cases}$$

Consiste en multiplicar los intervalos que va de x_o a x_f en n sub intervalos de ancho "h"; es decir:

$$h = \frac{x_f - x_o}{n}$$

De manera que se obtiene un conjunto discreto de $n+1$ puntos: $x_o, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ del intervalo de interés $[x_o, x_f]$. Para cualquiera de estos puntos se cumple que:

$$x_i = x_0 + ih, \quad 0 \leq i \leq n$$

La condición inicial $y(x_o) = y_o$, representa el punto $P_o = (x_o, y_o)$ por donde pasa la curva solución de la ecuación del planteamiento inicial, la cual se denotará como:

$$F(x) = y$$

Ya teniendo el punto P_o se puede evaluar la primera derivada de $F(x)$ en ese punto; por lo tanto:

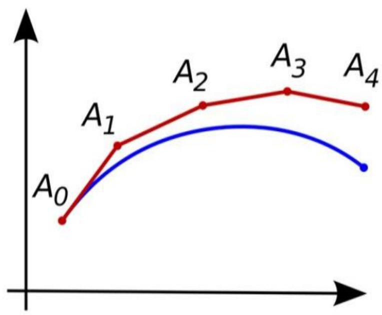
$$F'(x) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{P_o} = f(x_o, y_o)$$

Con esta información se traza una recta, aquella que pasa por P_o y de pendiente (x_o, y_o)

2. Euler:

El método de Euler es el más básico y sencillo de los procedimientos usados para encontrar soluciones numéricas aproximadas, a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, siempre que se conozca su condición inicial.

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es la ecuación que relaciona una función desconocida de una sola variable independiente con sus derivadas.



Si la mayor derivada que aparece en la ecuación es de grado uno, entonces se trata de una ecuación diferencial ordinaria de primer grado.

La forma más general de escribir una ecuación de primer grado es:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y))$$

x = x0

y = y0

(Euler Metodo, s.f.)

3. Euler:

El método de Euler consiste en encontrar iterativamente la solución de una ecuación diferencial de primer orden y valores iniciales conocidos para un rango de valores. Partiendo de un valor inicial x0 y avanzando con un paso h, se pueden obtener los valores de la solución de la siguiente manera:

Yk+1 = Yk + h _ f(xk; Yk)

Donde Y es solución de la ecuación diferencial y f es la ecuación diferencial en función de las variables independientes. (Metodos Numericos, s.f.)

1. Método de Runge-Kutta.

Uno de los métodos más utilizados para resolver numéricamente problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales es el método de Runge-Kutta, el cual proporciona un pequeño margen de error con respecto a la solución real del problema.

El método de Runge-Kutta se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales de la forma explícita:

$$\begin{cases} \dfrac{dy(x)}{dx} = f(x,y) \\ y(x_o) = y_o \end{cases} \qquad (1)$$

O en su forma Explícita:

$$f(x,y,\frac{dy}{dx}) = 0 \qquad con \qquad y(x_o) = y_o$$

Y es sumamente útil para casos en los que la solución no puede hallarse por los métodos convencionales (como separación de variables).

El método Runge- Kutta para este problema está dado por la siguiente ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

Para i=0,..., n-1. La solución se da a lo largo del intervalo (xo,xo+hn) , Donde

$$k_1 = h.f(x_i, y_i), \qquad k_2 = h.f\left[x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right]$$
$$k_3 = h.f\left[x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right], \qquad k_4 = h.f\left[x_i + h, y_i + k_3\right]$$

Así, siguiente valor (yi+1) es determinado por el presente valor (yi) más el producto del tamaño del intervalo (h) por una pendiente estimada. La pendiente un promedio ponderado de pendientes:

k1 es la pendiente al principio del intervalo.

k2 es la pendiente en el punto medio del intervalo, usando k1 para determinar el valor de y en el punto xi + h/2.

k3 es otra vez la pendiente del punto medio, pero ahora usando k2 para determinar el valor de y

k4 es la pendiente al final del intervalo, con el valor de y determinado por k3

Promediando las cuatro pendientes, se le asigna mayor peso a las pendientes en el punto medio:

$$pendiente = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

(Ernesto, s.f.)

2. Método de Euler.

El método Runge-Kutta es la forma de los métodos de Runge-Kutta de uso mas común y así mismo más exactos para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales. La solución que ofrece este método, es una tabla de la función solución, con valores de "y" correspondientes a valores específicos de "x".

x	y(x)
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
⁚	⁚
x_n	y_n

Es por esto que uno de los requisitos para este método es especificar el intervalo x.

También se requiere de:

Una ecuación diferencial de primer orden: y'= f(x,y)

La condición inicial, es decir, el valor de y en un punto conocido x0.

