INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COMITAN

Alumnos:

- Ruedas Velasco Pedro Eduardo__19700073.
- Hernández Méndez Levi Magdiel__19700039.
- Molina Cifuentes Adriel David__19700061.

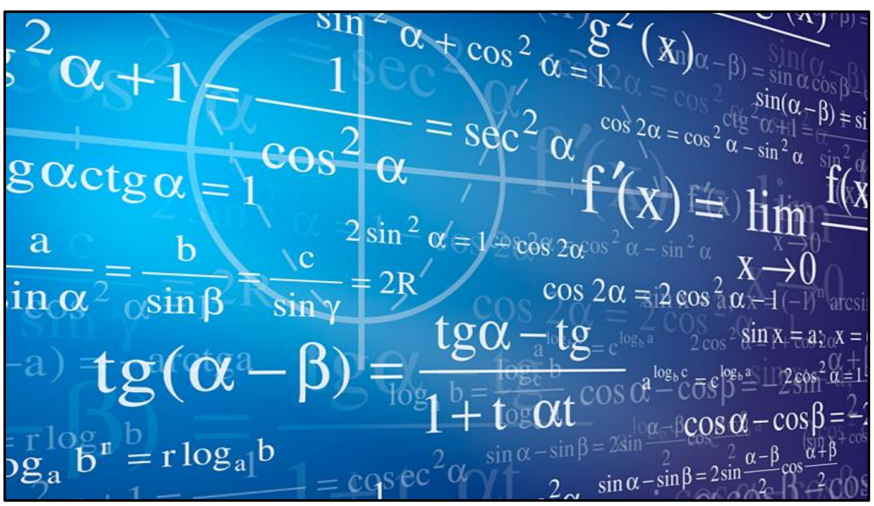
Docente: Vera Guillen José Flavio.

Materia: Métodos Numéricos.

Semestre: Cuarto **Grupo:** “A”

Actividad: Resumen unidad 5.

Comitán de Domínguez Chiapas, a 03 de Junio del 2021.



“INTRODUCCIÓN”.

Es frecuente la necesidad de buscar funciones apropiadas a partir de datos que proceden de una población en la que se ha realizado un registro de informaciones o estudio estadístico, para que cumplan determinadas condiciones que nos interesen, como que sean continuas, derivables, etc. Con este objetivo trataremos de plantear distintos procedimientos para realizar la búsqueda de estas funciones, bien buscando una función que pase exactamente por una serie de puntos (función de interpolación). La finalidad del cálculo de las funciones de interpolación se centra en la necesidad de obtener valores intermedios (INTERPOLACIÓN) o de valores fuera del intervalo para el que se dispone de datos (EXTRAPOLACIÓN).

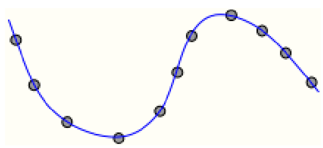
El desarrollo acelerado de la computación ha permitido el surgimiento de software cada vez más especializado en áreas del interés científico. Desde el surgimiento de software como ORIGIN desarrollado por la empresa SCIENTEC que permite el procesamiento y análisis de grandes cantidades de información, hasta software como MATLAB enfocado al desarrollo de programas científicos más avanzados. Estos dos softwares son solo un par de ejemplos de que cada vez es más necesario el desarrollo de software que auxilie el trabajo científico que se desarrolla hoy en día. Intermedio a estas dos grandes empresas de desarrollo de software especializado, existen diversos esfuerzos de filosofía libre, en este caso nos referimos a SCILAB, desarrollado y lanzado al mundo de la computación por el reconocido instituto francés de investigación INRIA en los años 80.

Dicha herramienta nace de la necesidad de contar con software científico y técnico bajo un esquema de filosofía de código abierto y gratuito, lo que lo hace accesible a todo público en general.

MÉTODO DE INTERPOLACIÓN Y REGRESIÓN CLÁSICOS.

5. Interpolación y Ajuste de funciones.

La aproximación o ajuste busca predecir una tendencia o el comportamiento de unos datos de acuerdo con un modelo establecido; la interpolación que la función, o funciones, a que de lugar incluya todos los datos conocidos, habitualmente buenos. h i j d e f g a b c 10 8 7 9465 123 5/58 La interpolación tiene como objeto la obtención de nuevos puntos de una sucesión o conjunto de ellos que obedece a algún patrón determinado. Por lo general busca obtener una función que se verifique en todos los puntos conocidos y que permita calcular tantos nuevos como se desee.



