Листок №4

Кац Лев

4 ноября 2020 г.

A4 $\Diamond$ 1

Перепишем нашу рациональную функцию:

$$f/g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(x-a_i)}.$$

По предложению 4.1 α_i – многочлен (в нашем случае константа), что класс в кольце вычетов $\mathbb{K}[x]/(x-a_i)$ равен $[f]\cdot[g/(x-a_i)]^{-1}$.
Заметим, что $\forall\, q \in \mathbb{K}[x]\ [q]_{(x-a_i)} = [q(a_i)]_{(x-a_i)}$.
Заметим еще следующее свойство производной:

$$[g'] = \left[(x-a_i)\left(\frac{g}{(x-a_i)}\right)' + (x-a_i)'\frac{g}{(x-a_i)}\right] = \left[\frac{g}{(x-a_i)}\right] = [g'(a_i)]$$

Отсюда из единственности $\alpha_i = f(a_i)/g'(a_i)$.

A4 $\Diamond$ 2

а)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t^2-3t+1} &= \frac{1}{(2t-1)(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{2}{2t-1} = \\ &= -(1+t+t^2+\ldots) + 2(1+2t+4t^2+\ldots) = \sum_{k\geq 0}(2^{k+1}-1)t^k\end{aligned}$$

б)

$$
\begin{aligned}
(t^4+2t^3-7t^2-20t-12)^{-1} = -\frac{1}{4(t+1)} + \frac{6}{25(t+2)} + \frac{1}{5(t+2)^2} + \frac{1}{100(t-3)} = \\
= -\frac{1}{4}(1-t+t^2-...) + \frac{3}{25}(1-t/2+t^2/4-...) - \\
-\frac{1}{300}(1+t/3+t^2/9+...) + +\frac{1}{20}\sum_{k\geq 0}\binom{k+1}{1}\left(-\frac{t}{2}\right)^k = \\
= \sum_{k\geq 0}\left[\frac{-1}{4}(-1)^k + \frac{3}{25}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{300}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{20}(k+1)\right]t^k
\end{aligned}
$$

в)

$$\sqrt[3]{1+2t} = (1+(2t))^{1/3} = \sum_{k\geq 0} 2^k \binom{1/3}{k} x^k$$

г)

$$\sqrt[3]{1-3t} = (1-(3t))^{-1/3} = \sum_{k\geq 0}(-3)^k \binom{-1/3}{k} x^k$$

A4 ◊ 3

Подберем коэффициенты b_0, b_1 ряда $(b_0x+b_1)/(1-2x+x^2) = (b_0x+b_1)/(x-1)^2$, чтобы получить $a_0 = 1, a_1 = -1$. Это $b_0 = 3, b_1 = 1$.
Разложим рациональную функцию на простейшие дроби и получим выражения для членов ряда:

$$\frac{b_0x+b_1}{(1-x)^2} = -\frac{3}{(x-1)} - \frac{2}{(x-1)^2} = 3\sum_{k\geq 0} x^k - 2\sum_{k\geq 0}\binom{k+1}{1}x^k$$

Отсюда выражение для очередного члена последовательности:

$$a_k = 3 - 2\binom{k+1}{1} = 3 - 2(k+1)$$

A4 ◊ 4

От противного: пусть $\exp x \in \mathbb{Q}[x]$. Тогда начиная с некоторого m для коэффициентов ряда z_k при $k \geq m$ будет выполняться рекуррентное соотношение:

$$z_k = a_1 z_{k-1} + ... + a_n z_{k-n} = \frac{1}{k!} = \sum \alpha_i^k \varphi(k) \equiv f(k),$$

Что невозможно, поскольку $\lim_{k\to\infty} = 1/(k! f(k)) = 0 \neq 1$.

A4 ◊ 5

Заметим, что последовательность коэффициентов ряда, состоящего из 0 и 1, соответствующая любой рациональной функции будет начиная с какого-то номера периодической. Почему? Возьмем рациональную функцию. Ей соответствует ряд, коэффициенты которого удовлетворяют некоторому рекуррентному соотношению $z_k = \alpha_1 z_{k-1} + ... + \alpha_n z_{k-n}$ (во всяком случае с некоторой позиции). Тогда каждый следующий коэффициент выражается через n предыдущих. Поскольку есть только конечное количество последовательностей длины n из нулей и единиц, неизбежно случится повторение. А тогда мы получим периодическую последовательность (во всяком случае с некоторого номера).
Таким образом, нужно построить ряд, последовательность членов которого не содержит никаких периодов. Приведем пример:

$$1 + 0 \cdot q^1 + 0 \cdot q^2 + 1 \cdot q^3 + 1 \cdot q^4 + 1 \cdot q^5 + 0 \cdot q^6 + 0 \cdot q^7 + 0 \cdot q^8 + 0 \cdot q^9 + ...$$

то есть 1 единица, 2 нуля, 3 единицы, 4 нуля, ...

A4 ◊ 7

1.

Поставим в однозначное соответствие каждой диаграмме Юнга из $\leq m$ строк веса n "транспонированную"диаграмму такого же веса, любого числа строк, но в каждой из них не более m "квадратиков то есть мы нашу диаграмму повернули на 90 градусов и отразили от горизонтальной оси, чтобы получилась корректная другая диаграмма.
Заметим, что полученные диаграммы делятся на два непересекающихся множества: те, у которых в каждой строке не более $m-1$ квадратиков (их $p_{m-1}(n)$) и те, у которых в первой строке ровно m квадратиков (их $p_m(n-m)$). Тогда:

$$p_m(n) = p_{m-1}(n) + p_m(n-m)$$

2.

Используя подход "транспонированных"диаграмм из первого пункта, попробуем сконструировать производящую функцию. Итак, вспомним, что чтобы построить такую диаграмму нам нужно взять какое-то количество (возможно нулевой) строк длины 1, какое-то количество строк длины 2, и так далее до m, чтобы сумма длин была равна весу n. То есть мы хотим посчитать количество наборов α_i, что $\alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + m\alpha_m = n$. Рассмотрим следующее произведение рядов:

$$(1+q+q^2+...) \cdot (1+q^2+q^4+...) \cdot ... \cdot (1+q^m+...) = \frac{1}{(1-q)\cdot(1-q^2)\cdot ... \cdot(1-q^m)}$$

Посмотрим на n коэффициент. Он как раз является искомым количеством наборов α_i:

$$\frac{1}{(1-q)\cdot(1-q^2)\cdot\ldots\cdot(1-q^m)} = \sum_{n\geq 0} p_m(n)q^n$$