Y(x0) = y0

El método de Runge-Kutta de 4º orden consiste en determinar constantes apropiadas de modo que una fórmula como:

$$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4$$

Coincida con un desarrollo de Taylor hasta el término h4, es decir, hasta el quinto término.

Las ecuaciones del método de Runge-Kutta son las siguientes:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Donde:

$$k_1 = hf(x_i, y_i) \qquad k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2) \qquad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

(UAM, s.f.)

3. Método de Euler.

Los métodos de Runge-Kutta son un conjunto de métodos genéricos iterativos, explícitos e implícitos, de resolución numérica de ecuaciones diferenciales

Los métodos de Runge-Kutta (RK) son un conjunto de métodos iterativos (implícitos y explícitos) para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, concretamente, del problema de valor inicial.

Sean:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Una ecuación diferencial ordinaria, con $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donde Ω es un conjunto abierto, junto con la condición de que el valor inicial de f sea

$$(t_0, y_0) \in \Omega.$$

Entonces el método RK (de orden s) tiene la siguiente expresión, en su forma más general:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i,$$

Donde h es el paso por iteración, o lo que es lo mismo, Δt_n entre los sucesivos puntos t_n y t_{n+1}. Los coeficientes k_i

Son términos de aproximación intermedios, evaluados en f de manera local

$$k_i = f\left(t_n + h\,c_i\,, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right) \qquad i = 1, \ldots, s.$$

1. Taylor.

La serie de Taylor es una serie de potencias que se prolonga hasta el infinito, donde cada uno de los sumandos está elevado a una potencia mayor al antecedente.

Cada elemento de la serie de Taylor corresponde a la enésima derivada de la función f evaluada en el punto a, entre la factorial de n n, y todo ello, multiplicado por x-a elevado a la potencia n.

En términos formales o matemáticos, la serie de Taylor tiene la siguiente forma:

$$T = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$T(f,a,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(Economipedia, s.f.)

2. Taylor:

La serie de Taylor es una serie funcional y surge de una ecuación en la cual se puede encontrar una solución aproximada a una función, La serie proporciona una buena forma de aproximar el valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto, para hacer esta aproximación solo se pueden tomar unas cuantas expresiones a criterio del que aplica la serie en número de términos que ha de incluir en la aproximación.

La serie de Taylor se basa en ir haciendo operaciones según una ecuación genera y mientras más operaciones tengan la serie más exacto será el resultado que está buscando.

La serie de Taylor de una función f real o compleja f(x) infinitamente diferenciable en el entorno de un número real o complejo a es la siguiente serie de potencias:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!}(x-a)^N$$

3. Taylor:

La serie de Taylor provee un medio para predecir el valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto.

Teorema de Taylor: Si la función f y sus primeras n+1 derivadas son continuas en un intervalo que contiene a y a x, entonces el valor de la función en un punto x está dado por:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n - R_n$$

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt$$

La expansión en series de Taylor de n-ésimo orden debe ser exacta para un polinomio de n-ésimo orden.

Para otras funciones continuas diferenciables, como las exponenciales o sinusoidales, no se obtiene una estimación exacta mediante un número finito de términos.

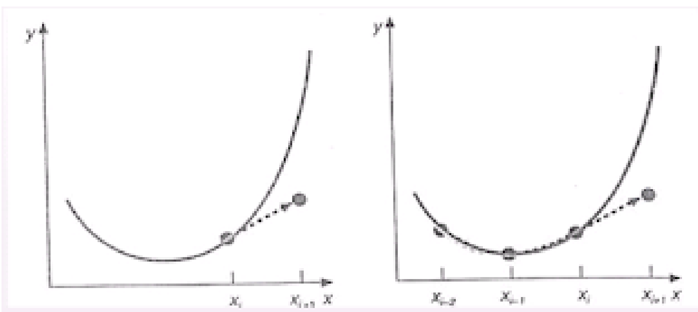
El valor práctico de las series de Taylor radica en el uso de un número finito de términos que darán una aproximación lo suficientemente cercana a la solución verdadera para propósitos prácticos.

(Lopez, s.f.)

6.2 Métodos de pasos múltiples 1:

Los métodos de un paso descritos en las secciones anteriores utilizan información en un solo punto xi para predecir un valor de la variable dependiente yi+1 en un punto futuro xi+1. Procedimientos alternativos, llamados métodos multi paso, se basan en el conocimiento de que una vez empezado el cálculo, se tiene información valiosa de los puntos anteriores y está a nuestra disposición. La curvatura de las líneas que conectan esos valores previos proporciona información con respecto a la trayectoria de la solución. Los métodos multi paso que exploraremos aprovechan esta información para resolver las EDO. Antes de describir las versiones de orden superior, presentaremos un método simple de segundo orden que sirve para demostrar las características generales de los procedimientos multi paso.