La aproximación busca una función que de resultados tan cercanos como sea posible a los de otra, o a un conjunto de datos, no necesariamente “pasando” por, o cumpliéndose para todos ellos. También, aproximar una función a otra para evitar tener que evaluar su “complicada” expresión; por ejemplo la de la distribución normal estándar.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy.$$

En muchos casos, obtener loa parámetros de una función teórica preestablecida que mejor se ajusta a puntos empíricos (ajustes por mínimos cuadrados). También, poder derivar o integrar valores dados en forma de tabla, hacer pasar por datos discretos, o cerca de ellos, funciones continuas y derivables.

5.1 POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN DE NEWTON.

Hay ocasiones en las que resulta útil construir varios polinomios aproximantes P1(x), P2(x),..., PN(x) y, después, elegir el más adecuado a nuestras necesidades. Si usamos los polinomios de interpolación de LaGrange, uno de los inconvenientes es que no se pueden utilizar los círculos realizados en la construcción de PN-1(x) para la de PN(x); cada polinomio debe construirse individualmente y para calcular polinomios de grado elevado es necesario hacer muchas operaciones. Vamos a seguir ahora un camino de construcción distinto, en el cual los polinomios de interpolación, que se llamarán de Newton, se calculan mediante un esquema recursivo:

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= a_0 + a_1(x-x_0)\\
P_2(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)\\
P_3(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\
&\cdots\\
P_N(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) +\\
&\quad + \cdots + a_N(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{N-1})
\end{aligned}
$$

El polinomio PN(x) se obtiene a partir de PN-1(x) usando la recurrencia:

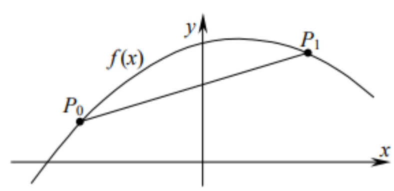
$$P_N = P_{N-1}(x) + a_N(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{N-1})$$

El polinomio PN(x) calculado así es el polinomio de interpolación de Newton.

5.2 POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Interpolación significa estimar el valor desconocido de una función en un punto, tomando una medida ponderada de sus valores conocidos en puntos cercanos al dado. En la interpolación lineal se utiliza un segmento rectilíneo que pasa por dos puntos que se conocen. La pendiente de la recta que pasa por dos puntos (x0,y0) y (x1,y1) viene dada por m = (y1-y0) /(x1-x0), y la ecuación de la misma es:

$$y = P(x) = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$



El matemático francés Joseph Louis Lagrange llegó a este mismo polinomio usando un método ligeramente distinto. Si escribimos

$$y = P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad L_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{y} \quad L_{1,1}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$L_{1,0}(x_0) = 1$, $L_{1,0}(x_1) = 0$, $L_{1,1}(x_0) = 0$ y $L_{1,1}(x_1) = 1$;

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} y_k L_{1,k}(x) \qquad P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} y_k L_{N,k}(x) \qquad P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} y_k L_{N,k}(x)$$

$$L_{N,k}(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_N)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_N)}$$

$$L_{N,k}(x_j) = 1 \text{ si } j = k \quad \text{y} \quad L_{N,k}(x_j) = 0 \text{ si } j \neq k$$

$$L_{N,k}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N} (x - x_j) \Big/ \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N} (x_k - x_j)$$

5.3 INTERPOLACIÓN SEGMENTADA

Esta interpolación se llama interpolación segmentaria o interpolación por splines. La idea central es que en vez de usar un solo polinomio para interpolar los datos, podemos usar segmentos de polinomios y unirlos adecuadamente para formar nuestra interpolación. Cabe mencionar que entre todas, las splines cúbicas han resultado ser las más adecuadas para aplicaciones como la mencionada anteriormente. Así pues, podemos decir de manera informal, que una funcion spline está formada por varios polinomios, cada uno definido en un intervalo y que se unen entre si bajo ciertas condiciones de continuidad.

Cabe mencionar que entre todas, las splines cúbicas han resultado ser las más adecuadas para aplicaciones como la mencionada anteriormente. Así pues, podemos decir de manera informal, que una funcion spline está formada por varios polinomios, cada uno definido en un intervalo y que se unen entre si bajo ciertas condiciones de continuidad.

- Interpolación Segmentaria Lineal

Este es el caso más sencillo. En él, vamos a interpolar una función f(x) de la que se nos dan un número N de pares (x,f(x)) por los que tendrá que pasar nuestra función polinómica P(x). Esta serie de funciones nuestras van a ser lineales, esto es, con grado 1: de la forma P(x) = ax + b. Definiremos una de estas funciones por cada par de puntos adyacentes, hasta un total de (N-1) funciones, haciéndolas pasar obligatoriamente por los puntos que van a determinarlas, es decir, la función P(x) será el conjunto de segmentos que unen nodos consecutivos; es por ello que nuestra función será continua en dichos puntos, pero no derivable en general.

