Листок №1

Кац Лев

28 октября 2020 г.

В данном документе несколько задач. Они упорядочены, задачи нумеруются, как влистке, и я пошлю этот документ в каждую из задач, которая здесь содержится. Это не должно как-то существенно повлиять на размер документа. Надеюсь, это тоже будет удобно.

A1 ◊ 1

Наше множество A состоит из n элементов, каждый из которых можно независимо либо взять, либо не взять (2 варианта), получая различные подмножества. Таким образом получаем $|2^A| = 2^n$

A1 ◊ 2

$A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ – элементы A, которые принадлежат обоим множествам; Нельзя, если мы говорим о пересечении или объединении множеств, которые были выражены путем пересечений и дополнений из A и B, так как в результате любое такое множество будет содержать $A \cap B$, что можно доказать например индукцией по количеству членов в таком выражении.

A1 ◊ 3

Рассмотрим сразу наиболее общий пункт – пункт д. Итак, пусть $\sum \beta_k = n$. Пусть теперь все буквы будут разными. Тогда будет $n!$ вариантов перестановок. В нашем же случае некоторые будут повторяться. Какие? Те, в которых местами меняются местами только одинаковые буквы. Тогда ответ

$$\frac{n!}{\prod \beta_k!} = \frac{(\sum \beta_k)!}{\prod \beta_k!},$$

что вообще говоря не случайно является мультиномиальным коэффициентом

$$\binom{n}{\beta_1, ..., \beta_m}$$

A1 $\diamondsuit$ 4

Рассмотрим сразу наиболее общий пункт – пункт г. Какие слагаемые будут в $(a_1+...+a_m)^n$, если раскрыть скобки? Там будут все произвения $a_1^{\beta_1}\cdot...\cdot a_m^{\beta_m}$, что $\beta_1+...+\beta_m = n$, $\beta_k \geq 0$. Если привести подобные слагаемые, какой коэффициент будет перед каждым таким слагаемым? Введем обозначение:

$$\binom{n}{\beta_1, ..., \beta_m} := \frac{n!}{\prod \beta_k!}$$

По пункту A1 $\diamondsuit$ 3 д это количество различных слов, полученных путем перестановок букв в слове длины n, где некоторые совпадают. Отождествим слово $a_1a_2...a_m$ и произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_m$. У нас произведение $(a_1 + ... + a_m) \cdot ... \cdot (a_1 + ... + a_m)$. Нам нужно выбрать из β_k скобок слагаемое a_k. Запишем слово, которое получится, если вместо каждой скобки записать то слагаемое, которое мы выбрали. Это будет какая-то перестановка слова $a_1^{\beta_1}...a_m^{\beta_m}$. Более того, все эти перестановки возможны и каждая будет использоваться ровно один раз. Таким образом,

$$(a_1 + ... + a_m)^n = \sum_{\beta_1+...+\beta_k=n,\ \beta_i\ \geq 0} \binom{n}{\beta_1, ..., \beta_m}$$

A1 $\diamondsuit$ 5

Есть ли у нас коммутативность? Считаются ли одинаковыми одночлены $x_1 \cdot x_2$, $x_2 \cdot x_1$? Будем считать, что являются.

а)

Обратимся к задаче A1 $\diamondsuit$ 9 б. Итак, нам надо подобрать такие степени $m_i \geq 0$, что $m_1 + ... + m_n = d$. Это можно сделать $\binom{d+n-1}{n-1}$ способами.

б)

А теперь давайте посмотрим на наш одночлен полной степени $\leq d$ немного иначе:

$$x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot ... \cdot x_n^{m_n} = 1^{d-\sum m_i} \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot ... \cdot x_n^{m_n} := 1^{m_0} \cdot x_2^{m_2} \cdot ... \cdot x_n^{m_n}$$

Теперь мы считаем количество способов решить уравнение $m_0+m_1+...+m_n = d$. Это $\binom{d+n}{n}$

A1 $\diamondsuit$ 6

Одним из результатов номера A1 $\diamondsuit$ 3 является то, что это количество различных слов, которые можно получить перестановками букв из слова
$\underbrace{a_1...a_1}_{100 \text{ раз}}\underbrace{a_2...a_2}_{100 \text{ раз}}...\underbrace{a_{10}...a_{10}}_{100 \text{ раз}}$, а это число является целым.

A1 $\diamondsuit$ 7

Выберем k элементов первого множества, которые перейдут в 1 элемент. Остальные перейдут в 2. Запишем количество способов сделать это:

$$\binom{n}{k}$$

Нам нельзя, чтобы k было равно 0, 1, 4, 5, потому что иначе для какого-то из двух элементов не будет прообраза или он будет только один. Останется

$$\sum_{k=2}^{3} \binom{5}{k} = 2^5 - 2 \cdot (5+1) = 32 - 12 = 20$$

A1 $\diamondsuit$ 8

а)

$$n^m$$

б)

Должно быть $m = n$, тогда это количество перестановок, то есть $m!$

в)

Выберем для каждого из наших m элементов $\{1, ..., m\}$ различные образы, чтобы они возрастали. Для этого достаточно выбрать m-элементное подмножество $\{1, ...n\}$. Это можно сделать $\binom{n}{m}$ способами.

г)

Нужно, чтобы $n \geq m$. Выберем m-элементное подмножество и биекцию туда. Это $\binom{n}{m}m!$ способов.