Esto lo podemos demostrar mediante las siguientes gráficas.



(Metodos de Pasos Multiples, s.f.)

6.3 Sistemas de ecuaciones diferenciales 1.

Un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de varias ecuaciones diferenciales con varias funciones incógnitas y un conjunto de condiciones de contorno. Una solución del mismo es un conjunto de funciones diferenciables que satisfacen todas y cada una de las ecuaciones del sistema. Según el tipo de ecuaciones diferenciales puede tenerse un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

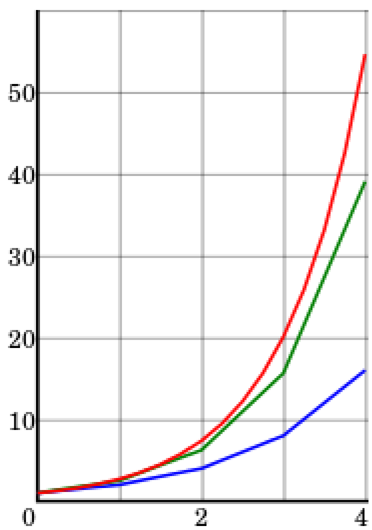
Sistemas de ecuaciones diferenciales 2.

Los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias son procedimientos utilizados para encontrar aproximaciones numéricas a las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Su uso también se conoce como integración numérica, aunque este término a veces se toma para significar el cálculo de una integración.

Muchas ecuaciones diferenciales no pueden resolverse usando funciones típicas.

Sin embargo, a efectos prácticos, como en ingeniería, una aproximación numérica a la solución suele ser suficiente. Los algoritmos estudiados aquí pueden usarse para calcular tal aproximación. Un método alternativo es utilizar técnicas de cálculo infinitesimal para obtener una expansión en serie de la solución.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias se presentan en muchas disciplinas científicas, por ejemplo, en física, química, biología y economía. Además, algunos métodos en ecuaciones diferenciales parciales numéricas convierten una ecuación diferencial parcial en una ecuación diferencial ordinaria, que luego debe resolverse.



6.3 Aplicaciones:

- Aplicación en el teorema de L´Hopital
- Uso de las series de Fourier en el procesamiento digital de señales
- Uso de las series de Taylor y Maclaurin en la aproximación del valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto.
- Estimación de integrales
- Determinación de convergencia y divergencia de series.
- Las ED son de gran importancia en varias áreas de conocimiento, como Fisica, Química, Economía, Ingeniería, Medicina; por la posibilidad de representar fenómenos mediante modelos matemáticos, a saber: crecimiento de poblaciones

- Una sola ecuación diferencial puede servir como modelo matemático de distintos fenómenos como el movimiento de una mesa unida a un resorte o un circuito eléctrico en serie son idénticos a los que se emplean en un sistema vibratorio de resorte y masa.
- Las formas de las ecuaciones diferenciales de segundo orden surgen en el análisis de problemas en muchas y diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

Bibliografía

Economipedia. (s.f.). Obtenido de https://economipedia.com/definiciones/serie-de-taylor.html#:~:text=La%20serie%20de%20Taylor%20es,una%20potencia%20mayor%20al%20antecedente.&text=Para%20entender%20mejor%20la%20serie,tangente%20a%20la%20funci%C3%B3n%20f.

Ernesto. (s.f.). *Analisis Numerico*. Obtenido de https://esimecuanalisisnumerico.wordpress.com/2014/05/06/metodo-numerico-de-runge-kutta/

Euler Metodo. (s.f.). Obtenido de http://www3.fi.mdp.edu.ar/metodos/apuntes/euler%20-%20Rodrigo.pdf

Lopez, D. (s.f.). *SERIES DE TAYLOR Y ERRORES DE TRUNCAMIENTO*. Obtenido de http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/mod/page/view.php?id=24480

Metodos de Pasos Multiples. (s.f.). Obtenido de https://sites.google.com/site/metodos0123/unidad-6-ecuaciones-diferenciales-ordinarias/6-3-metodos-de-pasos-multiples

Metodos Numericos. (s.f.). Obtenido de https://sites.google.com/site/metodosnumericosmecanica/home/unidad-vi/62-mtodos-de-un-paso-mtodo-de-euler-mtodo-de-euler-mejorado-y-mtodo-de-runge-kutta

Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias. (s.f.). Obtenido de https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todos_num%C3%A9ricos_para_ecuaciones_diferenciales_ordinarias

Sistema de ecuaciones lineales. (s.f.). Obtenido de http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Analisis%20matematico/Temas/C11_Sistemas.pdf

UAM. (s.f.). *Metodos Numericos*. Obtenido de http://test.cua.uam.mx/MN/Methods/EcDiferenciales/Runge-Kutta/RungeKutta.php