- Interpolación Segmentaria Cuadrática

En este caso, los polinomios P(x) a través de los que construimos el Spline tienen grado 2. Esto quiere decir, que va a tener la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$

Como en la interpolación segmentaria lineal, vamos a tener N-1 ecuaciones (donde N son los puntos sobre los que se define la función). La interpolación cuadrática nos va a asegurar que la función que nosotros generemos a trozos con los distintos P(x) va a ser continua, ya que para sacar las condiciones que ajusten el polinomio, vamos a determinar cómo condiciones:

Que las partes de la función a trozos P(x) pasen por ese punto. Es decir, que las dos Pn(x) que rodean al f(x) que queremos aproximar, sean igual a f(x) en cada uno de estos puntos.

Que la derivada en un punto siempre coincida para ambos "lados" de la función definida a trozos que pasa por tal punto común.

Esto sin embargo no es suficiente, y necesitamos una condición más. ¿Por qué?. Tenemos 3 incógnitas por cada P(x). En un caso sencillo con f(x) definida en tres puntos y dos ecuaciones P(x) para aproximarla, vamos a tener seis incógnitas en total. Para resolver esto necesitaríamos seis ecuaciones, pero vamos a tener tan sólo cinco: cuatro que igualan el P(x) con el valor de f(x) en ese punto (dos por cada intervalo), y la quinta al igualar la derivada en el punto común a las dos P(x).

Se necesita una sexta ecuación,¿de dónde se extrae? Esto suele hacerse con el valor de la derivada en algún punto, al que se fuerza uno de los P(x).

- <u>Interpolación Segmentaria Cúbica</u>

En este caso, cada polinomio P(x) a través del que construimos los Splines en [m,n] tiene grado 3. Esto quiere decir, que va a tener la forma $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

En este caso vamos a tener cuatro variables por cada intervalo (a,b,c,d), y una nueva condición para cada punto común a dos intervalos, respecto a la derivada segunda:

Que las partes de la función a trozos P(x) pasen por ese punto. Es decir, que las dos Pn(x) que rodean al f(x) que queremos aproximar, sean igual a f(x) en cada uno de estos puntos.

Que la derivada en un punto siempre coincida para ambos "lados" de la función definida a trozos que pasa por tal punto común.

Que la derivada segunda en un punto siempre coincida para ambos "lados" de la función definida a trozos que pasa por tal punto común.

Como puede deducirse al compararlo con el caso de splines cuadráticos, ahora no nos va a faltar una sino dos ecuaciones (condiciones) para el número de incógnitas que tenemos.

La forma de solucionar esto, determina el carácter de los splines cúbicos. Así, podemos usar:

Splines cúbicos naturales: La forma más típica. La derivada segunda de P se hace 0 para el primer y último punto sobre el que está definido el conjunto de Splines, esto son, los puntos m y n en el intervalo [m,n].

Dar los valores de la derivada segunda de m y n de forma "manual", en el conjunto de splines definidos en el intervalo [m,n].

Hacer iguales los valores de la derivada segunda de m y n en el conjunto de splines definidos en el intervalo [m,n]

5.4 Correlación y Regresión:

Correlación: El coeficiente de correlación es la medida específica que cuantifica la intensidad de la relación lineal entre dos variables en un análisis de correlación. En los informes de correlación, este coeficiente se simboliza con la r.

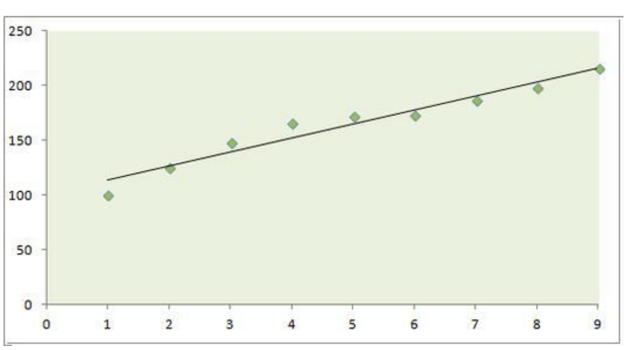
Para dos variables, la fórmula compara la distancia de cada dato puntual respecto a la media de la variable y utiliza esta comparación para decirnos hasta qué punto la relación entre las variables se ajusta a una línea imaginaria trazada entre los datos.