д)

Это число сочетаний с повторениями $\overline{C}_n^m = \binom{n+m-1}{m}$

е)

Закодируем наше неубывающее отображение строкой из $n + m - 1$ элементов: n нулей, разделенные $m - 1$ единицами – перегородками. Элементы до первой перегородки перейдут в 1, до второй – в 2, и т.д. Тогда надо разместить в $n - 1$ возможную позицию $m - 1$ перегородку. Такое отображение будет сюръективным неубывающим. Это можно сделать $\binom{n-1}{m-1}$ способами.

ж*)

Давайте расмотрим множества отображений $F_i \subseteq \{1..n\}^{\{1..m\}}$, такое, что $\forall f \in F_i$ $i \notin E(f)$, где $E(f)$ – множество значений. Заметим, что $|F_i| = (n-1)^m$, $|F_{j_1} \cap F_{j_2} \cap ... \cap F_{j_k}| = (n-k)^m$, если все индексы j_i различны. Обозначим искомое количество как $f(m,n)$. Тогда по формуле включения-исключения:

$$f(m,\, n) = n^m - \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}(n-i)^m = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m$$

A1 ♢ 9

а)

$$\underbrace{(1+...+1)+(1+...+1)+(1+...+1)}_{m \text{ скобок}} = n$$

Таким образом, нам нужно для каждой единицы выбрать скобку, а это сюрьективное неубывающее отображение. Таких $\binom{n-1}{m-1}$ штук.

б)

Сведем к пункту а. Для этого сделаем замену $x'_k = x_k + 1$. Теперь мы решаем в натуральных числах уравнение

$$x'_1 + ... + x'_m = n + m$$

У этого уравнения $\binom{n+m-1}{m-1}$ решений.

A1 ♢ 10

а)

Нетрудно их просто все перечислить:

1. $(1,1,1,1,1,1)$
2. $(2,1,1,1,1,0)$
3. $(2,2,1,1,0,0)$
4. $(2,2,2,0,0,0)$
5. $(3,1,1,1,0,0)$
6. $(3,2,1,0,0,0)$
7. $(3,3,0,0,0,0)$
8. $(4,1,1,0,0,0)$
9. $(4,2,0,0,0,0)$
10. $(5,1,0,0,0,0)$
11. $(6,0,0,0,0,0)$

б)

Аналогично:

1. $(3,2,2)$
2. $(3,3,1)$
3. $(4,2,1)$
4. $(4,3,0)$
5. $(5,1,1)$
6. $(5,2,0)$
7. $(6,1,0)$
8. $(7,0,0)$

в)

К сожалению, сегодня я не обладаю инфорацией о точном значении p и q, так что придется искать какое-то другое решение.
Итак, у нас p строк, в каждой из которых число от 0 до q. То есть нам нужно построить какое-то отображение из номера строки в $\{0, ..., q\}$, которое было бы еще и невозрастающим (но необязательно сюрьективным). А это практически задача A1 $\Diamond$ 8 д. Итак, ответ $\overline{C}_{q+1}^{p}$.

A1 $\Diamond$ 11

Каждый раз мы будем пытаться свести задачу к предыдущим

а)

Это очевидно равносильно количеству отображений $\{1, ..., 7\} \to \{1, ..., 4\}$.
$\left|\{1, ..., 4\}^{\{1,...,7\}}\right| = 4^7$.

б)

Нам нужно распределить по разным чашкам одинаковый сахар. Пусть в кажой чашке $x_i \geq 0$ кусков сахара. Тогда $x_1+x_2+x_3+x_4 = 10$. Нужно найти количество целых неотрицательных решений. Это по A1 $\Diamond$ 9 б $\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}$.

в)

Итак, у нас одинаковый сахар который должен весь оказаться в одинаковых стаканах. Поскольку стаканы одинаковые, нам не важна их перестановка. Давайте сделаем так, чтобы в первом стакане оказалось больше всего сахара, во втором – не меньше, чем в первом и т.д. Таким образом получим количество диаграмм Юнга веса 10, в которых не более 4 строк. Их 23:

1. $(3,3,2,2)$
2. $(3,3,3,1)$
3. $(4,2,2,2)$
4. $(4,3,2,1)$
5. $(4,3,3,0)$
6. $(4,4,1,1)$
7. $(4,4,2,0)$
8. $(5,2,2,1)$
9. $(5,3,1,1)$
10. $(5,3,2,0)$
11. $(5,4,1,0)$
12. $(5,5,0,0)$
13. $(6,2,1,1)$
14. $(6,2,2,0)$
15. $(6,3,1,0)$
16. $(6,4,0,0)$

17. $(7, 1, 1, 1)$ 19. $(7, 3, 0, 0)$ 21. $(8, 2, 0, 0)$ 23. $(10, 0, 0, 0)$

18. $(7, 2, 1, 0)$ 20. $(8, 1, 1, 0)$ 22. $(9, 1, 0, 0)$

г)

Здесь у нас разные соломинки, каждой из которых надо присвоить какой-то из одинаковых стаканов. Пусть у нас m соломинок, которые надо разложить в n стаканов (но некоторые могут быть пустыми). Решим сначала немного другую задачу.

Пусть нам надо сложить m соломинок в k стаканов, но чтобы ни один стакан не оказался пустым. Это можно сделать $f(m,k)/k!$ способами (см A1 $\Diamond$ 8 ж). То есть мы взяли количество сюрьективных отображений и поделили на количество перестановок стаканов.

Тогда искомое количество способов:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(m,k)}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^m}{k!}$$