El coeficiente de correlación de la muestra puede representarse con una fórmula:

$$r = \frac{\sum[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 * \Sigma(y_i - \bar{y})^2}}$$

Regresión: La regresión lineal es una técnica que permite cuantificar la relación que puede ser observada cuando se grafica un diagrama de puntos dispersos correspondientes a dos variables, cuya tendencia general es rectilínea mediante una ecuación “del mejor ajuste” de la forma: **Y= mX+b**

Donde **m** y **b** son los parámetros de la recta: **m** es la pendiente de la recta y **b** es la ordenada al origen.
La regresión es empleada para modelos ópticos para patrones de demanda con tendencia (creciente o decreciente), es decir, patrones que presenten una relación de linealidad entre la demanda y el tiempo.



5.5 Mínimos cuadrados.

Es un procedimiento de análisis numérico en la que, dados un conjunto de datos (pares ordenados y familia de funciones), se intenta determinar la función continua que mejor se aproxime a los datos, proporcionando una demostración visual de la relación entre los puntos de los mismos. En su forma más simple, busca minimizar la suma de cuadrados de las diferencias ordenadas (llamadas residuos) entre los puntos generados por la función y los correspondientes datos.

Este método se utiliza comúnmente para analizar una serie de datos que se obtengan de algún estudio, con el fin de expresar su comportamiento de manera lineal y así minimizar los errores de la data tomada.

Su expresión general se basa en la ecuación de una recta y = mx + b. Donde m es la pendiente y b el punto de corte, y vienen expresadas de la siguiente manera:

$$m = \frac{n \cdot \Sigma(x \cdot y) - \Sigma x \cdot \Sigma y}{n \cdot \Sigma x^2 - |\Sigma x|^2}$$

$$b = \frac{\Sigma y \cdot \Sigma x^2 - \Sigma x \cdot \Sigma(x \cdot y)}{n \cdot \Sigma x^2 - |\Sigma x|^2}$$

5. 6 Problemas de aplicación

Se puede utilizar en el cálculo de estructuras, instalaciones eléctricas, hidráulicas y sanitarias, en cálculos de carreteras, topografía y hasta en diseño de las estructuras, no en todos los casos pero principalmente cuando hay mala toma de datos o haya datos faltantes.

En el subcampo matemático del análisis numérico, un spline es una curva diferenciable definida en porciones mediante polinomios.

En los problemas de interpolación, se utiliza a menudo la interpolación mediante splines porque da lugar a resultados similares requiriendo solamente el uso de polinomios de bajo grado, evitando así las oscilaciones, indeseables en la mayoría de las aplicaciones, encontradas al interpolar mediante polinomios de grado elevado.

Para el ajuste de curvas, los splines se utilizan para aproximar formas complicadas. La simplicidad de la representación y la facilidad de cómputo de los splines los hacen populares para la representación de curvas en informática, particularmente en el terreno de los gráficos por ordenado. Tenemos los siguientes 3:

- Interpolación Segmentaria Lineal
- Interpolación Segmentaria Cuadrática
- Interpolación Segmentaria Cúbica

Bibliografía

calameo. (s.f.). *Coeficientes de Correlacion*. Obtenido de https://es.calameo.com/read/000285940acd8e6ef0c2b

Rojas, M. B. (s.f.). *Regresión y Correlacion*. Obtenido de https://hesiquiogm.files.wordpress.com/2016/09/regresic3b3n-y-correlacic3b3n.pdf

Bogota, U. P. (3 de 2 de 2015). *Matemáticas de Especialidad–Ingeniería Eléctrica*. Obtenido de http://www.jldelafuenteoconnor.es/Clase_interpolacion_aproximacion_funciones.pdf

Anaya, G. (2018). Obtenido de Unidad V: Interpolación: http://itpn.mx/recursosisc/4semestre/metodosnumericos/Unidad%20V.pdf

Gutiérrez, I. T. (s.f.). *Metodos Numericos*. Obtenido de https://sites.google.com/site/metalmetnumericos/home/unidad-4/4-2-polinomios-de-interpolacion

Investigacion metodos numericos Unidad 4. (2 de 2 de 2015). Obtenido de https://mesmer115.blogspot.com/

López, R. A. (9 de 12 de 2011). *metsistec*. Obtenido de https://sites.google.com/site/metsistec/unidad-4-modificar-tablas-de-datos-i

Pablo. (24 de 9 de 2013). *Metodos Numericos*. Obtenido de http://www3.fi.mdp.edu.ar/metodos/teorias/MN%20-%202013b%20-%205%20-%20interpolacion%20-%20v2.pdf